

Jan ZAWADA, Jerzy RZESZOT
Instytut Maszyn Roboczych Ciężkich, Politechnika Warszawska

O NUMERYCZNYM MODELOWANIU PROCESÓW KRUSZENIA

Streszczenie. W pracy przedstawiono przykład analizy numerycznej jednego z ważnych zagadnień brzegowych, a mianowicie obciążania bloku współosiowymi stemplami płaskimi. W ustaleniu algorytmu zagadnienia wykorzystano jedną ze znanych metod teorii stanów granicznych, tzn. metodę charakterystyk równań różniczkowych równowagi granicznej.

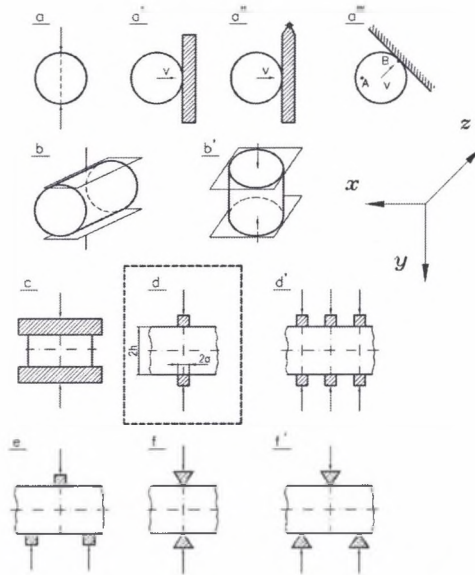
ON NUMERICAL MODELLING OF CRUSHING PROCESSES

Summary. An example of the numerical analysis of one of the important boundary problems – loading block with the flat coaxial punches, is presented. For determining the problem solution algorithm, one of the well-known methods based on Limit Load Carrying Capacity theory, i.e. the method of characteristics for limit equilibrium differential equations, was applied.

1. Wstęp

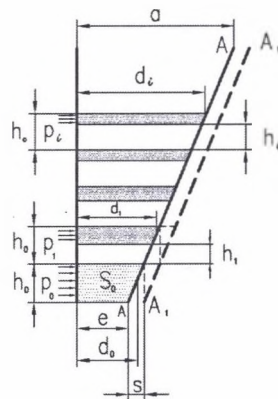
Rozwój mechaniki procesów rozdrabniania (kruszenia i mielenia), jak również procesów urabiania ośrodków kruchych (i plastycznych) zależy w znacznym stopniu od stosowania numerycznej analizy tych procesów [1]. Obiektem rozważań są procesy modelowe elementarne i maszynowe.

Modelowe procesy elementarne to różne sposoby obciążania brył regularnych. Można przyjąć, że rzeczywisty proces stanowi jakby sumę takich procesów elementarnych. Na rys. 1 pokazano niektóre z nich. Każdy proces stanowi odrębne zagadnienie brzegowe. Obciążanie brył zachodzi w warunkach przestrzennej „deformacji” (jeśli przyjąć, że długość stempli jest mniejsza niż szerokość bloków mierzona wzdłuż osi z), osiowo - symetrycznej „deformacji”



Rys. 1. Niektóre modelowe procesy elementarne: a, b) sposoby obciążania kul i walców; c, d) blok obciążany płytami i współosiowymi stemplami (parą i grupą stempli); e) blok ściskany grupą trzech stempli; f) blok ściskany klinami

Fig. 1. Certain model fundamental processes: a, b) ways of loading a sphere and a cylinder; c, d) block loaded by plates and coaxial punches (a pair and a group of punches); e) block compressed by a group of punches; f) block compressed by wedges



Rys. 2. Przykład modelowego procesu maszynowego realizowanego w kruszarce szczękowej – obciążanie warstw materiału przesuwających się w komorze kruszenia

Fig. 2. Exemplary model machine process carried out in jaw crusher – loading of layers of material moving along crushing chamber

i płaskiej „deformacji” (długość stempla przekracza znacznie jego szerokość i jest większa od szerokości bloków).

Modelowanie procesów maszynowych polega na analizie obciążania, pęknięcia i przemieszczania brył regularnych lub warstw materiału w przestrzeni roboczej maszyny. Przykład prostego modelowego procesu kruszenia realizowanego w kruszarce szczękowej podaje rys. 2. Zakłada się tutaj odpowiednie przesuwanie warstw materiału w komorze roboczej w miarę kolejnych cykli pracy, tak aby został zachowany warunek ciągłości przepływu.

W analizach numerycznych modelowych procesów elementarnych i maszynowych można stosować: a) metody oparte na teorii stanów granicznych (metoda charakterystyk, metody nośności granicznej); b) metodę elementów kontaktowych MEK; c) metodę elementów skończonych MES; d) inne metody opierające się na mechanice ciała stałego, teorii uderzenia, mechanice pęknięcia itd.

W niniejszej pracy omówimy w skrócie jedną z metod teorii stanów granicznych, tzn. metodę charakterystyk, ostatnio często stosowaną w różnych zagadnieniach praktycznych.

2. Metoda charakterystyk

2.1. Założenia i wymagania co do ścisłości rozwiązań

Metody teorii stanów granicznych opierają się na wyszczególnionych niżej założeniach:

- 1) ośrodek obciążany (ośrodek kruchy) jest ciągły, jednorodny, izotropowy i nieważki;
- 2) modelem mechanicznym tego ośrodka jest model sztywno – plastyczny, w którym pomija się odkształcenia sprężyste;
- 3) procesy przebiegają w płaskim stanie odkształceń (PSO) lub w stanie osiowej symetrii (ze względu na trudności matematyczne nie są jak dotąd analizowane zagadnienia przestrzenne);
- 4) jako teoretyczne warunki stanu granicznego (będące funkcją tensora stanu naprężenia) $F(\sigma_{ij}) = 0$ przyjmuje się najczęściej:

a) warunek Mohra
$$F(\sigma_y) = \left(\frac{\tau}{c}\right)^n - \frac{\sigma}{H} - 1 = 0,$$

gdzie: τ i σ – stanowią naprężenia styczne i normalne działające w płaszczyznach poślizgów;
 c – oznacza spójność materiału; H – wytrzymałość na izotropowe rozciąganie; n – wykładnik potęgowy zawarty w przedziale $1 \leq n \leq 2$,

b) warunek liniowy Coulomba $|\tau| = c + \sigma \operatorname{tg} \rho$,

gdzie: c i σ – są interpretowane jak poprzednio; ρ – jest kątem tarcia wewnętrznej oraz

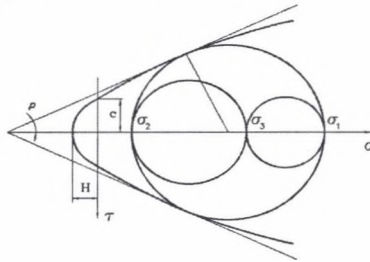
c) zmodyfikowany warunek Coulomba, w którym zakłada się mniejszą niż w warunku Coulomba wytrzymałość na rozciąganie poprzez obcięcie prostoliniowych obwiedni $\tau = \tau(\sigma)$

łukiem koła o promieniu R_z określonego zależnością $R_z = S_c - H \frac{\sin \rho}{1 - \sin \rho}$,

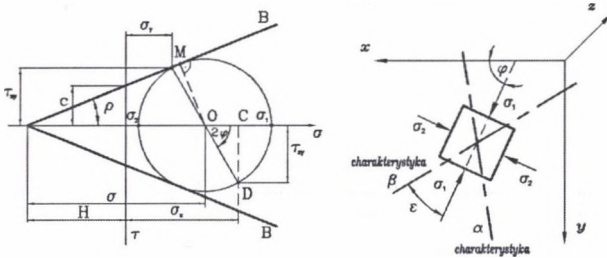
gdzie S_c – oznacza wytrzymałość na jednoosiowe ściskanie.

Omawiane warunki zostały przedstawione na rys. 3, na którym podano również znaczenie poszczególnych wielkości występujących we wzorach. Należy zwrócić uwagę na to, że naprężenia ściskające traktujemy jako dodatnie;

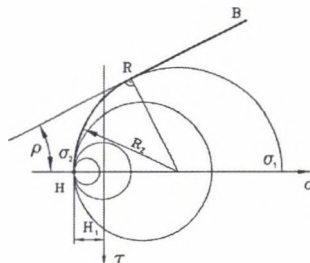
a) warunek Mohra



b) warunek liniowy (Coulomb 1773 r.)



c) warunek liniowy zmodyfikowany



Rys. 3. Teoretyczne warunki stanu granicznego stosowane najczęściej w praktyce (przy warunku Coulomba podano odwzorowanie na płaszczyźnie naprężeń)

Fig. 3. Most frequently applied theoretical yield conditions

5) prawem fizycznym konstytutywnym wiążącym tensor prędkości odkształcania $\dot{\epsilon}_{ij}$ z gradientem funkcji $F(\sigma_{ij})$, spełniający rolę potencjału, jest tzw. stowarzyszone prawo płynięcia $\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$

gdzie: λ jest dodatnim skalarnym mnożnikiem.

Ścisłe rozwiązanie danego zagadnienia (np. zagadnienia obciążania bloku współosiowymi stemplami płaskimi, rys. 1d) polega na znalezieniu w obszarze granicznym pola naprężeń σ_{ij} i prędkości odkształceń $\dot{\epsilon}_{ij}$ spełniających różne dodatkowe warunki [2].

2.2. Równania charakterystyk równań różniczkowych równowagi granicznej - warunek liniowy [1, 2]

Równania równowagi $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$ i równanie przedstawiające warunek stanu granicznego Coulomba można sprowadzić do układu dwóch quasi-liniowych cząstkowych równań różniczkowych, który może być rozwiązany znaną w teorii równań różniczkowych metodą charakterystyk. Równania charakterystyk pozwalają na określanie naprężeń granicznych i w konsekwencji na wyznaczanie obciążeń zewnętrznych, co w praktyce ma duże znaczenie.

Równania charakterystyk są następujące:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\varphi + \varepsilon), \quad d\sigma + 2\sigma \operatorname{tg} \varphi d\varphi = 0, \quad \text{dla rodziny } \alpha \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\varphi - \varepsilon), \quad d\sigma - 2\sigma \operatorname{tg} \varphi d\varphi = 0, \quad \text{dla rodziny } \beta.$$

Równania po lewej stronie określają kierunki charakterystyk, równania zaś po prawej stronie określają zależności, jakie muszą być spełnione wzdłuż tych charakterystyk. We wzorach (1) kąt φ jest to kąt, który większe naprężenie główne σ_1 tworzy z osią x , σ jest naprężeniem zastępczym, kąt ε jest kątem pomiędzy kierunkiem naprężenia głównego a kierunkami charakterystyk α i β (rys.3b).

Po wyznaczeniu naprężeń należy określić pole prędkości przemieszczeń obszaru granicznego. Równania kierunkowe charakterystyk prędkości i zależności, jakie wzdłuż nich zachodzą, są następujące [2, 4]

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\varphi + \varepsilon), \quad dv_x + dv_y \operatorname{tg}(\varphi + \varepsilon) = 0, \quad \text{dla rodziny } \alpha \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\varphi - \varepsilon), \quad dv_x + dv_y \operatorname{tg}(\varphi - \varepsilon) = 0, \quad \text{dla rodziny } \beta.$$

Rzuty wektora prędkości przemieszczania v na osie x i y oznaczono tutaj jako v_x i v_y .

Porównując (1) i (2) widzimy, że charakterystyki prędkości pokrywają się z charakterystykami naprężeń, ponieważ mamy te same równania kierunkowe.

3. Numeryczna analiza procesu obciążania bloku stemplami płaskimi (PSO), warunek liniowy - zastosowanie metody charakterystyk

3.1. Uwagi wstępne

Analityczna metoda rozwiązywania zagadnienia obciążania bloku współosiowymi stemplami (rys. 1d), z zastosowaniem liniowego warunku Coulomba została przedstawiona szczegółowo w pracy [2]. Siatki charakterystyk uzyskano w niej wykreślnie zakładając, że kąt φ w każdym dwóch sąsiednich punktach węzłowych różni się o 5° oraz pamiętając, że charakterystyki rodziny α i β przecinają się zawsze pod kątem 2ε . W praktyce siatkę otrzymuje się zastępując krzywe α i β odcinkami prostymi załamanyymi w kolejnych punktach o 5° . Na tym etapie pracy nie są potrzebne żadne szczegółowe obliczenia. Zwracamy uwagę, że to ułatwienie w wykreślaniu siatek dotyczy jedynie warunku liniowego, gdy kąt tarcia wewnętrznego ρ jest wielkością stałą. Obliczenia stanu naprężenia w punktach węzłowych również nie są trudne, można wyrazić go stosunkowo prostymi wzorami, gdyż prawe strony równań (1), przedstawiających zależności wzdłuż charakterystyk, można przekształcić do postaci:

$$\begin{aligned}\sigma &= C_1 e^{-2\varphi \operatorname{tg}\rho} = C_1 \exp(-2\varphi \operatorname{tg}\rho) \quad \text{rodzina } \alpha, \\ \sigma &= C_2 e^{2\varphi \operatorname{tg}\rho} = C_2 \exp(2\varphi \operatorname{tg}\rho) \quad \text{rodzina } \beta,\end{aligned}\tag{3}$$

gdzie: C_1, C_2 oznaczają stałe wyznaczone z warunków brzegowych.

Pomimo tych ułatwień wykreślanie siatek charakterystyk, wyznaczanie stanu naprężenia i prędkości przemieszczania oraz obciążenia zewnętrznego dla różnych stosunków wysokości bloku do szerokości stempla jest bardzo pracochłonne. Praktyczne wykorzystanie teorii stanów granicznych, nawet w tak prostym zagadnieniu, jak omawiane, wymaga stosowania metod numerycznych.

3.2. Numeryczne wyznaczanie siatek charakterystyk i stanu naprężenia - wiadomości ogólne

Podstawę wyznaczania współrzędnych punktów siatki charakterystyk oraz wartości naprężeń w tych punktach stanowią równania kierunkowe charakterystyk oraz zależności,

jakie muszą wzdłuż nich zachodzić (wzory (1)). Dla każdego punktu węzłowego należy znaleźć cztery wielkości, a mianowicie dwie współrzędne x i y określające jego położenie oraz naprężenie zastępcze σ i kąt φ . Stosujemy tutaj znaną metodę Massau polegającą na zastąpieniu różniczek we wzorach (1) różnicami skończonymi. Rozpatrzmy oczko siatki charakterystyk utworzone z przecięcia dwóch sąsiednich linii należących do rodzin α i β (rys. 4). Znane są wielkości $x_1, y_1, \sigma_{(1)}$ i φ_1 w punkcie 1 oraz wielkości $x_2, y_2, \sigma_{(2)}, \varphi_2$ w punkcie 2 ($\sigma_{(1)}$ i $\sigma_{(2)}$ oznaczają naprężenia zastępcze σ w punktach 1 i 2).

Poszukujemy tych wielkości w punkcie N, tzn. poszukujemy $x_N, y_N, \sigma_N, \varphi_N$. Wykorzystujemy zależności (3), skąd otrzymamy

$$C_1 = \sigma_{(1)} e^{2\varphi_1 \operatorname{tg} \rho} \quad \text{dla pkt. 1} \quad (4)$$

$$C_2 = \sigma_{(2)} e^{-2\varphi_1 \operatorname{tg} \rho} \quad \text{dla pkt. 2}$$

A więc naprężenia zastępcze σ_N wyrazimy teraz w postaci

$$\sigma_N = \sigma_{(1)} * e^{2\varphi_1 \operatorname{tg} \rho} * e^{-2\varphi_N \operatorname{tg} \rho} \quad (5)$$

$$\sigma_N = \sigma_{(2)} * e^{-2\varphi_2 \operatorname{tg} \rho} * e^{2\varphi_N \operatorname{tg} \rho}$$

Następnie po przekształceniach (5) mamy:

$$\frac{\sigma_{(1)}}{\sigma_{(2)}} = e^{2\operatorname{tg} \rho (2\varphi_N - \varphi_1 - \varphi_2)} \quad \text{lub} \quad 2\operatorname{tg} \rho (2\varphi_N - \varphi_1 - \varphi_2) = l_n \frac{\sigma_{(1)}}{\sigma_{(2)}} \quad (6)$$

i stąd

$$\varphi_N = 0,5 * (\varphi_1 + \varphi_2) + 0,25 * \operatorname{tg} \rho * l_n \frac{\sigma_{(1)}}{\sigma_{(2)}},$$

a z zależności (5)

$$\sigma_N = \sigma_{(2)} * e^{2\operatorname{tg} \rho (\varphi_N - \varphi_2)} \quad (7)$$

W celu znalezienia współrzędnych x_N i y_N punktu N równania kierunkowe (1) przekształcimy do postaci

$$y_N - y_1 = (x_N - x_1) \operatorname{tg} [0,5 (\varphi_N + \varphi_1) + \varepsilon] \quad (8)$$

$$y_N - y_2 = (x_N - x_2) \operatorname{tg} [0,5 (\varphi_N + \varphi_2) - \varepsilon]$$

Oznaczając

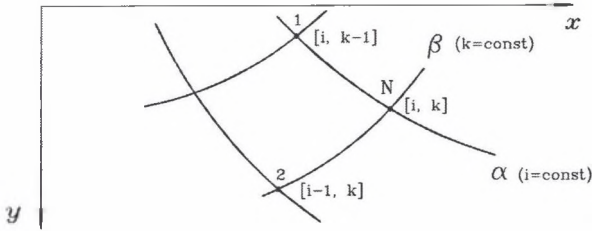
$$\operatorname{tg} [0,5 (\varphi_N + \varphi_1) + \varepsilon] = T_1 \quad (9)$$

$$\operatorname{tg} [0,5 (\varphi_N + \varphi_2) - \varepsilon] = T_2$$

otrzymamy wzory na poszukiwane współrzędne

$$x_N = y_2 - y_1 + x_1 T_1 - x_2 T_2 \quad (10)$$

$$y_N = y_2 + (x_N - x_2) T_2$$



Rys. 4. Elementarne oczko siatki charakterystyk

Fig. 4. Basic characteristics mesh eye

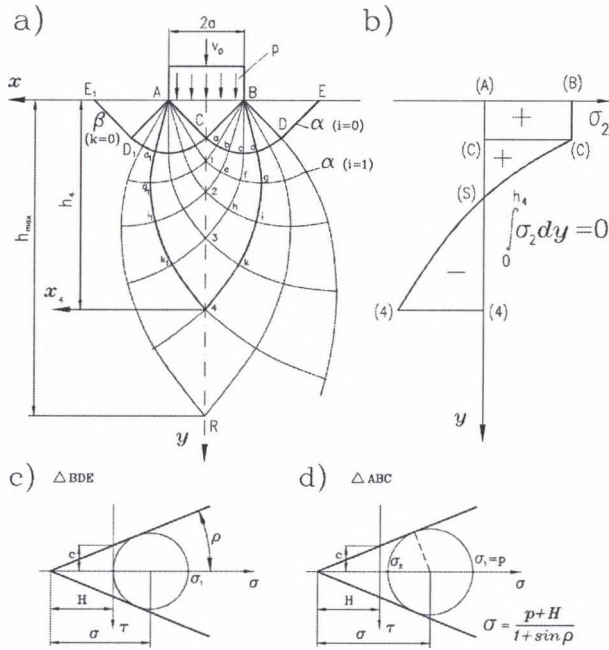
4. Proces obciążania bloku stemplami płaskimi – warunek Coulomba

Założymy, że nie znane naciski p pod stemplem są rozłożone równomiernie (rys. 5), co powoduje, że siatka charakterystyk w tym obszarze składa się z dwóch rodzin linii prostych. Skrajne charakterystyki, to jest charakterystyka AC należąca do rodziny α i BC należąca do rodziny β , przecinają się w punkcie C pod kątem 2ε . W trójkącie ABC mamy zatem jednorodny stan naprężenia, przy czym większe naprężenie główne σ_1 jest równe naciskom p . Odwzorowanie tego stanu na płaszczyźnie τ, σ pokazano na rys. 5d. Do trójkąta ABC przylegają dwa wachlarze BCD i ACD_1 , w których, jak łatwo udowodnić, charakterystyki β (dla wachlarza DCB) i α (dla wachlarza ACD_1) są prostoliniowe, zaś przecinające je charakterystyki α (wachlarz BCD) i β (wachlarz ACD_1) są krzywoliniowe. Ponieważ zachodzi symetria obciążenia, pole charakterystyk jest także symetryczne względem osi x i y układu współrzędnych. W analizach można więc rozpatrywać jedynie ćwiartkę tego pola.

Punkty A i B są punktami osobliwymi, w których następuje zmiana wartości kąta φ , jak również zmiana wartości naprężeń. W trójkątach BDE i AD_1E_1 mamy ponownie jednorodny stan naprężenia, którego odwzorowanie pokazuje rys. 5c. Krzywoliniowe charakterystyki w wymienionych poprzednio wachlarzach BCD i ACD_1 są spiralami logarytmicznymi. Jeżeli wprowadzić układ współrzędnych biegunowych r, ν z biegunem w punkcie A, to krzywoliniowe charakterystyki w wachlarzu ACD opisuje równanie

$$r = r_0 \cdot \exp(\nu \cdot \operatorname{tg} \rho), \quad (11)$$

gdzie r_0 jest współrzędną punktu, w którym dana charakterystyka przecina promień BC. Nietrudno więc znaleźć współrzędne punktów C, a, b, c, d, D, leżących na spirali CD, zarówno w układzie biegunowym, jak również w układzie prostokątnym x, y .



Rys. 5. Obciążanie bloku stemplami płaskimi, wyznaczenie pola naprężeń: a) siatka charakterystyk dla górnej połowy bloku; b) warunek równowagi połowki bloku (względem osi y); c) odwzorowanie stanu naprężenia w trójkącie ADE; d) wyznaczenie stanu naprężenia w trójkącie ABC

Fig. 5. Loading of block with flat punches, determining stress field: a) Characteristics mesh for upper half of block; b) equilibrium condition for half-block (by Y -axis); c) representation of stress state in triangle ABC

Siatka charakterystyk ograniczona liniami ACDE i BCD₁E₁ przedstawia obszar deformacji ośrodka w tzw. zagadnieniu L. Prandtla znanym z teorii plastyczności i mechaniki gruntów [3, 4].

Wyznamy teraz stan naprężenia σ w poszczególnych punktach charakterystyki AC, a, b, c, d.....DE w funkcji nie znanego na razie nacisku p .

W równaniu (4) $\sigma = C_1 \exp(-2 \varphi \operatorname{tg} \rho)$ należy określić stałą C_1 .

Z warunków brzegowych w punkcie C, dla którego mamy

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad \sigma = \frac{p+H}{1+\sin \rho} \quad \text{wynika iż} \quad C_1 = \frac{H+p}{1+\sin \rho} \exp(\pi \operatorname{tg} \rho).$$

A więc poszukiwana zależność wzdłuż ACDE przybiera postać

$$\sigma = \frac{p + H}{1 + \sin \rho} \exp[(\pi - 2\varphi) \operatorname{tg} \rho] \quad (12)$$

Na odcinku AC kąt $\varphi = \frac{\pi}{2}$, w punkcie a, $\varphi = \varphi_a$, w punkcie b, $\varphi = \varphi_b$, itd., w punkcie D, $\varphi_D = \pi$.

Naprężenia główne σ_1 i σ_2 wyrazimy jako (rys. 5d)

$$\sigma_1 = \sigma (1 + \sin \rho) - H \quad (13)$$

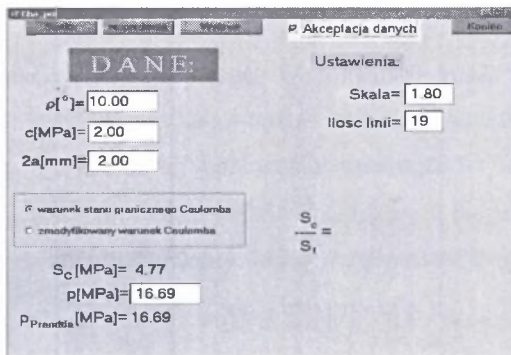
$$\sigma_2 = \sigma (1 - \sin \rho) - H$$

Dane na charakterystyce ACDE (to jest współrzędne poszczególnych punktów i stan naprężenia) wystarczają w zupełności do wyznaczenia siatki charakterystyk i stanu naprężenia w bloku przy różnych wartościach $\frac{h}{a}$, a to stanowi podstawę określenia nacisków granicznych dla różnych wysokości bloku. Naciski te znajdziemy z warunku równowagi połowki bloku – rys. 5b ilustruje to postępowanie, gdy blok ma wysokość $2h_4$ (pozioma oś symetrii x_4 przechodzi przez punkt 4).

5. Program komputerowy CHA-POL

Analiza numeryczna została opracowana dla zagadnienia ściskania bloku skalnego dwoma współosiowymi stemplami oraz przy przyjęciu liniowego warunku stanu granicznego Coulomba lub zmodyfikowanego warunku stanu granicznego Coulomba.

Program CHA-POL napisano w języku programowania DELPHI 5, wskutek czego działa on w środowisku Windows 95/98/2000. Ekran główny tego programu przedstawiono na rys. 6.

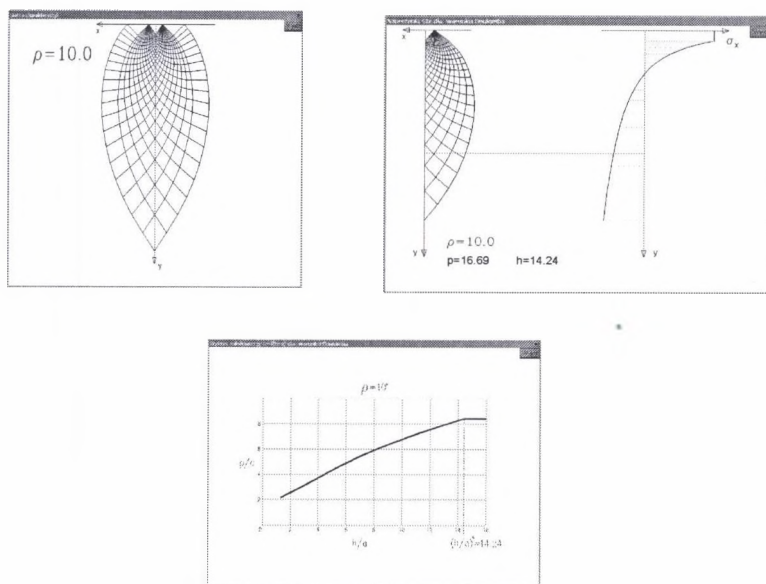


Rys. 6. Ekran główny programu CHA-POL

Fig. 6. Main screen of CHA-POL program

Dane potrzebne do analizy wprowadza się na głównej planszy programu. Są to: ρ – kąt tarcia wewnętrznego; C – spójność ośrodka; $2a$ – szerokość stempla; p – nacisk stempla, którego wartość zawiera się w przedziale S_c (wytrzymałość na jednoosiowe ściskanie) i L .Prandtla (nacisk graniczny); przycisk „radiowy” służący do wyboru liniowego lub zmodyfikowanego warunku Coulomba.

Po ich akceptacji można wyświetlić wyniki obliczeń w postaci wykresów, wciskając przyciski „Siatka”, „Naprężenia” lub „Wykres”. Okno „Siatka” (rys. 7a) przedstawia siatkę charakterystyk pola naprężeń dla danej wartości kąta tarcia wewnętrznego ρ . Na planszy „Naprężenia” (rys. 7b) oprócz wykresu $\sigma_x(y)$ podano również wartość graniczną h , którą zaznaczono też poziomą czerwoną linią. Natomiast w oknie „Wykres” (rys. 7c) przedstawiono zależność nacisków granicznych (wyrażonych względem c) od stosunku h/a , tj. $p/c=f(h/a)$. Oznaczenie $(h/a)^*$ przedstawia wartość stosunku h/a , przy którym nacisk p jest równy naciskowi granicznemu Prandtla.



Rys. 7. Przykłady ekranów typu „Siatka”, „Naprężenia” oraz „Wykres”

Fig. 7. Examples of “Siatka” (Mesh), “Naprężenia” (Stresses) and “Wykres” (Graph) screens

Wyniki obliczeń są także automatycznie zapisywane w katalogu roboczym programu w postaci plików tekstowych o następujących nazwach:

x_{ab} , y_{ab} – współrzędne siatki charakterystyk; f_i , s_i – wartości kąta φ i naprężenia σ w punktach węzłowych siatki charakterystyk; s_{ix} – wartości naprężenia σ_x wzdłuż osi y ; p_h – wartości przebiegu wykresu zależności $p/c=f(h/a)$.

Dokładność obliczeń można zwiększyć przez zmianę gęstości siatki charakterystyk, tj. zmieniając ilość linii siatki.

LITERATURA

1. Zawada J.: Wstęp do mechaniki procesów kruszenia. Wyd. Instytut Technologii Eksploatacji, Radom 1998.
2. Zawada J.: Obciążenie graniczne i pęknięcie skał. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995.
3. Izbicki R.J., Mróz Z.: Metody nośności granicznej w mechanice gruntów i skał. PWN, Warszawa-Poznań 1976.
4. Szczepiński W.: Stany graniczne i kinematyka ośrodków sypkich. PWN, Warszawa 1974.

Recenzent: Prof. dr hab.inż. Eugeniusz Mokrzycki

Abstract

The disintegration processes (crushing and grinding) mechanics development highly depends on the utilisation of numerical analysis for such processes. For this analysis various theoretical methods could be applied, such as:

- methods based on the Limit Load Carrying Capacity theory
- Contact Element Method,
- Finite Element Method.

The paper presents commonly applied method of Characteristics for Limit Equilibrium Differential Equations, one of the recognised methods based on the limit load carrying capacity theory. An example of the numerical analysis of important boundary problem, i.e. loading brittle block with flat coaxial punches, is provided. Algorithms for determining the stress and displacement velocity fields with Coulomb and modified linear yield conditions assumption as well as the description of computer program CHA-POL created in DELPHI 5 language are included. Finally, exemplary solution printouts are presented.