Krzysztof GROMYSZ
Stowarzyszenie Inżynierów i Techników Górnictwa, Oddział Rybnik

WPŁYW CZASU TRWANIA DRGAŃ TERENU GÓRNICZEGO NA WARTOŚĆ SIŁ WEWNĘTRZNYCH W KONSTRUKCJACH BUDOWLANYCH NA PRZYKŁADZIE ANALIZY NUMERYCZNEJ MODELU KOMINA CEGLANEGO

Streszczenie. Drgania terenu górniczego wywołują w konstrukcjach dodatkowe siły wewnętrzne. W referacie zrelacjonowano badania modelu komina ceglanego wysokości 30 m poddanego harmonicznym wymuszeniom kinematycznym. Przeanalizowano wpływ czasu obciążenia wstrząsem na wartość momentu zginającego w utwierdzeniu komina i związany z tym czas ustalania się drgań. Stwierdzono, że proces ustalania się drgań jest dłuższy w przypadku wymuszenia, którego kołowa częstość *p* pokrywa się z pierwszą kołową częstością drgań własnych ω_1. Na przykład, drgania wywołane wstrząsem cechującym się wymuszeniem $p=\omega_1=2.439$ rad/s ustalają się po 39 s, a drgania wywołane wstrząsem o wymuszeniu $p=3.5$ rad/s ustalają się po 2 s.

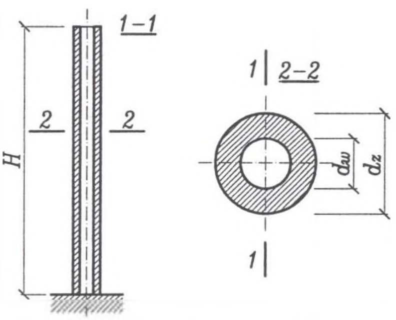
INFLUENCE OF DURATION OF MINING GROUND OSCILLATION ON VALUE OF INTERNAL FORCES IN BUILDING CONSTRUCTION ON EXAMPLE OF NUMERIC ANALYSIS OF MODEL OF BRICK CHIMNEY

Summary. Oscillations of mining area generate inertial forces. The answer of construction are internal forces. Model FEM of brick chimney of 30m high loaded with harmonic displacement was taken under consideration. Influence of duration of harmonic displacement was research on value of bending moment in fastening. Process of vibration establishing depends on frequency of oscillations and it is longer in case of harmonic displacement of value close to free vibration frequency.

1. Wprowadzenie

Drgania terenu górniczego generują siły bezwładności, które w konstrukcjach budowlanych wymuszają dodatkowe siły wewnętrzne. Istnieje wiele podejść do wyznaczania dodatkowych sił wewnętrznych wywołanych drganiami. Jednym z nich jest przykładanie do elementów konstrukcji zastępczych sił bezwładności. Inny polega na przykładaniu do fundamentów odpowiednio zdefiniowanego wymuszenia kinematycznego, odpowiadającego drganiom terenu górniczego i wówczas siły bezwładności są konsekwencją przyłożonego wymuszenia. W podejściach tych uzyskane wartości sił wewnętrznych odpowiadają drganiom ustalonym obiektu budowlanego, to znaczy takim, które trwają dostatecznie długo. Drgania te w przypadku układów opisanych liniowymi równaniami różniczkowymi przy wymuszeniach harmonicznych cechują się okresową zmianą sił wewnętrznych, przy czym ich okres odpowiada wymuszeniu. Drgania terenu górniczego obserwowane na terenie Rybnickiego Okręgu Węglowego trwają nie dłużej niż 2-3 sekundy. Tak krótki czas trwania wymuszenia nie powoduje wystąpienia w konstrukcji drgań ustalonych. Stąd wniosek, że wartości sił wewnętrznych w konstrukcjach wyznaczone na podstawie założenia stacjonarności drgań jest obarczone znacznym błędem.

Celem niniejszego referatu jest przeanalizowanie wpływu czasu trwania wstrząsu terenu górniczego na wywołane tym wstrząsem ekstremalne wartości sił wewnętrznych. W referacie ograniczono się do wyznaczania momentu zginającego w utwierdzeniu komina ceglanego, który został przedstawiony na rysunku 1. Przedmiotem badań zrelacjonowanych poniżej jest numeryczny model murowanego z cegły komina wysokości H=30 m, ciężarze ρ=19 kN/m^3 i module sprężystości E=10^{9}Pa. Komin cechuje się stałym przekrojem pierścieniowym o średnicy zewnętrznej d_z=3 m i wewnętrznej d_z=1.5 m. Należy zwrócić uwagę, że przekrój w realnie istniejących kominach zmienia się z wysokością. Założenie o stałości przekroju poczyniono z myślą o rozwiązaniu analitycznym problemu, które zostanie przedstawione w kolejnych publikacjach autora.



Rys. 1. Badany murowany komin; H=30 m, d_z=3 m, d_w=1.5 m
Fig. 1. Tested clay brick masonry chimney; H=30 m, d_z=3 m, d_w=1.5 m

Poniżej zrelacjonowano obliczenia numeryczne komina, przy założeniu że jest on obciążony harmonicznym wymuszeniem kinematycznym opisanym zależnością

$$a = A_{max} \cos(pt), \tag{1}$$

gdzie A_{max} jest amplitudą przyśpieszenia drgań wyrażoną w mm/s^2, a p kołową częstością drgań wyrażoną w radianach na sekundę. W rzeczywistych układach wymuszenie kinematyczne odpowiadające wstrząsom górniczym jest bardziej złożone i zwykle przedstawiane w postaci widma [2].

2. Rozwiązanie numeryczne metodą elementów skończonych

W ogólności na obiekt budowlany poddany wymuszeniom kinematycznym oddziałują następujące siły:

- G – ciężar masy obiektu,
- S – sprężysta reakcja układu na oddziałujące obciążenie,
- R – siła tłumiąca stanowiąca niesprężystą reakcję obiektu,
- W – siła wymuszająca wstrząs.

Zgodnie z zasadą d'Alamberta siły te są równoważone przez siłę bezwładności B masy układu m. Wobec powyższego można napisać równanie w postaci wektorowej

$$\overline{B} = \overline{G} + \overline{S} + \overline{R} + \overline{W}. \tag{2}$$

Przy założeniu że odkształcenia obiektu są niewielkie, przyjmuje się, że siła **S** jest liniową funkcją współrzędnej y określającej położenie

$$S = k(y + \delta_{st}). \tag{3}$$

Współczynnik k nazywany jest współczynnikiem sprężystości i ma wymiar [N/m], natomiast

$$\delta_{st} = \frac{G}{k} \tag{4}$$

oznacza wychylenie statyczne obiektu wywołane ciężarem G. Siła tłumiąca R może być funkcją położenia obiektu (współrzędna y) lub zmiany położenia w czasie, to jest prędkości $\dot{y}$. Siła wymuszająca jest równa

$$W = ma, \tag{5}$$

gdzie a jest chwilowym przyśpieszeniem wstrząsu. Siła bezwładności, zgodnie z zasadą dynamiki Newtona, wynosi

$$B = m\ddot{y}, \tag{6}$$

gdzie $\ddot{y}$ jest przyśpieszeniem masy obiektu. Należy podkreślić, że ze względu na występowanie siły tłumiącej R, wartość chwilowego przyśpieszenia wstrząsu oraz wartość chwilowego przyśpieszenia masy m obiektu nie są równe oraz najczęściej pozostają przesunięte względem siebie w fazie.

Uwzględniając kierunki działania sił oraz (3), (4), (5), (6), równanie (2) można zapisać

$$m\ddot{y} = k\delta_{st} - k\left(y + \delta_{st}\right) - R - ma\,. \tag{7}$$

Po uproszczeniach zależność opisująca tłumiony ruch masy m obiektu cechującego się liniową sprężystością poddanego oddziaływaniu wstrząsu terenu górniczego ma postać

$$m\ddot{y} + ky + R = -ma\,. \tag{8}$$

W celu uwzględnienia większej liczby współrzędnych i postaci drgań równanie (8) formułuje się zwykle w postaci macierzowej. Przyjmując, że zachodzi tłumienie liniowe, to jest proporcjonalne do wektora prędkości $\dot{\mathbf{y}}$, równanie drgań ma postać

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = -\mathbf{M}\mathbf{a}\,. \tag{9}$$

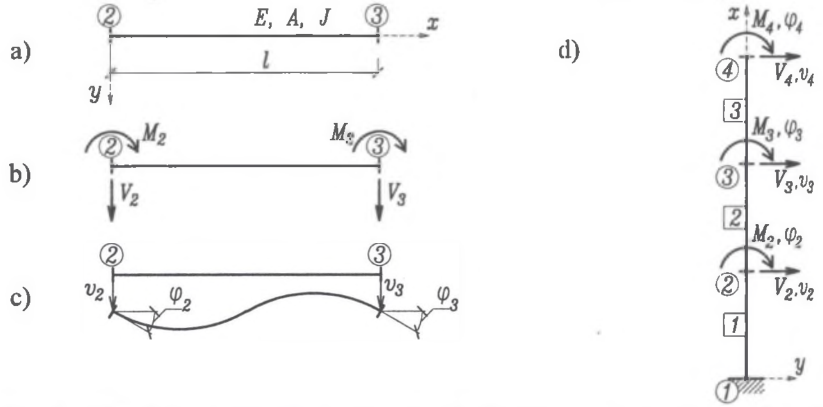
W równaniu tym $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}$ są odpowiednio macierzami bezwładności, tłumienia i sprężystości, a $\ddot{\mathbf{y}}$, $\dot{\mathbf{y}}$, $\mathbf{y}$ wektorami przyśpieszenia, prędkości i przemieszczenia we współrzędnych uogólnionych. W zależności od przyjętej metody obliczeń wektory te mogą zawierać jedynie współrzędne, odpowiadające przemieszczeniom mas skupionych jak w przypadku dyskretyzacji układu do mas skupionych, lub współrzędne odpowiadające przemieszczeniom i kątom obrotu, co ma miejsce w metodzie elementów skończonych (MES).

Celem przeprowadzenia obliczeń komina według procedur MES dzieli się go na 3 prętowe elementy skończone, każdy o jednakowej długości l. Macierz sprężystości elementu prętowego $\mathbf{K}_{el}$ wiążąca wektor przemieszczeń $\mathbf{y}^T = \left[v_1, \varphi_1, v_2, \varphi_2\right]$ z wektorem sił wewnętrznych $\mathbf{Q}^T = \left[V_1, M_1, V_2, M_2\right]$ ma postać [3]

$$\mathbf{K}_{el} = EJ\begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ & \frac{4}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ sym. & & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ & & & \frac{4}{l} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Macierz bezwładności elementu, uwzględniająca bezwładność przesuwu i obrotu węzłów elementów, ma postać [3]

$$\mathbf{M}_{el} = EJ\begin{bmatrix} \frac{13A}{35}+\frac{6J}{5l^2} & \frac{11Al}{210}+\frac{J}{10l} & \frac{9A}{70}-\frac{6J}{5l^2} & -\frac{13Al}{420}+\frac{J}{10l} \\ & \frac{Al^2}{105}+\frac{2J}{15} & \frac{13Al}{420}-\frac{J}{10l} & -\frac{Al^2}{140}-\frac{J}{30} \\ & sym. & \frac{13A}{35}+\frac{6J}{5l^2} & -\frac{11Al}{210}-\frac{J}{10l} \\ & & & \frac{Al^2}{105}+\frac{2J}{15} \end{bmatrix} \tag{11}$$



Rys. 2. a) Przyjęty typ elementu skończonego, b) siły węzłowe, c) przemieszczenia węzłowe, d) model MES komina

Fig. 2. a) Applied type of FEM element, b) knotal forces, c) knotal displacement, d) FEM model of chimney

Globalna macierz sprężystości **K** układu z rysunku 2d jest macierzą o wymiarze 6×6 i wiąże przemieszczenia trzech węzłów opisane przez przemieszczenia liniowe v_i (i=1,2,3) i kątowe φ_i (i=1,2,3) z siłami poprzecznymi V_i (i=1,2,3) i momentami zginającymi M_i (i=1,2,3). Analogicznie globalna macierz bezwładności **M** ma także wymiar 6×6.

Macierzowe równanie drgań wymuszonych przez liniowy ruch podpory w kierunku „y" (rys. 2d) ma postać [1]

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = -\mathbf{M}\mathbf{r}a \tag{12}$$

gdzie:

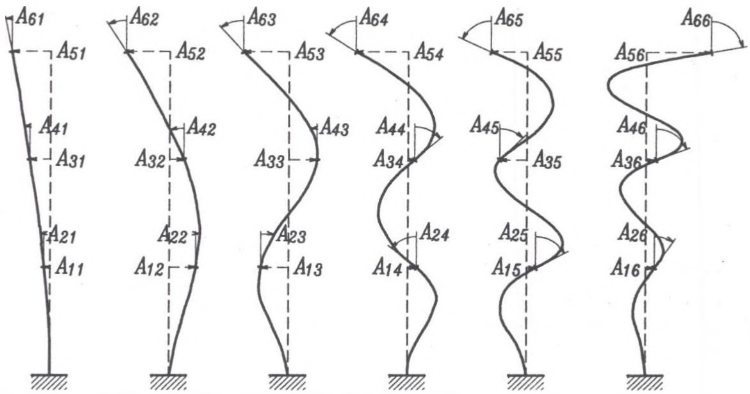
$\mathbf{y}^T = [v_2, \varphi_2, v_3, \varphi_3, v_4, \varphi_4]$, $\mathbf{r}^T = [1, 0, 1, 0, 1, 0]$, $a = A_{\max}\cos(pt)$, $\mathbf{C} = \varepsilon_w\mathbf{K} + \varepsilon_z\mathbf{M}$.

Macierz **C** nosi nazwę proporcjonalnej macierzy tłumienia [3], przy czym ε_w jest współczynnikiem tłumienia wewnętrznego, a ε_z współczynnikiem tłumienia zewnętrznego.

Rozwiązanie zagadnienia własnego drgań, to jest rozwiązanie równania (12) przy założeniu **C=0** oraz a=0 oraz wartościach liczbowych z punktu 1, prowadzi do wyznaczenia sześciu wektorów własnych

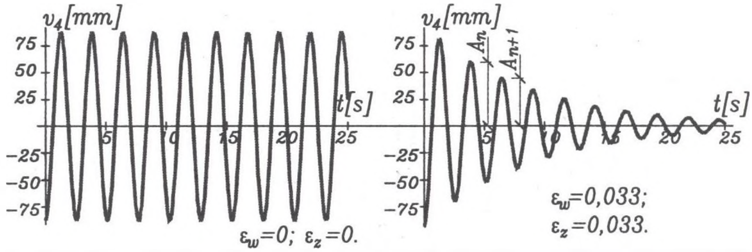
$$A_1=\begin{bmatrix}-0.143\\-0.026\\-0.474\\-0.038\\-0.867\\-0.040\end{bmatrix},A_2=\begin{bmatrix}0.471\\0.047\\0.345\\-0.078\\-0.796\\-0.129\end{bmatrix},A_3=\begin{bmatrix}-0.532\\0.034\\0.451\\0.037\\-0.689\\-0.191\end{bmatrix},A_4=\begin{bmatrix}0.264\\-0.254\\0.026\\0.279\\-0.802\\-0.380\end{bmatrix},A_5=\begin{bmatrix}0.155\\0.372\\-0.388\\0.160\\-0.635\\-0.508\end{bmatrix},A_6=\begin{bmatrix}0.123\\0.146\\0.116\\0.333\\-0.606\\-0.687\end{bmatrix}$$

i odpowiadających im kołowych częstości drgań własnych: ω_1=2.439 rad/s, ω_2=15.183 rad/s, ω_3=42.039 rad/s, ω_4=88.553 rad/s, ω_5=165.075 rad/s, ω_6=381.76 rad/s. Graficzną interpretację wektorów własnych przedstawiono na rysunku 3.



Rys. 3. Interpretacja geometryczna wektorów własnych
Fig. 3. Geometric interpretation of eigenvector

Celem prowadzenia dalszej analizy wyznaczono metodą prób wartości współczynników ε_w i ε_z w taki sposób, aby wartość logarytmicznego tłumienia drgań rozumianego jako $\delta = \ln(A_n / A_{n+1})$ była równa 0.3, co odpowiada tłumieniu konstrukcji murowych [4]. W tym celu wymuszano drgania układu warunkami początkowymi: $v_2(t=0)=$ -0.01434, $\dot{v}_2(t=0)=0$, $\varphi_2(t=0)=$ -0.00261, $\dot{\varphi}_2(t=0)=0$, $v_3(t=0)=-0.04739$, $\dot{v}_3(t=0)=0$, $\varphi_3(t=0)=-0.00378$, $\dot{\varphi}_3(t=0)=0$, $v_4(t=0)=-0.08667$, $\dot{v}_4(t=0)=0$, $\varphi_4(t=0)=0.00398$, $\dot{\varphi}_4(t=0)=0$, gdzie wielkości v_i (i=2,... 4) wyrażone są w metrach, a φ_i (i=2,... 4) w radianach. Warunki te są proporcjonalne do współrzędnych wektora własnego A₁, a zatem zapewniły, że układ wykonywał drgania odpowiadające pierwszej postaci drgań własnych. Poziomy ruch drgający wierzchołka komina opisany współrzędną v_4 przy braku tłumienia ($\varepsilon_w = \varepsilon_z$=0) i przy tłumieniu odpowiadającemu logarytmicznemu dekrementowi tłumienia $\delta = 0.3$ ($\varepsilon_w = \varepsilon_z$=0.033) przedstawiono na rysunku 4.



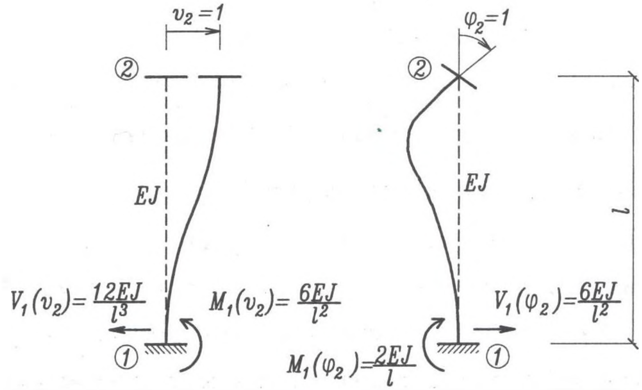
Rys. 4. Drgania swobodne wierzchołka komina: a) drgania przy braku tłumienia b) drgania z uwzględnieniem tłumienia

Fig. 4. Free vibration of chimneys top: a) no damped vibration b) damped vibration

W dalszej kolejności badano zmianę wartości momentu zginającego w utwierdzeniu (M_1) w zależności od czasu oddziaływania na konstrukcję kinematycznego wymuszenia harmonicznego opisanego zależnością (1) przy A_{max}=500 mm/s^2. Badania przeprowadzono dla sześciu różnych kołowych częstości drgań p równych 1.5, 2.0, 2.2, 2.439 2.5, 3 oraz 3.5 rad/s. Należy zwrócić uwagę, że p=2.439 rad/s jest równe pierwszej kołowej częstości drgań ω_1. Wartość M_1 wyznaczono na podstawie powszechnie znanych zależności wynikających z metody przemieszczeń (rys. 5)

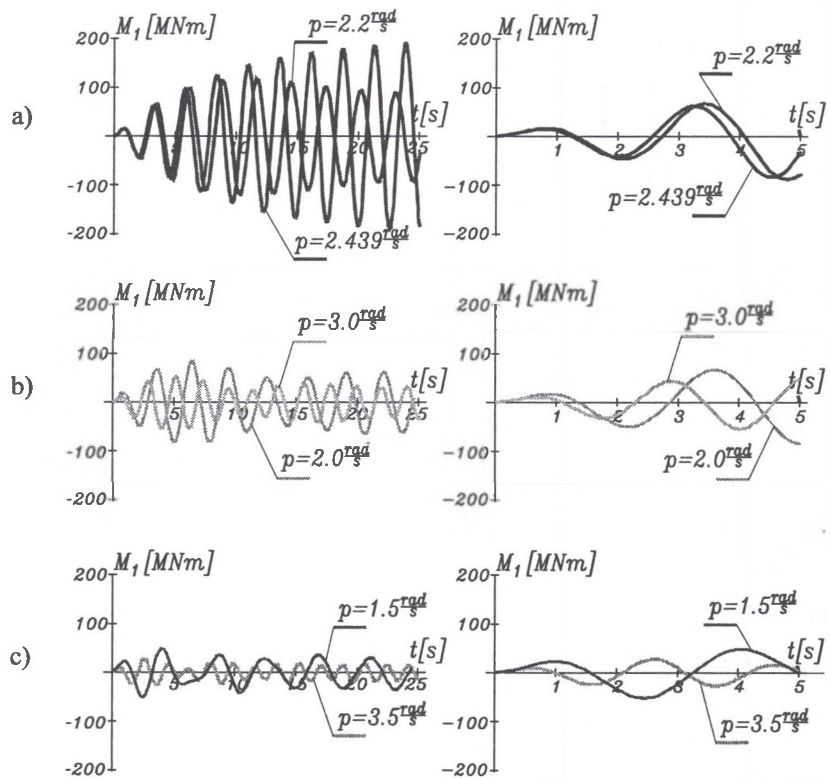
$$M_1(t) = EJ\left(-v_2(t)\frac{6}{l^2} + \varphi_2(t)\frac{2}{l}\right). \tag{13}$$

Należy zwrócić uwagę, że wartość momentu zginającego jest funkcją przemieszczenia v_2 i kąta obrotu φ_2 węzła numer 2. Współrzędne te zależą od czasu, zatem i wartość momentu zginającego w utwierdzeniu jest funkcją czasu. Wyznaczone przebiegi czasowe $M_1(t)$ zamieszczono na rysunku 6.



Rys. 5. Reakcja w utwierdzeniu wywołana przesunięciem i obrotem węzła nr 2

Fig. 5. Reaction in fastening as result of dislocation and rotation of knot number 2



Rys. 6. Moment zginający w utwierdzeniu jako reakcja na wymuszenie kinematyczne 500·sin(pt) [mm/s^2]: a) p=ω_1=2.439, p=2.2rad/s, b) p=3.0, p=2.0rad/s, c) 1.5, p=3.5rad/s

Fig. 6. Bending moment in fastening as a reaction on kinematical input 500·sin(pt) [mm/s^2]: a) p=ω_1=2.439, p=2.2rad/s, b) p=3.0, p=2.0rad/s, c) 1.5, p=3.5rad/s

W celu prowadzenia dalszej analizy uzyskanych wyników wprowadza się funkcję

$$\tilde{M}_1(t_0) = \mathrm{supr}\left\{|M_1(t)| \text{ dla } t \le t_0\right\}. \tag{14}$$

Wartość funkcji $\tilde{M}_1$ w dowolnej chwili t_0 jest kresem górnym zbioru bezwzględnych wartości momentu utwierdzenia M_1 od rozpoczęcia obciążania układu do chwili t_0. Zależność (14) jest oczywiście odwzorowaniem niemalejącym. Przebiegi $\tilde{M}_1(t)$ zbudowano graficznie dla kolejnych przebadanych kołowych częstości wymuszenia p i przedstawiono na rysunku 7.

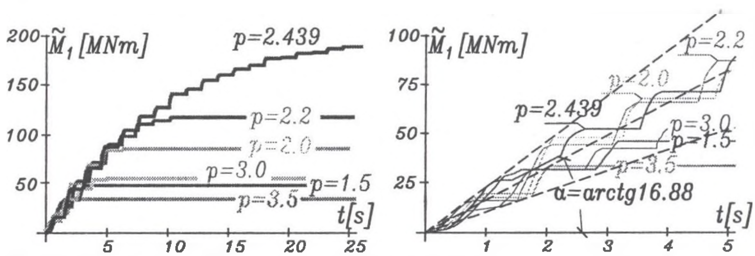
Z rysunku widać, że przebiegi w zakresie czasu trwania obciążenia od 0 do 5 s są zbliżone do siebie. Na tej podstawie można by postawić hipotezę zerową, że na zadanym poziomie istotności przebiegi te mogą być reprezentowane przez prostą nachyloną pod kątem α do osi czasu t oraz przechodzącą przez początek układu współrzędnych (t, $\tilde{M}_1$). Hipotezy tej nie weryfikuje się w niniejszym referacie, niemniej można stwierdzić, że nachylenie tej prostej zawiera się między 10.54 MNm/s a 23.21 MNm/s, natomiast wartością średnią z tych dwóch jest 16.88 MNm/s.

Na podstawie danych źródłowych, które posłużyły do zbudowania przebiegów zamieszczonych na rysunku 7, sporządzono tablicę 1. W tablicy tej zestawiono sześć badanych częstości kołowych wymuszenia oraz maksymalne wartości momentów $\tilde{M}_{1\max}$, jakie to wymuszenie wywołało oraz czas liczony od początku trwania obciążenia do chwili, w której wartość $\tilde{M}_{1\max}$ wystąpiła. W tablicy 1 zestawiono także wartości momentu utwierdzenia $M_1(t=2s)$, to znaczy wartości momentu M_1, jakie wystąpiły po czasie trwania wstrząsu równym 2 sekundy.

Istotniejsze wnioski, jakie można wyciągnąć z danych zamieszczonych w tablicy 1, są następujące:

- największe wartości momentów zginających wywołało harmoniczne obciążenie kinematyczne o częstości kołowej p równej pierwszej wartości własnej ω_1. Wraz z oddalaniem wartości częstości kołowej p od ω_1 wartości $\tilde{M}_{1\max}$ maleją,
- najszybciej maksymalne wartości $\tilde{M}_{1\max}$ wywołują drgania o wyższych częstościach oraz drgania o częstościach znacznie różniących się od ω_1. Przykładowo drgania o p=3.5 rad/s wywołały $\tilde{M}_{1\max}$ po 2.05 s, a drgania o $p=\omega_1$=2.439 rad/s wywołały $\tilde{M}_{1\max}$ po 39.02 s,
- wstrząs trwający 2 s, przy wymuszeniu $p=\omega_1$ wywołuje siły wewnętrzne, których wartość wynosi 17 % wartości w stanie ustalonym, a ten sam wstrząs przy wymuszeniu p=3.5 rad/s wywołuje 94 % wartości w stanie ustalonym.

Należy podkreślić, że powyższe wartości liczbowe dotyczą tylko analizowanego modelu komina i wymuszenia harmonicznego opisanego równaniem (1) przy A_{max}=500 mm/s^2. Jakościowo spostrzeżenia podane powyżej są jednak zgodne dla wszystkich modeli obiektów opisanych równaniami liniowymi przy wymuszeniach harmonicznych.



Rys. 7. Przebieg funkcji $\tilde{M}_1$ dla różnych kołowych częstości wymuszenia p

Fig. 7. Course of function $\tilde{M}_1$ for different values of frequency p

Tablica 1

Wartości momentów zginających w utwierdzeniu komina w zależności od kołowej częstości wymuszenia

Kołowa częstość wymuszenia p	Ekstremalna wartość reakcji $\tilde{M}_{1\max}$	Czas, po którym zostaje osiągnięte $\tilde{M}_{1\max}$	Wartość reakcji po czasie trwania wstrząsu t=2 s $\tilde{M}_1(t=2s)$; (procent wartości $\tilde{M}_{1\max}$)
[rad/s]	[MNm]	[s]	[MNm]; ([%])
1.5	46.63	3.17	32.13; (69.0)
2.0	84.30	6.48	42.67; (60.6)
2.2	118.38	10.30	43.73; (36.9)
2.439	200.00	39.02	35.79; (17.9)
3.0	53.81	5.15	32.28; (60.0)
3.5	34.08	2.05	32.17; (94.4)

3. Wnioski

Określanie wartości sił wewnętrznych w obiektach budowlanych wywołanych przez drgania terenu górniczego bez uwzględnienia czasu trwania wstrząsu oraz częstotliwościowej struktury wstrząsu prowadzi do znacznych błędów. Na podstawie badań numerycznych modelu ceglanego komina wysokości 30 m stwierdzono, że wstrząs trwający 2 s, przy wymuszeniu o kołowej częstości równej drganiom pierwszej częstości drgań własnych (ω_1=2.439 rad/s) wywołuje siły wewnętrzne, których wartość wynosi 17 % wartości w stanie ustalonym. Wstrząs o tej samej amplitudzie przyśpieszenia i czasie trwania, lecz kołowej częstości *p*=3.5 rad/s wywołuje 94 % wartości w stanie ustalonym.

LITERATURA

1. Chmielewski T., Zembaty Z.: Podstawy dynamiki budowli. Arkady, Warszawa 1998.
2. Gromysz K.: Obliczeniowe określanie wytężenia wstrząsem konstrukcji budowlanych z wykorzystaniem widma wstrząsu terenu górniczego. Prace naukowe GIG, Katowice 2006.
3. Rakowski G., Kacprzyk Z.: Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1993.
4. PN-77/B-02011 Obciążenia w obliczeniach statycznych. Obciążenie wiatrem.

Recenzent: Dr hab. inż. Ryszard Hejmanowski, prof. AGH