

Władysław ZAPAŁA
Politechnika Śląska, Gliwice

FILTRY ORTOGONALNE DLA SKŁADOWYCH HARMONICZNYCH NAPIĘCIA LUB PRĄDU

Streszczenie. Przedstawiono cyfrowe filtry ortogonalne dla składowych harmonicznym prądu lub napięcia. Omówiono podstawowe własności tych filtrów. Wykazano, że wszystkie przedstawione równania opisujące charakterystyki amplitudowe filtrów są zbieżne do charakterystyk filtrów idealnych. Rozważania zilustrowano za pomocą rysunków i wykresów.

ORTHOGONAL FILTERS FOR VOLTAGE OR CURRENT HARMONICS

Summary. Digital orthogonal filters for voltage or current harmonics have been presented in the paper. Basic properties of these filters have been discussed. It has been proved that all amplitude characteristics of the presented filters converge to characteristics of ideal filters. Considerations have been illustrated by means of figures and charts.

1. Wprowadzenie

Filtr cyfrowy o skończonej odpowiedzi impulsowej (filtr SOI) można przedstawić w dziedzinie czasu w postaci równania [2]

$$y(t) = \sum_{n=-k}^k c_n^{(k)} \cdot x(t+nT) , \quad (1)$$

gdzie:

$y(t)$ – wartość chwilowa sygnału na wyjściu filtru,

$x(t+nT)$ – wartości sygnału filtrowanego,

$c_n^{(k)}$ – współczynniki filtru zależne od wartości n i k ,

n – liczba całkowita ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$),

k – liczba naturalna ($k = 1, 2, 3, \dots$),

T – okres próbkowania.

W ogólnym przypadku charakterystyki częstotliwościowe filtru (1) są funkcjami zespolonymi

$$K(j\omega T) = \sum_{n=-k}^k c_n^{(k)} \cdot \exp(jn\omega T) = A(\omega T) + j \cdot B(\omega T) \quad (2)$$

gdzie: ω – pulsacja, $j = \sqrt{-1}$.

Parę filtrów ortogonalnych można przedstawić w postaci następujących zależności [4]

$$y_1(t) = \sum_{n=-k}^k a_n^{(k)} \cdot x(t + nT), \quad y_2(t) = \sum_{n=-k}^k b_n^{(k)} \cdot x(t + nT) \quad (3)$$

Charakterystyka amplitudowa pierwszego z pary filtrów jest funkcją rzeczywistą, a charakterystyka amplitudowa drugiego z nich jest funkcją urojoną

$$K_1(j\omega T) = \sum_{n=-k}^k a_n^{(k)} \cdot \cos(n\omega T) = A(\omega T), \quad K_2(j\omega T) = j \cdot \sum_{n=-k}^k b_n^{(k)} \cdot \sin(n\omega T) = j \cdot B(\omega T) \quad (4)$$

przy czym jednocześnie spełnione są warunki

$$B(\omega T) = A(\omega T) \quad \text{dla } \omega T \geq 0, \quad B(\omega T) = -A(\omega T) \quad \text{dla } \omega T < 0 \quad (5)$$

2. Wzory projektowe dla pasmowych filtrów ortogonalnych

Przed wyprowadzeniem zależności dla współczynników filtrów ortogonalnych przyjęto następujące założenia:

- najwyższą harmoniczną występującą w analizowanym przebiegu napięcia lub prądu jest 23 lub niższa harmoniczna,

- analizowany przebieg odkształcony próbkowany jest z częstotliwością 2400 Hz, następnie jest filtrowany za pomocą cyfrowego filtra półpasmowego i z tak przefiltrowanego sygnału pobierana jest co druga próbka.

Na podstawie przyjętych założeń można stwierdzić, że dysponuje się ciągiem danych próbkowanych z częstotliwością 1200 Hz spełniającym warunki twierdzenia o próbkowaniu sformułowanego przez amerykańskiego naukowca C. E. Shannona [3]. W artykule pominięto przedstawienie całego procesu wyprowadzania zależności, skupiając główną uwagę na zaprezentowaniu i omówieniu uzyskanych wyników końcowych. Wartości współczynników pary filtrów ortogonalnych można wyznaczać na podstawie następujących zależności:

$$a_n^{(k)} = \frac{2 \cdot (2k)!}{4^k \cdot (k+n)! \cdot (k-n)!} \cdot \frac{C - 4^k \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)}{C - 4^k} \quad (6)$$

$$b_n^{(k)} = \frac{2 \cdot (2k)!}{(k+n)! \cdot (k-n)!} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)}{4^k - D} \quad (7)$$

W równaniach tych występuje dowolna liczba naturalna k i dowolna liczba całkowita n . Zależność pomiędzy parametrem α a wielkościami C i D występującymi we wzorach (6) i (7) przedstawiono w tabeli 1. Z przedstawionych wzorów obliczeniowych dla współczynników ortogonalnych filtrów pasmowych wynikają następujące własności.

Własność 1

$$a_n^{(k)} = 0 \quad \text{dla } n > k \text{ lub } n < -k, \quad b_n^{(k)} = 0 \quad \text{dla } n > k \text{ lub } n < -k \quad (8)$$

Własność ta gwarantuje, że w przypadku uwzględniania wszystkich współczynników zaprojektowane filtry nie są obciążone efektem Wilbrahama-Gibbsa.

Własność 2

$$a_{-n}^{(k)} = a_n^{(k)}, \quad b_{-n}^{(k)} = -b_n^{(k)} \quad (9)$$

Własność ta stanowi warunek konieczny, żeby filtry były filtrami ortogonalnymi.

Własność 3

$$\sum_{n=-k}^k a_n^{(k)} = 0, \quad \sum_{n=-k}^k b_n^{(k)} = 0 \quad (10)$$

Własność ta zapewnia nieskończenie duże tłumienie przez filtry składowej stałej niezależnie od wartości liczby k ($k=1, 2, 3, \dots$).

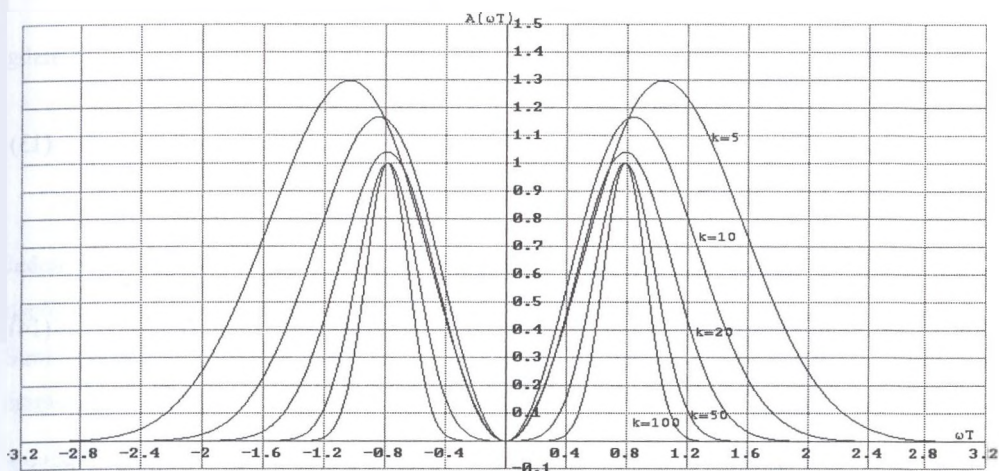
Tabela 1

Zależność pomiędzy parametrem α i wielkościami C i D dla kolejnych harmonicznych

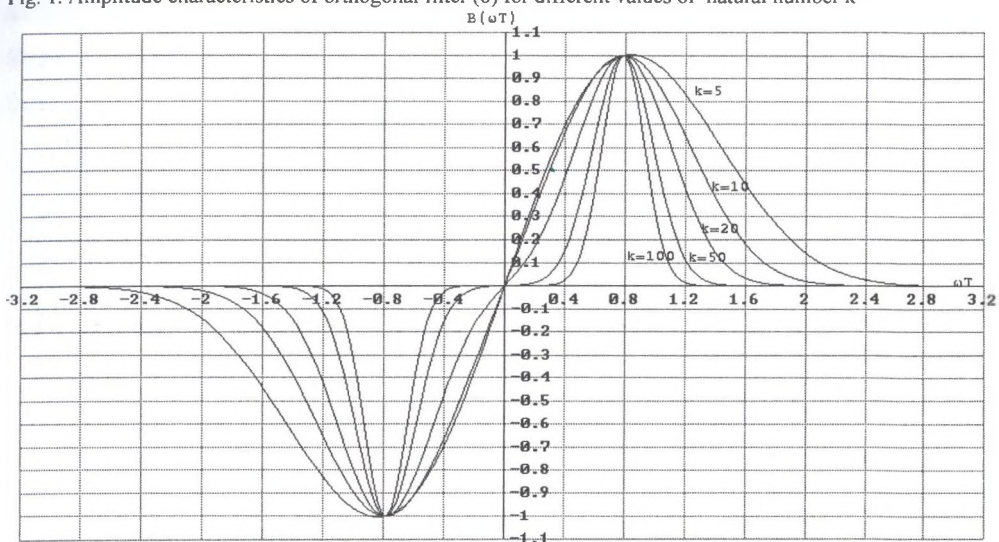
Harmoniczna	α	C	D
1 (50 Hz)	$\frac{12}{1}$	$\left(2 + \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k$	$(2 + \sqrt{3})^k$
2 (100 Hz)	$\frac{12}{2}$	$(2 + \sqrt{3})^k$	3^k
3 (150 Hz)	$\frac{12}{3}$	$(2 + \sqrt{2})^k$	2^k
4 (200 Hz)	$\frac{12}{4}$	3^k	1
5 (250 Hz)	$\frac{12}{5}$	$\left(2 + \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k$	$(2 - \sqrt{3})^k$
6 (300 Hz)	$\frac{12}{6}$	2^k	0
7 (350 Hz)	$\frac{12}{7}$	$\left(2 - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k$	$(2 - \sqrt{3})^k$
8 (400 Hz)	$\frac{12}{8}$	1	1
9 (450 Hz)	$\frac{12}{9}$	$(2 - \sqrt{2})^k$	2^k
10 (500 Hz)	$\frac{12}{10}$	$(2 - \sqrt{3})^k$	3^k
11 (550 Hz)	$\frac{12}{11}$	$\left(2 - \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k$	$(2 + \sqrt{3})^k$

3. Zbieżność charakterystyk amplitudowych zaprojektowanych filtrów

Na rysunkach 1 i 2 przedstawiono wykresy charakterystyk amplitudowych $A(\omega T)$ i $B(\omega T)$ dwóch filtrów ortogonalnych dla $\alpha = 4$ i różnych wartości liczby naturalnej k . Wraz ze wzrostem wartości tej liczby charakterystyki amplitudowe coraz dokładniej aproksymują charakterystyki idealnych pasmowych filtrów ortogonalnych.



Rys. 1. Charakterystyki amplitudowe filtru ortogonalnego (6) dla różnych wartości liczby naturalnej k
 Fig. 1. Amplitude characteristics of orthogonal filter (6) for different values of natural number k



Rys. 2. Charakterystyki amplitudowe filtru ortogonalnego (7) dla różnych wartości liczby naturalnej k
 Fig. 2. Amplitude characteristics of orthogonal filter (7) for different values of natural number k

Dla dużych wartości liczby naturalnej k (np. $k=100$ lub więcej) słuszne są zależności

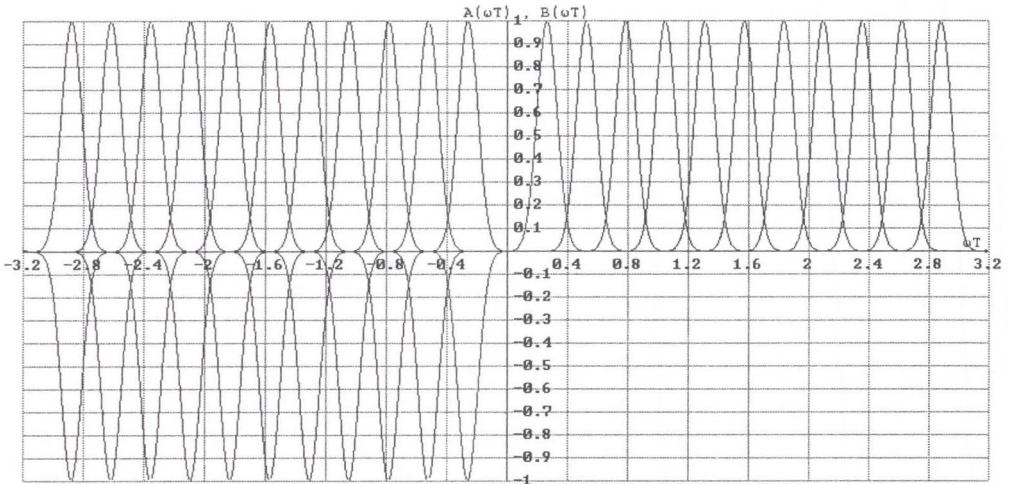
$$A(\omega T) = \sum_{n=-k}^k \frac{2 \cdot (2k)!}{2^{2k} \cdot (k+n)! \cdot (k-n)!} \cdot \frac{C^{-4k} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)}{C^{-4k}} \cdot \cos(n\omega T) \approx \left[\cos\left(\frac{\omega T}{2} - \frac{\pi}{2\alpha}\right) \right]^{2k} + \left[\cos\left(\frac{\omega T}{2} + \frac{\pi}{2\alpha}\right) \right]^{2k} \quad (11)$$

$$B(\omega T) = \sum_{n=-k}^k \frac{2 \cdot (2k)!}{(k+n)! \cdot (k-n)!} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)}{4^k - D} \cdot \sin(n\omega T) \approx \left[\cos\left(\frac{\omega T}{2} - \frac{\pi}{2\alpha}\right) \right]^{2k} - \left[\cos\left(\frac{\omega T}{2} + \frac{\pi}{2\alpha}\right) \right]^{2k} \quad (12)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A(\omega T) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \omega T = \pm \frac{\pi}{\alpha} \\ 0 & \text{dla } \omega T \neq \pm \frac{\pi}{\alpha} \end{cases}, \quad A(\omega T \pm r \cdot 2\pi) = A(\omega T), \quad -\pi \leq \omega T \leq +\pi \quad (13)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B(\omega T) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \omega T = +\frac{\pi}{\alpha} \\ -1 & \text{dla } \omega T = -\frac{\pi}{\alpha} \\ 0 & \text{dla } \omega T \neq \pm \frac{\pi}{\alpha} \end{cases}, \quad B(\omega T \pm r \cdot 2\pi) = B(\omega T), \quad -\pi \leq \omega T \leq +\pi \quad (14)$$

Na rysunku 3 przedstawiono wykresy charakterystyk amplitudowych filtrów ortogonalnych dla pierwszych jedenastu składowych harmonicznych zaprojektowanych na podstawie wzorów (6) i (7) oraz tabeli 1 (przyjęto $k=450$).



Rys. 3. Charakterystyki amplitudowe zaprojektowanych filtrów ortogonalnych dla jedenastu harmonicznych prądu lub napięcia

Fig. 3. Amplitude characteristics of the designed orthogonal filters for eleven voltage or current harmonics

4. Zastosowanie filtrów ortogonalnych

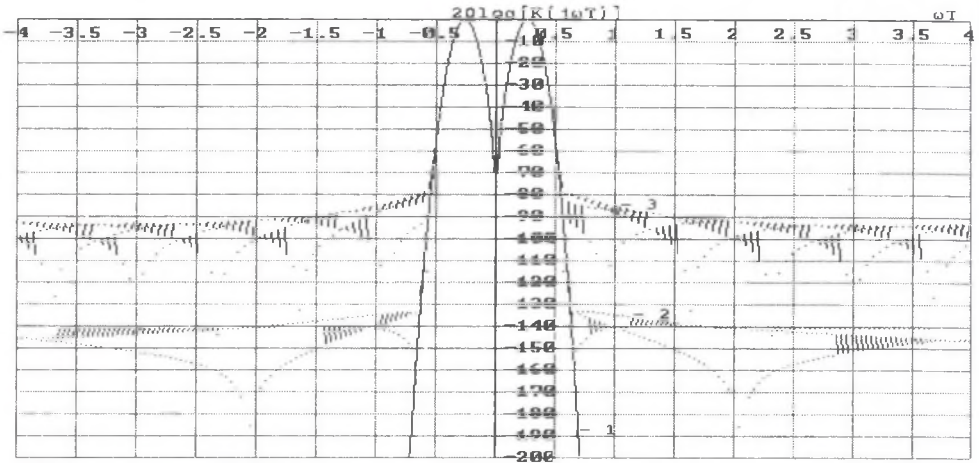
Wartość chwilowa amplitudy składowej harmonicznej filtrowanej za pomocą pary filtrów ortogonalnych wyznaczana jest ze wzoru

$$Y(t) = \sqrt{[y_C(t)]^2 + [y_S(t)]^2} \quad , \quad (15)$$

gdzie $y_C(t)$ i $y_S(t)$ są sygnałami na wyjściach pary filtrów ortogonalnych i są równe

$$y_C(t) = \sum_{n=-M}^M a_n^{(k)} \cdot x(t + nT), \quad y_S(t) = \sum_{n=-M}^M b_n^{(k)} \cdot x(t + nT) . \quad (16)$$

Jeden z tych sygnałów jest sinusoidą o częstotliwości równej częstotliwości harmonicznej napięcia lub prądu, a drugi z nich jest taką samą sinusoidą, ale przesuniętą w fazie o $\pi/2$. Suma kwadratów wartości chwilowych tych sygnałów jest kwadratem wartości chwilowej amplitudy przebiegu sinusoidalnego. W zależności od analizowanej harmonicznej współczynniki $a_n^{(k)}$ i $b_n^{(k)}$ wyznacza się na podstawie wzorów (6) i (7) oraz tabeli 1. Gdy $M=k$, to proces filtracji nie jest obciążony efektem Wilbrahama-Gibbsa [1]. W większości przypadków nie jest wymagana tak wielka dokładność obliczeniowa i można zmniejszyć długość filtrów przez przyjęcie, że $M < k$. Wpływ przyjęcia takiego założenia na charakterystyki filtru zilustrowano na rys. 4.



Rys. 4. Charakterystyki filtrów o różnych długościach
 Fig. 4. Characteristics of filters with different length

Rysunek ten przedstawia wykresy w skali logarytmicznej charakterystyki amplitudowej w trzech przypadkach, tzn. gdy $M=k=450$ (wykres 1), $M=75 < k=450$ (wykres 2) i $M=55 < k=450$ (wykres 3). W ostatnim przypadku uzyskuje się tłumienie na poziomie 80 dB, a więc dokładność obliczeń do czwartego miejsca po przecinku w notacji dziesiętnej. Ponieważ współczynniki $a_n^{(k)}$ są symetryczne, a współczynniki $b_n^{(k)}$ antysymetryczne (własność 2 w rozdziale 2), to obliczone wartości tych współczynników można przedstawiać w skróconej formie w postaci wektorów $A = [a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, \dots, a_M^{(k)}]$, $B = [b_0^{(k)}, b_1^{(k)}, \dots, b_M^{(k)}]$. Przyjmując dodatkowo dwa wektory COS i SIN o elementach $COS = [1, 2 \cos(\omega T), 2 \cos(2\omega T), \dots, 2 \cos(M\omega T)]$, $SIN = [0, 2 \sin(\omega T), 2 \sin(2\omega T), \dots, 2 \sin(M\omega T)]$, można charakterystyki amplitudowe $A(\omega T)$ i $B(\omega T)$ wyznaczać jako iloczyn skalarny odpowiednich wektorów $A(\omega T) = A * COS$ i $B(\omega T) = B * SIN$. Przedstawiony zapis jest szczególnie dogodny, gdy w czasie pracy korzysta się z takich programów, jak MATLAB, MATHEMATICA lub DERIVE. Poniżej przedstawiono dwa wektory, których elementy są wartościami współczynników pary filtrów ortogonalnych dla podstawowej harmoniczej (50 Hz) obliczonymi dla $k=450$ i przy przyjęciu ograniczenia $M=55 < k=450$.

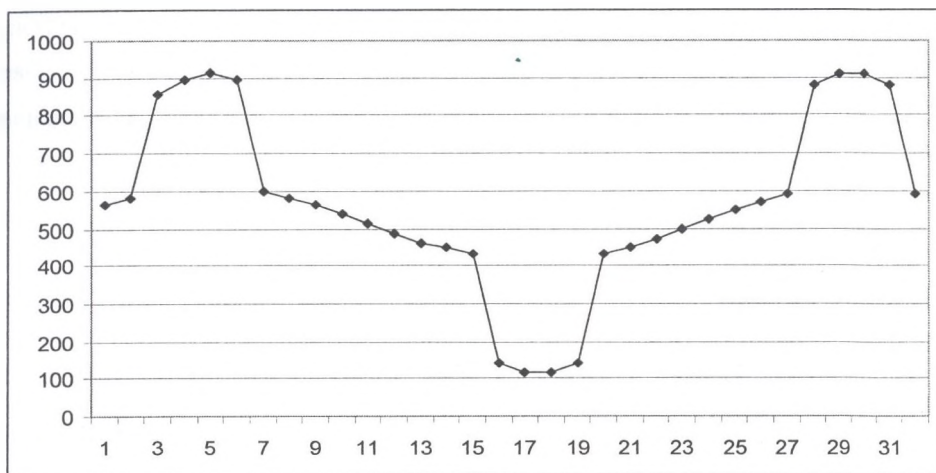
$A = [0.0531775, 0.0512509, 0.045642898, 0.036851738, 0.025649747, 0.013004019, -0.0000215,$
 $-0.0123712, -0.0230976, -0.0314471, -0.0369197, -0.0393007, -0.0386609, -0.0353277,$
 $-0.0298325, -0.0228416, -0.0150808, -0.0072607, -0.0000114, 0.0061668, 0.0109338, 0.0141203,$
 $0.0157201, 0.0158662, 0.0147974, 0.0128185, 0.0102609, 0.0074462, 0.0046582, 0.0021226,$
 $-0.0000032, -0.0016311, -0.0027370, -0.0033489, -0.0035334, -0.0033801, -0.0029881,$

-0.0024537, -0.0018619, -0.0012810, -0.0007599, -0.0003287, -0.0000005, 0.0002254, 0.0003591, 0.0004166, 0.0004167, 0.0003778, 0.0003165, 0.0002463, 0.0001771, 0.0001154, 0.0000648, 0.0000265, 0.0000000, -0.0000164]

$B=[0.0000000, 0.0137328, 0.0263537, 0.0368584, 0.0444461, 0.0485927, 0.0490933, 0.0460715, 0.0399538, 0.0314139, 0.0212955, 0.0105212, 0.0000000, -0.0094576, 0.0172075, -0.0228174, -0.0260865, -0.0270397, -0.0259000, -0.0230438, -0.0189462, -0.0141229, -0.0090766, -0.0042514, 0.0000000, 0.0034348, 0.0059245, 0.0074476, 0.0080719, 0.0079317, 0.0072021, 0.0060745, 0.0047344, 0.0033454, 0.0020381, 0.0009049, 0.0000000, -0.0006569, -0.0010739, -0.0012796, -0.0013146, -0.0012243, -0.0010537, -0.0008423, -0.0006222, -0.0004167, -0.0002406, -0.0001012, 0.0000000, 0.0000660, 0.0001022, 0.0001154, 0.0001124, 0.0000992, 0.0000809, 0.0000613]$

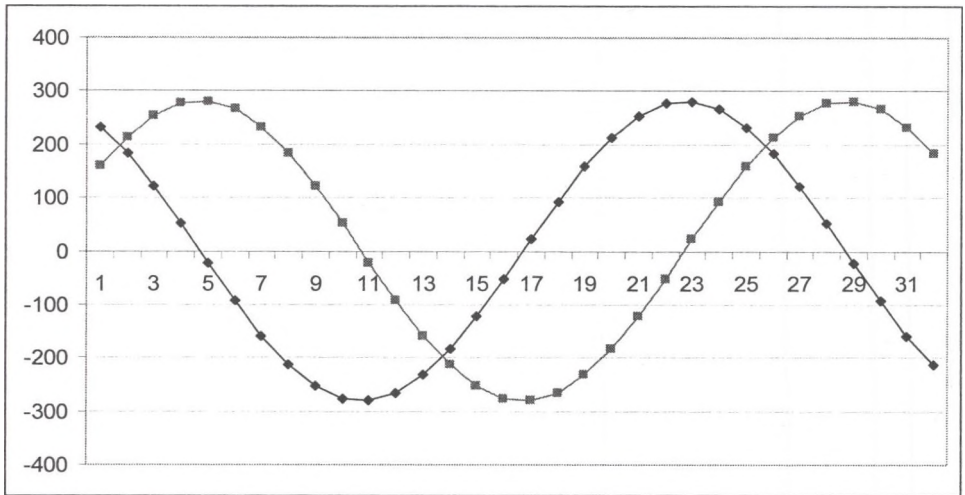
5. Eksperyment pomiarowy

Do sieci o napięciu 230 V, 50 Hz włączono odbiornik w postaci lampy biurkowej 100 W i zasilacza impulsowego komputera IBM PC. Następnie zgodnie z przyjętymi założeniami przedstawionymi na początku tego artykułu zarejestrowano za pomocą 10-bitowego przetwornika A/C przebieg prądu pobieranego przez ten odbiornik (rys. 5). Na rys. 6. przedstawiono składowe ortogonalne pierwszej harmonicznej prądu wyznaczone za pomocą filtracji cyfrowej przebiegu z rys. 5 z wykorzystaniem zaprojektowanych filtrów ortogonalnych.



Rys. 5. Wykres zarejestrowanego prądu przez przetwornik A/C

Fig. 5. Chart of the current registered by means of A/C converter



Rys. 6. Składowe ortogonalne pierwszej harmonicznej prądu na wyjściach filtrów ortogonalnych
 Fig. 6. Orthogonal components of the first current harmonic filtered by orthogonal filters

6. Podsumowanie

W cyfrowych układach pomiarowych amplitud składowych harmonicznym prądu lub napięcia powszechnie stosuje się filtry Walsha I lub II rzędu, albo filtry sinusowe i cosinusowe. Zaletą tych filtrów jest ich prosta konstrukcja. Zasadniczą ich wadą jest to, że filtry te nie mogą być stosowane, gdy na analizowany przebieg odkształcony prądu lub napięcia nałożone są sygnały zakłócające. W artykule przedstawiono nową klasę cyfrowych filtrów ortogonalnych, które nie mają tej wady. Przedstawione analityczne równania opisujące te filtry pozwalają na kształtowanie ich charakterystyk w zależności od potrzeb projektanta filtrów. Zamieszczone w artykule wykresy sporządzono za pomocą programów komputerowych Derive i Microsoft Excel.

BIBLIOGRAFIA

1. Hartman M.T.: Fenomen Wilbrahama-Gibbsa. Wiadomości Elektrotechniczne, nr 12, 2007, s.21-25.
2. Lyons R.G.: Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2000.
3. Szabatin J.: Podstawy teorii sygnałów. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 2003.

4. Szafran J., Wiszniewski A.: Algorytmy pomiarowe i decyzyjne cyfrowej automatyki elektroenergetycznej. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2001.
5. Zapała W.: Discrete time window and its frequency characteristics. Proceedings of the 10th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, Międzyzdroje, 30 August - 2 September, 2004. IEEE Conference Number: 9195. Scientific co-sponsors: IEEE Robotics & Automation Society, IEEE Control Systems Society, Committee of Automation and Robotics, Committee of Metrology and Instrumentation Polish Academy of Sciences, Warsaw. Vol. 1. Szczecin: Technical University of Szczecin Press 2004, s. 691-694.
6. Zapała W.: Dyskretna transformata Fouriera okna czasowego skonstruowanego za pomocą funkcji gamma. Politechnika Śląska, Zeszyty Naukowe Nr 1649. Górnictwo. Zeszyt dwieście sześćdziesiąty. Konferencja Naukowa "Górnictwo Zrównoważonego Rozwoju 2004". „Kongres Nauki Politechniki Śląskiej” z okazji 60-lecia Politechniki Śląskiej. Rozpoznawanie złóż, Ergooszczędne i niezawodne maszyny górnicze. Ochrona środowiska naturalnego. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2004, s. 532-542.
7. Zapała W.: Digital Differentiators and Discrete Time Windows. Published by INTERNATIONALSAR in the book Emerging Technologies, Robotics and Control Systems, volume 1, pp.139-144. Editor: Salvatore Pennacchio. Palermo, Italy, June 2007. (ISBN 978-88-901928-1-4).
8. Zapała W.: Examples of Digital FIR Filters without Gibbs' Phenomenon. International Journal of Factory Automation, Robotics and Soft Computing, Issue 1, January 2008, pp.35-40. Printed by INTERNATIONALSAR, Palermo, Italy, January 2008. (ISSN 1828-6984).
9. Zieliński T.P.: Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 2005.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Janusz Halawa