

R.B. SEKSENBAEWA

Żeskazgański Uniwersytet, Republika Kazachstan  
L.A. KRUPNIK

Kazachski Narodowy Techniczny Uniwersytet, Republika Kazachstan  
N.N. SYCZEW

Moskiewski Państwowy Uniwersytet Górniczy, Rosja

## MATEMATYCZNE MODELOWANIE PROCESU ROZWOJU PĘKNIĘCIA I OPRACOWANIE URZĄDZENIA DO POMIARU IMPULSÓW UDAROWYCH W MŁYNACH KULOWYCH RÓŻNYCH TYPÓW

**Streszczenie.** W referacie przedstawiono model matematyczny procesu rozwoju pęknięć w kruszonej skale w młynach kulowych. Opisano przyrząd dla praktycznych pomiarów wielkości impulsów udarowych generowanych w młynach kulowych oraz przedstawiono uzyskane wyniki pomiarów.

## MATHEMATICAL MODELING OF PROCESS OF CRACK EXPANSION AND WORK OUT OF DEVICE FOR MEASUREMENT OF STROKE IMPULSE IN BALL MILL OF DIFFERENT TYPE

**Summary.** The paper present the mathematical model of process of expansion of crack in crushed rock in ball mill. The instrument for practical measuring of magnitude of stroke impulse in ball mill has been described. And a result of measurement has been presented.

### 1. Wprowadzenie

Mielenie, jako ogniwo technologicznego łańcucha wzbogacania skał sposobem mechanicznym, związane jest z ich kruszeniem i powstaniem drobniejszych frakcji. Przez pojęcie kruszenia ciała stałego należy rozumieć jego podział na niewspółzależne części [1]. Kruszenie skał następuje wskutek rozwoju pęknięć (szczelin); taki rodzaj kruszenia określaný jest kruszeniem kruchym.

Skała, podawana do mielenia, przechodzi wstępne stadium mechanicznego wzbogacania: przesiewanie i kruszenie, w wyniku czego w bryłach materiału zawarte jest szerokie spektrum

pęknięć, co przyspiesza proces mielenia i zmniejsza zapotrzebowanie na energię. W wyniku oddziaływania narzędzi mielących na bryłę materiału kilka pęknięć, znajdujących się w materiale, zaczyna rosnąć (wydłużać się), co doprowadza do rozpadu bryły.

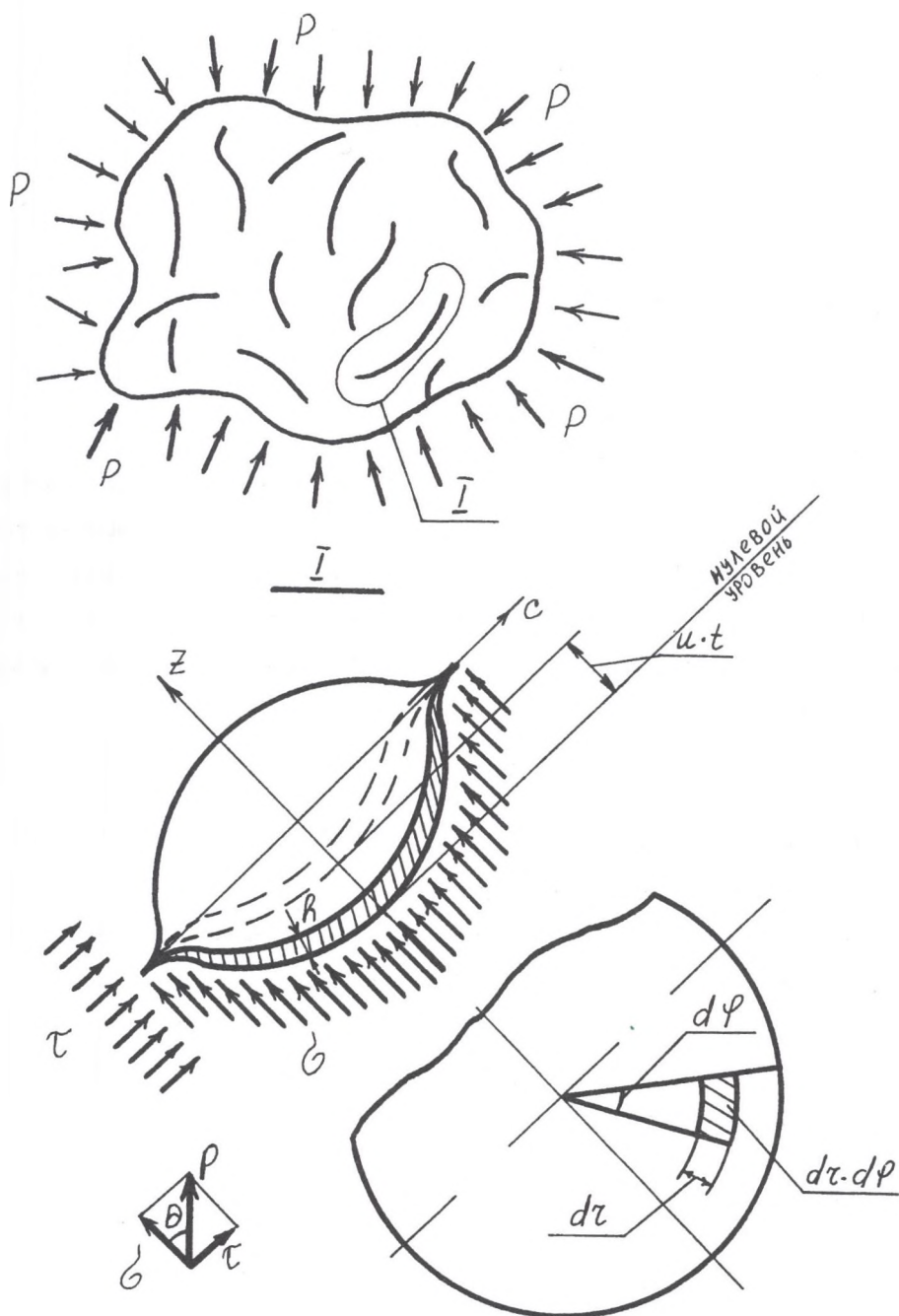
Celem badania niniejszego artykułu jest określenie parametrów impulsu udarowego, zdolnego wywołać rozbicie bryły materiału, zawierającej pęknięcia określonego wymiaru, a także określenie wpływu tłumiących własności skał przy ich rozwoju w młynach różnego typu.

## 2. Rozwój pęknięć wskutek oddziaływania na skałę fali uderzeniowej

Rozpatrzmy pęknięcie, do którego prostopadle nadchodzi fala, zawierająca impulsy o intensywności  $\sigma$  i czasie trwania  $\tau$ . W ogólnym przypadku fala udarowa  $\xi = f(\sigma; \tau)$  pada pod kątem  $\theta$  do powierzchni pęknięcia. Jednakże, według wielu badaczy, wskutek małego odchylenia ścianki pęknięcia najbardziej sprzyjające z punktu widzenia kruszenia materiału jest naprężenie normalne  $\sigma$  [2]. Dlatego dalsze obliczenia będziemy przeprowadzać według tych naprężeń. Analogiczne podejście było wykorzystane w pracach [3,4].

Pęknięcie przedstawimy w postaci kołowej jednorodnej płytki, do której prostopadle nadchodzi impuls udarowy o amplitudzie  $\sigma$  i czasie trwania  $\tau$ . Pęknięcie stanowi przeszkodę na drodze rozprzestrzeniającej się fali udarowej. Powierzchnia pęknięć reaguje na impuls udarowy i odbija go. Padający i odbity impuls wzajemnie ze sobą oddziałują w strefie początkowo swobodnej od naprężenia, której szerokość zwiększa się ze wzdlużną prędkością dźwięku  $a$  w materiale (rys.1). Jednakże, wskutek odchylenia się ścianki pęknięcia, naprężenia zginające ogniskują się w tej strefie.

Odchylona powierzchnia pęknięcia przyjmuje postać wycinka sfery. Powierzchnia odchyła się z poprzeczną prędkością cząstek  $u$  w fali naprężenia i w czasie  $t$ , w chwili przechodzenia impulsu, maksymalne odchylenie ścianki pęknięcia wyniesie  $u \cdot t$ . Fale padająca i odbita wzajemnie oddziałują tylko w przedziale czasu  $0 \leq t \leq \frac{\tau}{2}$ .



Rys.1. Schemat obliczeniowy rozwoju ścianki pęknięcia  
 Fig. 1. The computational scheme of expansion of crack face

Strefy superpozycji fal (zakreskowana strefa na rys. 1) przyjmujemy jako cienką jednorodną płytę, zaklinowaną na krawędziach. Dla  $0 \leq t \leq \frac{\tau}{2}$  dynamiczna krzywa odchylenia ścianki pęknięcia  $z(r, y, t)$  winna spełniać następujące warunki brzegowe:

$$z(r, y, t)_{r=y} = 0 \quad z(r, y, t)_{r=0} = 0 \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_{r=y} = 0 \quad \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_{r=0} = 0$$

Warunki początkowe dla  $t = 0$ ;  $z = 0$ .

Wszystkie te warunki spełnia następująca funkcja [5]:

$$z(r, y, t) = ut \left(1 - \frac{r^2}{y^2}\right). \quad (2)$$

Zbudujemy równanie Lagrange'a 2. rzędu. Przy tym jako uogólnioną współrzędną przyjmujemy linię pęknięcia  $y$ . Za pomocą tego równania określimy zasadnicze zależności między parametrami, charakteryzującymi impuls udarowy, zdolny rozkruszyć cząstkę materiału o danym rozmiarze, a także określimy charakter oddziaływania ciał mielących na mielony materiał z uwzględnieniem jego tłumiących własności. Równanie Lagrange'a 2. rzędu ma postać:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} = Q_y, \quad (3)$$

gdzie:  $T$  - energia kinetyczna układu,

$\dot{y}$  - uogólniona prędkość wzrostu pęknięcia,

$Q_y$  - uogólniona siła, odniesiona do uogólnionej współrzędnej  $y$ .

Energia kinetyczna odchylonej ścianki pęknięcia jest równa:

$$T = \int_0^{2\pi} \int_0^y \frac{\rho \omega t}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 r \cdot dr \cdot d\varphi, \quad (4)$$

gdzie:  $\rho$  - gęstość materiału.

Wyliczymy  $\frac{dz}{dt}$  i  $\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} \left( u \cdot t \left(1 - \frac{r^2}{y^2}\right) \right) = u \left(1 - \frac{r^2}{y^2}\right) + \frac{2utr^2 \dot{y}}{y^3}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 &= \left(u\left(1 - \frac{r^2}{y^2}\right) + \frac{2utr^2\dot{y}}{y^3}\right)^2 = \\ &= u^2\left(1 - 2\frac{r^2}{y^2} + \frac{r^4}{y^4}\right) + \frac{4u^2tr^2\dot{y}}{y^3}\left(1 - \frac{r^2}{y^2}\right) + \frac{4u^2t^2r^4\dot{y}^2}{y^6} \\ T &= \int_0^{2\pi} \int_0^y \frac{\rho at}{2} \left(u^2\left(1 - 2\frac{r^2}{y^2} + \frac{r^4}{y^4}\right) + \frac{4u^2tr^2\dot{y}}{y^3}\left(1 - \frac{r^2}{y^2}\right) + \frac{4u^2t^2r^4\dot{y}^2}{y^6}\right) r dr d\varphi. \end{aligned}$$

Podstawiając uzyskane wyrażenie do (4)

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi\rho at}{2} \left[ u^2\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{2y^2} + \frac{r^6}{6y^4}\right) + \frac{4u^2tr^4\dot{y}}{4y^3} - \frac{4u^2t\dot{y}r^6}{6y^3} + \frac{4u^2t^2r^6\dot{y}^2}{6y^6} \right]_0^y = \\ &= \frac{\pi\rho atu^2}{6} (y^2 + 2t\dot{y}y + 4t^2\dot{y}^2) \end{aligned} \quad (5)$$

Wyliczymy pochodne, wchodzące do równania (3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\pi\rho atu^2}{6} (2ty + 8t^2\dot{y}) = \frac{\pi\rho at^2u^2y}{3} + \frac{4\pi\rho at^3u^2\dot{y}}{3} \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\pi\rho atu^2}{6} (2y + 2t\dot{y}) = \frac{\pi\rho atu^2y}{3} + \frac{\pi\rho at^2u^2\dot{y}}{3} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) &= \frac{2\pi\rho atu^2y}{3} + \frac{\pi\rho at^2u^2\dot{y}}{3} + 4\pi\rho at^2u^2\dot{y} + \frac{4\pi\rho at^3u^2\ddot{y}}{3} \end{aligned}$$

Znajdujemy prawą część równania (3).

Uogólniona siła  $Q_y$ , składają się z uogólnionych sił, wywołujących powstanie nowej powierzchni, i uogólnionej dysypacyjnej siły.

Wyliczymy potencjalną energię układu

$$\Pi = \Pi_\sigma - \Pi_p, \quad (6)$$

gdzie:  $\Pi_\sigma$  - energia potencjalna odkształcenia ścianki pęknięcia pod wpływem fali udarowej o amplitudzie  $\sigma$ ;

$\Pi_p$  - energia potencjalna wstępnego obciążenia ścianki pęknięcia, (energia ta zużyta jest przez cząstkę materiału na powstanie nowych pęknięć w początkowych stadiach wzbogacania – przy urabianiu i kruszeniu) [5].

Za poziom zerowy wybierzemy położenie ścianki pęknięcia w chwili, kiedy impuls udarowy jeszcze nie zdążył jej odchylić ( $t = 0$  na rys.1).

Elementarna praca impulsu obciążenia  $\sigma$  jest równa  $dA_\sigma = z \cdot \sigma \cdot r dr d\varphi$ .

Wówczas

$$A_{\sigma} = u \cdot t \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^y \left(1 - \frac{r^2}{y^2}\right) \cdot \sigma \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi = \pi u t \sigma \cdot \left(r^2 - \frac{r^4}{2y^2}\right) \Big|_0^y = \pi u t \sigma \cdot \frac{y^2}{2}.$$

Według znanego wzoru mechaniki [6] znajdujemy

$$\Pi_{\sigma} = -A_{\sigma} = -\frac{\pi u t \sigma}{2} y^2. \quad (7)$$

$$A_p = \frac{5}{32} \int_0^{2\pi} \int_0^y \sigma y^3 \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 dr d\varphi = \frac{5\pi}{4} \int_0^y \frac{\sigma u t r^2 dr}{y} = \frac{5}{12} \frac{\pi \sigma u t r^3}{y} \Big|_0^y = \frac{5\pi \sigma u t y^2}{12}$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = -\frac{2utr}{y^2} \quad \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = \frac{4u^2 t^2 r^2}{y^4}$$

$$\Pi_p = -A_p = -\frac{5\pi \sigma u t y^2}{12} \quad (8)$$

Podstawiając wyrażenia (7) i (8) do (6) otrzymamy:

$$\Pi = \left(\frac{5\pi \sigma u t}{12} - \frac{\pi u t \sigma}{2}\right) y^2 = -\frac{\pi u t \sigma y^2}{12}. \quad (9)$$

Wiadomo, że dla potencjalnych sił  $Q_y^{\text{pot}} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}$ ,

gdzie:  $Q_y^{\text{pot}}$  - sumaryczna uogólniona siła potencjalna.

$$Q_y^{\text{pot}} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\pi u t \sigma y^2}{12}\right) = \frac{\pi u t \sigma y}{6} \quad (10)$$

Praca sił, wywołująca powstanie nowej powierzchni, zgodnie z [4] wynosi:

$$A_{\gamma} = 2\pi(y^2 - y_0^2) \gamma, \quad (11)$$

gdzie:  $y_0$  - początkowa długość pęknięcia.

Wyliczymy uogólnioną siłę, uwzględniającą powstanie nowej powierzchni.

$$Q_y^r = -\frac{\partial \Pi_{\gamma}}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} (-2\pi(y^2 - y_0^2) \gamma) = 4\pi \gamma \quad (12)$$

Wyliczymy uogólnioną dysypacyjną siłę  $Q_y^{\text{dys}}$ . Siła ta uwzględnia tłumiące własności materiału.

$$Q_y^{\text{dys}} = -\frac{\partial D}{\partial y}, \quad (13)$$

gdzie:  $D$  – dysypacyjna funkcja lub funkcja rozproszenia energii [7],

$$D = \mu \dot{y}^2 / 2,$$

$\mu$  - współczynnik tłumienia.

$$Q_y^{\text{dys}} = -\mu \dot{y} \quad (14)$$

Sumaryczna uogólniona siła jest równa:

$$Q_y = Q_y^{\text{pot}} + Q_y^r + Q_y^{\text{dys}} = \frac{\pi u + \sigma y}{6} + 4\pi \gamma y - \mu \dot{y}. \quad (15)$$

Podstawiając uzyskane wyrażenia do równania (3) uzyskamy

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \pi \rho a t u^2 y + \frac{\pi \rho a t^2 u^2 \dot{y}}{3} + 4\pi \rho a t^2 u^2 \dot{y} + \frac{4}{3} \pi \rho a t^3 u^2 \ddot{y} - \frac{\pi \rho a t u^2 y}{3} - \frac{\pi \rho a t^2 u^2 \dot{y}}{3} = \\ = \frac{\pi u t \sigma y}{6} + 4\pi \gamma y - \mu \dot{y} \end{aligned} \quad (16)$$

Wyrażenie (16) jest równaniem różniczkowym ruchu ścianki pęknięcia.

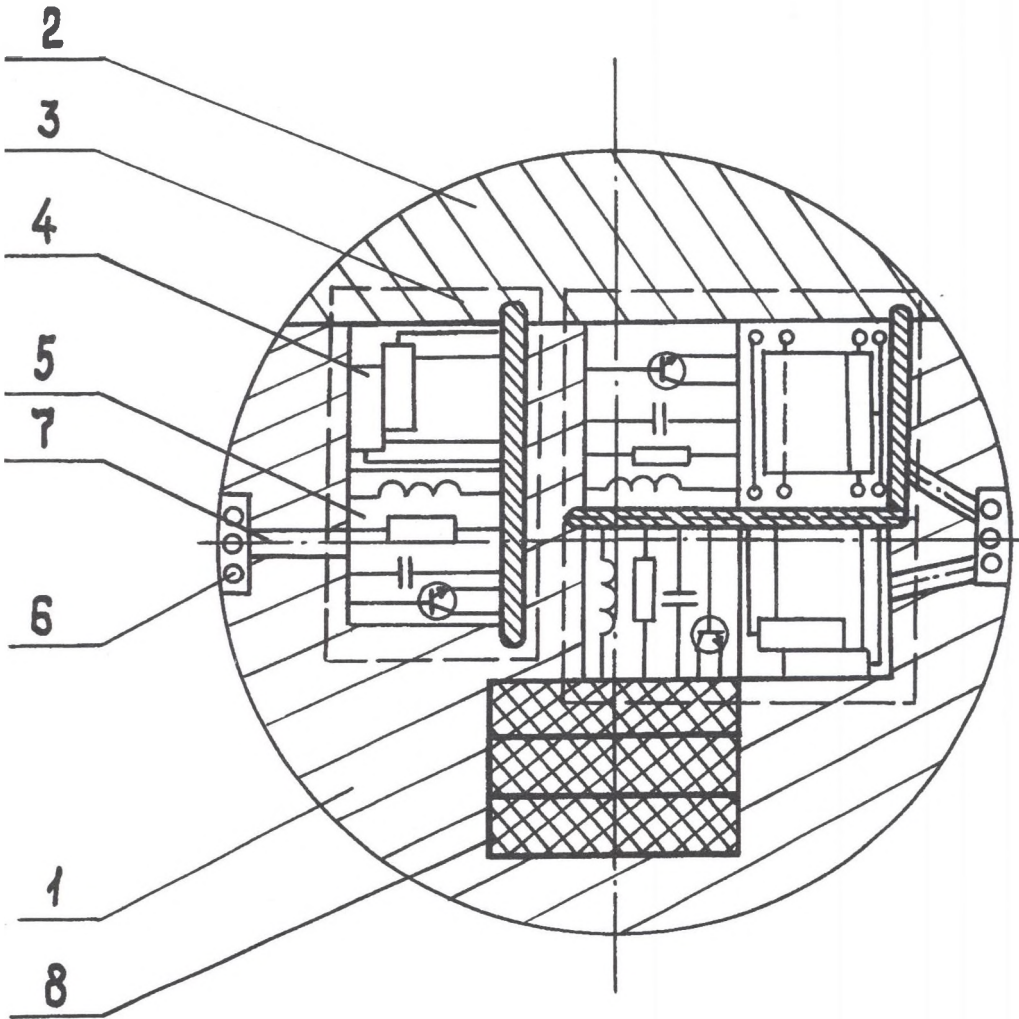
Określenie rzeczywistych wartości dynamicznych charakterystyk ciał mielących wiąże się z dużymi komplikacjami wynikającymi z konieczności zamykania komory mielącej i niemożliwości wykonania pomiarów z wykorzystaniem przewodów telemetrycznych.

### 3. Urządzenia do pomiaru impulsów uderowych w młynach kulowych

W Żeszkazgańskim Uniwersytecie w okresie ostatnich kilku lat prowadzi się prace nad opracowaniem urządzenia, umożliwiającego określać dynamiczne parametry ciał mielących bezpośrednio z komorze mielącej młyna i pozwalającego przekazywać informacje za pomocą sygnału radiowego do urządzenia odbiorczego.

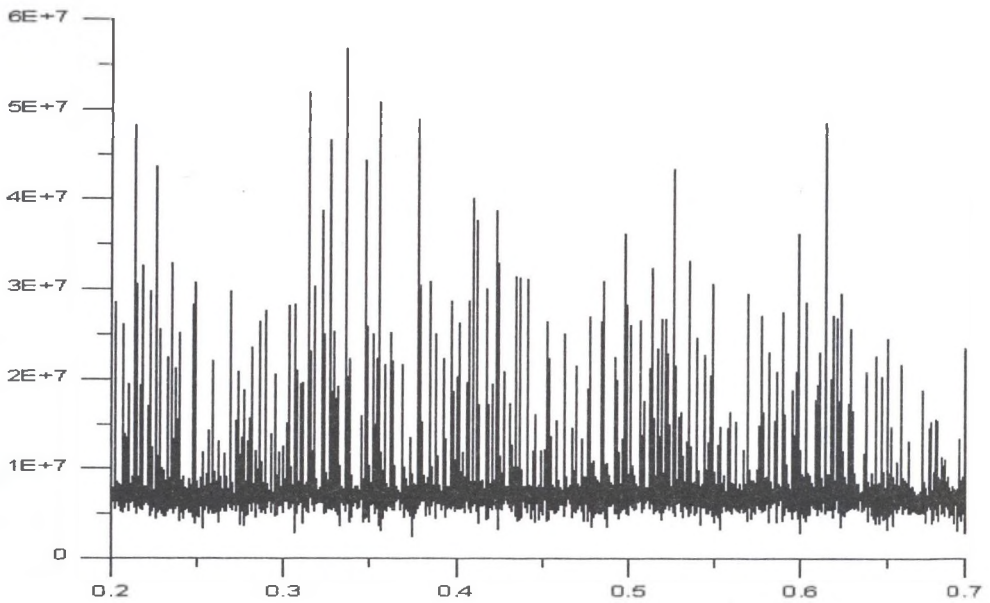
Takie urządzenie zostało wykonane w oparciu o pojemnościowe akcelerometry (pomiar przyspieszeń), które opracowano na bazie najnowszych technologii z wykorzystaniem obwodów scalonych. Akcelerometry te wytrzymują uderowe przyspieszenia do 1000 g i pozwalają mierzyć praktycznie dowolne uderowe przyspieszenia, powstające w komorach mielących wszystkich istniejących w obecnym czasie młynów, wykorzystujących zasadę mielenia kulami. Urządzenie to nazwaliśmy trójskładnikowym radioakcelerometrem (TPA). TPA odwzorowuje ciało mielące - kulę, wykonaną z dwóch części: korpusu 1 i pokrywki 2 (rys. 2). Wewnątrz korpusu 2 sztywno wmontowano trzy identyczne bloki mierzące vibracje 3, usytuowane w trzech wzajemnie prostopadłych płaszczyznach. Każdy blok składa się z pojemnościowego akceleratora 4, wykonanego w postaci dwóch płytek i mikroukładów

elektronicznych 5, stanowiących wzmacniacz sygnału. W korpusie 1 wykonano otwory, w których umieszczono trzy anteny przekaźnikowe 6, z których każda połączona jest z własnym blokiem wibropomiarowym 3 poprzez otwory 7 w korpusie 1. Zasilanie TPA realizowane jest za pomocą trzech elementów zasilających 8.

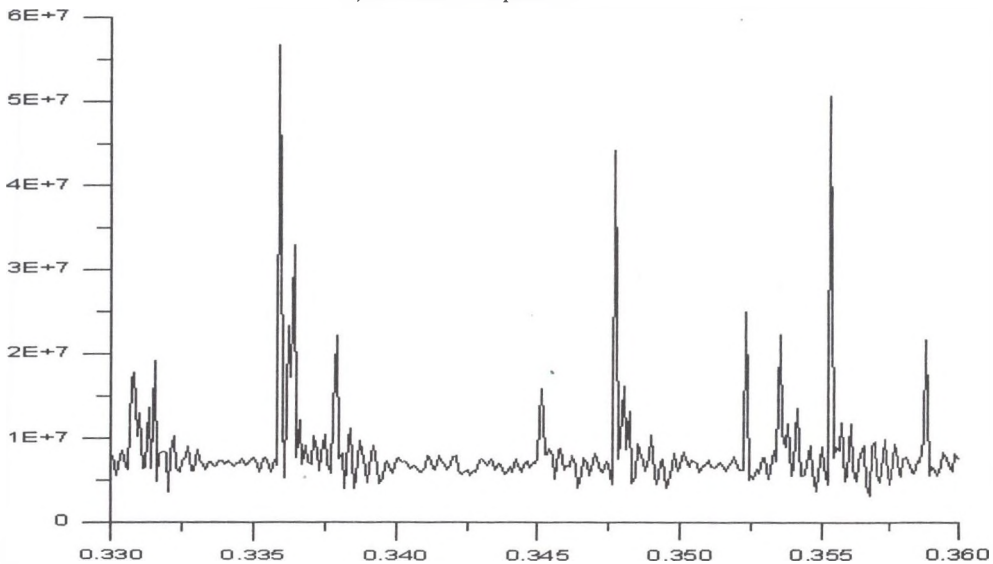


Rys. 2. Trójukładowy radioakcelerometr  
Fig. 2. The three-system radioaccelerometer





a) Zapis procesu w całości  
a) Record of all process



b) Typowa fala impulsów w skali powiększonej  
b) Typical wave of impulses in enlarged scale

Rys. 3. Zależność amplitudy impulsu udarowego od czasu przy mieleniu wapienia w młynie wibracyjnym ( $\omega=150 \text{ s}^{-1}$ ,  $A = 5 \text{ mm}$ )

Fig. 3. The dependence between amplitude of stroke impulse and time at milling of limestone in vibratory mill ( $\omega=150 \text{ s}^{-1}$ ,  $A = 5 \text{ mm}$ )

Poprzez dokręcanie pokrywy 2 następuje załączanie zasilania bloków 3. Następnie TPA umieszcza się w komorze mielącej młyna. Przy statycznym położeniu komory mielącej, a tym samym i TPA, odległość między płytkami pojemnościowych akceleratorów 4 pozostaje niewielka, przy tym sygnał, przechodzący przez akcelerometry 4 i włączone w obwód równolegle cewki indukcyjne, wzmacniany jest w mikroukładach elektronicznych 5 i przekazywany jest poprzez anteny 6 w eter. Na czole komory mielącej młyna umieszczone są trzy odbiorcze anteny, z których każda połączona jest z selektywnymi mikrowoltomierzami SMV-11A, które przyjmują sygnał z TPA. Dalej poprzez ACP sygnał przekazywany jest do pamięci. Na rys. 3 jako przykład pokazano wydruk rzeczywistych impulsów udarowych w komorze mielącej młyna wibracyjnego.

Opracowanie danego urządzenia pozwoliło doświadczalnie dowieść słuszności modelu matematycznego, opisanego równaniem (16), a także określić rzeczywiste wartości dynamicznych parametrów ciał mielących w komorach mielących młynów różnych typów i określić ilość energii, niezbędnej do mielenia materiału do określonej granulacji.

## Literatura

1. Протасов Ю.Л. Разрушение горных пород. М., МГГУ, 1995, 453с.
2. Ревнивцев В.И., Гапонов Г.В., Зарогацкий Л.П. и др.: Селективное разрушение минералов. М., Недра, 1988, 286с.
3. Steverding B., Lehnigk S.H.: Collision of stress pulses with obstacles and dynamics of fracture. *Journal of Applied Physics*, 1991, v.42, #8, p.3231-3238.
4. Steverding B., Lehnigk S.H.: Fracture by shear waves. *Journal of Applied Physics*, 1992, v.43, #1, p.69-73.
5. Бабаков И.М.: Теория колебаний. М., Наука, 1968, 560с.
6. Никитин Н.Н.: Курс теоретической механики. М., Высшая школа, 1990, 607с.
7. Цзе Ф.С., Морзе И.Е., Хинкл Р.Т.: Механические колебания. М., Машиностроение, 1966, 507с.

**Abstract**

In the effect of action of mill implements on the block of material, crack existing in material begin increasing (lengthen), that lead to disintegration of block. The aim of research is description of parameters of stroke impulse, capable for break of block of material, which contain cracks with definite dimension and determination of influence of suppressing properties of rock at its processing in different type of ball mill.

The paper consider cracks, loaded by perpendicular wave which contain impulses with intensity  $\sigma$  and period of exist  $\tau$ .

For these assumptions has been carried out mathematical model and in the paper has been presented instrument for practical measuring of magnitude of stroke impulse in ball mill.

Worked out instrument allow for experimental confirmation of rightness of mathematical model described by equation (16), and also for determine real value of dynamical parameters milling body in milling chamber of different type of mills and for determination of quantity of energy for milling of material at specified granulation.