

Grażyna OBER
Politechnika Śląska, Gliwice

WYKORZYSTANIE MACIERZY PRZEMIESZCZEŃ DO ANALIZY KINEMATYCZNEJ SEKCJI OBUDOWY ZMECHANIZOWANEJ OSŁONOWEJ JEDNOSZEREKOWEJ

Streszczenie. W robotyce metoda macierzy przemieszczeń jest stosowana do analizy ruchu manipulatorów robotów przemysłowych. Celem artykułu jest zastosowanie tej metody do opisu ruchu końca stropnicy sekcji obudowy zmechanizowanej typu FAZOS-12/31-Oz. Przeprowadzono porównanie obliczeń współrzędnych toru punktu „A” otrzymanego na podstawie równań trygonometrycznych ze współrzędnymi wyznaczonymi z metody macierzy przemieszczeń.

APPLICATION OF RELOCATION METRICS FOR KINEMATIC ANALYSIS OF CASING SINGLE-ROW POWERED ROOF SUPPORT UNIT

Summary. The method of a relocation matrix is in robotics used to analyze movements of industrial robots' manipulators. The aim of this paper is to use this method to describe a movement of the roof-bar end in powered roof support FAZOS-12/31-Oz. A comparison of computed "A" path coordinates has been done on the basis of trigonometric equations with coordinates determined by relocation metrics method.

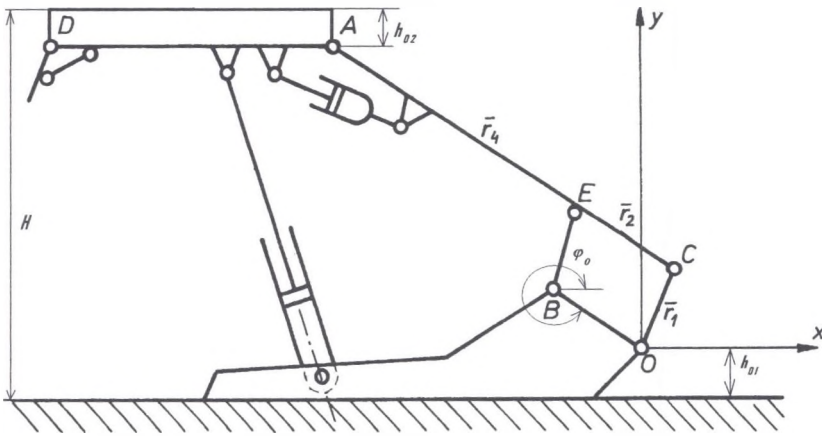
1. Wprowadzenie

W artykule analizuje się ruch końca stropnicy „A” obudowy zmechanizowanej FAZOS-12/31-Oz przedstawionej na rys.1. Celem rozważań jest porównanie ruchu punktu „A” stropnicy za pomocą klasycznej metody rozwiązania równań (kinematyka odwrotna) z metodą macierzy przemieszczeń stosowaną do analizy ruchu manipulatorów robotów przemysłowych (kinematyka prosta). Zadanie kinematyki prostej ma zawsze jednoznaczne rozwiązanie, wymaga ono jednak znajomości wszystkich kątów w przegubach sekcji

obudowy zmechanizowanej. Zastosowanie macierzy przemieszczeń upraszcza zapis ruchu punktu „A” oraz sam proces obliczeń, który zostanie przedstawiony w rozdziale 3.

Zadanie kinematyki odwrotnej prowadzi do nieliniowego układu [1] równań trygonometrycznych, którego rozwiązanie wiąże się najczęściej z problemami obliczeniowymi. Otrzymane rozwiązania mogą być niejednoznaczne i wymagają sprawdzenia technicznej poprawności rozwiązania. Techniczna poprawność rozwiązania wynika z geometrii sekcji i osiągana jest przez podanie odpowiednich warunków startowych iteracyjnej metody obliczeniowej układu równań.

Obliczenia porównawcze przeprowadzono dla sekcji obudowy typu FAZOS-12/31-Oz przedstawionej na rys. 1. Wymiary geometryczne w mm: $r_0 = 617.6$, $r_1 = 890$, $r_2 = 370$, $r_3 = 975$, $r_4 = 1472$, $h_{01} = 210$, $h_{02} = 150$. Kąt φ_0 (rys.2) przyjęty w obliczeniach wynosi 5.776 radianów.



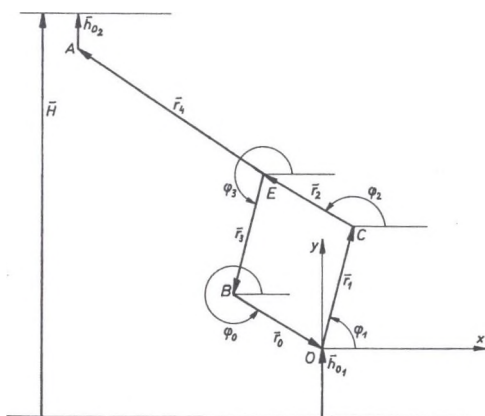
Rys. 1. Schemat kinematyczny sekcji obudowy FAZOS-12/31-Oz

Fig. 1. Cinematic scheme of powered roof support FAZOS-12/31-Oz

Schemat kinematyczny sekcji przedstawiono na rysunku 1. Sekcję zamodelowano w postaci płaskiego mechanizmu z obrotowymi lub przesuwными parami kinematycznymi klasy p_5 . W rozważaniach przyjęto przemieszczanie się stropnicy „AD” ruchem postępowym.

2. Wyznaczanie równań toru punktu „A” sekcji z wykorzystaniem zadania kinematyki odwrotnej

Zależności wektorowe wykorzystywane do ułożenia równań ruchu punktu „A” sekcji obudowy zmechanizowanej typu FAZOS-12/31-Oz przedstawiono na rysunku 2.



Rys. 2. Opis toru punktu A sekcji obudowy FAZOS-12/31-Oz
Fig. 2. Description of “A” path in support unit FAZOS-12/31-Oz

Równania parametryczne toru punktu A czworoboku przegubowego r_0, r_1, r_2, r_3 (rys. 2) przedstawiają ogólne zależności wektorowe:

$$\begin{aligned} r_0 + r_1 + r_2 + r_3 &= 0 \\ h_{01} + r_1 + r_2 + r_4 + h_{02} &= H \\ r_1 + r_2 + r_4 - x_A &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Zapisując równania wektorowe (1) w postaci skalarowej i uwzględniając zależności geometryczne (rys.2), otrzymano ostatecznie układ równań (2).

$$\begin{aligned} r_1 \cdot \cos(x_1) + r_2 \cdot \cos(x_2) + r_3 \cdot \cos(x_3) + r_0 \cdot \cos(\phi_0) &= 0 \\ r_1 \cdot \sin(x_1) + r_2 \cdot \sin(x_2) + r_3 \cdot \sin(x_3) + r_0 \cdot \sin(\phi_0) &= 0 \\ h_{01} + h_{02} + r_1 \cdot \sin(x_1) + r_2 \cdot \sin(x_2) + r_4 \cdot \sin(x_2) &= H \\ (r_1 \cdot \cos(x_1) + r_2 \cdot \cos(x_2) + r_4 \cdot \cos(x_2)) - x_A &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Wielkościami niewiadomymi są: kąty φ_1 , φ_2 , φ_3 i współrzędna x_A przegubu A, natomiast współrzędna $y_A = H - h_{01} - h_{02}$ jest parametrem w układzie równań (2). W układzie równań (2) wielkości x_1 do x_3 oznaczają odpowiednio: $x_1 = \varphi_1$, $x_2 = \varphi_2$, $x_3 = \varphi_3$.

Układ równań (2) rozwiązano programem Mathcad, przyjmując niżej podane wymiary poszczególnych członów sekcji obudowy FAZOS-12/31-Oz. Wymiary liniowe podano w mm, a kątowe w radianach:

$$\begin{aligned} r_0 &:= 617.6 & r_1 &:= 890 & r_2 &:= 370 & r_3 &:= 975 & r_4 &:= 1472 \\ h_{01} &:= 210 & h_{02} &:= 150 & f_0 &:= 5.776 \end{aligned}$$

Rozpatrywany zakres pracy sekcji wynosi 1300 - 2900 mm. Wyniki obliczeń dla wybranych wartości „H” przedstawia tablica 1.

Tablica 1

Zestawienie wyników obliczeń dla wybranych wysokości sekcji „H”

H	φ_1	φ_2	x_A
[mm]	[radian]	[radian]	[mm]
1300	0,555	2,883	-1024
1500	0,629	2,800	-1016
1700	0,721	2,721	-1013
1900	0,830	2,642	-1016
2100	0,957	2,560	-1026
2300	1,101	2,470	-1039
2500	1,262	2,364	-1043
2700	1,440	2,229	-1010
2900	1,631	2,029	-869

Wyniki obliczonych wartości kątów z tablicy 1 zostaną wykorzystane do obliczeń przemieszczenia punktu „A” obudowy sekcji zmechanizowanej metodą macierzy przemieszczeń.

3. Macierze przemieszczeń punktu „A” sekcji – zadanie kinematyki prostej

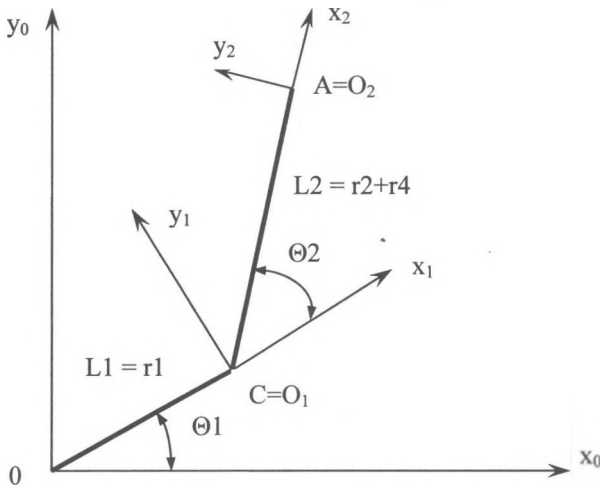
W kinematyce prostej zakłada się znajomość wszystkich kątów w przegubach łańcucha kinematycznego. Przeszczenie ostatniego elementu łańcucha równa się iloczynowi macierzy przemieszczeń dla każdego z poprzedzających elementów łańcucha kinematycznego i może być zapisane w postaci [2], [3] :

$$T_0^n = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_n$$

gdzie: n – liczba elementów łańcucha kinematycznego,

A_i – macierz przemieszczeń elementu i względem elementu $i-1$.

W celu obliczenia przemieszczeń punktu „A” sekcji obudowy zmechanizowanej typu FAZOS-12/31-Oz uproszczono jej strukturę kinematyczną do dwóch pierwszych członów sekcji. Przyjęte osie układów współrzędnych związanych z ramionami łańcucha kinematycznego przedstawia rysunek 3. Ponieważ człony sekcji obudowy poruszają się w jednej płaszczyźnie „xy”, na rysunku nie zaznaczono osi „z”.



Rys. 3. Układy współrzędnych dla macierzy przemieszczeń członów L1 i L2 sekcji obudowy
Fig. 3. Coordinate system for relocation matrix units L1 and L2 of roof support

Zgodnie z rysunkiem przyjęto stały układ odniesienia $Ox_0y_0z_0$. Wektory jednostkowe i_0, j_0, k_0 przyjęto odpowiednio wzdłuż osi x_0, y_0, z_0 . Podobnie wersory i_1, j_1, k_1 są usytuowane odpowiednio wzdłuż osi układu $O_1x_1y_1z_1$ związanego sztywno z członem L_1 , wersory i_2, j_2, k_2

usytuowane są wzdłuż osi układu $O_2x_2y_2z_2$ związanego sztywno z członem L_2 . Obroty i translacje osi wyróżnionych układów współrzędnych można zapisać za pomocą macierzy. Macierz $A1$ reprezentuje przekształcenie współrzędnych punktu O_1 odpowiadającego przegubowi „C” w układzie $O_1x_1y_1z_1$ na współrzędne w układzie $Ox_0y_0z_0$, macierz $A2$ reprezentuje przekształcenie współrzędnej punktu O_2 odpowiadającego punktowi „A” z układu $O_2x_2y_2z_2$ na współrzędne w układzie $O_1x_1y_1z_1$. Macierz $A1$ określa orientację układu $O_1x_1y_1z_1$ względem układu $Ox_0y_0z_0$ jako kombinację obrotu i przesunięcia. Podobnie macierz $A2$ określa orientację układu $O_2x_2y_2z_2$ względem układu $O_1x_1y_1z_1$. Macierz przemieszczeń punktu „A” w układzie stałym $Ox_0y_0z_0$ równa się iloczynowi macierzy $A1$ i $A2$.

Kąt Θ_1 przedstawiony na rys. 3 odpowiada kątowi φ_1 (rys. 2) oraz niewiadomej x_1 w układzie równań (2). Podobnie kąt Θ_2 (rys.3) odpowiada różnicy kątów ($\varphi_2 - \varphi_1$) zaznaczonych na rys.2 oraz różnicy niewiadomych ($x_2 - x_1$) w układzie równań (2). Przyjmując powyższe oznaczenia, otrzymano:

$$A1 = \begin{pmatrix} \cos(x_1) & -\sin(x_1) & 0 & L1 \cdot \cos(x_1) \\ \sin(x_1) & \cos(x_1) & 0 & L1 \cdot \sin(x_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A2 = \begin{pmatrix} \cos(x_2 - x_1) & -\sin(x_2 - x_1) & 0 & L2 \cdot \cos(x_2 - x_1) \\ \sin(x_2 - x_1) & \cos(x_2 - x_1) & 0 & L2 \cdot \sin(x_2 - x_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wprowadzając oznaczenia:

$C1 = \cos(x_1)$, $S1 = \sin(x_1)$, $C2 = \cos(x_2 - x_1)$, $S2 = \sin(x_2 - x_1)$ macierze $A1$ i $A2$ przyjmują postać:

$$\begin{pmatrix} C1 & -S1 & 0 & L1 \cdot C1 \\ S1 & C1 & 0 & L1 \cdot S1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C2 & -S2 & 0 & L2 \cdot C2 \\ S2 & C2 & 0 & L2 \cdot S2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a ich iloczyn wynosi:

$$\begin{pmatrix} C1 \cdot C2 - S1 \cdot S2 & -C1 \cdot S2 - S1 \cdot C2 & 0 & C1 \cdot L2 \cdot C2 - S1 \cdot L2 \cdot S2 + L1 \cdot C1 \\ S1 \cdot C2 + C1 \cdot S2 & C1 \cdot C2 - S1 \cdot S2 & 0 & S1 \cdot L2 \cdot C2 + C1 \cdot L2 \cdot S2 + L1 \cdot S1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Składowe przemieszczeń punktu A względem układu stałego $Ox_0y_0z_0$ zawarte są w czwartej kolumnie macierzy iloczynu:

$$X_A := C1 \cdot L2 \cdot C2 - S1 \cdot L2 \cdot S2 + L1 \cdot C1$$

$$Y_A := S1 \cdot L2 \cdot C2 + C1 \cdot L2 \cdot S2 + L1 \cdot S1$$

Po podstawieniu zależności na C1, C2, S1 i S2 otrzymamy:

$$X_A := \cos(x1) \cdot L2 \cdot \cos(x2 - x1) - \sin(x1) \cdot L2 \cdot \sin(x2 - x1) + L1 \cdot \cos(x1)$$

$$Y_A := \sin(x1) \cdot L2 \cdot \cos(x2 - x1) + \cos(x1) \cdot L2 \cdot \sin(x2 - x1) + L1 \cdot \sin(x1)$$

Do obliczenia składowych przemieszczeń potrzebne są kąty Θ_1 i Θ_2 obliczane z kątów φ_1 i φ_2 zestawionych w tabelicy 1 dla różnych wysokości „H” sekcji obudowy z uwzględnieniem zależności $x1 = \varphi_1$, $x2 = \varphi_2$. Wielkościami niewiadomymi są współrzędne x_A , y_A punktu „A”. Całkowitą wysokość sekcji przedstawia zależność:

$$H = h_{01} + h_{02} + y_A$$

Obliczenia przeprowadzono programem Mathcad przyjmując dane dla obudowy FAZOS-12/31-Oz z rozdziału 2. Potrzebne do obliczeń kąty $x1$ i $x2$ przejęto z tabelicy 1 jako kąty φ_1 i φ_2 . Wyniki obliczeń przemieszczeń x_A i całkowitej wysokości sekcji H w zależności od wybranych kątów Θ_1 i Θ_2 przedstawia tabela 2.

Tabela 2

Zestawienie wyników obliczeń x_A i H dla wybranych kątów Θ_1 i Θ_2

$\Theta_1 = \varphi_1$	$\Theta_2 = \varphi_2 - \varphi_1$	x_A	H	x_A Ukł. rów	H Ukł. rów
[radian]	[radian]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]
0,555	2,328	-1024	1300	-1024	1300
0,629	2,171	-1016	1501	-1016	1500
0,721	2,000	-1013	1700	-1013	1700
0,830	1,812	-1016	1899	-1016	1900
0,957	1,603	-1027	2099	-1026	2100
1,101	1,369	-1039	2300	-1039	2300
1,262	1,102	-1042	2500	-1043	2500
1,440	0,789	-1011	2700	-1010	2700
1,631	0,398	-868	2900	-869	2900

W tabelicy 2 zestawiono wartości przemieszczeń \mathbf{x}_A i \mathbf{H} dla kątów Θ_1 i Θ_2 obliczone z wykorzystaniem macierzy przemieszczeń i zadania kinematyki odwrotnej z rozwiązaniem układu nieliniowych równań trygonometrycznych. Wartości $\mathbf{x}_{A \text{ Ukl.rów}}$, $\mathbf{H}_{\text{Ukl.rów}}$ będące rozwiązaniem układu równań (2) zestawiono w pogrubionych kolumnach tabelicy 2. Porównanie kolumn \mathbf{x}_A , \mathbf{H} oraz kolumn $\mathbf{x}_{A \text{ Ukl.rów}}$, $\mathbf{H}_{\text{Ukl.rów}}$ w pełni potwierdza zbieżność wyników i tym samym prawidłowość obliczeń wykonanych z wykorzystaniem obu zadań kinematyki.

4. Wnioski

W artykule przedstawiono dwie metody wyznaczania współrzędnych \mathbf{x}_A , \mathbf{H} punktu „A” sekcji obudowy zmechanizowanej typu FAZOS-12/31-Oz. Pierwsza z nich bazuje na nieliniowym układzie równań trygonometrycznych uzyskanych w zadaniu kinematyki odwrotnej. Druga metoda polega na wyznaczeniu macierzy przemieszczeń punktu „A” jako iloczynu macierzy przemieszczeń dla każdego elementu łańcucha kinematycznego. Zgodność uzyskanych wyników (tabelica 2) oboma metodami świadczy o ich poprawności. Z porównania obu sposobów rozwiązania ze względu na złożoność obliczeń numerycznych wynika, że korzystniejsza jest metoda macierzy przemieszczeń. Posiada ona zawsze jednoznaczne technicznie rozwiązanie, które można otrzymać w prosty sposób przez pomnożenie macierzy przemieszczeń dla wszystkich elementów łańcucha kinematycznego. Tym samym złożoność obliczeniowa jest wprost proporcjonalna do liczby członów łańcucha kinematycznego.

Metoda odwrotna bazująca na rozwiązywaniu nieliniowego układu równań prowadzi do niejednoznacznych technicznie rozwiązań, wymaga znajomości warunków startowych obliczeń celem uzyskania poprawnego rozwiązania. Złożoność obliczeniowa jest trudna do oszacowania i zależy od uwarunkowania równań, warunków startowych i wymaganej dokładności rozwiązania. Pełne wykorzystanie metody macierzy przemieszczeń wymaga uzupełnienia uwzględniającego przemieszczenia od siłowników w sekcji obudowy zmechanizowanej.

LITERATURA

1. Ober G., Szweda S.: Wpływ luzów w połączeniach przegubowych mechanizmu prostowodowego bezlemniskatowej obudowy ścianowej na szerokość niezabudowanej ścieżki stropu wyrobiska. Mechanizacja i Automatyzacja Górnictwa z.7/335, Katowice 1998.
2. Spong M.W., Vidyasagar M.: Dynamika i sterowanie robotów. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1997.
3. Szkodny T.: Modelowanie i symulacja ruchu manipulatorów robotów przemysłowych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej nr 1647, Gliwice 2004.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Kazimierz Stoiński