ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2005
Seria: GÓRNICTWO z. 269 Nr kol. 1697

Władysław ZAPAŁA
Politechnika Śląska, Gliwice

CIĄG ROZKŁADÓW PRAWDOPODOBIEŃSTWA I JEGO PODSTAWOWE WŁASNOŚCI

Streszczenie. Przedstawiono ciąg rozkładów prawdopodobieństwa. Omówiono podstawowe własności tego ciągu. Wykazano, że wszystkie rozkłady prawdopodobieństwa wchodzące w skład zdefiniowanego ciągu mają taką samą wartość średnią i taką samą wariancję. Udowodniono, że zaprezentowany ciąg rozkładów prawdopodobieństwa jest zbieżny do rozkładu normalnego.

THE SERIES OF PROBABILITY DISTRIBUTIONS AND ITS BASIC PROPERTIES

Summary. The series of probability distributions has been presented in the paper. Basic properties of this series have been discussed. It has been proved that all probability distributions which constitute this defined series have the same mean value and the same variance as well as the series of probability distributions converges to Gaussian distribution.

1. Wprowadzenie

W literaturze istnieje wiele różnych rozkładów prawdopodobieństwa. Wśród nich ważne miejsce zajmuje rozkład normalny. Wynika to między innymi z powszechnej obserwacji wielu zjawisk losowych, w których występujące ciągłe zmienne losowe mają rozkład dający się przybliżyć za pomocą rozkładu normalnego. Jedną z przyczyn powszechności występowania rozkładu normalnego może być to, że w rzeczywistości istnieje nieskończona liczba rozkładów, które kształtem są bardzo podobne do rozkładu normalnego, a występujące niedokładności są na tyle niewielkie, że istnieją trudności w wykazaniu na podstawie testów statystycznych istotnych różnic. W następnych rozdziałach przedstawiono teoretyczne rozważania dotyczące tej właśnie interpretacji powszechności występowania rozkładu normalnego.

2. Definicja ciągu rozkładów prawdopodobieństwa

Poniżej zdefiniowano następujący ciąg $f_n(x)$ rozkładów prawdopodobieństwa ciągłej zmiennej losowej X

$$f_n(x) = A_n \cdot \sqrt{B_n} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \left\{ \sec h\left[\sqrt{B_n} \cdot \left(\frac{x-m}{\sigma} \right) \right] \right\}^n \tag{1}$$

gdzie: A_n i B_n – współczynniki zależne od liczby n, $n>0$,

m, σ – parametry, $-\infty < x < +\infty$, $\sec h(u) = \frac{2}{e^u + e^{-u}}$,

e – podstawa logarytmów naturalnych, $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

Współczynniki A_n i B_n wyrażone są za pomocą następujących zależności

$$A_n = \frac{1}{2^{n-1} \cdot \beta\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)} = \frac{\Gamma(n)}{2^{n-1} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \tag{2}$$

$$B_n = A_n \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \cdot [\sec h(u)]^n \, du = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \cdot [\sec h(u)]^n \, du \tag{3}$$

gdzie: $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} \cdot e^{-t} dt$, $n>0$ – funkcja gamma (całka Eulera drugiego rodzaju),

$\beta(u,v) = \int_0^1 t^{u-1} \cdot (1-t)^{v-1} dt$, $u>0$, $v>0$ – funkcja beta (całka Eulera pierwszego rodzaju).

W celu udowodnienia, że zdefiniowany ciąg funkcji może być uważany za ciąg rozkładów prawdopodobieństwa, należy wykazać, że spełniony jest warunek

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = 1 \tag{4}$$

Kolejne etapy obliczeń niezbędnych dla przeprowadzenia dowodu przedstawiono poniżej.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \frac{A_n \cdot \sqrt{B_n}}{\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sec h\left[\sqrt{B_n} \cdot \left(\frac{x-m}{\sigma}\right)\right]\right\}^n dx = A_n \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} [\sec h(u)]^n du \tag{5}$$

Zastosowano podstawienie

$$u = \frac{\sqrt{B_n} \cdot (x-m)}{\sigma} \tag{6}$$

Następnie wartość całki występującej po prawej stronie równania (5) zostaje przedstawiona w postaci

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\sec h(u)]^n du = 2^n \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{nu}}{(1+e^{2u})^n} du = 2^{n-1} \cdot 2 \cdot \int_0^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(1+t^2)^n} dt \tag{7}$$

Zastosowano podstawienie

$$e^u = t \;,\; du = \frac{1}{t} dt \;,\; t \to 0 \text{ gdy } u \to -\infty \;,\; t \to +\infty \text{ gdy } u \to +\infty \tag{8}$$

Teraz z kolei najprościej można obliczyć wartość całki występującej po prawej stronie równania (7), stosując całkowe przedstawienie funkcji beta Eulera

$$\beta(x,y) = 2 \cdot \int_0^{+\infty} \frac{t^{2x-1}}{(1+t^2)^{x+y}} dt \tag{9}$$

Stąd powinien być spełniony następujący układ równań

$$\begin{cases} 2x-1 = n-1 \\ x+y = n \end{cases} \tag{10}$$

którego rozwiązaniem jest $x = \frac{n}{2}$, $y = \frac{n}{2}$ i stąd ostatecznie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\sec h(u)]^n du = 2^{n-1} \cdot \beta\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) = \frac{2^{n-1} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n)} = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \frac{1}{A_n} \tag{11}$$

$$\frac{A_n \cdot \sqrt{B_n}}{\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sec h\left[\sqrt{B_n} \cdot \left(\frac{x-m}{\sigma}\right)\right]\right\}^n dx = A_n \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} [\sec h(u)]^n du = A_n \cdot \frac{1}{A_n} = 1 \tag{12}$$

A zatem twierdzenie, że zdefiniowany na początku rozdziału ciąg funkcji można uważać za ciąg rozkładów prawdopodobieństwa, zostało udowodnione.

3. Wyznaczanie współczynników A_n i B_n

W ogólnym przypadku, występująca we wzorach przedstawionych powyżej, liczba n jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Wartości współczynników A_n i B_n należy wtedy wyznaczać ze wzorów (2) i (3). Jeżeli rozważania ograniczymy do zbioru liczb naturalnych, to gdy n jest liczbą naturalną nieparzystą (n=2k+1), współczynniki A_n można obliczać ze wzoru

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \tag{13}$$

$$A_{2k+1} = \frac{1}{\pi} \cdot \prod_{i=1}^{k} \frac{2i}{2i-1}, \quad k=1, 2, 3, \dots . \tag{14}$$

lub za pomocą równoważnego wzoru rekurencyjnego

$$A_{2k+1} = \frac{2k}{2k-1} \cdot A_{2k-1}, \quad k=1, 2, 3, \dots . \tag{15}$$

Gdy n jest liczbą naturalną parzystą (n=2k), wówczas wzór do obliczania współczynników A_n ma postać

$$A_2 = \frac{1}{2} \tag{16}$$

$$A_{2k+2} = \frac{1}{2} \cdot \prod_{i=1}^{k} \frac{2i+1}{2i}, \quad k=1, 2, 3, \dots . \tag{17}$$

któremu odpowiada następująca formuła rekurencyjna

$$A_{2k+2} = \frac{2k+1}{2k} \cdot A_{2k}, \quad k=1, 2, 3, \dots . \tag{18}$$

Wyznaczanie współczynników B_n jest bardziej skomplikowane ze względu na występowanie całki niewłaściwej we wzorze (3) definiującym wartości tych współczynników. W tablicach 1 i 2 przedstawiono wynik końcowy obliczeń wartości pierwszych 34 współczynników B_n (n=1 do n=34).

Tablica 1

Przykładowe wartości współczynników B_n w zależności od liczby naturalnej nieparzystej n

$B_1 = \frac{\pi^2}{4}$, $B_3 = \frac{\pi^2 - 8}{4}$, $B_5 = \frac{9 \cdot \pi^2 - 80}{36}$, $B_7 = \frac{225 \cdot \pi^2 - 2\,072}{900}$
$B_9 = \frac{11025 \cdot \pi^2 - 103\,328}{44\,100}$

cd. tabl. 1

$B_{11} = \dfrac{99\,225 \cdot \pi^2 - 939\,752}{396\,900}$
$B_{13} = \dfrac{12\,006\,225 \cdot \pi^2 - 114\,503\,792}{48\,024\,900}$
$B_{15} = \dfrac{2\,029\,052\,025 \cdot \pi^2 - 19\,447\,190\,648}{8\,116\,208\,100}$
$B_{17} = \dfrac{405\,810\,405 \cdot \pi^2 - 3\,903\,866\,944}{1\,623\,241\,620}$
$B_{19} = \dfrac{117\,279\,207\,045 \cdot \pi^2 - 1\,131\,464\,030\,056}{469\,116\,828\,180}$
$B_{21} = \dfrac{42\,337\,793\,743\,245 \cdot \pi^2 - 409\,396\,748\,506\,576}{169\,351\,174\,972\,980}$
$B_{23} = \dfrac{42\,337\,793\,743\,245 \cdot \pi^2 - 410\,164\,781\,046\,136}{169\,351\,174\,972\,980}$
$B_{25} = \dfrac{22\,396\,692\,890\,176\,605 \cdot \pi^2 - 217\,315\,871\,523\,351\,904}{89\,586\,771\,560\,706\,420}$
$B_{27} = \dfrac{2\,799\,586\,611\,272\,075\,625 \cdot \pi^2 - 27\,200\,318\,649\,043\,270\,568}{11\,198\,346\,445\,088\,302\,500}$
$B_{29} = \dfrac{25\,196\,279\,501\,448\,680\,625 \cdot \pi^2 - 245\,079\,370\,222\,749\,640\,112}{100\,785\,118\,005\,794\,722\,500}$
$B_{31} = \dfrac{21\,190\,071\,060\,718\,340\,405\,625 \cdot \pi^2 - 206\,313\,320\,593\,344\,036\,779\,192}{84\,760\,284\,242\,873\,361\,622\,500}$
$B_{33} = \dfrac{20\,363\,658\,289\,350\,325\,129\,805\,625 \cdot \pi^2 - 198\,436\,621\,658\,689\,366\,068\,048\,512}{81\,454\,633\,157\,401\,300\,519\,222\,500}$

Tablica 2

Przykładowe wartości współczynników B_n w zależności od liczby naturalnej parzystej n

$B_2 = \dfrac{\pi^2}{12}$, $B_4 = \dfrac{\pi^2 - 6}{12}$, $B_6 = \dfrac{2 \cdot \pi^2 - 15}{24}$	$B_{22} = \dfrac{211680 \cdot \pi^2 - 1\,968\,329}{2\,540\,160}$
$B_8 = \dfrac{6 \cdot \pi^2 - 49}{72}$, $B_{10} = \dfrac{24 \cdot \pi^2 - 205}{288}$	$B_{24} = \dfrac{25\,613\,280 \cdot \pi^2 - 239\,437\,889}{307\,359\,360}$

cd. tabl. 2

$B_{12} = \dfrac{600 \cdot \pi^2 - 5\,269}{7\,200}$	$B_{26} = \dfrac{25\,613\,280 \cdot \pi^2 - 240\,505\,109}{307\,359\,360}$
$B_{14} = \dfrac{600 \cdot \pi^2 - 5\,369}{7\,200}$	$B_{28} = \dfrac{4\,328\,644\,320 \cdot \pi^2 - 40\,799\,043\,101}{51\,943\,731\,840}$
$B_{16} = \dfrac{29\,400 \cdot \pi^2 - 266\,681}{352\,800}$	$B_{30} = \dfrac{4\,328\,644\,320 \cdot \pi^2 - 40\,931\,552\,621}{51\,943\,731\,840}$
$B_{18} = \dfrac{1176\,00 \cdot \pi^2 - 1\,077\,749}{1\,411\,200}$	$B_{32} = \dfrac{21\,643\,221\,600 \cdot \pi^2 - 205\,234\,915\,681}{259\,718\,659\,200}$
$B_{20} = \dfrac{1\,058\,400 \cdot \pi^2 - 9\,778\,141}{12\,700\,800}$	$B_{34} = \dfrac{86\,572\,886\,400 \cdot \pi^2 - 822\,968\,714\,749}{1\,038\,874\,636\,800}$

4. Podstawowe własności zdefiniowanego ciągu rozkładów prawdopodobieństwa

Zdefiniowany ciąg rozkładów prawdopodobieństwa ma kilka interesujących własności, które zostaną krótko omówione i udowodnione.

Własność 1

Każdy rozkład prawdopodobieństwa $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ ma taką samą wartość średnią $E_n(x) = m$ niezależnie od liczby *n*. Własność ta wynika z następujących rachunków

$$E_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_n(x) dx = A_n \cdot \sqrt{B_n} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \left\{ \operatorname{sec}h \left[\sqrt{B_n} \cdot \left(\frac{x-m}{\sigma} \right) \right] \right\}^n dx =$$

$$= A_n \cdot \left\{ \frac{\sigma}{\sqrt{B_n}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot [\operatorname{sec}h(u)]^n du + m \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} [\operatorname{sec}h(u)]^n du \right\} = A_n \cdot \left(0 + m \cdot \frac{1}{A_n} \right) = m \qquad (19)$$

Zastosowano podstawienia

$$\sqrt{B_n} \cdot \left(\frac{x-m}{\sigma} \right) = u \;,\; x = \frac{\sigma \cdot u}{\sqrt{B_n}} + m \;,\; dx = \frac{\sigma}{\sqrt{B_n}} du \qquad (20)$$

Własność 2

Każdy rozkład prawdopodobieństwa $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ ma taką samą wariancję $D_n^2(x) = \sigma^2$ niezależnie od liczby *n*. Własność ta wynika z następujących rachunków

$$D_n^2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E_n(x)]^2 \cdot f_n(x)dx = A_n \cdot \sqrt{B_n} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 \cdot \left\{ \sec h\left[\sqrt{B_n} \cdot \left(\frac{x-m}{\sigma} \right) \right] \right\}^n dx =$$

$$= \sigma^2 \cdot \frac{1}{B_n} \cdot \left\{ A_n \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \cdot [\sec h(u)]^n du \right\} = \sigma^2 \cdot \frac{1}{B_n} \cdot B_n = \sigma^2 \tag{21}$$

We wzorze (21) zastosowano podstawienia

$$\sqrt{B_n} \cdot \left(\frac{x-m}{\sigma} \right) = u \ , \ x - m = \frac{\sigma \cdot u}{\sqrt{B_n}} \ , \ dx = \frac{\sigma}{\sqrt{B_n}} du \tag{22}$$

i uwzględniono, że zgodnie z przyjętą definicją rozpatrywanego ciągu funkcji

$$A_n \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \cdot [\sec h(u)]^n du = B_n \tag{23}$$

Własność 3

Przedstawiony ciąg $f_n(x)$ rozkładów prawdopodobieństwa jest zbieżny do normalnego rozkładu prawdopodobieństwa

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} A_n \cdot \sqrt{B_n} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \left\{ \sec h\left[\sqrt{B_n} \cdot \left(\frac{x-m}{\sigma} \right) \right] \right\}^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \tag{24}$$

o takiej samej wartości średniej i takiej samej wariancji, które charakteryzują każdy rozkład z rozważanego ciągu rozkładów. W następnym rozdziale wykazano, że własność ta jest prawdziwa.

5. Dowód zbieżności zdefiniowanego ciągu rozkładów do rozkładu normalnego

Przyjmijmy pomocniczy ciąg rozkładów prawdopodobieństwa

$$g_n(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\alpha_n} \cdot \left\{ \sec h\left[\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{x-m}{\alpha_n} \right) \right] \right\}^n \tag{25}$$

gdzie: m – wartość średnia, α_n - parametr zależny od liczby n.

Wariancja tego pomocniczego rozkładu jest równa

$$D_n^2(x)=\alpha_n^2\cdot\left[\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot n\right]\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}u^2\cdot[\sec h(u)]^n\,du \tag{26}$$

Gdy n dąży do nieskończoności, wówczas rozkład opisany funkcją (25) dąży do normalnego rozkładu prawdopodobieństwa

$$g_\infty(x)=\lim_{n\to\infty}g_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\alpha_\infty}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\alpha_\infty}\right)^2} \tag{27}$$

ponieważ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{n}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{n}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{28}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sec h\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right]^n=e^{-\frac{u^2}{2}} \tag{29}$$

Wariancja rozkładu opisanego za pomocą wzoru (27) jest równa

$$D_\infty^2(x)=\alpha_\infty^2 \tag{30}$$

Z drugiej strony na podstawie wzoru (26) można zapisać

$$D_\infty^2(x)=\lim_{n\to\infty}D_n^2(x)=\lim_{n\to\infty}\alpha_n^2\cdot\left[\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot n\right]\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}u^2\cdot[\sec h(u)]^n\,du \tag{31}$$

czyli

$$D_\infty^2(x)=\alpha_\infty^2\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot n\right]\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}u^2\cdot[\sec h(u)]^n\,du \tag{32}$$

Z porównania wyrażeń (30) i (32) wynika, że prawdziwa jest zależność

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot n\right]\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}u^2\cdot[\sec h(u)]^n\,du=1 \tag{33}$$

Po przekształceniach wzoru (33) z wykorzystaniem wzoru (28) otrzymuje się następujące zależności

$$\lim_{n\to\infty} n\sqrt{n}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} u^2[\sec h(u)]^n\,du=\sqrt{2\pi} \tag{34}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u^2\cdot[\sec h(u)]^n\,du=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi}}{n\sqrt{n}} \tag{35}$$

Wprowadzenie na początku tego rozdziału pomocniczego rozkładu gęstości prawdopodobieństwa i dalsze rachunki – wzory (26) do (35) miało na celu wykazanie, że wzór (35) jest prawdziwy. Korzystając z tego wzoru można z kolei wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{B_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}u^2\cdot[\sec h(u)]^n\,du}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}u^2[\sec h(u)]^n\,du}=$$

$$=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi}}{n\sqrt{n}}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{n}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} \tag{36}$$

$$\lim_{n\to\infty}A_n\cdot\sqrt{B_n}=\lim_{n\to\infty}A_n\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{B_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\sqrt{n}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{n}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{37}$$

Po uwzględnieniu zależności (29), (36) i (37) ostatecznie otrzymuje się

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}A_n\cdot\sqrt{B_n}\cdot\frac{1}{\sigma}\cdot\left\{\sec h\left[\sqrt{B_n}\cdot\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)\right]\right\}^n=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sigma}\cdot\lim_{n\to\infty}\left\{\sec h\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)\right]\right\}^n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \tag{38}$$

6. Przykład zastosowania

Gdy liczba n jest liczbą naturalną parzystą, wówczas ciąg dystrybuant $F_n(x)$ odpowiadający zdefiniowanemu ciągowi rozkładów prawdopodobieństwa $f_n(x)$ można przedstawić za pomocą wzoru

$$F_n(x) = 1 - \frac{\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n-1}{k} \cdot \exp(2k\sqrt{B_n} \cdot x)}{[1 + \exp(2\sqrt{B_n} \cdot x)]^{n-1}} \tag{39}$$

gdzie: n – liczba naturalna parzysta, n=2, 4, 6, ... ,

$\exp(x) = e^x$,

$\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-k-1)!}$ - zgodnie z symbolem Newtona.

Przykładowe wartości współczynników B_n przedstawiono w tablicy 2. Ciąg dystrybuant $F_n(x)$ wyrażony jest za pomocą funkcji elementarnych i jest zbieżny do dystrybuanty rozkładu normalnego o wartości średniej równej zero i odchyleniu standardowym równym jedności. Ciąg dystrybuant $F_n\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ jest zbieżny do dystrybuanty rozkładu normalnego o wartości średniej równej m i odchyleniu standardowym σ. W zastosowaniach z dziedziny górnictwa przedstawiony model może być wykorzystany do modelowania krzywych rozproszenia frakcji elementarnych wzbogacanego węgla surowego oraz do aproksymacji krzywych rozdziału dla wzbogacalników grawitacyjnych.

LITERATURA

1. Budryk W.: Wyniki działania płuczek i wialni w świetle teorii. Przegląd Górniczy nr 9 i 10, 1949.
2. Gerstenkorn T., Śródka T.: Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa. PWN, Warszawa 1974.
3. Krukowiecki W.: Przeróbka mechaniczna rud, węgla, soli i innych kopalin. PWN, Warszawa-Kraków, 1970.
4. Nawrocki J.: Analityczno-graficzne metody oceny pracy wzbogacalników grawitacyjnych. Wydawnictwo Śląsk, Katowice 1976.
5. Plucińska A., Pluciński E.: Probabilistyka. Rachunek prawdopodobieństwa. Statystyka matematyczna. Procesy stochastyczne. WNT, Warszawa 2000.

6. Zapała W.: Theoretical model of the curve concerning separation of the jig. New Trends in Coal Preparation, Technologies and Equipment. Proceedings of the 12th International Coal Preparation Congress, Cracow, Poland, 23-27 May, 1994. Published in The Netherlands under license by Gordon and Breach Science Publishers SA.
7. Zapała W.: Theoretical model of the curve concerning separation of the jig. New Trends in Coal Preparation, Technologies and Equipment. Preprints of the 12th International Coal Preparation Congress, Cracow, Poland, 23-27 May, 1994. Mineral and Energy Economy Research Centre, Polish Academy of Sciences. Vol. 1. Cracow: Jaxa Publishing Ltd. Printing Service Enterprise 1994, pp. 243-251.
8. Zapała W.: Discrete time window and its frequency characteristics. Proceedings of the 10th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, vol.1. pp.691-694. IEEE Conference Number 9195. Poland, Międzyzdroje 30 August–2 September 2004. Printed by Technical University of Szczecin Press, Szczecin, 2004.
9. Zapała W.: Funkcje aproksymujące krzywą rozdziału wzbogacalnika grawitacyjnego. Materiały XI Konferencji nt. Automatyzacja Procesów Przeróbki Kopalin APPK 2005, s.287-296. Szczyrk, 1-3 czerwca 2005.

Recenzent: Prof. dr hab. Tadeusz Tumidajski