

Tomasz NIEMIEC
MPL Rektyfikacja, Katowice

MODEL HERSCHELA I JEGO ZASTOSOWANIE DO OPISYWANIA DEFORMACJI POWODOWANYCH EKSPLOATACJĄ GÓRNICZĄ

Streszczenie. W artykule przedstawiono model Herschela, opisujący rozkład spadającej z pewnej wysokości kulki na płaszczyznę poziomą. Ten słynny astronom udowodnił, że rozkładem tym jest rozkład normalny. Rozwijając dalej ten model, określono wskaźniki deformacji, które są adekwatne do wpływu eksploatacji górniczej.

HERSCHEL'S MODEL AND APPLICATION OF THIS MODEL FOR DESCRIPTION OF MINING AREA DEFORMATIONS

Summary. The article presents Herschel's model that describes distribution of falling down ball. Herschel, the famous astronomer, has proved that the process of falling down ball is described by Gaussian distribution. Herschel's model is developed in the article. Parameters of mining area deformations are determined. Determined parameters are adequate to influence of mining exploration on surface.

1. Wprowadzenie

Zjawiska przyrodnicze charakteryzują się zazwyczaj nieregularnym przebiegiem. Pomimo to próbuje się je opisywać za pomocą wzorów i modeli matematycznych. Modele takie, mimo ich niepełnej adekwatności do opisywanego zjawiska, pozwalają na badanie procesów w ekstremalnych, granicznych warunkach, a zwłaszcza ich kinetyki.

Interesującym procesem jest deformacja górotworu pod wpływem podziemnej eksploatacji, a w szczególności deformacja powierzchni terenu.

2. Podstawy teoretyczne modelu Herschela

Model Herschela znany z literatury naukowej [1] dotyczy gęstości rozkładu prawdopodobieństwa, z jakim spadająca z pewnej wysokości z kulka materialna przecnie poziomą płaszczyznę, na której położony jest układ współrzędnych xy , w określonym punkcie (x,y) tego układu. Przyczyną tego zjawiska są losowe zmiany oporu ośrodka, w jakim kulka spada, a także niepowtarzalne warunki początkowe ruchu (w próżni, w układzie inercjalnym, kulka puszczone swobodnie spada zawsze w to samo miejsce, znajdujące się pionowo pod punktem zrzutu).

Udowodniono, że rozkładem tym jest dwuwymiarowy rozkład normalny (Gausa) (rys.1):

$$f(x, y) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right] \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y - m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right] \quad (1)$$

gdzie:

x, y – współrzędne punktu „lądowania”,

m_1, m_2 – wartości średnie współrzędnych punktu „lądowania” równe poziomym współrzędnym punktu „zrzutu”,

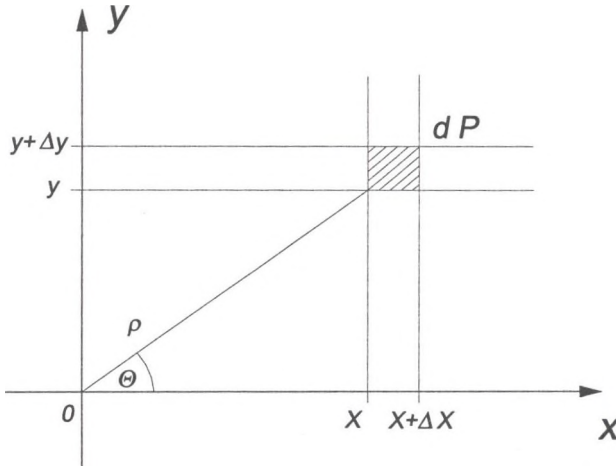
σ_1, σ_2 – są parametrami rozkładu normalnego określającymi rozproszenie losowe zjawiska (gdy opór ośrodka jest jednakowy we wszystkich kierunkach, parametry te są jednakowe).

Oznaczając:

$$F(x, m, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (2)$$

wówczas zależność (1) zapisać można w formie:

$$f(x, y) = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2} F(x, m_1, \sigma_1) F(y, m_2, \sigma_2) \quad (3)$$



Rys. 1. Prawdopodobieństwo, że spadający z wysokości z punkt materialny A znajdzie się w elemencie dP , jest zgodne z gęstością rozkładu normalnego

Fig. 1. Probability, that falling down from high z material point A will appear in element dP is accordance with density of normal distribution

Można posłużyć się modelem Herschela jako analogonem procesu wpływu eksploatacji na górotwór, rozumiejąc, że:

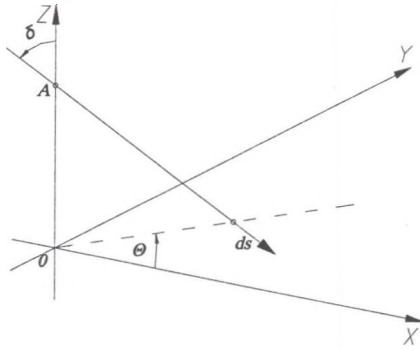
- pozioma płaszczyzna $z=0$ układu reprezentuje położenie eksploatacji,
- kulki reprezentują fragmenty pustki poeksploatacyjnej rozprzestrzeniającej się w górotworze.

Każda elementarna pustka zamienia się na nieskończoną liczbę „kulek”, z których każda przemieszcza się zgodnie z modelem Herschela, w którym punktem „zrzutu” jest położenie elementarnej pustki $(x, y, 0)$, a punktem „lądowania” – rozpatrywany punkt $A=(x_A, y_A, z_A)$ górotworu.

Absorbacja kulki w punkcie A powoduje jego przemieszczenie o wartość ds w kierunku, z którego kulka przybyła (założenie) (rys. 2):

$$ds = g f(x, y) dx dy \quad (4)$$

a $f(x, y)$ jest gęstością rozkładu normalnego.



Rys. 2. Przemieszczenie ds punktu A pod wpływem absorpcji fragmentu elementarnej pustki (kulki Herschela)

Fig. 2. Displacement ds of point A under effect of absorption of elementary void

Składowe tego wektora będą następujące (oznaczone na rys. 3. przez du , dv , dw):

– wzdłuż osi x :

$$du = g f(x, y) \sin \delta \cos \Theta dx dy \quad (5)$$

– wzdłuż osi y :

$$dv = g f(x, y) \sin \delta \sin \Theta dx dy \quad (6)$$

– wzdłuż osi z :

$$-dw = g f(x, y) \cos \delta dx dy \quad (7)$$

gdzie:

δ jest kątem zawartym pomiędzy prostą łączącą elementarną eksploatację (początek wektora ds) z punktem A (w szczególności na powierzchni terenu) a osią z (odległość zenitalna),

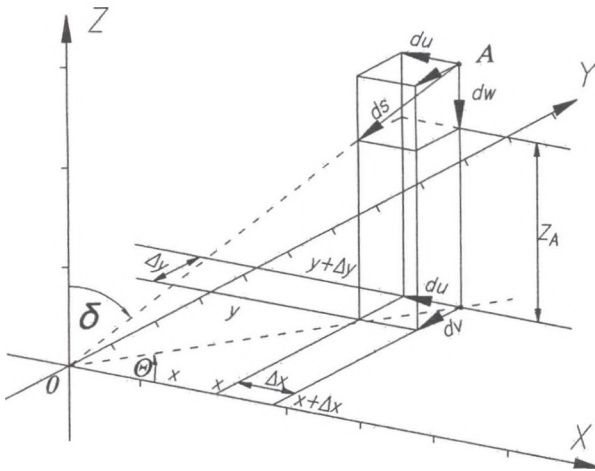
Θ określa kątowe położenie punktu A względem osi x (azymut).

Wartości tych kątów są następujące:

$$\delta = \arctan \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{z^2}} \quad (8)$$

oraz:

$$\Theta = \arctan \frac{y}{x} \quad (9)$$



Rys. 3. Drogę ds punktu A rozłożyć można na składowe du, dv, dw w układzie współrzędnych xyz

Fig. 3. It is possible to resolve elementary path ds of point A in xyz coordinate

3. Parametryzowanie modelu Herschela, wskaźniki deformacji

Zakłada się, że kierunek drogi ds w przestrzeni $E(x,y,z)$ określają poniższe zależności:

$$\delta = \arctan \sqrt{\frac{X^2(x, x_A, \sigma_x) + Y^2(y, y_A, \sigma_y)}{Z^2(z, z_A, \sigma_z)}} \quad (10)$$

$$\Theta = \arctg \frac{Y(y, y_A, \sigma_y)}{X(x, x_A, \sigma_x)} \quad (11)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} X(x, x_A, \sigma_x) &= \frac{x - x_A}{\sigma_x} = X \\ Y(y, y_A, \sigma_y) &= \frac{y - y_A}{\sigma_y} = Y \\ Z(z, z_A, \sigma_z) &= \frac{z - z_A}{\sigma_z} = Z \end{aligned} \quad (12)$$

z_A jest rzędną pionową punktu $A(x,y,z)$,

z jest rzędną pionową płaszczyzny xy ,

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ parametryzują odpowiednio osie x, y, z .

Gdy podzbiory pustek poeksploatacyjnych (powodujących ruch punktów A_i na przykład na powierzchni) leżą na odcinkach równoległych, o długościach $y_2 - y_1$, od x_p począwszy do danego x (aż do końcowego x_k), (rys. 4) - wówczas czas t upływający od chwili rozpoczęcia ruchu wzdłuż osi x pierwszego podzbioru pustek poeksploatacyjnych określić można następująco:

$$t = \frac{x_p - x}{v_e} \quad (13)$$

gdzie:

x_p - współrzędna x pierwszego podzbioru pustek poeksploatacyjnych,

x - współrzędna bieżąca podzbioru,

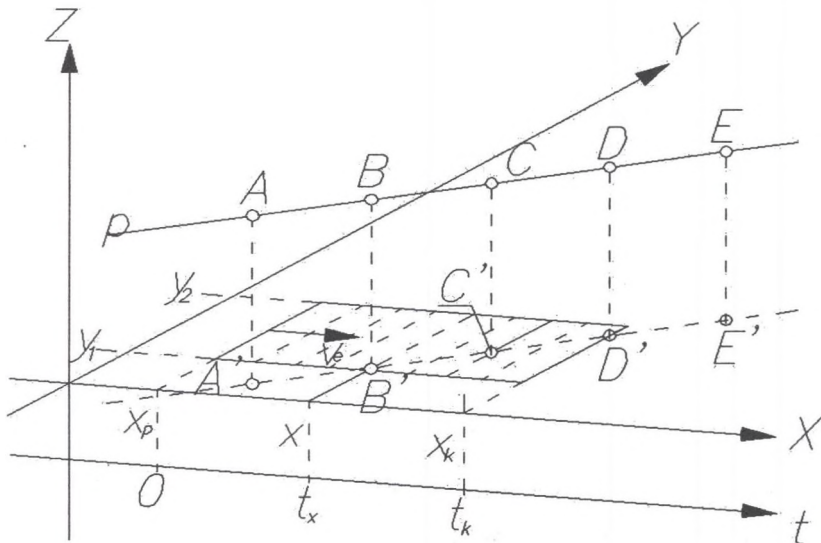
v_e - prędkość postępu podzbioru pustek poeksploatacyjnych wzdłuż osi x .

Pustki pochodzące z elementu eksploatacji $dx dy$ dochodzą do punktu A górotworu z pewnym opóźnieniem t_o , wynikającym z rzeczywistej wzajemnej odległości i ograniczonej prędkości ich przemieszczania się w górotworze:

$$t_o = \frac{\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2}}{v_g} \quad (14)$$

gdzie:

v_g - prędkość rozchodzenia się pustek w górotworze.



Rys. 4. Deformacja prostej $p(A, B, C, \dots)$ pod wpływem zadanej eksploatacji postępującej od x_p do x_k z prędkością v_e

Fig. 4. Deformation of line $p(A, B, C, \dots)$ as an effect of coal exploitation in direction from x_p to x_k with speed v_e

Niech zmiana intensywności wpływu podzbioru pustek poeksploatacyjnych na punkt A jest zgodna z funkcją wzrostu typu:

$$\dot{M}(t) = c \exp(-ct) \quad (15)$$

Dla określonego przedziału czasu $(0, t)$ sumaryczny wpływ jest całką zależności (15), a jej rozwiązanie ma postać:

$$M(t) = \begin{cases} 1 - \exp\left[-c\left(t - \frac{x - x_p}{v_e} - t_o\right)\right] & \text{dla } t \geq \frac{x - x_p}{v_e} + t_o \\ 0 & \text{dla } t < \frac{x - x_p}{v_e} + t_o \end{cases} \quad (16)$$

W celu uproszczenia zapisu dalszych wzorów oznaczono:

$$F(x, x_A, \sigma_x) = F_x \quad (17)$$

$$F(y, y_A, \sigma_y) = F_y$$

$$L = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$M(t) = M$$

$$\frac{d}{dT} M(t) = \dot{M}$$

Uwzględniając powyższe, zależności, określające przyrost współrzędnych punktu A dla zadanej eksploatacji, przyjmą postać:

- wartość przesunięcia poziomego punktu A wzdłuż osi x :

$$u = \iint_{x_p, y_1}^{x, y_2} \frac{g}{\sigma_x \sigma_y} F_x F_y \frac{X}{L} M dx dy \quad (18)$$

- wartość przesunięcia poziomego punktu A wzdłuż osi y :

$$v = \iint_{x_p, y_1}^{x, y_2} \frac{g}{\sigma_x \sigma_y} F_x F_y \frac{Y}{L} M dx dy \quad (19)$$

- wartość obniżenia punktu A :

$$w = - \iint_{x_p, y_1}^{x, y_2} \frac{g}{\sigma_x \sigma_y} F_x F_y \frac{Z}{L} M dx dy \quad (20)$$

Inne wskaźniki - używane często w praktyce górniczej - określić można, różniczkując odpowiednio funkcje podcałkowe występujące w zależnościach (17), (18), (19):

- wartość nachylenia wzdłuż osi x w punkcie A :

$$T_x = - \int_{x_p}^{x_{j_2}} \int_{y_1}^{y_2} \frac{g}{\sigma_x^2 \sigma_y} F_x F_y \frac{XZ}{L} \left(1 + \frac{1}{L^2} \right) M dx dy \quad (21)$$

- wartość nachylenia wzdłuż osi y w punkcie A :

$$T_y = - \int_{x_p}^{x_{j_2}} \int_{y_1}^{y_2} \frac{g}{\sigma_x \sigma_y^2} F_x F_y \frac{YZ}{L} \left(1 + \frac{1}{L^2} \right) M dx dy \quad (22)$$

- wartość odkształcenia poziomego (wydłużenia poziomego) wzdłuż osi x w punkcie A :

$$\varepsilon_x = \int_{x_p}^{x_{j_2}} \int_{y_1}^{y_2} \frac{g}{\sigma_x^2 \sigma_y} F_x F_y \frac{1}{L} \left[X^2 - \frac{Y^2 + Z^2}{L^2} \right] M dx dy \quad (23)$$

- wartość odkształcenia poziomego (wydłużenia poziomego) wzdłuż osi y w punkcie A :

$$\varepsilon_y = \int_{x_p}^{x_{j_2}} \int_{y_1}^{y_2} \frac{g}{\sigma_x \sigma_y^2} F_x F_y \frac{1}{L} \left[Y^2 - \frac{X^2 + Z^2}{L^2} \right] M dx dy \quad (24)$$

- wartość odkształcenia pionowego (wydłużenia pionowego) wzdłuż osi z w punkcie A :

$$\varepsilon_z = - \int_{x_p}^{x_{j_2}} \int_{y_1}^{y_2} \frac{g}{\sigma_x \sigma_y \sigma_z} F_x F_y \frac{X^2 + Y^2}{L^3} M dx dy \quad (25)$$

- wartość krzywizny pionowej wzdłuż osi x w punkcie A :

$$K_x = \int_{x_p}^{x_{j_2}} \int_{y_1}^{y_2} \frac{g}{\sigma_x^3 \sigma_y} F_x F_y \frac{Z}{L} \left(1 + \frac{1}{L^2} - X^2 - \frac{2X^2}{L^2} - \frac{3X^2}{L^2} \right) M dx dy \quad (26)$$

- prędkość obniżania punktu A :

$$\dot{w} = - \int_{x_p}^{x_{j_2}} \int_{y_1}^{y_2} \frac{g}{\sigma_x \sigma_y} F_x F_y \frac{Z}{L} \dot{M} dx dy \quad (27)$$

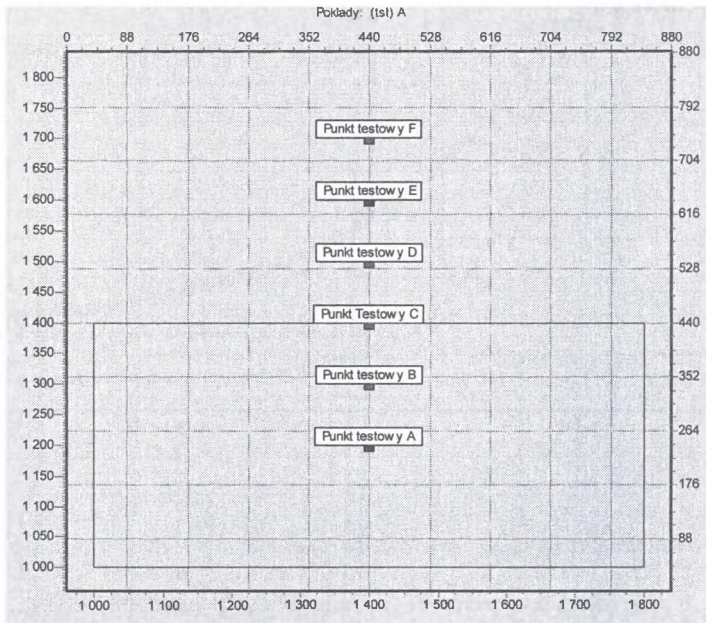
- prędkość narastania nachylenia w punkcie A wzdłuż osi x :

$$\dot{T}_x = - \int_{x_p}^{x_{j_2}} \int_{y_1}^{y_2} \frac{g}{\sigma_x^2 \sigma_y} F_x F_y \frac{XZ}{L} \left(1 + \frac{1}{L^2} \right) \dot{M} dx dy \quad (28)$$

- prędkość narastania odkształcenia poziomego wzdłuż osi x w punkcie A :

$$\dot{\varepsilon}_x = \int_{x_p}^{x_{j_2}} \int_{y_1}^{y_2} \frac{g}{\sigma_x^2 \sigma_y} F_x F_y \frac{1}{L} \left(X^2 - \frac{Y^2 + Z^2}{L^2} \right) \dot{M} dx dy \quad (29)$$

4. Przykłady praktyczne



Rys. 5. Modelowanie wpływu postępującej eksploatacji o kształcie prostokąta (z lewej do prawej; od 2000-01-01 do 2000-10-01) na wybrane punkty na powierzchni

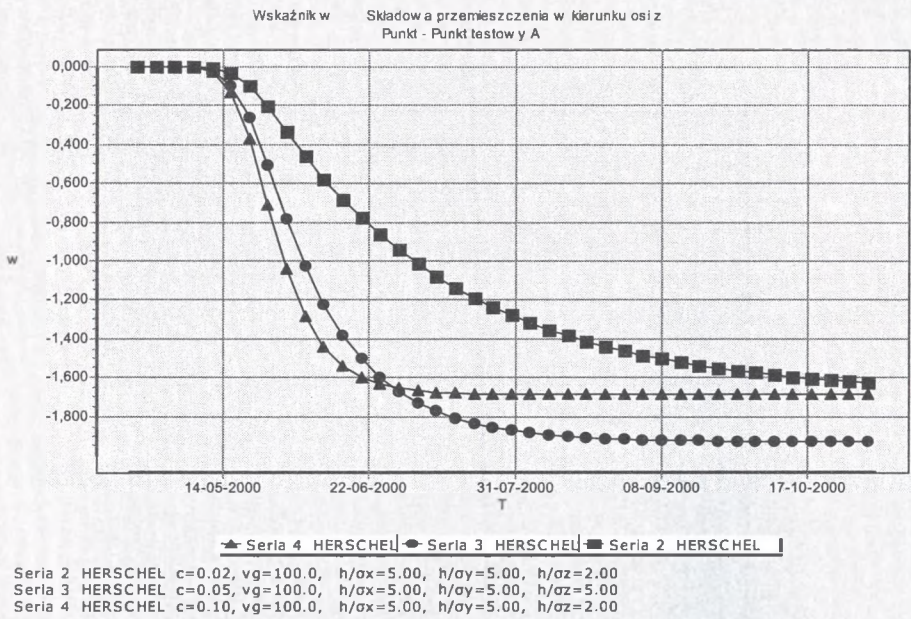
Fig. 5. Modeling of coal exploration on selected points. Exploration is in rectangular shape (exploration from left to right since 2000-01-01 to 2000-10-01)

5. Wnioski

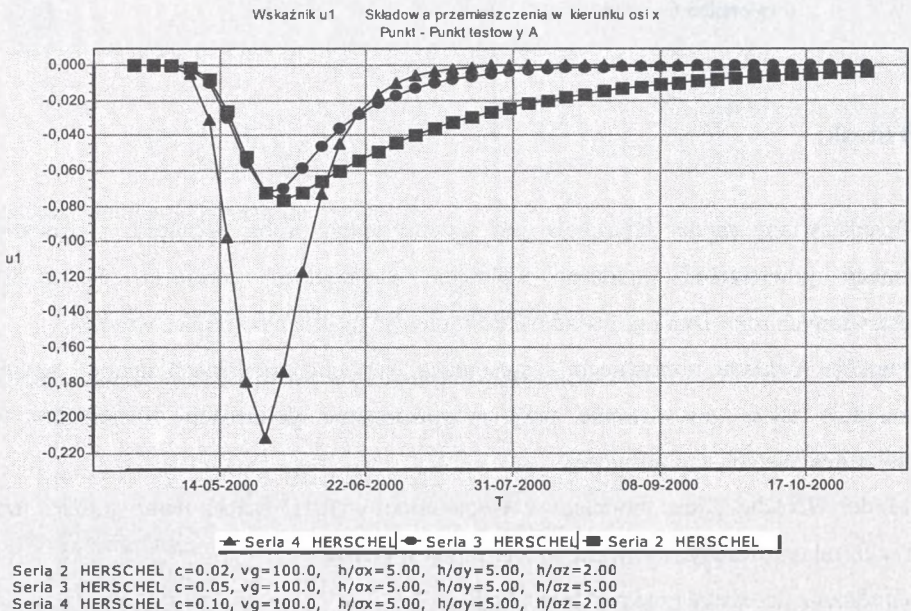
Przedstawiony model Herschela jest jeszcze jedną próbą uściślenia prognozowania deformacji powierzchni poddanej wpływom eksploatacji górniczej. Na podstawie przedstawionych rozważań i przykładów sformułować można następujące wnioski:

1. Funkcja rozkładu normalnego – stosowana w wielu dziedzinach nauki i techniki – znajduje także zastosowanie przy prognozowaniu deformacji powierzchni terenu na skutek eksploatacji górniczej.
2. Model Herschela jest modelem wieloparametrowym i, dzięki temu, można uzyskać różnorodne rozkłady wskaźników deformacji w czasie.

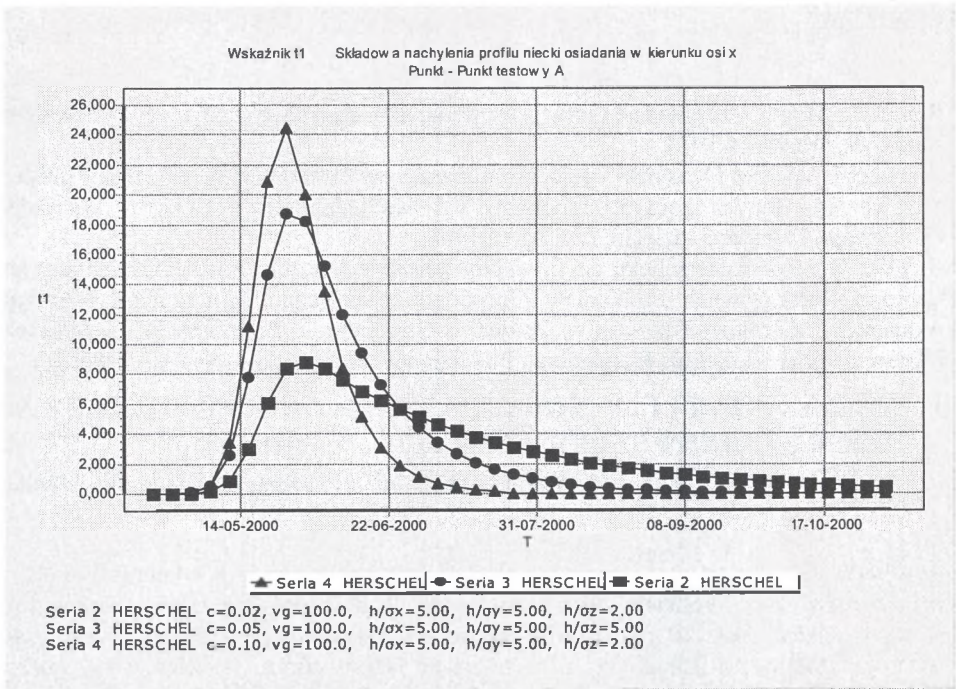
Graficznie przedstawiono niektóre z nich.



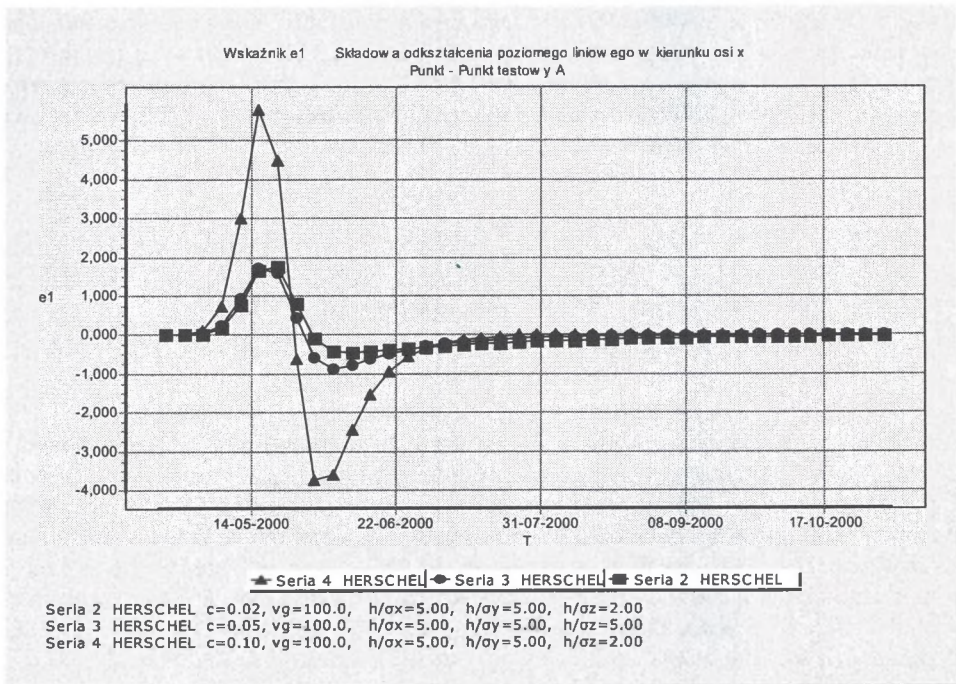
Rys. 6. Rozkład wskaźnika w (obniżenie) w czasie dla różnych parametrów modelu
 Fig. 6. Distribution of index w (mining subsidence) for different model parameters



Rys. 7. Rozkład przesunięcia poziomego u_1 w czasie
 Fig. 7. Distribution of horizontal displacement u_1 in time



Rys. 8. Rozkład nachylenia $t1$ w czasie
Fig. 8. Distribution of deflection $t1$ in time



Rys. 9. Rozkład odkształcenia poziomego $e1$ w czasie
Fig. 9. Distribution of horizontal strain $e1$ in time

LITERATURA

1. Brandt S.: Metody statystyczne i obliczeniowe analizy danych. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1974.
2. Niemiec T.: Model Herschela i jego primienienie pri opriedielienij deformacij gornovo massiva wyzwanyh gornymi rabotami. VII Międzynarodowy Kongres Miernictwa Górniczego, Związek Radziecki, Leningrad 1988.
3. Niemiec T.: Model Herschela, czyli szkody górnicze inaczej. Polska Akademia Nauk. Centrum Podstawowych Problemów Gospodarki Surowcami Mineralnymi i Energią. Akademia Górniczo-Hutnicza, Zakład Górnictwa Podziemnego. Sympozja i Konferencje nr 20. Szkoła Eksploatacji Podziemnej '96, Kraków – Szczyrk 1996.

Recenzent: Dr hab. inż. Piotr Strzałkowski, prof. w Pol. Śl.