

PRZEWODNIK DO ĆWICZEŃ LABORATORYJNYCH Z FIZYKI

Praca zbiorowa pod redakcją
Anny STARCZEWSKIEJ

Opracowali:

Piotr DUKA

Andrzej GRABOWSKI

Marcin JESIONEK

Mirosława KĘPIŃSKA

Krzysztof MISTEWICZ

Marian NOWAK

Anna STARCZEWSKA

Piotr SZPERLICH

Bartłomiej TOROŃ



GLIWICE 2022



PRZEWODNIK DO ĆWICZEŃ LABORATORYJNYCH Z FIZYKI

**Praca zbiorowa pod redakcją
Anny STARCZEWSKIEJ**

Opracowali:

Piotr DUKA

Andrzej GRABOWSKI

Marcin JESIONEK

Mirosława KEPIŃSKA

Krystian MISTEWICZ

Marian NOWAK

Anna STARCZEWSKA

Piotr SZPERLICH

Bartłomiej TOROŃ

**WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ
GLIWICE 2022
UIW 48600**

Opiniodawcy

Dr hab. Janusz JAGLARZ, prof. Politechniki Krakowskiej
Dr hab. Barbara KŁOS, prof. Uniwersytetu Śląskiego

Kolegium redakcyjne

REDAKTOR NACZELNY – Dr hab. inż. Barbara KULESZ, prof. PŚ
REDAKTOR DZIAŁU – Dr hab. inż. Agnieszka SZKLINIARZ, prof. PŚ
SEKRETARZ REDAKCJI – Mgr Jolanta NIDERLA-WITKOWSKA

**Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej**

Projekt okładki

Mgr inż. arch. Agnieszka MĘDREK

e-ISBN 978-83-7880-803-9

© Copyright by
Wydawnictwo Politechniki Śląskiej
Gliwice 2022

SPIS TREŚCI

WSTĘP	5
1. OPRACOWANIE WYNIKÓW POMIARÓW FIZYCZNYCH	7
2. WYZNACZANIE MODUŁU SZTYWNOŚCI NA SKRĘCANIE ZA POMOCA WAHADŁA TORSYJNEGO METODAMI STATYCZNĄ I DYNAMICZNĄ	18
3. ANALIZA DRGAŃ MECHANICZNYCH W STRUNACH	27
4. WYZNACZANIE ELIPSOIDY BEZWŁADNOŚCI CIAŁA SZTYWNEGO... ..	36
5. WYZNACZANIE MOMENTU BEZWŁADNOŚCI ŻYROSKOPU	44
6. WYZNACZANIE CZASU ZDERZENIA KUL ORAZ PARAMETRÓW DEFORMACJI	51
7. BADANIA DRGAŃ TŁUMIONYCH ZA POMOCĄ GALWANOMETRU ZWIERCIADLANEGO I WYZNACZANIE PARAMETRÓW CHARAKTERYSTYCZNYCH GALWANOMETRU	57
8. BADANIE ZŁOŻENIA MECHANICZNYCH I ELEKTRYCZNYCH DRGAŃ HARMONICZNYCH PRZEZ OBSERWACJĘ KRZYWYCH LISSAJOUS	68
9. BADANIE WŁASNOŚCI MATERIAŁÓW ZA POMOCĄ DEFEKTOSKOPU ULTRADŹWIĘKOWEGO	82
10. POMIAR WSPÓŁCZYNNIKA LEPKOŚCI ORAZ WYZNACZANIE ŚREDNIEJ DROGI SWOBODNEJ, ŚREDNICY CZĄSTECZEK GAZU I LICZBY REYNOLDSA W BADANIACH PRZEPIYU POWIETRZA PRZEZ KAPILARĘ.....	91
11. POMIAR WSPÓŁCZYNNIKA LEPKOŚCI CIECZY ZA POMOCĄ WISKOZYMETRU HÖPPLERA.....	100
12. BADANIE ZALEŻNOŚCI TEMPERATUROWEJ WSPÓŁCZYNNIKA LEPKOŚCI ORAZ ANOMALII PŁYNNOCİ CIECZY O LEPKOŚCI STRUKTURALNEJ	107
13. WYZNACZANIE WSPÓŁCZYNNIKA PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO CIAŁ STAŁYCH.....	114
14. BADANIE ZALEŻNOŚCI TEMPERATUROWEJ PRZEWODNICTWA ELEKTRYCZNEGO METALI I PÓLPRZEWODNIKÓW	119
15. BADANIE WŁAŚCIWOŚCI DIELEKTRYCZNYCH KRYSZTAŁU SIARCZANU TRÓJGLICYNNY	128
16. BADANIE CHARAKTERYSTYK FOTODIODY I FOTOOGNIWA	136

17. BADANIE ZJAWISK GALWANOMAGNETYCZNYCH W CIAŁACH STAŁYCH.....	152
18. POMIAR PARAMETRÓW MAGNETYCZNYCH FERROMAGNETYKÓW	164
19. WYZNACZANIE ŁADUNKU WŁAŚCIWEGO ELEKTRONU ZA POMOCĄ MAGNETRONU	175
20. CECHOWANIE TERMOPARY	182
21. WYZNACZANIE OGNISKOWYCH SOCZEWEK ORAZ MIARY ABERRACJI CHROMATYCZNEJ	187
22. WYZNACZANIE SZEROKOŚCI SZCZELINY I STAŁYCH SIATEK DYFRAKCYJNYCH Z BADAŃ DYFRAKCJI PROMIENIOWANIA LASEROWEGO	199
23. BADANIE ZJAWISKA ROTACJI OPTYCZNEJ W WARUNKACH NATURALNEJ I WYMUSZONEJ AKTYWNOŚCI OPTYCZNEJ	206
24. PORÓWNANIE SPRAWNOŚCI ŚWIETLNEJ WYBRANYCH ŹRÓDEŁ ŚWIATŁA	221
25. BADANIE ZALEŻNOŚCI MOCY PROMIENIOWANIA PODCZERWONEGO EMITOWANEGO PRZEZ RÓŻNE POWIERZCHNIE OD TEMPERATURY	231
26. WYZNACZANIE STAŁEJ PLANCKA W BADANIACH ZJAWISKA FOTOELEKTRYCZNEGO ZEWNĘTRZNEGO	239
27. WYZNACZANIE PRACY WYJŚCIA ELEKTRONÓW Z METALU W BADANIACH EMISJI TERMOELEKTRONOWEJ.....	246
28. BADANIE ATOMOWYCH WIDM EMISYJNYCH GAZÓW METALI.....	254
29. WYZNACZANIE MAKSYMALNEJ ENERGII I ZASIĘGU PROMIENIOWANIA β W CIAŁACH STAŁYCH ORAZ POMIAR DAWKI PROMIENIOWANIA JĄDROWEGO	263
30. WYZNACZANIE CHARAKTERYSTYKI ORAZ SPRAWNOŚCI OGNIWA WODOROWEGO I ELEKTROLIZERA	272
BIBLIOGRAFIA	282

WSTĘP

Ćwiczenia laboratoryjne są bardzo istotne z punktu widzenia całości kursu fizyki dla studentów uczelni technicznej. Celem takiego kursu jest:

a) usystematyzowanie, poszerzenie i pogłębienie wiedzy z fizyki, jaką młodzież nabyła w szkole średniej, w tym:

- zapoznanie z fizyczną naturą podstawowych zjawisk występujących w przyrodzie i wykorzystywanych we współczesnej technice,

b) przygotowanie słuchaczy do studiowania nauk technicznych przez:

- zapoznanie z podstawowymi wielkościami fizycznymi, ich jednostkami oraz metodami wyznaczania,

- wyrobienie umiejętności matematycznego opisu podstawowych problemów fizycznych i technicznych,

- wyrobienie umiejętności samodzielnego montowania najprostszych układów pomiarowych oraz przeprowadzania badań różnych zjawisk i wielkości fizycznych,

- zapoznanie z różnymi technikami i metodami pomiarowymi,

- nauczanie podstaw analizy błędów i niepewności pomiarowych oraz matematycznej obróbki wyników doświadczalnych z wykorzystaniem sprzętu komputerowego i odpowiednich programów numerycznych,

- wyrobienie umiejętności wnioskowania na podstawie uzyskanych wyników.

Wyboru ćwiczeń dokonuje wykładowca, uwzględniając specyfikę programów realizowanych na różnych kierunkach studiów. Wszystkie dwugodzinne ćwiczenia laboratoryjne są wykonywane w sekcjach dwuosobowych.

Zajęcia laboratoryjne z fizyki dostarczają oprócz wiedzy obiektywnej dotyczącej realnych faktów i możliwości (np. istnienie pewnych zjawisk i praw przyrody) także pewną wiedzę normatywną. Wiedza ta obejmuje zasady instrumentalne i psychologiczne oraz normy i dyrektywy pracy badawczej. Nosi ona miano metody naukowej fizyki.

Do zasad i norm instrumentalnych zaliczamy czynne i możliwie wszechstronne eksperymentowanie, ilościowy opis badanych zjawisk za pomocą odpowiednich

wielkości fizycznych, stosowanie coraz bogatszego zestawu coraz dokładniejszych przyrządów, matematyczny zapis wyników pomiaru i ściśle matematyczne formułowanie znajdujących praw, tzw. cykle badawcze (stosowanie sprzężeń zwrotnych pomiędzy hipotezami a testami sprawdzającymi), poszukiwanie ogólniejszych związków strukturalnych i przyczynowych.

Do zasad psychologicznych zaliczamy logiczne myślenie i dociekliwość, pomysłowość i otwartość na wszelkie możliwości i nowości, a także analityczną, sceptyczną i krytyczną ich ocenę. Do norm postępowania należy sumienność i zdyscyplinowanie w odniesieniu do rygorów i kryteriów prawdy narzuconych przez przyrodę.

W ramach ćwiczeń laboratoryjnych studenci powinni zapoznać się ze specyfiką empirycznych badań naukowych: obserwacja, porównywanie, pomiar i eksperyment. Eksperyment ma na celu odpowiednią zmianę obiektu badań albo jego rekonstrukcję w specjalnie dobranych i ściśle kontrolowanych warunkach. Jest to metoda poznania, w której podmiot poznania aktywnie oddziałuje na badany obiekt w sztucznie wytworzonych warunkach, koniecznych do tego, by ujawniły się określone cechy obiektu badań. Jednocześnie eksperyment umożliwia badanie obiektów w izolacji, jeżeli usunie się działania zakłócające stan obiektu z zewnątrz. Odpowiednie próby, jakim poddaje się obiekty, mogą z reguły być wielokrotnie powtarzane.

Autorzy serdecznie dziękują kolejnym pokoleniom fizyków oraz pracowników inżynieryjno-technicznych zatrudnionych od 1969 roku w ośrodku Politechniki Śląskiej w Katowicach za duży wkład pracy przy zorganizowaniu i modernizacji laboratorium z fizyki dla studentów.

1. OPRACOWANIE WYNIKÓW POMIARÓW FIZYCZNYCH

Celem każdego pomiaru fizycznego jest określenie wartości mierzonej wielkości fizycznej. Niektóre wielkości można zmierzyć bezpośrednio, przy użyciu przyrządów mierzących daną wielkość. Do takich należy np. czas trwania procesu – mierzony za pomocą stopera. Niektóre wielkości fizyczne można wyznaczyć w sposób pośredni. Korzysta się wtedy z faktu, że są powiązane relacją matematyczną z innymi, mierzonymi bezpośrednio. Do takich należy np. gęstość – wyznaczona przez pomiar masy i objętości. Żaden z pomiarów nie daje nam rzeczywistej wartości, a jedynie przybliżoną, ponieważ są wykonane tylko z pewną ograniczoną dokładnością. Dokładność wyników pomiarów określana jest przez podanie niepewności pomiarowej. Tę wyznacza się metodami określonymi przez Międzynarodową Konwencję Oceny Niepewności Pomiaru GUM (angielski akronim Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement), której postanowienia są częścią obowiązującego prawa państwowego.

Niepewności pomiarowe są spowodowane niedoskonałością użytych przyrządów oraz niedoskonałością zmysłów biorących udział w obserwacjach. Ze względu na przyczyny niepewności pomiarowych dzieli się je na niepewności grube, systematyczne oraz przypadkowe.

Niepewności grube występują wtedy, gdy wśród wyników pomiaru wykonanego wielokrotnie znajduje się wynik o wartości znacznie różniącej się od pozostałych. Przyczyną tego może być np. niewłaściwy odczyt, błędny zapis uzyskanego wyniku. Wynik obciążony błędem grubym w dalszej analizie należy pominąć.

Niepewności systematyczne są spowodowane niedokładnością przyrządów, zastosowaniem niewłaściwej metody pomiarowej oraz działaniem czynników zewnętrznych. Błędy systematyczne można zmniejszać np. przez stosowanie dokładniejszych przyrządów.

Niepewnością przypadkową obciążony jest zawsze wynik pojedynczego pomiaru. O błędzie tym świadczy niepowtarzalność wyników pomiaru jednej i tej samej wielkości. Źródłem tych błędów są czynniki o charakterze losowym, których nie da się przewidzieć ani usunąć, np. przypadkowe drgania czy refleks osoby wykonującej pomiary.

Niepewność wyniku pomiaru składa się więc z kilku składników, które według zaleceń konwencji GUM można podzielić na dwie kategorie:

- niepewności typu a (u_a) – takie, które są wyznaczane metodami statystycznymi, oddają statystyczny charakter niepewności przypadkowych,
- niepewności typu b (u_b) – takie, które są wyznaczane innymi metodami, a określają niepewność systematyczną, np. dokładność użytego przyrządu pomiarowego.

Obliczanie niepewności wyników pomiarów bezpośrednich

Wartość wyników pomiarów wykonywanych w tym samym warunkach tym samym przyrządem pomiarowym oscyluje wokół pewnej wartości średniej \bar{X} określonej wzorem:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (1.1)$$

gdzie: x_i są wartościami kolejnych pojedynczych pomiarów bezpośrednich wielkości fizycznej, n – liczba pomiarów, i – numer kolejnego pomiaru.

Niepewność statystyczna $u_a(x)$ wartości średniej serii pomiarów zależy od liczby wykonanych pomiarów. Jest liczona jako odchylenie standardowe wartości średniej (δ_x) pomnożone przez współczynnik Studenta-Fishera:

$$u_a(x) = \delta_x \cdot t_{\alpha,n} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{X} - x_i)^2}{n(n-1)}} \cdot t_{\alpha,n}. \quad (1.2)$$

Współczynnik Studenta-Fishera $t_{\alpha,n}$ to liczba większa od 1, którą odczytuje się z tabeli współczynników Studenta-Fishera. Wartość współczynnika zależy od liczby pomiarów w serii n oraz od poziomu ufności α , czyli procentowego prawdopodobieństwa, że wynik pomiaru zawiera się w przedziale domkniętym, ograniczonym niepewnością $u_a(x)$. Dla powszechnie wykonywanych pomiarów stosuje się poziom ufności $\alpha = 0,6828$ (w przypadku wzorcowania urządzeń pomiarowych $\alpha = 0,95$).

Niepewność systematyczna u_b zależy od używanego przyrządu pomiarowego, a liczona jest ze wzoru:

$$u_b(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}}. \quad (1.3)$$

Δx to niepewność graniczna pomiaru, którą wyznacza się w różny sposób. W przypadku prostych przyrządów mechanicznych, takich jak przymiar milimetry, suwmiarka, śruba mikrometryczna czy termometr rtęciowy, przyjmuje się, że niepewność graniczna pomiaru jest równa wartości najmniejszej działki skali. Zatem w przypadku pomiarów wykonanych za pomocą linijki można przyjąć $\Delta x = 1$ mm, dla suwmiarki $\Delta x = 0,05$ mm lub $0,1$ mm, dla śruby mikrometrycznej $\Delta x = 0,01$ mm, natomiast dla termometru cieczowego, np. rtęciowego, $\Delta x = 0,1^\circ\text{C}$.

W przypadku analogowych przyrządów elektrycznych (wskazówkowych), np. woltomierza lub amperomierza, najmniejsza działka nie stanowi miary niepewności, najczęściej z powodu nieliniowości skali. Podaje się wtedy tzw. klasę dokładności przyrządu, która równa jest stosunkowi, wyrażonemu w procentach, niepewności granicznej Δx wyniku pomiaru do zakresu pomiarowego użytego przyrządu. Wobec tego niepewność graniczną pomiaru wykonanego przyrządem o klasie k na zakresie z wyznacza się ze wzoru:

$$\Delta x = \frac{k \cdot z}{100}. \quad (1.4)$$

Klasę dokładności oraz zakres pomiarowy należy odczytać z miernika.

Niepewność graniczna pomiaru wykonanego za pomocą miernika mającego wyświetlacz cyfrowy liczona jest ze wzoru:

$$\Delta x = a\% \cdot \text{wynik} + b \cdot \text{rozdzielczość}. \quad (1.5)$$

Wielkości a i b podawane są przez producenta urządzenia, zatem aby obliczyć niepewność graniczną, należy zapoznać się z instrukcją obsługi używanego miernika.

Wykonując pomiar za pomocą urządzeń zliczających, np. licznika Geigera Müllera, niepewność jego wyniku określa się jako:

$$u_b(N) = \sqrt{N}, \quad (1.6)$$

gdzie N oznacza liczbę zliczeń (zarejestrowanych impulsów).

Dokładność mierzonej wielkości zależy zarówno od liczby wykonanych pomiarów, jak i od dokładności stosowanych przyrządów pomiarowych. Dlatego niepewnością mierzonej wielkości jest niepewność całkowita, liczona jako geometryczna suma niepewności statystycznej (typu a) i niepewności pomiarowej (typu b):

$$u(x) = \sqrt{u_a^2(x) + u_b^2(x)}. \quad (1.7)$$

Niepewność ta bywa nazywana również niepewnością standardową.

Gdy pomiary w danej serii są wykonane różnymi metodami lub za pomocą różnych przyrządów, wtedy każdy wynik może być uzyskany z inną niepewnością. W takim wypadku wartość wyniku należy wyznaczyć, licząc średnią ważoną:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}, \quad \text{gdzie} \quad w_i = \frac{1}{u^2(x_i)}, \quad (1.8)$$

a jej niepewność:

$$u(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n w_i}}. \quad (1.9)$$

w_i to tzw. waga i -tego pomiaru (stąd nazwa „średnia ważona”). W rezultacie takiego podejścia na wynik końcowy największy wpływ mają pomiary o największej wadze, a więc obarczone najmniejszą niepewnością pomiarową.

Obliczanie niepewności wyników pomiarów pośrednich

Pomiary pośrednie wymagają bezpośredniego zmierzenia często kilku wielkości fizycznych, których niepewności przenoszą się na szukaną wielkość, powodując, że i ona jest wyznaczona ze skończoną dokładnością.

Jeżeli szukana wielkość jest wyznaczana ze wzoru funkcyjnego:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_k), \quad (1.10)$$

to jej niepewność określa się, korzystając z prawa propagacji niepewności, zwanego również prawem przenoszenia niepewności, a danego wzorem:

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot u(x_i) \right)^2}. \quad (1.11)$$

$\frac{\partial y}{\partial x_i}$ oznaczają pochodne cząstkowe wielkości y względem x_i , natomiast $u(x_i)$ to

niepewności całkowite wielkości x_i mierzonych bezpośrednio.

Przykładem pomiarów pośrednich jest wyznaczenie średniej prędkości ciała na podstawie pomiaru czasu trwania ruchu i przebytej drogi. Wartość prędkości V można obliczyć na podstawie wzoru:

$$V = \frac{s}{t}. \quad (1.12)$$

W celu wyznaczenia niepewności $u(V)$, przy użyciu prawa propagacji niepewności, najpierw trzeba obliczyć pochodne cząstkowe: $\frac{\partial V}{\partial s}$ i $\frac{\partial V}{\partial t}$, a następnie skorzystać ze wzoru (1.11):

$$u(V) = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial s} \cdot u(s) \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t} \cdot u(t) \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{t} \cdot u(s) \right)^2 + \left(-\frac{s}{t^2} \cdot u(t) \right)^2}, \quad (1.13)$$

gdzie $u(s)$ i $u(t)$ są niepewnościami pomiarów odpowiednio drogi s i czasu t .

Zapis końcowego wyniku

Wyniki pomiaru zawsze należy zapisać łącznie z niepewnością i jednostką. Stosowane mogą być jednostki międzynarodowego układu SI lub inne jednostki dopuszczone do używania.

Zgodnie z uregulowaniami prawnymi niepewność wyniku pomiaru podaje się z dokładnością do dwóch cyfr znaczących. Za pierwszą cyfrę znaczącą uważa się pierwszą cyfrę różną od zera (patrząc od lewej strony). Przykładowo, jeżeli w wyniku

obliczeń uzyskano niepewność okresu drgań równą $u(T) = 0,0024103$ s, to zachowanie dwóch cyfr znaczących wymaga, aby zaokrąglić ją do postaci $u(T) = 0,0024$ s. Na miejscu znaczącym trzecim i następnym są cyfry, które nie mają już żadnego sensu fizycznego. Wynik pomiaru zaokrągliła się do tego samego miejsca dziesiątego, do którego została zaokrąglona jego niepewność, np. wynik $T = 1,4231052$ s należy zaokrąglić do postaci $T = 1,4231$ s. Prawidłowo końcowy wynik można przedstawić:

- słownie: okres drgań wynosi 1,4231 s z niepewnością 0,0024 s – zapis stosowany, gdy wynik jest częścią dłuższego tekstu,
- przy użyciu symboli: $T = 1,4231$ s, $u(T) = 0,0024$ s – zapis stosowany, gdy przedstawiana jest seria wyników (np. w tabeli),
- w formie skróconej: $T = 1,4231(24)$ s – najbardziej uniwersalnej i najczęściej stosowanej postaci.

Jeśli wartość mierzonych wielkości jest duża lub mała, to stosuje się zapis wykładniczy, np. $3 \cdot 10^3$ zamiast 3000 lub $3 \cdot 10^{-3}$ zamiast 0,003, a w zapisie końcowym zarówno wynik, jak i niepewność muszą być tego samego rzędu.

Porównanie wyników z danymi tablicowymi

Wyznaczone doświadczalnie wielkości, o ile to możliwe, należy porównać z wartościami tablicowymi lub literaturowymi, uznawanymi za dokładne. Aby jednoznacznie stwierdzić zgodność lub niezgodność wyznaczonej wartości z oczekiwaną, należy przeprowadzić test zgodności. Polega on na sprawdzeniu, czy różnica między wartością wyznaczoną y a wartością tablicową (lub literaturową) y_0 jest mniejsza od niepewności rozszerzonej, której wartość oblicza się, mnożąc niepewność standardową wyniku $u(y)$ przez bezwymiarowy współczynnik rozszerzenia k . Zgodnie z międzynarodową praktyką przyjmuje się, że jego wartość wynosi $k = 2$. Jeśli więc spełniony jest warunek:

$$|y - y_0| < 2 \cdot u(y), \quad (1.14)$$

to wynik uznajemy za zgodny, w przeciwnym razie – za niezgodny z oczekiwanym.

Porównanie wyników uzyskanych różnymi metodami

Często tę samą wielkość fizyczną wyznacza się niezależnie, różnymi metodami (np. wartość przyspieszenia ziemskiego można wyznaczyć na podstawie analizy spadku swobodnego ciała, ruchu wahadła i innych eksperymentów), a uzyskane wyniki mają zazwyczaj różne wartości. Aby jednoznacznie stwierdzić, czy wyniki rzeczywiście są różne (np. doświadczenia przeprowadzono na różnych szerokościach geograficznych), czy są równe w granicach niepewności pomiaru, należy również przeprowadzić test zgodności. Tym razem polega on na sprawdzeniu, czy różnica między wartościami y_1 i y_2 wyznaczonymi różnymi metodami jest mniejsza od niepewności rozszerzonej tej różnicy. Jej wartość zgodnie z prawem propagacji niepewności wyraża się wzorem:

$$U(y_1 - y_2) = k \cdot u(y_1 - y_2) = k \cdot \sqrt{[u(y_1)]^2 + [u(y_2)]^2}. \quad (1.15)$$

Zgodnie z międzynarodową praktyką przyjmuje się, że wartość współczynnika rozszerzenia wynosi $k = 2$. Jeśli więc spełniony jest warunek:

$$|y_1 - y_2| < 2 \cdot u(y_1 - y_2), \quad (1.16)$$

to uzyskane wyniki uznajemy za zgodne (równe w granicach niepewności pomiaru).

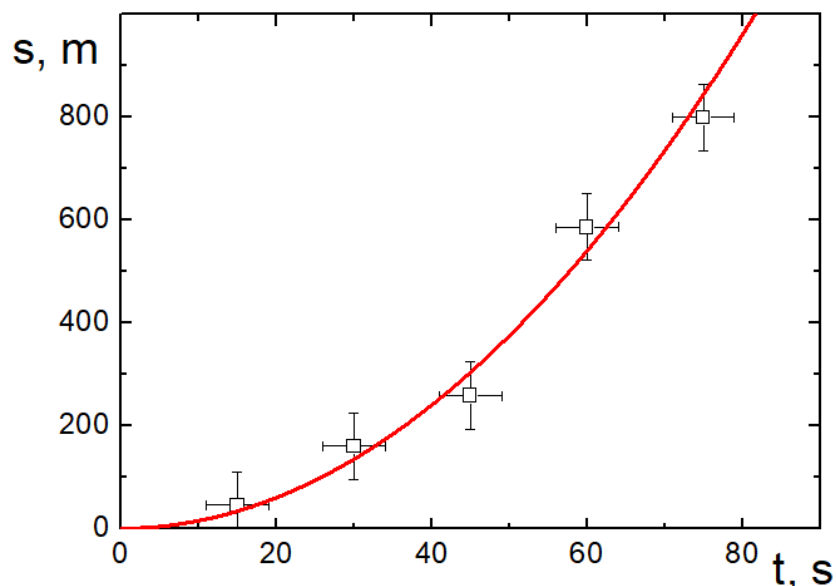
Sposoby przedstawiania wyników pomiarów

Wyniki pomiarów mogą być przedstawiane w tabelach, na wykresach lub w postaci odpowiednich równań empirycznych.

W tabelach wyniki pomiarów podaje się z dokładnością określoną przez niepewności pomiarowe. Przedstawione w ten sposób dane doświadczalne można łatwo wykorzystać do dalszego matematycznego opracowywania.

Na wykresach można zobrazować zależności funkcyjne między zmierzonymi wielkościami. Aby prawidłowo to zrobić, należy z osią X powiązać wielkość zmienianą przez eksperymentatora, a z osią Y wielkość od tamtej zależną. Osie te należy czytelnie opisać, aby było wiadomo, jakie wielkości są na nich przedstawione. Należy podać symbol wielkości fizycznej wraz z jej jednostką. Na każdej osi trzeba też dobrać skalę

z odpowiednią podziałką, tak aby współrzędne każdego punktu można było łatwo i szybko odczytać oraz aby linia przedstawiająca daną zależność przebiegała możliwie przez całą powierzchnię rysunku. Przykład wykresu przedstawiony jest na rys. 1.1.



Rys. 1.1. Wykres zależności drogi od czasu dla ciała w ruchu jednostajnie przyspieszonym; \square – punkty pomiarowe, — — dopasowana zależność teoretyczna

Wykres ten ilustruje zależność drogi s od czasu t w ruchu jednostajnie przyspieszonym. Na wykresie zaznaczone są punkty pomiarowe wraz z niepewnościami oraz zaznaczona jest krzywa, opisująca tę zależność. Punkty zaznacza się tak, by na wykresie były wyraźnie widoczne (w postaci kropek, kwadracików, krzyżyków itp.), nie wolno ich jednak łączyć odcinkami. Dla wielkości mierzonych bezpośrednio należy zaznaczyć słupki niepewności. Jeśli punktów jest dużo lub słupki są wysokie, wtedy dla przejrzystości można wykreślić słupki tylko dla niektórych punktów pomiarowych.

Wyniki doświadczalne można również przedstawić w formie równania empirycznego lub równania przewidzianego teoretycznie. Wartości parametrów występujących w takich równaniach wyznacza się najczęściej tzw. metodą najmniejszych kwadratów, zwaną także metodą Gaussa.

Aproksymacja liniowa wyników doświadczalnych

W praktyce laboratoryjnej często bada się zależność między dwiema mierzonymi wielkościami fizycznymi x_i i y_i . Aproksymacja polega na określeniu funkcji $f(x)$, która opisuje występującą zależność między tymi wielkościami. Dopasowanie krzywej opisanej funkcją $f(x)$ do punktów doświadczalnych wykonuje się metodą najmniejszych kwadratów, choć najczęściej metoda ta jest stosowana dla liniowych zależności między x_i i y_i .

Aproksymacja liniowa polega na dopasowaniu prostej $Y = ax + b$ do punktów pomiarowych i wyznaczeniu parametrów a i b . Wartości współczynników a i b określa się metodą najmniejszych kwadratów, w której zgodnie z postulatem Gaussa suma S kwadratów różnic między wartościami doświadczalnymi y_i a wartościami obliczonymi Y_i powinna osiągnąć wartość minimalną:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - Y_i)^2 = \min, \quad (1.17)$$

gdzie n oznacza liczbę punktów pomiarowych. Po podstawieniu zależności liniowej:

$$Y_i = ax_i + b, \quad (1.18)$$

postulat Gaussa przyjmuje postać:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 = \min. \quad (1.19)$$

Z warunku koniecznego na istnienie minimum funkcji dwóch zmiennych można stworzyć układ równań:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0, \quad (1.21)$$

którego rozwiązanie pozwala otrzymać wzory na parametry a i b oraz ich niepewności S_a i S_b w postaci:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i - n \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad (1.22)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad (1.23)$$

$$S_a = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n d_i^2} \sqrt{\frac{n}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}}, \quad (1.24)$$

$$S_b = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n d_i^2} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}}, \quad (1.25)$$

przy czym:

$$\sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - a \sum_{i=1}^n x_i y_i - b \sum_{i=1}^n y_i x_i. \quad (1.26)$$

Parametrom a i b nadaje się interpretację fizyczną oraz przypisuje odpowiednią jednostkę.

Jeżeli zależność funkcyjna między mierzonymi wielkościami x i y jest nieliniowa, to przez odpowiednie przekształcenia matematyczne można tę zależność sprowadzić do postaci liniowej. Na przykład zależność typu:

$$y = B \cdot e^{Ax}, \quad (1.27)$$

po obustronnym zlogarytmowaniu:

$$\ln y = Ax + \ln B, \quad (1.28)$$

a następnie podstawieniu $Y = \ln y$ oraz $X = x$, można przedstawić w postaci liniowej:

$$Y = aX + b, \quad (1.29)$$

gdzie $a = A$ oraz $b = \ln B$.

Na podstawie obliczonych z wzorów (1.22), (1.23), (1.24) i (1.25) wartości parametrów a i b oraz ich niepewności wyznacza się wartości oraz niepewności wielkości A i B mających określony sens fizyczny.

Współczynniki a i b prostej oraz ich niepewności można obliczyć, korzystając z odpowiedniego programu komputerowego. W programach Microsoft Excel i Open Office Calc do tego celu służy funkcja REGLINP.

2. WYZNACZANIE MODUŁU SZTYWNOŚCI NA SKRĘCANIE ZA POMOCĄ WAHADŁA TORSYJNEGO METODAMI STATYCZNĄ I DYNAMICZNĄ

Deformacja liniowa, prawo Hooke'a

Pod wpływem działania siły zewnętrznej ciało stałe może ulec różnym deformacjom lub odkształceniom sprężystym (ściskanie, rozciąganie oraz skręcanie). Do opisu tych zjawisk wprowadza się pojęcie naprężenia σ , którego wartość odpowiada sile F wywieranej na jednostkę pola powierzchni przekroju poprzecznego S odkształcanego materiału:

$$\sigma = \frac{F}{S}. \quad (2.1)$$

W przypadku rozciągania podłużnego, gdy siła jest skierowana wzdłuż normalnej do powierzchni, naprężenie nazywamy normalnym. Gdy siła jest styczna do powierzchni, to naprężenie nazywamy stycznym lub ścinającym. Dla dostatecznie małych wartości naprężeń (poniżej tzw. granicy sprężystości) spełnione jest prawo Hooke'a:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \cdot \sigma, \quad (2.2)$$

gdzie: l oznacza długość elementu, Δl jest odkształceniem liniowym (skróceniem lub wydłużeniem), E to moduł sprężystości zwany modułem Younga.

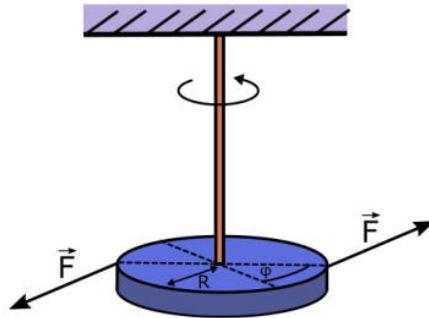
Wahadło torsyjne jest kątowym odpowiednikiem liniowego oscylatora harmonicznego. Przykładem wahadła torsyjnego może być krążek zawieszony na nieruchomym pręcie (rys. 2.1). Skręcenie wahadła o pewien kąt φ prowadzi do powstania momentu siły M_s , dążącego do przywrócenia krążka do położenia równowagi. Wielkości te związane są ze sobą następującym równaniem:

$$M_s = D \cdot \varphi, \quad (2.3)$$

gdzie D oznacza moment kierujący. Moment siły definiujemy jako:

$$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}. \quad (2.4)$$

gdzie R jest promieniem (tutaj: promień tarczy wahadła torsyjnego).



Rys. 2.1. Schemat wahadła torsyjnego (użyte oznaczenia: F – siły działające na tarczę, φ – kąt obrotu tarczy, R – promień tarczy)

W stanie stacjonarnym, gdy wahadło jest skręcone o kąt φ , moment siły zewnętrznej M przeciwdziała reakcji drutu. Wtedy spełniona jest relacja:

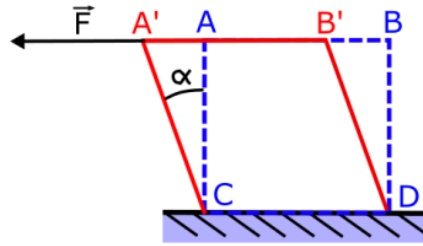
$$M = -M_s = -D \cdot \varphi. \quad (2.5)$$

Po zaprzestaniu działania pary sił skręcających F powstają drgania krążka wahadła wokół położenia równowagi wywołane działaniem momentu sił sprężystości.

Z uwagi na fakt, że górny koniec pręta wahadła jest sztywno zamocowany, podczas obrotu krążka dochodzi do skręcenia pręta. Jest to proces ścinania, który schematycznie został zobrazowany na rys. 2.2. Rozważmy ciało ABCD, którego ściana CD jest zamocowana i nieruchoma. W wyniku działania siły F , przyłożonej równoległe do ściany AB (płaszczyzny ścinania), występuje deformacja postaciowa, podczas której wszystkie warstwy ciała stałego przesuwają się równoległe względem siebie. Miarą odkształcenia jest kąt α , który nazywany jest kątem ścinania lub kątem odkształcenia postaciowego. Dla zakresu odkształceń sprężystych naprężenie styczne σ jest proporcjonalne do kąta α :

$$\sigma = G \cdot \alpha, \quad (2.6)$$

gdzie G nazywamy modułem sztywności lub modułem sprężystości postaciowej.

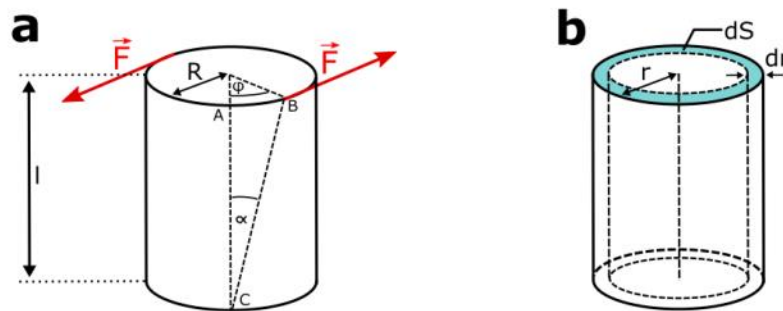


Rys. 2.2. Schemat przedstawiający proces ścinania ciała ABCD pod wpływem działania siły F

Metoda statyczna wyznaczenia modułu sztywności na skręcenie

Na rys. 2.3a zaprezentowany został walec o promieniu R i wysokości l poddany działaniu sił skręcających F . Długość łuku AB (l_{AB}) można obliczyć ze wzoru:

$$l_{AB} = R\varphi. \quad (2.7)$$



Rys. 2.3. (a) Walec o promieniu R i wysokości l poddany działaniu sił skręcających F ; (b) schematyczne przedstawienie elementarnej powierzchni dS

Zakładając, że stosunek promienia walca R do jego wysokości l jest bardzo mały, długość odcinka AB można przybliżyć za pomocą wzoru:

$$|AB| = \operatorname{tg} \alpha \cdot l \approx \alpha l \approx l_{AB}. \quad (2.8)$$

Z wzorów (2.7) i (2.8) wynika zależność:

$$\alpha l = R\varphi. \quad (2.9)$$

Podstawiając równanie (2.9) do wzoru (2.6), otrzymujemy:

$$\varphi = \frac{\sigma \cdot l}{G \cdot R}. \quad (2.10)$$

Wyobraźmy sobie, że wyodrębniamy z walca cylinder o wysokości l , promieniu r i grubości dr , jak to zostało pokazane na rys. 2.3b. Elementarny moment skręcający dM wywołany działaniem naprężeń stycznych na pierścień cylindra o szerokości dr można obliczyć w następujący sposób:

$$dM = -\sigma 2\pi r^2 dr. \quad (2.11)$$

Uwzględniając wzór (2.10), otrzymujemy:

$$dM = -\frac{2\pi G \varphi r^3}{l} dr. \quad (2.12)$$

Aby obliczyć moment sił skręcających cały walec, należy dokonać całkowania powyższego wyrażenia względem r w granicach od 0 do R :

$$M = \int_0^R -\frac{2\pi G \varphi r^3}{l} dr = -\frac{\pi G \varphi R^4}{2l}. \quad (2.13)$$

Zgodnie ze wzorem (2.3) kąt skręcenia pręta φ wahadła torsyjnego jest liniową funkcją momentu siły M_s :

$$\varphi = \frac{1}{D} M_s. \quad (2.14)$$

Przekształcając wzór (2.13) oraz korzystając z zależności (2.5), otrzymujemy wzór na moduł sprężystości G :

$$G = \frac{2Dl}{\pi R^4}. \quad (2.15)$$

W metodzie statycznej wyznaczenia modułu sztywności na skręcanie górna część badanego pręta zamocowana jest w nieruchomym uchwycie, a dolny koniec pręta połączony jest z tarczą mającą na bocznej krawędzi rowek do prowadzenia w nim nici

naciągowych. Do tych nici przymocowane są dwa obciążniki – każdy o masie m . Stąd moment działających sił może być obliczony ze wzoru:

$$M_S = 2r_t mg, \quad (2.16)$$

gdzie r_t jest promieniem tarczy pomniejszonym o głębokość rowka.

Metoda dynamiczna wyznaczenia modułu sztywności na skręcanie

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki dla ruchu obrotowego niezerowy (stały w czasie) moment siły M powoduje, że ciało o momencie bezwładności I wykonuje ruch obrotowy z przyspieszeniem ε , co można zapisać wzorem:

$$M = I\varepsilon = I \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (2.17)$$

Podstawiając do powyższego wzoru zależność (2.3), otrzymujemy równanie:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D\varphi, \quad (2.18)$$

czyli równanie oscylatora harmonicznego, którego drgania odbywają się bez tłumienia. Rozwiązaniem równania różniczkowego (2.17) jest funkcja harmoniczna:

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + \delta), \quad (2.19)$$

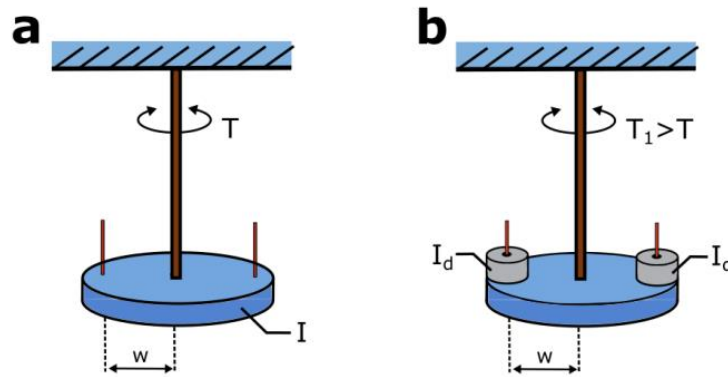
gdzie φ_0 oznacza amplitudę kątową, ω jest częstością kołową drgań, a δ to faza początkowa drgań. Można łatwo pokazać, że okres drgań oscylatora harmonicznego nietłumionego wyraża się wzorem:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}}. \quad (2.20)$$

Powyższą zależność można wykorzystać do obliczenia okresu drgań wahadła torsyjnego o momencie bezwładności I (rys. 2.4a). Wyobraźmy sobie, że wahadło to zostaje obciążone dodatkowymi walcami o sumarycznym momencie bezwładności I_1 ,

tak że ich osie symetrii znajdują się w odległości w od osi wahadła torsyjnego (rys. 2.4b). Wówczas okres drgań wahadła torsyjnego ulega wydłużeniu, zgodnie ze wzorem:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I+I_1}{D}}. \quad (2.21)$$



Rys. 2.4. (a) Wahadło torsyjne o momencie bezwładności I wykonujące drgania o okresie T oraz (b) wahadło torsyjne obciążone dodatkowymi walcami o momentach bezwładności I_d , wykonujące drgania o okresie T_1

Przekształcenie wzorów (2.15), (2.20) i (2.21) prowadzi do uzyskania wyrażenia na moduł sztywności skręcanego drutu w postaci:

$$G = \frac{8\pi l \cdot I_1}{R^4(T_1^2 - T^2)}. \quad (2.22)$$

Zgodnie z twierdzeniem Steinera całkowity moment bezwładności dodatkowych walców, umieszczonych w wahadle torsyjnym (rys. 2.4b), wynosi:

$$I_1 = N(I_0 + m \cdot w^2), \quad (2.23)$$

gdzie: N to liczba dodatkowych walców, m jest masą jednego walca, w oznacza odległość osi dodatkowych walców od osi obrotu wahadła, a I_0 jest momentem bezwładności pojedynczego walca liczonym względem jego osi symetrii. W przypadku wydrążonego walca o promieniu wewnętrznym R_w oraz zewnętrznym R_z moment bezwładności liczony względem jego osi symetrii można obliczyć ze wzoru:

$$I_0 = \frac{1}{2}m(R_w + R_z)^2. \quad (2.24)$$

Łącząc ze sobą zależność (2.23) i (2.24), otrzymujemy wyrażenie na całkowity moment bezwładności N dodatkowych walców, umieszczonych w wahadle torsyjnym:

$$I_1 = N \left[\frac{1}{2} m (R_w + R_z)^2 + m \cdot w^2 \right]. \quad (2.25)$$

Przebieg ćwiczenia

Metoda statyczna:

1. Zmierzyć długość pręta l .
2. W pięciu różnych miejscach zmierzyć za pomocą suwmiarki średnicę pręta $d=2R$.
3. Zmierzyć pięciokrotnie średnicę tarczy D_t oraz głębokość rowka x .
4. Zainstalować nici naciągowe.
5. Zanotować tzw. zerowe położenie φ_0 wskaźnika tarczy na skali kątowej w sytuacji, gdy wahadło jest nieobciążone (zawieszono nici naciągowe z trzpieniami bez obciążników).
6. Wykonać pomiary kąta obrotu tarczy φ_{ob} w funkcji masy m obciążników zawieszanych na niciach naciagowych. Na obu niciach zawieszać obciążniki o jednakowych masach. Ciężarki dobierać tak, by na zmierzonej zależności było jak najwięcej punktów pomiarowych (należy stosować kombinację ciężarków o różnych masach). Pomiary przeprowadzić w zakresie stosowalności prawa Hooke'a, co oznacza, że maksymalna wartość kąta skręcenia nie może przekroczyć 40° .
7. Przełożyć nici, tak aby móc wywołać skręcenie w przeciwnym kierunku. Powtórzyć pomiary opisane w punktach 5. i 6.

Metoda dynamiczna:

8. Zmierzyć długość pręta l .
9. W pięciu różnych miejscach zmierzyć za pomocą suwmiarki średnicę pręta $d=2R$.
10. Wprawić nieobciążone wahadło torsyjne w drgania, obracając tarczę wahadła o kąt 40° . Zmierzyć czas trwania dziesięciu drgań za pomocą stopera. Pomiary te wykonać co najmniej pięciokrotnie.
11. Zmierzyć pięciokrotnie za pomocą suwmiarki średnicę zewnętrzną $d_z=2R_z$ i wewnętrzną $d_w=2R_w$ dodatkowych walców, służących do zmiany momentu bezwładności wahadła. Wykonać pomiary umożliwiające wyznaczenie odległości

w miejsca mocowania walców od osi wahadła (patrz rys. 2.4). Zanotować wartości mas poszczególnych walców.

12. Nałożyć na wahadło dwa jednakowe walce o tej samej masie ($N=2$). Wprawić w ruch wahadło obciążone. Zmierzyć pięciokrotnie czas trwania dziesięciu drgań.
13. Pomiary opisane w powyższym punkcie wykonać dla czterech ($N=4$), a następnie sześciu ($N=6$) walców nałożonych na wahadło. Należy pamiętać, aby zawsze dobierać tę samą początkową amplitudę kątową (tj. 40°).

Opracowanie wyników

Metoda statyczna:

1. Wyznaczyć niepewność długości pręta i zapisać długość pręta zgodnie z normą.
2. Dla danych pomiarowych zarejestrowanych w punktach 2. i 3. obliczyć wartości średnie i niepewności całkowite średnicy pręta d , średnicy tarczy D_t oraz głębokości rowka x , przyjmując odpowiednią dokładność użytej suwmiarki. Wyznaczyć promień pręta R oraz wielkość r_t (czyli promień tarczy pomniejszony o głębokość rowka x : $r_t = \frac{D_t}{2} - x$) wraz z niepewnościami. Wyniki zapisać zgodnie z normą.
3. Korzystając ze wzoru (2.16), obliczyć wartości stosowanych momentów sił M_S oraz odpowiadające im kąty skręcenia ($\varphi = \varphi_{ob} - \varphi_0$). Stosując prawo propagacji niepewności, obliczyć niepewności $u(M_S)$ oraz $u(\varphi)$. Poprawnie zapisać wyniki końcowe.
4. Sporządzić wykres zależności kąta skręcenia pręta φ od wartości momentu siły M_S . Na wykresie zaznaczyć niepewności prezentowanych wielkości w postaci poziomych i pionowych słupków niepewności.
5. Metodą regresji liniowej dopasować prostą $\varphi = aM_S + b$ do danych pomiarowych na wykresie $\varphi=f(M_S)$ sporządzonym w poprzednim punkcie. Wyznaczyć współczynniki a i b prostej aproksymującej oraz ich niepewności $u(a)$ i $u(b)$.
6. Obliczyć moment kierujący ze wzoru $D = 1/a$, gdzie a oznacza współczynnik kierunkowy prostej wyznaczonej metodą regresji liniowej. Korzystając z prawa propagacji niepewności, obliczyć niepewność $u(D)$.
7. Wyznaczyć wartość modułu sprężystości G za pomocą zależności (2.15). Obliczyć niepewność $u(G)$, korzystając z prawa propagacji niepewności. Poprawnie zapisać wynik końcowy.

8. Porównać uzyskany wynik G z wartościami tablicowymi modułów sprężystości dla różnych materiałów.

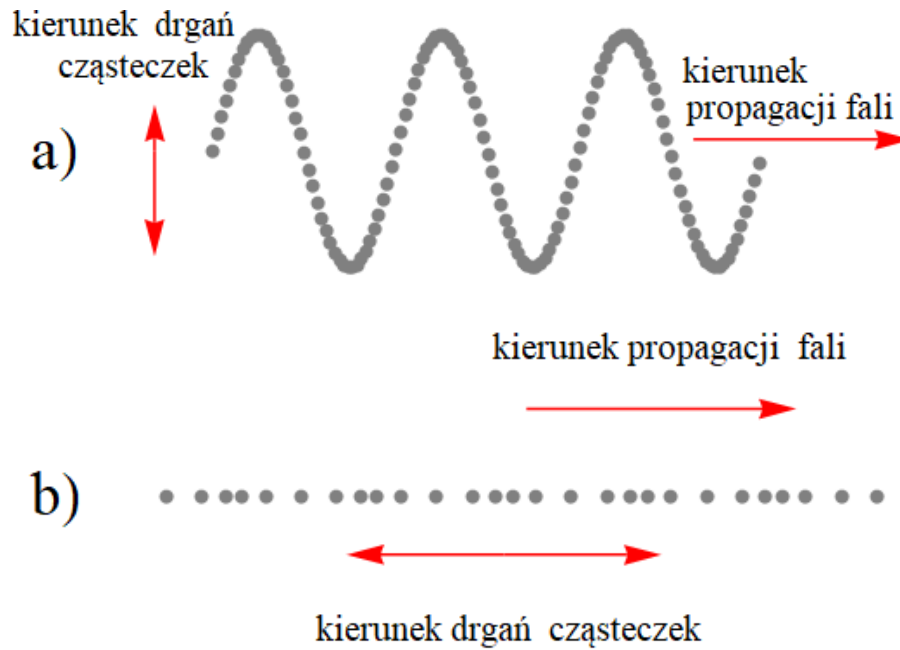
Metoda dynamiczna:

9. Wyznaczyć niepewność długości pręta i zapisać długość pręta zgodnie z normą.
10. Obliczyć wartość średnią i niepewność całkowitą średnicy pręta d i na tej podstawie wyznaczyć jego promień wraz z niepewnością.
11. Obliczyć wartości średnie i niepewności całkowite zmierzonych wymiarów walców oraz odległości w . Wyznaczyć promień wewnętrzny R_w oraz zewnętrzny R_z walców wraz z niepewnościami.
12. Obliczyć wartości średnie i niepewności całkowite zmierzonych czasów dziesięciu drgań wahadła nieobciążonego oraz obciążonego. Na tej podstawie obliczyć okresy drgań wahadła oraz ich niepewności.
13. Obliczyć wartości momentów bezwładności I_1 wahadła obciążonego dodatkowymi walcami ($N=2, 4, 6$). W tym celu zastosować wzór (2.23). Obliczyć niepewności $u(I_1)$ za pomocą prawa propagacji niepewności. Zapisać wyniki końcowe.
14. Wyznaczyć wartość modułu sztywności G dla $N=2, 4, 6$, korzystając z zależności (2.22). Obliczyć niepewności $u(G)$, posługując się prawem propagacji niepewności.
15. Obliczone w powyższym punkcie wartości G uśrednić, stosując odpowiedni wzór na średnią ważoną uwzględniającą niepewności $u(G)$ dla $N=2, 4, 6$. Zapisać wynik końcowy oraz niepewność zgodnie z obowiązującymi normami.
16. Porównać uzyskany wynik G z wartościami tablicowymi modułów sprężystości dla różnych materiałów.
17. Porównać ze sobą wartości modułu sztywności wyznaczone metodami statyczną i dynamiczną. W tym celu wykonać test zgodności.

3. ANALIZA DRGAŃ MECHANICZNYCH W STRUNACH

Ruchem falowym w ośrodku sprężystym, czyli falą mechaniczną, nazywamy przenoszenie się zaburzenia w ośrodku. Należy podkreślić, że cząsteczki ośrodka nie przemieszczają się wraz z falą. Fale sprężyste powstają na skutek wychylenia (zaburzenia) jakiegoś fragmentu ośrodka sprężystego z jego położenia równowagi, co powoduje powstanie drgań wokół tego położenia. Dzięki sprężystym właściwościom ośrodka drgania te są przekazywane kolejno do coraz dalszych jego części i w ten sposób zaburzenie przechodzi przez cały ośrodek. Wraz z rozchodzeniem się drgań w ośrodku przenoszona jest energia. Zjawisko polegające na przenoszeniu energii bez przenoszenia materii nazywamy transportem energii. Ruch falowy związany jest zatem z transportem energii przez ośrodek. Kierunek transportu energii jest zgodny z kierunkiem rozchodzenia się fali, natomiast kierunek drgań cząstek może być inny. Ze względu na kierunek, w jakim odbywają się drgania, fale dzielimy na poprzeczne (kierunek drgań jest prostopadły do kierunku propagacji fali (rys. 3.1a)) oraz podłużne (kierunek drgań jest równoległy do kierunku propagacji fali (rys. 3.1b)). Istnieją fale, które są jednocześnie poprzeczne i podłużne. Należą do nich np. fale powierzchniowe na wodzie, w których cząsteczki wody zakreślają tory eliptyczne. Rozpatrzmy falę poprzeczną rozchodzącą się w strunie. Załóżmy, że drgania zachodzą w kierunku osi y , a fala rozchodzi się w kierunku osi x płaskiego kartezjańskiego układu współrzędnych (jest to przykład fali spolaryzowanej liniowo). Rozważmy bardzo mały element tej struny o długości Δx (rys. 3.2). W ogólnym przypadku (poza położeniem równowagi) dany element struny jest wychylony w kierunku poprzecznym na odległość $y(x,t)$ (zależną od współrzędnej x i czasu t), uśrednioną wzdłuż tego elementu. Element ten nie jest już dokładnie prosty, lecz ma (na ogół) niewielką krzywiznę (kąty θ_1 i θ_2 na rys. 3.2 nie są sobie równe). Siły napinające strunę F_1 i F_2 także nie są już równe sile napinającej element w położeniu równowagi F_0 . Wartość wypadkowej siły działającej na element w kierunku osi y jest równa:

$$F_y(t) = F_2 \sin\theta_2 - F_1 \sin\theta_1 = F_2 \cos\theta_2 \operatorname{tg} \theta_2 - F_1 \cos\theta_1 \operatorname{tg} \theta_1. \quad (3.1)$$



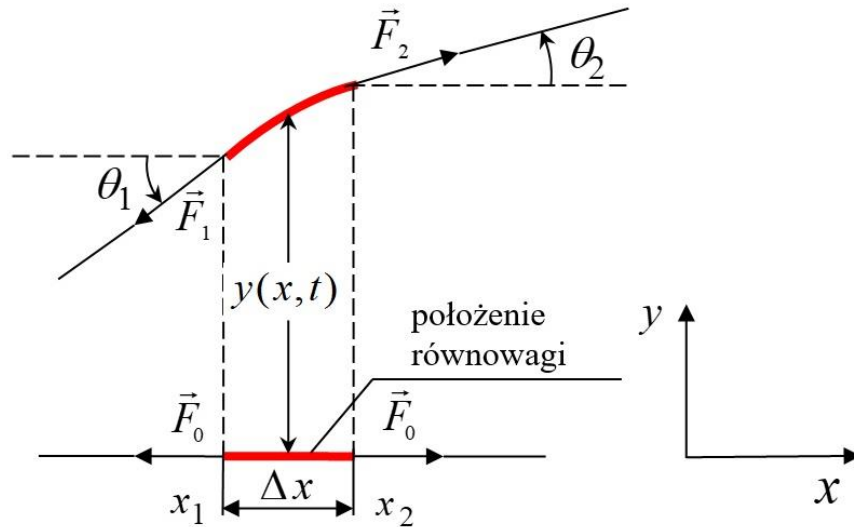
Rys. 3.1. Kierunek drgań cząsteczek i kierunek propagacji fali w przypadku: a) fali poprzecznej, b) fali podłużnej

W przybliżeniu małych drgań (pominięcie wzrostu długości elementu, wiążące się z przyjęciem niewystępowania dodatkowych sił rozciągających) zachodzi następująca równość:

$$F_2 \cos \theta_2 = F_1 \cos \theta_1 = F_0. \quad (3.2)$$

Podstawiając wzór (3.2) do (3.1), otrzymujemy (tangensy kątów θ_1 i θ_2 są równe pochodnym funkcji $y(x,t)$ odpowiednio w punktach x_1 i x_2):

$$F_y(t) = F_0 \operatorname{tg} \theta_2 - F_0 \operatorname{tg} \theta_1 = F_0 \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right)_2 - F_0 \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right)_1. \quad (3.3)$$



Rys. 3.2. Infinitesimalny (nieskończenie mały) element struny wykonującej drgania poprzeczne

Rozwijając występującą we wzorze (3.3) funkcję:

$$f(x) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \quad (3.4)$$

w szereg Taylora, dochodzimy do równania:

$$\begin{aligned} F_y(t) &= F_0 \left(\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right)_2 - \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right)_1 \right) = \\ &= F_0 (f(x_2) - f(x_1)) = F_0 \Delta x \left(\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Korzystając z drugiej zasady dynamiki Newtona:

$$F_y(t) = m a_y(t) = m \left(\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \right), \quad (3.6)$$

gdzie m oznacza masę elementu struny, $a_y(t)$ jest przyspieszeniem tego elementu w kierunku osi y , równanie (3.5) możemy zapisać w postaci:

$$m \left(\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \right) = F_0 \Delta x \left(\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right). \quad (3.7)$$

Masa elementu struny o długości Δx , gęstości ρ i polu przekroju S jest równa:

$$m = \rho S \Delta x. \quad (3.8)$$

Podstawiając wyrażenie (3.8) do wzoru (3.7) i wykonując proste przekształcenia, otrzymujemy równanie:

$$\left(\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right) = \frac{\rho S}{F_0} \left(\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\right). \quad (3.9)$$

Wzór (3.9) jest różniczkowym równaniem fali rozchodzącej się wzdłuż osi x z prędkością v , przy czym:

$$\frac{\rho S}{F_0} = \frac{1}{v^2}. \quad (3.10)$$

Przekształcając równanie (3.10), dostajemy związek pomiędzy prędkością rozchodzenia się fali i siłą napinającą strunę:

$$v = \sqrt{\frac{F_0}{\rho S}}. \quad (3.11)$$

W przypadku gdy drgania struny są wymuszane z częstotliwością f , rozwiązanie równania (3.9) można zapisać w postaci:

$$y(x, t) = y_0 \sin(kx - \omega t + \delta), \quad (3.12)$$

gdzie: y_0 jest amplitudą drgań w kierunku osi y ,

$$\omega = 2\pi f \quad (3.13)$$

jest częstotliwością kołową drgań,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (3.14)$$

oznacza długość tzw. wektora falowego propagującej fali, λ jest długością fali, a δ jest fazą początkową. Równanie (3.12) opisuje tzw. falę harmoniczną rozchodzącą się w kierunku dodatnim osi x . Rozwiązaniem równania (3.9) jest również funkcja:

$$y(x, t) = y_0 \sin(kx + \omega t + \delta), \quad (3.15)$$

opisująca rozchodzenie się fali harmoniczej w kierunku ujemnym osi x . Rozważmy nałożenie się fal rozchodzących się w strunie w przeciwnych kierunkach (opisanych wzorami (3.12) i (3.15)). Sytuacja ta występuje, kiedy rozchodząca się w zamocowanej strunie fala odbija się od jej końca i propaguje w kierunku przeciwnym do fali padającej. W wyniku nałożenia się tych dwóch fal (padającej i odbitej) w strunie powstaje tzw. fala stojąca opisana następującym wzorem:

$$\begin{aligned} y_S(x, t) &= y_0 \sin(kx - \omega t + \delta) + y_0 \sin(kx + \omega t + \delta) = \\ &= 2y_0 \sin(kx + \delta) \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ze wzoru (3.16) wynika, że amplituda fali stojącej:

$$A = 2y_0 \sin(kx + \delta) \quad (3.17)$$

jest funkcją położenia (zależy od współrzędnej x). Przyjmując warunek początkowy $\delta = 0$, otrzymujemy:

$$A = 2y_0 \sin(kx). \quad (3.18)$$

W miejscach zamocowania struny (dla struny o długości L miejsca zamocowania mają współrzędne $x = 0$ oraz $x = L$) amplituda dana wzorem (3.18) jest w dowolnej chwili w tych punktach równa zero, tzn.:

$$A(x = 0) = A(x = L) = 0. \quad (3.19)$$

Zerowanie się funkcji sinus nakłada następujący warunek:

$$kx = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (3.20)$$

czyli uwzględniając zależność (3.14):

$$x = n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.21)$$

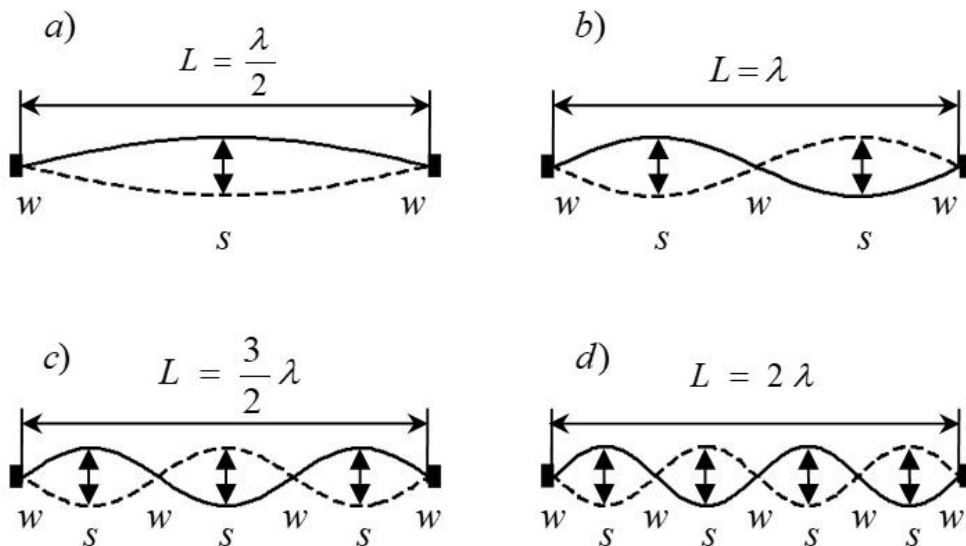
Równanie $A(x = L) = 0$ będzie zatem spełnione dla:

$$L = n \frac{\lambda}{2}. \quad (3.22)$$

Fala stojąca obserwowana w przypadku $n = 1$ nazywa się pierwszą harmoniczną. Fale odpowiadające $n = 2, 3, \dots$ nazywa się drugą, trzecią itd. harmoniczną. W przypadku n -tej harmonicznej fali stojącej na długości struny mieści się n połówek długości fali (rys. 3.3). Amplituda przyjmuje maksymalne wartości w miejscach o współrzędnej x , dla których spełnione jest równanie:

$$x = (2m + 1) \frac{\lambda}{4}, \quad m = 0, 1, 2, 3, 4 \dots \quad (3.23)$$

Punkty, w których amplituda fali stojącej ma wartość maksymalną, nazywają się strzałkami fali stojącej. Punkty, w których amplituda fali stojącej jest równa zero, noszą nazwę węzłów fali stojącej.



Rys. 3.3. Postacie drgań struny ciągłej o unieruchomionych końcach: a) pierwsza harmoniczna, b) druga harmoniczna, c) trzecia harmoniczna, d) czwarta harmoniczna. Literą w oznaczono węzły fali, a literą s strzałki fali

Długość fali można zdefiniować jako drogę, którą fala przebywa w czasie równym jednemu okresowi drgań. Zatem:

$$\lambda = v T = \frac{v}{f}. \quad (3.24)$$

Podstawiając do wzoru (3.22) zależność pomiędzy długością fali λ a jej prędkością v i częstotliwością f (wzór (3.24)) i uwzględniając zależność (3.11), otrzymujemy wyrażenie:

$$L = n \frac{\lambda}{2} = \frac{nv}{2f} = \frac{n}{2f} \sqrt{\frac{F_0}{\rho S}}. \quad (3.25)$$

Przekształcając wzór (3.25), uzyskujemy liniową zależność liczby określającej numer harmoniczej od odwrotności pierwiastka siły napinającej:

$$n = a \frac{1}{\sqrt{F_0}}, \quad (3.26)$$

gdzie:

$$a = 2Lf\sqrt{\rho S} \quad (3.27)$$

jest współczynnikiem proporcjonalności. Podnosząc do kwadratu równanie (3.27) i zakładając kołowy przekrój struny ($S = \pi r^2$, gdzie r oznacza promień struny), można wyznaczyć jej gęstość:

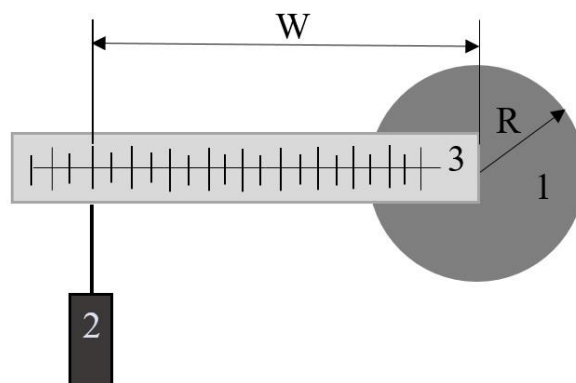
$$\rho = \frac{1}{\pi} \left(\frac{a}{2Lfr} \right)^2. \quad (3.28)$$

Przebieg ćwiczenia

1. Zmierzyć 5-krotnie przymiarem długość struny L oraz śrubą mikrometryczną jej średnicę $2r$.
2. Ustawić elektromagnes w połowie długości struny i włączając prąd w obwodzie elektromagnesu, pobudzić strunę do drgań. Zawieszać odważniki o różnych masach na ramieniu dźwigni napinającej strunę. Przesuwając je na ramieniu dźwigni, tak dobrać siłę napinającą, aby uzyskać wzbudzenie pierwszej

harmonicznej ($n = 1$) fali stojącej w strunie. Zanotować masę odważników, położenie w szalki na dźwigni oraz promień bloczka R (patrz rys. 3.4).

3. Analogicznie do punktu 2. pomiary przeprowadzić przy wzbudzeniu drugiej ($n = 2$), trzeciej ($n = 3$), czwartej ($n = 4$) i piątej ($n = 5$) harmonicznej fali stojącej. Dla każdej harmonicznej elektromagnes ustawiać w miejscu występowania dowolnej strzałki fali.



Rys. 3.4. Zamocowanie struny od strony dźwigni jednostronnej: 1 – bloczek, 2 – obciążnik, 3 – ramię dźwigni ze skalą. Definicja wielkości występujących we wzorze (3.29)

Opracowanie wyników

1. Dla wyników pomiarów wykonanych w punkcie 1. wyznaczyć wartości średnie długości L i promienia r struny oraz odpowiadające im niepewności całkowite. Zapisać wyniki końcowe.
2. Na podstawie zasady działania dźwigni jednostronnej obliczyć wartości sił napinających, korzystając ze wzoru (patrz rys. 3.4):

$$F_o = \frac{mgw}{R}, \quad (3.29)$$

gdzie: R – promień bloczka, w – odległość szalki od początku dźwigni, g – przyspieszenie ziemskie, m – całkowita masa zawieszona na dźwigni. Wykorzystując prawo propagacji niepewności, obliczyć niepewność wyznaczenia sił napinających. Zapisać wyniki końcowe.

3. Obliczenia przeprowadzić dla fal stojących zarejestrowanych w punktach 2. i 3. przebiegu ćwiczenia.

4. Sporządzić wykres ilustrujący zależność liczby obserwowanych połówek długości fali od odwrotności pierwiastka siły napinającej strunę.
5. Metodą najmniejszych kwadratów wyznaczyć współczynniki a , b prostej aproksymującej:

$$n = a \frac{1}{\sqrt{F_0}} + b \quad (3.30)$$

i ich niepewności. Prosta aproksymującą zaznaczyć na wykresie.

6. Korzystając z wyznaczonej w punkcie 5. wartości parametru a prostej aproksymującej oraz wyznaczonych wartości r i L (przyjmując $f = 100$ Hz), ze wzoru (3.28) obliczyć gęstość ρ badanej struny.
7. Wykorzystując prawo propagacji niepewności, obliczyć niepewność wyznaczonej wartości ρ . Zapisać wynik końcowy.
8. Korzystając ze wzoru (3.11), wyznaczyć prędkości v propagacji fal w badanej strunie dla stosowanych w ćwiczeniu sił napinających.
9. Wykorzystując prawo propagacji niepewności, obliczyć niepewności wyznaczonych wartości v . Zapisać wyniki końcowe.
10. Porównać (przeprowadzić test zgodności) wyznaczoną wartość gęstości struny z wartością tablicową dla stali.

4. WYZNACZANIE ELIPSOIDY BEZWŁADNOŚCI CIAŁA SZTYWNEGO

Ciałem sztywnym (bryłą sztywną) nazywamy ciało, dla którego wzajemne odległości wszystkich punktów nie ulegają zmianie pod działaniem sił. W przypadku ciała sztywnego nie można zaniedbać masy ani objętości ciała. Ciało sztywne możemy podzielić na bardzo dużą liczbę bardzo małych sztywno ze sobą związanych elementarnych mas Δm o małej objętości ΔV ($\Delta V \rightarrow 0$). Wychodząc z praw rządzących ruchem układu punktów materialnych, można więc znaleźć prawa rządzące ruchem ciała sztywnego. Rozważając ruch obrotowy takiego ciała, należy uwzględnić rozkład jego masy względem osi obrotu, czyli jego moment bezwładności względem danej osi obrotu.

Moment bezwładności

Iloczyn masy m punktu materialnego (obiektu fizycznego mającego masę oraz pomijalnie małe rozmiary w stosunku do układu odniesienia) i kwadratu odległości r tego punktu od wybranej osi O nazywany jest momentem bezwładności punktu materialnego względem osi O :

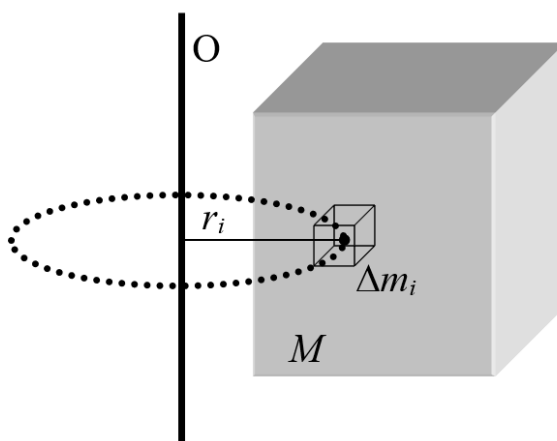
$$I = m r^2. \quad (4.1)$$

W przypadku układu punktów materialnych sumę momentów bezwładności poszczególnych punktów względem osi O nazywamy momentem bezwładności układu punktów względem tej osi:

$$I = \sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2. \quad (4.2)$$

Podzielmy ciało sztywne o masie M (rys. 4.1) na n małych sześcianów o masach Δm_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Gdy założymy, że masy poszczególnych sześcianów są skupione w ich środkach mas, otrzymamy w ten sposób sztywny układ punktów materialnych. Im mniejsze będą poszczególne sześciany, a ich liczba będzie większa, tym taki układ będzie lepszym przybliżeniem bryły sztywnej. Moment bezwładności sztywnego układu punktów względem osi obrotu wg definicji (4.2) wynosi:

$$I_n = \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2. \quad (4.3)$$



Rys. 4.1. Ilustracja do obliczania momentu bezwładności ciała o masie M względem osi obrotu O

Gdy liczba sześcianów dążyć będzie do nieskończoności, to moment bezwładności układu będzie dążyć do momentu bezwładności ciała sztywnego. Zatem momentem bezwładności ciała sztywnego będzie granica momentu bezwładności I_n , gdy $n \rightarrow \infty$:

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2 = \int_M r^2 dm. \quad (4.4)$$

Aby praktycznie obliczyć moment bezwładności ciała, czyli aby obliczyć całkę (4.4), należy przejść od całkowania po masie ciała do całkowania po jego objętości. W tym celu element masy dm należy wyrazić za pomocą elementu objętości:

$$dm = \rho dV, \quad (4.5)$$

gdzie ρ jest gęstością ciała w danym punkcie. Moment bezwładności można więc wyrazić wzorem:

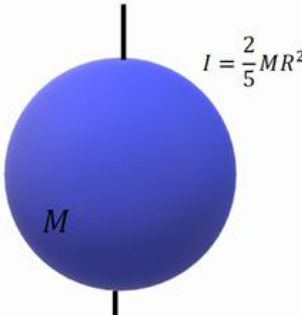
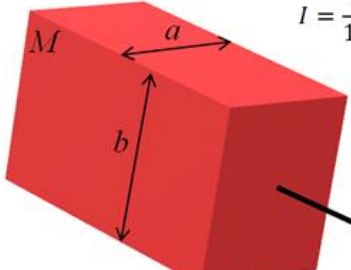
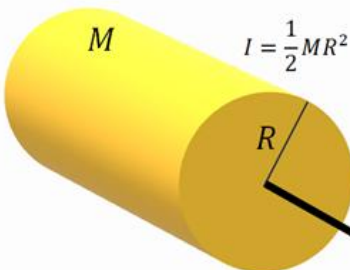
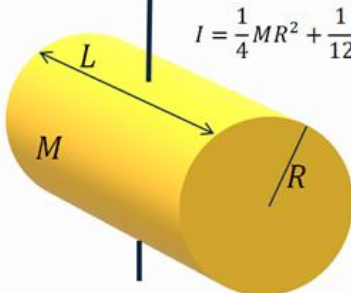
$$I = \int_V r^2 \rho dV. \quad (4.6)$$

Zastępując z kolei element objętości elementami wymiarów liniowych: $dV = dx dy dz$, otrzymujemy:

$$I = \iiint_V r^2 \rho dx dy dz. \quad (4.7)$$

Tabela 4.1

Wartości momentów bezwładności dla wybranych brył geometrycznych względem różnych osi

<p>kula</p>  <p>$I = \frac{2}{5} MR^2$</p>	<p>prostopadłościan</p>  <p>$I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$</p>
<p>walec</p>  <p>$I = \frac{1}{2} MR^2$</p>	<p>walec</p>  <p>$I = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{12} ML^2$</p>

Dla wielu brył geometrycznych można łatwo obliczyć moment bezwładności przez odpowiedni dobór układu współrzędnych. Wartości momentów bezwładności niektórych foremnych brył geometrycznych względem różnych osi obrotu podano w tab. 4.1.

Znając moment bezwładności I_s dowolnego ciała o masie M względem osi przechodzącej przez środek masy, można wyznaczyć moment bezwładności I względem dowolnej osi do niej równoległej znajdującej się w odległości a . Dokonać tego można, korzystając z twierdzenia Steinera, zgodnie z którym:

$$I = I_s + Ma^2. \quad (4.8)$$

Elipsoida bezwładności

Wśród osi przechodzących przez środek masy ciała dwie są wyróżnione. Względem jednej z nich moment bezwładności ma wartość największą I_I , względem drugiej – najmniejszą I_{II} . Osie te są prostopadłe. Wraz z trzecią osią prostopadłą do obu osie te stanowią główne osie momentu bezwładności. Momenty bezwładności liczone względem tych osi zwane są głównymi momentami bezwładności. Spełniają one warunek $I_I \geq I_{III} \geq I_{II}$, gdzie I_{III} oznacza moment bezwładności względem trzeciej osi.

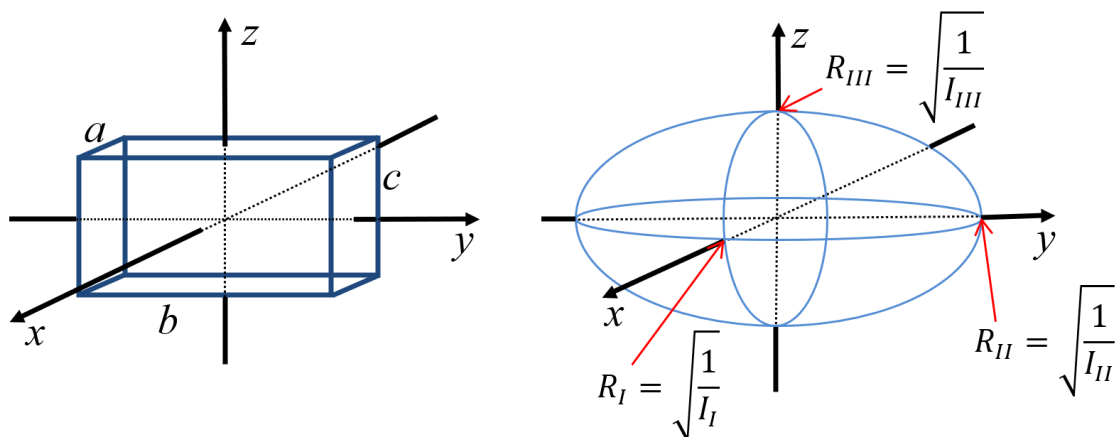
Niech I_p oznacza moment bezwładności bryły względem dowolnej osi przechodzącej przez środek masy. Na osi tej odkładamy po obu stronach od środka masy odcinki $R_p = \sqrt{\frac{1}{I_p}}$. Wzdłuż kierunków odpowiadających głównym osiom bezwładności odkładamy zatem odcinki:

$$R_I = \sqrt{\frac{1}{I_I}}, \quad R_{II} = \sqrt{\frac{1}{I_{II}}}, \quad R_{III} = \sqrt{\frac{1}{I_{III}}}. \quad (4.9)$$

Powierzchnia utworzona przez końce odcinków odłożonych w wyżej opisany sposób na wszystkich możliwych osiach przechodzących przez środek masy ciała nazywa się elipsoidą bezwładności. Wyobraźmy sobie bryłę w kształcie prostopadłościanu o bokach a, b, c , takich że $b \geq c \geq a$, umieszczoną w układzie współrzędnych w taki sposób, że środek jej masy pokrywa się z początkiem układu współrzędnych, natomiast osie x, y, z są głównymi osiami bezwładności tak jak na rys. 4.2. W takiej sytuacji względem osi x bryła ma największą wartość momentu bezwładności I_I , a względem osi y ma najmniejszą wartość momentu bezwładności I_{II} . Równanie elipsoidy ma postać:

$$\frac{x^2}{R_I^2} + \frac{y^2}{R_{II}^2} + \frac{z^2}{R_{III}^2} = 1 \quad \text{lub} \quad I_I x^2 + I_{II} y^2 + I_{III} z^2 = 1. \quad (4.10)$$

Na rys. 4.2 przedstawiono elipsoidę bezwładności prostopadłościanu.



Rys. 4.2. Prostopadłościan o bokach a, b, c , umieszczony w środku układu współrzędnych, i odpowiadająca mu elipsoida bezwładności z zaznaczonymi punktami przecięcia elipsoidy z osiami układu współrzędnych (R_I, R_{II}, R_{III})

Znajomość równania elipsoidy bezwładności umożliwia wyznaczenie momentu bezwładności bryły względem dowolnie wybranej osi obrotu przechodzącej przez jej środek masy. Moment bezwładności I_p względem tej osi wyraża wzór:

$$I_p = \frac{1}{(x_p^2 + y_p^2 + z_p^2)}, \quad (4.11)$$

gdzie x_p, y_p, z_p oznaczają współrzędne punktu przecięcia powierzchni elipsoidy przez wybraną oś. Na przykład aby wyznaczyć moment bezwładności dla prostopadłościanu względem jego głównej przekątnej, należy znaleźć współrzędne x_p, y_p, z_p punktu P, wspólnego dla elipsoidy bezwładności oraz prostej, na której leży przekątna prostopadłościanu. Równanie przekątnej prostopadłościanu ma postać:

$$\frac{x}{x_w} = \frac{y}{y_w} = \frac{z}{z_w}, \quad (4.12)$$

gdzie x_w, y_w, z_w są współrzędnymi wierzchołka prostopadłościanu. Współrzędne te można wyznaczyć z pomiaru długości a, b i c boków prostopadłościanu: $x_w = a/2, y_w = b/2, z_w = c/2$. Równanie przekątnej prostopadłościanu uzyskuje postać:

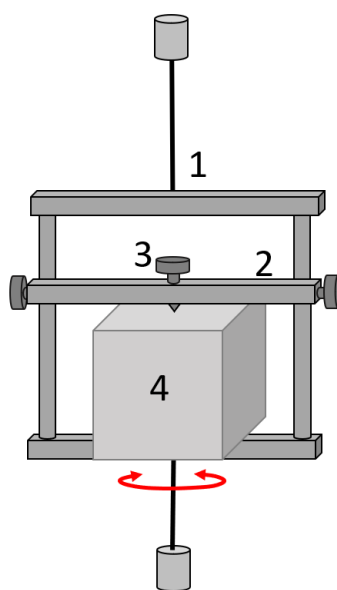
$$\frac{2x}{a} = \frac{2y}{b} = \frac{2z}{c}. \quad (4.13)$$

W celu znalezienia współrzędnych x_p, y_p, z_p punktu przecięcia należy wykorzystać wzory (4.10) oraz (4.13) i rozwiązać następujący układ równań:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x_p}{a} = \frac{y_p}{b} \\ \frac{y_p}{b} = \frac{z_p}{c} \\ I_x x_p^2 + I_y y_p^2 + I_z z_p^2 = 1, \end{array} \right. \quad (4.14)$$

gdzie I_x, I_y, I_z oznaczają główne momenty bezwładności odpowiednio względem osi x, y i z .

Układ pomiarowy



Rys. 4.3. Wahadło skrętne z zamocowaną bryłą: 1 – wahadło skrętne z ramką, 2 – ruchoma belka dociskowa, 3 – śruba dociskowa, 4 – prostopadłościan zamocowany w ramce

Do wyznaczenia momentu bezwładności danego ciała względem wybranej osi wykorzystywane jest wahadło skrętne (rys. 4.3). Okres drgań takiego wahadła zależy od momentu kierującego D (uzależnionego od parametrów wahadła, np. od sprężystości, długości oraz średnicy drutów) i od momentu bezwładności I zgodnie ze wzorem:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}}. \quad (4.15)$$

Moment bezwładności I jest równy sumie momentu bezwładności wahadła I_0 i momentu bezwładności I_C ciała zamocowanego w wahadle względem odpowiedniej

osi: $I=I_0+I_C$. Jeżeli dysponujemy ciałem wzorcowym o znanym momencie bezwładności I_w , to na podstawie pomiarów okresu drgań wahadła nieobciążonego T_0 , okresu drgań T_w wahadła obciążonego ciałem wzorcowym oraz okresu drgań T wahadła obciążonego ciałem o nieznanym momencie bezwładności można określić moment bezwładności tego ostatniego bez konieczności wyznaczenia wartości D i I_0 . Przekształcając odpowiednie równania:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{D}}, \quad T_w = 2\pi \sqrt{\frac{I_0+I_w}{D}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0+I_C}{D}} \quad (4.16)$$

w celu wyeliminowania nieznanymi wartości D i I_0 , otrzymuje się wyrażenie na moment bezwładności I_C :

$$I_C = \frac{T^2 - T_0^2}{T_w^2 - T_0^2} I_w. \quad (4.17)$$

Przebieg ćwiczenia

1. Wybrać do badań bryłę w kształcie sześciangu jako bryłę wzorcową oraz bryłę w kształcie prostopadłościanu. Zanotować masy brył. Suwmiarką zmierzyć ich wymiary, powtarzając każdy pomiar pięciokrotnie.
2. Pięciokrotnie zmierzyć czas N wahnięć wahadła bez bryły.
3. W uchwycie wahadła zamocować bryłę w kształcie sześciangu zamocowaną tak, aby obracała się względem głównej osi. Pięciokrotnie zmierzyć czas N wahnięć wahadła z sześciangiem.
4. W uchwycie wahadła zamocować bryłę w postaci prostopadłościanu i zmierzyć czas N wahnięć dla trzech głównych osi bezwładności. Każdy pomiar wykonać pięciokrotnie.
5. Prostopadłościan zamocować w ten sposób, aby wykonywał drgania wokół głównej przekątnej i pięciokrotnie zmierzyć czas N wahnięć.

Opracowanie wyników

1. Na podstawie dokonanych pomiarów obliczyć wartości średnie i całkowite niepewności wszystkich zmierzonych wielkości. Zapisać wyniki końcowe.
2. Obliczyć główny moment bezwładności sześcianu, korzystając ze wzoru podanego w tab. 4.1. Obliczyć jego niepewność i zapisać wynik końcowy.
3. Obliczyć główne momenty bezwładności prostopadłościanu, korzystając ze wzoru podanego w tab. 4.1. Obliczyć ich niepewności i zapisać wyniki końcowe.
4. Obliczyć odpowiednie okresy drgań wraz z ich niepewnościami. Zapisać wyniki końcowe.
5. Na podstawie wartości okresu drgań wyznaczyć wartości głównych momentów bezwładności oraz momentu bezwładności względem przekątnej dla bryły w kształcie prostopadłościanu. W tym celu skorzystać ze wzoru (4.17).
6. Korzystając z prawa propagacji niepewności, obliczyć niepewności, jakimi obarczone są wyznaczone wartości momentów bezwładności prostopadłościanu. Zapisać poprawnie końcowe wyniki.
7. Rozwiązując układ równań (4.14), wyznaczyć wzory na współrzędne x_p , y_p , z_p punktu P (punktu wspólnego dla elipsoidy bezwładności oraz przekątnej prostopadłościanu) i obliczyć ich wartości.
8. Wyznaczyć moment bezwładności prostopadłościanu względem głównej przekątnej, korzystając z równania (4.11) i wartości x_p , y_p , z_p .
9. Porównać wartości głównych momentów bezwładności obliczonych na podstawie wzorów teoretycznych z wartościami wyznaczonymi na podstawie pomiaru okresu drgań wahadła.
10. Porównać wartość momentu bezwładności prostopadłościanu względem głównej przekątnej wyznaczonej na podstawie pomiarów okresu drgań wahadła oraz wyliczonej z równania elipsoidy bezwładności.

5. WYZNACZANIE MOMENTU BEZWŁADNOŚCI ŻYROSKOPU

Ruch obrotowy bryły sztywnej

Wprowadzenie bryły sztywnej w ruch obrotowy wymaga zadziałania wypadkowego momentu siły (w analogiczny sposób jak zadziałanie siły jest konieczne, aby wprowadzić ciało w ruch postępowy). Ruch obrotowy może zachodzić wokół osi stałej (np. w przypadku koła zamachowego) lub wokół osi swobodnej (np. w przypadku bąka).

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego: wypadkowy moment siły \vec{M} działający na bryłę jest równy szybkości zmian momentu pędu bryły:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (5.1)$$

Momentem pędu \vec{L} punktu materialnego względem dowolnego punktu O nazywamy iloczyn wektorowy wektora położenia \vec{r} punktu materialnego względem punktu O oraz wektora pędu \vec{p} :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (5.2)$$

W przypadku bryły sztywnej obracającej się wokół osi stałej z prędkością kątową $\vec{\omega}$ moment pędu można wyrazić wzorem:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}, \quad (5.3)$$

gdzie I oznacza moment bezwładności bryły względem osi obrotu.

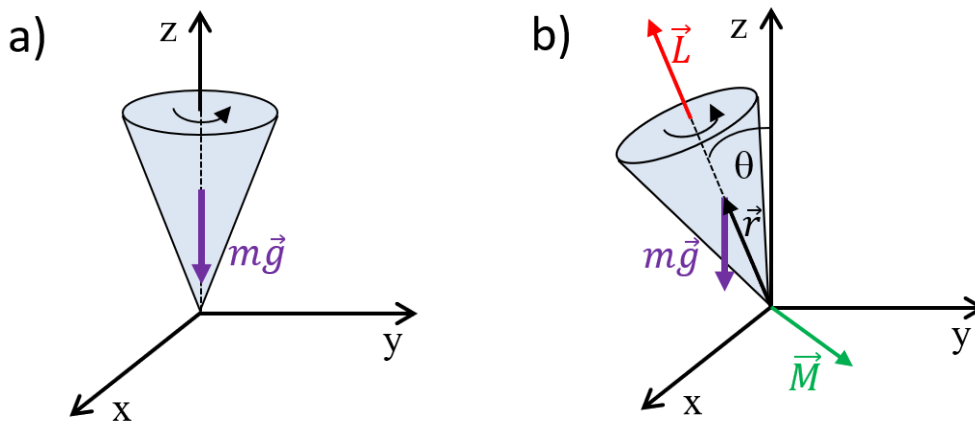
Jeżeli moment sił zewnętrznych działający na bryłę jest równy 0, to wtedy zgodnie z równaniem (5.1) moment pędu bryły pozostaje stały:

$$\vec{L} = \text{const.} \quad (5.4)$$

Dotyczy to zarówno wartości momentu pędu, jak i jego kierunku. Jest to treść zasady zachowania momentu pędu.

Bąk symetryczny

Bąkiem symetrycznym nazywamy bryłę powstałą w wyniku obrotu dowolnej figury płaskiej, czyli bryłę mającą symetrię osiową, np. stożek. Bąk symetryczny charakteryzuje się tym, że jeden z jego głównych momentów bezwładności różni się od pozostałych, a tym samym jedna z głównych osi bezwładności jest wyróżniona. Załóżmy, że bąk wiruje z prędkością kątową ω w taki sposób, że jego oś symetrii jest ustawiona pionowo (rys. 5.1a).

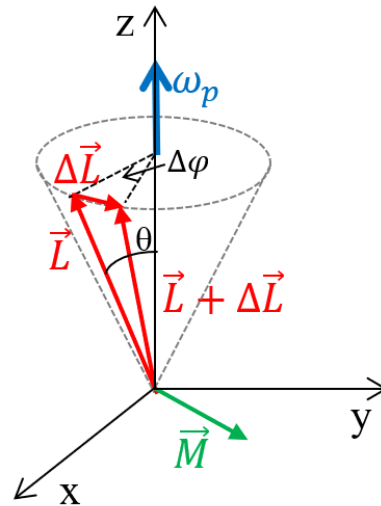


Rys. 5.1. Bąk symetryczny wirujący wokół osi pionowej (a) oraz wokół osi odchylonej od pionu o kąt θ (b)

Na bąk działa siła ciężkości. Jest ona przyłożona w środku ciężkości bąka i skierowana pionowo w dół, czyli zgodnie z osią obrotu, a zatem moment siły ciężkości względem punktu podparcia wynosi 0. Zgodnie z zasadą zachowania momentu pędu moment pędu bąka pozostaje niezmienny ($\vec{L}=\text{const}$), więc bąk utrzymuje stały kierunek osi obrotu w przestrzeni, równoległy do osi symetrii. Z kolei jeżeli bąk zostanie odchylony od pionu o kąt θ (rys. 5.1b), to pojawi się moment siły ciężkości względem punktu podparcia:

$$\vec{M} = \vec{r} \times m\vec{g}, \quad (5.5)$$

gdzie: \vec{r} – wektor położenia środka ciężkości bąka względem punktu podparcia, m – masa bąka, \vec{g} – przyspieszenie ziemskie. Moment siły prostopadły do \vec{L} wywoła zmianę momentu pędu o $\Delta\vec{L}$ (rys. 5.2).



Rys. 5.2. Położenie wektorów \vec{M} , \vec{L} oraz $\Delta\vec{L}$ podczas ruchu bąka

Ponieważ wektor $\Delta\vec{L}$ ma kierunek wektora \vec{M} , jest prostopadły do wektora \vec{L} . Wobec tego nie zmienia wartości momentu pędu, tylko jego kierunek (rys. 5.2). W rezultacie bąk wykonuje jeszcze jeden ruch obrotowy w taki sposób, że wektor momentu pędu obraca się w przestrzeni dookoła osi pionowej (osi z) z prędkością kątową ω_p . Ruch ten nazywany jest precesją. Prędkość kątowa precesji jest równa:

$$\omega_p = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \quad (5.6)$$

Z zależności geometrycznych widocznych na rys. 5.2 wynika, że:

$$\Delta\varphi \cong \frac{\Delta L}{L \sin\theta}. \quad (5.7)$$

Ponieważ:

$$\Delta L = M\Delta t, \quad (5.8)$$

a moment siły ciężkości ma wartość:

$$M = r m g \sin(180^\circ - \theta) = r m g \sin\theta, \quad (5.9)$$

więc wzór (5.7) można zapisać w postaci:

$$\Delta\phi \cong \frac{r m g \sin\theta \Delta t}{L \sin\theta} = \frac{r m g \Delta t}{L}. \quad (5.10)$$

Prędkość kątowa precesji jest więc równa:

$$\omega_p = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{r m g}{L}. \quad (5.11)$$

Wykorzystując zależność (5.3), prędkość kątową precesji można ostatecznie wyrazić wzorem:

$$\omega_p = \frac{r m g}{I \omega}, \quad (5.12)$$

czyli jej wartość zależy od momentu bezwładności I oraz prędkości kątowej ω , z jaką bryła wiruje wokół własnej osi. Po przekształceniu równania (5.11) otrzymujemy:

$$r m g = L \omega_p, \quad (5.13)$$

czyli moment siły M możemy wyrazić wzorem:

$$M = r m g \sin\theta = L \omega_p \sin\theta. \quad (5.14)$$

Wzór (5.14) zapisany w ogólniejszej formie wektorowej ma postać:

$$\vec{M} = \vec{\omega}_p \times \vec{L}. \quad (5.15)$$

Z powyższego równania wynika tzw. efekt żyroskopowy, którego osobliwość polega na tym, że moment siły działający w jednym kierunku wywołuje obrót ciała wokół osi prostopadłej do tego kierunku.

Wyżej opisane zachowanie żyroskopu jest słuszne, gdy prędkość kątowna precesji jest znacznie mniejsza niż prędkość kątowna obrotów wokół osi żyroskopu. W rzeczywistości podczas precesji żyroskopu oś obrotu podlega niewielkim wahaniom w górę i w dół. Zjawisko to nosi nazwę nutacji.

Żyroskop

Głównym elementem żyroskopu jest błąk symetryczny, który, dzięki specjalnej konstrukcji, może wykonywać ruch obrotowy wokół trzech wzajemnie prostopadłych osi. Podstawowymi własnościami ruchu żyroskopów są:

- precesja wywołana działaniem momentu sił zewnętrznych,
- zdolność zachowania niezmiennej orientacji w przestrzeni osi obracającej się bryły (bąka).

Żyroskopy mogą więc służyć do utrzymania stałego położenia kątownego oraz do wyznaczania takiego położenia. Żyroskopy wykorzystywane są m.in. w żyrokompasach, znajdujących szerokie zastosowanie w urządzeniach wskazujących wybrany kierunek w nawigacji, w żyroteodolitach, służących do wyznaczania azymutu geograficznego, w smartfonach i innych współczesnych urządzeniach jako czujniki precyzyjnego określania ich orientacji, w systemach stabilizacji okrętów itd.

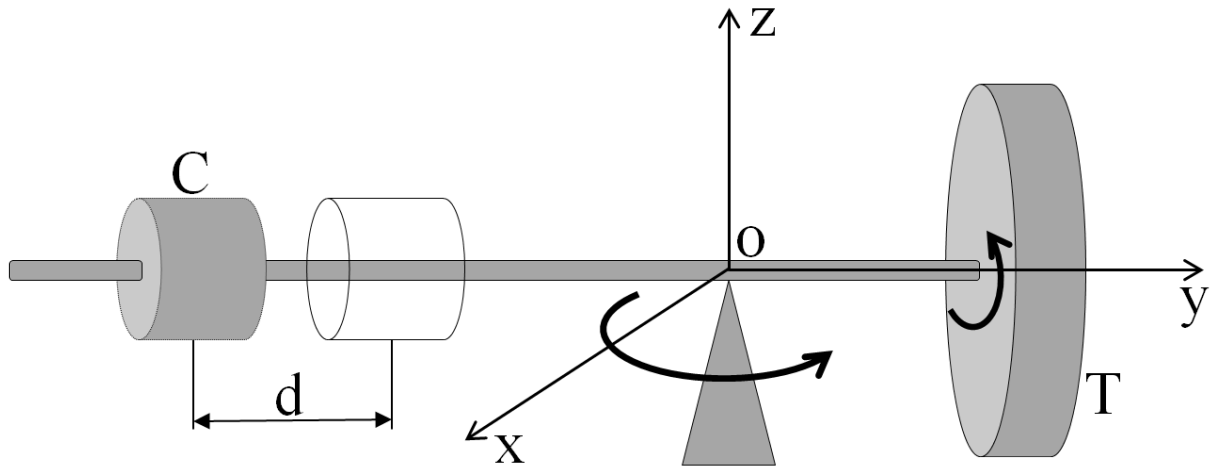
Przykładowy żyroskop przedstawiony jest na rys. 5.3. Składa się on z masywnej tarczy T, która może wirować wokół osi Oy . Tarcza osadzona jest na długim ramieniu z ciężarkiem C. Całość podparta jest w środku masy (punkt O) i tworzy dźwignię dwustronną. Dźwignia ta może wykonywać ruch obrotowy zarówno wokół osi poziomej Ox , jak i wokół osi pionowej Oz . Gdy tarcza jest nieruchoma, przesunięcie ciężarka powoduje obrót dźwigni wokół osi Ox (jak w przypadku wagi). Jeżeli tarcza wiruje, to pomimo przesunięcia ciężarka układ pozostaje w równowadze, natomiast dźwignia zaczyna się obracać wokół osi pionowej Oz , wykonując ruch precesyjny z częstością:

$$\omega_p = \frac{M}{I\omega}, \quad (5.16)$$

gdzie M jest zewnętrznym momentem wywołanym przesunięciem ciężarka:

$$M = dmg, \quad (5.17)$$

d oznacza odległość, o jaką został przesunięty ciężarek C względem położenia równowagi, m – masę ciężarka.



Rys. 5.3. Model żyroskopu (opis w tekście)

Przebieg ćwiczenia

1. Za pomocą przesuwne go ciężarka ustawić dźwignię żyroskopu w równowadze (w pozycji poziomej). Zanotować położenie ciężarka.
2. Wprawić tarczę żyroskopu w ruch obrotowy, ustalając częstotliwość obrotów wynoszącą $N = 50$ obr/s lub 100 obr/s.
3. Przesunąć ciężarek o odcinek $d = 2$ cm od położenia równowagi w lewo lub prawo, wywołując ruch precesyjny żyroskopu.
4. Zmierzyć czas trwania ruchu precesyjnego żyroskopu o zadany kąt (np. 40°).
5. Wykonać pomiary czasu trwania ruchu precesyjnego dla kolejnych położeń ciężarka, przesuwając go co 1 cm.
6. Wykonać analogiczne pomiary, przesuwając ciężarek w przeciwnym kierunku. Zwrócić uwagę na zmianę kierunku precesji żyroskopu (jeżeli precesja zachodzi przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, przyjmując, że moment siły oraz prędkość precesji mają wartość dodatnią, jeżeli precesja zachodzi zgodnie z ruchem wskazówek zegara – wartości ujemne).
7. Każdy pomiar powtórzyć co najmniej trzykrotnie.

Opracowanie wyników

1. Dla każdego położenia ciężarka obliczyć wartość średnią czasu trwania ruchu precesyjnego oraz jej niepewność.
2. Dla każdego położenia ciężarka obliczyć prędkość kątową precesji ($\omega_p = \varphi/t$ – kąt wyrazić w radianach) oraz wywołującą ją wartość zewnętrznego momentu siły $M = dm g$ (d oznacza odległość ciężarka od położenia równowagi, $m = 375$ g – masa ciężarka).
3. Wykreślić zależność prędkości kątowej precesji ω_p od momentu siły M .
4. Metodą najmniejszych kwadratów wyznaczyć współczynnik kierunkowy a oraz wyraz wolny b prostej $\omega_p = aM + b$ aproksymującej wyniki zaznaczone na wykresie $\omega_p = f(M)$.
5. Na podstawie wzoru (5.16) oraz równania prostej aproksymującej obliczyć moment bezwładności żyroskopu I (częstość obrotów tarczy żyroskopu $\omega = 2\pi N$).
6. Wyznaczyć niepewność obliczonej wartości momentu bezwładności żyroskopu I i zapisać wynik końcowy.

6. WYZNACZANIE CZASU ZDERZENIA KUL ORAZ PARAMETRÓW DEFORMACJI

Zderzeniami sprężystymi kul nazywamy zderzenia, dla których spełnione są zasady zachowania pędu i energii kinetycznej. W trakcie odkształcenia każda kula o promieniu R_k doznaje wgniecenia do wewnątrz w kształcie czaszy o promieniu podstawy r i głębokości h (rys. 6.1). Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego, na rys. 6.2 otrzymujemy związek:

$$(R_k - h)^2 + r^2 = R_k^2. \quad (6.1)$$

Przekształcenie równania (6.1) prowadzi do zależności:

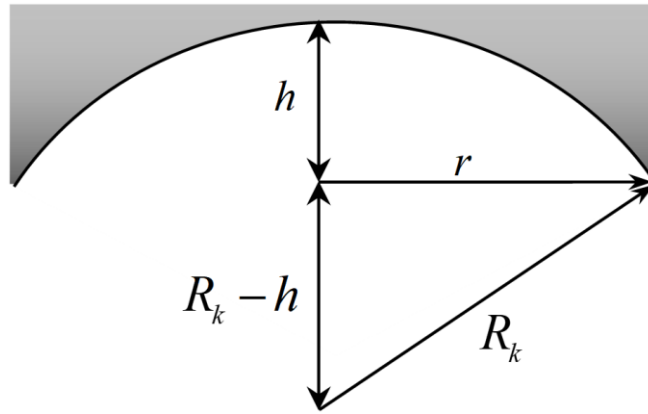
$$r^2 = 2R_k h - h^2. \quad (6.2)$$

Ze względu na małą wartość wysokości czaszy kulistej drugi wyraz we wzorze (6.2) można pominąć. Prowadzi to do wzoru:

$$r = \sqrt{2R_k h}. \quad (6.3)$$

Zderzające się kule działają na siebie siłą zależną od głębokości wgłębienia $F(l)$, rosnącą liniowo wraz z deformacją do wartości maksymalnej F_{max} dla $l = h$. Wykonują wtedy pracę W równą energii sprężystej E_s :

$$W = E_s = \frac{1}{2} F_{max} h. \quad (6.4)$$



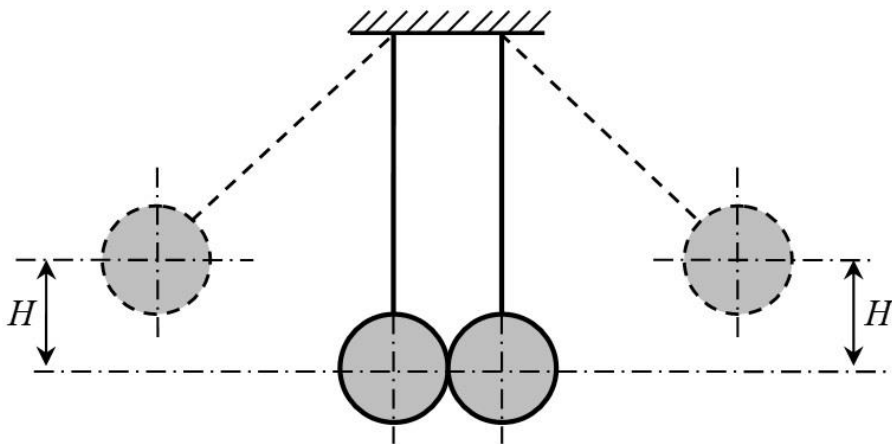
Rys. 6.1. Parametry deformacji kuli. Na rysunku nie zostały zachowane proporcje pomiędzy promieniem kuli R_k a głębokością wgniecenia h i promieniem wgniecenia r

Zgodnie z zasadą zachowania energii energia sprężysta E_s jest równa energii kinetycznej kul E_k w momencie zderzenia, a ta z kolei energii potencjalnej E_p kul w najwyższym położeniu, mierzonej względem poziomu, na którym następuje zderzenie (rys. 6.2):

$$E_s = E_k = \frac{1}{2}mv_o^2 = E_p = mgH. \quad (6.5)$$

Symbol v_o we wzorze (6.5) oznacza prędkość kul w momencie zderzenia, m jest masą kuli, H wysokością, na której znajdują się kule przed zderzeniem, mierzoną od poziomu, na którym dochodzi do zderzenia, g oznacza przyspieszenie ziemskie. Na podstawie wzorów (6.4) i (6.5) dostajemy:

$$F_{max} = \frac{2mgH}{h}. \quad (6.6)$$



Rys. 6.2. Schemat przedstawiający kule przed zderzeniem (linie przerywane) i w trakcie zderzenia (linie ciągłe)

Przy założeniu że od momentu zetknięcia się kul do ukształtowania się deformacji ruch kul jest jednostajnie opóźniony i uwzględniając fakt, że prędkość końcowa tego ruchu jest równa zero, otrzymuje się wzór na głębokość wgniecenia czaszy kulistej:

$$h = \frac{v_0 t}{2}, \quad (6.7)$$

gdzie t oznacza czas trwania ruchu opóźnionego. Czas ten jest w przybliżeniu równy połowie czasu trwania zderzenia t_z :

$$t = \frac{t_z}{2}. \quad (6.8)$$

Obliczając v_0 ze wzoru (6.5) i podstawiając do wyrażania (6.7), otrzymujemy:

$$h = \frac{t\sqrt{2gH}}{2}. \quad (6.9)$$

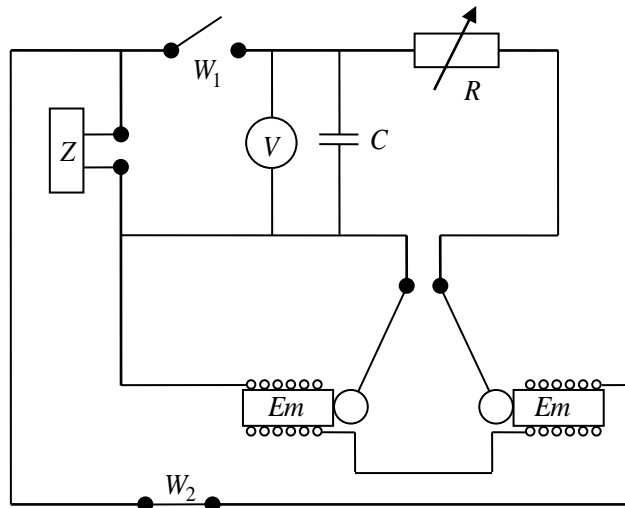
Wielkością fizyczną charakteryzującą właściwości sprężyste materiału jest moduł Younga. Występuje on we wzorze będącym matematycznym zapisem prawa Hooke'a. Moduł Younga można obliczyć ze wzoru:

$$E = \frac{3}{4} \frac{F_{max}}{r \frac{(1-\mu^2)}{h}}, \quad (6.10)$$

gdzie μ oznacza współczynnik Poissona, który dla stali jest równy 0,29. Ze wzorów (6.3), (6.6), (6.9), (6.10) otrzymujemy:

$$E = \frac{3m}{t^2 \sqrt{2hR_k}} (1 - \mu^2). \quad (6.11)$$

Podczas ćwiczenia do pomiaru czasu zderzeń kul wykorzystuje się zjawisko rozładowania kondensatora, którego okładki są połączone przewodami ze zderzającymi się kulami (rys. 6.3).



Rys. 6.3. Schemat układu do pomiaru czasu zderzenia kul (Z – zasilacz, W_1 , W_2 – wyłączniki, C – pojemność kondensatora, V – woltomierz, R – opornik o regulowanej rezystancji, Em – elektromagnesy)

Kule powinny zderzyć się w swoim najniższym położeniu. W tym celu są one przed zderzeniem przytrzymywane przez elektromagnesy. Wyłączenie na krótką chwilę prądu płynącego przez elektromagnesy powoduje jednoczesne zwolnienie obu kul, dzięki czemu zderzają się w najniższym punkcie. W czasie zderzenia następuje rozładowanie wcześniej naładowanego kondensatora. Kondensator rozładowuje się tak długo, jak długo kulki stykają się ze sobą, czyli jak długo trwa zderzenie. W obwodzie składającym się z kondensatora o pojemności elektrycznej C i opornika o oporze R płynie wówczas prąd elektryczny. Napięcie U na okładkach kondensatora, które przed zderzeniem wynosiło U_0 , po rozładowaniu zachodzącym w czasie zderzenia t_z zmniejsza się do wartości:

$$U = U_0 e^{-\frac{t_z}{CR}}. \quad (6.12)$$

Logarytmując obie strony równania (6.12) i wykonując proste przekształcenia, otrzymujemy liniową zależność funkcji $(\ln \frac{U_0}{U})^{-1}$ od R :

$$\frac{1}{\ln \frac{U_0}{U}} = AR, \quad (6.13)$$

gdzie:

$$A = \frac{C}{t_z}. \quad (6.14)$$

Przebieg ćwiczenia

1. Zmierzyć 5-krotnie odległości kul od podstawy, gdy kule zwisają swobodnie. Zanotować pojemność kondensatora C , masę m oraz średnicę $2R_k$ kulek.
2. Włączyć zasilacz. Odchylić kulki tak, aby dotknęły elektromagnesów i 5-krotnie zmierzyć ich odległość od podstawy.
3. Ustawić opór $R = 1 \Omega$. Naładować kondensator przez zamknięcie na kilka sekund wyłącznika W_1 i zanotować napięcie U_0 , jakie wskazuje woltomierz.
4. Przełącznikiem W_2 na chwilę zwolnić kule. Po zderzeniu powinny one zostać przyciągnięte przez elektromagnesy. Zanotować napięcie U w chwili po zderzeniu. Pomiary powtórzyć 5-krotnie.
5. Pomiary opisane w punktach 3. i 4. wykonać dla 10 wartości R od 1Ω do 10Ω co 1Ω .

Opracowanie wyników

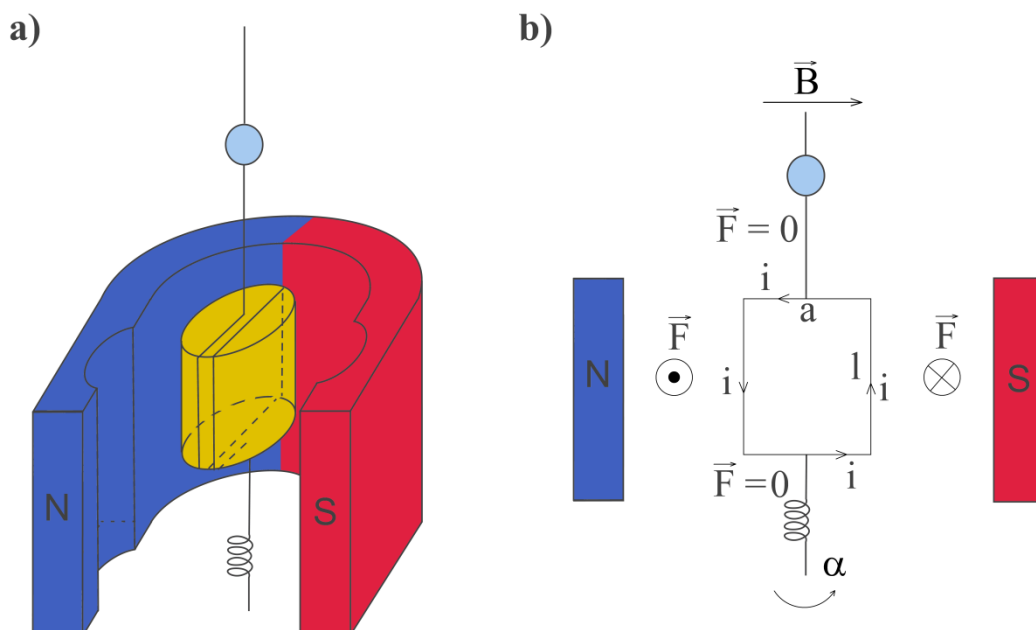
1. Dla wyników uzyskanych w punktach 1. – 5. przebiegu ćwiczenia obliczyć wartości średnie oraz niepewności całkowite. Zapisać wyniki końcowe. Wykorzystać informacje, dotyczące niepewności użytych przyrządów.
2. Sporządzić wykres zależności $\frac{1}{\ln(\frac{U_0}{U})}$ od wartości oporu R dla uśrednionych wyników uzyskanych w punkcie 5.
3. Metodą najmniejszych kwadratów obliczyć współczynniki kierunkowe prostej aproksymującej wyniki przedstawione na wykresie sporządzonym w punkcie 2. Prosta aproksymującą zaznaczyć na wykresie.
4. Wykorzystując znajomość pojemności kondensatora C oraz wartość współczynnika kierunkowego A prostej aproksymującej, obliczyć ze wzoru (6.14) czas zderzenia kul t_z oraz jego niepewność. Zapisać wynik końcowy.
5. Korzystając ze wzorów (6.8) i (6.9), obliczyć czas trwania ruchu opóźnionego t oraz wielkość h ugięcia czaszy kuli podczas zderzenia.
6. Na podstawie wzoru (6.3) obliczyć promień wgniecenia r .
7. Korzystając ze wzoru (6.11) oraz uzyskanych wyników, obliczyć moduł Younga kuli E .

8. Wykorzystując prawo propagacji niepewności, obliczyć niepewności wyznaczonych wartości h , r i E . Zapisać wyniki końcowe.
9. Porównać obliczony moduł Younga z danymi tablicowymi (przeprowadzić test zgodności).

7. BADANIA DRGAŃ TLUMIONYCH ZA POMOCĄ GALWANOMETRU ZWIERCIADLANEGO I WYZNACZANIE PARAMETRÓW CHARAKTERYSTYCZNYCH GALWANOMETRU

Budowa i funkcjonowanie galwanometru zwierciadlanego

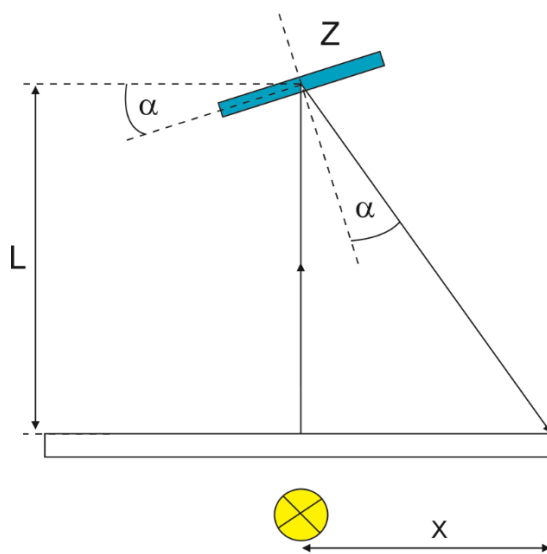
Galwanometr zwierciadlany to przyrząd typu magnetoelektrycznego, który stosowany jest do pomiarów bardzo małych prądów i napięć elektrycznych. Zbudowany jest z ruchomej prostokątnej cewki składającej się z kilkudziesięciu lub kilkuset zwojów. Zawieszona jest ona na metalowej nici, która jest jednym z doprowadzeń prądu (rys. 7.1). Drugim doprowadzeniem prądu jest spirala z cienkiego drutu, umieszczona pod cewką. Na nici zamocowane jest zwierciadełko.



Rys. 7.1. Schemat budowy (a) i zasada działania (b) galwanometru zwierciadlanego

Na zewnątrz galwanometru znajduje się oświetlacz, którego światło pada na zwierciadełko. Kąt skręcenia ramki α odczytuje się na skali, obserwując odchylenie

plamki światła odbitego od zwierciadła (rys. 7.2). Cewka pomiarowa obraca się między biegunami trwałego magnesu i pionowym walcem z miękkiego żelaza, znajdującym się w jej środku.



Rys. 7.2. Pomiar kąta skręcenia cewki galwanometru

Dzięki takiej budowie pole magnetyczne o indukcji \vec{B} jest jednorodne w miejscu, w którym umieszczona jest cewka, a jego kierunek jest prostopadły do jej osi.

Jeżeli przez uzwojenie cewki o N zwojach popłynie prąd o natężeniu i , to zadziała na nią moment siły:

$$\vec{M} = 2 \cdot \frac{\vec{a}}{2} \times \vec{F}, \quad (7.1)$$

pochodzący od dwóch sił elektrodynamicznych działających na boki ramki o długości l :

$$\vec{F} = \vec{il} \times \vec{B}. \quad (7.2)$$

Należy zauważyć, że wektor indukcji pola magnetycznego \vec{B} jest równoległy do kierunku przepływu prądu przez bok a ramki (rys. 7.1b). Dlatego siła elektrodynamiczna od tych boków nie powstaje:

$$|\vec{F}| = |\vec{il}| \times |\vec{B}| = BiL \cdot \sin(\angle \vec{il}, \vec{B}) = 0. \quad (7.3)$$

W związku z tym całkowita wartość momentów sił elektrodynamicznych powodujących wychylenie ramki z położenia równowagi na podstawie zależności (7.1) wynosi:

$$M = aF = aNBil = \phi i, \quad (7.4)$$

gdzie: a – długość boków ramki równoległych do wektora indukcji pola magnetycznego \vec{B} i pełniących funkcję ramienia siły \vec{F} , l – długość boków ramki prostopadła do wektora \vec{B} , N – liczba zwojów cewki, i – natężenie prądu płynącego przez cewkę, Φ – wartość całkowitego strumienia indukcji pola magnetycznego przechodzącego przez uzwojenie cewki.

Jednocześnie wychylenie cewki pomiarowej z położenia zerowego powoduje powstanie momentu sił sprężystych próbujących przywrócić ramkę do położenia równowagi. Wartość momentu sił sprężystych jest proporcjonalna do wychylenia ramki z położenia równowagi, a jego zwrot jest przeciwny do momentu sił elektrodynamicznych:

$$M_s = -D\alpha, \quad (7.5)$$

gdzie α to kąt obrotu ramki (patrz rys. 7.1 i 7.2), D jest stałą zależną od własności sprężystych nici (tzw. moment kierujący). Na obracającą się cewkę pomiarową działa także moment mechanicznych sił oporu ośrodka, powodujący tłumienie ruchu cewki galwanometru, o wartości:

$$M_m = -f \frac{d\alpha}{dt}, \quad (7.6)$$

gdzie f oznacza współczynnik oporu mechanicznego, natomiast $d\alpha/dt$ – prędkość kątową obracającej się cewki.

Gdy boki obracającej się cewki przecinają linie sił pola magnetycznego, to indukuje się w niej siła elektrodynamiczna:

$$E_i = -\frac{d\psi}{dt} = -\phi \frac{d\alpha}{dt}, \quad (7.7)$$

gdzie Ψ oznacza całkowity strumień indukcji pola magnetycznego przepływający przez powierzchnię cewki.

Jeżeli doprowadzenia cewki są połączone przez rezystancję zewnętrzną R , to wyindukowana siła elektrodynamiczna E_i powoduje przepływ przez cewkę prądu indukcyjnego:

$$i_i = \frac{E_i}{R+R_g}, \quad (7.8)$$

gdzie R_g jest rezystancją wewnętrzną galwanometru będącą sumą rezystancji uzwojenia cewki oraz przewodów doprowadzających prąd.

Przepływ prądu i_i przez obracającą się cewkę znajdującą się w polu magnetycznym powoduje, że zgodnie z regułą Lenza działa na nią moment mechaniczny sił oporu „indukcyjnego” skierowany przeciwnie do kierunku ruchu o wartości:

$$M_i = \phi i_i = -\frac{\phi^2}{R+R_g} \frac{d\alpha}{dt}. \quad (7.9)$$

Moment sił oporu „indukcyjnego” M_i , analogicznie do momentu sił oporu mechanicznego M_m (zależność (7.6)), powoduje tłumienie ruchu cewki. Przy uwzględnieniu momentów sił działających na cewkę (7.4)-(7.7) oraz (7.9) wypadkowe równanie ruchu cewki zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona ruchu obrotowego przyjmuje postać:

$$I \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -D\alpha - f \frac{d\alpha}{dt} - \frac{\phi^2}{R+R_g} \frac{d\alpha}{dt} + \phi i, \quad (7.10)$$

gdzie I oznacza moment bezwładności cewki.

Parametry charakterystyczne galwanometru zwierciadlanego

Gdy momenty sił przeciwdziałające ruchowi cewki (7.5), (7.6) oraz (7.9) zrównoważą moment sił elektrodynamicznych (7.4), powodujący wychylenie cewki z położenia równowagi, to cewka galwanometru będzie wychylona z położenia zerowego o stały kąt α . Gdy $\alpha = \text{const}$, równanie (7.10) sprowadza się do wzoru:

$$i = \frac{D}{\phi} \alpha, \quad (7.11)$$

W przypadku galwanometru zwierciadlanego wygodniej jest odczytywać jego wskazania jako wartości wychylenia x odbicia plamki świetlnej padającej na odpowiednią skalę umieszczoną w odległości L od zwierciadła (rys. 7.2). Dla niewielkich kątów α można stosować przybliżenie:

$$2\alpha = \operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{x}{L}. \quad (7.12)$$

Uwzględniając zależność (7.12) we wzorze (7.11), otrzymujemy związek:

$$i = \frac{D}{2\phi} \frac{x}{L} = C_i \frac{x}{L}, \quad (7.13)$$

gdzie C_i oznacza stałą prądową galwanometru. Odwrotność tej stałej nazywamy czułością prądową galwanometru:

$$S_i = \frac{1}{C_i} = \frac{2\phi}{D}. \quad (7.14)$$

Jeśli w chwili początkowej ($t=0$) kąt skręcenia cewki galwanometru wynosi α i przez galwanometr przestaje płynąć prąd elektryczny ($i = 0$), to równanie (7.10) można zapisać w następującej postaci:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\beta \frac{d\alpha}{dt} + \omega_0\alpha = 0, \quad (7.15)$$

gdzie $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{I}}$ oznacza częstość kołową drgań własnych galwanometru. Z kolei:

$$\beta = \beta_m + \beta_i = \frac{f}{2I} + \frac{\phi^2}{2I(R+R_g)} \quad (7.16)$$

oznacza współczynnik tłumienia, w którym pierwszy składnik ($\beta_m=f/2I$) to współczynnik tłumienia w przypadku rozwartej cewki. Wówczas występuje tylko moment magnetyczny sił tłumienia mechanicznego M_m (wzór 7.6) z uwagi na brak przepływu prądu przez cewkę. Drugi składnik ($\beta_i=\Phi^2(2I(R+R_g))^{-1}$) odpowiada tłumieniu wywołanemu przez moment sił oporu „indukcyjnego” M_i (wzór 7.9).

Równanie (7.15) jest klasycznym równaniem opisującym drgania oscylatora harmonicznego tłumionego. Jego rozwiązanie należy rozpatrywać w warunkach

tw. słabego ($\omega_0^2 > \beta^2$) oraz silnego ($\omega_0^2 < \beta^2$) tłumienia. W pierwszym przypadku rozwiązanie równania (7.15) ma postać:

$$\alpha = \alpha_A \cos(\omega t) = \alpha_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t), \quad (7.17)$$

gdzie:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \frac{2\pi}{T} \quad (7.18)$$

oznacza częstotliwość kołową drgań cewki galwanometru, T – pseudookres tych drgań, α_0 – amplitudę początkową.

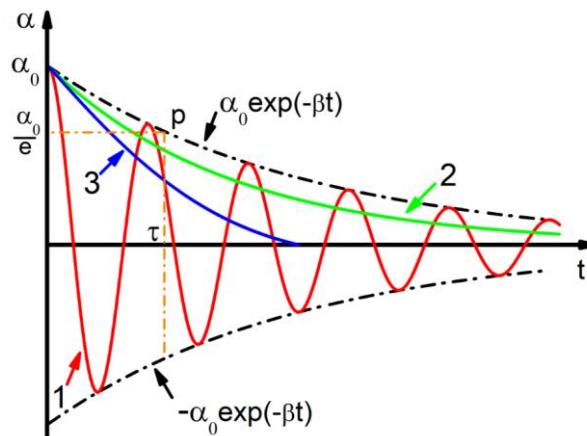
Amplituda α_A kolejnych wychyleń w tym ruchu (wzór 7.17) maleje w czasie zgodnie z zależnością:

$$\alpha_A = \alpha_0 e^{-\beta t}. \quad (7.19)$$

Logarytmiczny dekrement tłumienia (zaniku) amplitudy drgań definiuje się jako logarytm naturalny stosunku dwóch kolejnych amplitud drgań:

$$v = \ln \frac{\alpha_A(t)}{\alpha_A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T. \quad (7.20)$$

Ruch cewki w warunkach słabego tłumienia jest ruchem tłumionym pseudookresowym (krzywa 1 na rys. 7.3).



Rys. 7.3. Zmiany w czasie wychylenia plamki świetlnej galwanometru przy powrocie do położenia równowagi (1 – ruch tłumiony pseudookresowy, 2 – ruch aperiodyczny, 3 – ruch krytyczny)

W warunkach silnego tłumienia ($\omega_0^2 < \beta^2$) rozwiązanie równania (7.15) opisuje drgania aperiodyczne (krzywa 2 na rys 7.3) i przyjmuje postać:

$$\alpha = \alpha_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (7.21)$$

gdzie:

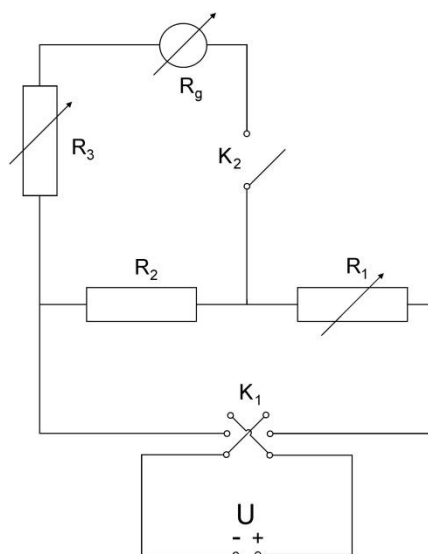
$$\tau = \frac{1}{\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \quad (7.22)$$

to tak zwany czas relaksacji, po upływie którego wychylenie maleje e-krotnie.

Gdy $\omega_0 = \beta$, cewka osiąga położenie równowagi w najkrótszym czasie (krzywa 3 na rys. 7.3). Wówczas mówimy o tłumieniu krytycznym cewki. W przyrządach pomiarowych praktycznie wykorzystuje się ruch krytyczny i pseudookresowy o tłumieniu zbliżonym do krytycznego.

Układ pomiarowy

W celu obserwacji różnych rodzajów ruchu plamki świetlnej badany galwanometr jest podłączony zgodnie ze schematem przedstawionym na rys. 7.4.



Rys. 7.4. Schemat układu pomiarowego

Stosując prawa Kirchhoffa do układu pomiarowego galwanometru (patrz schemat z rys. 7.4), można obliczyć natężenie prądu i , płynącego przez galwanometr. Jest ono dane wzorem:

$$i = \frac{R_2 U}{R_3(R_1+R_2) + R_g(R_1+R_2) + R_1 R_2}. \quad (7.23)$$

Podstawiając zależność (7.23) do równania (7.13), otrzymuje się po prostych przekształceniach liniowy związek między odwrotnością wychylenia plamki galwanometru a zmianą rezystancji R_3 przy stałych pozostałych elementach obwodu:

$$\frac{L}{x} = a R_3 + b, \quad (7.24)$$

gdzie:

$$a = \frac{R_1+R_2}{R_2 U} C_i \quad (7.25)$$

oraz:

$$b = \left(\frac{R_1+R_2}{R_2 U} R_g + \frac{R_1}{U} \right) C_i. \quad (7.26)$$

Na podstawie pomiarów wychylenia plamki świetlnej galwanometru można więc wyznaczyć stałą prądową galwanometru oraz jego rezystancję wewnętrzną.

Przebieg ćwiczenia

Sprawdzenie układu pomiarowego:

1. Połączyć układ pomiarowy zgodnie ze schematem z rys. 7.4 oraz zanotować wartości charakterystyczne dla galwanometru z jego tabliczki znamionowej (**Proszę nie dotykać galwanometru!**).
2. Włączyć zewnętrzny oświetlacz galwanometru i ustawić skalę w odległości $L = 1$ m od galwanometru tak, aby plamka świetlna była ostra i znajdowała się na środku skali. Zamknąć obwód galwanometru kluczem K_2 .
3. Rezystancję R_1 ustawić na maksymalną wartość, a rezystancję $R_3 = 2$ k Ω . Włączyć zasilanie układu za pomocą klucza K_1 . Ustawić wartość rezystancji R_1 tak, aby plamka świetlna wychyliła się o 200 mm na skali. Przełączyć przełącznikiem krzyżowym K_1 kierunek płynięcia prądu i sprawdzić, czy wychylenie w danym

kierunku jest takie samo. Jeśli nie, to należy lekko przesunąć skalę, aby uzyskać jednakowe wychylenia w lewo i w prawo od położenia równowagi.

Wyznaczanie czułości i rezystancji wewnętrznej galwanometru:

4. Przy stałych wartościach rezystancji R_1 i R_2 oraz napięcia U zmierzyć wychylenie plamki x jako funkcję rezystancji R_3 dla jednego z kierunków przepływu prądu przez galwanometr. Kierunek przepływu prądu przełączać kluczem K_1 i powtórzyć pomiar dla kierunku przeciwnego. Pomiary wykonać co 10 mm w zakresie od 0 mm do 200 mm.

Badanie drgań swobodnych galwanometru:

5. Wracając do wartości rezystancji układu z punktu 3. przebiegu ćwiczenia, ponownie wychylić plamkę na skali o 200 mm. Przerwać przepływ prądu w obwodzie galwanometru kluczem K_2 (rys. 7.4). Pięciokrotnie zmierzyć stoperem czas trwania 10 pełnych okresów drgań. Zanotować dokładność stopera.
6. Zamknąć obwód kluczem K_2 i ponownie ustalić wychylenie plamki na 200 mm. Otworzyć obwód kluczem K_2 i zmierzyć wartości 10 kolejnych amplitud x_n drgań plamki galwanometru oraz ich czas występowania.

Badanie drgań tłumionych:

7. Zamknąć obwód kluczem K_2 . Postępując analogicznie do punktu 3. przebiegu ćwiczenia, przy rezystancji $R_3 = 2 \text{ k}\Omega$ wychylić plamkę świetlną o 200 mm z położenia równowagi.
8. Otworzyć obwód przez otwarcie klucza K_1 i zarejestrować pierwszą amplitudę wychylenia plamki świetlnej.
9. Pomiary z punktu 8. Powtórzyć, zwiększając rezystancję R_3 co 1 k Ω w zakresie od 2 k Ω do 10 k Ω , dobierając za każdym razem wartość rezystancji R_1 , tak aby plamka przed otwarciem obwodu była wychylona o 200 mm.

Uwaga: Zmniejszając wartości R_3 , zwiększa się skręcenie cewki, dlatego trzeba jednocześnie zwiększać wartość rezystancji R_1 , tak aby wychylenie plamki galwanometru nie przekraczało 200 mm.

Badanie aperiodycznego ruchu tłumionego:

10. Dla rezystancji $R_3 = 50 \text{ }\Omega$ ustalić wychylenie plamki na 200 mm, zmieniając wartość rezystancji R_1 . Przy przerywaniu przepływu prądu w obwodzie plamka galwanometru osiąga asymptotycznie stan równowagi, tak więc otwierając klucz

K_1 , zmierzyć czas, po którym plamka osiągnie wychylenie 150 mm, 100 mm, 50 mm, 40 mm, 30 mm, 20 mm i 10 mm na skali.

11. Pomiar z punktu 10. powtórzyć dla rezystancji R_3 równej 200 Ω oraz 100 Ω .

Opracowanie wyników

Wyznaczanie czułości i rezystancji wewnętrznej galwanometru:

1. Wyniki uzyskane w punkcie 4. przebiegu ćwiczenia przedstawić na wykresie $\frac{L}{x} = f(R_3)$.
2. Metodą najmniejszych kwadratów obliczyć współczynniki a oraz b prostej aproksymującej wyniki przedstawione na wykresie oraz niepewności wyznaczenia ich wartości. Prosta aproksymującą zaznaczyć na wykresie.
3. Rozwiązując układ złożony z równań (7.25) i (7.26), wyznaczyć stałą prądową C_i galwanometru oraz jego rezystancję wewnętrzną R_g . Następnie na podstawie lewej strony równania (7.14) obliczyć czułość prądową galwanometru. Metodą propagacji niepewności określić wartości niepewności wyznaczenia tych wielkości. Za pomocą testu zgodności otrzymane wielkości porównać z wartościami zanotowanymi z tabliczki znamionowej galwanometru.

Badanie drgań swobodnych galwanometru:

4. Na podstawie wyników pomiarów uzyskanych w punkcie 5. przebiegu ćwiczenia wyznaczyć okres drgań swobodnych galwanometru T i ich niepewność.
5. Na podstawie wyników pomiarów uzyskanych w punkcie 6. przebiegu ćwiczenia sporządzić wykresy: $x_A = f(t)$ oraz $\ln\left(\frac{x_A}{L}\right) = f(t)$.
6. Wyniki, przedstawione na wykresie $\ln\left(\frac{x_A}{L}\right) = f(t)$, aproksymować za pomocą metody najmniejszych kwadratów. Wykorzystując wzory (7.12) i (7.19) oraz wyznaczone wartości współczynników prostej aproksymującej określić wartość współczynnika tłumienia $\beta = \beta_m$ drgań swobodnych oraz jego niepewność.
7. Podstawiając wyznaczone w punktach 4. i 6. opracowania wyników wartości T i β do prawej strony równania (7.20) obliczyć wartość logarytmicznego dekrementu u zaniku drgań swobodnych i jego niepewność metodą propagacji niepewności.

8. Na podstawie prawej strony równania (7.18) i otrzymanych wartości okresu T oraz współczynnika tłumienia β obliczyć częstość kołową drgań własnych galwanometru ω_0 i jej niepewność metodą propagacji niepewności.

Badanie drgań tłumionych:

9. Korzystając z wyników pomiarów zarejestrowanych w punktach 8. i 9. przebiegu ćwiczenia oraz lewej strony zależności (7.20), obliczyć logarytmiczny dekrement tłumienia dla każdej wartości rezystancji R_3 i sporządzić wykres $v = f(R_3)$.

Badanie aperiodycznego ruchu tłumionego:

10. Z wyników uzyskanych w punktach 10. i 11. przebiegu ćwiczenia sporządzić wykresy $x = f(t)$ oraz $\ln\left(\frac{x}{L}\right) = f(t)$. Wyniki dla drugiej zależności aproksymować metodą najmniejszych kwadratów.
11. Korzystając ze wzorów (7.12) i (7.21) oraz wyznaczonych wartości współczynników prostej i ich niepewności w punkcie 10. opracowania wyników, obliczyć wartości czasów relaksacji i ich niepewności dla różnych wartości rezystancji R_3 .

8. BADANIE ZŁOŻENIA MECHANICZNYCH I ELEKTRYCZNYCH DRGAŃ HARMONICZNYCH PRZEZ OBSERWACJĘ KRZYWYCH LISSAJOUS

Ruch drgający jest powszechny w naszym życiu codziennym. Występuje on na tyle często, że nawet go nie zauważamy, a nawet nie zdajemy sobie sprawy z jego występowania. Prostymi przykładami ruchu drgającego są: wydające dźwięk struny instrumentów muzycznych, drgania ciał zawieszonych na sprężynie, wahadła zegarów, czy nawet atomy wykonujące drgania termiczne w każdym ciele stałym, w tym także w naszych ciałach. Poza prostymi drganiami jeszcze częściej mamy do czynienia ze złożeniem drgań o różnych kierunkach, częstotliwościach, amplitudach lub fazach, np. podczas jazdy samochodem po wybojach. Pojedynczy cykl drgania rozpoczyna się w położeniu początkowym, po czym ciało przyspiesza, nabierając prędkości, przechodzi przez położenie równowagi, zwalnia i zatrzymuje się w drugim skrajnym punkcie, by następnie powrócić do położenia pierwotnego, kończąc pełny cykl. Jeśli położenie ciała powtarza się w regularnych odstępach czasu, to taki ruch nazywamy periodycznym. Wówczas czas trwania jednego cyklu nazywamy okresem drgań T , a liczbę cykli, jakie ciało wykonuje w jednostkowym czasie, nazywamy częstotliwością drgań f . Jeżeli położenie ciała zmienia się jak funkcja sinus, to taki ruch nazywamy harmonicznym. Typowymi przykładami ruchu harmonicznego omawianymi na wykładach z fizyki jest ciało zawieszone na sprężynie oraz wahadła matematyczne i fizyczne.

Zmianę położenia ciała w czasie można w przypadku prostego drgania harmonicznego opisać za pomocą wzoru:

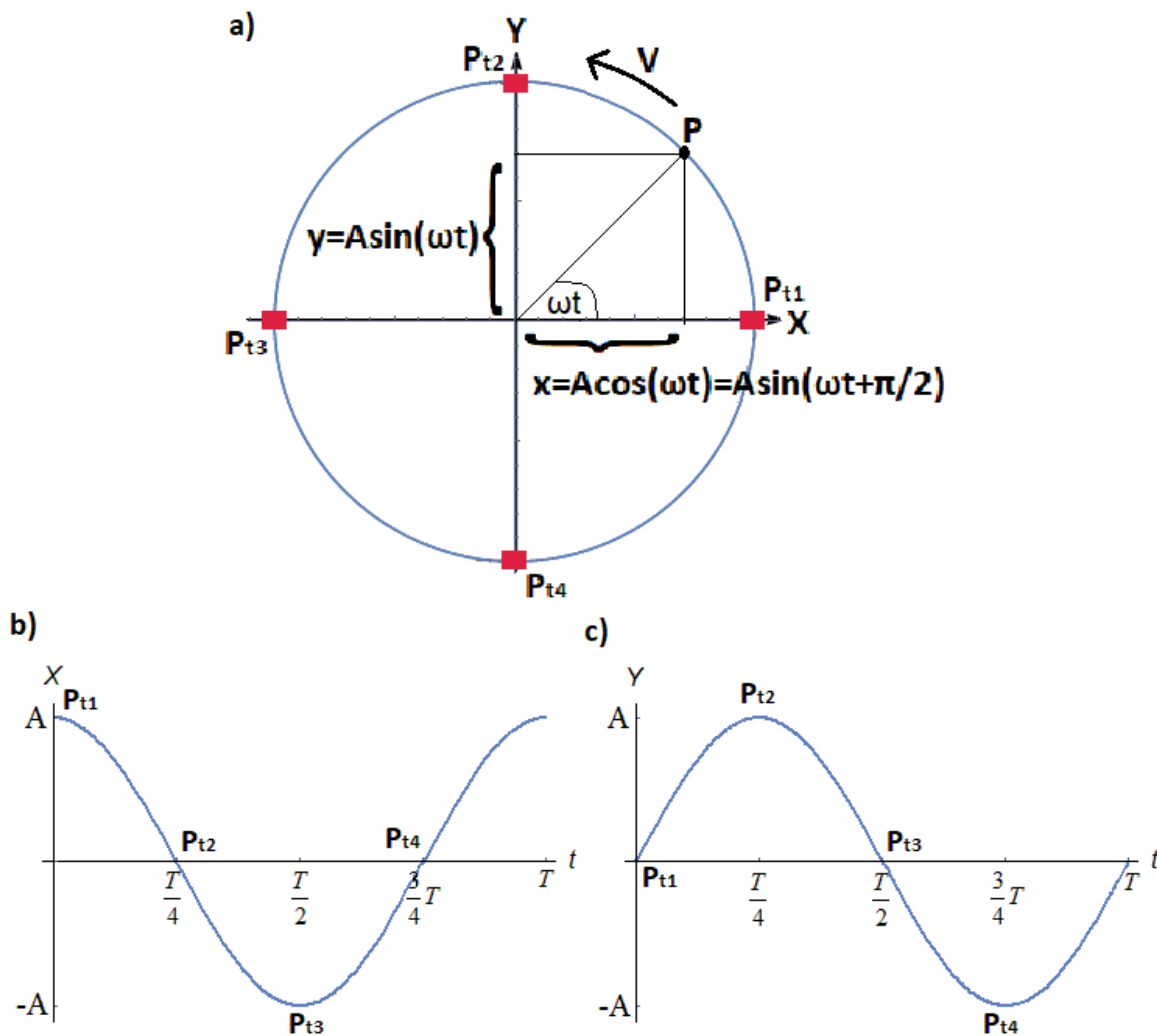
$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (8.1)$$

gdzie: $x(t)$ oznacza położenie ciała w danej chwili, A – amplitudę drgań, $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ – częstość kołową drgań, a φ_0 – fazę początkową w chwili $t = 0$. Całe wyrażenie stanowiące argument funkcji sinus nazywamy fazą drgania w danej chwili.

W tym ćwiczeniu będziemy obserwować złożenie dwóch wzajemnie prostopadłych drgań harmoniczných. Zakładamy, że jedno drganie zachodzi w kierunku osi X , a drugie w kierunku osi Y w kartezjańskim układzie współrzędnych. W tym przypadku ruch ciała można opisać za pomocą następujących wzorów:

$$x(t) = A_x \sin(\omega_x t + \varphi_{0x}); \quad y(t) = A_y \sin(\omega_y t + \varphi_{0y}). \quad (8.2)$$

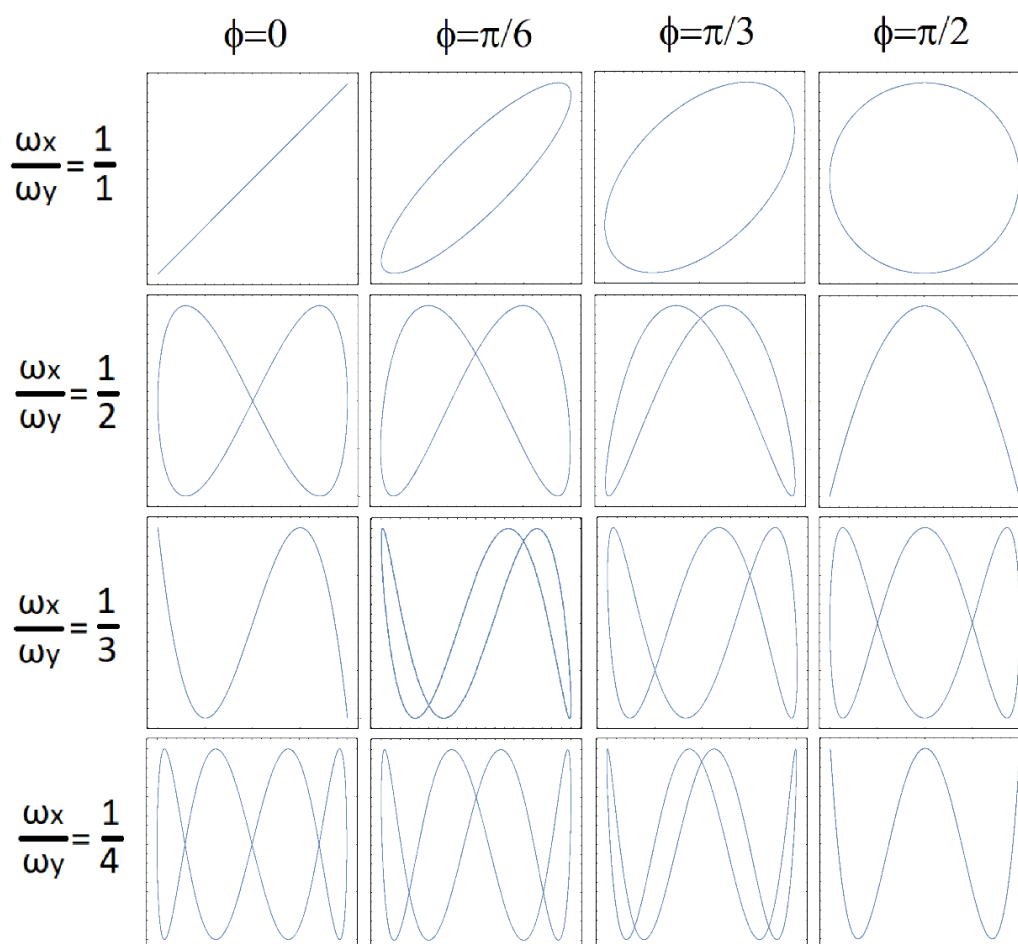
Założmy na początku, że amplitudy obu drgań oraz ich częstości kołowe są takie same, a drgania różnią się jedynie fazą początkową. Najprostszym przykładem takiego złożenia jest ruch jednostajny po okręgu.



Rys. 8.1. a) Złożenie dwóch wzajemnie prostopadłych drgań harmoniczných; b, c) drgania składowe odpowiednio wzdłuż osi X i Y

Na rys. 8.1 przedstawiono złożenie dwóch wzajemnie prostopadłych drgań harmoniczych oraz drgania składowe. Za pomocą czerwonych prostokątów na rys. 8.1a zaznaczono położenia punktu P w charakterystycznych chwilach zaznaczonych także na krzywych z rys. 8.1b oraz 8.1c. Drganie rozpoczyna się w punkcie P_{t1} w chwili $t = 0$. Następnie po czasie $T/4$ dociera do punktu P_{t2} itd. Po wykonaniu pełnego okresu drgań powraca do punktu P_{t1} i cykl się powtarza.

Założmy, że częstotliwości kołowe drgań składowych ω_x i ω_y we wzorze (8.2) są wielokrotnościami pewnej częstotliwości podstawowej ω . Można wówczas zapisać, że $\omega_x = n\omega$, $\omega_y = m\omega$ (n, m – liczby naturalne). Wtedy torem ruchu w płaszczyźnie XY jest pewna krzywa, zwana krzywą Lissajous. Jej szczególnym przypadkiem jest okrąg. Na rys. 8.2 przedstawiono kilka przykładowych krzywych powstałych przez nałożenie wzajemnie prostopadłych drgań harmoniczych o różnych różnicach faz początkowych ($\varphi = \varphi_{0y} - \varphi_{0x}$) oraz o różnym stosunku częstotliwości kołowych.



Rys. 8.2. Przykładowe krzywe Lissajous powstałe przez nałożenie wzajemnie prostopadłych drgań harmoniczych o różnych różnicach faz początkowych ($\varphi = \varphi_{0y} - \varphi_{0x}$) oraz o różnym stosunku częstotliwości

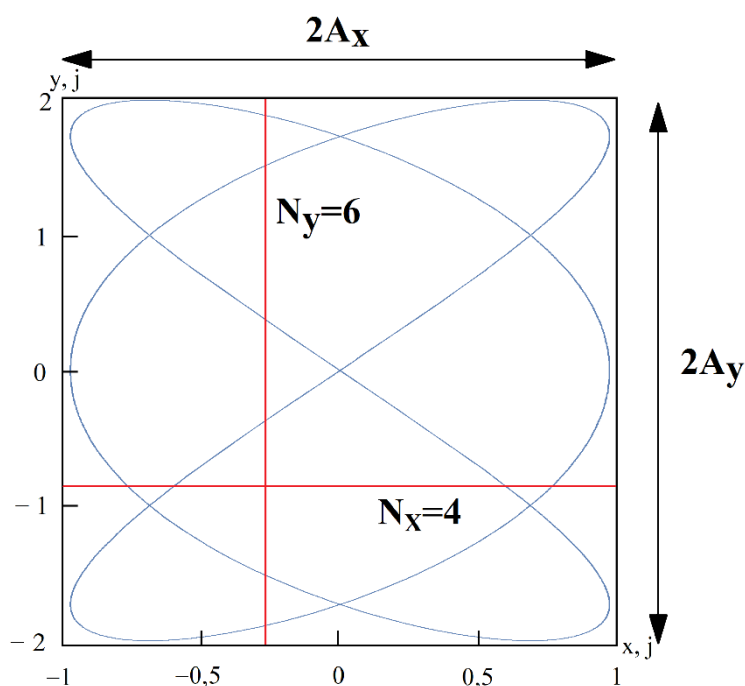
Kształt otrzymanej krzywej Lissajous zależy od następujących parametrów drgań składowych:

- amplitudy – ich podwojone wartości ($2A_x$ i $2A_y$) są równe długościom boków prostokąta opisanego na tej krzywej – patrz rys. 8.3,
- różnicy faz początkowych φ ,
- częstości kołowych ω .

Stosunek częstości kołowych można wyznaczyć, rysując proste równoległe do osi układu współrzędnych. Proste te nie mogą przechodzić przez punkty przecięcia krzywej oraz nie mogą być styczne do krzywej w żadnym punkcie. Wówczas stosunek liczby przecięć prostej równoległej do osi Y z krzywą Lissajous (N_y) do liczby przecięć prostej równoległej do osi X z tą krzywą (N_x) zależy od częstości kołowej drgań składowych zgodnie ze wzorem:

$$\frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{N_x}{N_y}. \quad (8.3)$$

Znając częstość kołową drgań wzdłuż jednej z osi, można wyznaczyć częstość kołową drugiego z drgań. Rysunek 8.3 przedstawia sposób określania parametrów drgań na podstawie przykładowej krzywej Lissajous.



Rys. 8.3. Określanie parametrów drgań na podstawie krzywej Lissajous

W przykładzie tym stosunek częstości kołowych drgań wynosi $\omega_y:\omega_x=2:3$, amplituda drgania wzdłuż osi Y to $2j$, a wzdłuż osi X $1j$, gdzie j to jednostka długości.

Rozważmy teraz przypadek, gdy oba z prostopadłych drgań składowych odbywają się z tą samą częstością kołową, czyli $\omega_x=\omega_y=\omega$. Równania (8.2) można wówczas zapisać za pomocą różnicy faz początkowych ($\varphi=\varphi_{0y}-\varphi_{0x}$). Przy uwzględnieniu tych założeń równania (8.2) przyjmą postać:

$$\begin{cases} x = A_x \sin(\omega t) \\ y = A_y \sin(\omega t + \varphi) = A_y [\sin(\omega t) \cdot \cos(\varphi) + \cos(\omega t) \cdot \sin(\varphi)] \end{cases} \quad (8.4)$$

Wyznaczając wielkości $\sin(\omega t)$ oraz $\cos(\omega t)$ ze wzorów (8.4), otrzymujemy:

$$\begin{cases} \sin(\omega t) = \frac{x}{A_x} \\ \cos(\omega t) = \frac{y - A_y \sin(\omega t) \cos \varphi}{A_y \sin \varphi} = \frac{y - A_y \frac{x}{A_x} \cos \varphi}{A_y \sin \varphi}. \end{cases} \quad (8.5)$$

Podnosząc oba równania do kwadratu i następnie korzystając z tożsamości $\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$, uzyskujemy:

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{A_x^2 y^2 - 2A_x A_y x y \cos \varphi + A_y^2 x^2 \cos^2 \varphi}{A_x^2 A_y^2 \sin^2 \varphi} = 1. \quad (8.6)$$

Po kilku prostych przekształceniach równanie (8.6) przyjmuje postać:

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} - \frac{2xy \cos \varphi}{A_x A_y} = \sin^2 \varphi. \quad (8.7)$$

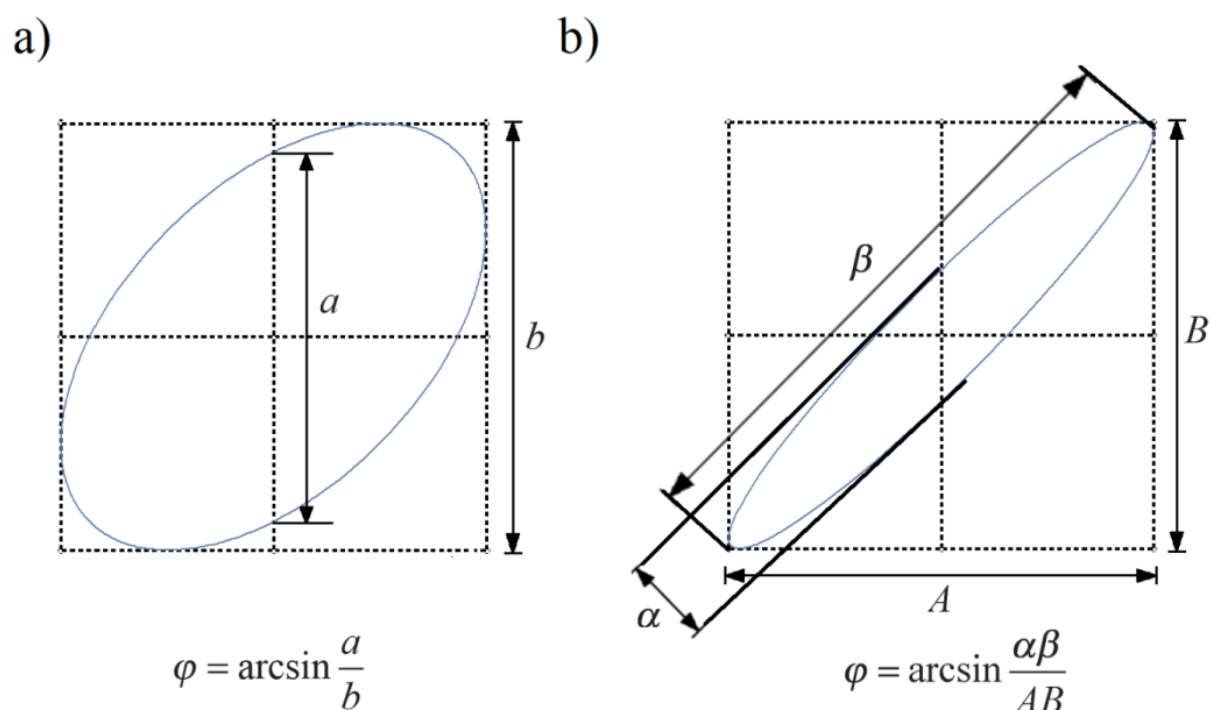
Widać, że równanie (8.7) jest równaniem elipsy w kartezjańskim układzie współrzędnych.

Istnieją dwa szczególne przypadki rozwiązania tego równania (rys. 8.2):

1. Gdy różnica faz $\varphi = 0$ lub $\varphi = \pi$, równanie (8.7) redukuje się do równania prostych odpowiednio $y = (A_y/A_x)x$ lub $y = -(A_y/A_x)x$.
2. Gdy amplitudy obu drgań są równe $A_x = A_y = A$ oraz różnica faz wynosi $\varphi = \pi/2$ lub $\varphi = 3\pi/2$, równanie redukuje się do równania okręgu $x^2 + y^2 = A^2$.

Różnica pomiędzy warunkami $\varphi = \pi/2$ oraz $\varphi = 3\pi/2$ polega na tym, że w pierwszym przypadku punkt obiega okrąg zgodnie z ruchem wskazówek zegara, a w drugim przypadku w kierunku przeciwnym do tego ruchu.

W przypadku gdy częstotści kołowe drgań składowych są sobie równe $\omega_x = \omega_y = \omega$, z analizy kształtu elipsy można uzyskać informację na temat różnicy faz φ między tymi drganiami. W zależności od wartości różnicy faz istnieją dwa sposoby ich wyznaczenia, zilustrowane na rys. 8.4. W przypadku małej różnicy faz (poniżej 10°) dokładniejszy jest sposób prezentowany na rys. 8.4b. W pozostałych przypadkach stosuje się metodę pokazaną na rys. 8.4a. Amplitudy drgań składowych w kierunku osi X i Y nie mają wpływu na wynik określenia wartości różnicy faz.



Rys. 8.4. Określanie różnicy faz φ drgań składowych na podstawie kształtu krzywej Lissajous

W niniejszym ćwiczeniu prezentowane są dwa różne sposoby obserwacji krzywych Lissajous. Jednym jest złożenie wzajemnie prostopadłych mechanicznych drgań harmonicznnych wykonywanych przez wprowadzone w ruch ciężarki (wahadła fizyczne). Drugi sposób to obserwacja wzajemnie prostopadłych elektrycznych drgań harmonicznnych za pomocą oscyloskopu.

Wahadło fizyczne jest jednym z przykładów oscylatora harmonicznego, czyli układu drgającego pod wpływem siły proporcjonalnej do wychylenia ciała z położenia równowagi:

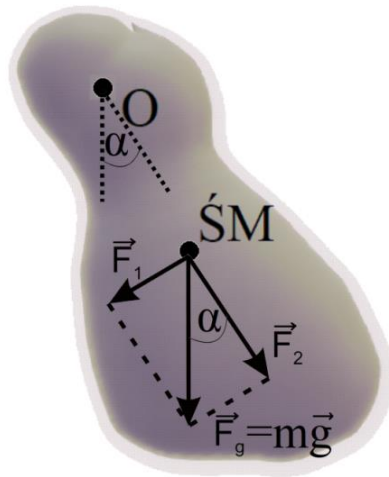
$$F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \quad (8.8)$$

gdzie: m to masa oscylatora, a – jego przyspieszenie, x – wychylenie z położenia równowagi, k – stała sprężystości. Znak minus po prawej stronie równania (8.7) oznacza, że wektor działającej siły ma przeciwny zwrot do wektora wychylenia z położenia równowagi. Wynika stąd, że siła ta próbuje przywrócić oscylator do położenia równowagi. Przekształcając równanie (8.8), otrzymujemy klasyczną postać równania ruchu oscylatora harmonicznego:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad (8.9)$$

gdzie $\omega = \sqrt{k/m}$ oznacza częstość kołową drgań oscylatora harmonicznego. Rozwiązaniem tego równania jest funkcja postaci $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$, gdzie A oznacza amplitudę drgań, φ_0 – fazę początkową drgań.

Wahadłem fizycznym (rys. 8.5) nazywamy bryłę sztywną zawieszoną tak, aby pod wpływem własnego ciężaru wykonywało drgania wokół osi (O) nieprzechodzącej przez jego środek masy ($\acute{S}M$).



Rys. 8.5. Wahadło fizyczne o środku masy w punkcie $\acute{S}M$, zawieszone w punkcie O

Wahadło fizyczne znajduje się w położeniu równowagi, jeśli siła grawitacji \vec{F}_g jest równoległa do prostej przechodzącej przez punkty O i $\acute{S}M$. Po wychyleniu wahadła z położenia równowagi o kąt α siłę ciężkości \vec{F}_g można rozłożyć na dwie składowe: \vec{F}_1 , skierowaną prostopadle do prostej przechodzącej przez punkty O i $\acute{S}M$, oraz siłę

\vec{F}_2 , skierowaną równoległe do tej prostej. Składowa \vec{F}_1 usiłuje przywrócić wahadło do położenia równowagi. Wartość siły \vec{F}_1 wynosi:

$$F_1 = mgsin\alpha, \quad (8.10)$$

gdzie: m – masa wahadła, g – przyspieszenie ziemskie.

Moment siły \vec{M}_1 względem osi obrotu O wyraża się wzorem $\vec{M}_1 = \vec{l} \times \vec{F}_1$, gdzie \vec{l} oznacza odległość od osi obrotu O do środka masy wahadła $\acute{S}M$, a \vec{F}_1 – wektor siły powodującej powrót do położenia równowagi danej równaniem (8.10). Jego wartość wynosi więc:

$$M = F_1 l = mgl sin\alpha. \quad (8.11)$$

Nadaje on wahadłu przyspieszenie kątowe wokół osi obrotu O . Druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego bryły sztywnej ma postać:

$$M = I\varepsilon = I \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad (8.12)$$

gdzie: I oznacza moment bezwładności wahadła względem osi O , ε – przyspieszenie kątowe, czyli drugą pochodną kąta wychylenia po czasie $d^2\alpha/dt^2$. Podstawiając zależność (8.11) do równania (8.12) z uwzględnieniem interpretacji równania (8.8), otrzymujemy:

$$I \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgl sin\alpha. \quad (8.13)$$

Po przekształceniu równanie (8.13) przyjmuje postać:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{I} sin\alpha = 0. \quad (8.14)$$

Porównując równanie ruchu wahadła fizycznego (8.14) z równaniem ruchu oscylatora harmonicznego (8.9), można zauważyć ich podobieństwo. Jedyna różnica polega na tym, że drugi składnik w równaniu (8.14) jest zależny nie od kąta wychylenia, ale od wartości funkcji sinus tego kąta. Jednakże dla małych wartości

kątów spełniona jest relacja $\sin \alpha \approx \alpha$. Po zastosowaniu tego przybliżenia równanie (8.14) przyjmuje postać:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{I}\alpha = 0, \quad (8.15)$$

która jest analogiczna do równania oscylatora harmonicznego (8.9). Rozwiązaniem równania (8.15) jest funkcja $\alpha(t) = \alpha_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$, gdzie α_0 oznacza amplitudę drgań, φ_0 – fazę początkową drgań. Wartość fazy początkowej zależy od tego, jakie jest wychylenie wahadła w chwili $t = 0$.

Z powyższego wyprowadzenia wynika fakt, że dla większych wychyleń wahadło fizyczne wykonuje ruch drgający, opisany równaniem (8.14), lecz nie są to drgania harmoniczne, natomiast jeżeli wahadło fizyczne wykonuje drgania o niewielkim wychyleniu, opisane równaniem (8.15), to są to drgania harmoniczne. Częstość kołowa drgań wahadła fizycznego jest wówczas równa:

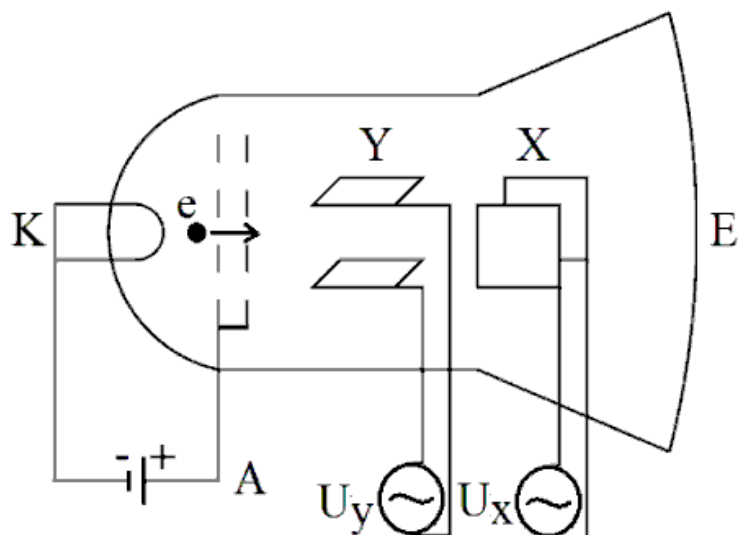
$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}. \quad (8.16)$$

Stosując podaną wcześniej zależność ($\omega = 2\pi/T$), okres drgań wahadła fizycznego można zapisać wzorem:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}. \quad (8.17)$$

Okres drgań harmonicznym wahadła fizycznego zależy więc od odległości l środka masy od osi obrotu, masy wahadła m oraz momentu bezwładności wahadła I względem osi obrotu. Składając dwa wzajemnie prostopadłe drgania mechaniczne wahadeł fizycznych, można więc obserwować krzywe Lissajous.

Złożenie wzajemnie prostopadłych elektrycznych drgań harmonicznym można także obserwować za pomocą oscyloskopu. Oscyloskop analogowy jest przyrządem służącym do obserwacji i porównywania czasowych zmian napięcia elektrycznego oraz pomiaru częstotliwości. Jego podstawowym elementem jest lampa oscyloskopowa. Schemat ideowy budowy lampy oscyloskopowej klasycznego oscyloskopu analogowego został przedstawiony na rys. 8.6.



Rys. 8.6. Schemat budowy lampy oscyloskopowej: K – katoda, e – elektron emitowany z katody, A – zestaw anod, Y – płytki odchylenia pionowego, X – płytki odchylenia poziomego, E – ekran

Lampa oscyloskopowa zbudowana jest ze szklanej bańki, w której panuje próżnia. Elektrony emitowane są z żarzonej katody w wyniku zjawiska termoemisji. Trafiają one następnie w układ przyspieszająco-ogniskujący złożony z anod, do których przyłożony jest potencjał dodatni względem katody. Pierwsza anoda przyspiesza elektrony, a druga je ogniskuje. Po przejściu przez układ anod wiązka trafia na układ wzajemnie do siebie prostopadłych płytek odchyłających. Przyłożone do nich napięcie zmienne wytwarza pole elektryczne odchyłające wiązkę elektronów. Ostatecznie wiązka elektronów trafia na ekran pokryty cienką warstwą substancji fluoryzującej. Pod wpływem wiązki elektronów warstwa ta zaczyna świecić i na ekranie widać fluoryzujący punkt. Punkt ten zmienia swoje położenie na ekranie wraz ze zmianą napięcia na płytkach odchyłających. Dzięki istnieniu dwóch par elektrod odchyłających można otrzymać osobno odchylenia poziome i pionowe lub też równoczesne złożenie obu. W celu obserwacji zmian napięcia w czasie badane napięcie przykładane jest do płytek odchylenia pionowego, natomiast do płytek odchylenia poziomego przykładane jest napięcie piłokształtne o odpowiedniej częstotliwości. Sprawia ono, że plamka świetlna przesuwa się ze stałą prędkością poziomą od lewej do prawej krawędzi ekranu wraz z liniowym wzrostem napięcia między płytkami odchylenia poziomego. Zmiana częstotliwości napięcia piłokształtnego przykładanego do płytek odchylenia poziomego zmienia tzw. podstawę czasu. Po osiągnięciu prawej krawędzi ekranu plamka świetlna powraca do lewej krawędzi ekranu. Krzywe Lissajous można obserwować na ekranie oscyloskopu, ustawiając oscyloskop w tzw. trybie pracy XY . Następnie podaje się

napięcia sinusoidalne U_x na płytki odchylenia poziomego i U_y na płytki odchylenia pionowego (odpowiednio na kanały wejściowe X i Y oscyloskopu), określone wzorami:

$$U_x(t) = U_{0X} \sin(\omega_x t + \varphi_{0X}), \quad U_y(t) = U_{0Y} \sin(\omega_y t + \varphi_{0Y}). \quad (8.18)$$

Wówczas plamka na ekranie oscyloskopu będzie wykonywała dwa wzajemnie prostopadłe drgania harmoniczne, zakreślając krzywe Lissajous, podobnie jak w omawianym wcześniej przypadku złożenia drgań mechanicznych.

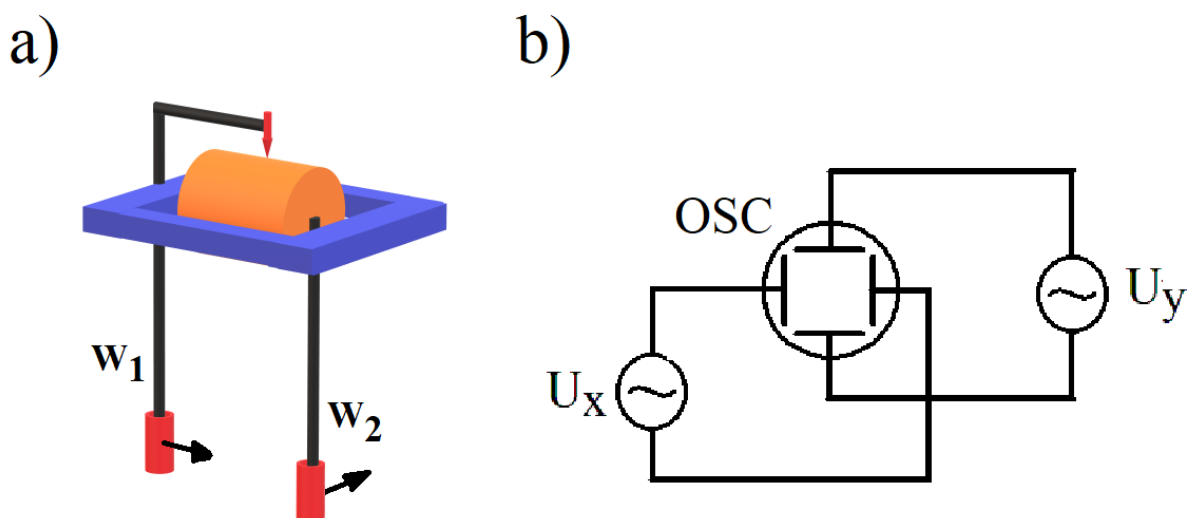
We współczesnych oscyloskopach cyfrowych lampa oscyloskopowa zastąpiona została przez ekran LCD wyświetlający obraz wygenerowany przez układ mikroprocesorowy na podstawie analizy cyfrowych sygnałów wejściowych. Pomimo że mechanizm wyświetlania obrazu na oscyloskopie cyfrowym jest zgoła odmienny od mechanizmu stosowanego w przypadku oscyloskopów analogowych, to za jego pomocą także można obserwować zmienne sygnały elektryczne oraz krzywe Lissajous.

Układ pomiarowy

Układ pomiarowy do obserwacji złożenia mechanicznych drgań harmonicznych (rys. 8.7a) zbudowany jest z dwóch wahadeł fizycznych w postaci odważników zamontowanych na metalowych prętach. Jedno wahadło wprawia w ruch bęben z założoną kartką. Drugie wahadło połączone jest z rysikiem opartym na bębnie. Wahadła drgają w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach, a rysik zakreśla na kartce krzywe Lissajous. Możemy w dwojaki sposób wpływać na kształt krzywych Lissajous. Po pierwsze, przez zmianę położenie ciężarka. Zmieniamy wówczas moment bezwładności wahadła, a tym samym okres jego drgań. Druga możliwość to sterowanie fazą początkową drgań.

Układ pomiarowy do obserwacji złożenia elektrycznych drgań harmonicznych (rys. 8.7b) składa się z oscyloskopu i dwóch generatorów napięcia. Jeden z generatorów o znanej częstotliwości (generator wzorcowy) podaje sygnał sinusoidalny na jeden z kanałów (X lub Y) oscyloskopu. Sygnał z generatora o nieznannej częstotliwości podawany jest na drugi kanał wejściowy (patrz rys. 8.6). Jednym z sygnałów jest napięcie sieciowe obniżone za pomocą transformatora.

Podczas zmiany parametrów sygnału nieznanego generatora na ekranie oscyloskopu uzyskiwane są różne kształty krzywych Lissajous.



Rys. 8.7. a) Układ pomiarowy do obserwacji złożenia mechanicznych drgań harmoniczych, W_1 i W_2 – wahadła fizyczne, b) układ pomiarowy do obserwacji złożenia elektrycznych drgań harmoniczych, U_x i U_y – generatory podpięte do kanałów odpowiednio X i Y oscyloskopu (OSC)

Przebieg ćwiczenia

Uwaga: Przed przystąpieniem do ćwiczenia studenci powinni przygotować 10 arkuszy papieru milimetrowego formatu A5.

Złożenie drgań mechanicznych:

1. Zamocować ciężarki na końcach prętów i zmierzyć czas 10 pełnych okresów wahań jednego z nich (W_1).
2. Założyć rysik, a następnie – zmieniając arkusze papieru – rejestrować kolejne krzywe Lissajous odpowiadające różnym różnicom faz wzajemnie prostopadłych drgań wahadeł W_1 oraz W_2 . W tym celu wprawiać wahadła w ruch w różnych fazach (wahadła nie mogą się ze sobą zderzać podczas ruchu):
 - a) start wahadeł W_1 oraz W_2 z maksymalnych wychyleń,
 - b) start wahadła W_1 z maksymalnego wychylenia, a wahadła W_2 z pozycji odpowiadającej przeciwnemu maksymalnemu wychyleniu,

- c) start wahadła W_1 z maksymalnego wychylenia, w momencie gdy wcześniej wprowadzone w ruch wahadło W_2 przechodzi przez położenie równowagi,
 - d) start wahadła W_1 z maksymalnego wychylenia, w momencie gdy wcześniej wprowadzone w ruch wahadło W_2 przechodzi przez przypadkowe położenie.
3. Ustawić ciężarek na wahadle W_2 w połowie długości pręta, a ciężarek wahadła W_1 pozostawić w niezmiennym położeniu, na końcu pręta. Wprawić wahadła w ruch z maksymalnych wychyleń. Zarejestrować krzywą Lissajous. Powtórzyć ćwiczenie dla różnych położenia ciężarka wahadła W_2 podanych przez prowadzącego (np. dla położenia 1/3, 1/4, 2/3, 3/4 długości pręta).

Uwaga: Rejestrować na kartce maksymalnie 2 obiegi rysika.

Złożenie drgań elektrycznych:

- 4. Po włączeniu napięć zasilających dobrać odpowiedni zakres czułości kanałów X i Y oscyloskopu tak, aby krzywa Lissajous mieściła się na ekranie oscyloskopu.
- 5. Dobierając odpowiednią częstotliwość na generatorze wzorcowym, uzyskać krzywą Lissajous odpowiadającą stosunkowi częstości kołowych $\omega_y:\omega_x = 1:1$. Odrysować z ekranu oscyloskopu obraz krzywej Lissajous oraz zanotować częstotliwość ustawioną na generatorze. Zanotować wartość napięcia odpowiadającą jednej działce z ekranu oscyloskopu na każdym kanale wejściowym.
- 6. Pomiar z punktu 5. powtórzyć dla kilku różnych częstotliwości i/lub amplitud napięcia z generatora podanych przez prowadzącego ćwiczenie.

Opracowanie wyników

Złożenie drgań mechanicznych:

- 1. Wyznaczyć okres drgań, częstotliwość oraz częstość kołową ruchu harmonicznego wahadła W_1 badanego w punkcie 1. przebiegu ćwiczenia. Wyznaczyć niepewności i zapisać wyniki końcowe.
- 2. Dla każdej krzywej zarejestrowanej w punkcie 2. przebiegu ćwiczenia obliczyć różnicę faz początkowych zgodnie z odpowiednim ze sposobów podanych na rys. 8.4. Wyznaczyć niepewności, zapisać wyniki końcowe oraz zinterpretować krzywe Lissajous.
- 3. Korzystając ze wzoru (8.3) oraz metody przedstawionej na rys. 8.3, na podstawie każdej krzywej zarejestrowanej w punkcie 3. przebiegu ćwiczenia wyznaczyć

częstotliwość drgań wahadła W_2 oraz amplitudy drgań obu wahadeł. Obliczyć niepewności wyznaczonych parametrów, zapisać wyniki końcowe oraz zinterpretować krzywe Lissajous.

Złożenie drgań elektrycznych:

4. Dla krzywej zarejestrowanej w punkcie 5. przebiegu ćwiczenia obliczyć różnicę faz początkowych zgodnie z wytycznymi podanymi na rys. 8.4. Wyznaczyć niepewności, zapisać wyniki końcowe oraz zinterpretować krzywą Lissajous.
5. Każdą z krzywych Lissajous zarejestrowanych w punkcie 6. przebiegu ćwiczenia przerysować w odpowiedniej skali, zwracając uwagę na wartości napięć odpowiadających jednej działce oscyloskopu na każdym z kanałów. Korzystając ze wzoru (8.3) oraz metody przedstawionej na rys. 8.3, wyznaczyć częstotliwość drgań nieznanego generatora oraz amplitudy sygnałów wejściowych.
6. Obliczyć niepewności wyznaczonych częstotliwości oraz amplitud drgań elektrycznych. Zapisać końcowy wynik.

9. BADANIE WŁASNOŚCI MATERIAŁÓW ZA POMOCĄ DEFEKTOSKOPU ULTRADŹWIĘKOWEGO

Ruchem falowym (falą) nazywamy przenoszenie się zaburzenia w ośrodku materialnym lub w próżni. W przypadku gdy fala rozchodzi się w ośrodku sprężystym, nazywamy ją falą sprężystą. Fale sprężyste powstają na skutek przekazywania sobie ruchu drgającego przez atomy albo cząsteczki ośrodka. W zależności od częstotliwości f drgań fale akustyczne dzielimy na infradźwięki (poniżej 16 Hz), dźwięki słyszalne (16 Hz ÷ 20 kHz) i ultradźwięki (powyżej 20 kHz). Amplitudy wychyleń cząstek ośrodka spowodowane przemieszczaniem się fali ultradźwiękowej są bardzo małe (od dziesiątych części mikrometra dla powietrza do tysięcznych części mikrometra dla stali). W ciele stałym dla niewielkich wychyleń cząsteczki wokół położenia równowagi jej ruch jest opisany równaniem drgań harmonicznym:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (9.1)$$

gdzie x oznacza wychylenie cząsteczki z położenia równowagi, A jest amplitudą drgań (maksymalnym wychyleniem z położenia równowagi), t oznacza czas trwania ruchu, φ jest fazą początkową drgań, a ω oznacza częstość kołową drgań:

$$\omega = 2\pi f. \quad (9.2)$$

Równanie (9.2) można także zapisać w postaci:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (9.3)$$

gdzie:

$$T = \frac{1}{f} \quad (9.4)$$

oznacza okres drgań (czas wykonania jednego drgania). Długość fali λ zdefiniowana jest jako droga, którą fala pokonuje w czasie jednego drgania. Jest ona równa iloczynowi prędkości v rozchodzenia się fali i okresu drgań cząstek:

$$\lambda = vT. \quad (9.5)$$

Podstawiając zależność (9.4) do wzoru (9.5), dochodzimy do wniosku, że długość fali jest odwrotnie proporcjonalna do częstotliwości drgań cząstek ośrodka:

$$\lambda = \frac{v}{f}. \quad (9.6)$$

Niejednorodność materiałowa może zostać wykryta przez przechodzącą falę tylko wtedy, gdy długość fali jest mniejsza od liniowych rozmiarów defektu. Ultradźwięki ze względu na bardzo małe długości fali (duża częstotliwość) nadają się do wykrywania defektów o bardzo małych rozmiarach, których nie można wykryć, posługując się falami o większej długości. Ze względu na kierunek, w jakim odbywają się drgania, fale dzielimy na fale poprzeczne (kierunek drgań jest prostopadły do kierunku propagacji fali) oraz fale podłużne (kierunek drgań jest równoległy do kierunku propagacji fali). Istnieją także fale, które są jednocześnie poprzeczne i podłużne. Fale podłużne rozchodzą się w każdym ośrodku materialnym. Fale poprzeczne rozchodzą się tylko w ciałach stałych. Prędkość rozchodzenia się ultradźwięków w ciałach stałych jest różna dla fal poprzecznych i podłużnych. Zależy ona od gęstości i właściwości sprężystych ośrodka. W przypadku nieograniczonych ośrodków izotropowych prędkości rozchodzenia się fal podłużnych v_r i poprzecznych v_p są odpowiednio równe:

$$v_r = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{\rho(1+\mu)(1-2\mu)}}, \quad (9.7)$$

$$v_p = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (9.8)$$

gdzie E oznacza moduł Younga, μ to współczynnik Poissona, G jest modułem sztywności na skręcanie, a ρ oznacza gęstość materiału. Na ogół w danym ciele stałym prędkość fal podłużnych jest większa od prędkości fal poprzecznych.

Wytwarzanie i odbiór fal ultradźwiękowych

Jednym ze sposobów wytworzenia fali ultradźwiękowej jest wykorzystanie drgającego źródła, które przekazuje energię do ośrodka z nim sprzężonego (np. badanego materiału). W technice ultradźwiękowej jako źródła najczęściej używa się przetworników opierających się na zjawisku piezoelektrycznym odwrotnym oraz na zjawisku magnetostrykcyjnym. Przetworniki magnetostrykcyjne funkcjonują na zasadzie zjawiska magnetostrykcji. Polega ono na zmianie wymiarów oraz kształtu ferromagnetyku pod wpływem pola magnetycznego. Przetworniki piezoelektryczne stosuje się przy generowaniu i detekcji ultradźwięków o wysokich częstotliwościach, natomiast przetworniki magnetostrykcyjne – do częstotliwości nieprzekraczających 200 kHz.

Często stosowanym materiałem piezoelektrycznym jest naturalny kryształ kwarcu. Przetworniki piezoelektryczne funkcjonujące jako źródło fal ultradźwiękowych działają na zasadzie wywoływania periodycznych lub impulsowych deformacji sprężystych na skutek przyłożenia do płytek piezoelektryka zewnętrznego zmiennego napięcia (zjawisko piezoelektryczne odwrotne). Przetworniki piezoelektryczne działające jako odbiorniki fal ultradźwiękowych funkcjonują na zasadzie zjawiska piezoelektrycznego prostego. W momencie gdy fala ultradźwiękowa dochodzi do powierzchni piezoelektryka, na płytkę działa zmienne w czasie ciśnienie akustyczne. Powoduje to periodyczne zmiany jej grubości (ściskanie, rozciąganie), a dzięki zjawisku piezoelektrycznemu prostemu indukujące się w płytce ładunki elektryczne prowadzą do powstania różnicy potencjałów pomiędzy zewnętrznymi powierzchniami piezoelektryka. Odbieranie fali ultradźwiękowej docierającej do przetwornika odbywa się przez rejestrowanie występującej różnicy potencjałów i jej zmiany. Największe zmiany grubości, a w konsekwencji napięcia, uzyskuje się, gdy częstotliwość zmian ciśnienia jest równa częstotliwości rezonansowej płytki. Z płytek piezoelektrycznych odpowiednio obudowanych wykonuje się głowice ultradźwiękowe. Zazwyczaj ta sama głowica jest jednocześnie źródłem i odbiornikiem fal ultradźwiękowych. Jeżeli głowica zostanie pobudzona krótkim impulsem elektrycznym, to płytka piezoelektryka wykona od kilku do kilkunastu drgań o częstotliwości rezonansowej. Drgania płytki przez oddziaływania sprężyste przeniosą się do badanego ośrodka, tworząc przemieszczającą się „impulsową” falę ultradźwiękową.

Tłumienie fal ultradźwiękowych

Rozchodzenie się podłużnych fal akustycznych w ośrodku sprężystym związane jest z lokalną zmianą jego objętości. Powoduje to zmianę ciśnienia w czasie. Ciśnienie w danym obszarze ośrodka jest równe sumie stałej wartości ciśnienia ośrodka i dodatkowego ciśnienia Δp wywołanego odkształceniem ośrodka, nazywanego ciśnieniem akustycznym. Ciśnienie akustyczne fali ultradźwiękowej rozchodzącej się w ośrodku maleje ze wzrostem przebytej drogi. Spowodowane jest to następującymi przyczynami:

- rozbieżnością wiązki fal,
- procesami pochłaniania energii (tarcie wewnętrzne – energia drgań zamienia się na ciepło),
- procesami rozpraszania, tzn. odbicia, załamania i dyfrakcją fal na granicach ziaren krystalicznych, wtrąceniach, porach itd. ośrodka.

Tłumienie fali to spadek ciśnienia fali na skutek procesów pochłaniania i rozpraszania. **Oslabienie fali** to spadek ciśnienia fali uwzględniający tłumienie i rozbieżność wiązki.

Rozpatrzmy problem tłumienia. W cienkiej warstwie ośrodka o grubości dl przy stałym współczynniku tłumienia α na jednostkę długości występuje względny spadek ciśnienia akustycznego p zgodnie z zależnością:

$$\frac{dp}{p} = -\alpha dl. \quad (9.9)$$

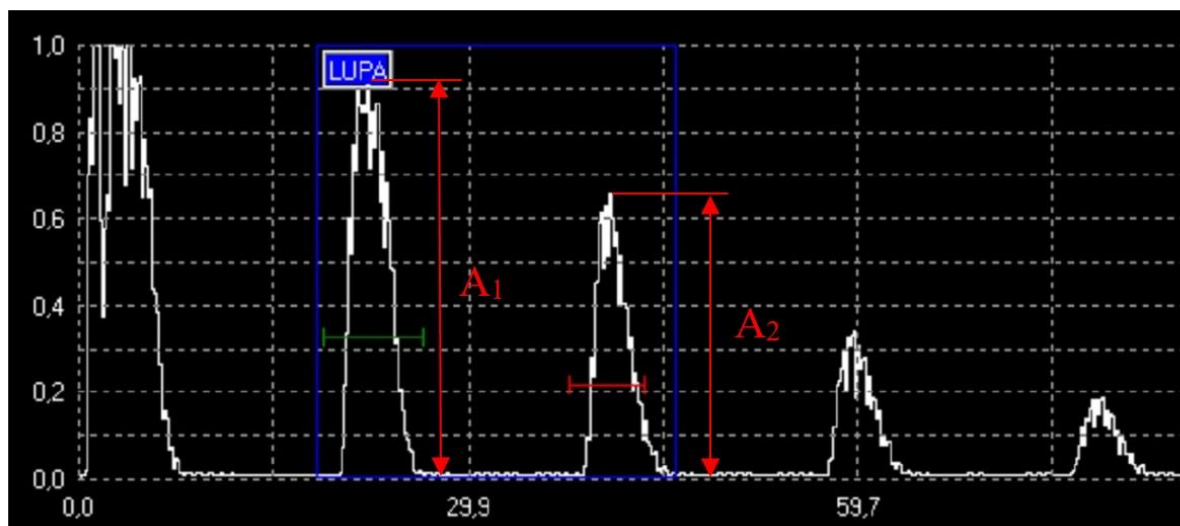
Po scałkowaniu równania otrzymujemy wyrażenie na ciśnienie $p(l)$ fali po przebyciu drogi l , jeżeli ciśnienie początkowe wynosiło p_0 :

$$p(l) = p_0 e^{-\alpha l}. \quad (9.10)$$

Współczynnik tłumienia można najprościej wyznaczyć za pomocą pomiaru wysokości dwóch kolejnych ech, czyli amplitud impulsów. Na ekranie monitora obserwuje się (rys. 9.1) amplitudę impulsu nadawczego A_0 oraz amplitudy kolejnych ech A_1, A_2, \dots , odpowiadające impulsom odbitym od dna próbki jednokrotnie, dwukrotnie itd. Mierząc stosunek kolejnych amplitud (wysokości pików obserwowanych na ekranie) oraz grubość h próbki, można wyznaczyć współczynnik tłumienia α z zależności:

$$\alpha = \frac{1}{s} \ln \frac{A_n}{A_{n+1}}, \quad (9.11)$$

gdzie s jest drogą, którą przechodzi fala od sondy do dna próbki i z powrotem ($s = 2h$), A_n , A_{n+1} to dwie kolejne amplitudy sygnałów odbitych od przeciwległej ścianki badanej próbki, ($n = 1, 2, 3, \dots$).



Rys. 9.1. Wygląd ekranu monitora. Zaznaczono amplitudy dwóch kolejnych ech (A_1 , A_2)

Defektoskopia ultradźwiękowa

Defektoskopia ultradźwiękowa jest metodą służącą do wykrywania defektów i niejednorodności badanego materiału. Używa się do tego celu przyrządów zwanych defektoskopami ultradźwiękowymi. Badanie polega na generowaniu w próbce fali ultradźwiękowej i odbiorze tej fali w określonym miejscu na powierzchni próbki.

Jeżeli na drodze fali znajdzie się przeszkoda (np. wada materiałowa typu pęknięcie), to pewna część energii fali wróci do głowicy w postaci fali odbitej. Fala odbita pobudzi do drgań płytkę piezoelektryczną głowicy – powstanie zatem impuls elektryczny, tzw. impuls echa wady.

Przez prosty pomiar czasu Δt między impulsem nadawczym a impulsem echa wady można wyznaczyć odległość wady od głowicy:

$$2l = v\Delta t, \quad (9.12)$$

gdzie l oznacza odległość wady od powierzchni, a v jest prędkością fali. W amplitudzie impulsu echa wady zawarta jest informacja o rozmiarze wady. Zależność wielkości amplitudy od rozmiarów wady jest jednak złożona i zależy od wielu czynników.

W defektoskopii ultradźwiękowej stosuje się trzy podstawowe metody: echa, cienia i rezonansu. W metodzie echa krótkie impulsy ultradźwiękowe są przesyłane w głąb badanego materiału. Do nadawania i odbioru impulsu ultradźwiękowego wykorzystywana jest jedna głowica pomiarowa. Fala ultradźwiękowa, przechodząc przez warstwę materiału, ulega odbiciu od wszelkiego rodzaju niejednorodności (np. pęknięć, pęcherzyków powietrza, wtrąceń niemetalicznych). Ta część fali, która nie natrafiła na przeszkodę w postaci defektu, pada na tylną ściankę badanej próbki i po odbiciu od niej rejestrowana jest w odbiorniku jako tzw. echo dna. Metodą echa można stwierdzić istnienie defektu oraz na jakiej znajduje się on głębokości. Jej zaletą jest czułość pozwalająca na wykrywanie bardzo małych wad w dużych blokach materiałów.

Metoda cienia polega na wprowadzeniu fal ultradźwiękowych z jednej strony badanego materiału i na odbieraniu ich z drugiej strony po przejściu przez materiał. W tej metodzie używa się dwóch głowic pomiarowych – nadawczej i odbiorczej. Niejednorodności występujące w próbce powodują osłabienie amplitudy fali (a więc także zmniejszenie jej energii) wskutek rozproszenia lub wytłumienia fali docierającej do głowicy odbiorczej. Przesuwając głowice pomiarowe wzdłuż powierzchni badanego przedmiotu, określa się wielkość przestrzenną i położenie defektu. Badając różnice amplitud ciśnienia akustycznego fal rejestrowanych przy przejściu przez obszar bez defektów i z defektami, można uzyskać informacje o wielkości i własnościach obszaru zdefektowanego. Wadami metody cienia są: konieczny dostęp do przeciwległych powierzchni badanego materiału oraz umieszczenie głowic dokładnie naprzeciwko siebie.

Metoda rezonansu polega na wytworzeniu stojących fal ultradźwiękowych w danym materiale. Fale padająca i odbita od przeciwległych powierzchni tworzą falę stojącą. Badany materiał zostaje pobudzony do drgań, przy czym maksymalna amplituda tych drgań występuje w przypadku, gdy częstotliwość drgań wzbudzonych w próbce przez falę ultradźwiękową jest równa częstotliwości drgań własnych badanego materiału. Jeżeli w próbce występuje defekt lub niejednorodność, to amplituda drgań rezonansowych zmniejsza się albo występuje dodatkowy rezonans. Warunkiem zajścia zjawiska rezonansu w próbce jest to, że jej grubość x jest wielokrotnością połowy długości fali ultradźwiękowej wykorzystanej w badaniach:

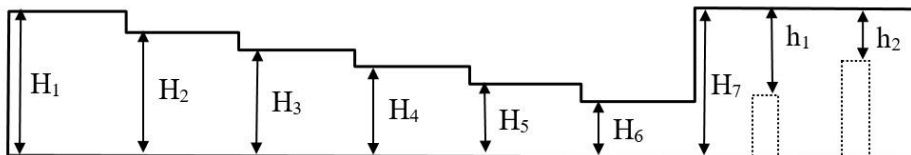
$$x = n \frac{\lambda}{2}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.13)$$

Metodę rezonansu wykorzystuje się do pomiaru grubości, do kontroli przyczepności w połączeniach spawanych, lutowanych, klejonych, w badaniach korozji, do wykrywania rozwarstwień.

Przebieg ćwiczenia

Pomiar czasu przejścia podłużnej fali ultradźwiękowej w zależności od drogi fali:

1. Na podstawie instrukcji do defektoskopu przygotować defektoskop do pomiaru czasu przejścia fali metodą echa.
2. Zmierzyć suwmiarką wysokość H_i poszczególnych schodków w elemencie schodkowym.
3. Przyłożyć zwilżoną głowicę do górnej powierzchni schodka i zgodnie z procedurą pomiarową dokonać pomiaru czasu przejścia fali na drodze „głowica – dno próbki – głowica”.
4. Pomiary wykonać dla każdego schodka.



Rys. 9.2. Wzorec schodkowy

5. W prawej części wzorca schodkowego są dwa otwory cylindryczne z płaskim dnem o nieznannej odległości (h_1, h_2) od powierzchni. Zwilżoną oliwką głowicę naprowadzić po powierzchni nad otwory i wykryć echa fali odbitej od tych otworów. Podobnie jak dla schodków określić czas przejścia.
6. Zmierzyć głębokość otworów suwmiarką.

Pomiar prędkości fal podłużnych w ciałach stałych:

7. Na podstawie instrukcji do defektoskopu przygotować defektoskop do pomiaru prędkości fal.

8. Zgodnie z procedurą pomiarową dla danego defektoskopu dokonać pomiaru prędkości fal w próbkach walcowych (o wysokości 30 mm) wykonanych z różnych metali (stal, miedź, glin, mosiądz) oraz z aralditu.

Wyznaczanie współczynnika tłumienia różnych materiałów:

9. Na podstawie instrukcji do defektoskopu przygotować defektoskop do pomiaru współczynnika tłumienia.
10. Zmierzyć suwmiarką wysokość badanej próbki.
11. Ustawić zwilżoną głowicę na próbce i tak dobrać parametry, aby na ekranie widoczne były co najmniej 2 kolejne echa i dokonać pomiaru ich wysokości.
12. Wykonać pomiar wysokości 2 kolejnych ech dla próbek wskazanych przez prowadzącego ćwiczenie.
13. Powtórzyć procedurę dla próbek wskazanych przez prowadzącego ćwiczenie.

Opracowanie wyników

Pomiar czasu przejścia podłużnej fali ultradźwiękowej w zależności od drogi fali:

1. Sporządzić wykres zależności czasu przejścia t fali ultradźwiękowej od drogi s . Metodą najmniejszych kwadratów wyznaczyć współczynniki a i b prostej aproksymującej $t = as + b$ oraz ich niepewności. Prostą aproksymującą zaznaczyć na wykresie.
2. Czas przejścia fali ultradźwiękowej wyraża się wzorem:

$$t = \frac{s}{v} + t_0, \quad (9.14)$$

gdzie t_0 oznacza opóźnienie własne głowicy. Porównując równanie (9.14) z równaniem prostej aproksymującej $t = as + b$, obliczyć prędkość fali v oraz czas opóźnienia własnego głowicy t_0 . Wykorzystując prawo propagacji niepewności, obliczyć niepewność wyznaczonych wartości $u(v)$ i $u(t_0)$. Zapisać wyniki końcowe.

3. Korzystając z wyznaczonej w punkcie 2. prędkości oraz ze zmierzonych w punkcie 5. przebiegu ćwiczenia czasów przejścia, obliczyć odległości h_1 i h_2 oraz głębokości otworów g_1 i g_2 , stosując wzory:

$$h_i = v \frac{t_i}{2}, \quad g_i = 40 \text{ mm} - h_i, \quad (9.15)$$

gdzie $i = 1, 2$ (numer otworu), t_i – zmierzony w punkcie 5. czas przejścia fali pomiędzy sondą a i -tym otworem. Wykorzystując prawo propagacji niepewności, obliczyć niepewności wyznaczonych wartości h_1, h_2, g_1 i g_2 . Zapisać wyniki końcowe.

- Porównać wyznaczone głębokości otworów z wartościami zmierzonymi suwmiarką.

Pomiar prędkości fal podłużnych w ciałach stałych:

- Na podstawie tablicowych wartości modułu Younga, gęstości i współczynnika Poissona obliczyć prędkość fali podłużnej w danym materiale (wzór (9.7)).
- Za pomocą testu zgodności porównać zmierzone prędkości dla poszczególnych materiałów z wartościami tablicowymi.

Wyznaczanie współczynnika tłumienia różnych materiałów:

- Obliczyć, korzystając ze wzoru (9.11), współczynnik tłumienia dla badanych materiałów.
- Wykorzystując prawo propagacji niepewności, obliczyć niepewność wyznaczonych współczynników tłumienia.
- Za pomocą testu zgodności porównać wartości obliczonych współczynników tłumienia z wartościami zamieszczonymi w tab. 9.1.

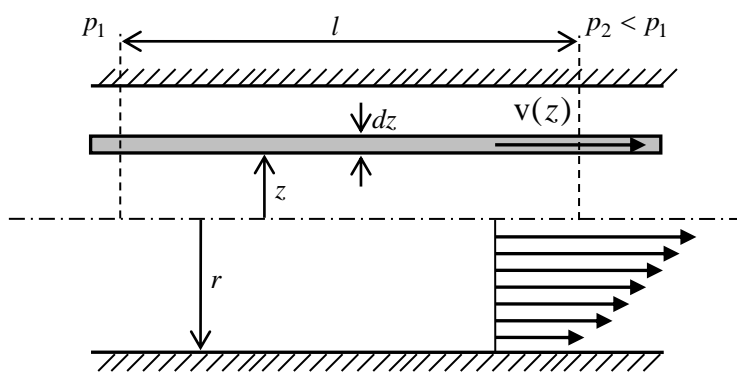
Tabela 9.1

Własności fizyczne niektórych ciał stałych w temperaturze 20°C

Rodzaj materiału	Moduł Younga $E, 10^{10} \frac{N}{m^2}$	Prędkość fali podłużnej $v, \frac{m}{s}$	Współczynnik tłumienia dla fal podłużnych $f = 1 \text{ MHz}$ $\alpha, \frac{1}{mm}$	Gęstość $\rho, 10^3 \frac{kg}{m^3}$	Współczynnik Poissona μ
Glin	6,8	6300	$1,1 \cdot 10^{-4} \div 0,5 \cdot 10^{-2}$	2,70	0,34
Miedź	7,9 ÷ 13	3560	$0,2 \cdot 10^{-2} \div 1,1 \cdot 10^{-2}$	8,89	0,35
Mosiądz	9,86	3500		8,44	0,35
Stal	21,5	4990	$1,1 \cdot 10^{-3} \div 1,1 \cdot 10^{-2}$	7,83	0,29

10. POMIAR WSPÓŁCZYNNIKA LEPKOŚCI ORAZ WYZNACZANIE ŚREDNIEJ DROGI SWOBODNEJ, ŚREDNICY CZĄSTECZEK GAZU I LICZBY REYNOLDSA W BADANIACH PRZEPIYWU POWIETRZA PRZEZ KAPILARĘ

Podczas przesuwania się względem siebie warstw cieczy lub gazów zachodzi zjawisko tarcia wewnętrznego nazywanego lepkością. Powstaje ono na skutek ruchów cieplnych cząsteczek oraz sił oddziaływania międzycząsteczkowego. Rysunek 10.1 pokazuje schematycznie rozkład prędkości cząsteczek gazu w rurce kapilarnej (rurce o średnicy poniżej 1 mm), w której ruch jest spowodowany niewielką różnicą ciśnień ($p_1 - p_2$). Drobiny poruszają się w kierunkach równoległych do osi rurki. Na skutek zjawiska lepkości prędkości cząsteczek maleją wraz ze wzrostem odległości od osi rurki. Gaz możemy podzielić na współosiowe cylindry o promieniu z i znikomo małej grubości dz oraz założyć, że wewnątrz każdego cylindra wszystkie drobiny poruszają się z tą samą prędkością $v(z)$. Ruch płynu przedstawiony na rys. 10.1 nazywamy ruchem warstwowym, czyli laminarnym (poszczególne warstwy płynu nie mieszają się ze sobą). W przepływie nielaminarnym, nazywanym również burzliwym lub turbulentnym, ruch cząsteczek płynu (gazu lub cieczy) jest nieregularny.



Rys. 10.1. Rozkład prędkości dla poszczególnych warstw płynu podczas przepływu przez rurkę. Nieopisane wektory reprezentują prędkości poszczególnych warstw. Znaczenie pozostałych symboli zostało omówione w tekście

Różnica ciśnień ($p_1 - p_2$) powoduje ruch gazu znajdującego się wewnątrz walca o długości l i promieniu z . Siła działająca na walec jest równa iloczynowi pola powierzchni jego podstawy oraz różnicy ($p_1 - p_2$):

$$F = \pi z^2 (p_1 - p_2). \quad (10.1)$$

W przypadku gdy siła ta co do wartości będzie równa sile tarcia, wystąpi przepływ stacjonarny (przepływ, w którym prędkość dla dowolnego punktu jest stała w czasie). Spełniona wtedy jest zależność:

$$-\eta S \frac{dv}{dz} = \pi z^2 (p_1 - p_2), \quad (10.2)$$

gdzie: η – współczynnik lepkości, S – pole powierzchni (równoległej do wektora prędkości) poruszającej się warstwy płynu.

Pojawienie się znaku minus po lewej stronie równania (10.2) wynika z faktu, że $\frac{dv}{dz} < 0$ (prędkość gazu w poszczególnych warstwach maleje ze wzrostem z). Podstawiając do wzoru (10.2) wyrażenie na pole powierzchni bocznej kapilary (walca):

$$S = 2\pi z l, \quad (10.3)$$

otrzymujemy równanie:

$$-\eta 2\pi l z \frac{dv}{dz} = \pi z^2 (p_1 - p_2). \quad (10.4)$$

Po podzieleniu obu stron równania (10.4) przez z i π sprowadza się ono do postaci:

$$-\eta 2l \frac{dv}{dz} = z (p_1 - p_2). \quad (10.5)$$

Całkując obustronnie wyrażenie (10.5), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} - \int_{v(r)}^{v(z)} \eta 2l dv &= \int_r^z z(p_1 - p_2) dz, \\ -2\eta l \int_{v(r)}^{v(z)} dv &= (p_1 - p_2) \int_r^z z dz, \\ -2\eta l(v(z) - v(r)) &= (p_1 - p_2) \frac{z^2 - r^2}{2}. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Przekształcając równanie (10.6) i przyjmując warunek brzegowy, że prędkość warstwy płynu przylegającej do ścianek naczynia jest równa zero:

$$v(r) = 0, \quad (10.7)$$

dostajemy wzór na prędkość gazu w warstwie znajdującej się w odległości z od środka rury:

$$v(z) = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l} (r^2 - z^2). \quad (10.8)$$

Objętość gazu przepływającego w czasie t przez rozważaną warstwę cylindryczną o szerokości dz jest równa iloczynowi pola przekroju poprzecznego warstwy S_w ($S_w = 2\pi z dz$), prędkości gazu w danej warstwie $v(z)$ i czasu trwania przepływu:

$$dV = 2\pi z dz v(z) t. \quad (10.9)$$

Całkowita objętość płynu przepływającego laminarnie przez rurkę o długości l w czasie t jest zatem równa:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^r 2\pi z v(z) t dz, \\ V &= \pi t \frac{(p_1 - p_2) r^4}{8\eta l}. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Równanie (10.10) nosi nazwę równania Hagen-Poiseuille'a. Opisuje ono przepływ laminarny nieściśliwego płynu. Przy opisie przepływu płynu wprowadza się pojęcie

średniej prędkości przepływu \bar{v}_p zdefiniowanej jako stosunek całkowitej objętości V płynu wypływającego z rurki do czasu t , w którym ten wypływ nastąpił i do pola powierzchni (πr^2) przekroju rurki:

$$\bar{v}_p = \frac{V}{\pi r^2 t} = \frac{I}{\pi r^2}. \quad (10.11)$$

Wielkość I występująca w równaniu (10.11) nazywana jest natężeniem przepływu:

$$I = \frac{V}{t}. \quad (10.12)$$

Z zależności (10.10), (10.11), (10.13) otrzymujemy wyrażenia na prędkość średnią:

$$\bar{v}_p = \frac{(p_1 - p_2) r^2}{8 \eta l} \quad (10.13)$$

i współczynnik lepkości:

$$\eta = \frac{(p_1 - p_2) \pi r^4}{8 I l}. \quad (10.14)$$

Ważnym, bezwymiarowym współczynnikiem charakteryzującym przepływy płynów oraz ruch ciał w płynach jest tzw. liczba Reynoldsa:

$$Re = \frac{\rho r \bar{v}_p}{\eta}, \quad (10.15)$$

gdzie ρ jest gęstością płynu, a r oznacza liniowy wymiar ciała poruszającego się w płynie w kierunku prostopadłym do wektora prędkości lub promień przewodów z płynem. W interpretacji fizycznej liczba Reynoldsa równa jest stosunkowi pracy zużytej na przyspieszenie jednostki objętości płynu do prędkości do pracy potrzebnej na pokonanie sił oporu lepkości. Liczba Reynoldsa ma duże znaczenie techniczne ze względu na twierdzenie o podobieństwie przepływów. Mówi ono, że jeżeli różne płyny płyną z różnymi prędkościami w przewodach o różnych średnicach, to charakter ruchu tych płynów (przepływ laminarny lub nielaminarny) jest jednakowy, gdy liczby Reynoldsa charakteryzujące te przepływy są sobie równe. Dla $Re < 1160$ zachodzi przepływ laminarny, a dla $Re > 1160$ – przepływ nielaminarny.

Ruch cząsteczek gazu jest ruchem chaotycznym. W przypadku rozrzedzonych gazów znajdujących się w wysokiej temperaturze można zaniedbać siły wzajemnego oddziaływania cząsteczek z wyjątkiem momentu, w którym dochodzi do zderzenia pomiędzy cząsteczkami (przybliżenie gazu doskonałego). Pomiedzy zderzeniami ruch odbywa się ze stałą prędkością po linii prostej. Średnią drogę, jaką cząsteczka pokonuje pomiędzy zderzeniami, nazywa się średnią drogą swobodną. Jest ona proporcjonalna do temperatury bezwzględnej T gazu, a odwrotnie proporcjonalna do ciśnienia p i kwadratu średnicy cząsteczek gazu d :

$$\bar{\lambda} = \frac{RT}{N_A \sqrt{2} \pi p d^2}. \quad (10.16)$$

Symbol R we wzorze (10.16) oznacza uniwersalną stałą gazową, a N_A jest liczbą Avogadro. Przekształcając równanie (10.16), otrzymujemy formułę pozwalającą obliczyć średnicę cząsteczek gazu:

$$d = \sqrt{\frac{RT}{N_A \sqrt{2} \pi p \bar{\lambda}}}. \quad (10.17)$$

Średnia liczba zderzeń w jednostce czasu \bar{n} , jakich doznaje jedna cząsteczka, jest proporcjonalna do średniej prędkości cząsteczek \bar{v} i odwrotnie proporcjonalna do średniej drogi swobodnej:

$$\bar{n} = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}}. \quad (10.18)$$

Średnią prędkość poruszania się cząsteczek gazu o masie molowej μ znajdującego się w temperaturze bezwzględnej T można obliczyć, stosując prawo rozkładu prędkości cząsteczek podane przez Maxwella. Odpowiedni rachunek prowadzi do wzoru:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}. \quad (10.19)$$

Należy zauważyć, że średnia prędkość cząstek wynikająca z rozkładu Maxwella oraz prędkość przepływu gazu przez kapilarę są to dwie zupełnie różne wielkości jakościowo oraz ilościowo. Pierwsza z nich opisuje ruch chaotyczny cząsteczek gazu, a druga uporządkowany przepływ płynu powstały w wyniku różnicy ciśnień.

Tarcie wewnętrzne w gazie (lepkość gazu) jest spowodowane transportem pędu pomiędzy warstwami, w których cząsteczki mają różne prędkości. W przypadku gazów współczynnik lepkości jest równy:

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda}. \quad (10.20)$$

Gęstość gazu ρ można obliczyć, korzystając z równania stanu gazu doskonałego:

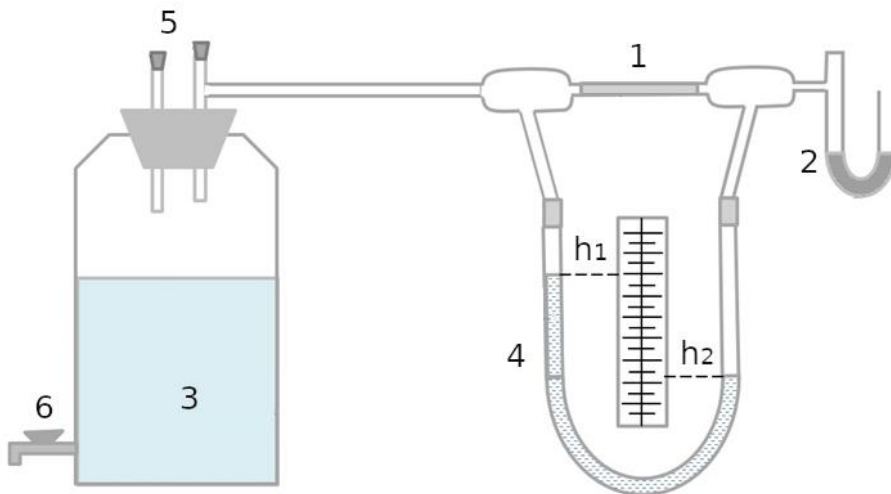
$$\rho = \frac{p\mu}{RT}. \quad (10.21)$$

Łącząc zależności (10.19), (10.20) i (10.21), otrzymujemy wzór:

$$\bar{\lambda} = \frac{\eta}{p} \sqrt{\frac{9\pi RT}{8\mu}}. \quad (10.22)$$

Uwzględnienie związków (10.16), (10.19) i (10.21) we wzorze (10.20) prowadzi do konkluzji, że lepkość gazu zależy jedynie od rodzaju gazu i jego temperatury, a nie zależy od ciśnienia, pod którym on się znajduje.

Celem ćwiczenia jest: wyznaczenie współczynnika lepkości powietrza, określenie charakteru przepływu gazu przez rurkę kapilarną na podstawie wartości liczby Reynoldsa, obliczenie średniej drogi swobodnej cząsteczek powietrza, średniej liczby zderzeń, jakich doznaje jedna cząsteczka w jednostce czasu, oraz obliczenie efektywnej średnicy cząsteczek powietrza.



Rys. 10.2. Stanowisko do pomiaru współczynnika lepkości powietrza: 1 – kapilara, 2 – filtr osuszający, 3 – naczynie z wodą, 4 – manometr, 5 – korki, 6 – kurek

Schemat układu pomiarowego przedstawiono na rys. 10.2. Jeden koniec rurki kapilarnej (1) o znanej długości i średnicy wewnętrznej łączy się z higroskopijnym filtrem (2) osuszającym powietrze wciągane do układu oraz jednym z ramion manometru (4). Drugi koniec kapilary łączy się z drugim ramieniem manometru oraz dużą butlą szklaną (3) zawierającą wodę. Butla zamknięta jest korkami służącymi do napełniania jej wodą i odpowietrzania. Po otwarciu zaworu kurka (6) przy dnie butli zaczyna z niej wypływać woda do podstawionej menzurki, a na skutek tego obniża się ciśnienie powietrza w butli. W ten sposób między końcami kapilary zostaje wytworzona różnica ciśnień:

$$\Delta p = p_1 - p_2, \quad (10.23)$$

którą wyznacza się za pomocą manometru. Jeżeli różnica poziomów cieczy manometrycznej wynosi h , a jej gęstość ρ_c , to:

$$\Delta p = \rho_c g h, \quad (10.24)$$

gdzie g oznacza przyspieszenie ziemskie. Uwzględniając zależności (10.23) i (10.24) w równaniu (10.14), otrzymujemy:

$$\eta = \frac{\rho_c g h \pi r^4}{8 l I}. \quad (10.25)$$

Przebieg ćwiczenia

1. Butla musi być napełniona wodą do ok. 3/4 objętości. Zanotować promień kapilary r , długość kapilary l , gęstość cieczy w manometrze $\rho_c = 998,0(10) \text{ kg/m}^3$.
2. Podstawić pod kurek zlewkę, otworzyć zawór i poczekać do momentu ustalenia się stałej prędkości wypływu wody (powinno nastąpić ustabilizowanie poziomów cieczy w obu ramionach manometru).
3. Po ustabilizowaniu się poziomów w cieczy w manometrze podłożyć pod strumień wody menzurkę, włączyć stoper – zmierzyć czas t , po którym wypłynie z butli objętość wody wskazana przez prowadzącego ćwiczenie, np. $V = 250 \text{ cm}^3$.
4. W trakcie pomiaru czasu wypływu wody wyznaczyć poziomy h_1 i h_2 cieczy w manometrze.

5. Powtórzyć pomiary opisane w punktach 3. i 4. 10-krotnie, każdorazowo wlewając wodę z menzurki ponownie do butli w celu zapewnienia w każdym eksperymencie stałej prędkości wypływu wody. **Uwaga: Aby przelać wodę z menzurki z powrotem do butli, należy otworzyć obydwa korki (5 z rys. 10.2) w celu odpowietrzenia butli.**
6. Za pomocą barometru i termometru zmierzyć ciśnienie atmosferyczne p i temperaturę T w pomieszczeniu, w którym dokonuje się pomiaru lepkości.

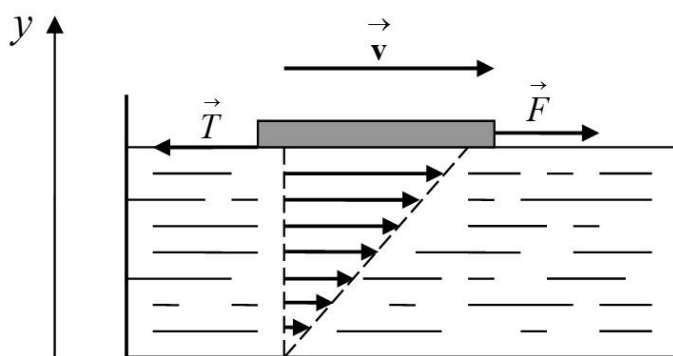
Opracowanie wyników

1. Przeliczyć temperaturę zmierzoną w punkcie 6. wyrażoną w stopniach Celsjusza na Kelwiny.
2. Obliczyć gęstość powietrza ρ dla wyznaczonych w punkcie 6. wartości p i T wg zależności (10.21). Za masę molową powietrza przyjąć uśrednioną wartość $\mu = 29,0 \cdot 10^{-3}$ kg/mol. Wykorzystując prawo propagacji niepewności, obliczyć niepewność otrzymanego wyniku. Zapisać wynik końcowy.
3. Obliczyć wartości średnie t oraz $h = h_1 - h_2$ i ich niepewności dla pomiarów uzyskanych w punktach 3., 4. i 5. Zapisać wyniki końcowe.
4. Korzystając z uzyskanych wyników oraz ze wzoru (10.12), obliczyć natężenie I wypływu wody z butli, jakie obserwowano w punktach 3. i 4. przebiegu ćwiczenia. Wykorzystując prawo propagacji niepewności, obliczyć niepewność wyniku. Zapisać wynik końcowy.
5. Wykorzystując znane wielkości I oraz r , obliczyć średnią prędkość \bar{v}_p przepływu gazu przez kapilarę ze wzoru (10.11). Wykorzystując prawo propagacji niepewności, obliczyć niepewność wyniku. Zapisać wynik końcowy.
6. Korzystając ze wzoru (10.25), obliczyć współczynnik lepkości powietrza. Wykorzystując prawo propagacji niepewności, obliczyć niepewność wyniku. Zapisać wynik końcowy.
7. Posługując się wzorem (10.15) i otrzymanymi w ćwiczeniu wynikami, obliczyć wartość liczby Reynoldsa, charakteryzującej przepływ powietrza przez kapilarę. Wykorzystując prawo propagacji niepewności, obliczyć niepewność wyniku. Zapisać wynik końcowy.
8. Posługując się wzorem (10.22) oraz wcześniej wyznaczonymi wielkościami, obliczyć długość średniej drogi swobodnej cząsteczek powietrza. Wykorzystując

- prawo propagacji niepewności, obliczyć niepewność wyniku. Zapisać wynik końcowy.
9. Korzystając ze wzoru (10.18) oraz wyznaczonych poprzednio wielkości, obliczyć średnią liczbę zderzeń cząsteczek powietrza w jednostce czasu. Wykorzystując prawo propagacji niepewności, obliczyć niepewność wyniku. Zapisać wynik końcowy.
 10. Posługując się wzorem (10.17) oraz wykorzystując wcześniej wyznaczone wielkości, obliczyć średnicę cząsteczek powietrza. Wykorzystując prawo propagacji niepewności, obliczyć niepewność wyniku. Zapisać wynik końcowy.
 11. Za pomocą testów zgodności porównać otrzymane wartości z danymi tablicowymi.

11. POMIAR WSPÓŁCZYNNIKA LEPKOŚCI CIECZY ZA POMOCĄ WISKOZYMETRU HÖPPLERA

W czasie ruchu, podczas względnego przemieszczania się stykających się ze sobą ciał lub ich części, występuje tarcie. Gdy działa ono pomiędzy oddzielnymi ciałami, to nazywamy je tarciem zewnętrznym, gdy zaś pomiędzy częściami tego samego ciała, to nazywamy je tarciem wewnętrznym lub lepkością. Tarcie wewnętrzne występuje między innymi podczas przesuwania się względem siebie warstw cieczy lub gazów. Powstaje ono na skutek ruchów cieplnych cząsteczek oraz sił oddziaływania międzycząsteczkowego. Wyobraźmy sobie doświadczenie, podczas którego płytkę pływa po powierzchni cieczy ruchem jednostajnym z prędkością \vec{v} (rys. 11.1). Między warstewką cieczy zwilżającą płytkę a warstewką znajdującą się niżej powstaje hamująca ruch płytki siła tarcia \vec{T} . Wynika z tego, że na płytkę musi również działać siła \vec{F} o takiej samej wartości i kierunku jak siła \vec{T} , lecz o przeciwnym zwrocie (pierwsza zasada dynamiki Newtona).



Rys. 11.1. Ruch warstw płynu spowodowany lepkością. Nieopisane wektory reprezentują prędkości poszczególnych warstw cieczy. Znaczenie pozostałych symboli zostało omówione w tekście

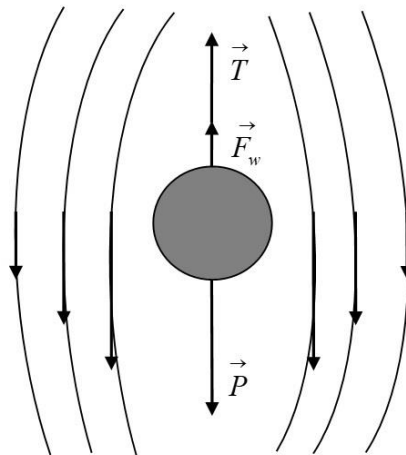
Przylegająca do płytki warstwa cieczy porusza się wraz z nią z tą samą co ona prędkością. Warstwa ta wprawia w ruch przylegającą do niej warstwę leżącą niżej, ta z kolei warstwa porusza następną itd. Każda z głębiej położonych warstw porusza się z mniejszą prędkością niż warstwa znajdująca się nad nią. Warstwa przylegająca do dna naczynia pozostaje w spoczynku. Wartość siły \vec{F} potrzebnej do utrzymania warstwy

cieczy w ruchu jednostajnym prostoliniowym jest proporcjonalna do pola powierzchni poruszającej się warstwy płynu S (równoległej do wektora prędkości) i do gradientu prędkości $\frac{\Delta v}{\Delta y}$:

$$F = \eta S \frac{\Delta v}{\Delta y}. \quad (11.1)$$

Współczynnik η zależy od rodzaju cieczy i jej temperatury i nazywa się **współczynnikiem lepkości** cieczy. Jednostką współczynnika lepkości jest $[\text{Pa}\cdot\text{s}] = [\text{kg}/(\text{s}\cdot\text{m})]$. Ruch płynu przedstawiony na rys. 11.1, który posłużył do określenia współczynnika lepkości, nazywamy ruchem warstwowym, inaczej laminarnym. Nazwa ta pochodzi stąd, że możemy wyróżnić warstwy poruszające się z różnymi prędkościami, w zasadzie niemieszające się ze sobą.

Istnieje wiele metod wyznaczania współczynnika lepkości. Jedną z nich jest metoda Stokesa, w której mierzy się czas pionowego opadania kulki znajdującej się w naczyniu z badaną cieczą. Kulka, poruszająca się ruchem jednostajnym z prędkością \vec{v} , pociąga za sobą warstwę cieczy przylegającą do niej, nadając jej również prędkość \vec{v} , a ta pociąga za sobą warstwy dalsze, te jeszcze dalsze itd., przy czym wraz ze wzrostem odległości od kulki prędkość warstw maleje. Na kulkę spadającą w cieczy działają trzy siły (rys. 11.2): siła ciężkości \vec{P} , siła wyporu \vec{F}_w i siła tarcia \vec{T} .



Rys. 11.2. Pionowe opadanie kulki w płynie. Nieopisane wektory reprezentują prędkości poszczególnych warstw cieczy. Znaczenie pozostałych symboli zostało omówione w tekście

Z wymienionych trzech sił tylko jedna ulega zmianie podczas ruchu – siła oporu ośrodka, której wartość rośnie ze wzrostem prędkości. Siła ciężkości i siła wyporu są

wielkościami stałymi. W miarę upływu czasu od rozpoczęcia ruchu kulki, gdy jej prędkość wzrasta, przyspieszenie maleje i dąży do zera (na skutek wzrostu siły oporu), a ruch staje się jednostajny. A zatem swobodny spadek w cieczy lub gazie tylko w początkowym etapie jest ruchem przyspieszonym; począwszy od pewnego momentu, ciało porusza się ruchem jednostajnym z prędkością, zwaną prędkością graniczną.

Wartość siły oporu \vec{T} działającej na kulkę o promieniu r poruszającą się z prędkością v o wartości v wyraża się wzorem Stokesa:

$$T = 6\pi\eta r v. \quad (11.2)$$

Siła ciężkości \vec{P} i siła wyporu \vec{F}_w działające na kulkę wykonaną z materiału o gęstości ρ_k poruszającą się w cieczy o gęstości ρ_c są co do wartości odpowiednio równe:

$$P = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_k g, \quad (11.3)$$

$$F_w = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_c g, \quad (11.4)$$

gdzie g oznacza przyspieszenie ziemskie.

W fazie ruchu jednostajnego siła ciężkości jest równoważona przez siły wyporu i tarcia:

$$P = F_w + T. \quad (11.5)$$

Podstawienie równań (11.2), (11.3) i (11.4) do (11.5) prowadzi do związku:

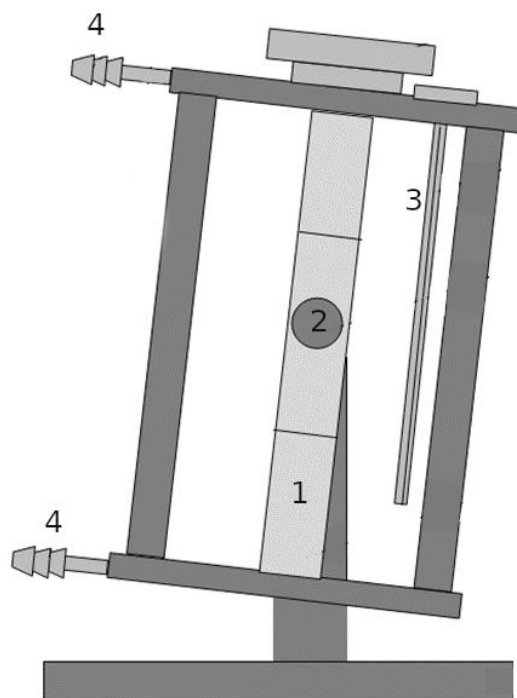
$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_k g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_c g + 6\pi\eta r v. \quad (11.6)$$

Przekształcając równanie (11.6) oraz korzystając z faktu, że prędkość kulki podczas ruchu jednostajnego jest równa stosunkowi przebytej drogi s do czasu, w jakim ten odcinek został pokonany ($v = s/t$), otrzymujemy wzór na współczynnik lepkości:

$$\eta = \frac{2r^2 g}{9s} (\rho_k - \rho_c) t. \quad (11.7)$$

Metodę Stokesa można stosować tylko w badaniach cieczy o stosunkowo dużej lepkości, gdyż w innym przypadku opływ cieczy wokół opadającej kulki nie będzie już opływem laminarnym, a siła oporu nie będzie wyrażona wzorem (11.2).

W badaniach cieczy o małej lepkości można zastosować tzw. metodę wiskozymetru Höpplera będącą modyfikacją metody Stokesa. Wygląd wiskozymetru Höpplera przedstawiono na rys. 11.3.



Rys. 11.3. Budowa wiskozymetru Höpplera: 1 – rurka pomiarowa z podziałką, 2 – kulka, 3 – termometr, 4 – króćce układu chłodzenia i grzania

W przyrządzie tym uzyskano znaczne spowolnienie ruchu kulki. Kulka (szklana lub metalowa) spada w kalibrowanej rurce wypełnionej badaną cieczą. Średnica wewnętrzna rurki jest zbliżona do rozmiarów kulki, co powoduje znaczne zwiększenie oporu i w konsekwencji prowadzi do zmniejszenia prędkości kulki. Rurka otoczona jest płaszczem wodnym. Temperatura wody regulowana jest termostatem. Na rurce zaznaczone są kreski, między którymi mierzy się czas opadania kulki. Pomiar czasu opadania kulki można powtarzać wielokrotnie. Wystarczy każdorazowo obrócić przyrząd o kąt 180° wokół osi obrotu. Dla uniknięcia zakłóceń ruchu kulki rurka jest nachylona do pionu pod kątem ok. 10° . Przy ustawieniu skośnym kulka toczy się po ścianie rurki. Do obliczania współczynnika lepkości w metodzie Höpplera stosuje się modyfikację wzoru (11.7):

$$\eta = K(\rho_k - \rho_c)t, \quad (11.8)$$

gdzie K jest stałą przyrządu.

Współczynnik lepkości zależy w znacznym stopniu od temperatury. Dla cieczy:

$$\eta(T) = Ae^{\left(\frac{B}{T}\right)}, \quad (11.9)$$

gdzie: T oznacza temperaturę w Kelwinach, a parametry A , B są stałymi charakteryzującymi daną ciecz. Logarytmując obie strony równania (11.8), otrzymujemy:

$$\ln \eta(T) = B \frac{1}{T} + \ln A. \quad (11.10)$$

Cząsteczki cieczy grupują się w obszarach zwanych pseudojądrami. Między pseudojądrami znajdują się puste przestrzenie – dziury. Struktura cieczy bez przerwy się zmienia. Cząsteczka cieczy drga wokół chwilowego położenia równowagi w pobliżu pseudojądra przez pewien czas. Potem przeskakuje na miejsce dziury i następnie przyłącza się do innego pseudojądra. Żeby cząsteczka oderwała się od pseudojądra, musi mieć energię kinetyczną przewyższającą pracę, jaką należy wykonać w celu pokonania molekularnych sił przyciągania. Energia ta nazywa się energią aktywacji. Energia aktywacji E_A jest równa iloczynowi parametru B ze wzoru (11.9) i stałej Boltzmanna k_B :

$$E_A = k_B B. \quad (11.11)$$

Przebieg ćwiczenia

1. Przed przystąpieniem do pomiarów należy ustawić na termostacie najniższą temperaturę, od której zaczyna się pomiary.
2. Przez obrót przyrządu wokół osi ustawić go tak, by kulka znalazła się w górnej pozycji, powyżej jednej z kresek. Zaczyna się powolne opadanie kulki.
3. W chwili gdy kulka mija górną (lub dolną) swoją krawędzią górną kreskę, uruchomić stoper, a następnie zatrzymać go w chwili, gdy kulka mija tę samą krawędzią kreskę dolną.

4. Pomiar czasu opadania kulki powtórzyć kilkakrotnie, przy czym za każdym razem wystarczy przyrząd obrócić o kąt 180° .
5. Zanotować temperaturę T , w której były przeprowadzone pomiary.
6. Analogiczne pomiary wykonać dla temperatur coraz to wyższych, wzrastających skokowo co 5°C . Pomiary rozpoczynać po upływie co najmniej 5 minut od chwili, gdy nastąpiło ustabilizowanie się temperatury badanej cieczy. Maksymalną temperaturę ustala osoba prowadząca ćwiczenie.
7. Zanotować gęstość materiału kulki ρ_k oraz stałą aparaturową K . Zależność gęstości cieczy ρ_c od temperatury podana jest w tab. 11.1.

Opracowanie wyników

1. Obliczyć wartości średnie oraz ich niepewności dla wszystkich serii pomiarów przeprowadzonych w punktach 3., 4. i 6. Zapisać wyniki końcowe.
2. Na podstawie wartości zamieszczonych w tab. 11.1 wykonać wykres zależności gęstości wody od temperatury. Z wykresu odczytać wartości gęstości wody dla temperatur, w jakich były wykonane pomiary.
3. Posługując się wyznaczonymi w punkcie 1. średnimi wartościami czasu opadania kulki oraz wyznaczonymi w punkcie 2. wartościami gęstości cieczy, obliczyć współczynniki lepkości cieczy dla każdej temperatury, w której wykonano pomiary.
4. Wykorzystując prawo propagacji niepewności, obliczyć niepewności wyników wyznaczonych w punkcie 3. Zapisać wyniki końcowe.
5. Narysować wykres zależności $\eta = \eta(T)$ i zaznaczyć na wykresie niepewności uzyskanych wyników.
6. Sporządzić wykres $\ln \eta = f(1/T)$ zależności logarytmu naturalnego współczynnika lepkości od odwrotności temperatury wyrażonej w Kelwinach.
7. Metodą najmniejszych kwadratów aproksymować wyniki przedstawione na wykresie $\ln \eta(T) = f(1/T)$ za pomocą prostej:

$$\ln \eta (T) = a \frac{1}{T} + b. \quad (11.12)$$

Prostą aproksymującą zaznaczyć na wykresie. Przedstawić uzyskane parametry aproksymacji.

8. Porównując równanie (11.10) z równaniem prostej aproksymującej (11.12), wyznaczyć wartości i niepewności współczynników A i B z równania (11.10). Zapisać wyniki końcowe.
9. Korzystając z równania (11.9) oraz wyznaczonych parametrów A i B, obliczyć teoretyczne wartości współczynnika lepkości w stosowanych temperaturach. Uzyskane wyniki porównać z doświadczalnymi na wykresie zależności $\eta = \eta(T)$.
10. Korzystając ze wzoru (11.11), obliczyć energię aktywacji cząsteczki oraz jej niepewność. Obie wartości wyrazić w elektronowoltach. Zapisać wynik końcowy.

Tabela 11.1

Zależność gęstości wody od temperatury

T, °C	$\rho, 10^3 \frac{kg}{m^3}$	T, °C	$\rho, 10^3 \frac{kg}{m^3}$
5	0,99996	40	0,99221
10	0,99970	45	0,99022
15	0,99910	50	0,98804
18	0,99877	60	0,98321
20	0,99820	70	0,97778
22	0,99777	80	0,97180
25	0,99704	90	0,96531
30	0,99564	95	0,96189
35	0,99403	100	0,95835

12. BADANIE ZALEŻNOŚCI TEMPERATUROWEJ WSPÓŁCZYNNIKA LEPKOŚCI ORAZ ANOMALII PŁYNNOŚCI CIECZY O LEPKOŚCI STRUKTURALNEJ

Lepkość cieczy, współczynnik lepkości i jego zależność temperaturowa

Lepkość jest to własność cieczy charakteryzująca tarcie wewnętrzne wynikające z przesuwania się względem siebie warstw cieczy podczas jej przepływu. Siły oddziaływania między cząsteczkami cieczy, a także ruchy termiczne tychże cząsteczek są przyczyną powstania siły tarcia wewnętrznego między dwiema warstwami cieczy przemieszczającymi się względem siebie. Zmiana pędu wywołana przejściem pewnej liczby cząstek z jednej warstwy cieczy do drugiej wywołuje popęd, czyli pojawia się na styku tych warstw siła tarcia wzajemnego. Współczynnik lepkości η definiuje poniższy wzór:

$$F = \eta S \frac{dV}{dy}, \quad (12.1)$$

gdzie: F oznacza siłę tarcia wewnętrznego występującą między dwiema warstwami cieczy o powierzchni S , poruszającymi się względem siebie z prędkością V , a wyrażenie dV/dy jest gradientem prędkości w kierunku prostopadłym do rozpatrywanych warstw. Jednostką tak zdefiniowanego współczynnika lepkości w układzie SI jest [Pa·s], co jest równoważne wyrażeniu [kg/(s·m)].

Zależność temperaturową współczynnika lepkości cieczy określa następujący wzór:

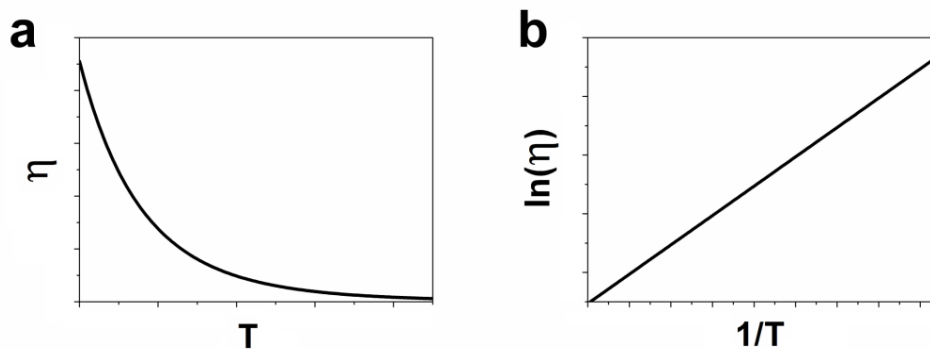
$$\eta(T) = \eta_0 \exp\left(\frac{E_A}{k_B T}\right), \quad (12.2)$$

gdzie: T oznacza temperaturę cieczy wyrażoną w jednostkach [K], η_0 to pewna stała, k_B jest stałą Boltzmanna, natomiast E_A to energia aktywacji. Cząsteczki cieczy grupują się w obszarach zwanych pseudojądrami, pomiędzy którymi znajdują się puste

przestrzenie (tzw. dziury). Przez pewien czas cząsteczka cieczy drga wokół chwilowego położenia równowagi w pobliżu pseudojądra, a następnie przeskakuje na miejsce dziury i przyłącza się do kolejnego pseudojądra. Żeby ten ruch mógł być możliwy, cząsteczka musi mieć energię kinetyczną większą niż praca, jaką należy wykonać w celu pokonania molekularnych sił przyciągania. Energia ta nazywa się energią aktywacji (E_A). Czynniki η_0 oraz E_A we wzorze (12.2) bardzo słabo zależą od temperatury, dlatego w niewielkim przedziale wartości temperatur można założyć, że są one stałe. Z kolei wartość współczynnika lepkości silnie zależy od temperatury cieczy, co zaprezentowano na rys. 1a. Logarytmując równanie (12.2), otrzymujemy liniową zależność logarytmu współczynnika lepkości $\ln(\eta)$ od odwrotności temperatury $1/T$:

$$\ln(\eta) = \frac{E_A}{k_B} \cdot \frac{1}{T} + \ln(\eta_0). \quad (12.3)$$

Przykładowa zależność $\ln(\eta)=f(1/T)$ została przedstawiona na rys. 12.1b.

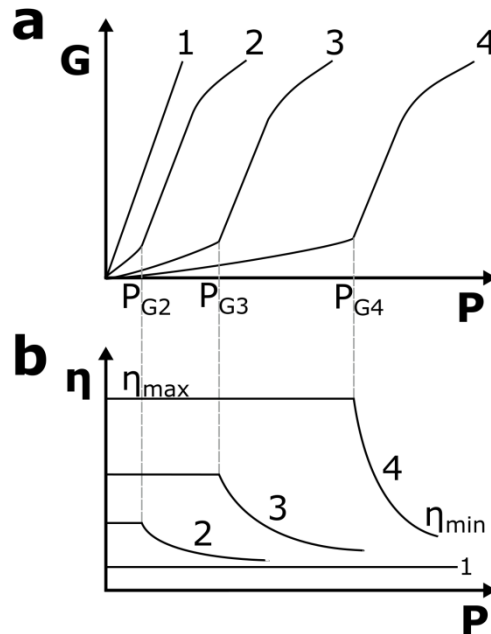


Rys. 12.1. Przykładowe wykresy zależności (a) współczynnika lepkości cieczy od temperatury oraz (b) logarytmu naturalnego współczynnika lepkości jako funkcji odwrotności temperatury

Ciecze newtonowskie i nienewtonowskie

Ze względu na zachowanie się cieczy w zależności od szybkości ich deformacji ciecze dzieli się na newtonowskie oraz nienewtonowskie. Pierwsze z wymienionych to takie, dla których współczynnik lepkości nie zależy od szybkości ich deformacji. Zaliczają się do nich ciecze o małej lepkości, m.in. woda, alkohole, węglowodory o krótkich łańcuchach, wodne roztwory substancji nieorganicznych, natomiast ciecze nienewtonowskie (inaczej zwane cieczami o lepkości strukturalnej) to ciecze, których współczynnik lepkości zależy od naprężenia ściskającego ciecz. Taka własność

determinowana jest strukturą cieczy, której cząsteczki mają wydłużone kształty. Ich orientacja względem siły ścinającej daje odchylenia od proporcjonalności między współczynnikiem lepkości a naprężeniem ścinającym. Przykładami cieczy nienewtonowskich są smary, oleje silnikowe i oleje jadalne.



Rys. 12.2. Przykładowe wykresy (a) krzywych płynięcia $G(P)$ oraz (b) odpowiadających im zależności współczynnika lepkości od naprężenia ścinającego $\eta(P)$ dla różnych cieczy. Dokładny opis krzywych 1, 2, 3, 4 oraz oznaczeń η_{min} , η_{max} , P_{G2} , P_{G3} i P_{G4} znajduje się w tekście

Na rys. 12.2 zaprezentowano przykładowe wykresy zależności lepkości strukturalnej G (równoważnej gradientowi prędkości dV/dy) oraz współczynnika lepkości η w zależności od naprężenia ścinającego P . Krzywe oznaczone numerami od 1 do 4 odpowiadają cieczom o różnych własnościach. Krzywe, którym przypisano cyfrę 1, odnoszą się do cieczy newtonowskich o stałej lepkości. Krzywe oznaczone cyfrą 2 odpowiadają cieczom mającym strukturę. Nie wykazują one odkształceń sprężystych, ponieważ występujące w nich obszary strukturalne (agregaty, flokule) nie są wzajemnie połączone. Z kolei krzywe o numerach 3 i 4 na rys. 12.2 reprezentują układy ciekłoplastyczne (podobne do cieczy) o wzrastającym stopniu tworzenia struktury. Występowanie sieci przestrzennej w całej objętości układu ciekłoplastycznego jest przyczyną występowania w nich odkształceń sprężystych. Na krzywych o numerach od 2 do 4 można rozróżnić trzy charakterystyczne obszary. Dla naprężeń ścinających mniejszych od tzw. dolnej granicy trwałości struktury (P_{G2} , P_{G3} , P_{G4}) pomiędzy wielkościami G i P występuje proporcjonalność. W tym zakresie naprężeń ścinających lepkość jest stała. Środkowa część charakterystyki $G(P)$

odpowiada lepkości malejącej wraz ze wzrostem naprężenia ścinającego. Górna część charakterystyk na rys. 12.2a (dla dużych wartości P) odpowiada całkowicie zniszczonej strukturze cieczy oraz zredukowanej lepkości, która prawie nie zależy od naprężenia ścinającego. Wyróżniamy następujące układy koloidalne:

- żele (galarety) – wykazują właściwości ciała stałego (szczególnie przy słabych oddziaływaniach mechanicznych nieniszczących tej struktury) ze względu na tworzenie przez fazę rozproszoną pewnej struktury przestrzennej,
- zole (zawiesiny, emulsje lub aerozole) – roztwory koloidalne, w których cząsteczki fazy rozproszonej mogą się swobodnie względem siebie przemieszczać, podobnie jak drobiny w cieczach lub gazach.

Zjawisko polegające na niszczeniu struktury i przejściu zol-żel nazywa się tiksotropią. Charakterystyczną cechą zjawiska tiksotropii jest skrócenie czasu deformacji przy tym samym naprężeniu w kolejnych próbach. Czas ten ulega ustaleniu po wielu próbach, kiedy substancja osiągnie strukturę zolu.

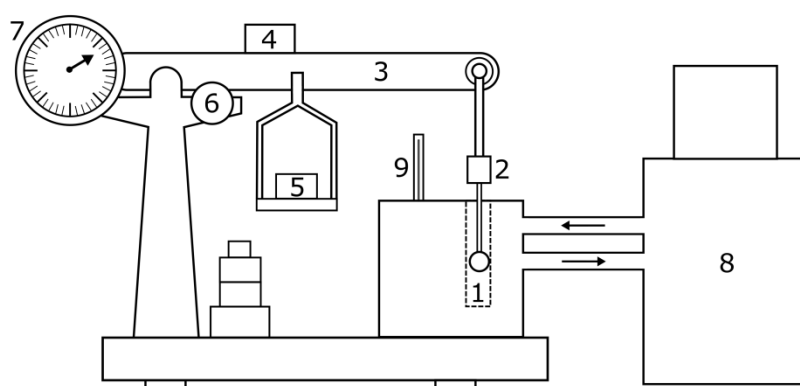
Reowiskozymetr Höpplera

Reowiskozymetr Höpplera (rys. 12.3) to aparatura stosowana do badania współczynnika lepkości oraz anomalii płynności cieczy. W naczynku pomiarowym (1) znajduje się kulka zamocowana na pewnym pręcie, do którego przyczepiona jest masa balastowa (2). Do korpusu reowiskozymetru przytwierdzona jest przez łożysko kulkowe belka wagowa (3) z podziałką oraz przesuwana masa (4) wyrównawcza, za pomocą której kompensuje się siłę wyporu cieczy. Na belce zawieszona jest szalka (5), na której należy umieszczać obciążniki. Masa balastowa (3) śruby mocującej zapewnia docisk belki do ścianki naczynka pomiarowego. Powoduje to przepływ laminarny ośrodka wzdłuż kulki podczas pomiaru i zapewnia tę samą długość drogi pokonanej przez kulkę. Mimośród (6) służy do aretażu belki wagowej. Jej odaretowanie powoduje rozpoczęcie opadania kulki w naczyniu pomiarowym. Belka wagowa przenosi swoje ruchy na nóżkę czujnika przesunięć (7), który służy do odczytania drogi przebytej przez kulkę. Naczynko pomiarowe znajduje się w płaszczu wodnym służącym do stabilizacji temperatury badanej cieczy. Do tego płaszczu podłączone są węże dostarczające i odprowadzające wodę z i do termostatu (8). Termometr (9) służy do pomiaru temperatury wody w płaszczu. Ponadto na stanowisku znajdują się różne odważniki (100, 50, 20 i 10) wyskalowane w jednostkach naprężenia ścinającego na

centymetr kwadratowy [p/cm^2], co równoważne jest [$98,1 \text{ N/m}^2$]. Odważniki umożliwiają dobór naprężenia ścinającego między 10 a 200 p/cm^2 z krokiem 10 jednostek. Wartość współczynnika lepkości zmierzonego za pomocą reowiskozymetru Höpplera określa wzór:

$$\eta = P \cdot t \cdot K \quad (12.4)$$

gdzie: P jest obciążeniem w jednostkach [p/cm^2], t oznacza czas opadania kulki wyrażony w [s], K to stała kalibracyjna przyrządu.



Rys. 12.3. Schemat stanowiska pomiarowego: 1 – naczynko pomiarowe reowiskozymetru Höpplera, 2 – masa balastowa, 3 – belka wagowa, 4 – przesuwana masa wyrównawcza, 5 – szalka z obciążnikami, 6 – mimośród do aretażu belki wagowej, 7 – czujnik przesunięć, 8 – termostat, 9 – termometr

Przebieg ćwiczenia

1. Przed rozpoczęciem eksperymentu wypoziomować urządzenie za pomocą odpowiednich śrub, obserwując wskazania libelli.
2. Włączyć termostat. Dobrać odpowiednie natężenie przepływu cieczy. Nastawić na termostacie zadaną temperaturę.
3. Po ustaleniu się temperatury (ok. 20 min) skompensować wypór kulki przez ciecz. W tym celu należy ustawić przesuwaną masę wyrównawczą w takim punkcie belki wagowej, który odpowiada gęstości badanej cieczy. Temperaturowa zależność wartości gęstości badanej cieczy jest podana w tab. 12.1.
4. Znaleźć największe obciążenie P szalki reowiskozymetru, dla którego czas opadania kulki nie jest mniejszy niż 20 s. Przez czas opadania kulki należy

rozumieć czas przejścia wskazówki pomiędzy wskaźnikami 0 i 30 mm na czujniku przesunięcia.

5. Wykonać pięć razy pomiar czasu t opadania kulki dla danego obciążenia P . Odstęp czasu między kolejnymi pomiarami nie powinien przekraczać 1 min ze względu na możliwe zmiany temperatury lub struktury badanej substancji.
6. Stosując kolejno mniejsze obciążenia szalki reowiskozymetru, wykonać pomiary czasu t opadania kulki (opisane w powyższym punkcie) jako funkcji wartości przyłożonego obciążenia P . Czas opadania kulki nie powinien przekroczyć 200 s.
7. Ustawić na termostacie inną wartość temperatury. Powtórzyć czynności opisane w punktach od 3. do 6.
8. Wykonać pomiary dla temperatur wskazanych przez prowadzącego ćwiczenie.

Opracowanie wyników

1. Obliczyć wartości średnie i ich odchylenia standardowe czasów opadania kulki t zmierzonych dla różnych wartości obciążeń i temperatur. Wyznaczyć niepewności całkowite czasów opadania kulki $u(t)$.
2. Obliczyć wartości współczynnika lepkości η (w jednostkach [cP]) badanej cieczy dla różnych wartości obciążeń i temperatur, korzystając ze wzoru (12.4). Przyjąć wartość stałej kalibracyjnej $K = 0,1060$.
3. Obliczyć niepewności $u(\eta)$, stosując prawo propagacji niepewności.
4. Sporządzić wykres zależności współczynnika lepkości η od obciążenia P dla różnych temperatur badanej cieczy. Zaznaczyć na wykresie niepewności uzyskanych wyników w postaci słupków niepewności.
5. Analizując wykres, sporządzony w powyższym punkcie, ocenić, czy badana ciecz była cieczą newtonowską, czy przeciwnie – była cieczą o lepkości strukturalnej.
6. W przypadku gdy badana ciecz jest nienewtonowska, sporządzić wykres temperaturowej zależności współczynnika lepkości dla jednego określonego naprężenia ścinającego (np. 20 p/cm²), przy którym możliwe były pomiary lepkości w dość szerokim zakresie temperatur (np. 20÷60°C).
7. W przypadku cieczy newtonowskiej:
 - a) obliczyć wartość średnią i jej odchylenie standardowe dla współczynników lepkości wyznaczonych w danej temperaturze dla różnych obciążeń ścinających,

- b) powtórzyć obliczenia opisane w powyższym podpunkcie dla każdej z zarejestrowanych temperatur,
- c) sporządzić wykres zależności uśrednionego współczynnika lepkości od temperatury, zaznaczając na tym wykresie niepewności uzyskanych wyników w postaci słupków niepewności,
- d) sporządzić wykres zależności wartości logarytmu naturalnego uśrednionego współczynnika $\ln(\eta_{sr})$ lepkości od odwrotności temperatury $1/T$,
- e) metodą najmniejszych kwadratów aproksymować wyniki przedstawione na wykresie oraz nanieść prostą $\ln(\eta_{sr}) = a \frac{1}{T} + b$ aproksymującą na wykres,
- f) podać wartość parametrów a , b dopasowanej prostej oraz ich niepewności $u(a)$ i $u(b)$,
- g) porównując zależność (12.3) z równaniem dopasowanej prostej $\ln(\eta_{sr}) = a \frac{1}{T} + b$, wyznaczyć energię aktywacji E_A oraz $u(E_A)$.

Tabela 12.1

Temperaturowa zależność gęstości badanej cieczy

Temperatura, °C	Gęstość, g/cm ³
10	0,905
20	0,891
30	0,877
40	0,864
50	0,850
60	0,837
70	0,823

13. WYZNACZANIE WSPÓLCZYNNIKA PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO CIAŁ STAŁYCH

Pomiędzy ciałami ogrzаныmi do różnej temperatury zachodzi wymiana energii w postaci ciepła. Ciało cieplejsze traci ciepło, a ciało chłodniejsze je zyskuje. Istnieją trzy sposoby wymiany ciepłej:

- konwekcja (unoszenie),
- promieniowanie,
- przewodnictwo cieplne.

Konwekcyjna wymiana ciepła polega na przenoszeniu go razem z materią. Może ono występować tylko w gazach, cieczach lub ich mieszaninach, tj. w płynach. Jeśli pomiędzy różnymi częściami płynu istnieje różnica temperatur, to powoduje ona przemieszczanie się całych makroskopowych jego fragmentów. Gęstość płynu na ogół maleje wraz ze wzrostem temperatury, dlatego też, gdy ogrzewamy płyn od dołu, to zgodnie z prawem Archimedes'a ogrzane warstwy będą wypływać ku górze, zimniejsze natomiast będą opadać. W ten sposób wytwarza się prąd konwekcyjny, powodujący mieszanie się płynu i równomierne jego nagrzewanie.

Przenoszenie ciepła przez promieniowanie zachodzi bez bezpośredniego kontaktu ciał wymieniających energię i polega na wypromieniowaniu oraz pochłanianiu przez te ciała energii niesionej przez fale elektromagnetyczne. Każde ogrzane ciało jest źródłem promieniowania, którego widmo jest widmem ciągłym, tj. długości fal elektromagnetycznych rozkładają się w sposób ciągły w zakresie zależnym od temperatury ciała. Gdy temperatura nie przekracza 700K, promieniowanie nie jest widoczne dla oka i możemy je nazwać promieniowaniem cieplnym (są to promienie podczerwone o stosunkowo dużej długości fali). Dla temperatur wyższych długości fal promieniowania cieplnego przesuwają się w stronę fal krótszych i zaczyna się pojawiać promieniowanie świetlne. Takie promieniowanie elektromagnetyczne dochodzące do innego ciała może być przez nie pochłonięte, przez co zwiększa jego energię wewnętrzną.

Zjawisko przewodzenia cieplnego należy do tzw. zjawisk transportu (w tym przypadku jest to transport energii), oprócz dyfuzji (transport masy) i lepkości

(transport pędu). Przewodnictwem cieplnym nazywamy przenoszenie energii wywołane różnicą temperatur pomiędzy sąsiednimi częściami ciała. Jeżeli zetkniemy ze sobą ciała ogrzane do różnych temperatur, to na skutek zderzeń między ich drobinami następuje bezpośrednia wymiana energii kinetycznej ruchu cieplnego. Cząstki ciała cieplejszego, poruszające się szybciej, przekazują część swojej energii cząstkom poruszającym się wolniej, wskutek czego całkowita energia kinetyczna cząstek ciała gorącego zmniejsza się, a zimnego rośnie. Tak więc kosztem energii wewnętrznej jednego ciała zwiększa się energia drugiego ciała. Przewodnictwo cieplne może zachodzić we wszystkich stanach skupienia, a więc zarówno w gazach, cieczech, jak i ciałach stałych. Zdolność przekazywania energii na skutek przewodnictwa cieplnego jest różna dla różnych ciał.

Rozważmy płaski kawałek dowolnego materiału o powierzchni S i grubości Δx , którego powierzchnie są utrzymywane w różnych temperaturach o różnicy ΔT . Jeśli mierzymy ilość ciepła przepływającego prostopadle do powierzchni S w czasie Δt , to możemy stwierdzić, że dQ jest proporcjonalne do Δt oraz do S , a także do $\Delta T/\Delta x$. Mamy więc:

$$\Delta Q \sim S \frac{\Delta T}{\Delta x} \Delta t \quad (13.1a)$$

lub:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} \sim S \frac{\Delta T}{\Delta x}, \quad (13.1b)$$

a dla granicznej, nieskończenie małej grubości dx , na której występuje różnica temperatur dT , otrzymujemy podstawowe prawo przewodnictwa cieplnego, sformułowane przez J.B. Fouriera w 1822 r.:

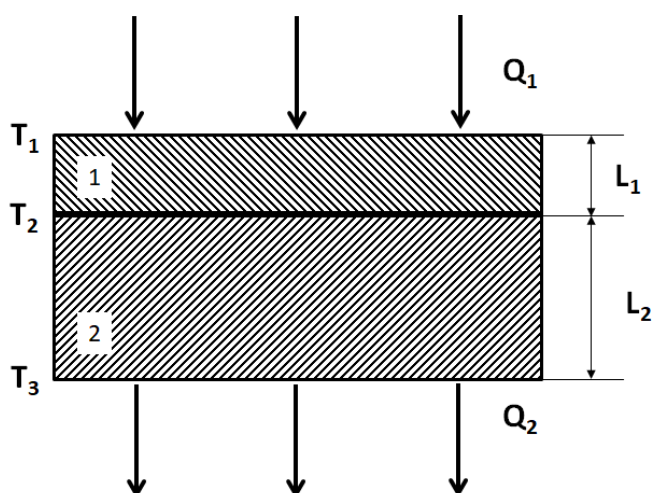
$$\frac{dQ}{dt} = -kS \frac{dT}{dx}, \quad (13.2)$$

gdzie: $\frac{dQ}{dt}$ – szybkość przepływu ciepła przez powierzchnię S , $\frac{dT}{dx}$ – gradient temperatury, k – współczynnik przewodnictwa cieplnego.

Wartość współczynnika k jest duża dla dobrych przewodników ciepła, którymi są np. metale i ich stopy (miedź, $k \cong 400 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$), a niewielka dla dobrych izolatorów ciepła (np. ceramik, szkieleł, tworzyw szklano-ceramicznych, wybranych materiałów kompozytowych i polimerowych (szkło, $k \cong 1 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$)). Zwykle k zależy od

temperatury, jednak gdy różnice temperatur pomiędzy różnymi częściami ciała nie są zbyt duże, można przyjąć, że jest ona stała w obszarze całej substancji.

W zależności od tego, czy chcemy badać „dobre”, czy „złe” przewodniki ciepła, stosujemy różne metody eksperymentalne. Dla porównania cieplnego złych przewodników ciepła można wykorzystać metodę opracowaną przez J.A. Christiansena. W jednej z odmian tej metody eksperymentalnej warstwy badanych ciał w kształcie płytek płasko równoległych o grubościach L_1 i L_2 oraz polu przekroju poprzecznego S wstawia się pomiędzy płytki miedziane, do których wprowadzone są termopary (rys. 13.1).



Rys. 13.1. Schematyczne przedstawienie układu pomiarowego do badania przewodnictwa ciał stałych

Miedź, jako bardzo dobry przewodnik ciepła, przylegająca do badanych próbek, zapewnia równomierną temperaturę powierzchni. Zakładając, że ciepło przepływa stacjonarnym strumieniem kolejno przez płytki miedziane i warstwy badanych substancji i zanedbując efekty brzegowe (straty ciepła), równania przepływu ciepła przez płytki możemy zapisać następująco:

dla ciała 1:

$$Q_1 = -k_1 \frac{T_1 - T_2}{L_1} St, \quad (13.3)$$

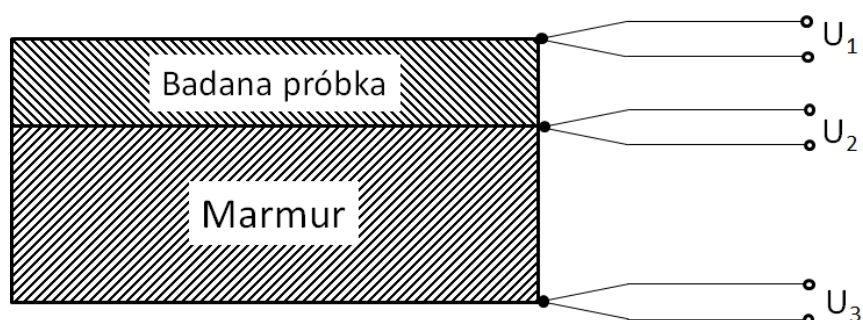
dla ciała 2:

$$Q_2 = -k_2 \frac{T_2 - T_3}{L_2} St. \quad (13.4)$$

Dla stacjonarnego przepływu ciepła $Q_1 = Q_2$, wówczas:

$$k_1 \frac{T_1 - T_2}{L_1} = k_2 \frac{T_2 - T_3}{L_2}. \quad (13.5)$$

Układ pomiarowy stosowany w ćwiczeniu (rys. 13.2) składa się z próbki badanej (materiał ceramiczny) i próbki materiału wzorcowego (biały marmur), umieszczonych pomiędzy krążkami miedzianymi, w których umieszczone są termopary.



Rys. 13.2. Schemat układu pomiarowego do badania przewodnictwa ciał stałych, przedstawiający rozmieszczenie termopar

Badane materiały znajdują się pomiędzy dwoma naczyniami metalowymi. Górne naczynie jest ogrzewane za pomocą pary wodnej, natomiast dolne jest chłodzone bieżącą zimną wodą. Układ pomiarowy jest izolowany cieplnie. Początkowo wszystkie elementy mają temperaturę pokojową, w miarę upływu czasu rośnie temperatura złącza pomiędzy badanymi materiałami. Po pewnym czasie temperatury ustalają się. Znając współczynnik przewodnictwa cieplnego materiału wzorcowego, można wyznaczyć współczynnik materiału badanego:

$$k_1 = k_2 \frac{L_1}{L_2} \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_2}. \quad (13.6)$$

Ponieważ siły termoelektryczne termopar są proporcjonalne do temperatury:

$$U = c T, \quad (13.7)$$

gdzie c jest stałą proporcjonalności, więc zależność (13.6) można zapisać w postaci:

$$k_1 = k_2 \frac{L_1}{L_2} \frac{U_2 - U_3}{U_1 - U_2}. \quad (13.8)$$

Przebieg ćwiczenia

1. Uzupełnić wodę w naczyniu. Włączyć grzejnik. Otworzyć obieg zimnej wody.
2. Od momentu zagotowania się wody w naczyniu notować wskazania miliwoltomierzy mierzących siły termoelektryczne U_1, U_2, U_3 (ustabilizować za pomocą grzejnika średni poziom intensywności wrzenia wody w naczyniu).
3. Pomiarów powtarzać w odstępach 30-sekundowych aż do momentu, gdy wskazania wszystkich miliwoltomierzy przestaną się istotnie zmieniać – ustalą się (ten ustalony stan oznacza, że w układzie pomiarowym został osiągnięty stacjonarny przepływ ciepła).
4. Zanotować zakresy oraz niepewności pomiarowe użytych mierników do pomiaru U_1, U_2, U_3 .

Opracowanie wyników

1. Narysować wykresy zależności sił termoelektrycznych od czasu dla wszystkich termopar. Na podstawie wykresów wyznaczyć ustalone wartości sił termoelektrycznych dla każdej z termopar (rysując asymptoty).
2. Na podstawie danych technicznych użytych w eksperymencie miliwoltomierzy określić niepewności zmierzonych sił termoelektrycznych.
3. Z zależności (13.8) wyznaczyć współczynnik przewodnictwa cieplnego badanego materiału ceramicznego, przyjmując następujące wielkości stałe: współczynnik przewodnictwa cieplnego marmuru $k_2 = 2,33 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$, grubość marmuru $L_2 = 9,86 \text{ mm}$, grubość badanego materiału $L_1 = 4,70 \text{ mm}$, oraz przyjmując wartości ustalone sił termoelektrycznych wyznaczonych w punkcie 1.
4. Obliczyć niepewność wyznaczonej wielkości, przyjmując $u(L_1) = u(L_2) = 0,02 \text{ mm}$.

14. BADANIE ZALEŻNOŚCI TEMPERATUROWEJ PRZEWODNICTWA ELEKTRYCZNEGO METALI I PÓLPRZEWODNIKÓW

Ze względu na właściwości elektryczne wszystkie materiały można podzielić na trzy grupy: przewodniki (metale), półprzewodniki i dielektryki (izolatory). Parametrami charakteryzującymi właściwości elektryczne poszczególnych materiałów są przewodnictwo elektryczne właściwe σ i opór właściwy ρ , przy czym parametry te są ściśle ze sobą związane wzorem:

$$\rho = \frac{1}{\sigma}. \quad (14.1)$$

Podziału materiałów na przewodniki i półprzewodniki można dokonać nie tylko na podstawie wartości oporu właściwego, lecz także na podstawie jego temperaturowej zależności. W czystych metalach opór właściwy jest w przybliżeniu proporcjonalny do temperatury T i zależność tę można przedstawić empirycznym wzorem:

$$\rho = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)], \quad (14.2)$$

gdzie: ρ_0 – opór właściwy w wybranej temperaturze odniesienia T_0 , α – współczynnik temperaturowy oporu właściwego. Wartości oporu właściwego w temperaturze 20°C oraz współczynników temperaturowych oporu dla niektórych substancji przedstawia tab. 14.1.

Opór właściwy półprzewodników maleje ze wzrostem temperatury zgodnie z zależnością:

$$\rho = \rho_c e^{\beta/T}, \quad (14.3)$$

gdzie ρ_c , β – stałe.

Tabela 14.1

Wartości elektrycznego oporu właściwego ρ_{20} , temperaturowego współczynnika oporu właściwego α w temperaturze pokojowej oraz szerokości przerwy energetycznej E_g dla niektórych substancji

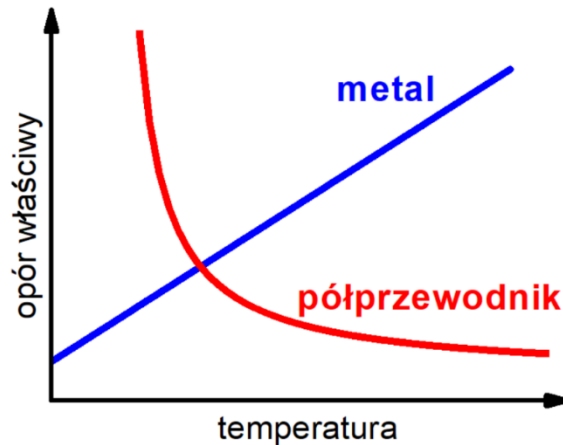
Materiał	$\rho_{20}, \Omega\text{m}$	α, K^{-1}	E_g, eV
srebro	$1,62 \cdot 10^{-8}$	$4,1 \cdot 10^{-3}$	-
miedź	$1,69 \cdot 10^{-8}$	$4,3 \cdot 10^{-3}$	-
wolfram	$5,25 \cdot 10^{-8}$	$4,5 \cdot 10^{-3}$	-
żelazo	$9,68 \cdot 10^{-8}$	$6,5 \cdot 10^{-3}$	-
krzem	$2,5 \cdot 10^3$	$-70 \cdot 10^{-3}$	1,10
german	0,46	$-50 \cdot 10^{-3}$	0,75

Wartość przewodnictwa elektrycznego właściwego danego materiału zależy od koncentracji występujących w nim swobodnych nośników ładunku elektrycznego oraz od ich ruchliwości, czyli szybkości unoszenia ładunków w polu elektrycznym o jednostkowym natężeniu. Ogólnie można wyrazić to wzorem:

$$\sigma = e(n_+\mu_+ + n_-\mu_-), \quad (14.4)$$

gdzie: e – ładunek elementarny, n_+ , n_- – koncentracja (czyli liczba przypadających na jednostkę objętości) swobodnych nośników ładunków odpowiednio dodatnich i ujemnych, μ_+ , μ_- – ruchliwość swobodnych nośników ładunków dodatnich i ujemnych.

Temperatura ciała ma wpływ na wartość ruchliwości i koncentrację swobodnych nośników ładunku. Wpływ temperatury jest uzależniony od rodzaju ciała, stąd obserwuje się różne zależności temperaturowe przewodnictwa właściwego, a tym samym i oporu właściwego wyrażonego wzorami (14.2) i (14.3) i przedstawionego na rys. 14.1.



Rys. 14.1. Temperaturowa zależność oporu właściwego metali i półprzewodników

Ruch ładunków w polu elektrycznym

Jeżeli cząstkę o masie m obdarzoną ładunkiem elektrycznym q (np. elektron) umieścimy w polu elektrycznym o stałym natężeniu \vec{E} , to będzie na nią działała siła:

$$\vec{F} = q\vec{E}. \quad (14.5)$$

Zgodnie z zasadami dynamiki cząstka taka uzyska przyspieszenie:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad (14.6)$$

gdzie m jest masą cząstki. Cząstka taka będzie się więc poruszać ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem zależnym od natężenia pola elektrycznego.

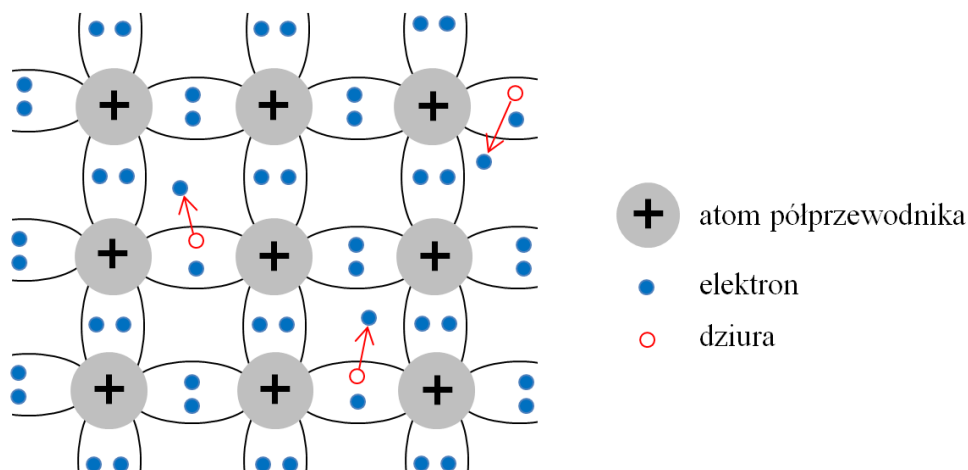
W przypadku cząstek naładowanych wchodzących w skład ciała stałego rezultat działania pola elektrycznego uzależniony jest od rodzaju wiązań pomiędzy atomami danego materiału.

Ładunki silnie związane np. wiązaniami jonowymi mogą jedynie zmienić swoje położenie względem środka masy cząsteczki, powodując polaryzację danego materiału. Z takim zjawiskiem mamy do czynienia w dielektrykach. Przepływ prądu elektrycznego przez taki materiał jest praktycznie niemożliwy – dielektryki charakteryzują się bardzo dużymi wartościami oporu właściwego.

W metalach elektrony walencyjne są elektronami swobodnymi, tzn. poruszają się swobodnie ruchem chaotycznym w całej objętości metalu, zderzając się jednocześnie

z drgającymi jonami tworzącymi sieć krystaliczną przewodnika – inaczej mówiąc, ulegają rozpraszaniu na termicznych drganiach sieci krystalicznej (tzw. fononach). Jeżeli metal umieścimy w polu elektrycznym, to uporządkowany ruch swobodnych elektronów zachodzący w wyniku działania pola elektrycznego jest zakłócony zderzeniami z drgającymi jonami. Każde zderzenie powoduje zamianę energii kinetycznej przyspieszanych elektronów na energię drgań sieci krystalicznej. Rezultatem tego jest uzyskanie przez elektrony pewnej stałej średniej prędkości w kierunku przeciwnym do wektora natężenia pola elektrycznego, zwanej prędkością unoszenia, a tym samym stałej ruchliwości. Im wyższa jest temperatura danego materiału, tym większe są energia i amplituda drgań jonów sieci, a tym samym silniejsze jest rozpraszanie poruszających się nośników ładunku elektrycznego na fononach i mniejsza wartość średniej prędkości unoszenia. W wyniku tego ze wzrostem temperatury maleje ruchliwość nośników ładunku.

W metalach liczba swobodnych elektronów jest duża – porównywalna z liczbą atomów – i jest ona niezależna od temperatury. Wobec wysokiej i jednocześnie stałej wartości koncentracji swobodnych ładunków oraz malejącej ze wzrostem temperatury ruchliwości metale charakteryzują się dużymi wartościami przewodnictwa właściwego oraz jego spadkiem ze wzrostem temperatury. Jednocześnie ze wzrostem temperatury liniowo rośnie opór właściwy zgodnie z równaniem (14.2). Charakter tych zmian przedstawiony jest na rys. 14.1. W półprzewodnikach obecność swobodnych nośników ładunku i ich liczba uzależnione są od czynników zewnętrznych, takich jak np. oświetlenie lub temperatura. Wzrost temperatury powoduje, że rośnie koncentracja swobodnych ładunków. Typowe półprzewodniki takie jak krzem lub german mają 4 elektrony walencyjne. Każdy atom, tworząc ciało stałe, wiąże się z 4 innymi atomami wiązaniem kowalencyjnym, tzn. za pośrednictwem par elektronowych (rys. 14.2).



Rys. 14.2. Model sieci przestrzennej półprzewodnika samoistnego

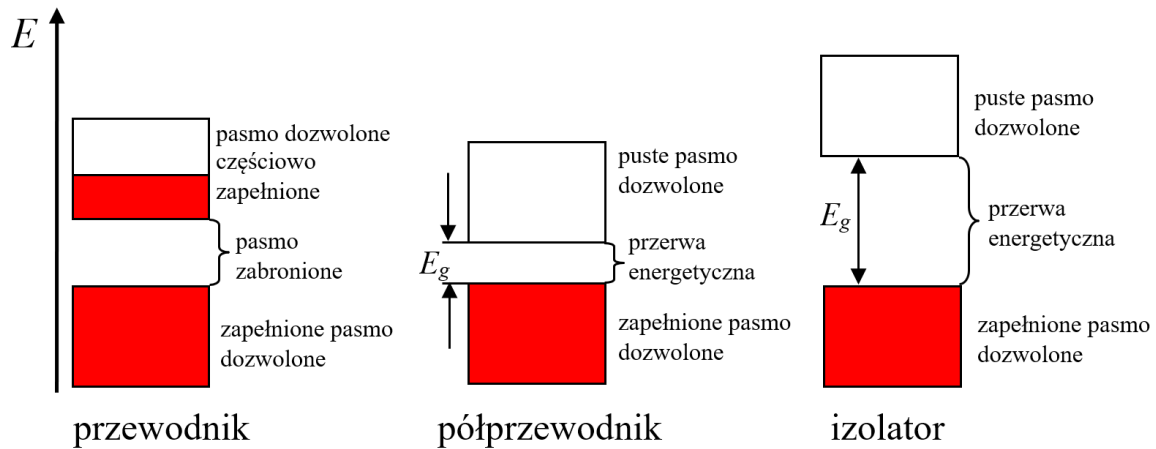
W temperaturze bliskiej 0 K wszystkie elektrony są związane z atomami. Taki półprzewodnik nie przewodzi prądu elektrycznego, ale wystarczy do półprzewodnika dostarczyć energię (np. ogrzać lub oświetlić), aby część elektronów walencyjnych uwolniła się z wiązań i stała się elektronami swobodnymi. Puste miejsce po elektronie w wiązaniu może zająć elektron z sąsiedniego wiązania. W ten sposób puste miejsce również się przemieszcza i zachowuje się tak, jakby było obdarzone ładunkiem dodatnim. Ten dodatni ładunek jest nazywany dziurą. W półprzewodniku występują więc dwa rodzaje swobodnych ładunków: elektrony i dziury. Ich koncentracja jest mniejsza niż koncentracja elektronów swobodnych w metalach, dlatego półprzewodniki charakteryzują się mniejszymi wartościami przewodnictwa właściwego, natomiast ze wzrostem temperatury koncentracja swobodnych elektronów i dziur wzrasta. Proces ten ma dominujące znaczenie wobec zmniejszania się ruchliwości nośników ładunku w wyniku ich rozpraszania na fononach i prowadzi do wzrostu przewodnictwa elektrycznego w miarę ogrzewania półprzewodnika, a temperaturową zmianę oporu właściwego opisuje wzór (14.3).

Teoria pasmowa ciał stałych

Każdy elektron w atomie ma ściśle określone wartości energii – inaczej mówiąc, zajmuje ściśle określone stany lub poziomy energetyczne. Każdy taki stan scharakteryzowany jest czterema liczbami kwantowymi. Zgodnie z zakazem Pauliego w układzie nie mogą istnieć dwa elektrony w takim samym stanie kwantowym. Zbliżenie się do siebie atomów prowadzi więc do rozszczepienia się poziomów energetycznych na odpowiednią liczbę, tak aby dalej obowiązywał zakaz Pauliego. W przypadku ciała stałego, w którym istnieje bardzo duża liczba atomów, poszczególne poziomy energetyczne znajdują się bardzo blisko siebie i można przyjąć, że tworzą pasmo. Pasma dozwolonych energii oddzielone są od siebie pasmami zabronionymi (tzn. elektrony nie mogą mieć energii z zakresu takich pasm). Pasma zabronione zwane są przerwami energetycznymi.

Aby elektron mógł brać udział w przewodnictwie elektrycznym, musi mieć możliwość wzrostu swojej energii w wyniku przyspieszania w polu elektrycznym. Wobec tego warunkiem udziału elektronów w przewodnictwie elektrycznym jest obecność pustych (tzn. nieobsadzonych przez elektrony) poziomów w paśmie. Takie pasmo zwane jest pasmem przewodnictwa. Elektrony z pasma zapełnionego, w którym

wszystkie poziomy energetyczne są obsadzone, nie mogą przewodzić prądu elektrycznego.



Rys. 14.3. Pasma energetyczne w przewodniku, półprzewodniku i izolatorze

Pasma niższe związane z elektronami z powłok wewnętrznych są pasmami zapełnionymi. W przypadku pasm wyższych, zajmowanych przez elektrony walencyjne, można wyróżnić różne sytuacje (rys. 14.3), z których wynika podział ciał stałych na: przewodniki, półprzewodniki i izolatory.

W przypadku gdy najwyższe pasmo dozwolone zawierające elektrony walencyjne jest pasmem tylko częściowo zapełnionym, elektrony walencyjne są ładunkami swobodnymi, a taki materiał zaliczany jest do przewodników.

W przypadku izolatorów pasmo z elektronami walencyjnymi jest pasmem całkowicie zapełnionym, a następne pasmo – pasmo przewodnictwa – jest całkowicie puste. Przerwa energetyczna między tymi pasmami jest na tyle duża, że jedynie bardzo silne pole elektryczne może spowodować przeniesienie elektronu do stanów nieobsadzonych znajdujących się w paśmie przewodnictwa, powodując tzw. przebicie izolatora.

Dla półprzewodników natomiast pasma energii dozwolonych oddzielone są tylko niewielką przerwą energetyczną. Wystarczy taki półprzewodnik ogrzać lub oświetlić, aby elektrony znajdujące się w paśmie walencyjnym uzyskały energię większą niż szerokość przerwy energetycznej i zajęły stany w następnym paśmie – paśmie przewodnictwa, czyli stały się elektronami swobodnymi. Jednocześnie puste stany w paśmie walencyjnym zachowują się tak jak nośniki ładunku dodatniego, tzw. dziury. Półprzewodniki takie nazywane są samoistnymi.

Przewodnictwo właściwe półprzewodnika zmienia się ze zmianą temperatury zgodnie ze wzorem:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{E_a}{2k_B T}}, \quad (14.7)$$

gdzie: E_a jest energią aktywacji, k_B – stałą Boltzmana. Dla półprzewodników samoistnych wartość energii aktywacji jest równa szerokości przerwy energetycznej E_g .

Układ pomiarowy

Charakter zmian temperaturowych przewodnictwa elektrycznego próbek jest badany pośrednio przez pomiar ich rezystancji. Schemat układu pomiarowego przedstawiony jest na rys. 14.4. Próbki metalu oraz półprzewodnika umieszczone są w piecyku służącym do zmiany ich temperatury. Rezystancja próbki półprzewodnika mierzona jest bezpośrednio omomierzem. Rezystancja próbki metalu mierzona jest pośrednio przez pomiar napięcia U na próbce i natężenia I prądu płynącego przez próbkę. Zgodnie z prawem Ohma rezystancja próbki jest równa:

$$R_M = \frac{U}{I}. \quad (14.8)$$

Ponieważ rezystancja ciał stałych zależy od oporu właściwego badanego materiału oraz od wymiarów geometrycznych próbki, powinna zmieniać się z temperaturą zgodnie z charakterem zmian oporu właściwego badanego materiału.

W przypadku metali opór będzie więc zmieniał się analogicznie do oporności właściwej zgodnie ze wzorem (14.2). Przyjmując, że temperatura odniesienia wynosi 0°C , zależność oporu od temperatury można wyrazić wzorem:

$$R_M = R_0(1 + \alpha T), \quad (14.9)$$

gdzie: R_0 – opór w temperaturze 0°C , a T jest temperaturą wyrażoną w $^\circ\text{C}$.

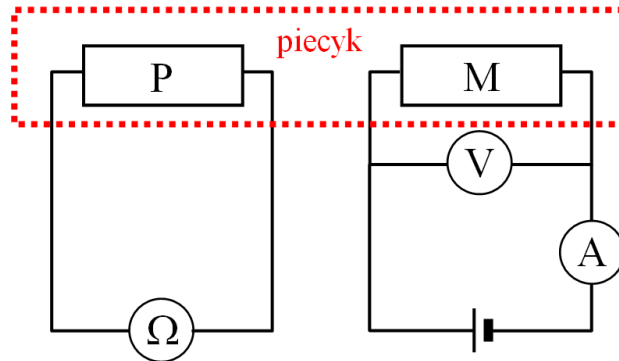
W przypadku półprzewodników na podstawie zależności (14.3) i (14.7) można wykazać, że ich opór maleje eksponencjalnie zgodnie ze wzorem:

$$R_P = R_0 e^{\frac{E_a}{2k_B T}}. \quad (14.10)$$

Po zlogarytmowaniu powyższe równanie przyjmie postać:

$$\ln(R_P) = \frac{E_a}{2k_B T} + \ln(R_0), \quad (14.11)$$

z której wynika, że zależność $\ln(R_P) = f(1/T)$ ma charakter liniowy.



Rys. 14.4. Schemat układu pomiarowego: P – próbka półprzewodnika, M – próbka metalu

Przebieg ćwiczenia

1. Zapoznać się z układem pomiarowym.
2. Ustawić podane przez prowadzącego natężenie I prądu płynącego przez próbkę metalową.
3. Zmieniając temperaturę w zakresie podanym przez prowadzącego, zmierzyć temperaturę T , napięcie U na próbce metalowej oraz rezystancję R_P próbki półprzewodnikowej.

Opracowanie wyników

Próbka metalu:

1. Na podstawie danych technicznych użytych mierników obliczyć niepewności wartości zmierzonego natężenia prądu oraz napięcia i zapisać poprawnie wyniki.
2. Korzystając z prawa Ohma, obliczyć rezystancje R_M próbki metalu dla poszczególnych temperatur. Obliczyć ich niepewności oraz zapisać poprawnie wyniki.

3. Sporządzić wykres zależności rezystancji R_M od temperatury wyrażonej w $^{\circ}\text{C}$. Metodą najmniejszych kwadratów wyznaczyć parametry kierunkowe prostej aproksymującej tę zależność. Prosta aproksymującą zaznaczyć na wykresie.
4. Korzystając z wyznaczonych parametrów prostej aproksymującej $R_M = aT + b$ oraz wzoru (14.9), wyznaczyć rezystancję R_0 w temperaturze 0°C oraz współczynnik temperaturowy oporu α badanej próbki. Obliczyć ich niepewności oraz zapisać poprawnie wyniki.

Próbka półprzewodnika:

5. Na podstawie danych technicznych użytego miernika obliczyć niepewności rezystancji R_P próbki półprzewodnika i zapisać poprawnie wyniki.
6. Sporządzić wykres zależności rezystancji R_P od temperatury. **Uwaga:** dla próbki półprzewodnika temperaturę przedstawić w kelwinach.
7. Sporządzić wykres $\ln(R_P)$ jako funkcji odwrotności temperatury $1/T$. Metodą najmniejszych kwadratów wyznaczyć parametry kierunkowe prostej aproksymującej zależność $\ln(R_P) = a\frac{1}{T} + b$. Prosta aproksymującą zaznaczyć na wykresie.
8. Korzystając z wyznaczonych parametrów prostej aproksymującej zależność $\ln(R_P) = f(1/T)$ oraz wzoru (14.11), wyznaczyć wartość energii aktywacji E_a badanego półprzewodnika. Metodą propagacji niepewności obliczyć jej niepewność oraz zapisać poprawnie wynik końcowy. Wynik wyrazić w elektronowoltach.

15. BADANIE WŁAŚCIWOŚCI DIELEKTRYCZNYCH KRYSZTAŁU SIARCZANU TRÓJGLICYNY

Dielektrykami nazywamy materiały, których rezystywność w warunkach normalnych jest większa od $10^9 \Omega\text{m}$. Są to materiały o szerokości przerwy energetycznej większej od 3 eV. Cechą charakterystyczną dielektryków jest to, że po wprowadzeniu ich w zewnętrzne pole elektryczne ulegają polaryzacji elektrycznej, która polega na wyidukowaniu elektrycznych momentów dipolowych i ukierunkowaniu trwałych momentów dipolowych, o ile takie istnieją. Ilościowo polaryzację dielektryka charakteryzuje wektor polaryzacji, zdefiniowany jako wypadkowy moment dipolowy jednostki objętości dielektryka, który można wyrazić wzorem:

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{\mu}_i}{V} = n \cdot \vec{\mu} = n \cdot \alpha \cdot \vec{E}_l, \quad (15.1)$$

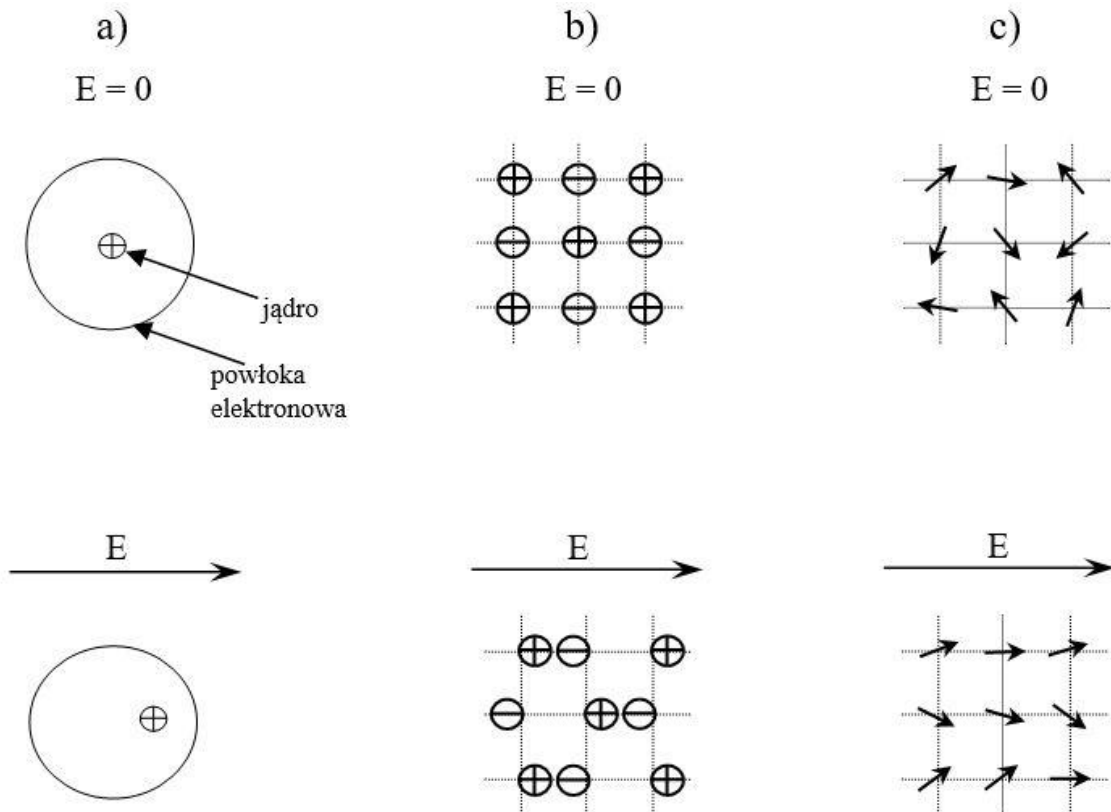
gdzie: n oznacza koncentrację objętościową dipoli, $\vec{\mu} = q \cdot \vec{l}$ – moment dipolowy pojedynczego dipola, q – wartość jednego z różnoimiennych ładunków, \vec{l} – wektor poprowadzony od ładunku ujemnego do dodatniego równy długości dipola, α – polaryzowalność dielektryka oraz \vec{E}_l – natężenie pola lokalnego, które nie jest tożsame z natężeniem zewnętrznego pola elektrycznego.

Polaryzowalność dielektryka może być sumą trzech podstawowych mechanizmów polaryzacji: polaryzacji elektronowej (α_e), polaryzacji jonowej (α_j) i polaryzacji dipolowej (α_d).

Polaryzacja elektronowa polega na tym, że powłoki elektronowe atomów w polu elektrycznym ulegają przesunięciu względem jądra atomowego, wskutek czego w atomie powstaje elektryczny moment dipolowy. Polaryzacja jonowa występuje w kryształach jonowych. Jest związana z przesunięciem w różne strony jonów dodatnich i ujemnych w polu elektrycznym, wskutek czego w sieci krystalicznej powstaje elektryczny moment dipolowy. Polaryzacja dipolowa jest związana z uporządkowaniem w polu elektrycznym kierunków momentów dipolowych drobin, mających trwałe

momenty dipolowe. Wymienione mechanizmy polaryzacji zostały zobrazowane na rys. 15.1.

W przypadku pierwszych dwóch mechanizmów momenty dipolowe są indukowane polem elektrycznym, dlatego zaliczane są do polaryzacji indukowanych. Trzeci mechanizm dotyczy uporządkowania już istniejących dipoli, stąd jest nazywany też mechanizmem orientacyjnym.



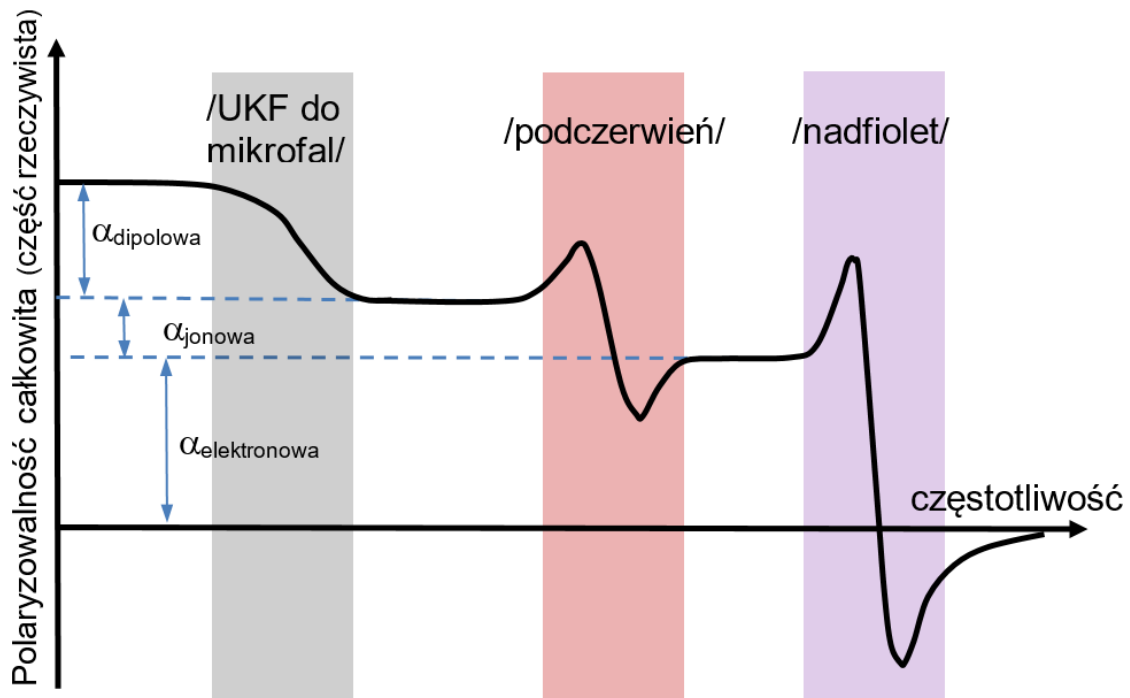
Rys. 15.1. Mechanizmy polaryzacji elektrycznych: a) elektronowa, b) jonowa, c) dipolowa

Zależność polaryzowalności całkowitej materiału od częstotliwości przyłożonego pola elektrycznego przedstawia rys. 15.2.

W obszarze wysokich częstotliwości (nadfiolet) w polaryzowalności dominuje składowa elektronowa. Polaryzowalność jonowa zaczyna odgrywać rolę w polach z obszaru podczerwieni. W polach o małej częstotliwości występują wszystkie rodzaje polaryzowalności.

W szczególnych przypadkach na wektor polaryzacji poza zewnętrznym polem elektrycznym mogą mieć wpływ naprężenia mechaniczne \vec{N} wywierane na dany dielektryk lub jego zmiany temperatury ΔT . Materiały, w których $\vec{P} = f(\vec{E}, \vec{N})$,

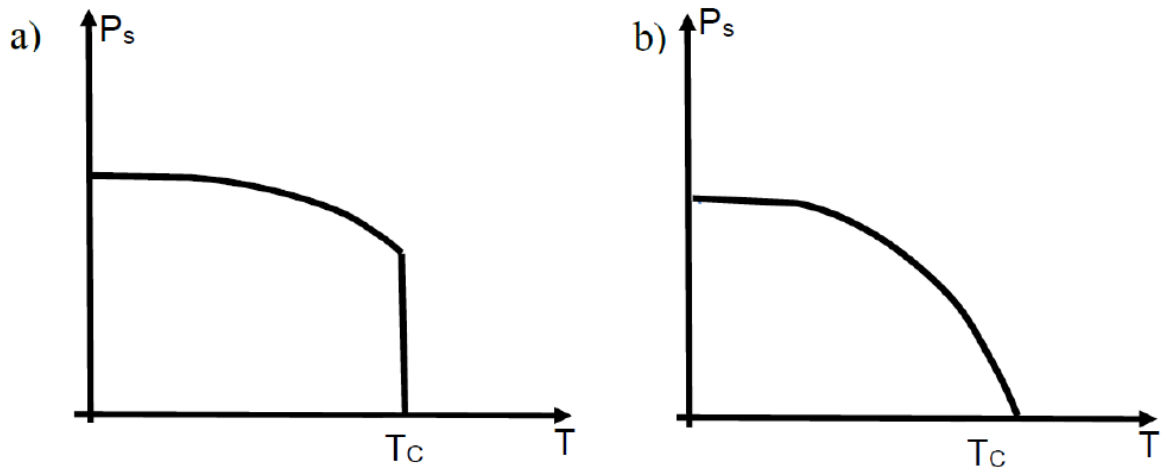
nazywamy piezoelektrykami, natomiast materiały, w których $\vec{P} = f(\vec{E}, \Delta T)$, nazywamy piroelektrykami. Podgrupę tych ostatnich stanowią ferroelektryki.



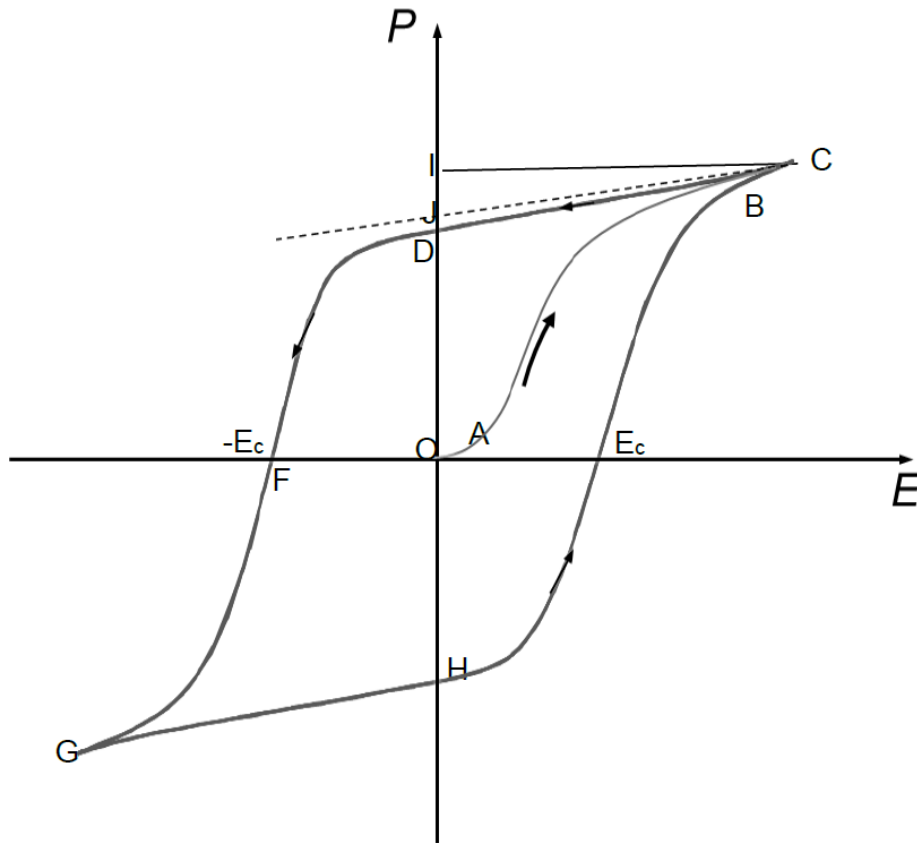
Rys. 15.2. Zależność polaryzowalności całkowitej materiału od częstotliwości przyłożonego pola elektrycznego

Ferroelektrykami nazywamy ciała stałe o budowie krystalicznej, które poniżej pewnej temperatury lub w pewnym przedziale temperatur, mimo nieobecności zewnętrznego pola elektrycznego, wykazują polaryzację elektryczną. Temperatura, powyżej której zanika stan ferroelektryczny, nosi nazwę temperatury Curie. Jest to temperatura przejścia fazowego z fazy ferroelektrycznej do fazy paraelektrycznej. Przejście to może być typu przesunięcie (tzw. przemiana I rodzaju) lub typu porządek – nieporządek (przemiana II rodzaju). W pierwszym przypadku polaryzacja spontaniczna zanika skokowo, natomiast w drugim zmiana ta ma charakter ciągły (rys. 15.3).

Ferroelektryki są dielektrykami nieliniowymi. Oznacza to, że polaryzacja \vec{P} jest nieliniową funkcją zewnętrznego pola elektrycznego \vec{E} i zależy także od historii próbki (tzn. od tego, czy wcześniej była już umieszczona w polu elektrycznym). Wyrazem tej zależności jest pętla histerezy ferroelektrycznej (rys. 15.4) typowa dla wszystkich ferroelektryków. Związana jest ona z ich strukturą domenową.



Rys. 15.3. Zależność polaryzacji spontanicznej od temperatury dla ferroelektryku z przemianą fazową I rodzaju (a) oraz II rodzaju (b); T_c – temperatura Curie



Rys. 15.4. Pętla histerezy ferroelektrycznej. Opis oznaczeń w tekście

Domeny to obszary spontanicznie (samoistnie) spolaryzowane, które w nieobecności zewnętrznego pola elektrycznego mogą się wzajemnie kompensować. Wypadkowa polaryzacja takiego kryształu może więc być zerowa, $P = 0$ (punkt 0 na wykresie $P(E)$).

W dostatecznie słabym polu, które nie jest zdolne przeorientować ani jednej domeny, zależność między P i E jest liniowa (odcinek OA na wykresie $P(E)$). Kryształ zachowuje się jak każdy dielektryk liniowy. Pojawia się w nim polaryzacja indukowana, która znika po usunięciu zewnętrznego pola elektrycznego. Przy zwiększaniu natężenia pola elektrycznego następuje proces orientacji domen. Pojawia się gwałtowny wzrost wypadkowej polaryzacji aż do osiągnięcia stanu monodomenowego, czyli zorientowania wszystkich domen w kierunku pola (odcinek AB na wykresie $P(E)$). Stan ten nosi nazwę nasycenia. Przy dalszym wzroście natężenia pola polaryzacja kryształu monodomenowego znowu rośnie liniowo wskutek dalszego wzrostu polaryzacji indukowanej (odcinek BC na wykresie $P(E)$). Zmniejszenie pola elektrycznego powoduje zmianę polaryzacji po krzywej CD . W zerowym polu elektrycznym kryształ wykazuje pozostałość polaryzacyjną (polaryzację resztkową), której miarą jest odcinek OD . Oznacza to, że niektóre domeny pozostają zorientowane w kierunku uprzednio działającego pola. Aby w pełni zdepolaryzować kryształ, należy przyłożyć pole elektryczne przeciwnie skierowane noszące nazwę pola koercji ($E_c = OF$). Przy pewnej wartości rosnącego w tym kierunku pola pojawi się stan nasycenia w przeciwnym kierunku. Cykl zamyka się po ponownym zmniejszeniu pola do zera i ponownym wzroście w pierwotnym kierunku (fragment GHC na wykresie $P(E)$). Odcinek OJ jest miarą polaryzacji całkowitej będącej sumą polaryzacji spontanicznej i indukowanej. Odcinek IJ jest miarą polaryzacji indukowanej w maksymalnym przyłożonym polu elektrycznym.

Kondensator próżniowy o pojemności równej C_0 zmienia swoją pojemność do wartości C po wypełnieniu go dielektrykiem. Stosunek zmiany pojemności kondensatora do jego pojemności zerowej C_0 nazywamy podatnością elektryczną dielektryka:

$$\chi = \frac{C - C_0}{C_0} = \frac{\Delta C}{C_0}, \quad (15.2)$$

natomiast stosunek pojemności kondensatora wypełnionego dielektrykiem do jego pojemności zerowej C_0 nazywamy przenikalnością elektryczną:

$$\varepsilon = \frac{C}{C_0}. \quad (15.3)$$

Pojemność C_0 płaskiego kondensatora próżniowego zależy od jego wymiarów, tj. od powierzchni okładek S oraz od odległości między nimi d zgodnie z równaniem:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}, \quad (15.4)$$

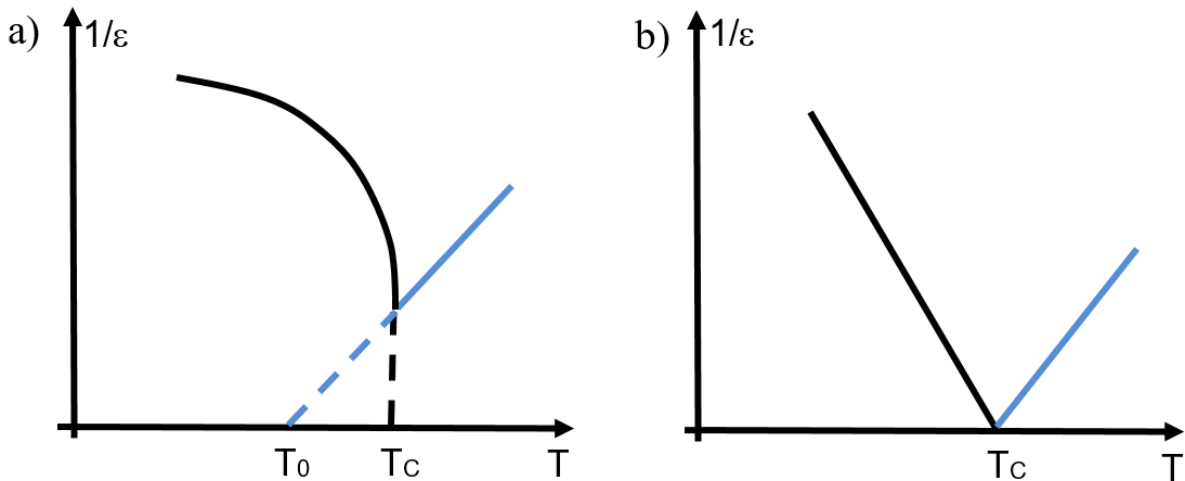
gdzie ε_0 to przenikalność elektryczna próżni.

Ze wzorów (15.2) oraz (15.3) wynika, że związek pomiędzy podatnością a przenikalnością elektryczną jest następujący:

$$\chi = \varepsilon - 1. \quad (15.5)$$

W przypadku ferroelektryków parametr ten przyjmuje bardzo duże wartości, rzędu 10^3 - 10^4 .

Przenikalność elektryczna ferroelektryków także silnie zależy od temperatury. W pewnym przedziale temperatur w trakcie grzania jej wartość gwałtownie rośnie, w temperaturze Curie osiąga wartość maksymalną, a po jej przekroczeniu maleje. W tym też przedziale temperatur, czyli w fazie paraelektrycznej, przenikalność elektryczna spełnia prawo Curie-Weissa, w myśl którego odwrotność przenikalności elektrycznej jest liniową funkcją temperatury. Dla ferroelektryków z przemianą fazową II rodzaju prawo to jest spełnione także w fazie ferroelektrycznej (rys. 15.5).



Rys. 15.5. Zależność $1/\varepsilon$ od temperatury T dla ferroelektryku z przemianą fazową I rodzaju (a) oraz II rodzaju (b); T_0 – temperatura Curie-Weissa, T_c – temperatura Curie

Prawo Curie-Weissa wyraża się wzorem:

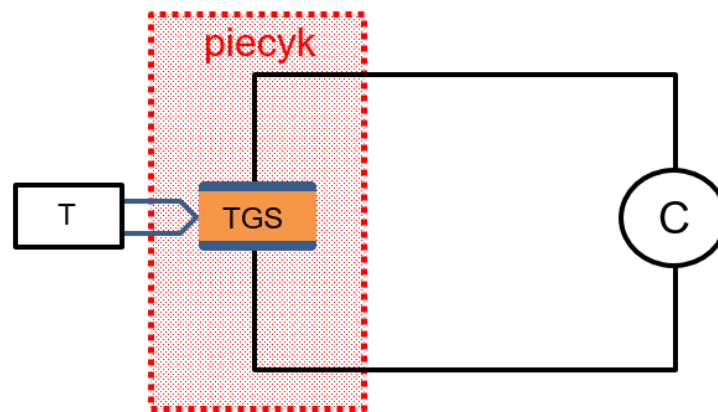
$$\varepsilon = \frac{C_C}{T - T_0}, \quad (15.6)$$

gdzie C_C oznacza stałą Curie-Weissa charakterystyczną dla danego materiału. Prawo to można przekształcić do postaci liniowej zależności odwrotności przenikalności dielektrycznej od temperatury:

$$\frac{1}{\varepsilon} = a \cdot T - b, \quad (15.7)$$

gdzie $a = \frac{1}{c_C}$, $b = \frac{T_0}{c_C}$. Postać ta jest wygodna dla wyznaczania temperatury Curie oraz stałej Curie-Weissa na podstawie badań temperaturowej zależności przenikalności elektrycznej ferroelektryku.

Badanym elementem jest płytką płaskorównoległościenna odpowiednio wycięta z kryształu siarczanu trójglicyny $(\text{CH}_2\text{NH}_2\text{COOH})_3 \cdot \text{H}_2\text{SO}_4$, nazywanego w skrócie TGS. Jest to kryształ ferroelektryczny o strukturze jednoskośnej. Cechuje go silna anizotropia przenikalności elektrycznej. Na powierzchniach płytki naniesiono srebrne elektrody, stanowiące okładki kondensatora, w którym badany kryształ pełni funkcję dielektryka. Element ten umieszczony jest w piecyku zasilanym odpowiednim napięciem, regulowanym za pomocą autotransformatora. Temperaturę kryształu monitoruje się za pomocą termopary podłączonej do miernika temperatury. Pojemność kondensatora zawierającego badany ferroelektryk między okładkami jest mierzona multimetrem cyfrowym. Schemat układu pomiarowego przedstawiono na rys. 15.6.



Rys. 15.6. Schemat układu pomiarowego: TGS – badana próbka między okładkami kondensatora, C – miernik pojemności elektrycznej, T – miernik temperatury wraz z czujnikiem

W literaturze naukowej można znaleźć informację, że stała Curie-Weissa dla kryształu TGS wynosi $C_C = 3,2 \cdot 10^3$ K, natomiast temperatura Curie jest z przedziału $49 \div 51^\circ\text{C}$ w zależności od historii próbki, jej jakości i podłączonego pola elektrycznego.

Przebieg ćwiczenia

1. Włączyć mierniki pojemności i temperatury.
2. Zanotować temperaturę oraz pojemność kondensatora, między okładkami którego znajduje się badany kryształ.
3. Za pomocą autotransformatora ustalić napięcie $U = 70 \text{ V}$ zasilające piecyk, w którym znajduje się komora pomiarowa z badaną próbką.
4. W trakcie grzania notować co $0,1^\circ\text{C}$ wskazania miernika pojemności.
5. Po uzyskaniu temperatury $T = 70^\circ\text{C}$ zmniejszyć do zera napięcie zasilające piecyk i włączyć wentylator chłodzący.
6. Zanotować wartość C_0 pojemności pustego kondensatora pomiarowego lub jego wymiary (powierzchnię okładek i odległość między nimi równą grubości badanego kryształu), na podstawie których można wyznaczyć wartość C_0 , korzystając ze wzoru (15.4). Zanotować symbole używanych mierników i zakresy pomiarowe.

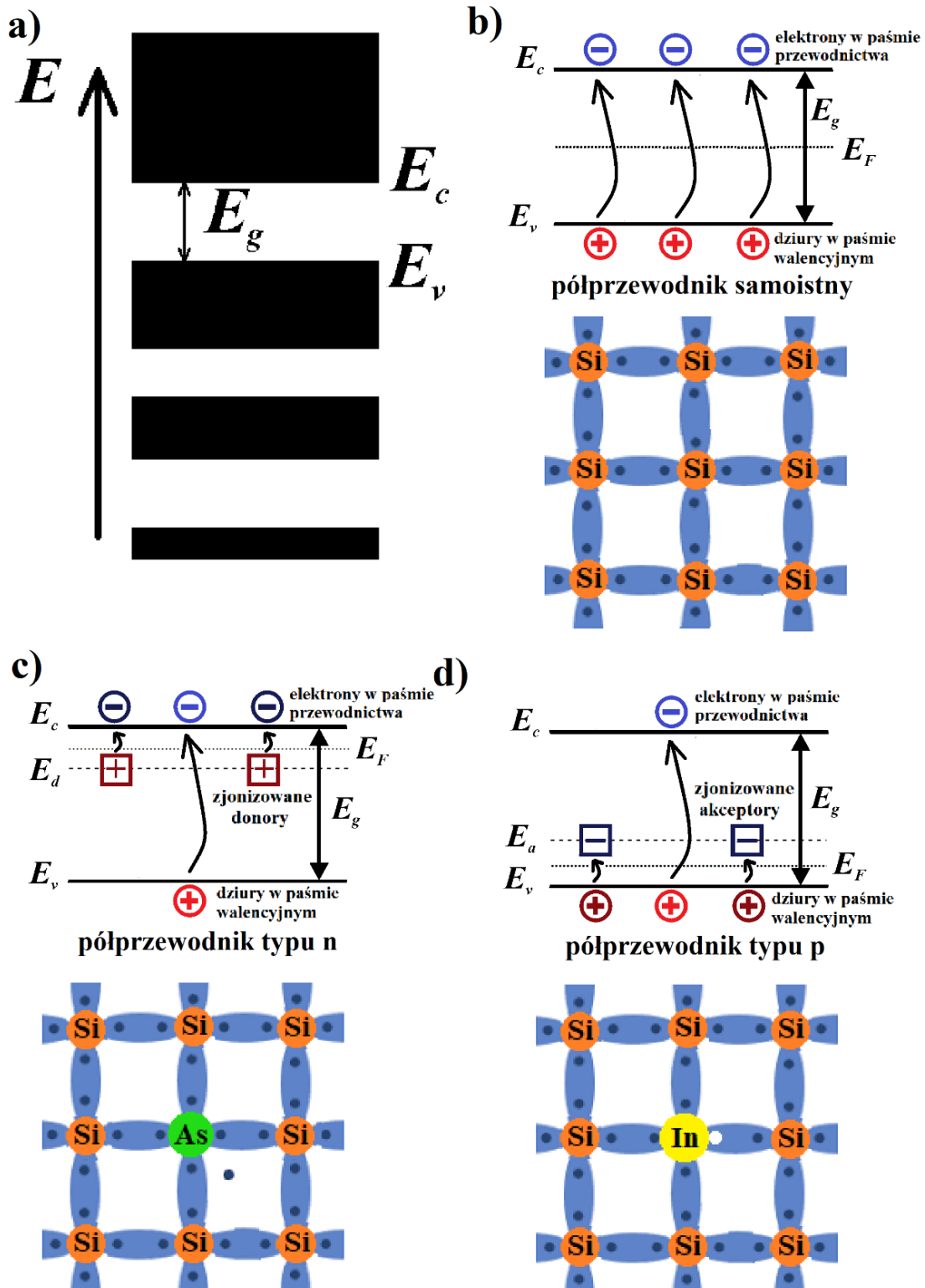
Opracowanie wyników

1. Obliczyć niepewności mierzonych wielkości.
2. Wyznaczyć wartości rzeczywistej przenikalności elektrycznej ε kryształu TGS w różnych temperaturach, podstawiając wyniki pomiarów pojemności C do wzoru (15.3). Obliczyć niepewności wyznaczonych wartości.
3. Sporządzić wykres rzeczywistej przenikalności elektrycznej badanego kryształu TGS w funkcji temperatury. Zaznaczyć na wykresie niepewności.
4. Wykreślić zależność $1/\varepsilon$ od temperatury i w odpowiednim zakresie (w fazie paraelektrycznej) aproksymować wyniki linią prostą, korzystając z metody najmniejszych kwadratów.
5. Porównując równanie prostej aproksymującej z równaniem (15.7), wyznaczyć temperaturę Curie i stałą Curie-Weissa badanego ferroelektryku wraz z niepewnościami. Wyniki zapisać zgodnie z normą.
6. Porównać uzyskane wyniki z danymi literaturowymi.

16. BADANIE CHARAKTERYSTYK FOTODIODY I FOTOOGNIWA

Półprzewodniki

Fotodiody jest elektronicznym elementem półprzewodnikowym. Najpowszechniej używanymi materiałami półprzewodnikowymi we współczesnej elektronice są czyste pierwiastki, takie jak krzem (Si), german (Ge), lub związki chemiczne, np. arsenek galu (GaAs), azotek galu (GaN), fosforek indu (InP). Nośnikami ładunku elektrycznego w półprzewodnikach są elektrony i dziury. Z uwagi na zakaz Pauliego i małe odległości międzyatomowe w ciele stałym, a tym samym przekrywanie się funkcji falowych elektronów, dyskretne poziomy energetyczne atomów rozszczepiają się, tworząc w ciele stałym pasma energetyczne. Budowę pasmową półprzewodników przedstawiono na rys. 16.1a. W istocie pasmo energetyczne składa się z wielu, tj. rzędu 10^{23} , dyskretnych poziomów energetycznych. W skali energii odległości pomiędzy poziomami w paśmie energetycznym są rzędu 10^{-23} eV, co w dobrym przybliżeniu pozwala traktować pasma energetyczne jako ciągłe obszary dozwolonych stanów energetycznych. Ostatnie zajęte pasmo energetyczne powstające z poziomów walencyjnych atomów pierwiastków półprzewodnika to tzw. **pasmo walencyjne**. Górną krawędź pasma walencyjnego oznaczono symbolem E_v na rys. 16.1. Nad tym pasmem znajduje się **przerwa energetyczna** E_g , czyli zakres energii zabronionych dla elektronów. Umownie przyjmuje się, że szerokość przerwy energetycznej w półprzewodnikach jest mniejsza od ok. 6 eV. Ponad przerwą energetyczną zaczyna się kolejne pasmo energii dozwolonych dla elektronów, tzw. **pasmo przewodnictwa**. Dolną krawędź pasma przewodnictwa oznaczono symbolem E_c na rys. 16.1.



Rys. 16.1. Struktura pasmowa półprzewodnika (a); strzałka oznacza kierunek wzrostu energii elektronów E . Schematyczne przedstawienie generacji ładunków elektrycznych, struktura pasmowa oraz wiązania w półprzewodniku samoistnym (b), typu n (c) i typu p (d). E_c – dolna krawędź pasma przewodnictwa, E_v – górna krawędź pasma walencyjnego, E_g – szerokość przerwy energetycznej, E_F – poziom energii Fermiego, E_d – poziom donorowy, E_a – poziom akceptorowy

Elektrony, które w jakikolwiek sposób (np. ogrzanie, oświetlenie) uzyskają odpowiednią energię, by pokonać przerwę energetyczną i przejść do pasma przewodnictwa, zaczynają przewodzić prąd elektryczny. W przypadku bipolarnej generacji ładunku elektrycznego w półprzewodniku (rys. 16.1b) przejściu elektronu do pasma przewodnictwa towarzyszy powstanie dziury w paśmie walencyjnym. W teorii pasmowej dziury są to kwazicząstki istniejące wyłącznie w ciałach stałych, mogące poruszać się w objętości materiału i zachowujące się jak dodatnie nośniki ładunków. W dużym uproszczeniu można powiedzieć, że dziury są to wolne miejsca w paśmie energetycznym, niezajęte przez elektrony. Ważnym pojęciem w teorii pasmowej jest tzw. **poziom energii Fermiego**. Jest to poziom energetyczny, którego prawdopodobieństwo obsadzenia przez elektron wynosi $\frac{1}{2}$ i który w przypadku półprzewodników niezdegenerowanych leży zawsze w przerwie energetycznej.

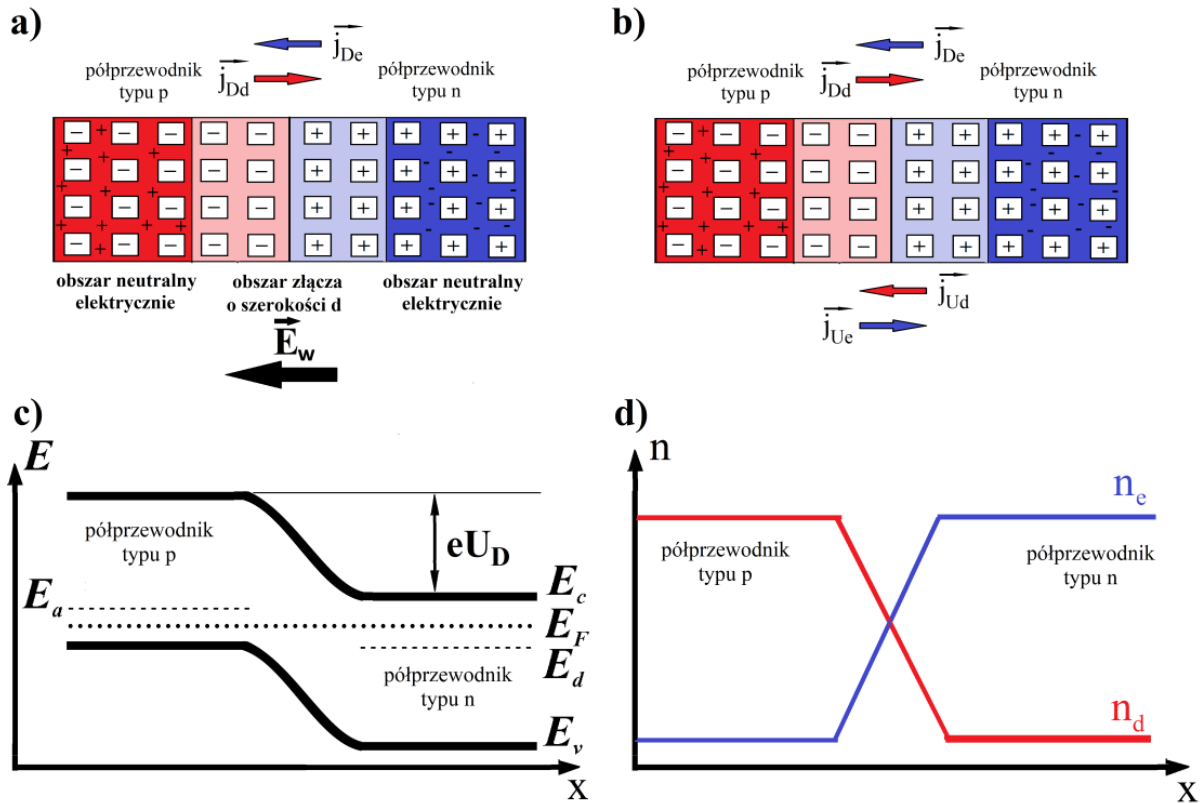
W zależności od koncentracji nośników ładunku, tj. liczby ładunków w jednostce objętości, półprzewodniki dzielimy na:

- **półprzewodniki samoistne**, czyli półprzewodniki niedomieszkowane, w których koncentracja (tj. liczba ładunków w jednostce objętości) dziur jest równa koncentracji elektronów (rys. 16.1b). W półprzewodnikach samoistnych poziom energii Fermiego w temperaturach pokojowych leży w pobliżu środka przerwy energetycznej;
- **półprzewodniki typu n** (ang. negative). Półprzewodniki typu n uzyskuje się przez domieszkowanie półprzewodnika samoistnego donorami, czyli atomami mającymi co najmniej o jeden elektron więcej niż materiał domieszkowany. Na przykład krzem, leżący w 14. grupie układu okresowego pierwiastków, mający cztery elektrony na powłoce walencyjnej, domieszkuje się atomami pierwiastków z grupy o większym numerze (np. P, As, Sb leżącymi w grupie 15.), a tym samym mającymi więcej elektronów walencyjnych. Dodatkowe elektrony atomów domieszki powodują powstanie dodatkowego poziomu energetycznego, tzw. poziomu donorowego (E_d), leżącego w przerwie energetycznej blisko dolnej krawędzi pasma przewodnictwa (E_c). Poza generacją bipolarną w półprzewodniku typu n zachodzi także generacja unipolarna elektronów z poziomów donorowych do pasma przewodnictwa. Jak widać na rys. 16.1c, w półprzewodnikach typu n koncentracja elektronów jest większa (są one nośnikami większościowymi) niż koncentracja dziur (nośników mniejszościowych). W półprzewodnikach typu n poziom energii Fermiego leży pomiędzy dolną krawędzią pasma przewodnictwa (E_c) a poziomem donorowym (E_d);

- **półprzewodniki typu p** (ang. positive). Półprzewodniki typu p uzyskuje się przez domieszkowanie półprzewodnika samoistnego akceptorami, czyli atomami mającymi co najmniej o jeden elektron mniej niż materiał domieszkowany. Na przykład krzem leżący w 14. grupie układu okresowego pierwiastków, mający cztery elektrony na powłoce walencyjnej, domieszkuje się atomami pierwiastków z grupy o mniejszym numerze (np. B, Al, Ga leżącymi w grupie 13.), a tym samym mającymi mniej elektronów walencyjnych od krzemu. Obecność atomów domieszki powoduje powstanie dodatkowego poziomu energetycznego (tzw. poziomu akceptorowego E_a), leżącego w przerwie energetycznej blisko górnej krawędzi pasma walencyjnego. Poza generacją bipolarną w półprzewodniku typu p zachodzi także generacja unipolarna. Elektrony z pasma walencyjnego są wychwytywane przez niewysyczone wiązania akceptorowe. W ten sposób część elektronów, zamiast przejść do pasma przewodnictwa, zostaje wychwycona na poziomie akceptorowym (rys. 16.1d). W związku z tym w półprzewodnikach typu p koncentracja dziur w paśmie walencyjnym jest większa (są one nośnikami większościowymi) od koncentracji elektronów w paśmie przewodnictwa (nośników mniejszościowych). W półprzewodnikach typu p poziom energii Fermiego leży pomiędzy górną krawędzią pasma walencyjnego (E_v) a poziomem akceptorowym (E_a).

Złącze p-n

W przypadku gdy półprzewodnik typu n znajduje się w kontakcie z półprzewodnikiem typu p, na ich granicy powstaje złącze p-n. Wówczas elektrony z części półprzewodnika typu n znajdującej się przy złączu przepływają dyfuzyjnie do półprzewodnika typu p, gdzie rekombinują z większościami dziurami. Analogicznie dziury przy granicy złącza przepłyną w przeciwnym kierunku z półprzewodnika typu p do półprzewodnika typu n, gdzie rekombinują z większościami elektronami. W ten sposób powstają na złączu dwa prądy dyfuzyjne elektronów i dziur o gęstości odpowiednio j_{De} oraz j_{Dd} (rys. 16.2a).



Rys. 16.2. Powstanie warstwy zaporowej na złączu p-n (a, b), struktura pasmowa złączu p-n (c) oraz koncentracja nośników $n(x)$ w złączu (d). Kwadraty ze znakiem + i - symbolizują odpowiednio jony donorowe i akceptorowe, natomiast znaki + i - w objętości półprzewodnika symbolizują odpowiednio dziury i elektrony. j_{De} , j_{Dd} – gęstość prądów dyfuzyjnych elektronów i dziur, j_{Ue} , j_{Ud} – gęstość prądów unoszenia elektronów i dziur, \vec{E}_w – natężenie wewnętrznego pola elektrycznego. E_c – dolna krawędź pasma przewodnictwa, E_v – górna krawędź pasma walencyjnego, E_F – poziom energii Fermiego, E_d – poziom donorowy, E_a – poziom akceptorowy, n_e , n_d – koncentracja elektronów i dziur, e – ładunek elementarny, U_D – napięcie dyfuzyjne

W wyniku dyfuzji nośników większościowych na złączu po stronie półprzewodnika typu n pozostaje nieskompensowany ładunek dodatni jonów donorowych, a po stronie półprzewodnika typu p pozostaje nieskompensowany ładunek ujemny jonów akceptorowych. Taki rozkład przestrzenny ładunku spowoduje w konsekwencji powstanie wewnętrznego pola elektrycznego E_w skierowanego od przestrzennego ładunku dodatniego do ujemnego, czyli od obszaru półprzewodnika typu n do obszaru półprzewodnika typu p. Konsekwencją tak skierowanego pola elektrycznego jest powstanie prądów unoszenia ładunków elektrycznych. Prąd unoszenia elektronów o gęstości j_{Ue} jest skierowany przeciwnie do prądu dyfuzyjnego elektronów, czyli od półprzewodnika typu p do n. Analogicznie kierunek przepływu prądu unoszenia dziur o gęstości j_{Ud} jest skierowany od półprzewodnika typu n do

półprzewodnika typu p (rys. 16.2b). W stanie równowagi termodynamicznej całkowity prąd płynący przez złącze jest równy 0:

$$\vec{J}_{De} + \vec{J}_{Dd} + \vec{J}_{Ue} + \vec{J}_{Ud} = 0. \quad (16.1)$$

W teorii pasmowej stan równowagi charakteryzuje się zrównaniem poziomu Fermiego w całej objętości materiału (rys. 16.2c). Skutkuje to zakrzywieniem pasm energetycznych w obszarze przy złączu. Wówczas koncentrację nośników w złączu przedstawia wykres z rys. 16.2d. Napięcie dyfuzyjne U_D (kontaktowe) jest związane z natężeniem wewnętrznego pola elektrycznego E_w dobrze znaną zależnością:

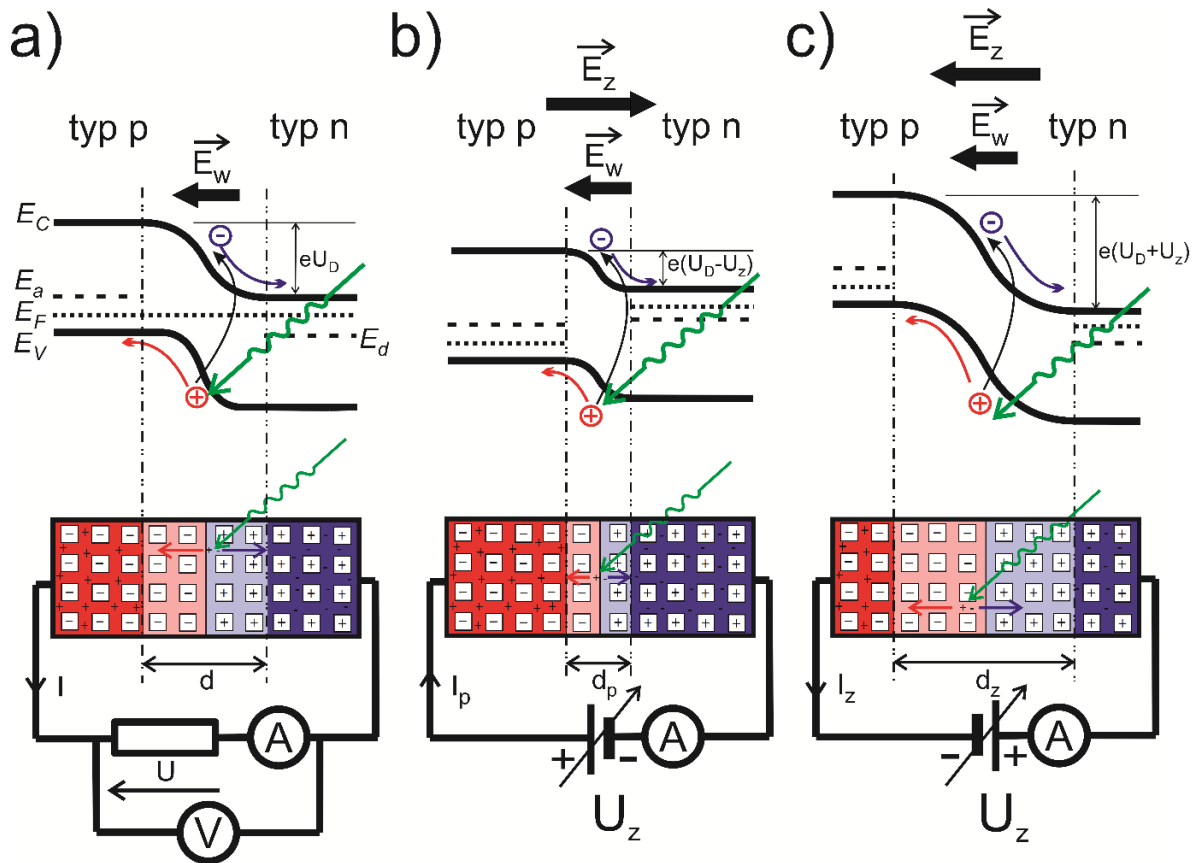
$$U_D = \frac{E_w}{d}, \quad (16.2)$$

gdzie d to grubość warstwy zaporowej złącza p-n.

Należy wziąć pod uwagę, że dokładny opis zjawisk zachodzących na złączu zależy m.in. od stopnia zdomieszkowania i temperatury półprzewodników oraz ruchliwości nośników ładunku.

Polaryzacja i oświetlenie złącza p-n

Fotodioda oraz fotoogniwo są zbudowane z dwóch półprzewodników o różnym typie przewodnictwa elektrycznego (n oraz p). Tym samym w ich budowie wewnętrznej występuje złącze p-n. Najczęściej taką strukturę uzyskuje się z jednego kawałka półprzewodnika samoistnego, np. krzemu, którego jedną część domieszkuje się akceptorami, a drugą donorami. Obszar złącza jest odsłonięty tak, że może być ono oświetlane. W stanie równowagi nieoświetlony element jest neutralny elektrycznie. W związku z tym nie można wykorzystać napięcia na złączu jako źródła siły elektromotorycznej (SEM).



Rys. 16.3. Struktura energetyczna oraz schemat oświetlonego złącza p-n. Złącze niespolaryzowane (a) przedstawiające zasadę działania fotoogniwa oraz złącze spolaryzowane w kierunku przewodzenia (b) i zaporowym (c) przedstawiające zasadę działania fotodiody. E_c – dolna krawędź pasma przewodnictwa, E_v – górna krawędź pasma walencyjnego, E_F – poziom energii Fermiego, E_d – poziom donorowy, E_a – poziom akceptorowy, e – ładunek elementarny, U_D – napięcie dyfuzyjne, U_Z – zewnętrzne napięcie polaryzujące, \vec{E}_w, \vec{E}_z – natężenie odpowiednio wewnętrznego i zewnętrznego pola elektrycznego, d, d_p, d_z – grubości złącza p-n

Sytuacja się zmienia, gdy obszar złącza p-n zostanie oświetlony. Gdy energia fotonów $h\nu$ jest większa od szerokości przerwy energetycznej E_g półprzewodnika, to w wyniku absorpcji fotonów w obszarze złącza elektrony z pasma walencyjnego uzyskują wystarczającą energię na przejście do pasma przewodnictwa (rys. 16.3a). Jest to zjawisko fotoelektryczne wewnętrzne i stanowi podstawę działania wielu rodzajów fotodetektorów. W wyniku tego zjawiska powstają pary nadmiarowych, swobodnych nośników ładunku elektrycznego – elektronów w pasmie przewodnictwa i dziur w pasmie walencyjnym. Elektrony dążą do obsadzenia możliwie najniższych dostępnych poziomów energetycznych. Spływają więc one do obszaru typu n, a dziury w wyniku ruchu elektronów w pasmie walencyjnym przesuwają się do obszaru typu p. Prowadzi to do przestrzennej separacji różnoimiennych nośników ładunku elektrycznego. Ładunki te gromadzą się na przeciwległych końcach próbki. Tak

rozseparowane nośniki ładunku w fotoogniwie mogą być wykorzystane jako źródło energii elektrycznej.

Liczba nadmiarowych nośników ładunków elektrycznych generowanych na złączu p-n jest proporcjonalna do liczby absorbowanych fotonów. W otwartym obwodzie elektrycznym maksymalne napięcie, jakie można uzyskać z ogniwa fotowoltaicznego U_{oc} , określa warunek:

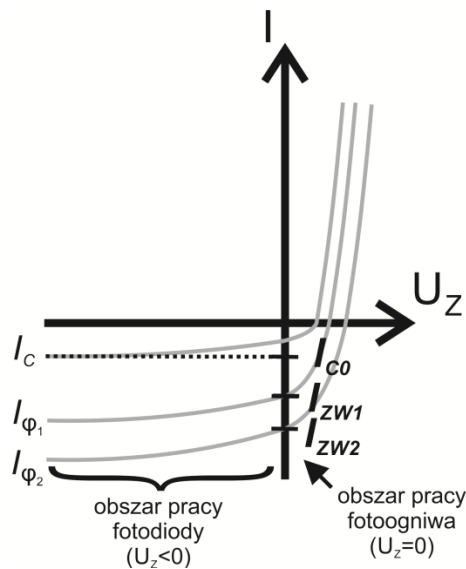
$$eU_{oc} \approx eU_D = E_g, \quad (16.3)$$

który odpowiada za wyprostowanie pasm energetycznych na złączu p-n (rys. 16.3a) w wyniku obsadzenia części poziomów energetycznych w pasmie przewodnictwa przez nadmiarowe elektrony. Należy zauważyć, że liczba generowanych par elektron-dziura, a tym samym natężenie prądu uzyskiwanego z fotoogniwa są wprost proporcjonalne do natężenia światła, podczas gdy generowane napięcie zależy od szerokości przerwy energetycznej i ze wzrostem natężenia oświetlenia szybko osiąga maksymalną wartość nasycenia. Ponadto napięcie otwartego obwodu jest równe napięciu dyfuzyjnemu pomniejszonemu o spadki napięcia na obszarach p i n przylegających do złącza. Dominującym składnikiem rezystancji wewnętrznej fotoogniwa jest rezystancja złącza p-n. Jest ona znacznie większa od rezystancji przyległych obszarów p i n. W związku z tym przybliżenie $U_{oc} \approx U_D$ jest w pełni uzasadnione.

Jeżeli do złącza p-n przyłoży się zewnętrzne napięcie tak, że wyższy potencjał przyłożony zostanie do półprzewodnika typu p, a niższy potencjał do półprzewodnika typu n, to nastąpi zaburzenie stanu równowagi i polaryzacja złącza w kierunku przewodzenia. W takim przypadku natężenie zewnętrznego pola elektrycznego jest skierowane przeciwnie do natężenia wewnętrznego pola elektrycznego (rys. 16.3b). Skutkuje to obniżeniem potencjału dyfuzyjnego na złączu oraz zwężeniem jego grubości $d_p < d$. Potencjał dyfuzyjny obniża się o wartość przyłożonego napięcia U_z pomniejszoną o spadki napięcia na obszarach p i n półprzewodnika, które w przypadku polaryzacji w kierunku przewodzenia mogą zacząć odgrywać znaczącą rolę. Jeżeli tak spolaryzowane złącze zostanie oświetlone fotonami o energii większej od szerokości przerwy energetycznej, to generowane nadmiarowe ładunki mogą bez trudności przepłynąć przez wąski obszar złącza. Powoduje to wykładniczy wzrost natężenia prądu płynącego przez fotodiode.

W typowym zakresie pracy fotodiody złącze p-n jest spolaryzowane w kierunku zaporowym, tzn. do obszaru przewodnika typu p przyłożony jest niższy potencjał niż

do obszaru przewodnika typu n (rys. 16.3c). Wówczas natężenie zewnętrznego pola elektrycznego jest skierowane w tym samym kierunku co natężenie wewnętrznego pola elektrycznego. W rezultacie potencjał na złączu zwiększa się oraz poszerza się jego grubość $d_z > d$. Potencjał dyfuzyjny podwyższa się o wartość przyłożonego napięcia U_Z pomniejszoną o spadki napięcia na obszarach p i n półprzewodnika. W przypadku polaryzacji w kierunku zaporowym rezystancja samego złącza jest znacznie większa od rezystancji obszarów półprzewodników przy złączu, więc praktycznie całe napięcie U_Z odkłada się bezpośrednio na samym złączu. W tych warunkach ruch większościowych elektronów z obszaru n jest znacznie utrudniony przez złącze w kierunku obszaru typu p. Gdy na fotodiodę nie pada światło, wówczas przez obszar złącza przepływa jedynie niewielki tzw. prąd ciemny I_C (rys. 16.4). Prąd ten wynika jedynie z ruchu nośników mniejszościowych przez złącze.



Rys. 16.4. Charakterystyka prądowo-napięciowa złącza p-n z zaznaczonymi typowymi obszarami pracy fotoogniwa i fotodiody. I_C – natężenie prądu ciemnego, I_{C0} – natężenie nasycenia prądu ciemnego, I_{φ_1} , I_{φ_2} – natężenie prądu dla dwóch wybranych natężeń oświetlenia ($\varphi_1 < \varphi_2$), I_{ZW1} , I_{ZW2} – natężenie prądu zwarciovego przy danym natężeniu oświetlenia

Po oświetleniu fotodiody generowane są pary elektron-dziura. W obszarze złącza wzrasta liczba nośników mniejszościowych, co prowadzi do wzrostu natężenia prądu płynącego przez fotodiodę w kierunku zaporowym, proporcjonalnie do wzrostu natężenia oświetlenia.

Zależność natężenia prądu fotodiody I od zewnętrznego napięcia U_Z ma postać:

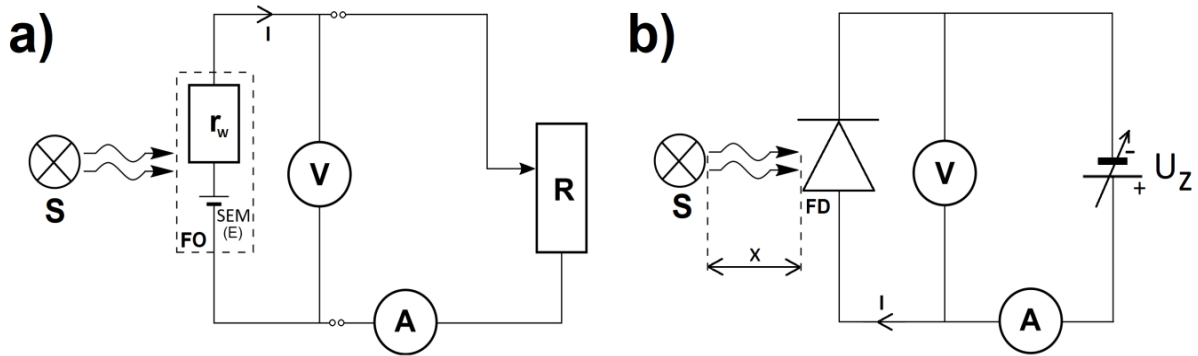
$$I = I_{ZW} - I_{C0} \left[\exp\left(\frac{eU_Z}{k_B T}\right) - 1 \right], \quad (16.4)$$

gdzie: I_{C0} – natężenie nasycenia prądu ciemnego, e – ładunek elementarny elektronu, k_B – stała Boltzmanna, T – temperatura, I_{ZW} – natężenie prądu zwarciovego przy stałym natężeniu oświetlenia.

Współczesne fotoogniwa coraz częściej wykonywane są w nieco inny sposób. Zamiast złącza p-n stosuje się ferroelektryki, np. tytanian baru ($BaTiO_3$), jodosiarczek antymonu ($SbSI$). Wewnątrz ich struktury w temperaturach niższych niż temperatura tzw. przejścia fazowego istnieją domeny ferroelektryczne. Strukturę domenową można traktować jak ułożone dipole elektryczne pełniące funkcję wewnętrznego napięcia dyfuzyjnego złącza p-n i rozdzielające wygenerowane światłem nośniki elektryczne. W porównaniu z tradycyjnymi, złączowymi fotoelementami ferroelektryczne elementy optoelektroniczne mają znacznie prostszą budowę i są łatwiejsze w produkcji z uwagi na brak konieczności domieszkowania materiału i wytworzenia złącza. Ponadto do generacji i separacji nośników można aktywnie wykorzystać całą powierzchnię takich kryształów z wewnętrznym polem elektrycznym w przeciwieństwie do wąskiego obszaru złącza p-n. Pozwalają one także na uzyskiwanie większych napięć niż tradycyjne fotoelementy krzemowe.

Układ pomiarowy

Schemat układu pomiarowego do badania zależności napięcia na ogniwie fotowoltaicznym od obciążenia oraz charakterystyk prądowo-napięciowych fotodiody przedstawiono na rys. 16.5. W przypadku fotodiody (rys. 16.5b) zewnętrzne napięcie i kierunek przepływu prądu przedstawione zostały dla polaryzacji w kierunku przewodzenia.



Rys. 16.5. Schemat układu do pomiaru zależności siły elektromotorycznej fotoogniwa od obciążenia (a) oraz do badania charakterystyk prądowo napięciowych fotodiody (b). S – źródło światła, FO – badane fotoogniwo, r_w – rezystancja wewnętrzna ogniwa, SEM – siła elektromotoryczna, R – rezystancja obciążenia, A – amperomierz, V – woltmierz, I – natężenie prądu elektrycznego, FD – badana fotodiody U_Z – napięcie polaryzujące ustawiane na zasilaczu, x – odległość źródła światła od fotodiody

Każde źródło napięciowe, w tym fotoogniwo, jest scharakteryzowane przez dwie podstawowe wielkości: siłę elektromotoryczną ogniwa E i opór wewnętrzny r_w . Siła elektromotoryczna jest równa różnicy potencjałów pomiędzy elektrodami ogniwa w otwartym obwodzie. Określa ilość energii (np. świetlnej lub chemicznej) zamienianej w ogniwie na energię elektryczną, przypadającą na jednostkę ładunku przepływającego przez ogniwo. Jeżeli obwód zostanie zamknięty za pomocą rezystancji obciążenia, to przez ogniwo popłynie prąd elektryczny o natężeniu I . Wskutek przepływu prądu zmniejsza się napięcie między elektrodami o wartość $\Delta U = r_w I$. Wówczas napięcie na fotoogniwie (mierzone woltmierzem z rys. 16.5a) można wyrazić wzorem:

$$U = E - \Delta U = E - r_w I. \quad (16.5)$$

Zakładając idealność przyrządów pomiarowych, natężenie prądu płynącego w obwodzie z rys. 16.5a można łatwo wyznaczyć, korzystając z drugiego prawa Kirchhoffa, i wynosi ono:

$$I = \frac{E}{r_w + R}. \quad (16.6)$$

Ze wzoru (16.6) wynika, że natężenie prądu w obwodzie osiąga wartość maksymalną dla rezystancji obciążenia $R = 0$. Gdy zwiększa się R , natężenie prądu maleje, dążąc asymptotycznie do zera ze wzrostem oporu obciążenia R . Całkowita moc wydzielana w obwodzie z rys. 16.5a zależy od oporu zewnętrznego i wynosi:

$$P_C = I^2(r_w + R) = \frac{E^2}{(r_w + R)} = E \cdot I. \quad (16.7)$$

Maksymalną wartość osiąga ona dla warunku braku obciążenia $R = 0$:

$$P_{C\max} = \frac{E^2}{r_w}. \quad (16.8)$$

Ze wzrostem rezystancji obciążenia moc całkowita maleje, zmierzając asymptotycznie do zera, analogicznie do natężenia prądu.

Moc użyteczna jest to moc wydzielana bezpośrednio na obciążeniu. Ma ona kluczowe znaczenie w zastosowaniach praktycznych, gdyż tylko tę można wykorzystać. Moc użyteczna również zależy od oporu obciążenia i wyraża się wzorem:

$$P_U = U I = I^2 R = \frac{E^2 R}{(r_w + R)^2}. \quad (16.9)$$

Aby wyznaczyć jej maksymalną wartość, należy skorzystać z warunku znalezienia ekstremum funkcji, czyli obliczyć pochodną P_U względem R i przyrównać ją do zera:

$$\frac{dP_U}{dR} = \frac{E^2(r_w - R)}{(r_w + R)^3} = 0. \quad (16.10)$$

Jak łatwo zauważyć, równanie (16.10) jest spełnione, gdy:

$$r_w = R. \quad (16.11)$$

Przy podstawieniu zależności (16.11) do wzoru (16.9) maksymalna wartość mocy użytecznej wynosi:

$$P_{U\max} = \frac{E^2}{4R}. \quad (16.12)$$

Sprawnością η fotoogniwa nazywamy stosunek mocy oddawanej do obwodu (mocy użytecznej P_U) do mocy wytwarzanej przez źródło (mocy całkowitej P_C). W związku z tym na podstawie zależności (16.7) i (16.9) sprawność fotoogniwa wynosi:

$$\eta = \frac{P_U}{P_C} = \frac{U \cdot I}{E \cdot I} = \frac{R}{r_w + R} . \quad (16.13)$$

Ważnym parametrem opisującym charakterystyki fotodiody jest jej rezystancja dynamiczna. Definiuje się ją jako:

$$R_d = \lim_{\Delta I \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{dU}{dI} . \quad (16.14)$$

W związku z tym w interpretacji geometrycznej rezystancja dynamiczna jest równa współczynnikowi kierunkowemu prostej stycznej do charakterystyki prądowo-napięciowej fotodiody (rys. 16.4) w danym punkcie pracy.

Przebieg ćwiczenia

Badanie zależności siły elektromotorycznej fotoogniwa od obciążenia:

1. Zapoznać się z układem pomiarowym, którego schemat przedstawiono na rys. 16.5a.
2. Rozewrzeć zaciski fotoogniwa i za pomocą woltomierza zmierzyć siłę elektromotoryczną E , a następnie powrócić do pierwotnego układu połączeń.
3. Zmierzyć wartości natężenia prądu I i napięcia U w funkcji rezystancji obciążenia R . Pomiary przeprowadzić w całym możliwym zakresie, stosując logarytmiczną skalę zmian R , jednakże przy wartościach rezystancji obciążenia rzędu $k\Omega$ – zagaścić pomiary liniowo zgodnie z wytycznymi prowadzącego.
4. Zanotować parametry mierników potrzebne do wyznaczenia niepewności pomiarowych.

Wyznaczanie charakterystyk prądowo-napięciowych fotodiody:

5. Zapoznać się z układem pomiarowym, którego schemat przedstawiono na rys. 16.5b).
6. Wykonać pomiary zależności natężenia prądu ciemnego (bez oświetlenia) I_C płynącego przez fotodiode od napięcia U_Z . Jeżeli prowadzący ćwiczenie nie zaleci inaczej, to napięcie polaryzujące U_Z należy zmieniać w następujący sposób:
od -5 V do 0 V co 0,5 V,
od 0 V do +0,8 V co 0,1 V,
od +0,8 V do +1,6 V co 0,2 V.
Pomiaru wartości natężenia prądu należy dokonywać na możliwie najmniejszym zakresie amperomierza, a w przypadku wzrostu natężenia prądu ponad wartość zakresu pomiarowego przełączyć amperomierz na wyższy zakres pomiarowy, aby nie dopuścić do jego zniszczenia. Zanotować parametry mierników potrzebne do wyznaczenia niepewności pomiarowych i równoległe z pomiarami notować zakresy pomiarowe.
7. Włączyć źródło światła. Wykonać pomiary zależności natężenia prądu fotoelektrycznego I płynącego przez fotodiode od napięcia U_Z dla kilku odległości x źródła światła od fotodiody wskazanych przez prowadzącego ćwiczenie. Napięcie polaryzujące U_Z należy zmieniać jak w punkcie 6. Zanotować parametry mierników potrzebne do wyznaczenia niepewności pomiarowych.
8. Dla wskazanych przez prowadzącego ćwiczenie napięć zaporowych $U_Z < 0$ polaryzujących fotodiode wykonać pomiary natężenia prądu fotoelektrycznego I w zależności od odległości x źródła światła od fotodiody, zmienianej od wartości minimalnej do maksymalnej co 5 cm. Zanotować parametry mierników potrzebne do wyznaczenia niepewności pomiarowych.

Opracowanie wyników

Badanie zależności siły elektromotorycznej fotoogniwa od obciążenia:

1. Obliczyć niepewności wartości natężenia prądu oraz napięć zmierzonych w punkcie 3. przebiegu ćwiczenia wynikające z dokładności użytych przyrządów pomiarowych oraz zapisać wyniki zgodnie z normą.
2. Wykreślić na wykresie zależność napięcia U_Z od natężenia I . Zaznaczyć na wykresie niepewności pomiarowe w postaci słupków niepewności.

3. Prostoliniową część wykresu zależności $U(I)$ w zakresie niewielkich zmian napięcia aproksymować linią prostą. Zapisać poprawnie współczynniki kierunkowe prostej aproksymującej wraz z ich niepewnościami.
4. Na podstawie porównania prostej aproksymującej $U = a \cdot I + b$ oraz równania (16.5) wyznaczyć wartość siły elektromotorycznej ogniwa E oraz oporu wewnętrznego r_w wraz z ich niepewnościami. Zapisać poprawnie wyniki końcowe.
5. Na podstawie zależności (16.7) oraz (16.9) wyznaczyć dla wszystkich punktów pomiarowych moc całkowitą $P_C = E \cdot I$ i moc użyteczną $P_U = U \cdot I$. Metodą propagacji niepewności określić ich niepewności. Wyniki zapisać zgodnie z normą.
6. Wykreślić na jednym wykresie zależność mocy całkowitej i mocy użytecznej w funkcji rezystancji obciążenia.
7. Na wykresie zależności mocy użytecznej od rezystancji obciążenia zaznaczyć opór odpowiadający oporowi wewnętrznemu fotoogniwa zgodnie z przedstawioną w ćwiczeniu teorią. Wybór uzasadnić.
8. Na podstawie pomiarów z punktu 2. przebiegu ćwiczenia i zależności (16.3) wyznaczyć przerwę energetyczną półprzewodnika, z którego wykonano fotoogniwo, i jej niepewność metodą propagacji niepewności. Wynik podać w elektronowoltach.
9. Z zależności (16.13) wyznaczyć sprawność fotoogniwa i jej niepewność metodą propagacji niepewności dla wszystkich punktów pomiarowych. Wykreślić wykres zależności sprawności fotoogniwa od rezystancji obciążenia $\eta(R)$.
10. Testami zgodności porównać wartość siły elektromotorycznej ogniwa E uzyskaną z pomiarów w punkcie 2. przebiegu ćwiczenia z wyznaczoną w punkcie 4. opracowania wyników oraz wartości oporu wewnętrznego r_w fotoogniwa wyznaczone w punktach 4. i 7. opracowania wyników.

Wyznaczanie charakterystyk prądowo-napięciowych fotodiody:

11. Obliczyć niepewności wyników wszystkich pomiarów wykonanych w punktach 6. – 8. przebiegu ćwiczenia wynikające z dokładności użytych przyrządów pomiarowych oraz zapisać wyniki zgodnie z normą.
12. Na podstawie pomiarów z punktów 6. i 7. przebiegu ćwiczenia sporządzić charakterystyki prądowo-napięciowe fotodiody $I(U_Z)$ i nanieść na nie słupki niepewności wyznaczone w punkcie 11. opracowania wyników.
13. Metodą regresji liniowej aproksymować prostoliniowe części charakterystyk prądowo-napięciowych sporządzonych w punkcie 12. opracowania wyników dla

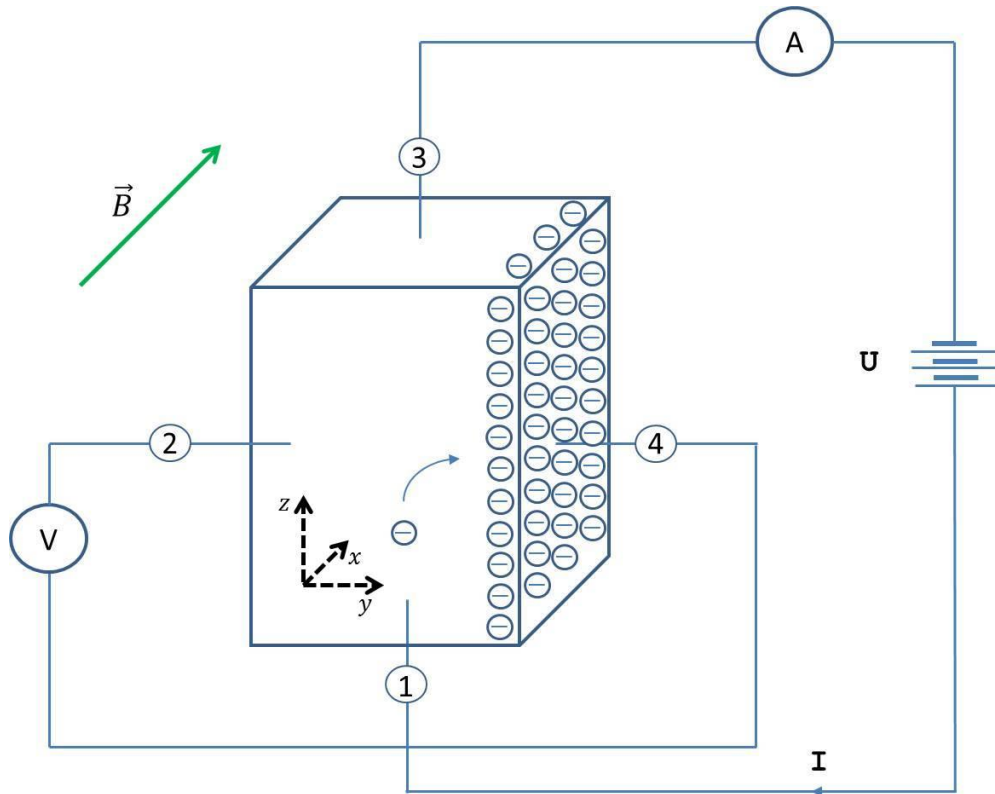
kierunku zarówno przewodzenia, jak i zaporowego. Proste aproksymujące ($I = a \cdot U_Z + b$) nanieść na wykresy. Zapisać wartości współczynników prostych wraz z niepewnościami zgodnie z normą.

14. Na podstawie równań prostych wyznaczonych w punkcie 13. opracowania wyników wyznaczyć wartości oporu dynamicznego fotodiody R_d , korzystając z zależności (16.14) dla różnych odległości x źródła światła od fotodiody.
15. Na podstawie obliczeń z punktu 14. opracowania wyników sporządzić wykres oporu dynamicznego fotodiody od odwrotności kwadratu odległości x źródła światła od fotodiody $R_d = f(x^{-2})$.
16. Metodą regresji liniowej aproksymować linią prostą wyniki przedstawione na wykresie $R_d = f(x^{-2})$ dla kierunku zaporowego. Prostą aproksymującą zaznaczyć na wykresie. Zapisać wartości współczynników prostej wraz z niepewnościami zgodnie z normą.
17. Korzystając z wyników zarejestrowanych w punkcie 8. przebiegu ćwiczenia, sporządzić wykres natężenia fotoprądu I płynącego przez fotodiode jako funkcję odwrotności kwadratu odległości x źródła światła od fotodiody $I = f(x^{-2})$.
18. Metodą regresji liniowej aproksymować linią prostą wyniki przedstawione na wykresie $I = f(x^{-2})$. Prostą aproksymującą zaznaczyć na wykresie. Zapisać wartości współczynników prostej wraz z niepewnościami zgodnie z normą.
19. Zinterpretować rezultaty uzyskane w punktach 15., 16. i 18., wiążąc odległość punktowego źródła światła od fotodiody z natężeniem światła na nią padającego.

17. BADANIE ZJAWISK GALWANOMAGNETYCZNYCH W CIAŁACH STAŁYCH

Zjawisko Halla

Zjawiska galwanomagnetyczne występujące w ciałach stałych są związane z działaniem siły Lorentza $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ na nośniki ładunku elektrycznego poruszające się w polach elektrycznym i magnetycznym. Załóżmy, że próbka w kształcie prostopadłościanu znajduje się w polu magnetycznym o wektorze indukcji \vec{B} prostopadłym do największej jej ściany (rys. 17.1). Pod wpływem zewnętrznego pola magnetycznego \vec{B} nośniki ładunku tworzące prąd elektryczny płynący pomiędzy elektrodami 1-3 zostają odchylone w kierunku jednej ze ścian bocznych próbki. W wyniku powyższego procesu następuje gromadzenie się części nośników ładunku przy danej ścianie, a tym samym powstaje asymetria obsadzenia nośnikami ścian 2 i 4. Pociąga to za sobą powstawanie mierzalnej poprzecznej różnicy potencjałów pola elektrycznego, zwanej napięciem Halla U_H , pomiędzy ścianami 2 i 4 próbki.



Rys. 17.1. Ustawienia próbki w badaniach zjawiska Halla (\vec{B} – wektor indukcji pola magnetycznego, 1 i 3 – tzw. elektrody prądowe, przez które płynie prąd elektryczny o natężeniu I , 2 i 4 – elektrody napięciowe służące do pomiaru napięcia wywołanego zjawiskiem Halla, A – amperomierz, V – woltomierz, U – zasilacz)

Wartość napięcia Halla ustala się samoczynnie w wyniku wytworzenia stanu równowagi dynamicznej pomiędzy siłą Lorentza a siłą pochodzącą od powstającego poprzecznego pola elektrycznego o natężeniu:

$$E_y = \frac{U_H}{b}, \quad (17.1)$$

gdzie b oznacza szerokość badanej próbki.

Stan wspomnianej równowagi opisuje równanie:

$$qE_y = q \frac{U_H}{b} = qv_z B_x, \quad (17.2)$$

gdzie: q oznacza ładunek nośnika ładunku prądu elektrycznego w badanym materiale, v_z – składową prędkości średniej większościowych nośników ładunku (elektronów lub dziur) w kierunku prostopadłym zarówno do kierunku pola magnetycznego o indukcji B_x , jak i do kierunku, w jakim skierowane jest napięcie Halla.

Równocześnie natężenie prądu płynącego przez próbkę badanego materiału można wyrazić wzorem:

$$I = \int \vec{j} \cdot \vec{dS} = jbd, \quad (17.3)$$

gdzie: \vec{j} – wektor gęstości natężenia prądu płynącego przez próbkę, j – wartość modułu wektora \vec{j} , $S = b \cdot d$ – pole powierzchni przekroju poprzecznego próbki, d – grubość próbki.

Korzystając z równania materiałowego $j = \sigma E_z$, gdzie σ – przewodnictwo elektryczne właściwe badanego materiału, E_z – natężenie pola elektrycznego wymuszającego przepływ prądu, oraz przekształcając wzór $\sigma = e(\mu_e n_e + \mu_h n_h)$ dla przypadku opisującego materiał o jednym typie swobodnych nośników ładunku, natężenie I prądu płynącego przez próbkę możemy zapisać w postaci:

$$I = qn\mu E_z bd = qnv_z bd, \quad (17.4)$$

gdzie: n oznacza koncentrację nośników ładunku w badanym materiale, μ – ruchliwość nośników ładunku elektrycznego.

Wartość ruchliwości μ nośników ładunków jest równa prędkości unoszenia, jaką nabywają nośniki ładunku w polu elektrycznym o jednostkowym natężeniu. Definicja ta wynika ze wzoru: $v_z = \mu E_z$.

Przekształcając równanie (17.2) i korzystając z równania (17.4), uzyskujemy następujący wzór opisujący wielkość napięcia Halla:

$$U_H = \frac{1}{qn} \frac{IB_x}{d} = R \frac{IB_x}{d}, \quad (17.5)$$

gdzie wielkość:

$$R = \frac{1}{qn} \quad (17.6)$$

nosi nazwę współczynnika Halla. Dla materiałów o elektronowym typie przewodnictwa elektrycznego stała ta ma wartość ujemną, natomiast dla materiałów o dziurowym typie przewodnictwa ma wartość dodatnią.

Wzór (17.5), a tym samym (17.6), został wyprowadzony przy założeniu, że prędkość nośników (a zatem i ruchliwość) jest jednakowa dla wszystkich nośników prądu. W rzeczywistości tak nie jest i trzeba wprowadzić dodatkowy czynnik korygujący (oznaczamy go przez A), zależny do rodzaju centrów rozpraszających nośniki będące

w ruchu. W kryształach półprzewodnikowych obserwuje się wiele centrów rozpraszania; najważniejsze z nich to: (a) zjonizowane atomy domieszki, (b) drgania cieplne sieci krystalicznej, (c) niezjonizowane atomy domieszek, (d) luki i defekty punktowe, (e) dyslokacje (czyli liniowe niedoskonałości sieci krystalicznej).

Względny wpływ poszczególnych mechanizmów rozpraszania na efektywne rozpraszanie poruszających się nośników ładunku zależy od temperatury badanej próbki oraz własności materiału, z którego jest ona wykonana.

Po uwzględnieniu czynnika korygującego A wzór (17.6) ma postać:

$$R = \frac{A}{qn}, \quad (17.7)$$

gdzie: $A=1,18$ przy rozpraszaniu na drganiach cieplnych sieci, $A=1,93$ przy rozpraszaniu na zjonizowanych domieszkach, $A=1,0$ dla półprzewodników zdegenerowanych. Znając wartość stałej R , można na jej podstawie wyznaczyć koncentrację nośników w badanym materiale:

$$n = \frac{A}{qR} \left[\frac{1}{m^3} \right]. \quad (17.8)$$

Gdy w badanej próbce występują zarówno dziury, jak i elektrony, to wzór na współczynnik Halla ma postać:

$$R = \frac{A}{q} \frac{n_h \mu_h^2 - n_e \mu_e^2}{(n_h \mu_h + n_e \mu_e)^2}, \quad (17.9)$$

gdzie: μ_h – ruchliwość dziur, μ_e – ruchliwość elektronów, n_e oraz n_h oznaczają koncentrację elektronów i dziur. Zauważmy, że równanie (17.9) sprowadza się do równania (17.7), gdy $n_h = 0$.

Efekty towarzyszące występowaniu zjawiska Halla

Natężenie poprzecznego pola E_y powstałego w wyniku występowania zjawiska Halla jest takie, aby wypadkowa siła działająca na nośniki prądu o średniej prędkości unoszenia v_z była równa zero. Nośniki, które mają większe prędkości od średniej prędkości (tzw. gorące nośniki), nie są kompensowane działaniem pola E_y i gromadzą

się na jednym brzegu próbki, natomiast nośniki o prędkości mniejszej od średniej („zimne”) pozostają przy przeciwległym brzegu próbki. Dążność do równowagi termodynamicznej z siecią krystaliczną prowadzi do ogrzewania jednego brzegu próbki i oziębiania drugiego. W wyniku tego pojawia się gradient temperatury prostopadły zarówno do wektora indukcji magnetycznej B_x , jak i do kierunku przepływu prądu I . Równocześnie z napięciem Halla powstaje więc poprzeczny gradient temperatury $\partial T/\partial y$, który w wyniku efektu termoelektrycznego Peltiera wytworzy pole elektryczne E_E o natężeniu:

$$E_E = \theta \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (17.10)$$

gdzie θ oznacza współczynnik siły termoelektrycznej. Zwykle różnica temperatur wynikająca z tego faktu nie przekracza 1 K.

Jeżeli w próbce istnieje podłużny gradient temperatury $\partial T/\partial z$, to nośniki, które poruszają się pod wpływem tego gradientu, są odchylane w polu magnetycznym, podobnie jak w zjawisku Halla. Natężenie pola E_N , jakie powstaje w wyniku tego, jest proporcjonalne do indukcji magnetycznej B_x i do gradientu temperatury:

$$E_N = Q B_x \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (17.11)$$

gdzie Q oznacza tzw. współczynnik Nernsta. Samo zjawisko pojawiania się pola elektrycznego o natężeniu E_N nosi nazwę efektu Nernsta lub niekiedy Etingshausena-Nernsta.

Efektom Righiego-Leducca nazywamy powstawanie poprzecznego (w stosunku do kierunku przepływu prądu) gradientu temperatury $\partial T/\partial y$ wywołanego odchylaniem w polu magnetycznym nośników ładunku poruszających się pod wpływem podłużnego gradientu temperatury $\partial T/\partial z$. Dzieje się tak dlatego, że owe poruszające się tzw. gorące nośniki ładunku (czyli nośniki o większej prędkości pochodzące z obszarów próbki o wyższej temperaturze) są odchylane przez pole magnetyczne w kierunku poprzecznym. W wyniku tego gromadzą się na jednym brzegu próbki. Z kolei nośniki o prędkości mniejszej od średniej („zimne”), poruszające się w kierunku gradientu $\partial T/\partial z$, odchylane są przez pole magnetyczne w kierunku przeciwległego brzegu próbki. Dążność do równowagi termodynamicznej z siecią krystaliczną prowadzi do ogrzewania jednego i oziębiania drugiego brzegu próbki.

Konsekwencją tak wywołanego gradientu temperatury $\partial T/\partial y$ jest pojawienie się siły termoelektrycznej w kierunku y . Natężenie pola elektrycznego wywołanego tą siłą nosi nazwę natężenia pola Righiego-Leducu:

$$E_{RL} = \Gamma \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (17.12)$$

gdzie Γ oznacza tzw. współczynnik Righiego-Leducu. Gdy sondy zbierające napięcie Halla nie leżą dokładnie naprzeciw siebie, wówczas wytwarza się pomiędzy nimi różnica potencjałów:

$$U_A = \rho \frac{I \Delta l}{S}, \quad (17.13)$$

gdzie: S – powierzchnia przekroju poprzecznego próbki, Δl – przesunięcie wzajemne sond.

Wszystkie wymienione efekty (Ettingshausena, Nersta, Righiego-Leducu oraz efekt związany z asymetrycznością ustawienia sond hallowskich) wywołuje pole elektryczne w tym samym kierunku co zjawisko Halla. Spadki napięć wywołane tymi efektami mogą być zarówno zgodne, jak i przeciwne co do znaku względem napięcia Halla. Wypadkowe napięcie mierzone w trakcie badań zjawiska Halla możemy zapisać w postaci:

$$U = U_H + U_E + U_N + U_{RL} + U_A, \quad (17.14)$$

gdzie: U_H – napięcie Halla, U_E – napięcie pochodzące od efektu Ettingshausena, U_N – napięcie Nersta, U_{RL} – napięcie Reighiego-Leducu, U_A – napięcie wynikające z asymetrycznego ustawienia sond hallowskich na badanej próbce.

Jeżeli w trakcie przeprowadzenia pomiarów zmieniamy kierunek prądu płynącego przez badaną próbkę I i zewnętrznego pola magnetycznego B , to biorąc pod uwagę zależności wymienionych efektów od konfiguracji przestrzennej eksperymentu, zależność (17.14) można zapisać w postaci czterech kombinacji:

$$\begin{aligned} U_1(+I, +B) &= U_H + U_E + U_N + U_{RL} + U_A, \\ U_2(-I, +B) &= -U_H - U_E + U_N + U_{RL} - U_A, \\ U_3(-I, -B) &= U_H + U_E - U_N - U_{RL} - U_A, \\ U_4(+I, -B) &= -U_H - U_E - U_N - U_{RL} - U_A. \end{aligned} \quad (17.15)$$

Dodając równania (17.15) stronami, otrzymujemy:

$$U_H + U_E = \frac{U_1 - U_2 + U_3 - U_4}{4}. \quad (17.16)$$

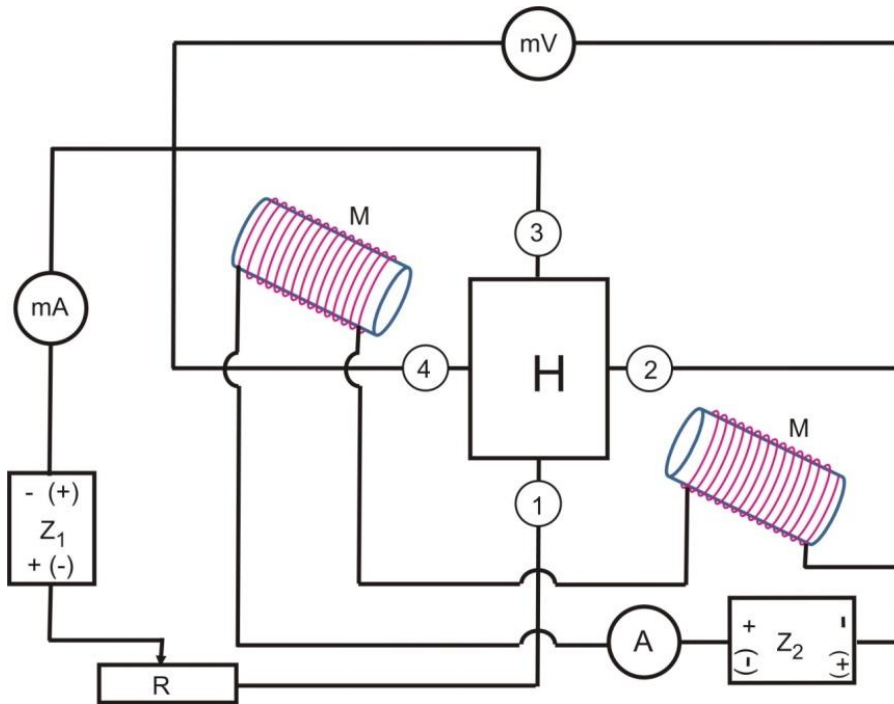
Wynika z tego, że zmieniając odpowiednio kierunek pola magnetycznego i prądu płynącego przez badaną próbkę materiału, można wyeliminować wpływ efektów towarzyszących na wynik badań zjawiska Halla. Efekt Ettingshausena wiąże się z powstaniem gradientu temperatur i wymaga pewnego czasu dla jego ustalenia się.

Magnetorezystancja

Pole magnetyczne prowadzi nie tylko do wytworzenia napięcia Halla, lecz wpływa także na przewodnictwo elektryczne materiału, który w nim się znajduje. Bez pola magnetycznego cząstka porusza się prostoliniowo i pomiędzy dwoma zderzeniami w czasie τ przebywa wzdłuż pola elektrycznego E_Z drogę równą długości drogi swobodnej l . W próbce znajdującej się w polu magnetycznym tor ruchu cząstki jest zakrzywiony. Zakrzywienie toru powoduje skrócenie drogi l przebywanej przez cząstkę wzdłuż pola elektrycznego w czasie τ . Jest to równoznaczne ze zmniejszeniem wartości tzw. prędkości unoszenia lub ruchliwości nośników ładunku. Tym samym maleje przewodnictwo elektryczne materiału umieszczonego w polu magnetycznym, a jego rezystywność oczywiście wzrasta. W przypadku słabych pól magnetycznych zmianę rezystywności próbki w polu magnetycznym wyraża zależność:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = a\mu^2 B^2, \quad (17.17)$$

gdzie: B – indukcja pola magnetycznego, $\Delta\rho = \rho - \rho_0$ – zmiana rezystywności wywołana polem magnetycznym, ρ_0 – rezystywność bez pola magnetycznego, μ – ruchliwość większościowych nośników ładunku, $a = (9\pi/64)(4 - \pi)$ – stała korygująca związana z mechanizmem rozpraszania nośników.



Rys. 17.2. Schemat stanowiska pomiarowego do badania zjawiska Halla (A, mA – amperomierze, Z_1 i Z_2 – zasilacze, H – badana próbka, R – regulowany opornik, mV – woltomierz, M – elektromagnes)

Przebieg ćwiczenia

Badanie zjawiska Halla:

1. Zmontować układ pomiarowy wg schematu przedstawionego na rys. 17.2.
2. Dla ustalonej wartości prądu płynącego przez próbkę $I = 20 \text{ mA}$ wykonać serię pomiarów napięcia poprzecznego U_y dla kolejnych wartości natężenia prądu I_s płynącego przez uzwojenia elektromagnesu. Natężenie prądu I_s zmieniać co $0,5 \text{ A}$ od 0 do 5 A .
3. Pomiar opisany w punkcie 2. powtórzyć dla wszystkich możliwych kombinacji kierunku przepływu prądu przez próbkę i kierunku linii sił pola magnetycznego (dla tych samych wartości I oraz I_s). W wyniku tego zostaną zarejestrowane cztery serie wartości U_y :

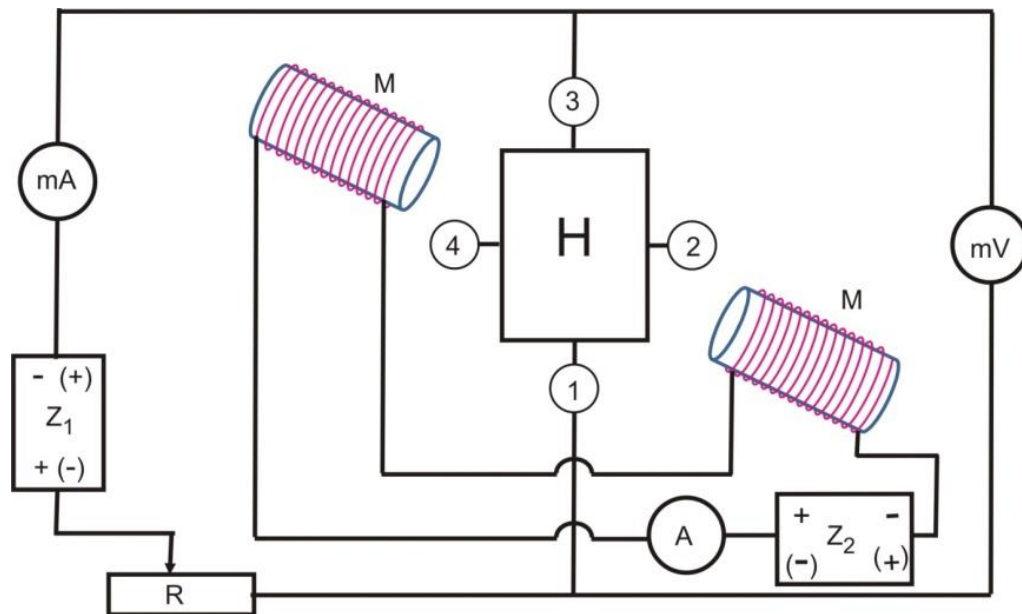
$$U_{y1}(+I, +B), \quad U_{y2}(-I, +B), \quad U_{y3}(-I, -B), \quad U_{y4}(+I, -B).$$

4. Dla ustalonej wartości prądu zasilającego elektromagnesu $I_s = 4$ A wykonać serię pomiarów napięcia poprzecznego U_y dla kolejnych wartości natężenia prądu I płynącego przez próbkę. Natężenie prądu zmieniać co 2,5 mA od 0 do 20 mA.
5. Pomiary opisane w punkcie 4. powtórzyć dla wszystkich możliwych kombinacji kierunku przepływu prądu przez próbkę i kierunku linii sił pola magnetycznego (dla tych samych wartości I oraz I_s). W wyniku tego zostaną zarejestrowane cztery serie wartości U_y :

$$U_{y1}(+I, +B), \quad U_{y2}(-I, +B), \quad U_{y3}(-I, -B), \quad U_{y4}(+I, -B).$$

Pomiar magnetorezystancji:

6. Zmontować układ pomiarowy wg schematu przedstawionego na rys. 17.3.
7. Dla ustalonej wartości prądu $I = 10$ mA płynącego przez próbkę wykonać serię pomiarów napięcia U pomiędzy elektrodami „1” i „3” dla kolejnych wartości natężenia prądu I_s płynącego przez uzwojenia elektromagnesu. Natężenie prądu I_s zmieniać co 0,5 A od 0 do 5 A.



Rys. 17.3. Schemat stanowiska pomiarowego do badania magnetorezystancji (A, mA – amperomierze, Z_1 i Z_2 – zasilacze, H – badana próbka, R – regulowany opornik, mV – woltomierz, M – elektromagnes)

Opracowanie wyników:

Badanie zjawiska Halla:

1. Obliczyć niepewności uzyskanych wyników pomiarowych dla poszczególnych mierników.

Tabela 17.1

Zależność indukcji B pola magnetycznego od natężenia prądu I_s płynącego przez elektromagnes

I_s, A	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
B, mT	0,37	17,5	31,4	45,2	59,1	72,9	86,7	101	114	128	142

2. Korzystając z danych podanych w tab. 17.1 sporządzić wykres zależności indukcji B pola magnetycznego od natężenia prądu I_s zasilania elektromagnesu.
3. Metodą najmniejszych kwadratów aproksymować wyniki przedstawione na wykresie $B = f(I_s)$ linią prostą. Prostą aproksymującą zaznaczyć na wykresie.
4. Korzystając z równania prostej aproksymującej wyznaczonej w punkcie 3., obliczyć wartości indukcji pola magnetycznego B , dla których badano zjawisko Halla.
5. Korzystając z prawa propagacji niepewności, obliczyć niepewności wyznaczonych w punkcie 4. wartości B .
6. Korzystając ze wzoru (17.16) i wyników pomiarów dokonanych w punktach 2. – 5., obliczyć napięcie Halla odpowiadające przeprowadzonym badaniom.
7. Dla wyników badań przeprowadzonych w punktach 2. i 3. sporządzić wykres zależności napięcia Halla U_H od wartości indukcji pola magnetycznego B . Zaznaczyć na wykresie niepewności wyników.
8. Metodą najmniejszych kwadratów aproksymować wyniki przedstawione na wykresie $U_H = f(B)$ linią prostą. Prostą aproksymującą zaznaczyć na wykresie.
9. Korzystając z równania prostej aproksymującej wyznaczonej w punkcie 8. oraz równania (17.5), obliczyć wartość stałej Halla R badanej próbki. Za grubość badanej próbki przyjąć wartość $d = 1 \cdot 10^{-5}$ m.
10. Korzystając z prawa propagacji niepewności, obliczyć niepewność wyznaczenia stałej R .

11. Dla wyników badań przeprowadzonych w punktach 4. i 5. sporządzić wykres zależności napięcia Halla U_H od wartości natężenia prądu tzw. prądu I płynącego przez próbkę. Zaznaczyć na wykresie niepewności wyników.
12. Metodą najmniejszych kwadratów aproksymować wyniki przedstawione na wykresie $U_H = f(I)$ linią prostą. Prostą aproksymującą zaznaczyć na wykresie.
13. Korzystając z równania prostej aproksymującej wyznaczonej w punkcie 12. oraz równania (17.5), obliczyć wartość stałej Halla R badanej próbki. Za grubość badanej próbki przyjąć wartość $d = 1 \cdot 10^{-5}$ m.
14. Korzystając z prawa propagacji niepewności, obliczyć niepewność wyznaczenia w punkcie 13. stałej R .
15. Porównać wartości stałej Halla R wyznaczone odpowiednio w punktach 9. i 10. oraz punktach 13. i 14.
16. Korzystając ze wzoru (17.8) i wartości stałej R , która została wyznaczona z większą dokładnością, obliczyć koncentrację n nośników ładunku w badanej próbce (za wartość współczynnika korygującego przyjąć $A = 1,0$).
17. Korzystając z prawa propagacji niepewności, obliczyć niepewność wyznaczenia jej wartości.
18. Na podstawie znaku wyznaczonej stałej Halla R określić typ przewodnictwa w badanej próbce.

Pomiar magnetorezystancji:

19. Obliczyć niepewności wszystkich uzyskanych wyników pomiaru wynikających z klasy dokładności użytych mierników.
20. Korzystając z równania prostej aproksymującej wyznaczonej w punkcie 3., obliczyć wartości indukcji pola magnetycznego B , dla których przeprowadzono badanie zjawiska magnetorezystancji.
21. Korzystając z wartości U oraz I wyznaczonych odpowiednio w punkcie 7., obliczyć niepewność rezystywności hallotronu ρ przy wykorzystaniu wzoru:

$$\rho = 4,53 \frac{U}{I} d;$$

za grubość badanej próbki przyjąć wartość $d = 1 \cdot 10^{-5}$ m.

22. Korzystając z prawa propagacji niepewności, obliczyć niepewność wyznaczonych wartości ρ .

23. Obliczyć wielkości $(\rho - \rho_0)/\rho_0$ odpowiadające różnym wartościom indukcji pola magnetycznego (ρ_0 oznacza rezystywność badanej próbki pod nieobecność pola magnetycznego B).
24. Sporządzić wykres zależności $(\rho - \rho_0)/\rho_0$ od kwadratu wartości indukcji pola magnetycznego.
25. Metodą najmniejszych kwadratów aproksymować linią prostą wyniki przedstawione na wykresie sporządzonym w punkcie 24. Prostą aproksymującą zaznaczyć na wykresie.
26. Korzystając z równania prostej aproksymującej wyznaczonej w punkcie 25. oraz równania (17.17), obliczyć wartość ruchliwości μ nośników ładunku w badanej próbce.
27. Korzystając z prawa propagacji niepewności, obliczyć niepewność wyznaczonej wartości ruchliwości μ .

18. POMIAR PARAMETRÓW MAGNETYCZNYCH FERROMAGNETYKÓW

Własności magnetyczne materii są bezpośrednio związane z elektronami krążącymi po orbitach w atomach oraz ich spinem. W przypadku atomu jednoelektronowego całkowity moment magnetyczny $\vec{\mu}$ atomu jest sumą momentów magnetycznych elektronu: orbitalnego ($\vec{\mu}_{orb}$) oraz spinowego ($\vec{\mu}_s$):

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_{orb} + \vec{\mu}_s. \quad (18.1)$$

W przybliżonych rozważaniach pomija się moment magnetyczny jądra atomowego (suma dodatniego momentu magnetycznego protonu oraz ujemnego neutronu) ze względu na jego zaniedbywalną wartość w porównaniu z wartością wnoszoną przez elektrony.

W celu zrozumienia orbitalnego momentu magnetycznego elektronu należy rozważyć jego ruch po orbicie wokół jądra atomowego (rys. 18.1a). W tym uproszczonym modelu elektron krąży wokół jądra atomowego po orbicie o promieniu \vec{r} z prędkością \vec{v} . Jego orbitalny moment magnetyczny jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny orbity i przeciwnie skierowanym do jego momentu pędu \vec{L} .

Aby wyznaczyć wartość orbitalnego momentu magnetycznego elektronu, zakłada się jego orbitę jako pętlę, w której płynie prąd związany z jego ładunkiem. Natężenie tego prądu można obliczyć na podstawie zależności:

$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r}, \quad (18.2)$$

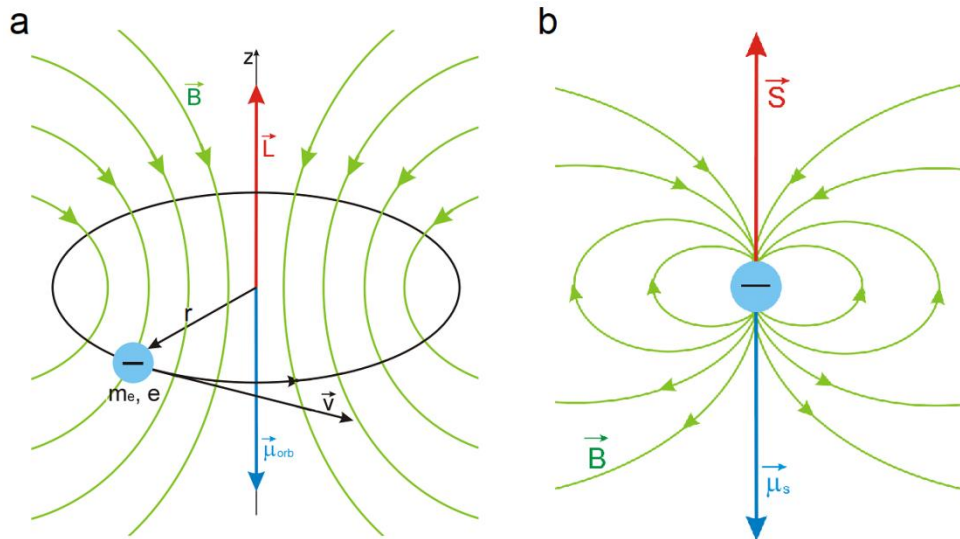
gdzie: e – ładunek elektronu, T – okres obiegu elektronu wokół jądra, r – promień orbity elektronu, v – prędkość elektronu krążącego wokół jądra. Znając natężenie prądu, można zapisać zależność określającą orbitalny moment magnetyczny elektronu:

$$\vec{\mu}_{orb} = I\vec{A} = -\frac{ev}{2\pi r}\pi r^2\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{e}{2m_e}\vec{r} \times m_e\vec{v}, \quad (18.3)$$

gdzie: \vec{A} – wektor powierzchniowy, którego wartość jest równa powierzchni ograniczonej orbitą elektronu, m_e – masa elektronu. Zależność tę można również zapisać z wykorzystaniem orbitalnego momentu pędu elektronu:

$$\vec{\mu}_{orb} = -\frac{e}{2m_e}\vec{L}. \quad (18.4)$$

Minus w powyższych zależnościach wynika z faktu ujemnego ładunku elektronu. Wyrażenie $e/2m_e$ nazywane jest współczynnikiem żyromagnetycznym.



Rys. 18.1. (a) Model elektronu o masie m_e i ładunku e krążącego z prędkością \vec{v} wokół jądra atomowego po orbicie o promieniu \vec{r} . Poruszający się elektron ma moment pędu \vec{L} . Ruch elektronu odpowiada pętli z prądem, z którą z kolei związany jest orbitalny moment magnetyczny $\vec{\mu}_{orb}$ skierowany przeciwnie do momentu pędu \vec{L} ; (b) elektron zobrazowany jako naładowana kulka z zaznaczonym spinem \vec{S} , spinowym momentem magnetycznym $\vec{\mu}_s$. Na rysunkach wyróżniono linie indukcji \vec{B} powstałego pola magnetycznego

Na podstawie mechaniki kwantowej wiadomo, że orbitalny moment pędu elektronu jest wielkością skwantowaną i można go opisać zależnością:

$$L = \frac{h}{2\pi}\sqrt{l(l+1)}, \quad (18.5)$$

gdzie: h – stała Plancka, l – orbitalna liczba kwantowa. Orbitalna liczba kwantowa może przyjmować ściśle określone wartości z przedziału: $0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ (n jest główną liczbą kwantową przyjmującą wartości liczb naturalnych $n=1, 2, 3, \dots$). Elektrony o tej samej liczbie kwantowej tworzą tzw. powłoki elektronowe. Wykorzystując wzory (18.4) i (18.5), można zapisać wyrażenie na orbitalny moment magnetyczny w następującej formie:

$$\mu_{orb} = \frac{eh}{4m\pi} \sqrt{l(l+1)} = \mu_B \sqrt{l(l+1)}, \quad (18.6)$$

gdzie μ_B oznacza magneton Bohra (najmniejszą możliwą wartość orbitalnego momentu magnetycznego elektronu). Na podstawie mechaniki kwantowej można również zapisać wyrażenie na spinowy moment magnetyczny elektronu, które to w końcowej formie ma postać:

$$\mu_S = 2\mu_B \sqrt{s(s+1)}, \quad (18.7)$$

gdzie s jest spinową liczbą kwantową, która dla elektronu może przyjmować wartości $+1/2$ lub $-1/2$.

Przekładając przedstawione rozważania na atomy wieloelektronowe, należy stwierdzić, że ich całkowity moment magnetyczny jest sumą orbitalnych oraz spinowych momentów magnetycznych poszczególnych elektronów.

W odniesieniu do próbek makroskopowych ich własności magnetyczne opisuje się z wykorzystaniem wielkości zwanej namagnesowaniem (wektor polaryzacji magnetycznej) \vec{M} . Wielkość ta jest definiowana jako suma momentów magnetycznych ($\vec{\mu}$) poszczególnych atomów przypadających na jednostkę objętości (V):

$$\vec{M} = \frac{\sum \vec{\mu}}{V}. \quad (18.8)$$

Jej jednostką jest [A/m].

Jeżeli jakikolwiek materiał zostanie umieszczony w zewnętrznym polu magnetycznym o indukcji \vec{B}_{zew} , to pole to będzie usiłowało ustawić wszystkie momenty magnetyczne (dipole magnetyczne) w kierunku pola. W efekcie w materiale powstanie wpadkowe pole o indukcji:

$$\vec{B} = \vec{B}_{zew} + \mu_0 \vec{M} = (1 + \mu_0 \frac{\vec{M}}{\vec{B}_{zew}}) \vec{B}_{zew} = (1 + \chi) \vec{B}_{zew} = (1 + \chi) \mu_0 \vec{H}_{zew}, \quad (18.9)$$

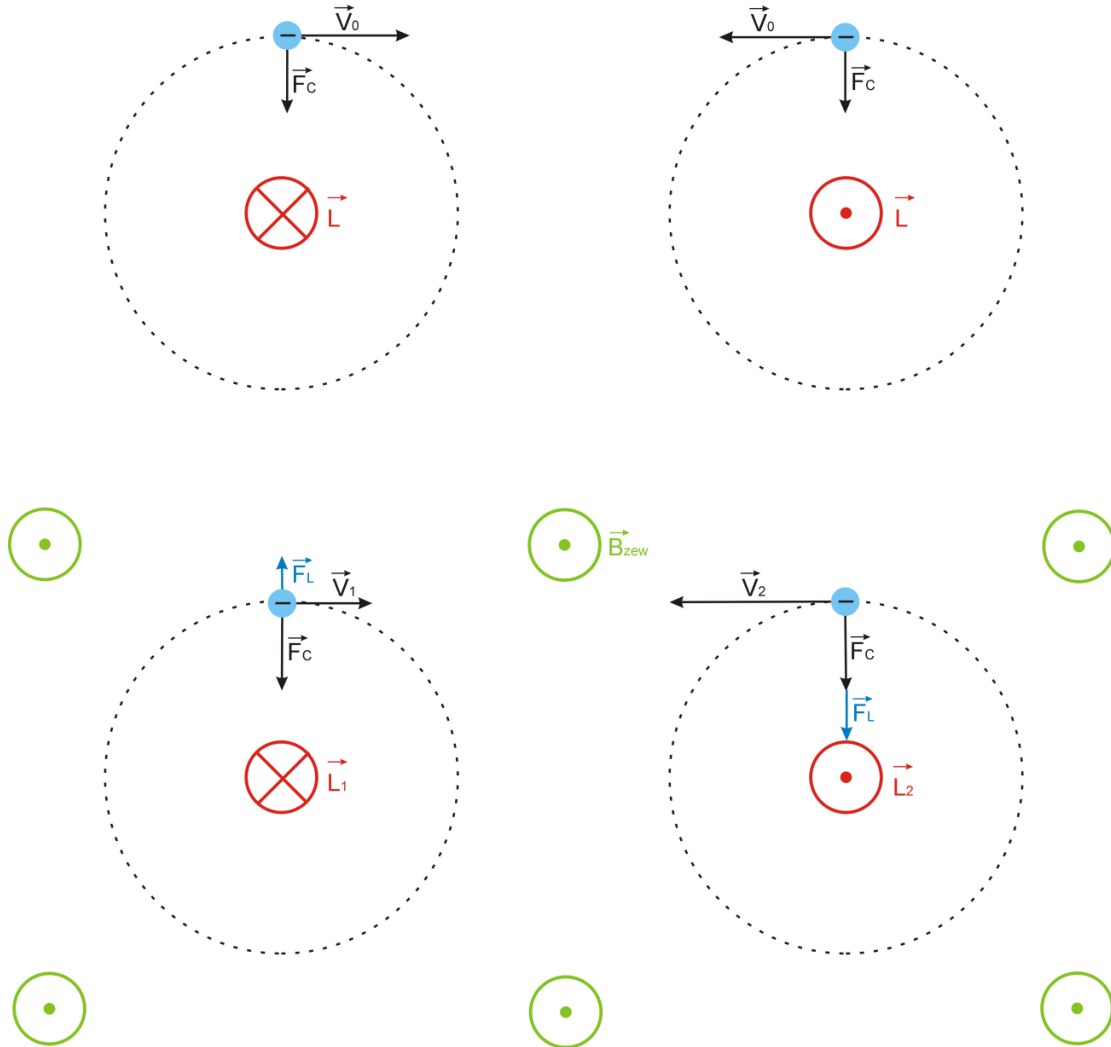
gdzie: μ_0 – przenikalność magnetyczna próżni, χ – podatność magnetyczna, \vec{H} – wektor natężenia pola magnetycznego.

Materiały pod względem ich własności magnetycznych dzielimy na diamagnetyki, paramagnetyki oraz ferromagnetyki.

Diamagnetyki

Diamagnetyzm jest związany z orbitalnym momentem magnetycznym elektronów w atomie. Diamagnetyki w przypadku nieobecności zewnętrznego pola magnetycznego mają wypadkowy moment magnetyczny równy zero. Sytuacja ulega zmianie w momencie pojawienia się zewnętrznego pola magnetycznego. Rozważmy przypadek dwóch elektronów krążących po tej samej orbicie, ale w przeciwnych kierunkach (rys. 18.2).

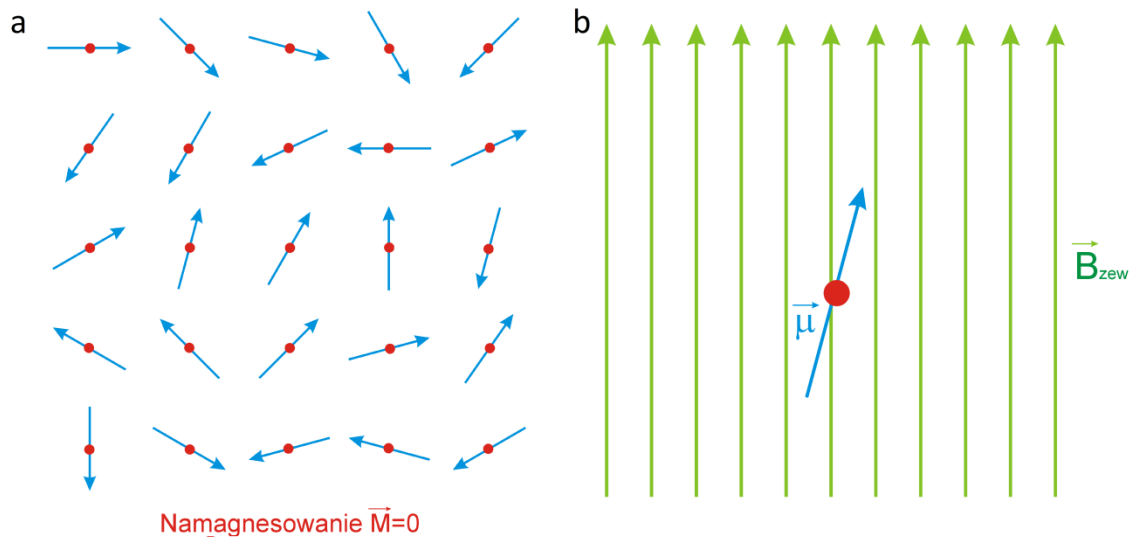
Przy nieobecności zewnętrznego pola magnetycznego funkcję siły dośrodkowej utrzymującej elektron na orbicie wokół jądra pełni siła Coloumba (\vec{F}_C). W momencie pojawienia się zewnętrznego pola magnetycznego \vec{B}_{zew} na elektron zaczyna oddziaływać również siła Lorentza (\vec{F}_L), stając się dodatkowym przyczynkiem do siły dośrodkowej. W zależności od wzajemnej orientacji wektorów zewnętrznego pola magnetycznego \vec{B}_{zew} oraz momentu pędu elektronu siła dośrodkowa będzie maleć lub wzrastać (zgodne zwroty \vec{B}_{zew} i \vec{L} – wzrost wartości siły dośrodkowej, przeciwne zwroty \vec{B}_{zew} i \vec{L} – osłabienie siły dośrodkowej). W pierwszym przypadku wzrasta również prędkość elektronu, a tym samym wartość natężenia prądu spowodowanego jego ruchem po orbicie. To z kolei prowadzi do zwiększenia wartości orbitalnego momentu magnetycznego (zwrot przeciwny do zewnętrznego pola \vec{B}_{zew}). W drugim przypadku orbitalny moment magnetyczny elektronu maleje (zwrot zgodny z polem zewnętrznym \vec{B}_{zew}). W rezultacie od opisaney pary elektronów powstanie wypadkowy moment magnetyczny skierowany przeciwnie do zewnętrznego pola. Diamagnetyki są wypychane z zewnętrznego pola magnetycznego, a efekt ten jest obserwowany w atomach o wypełnionych powłokach elektronowych (np. złoto, miedź, woda, krzem, gazy szlachetne). Ich podatność magnetyczna jest mniejsza od zera, rzędu 10^{-6} - 10^{-4} , i praktycznie nie zależy od temperatury. Jako idealne diamagnetyki traktowane są nadprzewodniki ($\chi = -1$) gdyż „wypychają” one linie pola magnetycznego (efekt Meissnera).



Rys. 18.2. Wpływ zewnętrznego pola magnetycznego na elektron poruszający się wokół jądra atomowego

Paramagnetyki

Paramagnetyzm związany jest głównie ze spinowym momentem magnetycznym elektronów w atomie. Paramagnetykami są materiały, których atomy cechują się przypadkowym momentem magnetycznym różnym od zera. Są to np. atomy o nieparzystej liczbie elektronów, dla których przypadkowy spin zawsze będzie różny od zera (np.: tlen, platyna, wolfram). Choć atomy materiałów paramagnetycznych mają własny moment magnetyczny, to jednak słabo ze sobą oddziałują. W nieobecności zewnętrznego pola magnetycznego spiny mają przypadkową orientację (rys. 18.3a), a tym samym namagnesowanie \vec{M} jest równe zero.



Rys. 18.3. (a) Przypadkowe ustawienie momentów magnetycznych poszczególnych atomów w paramagnetykach, (b) orientowanie się momentów magnetycznych atomów paramagnetycznych na kierunku zewnętrznego pola magnetycznego

W przypadku pojawienia się zewnętrznego pola magnetycznego \vec{B}_{zew} moment magnetyczny atomu doznaje działania momentu siły. Zewnętrzne pole dąży do uporządkowania momentów magnetycznych w kierunku przyłożonego pola (rys. 18.3b). Działanie to odbywa się niejako w kontrze do ruchu cieplnego (który usiłuje „zniszczyć” wszelakie uporządkowanie) i prowadzi do słabego magnesowania się materiału. Po zaniku zewnętrznego pola momenty magnetyczne poszczególnych atomów powracają do przypadkowego ustawienia i namagnesowanie znika. Podatność magnetyczna paramagnetyków jest większa od zera, rzędu 10^{-9} - 10^{-3} , a jej zależność od temperatury opisuje prawo Curie:

$$\chi = \frac{C}{T}, \quad (18.10)$$

gdzie: C – stała Curie (zależna od materiału), T – temperatura bezwzględna. Ta empiryczna zależność została w 1895 roku sformułowana przez Piotra Curie (męża Marii Skłodowskiej-Curie).

Ferromagnetyki

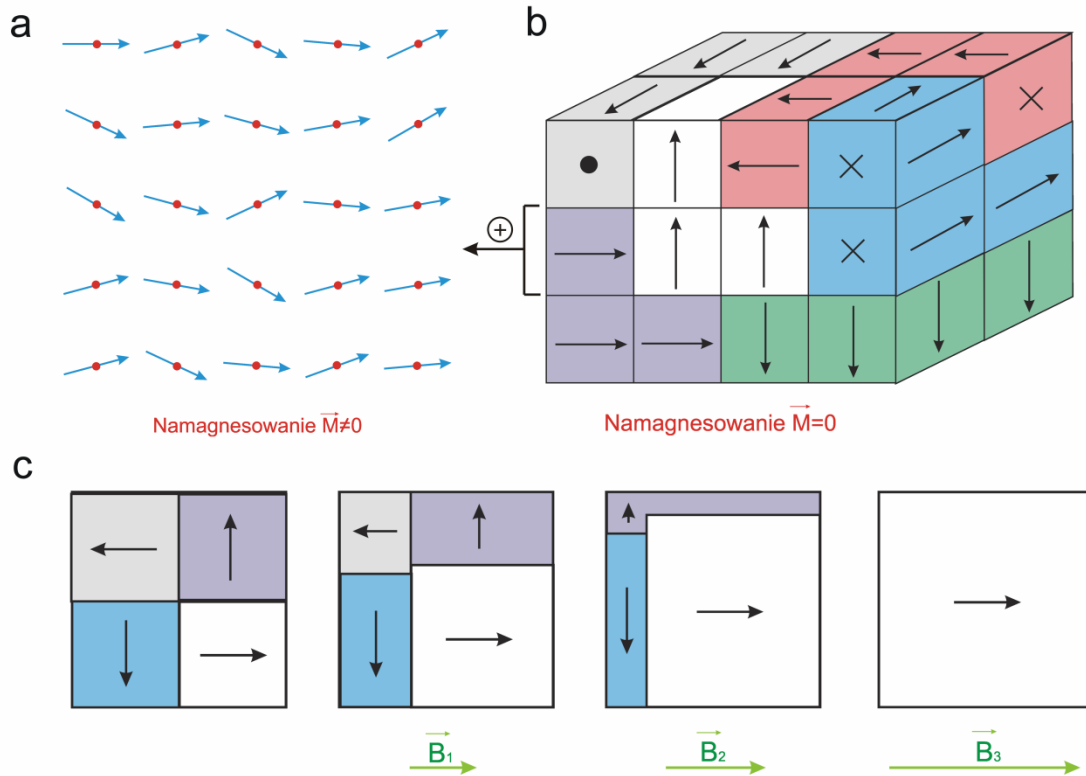
Ferromagnetyzm związany jest z silnym oddziaływaniem wymiennym momentów magnetycznych atomów w sieci krystalicznej, które prowadzi do zjawiska ich lokalnego porządkowania się (rys. 18.4a). Obszary, w których momenty magnetyczne są ustawione w tym samym kierunku, nazywamy domenami. Podobnie jak w przypadku paramagnetyzmu źródłem ferromagnetyzmu jest spinowy, a nie orbitalny moment magnetyczny. Są za niego odpowiedzialne elektrony obsadzające powłoki o niezerowym wypadkowym momencie magnetycznym. W odróżnieniu od paramagnetyków warunek ten jest konieczny, ale niewystarczający do pojawienia się zjawiska ferromagnetyzmu. Aby tak się stało, dodatkowo musi być spełniony warunek:

$$\frac{a}{2r} > \frac{3}{2}, \quad (18.11)$$

gdzie: a – stała sieci krystalicznej, r – promień orbity elektronu. W wypadku spełnienia powyższej zależności orbity elektronów przenikają się wzajemnie, w rezultacie pojawia się oddziaływanie skutkujące powstaniem pola oddziaływania międzycząsteczkowego. Konieczność spełnienia powyższego warunku tłumaczy również fakt, że np. mangan, dla którego $a/2r = 1,48$, nie jest ferromagnetykiem mimo posiadania nieskompensowanego spinu.

Pomimo lokalnego uporządkowania i występowania w ferromagnetykach struktury domenowej ferromagnetyk jako całość może wykazywać zerowe namagnesowanie ze względu na przypadkowe ustawienie wektora namagnesowania w poszczególnych domenach (rys. 18.4b). Obszary rozdzielające sąsiednie domeny w ferromagnetyku nazywa się ścianami domenowymi. Mają one zazwyczaj grubość kilkuset atomów, co jest niewielką wartością w porównaniu z rozmiarami domen, które mogą dochodzić do kilku milimetrów. W ściankach tych momenty magnetyczne sąsiednich atomów obracają się o niewielki kąt, aby w efekcie osiągnąć taki sam kierunek jak w sąsiedniej domenie. Ściany domenowe dzieli się ze względu na sposób obrotu momentów magnetycznych na: ściany Blocha – obrót następuje równoległe do powierzchni ścianki lub ściany, Neela – obrót następuje prostopadle do powierzchni ścianki. Jeżeli ferromagnetyk zostanie umieszczony w zewnętrznym polu magnetycznym, to proces magnesowania przebiega jak na rys. 18.4c. Ze wzrostem wartości pola magnetycznego powiększeniu ulegają domeny, w których spontaniczne namagnesowanie jest zgodne z kierunkiem

zewnętrznego pola. W wystarczająco silnych polach dochodzi do sytuacji, w której wszystkie domeny ustawiają się w kierunku zewnętrznego pola.

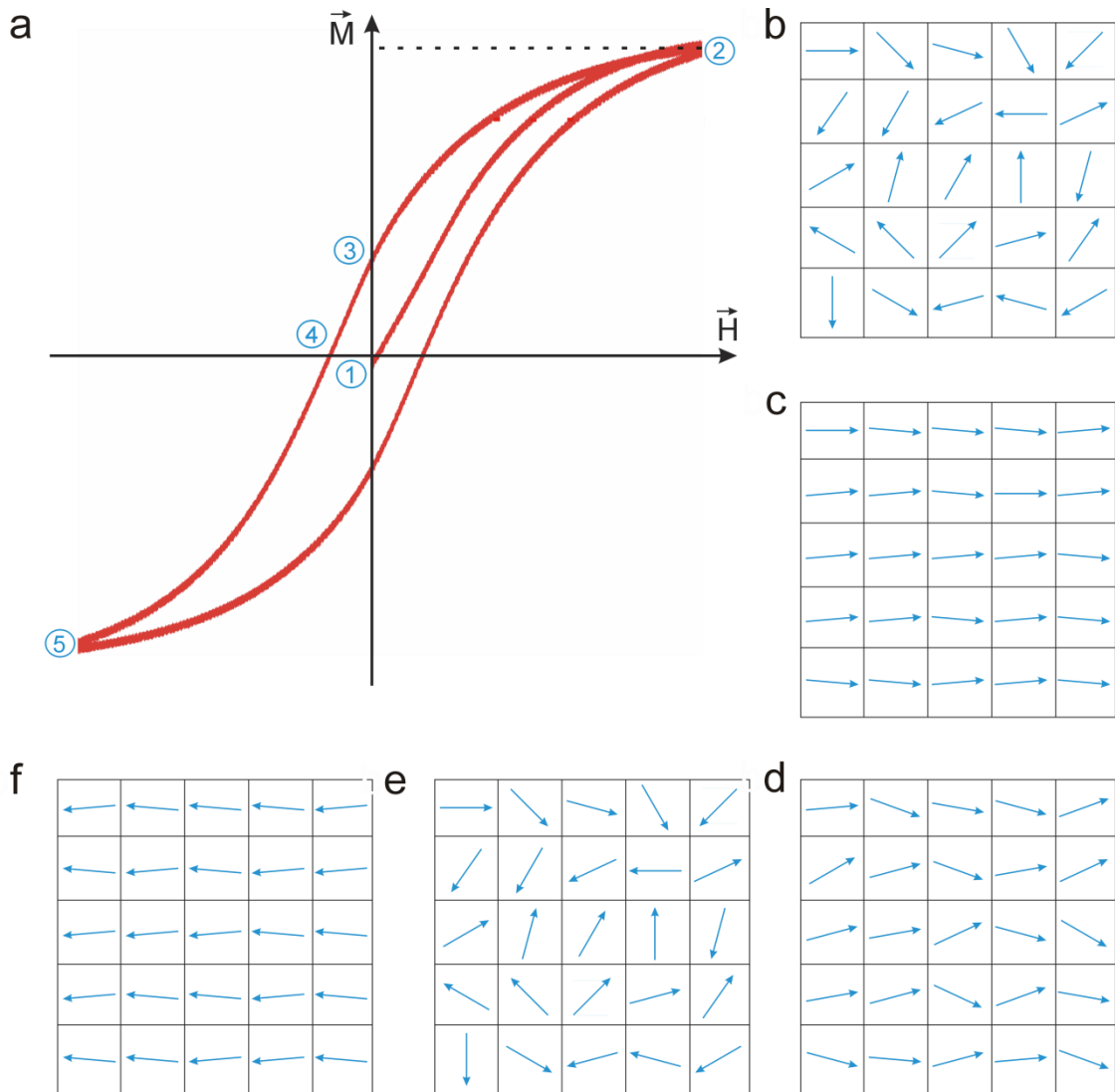


Rys. 18.4. (a) Lokalne uporządkowanie momentów magnetycznych w domenie, (b) przypadkowe namagnesowanie domen w materiale skutkujące brakiem namagnesowania w skali makro, (c) wzrost objętości domen o tej samej orientacji co zewnętrzne pole magnetyczne

Cechą charakterystyczną dla ferromagnetyków jest nieliniowa zależność namagnesowania od natężenia pola magnetycznego, zwana pętlą histerezy magnetycznej (rys. 18.5a). Punkt 1. odpowiada nienamagnesowanemu ferromagnetykowi przed umieszczeniem w zewnętrznym polu magnetycznym (rys. 18.5b). Po umieszczeniu ferromagnetyku w polu magnetycznym rozpoczyna się proces jego magnesowania (krzywa 1-2 nosi nazwę krzywej magnesowania pierwotnego).

W dostatecznie silnym polu osiągnięty zostaje punkt 2., tzw. namagnesowanie nasycenia (rys. 18.5c). W punkcie tym domeny ustawione są zgodnie z zewnętrznym polem magnetycznym. Po wyłączeniu zewnętrznego pola namagnesowanie nie spada do zera, lecz ma pewną skończoną wartość noszącą nazwę pozostałości magnetycznej (punkt 3., rys. 18.5d). Aby namagnesowanie osiągnęło wartość zero, niezbędne jest przyłożenie pola magnetycznego o przeciwnym zwrocie. Wartość natężenia pola magnetycznego, przy którym namagnesowanie osiąga wartość zero, nosi nazwę pola koercji (punkt 4., rys. 18.5e). Przy dalszym zwiększaniu natężenia pola magnetycznego o przeciwnym

zwrocie osiąga się ponownie punkt nasycenia (punkt 5., rys. 18.5f), w którym namagnesowanie domen ma zwrot przeciwny niż poprzednio.



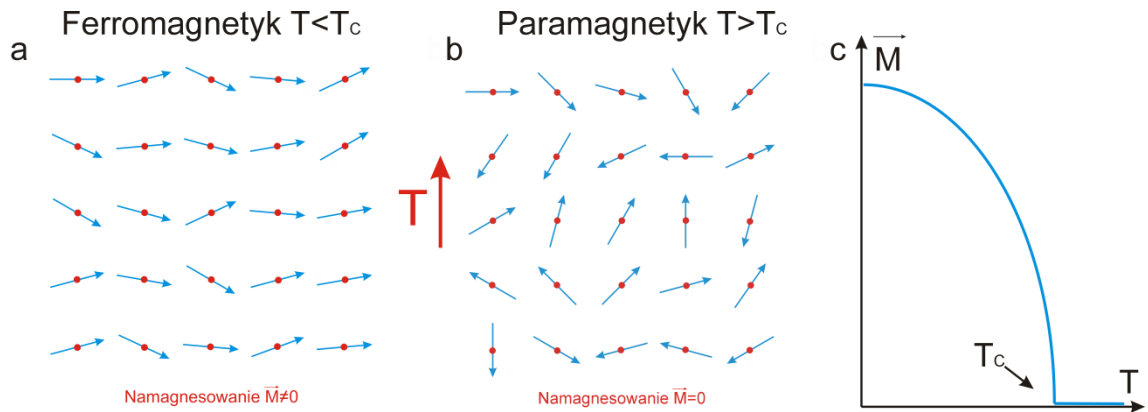
Rys. 18.5. (a) Pętla histerezy magnetycznej z zaznaczonymi charakterystycznymi punktami; struktura domenowa ferromagnetyka: (b) bez zewnętrznego pola magnetycznego ①, (c) w stanie nasycenia ②, (d) w punkcie odpowiadającym namagnesowaniu nasycenia ③, (e) dla pola magnetycznego o wartości pola koercji ④, (f) w stanie namagnesowania w polu o przeciwnym zwrocie niż w punkcie 2. ⑤

Pętla histerezy może być wykorzystana do wyznaczenia energii potrzebnej do przemagnesowania próbki w jednym zamkniętym obiegu:

$$E = \oint \vec{H} d\vec{B}. \quad (18.12)$$

Energia ta jest równa polu powierzchni objętej pętlą histerezy magnetycznej.

Ferromagnetyki powyżej pewnej temperatury (charakterystycznej dla danego materiału), zwanej temperaturą Curie T_C , przechodzą w stan paramagnetyczny. Powyżej tej temperatury ruch termiczny uniemożliwia orientowanie się momentów magnetycznych w ramach domen (rys. 18.6) i zanika namagnesowanie.



Rys. 18.6. Przejście ferromagnetyka (a) w stan paramagnetyczny (b) w wyniku wzrostu temperatury powyżej temperatury Curie (T_C), (c) zanik namagnesowania podczas przejścia ze stanu ferro- do paramagnetycznego

W odróżnieniu od diamagnetyków oraz paramagnetyków ferromagnetyki występują jedynie w postaci ciał stałych.

Przebieg ćwiczenia

1. Podłączyć mikroprocesorowy przyrząd do pomiaru pętli histerezy magnetycznej ferromagnetyków do wejścia USB komputera.
2. Załączyć mikroprocesorowy przyrząd do pomiaru pętli histerezy magnetycznej ferromagnetyków.
3. Uruchomić program **Pętla Histerezy** znajdujący się na pulpicie.
4. W zakładce **Narzędzia** kliknąć **Monitor Portu Szeregowego** w celu połączenia przyrządu pomiarowego z komputerem.
5. Postępować według wyświetlanych poleceń:
 - a) Umieścić badany materiał w cewce pomiarowej, wpisać 1 i nacisnąć Enter (rozpocznie się rozmagnesowywanie próbki, a następnie automatycznie pomiar).
 - b) Po zakończonym pomiarze odczekać chwilę, aż przyrząd rozmagnesuje zmierzoną próbkę.

- c) Zaznaczyć wyświetlone wyniki pomiarów, skopiować do Notatnika i zapisać w katalogu na pulpicie.
- d) Umieścić w cewce pomiarowej kolejny badany materiał i powtórzyć całą procedurę.
6. Po zakończonych pomiarach wyłączyć program i mikroprocesorowy przyrząd pomiarowy oraz skopiować pliki z zarejestrowanymi wynikami na własny nośnik.
7. Zanotować wymiary badanych próbek.

Opracowanie wyników

1. Sporządzić wykresy zarejestrowanych pętli histerezy.
2. Wyznaczyć wartości dla charakterystycznych punktów pętli histerezy ferromagnetycznej: namagnesowanie nasycenia, pozostałość magnetyczna, natężenie pola koercji, i oszacować ich niepewności.
3. Na podstawie pętli histerezy scharakteryzować badane materiały oraz podać możliwe zastosowania.
4. Wyznaczyć pole powierzchni ograniczonej pętlą histerezy i na tej podstawie określić energie niezbędne do przemagnesowania jednostki objętości badanych próbek oraz ich niepewności.

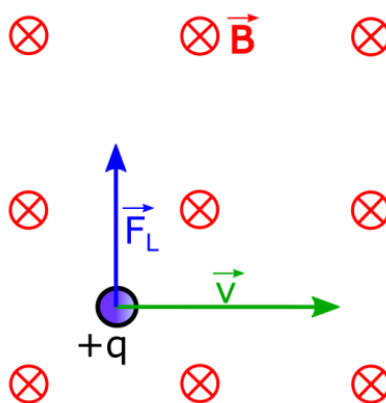
19. WYZNACZANIE ŁADUNKU WŁAŚCIWEGO ELEKTRONU ZA POMOCĄ MAGNETRONU

Siła Lorentza

Siła Lorentza jest to siła, która działa na cząstkę obdarzoną ładunkiem elektrycznym q , poruszającą się z prędkością \vec{v} w polach elektrycznym i magnetycznym:

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (19.1)$$

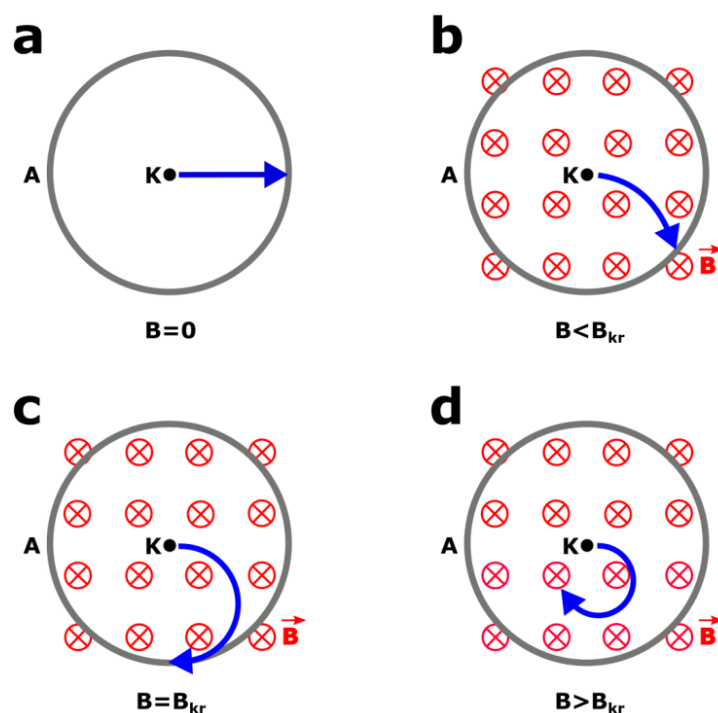
gdzie: \vec{E} jest wektorem natężenia pola elektrycznego, a \vec{B} wektorem indukcji pola magnetycznego. Składowa siły Lorentza pochodząca od pola elektrycznego jest skierowana wzdłuż linii sił tego pola, natomiast składowa pochodząca od pola magnetycznego jest prostopadła do płaszczyzny utworzonej przez wektor prędkości cząstki i wektor indukcji pola magnetycznego (rys. 19.1).



Rys. 19.1. Siła Lorentza działająca na cząstkę obdarzoną ładunkiem elektrycznym q poruszającą się z prędkością \vec{v} w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji \vec{B} . Zakładamy tutaj brak pola elektrycznego ($\vec{E} = 0$)

Magnetron – budowa i zasada działania

Magnetron to lampa, która zbudowana jest z dwóch elektrod (rys. 19.2). Jedna z nich (anoda) ma kształt cylindra, druga zaś (katoda) ma postać drutu, który stanowi oś symetrii cylindrycznej anody. Lampa ta znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym, którego linie są równoległe do osi lampy. Do elektrod magnetronu przyłożone jest napięcie, dzięki czemu elektrony są emitowane z katody (w wyniku zjawiska termoemisji) i przemieszczają się do anody pod wpływem sił pola elektrycznego.



Rys. 19.2. Tor ruchu elektronu wewnątrz magnetronu, w przypadku gdy wartość wektora indukcji pola magnetycznego (a) wynosi zero, (b) jest mniejsza od wartości krytycznej, (c) osiąga wartość krytyczną, (d) jest większa niż wartość krytyczna (użyte oznaczenia: K – katoda, A – anoda, B – wektor indukcji pola magnetycznego)

Wektor prędkości elektronu poruszającego się wewnątrz magnetronu opisuje poniższy wzór:

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_a \vec{e}_a, \quad (19.2)$$

gdzie: v_r i v_a to radialna i azymutalna składowa wektora prędkości w cylindrycznym układzie współrzędnych, e_r oraz e_a to odpowiednio radialny i azymutalny wersor przyjętego układu współrzędnych. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki dla ruchu

obrotowej szybkość zmian momentu pędu L w czasie t równa jest momentowi siły M działającemu na ciało:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (19.3)$$

Moment pędu cząstki jest iloczynem wektorowym promienia wodzącego r i pędu cząstki:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}, \quad (19.4)$$

gdzie m to masa elektronu, natomiast moment siły definiuje iloczyn:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (19.5)$$

gdzie F to siła działająca na elektron. Po przekształceniu zależności (19.3) – (19.5) można przedstawić następującym wzorem:

$$d(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{F} \cdot dt. \quad (19.6)$$

W układzie przedstawionym na rys. 19.2 linie pola elektrycznego biegną promieniście od anody do katody, zatem możemy zapisać wektor natężenia pola elektrycznego w następującej postaci:

$$\vec{E} = E \vec{e}_r. \quad (19.7)$$

Ponadto w układzie przedstawionym na rys. 19.2 wektor indukcji pola magnetycznego ma tylko składową „z”, co można wyrazić wzorem:

$$\vec{B} = B \vec{e}_z, \quad (19.8)$$

gdzie e_z to wersor osi „z”. Uwzględniając (19.7) i (19.8) we wzorze (19.6), otrzymujemy:

$$d(mrv_a) = qrv_r B dt = qrB dr, \quad (19.9)$$

gdzie q oznacza ładunek elektronu. Całkujemy powyższe równanie po całej drodze elektronu:

$$\int_{r_k}^{r_a} d(mrv_a) = \int_{r_k}^{r_a} qrBdr, \quad (19.10)$$

gdzie r_k i r_a są promieniami katody i anody. Przy założeniu że prędkość początkowa elektronów emitowanych z katody wynosi zero, otrzymujemy:

$$mr_a v_{\alpha a} = \frac{1}{2} qB(r_a^2 - r_k^2), \quad (19.11)$$

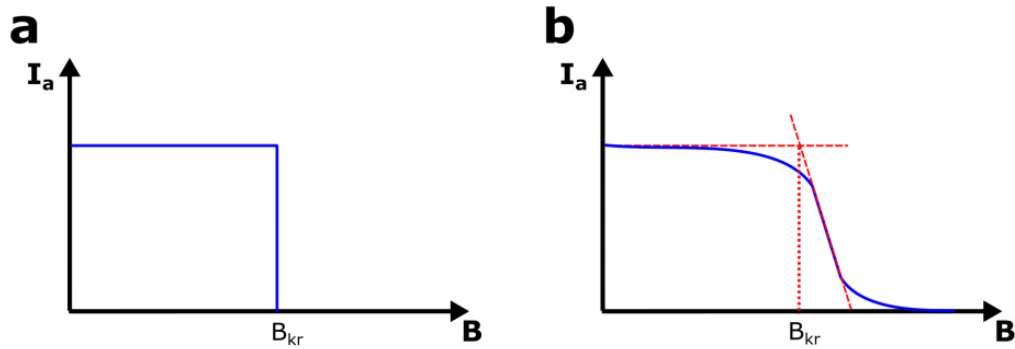
gdzie $v_{\alpha a}$ jest składową azymutalną prędkości cząstki w pobliżu anody.

Tor elektronu w magnetronie w sposób istotny zależy od wartości indukcji pola magnetycznego (rys. 19.2). Przy braku pola magnetycznego (rys. 19.2a) elektron porusza się po linii prostej, natomiast dla małych wartości B zakrzywienie toru jego ruchu jest niewielkie (rys. 19.2b). Gdy wartość indukcji pola magnetycznego się zwiększa, w pewnym momencie osiąga ona wartość krytyczną B_{kr} . Wtedy odchylenie toru jest tak duże, że kierunek prędkości elektronu w pobliżu anody jest prostopadły do promienia wodzącego (rys. 19.2c). Inaczej mówiąc, tor elektronu jest styczny do powierzchni anody, a składowa radialna prędkości elektronów V_r przy anodzie wynosi zero. Zgodnie z zasadą zachowania energii musi być spełniona relacja:

$$E_k = \frac{1}{2} m v_{\alpha a}^2 = qU, \quad (19.12)$$

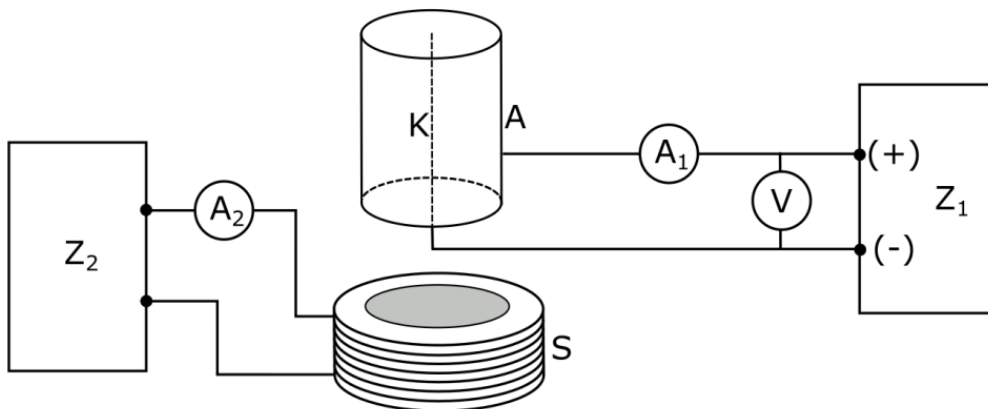
gdzie: E_k jest energią kinetyczną elektronu przy anodzie, U oznacza napięcie przyłożone do elektrod magnetronu. Przyjmując $B = B_{kr}$ oraz podstawiając $v_{\alpha a}$ wyliczoną z powyższego równania do zależności (19.11), uzyskujemy po przekształceniach wzór:

$$\frac{e}{m} = \frac{8U}{\left[B_{kr} \cdot r_a \left(1 - \left(\frac{r_k}{r_a} \right)^2 \right) \right]^2}. \quad (19.13)$$



Rys. 19.3. (a) Teoretyczna i (b) rzeczywista zależność natężenia prądu anodowego (I_a) od indukcji pola magnetycznego (B) w magnetronie oraz sposób wyznaczenia wartości krytycznej indukcji pola magnetycznego (B_{kr})

W przypadku gdy $B > B_{kr}$, zakrzywienie toru ruchu elektronu jest na tyle duże, że nie dociera on do anody (rys. 19.2d). Zatem dla wartości indukcji pola magnetycznego większych od wartości krytycznej natężenie prądu anodowego powinno zmaleć teoretycznie do zera (rys. 19.3a). W rzeczywistości jednak elektrony emitowane z katody mają różne prędkości. Dla wartości $B = B_{kr}$ tylko te elektrony, które znalazły się poza katodą z zerową prędkością początkową, będą zwracane z powrotem do katody, natomiast pozostałe dotrą do anody. W miarę wzrostu B powyżej B_{kr} coraz mniej elektronów osiąga anodę. Objawia się to stopniowym zmniejszeniem natężenia prądu anodowego I_a , co zaprezentowano na rys. 19.3b. Krytyczną wartość indukcji pola magnetycznego wyznacza się w następujący sposób. Należy dopasować proste styczne do prostoliniowych części zależności $I_a=f(B)$. Następnie trzeba wyznaczyć punkt przecięcia tych prostych i rzutować go na poziomą oś wykresu. W ten sposób wyznaczona wartość B_{kr} może posłużyć do obliczenia ładunku właściwego elektronu (q/m) dla elektronu za pomocą wzoru (19.13).



Rys. 19.4. Schemat układu pomiarowego: A_1 , A_2 – amperomierze, S – solenoid, Z_1 , Z_2 – zasilacze, V – woltomierz, K – katoda i A – anoda magnetronu

Przebieg ćwiczenia

1. Zapoznać się z układem pomiarowym, którego schemat zaprezentowano na rys. 19.4.
2. Włączyć zasilanie w obwodzie żarzenia katody na poziom podany przez prowadzącego ćwiczenie (np. 5).
3. Ustawić na zasilaczu Z_1 wartość napięcia anodowego podaną przez prowadzącego ćwiczenie (np. $U = 3 \text{ V}$).
4. Zmieniać na zasilaczu Z_2 wartości natężenia prądu płynącego przez solenoid I_S i notować odpowiadające im wartości natężenia prądu anodowego I_a . Wartość natężenia prądu I_S zmieniać w zakresie od 0 A do 0,25 A z krokiem co 0,05 A oraz od 0,25 A do 2,5 A z krokiem co 0,25 A.
5. Pomiary opisane w powyższym punkcie powtórzyć dla innych wartości napięć anodowych U podanych przez prowadzącego ćwiczenie (np. 5 V, 7 V, 9 V).
6. Zanotować parametry użytych przyrządów pomiarowych (np. klasy, zakresy pomiarowe, typy przyrządów pomiarowych) niezbędne do wyznaczenia niepewności.

Opracowanie wyników

1. Obliczyć niepewności wszystkich wykonanych pomiarów $u(I_S)$, $u(I_a)$ oraz $u(U)$.
2. Sporządzić wykres zależności indukcji pola magnetycznego używanego w ćwiczeniu od natężenia prądu płynącego przez solenoid, korzystając z danych zamieszczonych w tab. 19.1. Metodą najmniejszych kwadratów dopasować prostą o równaniu $B = a \cdot I_S + b$, zaznaczyć ją na wykresie i podać parametry dopasowania a , b oraz ich niepewności $u(a)$ i $u(b)$.
3. Korzystając z wyznaczonych parametrów a , b prostej aproksymującej, obliczyć wartości B indukcji pola magnetycznego odpowiadające wartościom natężenia prądu I_S zmierzonym podczas wykonywania niniejszego ćwiczenia. Metodą prawa propagacji niepewności obliczyć niepewności $u(B)$. Sporządzić wykresy zależności $I_a = f(B)$. Zaznaczyć na wykresach niepewności wyników w postaci słupków niepewności. Charakterystyki $I_a = f(B)$ zarejestrowane dla różnych napięć anodowych U przedstawić na osobnych wykresach.

4. Zgodnie z opisaną w treści ćwiczenia metodą wykreślić proste styczne do prostoliniowych części wykresów $I_a = f(B)$ (patrz rys. 19.3b). Punkty przecięcia się tych prostych rzutować na oś poziomą i wyznaczyć wartości krytyczne indukcji pola magnetycznego B_{kr} odpowiadające różnym zadany wartościom U .
5. Za pomocą wzoru (19.13) obliczyć wartości stosunku q/m dla różnych napięć anodowych U , wykorzystując wyznaczone w powyższym punkcie wartości B_{kr} . Przyjąć następujące wartości promieni katody i anody magnetronu: $r_k = 0,623(53)$ mm, $r_a = 1,80(11)$ mm. Obliczyć niepewności $u(q/m)$ za pomocą prawa propagacji niepewności.
6. Obliczone w punkcie 5. wartości q/m uśrednić, stosując odpowiedni wzór na średnią ważoną uwzględniający niepewności $u(q/m)$. Zapisać wynik końcowy ładunku właściwego elektronu oraz jego niepewność zgodnie z obowiązującymi normami.
7. Uzyskany wynik porównać z wartością tablicową ładunku właściwego elektronu, stosując odpowiedni test zgodności.

Tabela 19.1

Zależność wartości indukcji pola magnetycznego B od natężenia I_s prądu płynącego przez solenoid użyty w ćwiczeniu

I_s , A	0,10	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00	3,25	3,50
B , mT	7	9	13,8	18,3	24	29	34	39	44	48,5	53,5	58	62,2	70,2	74

20. CECHOWANIE TERMOPARY

Zjawiska kontaktowe

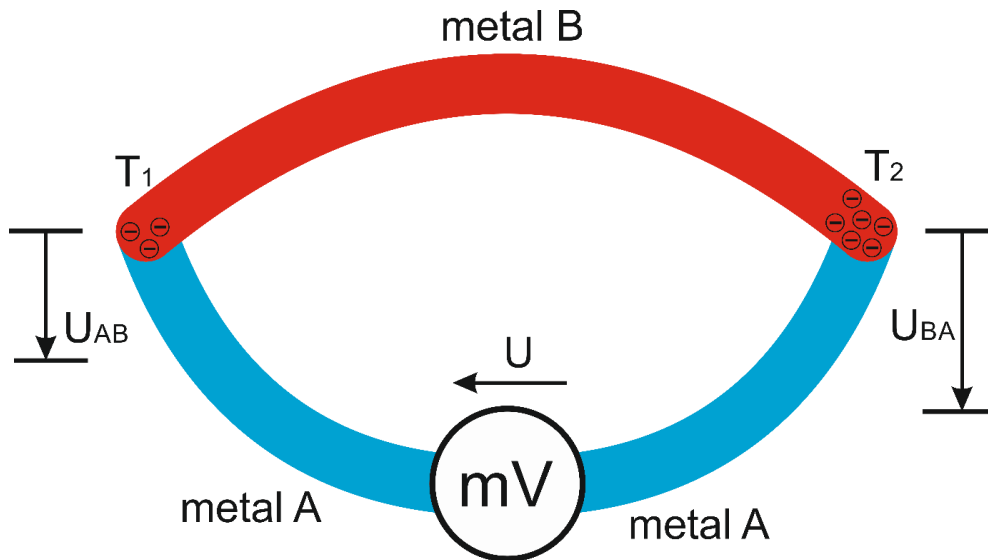
W przypadku połączenia za sobą dwóch różnych metali (materiały zawierające w strukturze elektrony swobodne) nastąpi przejście elektronów z jednego z nich do drugiego. Ruch ten (efekt podobny do zjawiska dyfuzji) jest spowodowany różnymi pracami wyjścia W oraz różnymi koncentracjami elektronów n , a kierunek przemieszczenia zależy od wartości przytoczonych powyżej wielkości. Mianowicie elektrony przechodzą z metalu o mniejszej pracy wyjścia do metalu o większej pracy wyjścia oraz z metalu o większej koncentracji do metalu o mniejszej koncentracji elektronów. Ruch ten występuje do momentu, gdy powstające pole elektryczne zatrzyma ten proces, czyli do wyrównania się poziomów Fermiego w obu metalach (rys. 20.1). Duże prędkości ruchu cieplnego elektronów powodują, że proces ten jest praktycznie natychmiastowy. Typowe wartości różnicy potencjałów powstającej na złączu wynoszą dziesiąte części volta. Biorąc pod uwagę typowe gęstości atomów w metalach, a tym samym również elektronów przewodnictwa, napięcie kontaktowe ustala się, gdy już niespełna 2 procent elektronów z jednej warstwy atomowej jednego z metali przemieści się do drugiego metalu. Tym samym napięcie kontaktowe powstaje pomiędzy sąsiednimi warstwami atomowymi połączonych ze sobą metali, przy czym jedna z warstw jest nieznacznie zubożona, natomiast druga wzbogacona w elektrony. Napięcie to jest nazywane zewnętrznym napięciem kontaktowym lub napięciem Volty (U_V) i jest związane z różnicą wartości prac wyjścia połączonych metali. Wyróżnić możemy również wewnętrzne napięcie kontaktowe (napięcie Galvaniego, U_G), związane z różnicą energii potencjalnych elektronów wewnątrz metalu, która to z kolei zależy od różnicy energii Fermiego połączonych metali.

Termopara (ogniwo termoelektryczne, termoelement) jest elementem pomiarowym zbudowanym z dwóch połączonych metali (rys. 20.1), stopów lub półprzewodników działającym na podstawie zjawiska Seebecka. W sytuacji gdy ich końce mają różne temperatury, powstaje różnica potencjałów zwana siłą termoelektryczną, wynikająca

z różnicy napięć kontaktowych na ciepłym i zimnym złączu termopary. Wartość napięcia kontaktowego zależy nie tylko od różnicy prac wyjścia oraz koncentracji elektronów w połączonych metalach, lecz także od temperatury. Może być opisana zależnością:

$$U_{AB} = \frac{(W_A - W_B)}{e} + \frac{kT}{e} \ln \frac{n_A}{n_B}, \quad (20.1)$$

gdzie poszczególne symbole mają następujące znaczenie: W_A , W_B – prace wyjścia elektronów z metali A i B, k – stała Boltzmana, e – ładunek elementarny, T – temperatura wyrażona w skali Kelwina, n_A , n_B – koncentracje elektronów swobodnych odpowiednio w metalu A i B.



Rys. 20.1. Zjawisko Seebecka. W wyniku różnicy temperatur ($T_2 > T_1$) spoin dwóch różnych metali napięcia kontaktowe na złączach mają różną wartość, w wyniku czego pojawia się siła termoelektryczna E

W przypadku obwodu zamkniętego dwóch różnych metali, których końce mają taką samą temperaturę, napięcia powstałe na obu złączach są identyczne ($U_{AB} = U_{BA}$) co do wartości i kompensują się. Tym samym w obwodzie nie przepływa prąd. Jeżeli jednak będziemy mieli do czynienia z sytuacją, gdy złącza będą miały różną temperaturę (np. $T_1 < T_2$), wówczas napięcia kontaktowe na obu złączach będą różne ($U_{AB} \neq U_{BA}$). W konsekwencji w obwodzie pojawia się siła termoelektryczna E :

$$E = U_{AB} + U_{BA} = \frac{(W_A - W_B)}{e} + \frac{kT}{e} \ln \frac{n_A}{n_B} + \frac{(W_B - W_A)}{e} + \frac{kT}{e} \ln \frac{n_B}{n_A} = \frac{k}{e} (T_1 - T_2) \ln \frac{n_A}{n_B} \quad (20.2)$$

oraz przepływ prądu. Ponieważ w metalach koncentracja elektronów jest niezależna od temperatury i pozostaje stała podczas jej zmian, więc równanie (20.2) możemy zapisać w postaci często spotykanej w literaturze:

$$U = \alpha(T_1 - T_2), \quad (20.3)$$

gdzie współczynnik α jest nazywany współczynnikiem termoelektrycznym lub współczynnikiem Seebecka i wyrażony jest w [$\mu\text{V}/\text{K}$].

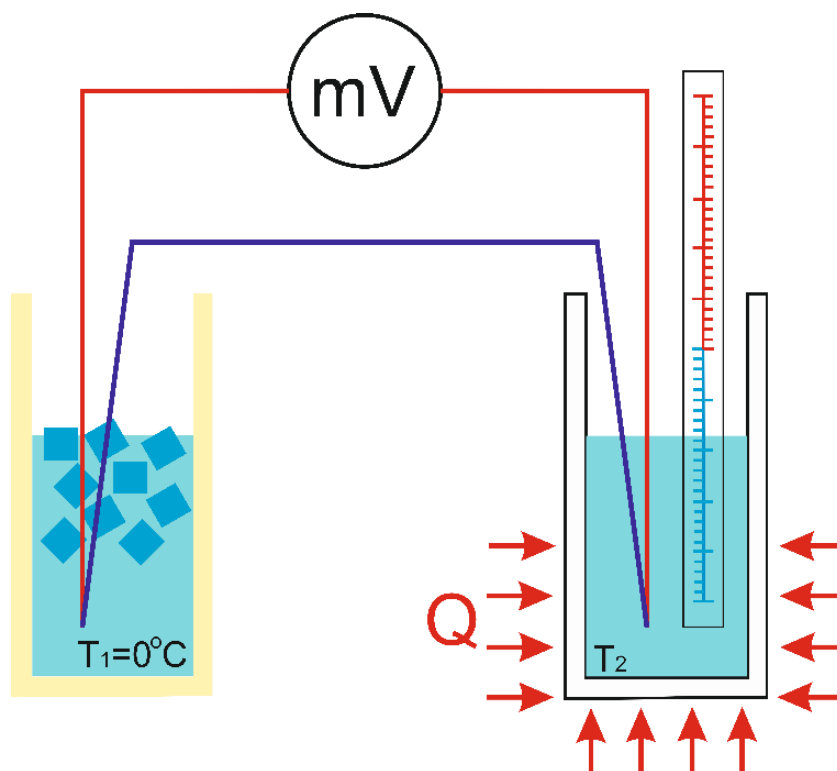
Wykorzystywane w konstrukcji termopar zjawisko Seebecka jest jednym ze zjawisk termoelektrycznych. Innymi tego typu zjawiskami są:

1. zjawisko Peltiera – obserwowane podczas przepływu prądu przez układ przewodników, których spoiny mają te same temperatury. W jego wyniku na jednym ze złączy wydzielane będzie ciepło, natomiast na drugim będzie ono pochłaniane. Ogrzewaniu ulega złącze, w którym elektrony przechodzą z przewodnika o wyższym poziomie Fermiego do przewodnika o niższym. Kierunek przepływu ciepła zależy w tym przypadku od kierunku przepływu prądu.
2. zjawisko Thompsona – obserwowane w pojedynczym przewodniku, którego końce mają różne temperatury. Powstały gradient temperatury powoduje różną koncentrację elektronów swobodnych wzdłuż przewodnika, a w rezultacie pojawienie się wewnętrznego pola elektrycznego. W zależności od kierunku przepływu prądu ciepło będzie wydzielane lub pochłaniane. Jeżeli zewnętrzne pole będzie skierowane zgodnie z polem wytworzonym przez ładunki w objętości, to wspomaga ono ruch nośników kosztem energii sieci, a tym samym spowoduje obniżenie jej temperatury. Jeżeli pola są skierowane przeciwnie, pole zewnętrzne wykonuje pracę przeciwko polu wewnętrznemu, czego efektem jest ogrzanie struktury w wyniku wydzielonego ciepła.

Układ pomiarowy

Schemat układu pomiarowego przedstawiono na rys. 20.2. Składa się on z dwóch naczyń, w których umieszczone są złącza termopary. Jedno z nich znajduje się w izolowanym naczyniu wypełnionym mieszaniną wody z lodem. W ten sposób zapewniona jest stała temperatura tego złącza $T_1 = 0^\circ\text{C}$. Drugie złącze znajduje się w naczyniu umożliwiającym ogrzewanie i chłodzenie zawartej w nim cieczy (termostat). Termostat umożliwia chłodzenie przez wykorzystanie podłączenia do sieci

wodociągowej. Do kontroli temperatury w termostacie służy zanurzony w nim termometr. Jednorodny rozkład temperatury wody w termostacie zapewnia jego wewnętrzna pompa, gwarantująca ciągłe mieszanie ogrzewanej wody. Układ umożliwia pomiary w zakresie od 20°C do ok. 90°C . Zakres pomiarowy można zwiększyć przez zamianę cieczy roboczej z wody na inny płyn, mający wyższą temperaturę wrzenia.



Rys. 20.2. Schemat układu pomiarowego

Przebieg ćwiczenia

1. Termos napełnić lodem do ok. połowy jego wysokości, a następnie uzupełnić wodą do ok. 2/3 jego objętości. Sprawdzić, czy temperatura wody wynosi 0°C .
2. Jedno złącze termopary umieścić w termosie, natomiast drugie w wodzie znajdującej się w termostacie. W momencie rozpoczęcia ćwiczenia woda w termostacie powinna mieć temperaturę pokojową. Wartość temperatury kontrolować za pomocą załączonego termometru.
3. Termoparę podłączyć do miliwoltomierza i kontrolować jego wskazanie dla temperatury pokojowej.
4. Włączyć termostat i rozpocząć podgrzewanie wody, w której zanurzone jest drugie złącze termopary.

5. Według zaleceń prowadzącego rozpocząć notowanie temperatury cieczy w termostacie oraz wskazań woltomierza. Jeżeli prowadzący nie zaleci inaczej, wskazania woltomierza notować co 5°C .
6. Po zagrzaniu wody do temperatury zadanej przez prowadzącego (nie przekraczać 85°C) wyłączyć grzanie.
7. Rozpocząć chłodzenie wody w termostacie przez włączenie zewnętrznego obiegu wody.
8. Wykonać pomiary dla takich samych temperatur jak w przypadku ogrzewania, chyba że prowadzący ćwiczenie zdecyduje inaczej.
9. Pomiary zakończyć po osiągnięciu temperatury 30°C lub w momencie zleconym przez prowadzącego ćwiczenie.

Opracowanie wyników

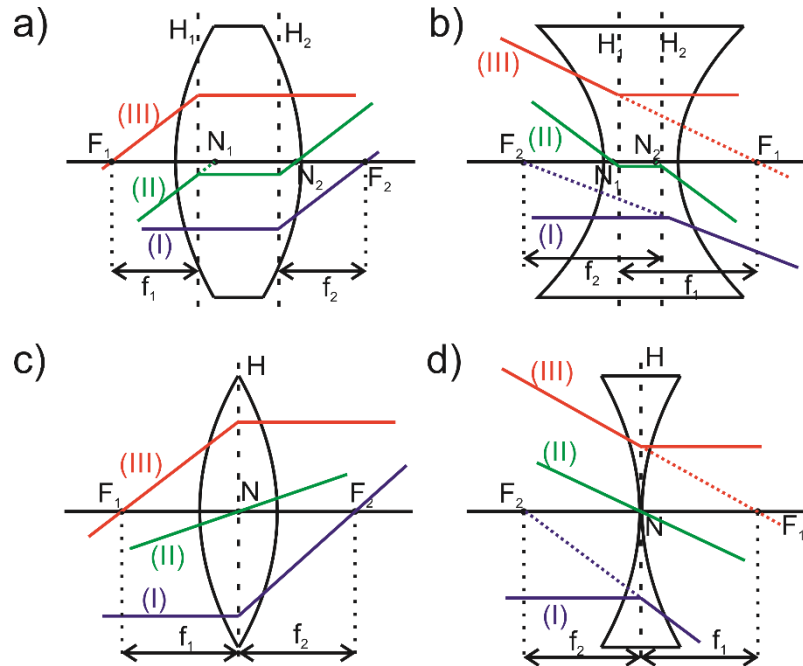
1. Wyznaczyć niepewności zmierzonych wartości napięcia.
2. Wykonać wykresy zależności napięcia U od różnicy temperatur złącz termopary. Jeśli to możliwe, zaznaczyć na nich niepewności pomiarowe.
3. Metodą najmniejszych kwadratów aproksymować uzyskane wyniki zależnością liniową. Podać wartości parametrów a i b oraz ich niepewności.
4. Wyznaczyć współczynnik termoelektryczny termopary oraz jego niepewność.
5. Przeprowadzić test zgodności dla wyników uzyskanych podczas ogrzewania oraz chłodzenia wody w termostacie.

21. WYZNACZANIE OGNISKOWYCH SOCZEWEK ORAZ MIARY ABERRACJI CHROMATYCZNEJ

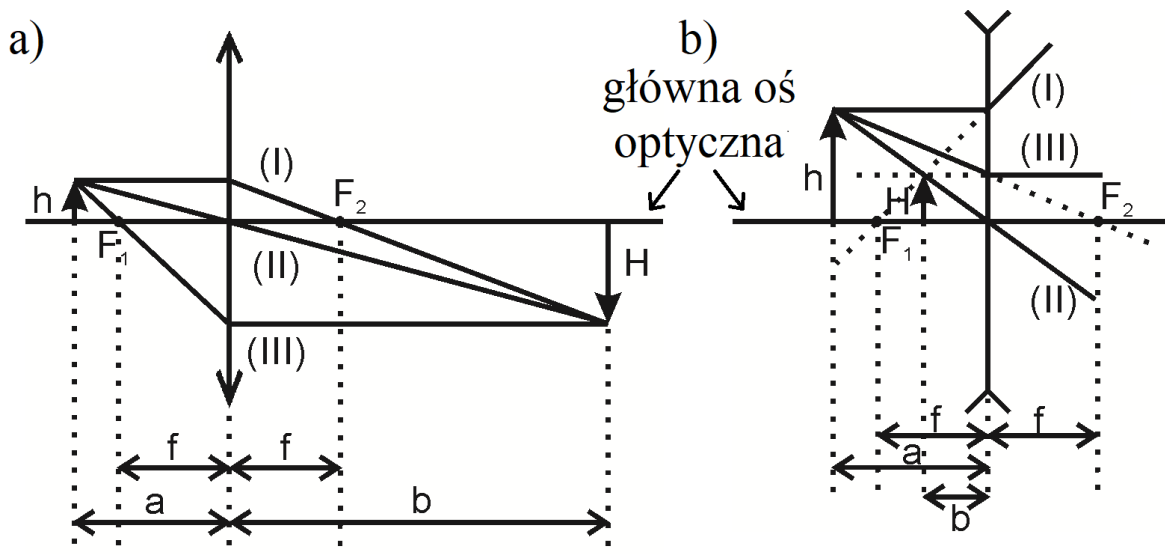
Soczewka jest to bryła wykonana z przezroczystego materiału ograniczona dwiema powierzchniami sferycznymi o promieniach krzywizny R_1 i R_2 . Wyznaczają one tzw. główną oś optyczną, czyli prostą przechodzącą przez środki krzywizn powierzchni soczewki. Gdy grubość soczewki jest dużo mniejsza w porównaniu z jej promieniami krzywizny, soczewkę nazywa się cienką. Gdy ten warunek nie jest spełniony, to soczewka jest tzw. soczewką grubą. Podstawową funkcją soczewek jest skupianie lub rozpraszanie światła. W związku z tym soczewki dzieli się na skupiające i rozpraszające. Soczewka skupiająca jest najczęściej grubsza w środku niż na brzegach, natomiast rozpraszająca – odwrotnie.

W konstrukcji obrazów powstających przy użyciu soczewek wykorzystuje się **sześć punktów kardynalnych**: dwa ogniska (F_1, F_2), dwa punkty główne (H_1 i H_2) oraz dwa punkty węzłowe (N_1 i N_2) (patrz rys. 21.1). Najważniejszymi z wymienionych punktów kardynalnych są ogniska soczewki. Ogniskiem przedmiotowym F_1 nazywamy punkt leżący na głównej osi optycznej, z którego wychodzące promienie światła po załamaniu (refrakcji) biegną równoległe do osi optycznej (promienie ogniskowe). Ognisko obrazowe F_2 jest to punkt na osi optycznej, w którym zbiega się równoległa wiązka promieni światła po załamaniu na soczewce (promienie równoległe). Odległość ogniska od odpowiednich punktów głównych (w przypadku soczewek cienkich od środka soczewki) nazywa się ogniskową soczewki f . Należy pamiętać, że ogniskowe przedmiotowe f_1 i obrazowe f_2 mogą mieć różne długości, np. gdy promienie krzywizny nie są sobie równe ($R_1 \neq R_2$). Punkty główne H_1 i H_2 są punktami na osi optycznej, przez które przechodzą płaszczyzny prostopadłe do osi optycznej (tzw. płaszczyzny główne). Przyjmuje się, że przy wyznaczaniu biegu promieni świetlnych na tych płaszczyznach zachodzi cała refrakcja w soczewce niezależnie od tego, gdzie zachodzi ona w rzeczywistości. W przypadku soczewki cienkiej płaszczyzny główne pokrywają się ze sobą i przechodzą przez środek soczewki prostopadłe do głównej osi optycznej. Punkty węzłowe N_1 i N_2 są to punkty leżące na głównej osi optycznej, gdzie refrakcja w ogóle nie zachodzi. Punkty te mają

tę własność, że promień przechodzący przez jeden z punktów węzłowych wychodzi z drugiego, biegnąc równoległe do pierwotnego kierunku (promienie główne). W soczewce cienkiej punktem węzłowym jest jej środek. Rysunek 21.1 przedstawia bieg promieni świetlnych przez soczewki dwuwypukłe, dwuwklęsłe, grube oraz cienkie wyznaczone zgodnie z konwencją punktów kardynalnych.



Rys. 21.1. Bieg promienia równoległego (I), głównego (II) i ogniskowego (III) w soczewce: a) skupiającej grubej, b) rozpraszającej grubej, c) skupiającej cienkiej oraz d) rozpraszającej cienkiej. F_1, F_2 – ogniska H, H_1, H_2 – płaszczyzny główne oraz N, N_1, N_2 – punkty węzłowe



Rys. 21.2. Konstrukcja obrazu w soczewce skupiającej (a) i rozpraszającej (b). Opis symboli w tekście

Rysunek 21.2 przedstawia konstrukcję obrazu w cienkiej soczewce skupiającej i rozpraszającej. Obraz rzeczywistego przedmiotu o wysokości h otrzymuje się, wyrysowując dwa spośród trzech opisanych promieni świetlnych: równoległego, głównego lub ogniskowego. Zasady konstrukcji obrazu w przypadku soczewki skupiającej (rys. 21.2a) są następujące:

- promień biegnący równoległe do głównej osi optycznej (I), tzw. promień równoległy, po przejściu przez soczewkę załamuje się tak, że przechodzi przez ognisko F_2 po drugiej stronie soczewki,
- promień przechodzący przez środek soczewki (II), tzw. promień główny, nie ulega odchyleniu od pierwotnego kierunku,
- promień (III), tzw. promień ogniskowy, przechodzący przez ognisko F_1 , po przejściu przez soczewkę biegnie równoległe do głównej osi optycznej.

Dla przedstawionego przykładu powstający obraz przedmiotu odległego o a ($a > f$) od środka soczewki powstaje po jej drugiej stronie, w miejscu przecięcia się wspomnianych promieni, w odległości b od jej środka. Jest to obraz rzeczywisty, odwrócony.

W przypadku soczewki rozpraszającej (rys. 21.2b) promienie kreśli się w następujący sposób:

- promień biegnący równoległe do głównej osi optycznej (I) po przejściu przez soczewkę załamuje się tak, że jego przedłużenie przechodzi przez ognisko F_1 ,
- promień przechodzący przez środek soczewki (II) nie ulega odchyleniu od pierwotnego kierunku, podobnie jak w przypadku soczewki skupiającej,
- promień (III), którego przedłużenie przeszłoby przez ognisko F_2 , po przejściu przez soczewkę biegnie równoległe do głównej osi optycznej.

W przypadku konfiguracji przedstawionej na rys. 21.2b ($a > f$) obraz przedmiotu odległego o a od środka soczewki powstaje w miejscu przecięcia się przedłużeń promieni (I) i (III) oraz promienia (II), w odległości b od środka soczewki. Jest to obraz pozorny (powstały z przecięć przedłużeń promieni rzeczywistych, a nie samych promieni), prosty.

Powiększenie obrazu zależy od odległości przedmiotu i obrazu od soczewki. Jest ono zdefiniowane następująco:

$$P = \frac{H}{h} = \frac{b}{a}. \quad (21.1)$$

Gdy $p > 1$, obraz jest powiększony, gdy $p < 1$, otrzymujemy obraz pomniejszony, a w przypadku, gdy $p = 1$, otrzymujemy obraz tej samej wielkości co przedmiot. Jak

widać na rys. 21.2, promienie świetlne po przejściu przez soczewkę skupiającą stają się wiązką zbieżną, a po przejściu przez soczewkę rozpraszającą wiązka staje się rozbieżna. Wiązka rozbieżna biegnie tak, jakby wychodziła z jednego punktu, zwanego ogniskiem pozornym. W zależności od położenia przedmiotu względem ogniska i środka soczewki w soczewce skupiającej można uzyskać obrazy rzeczywiste odwrócone ($a > f$) lub pozorne proste ($a < f$), powiększone ($a < 2f$), pomniejszone ($a > 2f$) lub tej samej wielkości ($a = 2f$). W przypadku umieszczenia przedmiotu w ognisku soczewki skupiającej ($a = f$) obraz nie powstanie, gdyż wszystkie rodzaje promieni są równoległe do siebie po przejściu przez soczewkę. Za pomocą soczewek rozpraszających uzyskuje się zawsze obraz pozorny, prosty i pomniejszony, położony między soczewką a przedmiotem. Aby zobaczyć obraz przy pomocy soczewki rozpraszającej, należy zestawić ją w układ optyczny z soczewką skupiającą.

Ogniskowa f soczewki cienkiej zależy od względnego współczynnika załamania $n = n_s/n_o$ (n_s , n_o – współczynniki załamania odpowiednio materiału soczewki oraz otaczającego ją ośrodka) oraz od promieni krzywizn R_1 i R_2 zgodnie z tzw. równaniem materiałowym soczewki:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (21.2)$$

Związek między ogniskową f , odległościami przedmiotu a oraz obrazu b od środka soczewki opisuje równanie geometryczne:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}. \quad (21.3)$$

W przypadku soczewki rozpraszającej przyjmuje się ogniskową f ze znakiem ujemnym, oznaczającą odległość ogniska pozornego od soczewki. Wielkość zdefiniowaną wzorem:

$$D = \frac{1}{f} \quad (21.4)$$

nazywamy zdolnością skupiającą soczewki. Jej jednostką jest dioptra o wymiarze m^{-1} .

Ponieważ ogniskowa soczewki zależy od względnego współczynnika załamania n materiału soczewki względem otaczającego ją ośrodka, więc soczewka, która w powietrzu ($n_s > n_o$) jest soczewką skupiającą, po umieszczeniu jej w ośrodku,

w którym $n_o > n_s$ (np. w wodzie), stanie się soczewką rozpraszającą. Analogicznie soczewka rozpraszająca promienie światła w powietrzu po umieszczeniu jej w tym ośrodku stanie się soczewką skupiającą.

Wady soczewek

Konstrukcja idealnej soczewki jest praktycznie niemożliwa. Niedokładności szlifowania powierzchni soczewek, niejednorodności materiału oraz jego własności powodują, że obrazy powstałe w soczewkach nie są idealnym odwzorowaniem rzeczywistych przedmiotów. Wyróżnia się następujące wady soczewek:

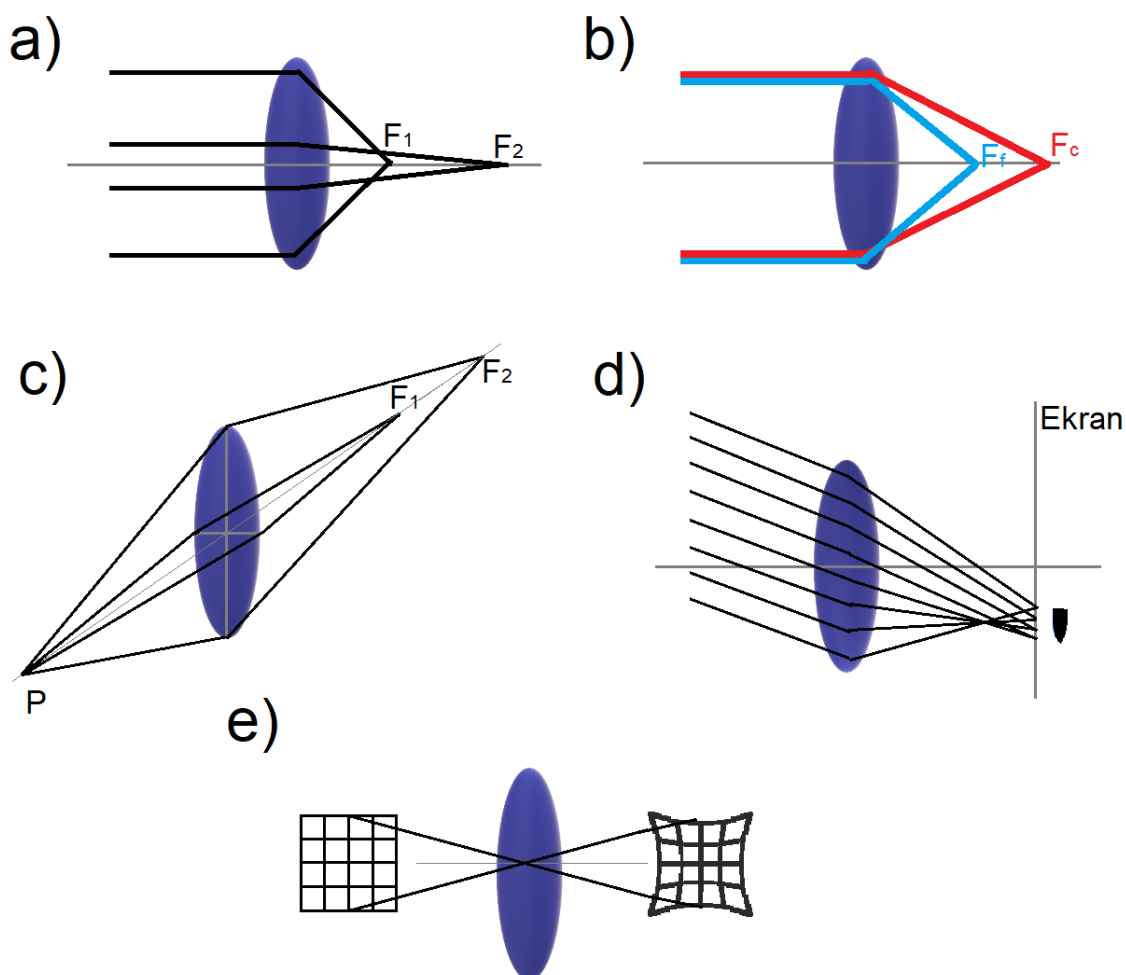
- **Aberracja sferyczna** (rys. 21.3a) polega na tym, że promienie biegnące bliżej głównej osi optycznej skupiają się dalej od soczewki, a promienie biegnące dalej od osi głównej przecinają się bliżej soczewki. Różnica długości ogniskowych dla obu rodzajów promieni jest miarą aberracji sferycznej.
- **Aberracja chromatyczna** (rys. 21.3b) związana jest z dyspersją – zależnością prędkości propagacji fali świetlnej w ośrodku od jej długości. Tym samym materiał ma różną wartość współczynnika załamania dla różnych długości fali. Z reguły wartość współczynnika załamania światła maleje ze wzrostem długości fali – dyspersja normalna. W związku z tym dłuższe fale (np. odpowiadające światłu czerwonemu) załamują się słabiej niż fale krótsze (np. światło fioletowe), a tym samym skupiają się w ognisku położonym dalej od soczewki. W przypadku materiału o dyspersji anomalnej ognisko fal o większej długości leży bliżej soczewki niż fal krótszych. Odległość ΔC między długościami ogniskowych dla dwóch skrajnych długości fali światła widzialnego (światła czerwonego f_c i fioletowego f_f) jest miarą aberracji chromatycznej:

$$\Delta C = f_c - f_f. \quad (21.5)$$

- **Astygmatyzm** (rys. 21.3c) związany jest ze zniekształceniem obrazu wskutek asymetrii powierzchni soczewek. Polega na tym, że promienie padające w dwóch prostopadłych płaszczyznach są ogniskowane w różnych punktach.
- **Koma** (rys. 21.3d) wynika z faktu, że wiązka światła wychodząca z punktu położonego poza osią optyczną tworzy po przejściu przez soczewkę plamkę

w kształcie przecinka lub komety. Im dalej od osi optycznej układu znajduje się źródło światła, tym stopień zniekształcenia jest większy.

- **Dystorsja** (rys. 21.3e) polega na różnym powiększeniu obrazu w zależności od jego odległości od osi optycznej soczewki. Skutkiem dystorsji jest odwzorowanie prostych linii przedmiotu jako krzywych.

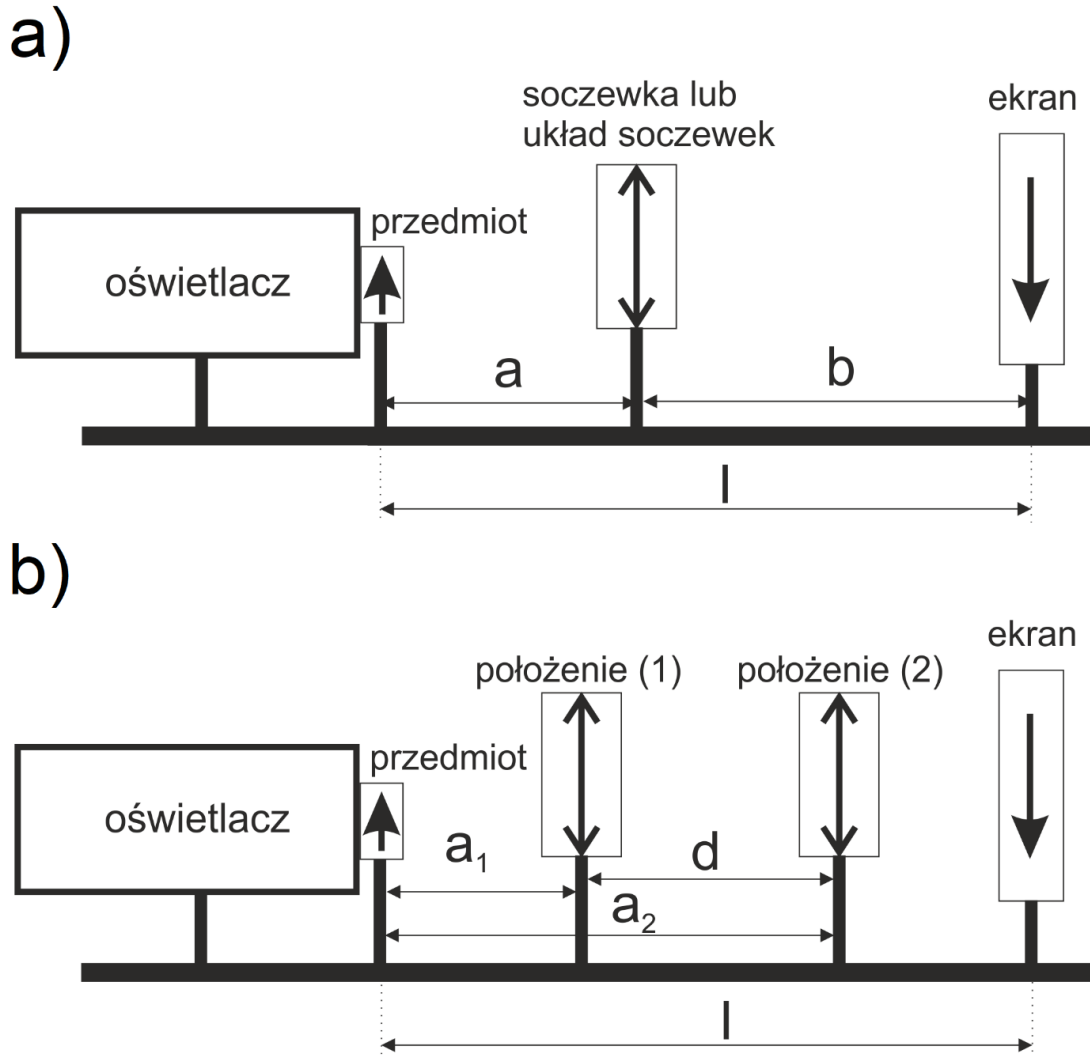


Rys. 21.3. Przykłady wad soczewek: a) aberracji sferycznej, b) aberracji chromatycznej, c) astygmatyzmu, d) komy, e) dystorsji

Układ pomiarowy

W trakcie ćwiczenia do wyznaczenia ogniskowych soczewek posłużą dwie metody – metoda bezpośrednia oraz metoda Bessela. Układ pomiarowy (rys. 21.4) złożony jest z ławy optycznej, na której zamocowany jest oświetlacz. Przy oświetlaczu

umieszczony jest uchwyt, w którym mocowany jest przedmiot oraz w przypadku badania aberracji chromatycznej – przezroczyste filtry barwne. Po drugiej stronie ławy optycznej zamontowany jest ekran. Między przedmiotem a ekranem znajduje się uchwyt do mocowania soczewek lub układu soczewek.



Rys. 21.4. Schemat układu pomiarowego do wyznaczania ogniskowych soczewek i układu soczewek w metodzie bezpośredniej (a) i Bessela (b). Opis symboli w tekście

W **metodzie bezpośredniej** (rys. 21.4a) ogniskową soczewki wyznacza się ze wzoru (21.3), przekształcając go do postaci:

$$f = \frac{a \cdot b}{a + b}. \quad (21.6)$$

Zmieniając położenie soczewki, znajduje się na ekranie ostry obraz powiększony przedmiotu umieszczonego za oświetlaczem. Notuje się odległości przedmiotu od soczewki a oraz soczewki od ekranu b .

W **metodzie Bessela** (rys. 21.4b) przy stałej odległości l przedmiotu od ekranu szuka się dwóch położen soczewki, dla których na ekranie pojawia się ostry obraz powiększony i pomniejszony. W położeniu (1) w odległości a_1 przedmiotu od soczewki uzyskiwany jest obraz powiększony, natomiast w położeniu (2) w odległości a_2 przedmiotu od soczewki uzyskiwany jest obraz pomniejszony.

Związek pomiędzy odległością przedmiotu od soczewki a oraz soczewki od ekranu b i odległością l przedmiotu od ekranu jest dany wzorem:

$$a + b = l. \quad (21.7)$$

Wyznaczając wielkość b z równania (21.3) i wstawiając ją do równania (21.7), otrzymuje się równanie kwadratowe:

$$a^2 - la + lf = 0. \quad (21.8)$$

Gdy wyróżnik tego równania jest większy od zera, to równanie (21.8) ma dwa rozwiązania: a_1 i a_2 , odpowiadające dwóm położeniom soczewki odpowiednio dla obrazu powiększonego i pomniejszonego:

$$a_1 = \frac{l - \sqrt{l^2 - 4lf}}{2}, \quad a_2 = \frac{l + \sqrt{l^2 - 4lf}}{2}. \quad (21.9)$$

Różnica odległości d obu położen soczewki jest równa:

$$d = a_2 - a_1 = \sqrt{l^2 - 4lf}. \quad (21.10)$$

Po przekształceniu wzoru (21.10) otrzymujemy wzór na ogniskową soczewki w metodzie Bessela:

$$f = \frac{l^2 - d^2}{4l}. \quad (21.11)$$

Powyższe metody służą do wyznaczenia ogniskowej soczewki skupiającej. W przypadku soczewki rozpraszającej powstały obraz jest pozorny, a więc nie da się go zobaczyć na ekranie. Można temu zaradzić, zestawiając soczewkę rozpraszającą wraz z soczewką skupiającą w układ optyczny soczewek. Ogniskową takiego układu soczewek można wyznaczyć za pomocą równania:

$$\frac{1}{f_U} = \frac{1}{f_S} + \frac{1}{f_R}, \quad (21.12)$$

gdzie f_U , f_S i f_R oznaczają odpowiednio ogniskową: układu soczewek, soczewki skupiającej i soczewki rozpraszającej. Do wyznaczenia ogniskowej układu soczewek można posłużyć się przedstawionymi powyżej metodami. Po wyznaczeniu ogniskowej układu soczewek f_U oraz ogniskowej soczewki skupiającej f_S przekształca się wzór (21.12) i wyznacza ogniskową soczewki rozpraszającej f_R :

$$f_R = \frac{f_U \cdot f_S}{f_S - f_U}. \quad (21.13)$$

Przebieg ćwiczenia

Wyznaczanie ogniskowej soczewki skupiającej i układu soczewek metodą bezpośrednią:

1. W uchwycie przy oświetlaczu ustawić przedmiot w postaci strzałki (rys. 21.4a) i włączyć oświetlacz. Soczewkę skupiającą zamocować w uchwycie na ławie optycznej. W pewnej odległości od przedmiotu ustawić ekran.
2. Przesuwając uchwyt z soczewką, znaleźć na ekranie ostry powiększony obraz przedmiotu. Zanotować odległości a i b przedmiotu i obrazu od soczewki.
3. Pomiary z punktu 2. powtórzyć dla 5 różnych odległości ekranu od przedmiotu.
4. W uchwycie na ławie optycznej zamocować układ składający się z soczewki skupiającej, którą badano w punkcie 2., i soczewki rozpraszającej.
5. Dla układu soczewek powtórzyć pomiary z punktów 2. i 3. Zanotować dokładności przyrządów pomiarowych.

Wyznaczanie ogniskowej soczewki skupiającej i układu soczewek metodą Bessela:

6. Na jednym końcu ławy umieścić oświetlony przedmiot, a na drugim ekran. Zanotować odległość l między ekranem i przedmiotem (rys. 21.4b).
7. Soczewkę skupiającą, zamocowaną w uchwycie na ławie optycznej, przesuwać do chwili uzyskania na ekranie ostrego obrazu powiększonego. Zanotować odległość a_1 soczewki od przedmiotu.
8. Przesuwać soczewkę w stronę ekranu aż do otrzymania na ekranie ostrego obrazu pomniejszonego. Zanotować odległość a_2 soczewki od przedmiotu.
9. Pomiary z punktów 6. – 8. wykonać dla 5 różnych odległości l ekranu od przedmiotu.
10. W uchwycie na ławie optycznej zamocować układ składający się z soczewki skupiającej, którą badano w punktach 6. – 9., i soczewki rozpraszającej. Zanotować odległość l między ekranem i przedmiotem.
11. Dla układu soczewek powtórzyć pomiary z punktów 7. – 9.

Badanie aberracji chromatycznej:

12. Nałożyć filtr czerwony na oświetlony przedmiot (rys. 21.4a). W pewnej odległości od przedmiotu ustawić ekran. Soczewkę skupiającą zamocować na ławie optycznej. Przesuwając uchwyt z soczewką, znaleźć na ekranie ostry powiększony obraz przedmiotu. Zanotować odległości a i b przedmiotu i obrazu od soczewki.
13. Pomiary z punktu 12. powtórzyć dla 5 różnych odległości ekranu od przedmiotu.
14. Pomiary z punktu 12. – 13. powtórzyć dla filtru fioletowego.

Opracowanie wyników

Wyznaczanie ogniskowej soczewki skupiającej, układu soczewek i soczewki rozpraszającej metodą bezpośrednią:

1. Na podstawie zmierzonych w punktach 2. – 3. przebiegu ćwiczenia wartości a i b wyznaczyć, dla 5 położenia ekranu, wartości ogniskowej badanej soczewki skupiającej, korzystając z równania (21.6). Metodą propagacji niepewności obliczyć niepewność ogniskowej f_s soczewki skupiającej.
2. Obliczyć wartość średnią ogniskowej f_s soczewki skupiającej i jej niepewność. Zapisać wynik końcowy zgodnie z normami.

3. Obliczyć, dla zmierzonych w punkcie 5. wielkości a i b , ogniskowe f_U układu soczewek, korzystając z równania (21.6). Metodą propagacji niepewności obliczyć niepewność ogniskowej układu soczewek f_U .
4. Obliczyć wartość średnią ogniskowej układu soczewek f_U oraz jej niepewność. Zapisać wynik końcowy zgodnie z normami.
5. Na podstawie wzoru (21.13) obliczyć ogniskową f_R soczewki rozpraszającej, podstawiając za f_S wartość średnią ogniskowej soczewki skupiającej obliczoną w punkcie 2. opracowania wyników, a za f_U wartość średnią ogniskowej układu soczewek obliczoną w punkcie 4. opracowania wyników. Metodą propagacji niepewności obliczyć niepewność ogniskowej soczewki rozpraszającej f_R i zapisać wynik końcowy zgodnie z normami.

Wyznaczanie ogniskowej soczewki skupiającej, układu soczewek i soczewki rozpraszającej metodą Bessela:

6. Na podstawie pomiarów wykonanych w punktach 7. – 9. przebiegu ćwiczenia obliczyć różnicę d położen badanej soczewki skupiającej, korzystając ze wzoru (21.10) dla wszystkich odległości l .
7. Na podstawie wzoru (21.11) obliczyć ogniskową f_S soczewki skupiającej dla każdej zmierzonej odległości l , następnie obliczyć ich wartość średnią oraz niepewność i zapisać wynik końcowy zgodnie z normami. Za pomocą testu zgodności porównać wartości ogniskowej f_S otrzymane metodą bezpośrednią (punkt 2. opracowania wyników) i metodą Bessela.
8. Na podstawie pomiarów wykonanych w punkcie 11. przebiegu ćwiczenia obliczyć różnicę d położen układu soczewek, korzystając ze wzoru (21.10), dla wszystkich odległości l .
9. Na podstawie wzoru (21.11) obliczyć ogniskową f_U układu soczewek dla wszystkich odległości l . Następnie obliczyć ich wartość średnią oraz niepewność i zapisać wynik końcowy zgodnie z normami. Za pomocą testu zgodności porównać wartości ogniskowych układu soczewek f_U otrzymane metodą bezpośrednią (punkt 4. opracowania wyników) i metodą Bessela.
10. Na podstawie wzoru (21.13) obliczyć ogniskową f_R soczewki rozpraszającej oraz jej niepewność metodą propagacji niepewności. Za f_S podstawić wartość średnią ogniskowej soczewki skupiającej obliczoną w punkcie 7. opracowania wyników, a za f_U wartość średnią ogniskowej układu soczewek obliczoną w punkcie 9. opracowania wyników. Zapisać wynik końcowy zgodnie z normami. Za pomocą

testu zgodności porównać wartości ogniskowej soczewki rozpraszającej f_R otrzymane metodą bezpośrednią (punkt 5. opracowania wyników) i metodą Bessela.

Wyznaczanie aberracji chromatycznej:

11. Na podstawie równania (21.6) obliczyć wartości ogniskowych f_c i f_f dla pomiarów wykonanych w punktach 12.-14. przebiegu ćwiczenia. Obliczyć wartości średnie ogniskowych f_c i f_f oraz ich niepewności.
12. Na podstawie równania (21.5) obliczyć miarę aberracji chromatycznej oraz jej niepewność metodą propagacji niepewności. Zapisać wynik końcowy zgodnie z normami.

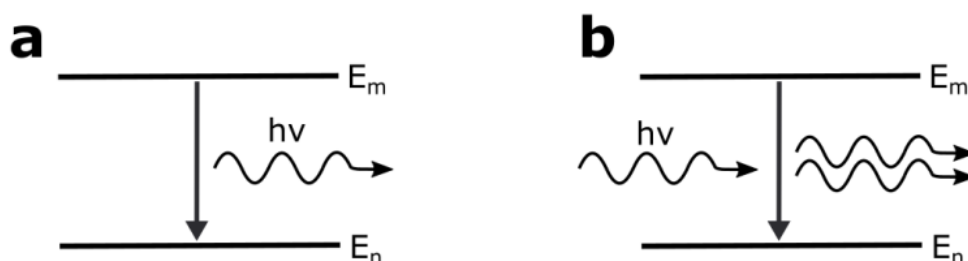
22. WYZNACZANIE SZEROKOŚCI SZCZELINY I STAŁYCH SIATEK DYFRAKCYJNYCH Z BADAŃ DYFRAKCJI PROMIENIOWANIA LASEROWEGO

Spontaniczna i wymuszona emisja światła

Teoria Bohra budowy atomu przewiduje, że elektrony w atomie mają ściśle określone poziomy energetyczne. W wyniku samoistnego przejścia elektronu ze stanu wzbudzonego (o wyższej energii E_m) do stanu podstawowego (o niższej energii E_n) dochodzi do emisji kwantu promieniowania elektromagnetycznego (rys. 22.1a) o energii:

$$h\nu = E_m - E_n, \quad (22.1)$$

gdzie: h oznacza stałą Plancka, a ν częstotliwość fali promieniowania elektromagnetycznego. Mówimy wtedy o tzw. spontanicznej emisji światła, a wyemitowane fale elektromagnetyczne są niespójne. Falami spójnymi (koherentnymi) nazywamy takie fale, które mają stałą różnicę faz w czasie i przestrzeni. Aby taka sytuacja mogła zaistnieć, obie fale muszą mieć taką samą długość fali (promieniowanie monochromatyczne).



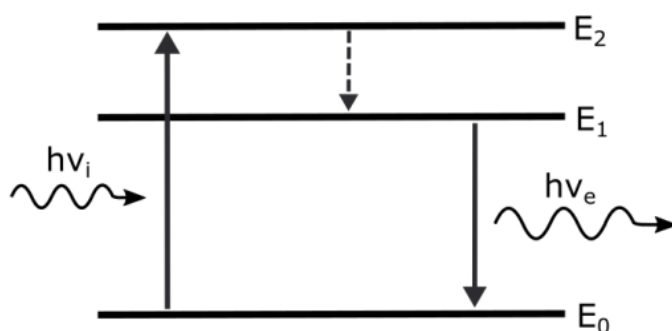
Rys. 22.1. Schemat przedstawiający (a) spontaniczną oraz (b) wymuszoną emisję światła

Z wymuszoną emisją światła (rys. 22.1b) mamy do czynienia wtedy, gdy na wzbudzony atom o energii E_m pada kwant o energii $h\nu$ i wymusza jego przejście na poziom o niższej energii E_n . W efekcie tego przejścia zostaje wyemitowany kolejny/drugi kwant o takiej samej energii $h\nu$ jak kwant wymuszający. W wyniku emisji wymuszonej światła powstaje promieniowanie spójne. Charakteryzuje się ono tym, że ma tę samą częstotliwość, fazę, kierunek i polaryzację co promieniowanie wymuszające.

Laser – zasada działania

Laser to urządzenie, które emituje spójne promieniowanie elektromagnetyczne o praktycznie dowolnej długości fali (najczęściej z zakresu ultrafioletu, światła widzialnego lub podczerwieni) w wyniku zjawiska emisji wymuszonej. Nazwa „laser” jest akronimem angielskiej nazwy „Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation”, oznaczającej „wzmocnienie światła przez wymuszoną emisję promieniowania”. Warunkami koniecznymi do zaistnienia akcji laserowej są:

- inwersja obsadzeń stanów energetycznych,
- duża gęstość promieniowania wywołującego emisję wymuszoną.



Rys. 22.2. Schemat trzech poziomów energetycznych przedstawiający emisję promieniowania laserowego (użyto następujących oznaczeń: E_0 – energia molekuł w stanie podstawowym, E_1 – energia molekuł w stanie metatrwałym, E_2 – energia molekuł w stanie wzbudzonym („krótkożyciowym”), $h\nu_i$ – energia padającego fotonu wymuszającego, $h\nu_e$ – energia wyemitowanego fotonu)

Pierwszy z wymienionych powyżej warunków oznacza stan układu, w którym liczba molekuł substancji czynnej w stanie wzbudzonym przeważa nad liczbą molekuł w stanie podstawowym. Stan taki można uzyskać w trzy- (rys. 22.2) lub

czteropoziomowym układzie stanów energetycznych. Wtedy przejścia wymuszone przeważają nad spontanicznymi. Warunek ten uzyskać można za pomocą tzw. pompowania (rys. 22.2). Pompowanie można zrealizować na wiele sposobów, np. przez wykorzystanie pracy wykonanej przez pole elektryczne (pompowanie elektryczne) lub energii fotonów tzw. promieniowania pompującego (pompowanie optyczne). W wyniku pompowania molekuly substancji czynnej wzbudzone są do stanu o energii E_2 , w którym przebywają bardzo krótko (ok. $1 \div 10$ ns). Następnie molekuly przechodzą do tzw. stanu metatrwałego o energii E_1 , w którym znajdują się znacznie dłużej (kilka ms). Inwersja obsadzeń stanów energetycznych występuje wtedy, gdy w stanie metatrwałym gromadzi się więcej molekuł niż na poziomie podstawowym o energii E_0 . Padające promieniowanie o energii $h\nu_i$ wymusza przejścia molekuł ze stanu metatrwałego do stanu podstawowego (rys. 22.2). W rezultacie dochodzi do wyemitowania wielu fotonów naraz o takiej samej energii $h\nu_e$, fazie i poruszających się w tym samym kierunku. Drugi z ww. warunków uzyskania akcji laserowej uzyskuje się przez zastosowanie interferometru (zwanego także rezonatorem) Fabry-Perota. Urządzenie to składa się z pary równoległych zwierciadeł, z których jedno całkowicie odbija, a drugie częściowo przepuszcza (2-5%) promieniowanie elektromagnetyczne. Fale elektromagnetyczne, które przemieszczają się w kierunku prostopadłym do powierzchni zwierciadeł rezonatora, ulegają wielokrotnym odbiciom. Jeżeli odległość między zwierciadłami jest równa całkowitej wielokrotności połowy długości odbijającej się między nimi fali elektromagnetycznej, to w efekcie powstaje fala stojąca i następuje znaczne zwiększenie gęstości energii w rozpatrywanym układzie.

Istnieje wiele rodzajów laserów, m.in. lasery na ciele stałym, molekularne, półprzewodnikowe. Jednakże fizyczna zasada działania jest taka sama i wymaga spełnienia warunków, które opisane zostały powyżej.

Dyfrakcja światła na szczelinie

Gdy fala świetlna przechodzi przez szczelinę lub otwór, następuje odchylenie kierunku jej rozchodzenia się od pierwotnego kierunku propagacji, co nazywamy zjawiskiem dyfrakcji. Warunkiem koniecznym, aby zaszła dyfrakcja, jest to, aby rozmiar szczeliny lub otworu był porównywalny z długością fali padającego światła.

Na ekranie ustawionym za przeszkodą lub otworem powstaje układ maksimów i minimów natężenia światła, które postrzegane są przez obserwatora jako zestaw jasnych i ciemnych prążków. Taki obraz jest efektem zjawiska interferencji światła, które polega na nakładaniu się fal i powoduje zmianę amplitudy fali wypadkowej. Interferencja fal może zajść jedynie wtedy, gdy są one monochromatyczne i spójne. Jasny prążek występuje wtedy, gdy różnica dróg Δr fal interferujących w punkcie P na ekranie (rys. 22.3) jest równa całkowitej wielokrotności długości fali:

$$\Delta r = m \cdot \lambda , \quad (22.2)$$

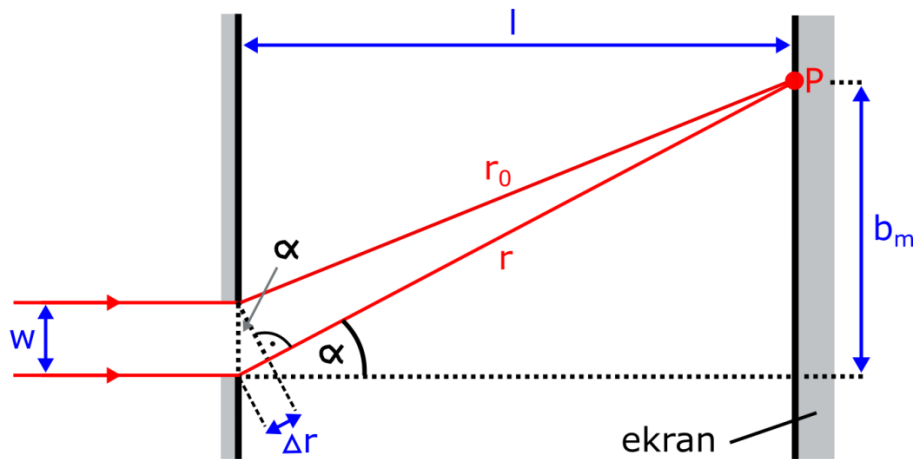
gdzie: $m = 0, 1, 2, \dots$ jest numerem prążka dyfrakcyjnego (inaczej rząd prążka), λ to długość fali, która pada na szczelinę. Na podstawie rys. 22.3 można z łatwością pokazać, że zachodzi zależność:

$$\Delta r = w \cdot \sin \alpha = w \frac{b_m}{\sqrt{b_m^2 + l^2}}, \quad (22.3)$$

gdzie: w oznacza szerokość szczeliny, α to kąt ugięcia fali świetlnej, pod jakim propaguje m -ty promień ugięty na szczelinie, b_m jest odległością prążka dyfrakcyjnego rzędu m od prążka zerowego rzędu (punkt P na rys. 22.3) , l oznacza odległość ekranu od szczeliny. Zestawienie wzorów (22.2) i (22.3) prowadzi do następującej zależności:

$$m \cdot \lambda = w \frac{b_m}{\sqrt{b_m^2 + l^2}}, \quad (22.4)$$

determinującej warunek na wzmocnienie w danym punkcie ekranu.



Rys. 22.3. Schemat ilustrujący dyfrakcję światła na szczeliny (w – szerokość szczeliny, α – kąt ugięcia fali, r_0 , r – droga pokonana przez fale świetlne, Δr – różnica dróg pokonanych przez fale, l – odległość szczeliny od ekranu, P – punkt, w którym interferują fale świetlne)

Dyfrakcja światła na siatce dyfrakcyjnej

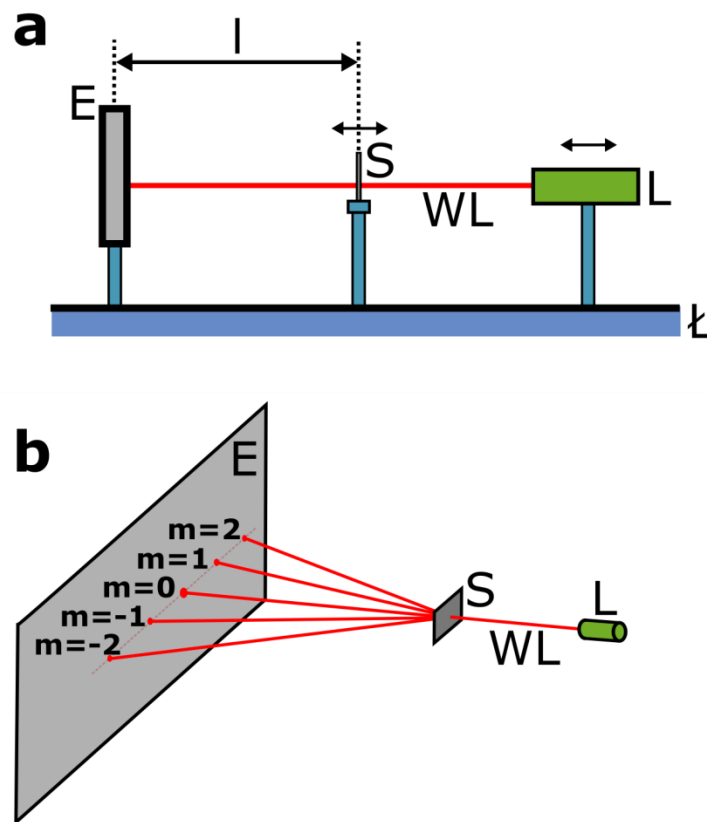
Siatka dyfrakcyjna jest to płytką z przezroczystego materiału, na której wykonano w jednakowych odstępach rysy nieprzepuszczające światła. Przechodzi ono natomiast pomiędzy rysami, spełniającymi funkcję szczelin. Odległość pomiędzy dwiema najbliższymi rysami jest porównywalna z długością λ padającej fali. Stała siatki dyfrakcyjnej jest zdefiniowana jako odległość d środków sąsiednich szczelin. Na każdej z tych szczelin zachodzi zjawisko dyfrakcji światła, dlatego dla opisu zjawiska dyfrakcji światła na siatce dyfrakcyjnej zaadaptować można wzór (22.4):

$$m \cdot \lambda = d \cdot \sin \theta_m = d \frac{b_m}{\sqrt{b_m^2 + l^2}}, \quad (22.5)$$

przy czym: θ_m oznacza tutaj kąt ugięcia fali świetlnej, pod jakim propaguje m -ty promień ugięty na siatce dyfrakcyjnej, a d jest stałą siatki dyfrakcyjnej. Zgodnie ze wzorem (22.5) iloczyn rzędu prążka dyfrakcyjnego i długości fali $m\lambda$ jest liniową funkcją sinusa kąta ugięcia fali $b_m/\sqrt{b_m^2 + l^2}$. Fakt ten można wykorzystać do eksperymentalnego wyznaczenia stałej siatki d .

Schemat układu pomiarowego

Układ pomiarowy, wykorzystany w ćwiczeniu (rys. 22.4a), składa się ze źródła światła, tj. lasera (L), ławy optycznej (\mathcal{L}) i ekranu (E). Szczelina lub siatka dyfrakcyjna (S) umieszczona zostaje w odpowiednim uchwycie, który z kolei montowany jest na ławie optycznej. Położenie zarówno lasera, jak i szczeliny (lub siatki dyfrakcyjnej) można regulować w szerokim zakresie. Po skierowaniu wiązki lasera (WL) na szczelinę (lub siatkę dyfrakcyjną) obserwowany jest układ prążków dyfrakcyjnych na ekranie (rys. 22.4b).



Rys. 22.4. Układ pomiarowy (a) oraz przykładowy obraz prążków dyfrakcyjnych (b) obserwowany na ekranie. Opis oznaczeń użytych na rysunku znajduje się w tekście

Przebieg ćwiczenia

1. Zestawić układ pomiarowy zgodnie z rys. 22.4. Umieścić laser (L) w odpowiednim uchwycie zamocowanym na ławie optycznej (\mathcal{L}). Umieścić wskazaną przez prowadzącego ćwiczenie szczelinę (S) w uchwycie. Zmierzyć odległość l szczeliny od ekranu (E). Włączyć laser.

2. Zanotować położenia x_m wszystkich widocznych prążków dyfrakcyjnych na skali ekranu. Pamiętać, aby zarejestrować położenie prążka zerowego rzędu ($m=0$), a także położenia prążków po prawej oraz lewej stronie od prążka zerowego rzędu.
3. Pomiary, opisane w punkcie powyżej, wykonać dla trzech (lub więcej) różnych odległości l wskazanych przez prowadzącego ćwiczenie.
4. Zamiast szczeliny umieścić w uchwycie siatkę dyfrakcyjną wskazaną przez prowadzącego ćwiczenie. Przeprowadzić pomiary opisane w punktach 2. i 3.

Uwaga (!): ze względów bezpieczeństwa nie należy patrzeć bezpośrednio w wiązkę światła emitowaną przez laser.

Opracowanie wyników

1. Obliczyć odległości $b_m = x_m - x_0$ poszczególnych prążków dyfrakcyjnych od prążka zerowego rzędu, gdzie x_m oznacza położenie prążka m -tego rzędu, a x_0 położenie prążka zerowego rzędu.
2. Uśrednić wartość b_m , wykorzystując wyznaczone wartości dla lewej i prawej strony. Obliczenia wykonać przy danej odległości l .
3. Korzystając z odległości l oraz średnich wartości b_m , obliczonych w powyższym punkcie, sporządzić wykres zależności iloczynu rzędu prążka dyfrakcyjnego i długości fali ($m\lambda$) od sinusa kąta ugięcia fali ($b_m/\sqrt{b_m^2 + l^2}$). Do obliczeń przyjąć długość fali światła czerwonego $\lambda = 654,5(50)$ nm.
4. Korzystając z metody najmniejszych kwadratów, dopasować prostą typu $y = A \cdot x + B$ do danych na wykresie sporządzonym w poprzednim punkcie. Podać wartości współczynników A i B wraz z ich niepewnościami, a także jednostkami.
5. Powtórzyć czynności opisane w punktach 3. i 4. dla wszystkich zmierzonych odległości l .
6. Wyznaczyć szerokość szczeliny wraz z niepewnością oraz stałą siatki dyfrakcyjnej wraz z niepewnością. W tym celu należy uśrednić wartości współczynników A , stosując odpowiedni wzór na średnią ważoną uwzględniający niepewności $u(A)$. Poprawnie zapisać wyniki końcowe.
7. Przeprowadzić dyskusję uzyskanych wyników. Przedstawić wnioski.
8. Obliczenia według punktów od 1. do 7. należy osobno przeprowadzić dla badanej szczeliny i osobno dla siatki dyfrakcyjnej.

23. BADANIE ZJAWISKA ROTACJI OPTYCZNEJ W WARUNKACH NATURALNEJ I WYMUSZONEJ AKTYWNOŚCI OPTYCZNEJ

Fale elektromagnetyczne

Światło widzialne są to fale elektromagnetyczne (e-m) o długości fali w zakresie 380-780 nm. Zgodnie z równaniami Maxwella zmienne pole magnetyczne indukuje zmienne pole elektryczne i na odwrót:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad - \text{prawo Gaussa dla pola elektrycznego}, \quad (23.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad - \text{prawo Gaussa dla pola magnetycznego}, \quad (23.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad - \text{prawo Faradaya}, \quad (23.3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad - \text{prawo Ampera}, \quad (23.4)$$

gdzie: \vec{D} – wektor indukcji pola elektrycznego, \vec{B} – wektor indukcji pola magnetycznego, \vec{E} – wektor natężenia pola elektrycznego, \vec{H} – wektor natężenia pola magnetycznego, ρ – gęstość ładunków elektrycznych, \vec{j} – wektor gęstości prądu elektrycznego, t – czas. Symbole $\nabla \cdot$ i $\nabla \times$ oznaczają odpowiednio operatory dywergencji i rotacji działające na odpowiednie pola wektorowe. Równania te są uzupełniane przez dwa tzw. równania materiałowe, opisujące zależność między wektorem indukcji pola elektrycznego i wektorem natężenia pola elektrycznego oraz wektorem indukcji pola magnetycznego i wektorem natężenia pola magnetycznego:

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (23.5)$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad (23.6)$$

gdzie: $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m przenikalność elektryczna próżni, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m – przenikalność magnetyczna próżni, ϵ – względna przenikalność elektryczna ośrodka, μ – względna przenikalność magnetyczna ośrodka. Wartość przenikalności względnej wskazuje, ile razy przenikalność ośrodka jest większa od przenikalności próżni. W przypadku próżni, gdzie nie ma ładunków elektrycznych, równania (23.1) – (23.6) przyjmują postać:

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0, \quad (23.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (23.8)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (23.9)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (23.10)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \quad (23.11)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}. \quad (23.12)$$

Z powyższych równań wynika, że wektory natężenia pola elektrycznego i magnetycznego są do siebie zawsze prostopadłe. Podstawiając równanie (23.12) do prawej strony równania (23.9) oraz równanie (23.11) do prawej strony równania (23.10), a następnie działając operatorem rotacji $\nabla \times$ na równania (23.9) i (23.10) oraz uwzględniając, że dla dowolnego pola wektorowego \vec{W} spełniona jest zależność $\nabla \times (\nabla \times \vec{W}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{W}) - \Delta \vec{W}$, otrzymujemy równania:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial(\nabla \times \vec{H})}{\partial t}, \quad (23.13)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \Delta \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial(\nabla \times \vec{E})}{\partial t}, \quad (23.14)$$

gdzie Δ – operator Laplace’a. Zwróćmy uwagę, że na podstawie zależności (23.7) i (23.11) wartość $\nabla \cdot \vec{E}$ w równaniu (23.13) jest równa 0. Podobnie na podstawie zależności (23.8) i (23.12) wartość $\nabla \cdot \vec{H}$ w równaniu (23.14) jest równa 0. Uwzględniając po prawej stronie równania (23.13) zależności (23.10) i (23.11) oraz po

prawej stronie równania (23.14) zależności (23.9) i (23.12), otrzymujemy ostatecznie równania:

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (23.15)$$

$$\Delta \vec{H} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (23.16)$$

Zauważmy, że równania (23.15) i (23.16) mają tę samą postać co równanie falowe:

$$\Delta \Psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0, \quad (23.17)$$

gdzie v to prędkość fazowa, z jaką propaguje się fala. Z równań (23.15) i (23.16) wynika, że w przypadku fali e-m propagującej się w próżni prędkość ta jest dana wzorem:

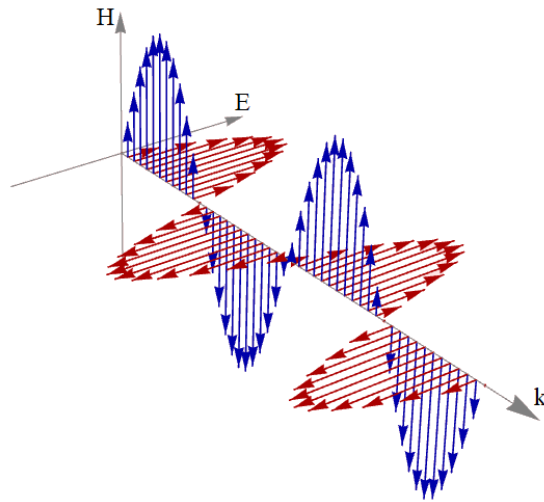
$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}. \quad (23.18)$$

Rozwiązaniami równań falowych (23.15) i (23.16) są odpowiednio funkcje postaci:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha), \quad (23.19)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = H_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \beta), \quad (23.20)$$

gdzie $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ to częstość kołowa fali e-m, a \vec{k} to wektor falowy określający kierunek propagacji fali, którego długość wynosi $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, gdzie λ – długość fali, E_0 , H_0 – amplitudy pól odpowiednio elektrycznego i magnetycznego, \vec{r} – wektor położenia, α , β – fazy początkowe. Zauważmy, że faza drgań obu pól zależy zarówno od czasu, jak i położenia w przestrzeni. Fale e-m są to rozchodzące się w przestrzeni zaburzenia wzajemnie prostopadłych pól elektrycznego i magnetycznego. Rysunek 23.1 przedstawia falę e-m.



Rys. 23.1. Przykład fali e-m jako rozchodzącego się w przestrzeni zaburzenia pól elektrycznego i magnetycznego

Rozważmy rozchodzenie się zaburzeń pola elektrycznego w określonym kierunku prostokątnego układu współrzędnych, np. wzdłuż osi z . Z równań Maxwella wynika, że będzie mu towarzyszyło pole magnetyczne skierowane prostopadle do pola elektrycznego i kierunku propagacji. Załóżmy, że kierunek drgań pola elektrycznego pokrywa się z osią x , wówczas kierunek drgań pola magnetycznego będzie pokrywał się z osią y . Wektory \vec{E} i \vec{H} będą miały wtedy współrzędne: $\vec{E} = [E_0, 0, 0]$ i $\vec{H} = [0, H_0, 0]$. W związku z tym równania falowe (23.15) i (23.16) przyjmą postać:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (23.21)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0, \quad (23.22)$$

a ich rozwiązania (23.19) i (23.20) będą miały postać:

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}z + \alpha), \quad (23.23)$$

$$\vec{H}(z, t) = H_0 \cos(\omega t - \vec{k}z + \beta). \quad (23.24)$$

Polaryzacja fali elektromagnetycznej

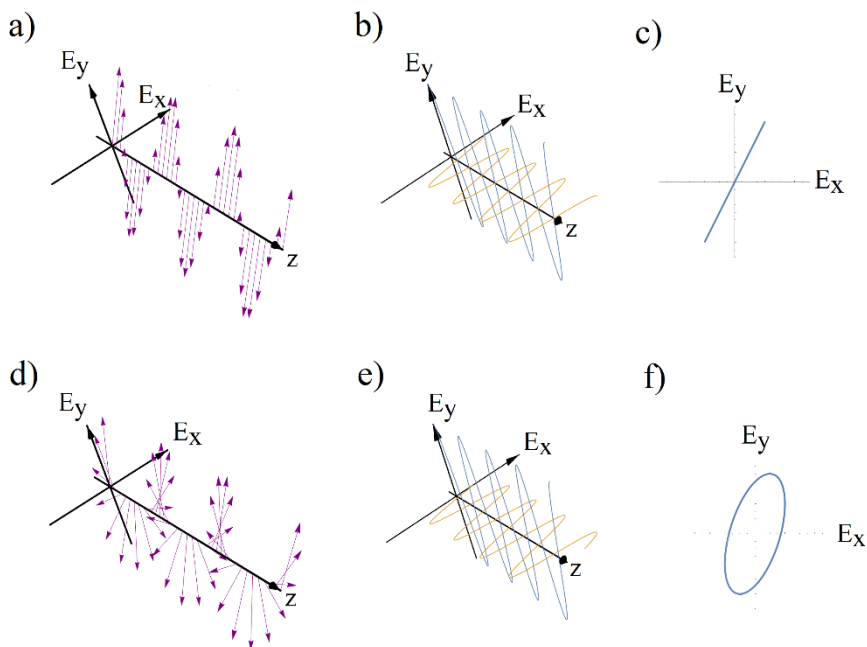
Płaszczyzna wyznaczona przez kierunek drgań wektora natężenia pola elektrycznego \vec{E} fali e-m i kierunek wektora falowego \vec{k} określa płaszczyznę polaryzacji światła. Zajmijmy się więc teraz wyłącznie wektorem natężenia pola elektrycznego, pamiętając, że wektor natężenia pola magnetycznego jest do niego zawsze prostopadły.

Zostańmy przy podanym wcześniej przykładzie, w którym fala propaguje się w kierunku osi z prostokątnego układu współrzędnych. W ogólnym przypadku wektor natężenia pola elektrycznego fali e-m (23.23) można rozłożyć na składowe wzdłuż osi x i y :

$$\vec{E}_x(z, t) = E_{0x} \cos(\omega t - \vec{k}z), \quad (23.25)$$

$$\vec{E}_y(z, t) = E_{0y} \cos(\omega t - \vec{k}z + \Delta\alpha), \quad (23.26)$$

gdzie $\Delta\alpha$ to przesunięcie fazowe między składowymi \vec{E}_x i \vec{E}_y wektora \vec{E} . Sytuację taką przedstawiono na rys. 23.2.



Rys. 23.2. a) Wektor natężenia pola elektrycznego fali e-m spolaryzowanej liniowo, b) jego składowe na kierunku x i y oraz c) prosta powstała z jego rzutów na płaszczyznę xy . d) Wektor natężenia pola elektrycznego fali e-m spolaryzowanej eliptycznie, e) jego składowe na kierunku x i y oraz f) krzywa zakreślona przez jego końce zrzutowane na płaszczyznę xy

Założmy, że drgania wektora natężenia pola elektrycznego są ustawione jak na rys. 23.2a. Można je rozłożyć na składowe wzdłuż osi x i y jak na rys 2b. Przesunięcie fazowe $\Delta\alpha$ między składowymi \vec{E}_x i \vec{E}_y jest równe 0. Rzut wektora \vec{E} na płaszczyznę xy przybierze kształt prostej pokazany na rys. 23.2c. Podobna sytuacja wystąpi, gdy $\Delta\alpha=\pi$. Mówimy wówczas o liniowej polaryzacji fali e-m.

W przypadku gdy drgania wektora natężenia pola elektrycznego mają kształt jak na rys. 23.2d, można je rozłożyć jak na rys 23.2e. Przesunięcie fazowe $\Delta\alpha$ między składowymi \vec{E}_x i \vec{E}_y jest w przypadku z rys. 23.2d równe $\pi/3$. Rzut wektora \vec{E} na płaszczyznę xy przybierze kształt elipsy pokazany na rys. 23.2f. Mówimy wówczas o eliptycznej polaryzacji fali e-m. W szczególności gdy $|\vec{E}_x| = |\vec{E}_y|$ oraz $\Delta\alpha$ jest równe $\pi/2$ lub $3\pi/2$, elipsa ta przybierze kształt okręgu. Wówczas światło jest spolaryzowane kołowo. Gdy koniec wektora \vec{E} , patrząc w kierunku źródła światła, obiega krzywą w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, mówimy, że światło jest spolaryzowane prawoskrętnie, jeżeli kierunek obiegu jest przeciwny, mówimy o polaryzacji lewoskrętnej. Warto zauważyć, że polaryzację liniową można otrzymać przez superpozycję dwóch fal spolaryzowanych kołowo o tej samej częstotliwości, lecz przeciwnej skrętności.

Większość źródeł światła emituje światło niespolaryzowane, czyli takie, dla którego nie można wyróżnić jednej określonej płaszczyzny, w jakiej zachodzą drgania wektora \vec{E} . Światło takie jest złożone z wielu fal o różnych płaszczyznach polaryzacji. Światło spolaryzowane o wyróżnionej płaszczyźnie drgań wektora \vec{E} ma duże znaczenie w dzisiejszych czasach. Zjawisko polaryzacji wykorzystywane jest m.in. w kinach do projekcji filmów 3D, w wyświetlaczach ciekłokrystalicznych, mikroskopii polaryzacyjnej, radioastronomii, a w przyszłości w komputerach optycznych. Bardzo ważna jest więc sama możliwość polaryzowania światła oraz odpowiednia manipulacja polaryzacją. W tym celu wykorzystuje się różne instrumenty optyczne:

- **polaryzator liniowy** – przyrząd przepuszczający składową natężenia pola elektrycznego fali e-m, tylko o ściśle określonym kierunku. W przypadku gdy polaryzator ustawiony byłby na drodze fali e-m z rys. 23.2a lub 23.2d, tak by przepuszczał jedynie składową E_y wektora natężenia pola elektrycznego, to po przejściu przez niego rzutem fali na płaszczyznę xy (rys. 23.2c, f) byłaby prosta pokrywająca się z osią y układu współrzędnych;
- **płytkę ćwierćfalową** – cienka płytka wykonana z kryształu optycznie anizotropowego, w którym prędkość rozchodzenia się fali e-m zależy od ustawienia

- kierunku drgań wektora \vec{E} względem osi kryształu. Płytkę wykonuje się tak, aby po przejściu przez nią jedna ze składowych wektora natężenia pola elektrycznego \vec{E}_x lub \vec{E}_y przesunęła się w fazie o $\Delta\alpha=\pi/2$ względem drugiej. W ten sposób ze światła spolaryzowanego liniowo uzyskuje się światło spolaryzowane kołowo i na odwrót;
- **plytkę półfalową** – zasada działania jest taka sama jak w przypadku płytki ćwierćfalowej, z tym że różnica faz między składowymi \vec{E}_x i \vec{E}_y wektora natężenia pola elektrycznego po przejściu przez nią wynosi $\Delta\alpha=\pi$. Służy ona m.in. do zmiany skrętności polaryzacji kołowej lub kierunku polaryzacji liniowej. Przykładowo, gdyby na płytkę półfalową padła fala z rys. 23.2a, to po przejściu przez nią prosta obrazująca rzut wektora \vec{E} na płaszczyznę xy (rys. 23.2c) byłaby odbita symetrycznie względem osi y układu współrzędnych;
 - **ośrodki optycznie czynne** – ośrodki, w których zachodzi stopniowe skręcenie płaszczyzny polaryzacji światła na kierunku, w którym porusza się fala e-m (rotacja optyczna).

Rotacja optyczna

Ze zjawiskiem rotacji optycznej mamy do czynienia, gdy płaszczyzna polaryzacji światła obraca się w trakcie propagacji fali e-m. Kąt obrotu płaszczyzny polaryzacji jest funkcją odległości, jaką przebywa światło w ośrodku optycznie czynnym. Jeśli płaszczyzna polaryzacji obraca się zgodnie z ruchem wskazówek zegara, patrząc w kierunku źródła światła, to ośrodek aktywny nazywamy prawoskrętnym. Przy obrocie płaszczyzny polaryzacji w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara ośrodek aktywny nazywamy lewoskrętnym. Zjawisko optyczne może zachodzić w sposób naturalny w ciałach stałych (np. kryształy kwarcu), cieczach (np. roztwory sacharozy) lub gazach (np. pary kamfory). W kryształach zdolność skręcania płaszczyzny polaryzacji światła wynika z rozmieszczenia atomów w sieci krystalicznej, natomiast w cieczach i gazach związane jest z budową cząsteczek tych substancji.

Zjawisko rotacji optycznej może być także wymuszone w niektórych substancjach w efektach magnetoptycznych, elektroptycznych, piezoptycznych i elastoptycznych. Jeśli wektor natężenia zewnętrznego pola magnetycznego \vec{H}_{zew} jest równoległy do wektora falowego \vec{k} (kierunku propagacji) fali e-m i kąt skręcenia

płaszczyzny polaryzacji jest proporcjonalny do natężenia zewnętrznego pola magnetycznego, to efekt ten nazywamy **efektem Faradaya**. Występuje on np. w kwarcu, kalcycie, bromku potasu, toluenie. W przypadku gdy kąt skręcenia płaszczyzny polaryzacji jest proporcjonalny do kwadratu natężenia zewnętrznego pola magnetycznego, efekt ten nazywamy **efektem Cottona-Moutona**. Występuje on np. w acetonie, benzenie, chloroformie. Efekty te zanikają, gdy wektor \vec{H}_{zew} jest prostopadły do wektora falowego \vec{k} . Obrót płaszczyzny polaryzacji fali e-m może być także uzyskany przez przyłożenie zewnętrznego pola elektrycznego o natężeniu \vec{E}_{zew} . Wówczas, jeżeli kąt skręcenia płaszczyzny polaryzacji jest proporcjonalny do natężenia zewnętrznego pola elektrycznego, to efekt ten nazywamy **efektem Pocklesa**. Występuje on w kryształach niemających środka symetrii (np. niobian litu, siarczek cynku, turmalin). Jeżeli kąt skręcenia płaszczyzny polaryzacji jest proporcjonalny do kwadratu natężenia zewnętrznego pola elektrycznego, to efekt ten nazywamy **efektem Kerra**. Występuje on w ośrodkach izotropowych lub mających środek symetrii, np. kryształy ADP, KDP. Zmiany własności optycznych ośrodka pojawiają się w niektórych substancjach (np. węglan wapnia, chlorek sodu, dwutlenek krzemu) pod wpływem naprężenia (**zjawisko piezooptyczne**) lub odkształcenia (**zjawisko elastoptyczne**) materiału. Zjawiska piezooptyczne i elastoptyczne określane są wspólnie jako **fotosprężystość**.

Opis matematyczny zjawiska rotacji optycznej opiera się na wspomnianej wcześniej możliwości otrzymania polaryzacji liniowej przez superpozycję dwóch fal spolaryzowanych kołowo o tej samej częstotliwości, lecz przeciwnej skrętności. W ośrodku optycznie aktywnym fale te propagują z różnymi prędkościami. Jednocześnie fala spolaryzowana kołowo prawoskrętnie, propagująca wzdłuż osi z może być opisana jako superpozycja fal spolaryzowanych liniowo w kierunkach x i y oraz przesuniętych w fazie o $\pi/2$ (patrz opis rys. 23.2). Wektory natężenia pola elektrycznego tych fal składowych (23.25), (23.26) dane są wówczas zależnościami:

$$\vec{E}_{xp}(z, t) = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}_p z), \quad (23.27)$$

$$\vec{E}_{yp}(z, t) = E_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}_p z + \frac{\pi}{2}\right). \quad (23.28)$$

Fala spolaryzowana kołowo lewoskrętnie, propagująca wzdłuż osi z może być opisana jako superpozycja fal spolaryzowanych liniowo w kierunkach x i y oraz

przesuniętych w fazie o $3\pi/2$. Wektory natężenia pola elektrycznego tych fal składowych dane są wówczas zależnościami:

$$\vec{E}_{xl}(z, t) = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}_l z), \quad (23.29)$$

$$\vec{E}_{yl}(z, t) = E_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}_l z + \frac{3}{2}\pi\right). \quad (23.30)$$

Fale te opisują propagację fali w ośrodku anizotropowym. W powyższych wzorach (23.27)-(23.30) długość wektora falowego $k_p = \frac{2\pi}{\lambda} n_p = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{c}{v_p}$ oraz $k_l = \frac{2\pi}{\lambda} n_l = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{c}{v_l}$ jest większa od długości wektora falowego w próżni (patrz opis wzoru (23.20)) o wielkość współczynnika załamania światła ($n=c/v$) w danym ośrodku. Indeksy p i l odnoszą się do fali spolaryzowanej prawo- i lewoskrętnie.

Składowe w kierunku x i y pola elektrycznego fali spolaryzowanej liniowo otrzymujemy, dodając do siebie odpowiednie fale:

$$\begin{aligned} \vec{E}_x(z, t) &= \vec{E}_{xp}(z, t) + \vec{E}_{xl}(z, t) = 2E_0 \cos\left(\frac{(\vec{k}_l - \vec{k}_p)z}{2}\right) \cos\left(\frac{2\omega t - (\vec{k}_p + \vec{k}_l)z}{2}\right) = \\ &= 2E_0 \cos\left(\frac{\pi}{\lambda}(n_l - n_p)z\right) \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{\lambda}(n_p + n_l)z\right), \end{aligned} \quad (23.31)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_y(z, t) &= \vec{E}_{yp}(z, t) + \vec{E}_{yl}(z, t) = -2E_0 \sin\left(\frac{(\vec{k}_l - \vec{k}_p)z}{2}\right) \cos\left(\frac{2\omega t - (\vec{k}_p + \vec{k}_l)z}{2}\right) = \\ &= -2E_0 \sin\left(\frac{\pi}{\lambda}(n_l - n_p)z\right) \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{\lambda}(n_p + n_l)z\right). \end{aligned} \quad (23.32)$$

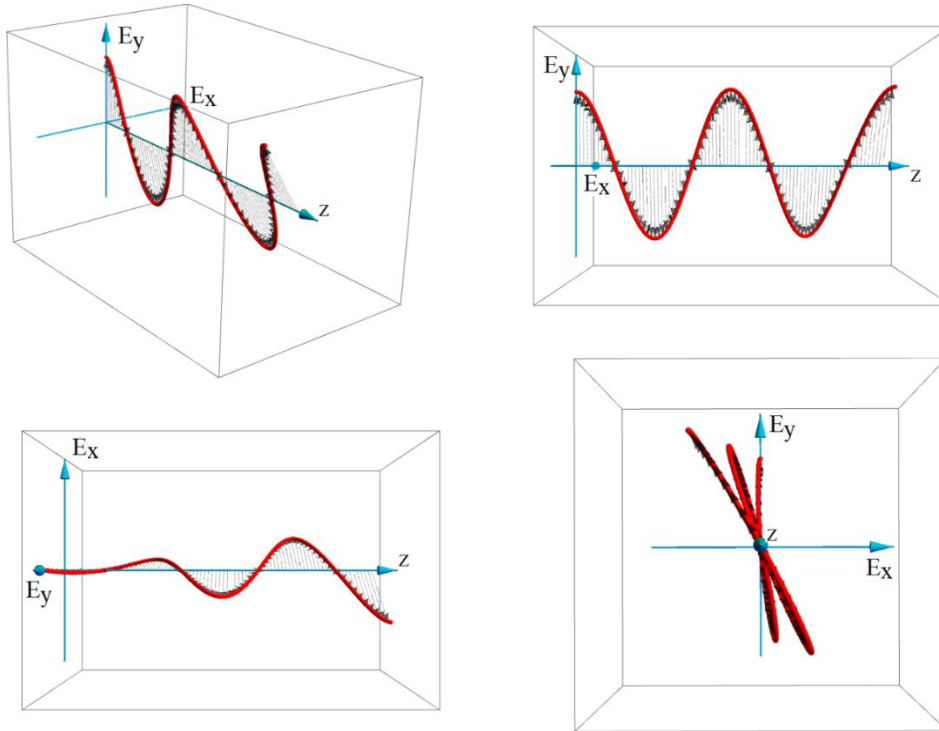
Obie składowe fali mają tę samą częstość kołową drgań ω oraz zgodne fazy $\omega t - \frac{\pi}{\lambda}(n_p + n_l)z$, lecz różne amplitudy równe odpowiednio $E_{0x} = 2E_0 \cos\left(\frac{\pi}{\lambda}(n_l - n_p)z\right)$ oraz $E_{0y} = -2E_0 \sin\left(\frac{\pi}{\lambda}(n_l - n_p)z\right)$. Amplituda drgań wektora natężenia pola elektrycznego obu fal jest więc okresową funkcją drogi przerywanej przez fale w danym ośrodku anizotropowym. Superpozycją tych dwóch fal jest fala o wartości amplitudy drgań wektora elektrycznego danej wzorem:

$$E_w = \sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} = 2E_0, \quad (23.33)$$

a kierunek drgań E_w tworzy z osią x kąt α określony wzorem:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{E_{0y}}{E_{0x}}\right) = \frac{\pi}{\lambda}(n_p - n_l)z. \quad (23.34)$$

Ze wzoru (23.34) wynika, że kąt, jaki tworzy płaszczyzna polaryzacji z osią x , jest funkcją drogi przerywanej przez fale w ośrodku optycznie aktywnym (rys. 23.3).



Rys. 23.3. Wektor natężenia pola elektrycznego fali e-m spolaryzowanej liniowo, propagującej w ośrodku optycznie czynnym i ulegającej rotacji optycznej. Rysunek przedstawia falę w przestrzeni 3D i jej rzuty na płaszczyzny układu współrzędnych

Rysunek 23.3 jest ilustracją pogładową i nie zachowuje skali, gdyż w rzeczywistości kąt skręcenia przypadający na odległość odpowiadającą jednej długości fali e-m jest znacznie mniejszy niż pokazano tutaj. Gdy $\alpha < 0$, czyli gdy $n_p < n_l$, skręcenie płaszczyzny polaryzacji następuje zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara (ośrodek prawoskrętny). W przeciwnym przypadku ośrodek jest lewoskrętny. Wartości n_p i n_l współczynników załamania zależą od wielu czynników, m.in. rozłożenia atomów w sieci krystalicznej względem kierunku propagacji fali lub budowy przestrzennej cząsteczek składających się na daną ciecz lub gaz.

W niniejszym ćwiczeniu będziemy posługiwać się empirycznym wzorem określającym kąt skręcenia płaszczyzny polaryzacji światła po przejściu drogi o długości d w roztworze o stężeniu s danej substancji aktywnej optycznie:

$$\alpha = Ksd, \quad (23.35)$$

gdzie K oznacza tzw. właściwą zdolność skręcania, określającą wartość kąta skręcenia płaszczyzny polaryzacji po przejściu jednostkowej grubości warstwy roztworu o jednostkowym stężeniu. Wartość współczynnika K zależy od rodzaju roztworu, ale wykazuje także silną zależność dyspersyjną (od długości fali światła).

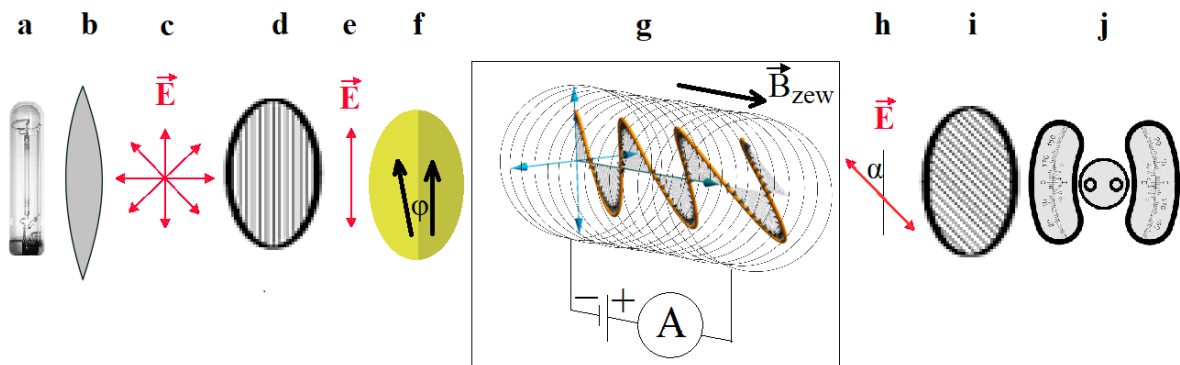
W przypadku zjawiska Faradaya kąt skręcenia płaszczyzny polaryzacji światła po przejściu drogi o długości d w zewnętrznym polu magnetycznym o indukcji B_{zew} opisuje empiryczny wzór:

$$\alpha = VB_{zew}d, \quad (23.36)$$

gdzie V – stała Verdet. Wartość stałej Verdet zależy od rodzaju substancji, jej temperatury oraz długości fali światła. Kierunek skręcenia płaszczyzny polaryzacji zależy od zwrotu wektora indukcji pola magnetycznego.

Układ pomiarowy

Do pomiaru skręcenia płaszczyzny polaryzacji światła służy polarymetr. Jego zasadę działania i schemat budowy przedstawiono na rys. 23.4.



Rys. 23.4. Zasada działania i schemat ideowy polarymetru. Opis symboli w tekście

Światło monochromatyczne (tzw. dublet sodowy $\lambda=589$ nm) jest emitowane z lampy sodowej (a). Promienie światła po przejściu przez soczewkę (b) biegną równoległe do osi polarymetru. Światło to jest niespolaryzowane, a więc wektory natężenia pola elektrycznego fali e-m drgają w różnych kierunkach (c). Następnie światło to pada na polaryzator liniowy (d). Przepuszcza on jedynie światło o ściśle określonym kierunku drgań wektora natężenia pola elektrycznego (e). Po przejściu przez niego światło jest już spolaryzowane liniowo i pada na przyrząd półcieniowy (f). Dzieli on pole widzenia na dwie części, skręcając nieco płaszczyznę polaryzacji światła w jednej z nich. Za przyrządem półcieniowym płaszczyziny polaryzacji poszczególnych części wiązki światła tworzą ze sobą niewielki kąt φ . Następnie przy nieobecności ośrodka optycznie czynnego (g) analizator (i) ustawia się tak, by zanikła granica między obszarami. Wówczas płaszczyzna polaryzacji analizatora jest dwusieczną kąta φ . Po wprowadzeniu ośrodka optycznie czynnego (g) płaszczyzna polaryzacji światła ulega skręceniu (h) w tym samym kierunku i o taki sam kąt w obydwu częściach pola widzenia. W celu ponownego uzyskania jednorodności oświetlenia całego pola widzenia analizator skręca się o kąt α równy katowi skręcenia płaszczyzny polaryzacji. Kąt ten odczytujemy ze skali umieszczonej przy lunecie (j). Polarymetr optyczny jest urządzeniem bardzo dokładnym, gdyż wykorzystuje on dużą wrażliwość oka ludzkiego na względną zmianę natężenia oświetlenia. W polaryzatorze półcieniowym porównywane są obszary obrazu o różnym natężeniu światła, a kąt obrotu odczytuje się, gdy zanika granica między nimi.

Przy badaniu naturalnej aktywności optycznej ośrodkiem optycznie czynnym (g) jest po prostu kuweta z roztworami sacharozy o różnym stężeniu tego cukru. Wówczas kąt skręcenia płaszczyzny polaryzacji jest dany wzorem (23.35). W przypadku aktywności wymuszonej ośrodkiem aktywnym (g) jest substancja (woda destylowana, roztwór jodku potasu lub szkło flintowe) umieszczona wewnątrz cewki. Stały prąd płynący przez cewkę wytwarza pole magnetyczne o wektorze indukcji \vec{B}_{zew} równoległym do kierunku propagacji fali. Zmieniając wartość natężenia prądu w obwodzie cewki (mierzonego amperomierzem), zmienia się wartość indukcji magnetycznej. Zależność indukcji pola magnetycznego od natężenia prądu płynącego przez solenoid przedstawiono w tab. 23.1. Kąt skręcenia płaszczyzny polaryzacji jest dany wzorem (23.36). Zmieniając polaryzację źródła napięcia, zmienia się kierunek przepływu prądu przez cewkę, a tym samym zwrot wektora \vec{B}_{zew} zmienia się na przeciwny, a wraz z nim kierunek skręcenia płaszczyzny polaryzacji światła.

Tabela 23.1

Zależność indukcji pola magnetycznego od natężenia prądu płynącego przez solenoid

I, A	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
B, mT	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150

Przebieg ćwiczenia

Wyznaczanie stężenia roztworu cukru:

1. Przy braku kuwety z roztworem odczytać zerowe położenie analizatora α_0 . W tym celu ustawić analizator w takim położeniu, aby natężenie światła przechodzącego przez obie połówki pola widzenia było jednakowe.
2. Do polarymetru włożyć kuwetę o określonym stężeniu roztworu. Uwaga. Upewnić się, że w kuvecie nie znajdują się pęcherzyki powietrza.
3. Obracając pokrętką analizatora ustawić go ponownie w takim położeniu, aby natężenie światła przechodzącego przez obie połówki pola widzenia było jednakowe. Zanotować wartości stężenia badanego roztworu i odpowiadającego mu kąta skręcenia płaszczyzny polaryzacji światła.
4. Pomiary opisane w punktach 2. – 3. wykonać dla pięciu różnych stężeń badanego roztworu.
5. Pomiary opisane w punktach 2. – 3. wykonać dla roztworu o nieznanym stężeniu cukru.

Wyznaczanie stałej Verdetą w zjawisku Faradaya:

6. Umieścić w polarymetrze kuwetę wypełnioną wodą destylowaną. Uwaga: upewnić się, że w kuvecie nie znajdują się pęcherzyki powietrza.
7. Ostrość pola widzenia ustawić za pomocą soczewki przy lunecie tak, aby wyraźnie było widać granice między płytkami w polaryzatorze. Wyznaczyć kąt skręcenia analizatora α_0 , przy którym całe pole widzenia jest równomiernie oświetlone i wyraźnie reaguje na niewielkie skręcenia polaryzatora.
8. Zmieniając wartość natężenia prądu w obwodzie cewki, wyznaczyć wartości kąta skręcenia analizatora α , przy którym całe pole widzenia jest równomiernie oświetlone. Pomiary wykonać co 0,25 A dla natężeń prądu płynącego przez solenoid od $I = 0 A$ do $I = 5 A$.

Uwaga: Prąd włączamy tylko na czas potrzebny do wykonania pomiaru, ponieważ silne grzanie się solenoidu powoduje parowanie badanej cieczy.

9. Pomiaru opisane w punkcie 8. wykonać ponownie dla przeciwnego kierunku przepływu prądu przez solenoid.
10. Powtarzając czynności z punktów 6. – 9., zbadać zjawisko Faradaya w próbce szkła flintowego lub innej substancji wskazanej przez prowadzącego ćwiczenie.

Opracowanie wyników

Wyznaczanie stężenia roztworu cukru:

1. Korzystając z wyników pomiarów wykonanych w punktach 2. – 4. przebiegu ćwiczenia, sporządzić wykres zależności kąta skręcenia analizatora od stężenia badanego roztworu cukru. Zaznaczyć na nim zerowe położenie analizatora wyznaczone w punkcie 1. przebiegu ćwiczenia.
2. Metodą najmniejszych kwadratów aproksymować linią prostą wyniki przedstawione na wykresie sporządzonym w punkcie 1. opracowania wyników. Prosta aproksymującą zaznaczyć na wykresie.
3. Porównując równanie prostej aproksymującej z równaniem (23.35) oraz przyjmując długość użytej kuwety $d = 17$ cm, wyznaczyć wartość współczynnika K . Metodą propagacji niepewności obliczyć niepewność wyznaczonej wielkości.
4. Przekształcając wzór (23.35), wyznaczyć z niego wielkość stężenia roztworu cukru s . Następnie podstawiając do niego wynik pomiaru wykonanego w punkcie 5. przebiegu ćwiczenia oraz wartość stałej K wyznaczonej w punkcie 3. opracowania wyników, obliczyć stężenie cukru nieznanego roztworu. Metodą propagacji niepewności obliczyć niepewność wyznaczonej wielkości. Zaznaczyć punkt odpowiadający temu roztworowi na wykresie sporządzonym w punkcie 1. opracowania wyników.

Wyznaczanie stałej Verdet w zjawisku Faradaya:

5. Wyznaczyć niepewności natężenia prądu płynącego przez solenoid wynikające z dokładności użytych przyrządów pomiarowych oraz zapisać wyniki zgodnie z normą.
6. Korzystając z tabeli 23.1, wyznaczyć wartości indukcji pola magnetycznego w polarymetrze, dla których prowadzono pomiary w punktach 8. – 10. przebiegu ćwiczenia.

7. Korzystając z wyników pomiarów wykonanych w punktach 8. – 10. przebiegu ćwiczenia, sporządzić wykresy zależności kąta skręcenia analizatora w polarymetrze od wartości indukcji pola magnetycznego dla wody destylowanej oraz badanego szkła. Zaznaczyć na tych wykresach zerowe położenie analizatora wyznaczone w punkcie 7. przebiegu ćwiczenia.
8. Metodą najmniejszych kwadratów aproksymować linią prostą wyniki przedstawione na wykresach sporządzonych w punkcie 7. opracowania wyników. Proste aproksymujące zaznaczyć na wykresach.
9. Porównując równania prostych aproksymujących z równaniem (23.36), wyznaczyć wartości stałych Verdetta badanych substancji. Metodą propagacji niepewności obliczyć niepewności wyznaczonych wielkości. Przyjąć długość użytej kiewety $d = 17$ cm oraz długość badanego pręta szklanego $d = 17,7$ cm.
10. Przeprowadzić test zgodności stałych Verdetta badanych substancji wyznaczonych w punkcie 9. opracowania wyników z odpowiednimi wartościami tablicowymi.

24. PORÓWNANIE SPRAWNOŚCI ŚWIETLNEJ WYBRANYCH ŹRÓDEŁ ŚWIATŁA

Promieniowanie elektromagnetyczne o długościach fal położonych między obszarem przejścia do fal rentgenowskich ($\lambda = 1\text{nm}$) a obszarem przejścia do fal radiowych ($\lambda = 1\text{mm}$) nosi nazwę promieniowania optycznego. W tym szerokim zakresie widmowym mieszczą się promieniowania bardzo różniące się zarówno technikami ich wytwarzania, jak i skutkami ich oddziaływań na organizmy żywe oraz materię nieożywioną. Rozchodzące się promieniowanie optyczne jest jedną z form istnienia energii, do jego oceny ilościowej stosuje się wielkości zwane energetycznymi. Podstawową wielkością jest strumień energii Φ_e .

Strumień energii wyrażony w J/s przechodzący przez nieskończenie małą powierzchnię dA położoną w punkcie obserwacji \vec{r} (i ustawioną prostopadle do \vec{r}) dany jest iloczynem wartości bezwzględnej wektora gęstości strumienia energii pola elektromagnetycznego \vec{S} (wektora Poyntinga) i powierzchni dA . Określa ilość energii, przeniesionej przez promieniowanie w jednostce czasu, mierzony jest w jednostkach mocy, watach; litera d świadczy, że rozpatrujemy nieskończenie małe wartości (różniczki).

Kąt bryłowy $d\Omega$, utworzony przez wychodzące z początku układu promienie obejmujące powierzchnię dA , definiujemy jako:

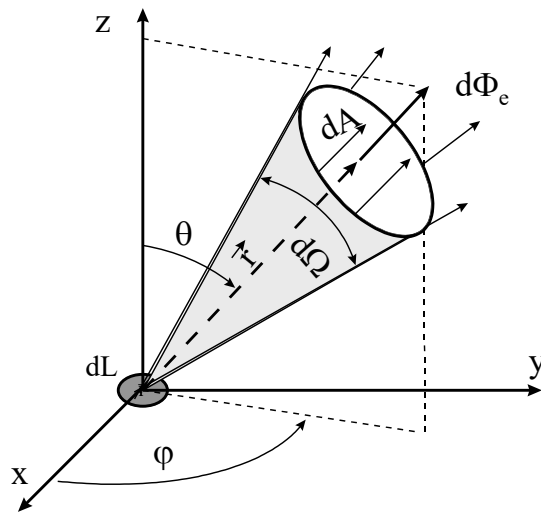
$$d\Omega = \frac{dA}{r^2}. \quad (24.1)$$

Jest on wyrażony w bezwymiarowych jednostkach zwanych steradianami (sr). Jeżeli rozpatrzeć kulę o promieniu r ze środkiem w początku układu, to powierzchnia tej kuli składa się z wielu nieskończenie małych powierzchni dA , z których każda jest prostopadła do promienia wodzącego łączącego ją z początkiem układu. Dlatego to każdej nieskończenie małej powierzchni można przypisać nieskończenie mały element kąta bryłowego $d\Omega$. Całkowity kąt bryłowy rozpięty przez powierzchnię kuli

otrzymuje się przez dodanie wszystkich nieskończenie małych kątów bryłowych. Dany jest on wobec tego całkowitą powierzchnią kuli podzielonej przez r^2 :

$$\Omega = \int d\Omega = \int \frac{dA}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \quad [\text{sr}]. \quad (24.2)$$

Wydajność źródła promieniowania w kierunku (φ, θ) (rys. 24.1) opisuje wielkość nazwana kierunkowym natężeniem źródła promieniowania.



Rys. 24.1. Strumień energii $d\Phi_e$ ($d\Phi_e = |\vec{S}| \cdot dA$) emitowany z powierzchni dL w kąt bryłowy $d\Omega$, którego oś jest określona kątami φ i θ

Kierunkowe natężenie $I_e(\varphi, \theta)$ źródła promieniowania jest równe ilorazowi strumienia energii $d\Phi_e(\varphi, \theta)$ przez kąt bryłowy $d\Omega$ pochylony w kierunku (φ, θ) :

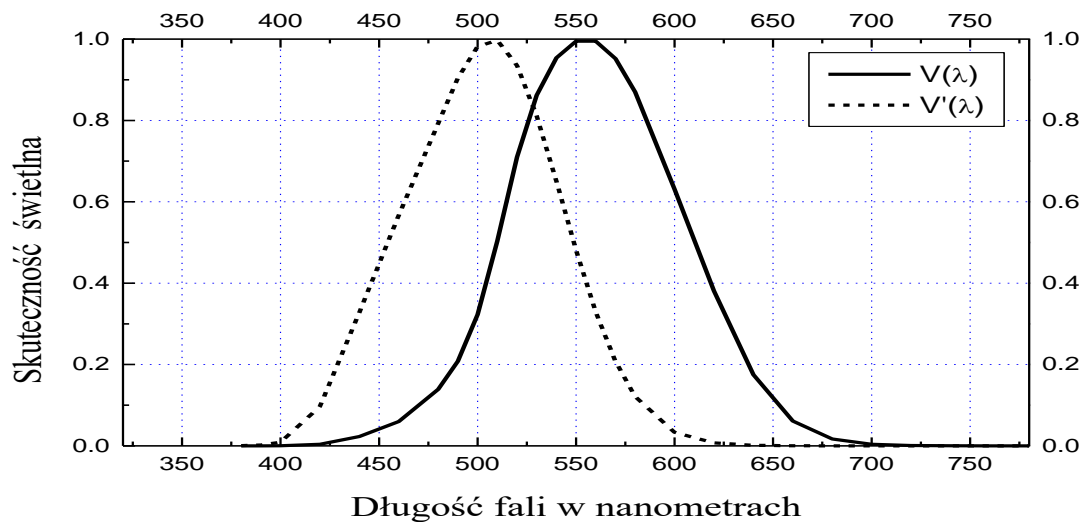
$$I_e = \frac{d\Phi_e}{d\Omega} \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{sr}} \right]. \quad (24.3)$$

Posługując się powyższymi energetycznymi wielkościami, otrzymamy wystarczające z fizycznego punktu widzenia informacje o źródle promieniowania. Nie dostarczają one jednak informacji o subiektywnych wrażeniach wzrokowych wywołanych przez działanie światła na oko. Promieniowanie świetlne, a więc takie promieniowanie elektromagnetyczne, które wywołuje u człowieka wrażenie wzrokowe, obejmuje zakres długości fal od ok. 380 nm do 780 nm. Skuteczność promieniowania w wywoływaniu wrażeń wzrokowych zależy nie tylko od strumienia energii (mocy) promieniowania, lecz także od długości jego fali. Na przykład lampa

wysyłająca światło niebieskie, mimo że wypromieniowuje taką samą moc w obszarze widzialnym jak np. lampa zielona, będzie wydawać się ciemniejsza, bo oko ludzkie jest bardziej czułe na światło zielone niż na niebieskie.

Względną czułość widmową oka ludzkiego charakteryzuje funkcja zwana względną skutecznością świetlną widmową $V(\lambda)$. Krzywą względną skuteczności świetlnej widmowej przedstawia rys. 24.2. Względna skuteczność świetlna widmowa $V(\lambda)$ określa, ile razy strumień energii fali o dowolnej długości λ jest mniejszy niż strumień energii fali o długości $\lambda = 555 \text{ nm}$, przy założeniu że w określonych warunkach obydwa strumienie wywołują u człowieka (tzw. obserwatora fotometrycznego) wrażenie świetlne o tej samej intensywności.

$$V(\lambda) = \frac{d\Phi_e(\lambda)}{d\Phi_e(555 \text{ nm})}. \quad (24.4)$$



Rys. 24.2. Krzywe względnej skuteczności świetlnej widmowej przy widzeniu dziennym $V(\lambda)$ i nocnym $V'(\lambda)$ dla oka ludzkiego, dla tzw. obserwatora fotometrycznego normalnego

Istnieje zatem konieczność stosowania specjalnych wielkości do scharakteryzowania wrażeń wzrokowych wywołanych promieniowaniem. Takimi wielkościami są wielkości fotometryczne. Wielkości te mają nazwy podobne do ich energetycznych odpowiedników. Są więc strumień światła Φ i kierunkowe natężenie źródła światła $I(\varphi, \theta)$. Jedną z różnic między wielkościami energetycznymi i fotometrycznymi jest ta, że w fotometrii wielkością podstawową nie jest strumień światła, ale kierunkowe natężenie źródła światła (inaczej światłość kierunkowa)

$I(\varphi, \theta)$. Światłość kierunkowa jest wielkością, której jednostka – kandela (cd) – jest określona arbitralnie, należy do podstawowych jednostek układu SI. Kandela (cd) jest światłością, jaką w danym kierunku ma źródło emitujące promieniowanie monochromatyczne o częstotliwości $540 \cdot 10^{12}$ Hz, którego natężenie promieniowania w tym kierunku wynosi $1/683$ wata na steradian. Częstotliwości $540 \cdot 10^{12}$ Hz odpowiada w próżni długość fali $\lambda = 555$ nm, tj. fali, na którą przypada maksimum czułości oka. Za pomocą kandel definiuje się bezpośrednio i pośrednio pozostałe wielkości fotometryczne.

Strumień światła

Strumień Φ_λ światła monochromatycznego dla $\lambda_m = 555$ nm określa wzór:

$$d\Phi_\lambda(\lambda_m) = I(\lambda_m)d\Omega \quad [\text{lm}], \quad (24.5)$$

gdzie: Ω – kąt bryłowy wyrażony w steradianach (sr), $I(\lambda_m)$ – natężenie źródła światła emitującego światło o długości fali $\lambda_m = 555$ nm. Jednostką strumienia światła jest lumen (lm); $\text{lm} = \text{cd} \cdot \text{sr}$.

W przypadku dowolnej długości fali strumień światła o tej samej mocy określa się równaniem:

$$d\Phi_\lambda(\lambda) = I(\lambda_m)V(\lambda)d\Omega \quad [\text{lm}]. \quad (24.6)$$

Wielkość, która umożliwia porównanie odpowiadających sobie wzajemnie wartości energetycznych i fotometrycznych, nazywa się skutecznością świetlną widmową dla promieniowania monochromatycznego $K(\lambda)$; jest to stosunek strumienia świetlnego promieniowania monochromatycznego o długości fali λ do strumienia energii tegoż promieniowania,

$$K(\lambda) = \frac{d\Phi_\lambda}{d\Phi_{e\lambda}} = K_m V(\lambda) \quad \left[\frac{\text{lm}}{\text{W}} \right], \quad (24.7)$$

gdzie K_m to maksymalna wartość $K(\lambda)$; dla obserwatora fotometrycznego normalnego wynosi: przy widzeniu dziennym $K_m = 683 \text{ lm/W}$, przy widzeniu nocnym $K_m = 1700 \text{ lm/W}$.

Ponieważ w praktyce występuje przeważnie mieszanina promieniowań o różnych długościach fali, konieczne jest sumowanie poszczególnych monochromatycznych strumieni świetlnych Φ_λ ; istnieje więc zależność:

$$\Phi = \int \Phi_\lambda d\lambda = \int \Phi_{e\lambda} K(\lambda) d\lambda = K_m \int \Phi_{e\lambda} V(\lambda) d\lambda \quad [\text{lm}]. \quad (24.8)$$

Kierunkowe natężenie źródła światła (światłość kierunkowa)

Światłość $I(\varphi, \theta)$ w kierunku (φ, θ) wyraża się stosunkiem nieskończenie małego (elementarnego) strumienia świetlnego $d\Phi(\varphi, \theta)$ płynącego przez kąt bryłowy $d\Omega$ do wartości tego kąta (analogicznie do rys. 24.1, z tym że zamiast strumienia promieniowania $d\Phi_e$ przez stożek $d\Omega$ płynie strumień światła):

$$I(\varphi, \theta) = \frac{d\Phi(\varphi, \theta)}{d\Omega} \quad [\text{cd}]. \quad (24.9)$$

Natężenie oświetlenia

W celu scharakteryzowania oświetlenia powierzchni, na którą pada strumień światła, przyjęto wielkość nazwaną natężeniem oświetlenia E . Miarą natężenia oświetlenia elementarnej powierzchni dA jest stosunek elementarnego strumienia świetlnego $d\Phi$, padającego na tę powierzchnię, do jej wielkości:

$$E = \frac{d\Phi}{dA} \quad [\text{lx}]. \quad (24.10)$$

Natężenie oświetlenia mierzy się w $\text{lm}\cdot\text{m}^{-2}$, jednostka ta nazywa się lux (lx).

Przegląd wybranych źródeł światła

Wytwarzanie światła w żarowych źródłach światła (żarówkach) odbywa się na zasadzie podgrzewania materiału przepływającym prądem elektrycznym do odpowiednio wysokiej temperatury, tak aby materiał podgrzewany zaczął emitować

promieniowanie widzialne, czyli światło. Aby zapewnić możliwie największą ilość światła, materiał musi być podgrzewany do jak najwyższej temperatury. W praktyce, ze względu na zjawisko parowania, żarnik wolframowy podgrzewany jest do temperatury 2500÷2600°C. Wykres względnych zmian rozkładu widmowego promieniowania wolframu dla różnych temperatur w zakresie fal (200÷2500) nm jest zbliżony z dokładnością do 2% do rozkładu widmowego ciała doskonale czarnego.

Lampy fluorescencyjne (świelówki)

W lampach fluorescencyjnych wyładowanie jarzeniowe odbywa się w mieszaninie gazu szlachetnego (argonu lub kryptonu) z parami rtęci. W świelówce podczas wyładowania jarzeniowego główna część energii wysłana przez pary rtęci ma długości fali leżące w zakresie ultrafioletu ($\lambda = 254$ nm), niewidzialnym dla oka ludzkiego. Promieniowanie to pada na warstwę związków chemicznych zwanych luminoforami, mających zdolność wysyłania pod wpływem naświetlania promieniowaniem ultrafioletowym promieniowania widzialnego. Dobierając odpowiedni luminofor, można „zaprogramować” barwę uzyskanego światła (a tym samym wrażenie postrzeganej barwy światła), wskaźnik oddawania barw (Ra) oraz w dużym stopniu skuteczność świetlną lampy.

Półprzewodnikowe źródła światła – diody LED (z ang. Light Emitting Diode)

W złączu *p-n* materiału półprzewodnikowego spolaryzowanego w kierunku przewodzenia przepływający prąd dostarcza elektronów do materiału typu *n* i dziur do materiału typu *p*. W efekcie tworzy się obszar o dużej koncentracji elektronów w materiale typu *n* i odpowiednio dużej koncentracji dziur w materiale typu *p*, rozdzielony wąskim obszarem (kilka mikrometrów) zubożonym, jeśli chodzi o ładunki elektryczne. W obszarze tym dochodzi do procesu rekombinacji elektronów i dziur, uwalniana energia jest emitowana w postaci fotonów o energii $h\nu$ i długości fali promieniowania elektromagnetycznego $\lambda = c/\nu = hc/E_g$, gdzie E_g jest szerokością przerwy energetycznej półprzewodnika.

W zależności od użytego do wykonania diody LED materiału półprzewodnikowego możliwe jest uzyskanie praktycznie dowolnej długości fali λ emitowanego światła. Typowe materiały półprzewodnikowe i odpowiadające im dominujące długość fali są następujące: GaAs (arsenek galu) – emituje światło

w paśmie podczerwieni i czerwieni (650-950 nm), GaAsP (arsenofosforek galu) – emituje w zakresie 590-630 nm, GaN (azotek galu) – świeci na niebiesko (430 nm), InGaN/YAG (azotek indowo-galowy) daje światło białe (380-760 nm).

Sprawność świetlna

Sprawność świetlna źródła światła określa, z jaką efektywnością moc elektryczna wydzielana w źródle przemieniana jest w nim na promieniowanie świetlne (światło widzialne). Sprawność świetlną źródła światła określa się jako iloraz całkowitego strumienia świetlnego wysłanego przez źródło do mocy prądu elektrycznego P potrzebnej do jego wytworzenia. Liczbowo podaje ona wielkość strumienia świetlnego wysłanego przez źródło przypadającego na 1 wat mocy prądu:

$$\eta = \frac{\Phi}{P} \quad \left[\frac{\text{lm}}{\text{W}} \right]. \quad (24.11)$$

Światłość żarowych źródeł światła zależy od temperatury włókna. Dla pewnego przedziału temperatur przyjmujemy się, że światłość jest proporcjonalna do x -tej potęgi temperatury bezwzględnej włókna. W celu porównywania różnych izotropowych źródeł światła można przyjąć, że w danych warunkach pomiarowych średnia wartość światłości źródła w danym kierunku jest wprost proporcjonalna do strumienia światła wysłanego przez źródło w tym kierunku. Przyjmując powyższe założenie, można zapisać

$$I = c_1 \Phi = CT^x, \quad (24.12)$$

gdzie: c_1 , C – stałe, T – temperatura w skali Kelwina.

Gdy skorzysta się z prawa Stefana-Boltzmana, moc wypromieniowana jest proporcjonalna do czwartej potęgi temperatury:

$$P = \sigma T^4. \quad (24.13)$$

Eliminując temperaturę z ostatnich dwóch równań:

$$\Phi = \text{const} \cdot P^{x/4} \quad (24.14)$$

oraz logarytmując obustronnie powyższe równanie, otrzymujemy:

$$\log\Phi = \frac{x}{4}\log P + const. \quad (24.15)$$

Przebieg ćwiczenia

Badanie temperaturowych źródeł światła:

1. Ustawić na autotransformatorze napięcie zasilania ($U_{ZASILANIA}$) układu pomiarowego na wartości 0 V, a następnie podłączyć lampę nr 1 (L1 – zwykła żarówka) do gniazdka znajdującego się na płycie z badanymi źródłami światła.
2. Założyć centralnie na badane źródło osłonę cylindryczną oraz umieścić w kieszeni osłony sondę miernika natężenia światła (luksomierza).
3. Wyznaczyć zależność natężenia oświetlenia wywołanego strumieniem świetlnym emitowanym przez lampę od mocy prądu elektrycznego wydzielanej w lampie: zmieniając na autotransformatorze napięcie zasilające lampę (U_{LAMPY}) co 10 V w zakresie od 150 V do 240 V, odczytywać wskazania prądu płynącego przez lampę (I_{LAMPY}) oraz wartość średniego natężenia oświetlenia na powierzchni sondy luksomierza.
4. Powtórzyć punkty 1. – 4. dla lampy nr 2 (L2 – żarówka halogenowa).

Badanie świetlówki kompaktowej:

5. Powtórzyć czynności z punktów 1. i 2. dla lampy nr 3 (L3 – świetlówka kompaktowa).
6. Wyznaczyć zależność natężenia oświetlenia wywołanego strumieniem świetlnym emitowanym przez lampę od mocy prądu elektrycznego wydzielanej w lampie: ustawić na autotransformatorze napięcie zasilające lampę $U_{LAMPY}=230$ V, odczekać 3 minuty, aż świetlówka uzyska pełny strumień świetlny, zmieniając na autotransformatorze napięcie zasilające lampę (U_{LAMPY}) co 10 V w zakresie od 180 V do 240 V, odczytywać wskazania prądu płynącego przez lampę (I_{LAMPY}) oraz wartość średniego natężenia oświetlenia na powierzchni sondy luksomierza.

Badanie półprzewodnikowego źródła światła (LED):

7. Powtórzyć czynności z punktów 1. i 2. dla lampy nr 4.

8. Wyznaczyć zależność natężenia oświetlenia wywołanego strumieniem świetlnym emitowanym przez lampę od mocy prądu elektrycznego wydzielanej w lampie: zmieniając na autotransformatorze napięcie zasilające lampę (U_{LAMPY}) co 10 V w zakresie od 180 V do 240 V, odczytywać wskazania prądu płynącego przez lampę (I_{LAMPY}) oraz wartość średniego natężenia oświetlenia na powierzchni sondy luksomierza.

Opracowanie wyników

1. Korzystając z wyników pomiarów, obliczyć moc prądu elektrycznego wydzielaną w każdej badanej lampie ($P = U_{LAMPY} \cdot I_{LAMPY}$).
2. Strumień świetlny padający na powierzchnię światłoczułą sondy luksomierza wywołał na niej natężenie oświetlenia $E = \Phi/A$. Przyjmując, że powierzchnia światłoczuła sondy luksomierza wynosi $A = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$, obliczyć strumień świetlny Φ emitowany przez każdą z badanych lamp.
3. Dla każdej wyznaczonej wartości mocy i odpowiadającego jej strumienia światła obliczyć współczynnik sprawności świetlnej lampy $\eta = \Phi/P$. Obliczenia wykonać dla wszystkich badanych w ćwiczeniu lamp.
(Uwaga: celem ćwiczenia jest porównanie współczynnika η wyznaczonego w tych samych warunkach eksperymentalnych dla różnych rodzajów lamp. W ćwiczeniu nie określa się całkowitego strumienia świetlnego emitowanego przez badaną lampę).
4. Dla badanych lamp nr 1 i nr 2 wykonać wykresy $\Phi = f(P)$ oraz $\eta = f(P)$.
Dla lampy nr 1 oraz nr 2 (żarówka zwykła, żarówka halogenowa) obliczyć wartości $\log P$ oraz $\log \Phi$, a następnie zaznaczyć na jednym wykresie dla obydwu lamp zależności $\log \Phi = f(\log P)$. Metodą najmniejszych kwadratów obliczyć nachylenie \bar{a} prostoliniowego odcinka dla każdej krzywej i obliczyć x ze wzoru $x = 4\bar{a}$ (por. wzór (24.14)) oraz niepewność $u(x)$. Proste aproksymujące zaznaczyć na każdej z krzywych.
5. Z danych doświadczalnych odczytać wartość sprawności świetlnej żarówki tradycyjnej η_{Z230} , żarówki halogenowej η_{H230} , świetlówki kompaktowej η_{K230} , półprzewodnikowego źródła światła LED η_{LED230} w warunkach, gdy napięcie na ich zaciskach (U_{LAMPY}) wynosiło 230 V.

6. Przyjmując, że moc badanych źródeł światła w trakcie ich normalnego użytkowania w oświetleniu domowym wynosi P_{230} , obliczyć średni koszt zużytej przez nie energii w ciągu miesiąca (zakładając, że średnio miesiąc to 30,5 dnia a w ciągu doby źródło światła świeci średnio 3 h, przyjąć średnią aktualną cenę energii elektrycznej, tzw. 1 kWh, wg taryfy C11, podawanej przez zakłady energetyczne).

25. BADANIE ZALEŻNOŚCI MOCY PROMIENIOWANIA PODCZERWONEGO EMITOWANEGO PRZEZ RÓŻNE POWIERZCHNIE OD TEMPERATURY

Prawa promieniowania termicznego

Każde ciało o temperaturze większej od zera bezwzględnej emituje promieniowanie elektromagnetyczne z szerokiego zakresu długości fal, który w przypadku temperatur bliskich temperaturze pokojowej odpowiada promieniowaniu z zakresu 780 nm – 1 mm, czyli tzw. podczerwieni. Promieniowanie to zwane jest promieniowaniem termicznym. Wszystkie ciała emitują takie promieniowanie do otoczenia, a także z tego otoczenia je absorbują. Jeżeli ciało ma wyższą temperaturę od temperatury otoczenia, to będzie się oziębiać, ponieważ szybkość emisji promieniowania przewyższa szybkość absorpcji. Jeżeli ciało ma niższą temperaturę od temperatury otoczenia, to będzie się ogrzewać, ponieważ szybkość absorpcji przewyższa szybkość emisji promieniowania. Gdy osiągnięta zostanie równowaga termodynamiczna, wtedy te szybkości będą równe. Za pomocą spektrometru możemy analizować promieniowanie elektromagnetyczne emitowane przez różne źródła, tzn. dowiedzieć się, jakie są natężenie i długość emitowanych fal.

Zdolność ciała do promieniowania określona jest wielkością zwaną zdolnością emisyjną $E(\lambda, T)$, która jest równa energii promieniowania elektromagnetycznego emitowanego przez jednostkę powierzchni ciała w ciągu jednostki czasu, w przedziale długości fali od λ do $\lambda + d\lambda$. Najwięcej energii wysyła ciało doskonale czarne, czyli takie, które całkowicie pochłania padające na nie promieniowanie elektromagnetyczne. Zdolność absorpcyjna ciała doskonale czarnego jest równa jeden dla wszystkich długości fal λ i nie zależy od temperatury ($A(\lambda, T) = 1$).

Zdolność absorpcyjna ciała $A(\lambda, T)$ jest określona jako stosunek energii fali pochłoniętej do energii fali o długości zawartej w przedziale od λ do $\lambda + d\lambda$, padającej w jednostce czasu na jednostkową powierzchnię ciała.

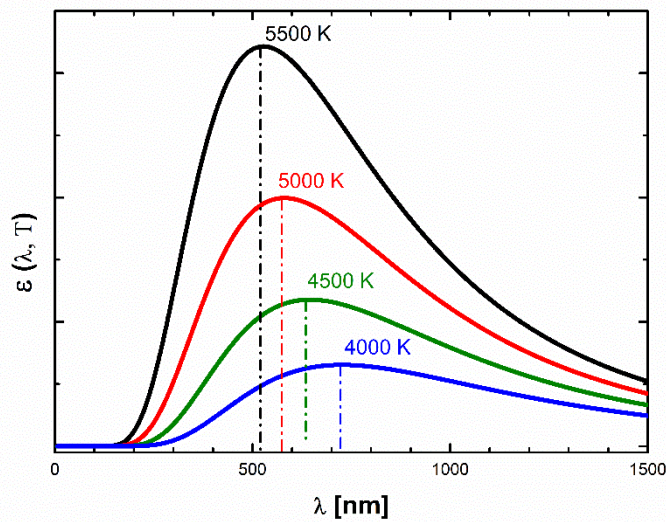
Prawo Plancka

Zgodnie z hipotezą kwantową emisja promieniowania odbywa się w sposób nieciągły (kwantowo), porcjami o energii $h\nu$, gdzie h jest stałą Plancka, a ν – częstotliwością promieniowania ($\nu = \frac{c}{\lambda}$, c – prędkość światła w próżni, λ – długość fali).

Zależność zdolności emisyjnej $\varepsilon(\lambda, T)$ ciała doskonale czarnego od temperatury T oraz od długości fali λ została określona przez M. Plancka i podana w postaci następującego wzoru:

$$\varepsilon(\lambda, T) = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1}, \quad (25.1)$$

gdzie k_B jest stałą Boltzmann. Zależność zdolności emisyjnej $\varepsilon(\lambda, T)$ od długości fali λ (tzw. rozkład widmowy) dla różnych temperatur T ciała doskonale czarnego przedstawiono na rys. 25.1.



Rys. 25.1. Zależność zdolności emisyjnej $\varepsilon(\lambda, T)$ od długości fali λ dla ciała doskonale czarnego w różnych temperaturach

Prawo przesunięć Wiena

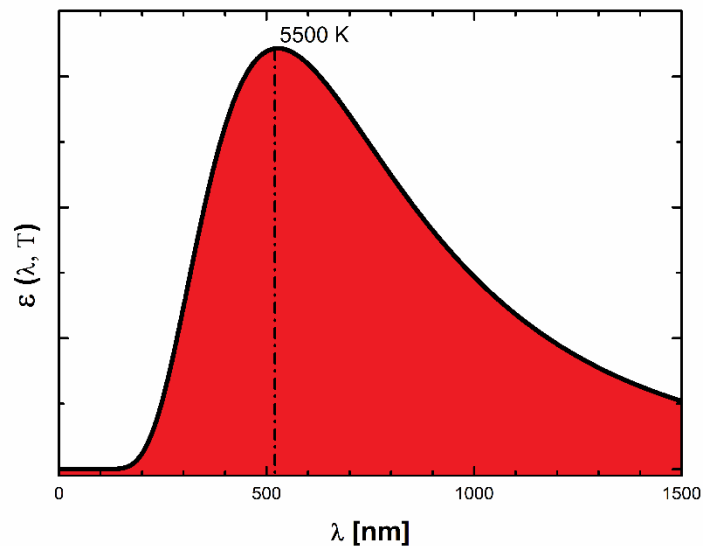
Z rys. 25.1 widać, że ze wzrostem temperatury T maksymalna zdolność emisyjna $\varepsilon(\lambda, T)$ ciała doskonale czarnego występuje dla coraz mniejszej długości fali λ_{max} . Zależność między λ_{max} i T opisuje wzór:

$$\lambda_{max} \cdot T = b, \quad (25.2)$$

gdzie $b = 0,2898 \cdot 10^{-2}$ K·m jest tzw. stałą Wiena. Zależność (25.2) nazywana jest prawem przesunięć Wiena.

Prawo Stefana-Boltzmann

Całkowita zdolność emisyjna $\varepsilon(T)$ odpowiada energii wypromieniowanej z jednostki powierzchni ciała doskonale czarnego we wszystkich długościach fal. Jest ona równa polu powierzchni pomiędzy odpowiednią krzywą rozkładu zdolności emisyjnej i osią odciętych, na której przedstawiona jest długość fali λ (rys. 25.2).



Rys. 25.2. Zależność zdolności emisyjnej $\varepsilon(\lambda, T)$ od długości fali λ dla ciała doskonale czarnego w temperaturze 5500 K

Zgodnie z prawem Stefana-Boltzmanna całkowita zdolność emisyjna $\varepsilon(T)$ ciała doskonale czarnego jest proporcjonalna do czwartej potęgi temperatury T zgodnie z wzorem:

$$\varepsilon(T) = \sigma T^4, \quad (25.3)$$

gdzie $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ jest stałą Stefana-Boltzmannna.

Emisja promieniowania przez ciało doskonale czarne o powierzchni S w całym zakresie długości fal jest określona przez całkowitą moc promieniowania:

$$W^* = S \cdot \varepsilon(T). \quad (25.4)$$

Wobec tego całkowita moc promieniowania W^* ciała doskonale czarnego jest równa:

$$W^* = \sigma S T^4. \quad (25.5)$$

Prawo Kirchhoffa

Ciała rzeczywiste nie pochłaniają całkowicie padającego na nie promieniowania elektromagnetycznego. Dla nich słuszne jest prawo Kirchhoffa wyrażone wzorem:

$$\frac{E(\lambda, T)}{A(\lambda, T)} = \varepsilon(\lambda, T), \quad (25.6)$$

według którego stosunek zdolności emisyjnej $E(\lambda, T)$ do zdolności absorpcyjnej $A(\lambda, T)$ nie zależy od rodzaju ciała, jest funkcją temperatury T oraz długości fali λ i jest równy zdolności emisyjnej $\varepsilon(\lambda, T)$ ciała doskonale czarnego. Ze wzoru wynika, że zdolność emisyjna ciał rzeczywistych jest zawsze mniejsza niż zdolność emisyjna ciała doskonale czarnego w tej samej temperaturze T i dla tej samej długości fali.

W teorii promieniowania termicznego wprowadza się pojęcie ciała szarego, dla którego zdolność emisyjna zachowuje stałą wartość niezależną od długości fali. Niektóre ciała rzeczywiste mają własności bliskie własnościom ciała szarego w szerokim przedziale długości fal.

Zdolność absorpcyjna takiego ciała, oznaczana $\alpha(T)$, zwana jest stopniem czarności. Jest ona taka sama dla wszystkich długości fal i zależy tylko od temperatury T oraz stanu powierzchni danego ciała.

Na podstawie prawa Kirchhoffa (wzór (25.6)) stopień czarności $\alpha(T)$ można wyrazić jako stosunek całkowitej zdolności emisyjnej $E(T)$ ciała rzeczywistego do całkowitej zdolności emisyjnej ciała doskonale czarnego $\varepsilon(T)$:

$$\alpha(T) = \frac{E(T)}{\varepsilon(T)}. \quad (25.7)$$

Z powyższego wzoru wynika, że $\alpha(T)$ przyjmuje wartości od 0 do 1. Dla ciała doskonale czarnego $\alpha(T) = 1$. Ciało, dla którego stopień czarności $\alpha(T) = 0$, nazywane jest ciałem doskonale białym. Ciało to całkowicie odbija padające na nie promieniowanie. Wielkość $\alpha(T)$ jest taka sama dla wszystkich długości fal i zależy tylko od temperatury T oraz stanu powierzchni danego ciała.

Na podstawie wzorów (25.3) i (25.7) całkowita zdolność emisyjna ciała rzeczywistego jest równa:

$$E(T) = \sigma \cdot \alpha(T) \cdot T^4, \quad (25.8)$$

natomiast całkowita moc promieniowania W emitowanego przez ciała rzeczywiste wyrażona jest wzorem:

$$W = \sigma \cdot S \cdot \alpha(T) \cdot T^4. \quad (25.9)$$

Na podstawie wzorów (25.5) i (25.9) stopień czarności ciała $\alpha(T)$ jest równy stosunkowi mocy promieniowania emitowanego przez ciało rzeczywiste do mocy promieniowania emitowanego przez ciało doskonale czarne w tej samej temperaturze:

$$\alpha(T) = \frac{W}{W^*}. \quad (25.10)$$

Pomiar temperatury radiacyjnej

Prawa emisji promieniowania termicznego wykorzystuje się w tzw. pirometrii optycznej, która należy do bezkontaktowych metod pomiaru temperatury. Przyrządy,

które mierzą temperaturę rozgrzanych ciał na podstawie tych praw, nazywają się **pirometrami**.

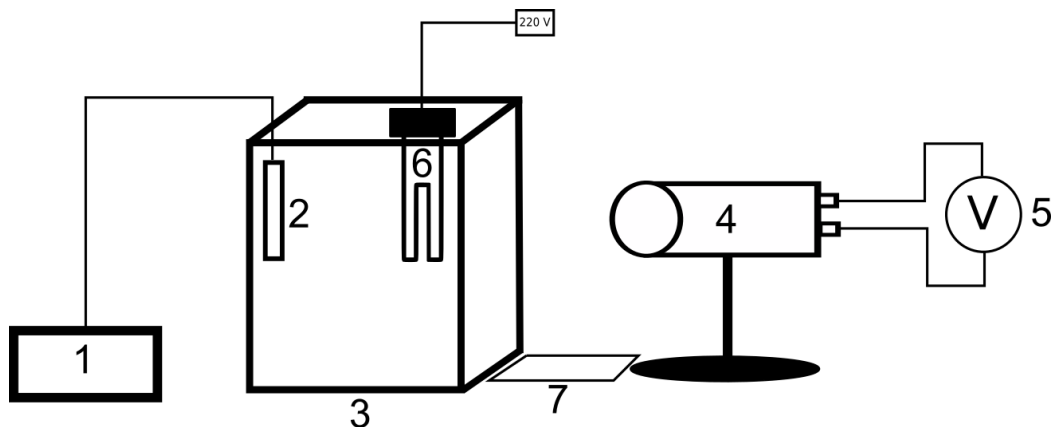
Przykładem pirometru jest pirometr radiacyjny, oparty na prawie Stefana-Boltzmana, który mierzy tzw. temperaturę radiacyjną T_r badanego ciała. Temperatura radiacyjna T_r jest temperaturą ciała doskonale czarnego, przy której jego całkowita zdolność emisyjna $\varepsilon(T_r)$ jest równa całkowitej zdolności emisyjnej $E(T)$ ciała rzeczywistego:

$$W(T) = \sigma S \alpha T^4 = W^*(T_r) = \sigma S T_r^4, \quad (25.11)$$

stąd:

$$T_r = T \sqrt[4]{\alpha(T)}. \quad (25.12)$$

Opis stanowiska pomiarowego



Rys. 25.3. Stanowisko pomiarowe: 1 – miernik temperatury, 2 – czujnik temperatury, 3 – sześciątka Lesliego, 4 – detektor promieniowania elektromagnetycznego, 5 – woltomierz, 6 – grzałka, 7 – płytka dystansowa

Rysunek 25.3 przedstawia stanowisko pomiarowe złożone z sześciątka Lesliego oraz detektora promieniowania elektromagnetycznego z zakresu promieniowania podczerwonego, podłączonego do woltomierza. Sześciątka Lesliego ma ściany boczne o różnym pokryciu: metaliczne matowe, metaliczne błyszczące, białe i czarne. Czarna ściana traktowana jest jako ciało doskonale czarne. Zestaw ten pozwala na wyznaczenie stopnia czarności α różnych powierzchni w funkcji temperatury na podstawie wzoru (25.10). Miarą całkowitej mocy W promieniowania emitowanego przez daną ścianę

sześcianu jest napięcie U na detektorze, w przypadku ciała doskonale czarnego (ściany czarnej) miarą mocy W^* jest napięcie U^* . Stopień czarność α wyznacza się dla trzech ścian względem ściany czarnej w funkcji temperatury z następującej zależności:

$$\alpha(T) = \frac{U}{U^*}. \quad (25.13)$$

Przebieg ćwiczenia

1. Napełnić sześcian Lesliego zimną wodą do wysokości ok. 3 cm poniżej górnej krawędzi.
2. Skierować sześcian czarną ścianą w stronę detektora promieniowania podczerwonego.
3. Detektor ustawić w ustalonej odległości od badanej ściany (**tę samą odległość zachować w kolejnych pomiarach**) i podłączyć do woltomierza. Wybrać odpowiedni zakres pomiarowy. Ujemne napięcie wskazuje, że woda ma temperaturę niższą od otoczenia.
4. Umieścić czujnik temperatury w wodzie przy badanej ścianie stanowiącej źródło promieniowania, a przy przeciwległej ścianie sześcianu umieścić grzałkę elektryczną w wodzie i włączyć do sieci.
5. W trakcie podgrzewania czarnej ściany sześcianu Lesliego rejestrować temperaturę oraz napięcie (U^*).
6. Wyłączyć grzałkę, wyciągnąć z wody i umieścić ją w przygotowanym naczyniu. Wylać wodę z sześcianu i schłodzić go przez kilkukrotną wymianę wody wewnątrz sześcianu.
7. Powtórzyć całą procedurę pomiarową dla pozostałych ścian sześcianu Lesliego.

Uwaga: Proszę pamiętać, że grzałka elektryczna nie może być włączona do sieci elektrycznej, gdy nie jest zanurzona w wodzie!

Opracowanie wyników

1. Wyniki uzyskanych pomiarów oraz wyznaczonych wielkości w trakcie sporządzania sprawozdania opracować zgodnie z zasadami analizy wyników i niepewności pomiarowych wynikających z dokładności przyrządów.

2. Wykreślić zależność napięcia U^* i U od rzeczywistej temperatury T (wyrazić temperaturę T w Kelwinach) dla ściany czarnej oraz pozostałych powierzchni na jednym wykresie. Na tym samym wykresie narysować krzywe ilustrujące potęgową zależność (prawo Stefana-Boltzmana) napięcia U^* i U od temperatury T .
3. Sporządzić wykres napięcia U^* i U w funkcji czwartej potęgi temperatury T^4 dla badanych powierzchni (zależności dla wszystkich ścian zamieścić na tym samym wykresie).
4. Wyznaczyć dla badanych ścian metodą najmniejszych kwadratów parametry a i b prostych: $U = aT^4 + b$ oraz ich niepewności. Zapisać wyniki końcowe. Proste aproksymujące zaznaczyć na wykresie wykonanym w punkcie 3. opracowania wyników.
5. Korzystając z wzoru (25.13), obliczyć wartości $\alpha(T)$ dla mierzonych temperatur T , przyjmując za U i U^* wartości obliczone na podstawie równań prostych aproksymujących:

$$\alpha(T) = \frac{U}{U^*} = \frac{aT^4 + b}{a^*T^4 + b^*}, \quad (25.14)$$

gdzie, a^* i b^* to współczynniki dla powierzchni czarnej. Wyznaczyć niepewność $\alpha(T)$.

6. Sporządzić wykresy $\alpha(T)$ w funkcji temperatury T dla badanych ścian i wykreślić krzywe opisujące przedstawione zależności (zależności dla wszystkich ścian zamieścić na tym samym wykresie).
7. Wykorzystując wzór (25.12), obliczyć temperatury radiacyjne T_r badanych ścian sześcianu Lesliego w funkcji ich rzeczywistej temperatury T oraz ich niepewności. Wykreślić zależności $T_r(T)$ dla badanych powierzchni (zależności dla wszystkich ścian zamieścić na tym samym wykresie).

26. WYZNACZANIE STAŁEJ PLANCKA W BADANIACH ZJAWISKA FOTOLEKTRYCZNEGO ZEWNĘTRZNEGO

Efekt fotoelektryczny zewnętrzny jest jednym ze zjawisk, w których światło przejawia korpuskularną naturę. Polega na emisji elektronów z powierzchni metalu pod wpływem promieniowania elektromagnetycznego z zakresu widzialnego lub ultrafioletu. Fotony przekazują swoją energię elektronom swobodnym wewnątrz metalu. Jeśli energia ta jest wystarczająco duża, elektrony są w stanie pokonać siły przyciągania dodatnich jonów metalu i wydostać się na zewnątrz, czyli wykonać tzw. pracę wyjścia W . Jeśli energia fotonów jest od niej większa, elektrony wydostające się z powierzchni oświetlonego metalu, tzw. fotoelektrony, zyskują energię kinetyczną E_k . Zasada zachowania energii dla tego zjawiska dana jest równaniem Einsteina:

$$E_f = W + E_k, \quad (26.1)$$

w którym E_f oznacza energię padających fotonów. Jej wartość wynosi $h\nu$, gdzie h to stała Plancka, natomiast ν – częstotliwość fali elektromagnetycznej. Minimalna częstotliwość fali elektromagnetycznej, dla której wystąpi efekt fotoelektryczny, wynosi $\nu_o = W/h$ i nazywana jest częstotliwością graniczną zjawiska fotoelektrycznego. Długość fali, która odpowiada tej częstotliwości, wynosi $\lambda_o = hc/W$ (gdzie c oznacza prędkość światła w próżni) i nosi nazwę długofalowej granicy zjawiska fotoelektrycznego.

Fotony są absorbowane przez elektrony na różnych głębokościach materiału, z różnych więc głębokości docierają do jego powierzchni. Po drodze zderzają się z innymi elektronami oraz defektami sieci krystalicznej, tracąc część swojej energii. Z tego powodu energia fotoelektronów może przyjmować różne wartości. Ta występująca w równaniu (26.1) jest maksymalną energią, jaką mogą mieć najszybsze fotoelektrony wybite z materiału oświetlonego promieniowaniem o częstotliwości większej od częstotliwości granicznej (a tym samym promieniowaniem o energii większej od pracy wyjścia elektronów). Jest ona równa:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = h\nu - W. \quad (26.2)$$

Wynika z tego, że maksymalna energia fotoelektronów rośnie liniowo wraz ze wzrostem częstotliwości fali elektromagnetycznej. Zależy tylko od energii promieniowania wywołującego zjawisko fotoelektryczne zewnętrzne. Wzrost natężenia światła (tj. liczby fotonów padających na materiał) nie ma wpływu na energię kinetyczną emitowanych fotoelektronów, powoduje jednak zwiększenie ich liczby.

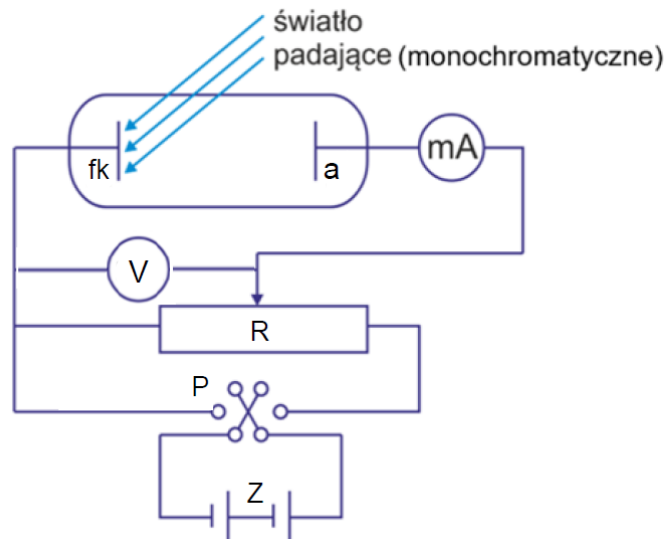
Liczba elektronów emitowanych w jednostce czasu z jednostki powierzchni oświetlanej fotokatody, a więc gęstość natężenia prądu fotoelektrycznego i_f , jest proporcjonalna do natężenia I_o padającego światła i wyraża się wzorem:

$$i_f = \eta(1 - R_o) \frac{I_o}{h\nu}, \quad (26.3)$$

gdzie: R_o oznacza współczynnik odbicia promieniowania od powierzchni materiału, η oznacza współczynnik wydajności kwantowej zjawiska fotoelektrycznego zewnętrznego, i_f określa liczbę fotoelektronów emitowanych z materiału, w którym zaabsorbowany został jeden foton. Współczynnik η jest stałą materiałową, charakteryzującą stan powierzchni i obszaru przypowierzchniowego materiału, z którego emitowane są elektrony. Zależność współczynnika wydajności kwantowej oraz pracy wyjścia elektronów z metalu od własności fizykochemicznych obszaru przypowierzchniowego powoduje, że badania widmowej zależności zjawiska fotoelektrycznego zewnętrznego są wykorzystywane jako jedna z metod badania własności obszarów przypowierzchniowych ciał stałych (tzw. metoda badań fotoemisji elektronowej).

Jednym z urządzeń działających na podstawie zjawiska fotoelektrycznego zewnętrznego jest fotokomórka. Jest to niewielka szklana bańka opróżniona z powietrza (lub wypełniona gazem obojętnym), wewnątrz której znajdują się dwie elektrody metalowe. Jedną z nich jest fotokatoda w kształcie półcyindra, pokryta materiałem o małej pracy wyjścia. Pełni ona funkcję źródła fotoelektronów, gdy pada na nią wiązka światła o odpowiedniej energii. Druga elektroda, zwana anodą, jest zwykle w postaci prostego drucika. Anoda służy do rejestracji fotoelektronów uwalnianych z fotokatody w wyniku zjawiska fotoelektrycznego zewnętrznego. Obie elektrody mają wyprowadzenia elektryczne na zewnątrz bańki umożliwiające

podłączenie napięcia. Schemat ideowy układu służącego do pomiaru zależności prądu fotoelektrycznego od przyłożonego napięcia, czyli tzw. charakterystyki prądowo-napięciowej fotokomórki, przedstawia rys. 26.1. W skład obwodu fotokomórki wchodzi: źródło napięcia, przełącznik umożliwiający wybór kierunku podłączanego napięcia, rezystor regulowany pozwalający na zmianę wartości podłączanego do fotokomórki napięcia oraz mierniki.



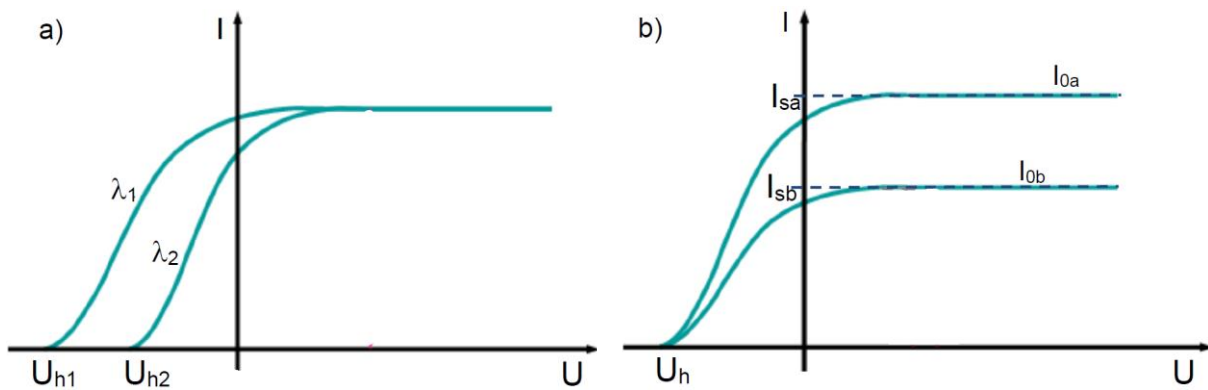
Rys. 26.1. Schemat ideowy układu do pomiaru charakterystyki prądowo-napięciowej fotokomórki (fk, a – fotokatoda i anoda fotokomórki, Z – zasilacz, P – przełącznik umożliwiający zmianę polaryzacji fotokomórki, R – rezystor regulowany, mA – miliamperomierz, V – woltomierz)

Podłączając do fotokatody niższy potencjał (-) niż do anody (+), umożliwia się przepływ fotoelektronów w fotokomórce. W tym przypadku fotokomórka spolaryzowana jest w kierunku przewodzenia. Przy wzroście wartości napięcia zwiększa się pole elektryczne przyspieszające fotoelektrony i coraz większa ich liczba dociera do anody. W konsekwencji wzrasta natężenie prądu fotoelektrycznego I płynącego w obwodzie. Przy wartości napięcia U_p , zwanej napięciem progowym, prąd osiąga stan nasycenia I_s . Przy dalszym wzroście napięcia wartość fotoprądu jest stała i wynosi I_s .

Polaryzacja fotokomórki w kierunku zaporowym następuje po podłączeniu do fotokatody wyższego potencjału (+) niż do anody (-). Tak podłączone napięcie jest napięciem hamującym, gdyż wytworzone pole elektryczne przeciwdziała ruchowi fotoelektronów w kierunku anody. Przy wartości napięcia hamującego U_h następuje całkowity zanik prądu fotoelektrycznego ($I = 0$). Zgodnie z zasadą zachowania energii spełniona jest wtedy relacja:

$$eU_h = E_k. \quad (26.4)$$

Napięcie U_h musi być tym większe, im większa jest energia fotoelektronów, czyli im większa jest energia fotonów padających na fotokatodę (rys. 26.2a). Zmiana natężenia światła padającego na fotokatodę nie oddziałuje na energię kinetyczną fotoelektronów, a tym samym nie wpływa na napięcie U_h . Powoduje jednak zwiększenie ich liczby, czego dowodzi wzrost natężenia fotoprądu płynącego w fotokomórce (rys. 26.2b).



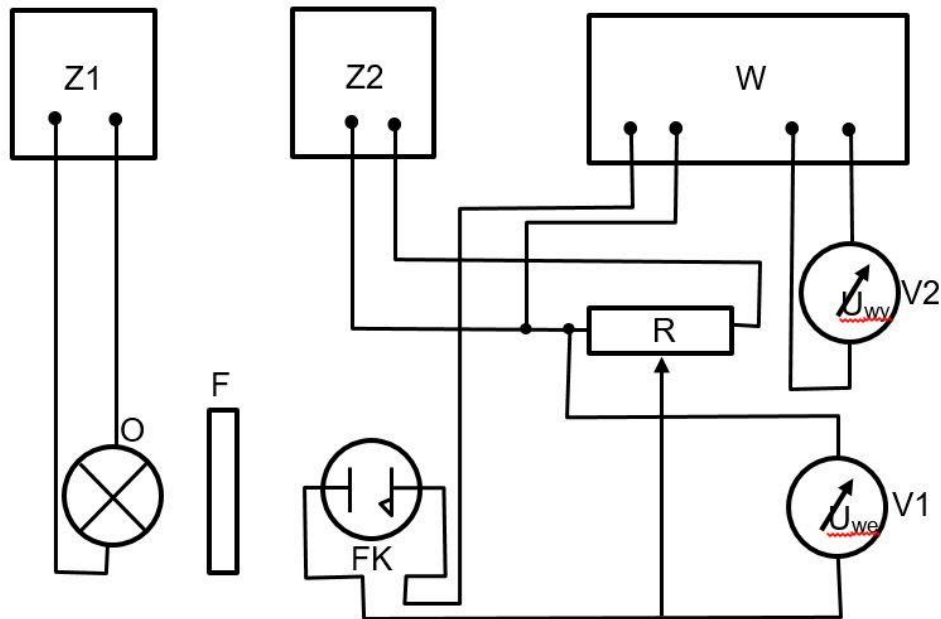
Rys. 26.2. Zależności prądu fotoelektrycznego od przyłożonego napięcia (tzw. charakterystyka prądowo-napięciowa) zarejestrowane dla (a) różnych długości fali ($\lambda_1 < \lambda_2$) i (b) różnych natężeń ($I_{0a} > I_{0b}$) padającego światła

Z równań (26.2) i (26.4) wynika, że wartość napięcia hamowania U_h zależy liniowo od częstotliwości fali elektromagnetycznej wywołującej zjawisko fotoelektryczne zewnętrzne:

$$U_h = a\nu + b, \quad (26.5)$$

gdzie: $a = h/e$ oraz $b = -W/e$. Określając zatem eksperymentalnie zależność napięcia hamowania U_h od częstotliwości fali elektromagnetycznej padającej na fotokatodę, można wyznaczyć zarówno wartość stałej Plancka, jak i pracę wyjścia W elektronów z materiału fotokatody.

Schemat układu pomiarowego zastosowanego do badania charakterystyk prądowo-napięciowych fotokomórki przedstawia rys. 26.3.



Rys. 26.3. Schemat układu pomiarowego do badania charakterystyk prądowo-napięciowych fotokomórki (O – oświetlacz, Z1 – zasilacz oświetlacza, F – filtr interferencyjny, FK – fotokomórka, Z2 – zasilacz fotokomórki, W – wzmacniacz pomiarowy, R – rezystor regulowany, V1, V2 – woltomierze)

Stosowany oświetlacz halogenowy emituje światło z szerokiego zakresu widma. Aby oświetlić fotokatodę fotokomórki promieniowaniem o określonej energii, stosowany jest filtr interferencyjny, przepuszczający fale elektromagnetyczne o określonej długości ($h\nu = hc/\lambda$). Aby zwiększyć czułość eksperymentu, zamiast bezpośredniego pomiaru natężenia fotoprądu płynącego przez fotokomórkę mierzone jest napięcie wyjściowe U_{wy} wzmacniacza pomiarowego, które do niego jest proporcjonalne. W związku z tym natężenie fotoprądu I należy wyznaczyć ze wzoru:

$$I = U_{wy} / (G_f \cdot R_{wz}), \quad (26.6)$$

gdzie: U_{wy} – napięcie wyjściowe wzmacniacza pomiarowego, R_{wz} – opór wejściowy wzmacniacza ($R_{wz} = 10 \text{ k}\Omega$), G_f – współczynnik wzmocnienia wzmacniacza ($G_f = 10^4 \Omega$).

Przebieg ćwiczenia

Uwaga: W trakcie wszystkich czynności przygotowawczych przesłona fotokomórki powinna być w pozycji środkowej!

1. Zapoznać się ze stanowiskiem pomiarowym.
2. Uniwersalny wzmacniacz pomiarowy powinien być ustawiony w trybie pracy „Low Drift” na poziomie $10^4 \Omega$, ze stałą czasową równą 0,3 s.
3. Sprawdzić punkt zerowy wzmacniacza. W tym celu należy odczytać wskazania woltomierza (V1 na rys. 26.3) podłączonego do uniwersalnego wzmacniacza pomiarowego w warunkach, gdy wzmacniacz pracuje nieobciążony. Gdy woltomierz V1 nie wskazuje wartości „zero”, należy wprowadzić odpowiednią korektę pokrętkiem „O” na uniwersalnym wzmacniaczu pomiarowym.
4. Na zasilaczu stałoprądowym Z2, służącym do zasilania fotokomórki, powinna być ustawiona wartość 3 V.

Pomiar charakterystyki $I = f(U)$ fotokomórki:

5. Na otwór wejściowy fotokomórki nałożyć filtr interferencyjny i zanotować długość przepuszczanej fali elektromagnetycznej, a następnie zmienić ustawienie przesłony tak, aby odblokować dostęp światła do fotokomórki. Napięcie rejestrowane woltomierzem V2 nie powinno przekraczać 10 V.
6. Zanotować zależność napięcia wyjściowego U_{wy} wzmacniacza pomiarowego od napięcia podłączonego do fotokomórki U_{we} , zmieniając jego wartość za pomocą rezystora R w zakresie od 3 V do 1,5 V co 0,5 V oraz w zakresie od 1,5 V do 0 V co 0,1 V.
7. Zmienić polaryzację napięcia zasilającego fotokomórkę na kierunek przeciwny i powtórzyć pomiary opisane w punkcie 6. przebiegu ćwiczenia.
8. Czynności opisane w punktach 5.–7. powtórzyć, stosując pozostałe filtry interferencyjne.
9. Wykorzystując filtr wskazany przez prowadzącego ćwiczenie, zarejestrować charakterystykę prądowo-napięciową fotokomórki dla innego niż wcześniej natężenia oświetlenia (można je zmienić, zmieniając ustawienie mechanicznej przesłony fotokomórki lub zmieniając napięcie zasilające oświetlacz).
10. Zanotować dane dotyczące użytych mierników (typ, zakresy pomiarowe).

Opracowanie wyników

1. Obliczyć niepewności mierzonych wielkości.
2. Przeliczyć zarejestrowane napięcia wyjściowe U_{wy} na natężenia prądu płynącego przez fotokomórkę zgodnie ze wzorem (26.6). Przeliczyć długości fal przepuszczanych przez stosowane filtry na częstotliwości i energie fotonów.
3. Sporządzić wykres zależności natężenia prądu płynącego przez fotokomórkę od napięcia wejściowego U_{we} podawanego na fotokomórkę.
4. Na uzyskanym wykresie aproksymować prostoliniową część i określić parametry prostej aproksymacyjnej wraz z ich niepewnościami. Zapisać wyniki zgodnie z normą.
5. Na podstawie prostej aproksymacyjnej określić wartość napięcia hamowania U_h wraz z niepewnością. Zapisać wynik zgodnie z normą.
6. Czynności opisane w punktach 3. – 5. opracowania wyników powtórzyć dla każdej zarejestrowanej charakterystyki (dla każdej stosowanej energii fotonów).
7. Zależności $I(U)$ uzyskane z zastosowaniem różnego natężenia światła o danej energii przedstawić na wspólnym rysunku.
8. Sporządzić wykres zależności wartości bezwzględnej napięcia hamowania U_h od częstotliwości ν fali elektromagnetycznej wykorzystywanej w ćwiczeniu.
9. Aproksymować linią prostą wyniki przedstawione na wykresie $U_h(\nu)$. Prosta aproksymującą zaznaczyć na wykresie. Wyznaczone parametry aproksymacji zapisać zgodnie z normą.
10. Porównując równanie prostej aproksymującej z równaniem (26.5), określić wartość stałej Plancka h oraz pracę wyjścia W elektronów z materiału fotokatody. Obliczyć niepewności wyznaczonych wielkości. Wyniki zapisać zgodnie z normą.
11. Uzyskane wyniki porównać z wartościami tablicowymi. Rezultat skomentować, zidentyfikować materiał katody.

27. WYZNACZANIE PRACY WYJŚCIA ELEKTRONÓW Z METALU W BADANIACH EMISJI TERMOELEKTRONOWEJ

W metalach występują swobodne nośniki ładunku elektrycznego – elektrony. Dzięki nim metale mają zdolność przewodzenia prądu elektrycznego. Swobodne elektrony powstają w wyniku uwspólniania elektronów walencyjnych wiązań atomów metali. Z punktu widzenia klasycznej teorii przewodnictwa elektrony przewodnictwa poruszające się w całej objętości metalu rozpatruje się jak pewnego rodzaju gaz elektronowy wykazujący cechy jednoatomowego gazu idealnego o trzech stopniach swobody. Dokładna analiza zjawiska ruchu elektronów w metalu wymaga zastosowania mechaniki kwantowej. Zgodnie z mechaniką kwantową i dualizmem korpuskularno-falowym elektrony w ciele stałym można traktować jak fale stojące, zamknięte w objętości danego ciała. W związku z tym energia elektronu nie może przyjmować w ciele stałym dowolnej wartości, lecz musi przyjmować jedną z wartości dozwolonych – musi być skwantowana. W fizyce klasycznej elektrony traktuje się jak cząstki podlegające statystyce Maxwella-Boltzmann, natomiast zgodnie z teorią kwantową do elektronów należy stosować kwantową statykę Fermiego-Diraca. Statystyka ta opisuje fermiony, czyli cząstki o spinie połówkowym (w tym m.in. elektrony) podlegające zakazowi Pauliego. Wynika stąd, że kwantowy gaz elektronowy zachowuje się inaczej niż gaz klasyczny.

Podobnie jak cząsteczki w gazie klasycznym, tak i elektrony w gazie elektronowym mają pewne prędkości, a więc i energie kinetyczne zależne od temperatury. Podczas chaotycznego ruchu cieplnego elektrony przewodnictwa w temperaturze pokojowej przemieszczają się ze średnią prędkością rzędu 10^3 m/s zderzając się z jonami sieci krystalicznej metalu. Ich średnia droga swobodna jest co do rzędu równa stałej sieci krystalicznej ciała stałego ($\sim 1 \text{ \AA}$).

W związku z chaotycznym charakterem ruchu termicznego elektronów przewodnictwa nie występuje przepływ prądu elektrycznego w metalu – jako całość jest on elektrycznie obojętny. Powodem takiego stanu jest obecność w metalu dodatnich jonów tworzących sieć krystaliczną, kompensujących ładunek elektronów swobodnych. Występowanie w metalu dodatnich jonów powoduje, że elektrony

przewodnictwa nie mogą swobodnie opuścić objętości metalu. Aby wyrwać elektron z pola sił przyciągania ze strony dodatnich jonów, trzeba dostarczyć mu energię równą pracy wyjścia W . Praca wyjścia ma wartość rzędu kilku elektronowoltów (eV) i jest wielkością charakterystyczną dla danego metalu. Jej wartości dla wybranych pierwiastków przedstawiono w tab. 27.1

Tabela 27.1

Wartości pracy wyjścia wybranych metali

Pierwiastek	Cs	Na	Li	Ba	Ca	Zn	Ta	Al.	Cu	W	Au	Fe	Ag	Ni	Pt
W, eV	1,9	2,3	2,4	2,4	3,0	3,8	4,1	4,1	4,5	4,5	4,7	4,7	4,7	5,0	5,3

Wyrwanie elektronów z metalu może nastąpić w wyniku następujących zjawisk:

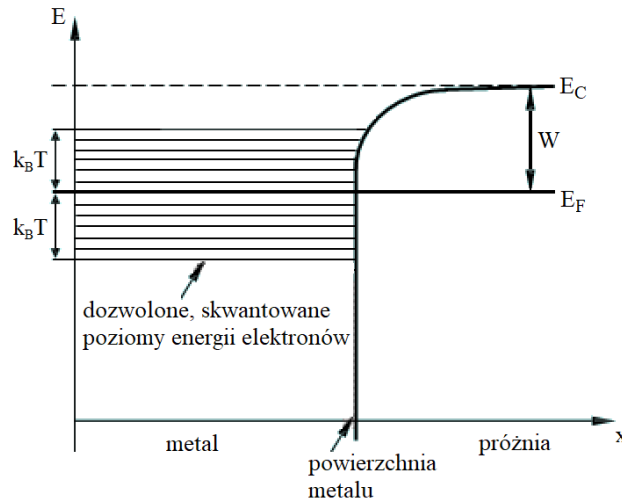
- efektu fotoelektrycznego zewnętrznego (pod wpływem fotonów o odpowiedniej energii),
- emisji polowej (pod wpływem przyłożonego zewnętrznego pola elektrycznego o dużym natężeniu),
- emisji wtórnej (w wyniku bombardowania powierzchni przez wysokoenergetyczne cząstki),
- emisji termoelektronowej (przez podgrzanie metalu i fluktuacji energii cząsteczek gazu elektronowego w wysokiej temperaturze).

Statystyka Fermiego-Diraca opisująca prawdopodobieństwo obsadzenia poziomu energetycznego przez elektrony przewodnictwa ma postać:

$$n_f(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right) + 1}, \quad (27.1)$$

gdzie: $n_f(E)$ oznacza średnią liczbę elektronów w stanie kwantowym o energii E , E_F – energię Fermiego, k_B – stałą Boltzmann, T – temperaturę metalu.

Struktura pasmowa poziomów energetycznych elektronów przewodnictwa w metalu wynikająca z rozkładu Fermiego-Diraca przy powierzchni metalu została przedstawiona na rys. 27.1.



Rys. 27.1. Poziomy energetyczne przy powierzchni metalu: E – energia elektronów, x – współrzędna przestrzenna, E_F – poziom energii Fermiego, E_C – poziom energii próżni, W – praca wyjścia

Poziom Fermiego to najwyższy poziom energetyczny obsadzony przez elektrony w temperaturze 0 K. W wyższych temperaturach prawdopodobieństwo obsadzenia poziomu Fermiego przez elektron jest równe $\frac{1}{2}$. Praca wyjścia elektronów z metalu jest określona jako różnica pomiędzy poziomem energii Fermiego E_F a energią elektronu w próżni E_C :

$$W = E_C - E_F. \quad (27.2)$$

Wraz ze wzrostem temperatury elektrony w okolicy poziomu Fermiego mogą zwiększyć swoją energię o wielkość rzędu $k_B T$ i przejść na wyższe poziomy energetyczne. W temperaturze pokojowej (~ 300 K) wartość $k_B T$ wynosi $\sim 0,025$ eV, a więc jest niewielkim ułamkiem energii Fermiego. Dopiero w wysokich temperaturach, rzędu kilku tysięcy kelwinów, znacząca liczba swobodnych elektronów może osiągnąć energię termiczną $k_B T$ porównywalną z pracą wyjścia i tym samym opuścić objętość metalu. Wartości prac wyjścia dla wybranych metali przedstawiono w tab. 27.1. Gęstość prądu płynącego w wyniku tego zjawiska można wyznaczyć na podstawie statystyki Fermiego-Diraca (27.1) oraz obliczeń kwantowo-mechanicznych. Określona jest ona równaniem Richardsona:

$$J_e = AT^2 \exp\left(-\frac{W}{k_B T}\right), \quad (27.3)$$

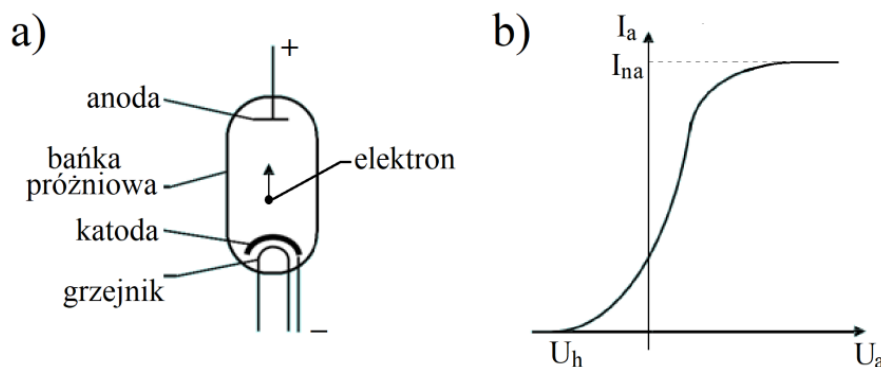
gdzie: $A = \frac{4\pi em_e k_B^2}{h^3} \approx 1,2 \cdot 10^6 \frac{A}{m^2 K^2}$ – stała Richardsona. W rzeczywistych warunkach należy uwzględnić fakt odbicia części elektronów od bariery potencjału na powierzchni metalu. Wówczas stała A przyjmuje zawsze mniejsze wartości od wartości teoretycznej, gdyż zależy nie tylko od stałych fizycznych, lecz także od temperatury i stanu powierzchni materiału, z którego zbudowana jest katoda emitująca termoelektrony.

W niniejszym ćwiczeniu mierzone jest natężenie prądu elektronów emitowanych z żarzonej katody i docierających do anody, do której przyłożony jest potencjał dodatni względem katody. Jeśli potencjał ten jest wystarczająco duży, obserwuje się nasycenie prądu mierzonego w obwodzie zewnętrznym pomiędzy katodą i anodą (tzw. prądu anodowego) dane wzorem:

$$I_{na} = BT^2 \exp\left(-\frac{W}{k_B T}\right), \quad (27.4)$$

gdzie B – stała aparaturowa.

Układ elektrod, złożony z katody emitującej elektrony i anody, do której elektrony docierają, zamknięty w próżniowej bańce szklanej, nazywany jest diodą lampową. Przed wynalezieniem diod półprzewodnikowych miała ona duże znaczenie w elektronice. Na rys. 27.2 przedstawiono schemat budowy oraz charakterystykę prądowo-napięciową diody lampowej.



Rys. 27.2. Budowa (a) oraz charakterystyka prądowo-napięciowa (b) diody lampowej: U_h – napięcie hamujące, I_{na} – natężenie prądu nasycenia

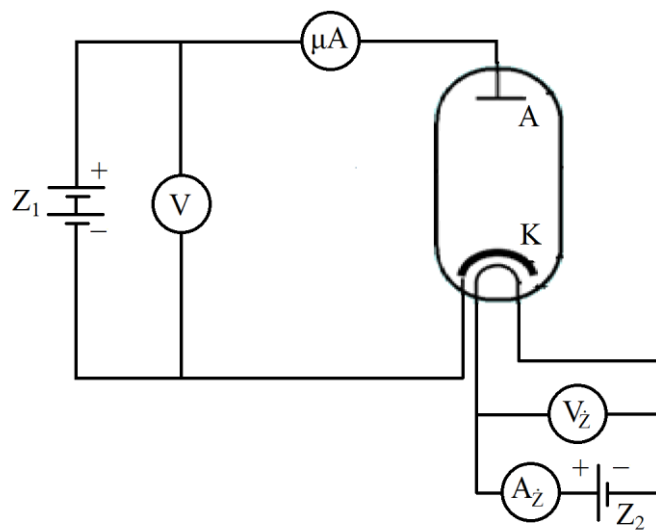
Rysunek 27.2b przedstawia zależność natężenia prądu termoelektronów I_a od napięcia anodowego U_a dla stałej temperatury katody. Gdy różnica potencjałów pomiędzy katodą i anodą wynosi zero ($U_a = 0$ V), to przez diodę płynie niewielki prąd.

Jest to spowodowane tym, że elektrony opuszczające katodę w wyniku emisji termoelektronowej mają pewną energię kinetyczną, pozwalającą im na dotarcie do anody. Przy niewysokiej, dodatniej różnicy potencjałów anody względem katody nie wszystkie elektrony wysyłane z żarzącej się katody docierają do anody. Sytuacja ulega zmianie w przypadku przyłożenia do anody wysokiego, dodatniego potencjału. Wówczas wszystkie elektrony wylatujące z katody docierają do anody. Natężenie płynącego prądu osiąga stałą, maksymalną wartość nasycenia opisaną równaniem (27.4). Dalszy wzrost napięcia anodowego nie powoduje już wzrostu natężenia prądu termoelektronów. Z drugiej strony, przyłożenie do anody niewielkiego ujemnego napięcia hamowania U_h pozwala całkowicie zatrzymać przepływ elektronów między katodą a anodą. Jest tak, gdy praca, jaką muszą wykonać elektrony przeciwko siłom pola elektrycznego, jest co najmniej równa ich energii kinetycznej:

$$eU_h = \frac{m_e v^2}{2}, \quad (27.5)$$

gdzie: U_h – napięcie hamowania, e – ładunek elektronu, m_e – masa elektronu, v – prędkość elektronu emitowanego z katody. Dzieje się tak dla napięcia $U_h = \frac{m_e v^2}{2e}$.

Układ pomiarowy



Rys. 27.3. Schemat układu pomiarowego: A – anoda; K – katoda, μA , A_z – amperomierze, V, V_z – woltomierze, Z_1 , Z_2 – zasilacze napięciowe

Na rys. 27.3 przedstawiono schemat układu pomiarowego do wyznaczania pracy wyjścia elektronów z metalu. Dokonując pomiaru prądu anodowego dla dwóch różnych wartości temperatury katody, otrzymuje się układ dwóch równań Richardsona:

$$\begin{cases} I_{na1} = BT_1^2 \exp\left(-\frac{W}{k_B T_1}\right) \\ I_{na2} = BT_2^2 \exp\left(-\frac{W}{k_B T_2}\right) \end{cases}, \quad (27.6)$$

po rozwiązaniu którego można wyznaczyć pracę wyjścia elektronów z metalu:

$$W = \frac{k_B T_1 T_2}{T_2 - T_1} \ln \frac{I_{na2} T_1^2}{I_{na1} T_2^2}. \quad (27.7)$$

Przebieg ćwiczenia

Wyznaczanie pracy wyjścia elektronów z metalu:

1. Zapoznać się z układem pomiarowym, którego schemat przedstawia rys. 27.3, i zanotować typy oraz klasy przyrządów pomiarowych.
2. Ustalić napięcie żarzenia katody $U_{z1} = 2,75 \text{ V}$ i zmierzyć natężenie prądu I_{z1} w obwodzie żarzenia katody. Zanotować parametry mierników potrzebne do wyznaczenia niepewności pomiarowych.
3. Zmieniając napięcie anodowe U_a co 5 V w zakresie od 0 V do 250 V, zmierzyć natężenie prądu anodowego I_a . Zanotować parametry mierników potrzebne do wyznaczenia niepewności pomiarowych.
4. Ustalić napięcie żarzenia katody $U_{z2} = 3,5 \text{ V}$ i powtórzyć pomiary opisane w punktach 2. i 3.

Wyznaczanie prędkości elektronów emitowanych z katody:

5. Zmienić polaryzację zasilacza Z_1 w układzie diody lampowej, tak by do anody przykładany był potencjał ujemny względem katody.

6. Przy napięciu anodowym $U_a = 0$ V, regulując zasilaczem Z_2 w obwodzie żarzenia lampy, znaleźć minimalną wartość napięcia żarzenia U_z , przy której da się zmierzyć minimalne natężenie prądu anodowego I_a .
7. Zwiększyć napięcie anodowe, osiągając wartość napięcia hamującego U_h , gdy natężenie prądu anodowego I_a zmaleje do zera. Zanotować wartości U_h i U_z . Zapisać parametry mierników potrzebne do wyznaczenia niepewności pomiarowych.
8. Pomiar opisany w punkcie 7. wykonać dla 5 różnych wartości napięcia żarzenia U_z nieprzekraczających 5 V, rozpoczynając od wartości minimalnej wyznaczonej w punkcie 6.

Opracowanie wyników

Wyznaczanie pracy wyjścia elektronów z metalu:

1. Obliczyć niepewności wszystkich uzyskanych wyników wynikające z klasy i dokładności użytych przyrządów pomiarowych.
2. Stosując prawo Ohma:

$$R = \frac{U_z}{I_z}, \quad (27.8)$$

obliczyć opór katody R , korzystając z pomiarów wykonanych w punktach 3. i 4. przebiegu ćwiczenia. Metodą propagacji niepewności obliczyć niepewności wyznaczania R . Wyniki wraz z niepewnościami zapisać w poprawny sposób.

3. Korzystając z danych zawartych w tab. 27.2, wykonać wykres $R = f(T)$ unormowanej rezystancji metalu katody w funkcji jej temperatury.

Tabela 27.2

Zależność rezystancji metalu, z której została wytworzona katoda, od jej temperatury

T, K	2000	2100	2250	2350	2450	2550
R, Ω	1,39	1,50	1,59	1,66	1,77	1,87

4. Metodą najmniejszych kwadratów aproksymować linią prostą wykres $R = f(T)$ wykonany w punkcie 3. opracowania wyników. Prosta aproksymującą zaznaczyć na wykresie, parametry aproksymacji zapisać zgodnie z normą.

5. Na podstawie wartości współczynników kierunkowych prostej aproksymującej $R = aT + b$ wyznaczonych w punkcie 4. opracowania wyników obliczyć temperatury katody T_1 oraz T_2 odpowiadające rezystancjom katody wyznaczonym w punkcie 2. opracowania wyników. Uwzględniając niepewności wyznaczenia oporu R oraz współczynników a i b prostej regresji, obliczyć niepewność wyznaczenia temperatur T_1 i T_2 katody metodą propagacji niepewności.
6. Przedstawić na wykresie zależności natężenia prądu anodowego I_a od napięcia anodowego U_a , posługując się wynikami pomiarów zarejestrowanych w punktach 3. i 4. przebiegu ćwiczenia. Zaznaczyć niepewności uzyskanych wyników.
7. Na podstawie wykresów wykonanych w punkcie 6. opracowania wyników określić wartości prądów nasycenia I_{na1} oraz I_{na2} , odpowiadające temperaturom T_1 i T_2 katody, i zaznaczyć je na wykresach.
8. Na podstawie wzoru (27.7) wyznaczyć pracę wyjścia W elektronów z badanego metalu katody. Wyniki obliczeń pracy wyjścia podać w elektronowoltach. Metodą propagacji niepewności obliczyć niepewność wyznaczenia pracy wyjścia W . Zapisać wynik zgodnie z normą.
9. Na podstawie wykonanych obliczeń pracy wyjścia oraz temperaturowego współczynnika oporu (współczynnika kierunkowego prostej aproksymującej wyznaczonego w punkcie 4. opracowania wyników) określić rodzaj metalu, z jakiego wykonana została katoda lampy.

Wyznaczanie prędkości elektronów emitowanych z katody:

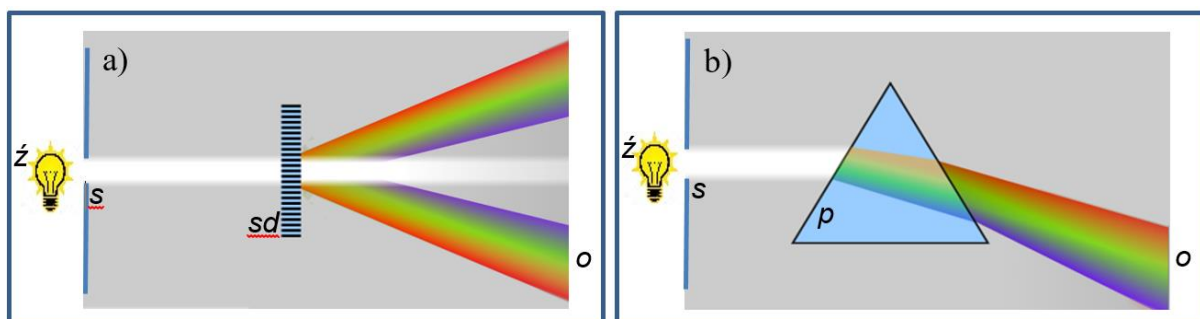
10. Obliczyć niepewność wszystkich uzyskanych wyników, wynikającą z klasy dokładności użytych przyrządów pomiarowych.
11. Przekształcając równanie (27.5), obliczyć prędkość elektronów emitowanych z katody. Obliczenia przeprowadzić dla wszystkich zmierzonych wartości U_h .
12. Metodą propagacji niepewności obliczyć niepewności wyznaczenia prędkości elektronów. Zapisać wyniki zgodnie z normami.
13. Sporządzić wykres zależności napięcia hamowania od prędkości elektronów $U_h(v)$ i nanieść słupki niepewności.

28. BADANIE ATOMOWYCH WIDM EMISYJNYCH GAZÓW METALI

Widma emisyjne

Każdy obiekt fizyczny będący w stanie wzbudzonym emituje promieniowanie, czyli strumień cząstek lub fal elektromagnetycznych o wielu różnych długościach. W szczególnych przypadkach są to fale z zakresu widzialnego, czyli światło. Rozkład emitowanego promieniowania na składowe długości fal nazywa się widmem emisyjnym. Jeżeli światło białe przechodzi przez ośrodek pochłaniający, wtedy uzyskane widmo nazywa się absorpcyjnym. Widma można uzyskać przy użyciu spektrografów, spektrometrów lub monochromatorów. Różnica między tymi przyrządami sprowadza się do różnego sposobu ich wykorzystania. Spektrografy i spektrometry służą do analizy promieniowania emitowanego lub przechodzącego przez badaną substancję, natomiast monochromatory pozwalają uzyskać promieniowanie o ściśle określonej długości (a tym samym o ściśle określonej częstotliwości).

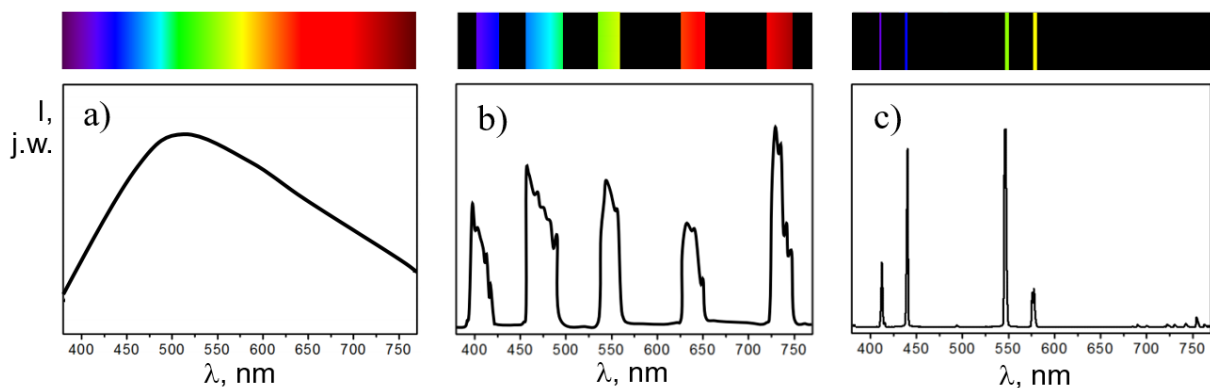
Najważniejszą częścią przyrządów spektroskopowych (rys. 28.1) jest pryzmat lub siatka dyfrakcyjna. Elementy te umożliwiają rozłożenie promieniowania elektromagnetycznego na składowe o różnych długościach fali λ (częstotliwościach ν).



Rys. 28.1. Istota działania spektroskopu optycznego siatkowego (a) i pryzmatycznego (b): \acute{z} – źródło światła, s – szczelina, sd – siatka dyfrakcyjna, p – pryzmat, o – okular/detektor

Rozkład promieniowania przez pryzmat jest skutkiem zjawiska dyspersji, tzn. zależności prędkości fali, a tym samym współczynnika załamania n światła w materiale (itp. w szkło), od długości fali. W wyniku tego zjawiska fale o różnych długościach, wnikając do pryzmatu, załamują się pod różnymi kątami, dlatego zostają rozseparowane. Gdy światło pada na siatkę dyfrakcyjną, ulega zjawisku dyfrakcji (ugięcia). Rozkład promieniowania jest konsekwencją zależności kąta ugięcia od długości fali.

Charakter uzyskanego widma zależy od rodzaju źródła promieniowania. Przykładowo widmo światła emitowanego przez ciała stałe rozgrzane do wysokiej temperatury jest ciągłe (rys. 28.2a). Widmo światła emitowanego przez wzbudzone gazy wieloatomowe i cząsteczki ma charakter pasmowy (rys. 28.2b). Rozkład promieniowania emitowanego przez wzbudzone gazy jednoatomowe i pary metali jest dyskretne, liniowe (rys. 28.2c), co oznacza, że te substancje emitują promieniowanie o ściśle określonych długościach fal (częstotliwościach). Tego faktu nie można wyjaśnić na gruncie klasycznej elektrodynamiki. Dopiero model atomu zaproponowany przez Nielsa Bohra pozwolił wyjaśnić to zjawisko.



Rys. 28.2. Przykłady widm emisyjnych: ciągłego (a), pasmowego (b) i liniowego (c). W górnej części rysunku przedstawiono obrazy rozszczepionych wiązek światła; w dolnej części rysunku pokazano rozkłady widmowe natężenia światła emitowanego przez różne źródła

Model atomu Bohra

Model Bohra atomu powstał na podstawie badań widm emisyjnych wodoru. Sprawdza się jednak również w przypadku tzw. atomów wodoropodobnych, czyli składających się z jądra obdarzonego dodatnim ładunkiem Ze (gdzie Z jest liczbą naturalną, a e oznacza wartość ładunku elementarnego) oraz krążącego wokół niego

elektronu. Do takich atomów, poza atomem wodoru ($Z = 1$), należą też jednokrotnie zjonizowany atom helu ($Z = 2$), dwukrotnie zjonizowany atom litu ($Z = 3$) itp. Masa jąder takich atomów jest znacznie większa od masy elektronu, można więc założyć, że środek masy atomu pokrywa się ze środkiem jądra, a elektron pod wpływem przyciągania kulombowskiego pomiędzy elektronem i jądrem porusza się po orbitach kołowych o promieniu r , ze środkiem w miejscu jądra. Oznacza to, że siła Coulomba F_c jest tutaj siłą dośrodkową F_d , co w przypadku atomu wodoropodobnego można zapisać równaniem:

$$F_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r} = F_d, \quad (28.1)$$

a stąd energia całkowita, będąca sumą energii kinetycznej elektronu i energii potencjalnej układu proton-elektron, dana jest wzorem:

$$E = \frac{mv^2}{2} + E_p = \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}. \quad (28.2)$$

Zgodnie z elektrodynamiką klasyczną taki elektron (jak każda cząstka obdarzona ładunkiem), poruszając się ruchem przyspieszonym (w ruchu po okręgu jest to przyspieszenie dośrodkowe), musiałby emitować promieniowanie hamowania (fale elektromagnetyczne), co byłoby równoznaczne z utratą energii. Skutkiem tego byłoby ciągłe zmniejszanie się promienia orbity r , elektron spadłby na jądro i atom przestałby istnieć.

Nowatorstwo podejścia Bohra polegało na uzupełnieniu klasycznych założeń o następujące:

1. elektrony poruszają się w atomach po stacjonarnych orbitach kołowych, nie emitując fal elektromagnetycznych. Dozwolone są tylko te orbity, na których moment pędu elektronu L jest równy całkowitej wielokrotności stałej Plancka podzielonej przez 2π (czyli moment pędu elektronu jest skwantowany):

$$L = n \cdot \frac{h}{2\pi} = nh, \quad n = 1, 2, 3K \quad (28.3)$$

Założenie to nazywane jest pierwszym postulatem Bohra;

2. emisja (lub absorpcja) fotonu następuje w wyniku przejścia elektronu z jednego stanu stacjonarnego do drugiego. Energia fotonu ($h\nu$) jest równa różnicy:

$$h\nu = |E_i - E_j|, \quad (28.4)$$

gdzie i oraz j to odpowiednie numery orbit elektronu. Założenie to nazywane jest drugim postulatem Bohra.

Wynika stąd, że aby wyznaczyć energie emitowanych (lub absorbowanych) fotonów, wystarczy określić energie stanów stacjonarnych atomu. Konieczne jest więc ustalenie promienia orbit stacjonarnych.

Zgodnie z pierwszym postulatem Bohra moment pędu elektronu poruszającego się po orbicie o promieniu r wynosi:

$$L = mvr = n \frac{h}{2\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (28.5)$$

Po podstawieniu do powyższego wzoru wyrażenia na prędkość elektronu, uzyskanego z równania (28.1), promień n -tej orbity stacjonarnej można wyrazić jako:

$$r_n = n^2 \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m Z e^2} = n^2 r_1, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (28.6)$$

gdzie r_1 to promień atomu o najniższej energii, czyli w stanie podstawowym. W przypadku atomu wodoru ($Z = 1$) $r_1 = a_0 \approx 52,92$ pm – jest to tzw. promień Bohra.

Uwzględniając uzyskany wzór (28.6) w równaniu (28.2), dostajemy wyrażenie:

$$E_n = -\frac{mZ^2 e^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2} = \frac{E_1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (28.7)$$

określające wartości energii dozwolonych stanów stacjonarnych w atomie wodoropodobnym. Parametr n nazywany jest główną liczbą kwantową. Stan $n = \infty$ odpowiada całkowitemu oderwaniu elektronu od atomu, czyli jonizacji atomu. W takiej sytuacji całkowita energia elektronu $E_\infty = 0$, a promień orbity $r_\infty = \infty$. Dla atomu wodoru energia jonizacji wynosi:

$$E_{jon.} = E_{\infty} - E_1 = 13,6 \text{ eV}. \quad (28.8)$$

Jak widać, konsekwencją kwantyzacji momentu pędu elektronu jest fakt, że zarówno promień orbity stacjonarnej, jak i energia elektronu w atomie mogą przyjmować wartości ze ściśle określonego dyskretnego (nieciągłego) zbioru, czyli te wielkości są również skwantowane.

Widmo promieniowania atomu wodoropodobnego

Zgodnie z drugim postulatem Bohra emisja promieniowania towarzyszy przejściu elektronu z i -tego (wyższego) do j -tego (niższego) stanu energetycznego, czyli z i -tej (bardziej oddalonej od jądra) na j -tą (bliższą jądra) orbitę stacjonarną. Korzystając z równania (28.7), energię emitowanych w tym procesie fotonów można wyznaczyć jako:

$$h\nu_{ji} = E_j - E_i = \frac{mZ^2e^4}{8\varepsilon_0^2h^2} \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_j^2} \right), \quad (28.9)$$

a ich częstotliwość:

$$\nu_{ji} = \frac{E_j - E_i}{h} = \frac{mZ^2e^4}{8\varepsilon_0^2h^3} \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_j^2} \right). \quad (28.10)$$

Wiedząc, że $\nu = c/\lambda$, można uzyskać wzór Rydberga, który pozwala wyznaczyć długości fal λ emitowanych przez atom w stanie wzbudzonym. Dla atomów wodoropodobnych przyjmuje on postać:

$$\frac{1}{\lambda_{ji}} = \frac{mZ^2e^4}{8\varepsilon_0^2h^3c} \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_j^2} \right) = R_{\infty}Z^2 \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_j^2} \right), \quad (28.11)$$

gdzie $R_{\infty} = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2h^3c}$ jest to stała Rydberga, która wynosi $R_{\infty} = 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$. Indeks ∞

oznacza, że stała wyznaczona została przy założeniu nieruchomego jądra o nieskończonej masie. W rzeczywistości jednak masa jądra M jest skończona, choć

znacznie większa od masy elektronu. Ten fakt uwzględnia się, dzieląc stałą Rydberga R_∞ przez czynnik $(1 + \frac{m}{M})$.

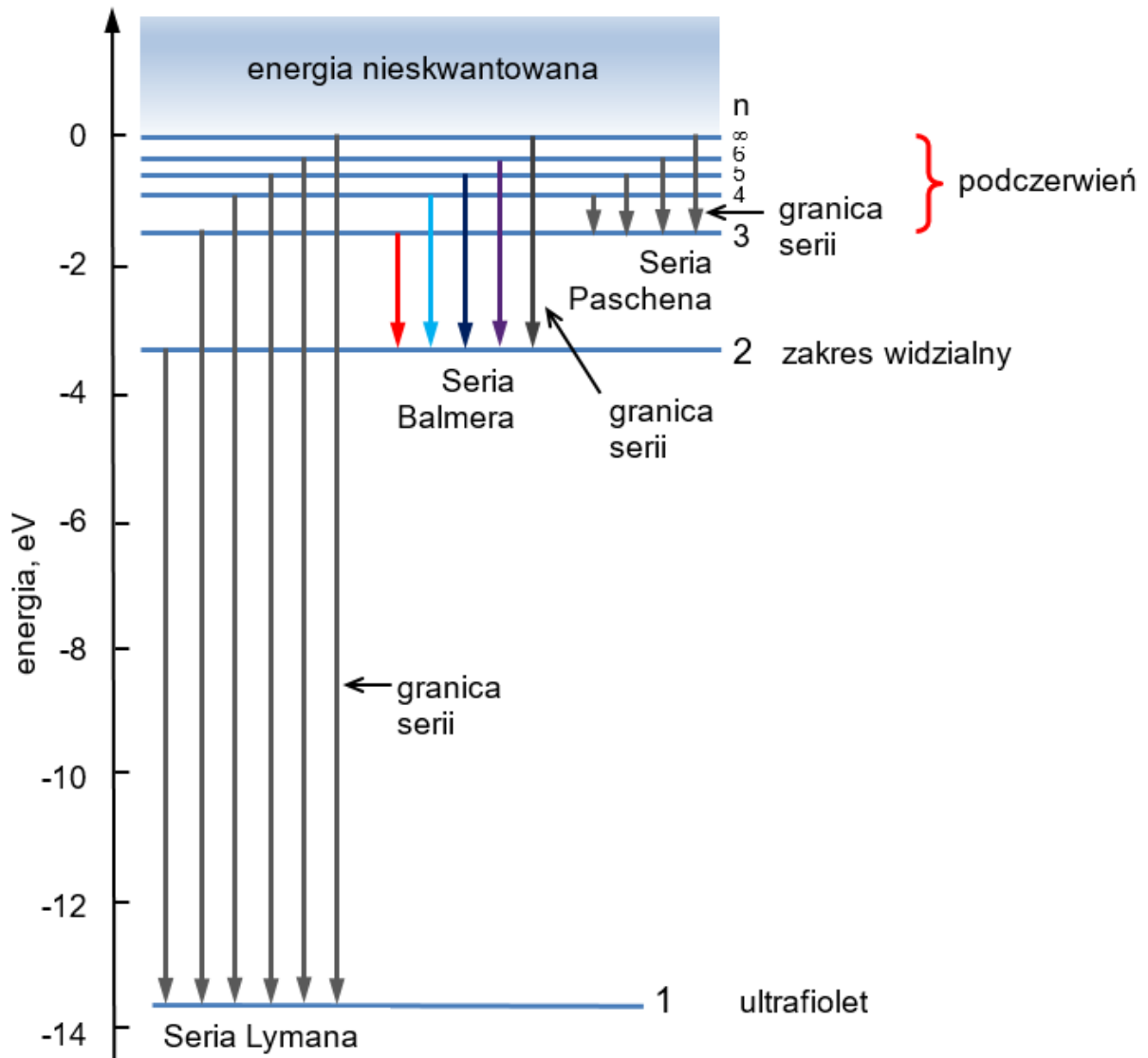
Z równań (28.9) – (28.11) wynika, że wszystkie linie widmowe (częstotliwości) promieniowania emitowanego (lub absorbowanego) przez dany atom można połączyć w tzw. serie widmowe, czyli zbiór linii widmowych opisanych wzorem (28.10) przy ustalonej wartości n_i , tj. powstałych podczas przejścia elektronu z wyżej położonych orbit, opisanych liczbą kwantową $n_j = (n_i + 1), (n_i + 2), \dots$, na orbitę o ustalonej wartości n_i . Serie te leżą w różnych zakresach częstotliwości promieniowania.

Przykładowo widmo emisyjne atomu wodoru składa się z serii widmowych, które tradycyjnie są nazywane:

- dla $n_i = 1, n_j = 2, 3, 4 \dots$ – seria Lymana (w zakresie ultrafioletu),
- dla $n_i = 2, n_j = 3, 4, 5 \dots$ – seria Balmera (w zakresie widzialnym),
- dla $n_i = 3, n_j = 4, 5, 6 \dots$ – seria Paschena (w zakresie podczerwieni),
- dla $n_i = 4, n_j = 5, 6, 7 \dots$ – seria Bracketta (w zakresie podczerwieni),
- dla $n_i = 5, n_j = 6, 7, 8 \dots$ – seria Pfunda (w zakresie podczerwieni),
- dla $n_i = 6, n_j = 7, 8, 9 \dots$ – seria Humpreysa (w zakresie podczerwieni).

Na rys. 28.3 przedstawiono schemat poziomów energetycznych i możliwe przejścia elektronów dla atomu wodoru. W serii Balmera najlepiej widoczne są trzy intensywne linie: H_α ($n_j = 3$, czerwona), H_β ($n_j = 4$, niebiesko-zielona) oraz H_γ ($n_j = 5$, fioletowa).

Widmo promieniowania emitowanego przez wzbudzony atom jest jego cechą charakterystyczną. Analiza widma promieniowania emitowanego (absorbowanego) przez substancję, czyli tzw. spektroskopia, jest jedną z podstawowych metod fizycznych badania jej składu chemicznego. Metoda ta jest skuteczna w przypadku badania substancji w stanie gazowym. Wtedy obraz poziomów energetycznych atomów nie jest zniekształcony wskutek oddziaływań z innymi atomami. Gdy materia jest w stanie skondensowanym, indywidualne cechy atomów stają się trudne do rozpoznania.



Rys. 28.3. Schemat poziomów energetycznych atomu wodoru

Przebieg ćwiczenia

Monochromator pryzmatyczny:

1. W celu wycechowania monochromatora na ławie optycznej umieścić i włączyć lampę rtęciową.
2. Wyregulować ostrość widzianego obrazu, dobierając odpowiednie ustawienie wysuwanego tubusu.
3. Korzystając z tablic fizycznych, zanotować na karcie pomiarowej długości fal emitowane przez atomy rtęci.

4. Obserwując widmo rtęci, przyporządkować wypisanym długościom fal linie widmowe o konkretnych kolorach i zanotować wskazania skali monochromatora odpowiadające tym liniom (długościom fal). W tym celu za pomocą pokrętła ze skalą przesuwać obserwowane widmo tak, aby analizowana linia widmowa pokrywała się z nieruchomym wskaźnikiem (grot strzałki) widzianym w polu widzenia. **Uwaga:** W przypadku szerokich linii widmowych lub dużego ich zagęszczenia zanotować wskazania skali odpowiadające ich granicom.
5. Na ławie optycznej umieścić oprawkę lamp spektralnych z zasilaczem, zainstalować w oprawce lampę i włączyć.
6. W celu zidentyfikowania składu badanych lamp zanotować wskazania skali monochromatora odpowiadające liniom widmowym emitowanym przez kolejne lampy spektralne wskazane przez prowadzącego ćwiczenie. Zanotować również kolory tych linii.

Spektrometr siatkowy:

7. Włączyć komputer i uruchomić program „Spm”. Zapoznać się z instrukcją spektrometru światłowodowego, która przedstawiona jest na ekranie monitora.
8. Umieścić końcówkę światłowodu w uchwycie tak, aby zbierał światło emitowane przez badaną lampę spektralną.
9. Włączyć zasilacz spektrometru do sieci, załączyć spektrometr i zasilacz badanej lampy oraz wybrać funkcję „Pomiar”, znajdującą się na pasku narzędzi.
10. Zarejestrować widmo pochodzące od badanej lampy przez naciśnięcie na ekranie monitora klawisza „Pomiar”.
11. Przesuwając myszkę, ustawić „krzyż” na poszczególnych pikach i odczytać z ekranu monitora długości fal, dla których występują, oraz wysokość pików (odpowiadającą natężeniu światła o danej długości fali).
12. Dla kolejnych lamp spektralnych mocowanych w oprawce z zasilaczem wykonać czynności opisane w punktach 10. i 11.

Opracowanie wyników

Monochromator pryzmatyczny:

1. Korzystając z danych tablicowych oraz wyników badań widma emisyjnego rtęci, sporządzić wykres zależności długości fali obserwowanego w monochromatorze promieniowania od wskazania na skali monochromatora (tzn. sporządzić krzywą cechowania monochromatora).
2. Wykorzystując krzywą cechowania monochromatora, znaleźć długości fal promieniowania emitowanego przez lampy spektralne badane w punkcie 6. przebiegu ćwiczenia i oszacować ich niepewność.
3. Narysować widmo każdej z badanych lamp: odłożyć względem osi długości fali zaobserwowane linie widmowe. Przedstawić ich analizę porównawczą.
4. Porównując długości fal zaobserwowanych linii widmowych z danymi tablicowymi, zidentyfikować pierwiastki znajdujące się w zbadanych lampach spektralnych.
5. Dla każdej z linii H_{α} , H_{β} oraz H_{γ} widma wodoru obliczyć wartość stałej Rydberga ze wzoru (28.11). Następnie obliczyć wartość średnią i jej niepewność. Zapisać wynik końcowy i porównać z danymi literaturowymi.

Spektrometr siatkowy:

6. Przedstawić widma zarejestrowane dla każdej z lamp, badanych w punktach 11. i 12. przebiegu ćwiczenia, oraz ich analizę porównawczą.
7. Porównując długości fal, dla których występują piki na widmach obserwowanych w punktach 11. i 12. przebiegu ćwiczenia, z danymi tablicowymi, zidentyfikować pierwiastki znajdujące się w przebadanych lampach spektralnych.
8. Dla każdej z linii H_{α} , H_{β} oraz H_{γ} widma wodoru obliczyć wartość stałej Rydberga ze wzoru (28.11). Następnie obliczyć jej średnią ważoną oraz niepewność. Zapisać wynik końcowy i porównać z danymi literaturowymi.

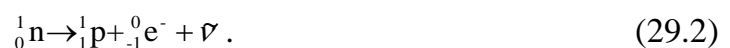
29. WYZNACZANIE MAKSYMALNEJ ENERGII I ZASIĘGU PROMIENIOWANIA β W CIAŁACH STAŁYCH ORAZ POMIAR DAWKI PROMIENIOWANIA JĄDROWEGO

Wszystkie pierwiastki istniejące w przyrodzie można podzielić na trwałe i takie, których jądra ulegają samorzutnemu rozpadowi promieniotwórczemu. Pierwiastki ulegające rozpadowi nazywane są promieniotwórczymi lub radioaktywnymi, ponieważ w trakcie takiego rozpadu emitowane jest promieniowanie nazywane promieniowaniem jądrowym. Jednocześnie jądro pierwiastka promieniotwórczego w wyniku rozpadu ulega przemianie w jądro innego pierwiastka.

W zależności od rodzaju przemiany jądro może emitować promieniowanie α , β lub γ . Promieniowanie α jest to emisja jąder atomu helu, w wyniku czego jądro pierwiastka promieniotwórczego przekształca się w jądro innego pierwiastka zgodnie z zapisem:



Promieniowanie β jest to emisja elektronów (promieniowanie β^-) lub pozytonów (promieniowanie β^+). Rodzaj emitowanej cząstki zależy od przemiany zachodzącej w jądrze. W przypadku rozpadu β^- w jądrze atomowym zachodzi przemiana neutronu w proton z jednoczesną emisją elektronu i cząstki zwanej antyneutrinem:



Jądro takiego pierwiastka przekształca się w jądro innego pierwiastka zgodnie z równaniem:



W przypadku rozpadu β^+ w jądrze atomowym zachodzi przemiana protonu w neutron z jednoczesną emisją pozytonu i cząstki zwanej neutrinem:



Jądro pierwiastka przekształca się w jądro innego pierwiastka zgodnie z równaniem:

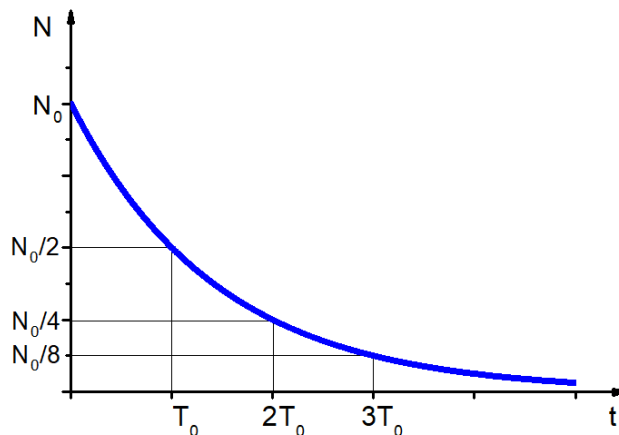


Promieniowanie γ jest to promieniowanie elektromagnetyczne towarzyszące przemianom α i β . Jądra atomowe powstałe po rozpadzie α lub β są najczęściej w stanie wzbudzonym. Przechodząc do stanu podstawowego, wypromieniowują nadmiar energii w postaci kwantu promieniowania elektromagnetycznego o bardzo dużej częstotliwości, a tym samym bardzo dużej energii.

Nie można przewidzieć, kiedy dane jądro pierwiastka promieniotwórczego ulegnie rozpadowi, ale można określić ilościową zmianę liczby tych jąder w czasie. Opisuje to prawo rozpadu promieniotwórczego:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (29.6)$$

gdzie: N_0 – liczba jąder w chwili początkowej, $N(t)$ – liczba jąder, które po czasie t nie uległy jeszcze rozpadowi, λ – stała rozpadu (stała charakteryzująca prawdopodobieństwo rozpadu pojedynczego jądra w jednostce czasu), $\tau = \lambda^{-1}$ – średni czas życia jąder (czas, po którym pozostaje $1/e$ pierwotnej liczby jąder). Graficznie prawo rozpadu przedstawia rys. 29.1.



Rys. 29.1. Wykres zależności liczby jąder pierwiastka promieniotwórczego od czasu $N(t)$

Czas, po którym liczba jąder w wyniku rozpadu zmniejsza się o połowę, nazywany jest okresem połowicznego zaniku T :

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}. \quad (29.7)$$

Każde źródło promieniotwórcze ma swoją aktywność A , która określa liczbę rozpadów jąder atomowych zachodzących w danym źródle w jednostce czasu:

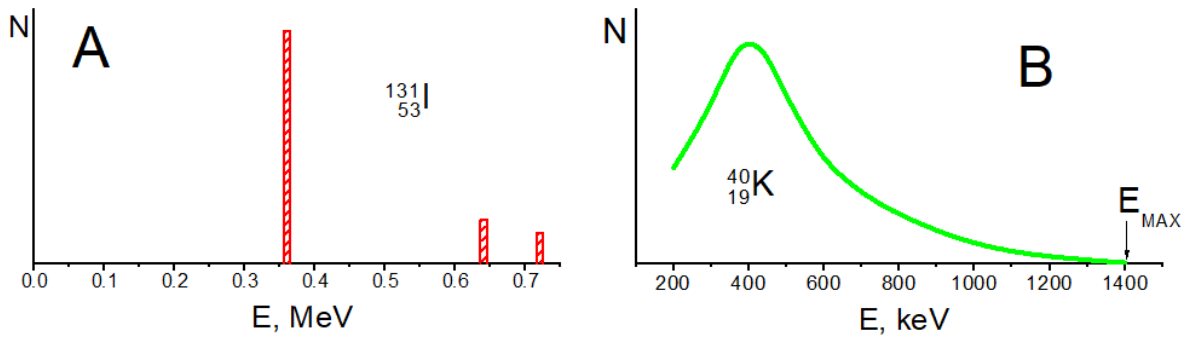
$$A = -\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t}, \quad (29.8)$$

gdzie A_0 jest aktywnością w chwili początkowej. Aktywność źródła zmniejsza się wykładniczo z czasem. Jednostką aktywności w układzie SI jest 1 Bq (bekerel). Aktywność wynosi 1 Bq, jeżeli w czasie 1 s rozpadowi ulega 1 jądro atomowe (1 Bq = 1 s⁻¹).

Ważnym parametrem charakteryzującym promieniowanie jądrowe emitowane przez dany pierwiastek promieniotwórczy (źródło promieniotwórcze) jest jego energia. Wyraża się ją w jednostkach eV (elektronowolt). 1 eV jest to energia, jaką uzyska elektron w polu elektrycznym o różnicy potencjałów 1 V:

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}. \quad (29.9)$$

Widmo energetyczne promieniowania jądrowego, czyli rozkład energii cząstek (zależność liczby emitowanych cząstek od ich energii), w przypadku promieniowania α i γ jest widmem liniowym (rys. 29.2a), tzn. powstające w czasie rozpadu cząstki mają ściśle określoną wartość energii charakterystyczną dla danego jądra promieniotwórczego. W przypadku rozpadu β widmo energetyczne jest widmem ciągłym, tzn. cząstki powstające w czasie rozpadu mogą mieć każdą wartość energii zawartą w przedziale od 0 do pewnej energii maksymalnej E_{MAX} (rys. 29.2b). Związane jest to z tym, że w czasie rozpadu β emitowane są zawsze dwie cząstki (pozyton i neutrino lub elektron i antyneutrino). Dostępna energia rozkłada się w różnym stopniu pomiędzy tymi dwiema cząstkami. Energia maksymalna odpowiada skrajnej sytuacji, gdy całą energię ma cząstka β .



Rys. 29.2. A – liniowe widmo energetyczne promieniowania γ jodu I-131; B – ciągłe widmo energetyczne promieniowania β potasu K-40

Cząstki α i β , przechodząc przez materię, doznają zderzeń sprężystych i niesprężystych. W wyniku zderzeń niesprężystych cząstka traci energię, czyli zmniejsza swoją prędkość. Jeżeli zderzenie zachodzi z elektronami atomów, dochodzi do ich wzbudzenia lub jonizacji. Dlatego promieniowanie jądrowe zaliczane jest do promieniowania jonizującego. Taki proces jest dominujący w przypadku promieniowania α . Cząstki β mogą ulec zderzeniu także z jądrem atomowym. Dochodzi wtedy do emisji energii w postaci promieniowania hamowania (zaliczanego do promieniowania X). Promieniowanie γ może wywołać zjawisko fotoelektryczne, zjawisko Comptona lub zjawisko tworzenia par elektron-pozyton.

W każdym przypadku promieniowanie, przechodząc przez materię, ulega więc osłabieniu (pochłanianiu). Osłabienie to ma charakter wykładniczy:

$$I = I_0 e^{-\mu x}, \quad (29.10)$$

gdzie: I_0 – natężenie promieniowania przed ośrodkiem, I – natężenie promieniowania za ośrodkiem, x – grubość ośrodka, μ – liniowy współczynnik absorpcji. Wzór (29.10) można zapisać również w innej postaci:

$$I = I_0 e^{-\frac{\mu}{\rho} \rho x}. \quad (29.11)$$

Wielkość $\frac{\mu}{\rho}$ nazywana jest masowym współczynnikiem pochłaniania. Jest on prawie niezależny od rodzaju ośrodka.

Po zlogarytmowaniu wzoru (29.11) otrzymuje się zależność, z której można obliczyć masowy współczynnik pochłaniania $\frac{\mu}{\rho}$:

$$\ln(I) = \ln(I_0) - \frac{\mu}{\rho} \rho x. \quad (29.12)$$

Dla danej cząstki o określonej energii początkowej istnieje pewna droga, po przebyciu której traci ona całą swoją energię. Długość tej drogi w danym ośrodku nazywana jest zasięgiem promieniowania. Zasięg promieniowania uzależniony jest od jego energii i rodzaju. Promieniowanie α jest słabo przenikliwe. Zwykła kartka całkowicie je pochłania. Bardziej przenikliwe jest promieniowanie β . Żeby zostało całkowicie pochłonięte, potrzebna jest niezbyt gruba warstwa aluminium. Najbardziej przenikliwe jest promieniowanie γ . Teoretycznie nie istnieje żadna przeszkoda, w której promieniowanie γ zostałoby całkowicie pochłonięte, może być jedynie osłabione, tym skuteczniej, im cięższe są pierwiastki wchodzące w jej skład.

Ochrona przed promieniowaniem jądrowym

Z punktu widzenia ochrony przed promieniowaniem jądrowym podstawowym pojęciem jest dawka. Rozróżniamy dawkę ekspozycyjną, dawkę pochłoniętą, dawkę równoważną i dawkę skuteczną (efektywną).

Dawka ekspozycyjna jest miarą jonizacji zachodzącej w powietrzu pod wpływem promieniowania elektromagnetycznego (γ , X). Oznacza liczbę ładunków jednego znaku wytworzonych pod wpływem promieniowania w jednostce masy: jednostką dawki ekspozycyjnej jest 1 C/kg lub dawniej 1 R (rentgen), przy czym $1 \text{ R} = 2,58 \cdot 10^{-4} \text{ C/kg}$.

Dawka pochłonięta D jest miarą energii promieniowania pochłoniętej w jednostce masy napromieniowanej substancji. Jednostką dawki pochłoniętej jest 1 Gy (grej).

$1 \text{ Gy} = 1 \text{ J/kg}$. Często dawkę pochłoniętą wyraża się w centygrejach $1 \text{ cGy} = 0,01 \text{ Gy}$ lub dawniej 1 rd (rad), przy czym $1 \text{ cGy} = 1 \text{ rd (rad)}$.

Biologiczne skutki oddziaływania promieniowania jądrowego na organizmy zależą nie tylko od ilości pochłoniętej energii, lecz także od rodzaju promieniowania, rodzaju tkanki napromieniowanej, rozkładu dawki w czasie czy wielkości obszaru napromieniowanego. Niektóre z powyższych czynników udało się uwzględnić w opisie ilościowym. Znając dawkę pochłoniętą w powietrzu (np. na podstawie obliczeń lub pomiarów), można określić dawkę pochłoniętą w wodzie, która jest dobrym modelem tkanki. Energię pochłoniętą w wodzie można obliczyć na podstawie stosunku liczby elektronów w 1 gramie wody do liczby elektronów w 1 gramie powietrza. Wynosi on

1,13. Stąd dawce pochłoniętej 0,87 cGy w powietrzu odpowiada dawka pochłonięta w wodzie 1cGy.

Dawka równoważna H_T jest to dawka pochłonięta w tkance lub narządzie z uwzględnieniem rodzaju promieniowania:

$$H_T = w_R D, \quad (29.13)$$

gdzie: D jest to dawka pochłonięta, w_R jest współczynnikiem wagowym promieniowania (tab. 29.1). Jednostką dawki równoważnej jest 1 Sv (siwert).

Tabela 29.1

Współczynniki wagowe promieniowania

Rodzaj promieniowania	Współczynnik wagowy w_R
X, γ , β	1
Neutrony E < 10 keV	5
10 keV < E < 100 keV	10
100 keV < E < 2 MeV	20
2 MeV < E < 20 MeV	10
E > 20 MeV	5
protony	5
α , ciężkie jądra	20

Tabela 29.2

Współczynniki wagowe tkanek

Rodzaj narządu	Współczynnik wagowy tkanek w_T
gonady	0,2
Gruzoły piersiowe	0,05
Czerwony szpik kostny, płuca, żołądek, jelito grube	0,12
Tarczycyca, pęcherz moczowy, wątroba, przełyk	0,05
Skóra, powierzchnia kości	0,01
pozostałe	0,05

Dawka skuteczna (efektywna) E_s jest to suma dawek równoważnych pochodzących od zewnętrznego i wewnętrznego narażenia z uwzględnieniem rodzaju narządu czy tkanki napromieniowanej:

$$E_s = w_{T1}H_1 + w_{T2}H_2 + \dots, \quad (29.14)$$

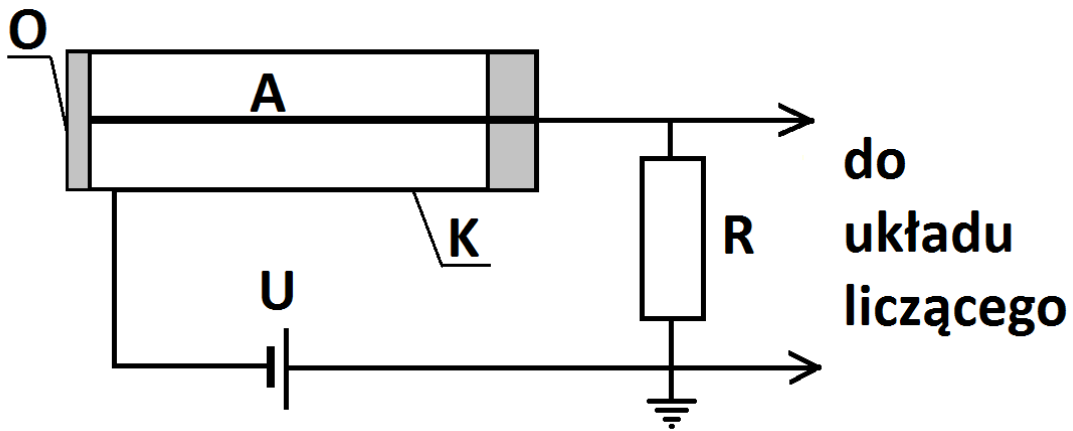
gdzie w_T jest współczynnikiem wagowym narządu lub tkanki (tab. 29.2). Jednostką dawki skutecznej również jest 1 Sv.

Definiuje się też pojęcie **mocy** poszczególnych dawek jako dawki promieniowania w jednostce czasu. Urządzenia umożliwiające określenie dawki promieniowania, tzw. radiometry, mierzą moc dawki. Mnożąc moc dawki przez czas oddziaływania promieniowania, wyznacza się dawkę, na jaką narażony został dany organizm. Ponieważ promieniowanie jądrowe jest szkodliwe, wprowadzono pojęcie dawki granicznej, na jaką może być narażony człowiek w związku z działalnością zawodową. Dawka graniczna dla pracowników, uczniów, studentów i praktykantów w wieku powyżej 18 lat wynosi 20 mSv, dla uczniów, studentów i praktykantów w wieku poniżej 18 lat wynosi 6 mSv, a dla osób z ogółu ludności oraz uczniów, studentów i praktykantów w wieku poniżej 16 lat 1 mSv. Dawki te nie obejmują narażenia osób poddawanych promieniowaniu w celach medycznych oraz promieniowania naturalnego. Dawka skuteczna wynikająca z promieniowania naturalnego (tzw. promieniowania tła) wynosi średnio 2,4 mSv/rok.

Licznik Geigera-Müllera

Najpopularniejszym przyrządem służącym do rejestracji promieniowania jądrowego jest licznik Geigera-Müllera (G-M) (rys. 29.3). Składa się on z cylindrycznej katody K i anody A w postaci metalowego drutu przeciągniętego wzdłuż osi cylindra. Przestrzeń między elektrodami jest zazwyczaj wypełniona rozrzedzonym argonem z domieszką par alkoholu. Jedną z podstaw cylindra stanowi tzw. okienko mikowe O, przez które do wnętrza licznika przedostają się cząstki. Do elektrod licznika przykłada się wysokie napięcie U , które wytwarza między nimi pole elektryczne. Cząstka promieniowania, wchodząc do wnętrza licznika, jonizuje gaz. Powstałe elektrony są przyspieszane w polu elektrycznym i wywołują dalszą jonizację – dochodzi do krótkotrwałego ($\sim 10^{-4}$ s) wyładowania lawinowego. W czasie wyładowania przez licznik płynie prąd elektryczny, który powoduje na włączonym szeregowo z licznikiem oporniku R spadek

napięcia w postaci impulsu napięciowego. Impulsy te są przez dalsze urządzenia elektroniczne wzmacniane i liczone.



Rys. 29.3. Schemat licznika Geigera-Müllera: A – anoda, K – cylindryczna katoda, O – okienko mikrowe, R – opornik, U – napięcie zasilające

Przebieg ćwiczenia

1. Na podstawie świadectwa pomiarowego źródła promieniowania zanotować jego symbol chemiczny, okres połowicznego rozpadu oraz aktywność w chwili sporządzenia świadectwa pomiarowego wraz z datą.
2. Dokonać pomiaru liczby zliczeń tła (gdy nie ma preparatu promieniotwórczego przed licznikiem) w określonym czasie.
3. Przed okienkiem licznika umieścić preparat promieniotwórczy i zmierzyć liczbę zliczeń licznika w określonym czasie.
4. Zmierzyć grubość blaszki pochłaniającej i umieścić ją pomiędzy preparatem a okienkiem licznika. Zmierzyć liczbę zliczeń w określonym czasie.
5. Pomiary powtarzać, zwiększając każdorazowo liczbę blaszek, aż liczba zliczeń osiągnie poziom tła.
6. Radiometrem EKO-D zmierzyć moc dawki przed zamkniętym domkiem ołowianym zawierającym preparat promieniotwórczy.

Opracowanie wyników

1. Na podstawie danych spisanych ze świadectwa pomiarowego obliczyć stałą rozpadu, średni czas życia oraz aktywność źródła w chwili wykonywania ćwiczenia.
2. Obliczyć natężenie promieniowania tła (czyli liczbę zliczeń w jednostce czasu I_t).
3. Korzystając z wyników pomiarów grubości blaszek oraz teoretycznych wartości gęstości, obliczyć masę absorbenta na jednostkę powierzchni ρx w mg/cm^2 .
4. Obliczyć natężenie promieniowania I (czyli liczbę zliczeń w jednostce czasu I_t) przechodzącego przez blaszki.
5. Sporządzić wykres zależności logarytmu naturalnego natężenia promieniowania I od masy absorbenta na jednostkę powierzchni ρx . Na wykresie zaznaczyć linią prostą poziom natężenia promieniowania tła I_t .
6. Metodą najmniejszych kwadratów aproksymować linią prostą wyniki zaznaczone na wykresie zależności $\ln(I)$ od ρx . Wziąć pod uwagę tylko tę część wyników, które znajdują się powyżej poziomu tła.
7. Na podstawie równania prostej aproksymującej $\ln I = a \cdot \rho x + b$ oraz równania (29.12) wyznaczyć wartość masowego współczynnika pochłaniania $\frac{\mu}{\rho}$ oraz liniowego współczynnika pochłaniania μ . Zapisać poprawnie wyniki końcowe.
8. Znaleźć maksymalny zasięg promieniowania, określając punkt przecięcia prostej aproksymującej $\ln I = a \cdot \rho x + b$ z prostą oznaczającą poziom natężenia promieniowania tła I_t .
9. Na podstawie tab. 29.3 sporządzić wykres zależności zasięgu maksymalnego promieniowania β od jego energii maksymalnej. Odczytać z wykresu wartość energii maksymalnej stosowanego źródła promieniotwórczego.
10. Obliczyć roczną dawkę skuteczną, uwzględniając współczynnik wagowy promieniowania emitowanego przez źródło promieniotwórcze (do obliczeń przyjmując, że w roku jest 50 tygodni roboczych, a w tygodniu 40 godzin).
11. Uzyskaną wartość dawki rocznej porównać z wartościami granicznymi.

Tabela. 29.3

Zależność zasięgu maksymalnego x_{MAX} promieniowania β od jego energii maksymalnej E_{MAX}

$E_{\text{MAX}},$ keV	19	155	306	480	580	690	830	1022	1320	1500	1708
$x_{\text{MAX}},$ mg/cm^2	0.62	34	80	150	200	250	320	410	560	690	800

30. WYZNACZANIE CHARAKTERYSTYKI ORAZ SPRAWNOŚCI OGNIWA WODOROWEGO I ELEKTROLIZERA

Obecnie większość energii wytwarzanej na świecie jest pozyskiwana ze źródeł „nieodnawialnych” (węgiel, ropa, gaz). Jednakże coraz śmielej do naszego życia codziennego wprowadzane są technologie oferujące pozyskiwanie energii ze źródeł „odnawialnych”, które są bardzo atrakcyjne ze względu na brak zanieczyszczeń środowiska naturalnego, np. ogniwa wodorowe. Paliwo do tego typu urządzeń (wodór) może być wytwarzane m.in. w procesie elektrolizy wody.

Dwoma najważniejszymi elementami badanego układu wytwarzającego energię są:

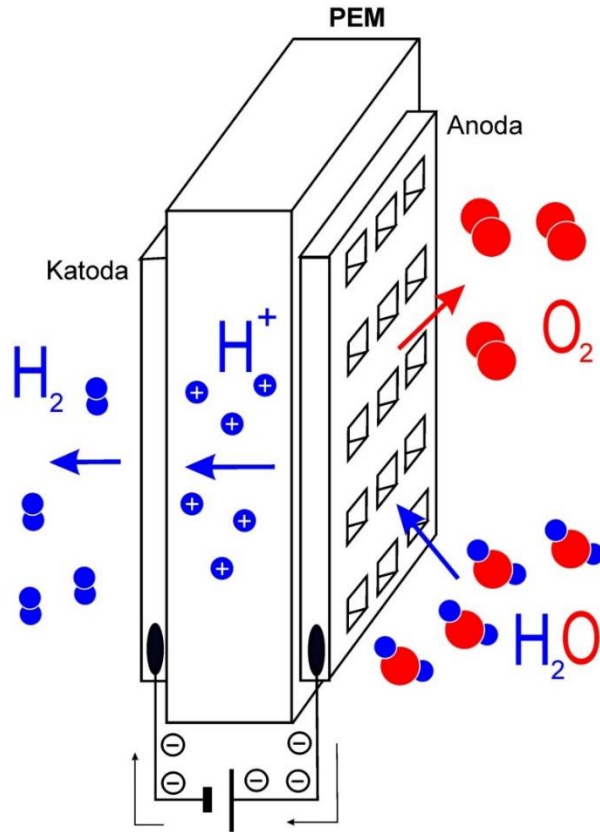
- elektrolizer PEM (Proton Exchange Membrane electrolysis);
- ogniwo paliwowe PEM (Proton Exchange Membrane fuel cell).

Elektrolizer (rys. 30.1) jest układem służącym do elektrolizy wody, czyli jej rozkładu na tlen i wodór (który wykorzystywany będzie do zasilania ogniwa wodorowego) z zastosowaniem prądu elektrycznego. Najważniejszymi elementami w budowie elektrolizera są: dwie elektrody (katoda i anoda) wykonane z materiałów o własnościach katalitycznych (np. platyna Pt lub ruten Ru) oraz cienkiej membrany PEM (np. Nafion®) znajdującej się pomiędzy nimi, przepuszczającej protony (jony wodoru H^+).

W celu przeprowadzenia elektrolizy niezbędne jest przyłożenie do elektrod napięcia o wartości co najmniej 1,23 V (dla temperatury pokojowej), którego źródłem może być ogniwo fotowoltaiczne. Po przyłożeniu odpowiedniego napięcia na elektrodach zachodzą następujące reakcje:

- na anodzie cząsteczka wody utlenia się w ten sposób, że powstają cząsteczki tlenu, jony wodoru (protony, H^+) oraz uwalniane są elektrony wg poniższej reakcji:





Rys. 30.1. Schemat budowy oraz działania elektrolizera

- powstałe w ten sposób jony wodoru (H^+) wędrują przez membranę, docierając do katody, gdzie spotykają się z elektronami dostarczonymi ze źródła zasilania, w wyniku czego powstają cząsteczki wodoru:



- reasumując, w wyniku elektrolizy wody otrzymujemy gazowy wodór (na katodzie) oraz gazowy tlen (na anodzie), które możemy wykorzystać jako paliwo dla ogniwa wodorowego:



W procesie elektrolizy dostarczana z zewnątrz do elektrolizera energia elektryczna jest przetwarzana na energię chemiczną, magazynowaną w postaci uzyskanego tlenu oraz wodoru.

Cechą charakterystyczną elektrolizera jest jego sprawność. Jest ona określana stosunkiem energii uzyskanej podczas elektrolizy (w zmagazynowanym wodorze, W_H) do energii dostarczonej z zewnętrznego źródła zasilania (W_E):

$$\eta = \frac{W_H}{W_E}. \quad (30.4)$$

Znając napięcie U przyłożone do elektrod, natężenie prądu I płynącego pomiędzy elektrodami oraz czas trwania elektrolizy t , można wyznaczyć energię pobraną z zewnątrz wg poniższej zależności:

$$W_E = UIt. \quad (30.5)$$

Ilość energii zmagazynowanej w postaci uzyskanego wodoru obliczamy na podstawie znajomości liczby moli n powstałego wodoru oraz molowej entalpii reakcji ΔH :

$$W_H = n\Delta H. \quad (30.6)$$

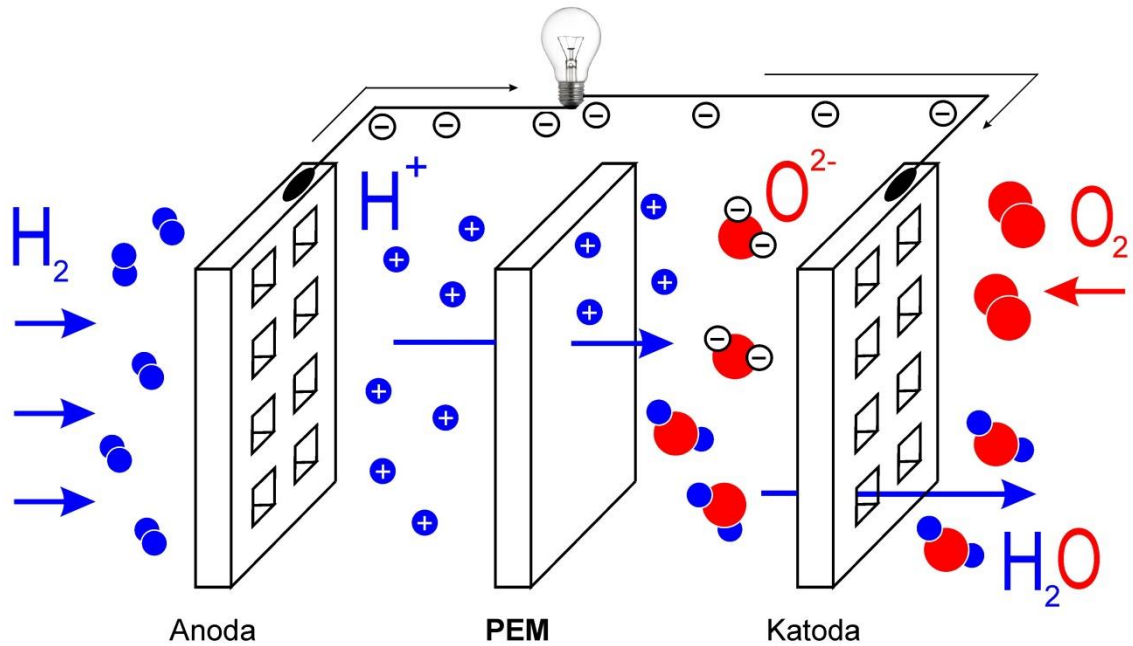
ΔH dla wodoru wynosi 286 kJ/mol, natomiast liczbę moli można wyznaczyć na podstawie znajomości objętości uzyskanego wodoru V oraz równania gazu doskonałego:

$$pV = nRT, \quad (30.7)$$

gdzie: p – ciśnienie atmosferyczne, R – stała gazowa, T – temperatura. Ostatecznie otrzymujemy poniższą zależność na sprawność elektrolizera:

$$\eta = \frac{W_H}{W_E} = \frac{\Delta H p V}{RTUIt}. \quad (30.8)$$

Ogniwo wodorowe (rys. 30.2) służy do zamiany energii chemicznej (w postaci dostarczanego do niego wodoru oraz tlenu) na energię elektryczną. Efektem ubocznym jest powstawanie wody czy też pary wodnej.



Rys. 30.2. Schemat budowy oraz działania ogniwa wodorowego

Podobnie jak w przypadku elektrolizera ogniwo paliwowe zbudowane jest z dwóch elektrod (anody i katody), również wykonanych z materiałów o własnościach katalitycznych, odseparowanych za pomocą membrany PEM. Zastosowana membrana umożliwia przepływ jedynie jonów (H^+). Schematycznie zasadę działania ogniwa wodorowego można przedstawić w następujący sposób:

- do anody stale dostarczany jest wodór H_2 , natomiast do katody tlen O_2 ;
- na anodzie zachodzi reakcja chemiczna polegająca na rozbiciu wodoru na proton i elektron,



- powstałe jony wodoru (H^+) przedostają się przez membranę, docierając do katody, jednocześnie procesom elektrochemicznym towarzyszy przepływ elektronów (powstałych podczas rozbicia cząsteczek wodoru na anodzie) do katody z ominięciem nieprzepuszczalnej dla nich membrany. Na katodzie napotyka utleniacz (tlen) i zachodzi tam reakcja:



- reasumując, w rezultacie elektrochemicznej reakcji tlenu i wodoru powstają prąd elektryczny, woda oraz ciepło.

Analogicznie do przypadku elektrolizera możemy wyznaczyć sprawność ogniwa wodorowego, a więc stosunek uzyskiwanej energii elektrycznej do zużywanej energii chemicznej w postaci dostarczanego wodoru:

$$\eta = \frac{W_E}{W_H} = \frac{RTUIt}{\Delta H p V}, \quad (30.11)$$

gdzie: U , I – napięcie oraz natężenie prądu uzyskiwane z ogniwa, t – czas pracy ogniwa, V – zużyta objętość wodoru podczas pracy urządzenia, R – stała gazowa, T – temperatura.

Aby zwiększyć natężenie prądu płynącego w obwodzie, elektrody mają porowatą strukturę, co ma na celu powiększenie ich powierzchni czynnej, na której zachodzą wcześniej przedstawione reakcje. Niezwykle ważny jest również materiał katalityczny użyty do wyrobu elektrod. Przyspiesza on reakcje zachodzące na elektrodach. Jednocześnie ze względów ekonomicznych (np. cena platyny) należy osiągnąć kompromis pomiędzy wydajnością ogniwa a jego ceną.

Zalety ogniw paliwowych:

- prosta budowa,
- duża sprawność, rzędu 70%,
- czyste produkty uboczne procesu, np. woda,
- niehałaśliwe,
- modułowa budowa, a co za tym idzie – łatwość rozbudowy w miarę potrzeb,
- praca ciągła (konieczność stałego doprowadzania paliwa),
- nie zawierają ruchomych części.

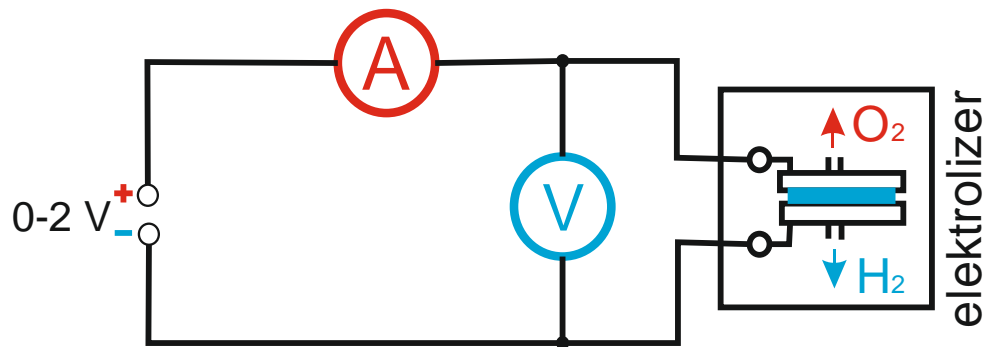
Wady ogniw paliwowych:

- drogie katalizatory,
- wytwarzają prąd stały,
- niskie napięcie uzyskiwane z pojedynczej komórki.

Przebieg ćwiczenia

Wyznaczanie charakterystyki prądowo-napięciowej elektrolizera:

1. Zbiorniczki napełnić wodą demineralizowaną do poziomu zawierającego się pomiędzy MIN. i MAX. **UŻYWAĆ WYŁĄCZNIE WODY DEMINERALIZOWANEJ!**

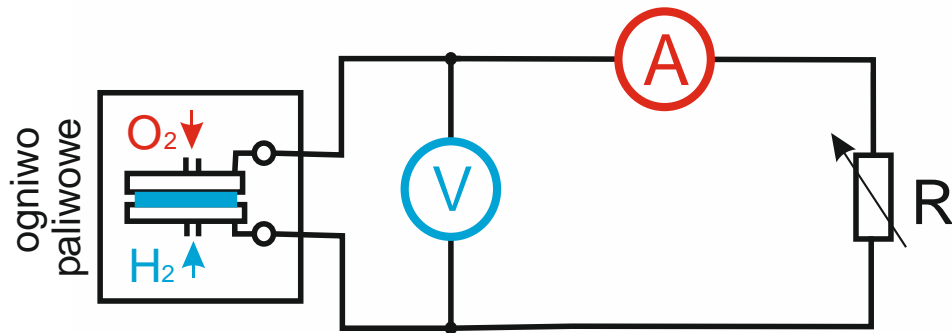


Rys. 30.3. Schemat układu do pomiaru charakterystyki prądowo-napięciowej elektrolizera

2. Połączyć układ pomiarowy wg schematu przedstawionego na rys. 30.3.
3. Nastawić na zasilaczu napięcie $U = 2\text{ V}$. **NIE PRZEKRACZAĆ NAPIĘCIA 2 V!**
Po upływie ok. 1 min zanotować wartość prądu płynącego w obwodzie.
4. Stopniowo zmniejszać podawane napięcie U wg skoku podanego przez prowadzącego, każdorazowo notując natężenie płynącego prądu I . Pomiędzy ustawieniem wartości napięcia a pomiarem powinno upłynąć co najmniej 30 s.
5. Pomiary powtórzyć dla rosnących wartości napięcia, nie przekraczając wartości maksymalnej 2 V.

Wyznaczanie charakterystyki prądowo-napięciowej ogniwa wodorowego:

6. Zbiorniczki napełnić wodą demineralizowaną do poziomu zawierającego się pomiędzy MIN. i MAX. **UŻYWAĆ WYŁĄCZNIE WODY DEMINERALIZOWANEJ!**
7. Połączyć układ pomiarowy wg schematu przedstawionego na rys. 30.4.
8. Ustawić wartość napięcia zasilania elektrolizera na wartość podaną przez prowadzącego zajęcia (1,3 – 2,0 V) i rozpocząć elektrolizę wody. **NIE PRZEKRACZAĆ NAPIĘCIA 2 V!**

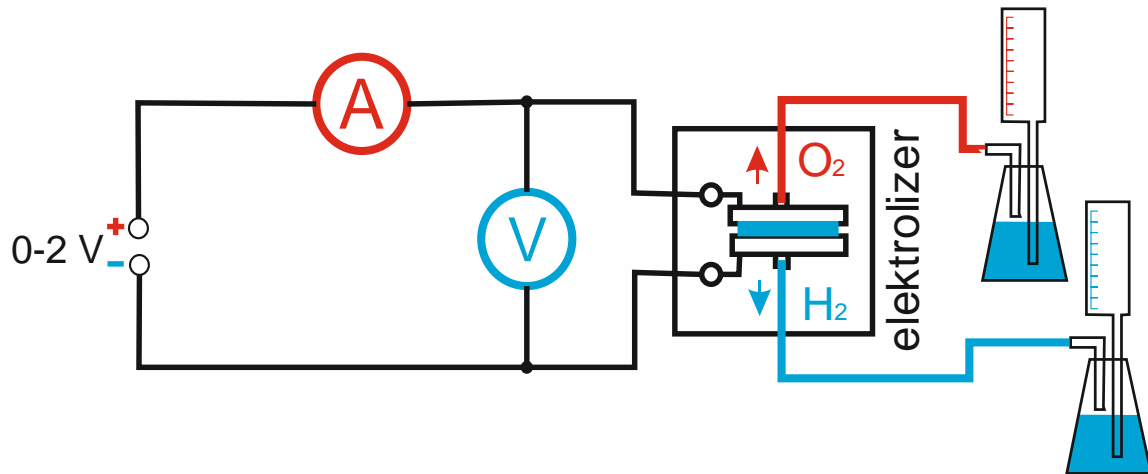


Rys. 30.4. Schemat układu do pomiaru charakterystyki prądowo-napięciowej ogniwa

9. Układ powinien pracować ok. 5 min bez obciążenia (rozwarne zaciski), a następnie kolejne 5 min z obciążeniem kilku Ω .
10. Rozpocząć pomiar charakterystyki prądowo-napięciowej ogniwa wodorowego:
 - zmierzyć napięcie ogniwa przy rozwartych zaciskach ($R = \infty \Omega$),
 - wykonać pomiary napięcia U oraz natężenia prądu I płynącego w obwodzie ogniwa dla oporów obciążenia R podanych przez prowadzącego zajęcia (zacząć od największych i stopniowo zmniejszać obciążenie),
 - **NIE ZWIERAĆ OGNIWA PALIWOWEGO!** ($R = 0 \Omega$), zwarcie trwające dłużej niż 10 s może spowodować uszkodzenie ogniwa,
 - pomiary powtórzyć dla różnych wartości napięć zasilania elektrolizera podanych przez prowadzącego.
11. W miejsce ogniwa wodorowego podpiąć ogniwo fotowoltaiczne, a następnie dla identycznych wartości oporów obciążenia powtórzyć pomiary z punktu 10.

Wyznaczanie sprawności elektrolizera:

12. Połączyć układ pomiarowy wg schematu przedstawionego na rys. 30.5.
13. Zbiorniczki elektrolizera napełnić wodą demineralizowaną do poziomu zawierającego się pomiędzy MIN. i MAX. **UŻYWAĆ WYŁĄCZNIE WODY DEMINERALIZOWANEJ!**
14. Zbiorniki gazometru (kolby Erlenmeyera) napełnić 300 ml wody demineralizowanej.
15. Ustawić na zasilaczu zadaną przez prowadzącego wartość napięcia, **NIE PRZEKRACZAĆ NAPIĘCIA 2 V!**

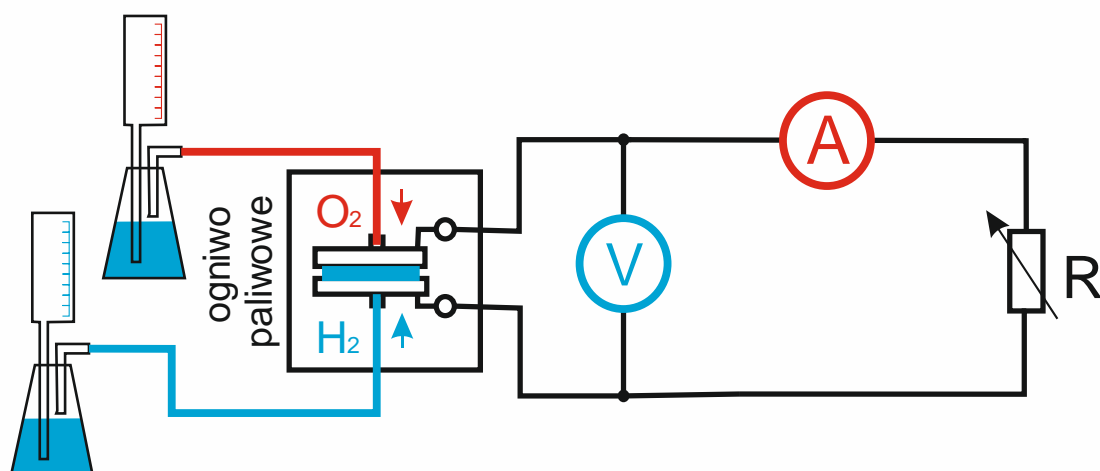


Rys. 30.5. Schemat układu do pomiaru sprawności elektrolizera

16. Wykonać pomiary objętości wydzielonego wodoru w funkcji czasu, wartości odczytywać z podziałki na cylindrycznym pojemniczku. Pomiar rozpocząć, gdy woda osiągnie poziom najniższego markera ($V = 0$ ml). Elektrolizer generuje wodór i tlen w stosunku 2:1.
17. Zmierzyć napięcie U oraz natężenie prądu I podczas elektrolizy.
18. Zanotować temperaturę T oraz ciśnienie p w pomieszczeniu.
19. Powtórzyć punkty 16.-18. dla innej wartości napięcia zasilania elektrolizera.

Wyznaczanie sprawności ogniwa wodorowego:

20. Połączyć układ pomiarowy wg schematu przedstawionego na rys. 30.6.



Rys. 30.6. Schemat układu do pomiaru sprawności ogniwa wodorowego

21. Wykorzystując elektrolizer, zgromadzić w zbiornikach gazometru wodór oraz tlen, niezbędne paliwa dla ogniwa wodorowego (punkty 12. – 18.); oba gazometry powinny zawierać identyczną objętość gazów.
22. Podłączyć rezystancją obciążenia R wg wartości podanej przez prowadzącego ćwiczenie, **NIE ZWIERAĆ OGNIWA PALIWOWEGO!** ($R = 0 \Omega$).
23. Zanotować wartość napięcia U oraz natężenia prądu I płynącego przez ogniwo.
24. Zanotować zmiany objętości wodoru zgromadzonego w gazometrze w funkcji czasu pracy ogniwa, wartości odczytywać z podziałki na cylindrycznym pojemniczku.
25. Zanotować temperaturę T oraz ciśnienie p w pomieszczeniu.

Opracowanie wyników

Przed przystąpieniem do wykonywania obliczeń wszystkie zmierzone wielkości proszę przeliczyć na jednostki układu SI.

Wyznaczanie charakterystyki prądowo-napięciowej elektrolizera:

1. Obliczyć niepewności pomiarowe zmierzonych wartości napięcia oraz natężenia prądu (wyniki zamieścić w tabeli).
2. Na wspólnym wykresie nanieść wyniki uzyskane podczas zmniejszania oraz zwiększania napięcia, sporządzić wykres $I = f(U)$.
3. Aproksymować prostoliniowe części charakterystyki $I = f(U)$ (proste aproksymujące nanieść na wykres).
4. Na podstawie dopasowanych współczynników kierunkowych a i b prostej aproksymującej wyznaczyć wartość napięcia, przy którym rozpoczyna się elektroliza wody.

Wyznaczanie charakterystyki prądowo-napięciowej ogniwa wodorowego:

5. Obliczyć niepewności pomiarowe zmierzonych wartości napięcia oraz natężenia prądu (wyniki zamieścić w tabeli).
6. Na wspólnym wykresie narysować charakterystyki napięcia od natężenia płynącego w układzie prądu $U = f(I)$ dla różnych napięć zasilania elektrolizera.
7. Policzyc wartości mocy czerpanych z ogniwa $P = U \cdot I$ wraz z niepewnościami (wyniki zamieścić w tabeli).
8. Wyliczone wartości mocy P przedstawić na jednym wykresie jako funkcję rezystancji obciążenia, $P = f(R)$.

9. Identyczne obliczenia przeprowadzić dla ogniwa fotowoltaicznego.
10. Zinterpretować różnice w uzyskanych charakterystykach.

Wyznaczanie sprawności elektrolizera:

11. Obliczyć niepewności pomiarowe zmierzonych wartości napięcia oraz natężenia prądu.
12. Narysować charakterystyki przedstawiające ilość generowanego przez elektrolizer wodoru w funkcji czasu, $V = f(t)$.
13. Aproxymować przedstawione zależności funkcjami liniowymi (proste aproksymujące nanieść na wykres).
14. Wykorzystując zależność (30.8), obliczyć sprawność η elektrolizera.
15. Korzystając z prawa propagacji niepewności, wyznaczyć niepewność obliczonej sprawności $\Delta\eta$.

Wyznaczanie sprawności ogniwa wodorowego:

16. Obliczyć niepewności pomiarowe zmierzonych wartości napięcia oraz natężenia prądu.
17. Narysować charakterystyki przedstawiające ilość paliwa zużywanego przez ogniwo w czasie pracy.
18. Wykorzystując zależność (30.11), obliczyć sprawność η ogniwa wodorowego.
19. Korzystając z prawa propagacji niepewności, wyznaczyć niepewność obliczonej sprawności $\Delta\eta$.
20. Porównać sprawność ogniwa wodorowego z innymi metodami wytwarzania energii.

BIBLIOGRAFIA

1. Chełkowi A.: Fizyka dielektryków, PWN, Warszawa 1993.
2. Chmielniak T.: Technologie energetyczne, WNT, Warszawa 2008.
3. Crawford F.C.: Fale, PWN, Warszawa 1973.
4. Czyżewski D., Zalewski S.: Laboratorium fotometrii i kolorimetrii, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2007.
5. Dryński T.: Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki, PWN, Warszawa 1978.
6. Duka P., Starczewska A., Wilk E.: Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki, Wydawnictwo Pracownia Komputerowa Jacka Skalmierskiego, Gliwice 2008.
7. Feynman R., Leighton R.B., Sands M.: Feynmana wykłady z fizyki, t. 2, cz. 1. Elektryczność i magnetyzm, PWN, Warszawa 2014.
8. Frisz S., Timoriewa A.: Kurs fizyki, t. III, PWN, Warszawa 1965.
9. Godlewski J.: Generacja i detekcja promieniowania optycznego, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1997.
10. Gostkowska B.: Ochrona radiologiczna. Wielkości, jednostki i obliczenia, Centralne Laboratorium Ochrony Radiologicznej, Warszawa 2005.
11. Griffiths D.J.: Podstawy elektrodynamiki, PWN, Warszawa 2020.
12. Halliday D., Resnick R., Walker J.: Podstawy fizyki, t. 1-5, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2011.
13. Hańderek J.: Wstęp do fizyki ferroelektryków, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 1971.
14. Helbig E.: Podstawy fotometrii, WNT, Warszawa 1975.
15. Huber M.T.: Teoria sprężystości, cz. I, PWN, Warszawa 1954.
16. Jaworski B., Dietłaf A., Miłkowska L., Siergiejew G.: Kurs fizyki, t. I, PWN, Warszawa 1981.
17. B. Jaworski, A. Dietłaf, Kurs fizyki, tom III, PWN, Warszawa 1981.
18. Jaworski B.M., Piński A.A.: Elementy fizyki, t. 1, PWN, Warszawa 1979.
19. Kittel C.: Wstęp do fizyki ciała stałego, PWN, Warszawa 1999.
20. Kittel C., Knight W.D., Ruderman M.A.: Mechanika, PWN, Warszawa 1975.

21. Kleszczewski Z.: Fizyka kwantowa, atomowa i ciała stałego, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1998.
22. Kleszczewski Z.: Podstawy fizyczne elektroniki ciała stałego, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2000.
23. Krajewski T. (red.): Zagadnienia fizyki dielektryków, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 1970.
24. Lewandowski W.M.: Proekologiczne odnawialne źródła energii, WNT, Warszawa 2010.
25. Ling S.J., Sanny J., Moebis W.: Fizyka dla szkół wyższych, t. 1-2, openstax Polska, Warszawa 2018.
26. Małek A., Wendeker M.: Ogniwa paliwowe typu PEM: teoria i praktyka, Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej, Lublin 2010.
27. Massalski J., Massalska M.: Fizyka dla inżynierów, t. 1, WNT, Warszawa 1975.
28. Meyer-Arendt J.R.: Wstęp do optyki, PWN, Warszawa 1977.
29. Nowak M. (red.): Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1994.
30. Nowina-Konopka M., Zięba A. i inni: Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki, cz. 2, Wydawnictwo AGH, Kraków 1992.
31. Pankove J.I.: Zjawiska optyczne w półprzewodnikach, WNT, Warszawa 1974.
32. Pawlicki G., Hrabowska J., Kujawski A.: Laboratorium fizyczne, Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1977.
33. Piekara A.H.: Mechanika ogólna, PWN, Warszawa 1986.
34. Purcell E.M.: Elektryczność i magnetyzm, PWN, Warszawa 1974.
35. Reif F.: Fizyka statystyczna, PWN, Warszawa 1975.
36. Respondowski R.: Laboratorium z fizyki, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1999.
37. Sawieliew I.W.: Wykłady z fizyki, t. 2, PWN, Warszawa 2002.
38. Szalimowa K.W.: Fizyka półprzewodników, PWN, Warszawa 1974.
39. Szczeniowski S.: Fizyka doświadczalna, cz. 1. Mechanika i akustyka, PWN, Warszawa 1980.
40. Szczeniowski S.: Fizyka doświadczalna, cz. 2. Ciepło i fizyka molekularna, PWN, Warszawa 1980.
41. Szczeniowski S.: Fizyka doświadczalna, cz. 3. Elektryczność i magnetyzm, PWN, Warszawa 1980.
42. Szczeniowski S.: Fizyka doświadczalna, cz. 4. Optyka, PWN, Warszawa 1980.

43. Szczeniowski S.: Fizyka doświadczalna, cz. 5. Fizyka atomowa, PWN, Warszawa 1980.
44. Szydłowski H.: Pracownia fizyczna, PWN, Warszawa 1997.
45. Zastawny A.: Zarys fizyki, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1997.
46. Zięba A.: Analiza danych w naukach ścisłych i technice, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2013.
47. Żagan W.: LED-y w technice świetlnej, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2019.
48. Characteristic and efficiency of PEM fuel cell and PEM electrolyser, instrukcja firmy PHYWE.
49. <https://www.phys.put.poznan.pl/pracowniafizyczna/pracowniafizyczna/instrukcja304-opracowanie.pdf>

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ
ul. Akademicka 5, 44-100 Gliwice
tel. (32) 237-13-81, faks (32) 237-15-02
www.wydawnictwopolitechniki.pl

UIW 48600

Sprzedaż i Marketing
tel. (32) 237-18-48
wydawnictwo_mark@polsl.pl

Sprawy wydawnicze
tel. (32) 237-13-81
wydawnictwo@polsl.pl

Ark. wyd. 20

e-wydanie

Podręcznik jest skierowany do studentów uczelni technicznych, a przede wszystkim studentów studiów pierwszego stopnia Politechniki Śląskiej, których zajęcia odbywają się na wydziałach znajdujących się w Katowicach. Jest zbiorem 29 ćwiczeń laboratoryjnych, których tematyka obejmuje cały przekrój zagadnień z podstaw fizyki. Stanowi doskonale uzupełnienie wykładów z fizyki prowadzonych na początkowych semestrach studiów kierunków inżynierskich. Dodatkowo podręcznik został uzupełniony o rozdział poświęcony metodom opracowania wyników pomiarów fizycznych, w związku z czym jest samodzielną pozycją pomagającą studentom realizować zajęcia w ramach Pracowni Fizycznej.

Słowa kluczowe:

- mechanika
- termodynamika
- elektrodynamika
- optyka
- fizyka współczesna
- fizyka jądrowa



e-ISBN 978-83-7880-803-9

Wydawnictwo Politechniki Śląskiej

44-100 Gliwice, ul. Akademicka 5
tel. (32) 237-13-81, faks (32) 237-15-02
www.wydawnictwopolitechniki.pl

Dział Sprzedaży i Reklamy

tel. (32) 237-18-48

e-mail: wydawnictwo_mark@polsl.pl

<http://www.polsl.pl/Jednostki/RJO2-WPS>