

Marcin JAROMIN
Politechnika Śląska, Instytut Informatyki

APROKSYMACJA SYGNAŁU NA PODSTAWIE SCHEMATU LIFTINGU

Streszczenie. W artykule został opisany sposób aproksymacji sygnału za pomocą schematu liftingu. Metoda ta jest uogólnieniem interpolacji predykcyjnej zaproponowanej przez Wima Sweldensa. Pozwala ona na przewidywanie nieparzystych próbek sygnału za pomocą wielomianów stopni znacznie niższych aniżeli stopień wielomianu interpolacyjnego. Takie rozwiązanie nie tylko umożliwia przybliżanie sygnału za pomocą wielomianów algebraicznych, lecz także za pomocą dowolnych funkcji bazowych.

Słowa kluczowe: wielorozdzielcza analiza, analiza falkowa, schemat liftingu, przetwarzanie sygnałów, aproksymacja sygnału

SIGNAL APPROXIMATION BY LIFTING SCHEME

Summary. In the article is described signal approximation method by lifting scheme. This method is generalization of predict interpolation proposed by Wim Sweldens. It allows to predict odd signal samples by a polynomial degree much lower than an interpolation polynomial degree. This solution not only enables approximation by algebraic polynomial but also by any base functions.

Keywords: multiresolution analysis, wavelet analysis, lifting scheme, signal processing, signal approximation

1. Wstęp

Analiza wielorozdzielcza i przetwarzanie sygnałów metodami falkowymi są obecnie jednym z najdynamiczniej rozwijających się działów cyfrowego przetwarzania sygnałów.

Dyskretną analizę falkową (DWT) podobnie jak analizę sygnałów metodą dyskretnej transformacji Fouriera (DFT) możemy stosować do odsumiania sygnału, jego analizy lub

kompresji obrazów. Pomimo że analiza Fouriera jest najbardziej znaną, spopularyzowaną i stosowaną metodą analizy sygnału ma podstawową wadę. Niedogodnością tą jest utrata informacji o czasie zajścia zdarzenia podczas badania sygnału w dziedzinie częstotliwości. Nie jesteśmy w stanie uzyskać informacji, w którym momencie częstotliwości zaszło zdarzenie. Transformata falkowa pozbawiona jest tej niedogodności, dzięki czemu pozwala ona na przeniesienie sygnału z układu czas–wartość do układu czas–skala (czas–częstotliwość). Dokonuje ona rozbicia oryginalnego sygnału na sygnały elementarne tzw. falki. Aproksymowany sygnał jest więc liniową kombinacją funkcji falkowych [1, 15, 17].

Wybór falki uzależniony jest od charakterystyki badanego sygnału. Im lepsze przybliżenie falki do funkcji badanej, tym lepsza aproksymacja sygnału na zadanym poziomie.

Dekompozycja sygnału metodą falkową rozkłada sygnał na przebieg podstawowy zwany reprezentacją zgrubną i przebiegi reprezentacji szczegółowej, przechowujące detale sygnału na zadanym poziomie rozdzielczości.

Kompozycja sygnału natomiast pozwala łączyć sygnał zgrubny z jego sygnałem detali, uzyskując w ten sposób charakterystykę sygnału o wyższym poziomie szczegółowości.

2. Aproksymacja sygnałów predykcyjnej transformaty falkowej

Aproksymacja sygnału jest procesem, pozwalającym na uzyskanie rozwiązań przybliżonych na podstawie sygnałów znanych, dzięki którym można uzyskać rozwiązanie bliskie rozwiązaniu dokładnemu – uzyskując przy tym pewną założoną regularność.

Stosuje się je najczęściej, gdy nie można odnaleźć funkcji analitycznej, która wyznaczałaby precyzyjnie charakterystykę sygnału.

Aproksymowanie sygnału zwykle polega na przybliżaniu jej charakterystyki kombinacją liniową tzw. funkcji bazowych.

Aproksymacja powoduje pojawienie się błędów, zwanych błędami aproksymacji. Spowodowane są one brakiem wymagań, aby funkcja aproksymująca przechodziła przez jakikolwiek punkt należący do aproksymowanego sygnału. Dużą zaletą aproksymacji w stosunku do interpolacji jest to, że funkcja aproksymująca nie musi być wielomianem bardzo dużego stopnia dla dużej liczby punktów aproksymowanych (w ogóle nie musi być wielomianem).

Ponadto, funkcja aproksymująca może wygładzać daną funkcję, dzięki czemu gładkość przekłada się na jej różniczkowalność.

Przybliżenie sygnału rozumiane jest jako minimalizacja pewnej funkcji błędu f_j , tzw. funkcji celu [6].

$$f_j = \sqrt{\sum_{i=1}^N w(n_i) [s_j^{(e)}(n_i) - \sum_{k=1}^M a_{M-k} \Psi_{M-k}(n_i)]^2} \rightarrow \min \quad (1)$$

gdzie f_j to funkcja celu na j -tym poziomie rozdzielczości, $w(\cdot)$ – funkcja wagowa ($w(n_i) \geq 0$), $s_j^{(e)}(\cdot)$ – próbki parzyste sygnału aproksymowanego na j -tym poziomie rozdzielczości, a $\sum_k a_k \Psi_k(\cdot)$ – liniowa kombinacja funkcji bazowych $\Psi(\cdot)$.

Minimalizacja funkcji celu odbywa się na zasadzie obliczenia układu równań powstałego z wyznaczenia kolejnych pochodnych wyrażenia podpierwiastkowego funkcji (1) po wszystkich współczynnikach a_j . Wyliczone pochodne przyrównuje się do zera uzyskując układ \mathbf{M} równań z \mathbf{M} niewiadomymi, gdzie

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a_{M-1}} &= -2 \sum_{i=1}^N w(n_i) [s_j^{(e)}(n_i) - \sum_{k=1}^M a_{M-k} \Psi_{M-k}(n_i)] \Psi_{M-1}(n_i) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial a_{M-2}} &= -2 \sum_{i=1}^N w(n_i) [s_j^{(e)}(n_i) - \sum_{k=1}^M a_{M-k} \Psi_{M-k}(n_i)] \Psi_{M-2}(n_i) = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial a_0} &= -2 \sum_{i=1}^N w(n_i) [s_j^{(e)}(n_i) - \sum_{k=1}^M a_{M-k} \Psi_{M-k}(n_i)] \Psi_0(n_i) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

co w konsekwencji prowadzi do postaci

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M a_{M-k} \sum_{i=1}^N w(n_i) \Psi_{M-k}(n_i) \Psi_{M-1}(n_i) &= \sum_{i=1}^N w(n_i) s_j^{(e)}(n_i) \Psi_{M-1}(n_i) \\ \sum_{k=1}^M a_{M-k} \sum_{i=1}^N w(n_i) \Psi_{M-k}(n_i) \Psi_{M-2}(n_i) &= \sum_{i=1}^N w(n_i) s_j^{(e)}(n_i) \Psi_{M-2}(n_i) \\ &\vdots \\ \sum_{k=1}^M a_{M-k} \sum_{i=1}^N w(n_i) \Psi_{M-k}(n_i) \Psi_0(n_i) &= \sum_{i=1}^N w(n_i) s_j^{(e)}(n_i) \Psi_0(n_i) \end{aligned} \quad (3)$$

Powyższy zapis możemy przedstawić w postaci macierzowej

$$\mathbf{B}_{\mathbf{M} \times \mathbf{M}} \cdot \begin{bmatrix} a_{M-1} \\ a_{M-2} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N w(n_i) s_j^{(e)}(n_i) \Psi_{M-1}(n_i) \\ \sum_{i=1}^N w(n_i) s_j^{(e)}(n_i) \Psi_{M-2}(n_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^N w(n_i) s_j^{(e)}(n_i) \Psi_0(n_i) \end{bmatrix} \quad (4)$$

gdzie

$$\mathbf{B}_{\mathbf{M} \times \mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N w(n_i) \Psi_{M-1}(n_i) \Psi_{M-1}(n_i) & \cdots & \sum_{i=1}^N w(n_i) \Psi_0(n_i) \Psi_{M-1}(n_i) \\ \sum_{i=1}^N w(n_i) \Psi_{M-1}(n_i) \Psi_{M-2}(n_i) & \cdots & \sum_{i=1}^N w(n_i) \Psi_0(n_i) \Psi_{M-2}(n_i) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^N w(n_i) \Psi_{M-1}(n_i) \Psi_0(n_i) & \cdots & \sum_{i=1}^N w(n_i) \Psi_0(n_i) \Psi_0(n_i) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Po rozdzieleniu prawostronnych sum wyrażenia (4) otrzymujemy wyrażenie o postaci

$$\mathbf{B}_{\mathbf{M} \times \mathbf{M}} \cdot \begin{bmatrix} a_{M-1} \\ a_{M-2} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix} = \Psi_{\mathbf{M} \times \mathbf{N}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} w(n_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w(n_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w(n_N) \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}_{\mathbf{N} \times \mathbf{N}}} \cdot \begin{bmatrix} s_j^{(e)}(n_1) \\ s_j^{(e)}(n_2) \\ \vdots \\ s_j^{(e)}(n_N) \end{bmatrix} \quad (6)$$

gdzie

$$\Psi_{\mathbf{M} \times \mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \Psi_{M-1}(n_1) & \Psi_{M-1}(n_2) & \cdots & \Psi_{M-1}(n_N) \\ \Psi_{M-2}(n_1) & \Psi_{M-2}(n_2) & \cdots & \Psi_{M-2}(n_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_0(n_1) & \Psi_0(n_2) & \cdots & \Psi_0(n_N) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Postępując analogicznie jak w przypadku interpolacji otrzymujemy wektor współczynników kombinacji liniowej funkcji bazowej o postaci

$$\begin{bmatrix} a_{M-1} \\ a_{M-2} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{\mathbf{M} \times \mathbf{M}}^{-1} \cdot \Psi_{\mathbf{M} \times \mathbf{N}} \cdot \mathbf{W}_{\mathbf{N} \times \mathbf{N}} \cdot \begin{bmatrix} s_j^{(e)}(n_1) \\ s_j^{(e)}(n_2) \\ \vdots \\ s_j^{(e)}(n_N) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Ponieważ szukaną, aproksymowaną wartość sygnału $s_j^{(e)}$ dla dowolnego punktu n leżącego pomiędzy węzłami n_1, n_2, \dots, n_N obliczamy na podstawie

$$s_j^{(e)}(n) = [\Psi_{M-1}(n) \quad \Psi_{M-2}(n) \quad \cdots \quad \Psi_0(n)] \cdot \begin{bmatrix} a_{M-1} \\ a_{M-2} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

tak więc dzięki zależności (8) i (9) predykcyjna postać aproksymacji sygnału wyraża się wzorem

$$s_j(n) = [\Psi_{M-1}(n) \quad \Psi_{M-2}(n) \quad \cdots \quad \Psi_0(n)] \cdot \mathbf{B}_{M \times M}^{-1} \cdot \Psi_{M \times N} \cdot \mathbf{W}_{N \times N} \cdot \begin{bmatrix} s_j^{(e)}(n_1) \\ s_j^{(e)}(n_2) \\ \vdots \\ s_j^{(e)}(n_N) \end{bmatrix} \quad (10)$$

lub równoważnie

$$s_j(n) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{S}_j^{(e)} = \mathbf{p} \cdot \begin{bmatrix} s_j^{(e)}(n_1) \\ s_j^{(e)}(n_2) \\ \vdots \\ s_j^{(e)}(n_N) \end{bmatrix} \quad (11)$$

gdzie

$$\mathbf{p} = [\Psi_{M-1}(n) \quad \Psi_{M-2}(n) \quad \cdots \quad \Psi_0(n)] \cdot \mathbf{B}_{M \times M}^{-1} \cdot \Psi_{M \times N} \cdot \mathbf{W}_{N \times N} \quad (12)$$

2.1. Aproksymacja wielomianowa sygnału

Aproksymacja wielomianowa sygnału formułowana dla funkcji określonej na dyskretnym zbiorze argumentów jest aproksymacją średniokwadratową, gdzie funkcje bazowe wynoszą odpowiednio $\Psi_i(n) = n^i$, natomiast wagi $w_i(n) = 1$ ($\mathbf{W}_{N \times N} = \mathbf{I}_{N \times N}$). Wtedy to

$$\mathbf{p} = [n^{M-1} \quad n^{M-2} \quad \cdots \quad 1] \cdot \mathbf{B}_{M \times M}^{-1} \cdot \Psi_{M \times N} \quad (13)$$

gdzie

$$\mathbf{B}_{M \times M}^{-1} \cdot \Psi_{M \times N} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N n_i^{2M-2} & \sum_{i=1}^N n_i^{2M-3} & \cdots & \sum_{i=1}^N n_i^{M-1} \\ \sum_{i=1}^N n_i^{2M-3} & \sum_{i=1}^N n_i^{2M-4} & \cdots & \sum_{i=1}^N n_i^{M-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^N n_i^{M-1} & \sum_{i=1}^N n_i^{M-2} & \cdots & \sum_{i=1}^N 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} n_1^{M-1} & n_2^{M-1} & \cdots & n_N^{M-1} \\ n_1^{M-2} & n_2^{M-2} & \cdots & n_N^{M-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

2.1.1. Przypadek szczególny – interpolacja sygnału

Jeżeli liczba funkcji bazowych M jest równa liczbie próbek parzystych N wykorzystywanych do aproksymacji ($M = N$), wtedy to predyktor przyjmuje postać [16]

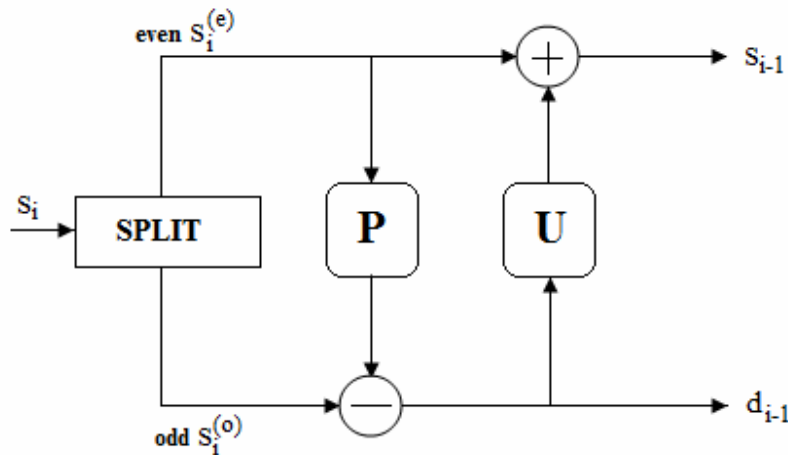
$$\mathbf{p} = [n^{N-1} \quad n^{N-2} \quad \cdots \quad 1] \cdot \mathbf{B}_{N \times N}^{-1} \cdot \Psi_{N \times N} \quad (15)$$

gdzie

$$\mathbf{B}_{N \times N}^{-1} \cdot \Psi_{N \times N} = \begin{bmatrix} n_1^{N-1} & n_1^{N-2} & \dots & 1 \\ n_2^{N-1} & n_2^{N-2} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_N^{N-1} & n_N^{N-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad (16)$$

zatem predyktor aproksymacji jest dokładnym odwzorowaniem predyktora interpolacyjnego.

2.2. Wyznaczanie współczynników uaktualnienia (Update'u)



Rys. 1. Dekompozycja sygnału za pomocą schematu liftingu [16]

Fig. 1. Signal decomposition by lifting scheme [16]

Wielorozdzielcza analiza sygnału za pomocą aproksymacji predykcyjnej z wykorzystaniem schematu liftingu złożona jest z trzech kroków:

- **kroku Podziału (Split)** – podział próbek na parzyste i nieparzyste.
- **kroku Predykcji (Predict)** – wybór predyktora określa charakterystykę reprezentacji szczegółowej.
- **kroku Uaktualnienia (Update)** – uśrednia sygnał reprezentacji zgrubnej względem sygnału oryginalnego.

Podczas wyznaczania współczynników uaktualnienia wykorzystujemy własność sygnału, gdzie wartość średnia sygnału oryginalnego jest równa wartości średniej sygnału aproksymacji zgrubnej po transformacji schematem liftingu [16, 5, 8, 11], tj.

$$\bar{s}_i = \bar{s}_{i-1} \quad (17)$$

Wartości współczynników detalu d_{i-1} i współczynników aproksymacji zgrubnej s_{i-1} na $i-1$ -szym poziomie rozdzielczości, zgodnie z zasadą liftingu i leniwej falki, określamy

$$\begin{aligned} d_{i-1}(n-1) &= s_i^{(o)}(n-1) - P\{s_i^{(e)}(n-k_0+k)\} \\ s_{i-1}(n) &= s_i^{(e)}(n) + U\{d_{i-1}(n-l_0+l)\} \end{aligned} \quad (18)$$

gdzie indeks i określa poziom analizy wielorozdzielczej, k i l są indeksami kolejnych próbek wchodzących w skład predykcji i uaktualnienia. Wartość stała k_0 określa wartość indeksu współczynników przesunięcia wartości parzystej, a przewidywanymi wartościami nieparzystymi podczas operacji predykcji, l_0 zaś jest stałą wartością, określającą wartość indeksu współczynników przesunięcia przewidywanej wartości nieparzystej, a wartościami parzystymi podczas operacji uaktualnienia.

Jeżeli operacje Predykcji i Uaktualnienia posiadają liniową charakterystykę, a sygnał ma charakter okresowy, tj.

$$\begin{aligned} s_i^{(e)}(n) &= s_i^{(e)}(n \bmod \frac{N}{2}) \\ s_i^{(o)}(n) &= s_i^{(o)}(n \bmod \frac{N}{2}) \end{aligned} \quad (19)$$

wtedy to sumy współczynników predykcji i uaktualnienia przyjmują następujące własności

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{dim\bar{P}-1} p_k = 1 \\ \sum_{l=0}^{dim\bar{U}-1} u_l = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (20)$$

Ponadto, jeżeli wektor predykcji ma tę samą długość co wektor uaktualnienia, można przyjąć, że $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{p}}{2}$.

2.3. Problem złego uwarunkowania współczynników macierzy

Aproksymacja wielomianowa tym się różni od interpolacji, że funkcja aproksymująca nie musi przybierać tych samych wartości sygnału aproksymowanego dla badanych węzłów. Ponadto, stopień wielomianu może posiadać o wiele niższą wartość od wielomianu interpolacyjnego, jednakże na tyle wysoką, aby wystarczająco przybliżyć funkcję aproksymowaną. Ponieważ często wartości na zbiorze dyskretnym są ustalane w sposób empiryczny, obarczony błędami – wielomian aproksymujący powinien posiadać stopień na tyle niski, aby wygładzał losowe błędy wynikające np. z pomiarów. W praktyce, aproksymacja odbywa się na zasadzie badania wartości funkcji celu f_j na j -tym poziomie rozdzielczości. Iteracja odbywa się tak długo, dopóki funkcja f maleje. Postępowanie takie ma istotną wadę, która prowadzi do tak zwanego złego uwarunkowania współczynników macierzy $\mathbf{B}_{M \times M}$ (5).

Aby zobrazować problem złego uwarunkowania macierzy, można przyjąć, że współczynniki układu $\mathbf{B}_{M \times M}$ posiadają argumenty leżące równomiernie w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$. Współczynniki te dla dużych wartości N można w przybliżeniu wyliczyć za pomocą rachunku całkowego [6], tj.

$$\sum_{i=1}^N n_i^k \approx N \int_0^1 n^k dn = N \frac{n^{k+1}}{k+1} \Big|_0^1 = \frac{N}{k+1} \quad (21)$$

gdzie $k \in \langle 0, 2M - 2 \rangle$.

Zatem,

$$\mathbf{B}_{M \times M} = N \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2M-1} & \frac{1}{2M-2} & \cdots & \frac{1}{M} \\ \frac{1}{2M-2} & \frac{1}{2M-3} & \cdots & \frac{1}{M-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{M} & \frac{1}{M-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Wyliczając macierz odwrotną $\mathbf{B}_{M \times M}^{-1}$ można zauważyć, że np. dla $M \geq 12$ macierz posiada elementy rzędu $4 \cdot 10^{22}$, co powoduje, że podczas rozwiązywania układu zaokrąglenia na maszynie cyfrowej są tak duże, że obliczenia tracą sens.

Reasumując, aproksymacja z funkcjami bazowymi n^i jest pozbawiona sensu, z wyjątkiem małego M .

Aby zoptymalizować obliczenia dla aproksymacji wielomianami wyższych rzędów, należy zastosować jedną z metod układu normalnego. Możemy stosować do tego celu przekształcenia Householdera, metody Goluba lub inną metodę rozkładu macierzy na iloczyn QR [14].

Inną alternatywą jest zastosowanie bazy wielomianów ortogonalnych, pozwalających uzyskać rozwiązanie bez stosowania przekształceń macierzy odwrotnej.

2.4. Wielomiany ortogonalne Grama

Mając układ $n+1$ równoodległych punktów $x = x_0, x_1, \dots, x_n$ różniących się między sobą o stałe h ($x_i = x_0 + ih$ gdzie $i = 0, 1, 2, \dots, n$), do analizy sygnału funkcji dla punktów $i = 0, 1, 2, \dots, n$ wystarczy skorzystać z przekształcenia liniowego $i = \frac{x_i - x_0}{h}$.

Budując układ wielomianów ortogonalnych

$$P_{0n}, P_{1n}, P_{2n}, \dots, P_{mn} \quad (23)$$

stopni od 0 do m , gdzie $m \leq n$ na zbiorze punktów $i = 0, 1, 2, \dots, m$, takich że

$$\sum_{i=0}^n P_{jn}(i) P_{kn}(i) = 0 \text{ dla } j \neq k, \quad (24)$$

jednocześnie przyjmując, że

$$P_{kn}(0) = 1 \text{ dla } k = 0, 1, \dots, m. \quad (25)$$

postać ogólna wielomianów Grama przyjmuje formę [13]

$$P_{kn}(i) = \sum_{s=0}^k (-1)^s \cdot C_k^s \cdot C_{k+s}^s \cdot \frac{i^{[s]}}{n^{[s]}}, k = 0, 1, 2, \dots, m \quad (26)$$

gdzie [6]

$$i^{[s]} = i(i-1)(i-2)\dots(i-s+1) \quad (27)$$

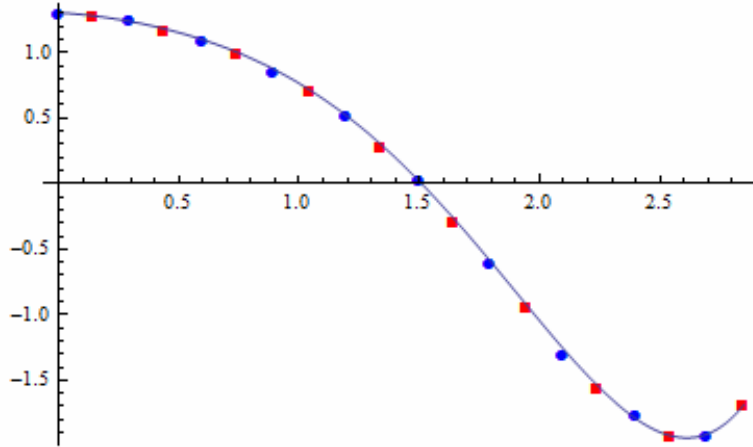
$$n^{[s]} = i(i-1)(i-2)\dots(i-s+1). \quad (28)$$

Wtedy to macierz $\mathbf{B}_{M \times M}^{-1}$ aproksymacji za pomocą wielomianów Grama przyjmuje postać

$$\mathbf{B}_{M \times M}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sum_{i=0}^n P_{0n}(i)P_{0n}(i)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sum_{i=0}^n P_{1n}(i)P_{1n}(i)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sum_{i=0}^n P_{mn}(i)P_{mn}(i)} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Dzięki zależności (29) predykcyjna analiza przykładowych próbek za pomocą wielomianów Grama przyjmuje formę macierzową z rys. 3. Pozwala ona jednocześnie na reprezentację graficzną próbek po zastosowaniu bloku predykcji pokazaną na rys. 2.

$$\begin{aligned}
 W(x) = & -0.053 P_{0,9}[3.33333 x] + 1.82187 P_{1,9}[3.33333 x] \\
 & - 0.340773 P_{2,9}[3.33333 x] - 0.203925 P_{3,9}[3.33333 x] \\
 & + 0.0913531 P_{4,9}[3.33333 x] - 0.0125154 P_{5,9}[3.33333 x]
 \end{aligned}$$



Rys. 2. Wielomian Grama – wykres próbek parzystych wraz z nieparzystymi otrzymanymi podczas bloku predykcji (badania własne)

Fig. 2. Gram's polynomials – plot of even samples and odd samples obtained by lifting scheme (personal research)

$$\begin{pmatrix} -0.053 \\ 1.82187 \\ -0.340773 \\ -0.203925 \\ 0.0913531 \\ -0.0125154 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{27}{110} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{147}{715} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{81}{715} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{65} \end{pmatrix} \cdot \Psi_{6 \times 10} \cdot \begin{pmatrix} 1.3 \\ 1.245 \\ 1.095 \\ 0.855 \\ 0.514 \\ 0.037 \\ -0.6 \\ -1.295 \\ -1.767 \\ -1.914 \end{pmatrix}$$

Rys. 3. Wielomian Grama – przykład iloczynu macierzy $\mathbf{B}_{M \times M}^{-1} \cdot \Psi_{M \times N} \cdot \mathbf{S}_j^{(e)}$ ($\mathbf{W}_{N \times N} = \mathbf{I}_{N \times N}$) obliczający współczynniki aproksymacji (badania własne)

Fig. 3. Gram's polynomial – example of matrix product $\mathbf{B}_{M \times M}^{-1} \cdot \Psi_{M \times N} \cdot \mathbf{S}_j^{(e)}$ ($\mathbf{W}_{N \times N} = \mathbf{I}_{N \times N}$) to calculate polynomial coefficients (personal research)

2.5. Aproksymacja trygonometryczna

Podczas badania zjawisk czasu rzeczywistego można zauważyć, że analizowana funkcja jest okresowa. Stąd też zamiast aproksymowania ją wielomianami algebraicznymi do tego celu wygodniej i optymalniej jest użyć wielomianów trygonometrycznych.

Do rozważań można przyjąć, że punkty pomiarowe są równoodległe w przedziale $\langle t_0, t_{2L-1} \rangle$, tj.

$$x_i = \frac{\pi k}{L}, \text{ gdzie } k = \frac{t_i - t_0}{h}, i = 0, 1, 2, \dots, 2L-1 \quad (30)$$

Ponadto, ortogonalnymi funkcjami układu bazowego jest zbiór

$$1, \sin(x_i), \cos(x_i), \sin(2x_i), \cos(2x_i), \dots, \sin(jx_i), \cos(jx_i). \quad (31)$$

Ponieważ układ (31) posiada własność ortogonalności nie tylko w przedziale ciągłym $\langle 0, 2\pi \rangle$, lecz także w przedziale dyskretnym [14], wtedy to otrzymujemy następujące zależności

$$\sum_{i=0}^{2L-1} \cos(kx_i) \cos(lx_i) = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ L & k = l \neq 0, \\ 2L & k = l = 0 \end{cases} \quad (32)$$

$$\sum_{i=0}^{2L-1} \sin(kx_i) \sin(lx_i) = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ L & k = l \neq 0, \\ 0 & k = l = 0 \end{cases} \quad (33)$$

$$\sum_{i=0}^{2L-1} \cos(kx_i) \sin(lx_i) = 0 \quad (34)$$

Zatem, analogicznie jak w przypadku wielomianów Grama, macierz $\mathbf{B}_{M \times M}^{-1}$ jest diagonalna, przyjmując odpowiednie wartości na przekątnej

$$\mathbf{B}_{M \times M}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2L} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{L} \end{bmatrix}. \quad (35)$$

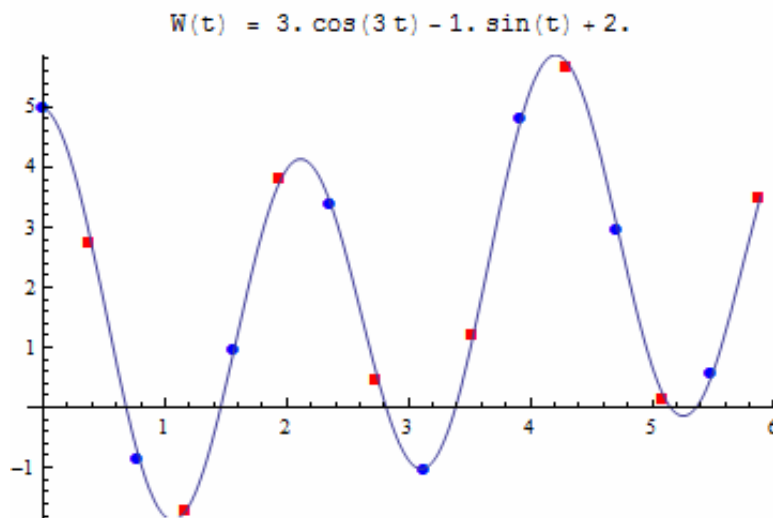
$$\begin{pmatrix} 2. \\ 0. \\ 0. \\ 3. \\ -1. \\ 0. \\ 0. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.125 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0.25 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0.25 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0.25 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0.25 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.25 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.25 \end{pmatrix} \cdot \Psi_{7 \times 8} \cdot \begin{pmatrix} 5. \\ -0.828427 \\ 1. \\ 3.41421 \\ -1. \\ 4.82843 \\ 3. \\ 0.585786 \end{pmatrix}$$

Rys. 4. Wielomian trygonometryczny – przykład iloczynu macierzy $\mathbf{B}_{M \times M}^{-1} \cdot \Psi_{M \times N} \cdot \mathbf{S}_j^{(e)}$ ($\mathbf{W}_{N \times N} = \mathbf{I}_{N \times N}$) obliczający współczynniki aproksymacji (badania własne)

Fig. 4. Trigonometric approximation – example of matrix product $\mathbf{B}_{M \times M}^{-1} \cdot \Psi_{M \times N} \cdot \mathbf{S}_j^{(e)}$ ($\mathbf{W}_{N \times N} = \mathbf{I}_{N \times N}$) to calculate trigonometric polynomial coefficients (personal research)

Użycie predyktora z wykorzystaniem macierzy diagonalnej (35) (rys. 4, rys. 5) powoduje automatyczne zmniejszenie kosztów obliczeniowych, zwiększając przy tym precyzję wyniku. Nie zawsze jednak charakterystyka sygnału pozwala na bezpośrednie wykorzystanie własności ortogonalnej. Może się okazać, że energia sygnału jest rozłożona niedokładnie przy częstotliwościach będących całkowitymi wielokrotnościami częstotliwości podstawowej $\frac{f_s}{N}$ sygnału badanego [4]. Przykładem takim może być sygnał sinusoidalny przesunięty

w czasie o stałą τ . Bezpośrednia analiza powoduje duży błąd aproksymacji. Stąd też aby go zminimalizować, można przesunąć analizę sygnału, jeżeli to możliwe, o stałą $-\tau$.

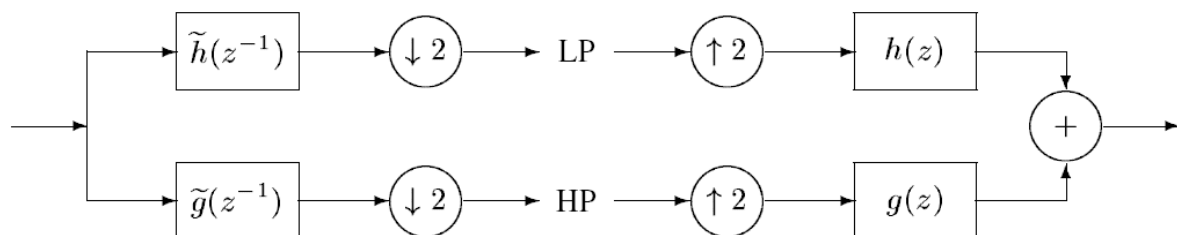


Rys. 5. Wielomian trygonometryczny – wykres próbek parzystych wraz z nieparzystymi otrzymanymi podczas bloku predykcji (badania własne)

Fig. 5. Trigonometric approximation – plot of even samples and odd samples obtained by lifting scheme (personal research)

3. Relacja pomiędzy klasyczną a predykcyjną transformacją falkową

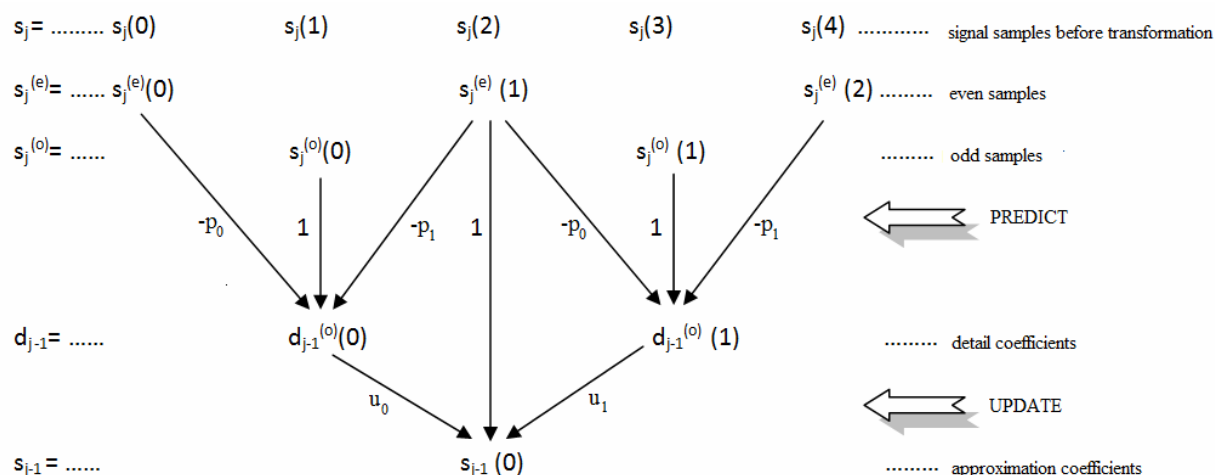
W klasycznej teorii falkowej podczas dekompozycji sygnału do wyznaczenia współczynników aproksymacji stosujemy bank filtra dolnoprzepustowego \tilde{h} i decymację $\downarrow 2$ sygnału S , a współczynniki detali otrzymujemy po filtracji górnoprzepustowej za pomocą \tilde{g} i decymacji $\downarrow 2$ tego samego sygnału (rys. 6).



Rys. 6. Dwukanałowy schemat liftingu – dekompozycja i kompozycja sygnału [11]

Fig. 6. Two-channels scheme of signal – decomposition and signal composition [11]

Zależność pomiędzy klasyczną teorią falkową a jej predykcyjnym odpowiednikiem można zaprezentować na przykładzie predyktora rzędu II $\mathbf{p} = [p_0, p_1]$ i współczynników uaktualnienia $\mathbf{u} = [u_0, u_1]$.



Rys. 7. Zależność pomiędzy klasyczną a predykcijną transformatą falkową [16]
 Fig. 7. Relation between classical and predict wavelet transformation [16]

Schemat z rys. 7 pozwala w prosty sposób otrzymać biortogonalny system falkowy, obliczając wagi filtrów na zasadzie sumowania dróg przejść każdej próbki sygnału [16, 12].

Filtr górnoprzepustowy otrzymujemy w sposób jawny jako współczynniki przejścia z s_j do d_{j-1}

$$\begin{cases} \tilde{g}_0 = -p_0 \\ \tilde{g}_1 = 1 \\ \tilde{g}_2 = -p_1 \end{cases} \quad (36)$$

natomiast współczynniki filtru dolnoprzepustowego, ze względu na operację opuszczania i podnoszenia, otrzymujemy na zasadzie sumowania dróg przejścia z s_j do s_{j-1}

$$\begin{cases} \tilde{h}_0 = -p_0 \cdot u_0 \\ \tilde{h}_1 = 1 \cdot u_0 \\ \tilde{h}_2 = -p_1 \cdot u_0 + 1 - p_0 \cdot u_1 \\ \tilde{h}_3 = 1 \cdot u_1 \\ \tilde{h}_4 = -p_1 \cdot u_1 \end{cases} \quad (37)$$

Przykładem realizacji filtrów za pomocą schematu liftingu może być predykcyjna aproksymacja sygnału za pomocą wielomianu $f(x) = a_1 x + a_0 \cos(x)$ (współczynnikami bazowymi są x i $\cos(x)$).

Aproksymacja na podstawie analizy dwóch próbek parzystych wyznacza wektory $\mathbf{p} = [0.509054; 0.490946]$ i $\mathbf{u} = [0.254527; 0.245473]$, zatem współczynniki filtru dolnoprzepustowego \tilde{h} wynoszą odpowiednio

$$\begin{cases} \tilde{h}_0 = & -0.509054 \cdot 0.254527 = -0.129568 \\ \tilde{h}_1 = & 1 \cdot 0.254527 = 0.254527 \\ \tilde{h}_2 = & (-0.490946) \cdot 0.254527 + 1 + (-0.509054) \cdot 0.245473 = 0.750082 \\ \tilde{h}_3 = & 1 \cdot 0.245473 = 0.245473 \\ \tilde{h}_4 = & (-0.490946) \cdot 0.245473 = -0.120514 \end{cases} \quad (38)$$

natomiast filtr górnoprzepustowy posiada wartości

$$\begin{cases} \tilde{g}_0 = -0.509054 \\ \tilde{g}_1 = 1 \\ \tilde{g}_2 = -0.490946 \end{cases} \quad (39)$$

Schemat liftingu na podstawie współczynników Predykcji i Uaktualnienia determinuje zarówno współczynniki filtrów analizy, jak i współczynniki filtrów syntezy.

Znając schemat przejścia współczynników predykcyjnych do falkowych, w bardzo prosty sposób możemy uzyskać zarówno filtry analizy, jak i syntezy. Aby otrzymać filtry syntezy, znając wektory predykcji \mathbf{p} i uaktualnienia \mathbf{u} , należy przyjąć, że wektory te posiadają wartości odpowiednio $-\mathbf{p}$ i $-\mathbf{u}$.

W następnym kroku wykonywany jest schemat dróg przejścia, zgodny ze schematem z rys. 7. Kończącym etapem jest zamiana symboli z \tilde{h} do g i z \tilde{g} do h , odwracając kolejność współczynników filtrów.

Korzystając z powyższej zależności, filtr górnoprzepustowy wynosi

$$\begin{cases} g_0 = & p_1 \cdot (-u_1) = \tilde{h}_4 = -0.120514 \\ g_1 = & 1 \cdot (-u_1) = -\tilde{h}_3 = -0.245473 \\ g_2 = & p_1 \cdot (-u_0) + 1 + p_0 \cdot (-u_1) = \tilde{h}_2 = 0.750082 \\ g_3 = & 1 \cdot (-u_0) = -\tilde{h}_1 = -0.254527 \\ g_4 = & p_0 \cdot (-u_0) = \tilde{h}_0 = -0.129568 \end{cases} \quad (40)$$

a dolnoprzepustowy

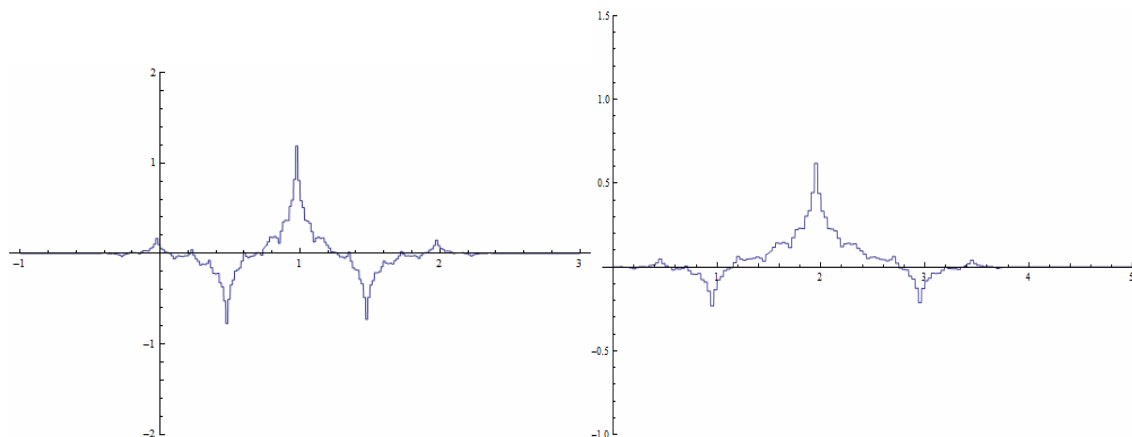
$$\begin{cases} h_0 = & p_1 = -\tilde{g}_2 = 0.490946 \\ h_1 = & \tilde{g}_1 = 1 \\ h_2 = & p_0 = -\tilde{g}_0 = 0.509054 \end{cases} \quad (41)$$

Alternatywą powyższego rozwiązania może być skorzystanie z tzw. sprzężonych filtrów lustrzanych [16, 11], gdzie

$$\begin{cases} g_n = (-1)^n \tilde{h}_{1-n} \\ \tilde{g}_n = (-1)^n h_{1-n} \end{cases} \quad (42)$$

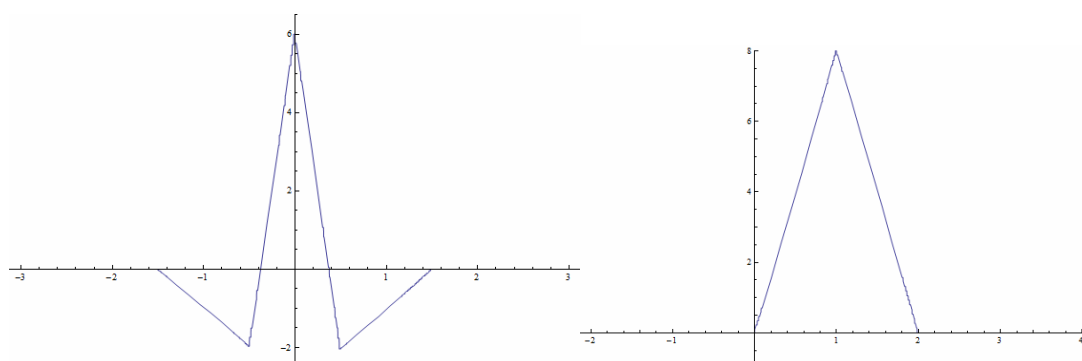
wynikających z własności współczynników falek biortogonalnych.

Schemat zależności współczynników predykcji i uaktualnienia nie zawsze jest symetryczny jak w przypadku schematu z rys. 6. Jednakże pozwala on zawsze i w sposób jednoznaczny otrzymać filtry biortogonalne dla danej operacji predykcji i uaktualnienia.



Rys. 8. Analiza sygnału – funkcja falkowa i skalująca ($\mathbf{p}=[0.509; 0491]$ $\mathbf{u}=[0.255; 245]$) (badania własne)

Fig. 8. Signal decomposition – wavelet and scaling function ($\mathbf{p}=[0.509; 0491]$ $\mathbf{u}=[0.255; 245]$) (personal research)



Rys. 9. Synteza sygnału – funkcja falkowa i skalująca ($\mathbf{p}=[0.509; 0491]$ $\mathbf{u}=[0.255; 245]$) (badania własne)

Fig. 9. Signal composition – wavelet and scaling function ($\mathbf{p}=[0.509; 0491]$ $\mathbf{u}=[0.255; 245]$) (personal research)

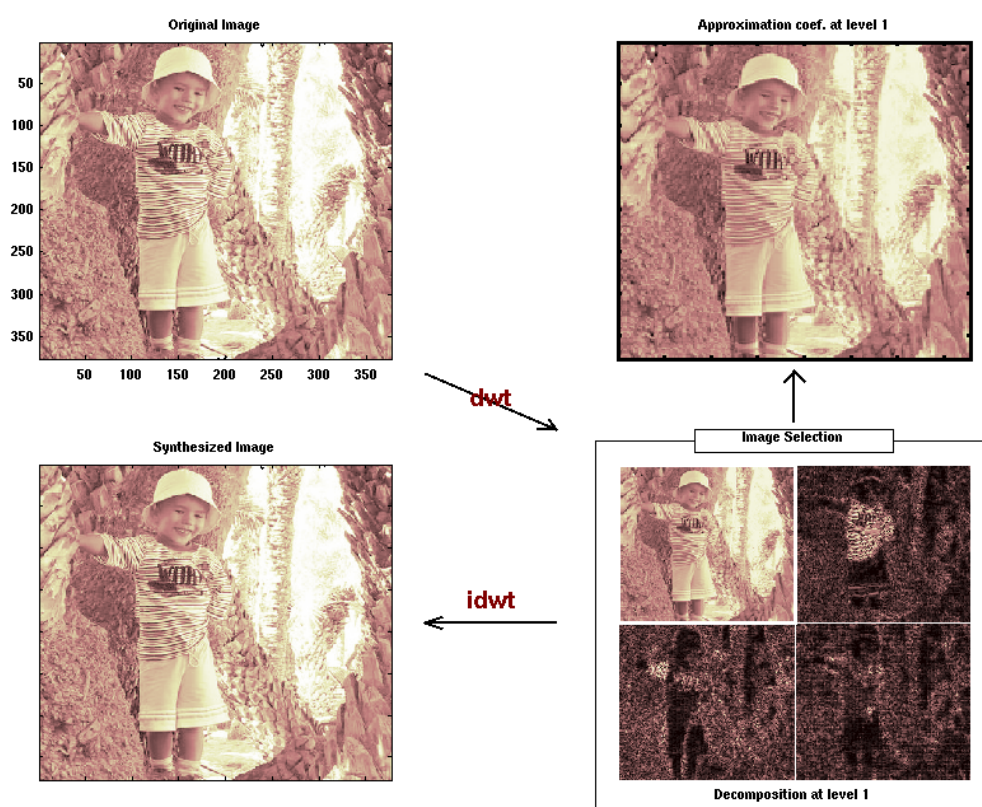
Sytuacja odwrotna nie daje takiej gwarancji. Aby z pary filtrów otrzymać wektor predykcji i uaktualnienia, należy w pierwszej kolejności doprowadzić dwukanałowy schemat dekompozycji do reprezentacji polifazowej. Następnie macierz polifazową przekształca się za pomocą dzielenia wielomianów Laurenta (algorytm Euklidesa) do postaci iloczynowej [2]

$$\mathbf{P}(z) = \prod_{i=1}^m \begin{bmatrix} 1 & s_i(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t_i(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & \frac{1}{K} \end{bmatrix}. \quad (43)$$

Ponieważ operacja dzielenia wielomianów Laurenta jest niejednoznaczna [10], faktoryzacja zespołu filtrów falkowych do postaci predykcyjnej może mieć więcej niż jedno rozwiązanie. Ponadto, może wymagać więcej niż jedną parę operacji predykcji i uaktualnienia.

4. Podsumowanie

Schemat liftingu pozwala na projektowanie odwracalnych transformacji całkowitoliczbowych. Błąd rekonstrukcji wtedy jest praktycznie zerowy, a ich właściwości są zbliżone do operacji zmiennoprzecinkowych. Transformaty te znajdują swe zastosowanie w algorytmach kompresji bezstratnej. W standardzie kompresji obrazów JPEG2000 jest m.in. stosowana predykcyjna transformacja falkowa 1D z filtrami CDF(5,3) i CDF(9,7) [5]. Do falkowej analizy obrazów, czyli sygnałów dwuwymiarowych najczęściej wykorzystuje się jednowymiarową transformatę falkową. W pierwszym kroku dekomponowane są kolejne wiersze obrazu na współczynniki falkowe, w kroku drugim – dekompozycja odbywa się dla kolejnych kolumn obrazów uzyskanych podczas dekompozycji wierszy. Zgodnie z falkową analizą wielorozdzielczą obraz oryginalny składa się z 4 części: obrazu aproksymacji i trzech obrazów detali: horyzontalnego, wertykalnego i diagonalnego [15, 3] (rys. 10).



Rys. 10. Wielorozdzielcza analiza obrazu (badania własne)

Fig. 10. Multiresolution analysis of image (personal research)

Transformacja falkowa używana jest w Federalnym Biurze Śledczym w Stanach Zjednoczonych do kompresji odcisków palców. Kompresje te wykorzystują zaawansowane metody progresywnego kwantowania współczynników, wykorzystujące zależności przestrzenne pomiędzy współczynnikami falkowej reprezentacji obrazu [1]. Do tego celu stosowane są algorytmy typu EZW i SPIHT [5]. Analizę wielorozdzielczą można wykorzystywać w sieci Inter-

net, gdzie cały obraz może być wstępnie aproksymowany i sukcesywnie uzupełniany o kolejne detale, do czasu aż użytkownik nie zrezygnuje z dalszego pobierania pliku.

Obecnie predykcijną transformatę falkową wykorzystuje się do kompresji różnicowej kolejnych ramek obrazu w zapisach wideo [3]. Wersja predykcyjna jest dużo lepsza od klasycznej transformaty falkowej ze względu na szybkość i oszczędność pamięci. Obliczenia wykonuje się na zasadzie podstawiania, bez konieczności wprowadzania dodatkowych zmiennych pomocniczych.

Schemat liftingu umożliwia także operację wielorozdzielczą siatek nieregularnych powstałych z obiektów trójwymiarowych [7, 9] (rys. 11). Dzięki biortogonalności niewymagane jest wstępne przekształcenie siatki do postaci regularnej lub półregularnej.



Rys. 11. Wielorozdzielcza analiza nieregularnych siatek 3D (badania własne)
Fig. 11. Multiresolution analysis of irregular mesh 3D (personal research)

Analiza falkowa to dziedzina młoda, licząca zaledwie 10 lat. Umożliwia jednocześnie przedstawienie czasowych oraz częstotliwościowych własności sygnałów niestacjonarnych i prowadzi do aproksymacji sygnałów przez wyodrębnienie ich charakterystycznych elementów strukturalnych. Dziś analiza falkowa jest stosowana w geofizyce, fizyce, astronomii, biologii, a także w ekonomii. Jest obecna w seismologii i w hydrodynamice. Wykorzystuje się ją w analizie mowy i w sterowaniu procesami przemysłowymi. Ma więc wiele zastosowań, a jej popularność ciągle rośnie, szczególnie w obrębie analizy obrazów dynamicznych. W przyszłości zatem możemy spodziewać się dalszego ich rozwoju, m.in. w kierunku powstawania optymalnych koderów, które będą dopasowywać jakość wyświetlanego obrazu do szybkości komputera bądź transferu danych poprzez sieć Internet.

BIBLIOGRAFIA

1. Białasiewicz J. T.: Falki i aproksymacje. WNT, Warszawa 2000.
2. Uytterhoeven G., Van Wulpen F., Jansen M., Roose D., Bultheel A.: WAILI: Wavelets with Integer Lifting. Technical report, Belgium 1997.
3. Vetterli M., Kovacevic J.: Wavelets and Subband Coding of Signal Processing Series. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New York 1995.

4. Lyons R. G.: Understanding digital signal processing. Addison Wesley Longman, Inc., 1997.
5. Przelaskowski A.: Kompresja danych. Podstawy, metody bezstratne, kodery obrazów. BTC, Warszawa 2005.
6. Ralson A.: A first course in numerical analysis. McGraw–Hill, Inc., New York 1965.
7. Guskov I., Sweldens W., Schröder P.: Multiresolution Signal Processing for Meshes. Computer Graphics Proceedings (SIGGRAPH 99), 1999, s. 325÷334.
8. Sweldens W., Schröder P.: Building your own wavelets at home. 1996.
9. Daubechies I., Guskov I., Schröder P., Sweldens W.: Wavelets on irregular point sets. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, Vol. 357, 1999, s. 2397÷2413.
10. Daubechies I., Sweldens W.: Factoring wavelet transforms into lifting steps. J. Fourier Anal. Appl, Vol. 4, 1998, s. 247÷269.
11. Sweldens W.: The lifting scheme: A construction of second generation wavelets. SIAM J. Math. Anal, Vol. 29, 1997, s. 511÷546.
12. Sweldens W.: The lifting scheme: A new philosophy in biorthogonal wavelet constructions. in Wavelet Applications in Signal and Image Processing III, 1995, s. 68÷79.
13. Demidowicz B. P., Maron I. A., Szuwałowa E. Z.: Metody numeryczne cz. II. Przybliżanie funkcji, równania różniczkowe i całkowe. PWN, Warszawa 1965.
14. Fortuna Z., Macukow B., Wasowski J.: Metody numeryczne. WNT, Warszawa 1998.
15. Wojtaszczyk P.: Teoria falek. PWN, Warszawa 2000.
16. Zieliński T. P.: Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. Od teorii do zastosowań. WKŁ, Warszawa 2007.
17. Grzymkowski R., Zielonka A.: Zastosowanie teorii falek w zagadnieniach brzegowych. Wydawnictwo Pracowni Komputerowej J. Skalmierskiego, Gliwice 2004.

Recenzent: Dr hab. inż. Maria Pietruszka, prof. Pol. Łódzkiej

Wpłynęło do Redakcji 10 grudnia 2008 r.

Abstract

The article presents general outline of signal theory with using predict wavelet transform. Predict wavelet transform (fig. 1) is new attitude to multiresolution signal analysis by discrete wavelet transform [10]. It is implemented in accordance with a lifting scheme, which allows

realizing a signal filtration by biorthogonal wavelets [11,12]. Thanks to it, exists possibility receive optimal, biorthogonal filter for analysis of chosen signal characteristic.

In the article is described signal approximation method [14] by lifting scheme (10). This method is generalization of predict interpolation proposed by Wim Sweldens [8,11]. It allows to predict odd signal samples by a polynomial degree much lower than an interpolation polynomial degree. This solution not only enables approximation by algebraic polynomial but also by any base functions. So, this method is more flexible and optimal.

Using of orthogonal Gram's polynomial (26) or trigonometric polynomial to approximation eliminate a problem of wrong predisposition of matrix coefficients (22)[14]. The such a predisposition can create a large errors of rounding during calculating by digital machine, so it leads for incorrect results.

The article enables to acquaint oneself with a relation between classical and predict wavelet transform (fig. 7). The method obtains of a biorthogonal high-pass filter and low-pass filter (analysis and synthesis) is shown on the base of second rank predictor example [16]. The corresponding filters are received by summation of flow-way between Predict and Update coefficients. Calculated filter coefficients are described by wavelet and scaling functions in graphical form (fig.8, fig.9).

Summary chapter presents use of lifting scheme during multiresolution analysis of image (fig. 10) [1,15] and also irregular meshes analysis 3D (fig. 11).

Adres

Marcin JAROMIN: Politechnika Śląska, Instytut Informatyki, ul. Akademicka 16,
44-100 Gliwice, Polska, marcin.jaromin@eranet.pl