

Piotr KARNASIEWICZ

Katolicki Uniwersytet Lubelski Jana Pawła II, Katedra Analizy Obrazów

## DOSTOSOWANIE METOD BADANIA ROZBIEŻNOŚCI DESENI PRÓBEK DO PERCEPCJI CZŁOWIEKA

**Streszczenie.** Niniejszy artykuł omawia metodę badania jakości próbkowania stosowaną w grafice komputerowej, jaką jest rozbieżność deseni. Podjęto próbę dostosowania tej metody do tego, jak desenie są postrzegane przez człowieka. W pracy przedstawionych jest kilka metod próbkowania, które są w jej dalszej części wykorzystywane w testach rozbieżności deseni.

**Słowa kluczowe:** próbkowanie, rozbieżność, próbkowanie o niskiej rozbieżności, rodziny zbiorów

## ADAPTING MEASURING METHODS OF DISCREPANCY OF SAMPLES PATTERNS TO HUMAN PERCEPTION

**Summary.** The following article presents pattern discrepancy, which is a method for measuring the quality of sampling used in computer graphics. An attempt has been taken to adapt this method to the way the patterns are perceived by human. In the article we present several methods of sampling, which are then used for testing pattern discrepancy.

**Keywords:** sampling, discrepancy, low-discrepancy sampling, families of sets

### 1. Wstęp

W grafice komputerowej próbkowanie odgrywa znaczącą rolę w ostatecznym wyglądzie obrazu. Od jakości próbkowania zależy, jak obraz będzie odbierany przez oko ludzkie. Istnieją matematyczne narzędzia, które pomagają obiektywnie wyznaczyć tę jakość. Takim narzędziem jest tzw. rozbieżność deseni próbek. Okazuje się jednak, że niejednokrotnie ocena uzyskana w wyniku zbadania rozbieżności odbiega od tej, którą wydaje ludzkie oko.

Niniejsza praca jest próbą dostosowania rozbieżności do percepcyjnej oceny desenia przez człowieka.

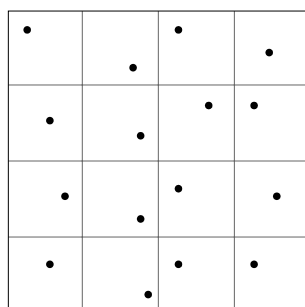
## 2. Próbkowanie

Obraz cyfrowy jest prostokątną tablicą wartości pikseli. Aby wyznaczyć tę dyskretną liczbę wartości, dokonuje się próbkowania funkcji obrazu za pomocą tzw. promieni. Najlepsze rezultaty daje wygenerowanie dla jednego piksela wielu próbek, na podstawie których oblicza się jego ostateczną wartość. Okazuje się, że od pozycji próbek bezpośrednio zależy jakość wynikowego obrazu. Próbki nie mogą być położone zbyt blisko siebie oraz próbkowana przestrzeń nie może zawierać zbyt dużych pustych miejsc. Ponadto, próbki nie mogą być ułożone w równomierną siatkę, gdyż powoduje to tzw. aliasing, który również jest źle odbierany przez oko ludzkie.

W grafice komputerowej oprócz próbkowania samego obrazu, próbkowany jest także czas otwarcia przesłony czy pozycja promienia na soczewce. Zostało opracowanych wiele metod generowania próbek, wśród których są metody całkowicie deterministyczne i losowe. Poniżej zostaną przedstawione wybrane z nich. W dalszej części pracy zakłada się, że próbkowanie odbywa się w kostce jednostkowej  $[0,1]^s$ .

### 2.1. Próbkowanie warstwowe

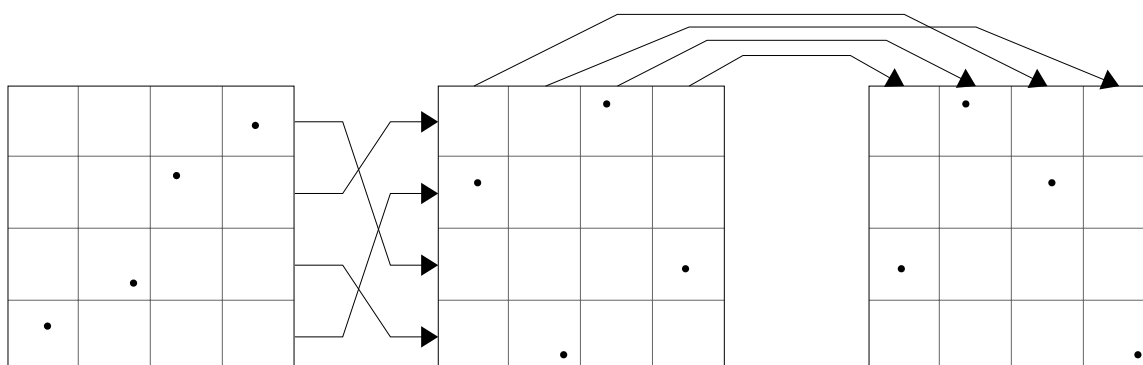
Próbkowanie warstwowe (ang. *stratified sampling*) polega na podzieleniu desenia na regiony (warstwy) o ścianach równoległych do ścian kostki  $[0,1]^s$ . W każdej warstwie umieszczana jest jedna próbka, której pozycja wewnątrz danej warstwy dobierana jest losowo. Próbkowanie warstwowe jest bardzo szybkie i jest ulepszeniem próbkowania całkowicie losowego, tj. zapewnia, że próbki nie są położone zbyt blisko siebie oraz deseń nie zawiera dużych pustych obszarów.



Rys. 1. Próbkowanie warstwowe  
Fig. 1. Stratified sampling

## 2.2. Próbkowanie łacińskiego hipersześcianu (LHS)

Druga metoda próbkowania dzieli każdy z wymiarów próbkowanej przestrzeni na  $N$  równych części, gdzie  $N$  oznacza żadaną liczbę próbek. Próbki początkowo umieszczone są na obszarach powstałych na przekątnej kostki, po czym dokonywane jest losowe przetasowanie części w każdym z wymiarów, tak jak na rysunku 2. Próbkowanie LHS zapewnia, że dla wybranej osi współrzędnych żadne dwie próbki nie będą miały takich samych współrzędnych. Tej własności nie ma próbkowanie warstwowe.

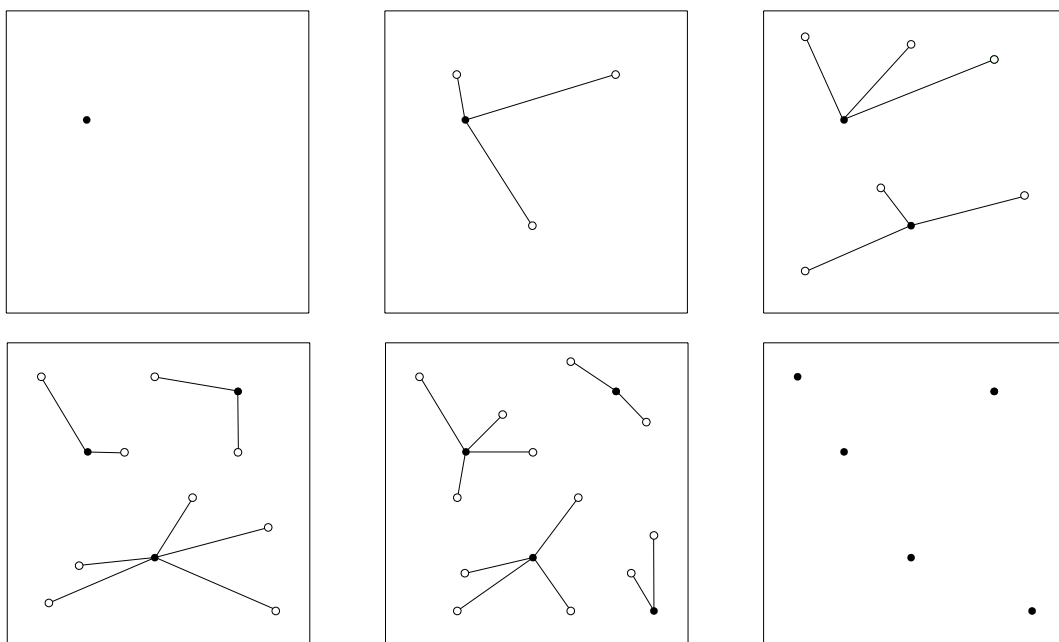


Rys. 2. Próbkowanie LHS

Fig. 2. LHS sampling

## 2.3. Próbkowanie poprzez wybór najlepszego kandydata

Kolejna metoda próbkowania wykorzystuje tzw. dysk Poissona. Jest to zbiór punktów, z których każde dwa są od siebie oddalone o więcej niż z góry zadana odległość. Wygenerowanie dysku Poissona może być bardzo czasochłonne, dlatego stosuje się metodę, która tylko przybliża zbiór punktów o takiej właściwości. Aby dodać kolejny punkt do desenia, generowany jest zbiór losowych punktów-kandydatów. Do desenia dodaje się tego kandydata, który leży najdalej od punktów należących już do desenia. Odległością kandydata od desenia jest jego odległość od najbliższego położonego punktu desenia. Algorytm tworzenia desenia próbek przewiduje, że im więcej jest próbek dołączonych już do desenia, tym więcej jest losowanych kandydatów.



Rys. 3. Próbkowanie poprzez wybór najlepszego kandydata. Na rysunkach zaznaczone są próbki znajdujące się już w deseni (wypełnione okręgi) i kandydaci (puste okręgi). Zaznaczona jest również najdłuższa spośród odległości pomiędzy kandydatami a próbkami znajdującymi się już w deseni. Kandydat, dla którego ta odległość jest osiągnięta, dołączany jest do desenia

Fig. 3. Best-candidate sampling. Images shows samples already added to pattern (filled circles) and candidates (empty circles). They also shows the longest length between candidates and samples which is added to pattern already. A candidate for which this length is riched it is added to pattern

#### 2.4. Próbkowanie o niskiej rozbieżności

Próbkowanie o niskiej rozbieżności wykorzystuje pewną funkcję miary zwaną rozbieżnością. Za jej pomocą można ocenić jakość desenia. Niech  $P = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \subset [0,1]^s$  będzie zbiorem punktów desenia. Rozbieżność zbioru  $P$  ze względu na rodzinę  $B$  definiuje się następująco:

$$D_N(P) = \sup_{b \in B} \left| \frac{\#(P \cap b)}{\#P} - \lambda(b) \right| = \sup_{b \in B} \left| \frac{\#(P \cap b)}{N} - \lambda(b) \right|, \quad (1)$$

gdzie:  $\#(P \cap b)$  i  $\#P$  jest liczbą punktów należących do zbiorów  $P \cap b$  i  $P$  odpowiednio, a  $\lambda(b)$  jest objętością zbioru  $b$ . Oczywiście wielkość  $\lambda(b)$  należy do przedziału  $[0,1]$ , ponieważ  $0 \leq \lambda(b) \leq \lambda([0,1]^s) = 1$ .

Niech  $B^* = \{b = [0, v_1] \times \dots \times [0, v_s] : 0 \leq v_i \leq 1 \text{ dla } i\}$ . Niech  $D_N^*$  oznacza rozbieżność ze względu na rodzinę  $B^*$ . Ciągiem o niskiej rozbieżności nazywany jest nieskończony ciąg punktów  $x_1, x_2, \dots$  taki, że

$$D_N^*(P) = O\left(\frac{(\log N)^s}{N}\right), \quad (2)$$

gdzie  $P = \{x_1, \dots, x_N\}$  dla dowolnego  $N$ . Istnieje uzasadnione przypuszczenie, że wielkość ta jest najmniejszą możliwą rozbieżnością (zobacz 1).

Zbiorem o niskiej rozbieżności określamy jest zbiór  $P = \{x_1, \dots, x_N\}$ , dla którego

$$D_N^*(P) = O\left(\frac{(\log N)^{s-1}}{N}\right) \quad (3)$$

Zostanie zaprezentowanych kilka znanych ciągów i zbiorów o niskiej rozbieżności. Niech  $d_{i,0}, d_{i,1}, \dots$  będą kolejnymi cyframi rozwinięcia liczby  $i$  w systemie liczbowym o podstawie  $p$ , tj.

$$i = \sum_{k \geq 0} d_{i,k} p^k \quad (4)$$

Ciągiem odwrotności pierwiastkowych nazywany jest ciąg  $x_i = \phi_p(i)$ , gdzie

$$\phi_p(i) = \sum_{k \geq 0} d_{i,k} p^{-1-k} \quad (5)$$

Szczególnym przypadkiem takiego ciągu jest ciąg van der Corputa, który jest ciągiem odwrotności pierwiastkowych dla  $p=2$ :

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, \dots \quad (6)$$

Wtedy wielowymiarowym ciągiem o niskiej rozbieżności może być ciąg o postaci:

$$x_i = (\phi_{p_1}(i), \phi_{p_2}(i), \dots, \phi_{p_s}(i)), \quad (7)$$

gdzie podstawy  $p_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, s$  są względnie pierwsze. Jeśli  $p_k$  są kolejnymi najmniejszymi liczbami pierwszymi, to taki ciąg nazywany jest ciągiem Haltona:

$$x_i = (\phi_2(i), \phi_3(i), \phi_5(i), \dots, \phi_{p_s}(i)), \quad (8)$$

gdzie  $p_k$  są kolejnymi liczbami pierwszymi. Dla dowolnego  $N$  rozbieżność zbioru  $P = \{x_1, \dots, x_N\}$  wynosi  $O((\log N)^s / N)$ . Przykładem zbioru o niskiej rozbieżności jest zbiór Hammersleya:

$$x_i = (i/N, \phi_2(i), \phi_3(i), \phi_5(i), \dots, \phi_{p_{s-1}}(i)), \quad (9)$$

którego rozbieżność wynosi  $O((\log N)^{s-1} / N)$ . Oczywiście w tym przypadku liczba próbek musi być znana z góry.

### 2.5. Sieci $(t,m,s)$ i ciągi $(t,s)$

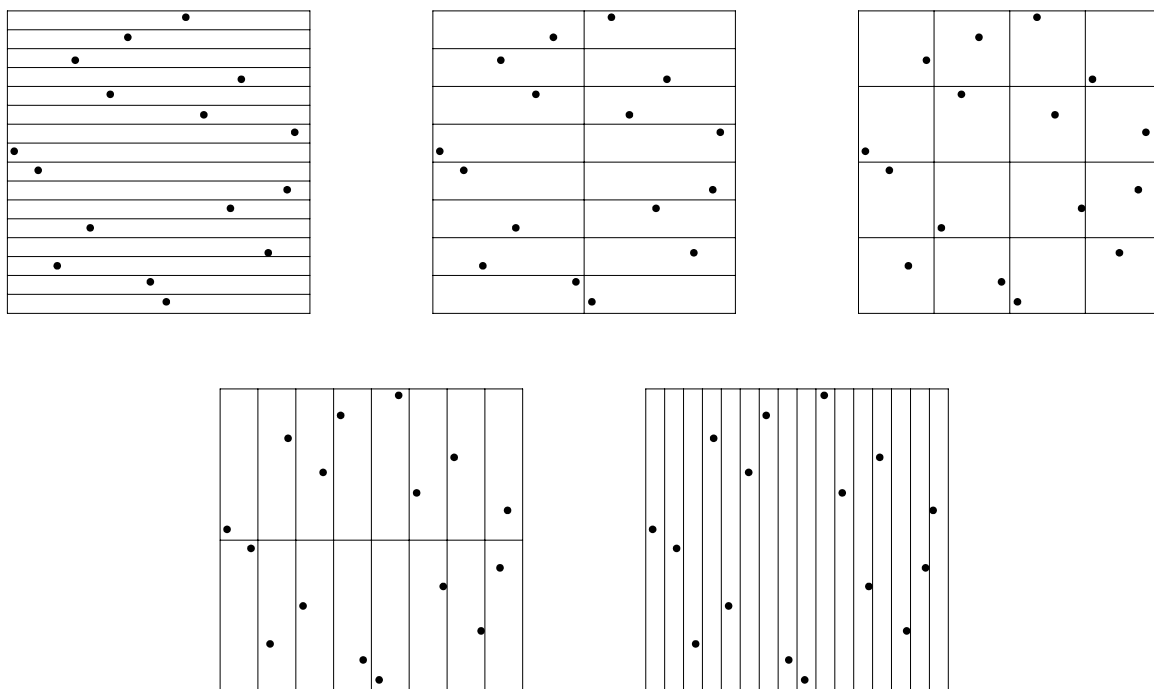
Innym przykładem próbkowania o niskiej rozbieżności jest zastosowanie sieci  $(t,m,s)$  oraz ciągów  $(t,s)$ . Przedziałem elementarnym w bazie  $p$  nazywana jest kostka o postaci:

$$E = \left[ \frac{t_1}{p^{k_1}}, \frac{t_1+1}{p^{k_1}} \right) \times \left[ \frac{t_2}{p^{k_2}}, \frac{t_2+1}{p^{k_2}} \right) \times \dots \times \left[ \frac{t_s}{p^{k_s}}, \frac{t_s+1}{p^{k_s}} \right), \quad (10)$$

gdzie  $k_j \geq 0$  są liczbami całkowitymi oraz  $0 \leq t_j \leq p^{k_j} - 1$ . Objętość przedziału elementarnego wynosi

$$\lambda(E) = p^{-\sum_{j=1}^s k_j} \quad (11)$$

Sieć  $(0,m,s)$  w bazie  $p$  jest zdefiniowana jako zbiór punktów  $P$  o liczebności  $N = p^m$  takim, że każdy przedział elementarny o objętości  $1/p^m$  zawiera dokładnie jeden punkt zbioru  $P$ . Na przykład, niech  $P$  będzie siecią  $(0,4,2)$  w bazie 3. Wtedy w kostce  $[0,1]^2$  znajduje się  $3^4 = 81$  punktów zbioru  $P$ . W każdym z przedziałów elementarnych o rozmiarach  $1 \times 1/81$ ,  $1/3 \times 1/27$ ,  $1/27 \times 1/3$  oraz  $1/81 \times 1$  znajduje się dokładnie jeden punkt zbioru  $P$ .



Rys. 4. Przykład sieci  $(0,4,2)$  w bazie 2. W każdym przedziale elementarnym o objętości  $1/16$  znajduje się dokładnie jeden punkt

Fig. 4. An example of  $(0,4,2)$ -net in base 2. In each elementary interval of volume  $1/16$  there is only one point

Sieci, dla których  $t > 0$  są uogólnieniem wspomnianych sieci w taki sposób, że w ich przypadku każdy przedział elementarny o objętości  $1/p^{t-m}$  zawiera dokładnie  $b^t$  punktów.

Ciągiem  $(t,s)$  nazywany jest nieskończony ciąg punktów  $x_1, x_2, \dots$  taki, że dla każdego  $m \geq 0$  oraz  $k \geq 0$  podciąg

$$x_{kb^{m+1}}, \dots, x_{kb^{m+1}} \quad (12)$$

jest siecią  $(t, m, s)$  w bazie  $b$ . W szczególności każdy zbiór  $x_1, \dots, x_N$  pierwszych  $N = b^m$  elementów tego ciągu jest siecią  $(t, m, s)$ .

### 3. Rodziny zbiorów używane do obliczania rozbieżności deseni

Rozbieżność jest właściwością deseni, której badanie umożliwia porównanie metod próbkowania. Idealnie rozłożone próbki miałyby tę właściwość, że w każdym zbiorze o objętości 1 znajdowałaby się taka część próbek, która jest równa 1, tj. jeśli  $n$  jest liczbą próbek w tym zbiorze, to  $n/N = 1$ . Badanie to polega na wyznaczeniu wielkości, która mówi, jak bardzo desień próbek odbiega od tego idealnego przypadku. Rodziny  $B$  używane do badania rozbieżności są dobierane tak, aby można było w łatwy sposób określić, które próbki należą do jej zbiorów, a które nie. W większości przypadków nie jest możliwe dokładne wyznaczenie rozbieżności, dlatego też wyznaczana jest jej przybliżona wartość poprzez wygenerowanie dużej liczby zbiorów i znalezienie tego, dla którego rozbieżność jest największa. Do najczęściej stosowanych zalicza się rodzinę:

$$B_1 = B^* = \{[0, v_1] \times [0, v_2] \times \dots \times [0, v_s]\}, \quad (13)$$

gdzie  $0 \leq v_i \leq 1$  dla  $i = 1, 2, \dots, s$ . Na płaszczyźnie rodzina ta odpowiada rodzinie prostokątów o lewym górnym rogu umieszczonym w punkcie  $(0, 0)$ . Dla zbiorów należących do rodziny  $B_1$  bardzo łatwo można stwierdzić, które próbki są ich elementami. Często używana jest też rodzina:

$$B_2 = \{[u_1, v_1] \times [u_2, v_2] \times \dots \times [u_s, v_s]\}, \quad (14)$$

gdzie  $0 \leq u_i \leq v_i \leq 1$  dla  $i = 1, 2, \dots, s$ . Ponieważ  $B_2$  jest rodziną szerszą od  $B_1$  i zawiera zbiory „rozrzucone” po całym desieniu, dlatego daje lepszy pogląd o jego jakości.

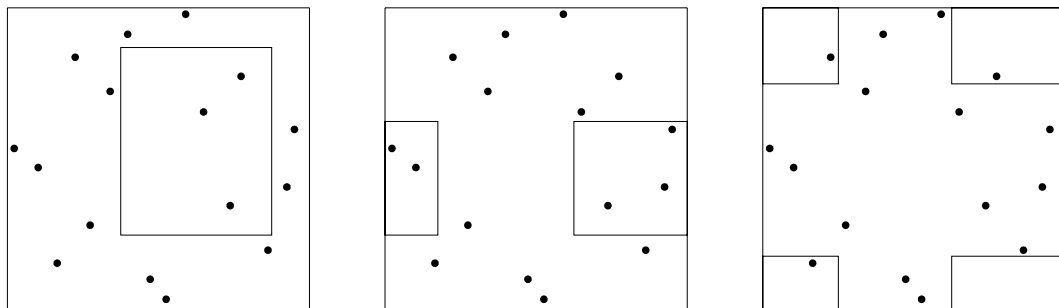
Najczęściej desenie w obrazie są wykorzystywane poprzez wielokrotne ustawianie ich kopii obok siebie, co powoduje utworzenie nowego desenia. Desenie utworzone w ten sposób będą w dalszej części pracy nazywane sklejanymi. Oba rozpatrywane dotychczas przypadki nie badają rozbieżności deseni sklejanych. Zadanie to umożliwia wykorzystanie następującej rodziny zbiorów:

$$B_3 = \{\mu(u_1, v_1) \times \mu(u_2, v_2) \times \dots \times \mu(u_s, v_s)\}, \quad (15)$$

gdzie

$$\mu(u_i, v_i) = \begin{cases} [u_i, v_i] & , \text{ gdy } u_i \leq v_i \\ [0, v_i] \cup [u_i, 0] & , \text{ gdy } u_i > v_i \end{cases} \quad (16)$$

dla  $0 \leq u_i, v_i \leq 1$  dla  $i=1,2,\dots,s$ . Przykłady zbiorów należących do  $B_3$  na płaszczyźnie przedstawia rysunek 5.



Rys. 5. Przykłady zbiorów rodziny  $B_3$  na płaszczyźnie  
Fig. 5. Examples of sets of  $B_3$  family on plane

Rodzina  $B_3$  rozszerza  $B_2$  o zbiory, do których mogą należeć próbki znajdujące się blisko przeciwległych krawędzi kostki  $[0,1]^s$ . W przypadku rodzin  $B_1$  i  $B_2$  takie próbki mogłyby należeć jedynie do zbiorów o dużej objętości. Natomiast do rodziny  $B_3$  należą także zbiory zawierające próbki, leżące blisko przeciwległych ścian kostki, których objętości mogą być bardzo małe. Dlatego może to powiększyć wartość rozbieżności desenia.

Ostatnią prezentowaną rodziną zbiorów jest rodzina kul w przestrzeni  $[0,1]^s$ , względem pewnej specjalnie określonej miary. Niech  $\alpha : [0,1] \times [0,1] \mapsto [0,1]$  będzie funkcją zdefiniowaną jako:

$$\alpha(p, q) = \min\{|p - q|, 1 - |p - q|\} \quad (17)$$

Funkcja miary  $d_\alpha$  jest określona następująco:

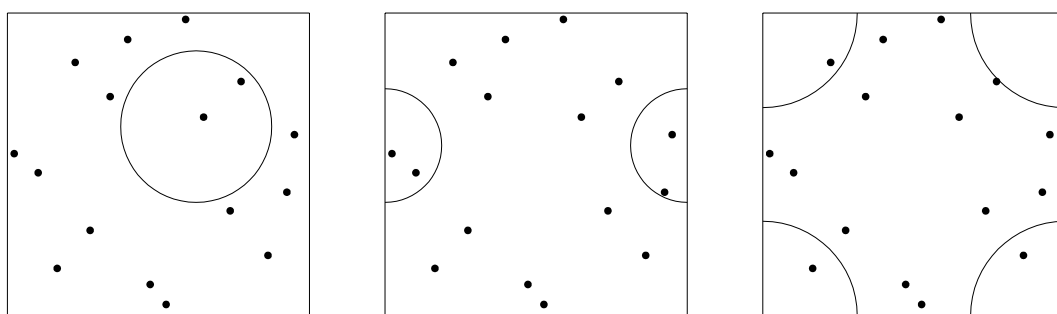
$$d_\alpha(u, v) = \sqrt{\alpha^2(u_1, v_1) + \alpha^2(u_2, v_2) + \dots + \alpha^2(u_s, v_s)}, \quad (18)$$

gdzie:  $u = (u_1, u_2, \dots, u_s)$ ,  $v = (v_1, v_2, \dots, v_s)$ ,  $u, v \in [0,1]^s$ . Rodzina  $B_4$  jest rodziną zbiorów o postaci:

$$B_4 = \{k(o, r)\}, \quad (19)$$

gdzie  $k(o, r) = \{x \in [0,1]^s : d_\alpha(o, x) \leq r\}$ , przy czym  $o \in [0,1]^s$ ,  $r \leq 0.5$ . Uzasadnieniem wyboru takiej rodziny zbiorów może być fakt, że „posługuje się” ona odległościami w sposób, w jaki widzi je człowiek, tzn. do tych zbiorów należą wszystkie próbki, które na deseni sklejonym są oddalone od ich środków o odległość euklidesową mniejszą lub równą  $r$ . Ponadto, należy zaznaczyć, że funkcja miary  $d_\alpha$  wykorzystywana jest przez próbkowanie poprzez wybór najlepszego kandydata.

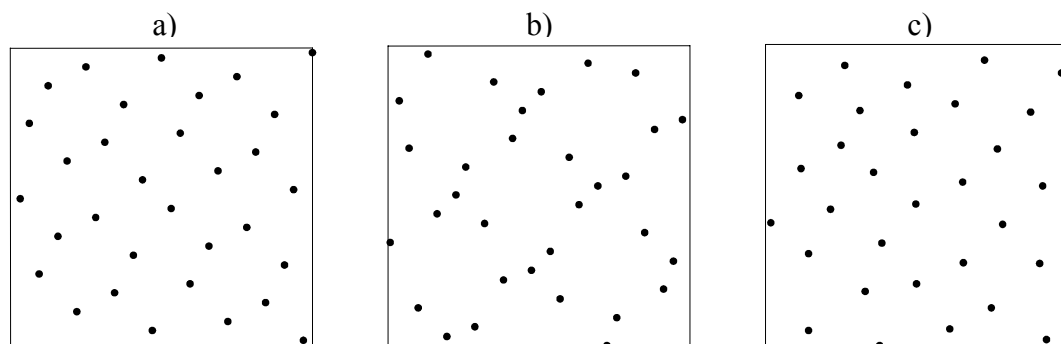




Rys. 6. Przykłady zbiorów  $B_4$  na płaszczyźnie  
 Fig. 6. Examples of sets of  $B_4$  family on plane

#### 4. Testowanie rozbieżności deseni

Zostaną teraz przedstawione wyniki testów rozbieżności dla deseni powstałych na skutek działania algorytmów przedstawionych na początku pracy. W testach było użyte próbkowanie warstwowe (StratifiedSampler), próbkowanie wykorzystujące zbiór Hammersleya (HammersleySampler), próbkowanie, które wykorzystuje ciąg (0,2) (LDSampler) oraz próbkowanie poprzez wybór najlepszego kandydata (BestCandidateSampler). Przykładowe implementacje tych algorytmów można znaleźć w książce [2].



Rys. 7. Przykłady metod próbkowania: a) HammersleySampler, b) LDSampler, c) BestCandidateSampler  
 Fig. 7. Examples of sampling methods: a) HammersleySampler, b) LDSampler, c) BestCandidateSampler

Percepcyjnie najlepiej wyglądają desenie utworzone za pomocą próbkowania z zastosowaniem metody Hammersleya i metody wyboru najlepszego kandydata. Próbkowanie jest rozłożone równomiernie, nie ma skupisk ani zbyt dużych pustych miejsc. Desenie utworzone za pomocą ciągu (0,2) mogą miejscami zawierać skupiska próbek i puste obszary.

Testy były przeprowadzone za pomocą własnego programu *Discrepancy*. Każdy algorytm próbkowania był testowany ze względu na zastosowanie różnych rodzin zbiorów ( $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $B_4$ ) oraz liczbę próbek (32, 64, 128, 256). Dla każdej możliwej trójki: metody próbkowania, rodziny zbiorów, liczby próbek, zostało wykonanych 1000 prób, na podstawie których była

wyznaczana średnia rozbieżność. W testach wykorzystywano desenie dwuwymiarowe. Do wyznaczania rozbieżności każdego z nich zostało losowo wygenerowanych 100 000 zbiorów. Po przeprowadzeniu testów uzyskano następujące wyniki:

Tabela 1

32 próbki

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
StratifiedSampler	0.1468	0.2050	0.2373	0.2243
Hammersley Sampler	0.0641	0.0897	0.0890	0.1444
LDSampler	0.0699	0.1027	0.1065	0.1793
BestCandidateSampler	0.1128	0.1348	0.1534	0.1494

Tabela 2

64 próbki

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
StratifiedSampler	0.0803	0.1095	0.1270	0.1185
Hammersley Sampler	0.0361	0.0479	0.0479	0.0838
LDSampler	0.0385	0.0606	0.0610	0.0974
BestCandidateSampler	0.0838	0.0987	0.1125	0.0969

Tabela 3

128 próbek

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
StratifiedSampler	0.0522	0.0704	0.0811	0.0749
Hammersley Sampler	0.0201	0.0255	0.0255	0.0600
LDSampler	0.0205	0.0345	0.0347	0.0601
BestCandidateSampler	0.0482	0.0560	0.0627	0.0628

Tabela 4

256 próbek

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
StratifiedSampler	0.0315	0.0418	0.0475	0.0440
Hammersley Sampler	0.0110	0.0134	0.0135	0.0334
LDSampler	0.0111	0.0221	0.0220	0.0405
BestCandidateSampler	0.0337	0.0386	0.0434	0.0410

## 5. Wnioski

Na podstawie wyników testów można wysunąć następujące wnioski:

- Zastosowanie LDSampler'a daje lepsze rezultaty niż BestCandidateSampler jeśli, do badania zostaną wybrane zbiory o krawędziach równoległych do krawędzi kostki  $[0,1]^d$ .
- Rozszerzenie rodziny zbiorów z  $B_1$  na  $B_2$  znacznie powiększa wartość rozbieżności. Dzieje się tak dlatego, że brana jest pod uwagę znacznie szersza klasa zbiorów.

- Rozszerzenie rodziny zbiorów z  $B_2$  na  $B_3$  powoduje wzrost rozbieżności tylko dla StratifiedSampler'a. Oznacza to, że pozostałe metody dadzą również dobry rozkład próbek w przypadku deseni sklejanym.
- Rozbieżność wyznaczona za pomocą rodziny  $B_3$  jest bardzo niska dla LDSampler'a w stosunku do BestCandidateSampler'a. Zastosowanie rodziny  $B_4$  różnicę tę niweluje, co bardziej odpowiada ludzkiemu postrzeganiu. Wydaje się, że użycie tej rodziny zbiorów może dać bardziej obiektywne rezultaty w badaniu rozbieżności.

## LITERATURA

1. Niederreiter H.: Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
2. Pharr M., Humphreys G.: Physically Based Rendering. From theory to implementation. Elsevier, 2003.
3. Veach E.: Robust Monte Carlo methods for light transport simulation. PhD thesis, Stanford University, 1997.

Recenzent: Dr hab. inż. Maria Pietruszka, prof. Pol. Łódzkiej

Wpłynęło do Redakcji 6 marca 2008 r.

## Abstract

The following article presents pattern discrepancy, which is a method for measuring the quality of sampling used in computer graphics. An attempt has been taken to adapt this method to the way the patterns are perceived by human. In the article we present several methods of sampling, which are then used for testing pattern discrepancy.

## Adres

Piotr KARNASIEWICZ: Katolicki Uniwersytet Lubelski Jana Pawła II, pikar@kul.lublin.pl