ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2003
Seria: GÓRNICTWO z. 257 Nr kol. 1599

Władysław ZAPAŁA
Politechnika Śląska

DEFINICJA I PODSTAWOWE WŁASNOŚCI DYSKRETNEGO OKNA CZASOWEGO

Streszczenie. W referacie przedstawiono nowe dyskretne okno czasowe. Okno zostało wyprowadzone ze wzorów rekurencyjnych służących do projektowania cyfrowych filtrów różniczkujących dla pierwszej pochodnej funkcji. Omówiono podstawowe własności dyskretnego okna czasowego i przedstawiono przykłady zastosowań tego okna do projektowania filtrów cyfrowych o skończonej odpowiedzi impulsowej.

DEFINITION AND BASIC PROPERTIES OF DISCRETE TIME WINDOW

Summary. New discrete time window has been presented in the paper. The window has been derived basing on recursive calculations of first order digital differentiators. Basic properties of this window have been discussed as well as examples of application of this window for designing digital FIR filters have been presented.

1. Wprowadzenie

Okna czasowe stosowane są podczas cyfrowego przetwarzania sygnałów. Głównym przeznaczeniem okien czasowych jest pobranie próbki o skończonej liczności sygnału o nieograniczonym czasie trwania. Okna czasowe wykorzystywane są także do projektowania filtrów cyfrowych o skończonej odpowiedzi impulsowej metodą okienkowania. W literaturze znanych jest kilkadziesiąt okien czasowych. Okna te skonstruowane są w postaci iloczynu pewnej funkcji czasu i okna prostokątnego. W artykule przedstawiono nowe okno czasowe. Oryginalność okna polega na tym, że opisane jest ono za pomocą dyskretnej funkcji czasu, która nie wymaga pomnożenia przez okno prostokątne.

2. Wyprowadzenie równań opisujących dyskretne okno czasowe

Równania opisujące dyskretne okno czasowe wyprowadzone zostaną w oparciu o teorię przedstawioną w poprzednich pracach autora [4], [5], a w szczególności na podstawie rekurencyjnej metody projektowania cyfrowych filtrów różniczkujących [6].

2.1. Dyskretne okno czasowe o nieparzystej długości okna

W przypadku gdy długość M filtru cyfrowego dla pierwszej pochodnej funkcji jest liczbą nieparzystą M=2k+1, k=0, 1, 2, 3, ... , filtr cyfrowy ma następującą postać:

$$\frac{df(t)}{dt} \approx \frac{1}{T}\cdot[-\sum_{n=1}^{k} a_n^{(1,k)}\cdot f(t-nT) + a_0^{(1,k)}\cdot f(t) + \sum_{n=1}^{k} a_n^{(1,k)}\cdot f(t+nT)] \tag{1}$$

gdzie:

f(t) - funkcja czasu ciągłego, która spełnia warunki rozwinięcia w szereg Taylora,

$a_n^{(1,k)}$ - współczynniki filtru cyfrowego dla pierwszej pochodnej funkcji,

T - okres próbkowania.

Współczynniki $a_n^{(1,k)}$ wyznacza się rekurencyjnie w następujący sposób [5], [6]

$$a_1^{(1,1)} = \frac{1}{2} \tag{2}$$

$$a_n^{(1,k)} = a_n^{(1,k-1)}\cdot\frac{k}{k-n}\cdot\frac{k}{k+n} \qquad \text{dla } k \geq 2,\ n=1, 2, \dots, k-1 \tag{3}$$

$$a_{n=k}^{(1,k)} = a_n^{(1,n)} = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n!)^2}{n\cdot(2n)!} \qquad \text{dla } n=k \tag{4}$$

$$a_0^{(1,k)} = 0 \tag{5}$$

Z przedstawionych powyżej obliczeń rekurencyjnych wynika, że dowolny współczynnik filtru cyfrowego dla pierwszej pochodnej funkcji można obliczyć ze wzoru

$$a_n^{(1,k)} = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n!)^2}{n\cdot(2n)!}\cdot\prod_{i=n+1}^{k}\frac{i}{i-n}\cdot\frac{i}{i+n} \qquad k=2, 3, \dots,\ n=1, 2, 3, \dots, \tag{6}$$

Jeżeli obliczenia będą wykonywane dla k dążącego do nieskończoności, to współczynniki filtru dążą do następującej granicy:

$$a_n^{(1,\infty)} = \lim_{k\to\infty} a_n^{(1,k)} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \tag{7}$$

Dyskretne okno czasowe o długości M=2k+1 definiuję w następujący sposób:

$$a_n^{(1,k)} = a_n^{(1,\infty)} \cdot w_n^{(2k+1)} \tag{8}$$

gdzie:

$w_n^{(2k+1)}$ - dyskretne okno czasowe o długości M=2k+1,

$a_n^{(1,k)}$ - współczynniki filtru cyfrowego dla pierwszej pochodnej funkcji,

$a_n^{(1,\infty)} = \lim\limits_{k\to\infty} a_n^{(1,k)}$.

Stąd:

$$w_n^{(2k+1)} = \frac{a_n^{(1,k)}}{a_n^{(1,\infty)}} = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot \prod_{i=n+1}^{k} \frac{i}{i-n} \cdot \frac{i}{i+n} \tag{9}$$

Po podstawieniu następujących zależności:

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{2^{-2n} \cdot n! \cdot \sqrt{\pi}}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} \tag{10}$$

$$\prod_{i=n+1}^{k} \frac{i}{i-n} \cdot \frac{i}{i+n} = \frac{2^{2n} \cdot (k!)^2 \cdot \Gamma(n+\frac{1}{2})}{n! \cdot \sqrt{\pi} \cdot (k+n)! \cdot (k-n)!} \tag{11}$$

dyskretne okno czasowe przyjmuje następującą postać:

$$w_n^{(2k+1)} = \frac{k!}{(k+n)!} \cdot \frac{k!}{(k-n)!} = \frac{\Gamma(k+1) \cdot \Gamma(k+1)}{\Gamma(k+n+1) \cdot \Gamma(k-n+1)} \tag{12}$$

gdzie:

$\Gamma(x)$ - funkcja gamma zmiennej x zdefiniowana przez szwajcarskiego matematyka Leonarda Eulera.

2.2. Dyskretne okno czasowe o parzystej długości okna

W tym przypadku funkcja opisująca dyskretne okno czasowe wyprowadzona zostanie na podstawie rekurencyjnych obliczeń współczynników filtru cyfrowego o długości M=2k dla zerowej pochodnej funkcji. Równanie tego filtru ma następującą postać

$$f(t+\frac{T}{2}) \approx \sum_{n=k-1}^{0} \beta_n^{(0,k)} \cdot f(t-nT) + \sum_{n=1}^{k} b_n^{(0,k)} \cdot f(t+nT) \tag{13}$$

gdzie:

$\beta_n^{(0,k)}, b_n^{(0,k)}$ - współczynniki filtru,

$\beta_{n-1}^{(0,k)} = b_n^{(0,k)}$ dla n=1, 2, ... , k,

T - okres próbkowania.

Współczynniki $b_n^{(0,k)}$ oblicza się rekurencyjnie w następujący sposób:

$$b_1^{(0,1)} = \frac{1}{2} \quad \text{tzn. gdy n=1 i k=1} \tag{14}$$

$$b_n^{(0,k)} = b_n^{(0,k-1)} \cdot \frac{2k-1}{2(k-n)} \cdot \frac{2k-1}{2(k+n-1)} \quad \text{dla } k \geq 2,\ n=1, 2, \dots, k\text{-}1 \tag{15}$$

$$b_{n=k}^{(0,k)} = b_n^{(0,n)} = -b_{n-1}^{(0,n-1)} \cdot \frac{2n-3}{8(n-1)} \quad \text{dla } n=k,\ k \geq 2 \tag{16}$$

Dowolny współczynnik $b_n^{(0,k)}$ filtru cyfrowego dla zerowej pochodnej funkcji można zatem obliczyć bezpośrednio z następującego wzoru

$$b_n^{(0,k)} = \frac{(-1)^n}{2} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n}(2i-3)}{8^{n-1} \cdot (n-1)!} \cdot \prod_{i=n+1}^{k} \frac{(2i-1)^2}{4(i+n-1)(i-n)} \tag{17}$$

dla k=2, 3, ... , n=1, 2, ... , k. Gdy obliczenia będą wykonywane dla k dążącego do nieskończoności, to współczynniki filtru dążą do następującej granicy:

$$b_n^{(0,\infty)} = \lim_{k \to \infty} b_n^{(0,k)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{2}{(2n-1)\pi} \tag{18}$$

Dyskretne okno czasowe o parzystej długości okna definiuję zatem w następujący sposób:

$$b_n^{(0,k)} = b_n^{(0,\infty)} \cdot w_n^{(2k)} \tag{19}$$

gdzie:

$w_n^{(2k)}$ - dyskretne okno czasowe o długości M=2k,

$b_n^{(0,k)}$ - współczynniki filtru cyfrowego dla zerowej pochodnej funkcji,

$b_n^{(0,\infty)} = \lim_{k \to \infty} b_n^{(0,k)}$.

Ze wzorów (17), (18) i (19) wynika, że

$$w_n^{(2k)} = \frac{b_n^{(0,k)}}{b_n^{(0,\infty)}} = -\frac{(2n-1)\pi}{4} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n}(2i-3)}{8^{n-1} \cdot (n-1)!} \cdot \prod_{i=n+1}^{k} \frac{(2i-1)^2}{4(i+n-1)(i-n)} \tag{20}$$

Podstawiając następujące zależności wynikające z teorii funkcji gamma

$$\prod_{i=n+1}^{k} \frac{(2i-1)^2}{4(i+n-1)(i-n)} = \frac{(2n-1)! \cdot [(k-\frac{1}{2})!]^2}{(k+n-1)! \cdot (k-n)! \cdot [(n-\frac{1}{2})!]^2} \tag{21}$$

$$-\frac{(2n-1)\pi}{4} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n}(2i-3)}{8^{n-1} \cdot (n-1)!} = \frac{2^{(1-2n)} \cdot \sqrt{\pi} \cdot (n-\frac{1}{2})!}{(n-1)!} \tag{22}$$

otrzymuje się równanie:

$$w_n^{(2k)} = \frac{(2n-1)!\cdot\sqrt{\pi}}{2^{(2n-1)}\cdot(n-1)!\cdot(n-\frac{1}{2})!}\cdot\frac{[(k-\frac{1}{2})!]^2}{(k+n-1)!\cdot(k-n)!} \tag{23}$$

Można wykazać, że dla dowolnego n, tzn. dla n=1, 2, 3, ... , spełniona jest następująca tożsamość

$$\frac{(2n-1)!\cdot\sqrt{\pi}}{2^{(2n-1)}\cdot(n-1)!\cdot(n-\frac{1}{2})!} = 1 \tag{24}$$

Ostatecznie dyskretne okno czasowe o parzystej długości opisane jest za pomocą następującej funkcji

$$w_n^{(2k)} = \frac{(k-\frac{1}{2})!}{(k+n-1)!}\cdot\frac{(k-\frac{1}{2})!}{(k-n)!} = \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})\cdot\Gamma(k+\frac{1}{2})}{\Gamma(k+n)\cdot\Gamma(k-n+1)} \tag{25}$$

3. Podstawowe własności dyskretnego okna czasowego

Dyskretne okno czasowe przedstawione za pomocą równań (12) i (25) ma następujące własności.

Własność 1

Dyskretne okno czasowe $w_n^{(2k+1)}$ o nieparzystej długości okna jest funkcją dwóch zmiennych: zmiennej k należącej do zbioru nieujemnych liczb całkowitych, tzn. k=0, 1, 2, ... , i zmiennej n należącej do zbioru liczb całkowitych tzn. $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, . Dyskretne okno czasowe $w_n^{(2k)}$ o parzystej długości okna zdefiniowane jest dla zmiennej k należącej do zbioru liczb naturalnych, tzn. k=1, 2, 3, ... , i zmiennej n należącej do zbioru liczb całkowitych, tzn. $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, .

Własność 2

Funkcja opisująca dyskretne okno czasowe $w_n^{(2k+1)}$ przyjmuje wartości, które można przedstawić w postaci ilorazu dwóch nieujemnych liczb całkowitych, tak więc wszystkie wartości tej funkcji należą do zbioru liczb wymiernych. Funkcja opisująca dyskretne okno czasowe $w_n^{(2k)}$ przyjmuje wartości, które można przedstawić w postaci ilorazu dwóch nieujemnych liczb całkowitych pomnożonego przez liczbę π. A zatem funkcja ta przyjmuje wartości stanowiące wymierną część liczby π.

Własność 3

$$w_0^{(2k+1)} = 1 \tag{26}$$

Własność 4

$$w_{-n}^{(2k+1)} = w_n^{(2k+1)} \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{27}$$

$$w_{1-n}^{(2k)} = w_n^{(2k)} \qquad n=1,\ 2,\ \ldots, \tag{28}$$

Własności trzecia i czwarta wynikają z równań (12) i (25) po podstawieniu odpowiednich wartości.

Własność 5

$$0 < w_n^{(2k+1)} \le 1 \qquad \text{dla } |n| \le k \tag{29}$$

Dla $n \ge 0$ funkcję (12) można przedstawić w następującej postaci

$$w_n^{(2k+1)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{k-i+1}{k+i} \tag{30}$$

Stąd i ze wzoru (27) mówiącego o symetrii funkcji wynika zależność (29).

Własność 6

$$w_n^{(2k+1)} = 0 \qquad \text{dla } |n| > k \tag{31}$$

Ta ważna własność funkcji opisującej dyskretne okno czasowe $w_n^{(2k+1)}$ wynika z parzystości tej funkcji (wzór (27)) i z podstawowej własności funkcji gamma, ponieważ

$$w_n^{(2k+1)} = \frac{\Gamma(k+1)\cdot\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+n+1)} \cdot \frac{1}{\Gamma(k-n+1)} \tag{32}$$

$$\frac{1}{\Gamma(k-n+1)} = 0 \quad \text{dla } \ k-n+1 \le 0 \ \text{ tzn. dla } n \ge k+1 \tag{33}$$

W tym miejscu należy zwrócić uwagę na fakt, że własność szósta wynika bezpośrednio z własności funkcji, która opisuje dyskretne okno czasowe i żaden dodatkowy warunek nałożony na tę funkcję nie jest potrzebny, żeby spełnić tę własność. W szczególności należy stwierdzić, że prezentowana funkcja czasu nie jest mnożona przez okno prostokątne, aby zapewnić jej zerowe wartości poza wyszczególnionym przedziałem czasu, jak to ma miejsce dla wielu innych okien czasowych przedstawianych w literaturze przez innych autorów.

Własność 7

$$0 < w_n^{(2k)} < 1 \qquad \text{dla } -k+1 \le n \le k \tag{34}$$

$$w_n^{(2k)} = 0 \qquad \text{dla } n<-k+1 \text{ lub } n>k \tag{35}$$

Własność ta wynika z podobnych rozważań jak w przypadku własności 6.

Własność 8

Ósma własność mówi, że dyskretne okno czasowe dąży do prostokątnego okna czasowego, gdy długość okna dąży do nieskończoności.

$$w_n^{(\infty)} = \lim_{k\to\infty} w_n^{(2k+1)} = 1 \tag{36}$$

$$w_n^{(\infty)} = \lim_{k\to\infty} w_n^{(2k)} = 1 \tag{37}$$

Własność ta wynika wprost z równań (8) i (19) po obliczeniu granic obu stron każdego z tych równań, gdy zmienna k dąży do nieskończoności. Dla okna o nieparzystej długości dowód wynika z następujących obliczeń

$$\lim_{k\to\infty} a_n^{(1,k)} = \lim_{k\to\infty} [a_n^{(1,\infty)} \cdot w_n^{(2k+1)}] \tag{38}$$

$$a_n^{(1,\infty)} = a_n^{(1,\infty)} \cdot \lim_{k\to\infty} w_n^{(2k+1)} \tag{39}$$

i stąd wynika zależność (36). Dla okna o parzystej długości dowód wynika z następujących obliczeń

$$\lim_{k\to\infty} b_n^{(0,k)} = \lim_{k\to\infty} [b_n^{(0,\infty)} \cdot w_n^{(2k)}] \tag{40}$$

$$b_n^{(0,\infty)} = b_n^{(0,\infty)} \cdot \lim_{k\to\infty} w_n^{(2k)} \tag{41}$$

i stąd wynika zależność (37). Z zależności (36) i rozważań przedstawionych w rozdziale 2.1 wynika, że

$$\prod_{i=n+1}^{k} \frac{i}{i-n} \cdot \frac{i}{i+n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{k! \cdot k!}{(k+n)! \cdot (k-n)!} \tag{42}$$

Z zależności (37) i rozważań przedstawionych w rozdziale 2.2 wynika, że

$$\lim_{k\to\infty} \prod_{i=n+1}^{k} \frac{(2i-1)^2}{4(i+n-1)(i-n)} = \frac{2^{3n-1} \cdot (n-1)!}{\pi \cdot \prod_{i=1}^{n} (2i-1)} \quad n=1, 2, 3, , ... \tag{43}$$

Własność 9

Przesunięcie indeksów n dyskretnego okna czasowego z zakresu liczb całkowitych na zakres nieujemnych liczb całkowitych q (liczby naturalne plus liczba zero) bez wyraźnego rozróżniania, czy długość okna M jest liczbą parzystą czy nieparzystą

$$w_q^{(M)} = \frac{(\frac{M}{2})! \cdot (\frac{M}{2})!}{q! \cdot (M-q)!} \qquad M=1, 2, 3, ... , \qquad q=0, 1, 2, 3, ... , \tag{44}$$

i wówczas spełnione są następujące zależności

$$0 < w_q^{(M)} \le 1 \qquad \text{dla } q=0, 1, ... , M \tag{45}$$

$$w_q^{(M)} = 0 \qquad \text{dla } q<0 \text{ lub } q>M \tag{46}$$

4. Przykłady zastosowania dyskretnego okna czasowego

Dane są wartości f(t+nT) funkcji f(t) rozwijalnej w szereg Taylora w punktach (t+nT), gdzie T - okres próbkowania, n=-k+1, ... , 0, ..., k. Należy wyznaczyć wartość tej funkcji i jej pierwszej pochodnej w punkcie t+T/2. Zadanie to realizują następujące filtry cyfrowe

$$f(t+\frac{T}{2}) \approx \sum_{n=-k+1}^{k} b_n^{(0,k)} \cdot f(t+nT) \tag{47}$$

gdzie:

$$b_n^{(0,k)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2}{(2n-1)\cdot \pi} \cdot \frac{(k-\frac{1}{2})! \cdot (k-\frac{1}{2})!}{(k+n-1)! \cdot (k-n)!} \tag{48}$$

$$\frac{df(t+\frac{T}{2})}{dt} \approx \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=-k+1}^{k} b_n^{(1,k)} \cdot f(t+nT) \tag{49}$$

gdzie:

$$b_n^{(1,k)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot 4}{(2n-1)^2 \cdot \pi} \cdot \frac{(k-\frac{1}{2})! \cdot (k-\frac{1}{2})!}{(k+n-1)! \cdot (k-n)!} \tag{50}$$

Dane są wartości f(t+nT) (funkcji f(t) rozwijalnej w szereg Taylora) w punktach (t+nT), gdzie T - okres próbkowania, n=-k, ... , 0, ..., k. Należy wyznaczyć wartość pierwszej i drugiej pochodnej tej funkcji w punkcie t. Zadanie to realizują następujące filtry cyfrowe

$$\frac{df(t)}{dt} \approx \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=-k}^{k} a_n^{(1,k)} \cdot f(t+nT) \tag{51}$$

gdzie:

$$a_0^{(1,k)} = 0 \tag{52}$$

$$a_n^{(1,k)} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{k! \cdot k!}{(k+n)! \cdot (k-n)!} \tag{53}$$

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \approx \frac{2!}{T^2} \cdot \sum_{n=-k}^{k} a_n^{(2,k)} \cdot f(t+nT) \tag{54}$$

gdzie:

$$a_n^{(2,k)} = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cdot \frac{k! \cdot k!}{(k+n)! \cdot (k-n)!} \tag{55}$$

$$a_0^{(2,k)} = -2 \cdot \sum_{n=1}^{k} a_n^{(2,k)} \tag{56}$$

LITERATURA

1. Fichtenholz G.M.: Rachunek różniczkowy i całkowy. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1999.
2. Kącki E., Siewierski L.: Wybrane działy matematyki wyższej z ćwiczeniami. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1975.
3. Lyons R.G.: Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 2000.
4. Zapała W.: Designing method of true linear phase filters. Proceedings of the 7th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, vol.2, pp. 1039-1044. Poland, Międzyzdroje 28-31 August 2001.
5. Zapała W.: Ideal digital differentiating filters. Proceedings of the 8th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, vol.1, pp.549-554. IEEE Conference Number: 8119. Poland, Szczecin 2-5 September 2002.
6. Zapała W.: Recursive calculations of digital differentiators. Proceedings of the 9th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, vol.2, pp. 1251-1256. IEEE Conference Number: 8780. Poland, Międzyzdroje 25-28 August 2003.

Recenzent: Dr hab. inż. Roscisław Buń

Abstract

New discrete time window has been presented in the paper. The window has been derived basing on recursive calculations of first order digital differentiators. Basic properties of this window have been discussed as well as examples of application of this window for designing digital FIR filters have been presented.