

Tomasz NIEDOBA, Tadeusz TUMIDAJSKI  
Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

## APROKSYMACJA KRZYWYCH SKŁADU ZIARNOWEGO ZA POMOCĄ RÓŻNYCH METOD STATYSTYCZNYCH

**Streszczenie.** W pracy zaprezentowano najczęściej występujące typy funkcji gęstości dla produktów rozdrabniania. Ze względu na występującą niejednorodność kruszonych materiałów klasyczne wzory (RRB, GAS) nie zawsze dają dokładne aproksymacje wyników. W związku z tym zastosowano nieparametryczną metodę szacowania funkcji gęstości za pomocą szeregów Fouriera. Otrzymane wyniki zostały zweryfikowane statystycznie i porównane z wynikami otrzymanymi za pomocą rozkładów Weibulla, GAS oraz logarytmiczno-normalnego. Ponadto oszacowano również dystrybuantę dla gęstości nadawy na przykładzie węgla.

## THE APPROXIMATION OF GRAIN COMPOSITION CURVES BY VARIOUS STATISTICAL METHODS

**Summary.** In the paper, the most often occurring types of density functions for comminution products were presented. Because of the large heterogeneity of crushed materials, the classical formulas (RRB, GAS) are not always accurate to approximate the results. Because of it, the non-parametric method of Fourier series were applied to estimate the density function. The results were statistically verified and compared with the results given by Weibull, GAS and log-normal density functions. Furthermore, the distribution function of feed density was estimated in the example of coal.

### 1. Wstęp

Aproksymacje funkcji gęstości lub dystrybuant rozkładów cech materiałów uziarnionych stosuje się w celu ich wykorzystania do wyznaczania pewnych charakterystyk liczbowych (średnia, wariancja, wskaźnik asymetrii), a także do dalszego ich wykorzystania w modelach przebiegu procesów i symulacji ich wyników. Podstawowym prawem rządzącym

procesami przeróbczymi jest prawo zachowania masy, znane w przeróbce jako równanie bilansu, które ma następującą (najbardziej ogólną) postać:

$$g(x) = \int_{w_{\min}}^{w_{\max}} p(w, x) f(w) dw \quad (1)$$

gdzie:  $g(x)$  jest funkcją gęstości cechy  $X$  w produkcie,  $p(w, x)$  - funkcją określającą prawdopodobieństwo przejścia ziarn nadawy o wartościach cechy  $w$  do frakcji elementarnej o wartości cechy  $x$ , a  $f(w)$  - funkcją gęstości rozkładu cechy  $W$  w nadawie. Zakładając znajomość funkcji  $p(w, x)$  i przeprowadzając dokładną aproksymację funkcji  $f(w)$  można uzyskać dowolną prognozę (symulację) wartości  $g(x)$  dla dowolnej wartości  $x$ .

Dystrybuanty poszczególnych rodzajów surowca mogą mieć praktycznie dowolne postacie i wyznaczenie rozkładu finalnego jest bardzo utrudnione. W wielu przeliczeniach użycie funkcji gęstości rozkładu wielkości ziarn lub dystrybuanty jest konieczne dla celów projektowych, czy ewentualnego prognozowania wyników procesów przeróbczych. Jeżeli przyjmiemy założenie, że w danych warunkach określony materiał rozdrabnia się tak samo, to sensowne jest dokonanie aproksymacji krzywej gęstości czy dystrybuanty w sposób jak najbardziej dokładny, nie wchodząc w analizę struktury uzyskiwanych wzorów. W tej pracy postanowiono przeanalizować metodykę aproksymacji krzywych składu ziarnowego za pomocą ortogonalnych szeregów Fouriera i porównać uzyskane wyniki z wynikami tradycyjnego modelowania tych krzywych znanymi dotychczas wzorami oraz zaprezentować propozycję aproksymacji krzywych rozkładu gęstości ziarn materiału uziarnionego (węgla) poddawanego wzbogacaniu grawitacyjnemu. Aproksymacja tego rodzaju krzywych jest również bardzo trudna i dotychczas nie podano jednolitego wzoru krzywej gęstości dla tej zmiennej losowej

## 2. Aproksymacja krzywych składu ziarnowego wzorami tradycyjnymi

Do aproksymacji krzywych składu ziarnowego używane są zwykle cztery wzory aproksymujące:

- a) Wzór Rosina-Rammlera-Bennetta, opisujący dystrybuantę znanego powszechnie rozkładu Weibulla o postaci:

$$F(d) = 1 - e^{-\left(\frac{d}{d_0}\right)^n} \quad \text{dla } d \geq 0 \quad (2)$$

gdzie:  $d$  oznacza wielkość ziarna,  $n$  jest tzw. parametrem kształtu, a  $d_0$  parametrem skali (wielkością ziarna charakterystycznego).

Dystrybuanta ta w układzie funkcyjnym  $(\ln d, \ln \ln \frac{1}{1-F(d)})$  jest prostą i oszacowanie parametrów można uzyskać metodą najmniejszych kwadratów dla prostej  $y = ax + b$ , gdzie  $x = \ln d$ ,  $y = \ln \left( \ln \left( \frac{1}{1-F} \right) \right)$ ,  $a = n$ ,  $b = -n \ln d_0$ .

b) Dystrybuanta rozkładu uciętego Weibulla w postaci:

$$F(d) = 1 - e^{-c \left( \frac{d}{d_{\max} - d} \right)^n} \quad \text{dla } d \in [0, d_{\max}] \quad (3)$$

c) Dystrybuanta rozkładu Gaudina-Andrejewa-Schuhmanna, która dana jest wzorem:

$$F(d) = \left( \frac{d}{d_{\max}} \right)^k \quad \text{dla } d \in [0, d_{\max}] \quad (4)$$

W układzie funkcyjnym  $(\ln d, \ln F)$  równanie dystrybuanty przedstawia prostą o równaniu  $y = ax + b$ , której parametry pozwalają wyznaczyć parametry dystrybuanty  $F(d)$ ,

tzn.  $k = a$ ,  $d_{\max} = e^{\frac{b}{k}}$ .

d) Dystrybuanta rozkładu logarytmiczno-normalnego. Rozkład gęstości rozkładu logarytmiczno-normalnego zadany jest wzorem:

$$f(d) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (5)$$

Jeżeli przez  $m_1$ ,  $\sigma_1^2$  oznaczymy odpowiednio  $E(\ln D)$ ,  $V(\ln D)$ , gdzie  $D$  oznacza zmienną losową opisującą średnicę ziarn, to w układzie  $(\ln d, \ln(\ln F))$  dystrybuanta rozkładu logarytmiczno-normalnego przedstawia prostą  $y = ax + b$ , której parametry spełniają równości:

$$a = \frac{1}{\sigma_1}, \quad b = -\frac{m_1}{\sigma_1}$$

Prezentowaną metodą wyznaczania parametrów we wzorach tych rozkładów jest linearyzacja oraz użycie metody najmniejszych kwadratów [Tumidajski 1997].

Innym sposobem wyznaczania potrzebnych parametrów jest metoda momentów, tzn. porównanie momentów teoretycznych rozkładów z momentami obliczonymi na podstawie próbki losowej.

Wyniki aproksymacji otrzymane tymi metodami zostaną zaprezentowane w dalszej części artykułu na podstawie publikacji [Foszcz i inni 2000]. Wyniki przesiewania uzyskane przez autorów tej publikacji stanowią podstawę do zastosowania nieparametrycznej estymacji funkcji gęstości szeregami Fouriera.

### 3. Charakterystyka metody aproksymacji krzywej gęstości za pomocą szeregu Fouriera

Jedną z bardziej znanych metod nowoczesnej teorii nieparametrycznej estymacji funkcji gęstości jednowymiarowej zmiennej losowej jest aproksymacja przy użyciu szeregu Fouriera [Chentsov 1962; Efron, Tibshirani 1996; Schwartz 1967; Wahba 1981; Watson, 1969]. Metodę tę zapoczątkował Chentsov w 1962 roku do aproksymacji funkcji gęstości  $f(x)$  na podstawie próbki losowej.

W późniejszym okresie [Chentsov 1980; Efron, Tibshirani 1996] rekomendowano estymację funkcji  $g(x) = \log(f(x))$  tą metodą. Większość wyników tych (i innych) prac można znaleźć w podręcznikach [Devroye, Györfi 1985; Efromovich 1999; Hart 1997; Silverman 1986; Tompson, Tapia 1985]

Niech ciąg  $\{\varphi_n(x)\}$  jest ciągiem funkcyjnym ortonormalnym na przedziale  $[0,1]$ , tzn.

$$\int_0^1 \varphi_n^2(x) dx = 1 \text{ i } \int_0^1 \varphi_j(x) \varphi_k(x) dx = 0 \text{ dla } j \neq k \quad (6)$$

Jeżeli zmienna losowa przyjmuje wartości z przedziału  $[a, b]$ , to poprzez transformację liniową zamieniamy ten przedział na przedział  $[0, 1]$ , stosując zamianę zmiennych

$$X' = \frac{1}{b-a} X - \frac{a}{b-a} \quad (7)$$

Niech  $f(x)$  oznacza gęstość badanego rozkładu. Wówczas korzystając z teorii szeregów Fouriera możemy przedstawić  $f(x)$  przy pomocy nieskończonej sumy postaci

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j \varphi_j(x) \quad (8)$$

gdzie  $Q_j$  oznacza współczynniki Fouriera zadane wzorem:

$$Q_j = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx \quad (9)$$

$$\text{Natomiast } \varphi_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } j=0 \\ \sqrt{2} \cos \pi j x & \text{dla } j=1,2,\dots \end{cases}$$

Estymatorem gęstości badanego rozkładu jest suma częściowa szeregu Fouriera

$$f_J(x) = \sum_{j=0}^J Q_j \varphi_j(x) \quad (10)$$

gdzie  $J$  nazywamy parametrem obciążenia [Tarter, Lock 1993].

W wielu przypadkach stosuje się wygładzanie współczynników Fouriera [Efromovich 1999; Watson 1969] mnożąc je przez stałe, które przyjmują wartości z przedziału  $[0, 1]$ , a za

estymator przyjmuje się wówczas uogólnioną sumę częściową  $f_J(x, \{\omega_j\}) = \sum_{j=0}^J \omega_j Q_j \varphi_j(x)$ , dla

$$x \in [0, 1], \omega_j \in [0, 1], j=1, 2, \dots, J.$$

Statystyczny problem estymacji gęstości  $f(x)$  polega na wyznaczeniu estymatora dla:

- współczynników Fouriera;
- parametru obciążenia  $J$ ;
- współczynników wag  $\omega_j$ .

Niech  $X$  oznacza badaną zmienną losową a  $x_1, \dots, x_n$   $n$ -elementową realizację próbki losowej tej zmiennej. Zakładamy, że zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości z przedziału  $[0, 1]$ .

Jako estymatora współczynników Fouriera  $Q_j$  używa się:

$$\hat{Q}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi_j(x_i) \quad (11)$$

Estymator ten jest estymatorem nieobciążonym i mocno zgodnym [Efromovich 1999].

Następnym krokiem jest wybór parametru obciążenia  $J$ . Jako kryterium doboru będziemy używali błędu MISE, czyli scałkowanego błędu średniokwadratowego

$MISE \left( \int_0^1 (\hat{f}_J(x) - f(x))^2 dx \right)$ , który mierzy globalne dopasowanie estymatora. Za estymator dla

parametru obciążenia przyjmuje się:

$$\hat{J} = \arg \min_{0 \leq J \leq J_n} \sum_{j=0}^J \left( \frac{2\hat{Q}_0}{n} - \hat{Q}_j^2 \right) \quad (12)$$

dla którego  $\arg \min_{0 \leq J \leq J_n} (a_s)$  przyjmuje wartości równe współczynnikowi  $s$  najmniejszego

elementu spośród  $(a_0, \dots, a_s)$ , natomiast  $J_n$  oznacza część całkowitą liczby  $4+0,5 \ln n$  [Efromovich 1999].

Dla estymatorów wag  $\omega_j$  stosuje się następującą regułę:

$$\hat{\omega}_0 = 1, \hat{\omega}_j = \left( 1 - \frac{\hat{Q}_0}{nQ_j^2} \right)_+ \text{ dla } j > 0 \quad (13)$$

gdzie  $(x)_+ = \max(0, x)$ .

#### 4. Aproksymacja krzywych składu ziarnowego za pomocą szeregów Fouriera

Dla celów testowania różnych metod aproksymacji krzywych składu ziarnowego produktów kruszenia wykonano 10 kruszeń porfiru. Dla każdego przypadku wyznaczono aproksymacje krzywych składu ziarnowego za pomocą aproksymacji parametrycznej, używając rozkładów RRB, GSA, logarytmiczno-normalnego oraz RRB uciętego [Foszcz i inni 2000].

W niniejszej pracy przeprowadzono aproksymację nieparametryczną przy pomocy szeregu Fouriera dla każdego stopnia kruszenia. Dla każdego ze stopni wyznaczono zmienną losową  $U$  wg wzoru (6), estymatory parametru obciążenia  $J$  - wzór (12) oraz parametrów  $Q_j$  - wzór (11). Uzyskano w ten sposób estymator gęstości  $\hat{g}(u)$  zmiennej losowej  $U=u(D)$ , a następnie z prostej zależności:

$$\hat{f}(d) = g(u(d)) \cdot u'(d)$$

uzyskano wzór na gęstość zmiennej losowej  $D$ . Estymator dystrybuanty tej zmiennej

$$\text{wyliczono ze wzoru } \hat{F}(d) = \int_0^d \hat{f}(x) dx.$$

Do porównania rezultatów użyto średniego błędu resztowego  $s_r$

$$s_r = \sqrt{\frac{(F(d) - \hat{F}(d))^2}{k-2}} \quad (14)$$

gdzie:

$F(d)$  oznacza dystrybuantę empiryczną,  $\hat{F}(d)$  - aproksymację dystrybuanty badanego rozkładu,  $k$  - liczbę klas.

Jako przykłady przeliczeniowe pokazano trzy przykłady aproksymacji krzywych składu ziarnowego dla wybranych stopni rozdrabniania, które zawierają różne liczby członów we wzorze: minimalną, maksymalną i średnią, przy czym wszystkie dają bardzo niskie wartości  $s_r$ .

Tabela 1

Wyniki dla 1. stopnia rozdrabniania

| Klasa   | $d_i$ | $u_i$ | $n_i$ | $F(d)$ | $\hat{F}(d)$ |
|---------|-------|-------|-------|--------|--------------|
| 0-5     | 2,5   | 0,1   | 10,05 | 10,05  | 10,13        |
| 5-6,3   | 5,65  | 0,226 | 1,94  | 11,99  | 11,56        |
| 6,3-8   | 7,15  | 0,286 | 2,52  | 14,51  | 14,24        |
| 8-10    | 9     | 0,36  | 6,01  | 20,52  | 20,49        |
| 10-12,5 | 11,25 | 0,45  | 13,16 | 33,68  | 34,35        |
| 12,5-16 | 14,25 | 0,57  | 26,92 | 60,60  | 59,48        |
| 16-18   | 17    | 0,68  | 9,42  | 70,02  | 72,27        |
| 18-20   | 19    | 0,76  | 14,4  | 84,42  | 82,36        |
| 20-25   | 22,5  | 0,9   | 15,58 | 100    | 100          |

$$U = \frac{D}{25},$$

$n_i$  – udział procentowy danej klasy,

$F(d)$ ,  $\hat{F}(d)$  - wartości dystrybuant w procentach.

Estymator parametru obciążenia  $\hat{J} = 4$ . Estymatory parametrów  $\hat{Q}_j = \frac{\sqrt{2}}{100} \sum_{j=1}^9 n_j \cos \pi j u_j$ ,

a estymator gęstości zmiennej  $U$  ma postać:

$$\hat{g}(u) = 1 + \sqrt{2} \left( -0,26896 \cos \pi u - 0,33022 \cos 2\pi u + 0,235825 \cos 3\pi u + 0,14411 \cos 4\pi u \right)$$

Zmienna losowa  $D=25U$  ma więc gęstość zadaną wzorem:

$$\hat{f}(d) = g(u(d)) \cdot u'(d)$$

czyli:

$$\hat{f}(d) = \frac{1}{25} \left[ 1 + \sqrt{2} \left( -0,26896 \cos \frac{\pi d}{25} - 0,33022 \cos \frac{2\pi d}{25} + 0,235825 \cos \frac{3\pi d}{25} + 0,14411 \cos \frac{4\pi d}{25} \right) \right]$$

Całkując ostatni wzór otrzymujemy estymator dystrybuanty badanej zmiennej, czyli:

$$\hat{F}(d) = \int_0^d \hat{f}(x) dx$$

$$\hat{F}(d) = \frac{d}{25} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left( -0,26896 \sin \frac{\pi d}{25} - 0,16511 \sin \frac{2\pi d}{25} + 0,078608 \sin \frac{3\pi d}{25} + 0,036027 \sin \frac{4\pi d}{25} \right)$$

Tabela 2

Wyniki dla 3. stopnia rozdrabniania

| Klasa   | $d_i$ | $u_i$ | $n_i$ | $F(d)$ | $\hat{F}(d)$ |
|---------|-------|-------|-------|--------|--------------|
| 0-1,6   | 0,8   | 0,004 | 16,31 | 16,31  | 19,87        |
| 1,6-2   | 1,8   | 0,144 | 2,67  | 18,98  | 21,57        |
| 2-3,15  | 2,575 | 0,206 | 8     | 26,98  | 25,53        |
| 3,15-4  | 3,575 | 0,286 | 6,21  | 33,19  | 33,70        |
| 4-5     | 4,5   | 0,36  | 16,03 | 49,22  | 48,25        |
| 5-6,3   | 5,65  | 0,452 | 14,11 | 63,33  | 63,47        |
| 6,3-8   | 7,15  | 0,572 | 14,85 | 78,18  | 77,43        |
| 8-10    | 9     | 0,72  | 16,45 | 94,63  | 94,25        |
| 10-12,5 | 11,25 | 0,9   | 5,37  | 100    | 100          |

W tym przypadku mamy  $U = \frac{D}{12,5}$ ,  $\hat{J} = 6$

$$\hat{g}(u) = 1 + \sqrt{2} \left( 0,268442 \cos \pi u - 0,24096 \cos 2\pi u + 0,10253 \cos 3\pi u + 0,104946 \cos 4\pi u + 0,276208 \cos 5\pi u + 0,299352 \cos 6\pi u \right)$$

$$\hat{f}(d) = \frac{1}{12,5} \left( 1 + \sqrt{2} \left( 0,268442 \cos \frac{\pi d}{12,5} - 0,24096 \cos \frac{2\pi d}{12,5} + 0,10253 \cos \frac{3\pi d}{12,5} + 0,104946 \frac{4\pi d}{12,5} + 0,276208 \frac{5\pi d}{12,5} + 0,299352 \cos \frac{6\pi d}{12,5} \right) \right)$$

$$\hat{F}(d) = \frac{d}{12,5} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left( 0,268442 \sin \frac{\pi d}{12,5} - 0,12048 \sin \frac{2\pi d}{12,5} + 0,034176 \sin \frac{3\pi d}{12,5} + 0,026238 \sin \frac{4\pi d}{12,5} + 0,055241 \sin \frac{5\pi d}{12,5} + 0,049892 \sin \frac{6\pi d}{12,5} \right)$$

Tabela 3

Wyniki dla 9. stopnia rozdrabniania

| Klasa      | $d_i$  | $u_i$  | $n_i$ | $F(d)$ | $\hat{F}(d)$ |
|------------|--------|--------|-------|--------|--------------|
| 0-0,1      | 0,05   | 0,0625 | 27,5  | 27,5   | 26,06        |
| 0,1-0,125  | 0,1125 | 0,1406 | 8,7   | 36,7   | 32,33        |
| 0,125-0,16 | 0,1425 | 0,1781 | 1,87  | 38,07  | 40,83        |
| 0,16-0,25  | 0,205  | 0,2562 | 25,23 | 63,3   | 60,72        |
| 0,25-0,315 | 0,2825 | 0,3531 | 9,61  | 72,91  | 72,86        |
| 0,315-0,4  | 0,3575 | 0,4469 | 14,39 | 87,3   | 85,44        |
| 0,4-0,5    | 0,45   | 0,5625 | 7,83  | 95,13  | 95,24        |
| 0,5-0,63   | 0,565  | 0,7062 | 3,57  | 98,7   | 99,99        |
| 0,63-0,8   | 0,715  | 0,8937 | 1,3   | 100    | 100,00       |

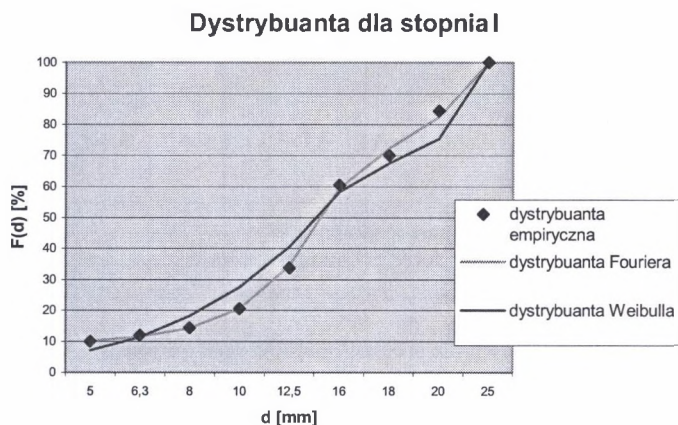
W tym przypadku  $U = \frac{D}{0,8}$ ,  $\hat{J} = 1$ ,

$$\text{Czyli: } \hat{g}(u) = 1 + \sqrt{2} (0,787286 \cos \pi u); \quad \hat{f}(d) = \frac{1}{0,8} \left( 1 + \sqrt{2} \cdot 0,797286 \cos \frac{\pi d}{0,8} \right)$$

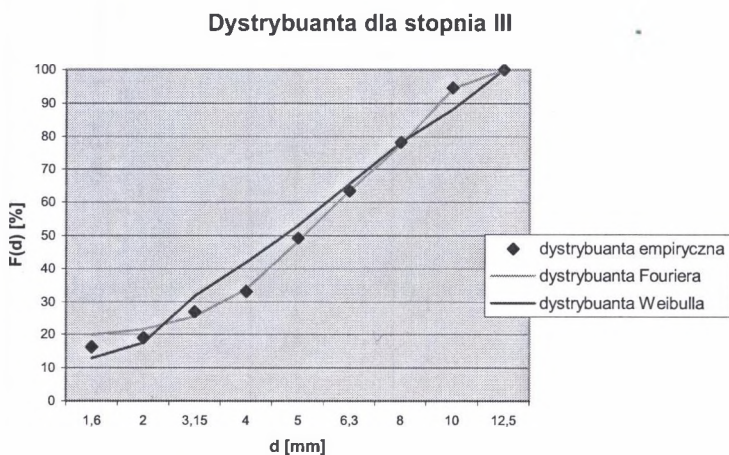
$$\hat{F}(d) = \frac{d}{0,8} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot 0,787286 \sin \frac{\pi d}{0,8}$$



Na poniższych wykresach pokazano postacie dystrybuant osiągniętych za pomocą szeregów Fouriera oraz dystrybuanty aproksymowane rozkładem Weibulla, jako najlepsze przybliżenie klasycznymi rozkładami statystycznymi. Punkty oznaczają wartości empiryczne. Dla wszystkich rozpatrywanych przypadków widać, że dopasowanie otrzymanego wykresu metodą Fouriera jest bardzo dobre. Ilustruje ten fakt także tabela zestawionych wartości błędów resztowych dla poszczególnych typów rozkładów.

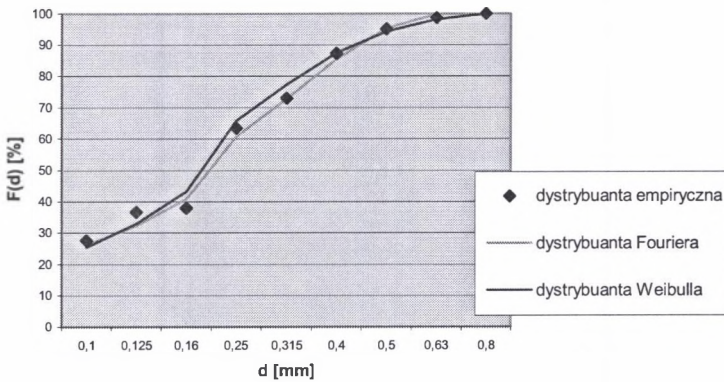


Rys. 1. Wykres dystrybuanty dla 1. stopnia rozdrabniania  
Fig. 1. The plot of distribution function for 1<sup>st</sup> comminution level



Rys. 2. Wykres dystrybuanty dla 3. stopnia rozdrabniania  
Fig. 2. The plot of distribution function for 3<sup>rd</sup> comminution level

### Dystrybuanta dla stopnia IX



Rys. 3. Wykres dystrybuanty dla 9. stopnia rozdrabniania  
Fig. 3. The plot of distribution function for 9<sup>th</sup> comminution level

Tabela 4

#### Zestawienie średnich błędów resztowych $s_r$

| Stopień rozdrobnienia | RRB  | GSA | Log-norm | RRB ucięty | Fourier |
|-----------------------|------|-----|----------|------------|---------|
| I                     | 5,49 | 4,3 | 4,28     | 3,13       | 1,26    |
| II                    | 3,86 | 5,3 | 5,32     | 2,85       | 1,90    |
| III                   | 4,98 | 2,8 | 2,77     | 2,30       | 1,82    |
| IV                    | 7,08 | 5,2 | 5,23     | 4,46       | 1,64    |
| V                     | 8,04 | 5,1 | 5,13     | 4,00       | 1,61    |
| VI                    | 4,46 | 2,3 | 2,28     | 1,75       | 1,67    |
| VII                   | 4,92 | 2,0 | 2,01     | 1,72       | 2,13    |
| VIII                  | 1,13 | 9,2 | 9,24     | 16,99      | 1,33    |
| IX                    | 3,12 | 6,7 | 6,69     | 8,58       | 2,47    |
| X                     | 3,16 | 4,0 | 4,03     | 4,76       | 1,92    |

## 5. Aproksymacja dystrybuanty gęstości ziarn nadawy (węgla) za pomocą szeregów Fouriera

Aproksymacja krzywych składu gęstościowego materiałów uziarnionych jest prowadzona bardzo rzadko i praktycznie nie istnieją żadne teorie związane z postaciami (typami) rozkładów zmiennych losowych, które do opisu tych krzywych byłyby przydatne. Z punktu widzenia wzoru (1) opis taki (aproksymacja krzywej  $f(\rho)$  - krzywej opisującej rozkład gęstości ziarn nadawy) byłby bardzo przydatny do symulacji (prognozowania)

wyników rozdziału węgla we wzbogacalnikach grawitacyjnych, dla których znane są postacie funkcji rozdziału  $p(\rho_n, \rho)$ , gdzie  $\rho_n$  jest gęstością ziarn nadawy,  $\rho$  - gęstością ziarn produktu.

Podstawą obliczeń były dane zaczerpnięte z pracy [Turno, 2004] dotyczące próbek nadawy do wzbogacalnika DISA jednej z kopalń węgla kamiennego w Polsce.

W efekcie opróbowania nadawy, przy trzech różnych natężeniach przepływu, otrzymano trzy zbliżone do siebie rozkłady empiryczne gęstości ziarn nadawy, których wyniki podane są w tabeli 5.

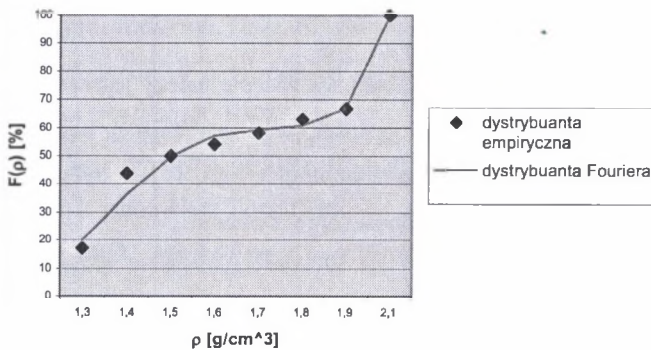
Tabela 5

Analiza densymetryczna nadawy kierowanej do wzbogacania

| $\rho \left[ \frac{g}{cm^3} \right]$ | 1,2-1,3 | 1,3-1,4 | 1,4-1,5 | 1,5-1,6 | 1,6-1,7 | 1,7-1,8 | 1,8-1,9 | 1,9-2,1 | $\Sigma$ |
|--------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|----------|
| $W_1$ [kg]                           | 12,19   | 60,6    | 8,22    | 1,42    | 4,95    | 6,64    | 11,51   | 59,82   | 165,35   |
| $W_2$ [kg]                           | 13,44   | 54,21   | 13,2    | 1,39    | 6,26    | 3,85    | 12,58   | 55,35   | 160,28   |
| $W_3$ [kg]                           | 25,4    | 40,23   | 9,24    | 6,05    | 6,13    | 7,49    | 5,42    | 49,8    | 149,76   |

W wyniku aproksymacji za pomocą ortogonalnych szeregów Fouriera otrzymano dla wszystkich trzech próbek podobne postacie wykresów dystrybuanty, z podobnymi wartościami błędów resztowych. Przykładowo, dla  $W_2$  otrzymany wykres przedstawia rys. 4.

Dystrybuanta dla gęstości nadawy



Rys. 4. Dystrybuanta dla gęstości nadawy

Fig. 4. The distribution function of feed density

Parametr obciążenia dla wszystkich trzech natężeń przepływów wyniósł  $\hat{J} = 6$ ,  $U = \frac{\rho}{2,1}$ .

$$\hat{f}(\rho) = \frac{1}{2,1} \left( 1 + \sqrt{2} \left( -0,94272 \cos \frac{\pi\rho}{2,1} + 0,63953 \cos \frac{2\pi\rho}{2,1} + 0,266847 \cos \frac{3\pi\rho}{2,1} + 0,1875 \frac{4\pi\rho}{2,1} - 0,72898 \frac{5\pi\rho}{2,1} + 0,641455 \cos \frac{6\pi\rho}{2,1} \right) \right)$$

$$\hat{F}(\rho) = \frac{\rho}{2,1} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left( -0,94272 \sin \frac{\pi\rho}{2,1} + 0,031976 \sin \frac{2\pi\rho}{2,1} + 0,0889489 \sin \frac{3\pi\rho}{2,1} + 0,046975 \sin \frac{4\pi\rho}{2,1} + -0,1457967 \sin \frac{5\pi\rho}{2,1} + 0,106909 \sin \frac{6\pi\rho}{2,1} \right)$$

odchylenie resztowe  $s_r=3,46$ .

## 6. Wnioski

Analizując błędy resztowe dla rozdrabniania można stwierdzić, że w zdecydowanej większości stopni rozdrabniania aproksymacja krzywej składu ziarnowego przy pomocy dystrybuanty uzyskanej metodą Fouriera stanowi najlepszą estymację. Tylko na stopniu VII aproksymacje rozkładami GSA, logarytmiczno-normalnym oraz RRB uciętym dają minimalnie lepsze rezultaty. Lepszą aproksymację uzyskano również na stopniu VIII przy pomocy rozkładu RRB, ale i tu różnica między rozkładem RRB i rozkładem Fouriera jest bardzo niewielka. W przypadku aproksymacji dystrybuant gęstości nadawy kierowanej do przerobu, metoda aproksymacji za pomocą ortogonalnych szeregów Fouriera daje szansę w miarę dokładnego przewidywania składu gęstościowego nadawy i prawidłowego określenia charakteryzujących ją parametrów.

Wracając do uwagi poczynionej we wstępie należy jeszcze raz podkreślić, że postać wzoru dystrybuanty czy funkcji gęstości, w przeważającej liczbie przypadków, nie ma żadnego uzasadnienia techniczno-technologicznego i jest tylko wynikiem dążenia do maksymalnego zwiększenia dokładności aproksymacji.

Jeżeli aproksymacja taka jest wykorzystywana w dalszych obliczeniach, należy stosować aproksymację metodą Fouriera. Aproksymacja taka jest sensowna, gdy daje dobre efekty, jeżeli proces przebiega stabilnie.

Autorzy zamierzają w dalszej kolejności zastosować również inne metody aproksymacji nieklasycznymi metodami statystycznymi, w tym metodami jądrowymi (za pomocą różnego rodzaju jąder).

## LITERATURA

1. Chentsov N. N.: *Evaluation of an unknown distribution density from observations*, Soviet Math. Dokl. 3, pp. 1159-1562, 1962.
2. Chentsov N.N.: *Statistical decision rules and optimum inference*, Springer-Verlag, New York 1980.
3. Devroye L., Györfi L.: *Nonparametric density estimation*, The  $L_1$  View, Wiley, New York 1985.
4. Efromovich S.: *Nonparametric curve estimation*, Springer-Verlag, New York 1999.
5. Efron B., Tibshirani R.: *Using specially designed exponential families for density estimation*, Ann. Statist. 24, pp. 2431-2461, 1996.
6. Epstein B.: *Logarithmico-normal distributions in breakage of solids*, Ind. Eng. Chem., 40, pp. 2289-2291, 1948.
7. Foszcz D., Saramak D., Tumidajski T.: *Ocena metod aproksymacji krzywych składu ziarnowego produktów kruszenia*. II Ogólnopolska Konferencja „Operacje mechaniczne inżynierii procesowej”. Łódź – Spała, ZN Politechniki Łódzkiej nr 838, Inżynieria Chemiczna i Procesowa nr 27, 2000.
8. Gajek L., Kałuszka M.: *Wnioskowanie statystyczne*, WNT, Warszawa 2000.
9. Hart J.D.: *Nonparametric smoothing and Lack-of fit tests*, Springer, New York 1997.
10. Kołmogorow A.N.: *Ob. logarymiczeski normalnom zakonie rozpredielienia razmierow czastic pri drobleniji*, Dokł. AN SSSR, n. 31, pp. 99-101, 1941.
11. Schwartz S.C.: *Estimation of a probability density by an orthogonal series*, Ann. Math. Statist. 38, pp. 1262-1265, 1967.
12. Silverman B.W.: *Nonparametric density estimation for statistic and data analysis*, Chapman and Hall, London-New York 1986.
13. Tarter M.E., Lock M.D.: *Model-Free Curve Estimation, Modelling and Simulation*, SIAM, Philadelphia 1990.
14. Tompson J.R., Tapia R.A.: *Nonparametric function estimation modelling and simulation*, Philadelphia, SIAM, 1990.
15. Tumidajski T.: *Stochastyczna analiza własności materiałów uziarnionych i procesów ich rozdziału*, Wydawnictwa AGH, Kraków 1997.
16. Turno A.: *Wpływ własności geometrycznych ziarn oraz oddziaływań między nimi na dokładność rozdziału w cieczach zawieszinowych* (praca doktorska), AGH, Kraków 2004.

17. Wahba G.: *Data-based optimal smoothing of orthogonal series density estimates*, Ann. Statist. 9, pp. 146-156, 1981.
18. Watson G.S.: *Density estimation by orthogonal series*, Ann. Math. Statist. 40, pp. 1496-1498, 1969.

Recenzent: Dr hab.inż. Krystian Kalinowski  
Profesor Politechniki Śląskiej

### **Abstract**

The determination of distribution function type for grained materials features is usually difficult and its precise approximation is often given with a significant error. In the paper, the most often occurring types of distribution functions for comminution products were presented, which are RRB, cut Weibull, Gaudin-Andreyev-Schuhmann and log-norm distribution functions. However, these functions are not always sufficiently efficient in practice. The authors proposed to apply orthogonal Fourier series to approximate distribution function more precisely. This method is particularly efficient when the very precise information about form of population feature unknown distribution function is needed. In the paper, the distribution functions of porphyre comminution products were calculated by application of this method. The results of this approximation were statistically verified and compared with the results given by Weibull, GAS and log-normal distribution functions. Furthermore, the distribution function of density of coal in feed was estimated, which general model form is not analysed so precisely as the distribution functions of grain sizes.