ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2011
Seria: ORGANIZACJA I ZARZĄDZANIE z. 57 Nr kol. 1847

Michał ĆWIK, Karol JÓŹWIAK, Aleksander MARIAŃSKI
Politechnika Wrocławska
Wydział Informatyki i Zarządzania

WPROWADZENIE DO ZASTOSOWANIA TEORII CHAOSU W ZARZĄDZANIU RYZYKIEM

Streszczenie. W artykule przedstawiono reguły zastosowania teorii chaosu służących do analizy ryzyka. W pracy przedstawiono algorytm wyliczania wymiaru fraktalnego metodą pudełkową. Zaprezentowano metodę użycia teorii chaosu do zarządzania ryzykiem. Zaproponowano dalsze sposoby wykorzystania teorii chaosu do analizy ryzyka.

INTRODUCTION TO APPLYING CHAOS THEORY TO RISK MANAGEMENT

Summary. In the paper the rules of applying the chaos theory to risk management with particular emphasis on phenomena, in which small changes in parameters cause disproportionately large effects has been analysed. The algorithm for calculating the fractal dimension in the application to risk analysis has been presented. The paper presents application of the methods used in chaos theory to risk management.

1. Wprowadzenie

Zastosowanie teorii chaosu w zarządzaniu ryzykiem to istniejący od niedawna trend, jednakże na tyle rozwinięty, że żaden analityk nie może sobie pozwolić na zignorowanie nowego paradygmatu. Dziedzina zapoczątkowana przez Edgara Petersa [8] pozwoliła na wykorzystanie nowoczesnego podejścia do analizy sytuacji na rynku. W pracach [1 i 2] została opisana „fraktalna adaptacyjna średnia krocząca", w skrócie FRAMA. Stosowana jest ona przez analityków giełdowych do określania sygnałów spadku lub wzrostu na rynku.

W artykule przedstawiono reguły zastosowania teorii chaosu służących do analizy ryzyka na giełdzie.

2. Matematyka chaosu

Teoria chaosu opisuje zjawiska, w których małe zaburzenia parametrów powodują nieproporcjonalnie duże efekty. Równania charakteryzują się niezwykłą wrażliwością na zmianę parametrów. Chaotyczne zachowanie układów dynamicznych popularnie nazywane jest efektem motyla. Niewielkie zaburzenie warunków początkowych powoduje wzrost jego wpływu do niewyobrażalnej skali w długim czasie. Dobrym obrazem może być tutaj stwierdzenie Edwarda Lorenza, że „ruch skrzydeł motyla w amazońskiej dżungli może spowodować huragan na Atlantyku" [5].

Analiza pogody dała dobry przykład istotności teorii chaosu w nauce. Jak pokazano w [4], do prognozy pogody wykorzystywane są nieliniowe równania różniczkowe, rozwiązywane przez superkomputery. Jak wykazał Lorenz w 1963 r. [5], dokładne wyliczenie prognozy pogody nie jest możliwe. Udowodniono także, że równania opisujące atmosferę uwidaczniają w dłuższym okresie zachowania chaotyczne. W ten sposób możemy się spodziewać prawidłowej prognozy numerycznej na następny dzień, natomiast prognozy temperatury i wartości ciśnienia w następnym miesiącu są niemożliwe.

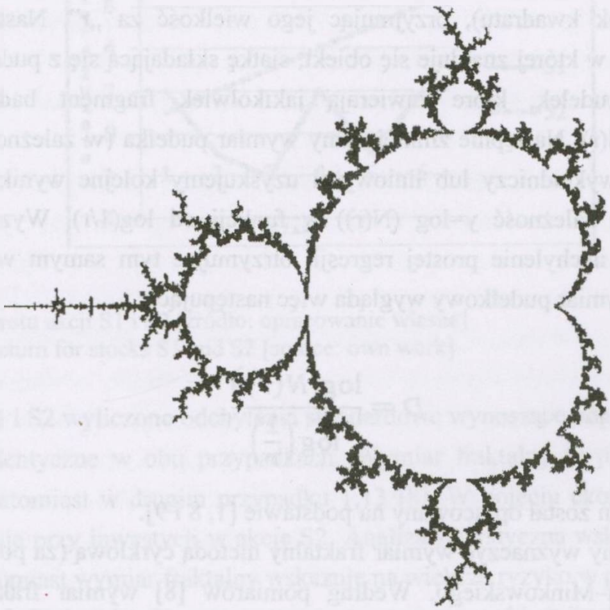
Teoria chaosu opisuje także obiekty geometryczne nazywane fraktalami. Fraktale są to obiekty samopodobne lub nieskończenie subtelne [5]. W niniejszym artykule skupiono uwagę na zbiorach samopodobnych, czyli takich, których części są podobne do całości. Dokładniejszy opis fraktali można znaleźć w pracy [3]. Przykład fraktala samopodobnego został zilustrowany na rysunku 1.

Jak wskazał Peters [8], także wykresy na rynkach kapitałowych wykazują tendencje do samopodobieństwa.

Weźmy trójwymiarową kartkę papieru i wyobraźmy sobie, że nie ma ona grubości i w rzeczywistości jest dwuwymiarową płaską figurą, dającą się opisać geometrią euklidesową. Gdyby taką kartkę zgnieść w kulkę, nie staje się ona w ścisłym sensie obiektem trójwymiarowym, ale także nie jest dwuwymiarowa.

W takim przypadku teoria chaosu mówi o wymiarze ułamkowym, czyli fraktalnym, którego nie da się wyrazić liczbą całkowitą. Zapisanie zgniecionej kartki papieru za pomocą geometrii euklidesowej stanowi niełatwe wyzwanie nawet dla programu komputerowego.

Z pomocą przychodzi wymiar fraktalny, opisujący, jak przedmioty wypełniają swoją przestrzeń.



Rys. 1. Zbiór Mandelbrota [6]
Fig. 1. Mandelbrot set [6]

Zazwyczaj obiekt znajduje się w przestrzeni większej niż jego wymiar fraktalny. Przykładem tutaj może być zgnieciona kula papieru, którą przyjmuje się nazywać trójwymiarową, mimo tego, że nie wypełnia trójwymiarowej przestrzeni. Podobnie wykres funkcji nazywa się dwuwymiarowym, jednakże nie wypełnia on przestrzeni dwuwymiarowej tak jak kwadrat czy koło.

Mandelbrot [6] podaje przykład ograniczonej przydatności geometrii euklidesowej przy wyliczaniu długości linii brzegowej Wielkiej Brytanii. Twierdzi on, że nigdy nie uda się zmierzyć naprawdę długości linii brzegowej, gdyż wynik będzie zależał zawsze od przyjętej długości miarki, jaką się posłużymy. Możemy wyobrazić sobie próbę zmierzenia linii brzegowej za pomocą dwóch miarek – kilometrowej i metrowej. Wiele istotnych szczelin i zatok pominiemy przy użyciu kilometrowej miarki, które uwzględnimy korzystając z metrowej miarki. Im krótsza miarka, tym uzyskamy dokładniejszy wymiar linii brzegowej. W geometrii euklidesowej długość linii brzegowej zależy więc od długości miarki. Mandelbrot do pomiarów linii brzegowej zaproponował zatem wymiar fraktalny.

Wymiar fraktalny można wyliczać na różne sposoby. Jedną z proponowanych metod jest metoda pudełkowa [9]. Algorytm wyliczania wymiaru fraktalnego metodą pudełkową wygląda następująco. Najpierw wybieramy początkową wielkość pudełka (dla przestrzeni dwuwymiarowej bok kwadratu), przyjmując jego wielkość za „r”. Następnie rysujemy w danej przestrzeni, w której znajduje się obiekt, siatkę składającą się z pudełek o boku „r”. Zliczamy liczbę pudełek, które zawierają jakikolwiek fragment badanego obiektu, otrzymując liczbę N(r). Następnie zmniejszamy wymiar pudełka (w zależności od przyjętej metody w sposób wykładniczy lub liniowy) i uzyskujemy kolejne wyniki pomiarów „r” i N(r). Wykreślamy zależność y=log (N(r)) w funkcji od log(1/r). Wyznaczamy prostą regresji. Mierzymy nachylenie prostej regresji, otrzymując tym samym wymiar fraktalny obiektu. Wzór na wymiar pudełkowy wygląda więc następująco:

$$D = \frac{\log(N(r))}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} \tag{1}$$

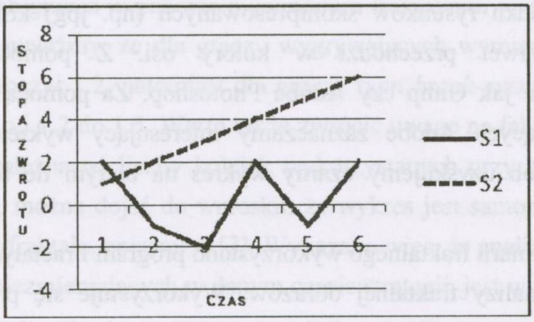
Opisany algorytm został opracowany na podstawie [1, 8 i 9].

Podobnie możemy wyznaczyć wymiar fraktalny metodą cyrklową (za pomocą kół), czyli wymiar Bouliganda–Minkowskiego. Według pomiarów [8] wymiar fraktalny wybrzeża Wielkiej Brytanii wynosi ok. 1,3, natomiast Norwegii 1,52.

Wymiar ten oznacza stopień poszarpania obiektu względem przestrzeni o wymiar wyższej. Wynika stąd, że w przypadku linii brzegowych Norwegia ma zdecydowanie bardziej poszarpany brzeg w porównaniu do Wielkiej Brytanii. Z [8] wiemy, że linia brzegowa jest tym bardziej poszarpana, im jej wymiar fraktalny jest bliższy 2.

W rachunku prawdopodobieństwa przyjmuje się, że ryzyko jest ściśle powiązane z wariancją. Teoria chaosu nie neguje tej teorii, wprowadza jednak propozycję nowego podejścia do zagadnień związanych z ryzykiem. Na rynku akcji jest większe ryzyko, jeśli mamy do czynienia z większą zmiennością akcji (za Markowitzem, [7]). Zmienność akcji możemy obliczyć za pomocą odchylenia standardowego, jednakże można je przyjąć za miarę ryzyka tylko wtedy, gdy mamy do czynienia z systemem losowym. Badania opisane w [8] wykazały, że bardzo często ryzyko, liczone z użyciem rachunku prawdopodobieństwa, nie odzwierciedla rzeczywistego ryzyka, rozumianego jak w ekonomii.

Rysunek 2 ilustruje przykład zamieszczony w [8], pokazujący różnicę w pojmowaniu ryzyka przez narzędzia teorii chaosu i rachunek prawdopodobieństwa.



Rys. 2. Stopy zwrotu akcji S1 i S2 [źródło: opracowanie własne]
Fig. 2. Rates of return for stocks S1 and S2 [source: own work]

Dla akcji S1 i S2 wyliczono odchylenia standardowe wynoszące odpowiednio 1,86 i 1,87, więc niemal identyczne w obu przypadkach. Wymiar fraktalny w pierwszym przypadku wynosi 1,42, natomiast w drugim przypadku 1,13 [8]. W pojęciu ekonomicznym mniejsze ryzyko występuje przy inwestycji w akcje S2. Analiza statystyczna wskazuje, że ryzyko jest identyczne, natomiast wymiar fraktalny wskazuje na większe ryzyko w przypadku akcji S1.

W analizie fraktalnej bardzo często używa się pojęcia wykładnika Hursta. W [8] można znaleźć wzór pozwalający na wyliczenie tego wykładnika dla danego wykresu. Ma on także kluczowe znaczenie w wyznaczaniu ryzyka na podstawie wykresu. W [8] wykazano ścisłą korelację między wymiarem fraktalnym a wykładnikiem Hursta, wyrażoną wzorem:

$$H - 2 - D, \tag{2}$$

gdzie: H – wykładnik Hursta, D – wymiar fraktalny.

Zatem, skupiono się w pracy na analizie ryzyka na podstawie wymiaru fraktalnego.

3. Przekształcanie wykresów na obrazy umożliwiające analizę fraktalną ryzyka

Wykresy dostarczane przez programy analityczne gry, np. w pokera, są najczęściej opatrzone dodatkowymi danymi uniemożliwiającymi ich natychmiastową analizę przez narzędzia matematyki chaosu. Programy te to na przykład Poker Tracker. Trzeba więc podjąć decyzję o usunięciu tych danych, aby nie zaburzały one wyniku analizy fraktalnej. Celem jest zatem pozostawienie samego wykresu w kolorze czarnym na białym tle.

Najczęściej spotykamy się z wykresami, których kolor różni się od kolorów, jakimi wyrażone są pozostałe dane. O ile mamy nieskompresowany obraz wykresu (np. png, gif), o tyle wystarczy pozostawić na rysunku jedynie kolor wykresu, ostatecznie modyfikując go na czarny. W przypadku rysunków skompresowanych (np. jpg) kolor wykresu nie jest jednolity, czasem nawet przechodzi w kolory osi. Z pomocą przychodzi tutaj oprogramowanie, takie jak Gimp czy Adobe Photoshop. Za pomocą narzędzia opisanego w materiałach dotyczących Adobe zaznaczamy interesujący wykres i wycinamy go z rysunku. W ten sposób uzyskujemy czarny wykres na białym tle bez innych zbędnych szumów.

Do zmierzenia wymiaru fraktalnego wykorzystano program Fractalyse. Program ten służy do szeroko pojętej analizy fraktalnej obrazów. Wykorzystuje się przy tym liniowy lub ekspotencjalny przyrost wymiaru pudełka, a także generuje się wykres, o którym wspomniano w rozdziale 2. Z nachylenia prostej regresji wylicza się wymiar fraktalny.

Badanie przebiegało w następujący sposób. Dokonano wyboru wykresów graczy, którzy ewidentnie są graczami wygrywającymi i wykresów graczy, którzy w długim okresie mają wynik zbliżony do zera. Następnie, na wykresach reprezentantów dokonano wyliczenia wymiaru fraktalnego za pomocą programu Fractalyse. Dokonano także pomiarów wymiaru fraktalnego, opierając się na danych z różnych rozpiętości czasowych, w celu analizy, czy długość gry w pokera ma wpływ na ryzyko. Wyniki zestawiono w tabeli 1. Kolumny oznaczają odpowiednio:

Lp. – liczba porządkowa pomiaru,

L – liczba kolejek, wykorzystanych do generowania wykresu (w tysiącach),

Q – jakość gry gracza (1 – wygrywający, 0 – gracz *break-even*),

D – wymiar fraktalny wykresu gracza.

Tabela 1

Wymiar fraktalny wykresu gracza

Lp.	**L**	**Q**	**D**
1	20	0	1.259
2	73	0	1.427
3	100	0	1.396
4	220	0	1.354
5	380	0	1.377
6	40	1	1.044
7	50	1	1.087
8	100	1	1.132
9	275	1	1.198
10	400	1	1.033

Źródło: opracowanie własne

Badania były wykonywane przy użyciu metody pudełkowej z minimalną wielkością pudełka równą 1 pixelowi, wzrostem liniowym o 4 pixele i warunkiem stopu, w momencie gdy jeden kwadrat obejmuje cały wykres.

Wyniki zilustrowane w tabeli 1 wskazują na ścisłą zależność pomiędzy wartością oczekiwaną wygranych gracza w pokerze a wymiarem fraktalnym wykresów generowanych w czasie jego gry. Zauważmy, że dla graczy wygrywających wymiar fraktalny w żadnym z wyników nie przekroczył 1.2, natomiast dla graczy typu *break-even* wymiar fraktalny był zawarty w przedziale od 1.2 do 1.5. Warto także zwrócić uwagę na fakt, że wartość wymiaru fraktalnego nie jest zależna od liczby kolejek wykorzystanych przy generowaniu wykresu. Biorąc to pod uwagę, można dojść do wniosku, że wykres jest samopodobny, spełnia więc podstawowy warunek fraktala, opisany w [3]. Wykazano więc, że analiza fraktalna wykresów graczy pokerowych, niezmieniających w danym czasie strategii, jest wykonalna i daje wyniki nieobarczone błędem.

Fakt, że wszystkie wartości wymiarów fraktalnych znalazły się pomiędzy 1 a 1.5 daje podstawę do wyciągnięcia wniosków o nielosowości gry w pokera. Zgodnie z [8], gdy wykładnik Hursta jest z przedziału [0.5,1], to mamy do czynienia z pewną strategią. Im większy jest wykładnik Hursta, tym losowość zjawisk jest mniej prawdopodobna. Stwierdzono więc, że u graczy wygrywających istnieją korelacja między kolejnymi obserwacjami wykresu oraz możliwość wysoko prawdopodobnej predykcji dalszej części wykresu. U graczy *break-even*, zgodnie z teorią Hursta, także występuje takie zjawisko, ale w mniejszym stopniu, stąd gracze ci narażeni są na większą losowość, a ich gra bardziej przypomina błądzenie losowe niż u graczy wygrywających. Jednakże póki wymiar fraktalny jest mniejszy od 1.5, gra gracza nie wykazuje istotnych cech błądzenia losowego według analizy fraktalnej.

Analiza wykresów pozwala potwierdzić przypuszczenia o związku poszarpania wykresu z wymiarem fraktalnym. Im wyższy wymiar fraktalny, tym wykres jest bardziej poszarpany.

Podsumowując, możemy wnioskować, że wymiar fraktalny określa ryzyko graczy zgodnie z intuicyjnym rozumieniem ryzyka przez ludzi. Analiza fraktalna prowadzi do wniosku, że gracze, którzy mają strategię „wygrywający" podejmują decyzje mniej ryzykowne w porównaniu do innych graczy.

4. Podsumowanie i kierunki dalszych prac

W artykule został przedstawiony wstęp zarówno do matematyki chaosu, jak i do gier hazardowych. Przeanalizowano model matematyczny gry hazardowej i uszczegółowiono go do częściowego modelu matematycznego pokera. Wykonano badania, których celem była analiza ryzyka w pokerze.

Zarządzanie ryzykiem w pokerze nie należy do zadań łatwych. Analiza fraktalna jest z pewnością nowatorskim podejściem do tego zagadnienia. Aktualnie stosuje się podejście probabilistyczne do analizy ryzyka w różnych grach pokerowych i na tej podstawie m.in. określa się prawidłowe zarządzanie kapitałem. Podobna sytuacja występuje na rynkach finansowych, jednakże tutaj nie inwestujemy w dobrze prosperującego gracza – on sam w siebie inwestuje i jemu jest potrzebne narzędzie pozwalające mu na zwiększanie zysków i skuteczności w grze.

Konkluzją rozważań na temat ryzyka w grach hazardowych jest więc potrzeba rozwoju tej niepoznanej i często niedocenianej gałęzi nauki.

BIBLIOGRAFIA

1. Borowski K.: Zastosowanie fraktalnej, adaptacyjnej średniej ruchomej w analizie technicznej [FRAMA], bossa.pl.
2. Ehlers J.: Fractal Adaptive Moving Average. Technical Analysis of Stock & Commod., 2005.
3. Falconer K.: Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. West Sussex John Wiley & Sons, 2003.
4. Kalnay E.: Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability. Cambridge University Press, 2003.
5. Lorenz E.: Deterministic Nonperiodic Flow. Journal of the Atmospheric Sciences, 1963.
6. Mandelbrot B.B.: The Fractal Geometry of Nature. W.H. Freeman & Co., New York 1982.
7. Markowitz H.M.: Portfolio Selection. The Journal of Finance, 7 (1), 1952, pp. 77-91.
8. Peters E.: Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics. John Wiley, New York 1994.
9. Weisstein E.W.: Arithmetic Progression. From MathWorld--A Wolfram Web Resource, http://mathworld.wolfram.com/ArithmeticProgression.html (20.06.2010)

Recenzent: Dr hab. inż. Jan Kałuski, prof. naz. w Politechnice Śląskiej

Abstract

The paper presents application of the methods used in the chaos theory to risk management. The analysis of the obtained graphs of rate of return on shares using fractal dimension has been carried out. A comparison of company shares analysis using fractal methods as well as the classical theory of probability has been made. The correlation between fractal dimension and Hurst exponent has been used. The possibility of risk analysis based on fractal dimension has been shown. The paper presents application of the methods used in the chaos theory to risk management.