

Przemysław GRZESICA, Mariusz KUCZAJ  
Politechnika Śląska, Gliwice

## DYSKRETNY MODEL DYNAMICZNY DWUSTOPNIOWEJ PRZEKŁADNI WALCOWEJ O ZĘBACH ŚRUBOWYCH

**Streszczenie.** W opracowaniu przedstawiono nowy model fizyczny i matematyczny dwustopniowej walcowej przekładni walcowej o zębach śrubowych do badania wpływu parametrów konstrukcyjnych oraz eksploatacyjnych na stan dynamiczny przekładni. Zaproponowany model fizyczny zbudowano z zespołu dyskretnych elementów sprężystych, bezwładnościowych oraz elementów modelujących tłumienie. Na bazie modelu fizycznego wyprowadzono układ nieliniowych równań różniczkowych tworzących model matematyczny. Badania przeprowadzone na zaproponowanym modelu dynamicznym mają umożliwić ustalenie wpływu parametrów konstrukcyjnych i eksploatacyjnych jednego stopnia przekładni na zachowanie dynamiczne stopnia sąsiedniego tejże przekładni.

## DISCRETE DYNAMICAL MODEL OF TWO-STAGED HELICAL GEAR

**Summary.** In the paper there were presented new physical and mathematical models of a two-staged helical gear for determination of some constructional and exploitational parameters on gear dynamic behavior. Proposed dynamical model were achieved by discrete elements modeling stiffness, damping and inertia. On the basis physical model there was developed mathematical model consisted of nonlinear differential equations. The research carried out by means of these models should enable influence determination of some constructional and exploitational parameters of a gear stage on the other stage dynamic behavior.

### 1. Wprowadzenie

Obciążenie zębów przekładni zależne jest od parametrów, których wartość zmienia się losowo i to w różnym stopniu w trzech podstawowych fazach pracy maszyny, takich jak rozruch, ruch ustalony oraz zatrzymywanie. Dlatego też, zalecanym w szczególnych przypadkach przez normę [2], dokładniejszym sposobem szacowania trwałości eksploatacyjnej przy występowaniu losowego przebiegu obciążenia jest porównanie widma

obciążenia z charakterystykami materiałowymi za pomocą hipotezy sumowania uszkodzeń o charakterze zmęczeniowym. Wyznaczenie widma obciążenia międzyzębnego przekładni przeprowadzane jest na bazie wyników reprezentowanych przez przebiegi czasowe siły międzyzębnej zmierzonej w toku badań obiektu rzeczywistego, badań na specjalnym stanowisku laboratoryjnym bądź wyznaczone na podstawie teoretycznych badań na modelu dynamicznym przekładni zębatej.

W wielu ośrodkach naukowo-badawczych prowadzone są badania mające na celu identyfikację wpływu cech konstrukcyjnych, technologicznych oraz eksploatacyjnych na stan dynamiczny przekładni zębatej. Ze względu na ogromną liczbę kombinacji parametrów technicznych problem ten trudno jest rozwiązać badaniami na obiektach rzeczywistych. Dlatego też badania te wspomagane są eksperymentami na teoretycznych modelach dynamicznych. Zarówno krajowe, jak i światowe piśmiennictwo techniczne poświęcone analizie procesów dynamicznych zachodzących w przekładniach zębatych jest bardzo obszerne [1], [3], [4], a obiektem badań są przede wszystkim przekładnie jednostopniowe. Zatem obecny stan wiedzy na temat dynamicznego oddziaływania sąsiednich stopni przekładni wymaga poszerzenia. Zachodzi bowiem podejrzenie, iż nieuwzględnienie wpływu stopni sąsiednich na generowane obciążenie międzyzębne może prowadzić do niedoszacowania obciążenia obliczeniowego. Niedoszacowanie wartości obciążenia międzyzębnego może uniemożliwić zaprojektowanie trwałej i niezawodnej przekładni wielostopniowej, zwłaszcza gdy wały przekładni tej poddawane są zmiennemu obciążeniu momentem obrotowym.

Pierwsze badania w tym kierunku prowadzono na liniowym modelu przekładni dwustopniowej rozwiązywanym za pomocą analogu elektrycznego [5], a celem pracy było uzyskanie wiedzy, przy jakich wartościach amplitud drgań i przy jakich zakresach częstotliwości przenoszone są drgania z jednego stopnia przekładni na sąsiedni. W pracy [6] obiektem badań był układ napędowy z dwustopniową przekładnią zębatą. Badania te pozwoliły stwierdzić autorowi, że w pewnych warunkach może nastąpić przenoszenie drgań pomiędzy stopniami sąsiednimi. Jako że siły dynamiczne generowane w zazębieniu zależne są silnie nieliniowo od obciążenia zewnętrznego oraz wewnętrznego przekładni, zatem istnieje konieczność przeprowadzenia dogłębnej analizy wpływu wybranych parametrów na stan dynamiczny przekładni.

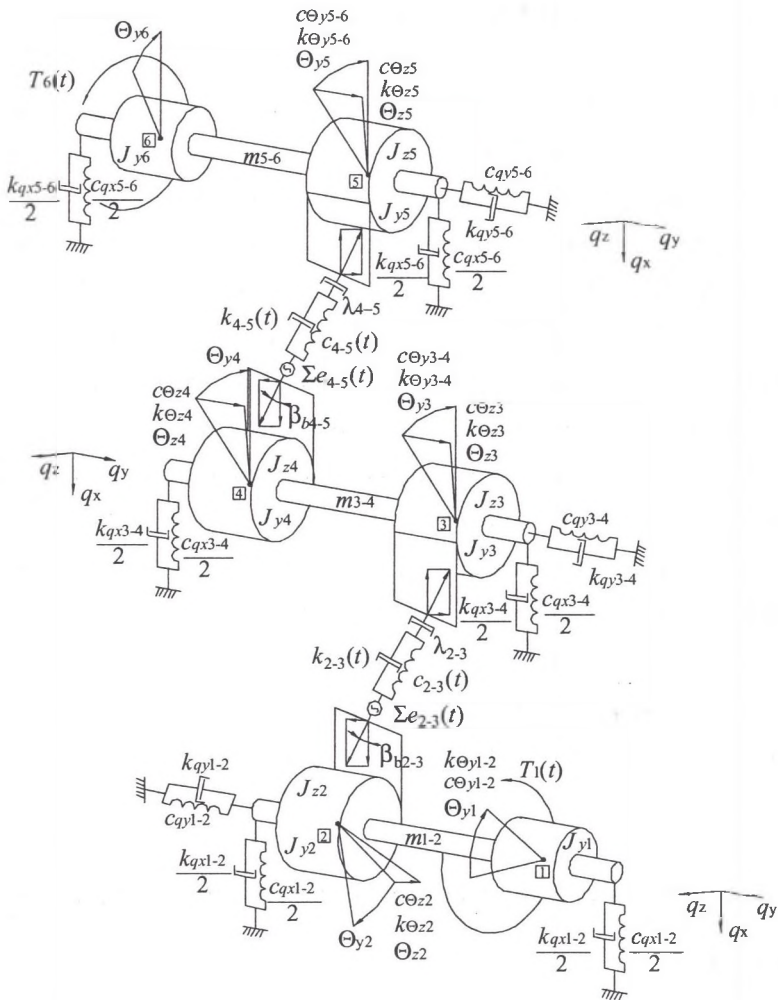
## 2. Badania na modelu przekładni zębatej

W badaniach teoretycznych zjawisk dynamicznych zachodzących w przekładniach zębatych przekładnie traktowane są na dwa sposoby. Pierwszy z nich zakłada, iż przekładnia stanowi jedynie podzespół układu napędowego składającego się przeważnie z silnika, przekładni oraz sprzęgieł. Ze względu na złożony opis matematyczny takiego układu przekładnia modelowana jest w znacznym uproszczeniu z uwzględnieniem jedynie niezbędnych parametrów geometryczno-kinematycznych. Jedną z istotniejszych decyzji podejmowanych na etapie modelowania jest decyzja dotycząca stopnia odizolowania układu od wpływu otaczającego go środowiska. Na ogół otoczenie zewnętrzne modelu traktowane jest jako działające na układ źródło zaburzeń. Sprężenie zwrotne natomiast uważane jest za oddziaływanie układu, które nie wpływa istotnie na stan otoczenia. W drugim sposobie modelowania przekładni zębatych zakłada się, że drgania generowane wewnątrz przekładni posiadają znikomy wpływ na pozostałe elementy układu napędowego. W tym przypadku dokładnie odwzorowywane są już własności zazębienia przez założenie nieliniowości charakterystyk tłumienia oraz sztywności, a także wpływ luzu międzyzębego na generowane obciążenie dynamiczne w zazębieniu przekładni.

## 3. Model dwustopniowej walcowej przekładni zębatej o zębach śrubowych

### 3.1. Model fizyczny

Badania modelowe przekładni zębatej dają możliwość sprawdzenia reakcji dynamicznej na wymuszenia pochodzące od źródeł zewnętrznych, tj. od maszyny roboczej i silnika napędowego, jak też od źródeł wewnętrznych. Zaproponowany przez autorów model przedstawiony na rys. 1 umożliwi przeprowadzanie badań, których celem jest ustalenie wpływu na obciążenie międzyzębne parametrów konstrukcyjnych oraz eksploatacyjnych przekładni z uwzględnieniem oddziaływania jednego stopnia przekładni na stopień sąsiedni.



Rys. 1. Model fizyczny dwustopniowej przekładni zębatej

Fig. 1. The physical model of the two-staged helical gear

Na potrzeby wspomnianych badań autorzy dokonali syntezy modelu dynamicznego dwustopniowej przekładni zębatej. Model fizyczny zbudowano z zespołu dyskretnych elementów masowych połączonych nieważkimi elementami modelującymi sprężystość oraz tłumienie w konfiguracji umożliwiającej przepływ transmitowanej energii mechanicznej od wału wejściowego poprzez wał pośredni do wału wyjściowego przekładni. Drgania elementów masowych zostały wzajemnie ze sobą powiązane w celu zapewnienia sprzężenia o charakterze przemieszczeniowym, które to jest niezbędne do symulowania zależności kinematycznych w obiekcie rzeczywistym. Wymuszenia wzbudzające układ mas do drgań, jakim jest przekładnia, mogą mieć charakter złożony i składać się z oddziaływań zarówno

zewnętrznych, jak i wewnętrznych. Obciążenie zewnętrzne wałów wejściowego i wyjściowego przekładni jest zadawane w modelu przez zmienne momenty obrotowe działające na wał wejściowy i wyjściowy przekładni. Oddziaływania pochodzące od źródeł wewnętrznych przekładni mają charakter parametryczny. Pobudzają one układ do drgań w wyniku zmienności w czasie parametrów zazębienia, takich jak zmienna sztywność zazębienia, zmienne tłumienie drgań w zazębieniu. W modelu tym uwzględniono także wzbudzenia o charakterze kinematycznym wywołane odchyłką kinematyczną współpracy zębów koła i zębniaka danego stopnia, jak również odwzorowano możliwość współpracy zębów poza odcinkiem nominalnego przyporu.

### 3.2. Model matematyczny

Na podstawie modelu fizycznego autorzy wyprowadzili układ nieliniowych równań różniczkowych składających się na model matematyczny dwustopniowej walcowej przekładni zębatej o zębach śrubowych. Układ ten składa się z 18 równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu o zmiennych współczynnikach, które można przedstawić w następującej postaci:

$$J_{y1} \cdot \ddot{\theta}_{y1} + k_{\theta y1-2} \cdot (\dot{\theta}_{y1} - \dot{\theta}_{y2}) + c_{\theta y1-2} \cdot (\theta_{y1} - \theta_{y2}) = T_1(t), \quad (1)$$

$$J_{y2} \cdot \ddot{\theta}_{y2} + k_{\theta y1-2} \cdot (\dot{\theta}_{y2} - \dot{\theta}_{y1}) + c_{\theta y1-2} \cdot (\theta_{y2} - \theta_{y1}) = -r_{b2} \cdot \cos \beta_{b2-3} \cdot F_{2-3}^{\Sigma}(t), \quad (2)$$

$$J_{y3} \cdot \ddot{\theta}_{y3} + k_{\theta y3-4} \cdot (\dot{\theta}_{y3} - \dot{\theta}_{y4}) + c_{\theta y3-4} \cdot (\theta_{y3} - \theta_{y4}) = r_{b3} \cdot \cos \beta_{b2-3} \cdot F_{2-3}^{\Sigma}(t), \quad (3)$$

$$J_{y4} \cdot \ddot{\theta}_{y4} + k_{\theta y3-4} \cdot (\dot{\theta}_{y4} - \dot{\theta}_{y3}) + c_{\theta y3-4} \cdot (\theta_{y4} - \theta_{y3}) = -r_{b4} \cdot \cos \beta_{b4-5} \cdot F_{4-5}^{\Sigma}(t), \quad (4)$$

$$J_{y5} \cdot \ddot{\theta}_{y5} + k_{\theta y5-6} \cdot (\dot{\theta}_{y5} - \dot{\theta}_{y6}) + c_{\theta y5-6} \cdot (\theta_{y5} - \theta_{y6}) = r_{b5} \cdot \cos \beta_{b4-5} \cdot F_{4-5}^{\Sigma}(t), \quad (5)$$

$$J_{y6} \cdot \ddot{\theta}_{y6} + k_{\theta y5-6} \cdot (\dot{\theta}_{y6} - \dot{\theta}_{y5}) + c_{\theta y5-6} \cdot (\theta_{y6} - \theta_{y5}) = T_6(t), \quad (6)$$

$$J_{z2} \cdot \ddot{\theta}_{z2} + k_{\theta z2} \cdot \dot{\theta}_{z2} + c_{\theta z2} \cdot \theta_{z2} = -r_{b2} \cdot \sin \beta_{b2-3} \cdot F_{2-3}^{\Sigma}(t), \quad (7)$$

$$J_{z3} \cdot \ddot{\theta}_{z3} + k_{\theta z3} \cdot \dot{\theta}_{z3} + c_{\theta z3} \cdot \theta_{z3} = r_{b3} \cdot \sin \beta_{b2-3} \cdot F_{2-3}^{\Sigma}(t), \quad (8)$$

$$J_{z4} \cdot \ddot{\theta}_{z4} + k_{\theta z4} \cdot \dot{\theta}_{z4} + c_{\theta z4} \cdot \theta_{z4} = -r_{b4} \cdot \sin \beta_{b4-5} \cdot F_{4-5}^{\Sigma}(t), \quad (9)$$

$$J_{z5} \cdot \ddot{\theta}_{z5} + k_{\theta z5} \cdot \dot{\theta}_{z5} + c_{\theta z5} \cdot \theta_{z5} = r_{b5} \cdot \sin \beta_{b4-5} \cdot F_{4-5}^{\Sigma}(t), \quad (10)$$

$$m_{1-2} \cdot \ddot{q}_{x2} + k_{qx1-2} \cdot \dot{q}_{x2} + c_{qx1-2} \cdot q_{x2} = -\cos \beta_{b2-3} \cdot F_{2-3}^{\Sigma}(t), \quad (11)$$

$$m_{3-4} \cdot \ddot{q}_{x3} + k_{qx3-4} \cdot \dot{q}_{x2} + c_{qx3-4} \cdot q_{x3} = \cos \beta_{b2-3} \cdot F_{2-3}^{\Sigma}(t), \quad (12)$$

$$m_{1-2} \cdot \ddot{q}_{y2} + k_{qy1-2} \cdot \dot{q}_{y2} + c_{qy1-2} \cdot q_{y2} = -\sin \beta_{b2-3} \cdot F_{2-3}^{\Sigma}(t), \quad (13)$$

$$m_{3-4} \cdot \ddot{q}_{y3} + k_{qy3-4} \cdot \dot{q}_{y3} + c_{qy3-4} \cdot q_{y3} = \sin \beta_{b2-3} \cdot F_{2-3}^{\Sigma}(t), \quad (14)$$

$$m_{3-4} \cdot \ddot{q}_{x4} + k_{qx3-4} \cdot \dot{q}_{x4} + c_{qx3-4} \cdot q_{x4} = -\cos \beta_{b4-5} \cdot F_{4-5}^{\Sigma}(t), \quad (15)$$

$$m_{5-6} \cdot \ddot{q}_{x5} + k_{qx5-6} \cdot \dot{q}_{x5} + c_{qx5-6} \cdot q_{x5} = \cos \beta_{b4-5} \cdot F_{4-5}^{\Sigma}(t), \quad (16)$$

$$m_{3-4} \cdot \ddot{q}_{y4} + k_{qy3-4} \cdot \dot{q}_{y4} + c_{qy3-4} \cdot q_{y4} = -\sin \beta_{b4-5} \cdot F_{4-5}^{\Sigma}(t), \quad (17)$$

$$m_{5-6} \cdot \ddot{q}_{y5} + k_{qy5-6} \cdot \dot{q}_{y5} + c_{qy5-6} \cdot q_{y5} = \sin \beta_{b4-5} \cdot F_{4-5}^{\Sigma}(t), \quad (18)$$

gdzie:

$\theta$  – rotacyjne współrzędne uogólnione,

$q$  – translacyjne współrzędne uogólnione,

$T_1(t), T_6(t)$  – momenty obrotowe działające na wał wejściowy oraz wyjściowy przekładni,

$J_{y1}, J_{y6}$  – masowe momenty bezwładności wokół osi  $y$  tarcz dodatkowych,

$J_{y2}, J_{y3}$  – masowe momenty bezwładności wokół osi  $y$  zębniaka i koła (pierwszy stopień),

$J_{z2}, J_{z3}$  – masowe momenty bezwładności wokół osi  $z$  zębniaka i koła (pierwszy stopień),

$J_{y4}, J_{y5}$  – masowe momenty bezwładności wokół osi  $y$  zębniaka i koła (drugi stopień),

$J_{z4}, J_{z5}$  – masowe momenty bezwładności wokół osi  $z$  zębniaka i koła (drugi stopień),

$m_{1-2}$  – zredukowana masa na pierwszym wale,

$m_{3-4}$  – zredukowana masa na drugim wale,

$m_{5-6}$  – zredukowana masa na trzecim wale,

$r_{b2}, r_{b3}$  – promienie zasadnicze odpowiednio zębniaka i koła (pierwszy stopień przekładni),

$r_{b4}, r_{b5}$  – promienie zasadnicze odpowiednio zębniaka i koła (drugi stopień przekładni),

$F_{2-3}^{\Sigma}(t)$  – sumaryczna siła międzyzębna (pierwszy stopień przekładni),

$F_{4-5}^{\Sigma}(t)$  – sumaryczna siła międzyzębna (drugi stopień przekładni),

$\beta_{b2-3}$  – kąt pochylenia linii zębów na promieniu zasadniczym (pierwszy stopień przekładni),

$\beta_{b4-5}$  – kąt pochylenia linii zębów na promieniu zasadniczym (drugi stopień przekładni),

$k_{\theta y1-2}$  – tłumienie skrętne (wokół osi  $y$ ) wału wejściowego,

$c_{\theta y1-2}$  – sztywność skrętna (wokół osi  $y$ ) wału wejściowego,

$k_{\theta y3-4}$  – tłumienie skrętne (wokół osi  $y$ ) wału pośredniego,

$c_{\theta y3-4}$  – sztywność skrętna (wokół osi  $y$ ) wału pośredniego,

$k_{\theta y5-6}$  – tłumienie skrętne (wokół osi  $y$ ) wału wyjściowego,

$c_{\theta y5-6}$  – sztywność skrętna (wokół osi  $y$ ) wału wyjściowego,

$c_{\theta z2}$  – sztywność skrętna (wokół osi  $z$ ) wału oraz wieńca zębniaka pierwszego stopnia,  
 $k_{\theta z2}$  – tłumienie skrętne (wokół osi  $z$ ) wału oraz wieńca zębniaka pierwszego stopnia,  
 $c_{\theta z3}$  – sztywność skrętna (wokół osi  $z$ ) wału oraz wieńca koła pierwszego stopnia,  
 $k_{\theta z3}$  – tłumienie skrętne (wokół osi  $z$ ) wału oraz wieńca koła pierwszego stopnia,  
 $c_{\theta z4}$  – sztywność skrętna (wokół osi  $z$ ) wału oraz wieńca zębniaka drugiego stopnia,  
 $k_{\theta z4}$  – tłumienie skrętne (wokół osi  $z$ ) wału oraz wieńca zębniaka drugiego stopnia,  
 $c_{\theta z5}$  – sztywność skrętna (wokół osi  $z$ ) wału oraz wieńca koła drugiego stopnia,  
 $k_{\theta z5}$  – tłumienie skrętne (wokół osi  $z$ ) wału oraz wieńca koła drugiego stopnia,  
 $c_{qx1-2}$  – sztywność poprzeczna (wzdłuż osi  $x$ ) wału wejściowego oraz jego łożyskowania,  
 $c_{qx3-4}$  – sztywność poprzeczna (wzdłuż osi  $x$ ) wału pośredniego oraz jego łożyskowania,  
 $c_{qx5-6}$  – sztywność poprzeczna (wzdłuż osi  $x$ ) wału wyjściowego oraz jego łożyskowania,  
 $k_{qx1-2}$  – tłumienie poprzeczne (wzdłuż osi  $x$ ) wału wejściowego oraz jego łożyskowania,  
 $k_{qx3-4}$  – tłumienie poprzeczne (wzdłuż osi  $x$ ) wału pośredniego oraz jego łożyskowania,  
 $k_{qx5-6}$  – tłumienie poprzeczne (wzdłuż osi  $x$ ) wału wyjściowego oraz jego łożyskowania,  
 $c_{qy1-2}$  – sztywność podłużna (wzdłuż osi  $y$ ) łożyskowania wału wejściowego,  
 $c_{qy3-4}$  – sztywność podłużna (wzdłuż osi  $y$ ) łożyskowania wału pośredniego,  
 $c_{qy5-6}$  – sztywność podłużna (wzdłuż osi  $y$ ) łożyskowania wału wyjściowego,  
 $k_{qy1-2}$  – tłumienie podłużne (wzdłuż osi  $y$ ) łożyskowania wału wejściowego,  
 $k_{qy3-4}$  – tłumienie podłużne (wzdłuż osi  $y$ ) łożyskowania wału pośredniego,  
 $k_{qy5-6}$  – tłumienie podłużne (wzdłuż osi  $y$ ) łożyskowania wału wyjściowego.

Przedstawione równania stanowią podstawę do wyznaczania przebiegu czasowego sumarycznej siły międzyzębnej  $F_{2-3}^{\Sigma}(t)$  oraz  $F_{4-5}^{\Sigma}(t)$ , na które to siły składają się wartości sił międzyzębnych oddziałujących w prawidłowych przyporach  $F_{2-3}^{pp}(t)$  oraz  $F_{4-5}^{pp}(t)$ , jak i wartości dodatkowych sił międzyzębnych działających podczas przyporu nieprawidłowego, odpowiednio  $F_{2-3}^{np}(t)$  oraz  $F_{4-5}^{np}(t)$ . Pojęcie przyporu prawidłowego należy rozumieć [1] jako przypór pary zębów, w których chwilowy punkt współpracy znajduje się na odcinku nominalnego przyporu. Natomiast przypór nieprawidłowy zachodzi wówczas, gdy chwilowy punkt współpracy znajduje się poza odcinkiem nominalnego przyporu. Nieprawidłowość przyporu polega na wchodzeniu przedwcześnie w przypór lub na zbyt późnym wyzębieniu. Obciążenie dynamiczne występujące na odcinku przyporu jest przyczyną występowania trzech różnych stanów współpracy zębów.

Sumaryczną siłę międzyzębną w modelu określono jako sumę poszczególnych sił działających na ząb będący aktualnie w zączeniu.

$$F_{2-3}^{\Sigma}(t) = F_{2-3}^{pp1}(t) + F_{2-3}^{pp2} + F_{2-3}^{np1}(t) + F_{2-3}^{np2} + \dots + F_{2-3}^{ppi}(t) + F_{2-3}^{npi}, \quad (19)$$

$$F_{4-5}^{\Sigma}(t) = F_{4-5}^{pp1}(t) + F_{4-5}^{pp2} + F_{4-5}^{np1}(t) + F_{4-5}^{np2} + \dots + F_{4-5}^{ppi}(t) + F_{4-5}^{npi}, \quad (20)$$

gdzie:

$F_{j-k}^{pp1}$  – siła międzyzębna działająca w pierwszej parze będącej w prawidłowym przyporze,

$F_{j-k}^{ppi}$  – siła międzyzębna działająca w  $i$ -tej parze będącej w prawidłowym przyporze,

$F_{j-k}^{np1}$  – siła międzyzębna działająca w pierwszej parze będącej w nieprawidłowym przyporze,

$F_{j-k}^{npi}$  – siła międzyzębna działająca w  $i$ -tej parze będącej w nieprawidłowym przyporze,

$j - k$  – indeksy dolne 2-3 i 4-5 oznaczają odpowiednio stopień pierwszy i drugi przekładni.

Siłę międzyzębną w  $i$ -tej parze zębów działającą w przekroju normalnym zdefiniowano następująco:

$$F_{j-k}^{ppi}(t) = \left[ c_{j-k}^i(t) \cdot \left( \Sigma \delta_{j-k}^i + \frac{\lambda_{j-k}^i}{2} \cdot (1 - H[\Sigma \delta_{j-k}^i]) \right) + k_{j-k}^i(t) \cdot \Sigma \delta_{j-k}^i \right] \cdot H[\Sigma \delta_{j-k}^i]^2, \quad (21)$$

gdzie:

$c_{j-k}^i(t)$  – sztywność  $i$ -tej pary zębów,

$k_{j-k}^i(t)$  – tłumienie drgań  $i$ -tej pary zębów,

$H[\Sigma \delta_{j-k}^i]$  – funkcja trójwartościowa,

$\lambda_{j-k}^i$  – normalny luz międzyzębny,

$j - k$  – indeksy dolne 2-3 oraz 4-5 oznaczają odpowiednio stopień pierwszy oraz drugi przekładni.

Suma ugięć elementów sprężystych  $\Sigma \delta_{j-k}^i$  oraz suma prędkości  $\Sigma \dot{\delta}_{j-k}^i$  są równe:

$$\Sigma \delta_{j-k}^i = (r_{bj} \cdot \theta_{y2} - r_{b2} \cdot \theta_{y3} - q_{x2} + q_{x3}) \cdot \cos \beta_{bj-k} + \dots + (r_{bj} \cdot \theta_{z2} - r_{b2} \cdot \theta_{z3} - q_{y2} + q_{y3}) \cdot \sin \beta_{bj-k} + \Sigma e_{j-k}^i(t), \quad (22)$$

$$\Sigma \dot{\delta}_{j-k}^i = (r_{bk} \cdot \dot{\theta}_{y2} - r_{b2} \cdot \dot{\theta}_{y3} - \dot{q}_{x2} + \dot{q}_{x3}) \cdot \cos \beta_{bj-k} + \dots + (r_{bk} \cdot \dot{\theta}_{z2} - r_{b2} \cdot \dot{\theta}_{z3} - \dot{q}_{y2} + \dot{q}_{y3}) \cdot \sin \beta_{bj-k}, \quad (23)$$



gdzie:

$\Sigma e_{j-k}^i(t)$  – summaryczna odchyłka kinematyczna współpracy koła oraz zębnika dla każdej  $i$ -tej pary zębów,

$j = \{2, 4\}$ ,  $k = \{3, 5\}$  – indeksy dolne 2-3 oraz 4-5 oznaczają odpowiednio stopień pierwszy oraz drugi przekładni.

W omawianym modelu wymienione stany współpracy zębów uwzględniono za pomocą funkcji trójwartościowej  $H$ , której argumentem jest składowa sumy ugięć elementów sprężystych  $\Sigma \delta_{j-k}^i$  wyznaczona w kierunku stycznym do odcinka przyporu, co pozwala wyodrębnić następujące przypadki:

1.  $\Sigma \delta_{j-k}^i \geq 0$  – zęby znajdują się w nominalnym przyporze, wtedy  $H\left[\Sigma \delta_{j-k}^i\right] = 1$ , a siła międzyzębna wynosi:

$$F_{j-k}^{ppi}(t) = c_{j-k}^i(t) \cdot \Sigma \delta_{j-k}^i + k_{j-k}^i(t) \cdot \Sigma \delta_{j-k}^i, \quad (24)$$

2.  $-\lambda_{j-k}^i < \Sigma \delta_{j-k}^i < 0$  – wystąpiła utrata kontaktu między współpracującymi zębami, wtedy  $H\left[\Sigma \delta_{j-k}^i\right] = 0$ , co w konsekwencji daje wartość siły międzyzębnej równą:

$$F_{j-k}^{ppi}(t) = 0, \quad (25)$$

3.  $\Sigma \delta_{j-k}^i \leq -\lambda_{j-k}^i$  – oderwany ząb uderza o ząb sąsiedni koła współpracującego, wtedy  $H\left[\Sigma \delta_{j-k}^i\right] = -1$ , a siła międzyzębna wynosi:

$$F_{j-k}^{ppi}(t) = c_{j-k}^i(t) \cdot \left(\Sigma \delta_{j-k}^i + \lambda_{j-k}^i\right) + k_{j-k}^i(t) \cdot \Sigma \delta_{j-k}^i. \quad (26)$$

Zauważmy, że teoria zazębienia ewolwentowego przyjmuje, że współpraca zębów przekładni zachodzi jedynie na odcinku przyporu. Niemniej jednak rzeczywiste obiekty charakteryzują się podatnością zazębienia oraz odchyleniami zarysu ewolwentowego od zarysu teoretycznego, co w niektórych przypadkach może prowadzić do powstawania zjawiska nieprawidłowego przyporu. Jak już wspomniano wcześniej, nieprawidłowość ta polega na przedwczesnym wejściu pary zębów w przypór lub też na zbyt późnym wyjściu z przyporu. W takich przypadkach jeden z zębów tworzących współpracującą parę działa krawędzią głowy zęba na flankę zęba drugiego z siłą  $F_{j-k}^{npi}$ . W przyjętym modelu przekładni zębatej wartość tejże siły jest wyznaczana na podstawie zależności utworzonych w oparciu o zjawisko interferencji pozornej. Zjawisko to ma miejsce, gdy na skutek przemieszczeń, będących efektem ruchu drgającego kół przekładni, dochodzi do pozornego, wzajemnego

przenikania zarysów zębów współpracujących kół. W rzeczywistości przenikanie zarysów zębów współpracujących kół kompensowane jest przez sprężyste ich odkształcenie. Dlatego też, znając sztywność zazębienia oraz wartość interferencji, a tym samym ugięcia sprężystego zębów, wartość dodatkowej siły międzyzębnej, działającej w nieprawidłowym przyporze *i-tej* pary zębów, wyznaczono za pomocą następującej zależności:

$$F_{j-k}^{mpi}(t) = r_{bj} \cdot \varphi_{j-k}^i \cdot c_{j-k}^i(t), \quad (27)$$

gdzie:

$\varphi_{j-k}^i$  – miara łukowa interferencji pozornej *i-tej* pary zębów,

#### 4. Podsumowanie

W opracowaniu przedstawiono nowy model dynamiczny dwustopniowej przekładni zębatej przeznaczony do badań teoretycznych, których celem jest określenie wartości międzyzębnych sił dynamicznych. Ze względu na fakt, iż całkowita wartość międzyzębnych sił dynamicznych nie jest prostą sumą wpływów obciążenia zewnętrznego i wewnętrznego przekładni, zastosowanie wspomnianego modelu umożliwi zbadanie synergicznego wpływu na poszczególne stopnie przekładni między innymi zmiennych sztywności zazębienia, zmiennych tłumień w zazębieniach, błędów wykonania uzębienia oraz momentu obrotowego na wartość międzyzębnych sił dynamicznych.

#### BIBLIOGRAFIA

1. Grzesica P.: Wpływ obciążenia zewnętrznego przekładni maszyn górniczych na międzyzębne siły dynamiczne. Praca doktorska, Gliwice 2005.
2. ISO 6336: Calculation of load capacity of spur and helical gears. Genewa 1996.
3. Müller L.: Przekładnie zębate – Dynamika. WNT, Warszawa 1986.
4. Skoć A.: Prognozowanie własności dynamicznych przekładni zębatych stożkowych. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2007.
5. Zajler W.: Siły dynamiczne w przekładniach dwustopniowych. Praca doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice 1974.
6. Zimroz R.: Metoda diagnostyki wielostopniowych przekładni zębatych w układach napędowych przenośników taśmowych z zastosowaniem modelowania. Praca doktorska, Politechnika Wroclawska, Wrocław 2002.