

Światosław KRZESZOWSKI

Instytut Inżynierii Wody i Ścieków; Politechnika Śląska, Gliwice

## OBLICZANIE SKŁADU I UDZIAŁU NIEZNANEGO STRUMIENIA W MIESZANINIE O ZNANYM SKŁADZIE PRZY POMOCY PROGRAMU KOMPUTEROWEGO KYBL-4

**Streszczenie.** Praca prezentuje możliwości obliczeniowe programu KYBL-4. Program służy do estymacji składu i udziału nieznanego strumienia w mieszaninie strumieni o znanym składzie i nieznanym udziale. Program może być stosowany zarówno do obliczeń związanych z mieszaniem się wód (np. wód kopalnianych), jak też do rozwiązywania innych problemów środowiskowych.

## EVALUATION OF THE COMPOSITION AND PORTION OF AN UNKNOWN SAMPLE IN THE MIXTURE BY THE COMPUTER PROGRAM KYBL-4

**Summary.** The paper presents evaluating possibilities of the computer program KYBL-4. Program is designed to estimate the composition and portion of an unknown sample in the mixture of samples with known compositions and unknown portions. Program could be used to evaluating water mixing problems (e. g. mine waters) as well as to solving other environmental problems.

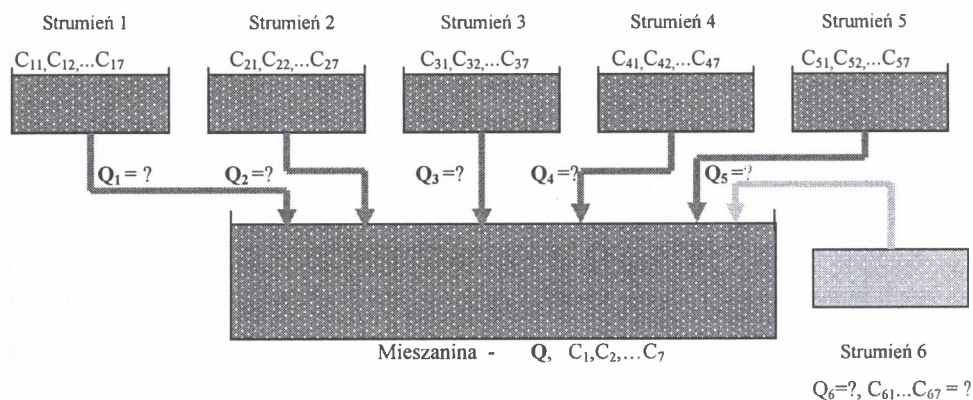
### 1. Wprowadzenie

Program KYBL-4 jest rozwinięciem metody obliczeniowej i opartego na niej programu KYBL-3, służącego do obliczania udziałów pięciu składowych strumieni o znanym składzie w mieszaninie o znanym składzie. W założeniu metody oraz oparte na nich programy zostały opracowane do obliczeń związanych z mieszaniem się wód kopalnianych ale z powodzeniem mogą być stosowane do rozwiązywania innych problemów środowiskowych. Metoda ta została po raz pierwszy zastosowana przez Grmelę i Restla [3], a następnie rozwinięta i

unowocześniona [2, 4]. Dokładność obliczeniową metody i powstałego w oparciu o nią programu KYBL-3 zweryfikowano na podstawie wybranych przypadków mieszania się wód w wyrobiskach górniczych kopalń GZW [5], a także sprawdzono dla danych przygotowanych teoretycznie. W trakcie weryfikacji działania programu KYBL-3 w praktyce okazało się, że dla niektórych zestawów danych konieczne stało się założenie istnienia dodatkowego strumienia o nieznanym składzie i udziale procentowym w mieszaninie, w przeciwnym wypadku dane należałoby uznać za błędne lub problem za nierozwiązywalny. W szczególnym przypadku dotyczyło to zestawów danych, gdzie zawartość danego składnika w mieszaninie była większa (lub mniejsza) niż w każdym z poszczególnych strumieni wejściowych. Ogólnodostępne obecnie oprogramowanie hydrochemiczne (np. PHREEQC, WATEQF, NETPATH etc.) nie posiada możliwości rozwiązywania tego typu problemów. Powszechnie uznany program PHREEQC [6] teoretycznie umożliwia obliczanie udziałów do 25 strumieni składowych w mieszaninie (procedura modelowania odwrotnego), nie zapewnia jednak możliwości oszacowania składu i udziału nieznanego próbki. Podstawowym zadaniem programu KYBL-4 była estymacja udziału oraz składu nieznanego, szóstego strumienia w mieszaninie. Jednocześnie założono, że program powinien być jak najprostszy w obsłudze, co ułatwi jego zastosowanie w praktyce technologicznej.

## 2. Zastosowana metoda matematyczna i algorytm programu

Schemat mieszania zarówno dla przypadku mieszania się pięciu strumieni, jak i dla przypadku, gdy zakładamy istnienie dodatkowego, szóstego, nieznanego co do składu i udziału strumienia przedstawiono na rys.1. Opisywany problem, przy założeniu istnienia wyłącznie pięciu strumieni opisywanych zawartościami siedmiu parametrów, sprowadza się do rozwiązania układu siedmiu równań liniowych z pięcioma niewiadomymi. W przypadku założenia istnienia szóstego strumienia liczba niewiadomych rośnie do trzynastu – sześć udziałów poszczególnych strumieni w mieszaninie oraz siedem zawartości poszczególnych parametrów w szóstym strumieniu.



Rys.1. Zastosowany schemat mieszania dla sześciu strumieni wejściowych

Objaśnienia:  $Q_i$  – udziały strumieni w mieszaninie,  $C_{ij}$  – zawartości parametrów w strumieniu  $Q=1 = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_6$ ,  $C_i$  – zawartość parametru w mieszaninie. Kolorem jaśniejszym oznaczono dodatkowy, szósty strumień o nieznanym składzie i udziale w mieszaninie

Fig.1. The applied model of mixing

Explanations:  $Q_i$  – components fractions,  $C_{ij}$  – concentrations of chemicals  $Q=1 = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_6$ ,  $C_i$  – concentration of the  $i$ -th chemical in the mixture. The lighter color marks an additional, sixth component of unknown composition and fraction

W praktyce obliczeniowej układy  $n$  równań posiadające  $m$  niewiadomych ( $n > m$ ) są bardzo często układami sprzecznymi. Spowodowane jest to w przeważającej większości przypadków tym, że współczynniki równań są wartościami uzyskiwanymi z pomiarów i jako takie obarczone mogą być błędami zarówno wynikającymi z błędów urządzeń pomiarowych, jak i udziału czynnika ludzkiego. Dodatkowo, w konkretnym problemie pięciu strumieni wód kopalnianych i ich mieszaniny dochodzić może błąd spowodowany nierównoczesnością pomiarów składu zarówno poszczególnych strumieni, jak i mieszaniny. W takich przypadkach dokładne rozwiązanie układu nie istnieje, lecz możliwe jest znalezienie rozwiązania przybliżonego. Metodą matematyczną polecaną do rozwiązywania takich układów jest metoda Cholesky'ego - optymalizująca dokładność obliczonego rozwiązania w oparciu o kryterium minimalizacji odchylenia kwadratowego [1]. Rozwinięcie i modyfikacja tej metody wraz z jej zastosowaniem w programie komputerowym KYBL-3 pozwoliło na znalezienie rozwiązania dla problemu udziałów pięciu składowych strumieni wejściowych o znanym składzie w mieszaninie [4, 7].

W trakcie weryfikacji opisanej wcześniej metody w praktyce okazało się, dla niektórych zestawów danych, że konieczne jest założenie istnienia dodatkowego strumienia o nieznanym składzie i udziale procentowym w mieszaninie. W szczególności potrzeba taka uwidaczniała się dla danych, w których zawartości składników w strumieniach wejściowych były w

każdym ze strumieni większe lub w każdym z nich mniejsze od zawartości odpowiedniego składnika w mieszaninie. Jednocześnie należałoby zauważyć, że założenie istnienia dodatkowych strumieni donoszących składniki do mieszaniny, traktowanych całościowo jako jeden - szósty strumień nie jest pozbawione sensu i powinno być brane pod uwagę, nawet w przypadkach gdy nie można jednoznacznie stwierdzić, że taki strumień istnieje.

Jest oczywiste, że układ o takiej liczbie niewiadomych (sześć udziałów poszczególnych strumieni w mieszaninie i siedem wartości poszczególnych składników szóstego strumienia) może mieć, w teorii, nieskończenie wiele rozwiązań. Jednakże ograniczenia, jakie powinno spełniać prawdziwe rozwiązanie dla układu przedstawionego powyżej, pozwoliły na estymację zakresów, w jakich powinny się mieścić zawartości składników szóstego strumienia, a w konsekwencji wyznaczenie przedziałów wartości, w jakich mieścić się powinny udziały wszystkich strumieni w mieszaninie. W metodzie przyjęto szereg kryteriów poprawności rozwiązania, z których najważniejsze są następujące dwa :

1. kryterium wartości większych od zera lub równych zeru - zawartości poszczególnych strumieni w mieszaninie powinny być dodatnie,
2. kryterium sumy – suma zawartości poszczególnych strumieni powinna być teoretycznie równa, a w praktyce bliska jedności (w ujęciu procentowym - 100 %).

Kryteria te wraz z założeniem, że skład pięciu znanych strumieni determinuje zakres możliwych zawartości składników dla szóstego nieznanego strumienia, uzasadniały próbę estymacji udziałów wszystkich sześciu strumieni w mieszaninie wraz z próbą oszacowania składu szóstego dodatkowego strumienia. W celu wykonywania obliczeń opracowano następną wersję programu KYBL o oznaczeniu KYBL-4.

Zastosowaną w tym celu metodę obliczeniową wraz z opracowanym na jej podstawie algorytmem programu komputerowego można podzielić na trzy kolejne etapy :

1. sprawdzenie warunków uzasadniających konieczność założenia istnienia dodatkowego, szóstego strumienia,
2. obliczenie zakresów dopuszczalnych wartości dla składników szóstego, nieznanego co do składu strumienia,
3. obliczenie udziałów strumieni w mieszaninie oraz estymacja składu szóstego strumienia.

### 2.1. Sprawdzenie warunków uzasadniających konieczność założenia istnienia dodatkowego, szóstego strumienia

Przed przystąpieniem do obliczeń konieczne jest sprawdzenie, czy dla określonego zestawu danych zachodzi konieczność założenia, że istnieje dodatkowy strumień donoszący składniki do mieszaniny. Podstawowym kryterium, jednoznacznie wskazującym na taką konieczność, było proste sprawdzenie, czy opisany wyżej przypadek występuje, gdy wszystkie strumienie mają poziom stężeń danego składnika wyższy lub niższy niż mieszanina. W pozostałych przypadkach zastosowano metodę analizy wszystkich  $\binom{m}{n}$  kombinacji układów równań, będących układami Cramera (mających jedno rozwiązanie) możliwymi do utworzenia z macierzy danych złożonej z  $m$  równań z  $n$  niewiadomymi, gdzie  $m > n$ . Dla rozwiązywanego problemu pięciu strumieni o siedmiu składnikach dało to  $\binom{7}{5} = 21$  kombinacji układów równań. Wszystkie rozwiązania częściowe są sprawdzane pod względem ich poprawności z punktu widzenia rozwiązywanego problemu. Fakt, że ani jedno z nich nie spełnia kryteriów poprawności, umożliwia wyciągnięcie jednego z dwóch wniosków :

1. co najmniej  $m-n+1$  składników strumieni oznaczono błędnie w co najmniej jednym strumieniu,
2. istnieje co najmniej jeden dodatkowy, nieznaną co do składu, strumień donoszący składniki do mieszaniny.

W przypadku gdy istnieją rozwiązania spełniające kryterium poprawności, zakładanie istnienia szóstego strumienia wydaje się być nieuzasadnione. Jednakże w takim przypadku rozwiązanie uzyskane przy założeniu istnienia wyłącznie pięciu strumieni można z dużą dozą pewności przyjąć za rozwiązanie dobre, szczególnie gdy weryfikacja za pomocą rozkładów rozwiązań częściowych również na to wskazuje.

### 2.2. Obliczenie zakresów dopuszczalnych wartości dla składników szóstego, nieznanego co do składu strumienia

W przypadku gdy zakładamy istnienie szóstego strumienia, konieczne staje się określenie zakresów, w jakich mogą się mieścić zawartości poszczególnych składników w tym strumieniu. W przypadku gdy wszystkich pięć strumieni o znanym składzie ma zawartość danego składnika wyższą niż mieszanina, przyjmuje się, że dolną wartością tego składnika w

szóstym strumieniu jest zero, a górną – wartość odpowiednio mniejsza lub co najwyżej równa zawartości składnika w mieszaninie. W przypadku gdy zawartości danego składnika w strumieniach o znanym składzie są mniejsze od jego zawartości w mieszaninie, dolną granicą jego zawartości w szóstym strumieniu staje się wartość co najmniej równa jego zawartości w mieszaninie, a górna granica teoretycznie może mieć wartość dowolnie dużą. W pozostałych przypadkach zarówno za dolną granicę przedziału wartości dla danego składnika szóstego strumienia należałoby przyjąć wartość zerową, a górna granica nie jest wyraźnie określona – tak jak w przypadku poprzednim, lecz w praktyce wartości górnych granic w obydwu przypadkach muszą zostać określone jako wartości skończone. W tym celu w programie KYBL-4 opracowano procedury obliczające granice przedziałów dla wartości składników szóstego strumienia. Wykorzystano w nich możliwość obliczenia składu szóstego strumienia przy założeniu konkretnych wartości udziałów strumieni w mieszaninie. Program przelicza możliwe zawartości składników szóstego strumienia dla zmieniających się wartości udziałów strumieni i jako granice przyjmowane są odpowiednio: jako granica dolna - nieujemna wartość minimalna spośród wszystkich wyliczonych w ten sposób wartości składników, a jako granica górna – wartość maksymalna. Na użytek tych obliczeń przyjęto, że udział szóstej próbki w mieszaninie mieści się w zakresie 1÷15 %, zakładając, że strumień ten nie może być głównym strumieniem donoszącym materiał do mieszaniny.

### **2.3. Obliczenie udziałów strumieni w mieszaninie oraz estymacja składu szóstego strumienia**

W głównym procesie obliczeniowym przeprowadzany jest ciąg pojedynczych symulacji dla określonych składów strumieni i mieszaniny. Wartości składów pięciu znanych strumieni i mieszaniny nie są zmieniane, a skład szóstego ze strumieni jest określany w zakresie ustalonych wcześniej granic za pomocą generatora pseudolosowego. Po każdej symulacji sprawdzane są warunki poprawności rozwiązania. Wartość końcowego rozwiązania jest uśrednieniem wszystkich poprawnych rozwiązań częściowych. Skład strumienia dodatkowego jest obliczany dwoma metodami w celu porównania uzyskiwanych za ich pomocą wyników. Pierwsza metoda obliczania składu szóstego strumienia polega na wyliczeniu średniej wartości składów, które były podstawą obliczeń dla symulacji dających poprawne rozwiązania udziałów procentowych strumieni w mieszaninie. Druga metoda polega na wstecznym wyliczeniu składu szóstego strumienia z wyników rozwiązania końcowego dla udziałów procentowych strumieni w mieszaninie. Podobnie jak dla metody obliczeniowej opracowanej dla pięciu strumieni oprogramowanie zapewnia możliwość

prezentacji rozkładów statystycznych pojedynczych wyników poprawnych w celu oceny jakości wyniku końcowego.

### **3. Weryfikacja wyników za pomocą przygotowanych mieszanin teoretycznych**

W celu sprawdzenia poprawności działania metody i opartego na niej programu KYBL-4 przeprowadzono symulacje na przygotowanych zestawach danych dla teoretycznych mieszanin. Przygotowano trzy serie danych, spełniających jednoznacznie kryterium obecności szóstego dodatkowego strumienia. Każda z serii składała się z dziesięciu zestawów danych dla których zarówno skład mieszaniny, jak i strumieni był taki sam. Zmieniał się natomiast udział szóstego strumienia, a co za tym idzie także udziały pozostałych strumieni. Udział szóstego strumienia o nieznanym składzie zmieniał się w zakresie 1-10% co 1%. Przeanalizowano w sumie 30 zestawów danych (3 serie po 10 zestawów), dla których obecność szóstego strumienia była pewna. Jednocześnie poddano testom jedną serię złożoną z dziesięciu zestawów danych, dla których obecność dodatkowego strumienia nie była ewidentna, lecz z ich analizy wynikało wysokie prawdopodobieństwo jego występowania. Oprócz wyników liczbowych poszczególnych symulacji analizowano także rozkłady poprawnych wyników częściowych dla każdej z symulacji.

Wyniki symulacji dla każdej z serii danych wykazywały jednakowe prawidłowości dotyczące zarówno dokładności wyniku końcowego, jak i rozkładów wyników częściowych. Różnice pomiędzy obliczonymi udziałami poszczególnych strumieni, w tym także dodatkowego szóstego strumienia, a założonymi teoretycznie wartościami wahały się od 0.5-6.0%. Analiza wyników wykazała, że im udział szóstego strumienia w mieszaninie jest większy, tym mniej dokładne są wyniki symulacji. Znajduje to swój wyraz zarówno w kształcie rozkładów wyników częściowych, jak i w wielkości odchyień wyników końcowych. Zauważono przy tym, że w zdecydowanej większości symulacji obliczony udział szóstego, nieznanego strumienia w mieszaninie był bardzo bliski założonej wartości rzeczywistej. Jeżeli zawartości składników w pięciu znanych co do składu strumieniach charakteryzują się niedużą dyspersją, to wyniki końcowe obliczeń wykazują mniejszą dokładność. Należy jednak dodać, że analiza wartości odchyień wyniku końcowego oraz rozkładów częściowych

wyników poprawnych pozwala jednoznacznie stwierdzić, czy uzyskany wynik jest wiarygodny.

Wyliczane składy szóstego strumienia wykazywały zróżnicowaną zgodność ze składem założonym teoretycznie. Dla większości zestawów danych wyliczony skład był zbliżony do założonego (różnice do 10 %) dla każdego ze składników. Dla pozostałych różnice pomiędzy wyliczonymi a założonymi zawartościami składników przekraczały 10% w przypadku co najwyżej 3 z 7 badanych składników. Właściwy dobór zakresów wartości, z jakich dobierane są składy szóstego strumienia w trakcie symulacji, znacząco zwiększa precyzję wyliczanego składu tego strumienia.

Tablica 1

Skład oraz udziały procentowe strumieni przykładowych mieszanin teoretycznych. 1÷5 - strumienie o znanym składzie, 6 - dodatkowy strumień, którego skład jest obliczany w trakcie symulacji. Wartości obliczane przez program w trakcie symulacji przedstawiono na szarym tle

| Strumień→  | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6 (nieznany) | Mieszanina |
|------------|------|------|------|------|------|--------------|------------|
| Składnik ↓ | 5%   | 11%  | 20%  | 26%  | 36%  | 2%           | 100%       |
| A          | 388  | 380  | 487  | 480  | 470  | 3400         | 520,6000   |
| B          | 101  | 77   | 56   | 49   | 87   | 52           | 69,8200    |
| C          | 22   | 4    | 77   | 10   | 99   | 250          | 60,1800    |
| D          | 300  | 400  | 120  | 500  | 66   | 99           | 238,7400   |
| E          | 670  | 88   | 91   | 12   | 45   | 44           | 81,5800    |
| F          | 55   | 77   | 89   | 34   | 56   | 100          | 60,0200    |
| G          | 1377 | 1370 | 1380 | 1380 | 1390 | 40           | 1355,5500  |

| Strumień→  | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6 (nieznany) | Mieszanina |
|------------|------|------|------|------|------|--------------|------------|
| Składnik ↓ | 5%   | 10%  | 20%  | 25%  | 35%  | 5%           | 100%       |
| A          | 388  | 380  | 487  | 480  | 470  | 3400         | 609,3000   |
| B          | 101  | 77   | 56   | 49   | 87   | 52           | 69,2500    |
| C          | 22   | 4    | 77   | 10   | 99   | 250          | 66,5500    |
| D          | 300  | 400  | 120  | 500  | 66   | 99           | 232,0500   |
| E          | 670  | 88   | 91   | 12   | 45   | 44           | 81,4500    |
| F          | 55   | 77   | 89   | 34   | 56   | 100          | 61,3500    |
| G          | 1377 | 1370 | 1380 | 1380 | 1390 | 40           | 1315,3500  |

| Strumień→  | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6 (nieznany) | Mieszanina |
|------------|------|------|------|------|------|--------------|------------|
| Składnik ↓ | 4%   | 9%   | 19%  | 24%  | 34%  | 10%          | 100%       |
| A          | 388  | 380  | 487  | 480  | 470  | 3400         | 757,2500   |
| B          | 101  | 77   | 56   | 49   | 87   | 52           | 68,1500    |
| C          | 22   | 4    | 77   | 10   | 99   | 250          | 76,9300    |
| D          | 300  | 400  | 120  | 500  | 66   | 99           | 223,1400   |
| E          | 670  | 88   | 91   | 12   | 45   | 44           | 74,5900    |
| F          | 55   | 77   | 89   | 34   | 56   | 100          | 63,2400    |
| G          | 1377 | 1370 | 1380 | 1380 | 1390 | 40           | 1248,3800  |



Skład oraz udziały procentowe strumieni dla trzech z przygotowanych mieszanin teoretycznych przedstawiono powyżej (tabl.1). Są to mieszaniny o niskim (2%), średnim (5%) oraz wysokim (10%) udziale szóstego strumienia w mieszaninie, a skład pięciu strumieni i mieszaniny jednoznacznie wskazuje na obecność strumienia dodatkowego. Dla mieszaniny o niskiej zawartości strumienia dodatkowego uzyskano przy pomocy programu KYBL-4 wyniki zgodne z rzeczywistymi z dokładnością do 1% i odchyleniami w zakresie 0,5÷3%. Dla mieszaniny o średniej zawartości strumienia dodatkowego uzyskano przy pomocy programu KYBL-4 wyniki zgodne z rzeczywistymi z dokładnością do 2% i odchyleniami w zakresie 1÷6%. Dla mieszaniny o wysokiej zawartości szóstego strumienia uzyskano wyniki najmniej dokładne, zgodne z rzeczywistymi z dokładnością do 5% i odchyleniami w zakresie 2÷10%.

#### 4. Podsumowanie

Na podstawie otrzymanych wyników symulacji można stwierdzić, że uzyskiwane za pomocą programu KYBL-4 wyniki są wystarczające zgodne z rzeczywistymi, by mogły być stosowane w praktyce do obliczeń dotyczących składu i udziału nieznanego szóstego strumienia w mieszaninie. Pewnym ograniczeniem stosowalności metody oraz opartego na niej programu jest zależność jakości wyniku końcowego od charakterystyki danych wejściowych, która występowała również w pierwotnej wersji metody obliczeniowej przygotowanej dla pięciu znanych co do składu strumieni. Silny wpływ na jakość wyniku końcowego mają obliczane przed właściwą symulacją granice wartości składników szóstego strumienia (patrz 2.2.2). Jeżeli są one zbyt szerokie, to uzyskiwana liczba wyników częściowych, przy założeniu wąskich kryteriów ich poprawności, jest zbyt mała, a w krytycznych wypadkach program takich wyników nie znajduje. Złagodzenie kryterium poprawności wyników częściowych zwiększa ich liczbę, lecz dzieje się to zawsze kosztem dokładności wyniku końcowego. Zwiększenie liczby cykli symulacyjnych również wpływa na wzrost liczby uzyskiwanych poprawnych wyników częściowych, lecz w znacznie mniejszym stopniu niż zmiana kryterium poprawności na łagodniejsze.

Zarówno metoda, jak i oparty na niej program znajdują się w tej chwili w fazie dalszego testowania i optymalizacji procedur obliczeniowych. Usprawnienie działania niektórych modułów programu powinno zwiększyć dokładność przeprowadzanych przy jego pomocy

obliczeń. W szczególności należałoby się skupić nad udoskonaleniem metody określania granic dopuszczalnych wartości składników szóstego strumienia. Z przeprowadzonych wstępnych testów wynika, że zawężenie, nawet nieduże, przedziału, z jakiego dobierane są wartości składników szóstego strumienia dla pojedynczych symulacji częściowych, powoduje zwiększenie dokładności wyniku końcowego, a także zmniejszenie wartości odchyłeń wyliczanych udziałów strumieni wejściowych w mieszaninie końcowej.

## LITERATURA

1. Gille J.C., Clique M.: Rachunek macierzowy i wprowadzenie do analizy funkcjonalnej, Wyd. Politechniki Śl., wydanie II, Gliwice 1986, s. 80-91.
2. Grmela A., Labus K., Krzeszowski Ś.: Metoda określania udziału wód składowych w mieszaninie wód kopalnianych. Współczesne Problemy Hydrogeologii t.11, Gdańsk 2003, s. 297-300.
3. Grmela A., Restl Č.: Expresní výpočetní metoda kvantifikace zdrojů podzemních vod z údajů hydrogeochemického monitoringu. Sbornik vědeckých prací VŠB-TU, Ostrava 2000.
4. Krzeszowski Ś., Grmela A., Rapantova N., Labus K.: Filozofia programu komputerowego dla określania udziału wód składowych w mieszaninie wód kopalnianych, Mat. Konf. VIII mezinárodní konference HYDROGEOCHÉMIA'04, Ostrava 2004, s. 53-56.
5. Labus K.: Chemizm i pochodzenie wód kopalnianych w południowo-zachodniej części Górnośląskiego Zagłębia Węglowego. Prace Geologiczne PAN O. w Krakowie. Nr 151. Wyd. Inst. Gosp. Sur. Min. i Energią PAN, Kraków 2003.
6. Parkhurst D.C., Appelo C.A.J.: User's guide to PHREEQC (V.2). Denver 1999.
7. Restl Č.: Výpočetní metoda rozčlenění směsných vzorků důlních vod OKR na jednotlivé zdroje. W: Grmela A. 1995, Černé uhlí - česká část hornoslezské pánve: Vliv důlní činnosti na vody a horninové prostředí v oblasti ostravské dílčí pánve - likvidovaný Důl Heřmanice v Ostravě- Heřmanicích. Raport Grantu AQUATEST a.s. Praha, Grant 41950320. Ostrava 1995.

Recenzent: Doc. dr hab inż. Arnošt Grmela