ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2007
Seria: GÓRNICTWO z. 278 Nr kol. 1752

Ryszard HEJMANOWSKI
Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków
Andrzej KWINTA
Akademia Rolnicza, Kraków

ODKSZTAŁCENIA POZIOME A DŁUGOŚĆ ODCINKA POMIAROWEGO

Streszczenie. Pomiary geodezyjne dostarczają podstawowych informacji o przebiegu procesu deformacji i służą do określania zagrożenia terenu. Poprzez pomiar geodezyjny wyznacza się zazwyczaj tzw. względne zmiany długości. W referacie wykazano, że odkształcenia poziome także można wyznaczać metodami geodezyjnymi. Zbyt długie bazy pomiarowe powodują wzrost rozbieżności pomiędzy odkształceniami i względnymi zmianami długości. Autorzy proponują stosować długości baz, które będą zapewniały oczekiwaną i z góry zakładaną dokładność wyznaczenia odkształceń poziomych.

HORIZONTAL STRAIN AND LENGTH OF MEASUREMENT BASE

Summary. Survey provides the basic information about the deformation phenomenon course on the mining induced areas. Therefore the results of survey have been used to determine a damage of the surface. Through the survey made on mining damaged surface so-called relative changes of the length are usually being estimated. In the paper the possibility of estimation of the horizontal strain with mining surveying methods was proved. The length of measuring bases can provide the divergences between the horizontal strain and the relative length changes. The exactly defined length of measuring bases, which should provide to expected and above assumed accuracy of estimated horizontal strains was proposed by Authors.

1. Wprowadzenie

Pomiary geodezyjne dostarczają informacji o przebiegu procesu deformacji wywołanego prowadzoną eksploatacją górniczą. Na podstawie wyników pomiarów wyznaczane są wskaźniki deformacji. Pomiary wysokościowe pozwalają wyznaczać przemieszczenia

pionowe i ich pochodne, natomiast pomiary prowadzone w płaszczyźnie poziomej pozwalają wyznaczać przemieszczenia i odkształcenia poziome.

Od lat prowadzone są dyskusje, czy metodami geodezyjnymi wyznaczane są odkształcenia czy też względne zmiany długości. Autorzy niniejszej pracy w wyniku przeprowadzonych badań stwierdzili, że geodezyjnie można wyznaczać względne zmiany długości, które można traktować jako odkształcenia [2]. Aby uzyskać odpowiednie wyniki, należy stosować możliwie krótkie bazy pomiarowe. Z drugiej strony, zmniejszanie długości odcinków powoduje wzrost rozproszenia losowego odkształceń [1] oraz zwiększenie wpływu błędów pomiarowych na dokładność wyznaczenia odkształceń [5].

W niniejszej pracy podjęta zostanie próba wypracowania kompromisu pomiędzy dwoma przeciwnie działającymi tendencjami, dotyczącymi wyboru długości boku pomiarowego. Działanie takie ma na celu optymalizację procesu pomiarowego pod kątem jakości uzyskiwanych odkształceń poziomych.

2. Odkształcenia poziome

Prowadzona w pewnym rejonie eksploatacja górnicza powoduje zmiany położenia punktów (przemieszczenia). Punkty ośrodka (górotworu) przemieszczają się w różnych kierunkach i o różne wartości, co powoduje jego zmiany geometryczne i powstawanie odkształceń przestrzeni.

Teoria sprężystości dostarcza podstawy teoretyczne dotyczące odkształceń. W klasycznej postaci teorii sprężystości (teoria liniowa jednorodnego ciała izotropowego) wprowadza się wiele założeń upraszczających rozważania. Jednym z najistotniejszych jest założenie o małych przemieszczeniach i odkształceniach. Zgodnie z nim można przyjąć, że [6]:

- przemieszczenia są małe w porównaniu z wymiarami ciała (górotworu),
- odkształcenia liniowe i postaciowe są bardzo małe w porównaniu do jedności,
- kąty obrotu są małe w porównaniu do jedności, a ich kwadraty są małe w porównaniu do odkształceń liniowych i postaciowych.

Zatem, w odniesieniu do nieskończenie małego elementu (infinityzymalnego) odkształcenie jest jednorodne, a przekształcenie liniowe. Odkształcenie pewnego elementu przestrzeni w ogólności opisywane jest za pomocą równań różniczkowych nieliniowych. Zgodnie z założeniem przedstawionym powyżej równania odkształceń upraszczają się do równań

liniowych. Miary odkształcenia są wielkościami lokalnymi, przypisanymi do punktu zawartego w nieskończenie małym elemencie (infinityzymalnym). Stan odkształcenia w tym punkcie jest określony, jeżeli można wyznaczyć miary odkształcenia w dowolnym kierunku. Miary odkształcenia liniowego i postaciowego tworzą tensor stanu odkształcenia w danym punkcie ośrodka (1):

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y \end{bmatrix} \tag{1}$$

gdzie :

T_ε - tensor stanu odkształcenia,

$\varepsilon_x, \varepsilon_y$ - odkształcenia liniowe w kierunkach osi x i y,

γ_{xy}, γ_{yx} - odkształcenia postaciowe, przy czym obie wielkości są sobie równe $\gamma_{xy}=\gamma_{yx}$.

W konsekwencji odkształcenie poziome dla odcinka pomiędzy dwoma punktami ośrodka, w kierunku α przyjętego układu współrzędnych opisuje się zależnością (2):

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_x \cos^2\alpha + 2\gamma_{xy}\sin\alpha\cos\alpha + \varepsilon_y \sin^2\alpha \tag{2}$$

Ze względu na zastosowany sprzęt geodezyjny oraz przyjętą technologię pomiarową pomiary geodezyjne można podzielić na dwie grupy:

- pomiary zmian długości odcinka pomiędzy punktami pomiarowymi,
- pomiary przemieszczeń punktów pomiarowych w przyjętym układzie współrzędnych.

W przypadku tradycyjnych metod pomiarowych odkształcenia poziome wyznacza się z pomiarów zmian długości odcinka pomiarowego w poszczególnych seriach pomiarowych- wzór (3):

$$\varepsilon_i = \frac{d_i - d_0}{d_0} \tag{3}$$

gdzie:

d_i - długość odcinka w i-tej serii pomiarowej,

d_0 - pierwotna długość odcinka.

W przypadku pomiarów geodezyjnych zbioru punktów ośrodka pozwalających na wyznaczenie współrzędnych do obliczenia odkształceń wykorzystuje się zależności Cauchy'ego. Dla pary punktów można wyznaczyć odkształcenie pojedynczego odcinka, natomiast dla zbioru kilku punktów (gwiazda pomiarowa) można wyznaczać odkształcenia dla dowolnych konfiguracji par punktów lub stosować wzory do rozkładów powierzchniowych.

Przyjmijmy, że wyznaczono geodezyjnie współrzędne dwóch punktów ośrodka. W trakcie trwania ruchów oraz po ich zakończeniu wykonywano okresowe pomiary położenia punktów. Na bazie pomiarów współrzędnych uzyskuje się przemieszczenia punktów końcowych odcinka:

$$\begin{aligned} A_0(x_A, y_A) &\xrightarrow{\text{przemieszczenie}} A_i(x_A + u_A, y_A + v_A) \\ B_0(x_B, y_B) &\xrightarrow{\text{przemieszczenie}} B_i(x_B + u_B, y_B + v_B) \end{aligned} \tag{4}$$

gdzie:

x_A, y_A, x_B - pierwotne współrzędne punktów pomiarowych,

u_A, v_A, u_B - przemieszczenia punktów pomiarowych.

Odkształcenia uzyskamy na podstawie wzorów Cauchy'ego (5)-(7), zastępując odpowiednie różniczki przyrostami:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_B - u_A}{x_B - x_A} \tag{5}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta v}{\Delta y} = \frac{v_B - v_A}{y_B - y_A} \tag{6}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{v_B - v_A}{x_B - x_A} + \frac{u_B - u_A}{y_B - y_A} \tag{7}$$

a następnie poprzez zastosowanie zależności (2). W przypadku zbioru punktów stosuje się analogiczne wzory, a operacje obliczeniowe prowadzi się na powierzchniach. W wyniku obliczeń można wyznaczyć ekstremalne wartości odkształceń.

3. Odkształcenie czy względna zmiana długości

Pytanie o wielkość w rzeczywistości wyznaczaną na podstawie pomiarów geodezyjnych od lat budzi wątpliwości. Zasadniczo pojęcie odkształcenia związane jest z mechaniką ośrodków ciągłych i teorią sprężystości. O ile ośrodek (górotwór) i geodezyjne bazy pomiarowe mogą stanowić zadość wymaganiom z teorii sprężystości, o tyle w takim przypadku można mówić o odkształceniu.

Każde odkształcenie liniowe jest względną zmianą długości, natomiast odwrotnie jest to prawda tylko pod pewnymi warunkami (spełnione założenia teorii sprężystości). Konsekwencje tego stanu rzeczy odnoszą się do wyznaczania ekstremalnych wartości

odkształceń. Z odkształceń liniowych można wyznaczać odkształcenia główne, natomiast ze względnych zmian długości nie jest to odpowiednie.

Przy wyznaczaniu odkształceń liniowych należy dążyć do minimalnych wymiarów odcinków pomiarowych. Oznacza to, że długość odcinka powinna zmierzać do zera, wtedy minimalizuje się błąd wyznaczanego odkształcenia.

W opozycji do teorii sprężystości stoi model zaproponowany przez Batkiewicza [1]. Rozważania swoje autor ten oparł na założeniu, że zmiana długości odcinka jest zależna od sumy zmian wielkości szczelin występujących na danym odcinku:

$$\varepsilon_d = \frac{\sum_{i=1}^{n} s_i}{d} \tag{8}$$

gdzie:

s_i - szerokość i-tej szczeliny,

n - liczba szczelin na odcinku,

d - długość odcinka pomiarowego.

Przyjmując, że szerokość szczelin i ich liczba są zmiennymi losowymi oraz po wielu innych założeniach, można uzyskać następujący wzór na rozproszenie losowe „odkształceń" (9):

$$M_\varepsilon = \frac{K}{\sqrt{d}} \tag{9}$$

gdzie:

K - jest to stały w danych warunkach parametr zależny od sposobu eksploatacji i budowy górotworu.

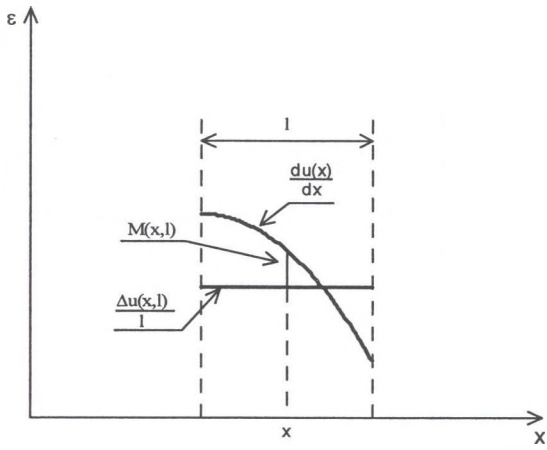
Konsekwencją tego wzoru jest spostrzeżenie, że im krótsza baza pomiarowa, tym większe rozproszenie losowe względnych zmian długości.

A zatem, w wyniku przyjęcia założenia o wpływie szczelin na wartość odkształcenia uzyskuje się odwrotny warunek na długość odcinka pomiarowego, niż ma to miejsce w przypadku teorii sprężystości.

Można zdefiniować miarę rozbieżności pomiędzy odkształceniem a względną zmianą długości [3] w sposób następujący:

$$M(x,l) = \frac{du(x)}{dx} - \frac{u\left(x+\frac{l}{2}\right) - u\left(x-\frac{l}{2}\right)}{l} \tag{10}$$

Graficznie miarę tę $M(x,l)$ przedstawiono na rysunku 1.



Rys. 1. Miara rozbieżności pomiędzy odkształceniem i względnym wydłużeniem
Fig. 1. Divergence measure between the deformation and relative extension

W celu przybliżonego oszacowania wartości miary rozbieżności *M (x,l)* danej zależnością (10), można wykorzystać wzory teorii Budryka - Knothego [4]. Po wielu przekształceniach i uproszczeniach można uzyskać:

$$M(\xi,d)=\frac{2}{3}\varepsilon_{\max}\left\{-2\pi\xi\exp\left(-\pi\xi^2\right)-\frac{\exp\left[-\pi(\xi+d)^2\right]-\exp\left[-\pi(\xi-d)^2\right]}{2d}\right\} \tag{11}$$

gdzie:

$\xi=\frac{x}{r}$ - standaryzowana współrzędna x,

$d=\frac{l}{2r}$ - standaryzowana długość bazy,

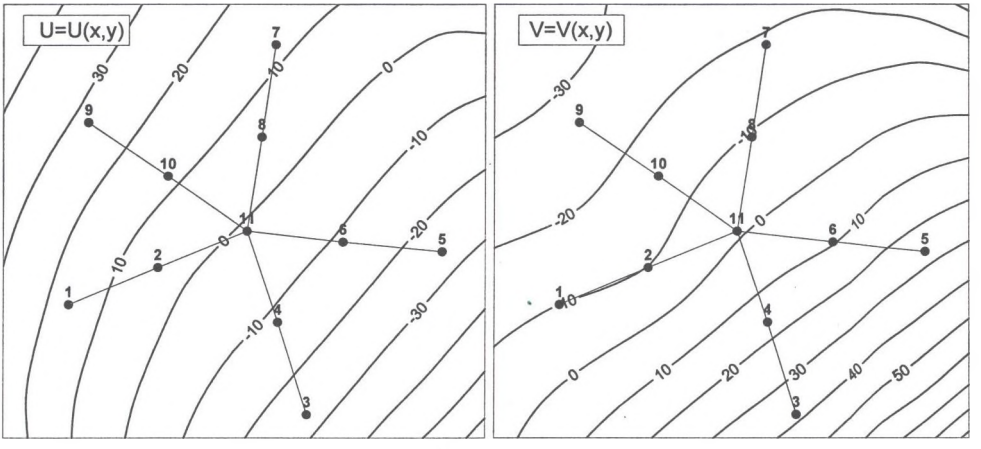
$\varepsilon_{\max}$ – maksymalne odkształcenie poziome.

Na podstawie zależności (11) można stwierdzić, że wartość rozbieżności $M(x,l)$ zależna jest od długości odcinka pomiarowego, odległości od krawędzi eksploatacji, warunków górniczo-geologicznych prowadzenia eksploatacji, a w szczególności: głębokości i grubości złoża, systemu eksploatacji oraz własności górotworu.

4. Przykład

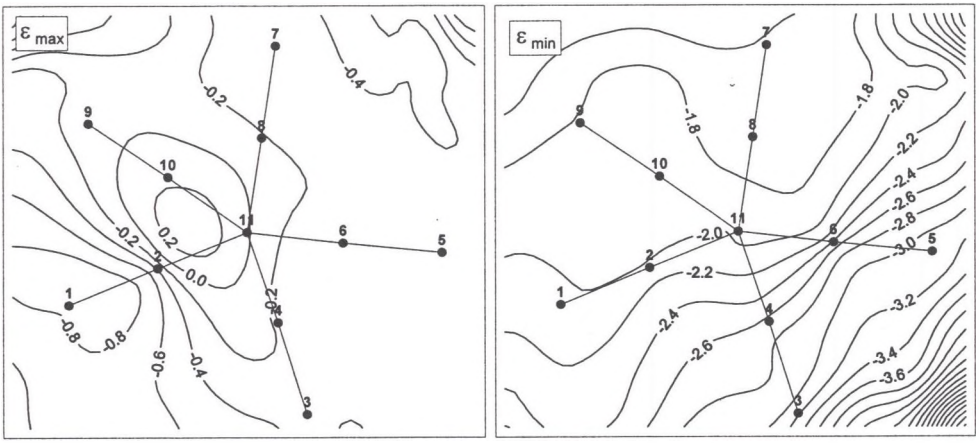
Ponad planowaną eksploatacją ścianową założono zbiór 11 punktów pomiarowych w postaci gwiazdy pięcioramiennej (po 2 punkty na każdym ramieniu). Wykonano jedną serię pomiarową przed rozpoczęciem eksploatacji i 6 w trakcie trwania wydobycia. Gwiazda pomiarowa umieszczona została w rejonie krawędzi eksploatacji, a odległość między punktami wynosiła po około 10 metrów. Pomiary geodezyjne prowadzono z zastosowaniem precyzyjnego tachimetru elektronicznego. Założono 3 stanowiska, z których wykonywano pomiary kątowo-liniowe do poszczególnych punktów gwiazdy pomiarowej. W wyniku ścisłego wyrównania uzyskano współrzędne punktów gwiazdy w poszczególnych seriach pomiarowych [2].

Opierając się na współrzędnych punktów, wygenerowano powierzchnie rozkładów przemieszczeń poziomych w rejonie gwiazdy pomiarowej. Na rysunku 2 przedstawiono rozkłady przemieszczeń poziomych (w milimetrach).



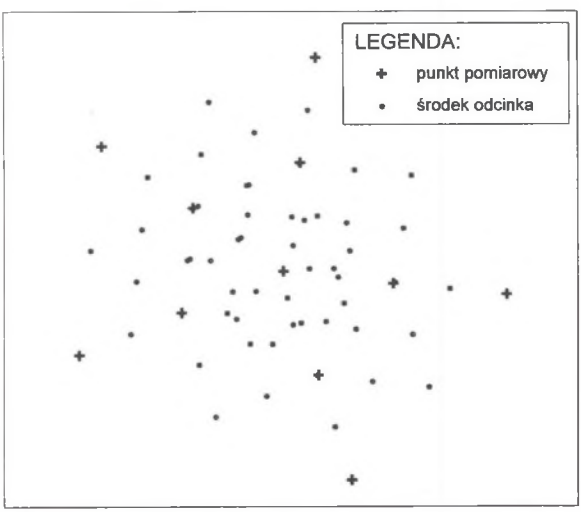
Rys. 2. Rozkłady przemieszczeń poziomych [mm]
Fig. 2. Horizontal displacements in [mm]

W kolejnym kroku obliczeń, zgodnie z zależnościami Cauchy'ego (5) - (7), wyliczono pochodne z rozkładów przemieszczeń. W wyniku uzyskano powierzchnie składowych tensora odkształceń w rejonie gwiazdy pomiarowej. To znaczy dla dowolnego punktu w rejonie pomiarów można było wyznaczyć odkształcenia w dowolnym kierunku oraz wartości odkształceń głównych. Na rysunku 3 pokazano uzyskane rozkłady odkształceń głównych.



Rys. 3. Rozkłady odkształceń głównych
Fig. 3. Main deformations

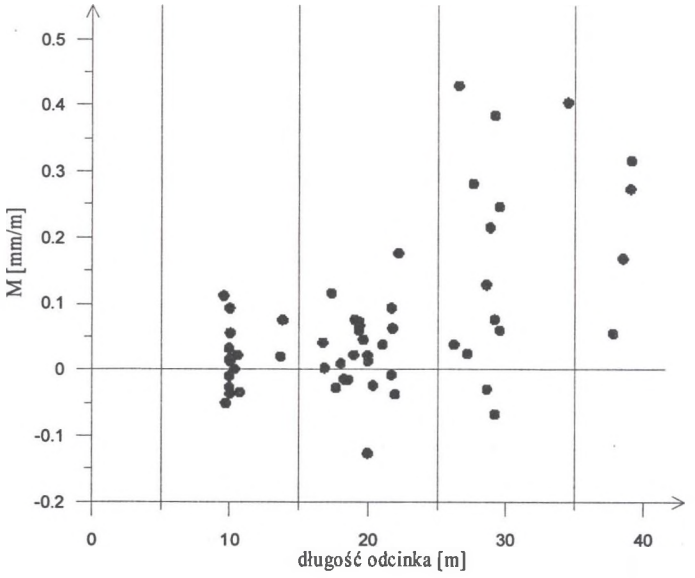
Na podstawie współrzędnych punktów gwiazdy pomiarowej wyznaczono 55 odcinków, stanowiących wszystkie kombinacje mierzonych punktów. Dla każdego z odcinków obliczono ze współrzędnych jego długości w poszczególnych seriach pomiarowych, środek odcinka oraz kierunek w przyjętym układzie współrzędnych. Rozmieszczenie środków odcinków zamieszczono na rysunku 4.



Rys. 4. Rozmieszczenie punktów obliczeniowych
Fig. 4. Deployment of calculating points on the surface

Na podstawie obliczonych długości, zgodnie z zależnością (3), wyznaczono względne zmiany długości. Dla każdego punktu, będącego środkiem odcinka, wyznaczono składowe tensora odkształceń, a następnie, zgodnie z zależnością (2), obliczono odkształcenia wzdłuż odcinka. Dysponując odkształceniami i względnymi zmianami długości dla poszczególnych

odcinków, zgodnie z zależnością (10), wyznaczono miarę rozbieżności *M*. Na rysunku 5 przedstawiono wyniki obliczeń. W tabeli 1 zestawiono wyniki obliczeń rozbieżności dla odcinków pogrupowanych w 4 zbiory.



Rys. 5. Rozbieżność pomiędzy odkształceniem i względną zmianą długości
Fig. 5. Discrepancy between deformation and relative change of the length

Tabela 1

Miary rozbieżności dla analizowanego przykładu

Dł. odcinka [m]		Liczba odcinków	M [mm/m]		
od	do		Śr.	Max	Min
5	15	15	0.02	0.11	-0.05
15	25	23	0.03	0.18	-0.13
25	35	13	0.17	0.43	-0.07
35	45	4	0.20	0.32	0.05

Należy zauważyć, że wraz ze wzrostem długości odcinka wzrastają rozbieżności pomiędzy odkształceniem a względną zmianą długości.

5. Podsumowanie

Pomiary geodezyjne wykonywane na terenach objętych niekorzystnym oddziaływaniem górnictwa pozwalają na wyznaczanie odkształceń poziomych. Nie wszystkie względne

zmiany długości wyznaczane na drodze pomiarów geodezyjnych można jednak traktować jak odkształcenia.

Wzrost długości odcinka pomiarowego, zgodnie z rozważaniami Batkiewicza, powoduje zmniejszenie rozproszenia losowego „odkształceń", jednakże przeprowadzone rozważania teoretyczne i obliczenia przykładów praktycznych wskazują na konieczność maksymalnego zmniejszania długości odcinka. Z kolei, zmniejszenie długości odcinka powoduje wzrost wpływu błędów pomiarowych. Dlatego przy planowaniu pomiarów należy wprowadzić kompromis pomiędzy wpływem błędów pomiarowych i rozbieżności od odkształceń teoretycznych.

LITERATURA

1. Batkiewicz W.: Odchylenia standardowe poeksploatacyjnych deformacji górotworu. Prace Komisji Górniczo-Geodezyjnej PAN Oddział w Krakowie, Geodezja 10, Kraków 1971.
2. Hejmanowski R i Zespół.: Optymalizacja wyznaczania poziomych odkształceń powierzchni z uwagi na ochronę obiektów na terenach górniczych – Projekt badawczy MNiI, nr 5T12E 04124, Kraków 2002 – 2004.
3. Hejmanowski R., Kwinta A.: Dobór formy osnowy geodezyjnej do wyznaczania odkształceń poziomych na terenach górniczych. Materiały konferencji „IX Warsztaty Górnicze", Kazimierz Dolny n. Wisłą 2005.
4. Knothe S.: Prognozowanie wpływów eksploatacji górniczej. Wydawnictwo Śląsk, Katowice 1984.
5. Kwinta A.: Dokładność wyznaczania odkształceń z pomiarów kątowo-liniowych. Prace Naukowe GIG, Wydanie specjalne Górnictwo i Środowisko, Katowice 2006.
6. Walczak J.: Wytrzymałość materiałów oraz podstawy teorii sprężystości i plastyczności. PWN, tom II, Warszawa 1973.

Recenzent: Dr hab. inż. Piotr Strzałkowski, prof. w Pol. Śl.