ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ

P.3361/94

JERZY SKRZYPCZYK

DYNAMIKA ZŁOŻONYCH UKŁADÓW MECHANICZNYCH O PARAMETRACH LOSOWYCH

MECHANIKA

Z. 120

GLIWICE
1994

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 1253

P.3361/94

JERZY SKRZYPCZYK

DYNAMIKA ZŁOŻONYCH UKŁADÓW MECHANICZNYCH O PARAMETRACH LOSOWYCH

GLIWICE 1994

OPINIODAWCY
Prof. dr hab. inż. Tadeusz Burczyński
Prof. dr hab. Bohdan Mochnacki
Prof. dr hab. inż. Bogdan Skalmierski

KOLEGIUM REDAKCYJNE
REDAKTOR NACZELNY – Prof. dr hab. inż. Jan Bandrowski
REDAKTOR DZIAŁU – Dr hab. inż. Jan Kaźmierczak
Profesor Politechniki Śląskiej
SEKRETARZ REDAKCJI – Mgr Elżbieta Leśko

REDAKCJA
Mgr Aleksandra Kłobuszowska

REDAKCJA TECHNICZNA
Alicja Nowacka

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0434-0817

Wydawnictwo Politechniki Śląskiej
ul. Kujawska 3, 44-100 Gliwice

Nakład 150+43+10 Ark. wyd. 12 Ark. druk. 12,5 Papier offset. kl.III 70x100 80g
Oddano do druku 18.10.94 Podpis. do druku 18.10.94 Druk ukończ. w grudniu 1994
Zam 397/94 Cena zł 48.000,—

Fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

SPIS TREŚCI

WSTĘP 9

1. PODSTAWOWE DEFINICJE I OZNACZENIA 13
1.1. Oznaczenia algebraiczne i topologiczne 13
1.2. Zagadnienia probabilistyczne 15

2. PODSTAWOWE WIADOMOŚCI O UKŁADACH DYNAMICZNYCH 18
2.1. Pojęcie układu dynamicznego 18
2.2. Przyczynowość i stacjonarność 23
2.3. Modele matematyczne układów dynamicznych 25

3. MODELOWANIE ZAGADNIEŃ DYNAMICZNYCH MECHANIKI STOCHASTYCZNEJ ZA POMOCĄ LOSOWYCH RÓWNAŃ CAŁKOWYCH 27
3.1. Układy mechaniczne bezpośrednio opisywane równaniami całkowymi ... 27
3.1.1. Zadanie Abela 27
3.1.2. Układ prętowy z elementem lepkosprężystym 29
3.2. Zagadnienia początkowe dla układów mechanicznych o skończonej liczbie stopni swobody z czasem ciągłym 31
3.2.1. Opis ogólny modelu w przestrzeni konfiguracyjnej 31
3.2.2. Opis ogólny modelu ze sprzężeniem zwrotnym w przestrzeni stanów 33
3.2.3. Układ mechaniczny z opóźnieniem w sterowaniu 36
3.2.4. Opis ogólny modelu z opóźnieniem i całkowym sprzężeniem zwrotnym 39
3.3. Zagadnienia początkowe dla układów dynamicznych z czasem dyskretnym w przestrzeni stanów 41
3.3.1. Opis ogólny modelu nieliniowego z czasem ciągłym i dyskretnym sygnałem wejściowym 41
3.3.2. Opis dyskretno-czasowy nieliniowego modelu różniczkowo-całkowego ze sprzężeniem zwrotnym i impulsowym sygnałem wejściowym 43
3.3.3. Opis ogólny nieliniowego modelu dyskretnego 45
3.4. Odwzorowanie Poincarego w nieliniowych układach drgających 47

4. MODELE MATEMATYCZNE SYGNAŁÓW FIZYCZNYCH 50
4.1. Sygnały deterministyczne 50
4.1.1. Sygnały ciągłe i ograniczone 51
4.1.2. Sygnały o ograniczonej energii 51
4.1.3. Sygnały okresowe 52
4.1.4. Sygnały prawie okresowe 54
4.1.5. Sygnały o ograniczonej mocy średniej 56

4.2. Sygnały stochastyczne 57
4.2.1. Sygnały ciągłe i ograniczone 58
4.2.2. Sygnały o ograniczonej średniej energii 60
4.2.3. Sygnały stacjonarne 60
4.2.4. Sygnały okresowe 61
4.2.5. Sygnały prawie okresowe 63
4.2.6. Sygnały o ograniczonej średniej mocy 66

5. UKŁADY DYNAMICZNE LINIOWE 68

5.1. Równanie rezolwenty 68
5.2. Układy deterministyczne 69
5.2.1. Własności w przestrzeniach L^2 70
5.2.2. Własności w przestrzeniach sygnałów okresowych i prawie okresowych 73
5.3. Układy stochastyczne 77
5.3.1. Własności w przestrzeniach sygnałów hilbertowskich 77
5.3.2. Własności w przestrzeniach sygnałów okresowych i prawie okresowych 79

6. ANALIZA DOKŁADNOŚCI METOD LINEARYZACJI STATYSTYCZNEJ 82

6.1. Linearyzacja statystyczna w układach niestacjonarnych 83
6.2. Linearyzacja statystyczna w układach stacjonarnych 89
6.3. Metody linearyzacji statystycznej 92
6.4. Przykład 95

7. STABILNOŚĆ NIELINIOWYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH 100

7.1. Stabilność układów, których część nieliniowa leży w sektorze stożkowym 102
7.1.1. Oznaczenia i definicje 102
7.1.2. Uogólnienie kryterium Nyquista 105
7.1.3. Stabilność złożonego układu dynamicznego 112
7.2. Stabilność układów, których część nieliniowa leży w sektorze opisanym formą kwadratową 114
7.3. Własności asymptotyczne 117
7.4. Przykład 120

8. DRGANIA OKRESOWE I PRAWIE OKRESOWE 124

8.1. Równania drgań okresowych i prawie okresowych 125
8.2. Rozkład rozwiązania w szereg Fouriera 128
8.3. Drgania okresowe w układach nieautonomicznych 130
8.3.1. Metody rzutowe rozwiązywania równań 130
8.3.2. Metoda filtru idealnego 131
8.3.3. Metoda funkcji opisującej 132
8.3.4. Przykład 135
8.4. Drgania okresowe w układach autonomicznych 139
8.4.1. Podstawowe własności 139
8.4.2. Metoda funkcji opisującej 142

9. PODSUMOWANIE I WNIOSKI KOŃCOWE 146

DODATEK A. PODSTAWOWE WIADOMOŚCI O GRUPACH ABELOWYCH 151

DODATEK B. PRZEKSZTAŁCENIA CAŁKOWE 156

DODATEK C. PROCESY STOCHASTYCZNE STACJONARNE 168

LITERATURA 173

WYKAZ OZNACZEŃ 192

STRESZCZENIE 198

CONTENTS

INTRODUCTION 9

1. BASIC DEFINITIONS AND NOTATION 13

1.1. Algebraic and topological notation 13
1.2. Probabilistic problems 15

2. DYNAMICAL SYSTEMS: BACKGROUND MATERIAL 18

2.1. Construction of dynamical systems 18
2.2. Causality and stationarity 23
2.3. Mathematical models of dynamical systems 25

3. MODELLING OF DYNAMICAL PROBLEMS OF STOCHASTIC MECHANICS WITH RANDOM INTEGRAL EQUATIONS 27

3.1. Mechanical systems directly modelled with integral equations 27
3.1.1. Abel problem 27
3.1.2. Bar-system with a visco-elastic element 29
3.2. Initial problems for continuous-time mechanical systems with a finite number of degrees of freedom 31
3.2.1. General configurational space formulation of models 31
3.2.2. General configurational space formulation of feedback models 33
3.2.3. Mechanical systems with a delay in control 36
3.2.4. General formulation of models with a delay and an integral feedback 39
3.3. Initial problems for discrete-time dynamical systems in state space formulation 41
3.3.1. General formulation of continuous-time nonlinear models with discrete input signals 41
3.3.2. Discrete-time formulation of nonlinear integrodifferential feedback models with impulse input signals 43
3.3.3. General formulation of nonlinear discrete-time models 45
3.4. Poincaré maps in nonlinear vibrating systems 47

4. MATHEMATICAL MODELS OF PHYSICAL SIGNALS 50

4.1. Deterministic signals 50
4.1.1. Continuous and bounded signals 51
4.1.2. Signals with a finite energy 51
4.1.3. Periodic signals 52
4.1.4. Almost periodic signals 54
4.1.5. Signals with a finite mean power 56

4.2. Stochastic signals 57
4.2.1. Continuous and bounded signals 58
4.2.2. Signals with a finite mean energy 60
4.2.3. Stationary signals 60
4.2.4. Periodic signals 61
4.2.5. Almost periodic signals 63
4.2.6. Signals with a finite mean power 66

5. LINEAR DYNAMICAL SYSTEMS 68

5.1. Resolvent equation 68
5.2. Deterministic systems 69
5.2.1. L^2-properties 70
5.2.2. Properties in spaces of periodic and almost periodic signals 73
5.3. Stochastic systems 77
5.3.1. Properties in spaces of Hilbert-type signals 77
5.3.2. Properties in spaces of periodic and almost periodic signals 79

6. ACCURACY ANALYSIS OF STATISTICAL LINEARIZATION METHODS 82

6.1. Statistical linearization methods in nonstationary systems 83
6.2. Statistical linearization methods in stationary systems 89
6.3. Methods of statistical linearization 92
6.4. Example 95

7. STABILITY OF NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS 100

7.1. Stability of systems with nonlinear parts in a conic sector 102
7.1.1. Notation and definitions 102
7.1.2. Nyquist criterion generalization 105
7.1.3. Stability of composed dynamical systems 112
7.2. Stability of systems with nonlinear parts in a sector desribed by a quadratic form 114
7.3. Asymptotic properties 117
7.4. Example 120

8. PERIODIC AND ALMOST PERIODIC OSCILLATIONS 124

8.1. Equations of periodic and almost periodic oscillations 125
8.2. Fourier series expansion of solutions 128
8.3. Periodic oscillations in nonautonomous systems 130
8.3.1. Projective methods 130
8.3.2. Ideal filter method 131
8.3.3. Describing function method 132
8.3.4. Example 135
8.4. Periodic oscillations in autonomous systems 139
8.4.1. Basic properties 139
8.4.2. Describing function method 142

9. FINAL REMARKS AND CONCLUSIONS 146

APPENDIX A. BACKGROUND MATERIAL FROM GROUP THEORY 151

APPENDIX B. INTEGRAL TRANSFORMS 156

APPENDIX C. STATIONARY STOCHASTIC PROCESSES 168

LITERATURE 173

NOTATION 192

SUMMARY 198

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 9

1. НАЧАЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ 13

1.1. Алгебраические и топологические обозначения 13
1.2. Случайные проблемы 15

2. НАЧАЛЬНЫЕ ИНФОРМАЦИИ О ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ 18

2.1. Определение динамической системы 18
2.2. Неантисипативные и стационарные системы 23
2.3. Математические модели динамических систем 25

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ПРИ ПОМОЩИ СЛУЧАЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 27

3.1. Механические системы непосредственно описываемые интегральными уравнениями 27
3.1.1. Задача Абела 27
3.1.2. Стержневая система с вязкопластическим элементом 29
3.2. Начальные задачи для механических систем с конечным числом степеней свободы и непрерывным временем 31
3.2.1. Общий вид моделей в конфигурационном пространстве 31
3.2.2. Общий вид моделей с обратной связью в пространстве состояний 33
3.2.3. Механическая система з опозданием в управлении 36
3.2.4. Общий вид моделей с опозданием и интегральной обратной связью 39
3.3. Начальные задачи для динамических систем с дискретным временем в пространстве состояний 41
3.3.1. Общий вид моделей нелинейных систем с непрерывным временем и дискретным сигналом на входе 41
3.3.2. Общий вид моделей с дискретным временем для нелинейной дифференциально - интегральной системы с обратной связью и импульсным сигналом на входе 43
3.3.3. Общий вид нелинейных дискретных моделей 45
3.4. Преобразование Пуанкаре в нелинейных колебательных системах 47

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИЗИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ 50

4.1. Детерминированные сигналы 50
4.1.1. Сигналы непрерывные и ограниченные 51
4.1.2. Сигналы с ограниченной энергей 51
4.1.3. Сигналы периодические 52
4.1.4. Сигналы почти периодические 54
4.1.5. Сигналы с ограниченной средней мощностю 56

4.2. Стохастические сигналы 57
4.2.1. Сигналы непрерывные и ограниченные 58
4.2.2. Сигналы с ограниченной средней энергей 60
4.2.3. Сигналы стационарные 60
4.2.4. Сигналы периодические 61
4.2.5. Сигналы почти периодические 63
4.2.6. Сигналы с ограниченной средней мощностю 66

5. ЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ 68

5.1. Резольвентное уравнение 68
5.2. Детерминированные системы 69
5.2.1. Свойства в пространствах L^2 70
5.2.2. Свойства в пространствах периодических и почти периодических сигналов 73
5.3. Стохастические системы 77
5.3.1. Свойства в пространствах гильбертовских сигналов 77
5.3.2. Свойства в пространствах периодических и почти периодических сигналов 79

6. АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ МЕТОДОВ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ 82

6.1. Статистическая линеаризация в нестационарных системах 83
6.2. Статистическая линеаризация в стационарных системах 89
6.3. Методы статистической линеаризации 92
6.4. Пример 95

7. УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ 100

7.1. Устойчивость систем, которых нелинейная часть принадлежит сектору типа конуса 102
7.1.1. Обозначения и определения 102
7.1.2. Обобщение критерия Найквиста 105
7.1.3. Устойчивость сложной динамической системы 112
7.2. Устойчивость систем, которых нелинейная часть принадлежит сектору описываемому при помощи квадратичной формы 114
7.3. Асимптотические свойства 117
7.4. Пример 120

8. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ 124

8.1. Уравнения периодических и почти периодических колебаний 125
8.2. Декомпозиция решения в ряд Фурье 128
8.3. Периодические колебания в неавтономных системах 130
8.3.1. Проекционные методы решения уравнений 130
8.3.2. Метод идеального фильтра 131
8.3.3. Метод изобразительной функции 132
8.3.4. Пример 135
8.4. Периодические колебания в автономных системах 139
8.4.1. Начальные свойства 139
8.4.2. Метод изобразительной функции 142

9. ПОДВЕДЕНИЕ ИТОГА И КОНЦЕВЫЕ ИЗЛОЖЕНИЯ 146

ПРИЛОЖЕНИЕ А. НАЧАЛЬНЫЕ ИНФОРМАЦИИ О АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ 151

ПРИЛОЖЕНИЕ Б. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ 156

ПРИЛОЖЕНИЕ Ц. СТАЦИОНАРНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ 168

ЛИТЕРАТУРА 173

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ 192

РЕЗЮМЕ 198

WSTĘP

W całej pracy przedmiotem rozważań jest analiza złożonych, mechanicznych układów dynamicznych o parametrach losowych, znajdujących się pod wpływem oddziaływań, które mają charakter stochastyczny.

Na początku zastanówmy się, co oznaczać będzie, podstawowe dla całej pracy, pojęcie "układ dynamiczny"? Z punktu widzenia mechaniki, dynamika rozwiązuje dwa podstawowe zagadnienia: zagadnienie proste polega na tym, że znając ruch należy znaleźć siły; zagadnienie odwrotne zajmuje się wyznaczaniem ruchu, jeżeli znane są siły i tzw. warunki początkowe, tj. położenia i prędkości punktów w pewnej chwili. Praktycznie, zakres dynamiki obejmuje od dawna również wiele klasycznych zagadnień pokrewnych, np.: stabilność ruchu, bifurkacje, drgania okresowe i ich stabilność i wiele innych. Do najnowszych problemów należą zagadnienia związane z ogólnie pojętym sterowaniem: identyfikacja obiektów mechanicznych, sterowanie optymalne, synteza układów sterowania itp. Metody analizy, charakterystyczne dla zagadnień mechaniki analitycznej, np. równania Hamiltona i Lagrange'a, zastosowano w wielu innych dziedzinach nauki, np. w elektrotechnice. Z drugiej strony należy odnotować fakt ogromnego wpływu np. teorii sterowania na mechanikę, co spowodowało, że wiele problemów mechanicznych zapisuje się i analizuje w postaci układu równań 1. rzędu, tzw. równań stanu, a nie w postaci układu równań 2. rzędu, które są charakterystyczne dla zagadnień mechaniki.

Odnotujmy również fakt, że wiele zagadnień z zupełnie różnych od mechaniki dziedzin nauki, takich jak np. telekomunikacja, biologia, obsługa masowa, chemia czy genetyka, opisywanych jest za pomocą modeli matematycznych, które pod względem formalnym nie różnią się niczym od modeli typowych dla mechaniki teoretycznej.

Wspomniane argumenty spowodowały, że układy mechaniczne rozpatrywane są w pracy z punktu widzenia teorii systemów, co pozwoliło na daleko posunięte uogólnienia. W związku z powyższym, drugą charakterystyczną cechą pracy jest fakt, że określenie "układ dynamiczny" jest traktowane w pracy jako uporządkowany zbiór pewnych pojęć, którego najważniejszymi elementami są: zbiory

sygnałów wejściowych i wyjściowych oraz relacja wejście - wyjście rozpatrywanego układu, patrz rozdz. 2.1.

Trzecim elementem charakterystycznym dla pracy jest przyjęcie założenia, że czas jest elementem pewnej lokalnie zwartej grupy abelowej G. Przyjęto, że wspomniana grupa jest częściowo lub całkowicie liniowo uporządkowana.

Dlaczego zdecydowano się na wprowadzenie do rozważań, ściśle związanych z techniką, tak wyrafinowanego aparatu matematycznego, jakim jest niewątpliwie teoria grup?

Zanim podjęta będzie próba odpowiedzi na to pytanie, zauważmy, że ostatnie 30 lat, to burzliwy rozwój najróżnorodniejszych metod analizy układów dynamicznych związanych z dokładnością, wrażliwością, stabilnością, sterowaniem itp. Rozwój tych wszystkich dziedzin odbywał się w zasadzie niezależnie dla układów z tzw. czasem ciągłym (zwanych w pracy układami ciągłymi) i układów impulsowych z tzw. czasem dyskretnym (zwanych w pracy układami dyskretnymi). Pomijając prace, w których analizy dokonuje się na poziomie równań operatorowych, niewiele jest publikacji, których wyniki można zastosować jednocześnie do układów ciągłych i dyskretnych. Z drugiej strony łatwo zauważyć daleko idące analogie między wynikami osiągniętymi dla obu wspomnianych rodzajów układów dynamicznych.

Dlatego zdecydowano się na przyjęcie założenia, że czas jest elementem częściowo uporządkowanej grupy abelowej, co pozwoliło na jednolite traktowanie np. wspomnianych już układów ciągłych i dyskretnych. Przyjęte założenie pozwala na podobne traktowanie również układów bardziej wyrafinowanych, np. określonych na torusie.

Charakterystyczną cechą rozważań jest zastosowanie do opisu zjawisk zachodzących w układach dynamicznych losowych równań całkowych. Bardziej szczegółowe uzasadnienie patrz rozdz. 2.1.

Przyjęcie powyższych założeń w konstrukcji pracy spowodowało konieczność zastosowania niewątpliwie trudnego aparatu matematycznego, pozwoliło jednak na jednolite sformułowanie wielu ważnych zagadnień analizy układów dynamicznych i na liczne uogólnienia.

Rozdział pierwszy zawiera podstawowe oznaczenia i definicje stosowane w całej pracy.

Rozdział drugi, to podstawowe wiadomości dotyczące układów dynamicznych będących przedmiotem dalszej analizy. Zdefiniowane zostały takie pojęcia, jak np.: uporządkowanie zbioru chwil czasowych, układ dynamiczny, przyczynowość,

stacjonarność. Omówiono podstawowe założenia dotyczące modeli matematycznych najczęściej spotykanych w pracy.

W rozdziale trzecim przedstawione zostały przykłady zastosowań losowych równań całkowych do różnorodnych zagadnień dynamiki układów mechanicznych, ze szczególnym uwzględnieniem, pojawiających się w takich układach, elementów teorii sterowania takich, jak np. sprzężenie zwrotne, sygnały sterujące, opóźnienia w sterowaniu itp. Duży nacisk położony został na szczegółowe zaprezentowanie techniki przekształcania równań mechaniki, mających zróżnicowany charakter, do jednolitej formy równań całkowych.

Rozdział czwarty to przegląd, najważniejszych z punktu widzenia zastosowań, modeli matematycznych sygnałów fizycznych. Ze względu na duży stopień abstrakcji prowadzonych rozważań, aby ułatwić czytanie pracy, sygnały deterministyczne i stochastyczne omówiono niezależnie od siebie.

Rozdział piąty zawiera omówienie najważniejszych własności układów liniowych. Przedstawione zostało pojęcie rezolwenty równania całkowego typu Volterry II rodzaju określonego na lokalnie zwartej grupie abelowej. Przeanalizowano niektóre własności układów liniowych dla sygnałów o skończonej energii oraz dla sygnałów okresowych i prawie okresowych. W celu zapewnienia większej czytelności pracy, rozważania deterministyczne i probabilistyczne zostały potraktowane oddzielnie.

Rozdziały szósty do ósmego, to analiza wybranych zagadnień typowych dla dynamiki układów mechanicznych. Rodział szósty jest próbą analizy jakościowej i ilościowej dokładności różnych metod linearyzacji statystycznej, w zastosowaniu do wielowymiarowych układów dynamicznych. Rozpatrywane są układy stacjonarne i niestacjonarne.

Rozdział siódmy zawiera wybrane wyniki dotyczące analizy stabilności typu wejście-wyjście w sensie średnim. Rozważania dotyczą stabilności w tzw. rozszerzonej przestrzeni energetycznej.

W rozdziale ósmym kontynuowane są badania z rozdziału siódmego. Analiza koncentruje się jednak na warunkach powstawania drgań okresowych i prawie okresowych w układach autonomicznych i nieautonomicznych. Wyniki dotyczące istnienia stochastycznych drgań okresowych w układach nieliniowych bazują na twierdzeniu Schaudera i pojęciu indeksu operatora zwartego.

Praca zawiera ponadto trzy dodatki, zawierające informacje uzupełniające o charakterze matematycznym, które mają na celu ułatwienie czytania pracy. Dodatek A zawiera podstawowe informacje dotyczące grup abelowych, porządku w

grupach, grupach dualnych, topologii, miarach Haara itp. W dodatku B omówione zostały oryginalne wyniki autora dotyczące przekształceń całkowych funkcji określonych na grupach abelowych. Wyniki te są szeroko wykorzystywane w całej pracy. Dodatek C zawiera podstawowe wyniki dotyczące przekształceń sygnałów stacjonarnych w liniowych układach dynamicznych.

Rozdział I. PODSTAWOWE DEFINICJE I OZNACZENIA

1.1. OZNACZENIA ALGEBRAICZNE I TOPOLOGICZNE

Niech symbole $\subset$ i $\supset$ oznaczają zwykłe relacje zawierania pomiędzy zbiorami, nie wykluczają one możliwości równości zbiorów (w tym przypadku używane będą też symbole $\subseteq$ i $\supseteq$). A' oznaczać będzie zwykłe dopełnienie zbioru A, $A\cap B$ część wspólną zbiorów A i B, $A\cup B$ sumę, $A\setminus B$ różnicę zbiorów A i B, A^d domknięcie zbioru A, $a\in A$ fakt, że a jest elementem zbioru A.

Oznaczenie $\mathbb{R}^1$ jest zarezerwowane dla zbioru liczb rzeczywistych, $\mathbb{C}^1$ dla zbioru liczb zespolonych, $\mathbb{Z}^1$ dla zbioru liczb całkowitych. Zespolone i rzeczywiste przestrzenie n-wymiarowe dla $n=2,3,..$ będą oznaczane odpowiednio $\mathbb{C}^n$ i $\mathbb{R}^n$. Podprzestrzeń wszystkich nieujemnych liczb rzeczywistych oznaczana będzie $\mathbb{R}^1_+$ (podobnie $\mathbb{Z}^1_+$).

A^T i x^T oznaczać będą odpowiednio transpozycję macierzy A i wektora x, a A^* (odpowiednio x^*) macierz (wektor) sprzężoną do macierzy A^T (wektora x^T), $\bar{A}$ ($\bar{x}$) macierz sprzężoną do macierzy A (wektora x). Wyznacznik macierzy kwadratowej $A=[a_{jk}]$ oznaczać będziemy $\det(A)$, ślad macierzy $\mathrm{tr}(A)=\sum_j a_{jj}$, normę euklidesową wektora x jako $|x|$, iloczyn skalarowy wektorów x i y przez $\langle x,y\rangle$,

$$|x| = (x^*x)^{1/2} \quad , \qquad \langle x,y\rangle = x^*y$$

Przestrzeń operatorów odwzorowujących $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ oznaczana będzie $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ (podobnie $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^m)$), macierz jednostkowa jako I.

Dla dowolnej macierzy A, pierwiastki kwadratowe z wartości własnych macierzy A^*A będą nazywane wartościami osobliwymi macierzy A. Dla dowolnej macierzy A będzie używana notacja $\sigma_{max}(A)$ dla największej wartości osobliwej macierzy A i $\sigma_{min}(A)$ odpowiednio dla najmniejszej. Wartości osobliwe przyjmują wielkości nieujemne, ponieważ A^*A jest zawsze macierzą hermitowską (dodatnio półokreśloną). W analogiczny sposób oznaczamy przez $\lambda_{max}(A)$ ($\lambda_{min}(A)$) największą (odpowiednio najmniejszą) wartość własną macierzy hermitowskiej $(A+A^*)/2$.

Będą używane następujące oznaczenia logiczne: $\forall$ x $\cong$"dla wszystkich x zachodzi", $\exists$ x $\cong$ "istnieje takie x, że", $\neg \cong$ "zaprzeczenie", $\Rightarrow \cong$ "jeżeli, to", $\Leftrightarrow \cong$ "wtedy i tylko wtedy", := $\cong$ "równe z definicji", $\vee \cong$ "alternatywa", $\wedge \cong$ "koniunkcja", $\cong$ oznaczać będzie izomorfizm.

W całej pracy G oznaczać będzie lokalnie zwartą grupę abelową (lzga.). Przyjmuje się, że grupy, z którymi mamy do czynienia, są lokalnie zwarte oraz że w całej pracy stosowana będzie notacja addytywna do oznaczenia działań grupowych.

Element neutralny grupy G oznaczany jest jako "e", naturalnie e$\in$G.

Niech dalej stale G oznacza lzga. z miarą Haara $\mu(\cdot)$. Wówczas $\mu(G) < \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest grupą zwartą. Jeżeli grupa G nie jest zwarta, to zawsze $\mu(G) = \infty$.

Grupę wszystkich ciągłych charakterów grupy G nazywamy grupą charakterów grupy G lub grupą sprzężoną (dualną) i oznaczamy $\hat{G}$. Miarę Haara w grupie dualnej oznaczać będziemy $m(\cdot)$ [17, 34, 36, 76, 314, 371-373].

Dla podgrupy H grupy G symbol G/H oznaczać będzie przestrzeń warstw względem H. Punktami G/H będą zbiory (warstwy) x+H i G/H=$\{x+H: x\in G\}$. Niech H będzie normalną, domkniętą podgrupą grupy G. Odwzorowanie kanoniczne G na G/H oznaczymy przez $\pi_H: x \longrightarrow y=\pi_H(x)=x+H$. Grupa G/H nazywana będzie grupą ilorazową grupy G względem podgrupy H. W dalszych rozważaniach założono, że warunek normalności podgrupy H jest zawsze spełniony.

Na każdej z grup G, G/H i H określona jest miara Haara, odpowiednio μ, μ_1, μ_2. Relację między nimi określa wzór Weila, jest ona postaci $\mu=\mu_2\mu_1$. Dla lzga. w praktyce można nie rozróżniać miar μ i μ_1, por. [207].

Kompaktyfikacją Bohra grupy G nazywana będzie para (G_B, i_B), gdzie G_B-grupa zwarta, a $i_B: G \longrightarrow G_B$ oznacza homomorfizm, patrz Dodatek A.

Elementy grupy oznaczane będą małymi literami t, s, τ, g, h, ...

Niech A i B będą podzbiorami grupy G. Oznaczenie A+B oznaczać będzie zbiór $\{a+b: a\in A, b\in B\}$, natomiast -A zbiór $\{-a: a\in A\}$. Piszemy dalej a+B dla oznaczenia $\{a\}$+B i B+a dla B+$\{a\}$. 2A:=A+A, 3A:=A+A+A, itd.

Więcej informacji dotyczących lzga. czytelnik znajdzie w Dodatku A.

1.2. ZAGADNIENIA PROBABILISTYCZNE

W całej pracy trójka uporządkowana $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ oznaczać będzie przestrzeń probabilistyczną, gdzie:

- Ω jest przestrzenią zdarzeń elementarnych, elementy $\omega\in\Omega$ tej przestrzeni nazywane będą zdarzeniami elementarnymi;
- $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}(\Omega)$ jest σ-ciałem podzbiorów borelowskich Ω;
- $\mathbb{P}(\cdot)$ jest miarą unormowaną ($\mathbb{P}(\Omega)=1$) określoną na $\mathfrak{F}$, zwaną prawdopodobieństwem [22, 92-94, 163, 224, 248, 295, 318, 371].

Zmienną losową $x(\omega)$, $\omega\in\Omega$, o wartościach w $\mathbb{C}^n$ (analogicznie w $\mathbb{R}^n$) nazywać będziemy mierzalną funkcję zespoloną (rzeczywistą) $x: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^n$ (ewent. $\mathbb{R}^n$).

Wartością średnią (oczekiwaną) zespolonej zmiennej losowej $x(\omega)$, $\omega\in\Omega$, nazwiemy wektor przyjmujący wartości w $\mathbb{C}^n$ zdefiniowany relacją

$$\mathbb{E}x = \mathbb{E}(x) := \int_\Omega x(\omega)\mathbb{P}(d\omega) \tag{1}$$

Przestrzeń Hilberta zmiennych losowych 2. rzędu oznaczać będziemy dalej $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}; \mathbb{C}^n)$. Niech $x, y\in L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}; \mathbb{C}^n)$. Normę $\|\cdot\|_2$ w tej przestrzeni zdefiniujemy w następujący sposób:

$$\|x(\cdot)\|_2 := \left(\mathrm{tr}\left(\mathbb{E}(x(\omega)x^*(\omega))\right)\right)^{1/2} = \left(\mathbb{E}(x^*(\omega)x(\omega))\right)^{1/2} = \left(\mathbb{E}(\langle x(\omega), x(\omega)\rangle)\right)^{1/2} \tag{2}$$

a iloczyn skalarowy $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$

$$\langle x(\cdot), y(\cdot)\rangle_2 := \mathrm{tr}\left(\mathbb{E}(x(\omega)y^*(\omega))\right) = \mathbb{E}(x^*(\omega)y(\omega)) = \mathbb{E}(\langle x(\omega), y(\omega)\rangle) \tag{3}$$

Przestrzeń $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}; \mathbb{C}^n)$ jest szczególnym przypadkiem bardziej ogólnej przestrzeni zmiennych losowych, którą oznaczać będziemy $L^p(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}; \mathbb{C}^n)$, $1\le p<\infty$, z normą $\|\cdot\|_p$ zdefiniowaną następująco

$$\|x(\cdot)\|_p := \left(\mathbb{E}\left((x^*(\omega)x(\omega))^{p/2}\right)\right)^{1/p} \tag{4}$$

Przestrzeń $L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}; \mathbb{C}^n)$, zmiennych losowych istotnie ograniczonych definiujemy inaczej. Normę w tej przestrzeni, dla zmiennej losowej x, definiujemy następująco

$$|||x(\cdot)||| := \mathbb{P}\text{-ess sup}_{\omega\in\Omega}|x(\omega)| := \inf\{\alpha\in\mathbb{R}^1: \alpha\ge 0, \mathbb{P}\{\omega\in\Omega: |x(\omega)|>\alpha\}=0\} \tag{5}$$

W analogiczny sposób można wprowadzić przestrzenie zmiennych losowych rzeczywistych $L^p(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R}^n)$, $p\ge 1$. Przestrzenie $L^p(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}; \mathbb{C}^n)$ oraz $L^p(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R}^n)$ dla $\forall$ $p\ge 1$ są przestrzeniami Banacha [22, 93-94, 107, 315, 371].

Procesem stochastycznym $\xi(t,\omega), t\in G, \omega\in\Omega$ o wartościach rzeczywistych nazywana będzie jednoparametryczna rodzina zmiennych losowych $\xi(t,\cdot)$ o wartościach rzeczywistych, gdzie $t\in G$ jest elementem pewnej lzga. Jeżeli ustalimy elementarne zdarzenie losowe $\omega=\omega_0\in\Omega$, to $\xi(\cdot,\omega_0)$ jest "zwykłą" funkcją określoną na G, zwaną realizacją procesu stochastycznego ξ. Czasem wygodniej jest traktować proces stochastyczny ξ o wartościach rzeczywistych jako mierzalne odwzorowanie $G\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Niech

$$\mathbb{P}\left\{\xi(t_1,\omega)\in A_1, \xi(t_2,\omega)\in A_2, \ldots\ldots, \xi(t_k,\omega)\in A_k\right\} \tag{6}$$

oznacza

$$\mathbb{P}\left\{\omega: \xi(t_1,\omega)\in A_1, \xi(t_2,\omega)\in A_2, \ldots\ldots, \xi(t_k,\omega)\in A_k\right\} \tag{7}$$

gdzie $t_i\in G$, $A_i\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$, $i=1,2,\ldots,k$ zbiory borelowskie w $\mathbb{R}^n$. Oznaczymy dalej

$$A_k := \left\{x\in\mathbb{R}^n: -\infty<x<x_k,\ x_k\in\mathbb{R}^n\right\} \tag{8}$$

Wówczas

$$F_{t_1,t_2,\ldots,t_k}(x_1,x_2,\ldots,x_k) := \mathbb{P}\left\{\xi(t_1,\omega)<x_1, \xi(t_2,\omega)<x_2, \ldots, \xi(t_k,\omega)<x_k\right\} \tag{9}$$

oznacza dystrybuantę wektora losowego $\left[\xi_{t_1}^T, \xi_{t_2}^T, \ldots, \xi_{t_k}^T\right]^T$, $t_i\in G$, $x_i\in\mathbb{R}^n$.

Procesem stochastycznym $\xi(t,\omega), t\in G, \omega\in\Omega$ o wartościach zespolonych (należących do $\mathbb{C}^n$) nazwiemy uporządkowaną parę procesów rzeczywistych $x(t,\omega)$, $y(t,\omega)$ o wartościach w $\mathbb{R}^n$, takich że $\xi(t,\omega)=x(t,\omega)+iy(t,\omega)$ $\forall$ $t\in G, \omega\in\Omega$. Niech $\xi(t,\omega)$, $\eta(t,\omega)$, $t\in G, \omega\in\Omega$ będą procesami o wartościach zespolonych z $\mathbb{C}^n$. Wartością oczekiwaną (średnią) procesu stochastycznego $\xi(t,\omega)$, $t\in G, \omega\in\Omega$ nazwiemy nielosową funkcję czasu $(\mathbb{E}\xi)(t)=\mathbb{E}(\xi(t,\cdot))$, $t\in G$ przyjmującą wartości z $\mathbb{C}^n$, zdefiniowaną relacją

$$(\mathbb{E}\xi)(t) := \int_\Omega \xi(t,\omega)\mathbb{P}(d\omega), \qquad t\in G \tag{10}$$

Macierzą wartości średniokwadratowych (drugich momentów) procesu stochastycznego $\xi(t,\omega)$, $t\in G, \omega\in\Omega$ nazywamy nielosową funkcję czasu $(\mathbb{E}\xi\xi^*)(t), t\in G$, o wartościach z $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$

$$(\mathbb{E}\xi\xi^*)(t) := \int_\Omega \xi(t,\omega)\xi^*(t,\omega)\mathbb{P}(d\omega), \qquad t\in G \tag{11}$$

Macierzą wariancji procesu stochastycznego $\xi(t,\omega)$, $t\in G, \omega\in\Omega$ nazywamy nielosową funkcję czasu $\sigma_\xi^2(t), t\in G$ o wartościach z $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$

$$\sigma_\xi^2(t) := \int_\Omega \left(\xi(t,\omega)-\mathbb{E}\xi(t)\right)\left(\xi(t,\omega)-\mathbb{E}\xi(t)\right)^* \mathbb{P}(d\omega), \qquad t\in G \tag{12}$$

Macierzą funkcji autokorelacji procesu stochastycznego $\xi(t,\omega)$, $t\in G, \omega\in\Omega$, nazywamy nielosową funkcję $R_{\xi\xi}: G\times G \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$

$$R_{\xi\xi}(t_1,t_2) := \mathbb{E}\left(\xi(t_1,\omega)\xi^*(t_2,\omega)\right) = \int_\Omega \xi(t_1,\omega)\xi^*(t_2,\omega)\mathbb{P}(d\omega), \qquad t_1,t_2\in G \tag{13}$$

Macierzą funkcji korelacji wzajemnej procesów stochastycznych $\xi(t,\omega)$ i $\eta(t,\omega)$, $t\in G, \omega\in\Omega$ nazywamy nielosową funkcję $R_{\xi\eta}: G\times G \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$

$$R_{\xi\eta}(t_1,t_2) := \mathbb{E}(\xi(t_1,\omega)\eta^*(t_2,\omega)) = \int_\Omega \xi(t_1,\omega)\eta^*(t_2,\omega)\mathbb{P}(d\omega), \qquad t_1,t_2\in G \tag{14}$$

Bardzo ważną klasą sygnałów stochastycznych są sygnały 2. rzędu. Niech $\xi(t,\omega), t\in G, \omega\in\Omega$ będzie sygnałem stochastycznym o wartościach z $\mathbb{C}^n$. Proces ten nazywany jest procesem 2. rzędu lub procesem hilbertowskim, jeżeli $\forall$ $t\in G$ funkcja $\xi(t,\cdot)$ jest zmienną losową 2. rzędu, tzn.

$$\operatorname{tr}\left(R_{\xi\xi}(t,t)\right) < \infty, \qquad \forall\ t\in G \tag{15}$$

Podobne wielkości można zdefiniować dla procesów stochastycznych o wartościach rzeczywistych.

Więcej informacji o procesach stochastycznych określonych na lzga. G czytelnik znajdzie w pracach [22, 92-94, 107, 125-127, 161, 163-164, 224, 248, 295, 299, 318, 371, 375].

Rozdział II. PODSTAWOWE WIADOMOŚCI O UKŁADACH DYNAMICZNYCH

Podstawowym przedmiotem badań w całej pracy jest dynamika układów mechanicznych. Klasa rozpatrywanych zagadnień sugeruje, że najbardziej właściwe będzie rozpatrywanie tych układów przy zastosowaniu metod charakterystycznych dla teorii sterowania bądź teorii systemów.

Przy zastosowaniu wspomnianej metodologii abstrahuje się od charakteru rozpatrywanych układów, tzn. nie ma większego znaczenia, czy mamy do czynienia z badaniem ruchu układu punktów materialnych pod wpływem działających na nie sił, czy też np. z badaniem zachowania się populacji, analizą układu elektromechanicznego lub też z zagadnieniem telekomunikacji, pod jednym warunkiem, że modele matematyczne rozpatrywanych układów mechanicznych będą takie same. Ogromne zróżnicowanie badanych współcześnie zagadnień z różnych dziedzin nauki, ich wzajemne przenikanie się, wymusza takie właśnie, uniwersalne podejście do spraw dynamiki.

2.1. POJĘCIE UKŁADU DYNAMICZNEGO

Pojęcie "układ dynamiczny" nie jest określone jednoznacznie [1,5,10,60, 91,109,123,134,138,225,250,270,297,374]. W klasycznym sformułowaniu można w zasadzie mówić o układzie dynamicznym, jeżeli są określone jego następujące elementy:

A1) zbiór momentów czasu T, który jest zbiorem uporządkowanym liczb rzeczywistych, na ogół $T=\mathbb{R}^1$ lub $T=\mathbb{Z}^1$ (lub jest ich podzbiorem). ■

Jeżeli $T=\mathbb{R}^1$, będziemy mówić o układzie dynamicznym z czasem ciągłym lub po prostu o układzie ciągłym. W przypadku gdy $T=\mathbb{Z}^1$ (lub $T\cong\mathbb{Z}^1$) mówimy o układzie dynamicznym z czasem dyskretnym lub po prostu o układzie dyskretnym.

A2) Zbiór stanów układu X, na ogół będący przestrzenią $\mathbb{R}^n$. ■

A3) Zbiór chwilowych wartości wielkości wejściowych (sygnałów wejściowych) X_u, na ogół będący przestrzenią $\mathbb{R}^p$. ■

A4) Zbiór dopuszczalnych oddziaływań wejściowych $u\in U$ (sygnałów wejściowych) $u: T \longrightarrow X_u$ w przypadku deterministycznym lub $u: \Omega\times T \longrightarrow X_u$, jeżeli mamy do czynienia z układem z sygnałem wejściowym stochastycznym. ■

A5) Zbiór chwilowych wartości wielkości wyjściowych (sygnałów wyjściowych) X_y, na ogół będący przestrzenią $\mathbb{R}^m$. ■

A6) Zbiór sygnałów wyjściowych $y\in Y$, $y: T \longrightarrow X_y$ w przypadku deterministycznym lub $y: \Omega\times T \longrightarrow X_y$, jeżeli mamy do czynienia z układem deterministycznym z wejściem stochastycznym, układem o parametrach losowych lub układem, który łączy obie te cechy. ■

A7) Odwzorowanie zwane funkcją (operatorem, transmitancją) przejścia stanu

$$\phi : T\times T\times X\times U \longrightarrow X \quad \text{lub} \quad \phi : T\times T\times X\times U\times\Omega \longrightarrow X$$

w przypadku deterministycznym lub probabilistycznym odpowiednio, której wartościami w przypadku losowym są stany układu

$$x(t,\omega) = \phi(t,\tau,x_0,u(\cdot,\omega),\omega) \in X$$

w chwili $t\in T$, jeżeli w chwili początkowej $\tau\in T$ znajdował się w położeniu $x_0\in X$ i był pod wpływem sygnału wejściowego $u(s,\omega)\in U$, $s\in[\tau,t[$. ■

Na ogół relacja ϕ nie jest znana w sposób jawny. Jeżeli układ dynamiczny jest opisany zwyczajnym równaniem różniczkowym lub różnicowym, to ϕ jest po prostu rozwiązaniem tego równania. Z tego powodu funkcja ϕ bywa nazywana trajektorią, orbitą, ruchem, rozwiązaniem (równania ruchu), krzywą rozwiązania itp. Z wyżej wymienionych względów hipoteza (A7) bywa formułowana odmiennie, mianowicie układ dynamiczny charakteryzuje się poprzez podanie równań opisujących jego zachowanie. Są to na ogół równania różniczkowe lub różnicowe.

Często celowe jest odróżnienie stanu układu od wielkości wyjściowych i wtedy formułuje się jeszcze jeden postulat.

A8) Zadana jest funkcja (operator) wyjścia $\psi: T\times X \longrightarrow Y$ lub $\psi: T\times X\times\Omega \longrightarrow Y$ określający w przypadku losowym sygnał wyjściowy $\psi(t,\omega)=\psi(t,x(t,\omega))$. ■

W związku z powyższym układ dynamiczny określa się jako uporządkowany zbiór, czyli ósemkę, wprowadzonych w (A1-A8) wielkości $(T,X,X_u,U,X_y,Y,\phi,\psi)$. Naturalnie, w literaturze spotykane są różne modyfikacje hipotez (A1-A8).

W licznych rozważaniach teoretycznych, jak również w zastosowaniach, zbiór T występuje jako obiekt o bardziej złożonej strukturze algebraicznej, niż dzieje się to w klasycznych przypadkach, tzn. gdy $T=\mathbb{R}^1$ lub $T=\mathbb{Z}^1$ (w ogólności

$T\cong\mathbb{R}^1$ lub $T\cong\mathbb{Z}^1$). Interesujące są prace Emrego i Khargonekara [73-74,133] oraz Kamena, Greena [124] dotyczące analizy układów dynamicznych z czasem, który jest elementem pierścienia abelowego. Bardzo interesująca jest np. analiza drgań okresowych w dynamicznym układzie mechanicznym przy wykorzystaniu odwzorowań Poincarego i pojawienie się w tym kontekście "czasu" jako elementu jednowymiarowego torusa $T=\mathbb{T}^1$, patrz [291] oraz część 3.4. Warto wspomnieć w tym miejscu o burzliwie rozwijającym się dziale dynamiki układów komórkowych [297], w którym przyjmuje się, że "czas" jest elementem pewnego zbioru $T=\mathbb{Z}^1\times\mathbb{R}^n$.

Pragnienie objęcia jednolitą analizą wszystkich tych interesujących przypadków skłoniło do przyjęcia założenia, że w całej pracy dla zbioru T prawdziwe jest następujące założenie:

B1) Zbiór chwil czasowych T jest częściowo uporządkowaną (ze względu na relację "≤"), lokalnie zwartą, addytywną grupą abelową (G,≤), T=G. ■

Koncepcja analizy układów dynamicznych, w których czas jest elementem grupy abelowej, nie jest nowa, nie doczekała się jednak do tej pory kompleksowego opracowania. W różnym stopniu założenie to było wykorzystywane w pracach Falba, Freedmana, Zamesa [77-78,87] oraz Skrzypczyka [234,236-239,245-246].

Konsekwencją przyjęcia założenia (B1) jest fakt, że opis układu dynamicznego za pomocą równań różniczkowych nie jest najlepszym pomysłem, z prostego powodu: grupa, bez dodatkowych założeń, nie jest zbiorem liniowym i zdefiniowanie zwykłej operacji różniczkowania (operacji różnicowej) nie jest w ogólnym przypadku możliwe. Ponadto okazuje się, że wiele ważnych własności układów dynamicznych, takich jak: ciągłość, przyczynowość, stacjonarność itp., odnosi się do dużo szerszej klasy operacji niż wspomniane operacje różniczkowe lub różnicowe. Dotychczasowa praktyka wynika zatem raczej z decydującej roli, jaką w teorii układów mechanicznych odgrywają do chwili obecnej równania różniczkowe (różnicowe).

Można jednak pokazać, że bardzo szeroka klasa operatorów rozpatrywanych w zastosowaniach technicznych posiada reprezentację w postaci operatorów całkowych. Sprawy dotyczące metod przedstawienia operatorów w postaci całkowej zostały w pracy całkowicie pominięte. W przypadku ciągłych układów dynamicznych odsyłamy czytelnika np. do prac [64,70,109,116,138]. W przypadku ogólnym zagadnienie reprezentacji nie zostało rozwiązane do dnia

dzisiejszego. Interesujące wyniki czytelnik znajdzie w pracach Dinculeanu [64], Buchwałowa [316], Lessnera [148], Korotkowa [333-335]. O pełnym rozwiązaniu tych zagadnień można mówić tylko w przypadku przestrzeni $L^2(G;\mathbb{R}^n)$, por. Korotkow [334-335], Halmos, Sunder [106].

Szczególna rola, jaką odgrywają operatory całkowe w zagadnieniach dynamiki, jest przyczyną, dla której przyjęto, że relacja wejście - wyjście rozpatrywanego układu dynamicznego będzie opisywana operatorem całkowym.

W przypadku gdy dynamika układu opisywana jest równaniem całkowym, pojęcie stanu układu w rozumieniu hipotezy (A2) w zasadzie traci znaczenie, ponieważ bardziej będą nas interesować globalne własności sygnałów, a nie chwilowe wartości ich amplitud. Dla porządku zachowujemy jednak poprzednie oznaczenia.

W całej pracy zakładamy, że dla rozpatrywanych układów dynamicznych określonych na częściowo uporządkowanej lzga. (G,≤) określone sa następujące elementy:

B2) zbiór stanów układu jest przestrzenią liczb rzeczywistych $X=\mathbb{R}^n$. ■

B3) Zbiór chwilowych wartości wielkości wejściowych (sygnałów wejściowych) jest przestrzenią liczb rzeczywistych $X_u=\mathbb{R}^p$. ■

B4) Zbiór dopuszczalnych oddziaływań wejściowych $u\in U$ (sygnałów wejściowych) $u:T\longrightarrow X_u$ w przypadku deterministycznym lub $u:\Omega\times T\longrightarrow X_u$, jeżeli mamy do czynienia z układem z sygnałem wejściowym stochastycznym, zakłada się, że U jest przestrzenią topologiczną, na ogół przestrzenią Banacha. ■

B5) zbiór chwilowych wartości wielkości wyjściowych (sygnałów wyjściowych) jest przestrzenią $X_y=\mathbb{R}^m$. ■

B6) Zbiór sygnałów wyjściowych $y\in Y$, $y:T\longrightarrow X_y$ w przypadku deterministycznym lub $y:\Omega\times T\longrightarrow X_y$, jeżeli mamy do czynienia z układem deterministycznym z wejściem stochastycznym, układem o parametrach losowych lub układem, który łączy obie te cechy, zakłada się, że Y jest przestrzenią topologiczną, na ogół przestrzenią Banacha. ■

B7) Odwzorowanie zwane operatorem (operacją, transmitancją) przejścia układu dynamicznego

$$\phi : U\longrightarrow Y,$$

które w przypadku probabilistycznym może być operatorem o parametrach losowych [39]. Będziemy zakładać, że warunek ten jest spełniony, jeżeli znana jest relacja (równanie), która wiąże sygnały wejściowe i wyjściowe w zależność funkcyjną.

W całej pracy zakłada się, że relacja wejście - wyjście przyjmuje postać wielowymiarowego, nieliniowego, losowego równania całkowego typu Volterry-Stieltjesa 2. rodzaju postaci

$$y(t,\omega) = u(t,\omega) + \int_Q h(ds,\omega)f(t-s,y(t-s,\omega),\omega), \qquad t\in Q, \omega\in\Omega$$

gdzie $Q\subset G$ jest pewną półgrupą, h jest miarą wektorową o wahaniu ograniczonym, $h\in V(Q;L^\infty(\Omega,\mathfrak{F},P;\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)))$. ■

Uzupełniające informacje na temat założeń w hipotezie (B7) można znaleźć np. w pracach [20-22, 64, 158, 282, 335].

Sygnały wyjściowe y i sygnały opisujące stan układu x są w całej pracy utożsamiane ze sobą. Jest to usprawiedliwione zakresem tematycznym niniejszego opracowania.

DEFINICJA 2.1. Układ dynamiczny określony na częściowo uporządkowanej lzga. $(G,\leq)$ rozpatrywany w pracy definiujemy jako uporządkowany zbiór, czyli ósemkę, wprowadzonych w (B1-B7) wielkości $(G,\leq,X,X_u,U,X_y,Y,\phi)$. ■

W całej pracy przyjmuje się, że lzga. $(G,\leq)$ jest ustalona. Można również przyjąć, że X, X_u i X_y stanowią integralną część definiowanych przestrzeni sygnałów wejściowych i wyjściowych U i Y. W związku z powyższym można przyjąć zmodyfikowaną wersję określenia układu dynamicznego, która powinna być bardziej czytelna w naszych zastosowaniach.

DEFINICJA 2.2. Układ dynamiczny określony na częściowo uporządkowanej lzga. $(G,\leq)$, przy ustalonych (X,X_u,X_y) definiujemy jako uporządkowaną trójkę (U,Y,ϕ). ■

W uproszczeniu, jeżeli wiemy, jakie są przestrzenie sygnałów wejściowych i wyjściowych, często mówimy, że układ dynamiczny jest określony, jeżeli znana jest dla niego relacja wejście - wyjście.

2.2. PRZYCZYNOWOŚĆ I STACJONARNOŚĆ

Niech G oznacza dalej stale lzga. z notacją addytywną. Podstawowe dla rozpatrywanych układów dynamicznych pojęcie porządku (częściowego porządku) w grupie G wprowadzone zostanie w następujący sposób. Przyjmijmy, że:

C1) Q oznaczać będzie domkniętą $(Q+Q\subset Q)$ podpółgrupę G $(Q\subset G)$, o mierze Haara $0<\mu(Q)\leq\infty$. ■

Wprowadzenie do rozważań półgrupy Q pozwala na częściowe uporządkowanie grupy G (por. Dodatek A). Załóżmy, że G_τ oznaczać będzie podzbiór grupy G określony w sposób następujący

$$G_\tau := \tau - Q = \{g\in G:\ g=\tau+t,\ t\in -Q\} \qquad \tau\in G.$$

W podobny sposób uporządkowanie grupy wprowadzone zostało w pracy [87].

DEFINICJA 2.3. Będziemy mówić, że $t\geq s$, jeżeli $G_s\subseteq G_t$, $t,s\in G$. ■

Podobnie określimy zbiory

$$Q_t := Q\cap G_t = \{g:\ g\in Q,\ g\leq t\}, \qquad t\in G \tag{1}$$

C2) Jeżeli określimy ciąg elementów $\{g_i\}$ $g_i\in G$, takich, że $g_i\geq g_k$ $\forall$ $i\geq k$, to wówczas

$$Q_{g_1}\subseteq Q_{g_2}\subseteq\cdots\subseteq Q_{g_k}\subseteq\cdots\subseteq Q_{g_i}\subseteq\cdots \tag{2}$$

Będziemy zakładać dalej, że istnieje przeliczalny ciąg elementów $\{g_i\}$ $g_i\in Q$ takich, że $\bigcup_{i=1}^{\infty}(g_i-Q) = G$ [87]. ■

DEFINICJA 2.4. Załóżmy, że półgrupa Q zawiera element neutralny $\{e\}$ oraz ponadto $Q\cap(-Q)=\{e\}$ i $Q\cup(-Q)=G$. Wówczas relacja $t-\tau\in Q$ (piszemy również $t-\tau\geq e$ lub $t\geq\tau$) jest relacją porządku liniowego zgodną ze strukturą grupową G. Grupa G jest wtedy całkowicie liniowo uporządkowana [34]. ■

Zauważmy, że $(t\geq\tau)\Leftrightarrow(t-\tau\in Q)$, tzn. $(t\geq e)\Leftrightarrow(t\in Q)$. Możemy zatem traktować półgrupę Q jako zbiór nieujemnych elementów grupy G. Wówczas

$$Q_t = Q\cap G_t = \{g:\ e\leq g\leq t\},\ \forall\ t\in Q.$$

Ponieważ $-Q=\{h: h\leq e\}$ więc $\tau+h\leq\tau$ $\forall$ $\tau\in G$. A zatem G_τ oznaczać będzie podzbiór grupy G określony w sposób następujący

$$G_\tau = \tau - Q = \{g\in G:\ g\leq\tau\}, \qquad \tau\in G \tag{3}$$

Niech A będzie podzbiorem G. Przez $1_A(\cdot)$ oznaczymy funkcję określoną na G

$$1_A(g) := \begin{cases} 1 & \text{dla } g\in A, \\ 0 & \text{dla } g\in A'. \end{cases}$$

Dla uproszczenia piszemy dalej $1_{G_\tau} = 1_\tau$. Jeżeli f jest funkcją mierzalną określoną na G, to wówczas obcięcie funkcji f w punkcie τ, oznaczane dalej f_τ, określone jest relacją

$$f_\tau(g) := \begin{cases} f(g) & \text{dla } g\in G_\tau, \\ 0 & \text{dla } g\notin G_\tau. \end{cases}$$

tzn. $f_\tau = 1_\tau f$. Ściśle mówiąc, powinna być używana notacja $f_{\tau\text{-}Q}$, ponieważ obcięcie zależy od półgrupy Q. Ze względu na fakt, że na ogół mamy do czynienia z ustaloną półgrupą Q, to wyróżnienie nie jest konieczne [77,87].

DEFINICJA 2.5. Niech K będzie odwzorowaniem mierzalnym $L^2(G;\mathbb{R}^n)$ w siebie. Odwzorowanie K nazwiemy przyczynowym (względem półgrupy Q), jeżeli dla ustalonych $\tau\in G$ i $x\in L^2(G;\mathbb{R}^n)$ z warunku $x_\tau(\cdot)\equiv 0$ wynika $(Kx)_\tau(\cdot)=0$ [209]. ■

UWAGA 2.1. Zauważmy, że dla $\forall\ \tau\in G$, $x\in L^2(G;\mathbb{R}^n)$ zachodzi

$$(Kx)_\tau(\cdot) = (K(x_\tau(\cdot)))_\tau(\cdot)$$

Rzeczywiście, niech

$$(x(\cdot)-x_\tau(\cdot))_\tau = x_\tau(\cdot)-x_\tau(\cdot) = 0$$

a zatem

$$K(x-x_\tau)_\tau(\cdot) = 0$$

Stąd oraz z liniowości operatora K wynika końcowy wniosek

$$(Kx(\cdot))_\tau(\cdot) - (Kx_\tau(\cdot))_\tau = 0\ .\ ■$$

Analogicznie określa się pojęcie przyczynowości dla odwzorowań w innych przestrzeniach funkcyjnych np. $C_0(G;\mathbb{R}^n) \longrightarrow C_0(G;\mathbb{R}^n)$, $L^2(Q;\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(Q;\mathbb{R}^n)$. Nie wnosi to jednak nic istotnie nowego do rozważań.

PRZYKŁAD 2.1. Niech $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem nieliniowym oraz $|f(x)|\le \text{const}\cdot|x|\ \forall\ x\in\mathbb{R}^n$. Wówczas operacja $(Fx)(t):=f(x(t))$ przekształcająca $L^2(G;\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(G;\mathbb{R}^n)$ jest przyczynowa [87]. ■

PRZYKŁAD 2.2. Jeżeli $y\in L^1(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$ i $\text{supp}(y)\in Q$, to wówczas odwzorowanie $K:L^2(Q;\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(Q;\mathbb{R}^n)$ zwane operacją splotową (splotem)

$$(Kx)(t) := (x*y)(t) := \int_G y(th^{-1})x(h)\mu(dh), \qquad t\in Q$$

jest dobrze określone i jest przyczynowe ze względu na Q [87]. ■

Zakładać będziemy dalej, że

C3) podzbiory $\{Q_t, t\in G\}$ stanowią rodzinę podzbiorów G μ-mierzalnych i parazwartych [70,209,372]. ■

Załóżmy, że określona jest pewna przestrzeń $\mathcal{U}$ funkcji x określonych na lzga. G. Przyjmujemy, że na przestrzeni $\mathcal{U}$ określony jest operator przesunięcia U(g), $g\in G$ dany relacją

$$U(g)x(t) := x(g+t), \qquad t,g\in G$$

DEFINICJA 2.6. Operację K określoną na pewnym zbiorze funkcji $\mathcal{U}$ nazwiemy stacjonarną (ew. filtrem [107], dodatek C) jeżeli jest przemienna z operatorem przesunięcia

$$KU(g)x = U(g)Kx \qquad \forall\ x\in\mathcal{U},\ g\in G\ ■$$

W pracy pojęcie stacjonarności używane jest w podwójnym znaczeniu, również w odniesieniu do pewnej klasy procesów stochastycznych. Nie powinno to jednak prowadzić do nieporozumień.

2.3. MODELE MATEMATYCZNE UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Podstawowym modelem układu dynamicznego rozpatrywanego w pracy jest nieliniowy układ dynamiczny w rozumieniu definicji 2.2, ze sprzężeniem zwrotnym opisany równaniem operatorowym

$$x = KFx + u \tag{4}$$

gdzie:

D1) u jest n-wymiarowym, znanym procesem stochastycznym określonym na $Q\subset G$, który interpretowany będzie jako sygnał wejściowy. ■

D2) F jest nieliniowym operatorem o parametrach losowych, generowanym przez nieliniowe pole losowe f:

$$(Fx)(t,\omega) := f(t,x(t,\omega),\omega), \qquad t\in Q, \omega\in\Omega \tag{5}$$

gdzie $f:Q\times\mathbb{R}^n\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ jest nieliniowym polem losowym spełniającym warunki Caratheodory'ego mod(P) [22,94,277].

D3) K jest liniowym, przyczynowym, losowym operatorem całkowym typu Volterry-Stieltjesa postaci

$$(Kx)(t,\omega) := \int_Q k(d\tau,\omega)x(t-\tau,\omega), \quad t\in Q, \omega\in\Omega \tag{6}$$

gdzie miara losowa $k(t,\cdot)\in L^\infty(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$, $\forall\ t\in Q$, ma wahanie ograniczone, co zapisujemy $k\in\mathcal{V}(Q;L^\infty(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)))$. ■

D4) Będzie rozpatrywany również przypadek, gdy K jest liniowym, przyczynowym, losowym operatorem całkowym typu Volterry postaci

$$(Kx)(t,\omega) := \int_Q k(t,\tau,\omega)x(\tau,\omega)\mu(d\tau), \quad t\in Q, \omega\in\Omega \tag{7}$$

gdzie losowe jądro $k(t,\tau,\omega)$ jest określone na $\Delta\times\Omega$

$$\Delta := \{(t,\tau): t,\tau\in Q, \tau\le t\}$$

$k(t,\tau,\cdot)=0$ dla $(t,\tau)\notin\Delta$, mod($\mathbb{P}$) oraz

$$k(t,\cdot,\cdot)\in L^1_{loc}(G;L^\infty(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))), \ \forall\ t\in Q. \blacksquare$$

Generalnie nieliniowa relacja wejście-wyjście rozpatrywanego obiektu dynamicznego o parametrach losowych i wymuszeniu (sygnale wejściowym) stochastycznym będzie zapisywana w postaci losowego równania całkowego typu Volterry-Stieltjesa 2. rodzaju

$$x(t,\omega) = u(t,\omega) + \int_Q k(d\tau,\omega)f(t-\tau,x(t-\tau,\omega),\omega), \quad t\in Q, \omega\in\Omega \tag{8}$$

lub w postaci losowego równania całkowego typu Volterry 2. rodzaju

$$x(t,\omega) = u(t,\omega) + \int_Q k(t,\tau,\omega)f(\tau,x(\tau,\omega),\omega)\mu(d\tau), \quad t\in Q, \omega\in\Omega \tag{9}$$

Ponieważ jądro równania (9) jest różne od zera na "trójkącie" Δ, będzie stosowana alternatywna notacja, bardziej adekwatna do określenia "równanie Volterry", mianowicie

$$x(t,\omega) = u(t,\omega) + \int_{Q_t} k(t,\tau,\omega)f(\tau,x(\tau,\omega),\omega)\mu(dt), \quad t\in Q, \omega\in\Omega \tag{10}$$

Notacja ta nawiązuje do klasycznego oznaczenia stosowanego dla równań ciągłych typu Volterry.

Rozdział III. MODELOWANIE ZAGADNIEŃ DYNAMICZNYCH MECHANIKI STOCHASTYCZNEJ ZA POMOCĄ LOSOWYCH RÓWNAŃ CAŁKOWYCH

W rozdziale niniejszym przedstawione są często spotykane przykłady układów mechanicznych, które mogą być badane metodami charakterystycznymi dla równań całkowych. Uwagę skoncentrowano na zagadnieniach dynamicznych, dlatego większość przykładów dotyczy równań całkowych typu Volterry 2. rodzaju. Pominięto natomiast całkowicie zagadnienia brzegowe mechaniki, które również w naturalny sposób prowadzą do równań całkowych, nie są jednak bezpośrednio wynikiem opisu działań dynamicznych.

3.1. UKŁADY MECHANICZNE BEZPOŚREDNIO OPISYWANE RÓWNANIAMI CAŁKOWYMI

W poniższych rozważaniach dyskutowane są przykłady zastosowań równań całkowych w zagadnieniach mechaniki, w których już sam opis problemu prowadzi do takich równań. W większości przykładów zastosowań równania całkowe stanowią tylko wygodny aparat matematyczny, który wykorzystuje się do analizy złożonych zadań z mechaniki opisanych przy użyciu równań innego rodzaju, np. różniczkowych lub różniczkowo-całkowych.

3.1.1. Zadanie Abela

Mało znany, a bardzo ciekawy jest fakt, że w mechanice równanie całkowe zostało po raz pierwszy zastosowane i rozwiązane przez Abela. Opublikował on dwie prace, jedną w 1823 i drugą w 1826 roku (Abel N.H., Oeuvres Complétes, 1, Oslo 1881, 11-27, 97-101), w których rozwiązał tzw. uogólnienie zagadnienia wahadła izochronicznego.

Ogólnie, zadanie Abela polega na znalezieniu krzywej w płaszczyźnie pionowej xy, która posiada tę własność, że czas ruchu cząstki P o masie m, poruszającej się pod wpływem siły ciężkości bez tarcia, z punktu A o współrzędnych (0,h) na poziom y=0, wzdłuż tej krzywej, jest z góry zadaną funkcją

zmiennej h, patrz rys. 3.1. Zakłada się, że w punkcie startowym A prędkość cząstki jest równa zeru [72,80-81,119,190,196].

Oznaczmy odległość punktu P, mierzoną wzdłuż krzywej od punktu A przez s=s(y) z s(h)=0. Z prawa zachowania energii wynika natychmiast, że

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + mgy = mgh = \text{const} \tag{1}$$

Jeżeli t(h) oznacza znany czas upadku cząstki z punktu A na poziom zerowy, możemy na podstawie (1) napisać

$$dt = \pm \frac{ds}{(2g(h-y))^{1/2}} \tag{2}$$

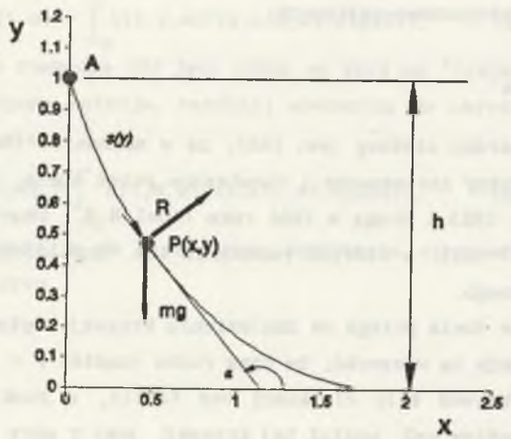
Znak "-" w równaniu (2) eliminujemy, ponieważ ds>0 dla dt>0. Oznaczmy dalej $\frac{dy}{dx}=tg(\alpha)$, $\frac{dy}{ds}=-\sin(\alpha)$, $\frac{1}{\sin(\alpha)}=\phi(y)$. Otrzymamy zatem

$$t(h) = (2g)^{-1/2}\int_0^h \frac{s'(y)dy}{(h-y)^{1/2}} = (2g)^{-1/2}\int_0^h \frac{\phi(y)dy}{(h-y)^{1/2}} \tag{3}$$

Otrzymane równanie (3) jest równaniem całkowym osobliwym, w którym nieznana jest funkcja $s'(\cdot)$ lub $\phi(\cdot)$. W cytowanej pracy Abel rozwiązał bardziej ogólne równanie całkowe

$$\int_a^x \frac{f(y)dy}{(x-y)^{\alpha}} = g(x), \qquad x\geq a,\ 0<\alpha<1 \tag{4}$$

które obecnie nazywane jest jego nazwiskiem.



Rys. 3.1. Opis zmiennych w zadaniu Abela

Fig. 3.1. Variables in Abel problem

Znane są różne metody rozwiązywania równania Abela [72,80-81,119,190, 196]. Jedna z bardziej interesujących oparta jest na wykorzystaniu przekształcenia Laplace'a [119]. Rozwiązanie równania (3) ma postać następującą

$$s'(y) = -\phi(y) = \frac{(2g)^{1/2}}{\pi}\frac{d}{dy}\int_0^y \frac{t(\tau)d\tau}{(y-\tau)^{1/2}}$$

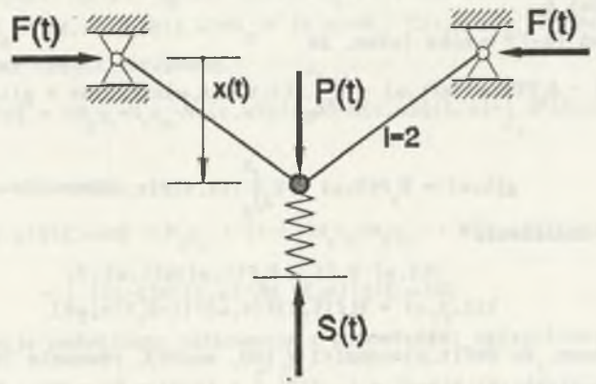
Całkując dalej z warunkiem brzegowym s(h)=0, otrzymamy

$$s(y) = \frac{(2g)^{1/2}}{\pi}\left(\int_0^y \frac{t(\tau)d\tau}{(y-\tau)^{1/2}} - \int_0^h \frac{t(\tau)d\tau}{(h-\tau)^{1/2}}\right)$$

Naturalnie, rozwiązanie równania Abela można również otrzymać jako funkcję y=f(x), patrz rys. 3.1.

3.1.2. Układ prętowy z elementem lepkosprężystym

Podany poniżej przykład ilustruje sytuację, w której czynnik wymuszający zależy nie tylko od siły zewnętrznej, ale również od przemieszczenia układu w stosunku do naturalnego położenia równowagi.



Rys. 3.2. Schemat prętowego układu mechanicznego

Fig. 3.2. Scheme of a mechanical bar-system

W rozpatrywanym modelu, patrz rys. 3.2, układ dwóch nieważkich prętów znajdujących się pod wpływem sił P i F działa z siłą S na sprężynę wykonaną z materiału lepkosprężystego. Jeżeli obciążenia zewnętrzne mają losowo zmienne fluktuacje, to wówczas $F(t,\omega)$ i $P(t,\omega)$ są procesami stochastycznymi określonymi dla $t\in\mathbb{R}^1, \omega\in\Omega$. Załóżmy, że można pominąć siły bezwładności,

wówczas warunek równowagi sił P,F i S, w każdej chwili czasu, zapiszemy w sposób następujący

$$S(t,\omega) = P(t,\omega) + F(t,\omega)\frac{x(t,\omega)}{\left[1-\left(\frac{x(t,\omega)}{2}\right)^2\right]^{1/2}}, \quad \forall\ t\in\mathbb{R}^1,\omega\in\Omega \tag{5}$$

Załóżmy, że relacja między przemieszczeniem x i siłą S w liniowej sprężynie wykonanej z materiału lepkosprężystego jest typu całkowego

$$x(t,\omega) = E_1S(t,\omega) + E_2\int_0^t f(t,\tau)S(\tau,\omega)d\tau, \qquad t\geq 0,\omega\in\Omega \tag{6}$$

gdzie funkcja f jest tzw. jądrem Volterry, tzn. $f(t,\tau)$ jest określona dla $0\leq\tau\leq t<\infty$ i $f(t,\tau)=0\ \forall\ \tau>t$, E_1,E_2- pewne stałe charakterystyczne dla danego modelu [54,65-69,97,102,181,211,221-222]. Zauważmy jeszcze, że dolna granica całkowania w operatorze całkowym wynika z założenia, że istnieje naturalny stan równowagi x=0, jeżeli $F(t,\omega)=P(t,\omega)=0\ \forall\ t<0$, mod(ℙ).

Jeżeli założymy, że wychylenia x z położenia równowagi są "małe", z równania (5) wynika równanie zlinearyzowane

$$S(t,\omega) = P(t,\omega) + F(t,\omega)x(t,\omega), \qquad \forall\ t\in\mathbb{R}^1,\ \mathrm{mod}(\mathbb{P}) \tag{7}$$

por. rozdział 6.

Z równań (6-7) wynika łatwo, że

$$(1 - E_1F(t,\omega))x(t,\omega) - E_2\int_0^t f(t,\tau)F(\tau,\omega)x(\tau,\omega)d\tau = g(t,\omega) \tag{8}$$

gdzie

$$g(t,\omega) = E_1P(t,\omega) + E_2\int_0^t f(t,\tau)P(\tau,\omega)d\tau. \tag{9}$$

Przyjmując oznaczenia

$$u(t,\omega) = (1 - E_1F(t,\omega))x(t,\omega)$$
$$k(t,\tau,\omega) = E_2f(t,\tau)F(\tau,\omega)/(1-E_1F(\tau,\omega))$$

gdzie założono, że $0\leq F(t,\omega)\leq \mathrm{const}<1\ \forall\ t\geq 0$, mod(ℙ), równanie (9) możemy sprowadzić do postaci standardowej

$$u(t,\omega) = g(t,\omega) + \int_0^t k(t,\tau,\omega)u(\tau,\omega)d\tau, \qquad t\geq 0,\ \omega\in\Omega \tag{10}$$

typowej dla losowego równania całkowego Volterry 2. rodzaju.

W opisanym modelu możliwe jest uwzględnienie zarówno przemieszczenia początkowego układu, jak również naprężeń wstępnych w prętach. Ten prosty model zawiera wszystkie cechy, które są charakterystyczne dla dużo bardziej skomplikowanych systemów z elementami lepkosprężystymi. Patrz również części 3.2.4, 3.3.2 i 3.3.3.

3.2. ZAGADNIENIA POCZĄTKOWE DLA UKŁADÓW MECHANICZNYCH O SKOŃCZONEJ LICZBIE STOPNI SWOBODY Z CZASEM CIĄGŁYM

3.2.1. Opis ogólny modelu w przestrzeni konfiguracyjnej

Wiele zagadnień mechaniki, dotyczących dynamiki liniowego układu punktów materialnych o n stopniach swobody, opisywanych jest w warunkach stochastycznych wielowymiarowym równaniem różniczkowym 2. rzędu

$$M(t,\omega)\frac{d^2q}{dt^2} + R(t,\omega)\frac{dq}{dt} + C(t,\omega)q = f(t,\omega), \qquad t\geq\tau\geq 0,\ \omega\in\Omega \tag{11}$$

gdzie $q=[q_1,q_2,\ldots,q_n]$, $M(t,\omega),R(t,\omega),C(t,\omega)$ są macierzami $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, których elementy są procesami stochastycznymi, $q(t,\omega),f(t,\omega)$ są procesami stochastycznymi o wartościach w $\mathbb{R}^n$. Zmienne $\{q_i\}$ w równaniu (11) opisują tzw. przestrzeń konfiguracyjną zagadnienia dynamicznego. Jeżeli układ dynamiczny opisywany jest równaniem różniczkowym, np. postaci (11), to nazywany bywa klasycznym układem dynamicznym.

Załóżmy, że losowe warunki początkowe zmiennych opisujących ruch układu (11) są następujące: $q(\tau,\omega)=q_0(\omega)$, $\dot q(\tau,\omega)=q_1(\omega)\ \forall\ \omega\in\Omega$. Oznaczmy dla uproszczenia $M(\tau,\omega)=M_0, M'(\tau,\omega)=M_1, R(\tau,\omega)=R_0, R'(\tau,\omega)=R_1$, $C(\tau,\omega)=C_0$. Zauważmy dalej, że całkując przez części otrzymamy

$$\int_\tau^t M(\xi,\omega)\ddot q(\xi,\omega)d\xi = -M_0q_1+M_1q_0-M'(t,\omega)q(t,\omega)+M(t,\omega)\dot q(t,\omega)+\int_\tau^t M''(\xi,\omega)q(\xi,\omega)d\xi \tag{12}$$

a po powtórnym całkowaniu

$$\int_\tau^t\int_\tau^t M(\xi,\omega)\ddot q(\xi,\omega)d\xi = M_0q_0 + (t-\tau)(M_1q_0-M_0q_1) + M(t,\omega)q(t,\omega) + \int_\tau^t\Big((t-\xi)M''(\xi,\omega)-2M'(\xi,\omega)\Big)q(\xi,\omega)d\xi \tag{13}$$

Powtórzmy operację podwójnego całkowania z pozostałymi składnikami

$$\int_\tau^t\int_\tau^t R(\xi,\omega)\dot q(\xi,\omega)d\xi = -R_0q_0(t-\tau) + \int_\tau^t\Big(R(\xi,\omega) + (t-\xi)R'(\xi,\omega)\Big)q(\xi,\omega)d\xi \tag{14}$$

$$\int_\tau^t\int_\tau^t C(\xi,\omega)q(\xi,\omega)d\xi = \int_\tau^t (t-\xi)C(\xi,\omega)q(\xi,\omega)d\xi \tag{15}$$

$$\int_\tau^t\int_\tau^t f(\xi,\omega)d\xi = \int_\tau^t (t-\xi)f(\xi,\omega)d\xi \tag{16}$$

Scałkujmy równanie (11) dwukrotnie w granicach $[\tau,t]$, wykorzystując relacje (13-16). Otrzymamy

$$h(t,\omega)q(t,\omega) = z(t,\omega) + \int_\tau^t k(t,\xi,\omega)q(\xi,\omega)d\xi, \qquad t\geq\tau,\ \omega\in\Omega \tag{17}$$

gdzie funkcje stochastyczne

$$h(t,\omega) = M(t,\omega) \tag{18}$$

$$k(t,\xi,\omega) = (t-\xi)\left(-M^{\cdot\cdot}(t,\omega)+R^{\cdot}(t,\omega)-C(t,\omega)\right) - R(t,\omega) +2M^{\cdot}(t,\omega) \tag{19}$$

$$z(t,\omega) = \int_{\tau}^{t}(t-\xi)f(\xi,\omega)d\xi + (t-\tau)(M_0q_1-M_1q_0+R_0q_0) + M_0q_0 \tag{20}$$

są określone dla $t\geq\tau, \omega\in\Omega$, ponadto $k(t,\xi,\omega)\neq 0\ \forall\ \tau\leq\xi\leq t<\infty$, mod(ℙ).

Otrzymane równanie (17) nosi nazwę uogólnionego równania całkowego typu Volterry 2. rodzaju. Zwykle równanie Volterry przyjmuje postać uproszczoną z $h(\cdot,\cdot)\equiv I$ (macierz diagonalna jednostkowa). Natomiast gdy $z(\cdot,\cdot)\equiv 0$, mamy do czynienia z analogicznym równaniem tylko 1. rodzaju.

UWAGA 3.1. Łatwo można wykazać, że założenie $h(\cdot)\equiv I$ nie zmniejsza ogólności rozważań w przypadku równań typu (11). Można na ogół przyjąć, że $M(t,\omega)$, jest $\forall\ t\geq\tau$, mod(ℙ) macierzą symetryczną, dodatnio określoną. Istnieją zatem: macierz unitarna $\mathcal{E}_m(t,\omega)$ oraz macierz diagonalna $\Lambda_m(t,\omega)$, $\forall\ t\geq\tau$, $\omega\in\Omega$ [225], takie, że

$$M(t,\omega)=\mathcal{E}_m(t,\omega)\Lambda_m(t,\omega)\mathcal{E}_m^T(t,\omega), \quad \mathcal{E}_m^T(t,\omega)\mathcal{E}_m(t,\omega) = I, \quad \Lambda_m(t,\omega) > 0 \tag{21}$$

Ponieważ $\Lambda_m(t,\omega)>0\ \forall\ t\geq\tau$, mod(ℙ) istnieje macierz $\Lambda_m^{-1/2}(t,\omega) := \left(\Lambda_m^{1/2}(t,\omega)\right)^{-1}$ gdzie $\Lambda_m(t,\omega)=\Lambda_m^{1/2}(t,\omega)\Lambda_m^{1/2}(t,\omega)$, $\forall\ t\geq\tau$, mod(ℙ). Można łatwo pokazać, że macierz

$$\mathcal{E}(t,\omega) := \mathcal{E}_m(t,\omega)\Lambda_m^{-1/2}(t,\omega)\mathcal{E}_m(t,\omega) \qquad t\geq\tau,\ \omega\in\Omega \tag{22}$$

jest nieosobliwa mod(ℙ) oraz posiada własność, że

$$\mathcal{E}^T(t,\omega)M(t,\omega)\mathcal{E}(t,\omega) = I \quad \forall\ t\geq\tau,\ \text{mod}(\mathbb{P}) \tag{23}$$

Rzeczywiście

$$\mathcal{E}^TM\mathcal{E} = \mathcal{E}_m^T\Lambda_m^{-1/2}\mathcal{E}_m^T\mathcal{E}_m\Lambda_m\mathcal{E}_m^T\mathcal{E}_m\Lambda_m^{-1/2}\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_m^T\mathcal{E}_m = I \tag{24}$$

Zapiszmy równanie (17) w nowych zmiennych $q=\mathcal{E}\eta$. Otrzymamy

$$\mathcal{E}^T(t,\omega)h(t,\omega)\mathcal{E}(t,\omega)\eta(t,\omega)=\mathcal{E}^T(t,\omega)\left(z(t,\omega)+\int_{\tau}^{t}k(t,\xi,\omega)\mathcal{E}(\xi,\omega)\eta(\xi,\omega)d\xi\right) \tag{25}$$

Z relacji (23) i (25) wynika, że równanie (17) przyjmuje postać klasyczną

$$\eta(t,\omega) = \tilde{z}(t,\omega) + \int_{\tau}^{t}\tilde{k}(t,\xi,\omega)\eta(\xi,\omega)d\xi\ , \qquad t\geq\tau,\ \omega\in\Omega \tag{26}$$

gdzie $\tilde{z}(t,\omega)=\mathcal{E}^T(t,\omega)z(t,\omega)$, $\tilde{k}(t,\xi,\omega)=\mathcal{E}^T(t,\omega)k(t,\xi,\omega)\mathcal{E}(\xi,\omega)$, $\forall\ \tau\leq\xi\leq t$, mod(ℙ).

Interesujące przykłady innych zastosowań patrz [8, 16, 28, 52, 80-83, 84, 119, 146, 167, 181, 187, 190, 196-199, 201-202, 205, 260-268, 277-278, 283].

3.2.2. Opis ogólny modelu ze sprzężeniem zwrotnym w przestrzeni stanów

Ponieważ, jak wspomniano powyżej, macierz M jest dodatnio określona i symetryczna, istnieje więc macierz odwrotna M^{-1}. Do jej efektywnego wyznaczenia można wykorzystać np. relację (21). Przyjmiemy zatem w dalszych rozważaniach, że równanie (11) ma uproszczoną postać

$$\frac{d^2q}{dt^2} + R(t,\omega)\frac{dq}{dt} + C(t,\omega)q = f(t,\omega)\ , \qquad t\geq\tau\geq 0,\ \omega\in\Omega \tag{27}$$

W przypadku nieliniowym funkcje C i R mogą być funkcjami zmiennych q i $\dot{q}$, w związku z tym równanie (27) można zapisać w postaci

$$\frac{d^2q}{dt^2} + R(t,q,\dot{q},\omega)\frac{dq}{dt} + C(t,q,\dot{q},\omega)q = f(t,\omega)\ , \qquad t\geq\tau\geq 0,\ \omega\in\Omega \tag{28}$$

Zawsze, nawet tylko z formalnego punktu widzenia, można przyjąć, że z nieliniowych funkcji R i C można wydzielić część liniową, np. w następujący sposób

$$R(t,q,\dot{q},\omega) = R_1(t,\omega)q + R_2(t,\omega)\dot{q} + R_{12}(t,q,\dot{q},\omega), \qquad t\geq\tau\geq 0,\ \omega\in\Omega \tag{29}$$

$$C(t,q,\dot{q},\omega) = C_1(t,\omega)q + C_2(t,\omega)\dot{q} + C_{12}(t,q,\dot{q},\omega), \qquad t\geq\tau\geq 0,\ \omega\in\Omega \tag{30}$$

Załóżmy dalej, że $\eta := \left[\eta_1^T, \eta_2^T\right]^T$, $\eta_1=q$, $\eta_2=\dot{q}$. Niech dla uproszczenia $\tau=0$. Dla nowych zmiennych równanie (28) przyjmie następujący kształt

$$\dot{\eta}(t,\omega) = A(t,\omega)\eta(t,\omega) + F(t,\eta(t,\omega),\omega) + B(t,\omega)u(t,\omega), \qquad t\geq 0,\ \omega\in\Omega \tag{31}$$

gdzie A, B są macierzami o wartościach w $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R}^{2n})$ i $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{p},\mathbb{R}^{2n})$ odpowiednio, których elementy są procesami stochastycznymi, F: $\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^{2n}\times\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^{2n}$, jest wektorową, losową funkcją nieliniową, η i u są procesami stochastycznymi o wartościach w $\mathbb{R}^{2n}$ i $\mathbb{R}^{p}$ odpowiednio, proces u może być czasem interpretowany jako sterowanie układem dynamicznym lub jako zakłócenie zewnętrzne. Z relacji (28-31) wynika, że

$$A(t,\omega) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -C_1(t,\omega)-D_1(t,\omega), & -C_2(t,\omega)-D_2(t,\omega) \end{bmatrix},\ B(t,\omega) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$F(t,\eta,\omega) = \begin{bmatrix} 0 \\ -C_{12}(t,\eta,\omega)-D_{12}(t,\eta,\omega) \end{bmatrix},\ u(t,\omega) = f(t,\omega), \qquad t\geq 0,\ \omega\in\Omega \tag{32}$$

Równanie (31) opisuje obiekt dynamiczny (11) w tzw. przestrzeni stanów, a współrzędne $\{\eta_i\}$ nazywane są współrzędnymi stanu.

Równanie (31) jest szczególnym przypadkiem bardziej ogólnego równania, które zapiszemy w postaci

$$\dot{x}(t,\omega) = A(t,\omega)x(t,\omega)+\phi_1(t,\sigma(t,\omega),\omega)+\int_0^t b(t-\tau,\omega)\phi_2(\tau,\sigma(\tau,\omega),\omega)d\tau, \qquad (33)$$

gdzie $t\geq 0$, $\omega\in\Omega$, $x(0,\omega)=x_0(\omega)$ oraz

$$\sigma(t,\omega) = f(t,\omega) + \int_0^t c(t-\tau,\omega)x(\tau,\omega)d\tau, \quad t\geq 0, \ \omega\in\Omega \qquad (34)$$

gdzie b,c są macierzami o wartościach w $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R}^{2n})$, których elementy są procesami stochastycznymi o nośniku zawartym w $\mathbb{R}^1_+$, ϕ_1: $\mathbb{R}^1_+\times\mathbb{R}^{2n}\times\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^{2n}$, $i=1,2$, są wektorowymi, losowymi funkcjami nieliniowymi, f i σ są procesami stochastycznymi o wartościach w $\mathbb{R}^{2n}$.

Równanie (33) opisuje wielowymiarowy liniowy obiekt dynamiczny, niekoniecznie mechaniczny, z nieliniowym sprzężeniem zwrotnym. Sprzężenie zwrotne opisane jest liniowym operatorem stacjonarnym z funkcją przejścia b, nieliniowościami ϕ_i, $i=1,2$ oraz drugim operatorem stacjonarnym z funkcją przejścia c. Proces stochastyczny f można interpretować jako sterowanie lub zakłócenie działające w pętli sprzężenia zwrotnego. Operator całkowy w równaniu (33) i samo równanie (34) możemy uznać w tym przypadku za regułę sterowania obiektem liniowym.

Na przykładzie obiektu dynamicznego (33-34) pokazana zostanie technika, która może być zastosowana do sprowadzenia układów mieszanych, tj. różniczkowo-całkowych do standardowych równań całkowych typu Volterry 2. rodzaju.

Niech $\Phi(t,s,\omega)$, $t\geq s\geq 0$, $\omega\in\Omega$, $\Phi(t,s,\omega)=0$ $\forall\ t<s$, oznacza matrycant (macierz przejścia) jednorodnego losowego układu liniowego

$$\dot{x}(t,\omega) = A(t,\omega)x(t,\omega), \quad t\geq 0, \ \omega\in\Omega \qquad (35)$$

Wówczas rozwiązanie równania (33) możemy zapisać w postaci

$$x(t,\omega) = \Phi(t,0,\omega)x_0(\omega) + \int_0^t \Phi(t,\tau,\omega)\phi_1(\tau,\sigma(\tau,\omega),\omega)d\tau +$$

$$+ \int_0^t \Phi(t,\tau,\omega)\int_0^\tau b(\tau-u,\omega)\phi_2(u,\sigma(u,\omega),\omega)dud\tau \qquad (36)$$

Zauważmy, że

$$\int_0^t \Phi(t,\tau,\omega)\int_0^\tau b(\tau-u,\omega)\phi_2(u,\sigma(u,\omega),\omega)dud\tau =$$

$$= \int_0^t\int_0^t \Phi(t,\tau,\omega)b(\tau-u,\omega)1_{\{u\leq\tau\}}(u)\phi_2(u,\sigma(u,\omega),\omega)dud\tau =$$

$$= \int_0^t\int_0^{t-u} \Phi(t,u+\tau,\omega)b(\tau,\omega)\phi_2(u,\sigma(u,\omega),\omega)d\tau du \qquad (37)$$

Oznaczmy

$$\Phi_1(t,u,\omega) := \int_0^{t-u} \Phi(t,u+\tau,\omega)b(\tau,\omega)d\tau = \int_0^\infty \Phi(t,u+\tau,\omega)b(\tau,\omega)d\tau, \quad t\geq u\geq 0, \omega\in\Omega \qquad (38)$$

Funkcja $\Phi_1(t,u,\omega)$ jest jądrem Volterry, tzn. jest różna od zera, mod$(\mathbb{P})$, tylko dla $\forall\ t\geq u\geq 0$. Niech dalej $\Psi(t,u,\omega) := [\Phi(t,u,\omega),\Phi_1(t,u,\omega)]$, $t\geq u\geq 0$, $\omega\in\Omega$, oznacza macierz $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R}^n)$, natomiast $\phi(t,\sigma,\omega) := \left[\phi_1^T(t,\sigma,\omega),\phi_2^T(t,\sigma,\omega)\right]^T\in\mathbb{R}^{2n}$ $\forall\ t\geq 0$, $\sigma\in\mathbb{R}^n$, $\omega\in\Omega$. Z równania (36) na podstawie (37) wynika, że

$$x(t,\omega) = \Phi(t,0,\omega)x_0(\omega) + \int_0^t \Psi(t,u,\omega)\phi(u,\sigma(u,\omega),\omega)du \qquad (39)$$

Wstawmy relację (39) do równania (34). Otrzymamy

$$\sigma(t,\omega) = f(t,\omega) + \int_0^t c(t-\tau,\omega)\Phi(\tau,0,\omega)x_0(\omega)d\tau +$$

$$+ \int_0^t c(t-\tau,\omega)\int_0^\tau \Psi(\tau,u,\omega)\phi(u,\sigma(u,\omega),\omega)dud\tau \qquad (40)$$

Oznaczmy

$$z(t,\omega) := f(t,\omega) + \int_0^t c(t-\tau,\omega)\Phi(\tau,0,\omega)x_0(\omega)d\tau, \quad t\geq 0, \ \omega\in\Omega \qquad (41)$$

natomiast trzeci składnik prawej strony równania (40) przekształcimy wykorzystując zmianę kolejności całkowania, podobnie jak w równaniu (37).

$$\int_0^t c(t-\tau,\omega)\int_0^\tau \Psi(\tau,u,\omega)\phi(u,\sigma(u,\omega),\omega)dud\tau =$$

$$= \int_0^t\int_0^t c(t-\tau,\omega)\Psi(\tau,u,\omega)1_{\{u\leq\tau\}}(u)\phi(u,\sigma(u,\omega),\omega)dud\tau =$$

$$= \int_0^t\int_u^t c(t-\tau,\omega)\Psi(\tau,u,\omega)\phi(u,\sigma(u,\omega),\omega)d\tau du \qquad (42)$$

Oznaczmy

$$\Upsilon(t,u,\omega) := \int_u^t c(t-\tau,\omega)\Psi(\tau,u,\omega)d\tau = \int_0^\infty c(t-\tau,\omega)\Psi(\tau,u,\omega)d\tau, \quad t\geq u\geq 0, \ \omega\in\Omega \qquad (43)$$

Funkcja Υ jest, jak łatwo stwierdzić, jądrem Volterry. Równanie (40), po uwzględnieniu relacji (41-43), przyjmie postać

$$\sigma(t,\omega) = z(t,\omega) + \int_0^t \Upsilon(t,u,\omega)\phi(u,\sigma(u,\omega),\omega)du, \quad t\geq 0, \omega\in\Omega \qquad (44)$$

Równanie (44) jest standardowym, nieliniowym, losowym równaniem całkowym Volterry 2. rodzaju. Jak łatwo zauważyć, opisuje ono bardzo szeroką klasę układów dynamicznych i jest rozszerzeniem rozważań zawartych w [277-278].

3.2.3. Układ mechaniczny z opóźnieniem w sterowaniu

Rozpatrzmy ruch rakiety, modelowanej jako punkt materialny o zmiennej masie $m(t,\omega)=m_0-\int_0^t |\dot m_1(\tau,\omega)|d\tau$, $t\ge 0$, $\omega\in\Omega$, w ruchomym, nieinercjalnym, geocentrycznym układzie współrzędnych $O\xi\eta\zeta$, związanym z obracającą się kulą ziemską, patrz rys. 3.3, m_0 - masa startowa rakiety, $|\dot m_1|$ - prędkość spalania paliwa. Zakładamy, że Ziemia wykonuje tylko ruch obrotowy wokół własnej osi, pominiemy natomiast ruch obrotowy wokół Słońca.

Położenie punktu A w układzie $O\xi\eta\zeta$ określa wektor $r=r_\xi e_\xi+r_\eta e_\eta+r_\zeta e_\zeta$, gdzie e_ξ, e_η, e_ζ są wektorami bazowymi ruchomego układu współrzędnych. Równania ruchu rakiety w nieinercjalnym układzie współrzędnych mają postać

$$m(t,\omega)(a_{tr}+a_{Cor}+a_r)=\sum P_i \tag{45}$$

gdzie m jest zmienną losowo masą rakiety, a_{tr} przyspieszeniem unoszenia, a_{Cor} przyspieszeniem Coriolisa, $a_r=\frac{\check d^2 r}{dt^2}$ jest natomiast przyspieszeniem w ruchu względnym, [102,221-222,256]. Dalej będziemy oznaczać

$$v=\frac{\check dr}{dt}=v_\xi e_\xi+v_\eta e_\eta+v_\zeta e_\zeta,\quad v=|v|=\left(v_\xi^2+v_\eta^2+v_\zeta^2\right)^{1/2}$$

Niech $w=we_\zeta$ oznacza wektor prędkości obrotowej Ziemi. Wówczas

$$a_{Cor}=2w\times\frac{\check dr}{dt}=2\begin{vmatrix} e_\xi & e_\eta & e_\zeta\\ 0 & 0 & w\\ v_\xi & v_\eta & v_\zeta\end{vmatrix}=-2wv_\eta e_\xi+2wv_\xi e_\eta \tag{46}$$

Ponieważ możemy założyć, że ruch obrotowy Ziemi jest jednostajny, a początki układów współrzędnych ruchomego i nieruchomego pokrywają się, więc

$$a_{tr}=w\times(w\times r)=w\times\begin{vmatrix} e_\xi & e_\eta & e_\zeta\\ 0 & 0 & w\\ r_\xi & r_\eta & r_\zeta\end{vmatrix}=w\times\left(-r_\eta we_\xi+r_\xi we_\eta\right)=-r_\xi w^2e_\xi-r_\eta w^2e_\eta \tag{47}$$

Określimy teraz siły zewnętrzne działające na układ dynamiczny. Niech

$$P_1(t,\omega)=P_{1\xi}(t,\omega)e_\xi+P_{1\eta}(t,\omega)e_\eta+P_{1\zeta}(t,\omega)e_\zeta \tag{48}$$

oznacza siłę ciągu rakiety. Przez

$$P_2(t,\omega)=-\frac{\rho}{2}Sc_R vv \tag{49}$$

oznaczymy opór aerodynamiczny, skierowany w kierunku przeciwnym do ruchu rakiety (czyli jest zgodny z wektorem $-v$), gdzie ρ jest gęstością powietrza, S polem powierzchni przekroju poprzecznego rakiety, c_R jest bezwymiarowym współczynnikiem oporu aerodynamicznego, który zależy między innymi od liczby Macha $\frac{v}{a}$ (a - prędkość dźwięku w powietrzu), liczby

Reynoldsa $\frac{vd\rho}{\mu}$ (μ - lepkość powietrza, d - bezwymiarowy współczynnik zależny od parametrów rakiety), kąta natarcia i innych parametrów, por. [320, s. 81].

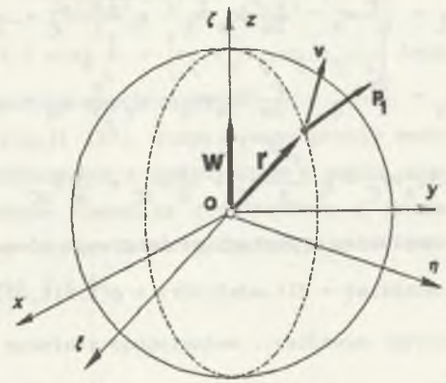
Przyjmiemy, że oddziaływanie wiatru jest procesem stochastycznym

$$P_3(t,\omega)=P_{3\xi}(t,\omega)e_\xi+P_{3\eta}(t,\omega)e_\eta+P_{3\zeta}(t,\omega)e_\zeta \tag{50}$$

Siłę ciążenia ziemskiego P_4 określimy z zależności

$$P_4(t,\omega)=-m(t,\omega)g_0\frac{r_0^2}{r^2}\frac{r}{r}=-m(t,\omega)g_0\frac{r_0^2}{r^3}r \tag{51}$$

gdzie g_0 jest przyspieszeniem siły ciążenia na powierzchni Ziemi, r_0 oznacza promień kuli ziemskiej, $r=\left(r_\xi^2+r_\eta^2+r_\zeta^2\right)^{1/2}$.



Rys. 3.3. Współrzędne w zadaniu sterowania rakietą
Fig. 3.3. Co-ordinates in rocket control problem

Opisywany ruch uproszczonego modelu rakiety jest typowym przykładem analizy nieliniowego układu dynamicznego, w warunkach stochastycznych, który prawie zawsze jest układem sterowanym. Załóżmy, że w rozpatrywanym przypadku sterowanie realizowane jest siłą ciągu rakiety P_1, tj. wartością bezwzględną wektora $|P_1|$ oraz ustawieniem sterów, czyli kierunkiem wektora jednostkowego $\frac{P_1}{|P_1|}$. Załóżmy, że

$$P_1(t,\omega)=\tilde P_1(t-\tau,\omega) \tag{52}$$

gdzie $\tilde P_1(t,\omega)$ jest wartością siły ciągu przesyłaną drogą telemetryczną z centrum sterowania na Ziemi, τ jest opóźnieniem w komunikacji między Ziemią i rakietą. Wartość funkcji sterującej $\tilde P_1(t,\omega)$ jest obliczana na podstawie danych o stanie obiektu, załóżmy, że

$$\tilde P_1(t,\omega)=u(r(t-\tau,\omega),v(t-\tau,\omega),\omega) \tag{53}$$

Dla uproszczenia będziemy zakładać, że wektor **u** jest funkcją liniową, losową parametrów **r** i **v**

$$u(r,v,\omega) = k_1(\omega)r + k_2(\omega)v \tag{54}$$

gdzie $k_1(\omega), k_2(\omega) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, $\forall\ \omega\in\Omega$. Zakładając, że zmiany pozycji rakiety są małe w czasie trwania transmisji sygnału sprzężenia zwrotnego, możemy w uproszczeniu napisać

$$P_1(t,\omega) = k_1(\omega)r(t-2\tau,\omega) + k_2(\omega)v(t-2\tau,\omega) \tag{55}$$

Z równania (45), po uwzględnieniu zależności (46-51) wynikają następujące równania skalarowe

$$\begin{aligned}
\frac{d^2r_\xi}{dt^2} &= \frac{w^2}{m}r_\xi + \frac{2w}{m}v_\eta - \frac{\rho}{2m}Sc_R v v_\xi - g_0\frac{r_0^2}{r^3}r_\xi + \frac{1}{m}P_{1\xi} + \frac{1}{m}P_{3\xi}\\
\frac{d^2r_\eta}{dt^2} &= \frac{w^2}{m}r_\eta - \frac{2w}{m}v_\xi - \frac{\rho}{2m}Sc_R v v_\eta - g_0\frac{r_0^2}{r^3}r_\eta + \frac{1}{m}P_{1\eta} + \frac{1}{m}P_{3\eta}\\
\frac{d^2r_\zeta}{dt^2} &= -\frac{\rho}{2m}Sc_R v v_\zeta - g_0\frac{r_0^2}{r^3}r_\zeta + \frac{1}{m}P_{1\zeta} + \frac{1}{m}P_{3\zeta}
\end{aligned} \tag{56}$$

Układ równań (56) zapiszemy w postaci macierzowego równania stanu

$$\frac{dx}{dt}(t,\omega) = A(t,\omega)x(t,\omega) + B(t,\omega)x(t-2\tau) + \phi(t,x(t,\omega),\omega), \quad t\geq 0,\ \omega\in\Omega \tag{57}$$

gdzie:

$$A(t,\omega) := \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
\frac{w^2}{m(t,\omega)} & 0 & 0 & 0 & \frac{2w}{m(t,\omega)} & 0\\
0 & \frac{w^2}{m(t,\omega)} & 0 & -\frac{2w}{m(t,\omega)} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \tag{58}$$

$$B(t,\omega) := \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\tilde{k}_{1,11} & \tilde{k}_{1,12} & \tilde{k}_{1,13} & \tilde{k}_{2,11} & \tilde{k}_{2,12} & \tilde{k}_{2,13}\\
\tilde{k}_{1,21} & \tilde{k}_{1,22} & \tilde{k}_{1,23} & \tilde{k}_{2,21} & \tilde{k}_{2,22} & \tilde{k}_{2,23}\\
\tilde{k}_{1,31} & \tilde{k}_{1,32} & \tilde{k}_{1,33} & \tilde{k}_{2,31} & \tilde{k}_{2,32} & \tilde{k}_{2,33}
\end{bmatrix} \tag{59}$$

$$\phi(t,x,\omega) := \begin{bmatrix}
0\\
0\\
0\\
-\frac{\rho}{2m(t,\omega)}Sc_R v v_\xi - g_0\frac{r_0^2}{r^3}r_\xi\\
-\frac{\rho}{2m(t,\omega)}Sc_R v v_\eta - g_0\frac{r_0^2}{r^3}r_\eta\\
-\frac{\rho}{2m(t,\omega)}Sc_R v v_\zeta - g_0\frac{r_0^2}{r^3}r_\zeta
\end{bmatrix} \tag{60}$$

$\tilde{k}_i := \frac{1}{m(t,\omega)}k_i$, $i=1,2$ oraz $x := \left[r_\xi, r_\eta, r_\zeta, v_\xi, v_\eta, v_\zeta\right]$ będzie standardowym dla takiego przypadku układem współrzędnych .

Jak wynika z relacji (57), rozpatrywany prosty model rakiety należy do klasy obiektów dynamicznych z opóźnieniem w pętli sterowania zwrotnego i jest opisywany losowym równaniem różniczkowym z przesuniętym argumentem. Równanie tego typu można łatwo przekształcić w równanie całkowe typu Volterry, patrz część 3.2.4.

3.2.4. Opis ogólny modelu z opóźnieniem i całkowym sprzężeniem zwrotnym

Równanie (57) jest szczególnym przypadkiem bardziej ogólnego równania, które zapiszemy w postaci

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t,\omega) &= A(t,\omega)x(t,\omega) + D(t,\omega)x(t-h,\omega) +\\
&+ \phi_1(t,\sigma(t,\omega),\omega) + \int_0^t d(t-\tau,\omega)\phi_2(\tau,\sigma(\tau,\omega),\omega)d\tau, \quad t\geq 0,\ \omega\in\Omega
\end{aligned} \tag{61}$$

gdzie $x(0,\omega)=x_0(\omega)$, $x(t,\omega)=\theta(t,\omega)$, $t\in[-h,0]$, $h\geq 0$, $\omega\in\Omega$, θ jest znanym procesem stochastycznym, D,d są macierzami funkcyjnymi o wartościach w $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R}^{2n})$, których elementami są procesy stochastyczne, $supp(d)\subseteq\mathbb{R}^1_+$, $mod(\mathbb{P})$ oraz

$$\sigma(t,\omega) = f(t,\omega) + \int_0^t c(t-\tau,\omega)x(\tau,\omega)d\tau, \quad t\geq 0,\ \omega\in\Omega \tag{62}$$

Równanie (61) opisuje wielowymiarowy liniowy obiekt dynamiczny z opóźnieniem h, niekoniecznie mechaniczny, z nieliniowym sprzężeniem zwrotnym. Sprzężenie zwrotne opisane jest liniowym operatorem stacjonarnym z funkcją przejścia d, nieliniowościami ϕ_i, $i=1,2$ oraz drugim operatorem stacjonarnym z funkcją przejścia c. Proces stochastyczny f można interpretować jako sterowanie lub zakłócenie działające w pętli sprzężenia zwrotnego. Operator

całkowy w równaniu (61) oraz równanie (62) możemy traktować w tym przypadku jako regułę sterowania obiektem liniowym z opóźnieniem.

Zauważmy, że jeżeli relacje (61-62) opisują zachowanie obiektu dynamicznego zamkniętego, to praktycznie każdy ze składników prawej strony równania (61) można interpretować jako sterowanie w pętli sprzężenia zwrotnego, por. przykład w 3.2.3.

Na przykładzie obiektu dynamicznego (61-62) pokazana zostanie technika, która może być zastosowana do sprowadzania układów mieszanych, tj. różniczkowo-całkowych z opóźnieniem, do standardowych równań całkowych typu Volterry 2. rodzaju.

Niech $\Phi(t,s,\omega)$, $t\geq s\geq 0$, $\omega\in\Omega$, oznacza matrycant (macierz przejścia) jednorodnego losowego układu liniowego

$$\dot{x}(t,\omega) = A(t,\omega)x(t,\omega) + D(t,\omega)x(t-h,\omega), \quad t\geq 0,\ \omega\in\Omega \tag{63}$$

dla $x(0,\omega)=x_0(\omega)$, $x(t,\omega)\equiv 0\ \forall\ t\in[-h,0[$, mod$(\mathbb{P})$.

Wówczas rozwiązanie równania (61) możemy zapisać w postaci

$$x(t,\omega) = \Phi(t,0,\omega)x_0(\omega) + \int_{-h}^{0}\Phi(t,h+u,\omega)D(h+u,\omega)x(u,\omega)du +$$

$$+\int_0^t\Phi(t,\tau,\omega)\phi_1(\tau,\sigma(\tau,\omega),\omega)d\tau + \int_0^t\Phi(t,\tau,\omega)\int_0^\tau d(\tau-u,\omega)\phi_2(u,\sigma(u,\omega),\omega)dud\tau \tag{64}$$

Niech

$$\psi(t,\omega) := \Phi(t,0,\omega)x_0(\omega) + \int_{-h}^{0}\Phi(t,h+u,\omega)D(h+u,\omega)\theta(u,\omega)du, \quad t\geq 0,\ \omega\in\Omega \tag{65}$$

Zauważmy, że całkując przez części otrzymamy

$$\int_0^t\Phi(t,\tau,\omega)\int_0^\tau d(\tau-u,\omega)\phi_2(u,\sigma(u,\omega),\omega)dud\tau =$$

$$= \int_0^t\int_0^t\Phi(t,\tau,\omega)d(\tau-u,\omega)1_{\{u\leq\tau\}}(u)\phi_2(u,\sigma(u,\omega),\omega)dud\tau =$$

$$= \int_0^t\int_0^{t-u}\Phi(t,u+\tau,\omega)d(\tau,\omega)\phi_2(u,\sigma(u,\omega),\omega)d\tau du \tag{66}$$

Oznaczmy

$$\Phi_1(t,u,\omega) := \int_0^{t-u}\Phi(t,u+\tau,\omega)d(\tau,\omega)d\tau = \int_0^\infty\Phi(t,u+\tau,\omega)d(\tau,\omega)d\tau,\ \forall\ t\geq u\geq 0,\ \omega\in\Omega \tag{67}$$

Funkcja $\Phi_1(t,u,\omega)$ jest jądrem Volterry, tzn. jest różna od zera, mod$(\mathbb{P})$, tylko $\forall\ t\geq u\geq 0$. Niech dalej $\Psi(t,u,\omega):=[\Phi(t,u,\omega),\Phi_1(t,u,\omega)]$, $t\geq u\geq 0, \omega\in\Omega$, oznacza jądro losowe o wartościach macierzowych z $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R}^n)$, natomiast

$$\phi(t,\sigma,\omega) := [\phi_1^T(t,\sigma,\omega),\phi_2^T(t,\sigma,\omega)]^T\in\mathbb{R}^{2n}\ \forall\ t\geq 0,\ \sigma\in\mathbb{R}^n,\ \omega\in\Omega.$$

Z równania (64) na podstawie (65) i (67) wynika, że

$$x(t,\omega) = \psi(t,\omega) + \int_0^t\Psi(t,u,\omega)\phi(u,\sigma(u,\omega),\omega)du \tag{68}$$

Wstawmy relację (68) do równania (62). Otrzymamy

$$\sigma(t,\omega)=f(t,\omega)+\int_0^t c(t-\tau,\omega)\psi(\tau,\omega)d\tau+\int_0^t c(t-\tau,\omega)\int_0^\tau\Psi(\tau,u,\omega)\phi(u,\sigma(u,\omega),\omega)dud\tau \tag{69}$$

Oznaczmy

$$z(t,\omega) := f(t,\omega) + \int_0^t c(t-\tau,\omega)\psi(\tau,\omega)d\tau, \quad t\geq 0,\ \omega\in\Omega \tag{70}$$

natomiast trzeci składnik prawej strony równania (69) przekształcimy wykorzystując zmianę kolejności całkowania, podobnie jak w równaniu (66).

$$\int_0^t c(t-\tau,\omega)\int_0^\tau\Psi(\tau,u,\omega)\phi(u,\sigma(u,\omega),\omega)dud\tau =$$

$$= \int_0^t\int_0^t c(t-\tau,\omega)\Psi(\tau,u,\omega)1_{\{u\leq\tau\}}(u)\phi(u,\sigma(u,\omega),\omega)dud\tau =$$

$$= \int_0^t\int_u^t c(t-\tau,\omega)\Psi(\tau,u,\omega)\phi(u,\sigma(u,\omega),\omega)d\tau du \tag{71}$$

Oznaczmy

$$\Upsilon(t,u,\omega) := \int_u^t c(t-\tau,\omega)\Psi(\tau,u,\omega)d\tau = \int_0^\infty c(t-\tau,\omega)\Psi(\tau,u,\omega)d\tau, \quad t\geq u\geq 0,\ \omega\in\Omega \tag{72}$$

Funkcja Υ jest, jak łatwo stwierdzić, jądrem Volterry. Równanie (69), po uwzględnieniu relacji (70-72) przyjmie postać

$$\sigma(t,\omega) = z(t,\omega) + \int_0^t\Upsilon(t,u,\omega)\phi(u,\sigma(u,\omega),\omega)du, \quad t\geq 0,\ \omega\in\Omega \tag{73}$$

Równanie (73) jest standardowym, nieliniowym, losowym równaniem całkowym Volterry 2. rodzaju. Jak łatwo zauważyć, opisuje ono bardzo szeroką klasę układów dynamicznych. Przytoczone rozważania stanowią uogólnienie wyników z [277-278].

3.3. ZAGADNIENIA POCZĄTKOWE DLA UKŁADÓW DYNAMICZNYCH Z CZASEM DYSKRETNYM W PRZESTRZENI STANÓW

3.3.1. Opis ogólny modelu nieliniowego z czasem ciągłym i dyskretnym sygnałem wejściowym

Rozpatrzmy złożony, nieliniowy układ dynamiczny opisany równaniami

$$\dot{x}(t,\omega) = A(t,\omega)x(t,\omega)+\phi_1(\sigma(t,\omega),\omega)+\int_0^t b(t-\tau,\omega)\phi_2(\sigma(\tau,\omega),\omega)d\tau, \quad t\geq 0,\omega\in\Omega \tag{74}$$

gdzie $x(0,\omega)=x_0(\omega)$ oraz

$$\sigma(t,\omega) = f(t,\omega) + \int_0^t c(t-\tau,\omega)x(\tau,\omega)d\tau, \quad t\geq 0, \ \omega\in\Omega \tag{75}$$

Jak pokazano w części 3.2.2 układ ten można sprowadzić do równania całkowego Volterry 2. rodzaju w postaci

$$\sigma(t,\omega) = z(t,\omega) + \int_0^t \Upsilon(t,u,\omega)\phi(\sigma(u,\omega),\omega)du, \quad t\geq 0, \ \omega\in\Omega \tag{76}$$

gdzie

$$z(t,\omega) = f(t,\omega) + \int_0^t c(t-\tau,\omega)\Phi(\tau,0,\omega)x_0(\omega)d\tau, \quad t\geq 0, \ \omega\in\Omega \tag{77}$$

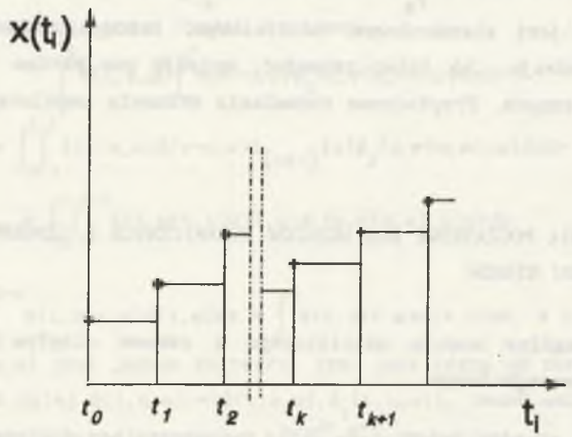
a pozostałe funkcje są określone równaniami (38) i (43).

W zastosowaniach często zdarza się, że proces stochastyczny f jest przedziałami stałą losową funkcją czasu. Załóżmy, że proces ten ma lewostronnie ciągłe, mod(P), trajektorie (patrz rys. 3.4) i oznaczmy

$$\bar{f}(t,\omega) = f(t_k,\omega), \quad t_k\leq t<t_{k+1}, \ \omega\in\Omega \tag{78}$$

gdzie $\{t_k\}$, $t_0=0, k=0,1,2,\ldots$ jest rosnącym ciągiem (niekoniecznie równomiernie rozłożonych) momentów czasowych, które mogą być zmiennymi losowymi. Ponieważ f jest procesem przedziałami ciągłym, można przypuszczać, że przy dość ogólnych założeniach dotyczących pozostałych funkcji w równaniach (76-77), rozwiązanie x też będzie funkcją przedziałami ciągłą. Załóżmy ponadto, że interesuje nas rozwiązanie x, które jest funkcją przedziałami stałą, tj.

$$x(t,\omega) = x(t_k,\omega) \quad t_k\leq t<t_{k+1}, \ \omega\in\Omega \tag{79}$$



Rys. 3.4. Sygnał, który jest funkcją przedziałami stałą

Fig. 3.4. Signal, which is a function constant at intervals

Na podstawie równania (77) możemy napisać

$$\tilde{z}(t_k,\omega) = f(t_k,\omega) + \int_0^{t_k} c(t_k-\tau,\omega)\Phi(\tau,0,\omega)d\tau x_0(\omega), \quad t_k\leq t<t_{k+1} \tag{81}$$

Wynika stąd zatem

$$\sigma(t,\omega) = \sigma(t_k,\omega) = f(t_k,\omega) + \sum_{i=0}^{k-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} c(t_k-\tau,\omega)x(\tau,\omega)d\tau =$$
$$= f(t_k,\omega) + \sum_{i=0}^{k-1}\tilde{c}(t_k,t_i,\omega)x(t_i,\omega), \quad t_k\leq t<t_{k+1} \tag{82}$$

gdzie

$$\tilde{c}(t_k,t_i,\omega) := \begin{cases} \int_{t_i}^{t_{i+1}} c(t_k-u,\omega)du, & i=0,1,2,\ldots,k-1 \\ 0, & i\geq k \end{cases}$$

Aby funkcja σ określona przez (81-82) była rozwiązaniem równania (76) wystarczy

$$\sigma(t_k,\omega) = z(t_k,\omega) + \sum_{i=0}^{k-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Upsilon(t_k,u,\omega)\phi(\sigma(u,\omega),\omega)du =$$
$$= z(t_k,\omega) + \sum_{i=0}^{k-1}\tilde{\Upsilon}(t_k,t_i,\omega)\phi(\sigma(t_i,\omega),\omega) \tag{83}$$

gdzie

$$\tilde{\Upsilon}(t_k,t_i,\omega) := \begin{cases} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Upsilon(t_k,u,\omega)du, & i=0,1,2,\ldots,k-1 \\ 0, & i\geq k \end{cases} \tag{84}$$

Równanie (83) dla $k=0,1,2,3\ldots$ jest nazywane dyskretnym losowym równaniem Volterry 2. rodzaju, por. [277-278]. Relacja (84) definiuje dyskretne losowe jądro tego równania całkowego określone w trójkącie $t_k>t_i$.

3.3.2. Opis dyskretno-czasowy nieliniowego modelu różniczkowo-całkowego ze sprzężeniem zwrotnym i impulsowym sygnałem wejściowym

Technika równań całkowych może być z powodzeniem stosowana do analizy złożonych, nieliniowych, losowych układów dynamicznych z czasem ciągłym z impulsowym stochastycznym wejściem (sterowaniem lub zakłóceniem).

Rozpatrzmy nieliniowy układ dynamiczny ze sprzężeniem zwrotnym w przestrzeni stanów, w obecności zakłóceń stochastycznych, opisany równaniem

$$\dot{x}(t,\omega) = A(t,\omega)x(t,\omega) + B(t,\omega)u(t,\omega) + \phi_1(t,x(t,\omega),\omega) +$$
$$+ \int_0^t d(t-\tau,\omega)\phi_2(\tau,x(\tau,\omega),\omega)d\tau, \quad x(0,\omega)=x_0(\omega), \ t\geq 0, \ \omega\in\Omega, \tag{85}$$

Oznaczenia są zgodne z częściami 3.2.2 i 3.2.4 pracy.

Niech u będzie sygnałem wejściowym i załóżmy, że sygnał ten jest sumą impulsów typu delta Diraca

$$u(t,\omega) := \sum_{i=0}^{\infty} v(t_i,\omega)\delta(t-t_i), \quad t\geq 0, \ \omega\in\Omega \tag{86}$$

otrzymaną przez impulsowe próbkowanie ciągłego sygnału v w chwilach czasowych $\{t_i\}$, por. 3.3.1. Możemy założyć, że sygnał x jest funkcją losową, lewostronnie ciągłą, przedziałami stałą. Oznaczmy

$$x(t_k-,\omega) := \lim_{t\to t_k, t<t_k} x(t,\omega), \quad x(t_k+,\omega) := \lim_{t\to t_k, t>t_k} x(t,\omega) \tag{87}$$

Załóżmy, że $\Phi(t,\tau,\omega)$, $t\geq\tau\geq 0, \omega\in\Omega$, oznaczać będzie macierz przejścia dla jednorodnego równania różniczkowego (35). Jeżeli stan układu $x(t_k-,\omega)$ jest znany, to na podstawie równania (85) możemy napisać

$$x(t,\omega) = \Phi(t,t_k-,\omega)x(t_k-,\omega) + \int_{t_k-}^{t} \Phi(t,\tau,\omega)B(\tau,\omega)u(\tau,\omega)d\tau +$$

$$+\int_{t_k-}^{t} \Phi(t,\tau,\omega)\phi_1(\tau,x(\tau,\omega),\omega)d\tau+\int_{t_k-}^{t} \Phi(t,\tau,\omega)\int_0^{\tau} d(\tau-u,\omega)\phi_2(u,x(u,\omega),\omega)du d\tau \tag{88}$$

Ponieważ funkcja $\Phi(\cdot,s,\cdot)$ jest ciągłą funkcją zmiennej s, argument t_k- można zastąpić po prostu przez t_k. W drugim składniku sumy dla $t_k<t<t_{k+1}$ tylko jeden impuls sygnału u w chwili t_k ma wpływ na całkę. Otrzymamy zatem dla $t_k<t<t_{k+1}$

$$x(t,\omega) = \Phi(t,t_k,\omega)x(t_k-,\omega) + \Phi(t,t_k,\omega)B(t_k,\omega)v(t_k,\omega) +$$

$$+ \int_{t_k-}^{t} \Psi(t,\tau,\omega)\phi(\tau,x(t_k-,\omega),\omega)d\tau \tag{89}$$

gdzie $\Psi(t,u,\omega) := [\Phi(t,u,\omega), \Phi_2(t,u,\omega)]$, $t\geq u\geq 0, \omega\in\Omega$ oraz

$$\Phi_2(t,u,\omega) := \int_0^{\infty} \Phi(t,u+\tau,\omega)d(\tau,\omega)d\tau, \quad t\geq u\geq 0, \omega\in\Omega \tag{90}$$

pozostałe oznaczenia jak w 3.2.2. Niech dalej

$$\tilde{A}(t_k,\omega) := \Phi(t_{k+1},t_k,\omega), \qquad \tilde{B}(t_k,\omega) := \Phi(t_{k+1},t_k,\omega)B(t_k,\omega) \tag{91}$$

$$\tilde{\phi}(t_k,x,\omega) := \int_{t_k-}^{t_{k+1}-} \Psi(t_{k+1},\tau,\omega)\phi(\tau,x,\omega),\omega)d\tau, \quad x\in\mathbb{R}^n, \omega\in\Omega \tag{92}$$

dla $k=0,1,2,3,\ldots,\omega\in\Omega$. Przy tak przyjętych oznaczeniach równanie (89) można zapisać w postaci

$$x(t_{k+1}-,\omega) = \tilde{A}(t_k,\omega)x(t_k-) + \tilde{\phi}(t_k,x(t_k-,\omega),\omega) + \tilde{B}(t_k,\omega)v(t_k,\omega) \tag{93}$$

Równanie (93) jest typowym równaniem różnicowym dla nieliniowego dyskretnego obiektu dynamicznego i jest nazywane równaniem stanu dla układu z czasem

dyskretnym. Jest ono analogiczne do równania różniczkowego opisującego układ dynamiczny z czasem ciągłym (31). Poniżej w 3.3.3 pokazane zostanie, jak równanie typu (93) można przekształcić w dyskretne równanie całkowe Volterry.

Inne przykłady zastosowań dyskretnych patrz [96,141,176,225,272,277-278, 321-322,325,365-366,374].

3.3.3. Opis ogólny nieliniowego modelu dyskretnego

Poniżej pokazane zostanie zastosowanie losowego, dyskretnego równania całkowego typu Volterry do opisu dynamiki złożonego dyskretnego układu sterowania ze sprzężeniem zwrotnym. Takie układy pojawiają się, jeżeli sygnały wejściowe i wyjściowe są obserwowane lub otrzymywane tylko w dyskretnych chwilach czasowych, por. 3.3.1 i 3.3.2.

Przypuśćmy, że rozpatrywany jest losowy układ dynamiczny opisany wielowymiarowym równaniem różnicowym postaci

$$x(t_{k+1},\omega) = A(t_k,\omega)x(t_k,\omega) + B(t_k,\omega)v(t_k,\omega) + \phi_1(t_k,\sigma(t_k,\omega),\omega) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{k-1} d(t_k-t_{j+1},\omega)\phi_2(t_j,\sigma(t_j,\omega),\omega), \quad k=0,1,2,\ldots\ldots, \ \omega\in\Omega \tag{94}$$

oraz równaniem sprzężenia zwrotnego

$$\sigma(t_k,\omega) = f(t_k,\omega) + \sum_{j=0}^{k-1} c(t_k-t_{j+1},\omega)x(t_j,\omega), \quad k=1,2,\ldots\ldots, \ \omega\in\Omega \tag{95}$$

Oznaczenia pozostają takie, jak w podrozdziałach 3.2.2, 3.3.1 i 3.3.2.

Niech

$$\Phi(t_k,t_i,\omega) := \begin{cases} A(t_{k-1},\omega)A(t_{k-2},\omega)\ldots A(t_i,\omega) & \text{dla } k>i \\ I & \text{dla } k=i \\ 0 & \text{dla } k<i \end{cases} \tag{96}$$

będzie losową funkcją przejścia [272] dla jednorodnego układu różnicowego

$$x(t_{k+1},\omega) = A(t_k,\omega)x(t_k,\omega), \quad k=0,1,2,\ldots., \ \omega\in\Omega \tag{97}$$

Wykorzystując własności funkcji przejścia równanie (94) możemy napisać w postaci równoważnej

$$x(t_k,\omega) = \Phi(t_k,0,\omega)x_0(\omega) + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(t_k,t_{i+1},\omega)B(t_i,\omega)v(t_i,\omega) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(t_k,t_{i+1},\omega)\phi_1(t_i,\sigma(t_i,\omega),\omega) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(t_k,t_{i+1},\omega) \sum_{j=0}^{i-1} d(t_i-t_{j+1},\omega)\phi_2(t_j,\sigma(t_j,\omega),\omega) \tag{98}$$

Zauważmy, że jeżeli przyjąć

$$\Phi_1(t_k,t_j,\omega) := \begin{cases} \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(t_k,t_{i+1},\omega)d(t_i-t_j,\omega), & \text{dla } k\geq j \\ 0 \quad , & \text{dla } k<j \end{cases} \tag{99}$$

oraz $\Psi(t_k,t_j,\omega) := \left[\Phi(t_k,t_j,\omega), \Phi_1(t_k,t_j,\omega)\right], \phi(t_k,\sigma,\omega) := \left[\phi_1^T(t_k,\sigma,\omega)\phi_2^T(t_k,\sigma,\omega)\right]^T$

równanie (98) można zapisać w uproszczonej postaci

$$x(t_k,\omega) = \Phi(t_k,0,\omega)x_0(\omega) + \sum_{i=0}^{k-1}\Phi(t_k,t_{i+1},\omega)B(t_i,\omega)v(t_i,\omega) + \sum_{i=0}^{k-1}\Psi(t_k,t_{i+1},\omega)\phi(t_i,\sigma(t_i,\omega),\omega) \tag{100}$$

Podstawiając otrzymane wyrażenie dla $x(t_k,\omega)$ do równania (95) otrzymamy

$$\sigma(t_k,\omega) = f(t_k,\omega) + \sum_{j=0}^{k-1} c(t_k-t_{j+1},\omega)\Phi(t_j,0,\omega)x_0(\omega) + \sum_{j=0}^{k-1} c(t_k-t_{j+1},\omega)\sum_{i=0}^{j-1}\Phi(t_j,t_{i+1},\omega)B(t_i,\omega)v(t_i,\omega) + \sum_{j=0}^{k-1} c(t_k-t_{j+1},\omega)\sum_{i=0}^{j-1}\Psi(t_j,t_{i+1},\omega)\phi(t_i,\sigma(t_i,\omega),\omega) \tag{101}$$

Oznaczmy

$$z(t_k,\omega) = f(t_k,\omega) + \sum_{j=0}^{k-1} c(t_k-t_{j+1},\omega)\Phi(t_j,0,\omega)x_0(\omega) + \sum_{j=0}^{k-1} c(t_k-t_{j+1},\omega)\sum_{i=0}^{j-1}\Phi(t_j,t_{i+1},\omega)B(t_i,\omega)v(t_i,\omega) \tag{102}$$

Zauważmy ponadto, że

$$\sum_{j=0}^{k-1} c(t_k-t_{j+1},\omega)\sum_{i=0}^{j-1}\Psi(t_j,t_{i+1},\omega)\phi(t_i,\sigma(t_i,\omega),\omega) = \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1} c(t_k-t_{j+1},\omega)\Psi(t_j,t_{i+1},\omega)\phi(t_i,\sigma(t_i,\omega),\omega) = \sum_{i=0}^{k-1}\Upsilon(t_k,t_{i+1},\omega)\phi(t_i,\sigma(t_i,\omega),\omega) \tag{103}$$

gdzie

$$\Upsilon(t_k,t_i,\omega) := \sum_{j=0}^{k-1} c(t_k-t_{j+1},\omega)\Psi(t_j,t_i,\omega), \quad i,k=1,2,\ldots, \ \omega\in\Omega \tag{104}$$

jest dyskretnym losowym jądrem Volterry. W notacji (102) i (104) po wykorzystaniu relacji (103) równanie (101) przyjmie postać

$$\sigma(t_k,\omega) = z(t_k,\omega) + \sum_{i=0}^{k-1}\Upsilon(t_k,t_{i+1},\omega)\phi(t_i,\sigma(t_i,\omega),\omega), \quad k=1,2,\ldots, \ \omega\in\Omega \tag{105}$$

Otrzymane równanie jest dyskretną wersją losowego równania całkowego Volterry 2. rodzaju i pozostaje w ścisłym związku logicznym z równaniem ciągłym (44).

Wyniki podrozdziału są rozszerzeniem wyników [277-278].

3.4. ODWZOROWANIE POINCAREGO W NIELINIOWYCH UKŁADACH DRGAJĄCYCH

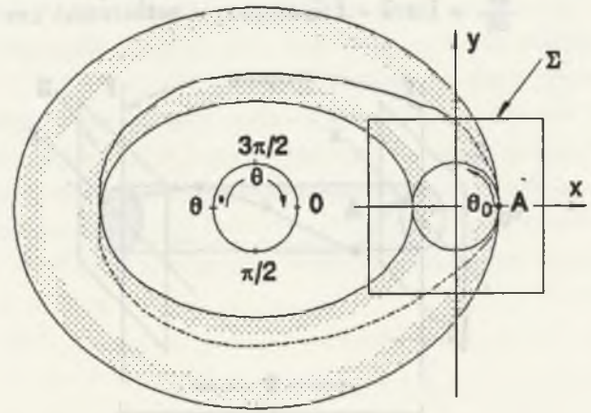
Weźmy pod uwagę nieliniowy układ drgający opisany równaniem różniczkowym

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(x(t),t), \quad t\in\mathbb{R}^1 \tag{106}$$

gdzie $x\in\mathbb{R}^n$, $A(t)\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, $\forall\ t\in\mathbb{R}^1$, $f:U\longrightarrow\mathbb{R}^n$, $U\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^1$. Przypuśćmy dalej, że funkcje $A(\cdot)$ i $f(x,\cdot)$, $\forall\ x\in\mathbb{R}^n$, są okresowe z ustalonym okresem $T=2\pi/\nu>0$. Równanie (106) można przepisać w postaci autonomicznego układu n+1 równań różniczkowych, jeżeli wykorzysta się dodatkową funkcję zdefiniowaną w sposób następujący [258,291]

$$\theta:\mathbb{R}^1\longrightarrow\mathbb{T}^1, \quad \theta(t) := \theta_0+\nu t, \quad \mathrm{mod}(2\pi) \tag{107}$$

gdzie $\mathbb{T}^1$ jest jednowymiarowym torusem, $\theta_0\in[-\pi,\pi]$.



Rys. 3.5. Oznaczenia w problemie dynamicznym na torusie

Fig. 3.5. Notion in dynamic problem over torus

Wykorzystując funkcję (107) w równaniu (106), otrzymamy

$$\frac{dx}{dt} = A\left(\frac{\theta-\theta_0}{\nu}\right)x + f\left(x,\frac{\theta-\theta_0}{\nu}\right), \qquad \frac{d\theta}{dt} = \nu, \quad (x,\theta)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{T}^1 \tag{108}$$

Układ równań (108) generuje potok $\phi(t)=[x(t),\theta(t)=\nu t+\theta_0 \mod(2\pi)]^T$ [111, 158,258,291]. Określimy przekrój poprzeczny $\Sigma^{\tilde\theta}$ pola wektorowego (108) jako

$$\Sigma^{\tilde\theta} := \left\{(x,\theta)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{T}^1 \,:\, \theta=\tilde\theta\in]0,2\pi]\right\} \tag{109}$$

Wersor normalny do $\Sigma^{\tilde\theta}$ w $\mathbb{R}^n\times\mathbb{T}^1$ jest dany wektorem $[0,1]^T$, a stąd wynika, że przekrój $\Sigma^{\tilde\theta}$ jest poprzeczny w stosunku do pola wektorowego (108), ponieważ $[A(\theta)x+f(x,\theta),\nu][0,1]^T = \nu\neq 0$.

Niech $\theta,\tau\in\mathbb{T}^1$. Powiemy, że $\theta\geq\tau$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\theta-\tau \pmod{2\pi} \geq 0$. Relacja "$\geq$" określa zupełny, liniowy porządek (por. Dodatek A) w torusie.

Układ (108) jest równoważny następującemu równaniu różniczkowemu [258]

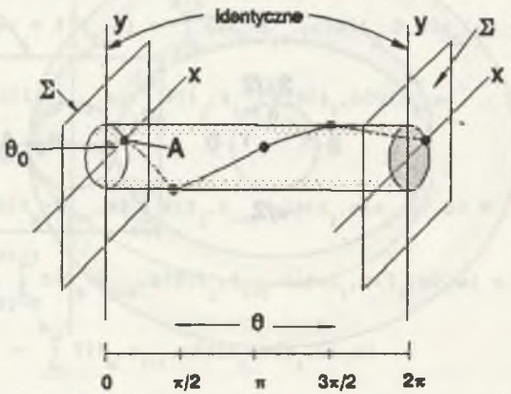
$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\nu}A\left(\frac{\theta-\theta_0}{\nu}\right)x\left(\frac{\theta-\theta_0}{\nu}\right) + \frac{1}{\nu}f\left(x\left(\frac{\theta-\theta_0}{\nu}\right),\frac{\theta-\theta_0}{\nu}\right), \qquad \theta\in\mathbb{T}^1 \tag{110}$$

lub jeśli wprowadzić oznaczenia

$$\tilde A(\theta) := \frac{1}{\nu}A\left(\frac{\theta-\theta_0}{\nu}\right), \quad \tilde x(\theta) := x\left(\frac{\theta-\theta_0}{\nu}\right), \quad \tilde f(\tilde x,\theta) := \frac{1}{\nu}f\left(\tilde x,\frac{\theta-\theta_0}{\nu}\right), \qquad \theta\in\mathbb{T}^1$$

równanie (110) przyjmuje uproszczoną postać

$$\frac{d\tilde x}{d\theta} = \tilde A(\theta)\tilde x + \tilde f(\tilde x,\theta), \qquad \theta\in\mathbb{T}^1 \tag{111}$$



Rys. 3.6. Przekrój torusa i oznaczenia alternatywne

Fig. 3.6. Cross-section and alternative notion

Niech $\Phi(\theta,\tau),\theta,\tau\in\mathbb{T}^1$ oznacza macierz fundamentalną jednorodnego układu równań (tzn. układu (111) z $\tilde f\equiv 0$), określoną na $\Delta = \{(\theta,\tau):\ \theta\geq\tau\}$, dla której

$\Phi(t,\tau)=0\ \forall\ (t,\tau)\notin\Delta$. Wykorzystując pojęcie macierzy Φ można równanie (111) przedstawić w postaci całkowej

$$\tilde x(\theta) = \Phi(\theta,\theta_0)\tilde x(\theta_0) + \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi}\Phi(\theta,\tau)\tilde f(\tilde x(\tau),\tau)d\tau, \qquad \theta\geq\theta_0 \tag{112}$$

gdzie $d(\cdot)$ jest miarą Haara na torusie (zwykłą miarą Lebesgue'a na zbiorze $[0,2\pi]$, [372]).

Jeżeli zdefiniować odwzorowanie Poincarego $P_{\tilde\theta} : \Sigma^{\tilde\theta} \longrightarrow \Sigma^{\tilde\theta}$ jako

$$\left(x\left(\left(\tilde\theta-\theta_0\right)/\nu\right),\ \tilde\theta_0\right) \longrightarrow \left(x\left(\left(\tilde\theta-\theta_0+2\pi\right)/\nu\right),\ \tilde\theta_0+2\pi\equiv\tilde\theta_0\right),$$

lub

$$x\left(\left(\tilde\theta-\theta_0\right)/\nu\right) \longrightarrow x\left(\left(\tilde\theta-\theta_0+2\pi\right)/\nu\right), \tag{113}$$

to zauważmy, że znalezienie punktu stałego operacji $P_{\tilde\theta}$ jest równoważne z określeniem $2\pi/\nu$-okresowego rozwiązania równania (112), natomiast k-okresowe punkty stałe operacji $P_{\tilde\theta}$ korespondują z okresowymi rozwiązaniami (112), które przecinają $\Sigma^{\tilde\theta}$ k razy, zanim "trafią" w punkt startowy. Problemy drgań okresowych są szerzej dyskutowane w rozdziale 8.

Rozdział IV. MODELE MATEMATYCZNE SYGNAŁÓW FIZYCZNYCH

W badaniach układów mechanicznych, a w szczególności w analizie ich dynamiki, wprowadza się pewne pojęcia matematyczne, zwane modelami matematycznymi. Modele matematyczne umożliwiają opis i analizę zjawisk oraz obiektów mechanicznych w sposób ścisły z matematycznego punktu widzenia, a w konsekwencji konstruowanie odpowiednich sformalizowanych teorii, w ramach których zjawiska te i obiekty są badane. Interesujący przegląd zagadnień związanych z modelowaniem w układach mechanicznych oraz obszerną literaturę można znaleźć w pracy Giergiela,Uhla [91].

Jednym z podstawowych pojęć występujących w modelowaniu jest sygnał,por. rozdział II. Sygnałami w układach mechanicznych są np. przebiegi sił wymuszających lub kinematyczne oddziaływania innych elementów konstrukcji. Czym natomiast z punktu widzenia matematyki jest sygnał? Obszerną analizę tego zagadnienia znaleźć można w pracach [91,257].

Przykłady układów mechanicznych omawiane szczegółowo w rozdziale III nasuwają myśl o podziale wszystkich sygnałów (nie tylko mechanicznych),z jakimi możemy się spotkać w naszej analizie, na sygnały stochastyczne, zwane też losowymi lub przypadkowymi i sygnały deterministyczne. O wyborze typu modelu decyduje w większości przypadków rodzaj zagadnień, jakie mają być badane za pomocą tego modelu.

4.1. SYGNAŁY DETERMINISTYCZNE

Przyjmiemy, że deterministycznym modelem sygnału fizycznego (w szczególności mechanicznego) jest rzeczywista lub zespolona funkcja czasu. Przedmiotem dalszych rozważań będą nie tyle sygnały fizyczne, co ich modele matematyczne. Z tego też względu wygodnie będzie terminem "sygnał" określać nie tylko sygnał fizyczny (mechaniczny), ale przyporządkowany mu model matematyczny. Przyjmiemy zatem umowę, że przez pojęcie sygnału deterministycznego będziemy rozumieć rzeczywistą lub zespoloną funkcję czasu (niekiedy także dystrybucję lub miarę).

Dalej zakłada się na ogół, że sygnały są elementami pewnych przestrzeni funkcyjnych, na ogół są to przestrzenie Banacha (ogólnie przestrzenie topologiczne).

4.1.1. Sygnały ciągłe i ograniczone

Oznaczymy przez $C(G;\mathbb{R}^n)$ ($C(G;\mathbb{C}^n)$) zbiór wszystkich sygnałów ciągłych i ograniczonych określonych na G o wartościach w $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$). Przez $C_0(G;\mathbb{R}^n)$ oznaczymy zbiór wszystkich sygnałów ciągłych $x\in C(G;\mathbb{R}^n)$ takich, że $\forall\ \varepsilon>0$ istnieje zbiór zwarty $F\subset G$, dla którego $|x(t)|<\varepsilon\ \forall\ t\in F'$. Przez $C_{00}(G;\mathbb{R}^n)$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich sygnałów ciągłych $x\in C(G;\mathbb{R}^n)$, dla których istnieje zbiór zwarty $F\subset G$ taki,że $x(t)=0\ \forall\ t\in F'$. Przestrzeń C_{00} nazywamy przestrzenią funkcji o nośniku zwartym. Analogicznie określamy przestrzenie sygnałów zespolonych $C_0(G;\mathbb{C}^n)$ oraz $C_{00}(G;\mathbb{C}^n)$.

Topologię zbieżności jednostajnej wprowadzamy definiując normę w przestrzeni $C(G;\mathbb{R}^n)$ w następujący sposób

$$\|x(\cdot)\|_u := \sup_{t\in G}|x(t)| \tag{1}$$

Oczywiste jest zawieranie $C_{00}(G;\mathbb{R}^n)\subset C_0(G;\mathbb{R}^n)\subset C(G;\mathbb{R}^n)$, ponadto $C_{00}(G;\mathbb{R}^n)$ jest gęstym podzbiorem przestrzeni $C_0(G;\mathbb{R}^n)$. Jeżeli G jest grupą zwartą, to $C_0(G;\mathbb{R}^n)=C(G;\mathbb{R}^n)$, ale jeżeli G jest lokalnie zwarta, która nie jest zwarta, to wówczas $C_0(G;\mathbb{R}^n)\neq C(G;\mathbb{R}^n)$ [36,315,357,372].

Niech $A\subset G$ będzie dowolnym podzbiorem lzga. G. Jeżeli nośnik sygnału x, $\mathrm{supp}(x)\subset A$ i zależy nam na wyróżnieniu tego faktu w tekście, to piszemy $C(A;\mathbb{R}^n)$, $C_0(A;\mathbb{R}^n)$, $C_{00}(A;\mathbb{R}^n)$ etc.

Przez $\mathcal{B}(G;\mathbb{R}^n)$ oznaczać będziemy przestrzeń sygnałów ograniczonych z normą określoną relacją (1) [36,315,357,372].

Przez $\mathcal{B}_0(G;\mathbb{R}^n)$ oznaczymy podzbiór wszystkich sygnałów ograniczonych $x\in\mathcal{B}(G;\mathbb{R}^n)$ takich, że $\forall\ \varepsilon>0\ \exists$ zbiór zwarty $F\subset G$, dla którego $|x(t)|<\varepsilon\ \forall\ t\in F'$. Będziemy w takim przypadku w uproszczeniu mówić, że sygnał $x(t)\longrightarrow 0$ przy "$t\longrightarrow\infty$".

4.1.2. Sygnały o ograniczonej energii

Przestrzenią sygnałów $L^p(G;\mathbb{R}^n)$, $1\le p<\infty$, nazywać będziemy zbiór wszystkich mierzalnych funkcji x określonych na lzga. G, o wartościach w $\mathbb{R}^n$, posiadających własność

$$\|x(\cdot)\|_p^p := \int_G |x(t)|^p\mu(dt)<\infty, \tag{2}$$

a $\|x(\cdot)\|_p$ normą sygnału x. Przestrzeń $L^2(G;\mathbb{R}^n)$ nazywać będziemy przestrzenią sygnałów o skończonej energii, a wielkość $\|x(\cdot)\|_2^2$ energią sygnału x.

Jeżeli G jest grupą dyskretną, to zachodzi izomorfizm $L^2(G;\mathbb{R}^n)\cong l^2(\mathbb{R}^n)$, gdzie l^2 oznacza przestrzeń ciągów $x=\{x_n\}$ takich, że $\|x\|_{l^2} := \sum|x_n|^2 < \infty$. Jeżeli $\mathrm{supp}(x)\subset A\subset G$, to piszemy $L^p(A;\mathbb{R}^n)$, por. [63-64, 70, 77, 87, 207, 372-373].

Przez $L^\infty(G;\mathbb{R}^n)$ oznaczymy przestrzeń sygnałów istotnie ograniczonych, tzn. posiadających taką własność, że

$$\mu\text{-ess sup}_{t\in G}|x(t)| := \inf\{\alpha\in\mathbb{R}^1: \alpha\geq 0, \mu\{t\in G: |x(t)|>\alpha\}=0\} < \infty \qquad (3)$$

Normę w przestrzeni $L^\infty(G;\mathbb{R}^n)$ oznaczać będziemy

$$|||x(\cdot)||| := \mu\text{-ess sup}_{t\in G}|x(t)| \qquad (4)$$

Przestrzenie $L^p(G;\mathbb{R}^n)$ dla $\forall\ p\geq 1$ są przestrzeniami Banacha [64, 70, 315].

4.1.3. Sygnały okresowe

W odróżnieniu od podanych określeń sygnałów ciągłych i klasy L^2, nie jest łatwo podać definicję sygnału okresowego, która byłaby zgodna z klasyczną, np. dla $G = \mathbb{R}^1$.

Niech G będzie lzga., H pewną domkniętą normalną podgrupą w G.

Sygnał f (ewentualnie o wartościach zespolonych), określony na G, nazwiemy okresowym (H-okresowym), jeżeli jest stały na warstwach G względem H, tzn. $f(g+h) = f(g)\ \forall\ g\in G,\ h\in H$. Sygnał ten można przedstawić w postaci $\tilde{f}\circ\pi_H$, gdzie $\tilde{f}$ jest funkcją określoną na G/H i "$\circ$" oznacza zwykłe złożenie odwzorowań. Funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $\tilde{f}$ jest ciągła [207].

W dalszych rozważaniach przyjmiemy, że H jest podgrupą dyskretną oraz że G/H jest grupą zwartą.

Można wprowadzić sygnały okresowe inaczej. Nazwiemy element $\tau\in G$ okresem sygnału (zespolonego) f określonego na G, jeżeli $f(g+\tau)=f(g)$ dla μ-prawie wszystkich $g\in G$. Dowodzi się, że każdy okres sygnału generuje domkniętą podgrupę H w G i funkcja f pokrywa się μ-prawie wszędzie z funkcją $f_1\circ\pi_H$, gdzie f_1 określa funkcję określoną na G/H [199].

PRZYKŁAD 4.1. Konstrukcja sygnału okresowego nawiązuje do klasycznej definicji funkcji okresowej na osi rzeczywistej, niech jej okres wynosi τ.

Rzeczywiście niech $G = \mathbb{R}^1, H = \tau\mathbb{Z}^1, \tau\in\mathbb{R}^1_+$. Zauważmy, że

$$\mathbb{R}^1/\tau\mathbb{Z}^1 \cong T^\tau := \left\{\exp\left(\frac{12\pi x}{\tau}\right): |x| \leq \tau\right\}$$

gdzie T^τ jest multiplikatywną grupą liczb zespolonych. Co więcej

$$\mathbb{R}^1/\tau\mathbb{Z}^1 \cong \left\{t:\ t\in\left[t_o, t_o+\tau\right),\ \tau\in\mathbb{R}^1_+, t_o\in\mathbb{R}^1\right\}$$

która jest addytywną grupą liczb rzeczywistych ze zbioru $\left[t_o, t_o+\tau\right)$ z operacją grupową dodawania mod(τ).■

Oznaczmy przez $L^2_H(G;\mathbb{R}^n)$ zbiór H-okresowych, mierzalnych sygnałów rzeczywistych f, o wartościach w $\mathbb{R}^n$, określonych na G, takich że

$$\|f(\cdot)\|^2_{L^2_H} := \frac{1}{\mu_1(G/H)}\int_{G/H}|\tilde{f}(t)|^2\mu_1(dt) < \infty \qquad (5)$$

gdzie $f = \tilde{f}\circ\pi_H$. Łatwo zauważyć, że tak określona przestrzeń jest przestrzenią Hilberta. Będziemy pisać w uproszczeniu $L^2_H(G;\mathbb{R}^n)=L^2(G/H;\mathbb{R}^n)$ i $\mu_1=\mu$, jeżeli nie prowadzi to do nieporozumień, o jaką podgrupę H chodzi.

Silnym aparatem stosowanym do analizy sygnałów okresowych jest przekształcenie Fouriera ciągłe i dyskretne. Czy podobnie efektywny aparat można zastosować do analizy funkcji H-okresowych na lzga. G?

TWIERDZENIE 4.1. Transformata Fouriera dowolnego sygnału $x\in L^1(G;\mathbb{R}^n)$, G - grupa zwarta z miarą Haara μ, określona w sposób następujący

$$\hat{x}(\chi) := \frac{1}{\mu(G)}\int_G \bar{\chi}(t)x(t)\mu(dt) \qquad \chi\in\hat{G} \qquad (6)$$

jest funkcją ciągłą określoną na grupie dualnej $\hat{G}$ i "dąży w nieskończoności" do zera, tzn. jest elementem przestrzeni $C_0(\hat{G};\mathbb{R}^n)$, jeżeli tylko G nie jest dyskretna. Ponadto

(i) charaktery grupy G stanowią układ ortonormalny;

(ii) jeżeli $x\in L^2(G;\mathbb{R}^n)$, to $x(\cdot) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\chi_k$ i ponadto

$$\|x(\cdot)\|^2_{L^2(G;\mathbb{R}^n)} = \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2, \text{ gdzie } a_k = \frac{1}{\mu(G)}\int_G\bar{\chi}_k(t)x(t)\mu(dt), \quad \forall\ \chi_k\in\hat{G}$$

(iii) jeżeli $x\in C(G;\mathbb{R}^n)$, to x jest granicą ciągu funkcji $\{x_n(\cdot)\}$ postaci

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)}\chi_k^{(n)}(t)$$

zbieżnego jednostajnie na G, przy czym charaktery $\chi_k^{(n)}(\cdot)$ występujące w tych sumach występują też explicite w szeregu Fouriera $\sum a_k\chi_k$.

Dowód. Patrz [111, 207, 372-373].■

Cytowane twierdzenie jest odpowiednikiem znanego w technice twierdzenia Riesza-Fischera [131, 138]. Wynik ten jest szeroko wykorzystywany w analizie sygnałów okresowych w układach dynamicznych.

4.1.4. Sygnały prawie okresowe

Niech $CAP(G;\mathbb{R}^n)$ oznacza zbiór sygnałów prawie okresowych (spo.) w sensie Bohra określonych na G, o wartościach rzeczywistych. W zbiorze spo. $CAP(G;\mathbb{R}^n)$ wyróżnimy podzbiór $Trig(G;\mathbb{R}^n)$ wielomianów trygonometrycznych, tj. funkcji postaci

$$x(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k \chi_k(t), \quad t\in G, \ a_k\in\mathbb{C}^n, \ \chi_k\in\hat{G} \tag{7}$$

a ponieważ w zastosowaniach interesują nas głównie funkcje rzeczywiste, założymy, że charaktery są tak ponumerowane, że $\bar{\chi}_k=\chi_{-k}$ i $\bar{a}_k=a_{-k}$.

TWIERDZENIE 4.2. Przestrzeń $Trig(G;\mathbb{R}^n)$ jest gęsta w $CAP(G;\mathbb{R}^n)$.

Dowód. Patrz [111, 357, 372-373]. ■

Niech (G_B, i_B)-kompaktyfikacja Bohra grupy G. Dla każdego spo. $f\in CAP(G;\mathbb{R}^n)$ istnieje taka funkcja $\tilde{f}\in C(G_B;\mathbb{R}^n)$, że $f=\tilde{f}\circ i_B$. Na zbiorze spo. $CAP(G;\mathbb{R}^n)$ określony jest funkcjonał niezmienniczy $M(\cdot)$, zwany czasem wartością średnią spo.

Wartość średnią spo. $f\in CAP(G;\mathbb{R}^n)$ oznaczać będziemy przez $M(f)$:

$$M(f(\cdot)) := \frac{1}{\mu(G_B)}\int_{G_B}\tilde{f}(t)\mu(dt) \tag{8}$$

LEMAT 4.3. Niech lzga G będzie przeliczalnie zwarta. Wówczas istnieje ciąg $\{G_n\}$, $n=1,2,3,\ldots$ w G spełniający warunki:

(i) każdy zbiór G_n jest otwarty i jego domknięcie jest zwarte;

(ii) $G_1\subset G_2\subset G_3\subset \ldots\ldots\subset G_n\subset \ldots\ldots$;

(iii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = G$;

(iv) $\lim_{n\to\infty} \frac{\mu((tG_n)\cap G'_n)}{\mu(G_n)} = 0, \quad \forall\, t\in G$ [111, 372-373]. ■

Można udowodnić [372], że dla ciągu $\{G_n\}$ spełniającego warunki lematu 4.3

$$M(f(\cdot)) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\mu(G_n)}\int_{G_n} f(t)\mu(dt) \quad \forall\, f\in CAP(G;\mathbb{R}^n) \tag{9}$$

PRZYKŁAD 4.2. Niech $G=\mathbb{R}^n$. Oznaczmy $S_T := \{x\in\mathbb{R}^n: |x_k|\le T, k=1,2,\ldots,n\}$. Wówczas można udowodnić, że dla $\forall\, f\in CAP(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ zachodzi

$$M(f(\cdot)) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{(2T)^n}\int_{s+S_T} f(x)\mu(dx) \tag{10}$$

gdzie granica istnieje jednostajnie ze względu na s [357]. ■

PRZYKŁAD 4.3. W liniowym zbiorze $Trig(G;\mathbb{R}^n)$ wielomianów trygonometrycznych wprowadzimy normę

$$\|x(\cdot)\|^2_{Trig} := M\left(|x(\cdot)|^2\right) \tag{11}$$

Można pokazać, że dla każdego wielomianu trygonometrycznego x postaci (7) zachodzi równość

$$\|x\|^2_{Trig} = \sum_{k=-n}^{n}|a_\nu|^2 \tag{12}$$

Zbiór wielomianów trygonometrycznych postaci (7) z normą (11) stanowi przestrzeń liniową unormowaną. Uzupełnienie tej przestrzeni (w sensie zbieżności względem normy (11)) nazwiemy przestrzenią sygnałów prawie okresowych w sensie Besicovitcha i będziemy oznaczać $B^2(G;\mathbb{R}^n)$ [138, 357]. ■

Ogólnie przestrzenią Besicovitcha $B^p(G;\mathbb{R}^n)$, $1\le p\le\infty$ nazwiemy przestrzeń $L^p(G_B;\mathbb{R}^n)$. Norma w przestrzeni $B^p(G;\mathbb{R}^n)$ jest określona wzorem

$$\|f(\cdot)\|^p_{B^p} := M\left(|f(\cdot)|^p\right) = \int_{G_B}|f(x)|^p\mu(dx), \quad \text{dla } 1\le p<\infty \tag{13}$$

Dla $p=\infty$ normę określa się inaczej

$$\|f(\cdot)\|_{B^\infty} := \mu\text{-ess sup}_{x\in G_B}|f(x)| \tag{14}$$

$B^p(G;\mathbb{R}^n)$ jest przestrzenią Banacha z normą (13-14). Można utożsamiać przestrzeń spo. $CAP(G;\mathbb{R}^n)$ z przestrzenią sygnałów ciągłych $C(G_B;\mathbb{R}^n)$, więc naturalne jest, że $CAP(G;\mathbb{R}^n)\subset B^p(G;\mathbb{R}^n)$ i zawieranie to jest gęste przy $p<\infty$. Zachodzi przy tym $\|f\|_{B^p}\le\|f\|_{CAP}$. Zauważmy, że własności sygnałów z przestrzeni $B^p(G;\mathbb{R}^n)$ wynikają z odpowiednich własności przestrzeni $L^p(G_B;\mathbb{R}^n)$ [357].

Zauważmy, że $B^2(G;\mathbb{R}^n)$ jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarowym

$$\langle u(\cdot), v(\cdot)\rangle_{B^2} := M\left(\langle u(\cdot), v(\cdot)\rangle\right) = \int_{G_B}\langle u(x), v(x)\rangle\mu(dx) \tag{15}$$

Przekształcenie Fouriera-Bohra F_B definiuje się w następujący sposób

$$(F_B f)(\chi) := M(f(\cdot)\bar{\chi}(\cdot)), \quad \forall\, \chi\in\hat{G}_B \tag{16}$$

Jest ono po prostu przekształceniem Fouriera na grupie G_B. Dlatego stosowane będzie to samo oznaczenie $\hat{f}=F_B f$. Formuła (16) ma sens np. dla $f\in B^1(G;\mathbb{R}^n)$. Spektrum funkcji f nazywany jest zbiór

$$Sp(f) := \{\chi\in\hat{G}_B: \hat{f}(\chi)\neq 0\} \tag{17}$$

Dla $f\in B^1(G;\mathbb{R}^n)\cup B^2(G;\mathbb{R}^n)$ spektrum Sp(f) jest co najwyżej przeliczalne. Dlatego przekształcenie Fouriera spo. będziemy często zapisywać w postaci szeregu Fouriera

$$x(t) = \sum_{\chi\in\hat{G}} a(\chi)\chi(t) \qquad (18)$$

gdzie $a(\chi) = M(\bar{\chi}(\cdot)x(\cdot))$.

Jest on formalnie równoważny z szeregiem Fouriera sygnału. Wypisuje się tylko składniki różne od zera. Jest ich przeliczalnie wiele. Odpowiednie charaktery tworzą tzw. widmo sygnału x, $Sp(x)\subset \hat{G}$.

Dla dowolnego spo. $x\in B^1(G;\mathbb{R}^n)$ zachodzi nierówność

$$|(F_B x)(\chi)| \le M(|x(\cdot)|) = \|x(\cdot)\|_{B^1} \qquad \forall\ \chi\in\hat{G} \qquad (19)$$

natomiast dla każdego spo. $x\in B^2(G;\mathbb{R}^n)$ prawdziwa jest równość Parsewala

$$\|x(\cdot)\|^2_{B^2} = \sum_k |\hat{x}(\chi_k)|^2 \qquad (20)$$

gdzie $\hat{x}(\chi)=M(\bar{\chi}(\cdot)x(\cdot))$ (przekształcenie Fouriera-Bohra spo. x) i sumowanie rozciąga się na wszystkie punkty widma $\chi_k\in Sp(x)$. Dowody i wiele innych szczegółów w monografiach [70,357,372-373].

4.1.5. Sygnały o ograniczonej mocy średniej

Rozpatrzymy teraz ważną klasę sygnałów, które będziemy nazywać sygnałami o ograniczonej mocy średniej dla podkreślenia fizycznej interpretacji. Niech $\{G_n\}$ będzie ciągiem podzbiorów G spełniającym założenia (i-iv) lematu 4.3. Dla funkcji $x\in L^1_{loc}(G;\mathbb{R}^n)$, $x\ge 0$, zdefiniujemy

$$\bar{M}(x(\cdot)) := \lim_{n\to\infty}\sup \frac{1}{\mu(G_n)}\int_{G_n} x(t)\mu(dt) \qquad (21)$$

Oznaczymy $M^p(G;\mathbb{R}^n)$, $1\le p<\infty$, zbiór funkcji mierzalnych, będący podprzestrzenią $L^p_{loc}(G;\mathbb{R}^n)$, dla których półnorma

$$\langle x(\cdot)\rangle_{M^p} := \bar{M}\left(|x(\cdot)|^p\right)^{1/p} < \infty \qquad (22)$$

a przez $M^p_0(G;\mathbb{R}^n)$ podprzestrzeń $M^p(G;\mathbb{R}^n)$ funkcji x, dla których $\langle x(\cdot)\rangle_{M^p}=0$. W przestrzeni ilorazowej

$$B^p(G;\mathbb{R}^n) := M^p(G;\mathbb{R}^n)/M^p_0(G;\mathbb{R}^n) \qquad (23)$$

półnorma (22) generuje normę. Można udowodnić, że $B^p(G;\mathbb{R}^n)$ jest przestrzenią Banacha. W przestrzeni $B^2(G;\mathbb{R}^n)$ można wprowadzić pojęcie pseudoiloczynu skalarowego

$$\langle x(\cdot),y(\cdot)\rangle_{B^2} := \bar{M}\left(\langle x(\cdot),y(\cdot)\rangle\right), \qquad x,y\in B^2(G) \qquad (24)$$

Relacja (24) nie określa iloczynu skalarowego, ponieważ nie jest liniowa.

Przestrzeń spo. $B^p(G;\mathbb{R}^n)$ jest podprzestrzenią $B^p(G;\mathbb{R}^n)$, dla $1\le p<\infty$. Pojęcie pseudoiloczynu skalarowego przenosi się więc również na spo. z przestrzeni $B^2(G;\mathbb{R}^n)$, ponieważ na zbiorze $B^p(G;\mathbb{R}^n)$, $1\le p<\infty$, istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mu(G_n)}\int_{G_n} x(t)\mu(dt), \qquad \forall\ x\in B^p(G) \qquad (25)$$

równa, oczywiście, granicy górnej (21).

Jeżeli dwa sygnały rzeczywiste $x,y\in B^2(G;\mathbb{R}^n)$, to możemy je zapisać w postaci ich szeregów Fouriera-Bohra

$$x(t) = \sum_k x_k\chi_k(t), \qquad y(t) = \sum_k y_k\chi_k(t), \qquad t\in G \qquad (26)$$

a charaktery $\chi_k\in Sp(x)\cup Sp(y)$ można tak ponumerować (zbiór przeliczalny), że $\chi_k=\bar{\chi}_{-k}$, $x_k=\bar{x}_{-k}$, $y_k=\bar{y}_{-k}$, ze względu na rzeczywistość sygnałów. Iloczyn skalarowy (24) przyjmie wtedy postać

$$\langle x(\cdot),y(\cdot)\rangle_{B^2} = \bar{M}\left(\langle x(\cdot),y(\cdot)\rangle\right) = \sum_k x_k\bar{y}_k = x_0y_0 + 2\mathrm{Re}\left(\sum_{k\ge 1} x_k\bar{y}_k\right) \qquad (27)$$

Z relacji tej będziemy często korzystać.

4.2. SYGNAŁY STOCHASTYCZNE

Proces stochastyczny określony w 1.2 przyjmiemy jako model stochastyczny losowych sygnałów fizycznych, więc procesy stochastyczne będziemy dalej nazywać po prostu sygnałami stochastycznymi.

Sygnały stochastyczne można klasyfikować w różny sposób, w zależności od przyjętego kryterium klasyfikacji. Na ogół nadrzędne jest kryterium oparte na "strukturze" czasowej sygnału stochastycznego, mówiąc inaczej, związane z typem zbioru określoności G.

Jeżeli $G=\mathbb{R}^1$, tzn. czas jest elementem osi rzeczywistej lub należy do podzbioru tej osi, to sygnał nazywany jest sygnałem z czasem ciągłym. Jeżeli $G=\mathbb{Z}^1$ lub $G=\tau\mathbb{Z}^1$, $\tau\in\mathbb{R}^1$, tzn. czas jest elementem przeliczalnego zbioru punktów osi rzeczywistej (jednakowo od siebie odległych na osi czasu), to sygnał nazywamy sygnałem z czasem dyskretnym. Czasem mówimy o sygnale dyskretnym, jeżeli grupa G jest dyskretna.

Drugie kryterium klasyfikacji dotyczy "struktury amplitudowej" sygnału stochastycznego, będzie więc ono związane z typem zmiennych losowych będących wartościami sygnału stochastycznego, charakterem zmienności w czasie i własnościami energetycznymi.

Ponieważ przyjęcie koncepcji, że czas jest elementem grupy, eliminuje konieczność rozróżniania sygnałów ze względu na pierwsze kryterium, skoncentrujemy się na własnościach "amplitudowych".

4.2.1. Sygnały ciągłe i ograniczone

Pojęcie ciągłości może być wprowadzone dla sygnału stochastycznego, określonego na grupie, na kilka różnych sposobów, podobnie jak to się dzieje dla sygnałów stochastycznych z czasem ciągłym i dyskretnym. Fakt ten wynika z tego, że zbieżność w zbiorze zmiennych losowych może być zdefiniowana na kilka sposobów. Najczęściej wprowadza się zbieżność według miary, z prawdopodobieństwem 1 (mod (P)) lub w sensie średnim. Porównanie różnych rodzajów zbieżności można znaleźć np. w [92,94,295,318].

Poniżej skoncentrujemy się na wykorzystaniu pojęcia zbieżności w sensie średnim. Oznaczymy przez $C(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$ (analogicznie $C(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{C}^n))$ oraz $C(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)))$ zbiór wszystkich sygnałów stochastycznych $\xi(t,\omega)$, $t\in G, \omega\in\Omega$, ciągłych i ograniczonych w sensie p-średnim, $p\geq 1$, o wartościach w $L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n)$ ($L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{C}^n)$ lub $L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$ odpowiednio).

Topologię zbieżności jednostajnej wprowadzamy definiując normę w przestrzeni $C(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$, $p\geq 1$, w następujący sposób

$$\|x(\cdot,\cdot)\|_{C(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))} := \sup_{t\in G}\|x(t,\omega)\|_p \qquad (28)$$

Wprowadzone sygnały z przestrzeni $C(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$ nazywa się sygnałami ciągłymi i ograniczonymi w sensie p-średnim, a w przypadku gdy p=2, będziemy mówić po prostu o ciągłości średniokwadratowej.

Przez $C_0(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$ oznaczymy zbiór wszystkich sygnałów stochastycznych $\xi\in C(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$ takich, że $\forall\ \varepsilon>0$ istnieje zbiór zwarty $F\subset G$, dla którego $\|\xi(t,\cdot)\|_p<\varepsilon\ \ \forall\ t\in F'$. Przez $C_{00}(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich sygnałów stochastycznych $\xi\in C(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$, dla których istnieje zbiór zwarty $F\subset G$ taki, że $\xi(t,\omega)=0\ \ \forall\ t\in F', \mathrm{mod}(\mathbb{P})$. Przestrzeń C_{00} nazywamy przestrzenią sygnałów p-tego rzędu o nośniku zwartym mod(P).

Podobnie jak w przypadku deterministycznym zachodzi zawieranie

$$C_{00}(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n)) \subset C_0(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n)) \subset C(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$$

ponadto $C_{00}(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n)$ jest gęstym podzbiorem przestrzeni $C_0(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$. Jeżeli G jest grupą zwartą, to $C_0(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n)) = C(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$, ale jeżeli G jest lokalnie zwarta, która nie jest zwarta, to wówczas $C_0(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n)) \neq C(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$.

Przez $\mathfrak{B}(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))=\mathfrak{B}^p(G;\mathbb{R}^n)$, $p\geq 1$, oznaczymy przestrzeń sygnałów ograniczonych w sensie p-średnim z normą (28).

Przez $\mathfrak{B}_0(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))=\mathfrak{B}_0^p(G;\mathbb{R}^n)$, $p\geq 1$, oznaczymy podzbiór wszystkich sygnałów ograniczonych w sensie p-średnim $x\in\mathfrak{B}^p(G;\mathbb{R}^n)$ takich, że $\forall\ \varepsilon>0\ \exists$ zbiór zwarty $F\subset G$, dla którego $\|x(t)\|_p<\varepsilon\ \ \forall\ t\in F'$. Będziemy w takim przypadku w uproszczeniu mówić, że sygnał l.i.m. $x(t) = 0$ przy "$t\longrightarrow\infty$".

Jeżeli $\mathrm{supp}(x)\subset A$ i zależy nam na wyróżnieniu tego faktu w tekście, to piszemy $C(A;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$ etc. Więcej informacji czytelnik znajdzie w pracach [20-22,36,314-315].

W podobny sposób będziemy rozumieć przestrzenie sygnałów ciągłych o wartościach w $L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{C}^n)$, $C(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$ dla $1\leq p\leq\infty$, etc.

Podobnie jak w przypadku deterministycznym, wśród sygnałów stochastycznych, występujących w układach dynamicznych, wyróżnić można tzw. "stan ustalony" i "stan przejściowy", który charakteryzuje się procesem dążącym do zera przy "$t\longrightarrow\infty$", przy czym zbieżność można rozumieć na wiele sposobów. W wielu przypadkach interesuje nas tylko stan ustalony. Sygnały z przestrzeni $C_0(G;L^2(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$ i $\mathfrak{B}_0(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$ posiadają interesującą nas interpretację fizykalną, są to sygnały, które "dążą do zera w sensie średnim przy $t\longrightarrow\infty$". Ostatnie stwierdzenie jest, oczywiście ścisłe, tylko dla grup liniowo uporządkowanych (patrz Dodatek A).

Podzielmy przestrzeń $C(G;L^2(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$ na rozłączne klasy równoważności w taki sposób, że dwa sygnały stochastyczne $\xi_1,\xi_2\in C(G;L^2(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$ będą należeć do tej samej klasy wtedy i tylko wtedy, gdy $\xi_1-\xi_2\in C_0(G;L^2(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$. Zbiór tak wprowadzonych klas równoważności oznaczać będziemy jako przestrzeń ilorazową $C/C_0(G;L^2(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$.

Interpretacja fizyczna tego faktu jest taka, że dwa sygnały $\xi_1,\xi_2\in C/C_0$ będziemy uważać za jednakowe, jeżeli reprezentują ten sam "stan ustalony w sensie średnim".

W podobny sposób można wprowadzić przestrzenie ilorazowe sygnałów ciągłych $C/C_0(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{C}^n))$ o wartościach w $L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{C}^n)$ dla $1\leq p\leq\infty$.

4.2.2. Sygnały o skończonej średniej energii

Oznaczymy przez $L^{r,q}(G;\mathbb{R}^n) = L^r(G;L^q(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n)), 1\le r,q<\infty$ przestrzeń mierzalnych sygnałów stochastycznych $\xi(t,\cdot), t\in G$ o wartościach w przestrzeni funkcji losowych $L^q(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n)$, dla których

$$\|\xi(\cdot,\cdot)\|_{L^{r,q}(G)} := \left(\int_G \|\xi(t,\omega)\|_q^r \mu(dt)\right)^{1/q} < \infty \qquad (29)$$

Przestrzenie $L^{r,q}(G;\mathbb{R}^n)$ bywają nazywane przestrzeniami z mieszaną normą. Dalej używamy skróconej notacji

$$\|\xi(\cdot,\cdot)\|_{r,q} := \|\xi(\cdot,\cdot)\|_{L^{r,q}(G)} \qquad (30)$$

W przypadku gdy r=q=2, mamy do czynienia z przestrzenią Hilberta. Niech $\xi,\eta \in L^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)$. W tym przypadku piszemy również

$$\langle\xi(\cdot,\cdot),\eta(\cdot,\cdot)\rangle_{2,2} := \langle\xi(\cdot,\cdot),\eta(\cdot,\cdot)\rangle_{L^{2,2}(G)} := \int_G \mathbb{E}\Big(\langle\xi(t,\omega),\eta(t,\omega)\rangle\Big)\mu(dt) \qquad (31)$$

dla oznaczenia iloczynu skalarowego w przestrzeni $L^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)$.

Będziemy mówić, że sygnały stochastyczne należące do przestrzeni $L^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)$ posiadają skończoną energię średnią.

4.2.3. Sygnały stacjonarne

Sygnały stochastyczne stacjonarne zajmują bardzo ważne miejsce w zastosowaniach. Z tego powodu zajmiemy się nimi bardziej szczegółowo.

DEFINICJA 4.1. Sygnał stochastyczny $\xi(t,\omega)$, $t\in G$, $\omega\in\Omega$, nazwiemy sygnałem stacjonarnym w ścisłym sensie, jeżeli $\forall\ k\in\mathbb{Z}_+^1, \tau\in G$ dystrybuanty sygnału $\xi(t,\cdot)$ i sygnału $\xi(t+\tau,\cdot)$ są sobie równe $\forall\ t_1,t_2,\dots,t_k\in G$, $x_1,x_2,\dots,x_k\in\mathbb{R}^n$, tzn.

$$\mathbb{F}_{t_1,t_2,\dots,t_k}(x_1,x_2,\dots,x_k) = \mathbb{F}_{t_1+\tau,t_2+\tau,\dots,t_k+\tau}(x_1,x_2,\dots,x_k). \blacksquare$$

Warunek ścisłej stacjonarności jest zazwyczaj warunkiem zbyt silnym w odniesieniu do sygnałów o praktycznym znaczeniu. Bardziej praktyczne znaczenie ma pojęcie stacjonarności w szerszym sensie.

DEFINICJA 4.2. Sygnał stochastyczny $\xi(t,\omega)$, $t\in G,\omega\in\Omega$, o wartościach w $\mathbb{R}^n$ nazwiemy stacjonarnym w szerszym sensie, jeżeli

(i) $\mathbb{E}\xi(t,\cdot) = \text{const}, \qquad \forall\ t\in G;$

(ii) $\xi(t,\cdot)\in L^2(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n), \ \forall\ t\in G;$

(iii) $R_{\xi\xi}(t,s) = R(t-s), \quad \forall\ t,s\in G$, gdzie $R\in C(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$ [107,118,126]. $\blacksquare$

Każdy sygnał stochastyczny $\xi(t,\omega), t\in G,\omega\in\Omega$, stacjonarny w szerszym sensie posiada reprezentację spektralną postaci

$$\xi(t,\omega) = \int_{\hat{G}} \chi(t)\zeta(d\chi), \qquad \forall\ t\in G \qquad (32)$$

gdzie ζ jest miarą losową, tzw. procesem spektralnym procesu ξ

$$\mathbb{E}\Big(\zeta(d\chi)\zeta^*(d\chi)\Big) = F^{\xi}(d\chi), \qquad \operatorname{tr}\Big(F^{\xi}(\hat{G})\Big) < \infty \qquad (33)$$

Z drugiej strony, ponieważ R jest funkcją dodatnio określoną, więc na podstawie twierdzenia Weila [207] zachodzi relacja

$$R(t) = \int_{\hat{G}} \chi(t)F^{\xi}(d\chi), \qquad \forall\ t\in G \qquad (34)$$

Miara F^{ξ} o wartościach z $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ jest określona jednoznacznie przez funkcję R i jest nazywana miarą spektralną procesu ξ [94,107,118,299].

Bardziej zaawansowana analiza układów dynamicznych z procesami stacjonarnymi w szerszym sensie jest zawarta w dodatku C.

4.2.4. Sygnały okresowe

Niech $\xi(t,\omega)$, $t\in G,\omega\in\Omega$ będzie procesem stochastycznym mierzalnym i ośrodkowym o wartościach w $\mathbb{R}^n$.

DEFINICJA 4.3. Sygnał stochastyczny $\xi(t,\omega), t\in G,\omega\in\Omega$ nazwiemy H-okresowym w silnym sensie, jeżeli $\forall\ k\in\mathbb{Z}_+^1, t_1,t_2,\dots,t_k\in G$, $x_1,x_2,\dots,x_k\in\mathbb{R}^n$ funkcje zmiennej $\tau\in G$

$$\mathbb{F}_{t_1+\tau,t_2+\tau,\dots,t_k+\tau}(x_1,x_2,\dots,x_k) \qquad (35)$$

są funkcjami H-okresowymi. $\blacksquare$

PRZYKŁAD 4.4. Niech $G=\mathbb{R}^1, H=\tau\mathbb{Z}^1, \tau\in\mathbb{R}_+^1, t\in G$, wówczas sygnały

$$\xi(t,\omega) = \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)\eta\left(\frac{2\pi t}{\tau},\omega\right) \qquad \xi(t,\omega) = \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) + \eta\left(\frac{2\pi t}{\tau},\omega\right), \qquad t\in G,\omega\in\Omega \qquad (36)$$

gdzie η jest procesem stacjonarnym, są sygnałami τ-okresowymi. $\blacksquare$

Definicja 4.3 jest równoważna poniższym definicjom.

DEFINICJA 4.4. Sygnał $\xi(t,\omega)$, $t\in G, \omega\in\Omega$ nazwiemy H-okresowym w silnym sensie, jeżeli $\forall\ r\in\mathbb{Z}_+^1$, $t_1,t_2,\ldots,t_r\in G$ i dowolnych zbiorów borelowskich $A_1,A_2,\ldots,A_r\in\mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$ funkcje

$$\mathbb{P}\left\{\xi(t_1+\tau,\omega)\in A_1,\xi(t_2+\tau,\omega)\in A_2,\ldots,\xi(t_r+\tau,\omega)\in A_r\right\} \tag{37}$$

są H-okresowe ze względu na zmienną τ. ■

DEFINICJA 4.5. Sygnał $\xi(t,\omega)$, $t\in G$, $\omega\in\Omega$ nazwiemy H-okresowym w silnym sensie, jeżeli $\forall\ r\in\mathbb{Z}_+^1, t_1,t_2,\ldots,t_r\in G$ i dowolnej ciągłej i ograniczonej funkcji f określonej na $\mathbb{R}^n$ funkcje

$$\mathbb{E}\left(f\left(\xi(t_1+\tau,\omega),\xi(t_2+\tau,\omega),\ldots,\xi(t_r+\tau,\omega)\right)\right) \tag{38}$$

są H-okresowe ze względu na zmienną τ. ■

Jeżeli $\forall\ t\in G$ istnieje wartość oczekiwana $m_1(t)=\mathbb{E}\xi(t,\omega)$, to $m_1(t)$ jest funkcją H-okresową. Jeżeli istnieją momenty

$$m_{k_1,k_2,\ldots,k_r}(t_1,t_2,\ldots,t_r)=\mathbb{E}\left(\xi(t_1,\omega)^{k_1}\xi(t_2,\omega)^{k_2}\ldots\xi(t_r,\omega)^{k_r}\right) \tag{39}$$

to funkcje

$$m_{k_1,k_2,\ldots,k_r}(t_1+\tau,t_2+\tau,\ldots,t_r+\tau) \tag{40}$$

są H-okresowe ze względu na zmienną τ.

DEFINICJA 4.6. Sygnały stochastyczne $\{\xi_k(t,\omega)\}$, $t\in G,\omega\in\Omega$, dla $k=1,2,\ldots,m$, nazwiemy H-periodycznie związanymi w silnym sensie, jeżeli $\forall\ n_1,n_2,\ldots,n_m\in\mathbb{Z}_+^1$, $t_1^1,t_2^1,\ldots,t_{n_m}^m\in G$, $x_1^1,x_2^1,\ldots,x_{n_m}^m\in\mathbb{R}^n$ funkcja

$$\mathbb{P}\left\{\xi_1(t_1^1+\tau,\omega)<x_1^1,\xi_1(t_2^1+\tau,\omega)<x_2^1,\ldots,\xi_m(t_1^m+\tau,\omega)<x_1^m,\ldots,\xi_m(t_{n_m}^m+\tau,\omega)<x_{n_m}^m\right\} \tag{41}$$

jest H-okresową funkcją zmiennej $\tau\in G$. ■

Warunek ścisłej okresowości jest zazwyczaj warunkiem zbyt silnym w odniesieniu do sygnałów o praktycznym znaczeniu. Bardziej praktyczne znaczenie może mieć pojęcie okresowości w sensie szerszym (średnim).

DEFINICJA 4.7. Sygnał stochastyczny $\xi(t,\omega)$, $t\in G,\omega\in\Omega$ o wartościach w $\mathbb{R}^n$ nazwiemy H-okresowym w sensie szerszym (średnim), jeżeli

(i) $\xi(t,\cdot)\in L^2(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n)$, $\forall\ t\in G$;

(ii) $\mathbb{E}\xi(t,\cdot)$ jest sygnałem H-okresowym;

(iii) macierz autokorelacji sygnału ξ, tj. $R_{\xi\xi}(t+\tau,s+\tau)$ jest H-okresową funkcją zmiennej $\tau\in G$, $\forall\ t,s\in G$. ■

DEFINICJA 4.8. Oznaczmy przez $L_H^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)=L_H^2(G/H;L^2(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$ zbiór H-okresowych, mierzalnych sygnałów stochastycznych 2. rzędu x, o wartościach w $\mathbb{R}^n$, określonych dla $t\in G,\omega\in\Omega$, takich że

$$\|x(\cdot,\cdot)\|^2_{L_H^{2,2}}:=\frac{1}{\mu(G/H)}\int_{G/H}\|\tilde{x}(t,\cdot)\|_2^2\,\mu(dt)<\infty \tag{42}$$

gdzie $x=\tilde{x}\circ\pi_H$. ■

Łatwo zauważyć, że tak określona przestrzeń jest przestrzenią Hilberta.

TWIERDZENIE 4.4. Transformata Fouriera dowolnej funkcji losowej $x\in L_H^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)$, G/H - grupa zwarta, określona w sposób następujący

$$\hat{x}(\chi,\omega):=\frac{1}{\mu(G/H)}\int_{G/H}\bar{\chi}(t)x(t,\omega)\mu(dt),\qquad \chi\in\hat{G} \tag{43}$$

gdzie całkę rozumiemy w sensie średniokwadratowym, jest funkcją ciągłą w sensie średnim, określoną na grupie dualnej $\hat{G}$ i jest elementem przestrzeni $C_0(\hat{G};L^2(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{C}^n))$, jeżeli tylko G nie jest dyskretna.

Jeżeli $x\in L_H^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)$, to $x(t,\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(\omega)\chi_k(t)$, $t\in G,\omega\in\Omega$ i ponadto

$$\|x(\cdot,\cdot)\|^2_{L_H^{2,2}(\hat{G})}=\sum_{k=1}^{\infty}\|a_k(\cdot)\|_2^2. \tag{44}$$

gdzie $a_k(\omega)=\frac{1}{\mu(G)}\int_G\bar{\chi}_k(t)x(t,\omega)\mu(dt)$ $\forall\ \chi_k\in\hat{G}$. Relacja (43) określa izometryczny izomorfizm $L_H^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)\cong l^2(L^2(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{C}^n))$.

Dowód. Wynika bezpośrednio z własności przekształcenia Fouriera-Bohra na kompaktyfikacji Bohra G_B grupy G i definicji 4.8. ■

4.2.5. Sygnały prawie okresowe

DEFINICJA 4.9. Sygnał stochastyczny $\xi(t,\omega)$, $t\in G,\omega\in\Omega$ nazwiemy sygnałem prawie okresowym w ścisłym sensie jeżeli $\forall\ k\in\mathbb{Z}_+^1,\tau\in G$ dystrybuanta sygnału ξ

$$F_{t_1+\tau,t_2+\tau,\ldots,t_k+\tau}(x_1,x_2,\ldots,x_k)$$

jest $\forall\ t_1,t_2,\ldots,t_k\in G$, $x_1,x_2,\ldots,x_k\in\mathbb{R}^n$ prawie okresową funkcją τ. ■

Warunek ścisłej prawie okresowości jest zazwyczaj warunkiem zbyt silnym w odniesieniu do sygnałów o praktycznym znaczeniu. W dalszych zastosowaniach bardziej praktyczne znaczenie będzie miało pojęcie prawie okresowości w sensie szerszym (p-średnim, gdzie $p\geq 1$).

Niech $CAP^p(G;\mathbb{R}^n)=CAP(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n)), p\geq 1$, oznacza dalej zbiór sygnałów stochastycznych prawie okresowych (sspo.) w sensie Bohra określonych na G, o wartościach w przestrzeni zmiennych losowych rzeczywistych rzędu p, $p\geq 1$ por. [357]. O sygnałach stochastycznych z przestrzeni $CAP^p(G;\mathbb{R}^n)$ będziemy mówić, że są prawie okresowe w sensie szerszym (p-średnim). W zbiorze $CAP^p(G;\mathbb{R}^n)$ wyróżnimy podzbiór $Trig^p(G;\mathbb{R}^n)= Trig^p(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$ losowych wielomianów trygonometrycznych, tj. funkcji postaci

$$x(t,\omega) = \sum_{k=-n}^{n} a_k(\omega)\chi_k(t), \qquad t\in G,\ a_k\in L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{C}^n),\ \chi_k\in\hat{G} \tag{45}$$

a ponieważ w zastosowaniach interesują nas głównie funkcje rzeczywiste, założymy, że charaktery są tak ponumerowane, że $\bar{\chi}_k=\chi_{-k}$ i $\bar{a}_k=a_{-k}$ mod(P).

TWIERDZENIE 4.5. Przestrzeń $Trig^p(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n)), p\geq 1$, jest gęsta w $CAP(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$.

Dowód. Wynika z [357, s.12], dla przypadku gdy $G=\mathbb{R}^1$ por. również [7].■

Dla każdego sspo. $\xi\in CAP^p(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n)), p\geq 1$, istnieje taki ciągły proces stochastyczny $\tilde{\xi}\in C(G_B;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$, że $\xi=\tilde{\xi}\circ i_B$. Na zbiorze sspo. $CAP^p(G;\mathbb{R}^n)$ określony jest losowy funkcjonał niezmienniczy, podobny do $\mathbb{M}$, określonego relacją (8), z tą różnicą, że całka określona jest w przestrzeni $L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n)$. Dla uniknięcia wprowadzania nowych oznaczeń, będziemy używać tego samego oznaczenia $\mathbb{M}(\cdot)$. Nie powinno to prowadzić do nieporozumień.

Funkcjonał ten (inaczej wartość średnia sspo. $\xi\in CAP^p(G;\mathbb{R}^n)$) oznaczać będziemy przez $\mathbb{M}(\xi)$:

$$\mathbb{M}(\xi(\cdot,\omega)) := \frac{1}{\mu(G_B)}\int_{G_B}\tilde{\xi}(t,\omega)\mu(dt), \qquad \text{mod}(\mathbb{P}) \tag{46}$$

przy czym całkowanie rozumiane jest w sensie przestrzeni $L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n)$.

LEMAT 4.6. Można udowodnić że dla ciągu $\{G_n\}$ spełniającego warunki lematu 4.3

$$\mathbb{M}(\xi(\cdot,\omega)) = \underset{n\to\infty}{l.i.m.}\ \frac{1}{\mu(G_n)}\int_{G_n}\xi(t,\omega)\mu(dt), \quad \text{mod}(\mathbb{P}),\ \forall\,\xi\in CAP^p(G) \tag{47}$$

Dowód. Dowód pominiemy. Por. [372, s.546]■

PRZYKŁAD 4.5. Niech $G=\mathbb{R}^1$. Wówczas można udowodnić, że dla $\forall\,\xi\in CAP^p(\mathbb{R}^1;\mathbb{R}^n)$, $p\geq 1$, zachodzi

$$\mathbb{M}(\xi(\cdot,\omega)) = \underset{T\to\infty}{l.i.m.}\ \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\xi(t,\omega)\mu(dt), \qquad \text{mod}(\mathbb{P}) \tag{48}$$

Por. [138,357].■

PRZYKŁAD 4.6. W liniowym zbiorze $Trig^2(G;L^2(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$ losowych wielomianów trygonometrycznych wprowadzimy normę

$$\|\xi(\cdot,\cdot)\|^2_{Trig,2} := \mathbb{M}\left(\|\xi(\cdot,\cdot)\|_2^2\right), \qquad \xi\in Trig^2(G) \tag{49}$$

Można pokazać, że dla każdego losowego wielomianu trygonometrycznego ξ postaci (49) zachodzi równość

$$\|\xi(\cdot,\cdot)\|^2_{Trig,2} = \sum_{k=-n}^{n}\|a_\nu(\cdot)\|_2^2 \tag{50}$$

Zbiór losowych wielomianów trygonometrycznych postaci (45) z normą (49) stanowi przestrzeń liniową unormowaną. Uzupełnienie tej przestrzeni (w sensie zbieżności względem normy (49)) nazwiemy przestrzenią hilbertowskich sspo. (ewentualnie sspo. w sensie średniokwadratowym) w sensie Besicovitcha i będziemy oznaczać $B^2(G;L^2(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))=B^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)$. ■

DEFINICJA 4.10. Ogólnie przestrzenią Besicovitcha $B^p(G;L^q(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n)) = B^{p,q}(G;\mathbb{R}^n)$, $1\leq p,q\leq\infty$, nazwiemy przestrzeń sygnałów losowych $L^{p,q}(G_B;\mathbb{R}^n)$. Norma w przestrzeni $B^{p,q}(G;\mathbb{R}^n)$, $1\leq p<\infty$, $1\leq q\leq\infty$ jest określona wzorem

$$\|\xi(\cdot,\cdot)\|^p_{B^{p,q}} := \mathbb{M}\left(\|\xi(\cdot,\cdot)\|_q^p\right) = \frac{1}{\mu(G_B)}\int_{G_B}\|\xi(t,\cdot)\|_q^p\mu(dt) \tag{51}$$

Dla $p=\infty$, $1\leq q\leq\infty$ normę określa się inaczej

$$\|\xi(\cdot,\cdot)\|_{B^{\infty,q}} := \mu\text{-ess sup}_{t\in G_B}\|\xi(t,\cdot)\|_q \tag{52}$$

$B^{p,q}(G;\mathbb{R}^n)$, $p,q\geq 1$ jest przestrzenią Banacha z mieszaną normą (51-52) [357].■

Ponieważ można utożsamiać przestrzeń sspo. $CAP^q(G;\mathbb{R}^n)$ z przestrzenią sygnałów ciągłych $C(G_B;L^q(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$, więc naturalne jest, że $CAP^q(G;\mathbb{R}^n)\subset B^{p,q}(G;\mathbb{R}^n)$ i zawieranie to jest gęste dla $p,q<\infty$. Zachodzi przy tym $\|\cdot\|_{B^{p,q}}\leq\|\cdot\|_{CAP^q}$. Zauważmy, że własności funkcji z przestrzeni $B^{p,q}(G;\mathbb{R}^n)$ wynikają z odpowiednich własności przestrzeni $L^{p,q}(G_B;\mathbb{R}^n)$.

Zauważmy, że $B^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)$ jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarowym

$$\langle\xi(\cdot,\cdot),\eta(\cdot,\cdot)\rangle_{B^{2,2}} := \mathbb{M}\left(\langle\xi(\cdot,\cdot),v(\cdot,\cdot)\rangle_2\right) = \frac{1}{\mu(G_B)}\int_{G_B}\langle\xi(t,\cdot),\eta(t,\cdot)\rangle_2\mu(dt) \tag{53}$$

Przekształcenie losowe Fouriera-Bohra F_B zdefiniujemy wykorzystując losowy funkcjonał (46) w następujący sposób

$$(F_B\xi)(\chi) := \mathbb{M}(\xi(\cdot,\omega)\bar{\chi}(\cdot)), \qquad \mathrm{mod}(\mathbb{P}),\ \forall\ \chi\in\hat{G}_B \tag{54}$$

Jest ono po prostu losowym przekształceniem Fouriera na grupie G_B. Dlatego stosowane będzie to samo oznaczenie $\hat{\xi}=F_B\xi$. Formuła (54) ma sens np. dla $\xi\in B^{1,q}(G;\mathbb{R}^n)$, $q\geq 1$. Spektrum sygnału losowego ξ nazywamy zbiór

$$\mathrm{Sp}(\xi) := \left\{\chi\in\hat{G}_B:\ \hat{\xi}(\chi,\omega)\neq 0 \text{ dla } \omega\in\Omega_1\subseteq\Omega,\ \mathbb{P}(\Omega_1)>0\right\} \tag{55}$$

Dla $\xi\in B^{1,q}(G;\mathbb{R}^n)\cup B^{2,q}(G;\mathbb{R}^n)$, $q\geq 1$ spektrum $\mathrm{Sp}(\xi)$ jest co najwyżej przeliczalne. Dlatego również losowe przekształcenie Fouriera sspo. będziemy często zapisywać w postaci losowego szeregu Fouriera

$$\xi(t,\omega) = \sum_{\chi\in\hat{G}} a(\chi,\omega)\chi, \qquad \mathrm{mod}(\mathbb{P}),\ \chi\in\hat{G} \tag{56}$$

gdzie $a(\chi,\omega) = \mathbb{M}(\bar{\chi}(\cdot)\xi(\cdot,\omega))$.

Jest on formalnie równoważny (mod($\mathbb{P}$)) z losowym szeregiem Fouriera sygnału ξ. Wypisuje się tylko składniki różne od zera. Jest ich przeliczalnie wiele. Odpowiednie charaktery tworzą tzw. widmo funkcji ξ, $\mathrm{Sp}(\xi)\subset\hat{G}$.

Dla dowolnego sspo. $\xi\in B^{1,q}(G;\mathbb{R}^n)$ zachodzi nierówność

$$\left\|(F_B\xi)(\chi)\right\|_q \leq \mathbb{M}\left(\left\|\xi(\cdot,\cdot)\right\|_q\right) = \left\|x(\cdot)\right\|_{B^{1,q}}, \qquad \forall\ \chi\in\hat{G}, q\geq 1 \tag{57}$$

natomiast dla każdego sspo. $\xi\in B^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)$ prawdziwa jest równość Parsewala

$$\left\|\xi(\cdot,\cdot)\right\|^2_{B^{2,2}} = \sum_k \left\|\hat{\xi}(\chi_k,\cdot)\right\|_2^2 \tag{58}$$

gdzie $\hat{\xi}(\chi,\omega)=\mathbb{M}(\bar{\chi}(\cdot)\xi(\cdot,\omega))$, mod($\mathbb{P}$) (losowe przekształcenie Fouriera-Bohra sspo. ξ i sumowanie rozciąga się na wszystkie punkty widma $\chi_k\in\mathrm{Sp}(x)$. Dowody i wiele innych szczegółów w monografiach [7,357].

4.2.6. Sygnały o skończonej średniej mocy

Rozpatrzmy teraz ważną klasę sygnałów stochastycznych, które będziemy nazywać sygnałami o ograniczonej mocy średniej dla podkreślenia czytelnej fizycznej interpretacji. Niech $\{G_n\}$ będzie ciągiem podzbiorów G spełniającym założenia (i-iv) lematu 4.3.

DEFINICJA 4.11. Oznaczymy $M^{p,q}(G;\mathbb{R}^n)=M^p(G;L^q(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$, $1\leq p<\infty$, $q\geq 1$ zbiór sygnałów mierzalnych, będący podprzestrzenią $L^p_{loc}(G;L^q(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$, dla których półnorma

$$\langle\xi(\cdot,\cdot)\rangle_{M^{p,q}} := \bar{\mathbb{M}}\left(\left\|\xi(\cdot,\cdot)\right\|_q^p\right)^{1/p} < \infty \tag{59}$$

a przez $M_0^{p,q}(G;\mathbb{R}^n)$ podprzestrzeń $M^{p,q}(G;\mathbb{R}^n)$ funkcji losowych ξ, dla których $\langle\xi(\cdot,\cdot)\rangle_{M^{p,q}}=0$. W przestrzeni ilorazowej

$$B^{p,q}(G;\mathbb{R}^n) := M^{p,q}(G;\mathbb{R}^n)/M_0^{p,q}(G;\mathbb{R}^n) \tag{60}$$

półnorma (59) generuje normę. ■

Można udowodnić, że $B^{p,q}(G;\mathbb{R}^n)$ jest przestrzenią Banacha. W przestrzeni $B^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)$ można wprowadzić pojęcie pseudoiloczynu skalarowego

$$\langle\xi(\cdot,\cdot),\eta(\cdot,\cdot)\rangle_{B^{2,2}} := \bar{\mathbb{M}}\left(\langle\xi(\cdot,\cdot),\eta(\cdot,\cdot)\rangle_2\right), \qquad \forall\ \xi,\eta\in B^{2,2}(G;\mathbb{R}^n) \tag{61}$$

Relacja (59) nie określa iloczynu skalarowego, ponieważ nie jest liniowa.

Przestrzeń sspo. $B^{p,q}(G;\mathbb{R}^n)$ jest podprzestrzenią $B^{p,q}(G;\mathbb{R}^n)$, dla $1\leq p<\infty$. Pojęcie pseudoiloczynu skalarowego przenosi się więc również na sspo. z przestrzeni $B^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)$, ponieważ na zbiorze $B^{p,q}(G;\mathbb{R}^n)$, $1\leq p,q<\infty$, istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\mu(G_n)}\int_{G_n}\left\|\xi(t,\cdot)\right\|_q^p\mu(dt), \qquad \forall\ \xi\in B^{p,q}(G;\mathbb{R}^n) \tag{62}$$

równa, oczywiście, granicy górnej (59).

Jeżeli dwa sygnały rzeczywiste $\xi,\eta\in B^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)$, to możemy je zapisać w postaci ich szeregów Fouriera-Bohra

$$\xi(t,\omega) = \sum_k \xi_k(\omega)\chi_k(t), \qquad \eta(t,\omega) = \sum_k \eta_k(\omega)\chi_k(t), \quad \mathrm{mod}(\mathbb{P}),\ \forall\ t\in G \tag{63}$$

a charaktery $\chi_k\in\mathrm{Sp}(x)\cup\mathrm{Sp}(y)$ można tak ponumerować (zbiór przeliczalny), że $\chi_k=\bar{\chi}_{-k}$, $\xi_k=\bar{\xi}_{-k}$, $\eta_k=\bar{\eta}_{-k}$, mod($\mathbb{P}$), ze względu na rzeczywistość sygnałów. Iloczyn skalarowy (61) przyjmie wtedy postać

$$\langle\xi(\cdot,\cdot),\eta(\cdot,\cdot)\rangle_{B^{2,2}} = \bar{\mathbb{M}}\left(\langle\xi(\cdot,\cdot),\eta(\cdot,\cdot)\rangle_2\right) = \sum_k \xi_k\bar{\eta}_k = \xi_0\eta_0 + 2\mathrm{Re}\left(\sum_{k\geq 1}\xi_k\bar{\eta}_k\right) \tag{64}$$

Z relacji tej będziemy często korzystać.

Rozdział V. UKŁADY DYNAMICZNE LINIOWE

5.1. RÓWNANIE REZOLWENTY

W teorii równań całkowych i w ich zastosowaniach, szczególnie w przypadku ciągłym $G=R^1$ i $Q=R^1_+$, pojawiają się bardzo często pojęcia: jądra rozwiązującego i rezolwenty. Używane są one w zasadzie powszechnie [79-80, 167, 190, 196].

Czy można ten bardzo wygodny pomysł zastosować do równań całkowych postaci (2.7) określonych na lzga. G?

Niech dany będzie deterministyczny układ dynamiczny opisany liniowym równaniem całkowym z jądrem $k(t,s)$

$$x(t) = z(t) + \int_{Q_t} k(t,s)x(s)\mu(ds), \qquad t\in Q \tag{1}$$

Odpowiadające mu jądro rozwiązujące oznaczymy przez $r(t,s)$. Omówimy krótko jego własności. Formalnie równanie dla jądra rozwiązującego skojarzonego z $k(t,s)$ zapisywać będziemy w postaci następującego równania

$$r(t,s) = k(t,s) + \int_{Q_t\setminus Q_s} r(t,u)k(u,s)\mu(du) \tag{2}$$

Jeżeli k jest wielkością skalarną, podobną własność posiada r. Podobnie, gdy k jest macierzą o wymiarach $n\times n$, r również jest macierzą o wymiarach $n\times n$. Przypuśćmy, że jądro rozwiązujące r istnieje jako rozwiązanie równania (2) oraz że wszystkie całki mają sens. Pomnóżmy obie strony równania (1) przez $r(t,s)$ i scałkujmy na zbiorze Q_t. Otrzymamy

$$\int_{Q_t} r(t,u)x(u)\mu(du) - \int_{Q_t} r(t,u)z(u)\mu(du) = \int_{Q_t} r(t,u)\int_{Q_u} k(u,s)x(s)\mu(ds)\mu(du) =$$

$$= \int_{Q_t}\int_{Q_t} r(t,u)1_{Q_u}(s)k(u,s)x(s)\mu(ds)\mu(du) =$$

$$= \int_{Q_t}\int_{Q_t\setminus Q_s} r(t,u)k(u,s)x(s)\mu(du)\mu(ds) = \int_{Q_t} (r(t,s)-k(t,s))x(s)\mu(ds)$$

Ostatnia równość, po uwzględnieniu relacji (2), upoważnia do napisania, że

$$\int_{Q_t} r(t,s)z(s)\mu(ds) = \int_{Q_t} k(t,s)x(s)\mu(ds) \tag{3}$$

a zatem

$$x(t) = z(t) + \int_{Q_t} r(t,s)z(s)\mu(ds) \tag{4}$$

Wynika stąd, że jeżeli znane jest rozwiązanie równania rezolwentowego (2), to rozwiązanie równania liniowego (1) może być zapisane w postaci jawnej zależności od funkcji z. Ten fakt uzasadnia stosowanie "klasycznego" określenia "jądro rozwiązujące" dla funkcji r.

Można pokazać, że

$$\int_{Q_t\setminus Q_s} r(t,u)k(u,s)\mu(ds) = \int_{Q_t\setminus Q_s} k(t,u)r(u,s)\mu(ds) \tag{5}$$

a równanie rezolwenty (2) można zapisać w postaci równoważnej

$$r(t,s) = k(t,s) + \int_{Q_t\setminus Q_s} k(t,u)r(u,s)\mu(du) \tag{6}$$

Jeżeli macierz k posiada własność, że $k(t,s)=\tilde{k}(t-s)$, rozważania można uprościć. Z równości (6) wynika w tym przypadku, że

$$r(t+s,s) = \tilde{k}(t) + \int_{Q_{t+s}\setminus Q_s} k(t+s,u)r(u,s)\mu(du) =$$

$$= \tilde{k}(t) + \int_{Q_t} k(t+s,u+s)r(u+s,s)\mu(du) = \tilde{k}(t) + \int_{Q_t} \tilde{k}(t-u)r(u+s,s)\mu(du) \tag{7}$$

a to oznacza, że $r(t+s,s)=r(t,e)=\tilde{r}(t)$ nie zależy od parametru s. W tym przypadku równanie (6) można zapisać w postaci uproszczonej

$$\tilde{r}(t) = \tilde{k}(t) + \int_{Q_t} \tilde{k}(t-u)\tilde{r}(u)\mu(du)$$

Wynika stąd, że jeżeli jądro $k(t,s)=\tilde{k}(t-s)$, to tę samą własność posiada jądro rozwiązujące $r(t,s)=\tilde{r}(t-s)$. Fakt ten, znany w przypadku $G=R^1$, jest szeroko wykorzystywany w klasycznej teorii liniowych, stacjonarnych układów dynamicznych.

5.2. UKŁADY DETERMINISTYCZNE

Analizę rozpoczniemy od przedyskutowania własności jednowymiarowego, stacjonarnego i przyczynowego operatora liniowego A danego relacją

$$y(t) := (Ax)(t) := \int_{Q_t} x(t-h)k(dh), \qquad t\in Q \tag{8}$$

gdzie k jest miarą regularną o wahaniu ograniczonym: $k\in\mathcal{V}(Q;\mathcal{L}(R,R))$, $\mathrm{supp}(x)\subset Q$.

5.2.1. Własności w przestrzeniach L^2

Analizy operatora A dokonamy przy założeniu, że $A: L^2(Q;\mathbb{R}^1) \longrightarrow L^2(Q;\mathbb{R}^1)$. Sprawdzimy najpierw nośnik. Niech $\mathrm{supp}(x)\subset Q$, wówczas prawdziwy jest ciąg relacji

$$\neg\left(x(t-h)k(dh)=0\right) \Leftrightarrow \left(h\in\mathrm{supp}(k)\right) \wedge \left(t-h\in\mathrm{supp}(x)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(h\in\mathrm{supp}(k)\right) \wedge \left(t\in\mathrm{supp}(x)\cap\mathrm{supp}(k)\right) \tag{9}$$

Ale ponieważ Q jest półgrupą domkniętą, na podstawie (9) mamy

$$\mathrm{supp}(Ax) = \{t:(Ax)(t)\neq 0\}^d \subset (\mathrm{supp}(x)\cap\mathrm{supp}(k))^d \subset Q$$

Niech $x\in L^2(Q;\mathbb{R}^1)$. Dla dowolnego $u\in L^2(Q;\mathbb{R}^1)$ i $\tau\in Q$ mamy

$$\int_{Q_\tau} x(t)u(t)\mu(dt) = \int_{\hat{G}} \hat{x}_\tau(\chi)\hat{u}^-(\chi)m(d\chi) \tag{10}$$

gdzie

$$\hat{x}_\tau(\chi) = \int_G \bar{\chi}(t)x_\tau(t)\mu(dt) = \int_{Q_\tau} \bar{\chi}(t)x(t)\mu(dt) \tag{11}$$

Relacja (10) nie zależy, oczywiście, od zachowania się u(t) dla $t\notin Q_\tau$. Niech

$$u(t) := \int_{Q_t} x_\tau(t-h)k(dh) \tag{12}$$

Zauważmy, że

$$u_\tau(t) = \int_{Q_t\cap Q_\tau} x_\tau(t-h)k(dh) = y_\tau(t) \tag{13}$$

ponieważ operator A jest przyczynowy. Wyznaczymy transformatę Fouriera funkcji u. Mamy

$$\hat{u}(\chi) = \int_Q \bar{\chi}(t)\int_{Q_t} x_\tau(t-h)k(dh)\mu(dt) =$$

$$= \int_Q \bar{\chi}(t)\int_Q 1_{\{h\le t\}}(h)k(dh)x_\tau(t-h)\mu(dt) \tag{14}$$

Dokonamy w (14) zamiany zmiennych $t-h \longrightarrow \eta$. Otrzymamy

$$\hat{u}(\chi) = \int_Q\int_Q \bar{\chi}(\eta+h)k(dh)x_\tau(\eta)\mu(d\eta) = \hat{k}(\chi)\hat{x}_\tau(\chi)$$

Stąd oraz z relacji (10) wynika, że

$$\int_{Q_\tau} |y(t)|^2\mu(dt) \le \int_Q |u(t)|^2\mu(dt) = \int_{\hat{G}} |\hat{k}(\chi)\hat{x}_\tau(\chi)|^2 m(d\chi) \le$$

$$\le \sup_{\chi\in\hat{G}} |\hat{k}(\chi)|^2 \int_{\hat{G}} |\hat{x}_\tau(\chi)|^2 m(d\chi) = \sup_{\chi\in\hat{G}} |\hat{k}(\chi)|^2 \|x_\tau(t)\|_2^2 \tag{15}$$

Ostatnia równość zachodzi na podstawie twierdzenia Parsevala [7,111].

Podobnie dowodzimy, że

$$\int_{Q_\tau} x(t)y(t)\mu(dt) = \int_{Q_\tau} x(t)u(t)\mu(dt) = \int_{\hat{G}} \hat{x}_\tau(\chi)(\hat{k}(\chi)\hat{x}_\tau(\chi))^- m(d\chi) =$$

$$= \int_{\hat{G}} \mathrm{Re}\left(\hat{k}(\chi)\right)|\hat{x}_\tau(\chi)|^2 m(d\chi) \le \sup_{\chi\in\hat{G}} \mathrm{Re}\left(\hat{k}(\chi)\right)\|\hat{x}_\tau(\cdot)\|_2^2 \tag{16}$$

W analogiczny sposób możemy oszacować iloczyn skalarowy funkcji $x(\cdot)$ i $y(\cdot)$ z dołu.

TWIERDZENIE 5.1. $\forall\,\tau\in Q$ operator A dany relacją (8) przekształca przestrzeń $L^2(Q_\tau;\mathbb{R}^1)$ w siebie i zachodzą nierówności:

(i) $\|A\|_2 := \|A\|_{L^2} \le \sup_{\chi\in\hat{G}} \left|\hat{k}(\chi)\right|$;

(ii) $\sup_2(A) := \sup_{L^2}(A) \le \sup_{\chi\in\hat{G}} \mathrm{Re}\left(\hat{k}(\chi)\right)$;

(iii) $\inf_2(A) := \inf_{L^2}(A) \ge \inf_{\chi\in\hat{G}} \mathrm{Re}\left(\hat{k}(\chi)\right)$.

W przestrzeni $L^2(Q;\mathbb{R}^1)$ we wzorach (i-iii) zachodzi znak równości.

Dowód. Dla względnie zwartego Q_τ nierówności (i-iii) wynikają wprost z oszacowań (15-16). Aby pokazać, że dla $Q_\tau = Q$ zachodzą równości, pokażemy, że istnieje ciąg $\{\hat{x}_n(\chi)\}$ elementów przestrzeni $L^2(\hat{G};\mathbb{R}^1)$ o normach równych jedności, dla którego $\exists\,\chi^\gamma\in\hat{G}$, takie że

$$\int_{\hat{G}} \left|\hat{k}(\chi)\hat{x}_n(\chi)\right|^2 m(d\chi) \longrightarrow \left|\hat{k}(\chi^\gamma)\right|^2 \tag{17}$$

oraz

$$\int_{\hat{G}} \mathrm{Re}\left(\hat{k}(\chi)\right)\left|\hat{x}_n(\chi)\right|^2 m(d\chi) \longrightarrow \mathrm{Re}\left(\hat{k}(\chi^\gamma)\right) \tag{18}$$

przy $n\longrightarrow\infty$. Dla uproszczenia rozważań załóżmy, że $e\in Q$ oraz $Q\cup(-Q)=G$. Niech $\{S_n\}$ będzie ciągiem zwartych, symetrycznych ($S_n=-S_n$) otoczeń elementu neutralnego e w grupie G, które spełniają warunki:

(i) $S_1\subset S_2\subset S_3\subset\cdots\cdots\subset S_n\subset\cdots\cdots$

(ii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = G$;

(iii) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\mu((t+S_n)\cap S_n)}{\mu(S_n)} = 1, \qquad \forall\, t\in G.$

Założenia te są szczególnym przypadkiem warunku (iv) lematu 4.3.

Niech $F_{S_n}(\cdot)$ będzie transformatą Fouriera funkcji charakterystycznej $1_{S_n}(\cdot)$, tzn.

$$F_{S_n}(\chi) := \int_G \bar{\chi}(t)1_{S_n}(t)\mu(dt), \qquad \chi\in\hat{G}.$$

Ponieważ $S_n=-S_n$, $F_{S_n}(\chi)$ jest funkcją rzeczywistą i $F_{S_n}(\bar{\chi})=F_{S_n}(\chi)$.

Zdefiniujemy ciąg funkcji $\{x_n(\cdot)\}$, n=1,2,3,.... w sposób następujący

$$x_n(t) := \begin{cases} \left(\frac{2}{\mu(S_n)}\right)^{1/2} \chi^\gamma(t) 1_{S_n}(t) & \text{dla } t\in Q \\ 0 & \text{dla } t\notin Q \end{cases}$$

gdzie $\chi^\gamma\in\hat{G}$, jest pewnym ustalonym charakterem grupy dualnej. Zauważmy, że

$$F_{S_n}(\chi\bar{\chi}^\gamma)=\left(1_{S_n}\chi^\gamma\right)\hat{}(\chi) .$$

Dalej mamy

$$\int_Q |x_n(t)|^2\mu(dt) = \int_Q \frac{2}{\mu(S_n)} 1_{S_n}(t)\mu(dt) = 1, \quad \forall\, n$$

Transformata Fouriera funkcji x_n ma postać

$$\hat{x}_n(\chi) = \int_Q \bar{\chi}(t)\left(\frac{2}{\mu(S_n)}\right)^{1/2}\chi^\gamma(t)1_{S_n}(t)\mu(dt) =$$

$$= (2\mu(S_n))^{-1/2}\int_G (\bar{\chi}(t)\chi^\gamma(t)+\chi(t)\bar{\chi}^\gamma(t))1_{S_n}(t)\mu(dt) =$$

$$= (2\mu(S_n))^{-1/2}\left(F_{S_n}(\bar{\chi}\chi^\gamma)+F_{S_n}(\chi\bar{\chi}^\gamma)\right) , \qquad \forall\,\chi\in\hat{G} \tag{19}$$

Oznaczmy $\tilde{F}_{S_n}(\chi)=F_{S_n}(\bar{\chi}\chi^\gamma)+F_{S_n}(\chi\bar{\chi}^\gamma)$. Otrzymamy

$$\int_{\hat{G}}\chi(t)\left|\hat{x}_n(\chi)\right|^2 m(d\chi) = \frac{1}{2\mu(S_n)}\int_{\hat{G}}\chi(t)\left|\tilde{F}_{S_n}(\chi)\right|^2 m(d\chi) =$$

$$= \frac{1}{\mu(S_n)}\int_{\hat{G}}\chi(t)\left|F_{S_n}(\chi\bar{\chi}^\gamma)\right|^2 m(d\chi) = \frac{1}{\mu(S_n)}\left(1_{S_n}(t)\chi^\gamma(t)\right)\bullet\left(1_{S_n}(t)\chi^\gamma(t)\right) =$$

$$= \chi^\gamma(t)\ \frac{\mu((tS_n)\cap S_n)}{\mu(S_n)} \tag{20}$$

Wyrażenie po prawej stronie relacji (20) jest równe $\chi^\gamma(t)$ dla t=e i dąży do $\chi^\gamma(t)$ przy $n\longrightarrow\infty$ dla $t\neq e$. To znaczy, że

$$\lim_{n\to\infty}\left|\hat{x}_n(\chi)\right|^2 = \varepsilon(\chi\bar{\chi}^\gamma) ,$$

gdzie przez $\varepsilon(\chi\bar{\chi}^\gamma)$ oznaczono miarę atomową w punkcie $\bar{\chi}^\gamma$. To dowodzi prawdziwości relacji (17) i (18).■

W przypadku wielowymiarowym twierdzenie 5.1 da się uogólnić w następujący sposób. Niech wielowymiarowy układ dynamiczny opisany jest wektorowym operatorem splotowym:

$$y(t) := (Ax)(t) := \int_{Q_t} h(ds)x(t-s), \qquad t\in Q \tag{21}$$

gdzie $h(\cdot)$ jest regularną miarą macierzową o wahaniu ograniczonym: $h\in\mathcal{V}(Q;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m))$ i $\mathrm{supp}(x)\subset Q$.

TWIERDZENIE 5.2. Operator A dany relacją (21) przekształca n-wymiarową przestrzeń $L^2(Q_\tau;\mathbb{R}^n)$, $\tau\in Q$, w m-wymiarową przestrzeń $L^2(Q_\tau;\mathbb{R}^m)$, $\tau\in Q$ i prawdziwe jest oszacowanie:

$$\|A\|_2 \le \sup_{\chi\in\hat{G}}\left(\sigma_{max}(\hat{h}(\chi)\right) = \sup_{\chi\in\hat{G}}\max_r\left(\sigma_r(\chi)\right)^{1/2} \tag{22}$$

gdzie $\sigma_1(\chi),\sigma_2(\chi),\ldots,\sigma_n(\chi)$ są wartościami własnymi macierzy hermitowskiej $\hat{h}^*(\chi)\hat{h}(\chi)$.

W przestrzeni $L^2(Q;\mathbb{R}^n)$ we wzorze (22) zachodzi znak równości.

Dowód. Dowód wynika z nierówności algebry liniowej [138,143] i rozważań analogicznych do podanych w dowodzie twierdzenia 5.1.■

TWIERDZENIE 5.3. Jeżeli n=m i operator A dany relacją (21) przekształca n-wymiarową przestrzeń $L^2(Q_\tau;\mathbb{R}^n)$, $\tau\in Q$, w siebie to prawdziwe są oszacowania:

(i) $\sup_2(A) \le \sup_{\chi\in\hat{G}}\left(\lambda_{max}(\hat{h}(\chi)\right) = \sup_{\chi\in\hat{G}}\max_r \mu_r(\chi)$;

(ii) $\inf_2(A) \ge \inf_{\chi\in\hat{G}}\left(\lambda_{min}(\hat{h}(\chi)\right) = \inf_{\chi\in\hat{G}}\min_r \mu_r(\chi)$,

gdzie $\mu_1(\chi),\mu_2(\chi),\ldots,\mu_n(\chi)$ są wartościami własnymi macierzy hermitowskiej $(\hat{h}(\chi)+\hat{h}^*(\chi))/2$.

W przestrzeni $L^2(Q;\mathbb{R}^n)$ we wzorach (i-ii) zachodzi znak równości.

Dowód. Patrz uwagi do twierdzenia 5.3.■

5.2.2. Własności w przestrzeniach sygnałów okresowych i prawie okresowych

Niech sygnał wejściowy $x\in\mathrm{Trig}(G;\mathbb{R}^1)$ będzie dowolnym rzeczywistym wielomianem trygonometrycznym

$$x(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k\chi_k(t) , \qquad \bar{\chi}_k=\chi_{-k}, \bar{a}_k=a_{-k}, \quad t\in G \tag{23}$$

Warunki w relacji (23) można uzyskać numerując w odpowiedni sposób charaktery.

Zbadamy sygnał na wyjściu jednowymiarowego układu dynamicznego opisanego operatorem splotowym A

$$y(t) := (Ax)(t) := (x\bullet h)(t) := \int_G x(t-s)h(ds), \qquad t\in G \tag{24}$$

gdzie miara h jest miarą regularną o wahaniu ograniczonym: $h\in\mathcal{V}(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^1,\mathbb{R}^1))$.

$$y(t) = \int_G \sum_k a_k\chi_k(t-s)h(ds) = \sum_k a_k\chi_k(t)\int_G \bar{\chi}_k(s)h(ds) =$$

$$= \sum_k a_k\hat{h}(\chi_k)\chi_k(t) = \sum_k b_k\chi_k(t)$$

gdzie $b_k=a_k\hat{h}(\chi_k)$. Wynika stąd, że operator splotowy przekształca sygnał typu wielomianu trygonometrycznego w inny wielomian trygonometryczny.

Jeżeli sygnał typu (23) działa na wejście operatora stacjonarnego, przyczynowego B (ze względu na Q)

$$(Bx)(t) := \int_{Q_t} x(t-s)h(ds), \qquad t\in Q \tag{25}$$

to sygnał wyjściowy z ma postać

$$z(t) = \int_{Q_t} x(t-s)h(ds) \tag{26}$$

Otrzymaną relację przepiszemy w innej postaci

$$z(t) = \int_G x(t-s)h(ds) - \int_{G\setminus Q_t} x(t-s)h(ds) \tag{27}$$

Sygnał będący drugim składnikiem prawej strony równości (27) można oszacować

$$\left|\int_{G\setminus Q_t} x(t-s)h(ds\right| \le \sup_{t\in G\setminus Q_t}|x(t)|\ \mathcal{V}_{G\setminus Q_t}(h) \tag{28}$$

Z regularności miary h wynika, że $\mathcal{V}_{G\setminus Q_t}(h)\in C_0(G;\mathbb{R}^1)$ i znika "w nieskończoności". W związku z tym z (27) i (28) wynika, że sygnał z na wyjściu układu stacjonarnego (2.3) jest sumą wielomianu trygonometrycznego i sygnału, który znika "w nieskończoności".

Odnotujmy, że podobna własność jest znana dla układów ciągłych, tj. $G=\mathbb{R}^1$, por. np. [138, str. 82].

Ciekawe jest zachowanie się dowolnego ciągłego sygnału H-okresowego przy przejściu przez układ dynamiczny opisany równaniem splotowym (23). Wiemy, że dowolny sygnał H-okresowy można przedstawić w postaci $x(t)=(\tilde{x}\circ\pi_H)(t)=\tilde{x}(t+H)$, gdzie funkcja $\tilde{x}$ jest ciągła i określona na G/H, G/H zwarta. Wówczas

$$\tilde{x}(t) = \sum_k a_k\tilde{\chi}_k(t), \qquad \forall\ t\in G/H \tag{29}$$

gdzie $\tilde{\chi}_k$ oznaczają charaktery grupy G/H. Mamy dalej

$$y(t) = \int_G \sum_k a_k(\tilde{\chi}_k\circ\pi_H)(t-s)h(ds) = \int_G \sum_k a_k\chi_k(t-s+H)h(ds) =$$

$$= \sum_k a_k\chi_k(t+H)\int_G \bar{\chi}_k(s)h(ds) = \sum_k a_k\hat{h}(\chi_k)(\tilde{\chi}_k\circ\pi_H)(t) \tag{30}$$

skąd wynika, że y jest również funkcją H-okresową, co jest rozszerzeniem dobrze znanego faktu z teorii układów ciągłych [138, str. 84].

UWAGA 5.4. Jeżeli $x(t)=\mathrm{Re}(\chi(t))$, $t\in G$, to

$$y(t) = \mathrm{Re}\left(\chi(t)\hat{h}(\chi)\right) \tag{31}$$

Niech $\chi(t)=\exp(i\alpha(t))$, gdzie $\alpha(t)$ rzeczywista funkcja argumentu $t\in G$. Funkcja α musi mieć następujące własności, które wynikają wprost z określenia charakteru χ

(i) $\alpha(e)=0$;

(ii) $\alpha(t)+\alpha(s) = \alpha(t+s), \qquad \forall\ t,s\in G.$

Uwzględniając wprowadzone własności relację (31) możemy zapisać w innej postaci

$$y(t) = \frac{1}{2}\exp(i\alpha(t))\hat{h}(i\alpha(t)) + \frac{1}{2}\exp(-i\alpha(t))\bar{\hat{h}}(i\alpha(t)) =$$

$$= |\hat{h}(i\alpha(t))|\cos\left(\alpha(t)+\arg\left(\hat{h}(i\alpha(t))\right)\right),$$

a więc harmoniczny sygnał wejściowy po przejściu przez liniowy układ stacjonarny (25) jest z dokładnością do funkcji klasy C_0 (zmierzającej do zera przy "$t\longrightarrow\infty$"), również sygnałem harmonicznym o tej samej "częstotliwości" wynikającej z postaci $\alpha(t)$, zmienionej amplitudzie i "fazie". Oczywiście pojęcia "częstotliwość" i "faza" są użyte w sposób umowny. Dla $G=\mathbb{R}^1$ lub $G=a\mathbb{Z}^1$, $a\in\mathbb{R}^1_+$ pojęcia te pokrywają się z ogólnie stosowanymi określeniami częstotliwości i fazy [138, 322]. ■

W dalszych rozważaniach skoncentrujemy się na analizie własności układu dynamicznego (24) przy założeniu, że $\mathrm{supp}(x)\subset Q$, w przestrzeni spo. $B^2(G;\mathbb{R}^1)$.

TWIERDZENIE 5.5. Jeżeli h jest miarą o wahaniu ograniczonym, to operator (24) przekształca przestrzeń spo. $B^2(G;\mathbb{R}^1)$ w siebie i prawdziwe są następujące oszacowania:

(i) $\|A\|_{B^2} = \sup_{\chi\in\hat{G}}\left|\hat{h}(\chi)\right|$;

(ii) $\sup_{B^2}(A) = \sup_{\chi\in\hat{G}}\mathrm{Re}\left(\hat{h}(\chi)\right)$;

(iii) $\inf_{B^2}(A) = \inf_{\chi\in\hat{G}}\mathrm{Re}\left(\hat{h}(\chi)\right)$.

Dowód. Na początku udowodnimy, że równości (i-iii) są prawdziwe na zbiorze $\mathrm{Trig}(G;\mathbb{R}^1)\subset B^2(G;\mathbb{R}^1)$, który jest gęsty w zbiorze spo. Besicovitcha.

Załóżmy, że x jest dowolnym wielomianem trygonometrycznym postaci (23).

Wtedy

$$(Ax)(t) = \sum_k a_k \hat{h}(\chi_k)\chi_k(t) \tag{32}$$

a stąd

$$\|Ax\|_B^2 2 = \sum_k \left(a_k \hat{h}(\chi_k)\right)^2 \le \sup_{\chi\in\hat{G}} \left|\hat{h}(\chi)\right|^2 \|x\|_B^2 2 \tag{33}$$

Podobnie zachodzi

$$\langle Ax, x\rangle_B 2 = \sum_k \hat{h}(\chi_k)|a_k|^2 = \sum_k \mathrm{Re}\left(\hat{h}(\chi_k)|a_k|^2\right) \le$$

$$\le \sup_{\chi\in\hat{G}} \mathrm{Re}\left(\hat{h}(\chi_k)\right)\|x\|_B^2 2 \tag{34}$$

W szczególności dla $x_0(t)=\chi_0(t)$ zachodzą równości

$$\|Ax_0\|_B 2 = \left|\hat{h}(\chi_0)\right| \|x_0\|_B 2$$

$$\langle Ax_0, x_0\rangle_B 2 = \mathrm{Re}\left(\hat{h}(\chi_0)\right)\|x_0\|_B^2 2$$

więc można dobrać taki sygnał, że osiągnie się równości w relacjach (i-ii). Na tej podstawie z nierówności (33-34) wynika, że relacje (i-ii) są prawdziwe dla zbioru wielomianów trygonometrycznych. Równości (iii) dowodzi się analogicznie.

Ponieważ zbiór wielomianów trygonometrycznych jest gęsty w zbiorze spo. $B^2(G;\mathbb{R}^1)$, więc relacje (i-iii) pozostają prawdziwe dla całej przestrzeni $B^2(G;\mathbb{R}^1)$. ■

W przypadku wielowymiarowym twierdzenie 5.5 da się uogólnić w następujący sposób. Niech wielowymiarowy układ dynamiczny opisany jest wektorowym operatorem splotowym:

$$y(t) := (Ax)(t) := \int_G h(ds)x(t-s), \qquad t\in Q \tag{35}$$

gdzie $h(\cdot)$ jest regularną miarą macierzową o wahaniu ograniczonym: $h\in V(Q;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m))$ i $\mathrm{supp}(x)\subset Q$.

TWIERDZENIE 5.6. Operator A (35) przekształca n-wymiarową przestrzeń spo. $B^2(G;\mathbb{R}^n)$ w m-wymiarową przestrzeń spo. $B^2(G;\mathbb{R}^m)$ i prawdziwe jest oszacowanie:

$$\|A\|_B 2 \le \sup_{\chi\in\hat{G}} \left(\sigma_{\max}(\hat{h}(\chi)\right) = \sup_{\chi\in\hat{G}} \max_r \left(\sigma_r(\chi)\right)^{1/2}, \tag{36}$$

gdzie $\sigma_1(\chi),\sigma_2(\chi),\ldots,\sigma_n(\chi)$ są wartościami własnymi macierzy hermitowskiej $\hat{h}^*(\chi)\hat{h}(\chi)$.

Dowód. Dowód wynika z nierówności algebry liniowej [138,143] i rozważań analogicznych do podanych w dowodzie twierdzenia 5.1. ■

TWIERDZENIE 5.7. Jeżeli n=m, operator A (35) przekształca n-wymiarową przestrzeń spo. $B^2(G;\mathbb{R}^n)$ w siebie i prawdziwe są oszacowania:

(i) $\sup_B 2(A) \le \sup_{\chi\in\hat{G}} \left(\lambda_{\max}(\hat{h}(\chi)\right) = \sup_{\chi\in\hat{G}} \max_r \mu_r(\chi)$;

(ii) $\inf_B 2(A) \ge \inf_{\chi\in\hat{G}} \left(\lambda_{\min}(\hat{h}(\chi)\right) = \inf_{\chi\in\hat{G}} \min_r \mu_r(\chi)$,

gdzie $\mu_1(\chi),\mu_2(\chi),\ldots,\mu_n(\chi)$ są wartościami własnymi macierzy hermitowskiej $(\hat{h}(\chi)+\hat{h}^*(\chi))/2$.

Dowód. Patrz uwagi do twierdzenia 5.6. ■

5.3. UKŁADY STOCHASTYCZNE

Analizę rozpoczniemy od przedyskutowania własności jednowymiarowego, stacjonarnego i przyczynowego losowego operatora liniowego A danego relacją

$$y(t,\omega) := (Ax)(t,\omega) := \int_{Q_t} x(t-h,\omega)k(dh,\omega), \qquad t\in Q, \omega\in\Omega \tag{37}$$

gdzie $k(\cdot)$ jest miarą stochastyczną regularną o wahaniu ograniczonym: $k\in V(Q;L^\infty(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathcal{L}(\mathbb{R}^1,\mathbb{R}^1)))$ i $\mathrm{supp}(x)\subset Q \bmod(\mathbb{P})$.

5.3.1. Własności w przestrzeniach sygnałów hilbertowskich

Analizy operatora losowego A dokonamy przy założeniu, że $A: L^{2,2}(Q;\mathbb{R}^1) \longrightarrow L^{2,2}(Q;\mathbb{R}^1)$. Podstawowe rozważania pozostają podobne do przeprowadzonych w dowodzie twierdzenia 5.1. Z równań (10) i (14) otrzymamy

$$\int_{Q_\tau} \mathbb{E}\left(|y(t,\omega)|^2\right)\mu(dt) \le \int_Q \mathbb{E}\left(|u(t,\omega)|^2\right)\mu(dt) = \int_{\hat{G}} \mathbb{E}\left(\left|\hat{k}(\chi,\omega)\hat{x}_\tau(\chi,\omega)\right|^2\right)m(d\chi) \le$$

$$\le \sup_{\chi\in\hat{G}} \left|\left|\left|\hat{k}(\chi,\cdot)\right|\right|\right|^2 \int_{\hat{G}} \mathbb{E}\left(\left|\hat{x}_\tau(\chi,\omega)\right|^2\right)m(d\chi) = \sup_{\chi\in\hat{G}} \left|\left|\left|\hat{k}(\chi,\cdot)\right|\right|\right|^2 \|x_\tau\|_{2,2}^2 \tag{38}$$

Ostatni ciąg relacji zachodzi na podstawie nierówności Höldera i twierdzenia Parsevala [111,157,159].

Podobnie dowodzimy, że

$$\int_{Q_\tau} \mathbb{E}(x(t,\omega)y(t,\omega))\mu(dt) = \int_{Q_\tau} \mathbb{E}(x(t,\omega)u(t,\omega))\mu(dt) =$$

$$= \int_{\hat{G}} \mathbb{E}\left(\hat{x}_\tau(\chi,\omega)\left(\hat{k}(\chi,\omega)\hat{x}_\tau(\chi,\omega)\right)^-\right) m(d\chi) = \int_{\hat{G}} \mathbb{E}\left(\mathrm{Re}\left(\hat{k}(\chi,\omega)\right)\left|\hat{x}_\tau(\chi,\omega)\right|^2\right) m(d\chi) \le$$

$$\le \sup_{\chi\in\hat{G}} \mathbb{P}\text{-ess}\sup_{\omega\in\Omega} \mathrm{Re}\left(\hat{k}(\chi,\omega)\right) \left\|\hat{x}_\tau\right\|^2_{2,2} \qquad (39)$$

W podobny sposób możemy oszacować iloczyn skalarowy $\langle\cdot,\cdot\rangle_{2,2}$ procesów stochastycznych x i y z dołu.

Przypomnijmy, że w całej pracy stosowane są oznaczenia:

$$\mathbb{P}\text{-ess}\sup_{\omega\in\Omega}\left(x(\omega)\right) := \inf\{\alpha\in\mathbb{R}^1:\ \mathbb{P}\{\omega\in\Omega:\ x(\omega)>\alpha\}=0\} \qquad (40)$$

$$\mathbb{P}\text{-ess}\inf_{\omega\in\Omega}\left(x(\omega)\right) := \sup\{\alpha\in\mathbb{R}^1:\ \mathbb{P}\{\omega\in\Omega:\ x(\omega)<\alpha\}=0\} \qquad (41)$$

TWIERDZENIE 5.8. $\forall\ \tau\in Q$ operator losowy A, dany relacją (37), przekształca przestrzeń $L^2(Q_\tau; L^2(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^1))$, $\tau\in Q$, w siebie i zachodzą nierówności:

(i) $\|A\|_{2,2} := \|A\|_{L^{2,2}} \le \sup_{\chi\in\hat{G}} \mathbb{P}\text{-ess}\sup_{\omega\in\Omega}\left(\left|\hat{k}(\chi,\omega)\right|\right)$;

(ii) $\sup_{2,2}(A) := \sup_{L^{2,2}}(A) \le \sup_{\chi\in\hat{G}} \mathbb{P}\text{-ess}\sup_{\omega\in\Omega}\left(\mathrm{Re}\left(\hat{k}(\chi,\omega)\right)\right)$;

(iii) $\inf_{2,2}(A) := \inf_{L^{2,2}}(A) \ge \inf_{\chi\in\hat{G}} \mathbb{P}\text{-ess}\inf_{\omega\in\Omega}\left(\mathrm{Re}\left(\hat{k}(\chi,\omega)\right)\right)$.

Dowód. Dla względnie zwartego Q_τ nierówności (i-iii) wynikają wprost z oszacowań (38-39). ■

W przypadku wielowymiarowym twierdzenie 5.8 da się uogólnić w następujący sposób. Niech wielowymiarowy układ dynamiczny opisany jest wektorowym operatorem splotowym:

$$y(t,\omega) := (Ax)(t,\omega) := \int_{Q_t} h(ds,\omega)x(t-s,\omega), \qquad t\in Q,\ \omega\in\Omega \qquad (42)$$

gdzie h jest regularną stochastyczną miarą macierzową o wahaniu ograniczonym $h\in\mathcal{V}(Q;L^\infty(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)))$ i $\mathrm{supp}(x)\subset Q \bmod(\mathbb{P})$.

TWIERDZENIE 5.9. Operator A dany relacją (42) przekształca n-wymiarową przestrzeń $L^{2,2}(Q_\tau;\mathbb{R}^n)$ w m-wymiarową przestrzeń $L^{2,2}(Q_\tau;\mathbb{R}^m)$, $\tau\in Q$ i prawdziwe jest oszacowanie:

$$\|A\|_{2,2} \le \sup_{\chi\in\hat{G}} \mathbb{P}\text{-ess}\sup_{\omega\in\Omega}\left(\sigma_{\max}\left(\hat{h}(\chi,\omega)\right)\right) =$$

$$= \sup_{\chi\in\hat{G}} \mathbb{P}\text{-ess}\sup_{\omega\in\Omega}\left(\max_r\left(\sigma_r(\chi,\omega)\right)^{1/2}\right)$$

gdzie $\sigma_1(\chi,\omega),\sigma_2(\chi,\omega),\ldots,\sigma_n(\chi,\omega)$ są wartościami własnymi macierzy hermitowskiej $\hat{h}^*(\chi,\omega)\hat{h}(\chi,\omega)$.

Dowód. Dowód wynika z nierówności algebry liniowej [138,143] i rozważań analogicznych do podanych w dowodzie twierdzenia 5.8. ■

TWIERDZENIE 5.10. Jeżeli n=m i operator A dany relacją (42) przekształca n-wymiarową przestrzeń $L^{2,2}(Q_\tau;\mathbb{R}^n)$, $\tau\in Q$, w siebie to prawdziwe są oszacowania:

(i) $\sup_{2,2}(A) \le \sup_{\chi\in\hat{G}} \mathbb{P}\text{-ess}\sup_{\omega\in\Omega}\left(\lambda_{\max}\left(\hat{h}(\chi,\omega)\right)\right) =$

$$= \sup_{\chi\in\hat{G}} \mathbb{P}\text{-ess}\sup_{\omega\in\Omega}\left(\max_r \mu_r(\chi,\omega)\right);$$

(ii) $\inf_{2,2}(A) \ge \inf_{\chi\in\hat{G}} \mathbb{P}\text{-ess}\inf_{\omega\in\Omega}\left(\lambda_{\min}\left(\hat{h}(\chi,\omega)\right)\right) =$

$$= \inf_{\chi\in\hat{G}} \mathbb{P}\text{-ess}\inf_{\omega\in\Omega}\left(\min_r \mu_r(\chi,\omega)\right),$$

gdzie $\mu_1(\chi,\omega),\mu_2(\chi,\omega),\ldots,\mu_n(\chi,\omega)$ są wartościami własnymi macierzy hermitowskiej $(\hat{h}(\chi,\omega)+\hat{h}^*(\chi,\omega))/2$.

Dowód. Patrz uwagi do twierdzeń 5.8 i 5.9. ■

5.3.2. Własności w przestrzeniach sygnałów stochastycznych okresowych i prawie okresowych

Niech stochastyczny sygnał wejściowy $x\in\mathrm{Trig}^2(G;\mathbb{R}^1)$ będzie dowolnym rzeczywistym wielomianem trygonometrycznym

$$x(t,\omega) = \sum_{k=-n}^{n} a_k(\omega)\chi_k(t), \qquad \bar{\chi}_k=\chi_{-k},\ \bar{a}_k=a_{-k} \bmod(\mathbb{P}),\ t\in G \qquad (43)$$

Zbadamy sygnał na wyjściu jednowymiarowego układu dynamicznego opisanego losowym operatorem splotowym A

$$y(t,\omega) := (Ax)(t,\omega) := (x*h)(t,\omega) := \int_G x(t-s,\omega)h(ds,\omega), \qquad t\in G,\ \omega\in\Omega \qquad (44)$$

gdzie miara h jest stochastyczną miarą regularną o wahaniu ograniczonym: $h\in\mathcal{V}(G;L^\infty(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathcal{L}(\mathbb{R}^1,\mathbb{R}^1)))$.

Dla układu dynamicznego (44) można przeprowadzić podobne rozważania, jak w punkcie 5.2.2. Zaakcentowane zostaną tylko pewne elementy tej analizy.

W dalszych rozważaniach skoncentrujemy się na analizie własności układu dynamicznego (44) przy założeniu, że $\mathrm{supp}(x)\subset Q$, w przestrzeni sspo. $B^{2,2}(G;\mathbb{R}^1)$.

TWIERDZENIE 5.11. Jeżeli h jest miarą o wahaniu ograniczonym, to operator (44) przekształca przestrzeń sspo. $B^{2,2}(G;\mathbb{R}^1)$ w siebie i prawdziwe są następujące oszacowania:

(i) $\|A\|_{B}2,2 \le \sup_{\chi\in\hat{G}} \mathbb{P}\text{-ess } \sup_{\omega\in\Omega}\left(\left|\hat{h}(\chi,\omega)\right|\right)$;

(ii) $\sup_{B}2,2(A) \le \sup_{\chi\in\hat{G}} \mathbb{P}\text{-ess } \sup_{\omega\in\Omega}\left(\mathrm{Re}\left(\hat{h}(\chi,\omega)\right)\right)$;

(iii) $\inf_{B}2,2(A) \ge \inf_{\chi\in\hat{G}} \mathbb{P}\text{-ess } \inf_{\omega\in\Omega}\left(\mathrm{Re}\left(\hat{h}(\chi,\omega)\right)\right)$.

Dowód. Na początku udowodnimy, że nierówności (i-iii) są prawdziwe na zbiorze $\mathrm{Trig}^2(G;\mathbb{R}^1)$, który jest gęsty w zbiorze sspo. Besicovitcha $B^{2,2}(G;\mathbb{R}^1)$.

Załóżmy, że x jest dowolnym losowym wielomianem trygonometrycznym postaci (43). Wtedy

$$(Ax)(t,\omega) = \sum_{k} a_k(\omega)\hat{h}(\chi_k,\omega)\chi_k(t) \tag{45}$$

a stąd, ponieważ charaktery są ortogonalne w $B^2(G;\mathbb{R}^1)$, otrzymamy

$$\|Ax\|^2_{B}2,2 = \sum_{k} \mathbb{E}\left(a_k(\omega)\hat{h}(\chi_k,\omega)\right)^2 \le \sup_{\chi\in\hat{G}}\left|\left|\left|\hat{h}(\chi)\right|\right|\right|^2 \|x\|^2_{B}2,2 \tag{46}$$

Podobnie zachodzi

$$\langle Ax,x\rangle_{B}2,2 = \sum_{k} \mathbb{E}\left(\hat{h}(\chi_k,\omega)\left|a_k(\omega)\right|^2\right) = \sum_{k} \mathbb{E}\left(\mathrm{Re}\left(\hat{h}(\chi_k,\omega)\left|a_k(\omega)\right|^2\right)\right) \le$$

$$\le \sup_{\chi\in\hat{G}} \mathbb{P}\text{-ess } \sup_{\omega\in\Omega}\left(\mathrm{Re}\left(\hat{h}(\chi_k)\right)\right)\|x\|^2_{B}2,2 \tag{47}$$

Na tej podstawie z nierówności (46-47) wynika, że relacje (i-ii) są prawdziwe dla zbioru wielomianów trygonometrycznych. Nierówności (iii) dowodzi się analogicznie.

Ponieważ zbiór wielomianów trygonometrycznych jest gęsty w zbiorze sspo. $B^{2,2}(G;\mathbb{R}^1)$, więc relacje (i-iii) pozostają prawdziwe dla całej przestrzeni $B^{2,2}(G;\mathbb{R}^1)$. ■

W przypadku wielowymiarowym twierdzenie 5.11 da się uogólnić w następujący sposób. Niech wielowymiarowy układ dynamiczny opisany jest wektorowym operatorem splotowym:

$$y(t,\omega) := (Ax)(t,\omega) := \int_{G} h(ds,\omega)x(t-s,\omega) \qquad t\in Q,\ \omega\in\Omega \tag{48}$$

gdzie h jest regularną stochastyczną miarą macierzową o wahaniu ograniczonym: $h\in\mathcal{V}(G;L^{\infty}(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)))$ i $\mathrm{supp}(x)\subset Q$.

TWIERDZENIE 5.12. Operator A (48) przekształca n-wymiarową przestrzeń sspo. $B^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)$ w m-wymiarową przestrzeń sspo. $B^{2,2}(G;\mathbb{R}^m)$ i prawdziwe jest oszacowanie:

$$\|A\|_{B}2,2 \le \sup_{\chi\in\hat{G}} \mathbb{P}\text{-ess } \sup_{\omega\in\Omega}\left(\sigma_{\max}\left(\hat{h}(\chi,\omega)\right)\right) =$$

$$= \sup_{\chi\in\hat{G}} \mathbb{P}\text{-ess } \sup_{\omega\in\Omega}\left(\max_{r}\left(\sigma_r(\chi,\omega)\right)^{1/2}\right)$$

gdzie $\sigma_1(\chi,\omega),\sigma_2(\chi,\omega),\ldots,\sigma_n(\chi,\omega)$ są wartościami własnymi macierzy hermitowskiej $\hat{h}^*(\chi,\omega)\hat{h}(\chi,\omega)$.

Dowód. Dowód wynika z nierówności algebry liniowej [138,143] i rozważań analogicznych do podanych w dowodzie twierdzenia 5.5. ■

TWIERDZENIE 5.13. Jeżeli n=m, to operator A (48) przekształca n-wymiarową przestrzeń sspo. $B^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)$ w siebie i prawdziwe są oszacowania:

(i) $\sup_{B}2,2(A) \le \sup_{\chi\in\hat{G}} \mathbb{P}\text{-ess } \sup_{\omega\in\Omega}\left(\lambda_{\max}\left(\hat{h}(\chi,\omega)\right)\right) =$

$$= \sup_{\chi\in\hat{G}} \mathbb{P}\text{-ess } \sup_{\omega\in\Omega}\left(\max_{r}\mu_r(\chi,\omega)\right);$$

(ii) $\inf_{B}2,2(A) \ge \inf_{\chi\in\hat{G}} \mathbb{P}\text{-ess } \inf_{\omega\in\Omega}\left(\lambda_{\min}\left(\hat{h}(\chi,\omega)\right)\right) =$

$$= \inf_{\chi\in\hat{G}} \mathbb{P}\text{-ess } \inf_{\omega\in\Omega}\left(\min_{r}\mu_r(\chi,\omega)\right)$$

gdzie $\mu_1(\chi,\omega),\mu_2(\chi,\omega),\ldots,\mu_n(\chi,\omega)$ są wartościami własnymi macierzy hermitowskiej $(\hat{h}(\chi,\omega)+\hat{h}^*(\chi,\omega))/2$.

Dowód. Patrz uwagi do twierdzenia 5.12. ■

Wyniki przedstawione powyżej odgrywają decydującą rolę w rozważaniach dotyczących linearyzacji, stabilności oraz drgań okresowych i prawie okresowych, które omawiane są w rozdziałach VI, VII i VIII.

Wyniki dotyczące procesów stacjonarnych zostały podane w dodatku C.

Rozdział VI. ANALIZA DOKŁADNOŚCI METOD LINEARYZACJI STATYSTYCZNEJ

Linearyzacja statystyczna jest jedną z najczęściej stosowanych metod analizy nieliniowych, stochastycznych układów dynamicznych nie tylko w mechanice, ale również w wielu innych dziedzinach [12-13,32,40,45,79,102,114, 191-194,208,234,238,241,243,248-249,251-252,287-289,304,329,339,359].

Bogatą bibliografię czytelnik znajdzie w monografiach [102,194,208,248-249,329].

Istnieje wiele metod linearyzacji nieliniowych problemów stochastycznych. Najbardziej znaną jest prawdopodobnie metoda linearyzacji wprowadzona po raz pierwszy, niezależnie, przez Bootona [32] i Kazakowa [329].

W zasadzie metoda linearyzacji statystycznej (dalej w skrócie mls.) może być stosowana w przypadku, gdy mamy do czynienia ze "słabymi" nieliniowościami, ale jak wykazano, była stosowana z powodzeniem w przypadkach "silnych" nieliniowości, nawet zawierających elementy nieciągłe.

Należy zaznaczyć, że opisywana technika była bardzo szeroko stosowana, natomiast w zasadzie brak jest dokładniejszej analizy jej dokładności. Znane wyniki dotyczące dokładności mls. można podzielić na trzy grupy zagadnień.

Pierwsza grupa zawiera prace, w których rozwiązania zagadnień zlinearyzowanych są porównywane z rozwiązaniami dokładnymi. Metoda ta może być stosowana tylko w przypadkach, gdy możliwe jest analityczne rozwiązanie równań nieliniowych opisujących wyjściowe zagadnienie dynamiczne. Wynika stąd, że klasa zagadnień, do których można zastosować wspomnianą metodę, obejmuje problemy raczej proste, zwykle niskiego rzędu, z zakłóceniami stacjonarnymi lub typu białego szumu [79,102,191-194,241,304,329,339].

Druga klasa zagadnień obejmuje przypadki, w których dokładność mls. jest weryfikowana przez porównanie wyników, otrzymanych z zagadnień zlinearyzowanych, z wynikami otrzymanymi przez zastosowanie metod symulacji komputerowej do dokładnych modeli nieliniowych. Oczywiście, metoda ta dopuszcza szerszą klasę wymuszeń zewnętrznych, które mogą być analizowane [12,79,208,248-249, 304].

Trzecia grupa zawiera próby analizy teoretycznej zagadnienia mls., które trudno uznać za satysfakcjonujące ze względu na wykazywane niedociągnięcia w rozważaniach matematycznych [114,309,329,339]. Rozważania niniejszego rozdziału są kontynuacją prac [234,238,241,243], z większym naciskiem na praktyczne aspekty teorii matematycznej.

Wyniki niniejszego rozdziału ilustrują ścisłą, z matematycznego punktu widzenia, analizę jakościową mls.,w zastosowaniu do wielowymiarowych układów dynamicznych opisanych losowymi równaniami całkowymi. Idea polega na adaptacji metod stochastycznej stabilności w celu otrzymania czytelnych kryteriów oceny przydatności mls. oraz oceny granicy błędu linearyzacji, traktowanego jako różnica między dokładnym i przybliżonym rozwiązaniem problemu nieliniowego.

6.1. LINEARYZACJA STATYSTYCZNA W UKŁADACH NIESTACJONARNYCH

Będzie rozpatrywany nieliniowy układ dynamiczny ze sprzężeniem zwrotnym opisany równaniem operatorowym postaci

$$x = KFx + z \tag{1}$$

gdzie z jest n-wymiarowym sygnałem stochastycznym określonym na półgrupie $Q \subset G$, F jest nieliniowym operatorem deterministycznym, K jest deterministycznym, liniowym i przyczynowym operatorem całkowym.

Załóżmy, że operatory F i K przyjmują następującą postać, odpowiednio:

$$(Fx)(t,\omega) := f(t,x(t,\omega)) , \qquad t\in Q, \omega\in\Omega \tag{2}$$

gdzie $f: Q\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ jest funkcją nieliniową, natomiast

$$(Kx)(t,\omega) := \int_{Q_t} k(t,s)x(s,\omega)\mu(ds), \qquad t\in Q, \omega\in\Omega \tag{3}$$

gdzie jądro Volterry k jest określone na trójkącie Δ oraz posiada własność $k(t,\cdot)\in L^1_{loc}(Q;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$, $\forall\ t\in Q$.

Generalnie zastosowanie każdej z mls. powoduje zastąpienie zagadnienia nieliniowego opisanego równaniem całkowym (1) w postaci

$$x(t,\omega) = z(t,\omega) + \int_{Q_t} k(t,h)f(h,x(h,\omega))\mu(dh), \qquad t\in Q, \omega\in\Omega \tag{4}$$

przez zagadnienie liniowe w następującej formie

$$y(t,\omega) = z(t,\omega) + \int_{Q_t} k(t,h)l(h,y(h,\omega))\mu(dh), \qquad t\in Q, \omega\in\Omega \tag{5}$$

gdzie $l(t,y) := C_n(t)y+c(t)$, $y=[y_{(1)},y_{(2)}]^T\in\mathbb{R}^n$, $y_{(1)}\in\mathbb{R}^p$, $p\le n$.

Załóżmy dalej, że

$$C_n y = [C,0]y = Cy_{(1)}, \qquad C:\mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Przy takim sformułowaniu zagadnienie linearyzacji statystycznej staje się podobne do podanego przez Kazakowa [329], Booton w swojej propozycji przyjął, że $c(\cdot)\equiv 0$ [32].

Naturalnie, zlinearyzowane równanie (5) będzie dobrą aproksymacją problemu nieliniowego (1=4), jeżeli rozwiązania: dokładne x i przybliżone y różnią się "mało" od siebie. Dokładność mls., tzn. miara różnicy $|x(t,\omega)-y(t,\omega)|$, dla $t\in Q$, może być określona na wiele sposobów, np.

$$\varepsilon := \sup_{t\in Q}\left(\mathbb{E}\left(|x(t,\omega) - y(t,\omega)|^2\right)\right)^{1/2} \tag{6}$$

ewentualnie

$$\tilde{\varepsilon} := \left(\int_Q \mathbb{E}\left(|x(t,\omega) - y(t,\omega)|^2\right)\mu(dt)\right)^{1/2} \tag{7}$$

Takie sformułowanie problemu dokładności mls. ma podstawową wadę. Najważniejszym problemem jest fakt, że dokładne analityczne rozwiązanie tak postawionego zagadnienia nie jest do dzisiaj znane. Dlatego w użyciu są inne funkcjonały, różne od (6-7), pozwalające na ocenę dokładności mls. W tej sprawie nie ma zresztą zgodności, por. np. [40,329].

Załóżmy, że współczynniki linearyzacji C_n i c zostały określone na podstawie pewnego wybranego kryterium.

Poniżej dyskutowane jest zagadnienie dokładności mls. w przypadku niestacjonarnym. Pominiemy zagadnienia istnienia i jednoznaczności rozwiązań.

LEMAT 6.1. Załóżmy, że spełnione są następujące hipotezy:

(i) $\exists\ \lambda\in\mathbb{R}, r\in\mathbb{R}_+\ \forall\ t\in Q,\ x_1, x_2\in C(Q;L^2(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$ zachodzi

$$\mathbb{E}\left(\left|f(t,x_1(t,\cdot))-f(t,x_2(t,\cdot))-\lambda\left(x_1(t,\cdot)-x_2(t,\cdot)\right)\right|^2\right) \le$$

$$\le r^2\mathbb{E}\left(\left|x_1(t,\cdot)-x_2(t,\cdot)\right|^2\right);$$

(ii) jądro rozwiązujące r(t,s) generowane przez jądro Volterry k(t,s), istnieje na zbiorze Δ i posiada własność następującą:

$$\|R\|_C \le \left|\frac{\lambda}{r}\right|$$

gdzie

$$\|R\|_C := \sup_{t\in Q}\int_{Q_t}|r(t,s)|\mu(ds)$$

Wówczas istnieje stała rzeczywista a>0, taka, że dla wszystkich dokładnych i przybliżonych rozwiązań (jeżeli istnieją) układu dynamicznego (4) zachodzi oszacowanie:

$$\|x - y\|_{C(Q;L^2)} \le a\rho(1)$$

gdzie

$$\rho(1) := \sup_{t\in Q}\left(\mathbb{E}\left(\left|f(t,y(t,\cdot)) - C_n(t)y(t,\cdot)-c(t)\right|^2\right)\right)^{1/2} \tag{8}$$

określa statyczny błąd linearyzacji statystycznej.

Dowód. Załóżmy, że rozwiązania równań (1=4) i (5) istnieją i są mierzalnymi procesami stochastycznymi. Równania (4-5) można zapisać w równoważnej postaci operatorowej

$$x - \lambda Kx = KFx - \lambda Kx + z \tag{9}$$

$$y - \lambda Ky = K(C_n y + c - \lambda y) + z \tag{10}$$

Wynika z relacji (9-10), że

$$(I - \lambda K)(x-y) = K(Fx - \lambda x - C_n y - c + \lambda y) =$$

$$= K(Fx - Fy - \lambda(x-y)) + K(Fy - C_n y - c) \tag{11}$$

Przypomnijmy, że jądro rozwiązujące r(t,s) spełnia równanie całkowe

$$r(t,s) = k(t,s) + \int_{Q_t\setminus Q_s} r(t,u)k(u,s)\mu(du) \tag{12}$$

Z (11) i (12) wynika

$$x(t,\omega)=y(t,\omega)+\frac{1}{\lambda}\int_{Q_t} r(t,s)\left(f(s,x(s,\omega))-f(s,y(s,\omega))-\lambda\left(x(s,\omega)-y(s,\omega)\right)\right)\mu(ds) +$$

$$+\frac{1}{\lambda}\int_{Q_t} r(t,s)\left(f(s,y(s,\omega))-C_n(s)y(s,\omega)-c(s)\right)\mu(ds)$$

Mamy stąd łatwo, że

$$\sup_{t\in Q}\|x(t,\cdot) - y(t,\cdot)\|_2 \le$$

$$\le \frac{1}{|\lambda|}\|R\|_C r \sup_{t\in Q}\|x(t,\cdot) - y(t,\cdot)\|_2 + \frac{1}{|\lambda|}\|R\|_C\rho(1) \tag{13}$$

Z nierówności (13) i założenia (ii) wynika natychmiast, że teza lematu jest prawdziwa. ■

UWAGA 6.2. Założenie (ii) jest nieco silne. Dla wypełnienia go czasami jest konieczne, ale często możliwe, przyjąć do rozważań pewne specjalne przestrzenie sygnałów ciągłych z wagą [207]. ■

W sytuacji gdy nieliniowość jest stacjonarna, a $k(t,s)=k(t-s), \forall\ (t,s)\in\Delta$, można podać bardziej precyzyjny wynik w oparciu o lemat 6.1 i rezultaty zawarte w dodatku B.

LEMAT 6.3. Niech będą spełnione następujące założenia:

(i) $\exists\ \lambda\in\mathbb{R}, r\in\mathbb{R}_+\ \forall\ t\in Q,\ x_1, x_2\in L^2(Q;L^2(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$ zachodzi

$$\int_{Q_t}\mathbb{E}\left(\left|f(x_1(s,\cdot))-f(x_2(s,\cdot))-\lambda(x_1(s,\cdot)-x_2(s,\cdot))\right|^2\right)\mu(ds) \le$$

$$\le r^2\int_{Q_t}\mathbb{E}\left(\left|x_1(s,\cdot)-x_2(s,\cdot)\right|^2\right)\mu(ds);$$

(ii) $\sup_{\chi\in\hat{G}}\sigma_{max}\left(\hat{d}(\chi)\right) < \frac{1}{r}$,

gdzie $\hat{d}(\chi) = \left(I - \lambda\hat{k}(\chi)\right)^{-1}\hat{k}(\chi)$;

(iii) $\det\left(I - \lambda\hat{k}(m)\right) \neq 0, \quad \forall\ m\in\mathfrak{M}$.

Wówczas istnieje stała rzeczywista a>0, taka że wszystkie dokładne i przybliżone rozwiązania (jeżeli istnieją) układu dynamicznego (4-5) spełniają nierówność

$$\|x - y\|_{2,2} \le a\tilde{\rho}(1)$$

gdzie

$$\tilde{\rho}(1) := \left(\int_Q\mathbb{E}\left(\left|f(y(t,\cdot)) - C_n y(t,\cdot)-c\right|^2\right)\mu(dt)\right)^{1/2} \tag{14}$$

definiuje błąd linearyzacji statystycznej.

Dowód. Jest całkiem podobny do dowodu lematu 6.1. ■

UWAGA 6.4. W lemacie 6.3 stała λ może być zastąpiona przez pewien stacjonarny i przyczynowy operator klasy $B_0(W_0)$, por. [77,87,234], również dodatek B. W tej sytuacji warunek (iii) przyjmie postać:

(iii)' $\det\left(I - \hat{k}(m)\hat{b}(m)\right) \neq 0 \quad \forall\ m\in\mathfrak{M}$,

gdzie b jest jądrem operatora;

natomiast macierz $\hat{d}$ określona jest wzorem

$$\hat{d}(\chi) = \left(I - \hat{k}(\chi)\hat{b}(\chi)\right)^{-1}\hat{k}(\chi).$$

Dowód jest prawie taki sam. ■

LEMAT 6.5. Załóżmy, że następujące warunki są wypełnione:

(i) $\sup_{\chi\in\hat{G}}\sigma_{max}\left(\hat{k}(\chi)\right) < \infty$;

(ii) $\exists\ \alpha\in\mathbb{R}\ \forall\ t\in Q,\ x_1, x_2\in L^2(Q;L^2(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$ zachodzi

$$\mathrm{Re}\int_{Q_t}\mathbb{E}\left(\langle f(x_1(s,\cdot))-f(x_2(s,\cdot)), x_1(s,\cdot))-x_2(s,\cdot)\rangle_2\right)\mu(ds) \ge$$

$$\ge \alpha\int_{Q_t}\mathbb{E}\left(\left|f(x_1(s,\cdot))-f(x_2(s,\cdot))\right|^2\right)\mu(ds);$$

(iii) $\sup_{\chi\in\hat{G}}\lambda_{max}\left(\hat{k}(\chi)\right) < \alpha$.

Wówczas teza lematu 6.3 pozostaje prawdziwa.

Dowód. Załóżmy, że istnieją, niekoniecznie jednoznaczne, rozwiązania równań (4-5). Odejmując te równania stronami otrzymamy

$$x - y = K(Fx - C_n y - c) = K(Fx - Fy) + K(Fy - C_n y - c) \tag{15}$$

Mnożąc równanie (15) skalarowo przez Fx-Fy, otrzymujemy

$$\langle Fx - Fy, x - y\rangle_{2,2} = \langle Fx - Fy, K(Fx - Fy)\rangle_{2,2} +$$

$$+ \langle Fx - Fy, K(Fy - C_n y - c)\rangle_{2,2} \tag{16}$$

Na podstawie założenia (iii) otrzymamy

$$\alpha\|Fx - Fy\|_{2,2}^2 \le \left(\sup_{2,2}K\right)\|Fx - Fy\|_{2,2}^2 +$$

$$+ \|K\|_{2,2}\|Fx - Fy\|_{2,2}\|Fy - C_n y - c\|_{2,2} \tag{17}$$

Naturalne jest założenie, że $\|Fx - Fy\|_{2,2} \neq 0$, wówczas na podstawie (i), (iii) oraz nierówności (17) otrzymamy

$$(\alpha - \sup_{2,2}K)\|Fx - Fy\|_{2,2} \le \|K\|_{2,2}\|Fy - C_n y - c\|_{2,2}$$

$$\|Fx - Fy\|_{2,2} \le \frac{\|K\|_{2,2}}{\alpha - \sup_{2,2}K}\tilde{\rho}(1) \tag{18}$$

Z nierówności (18) na podstawie (15) wynika

$$\|x - y\|_{2,2} \le \|K\|_{2,2}\|Fx - Fy\|_{2,2} + \|K\|_{2,2}\tilde{\rho}(1) \le \left(\frac{\|K\|_{2,2}^2}{\alpha - \sup_{2,2}K} + \|K\|_{2,2}\right)\tilde{\rho}(1)$$

Ostatnia relacja kończy dowód. ■

LEMAT 6.6. Załóżmy, że spełniony jest warunek (i) lematu 6.5 i ponadto:

(i) $\exists\ \beta\in\mathbb{R}\ \forall\ t\in Q,\ x_1, x_2\in L^2(Q;L^2(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$ zachodzi

$$\mathrm{Re}\int_{Q_t}\mathbb{E}\left(\langle f(x_1(s,\cdot))-f(x_2(s,\cdot)), x_1(s,\cdot))-x_2(s,\cdot)\rangle\right)\mu(ds) \le$$

$$\le \beta\int_{Q_t}\mathbb{E}\left(\left|f(x_1(s,\cdot))-f(x_2(s,\cdot))\right|^2\right)\mu(ds);$$

(ii) $\inf_{\chi\in\hat{G}}\lambda_{min}\left(\hat{k}(\chi)\right) > \beta$.

Wówczas teza lematu 6.5 pozostaje prawdziwa.

Dowód. Jest podobny do dowodu lematu 6.5. ■

Wyniki zawarte w lematach 6.3-6.6 są ilustracją faktu, że "odległość" pomiędzy rozwiązaniem dokładnego równania (4) i rozwiązaniem równania przybliżonego (5) pozostaje w ścisłym związku ze statycznym błędem linearyzacji, który wprowadzony został w relacjach (8) i (14).

TWIERDZENIE 6.7. Niech będą spełnione następujące założenia:

(i) $\exists\, r>0$, $B\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ $\forall\, x_1, x_2 \in L^2(Q;L^2(\Omega,\mathfrak{F},P;\mathbb{R}^n))$ zachodzi

$$\|Fx_1 - Fx_2 - B(x_1-x_2)\|_{2,2} \le r\|x_1-x_2\|_{2,2};$$

(ii) $k\in L^1(Q;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$ i ponadto

$$\inf_{m\in\mathfrak{M}} \left|\det(I - \hat{k}(m)B\right| > 0;$$

(iii) $\sup_{\chi\in\hat{G}} r\sigma_{max}\left(\hat{d}(\chi)\right) < 1,$

gdzie $\hat{d}$ jest zdefiniowane w warunku (iii)' lematu 6.4;

(iv) istnieje rezolwenta dla operatora całkowego z jądrem $k(t-s)C_n(s)$ w przestrzeni $L^2(Q;\mathbb{R}^n)$.

Wówczas istnieje jednoznaczne rozwiązanie równania nieliniowego (4), które można otrzymać metodą kolejnych iteracji, natomiast błąd linearyzacji posiada oszacowanie jak w lematach 6.4 - 6.6.

Dowód. Niech rozwiązanie $\tilde{y}$ równania zlinearyzowanego (5) będzie pierwszym przybliżeniem dla metody kolejnych iteracji, zastosowanej do równania (4).

Na podstawie założenia (ii) możemy napisać

$$x = (I - KB)^{-1}K\tilde{F}x + (I-KB)^{-1}z \tag{19}$$

gdzie $\tilde{F}x = Fx - Bx$. Operator A określimy w następujący sposób:

$$Ax := (I - KB)^{-1}K\tilde{F}x + (I-KB)^{-1}z$$

Zauważmy, że równanie (4=19) jest równoważne formie uproszczonej

$$x = Ax \tag{20}$$

Jak wspomniano, zbadamy zbieżność metody kolejnych iteracji w zastosowaniu do równania (20). Otrzymamy

$$x_0 = \tilde{y}$$
$$x_{i+1} = Ax_i \qquad i=0,1,2,..... \tag{21}$$

gdzie x_0 oznacza pierwsze przybliżenie mls. Przybliżenie x_0 jest rozwiązaniem równania (5). Z warunku (iv) wynika dalej

$$x_0 = (I - KC_n)^{-1}(Kc + z) \tag{22}$$

oraz

$$x_1 - x_0 = (I - KB)^{-1}K\tilde{F}x_0 + (I-KB)^{-1}z - x_0 =$$

$$= (I - KB)^{-1}KFx_0 - (I - KB)^{-1}KBx_0 + (I-KB)^{-1}z - x_0 \tag{23}$$

Dalej mamy

$$x_0 - KBx_0 = KLx_0 - KBx_0 + z$$
$$x_0 = (I - KB)^{-1}K(Lx_0 - Bx_0) + (I - KB)^{-1}z \tag{24}$$

Z równań (23-24) wynika

$$x_1 - x_0 = (I - KB)^{-1}K(Fx_0 - Lx_0) \tag{25}$$

oraz

$$\|x_1 - x_0\|_{2,2} \le \|(I - KB)^{-1}K\|_{2,2}\,\tilde{\rho}(1) \tag{26}$$

Na podstawie (19) można oszacować różnicę pomiędzy kolejnymi iteracjami x_{i+1} oraz x_i

$$x_{i+1} - x_i = (I - KB)^{-1}K(\tilde{F}x_i - \tilde{F}x_{i-1}) \tag{27}$$

i następnie

$$\|x_{i+1} - x_i\|_{2,2} \le \|(I - KB)^{-1}K\|_{2,2}\|Fx_i - Fx_{i-1}\|_{2,2} \le$$
$$\le \|(I - KB)^{-1}K\|_{2,2}r\|x_i - x_{i-1}\|_{2,2} \tag{28}$$

Na podstawie założenia (iii) wnioskujemy, że $\{x_i\}$ jest ciągiem Cauchy'ego i w związku z tym istnieje granica $\tilde{x}$ wspomnianego ciągu $\{x_i\}$, która jest dokładnym rozwiązaniem równania (4).

Ponadto, na podstawie nierówności (26) i (28), możliwe jest oszacowanie błędu linearyzacji statystycznej $\|\tilde{x}-x_0\|_{2,2}$, który można wyrazić jako funkcję $\tilde{\rho}(1)$. Szczegółowe rozważania wynikają z dowodu twierdzenia o punkcie stałym dla operacji zwężających. To kończy dowód. ■

6.2. LINEARYZACJA STATYSTYCZNA W UKŁADACH STACJONARNYCH

Linearyzacja statystyczna została zastosowana początkowo w układach dynamicznych stacjonarnych. Dopiero później została uogólniona na przypadek niestacjonarny.

Rozważmy nieliniowy, stacjonarny układ dynamiczny ze sprzężeniem zwrotnym opisany następującym równaniem operatorowym

$$x = KFx + z \tag{29}$$

gdzie z jest n-wymiarowym, stacjonarnym sygnałem stochastycznym, określonym na lzga. G, F jest nieliniowym, stacjonarnym operatorem, K jest filtrem granicznym (patrz dodatek C). Załóżmy, że

$$(Fx)(t,\omega) = f(x(t,\omega)) \tag{30}$$

gdzie $t\in G$, $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, natomiast operator K jest zdefiniowany relacją

$$(K\eta)(t,\omega) := \int_{\hat{G}} \chi(t)\hat{k}(\chi)\zeta(d\chi), \qquad t\in G, \omega\in\Omega \tag{31}$$

oraz

$$\eta(t,\omega) = \int_{\hat{G}} \chi(t)\zeta(d\chi), \qquad t\in G, \omega\in\Omega$$

Pozostałe założenia są takie same, jak w rozdziale 5.

Generalnie, podobnie jak w przypadku niestacjonarnych układów dynamicznych, zastosowanie linearyzacji statystycznej polega na zastąpieniu układu nieliniowego opisanego równaniem (29) problemem liniowym, który zapiszemy:

$$y = KLy + z \tag{32}$$

gdzie L jest liniowym, stacjonarnym operatorem zdefiniowanym podobnie jak w przypadku niestacjonarnym

$$Ly := C_n y + c$$

gdzie C_n i c nie zależą od czasu i notacja jest taka sama, jak w części 6.1.

Załóżmy, że współczynniki linearyzacji C_n i c zostały wyznaczone za pomocą dowolnej z metod linearyzacji.

TWIERDZENIE 6.8. Załóżmy, że $z(t,\omega)$, $t\in G, \omega\in\Omega$ jest stacjonarnym w silnym sensie, ciągłym w sensie średniokwadratowym sygnałem stochastycznym drugiego rzędu i ponadto są spełnione następujące warunki:

(i) istnieje filtr graniczny B, generowany przez jądro $\hat{b}(\chi)$, $\chi\in\hat{G}$ oraz

$$\inf_{\chi\in\hat{G}} \left|\det\left(I - \hat{k}(\chi)\hat{b}(\chi)\right)\right| > 0;$$

(ii) $\inf_{\chi\in\hat{G}} \left|\det\left(I - \hat{k}(\chi)C_n\right)\right| > 0;$

(iii) $\exists\, r>0\ \forall\, x_1, x_2 \in C(G; L^2(\Omega,\mathfrak{F},P;\mathbb{R}^n)))$ zachodzi

$$\sup_{t\in G} \mathbb{E}\left(\left|f(x_1(t,\cdot))-f(x_2(t,\cdot))-B(x_1(t,\cdot))-x_2(t,\cdot))\right|^2\right) \le$$

$$\le r^2 \sup_{t\in G} \mathbb{E}\left(\left|x_1(t,\cdot) - x_2(t,\cdot)\right|^2\right);$$

(iv) $\sup_{\chi\in\hat{G}} r\sigma_{max}\left(\hat{a}(\chi)\right) < 1,$

gdzie $\hat{a}(\chi) = \left(I-\hat{k}(\chi)\hat{b}(\chi)\right)^{-1}\hat{k}(\chi).$

Wówczas istnieje stacjonarne, ciągłe w sensie średniokwadratowym rozwiązanie równania (29). Błąd mls. może być określony w następujący sposób:

$$\sup_{t\in G} \left(\mathbb{E}\left(\left|\tilde{x}(t,\cdot) - \tilde{y}(t,\cdot)\right|^2\right)\right)^{1/2} \le \text{const}\, \sup_{t\in G} \rho(1)$$

gdzie $\rho(1) = \left(\mathbb{E}\left(\left|f(\tilde{y}(t,\cdot) - C_n\tilde{y}(t,\cdot) - c\right|^2\right)\right)^{1/2}$ i $\tilde{y}$ oznacza rozwiązanie równania problemu przybliżonego (32).

Dowód. Struktura dowodu jest analogiczna do twierdzenia 6.7. Równanie (29) jest równoważne

$$x - KBx = KFx - KBx + z = K\tilde{F}x + z \tag{33}$$

gdzie $\tilde{F}x=Fx-Bx$. Niech $\tilde{y}$ będzie rozwiązaniem równania przybliżonego (32). Równanie przybliżone (32) jest równoważne

$$(I - KC_n)y = KC + z \tag{34}$$

Z założenia (ii) wynika, że istnieje stacjonarne, ciągłe w sensie średniokwadratowym rozwiązanie równania przybliżonego (32=34) oraz

$$y = (I - KC_n)^{-1}(Kc + z) \tag{35}$$

Niech filtr graniczny D jest określony w następującej postaci

$$Dx := (I - KB)^{-1}K\tilde{F}x + (I - KB)^{-1}z$$

Niech dalej $x_0=\tilde{y}$ oraz

$$x_{i+1} = Dx_i \qquad \text{dla } i=0,1,2,.....$$

określa kolejne iteracje procedury rozwiązującej.

Postępując podobnie jak w dowodzie twierdzenia 6.7, otrzymamy

$$x_1-x_0 = (I-KB)^{-1}KFx_0 - (I-KB)^{-1}KBx_0 + (I-KB)^{-1}z - x_0 \tag{36}$$

$$x_0 = (I-KB)^{-1}K(Lx_0 - Bx_0) + (I-KB)^{-1}z \tag{37}$$

a na podstawie (36-37) otrzymamy

$$x_1 - x_0 = (I-KB)^{-1}K(Fx_0 - Lx_0) \tag{38}$$

Proces stochastyczny $w_0=x_1-x_0$ jest stacjonarny, drugiego rzędu, ciągły w sensie średniokwadratowym, ponieważ jest kombinacją operacji stacjonarnych. Na tej podstawie można powiedzieć, że posiada reprezentację spektralną postaci

$$w_0(t,\omega) = \int_{\hat{G}} \chi(t)\zeta_0(d\chi)$$

gdzie $\mathbb{E}\left(\zeta_0(d\chi)\zeta_0^*(d\chi)\right) = F_0(d\chi)$, $tr(F_0(\hat{G})) < \infty$.

Zauważmy dodatkowo, że

$$\sup_{t\in G} \mathbb{E}\left(\left|w_0(t,\omega)\right|^2\right) = tr(F_0(\hat{G})) \le \alpha^2 \sup_{t\in G} \rho^2(1) \tag{39}$$

gdzie $\alpha=\left\|(I-KB)^{-1}\right\|_{C(G;L^2)}$, $\rho(1)=\left(\mathbb{E}\left(\left|Fx_0-Lx_0\right|^2\right)\right)^{1/2}$.

Ocenimy różnicę

$$x_{i+1}-x_i=(I-KB)^{-1}K(\tilde{F}x_i-\tilde{F}x_{i-1}), \qquad i=1,2,3,.....$$

Wszystkie procesy $w_i=x_{i+1}-x_i$ są stacjonarne, drugiego rzędu i ciągłe w sensie średnim, na podstawie takich samych argumentów, jak w przypadku w_0. Mają zatem reprezentację spektralną postaci

$$w_i(t,\omega) = \int_{\hat{G}} \chi(t)\zeta_i(d\chi) \tag{40}$$

gdzie $\mathbb{E}\left(\zeta_i(d\chi)\zeta_i^*(d\chi)\right) = F_i(d\chi)$, $\mathrm{tr}\left(F_i(\hat{G})\right) < \alpha^2\mathbb{E}\left(\left|\tilde{F}x_i - \tilde{F}x_{i-1}\right|^2\right)$.

Na podstawie założenia (iii) można napisać, że

$$\sup_{t\in G}\mathbb{E}\left(|x_{i+1}(t,\cdot) - x_i(t,\cdot)|^2\right) = \mathrm{tr}\left(F_i(\hat{G})\right) \le$$

$$\le \alpha^2 r^2 \sup_{t\in G}\mathbb{E}\left(|x_i(t,\cdot) - x_{i-1}(t,\cdot)|^2\right) = \alpha^2 r^2 \mathrm{tr}\left(F_{i-1}(\hat{G})\right), \quad \forall\ i=1,2,3,.. \tag{41}$$

Na podstawie założenia (iv), wykorzystując nierówności (39) i (41), można stwierdzić, że $\{x_i\}$, $i=0,1,2,.....$ jest ciągiem Cauchy'ego i w związku z tym istnieje granica $\tilde{x}$ tego ciągu. Używając podobnych argumentów, jak w twierdzeniu 6.7, otrzymamy następujące oszacowanie

$$\sup_{t\in G}\left(\mathbb{E}\left(|x(t,\cdot) - x_0(t,\cdot)|^2\right)\right)^{1/2} \le (1-\alpha r)^{-1}\sup_{t\in G}\rho(1) \tag{42}$$

ponieważ $\alpha r<1$. To kończy dowód. ■

6.3. METODY LINEARYZACJI STATYSTYCZNEJ

METODA 1. Pierwsza mls. polega na zastąpieniu funkcji nieliniowej $f(t,y)$, $t\in G, y\in\mathbb{R}^n$, $f: G\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, przez n-wymiarową funkcję liniową

$$l(t,y) = C(t)y_{(1)} + c(t)$$

gdzie $y=[y_{(1)}, y_{(2)}]^T \in \mathbb{R}^n$, $y_{(1)}\in\mathbb{R}^m$, $m\le n$, która minimalizuje ze względu na macierze C i c błąd średniokwadratowy

$$\rho_t(l) := \mathbb{E}\left(|f(t,x(t,\omega)) - l(t,x(t,\omega))|^2\right)$$

$\forall\ t\in G$ i dla pewnej klasy procesów stochastycznych.

LEMAT 6.9. Funkcjonał $\rho_t(l)$ przyjmuje wartość minimalną $\forall\ t\in G$, dla następujących wartości współczynników $\tilde{C}_1$ i $\tilde{c}_1$:

(i) $\tilde{C}_1(t) = \Gamma_1(t)K^{-1}(t)$;

(ii) $\tilde{c}_1(t) = \mathbb{E}\left(f(t,x(t,\cdot)) - \tilde{C}_1(t)\mathbb{E}(x_{(1)}(t,\cdot))\right)$;

(iii) $\Gamma_1(t) = \mathbb{E}\left(f(t,x(t,\cdot))\left(x_{(1)}(t,\cdot) - \mathbb{E}(x_{(1)}(t,\cdot))\right)^T\right)$;

(iv) $K(t) = \mathbb{E}\left(\left(x_{(1)}(t,\cdot) - \mathbb{E}(x_{(1)}(t,\cdot))\right)\left(x_{(1)}(t,\cdot) - \mathbb{E}(x_{(1)}(t,\cdot))\right)^T\right)$.

Dowod. Jest powtórzeniem rozważań z pracy [40]. ■

METODA 2. Rozważmy, podobnie jak wyżej, nieliniową funkcję $f(t,x(t,\omega))$ i jej liniowe przybliżenie $l(t,x(t,\omega))$. Notacja pozostaje bez zmian w stosunku do metody 1.

Idea metody jest dobrze znana [102,194,208,248-249,329]. Poszukiwana jest taka funkcja liniowa $l(t,x(t,\omega))$, zależna od procesu $x(t,\omega)$, która posiada wartość oczekiwaną i macierz kowariancji równe analogicznym wielkościom wyjściowej funkcji $f(t,x(t,\omega))$, $\forall\ t\in G$.

Niech

$$\mathbb{E}(l(t,x(t,\cdot))) = C(t)\mathbb{E}(x_{(1)}(t,\cdot)) + c(t) \tag{43}$$

Warunek równości wartości oczekiwanych prowadzi do równania

$$C(t)\mathbb{E}(x_{(1)}(t,\cdot)) + c(t) = \mathbb{E}(f(t,x(t,\cdot))) \tag{44}$$

Macierze kowariancji funkcji liniowej i nieliniowej przyjmują następującą postać

$$\Gamma_2(t) = \mathbb{E}\left(\left(f(t,x(t,\cdot))-\mathbb{E}(f(t,x(t,\cdot)))\right)\left(f(t,x(t,\cdot))-\mathbb{E}(f(t,x(t,\cdot)))\right)^T\right) \tag{45}$$

$$D(t) = \mathbb{E}\left(\left(l(t,x(t,\cdot))-\mathbb{E}(l(t,x(t,\cdot)))\right)\left(l(t,x(t,\cdot))-\mathbb{E}(l(t,x(t,\cdot)))\right)^T\right) =$$

$$= \mathbb{E}\left(\left(C(t)\left(x_{(1)}(t,\cdot) - \mathbb{E}(x_{(1)}(t,\cdot))\right)\right)\left(C(t)\left(x_{(1)}(t,\cdot) - \mathbb{E}(x_{(1)}(t,\cdot))\right)\right)^T\right) =$$

$$= C(t)K(t)C^T(t) \tag{46}$$

gdzie macierz K jest określona jak w warunku (iv) lematu 6.9.

Zauważmy, że bez zmniejszenia ogólności można założyć, że macierze K i Γ_2 są symetryczne i dodatnio określone. Wynika stąd, że istnieją macierze $K^{1/2}(t)$ i $\Gamma_2^{1/2}(t)$, $\forall\ t\in G$. Z równań (45-46) otrzymujemy

$$C(t)K^{1/2}(t) = \Gamma_2^{1/2}(t) \tag{47}$$

Współczynniki $c(t), C(t)$, $t\in G$, można zatem wyznaczyć z równań (47) oraz (44). Udowodniony został zatem następujący lemat.

LEMAT 6.10. Załóżmy, że spełnione są następujące założenia:

(i) $\tilde{C}_2(t) = \Gamma_2^{1/2}(t)K^{-1/2}(t)$;

(ii) $\tilde{c}_2(t) = \mathbb{E}\left(f(t,x(t,\cdot)) - \tilde{C}_2(t)\mathbb{E}(x_{(1)}(t,\cdot))\right)$;

(iii) $\Gamma_2(t) = \mathbb{E}\left(\left(f(t,x(t,\cdot))-\mathbb{E}(f(t,x(t,\cdot)))\right)\left(f(t,x(t,\cdot))-\mathbb{E}(f(t,x(t,\cdot)))\right)^T\right)$;

(iv) $K(t) = \mathbb{E}\left(\left(x_{(1)}(t,\cdot) - \mathbb{E}(x_{(1)}(t,\cdot))\right)\left(x_{(1)}(t,\cdot) - \mathbb{E}(x_{(1)}(t,\cdot))\right)^T\right)$,

wówczas wartości oczekiwane i macierze kowariancji funkcji nieliniowej $f(t,x(t,\omega))$ oraz funkcji liniowej $l(t,x(t,\omega)) = \tilde{C}_2(t)x_{(1)}(t,\omega) + \tilde{c}_2(t)$ są sobie równe. ■

UWAGA 6.11. Niektórzy autorzy [329,339,359] rekomendują nieco inny dobór współczynników linearyzacji statystycznej, mianowicie:

$$\tilde{C}_{12}(t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{C}_1(t) + \tilde{C}_2(t)\right), \quad \tilde{c}_{12}(t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{c}_1(t) + \tilde{c}_2(t)\right) \tag{48}$$

gdzie $\tilde{C}_i(t)$ oraz $\tilde{c}_i(t)$ dla i=1,2 oznaczają współczynniki linearyzacji opisane w omówionych metodach. ■

METODA 3. W niniejszej metodzie przedstawiona jest mało znana technika linearyzacji statystycznej zaproponowana przez Zhanga,Elishakoffa [304] i rozszerzona na układy wielowymiarowe w pracach Skrzypczyka [241,243]. Metoda polega ogólnie na takim doborze współczynników, aby średni błąd kwadratowy różnicy między energią potencjalną układu nieliniowego $\mathcal{U}(\cdot)$ i energią potencjalną przybliżonego układu liniowego był jak najmniejszy.

Załóżmy, że nieliniowość $f(\cdot)$ jest stacjonarna. Dla uproszczenia założono dalej, że $\mathcal{U}(0) = 0$.

W proponowanym schemacie linearyzacji wymagane jest, aby

$$\rho := \mathbb{E}\left(\left|\mathcal{U}(x(t,\omega)) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} c_{ik}x_i(t,\omega)x_{(1)k}(t,\omega)\right|^2\right) =$$

$$= \mathbb{E}\left(\left|\mathcal{U}(x(t,\omega)) - \frac{1}{2}\langle x(t,\omega), Cx_{(1)}(t,\omega)\rangle\right|^2\right) =$$

$$= \mathbb{E}\left(\left|\mathcal{U}(x(t,\omega)) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} x^T(t,\omega)C_i x_{(1)i}(t,\omega)\right|^2\right) = \min \tag{49}$$

gdzie $\mathcal{U}(\cdot)$ oznacza energię potencjalną związaną z nieliniowością f.

Macierz $C=[c_{ik}]$ zapiszemy w specjalnej formie wierszowej C_w

$$C_w = \left[c_{ik}\right] = \left[C_1^T, C_2^T, \ldots\ldots, C_p^T\right]^T$$

gdzie $C_k = \left[c_{1k}, c_{2k}, \ldots\ldots, c_{nk}\right]^T$, k=1,2,...,p, oznaczają kolumny macierzy C.

Oznaczmy dalej $\nabla_x := \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots\ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right]^T$. We wprowadzonych oznaczeniach warunkiem koniecznym minimum funkcjonału ρ jest $\forall$ k=1,2,...,p

$$\nabla_{C_k}\rho = \mathbb{E}\left(\left(\mathcal{U}(x(t,\omega)) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} x^T(t,\omega)C_i x_{(1)i}(t,\omega)\right)x(t,\omega)x_{(1)k}(t,\omega)\right) = 0 \tag{50}$$

Z równania (50) otrzymamy po przekształceniach

$$\Gamma_k = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\phi_{ki}C_i \tag{51}$$

gdzie oznaczenia są następujące

$$\Gamma_k := \mathbb{E}\left(\mathcal{U}(x)xx_{(1)k}\right), \qquad \phi_{ki} := \mathbb{E}\left(x_{(1)k}x_{(1)i}xx^T\right)$$

Wprowadźmy dla uproszczenia notacji następujące macierze klatkowe

$$\Gamma := \left[\Gamma_1^T, \Gamma_2^T, \ldots\ldots, \Gamma_p^T\right]^T, \qquad \Phi := \left[\phi_{ki}\right], \qquad \text{dla } i,k=1,2,\ldots,p.$$

Ostatecznie otrzymamy

$$2\Gamma = \Phi C_w$$

a stąd, jeżeli macierz Φ jest nieosobliwa, wynika natychmiast

$$\tilde{C}_{3w} = 2\Phi^{-1}\Gamma \tag{52}$$

Równanie (52) kończy rozważania. ■

W pracach [79,241,304] autorzy dochodzą do wniosków, że w pewnych przypadkach przedstawiona metoda wykazuje większą dokładność niż omówione wcześniej metody 1 i 2, zwłaszcza dla układów dynamicznych z "utwardzającą" się charakterystyką sprężystą (nieliniową).

6.4. PRZYKŁAD

Aby zilustrować rozważania na temat dokładności różnych mls. i w celu porównania przedstawionych wyników weźmy pod uwagę jednowymiarowy układ drgający, którego ruch opisany jest równaniem różniczkowym w znormalizowanej formie

$$\ddot{x}(t,\omega) + \beta\dot{x}(t,\omega) + F(x(t,\omega)) = z(t,\omega) \qquad t\in\mathbb{R}, \omega\in\Omega \tag{53}$$

gdzie β=const>0 oznacza współczynnik liniowego tłumienia wiskotycznego, natomiast funkcja F(x), $x\in\mathbb{R}$ jest charakterystyką nieliniowej siły sprężystej. Założono dalej, że F przyjmuje postać następującą

$$F(x) = \begin{cases} \gamma(x-1)+1, & \text{dla } x \le -1 \\ x, & \text{dla } -1 < x < 1 \\ \gamma(x+1)-1, & \text{dla } x \ge 1 \end{cases}$$

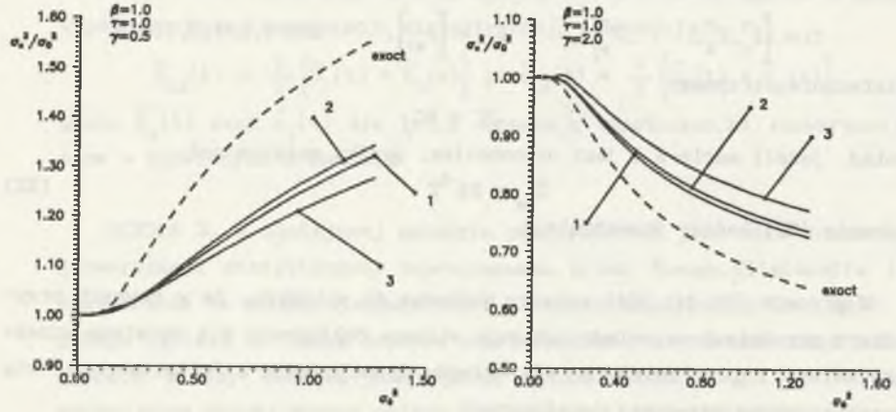
przy wartościach parametru γ=0.5 oraz γ=2.0.

Będzie rozpatrywany przypadek, gdy siła wymuszająca jest procesem stacjonarnym 2. rzędu ze średnią zero i gęstością spektralną postaci

$$S_z(iu) = \frac{S_0}{1+u^2\tau^2}, \qquad u\in\mathbb{R}^1 \tag{54}$$

gdzie S_0 i τ są pewnymi stałymi [241,243].

Równanie (53) można sprowadzić do standardowego losowego równania całkowego, por. rozdział III. Rozwiązanie równania rozumiane jest w sensie R-rozwiązań [40].



Rys.6.1. Porównanie wartości względnych dokładnych przemieszczeń średniokwadratowych w nieliniowym układzie drgającym z wynikami przybliżonymi (krzywa "i" odpowiada mls. typu i)

Fig.6.1. Comparison of relative values of exact mean-square displacements in a nonlinear vibrating system with approximate ones (curve "i" corresponds with mls. of i-th type)

Gęstość prawdopodobieństwa rozwiązania problemu (53-54) $p(x,\dot{x},\ddot{x})$ można określić w sposób ścisły na podstawie rozważań zawartych w pracy [242]. Funkcja prawdopodobieństwa ma postać

$$p(y_1,y_2,y_3) = p^{(3)}(y_1,y_2,y_3) =$$

$$= N \exp\left(-\frac{2\tau}{S_0}\int_0^{y_1}\left(\frac{dF}{dz}+\frac{\beta}{\tau}\right)F(z)dz - \frac{\beta}{S_0}\left(1+\beta\tau+\tau^2\frac{dF}{dy_1}\right)y_2^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{\tau(1+\beta\tau)}{S_0}y_3^2 - \frac{2\tau F(y_1)}{S_0}y_3\right) \qquad (55)$$

gdzie $y_1=x$, $y_2=\dot{x}$, $y_3=\ddot{x}$ i N jest pewną stałą, która jest określana z warunku normalizacyjnego

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p^{(3)}(y_1,y_2,y_3)dy_1dy_2dy_3 = 1$$

Przypomnijmy, że jednowymiarowa gęstość prawdopodobieństwa zmiennej $y_1=x$ jest określona następująco

$$p^{(1)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p^{(3)}(y_1,y_2,y_3)dy_2dy_3$$

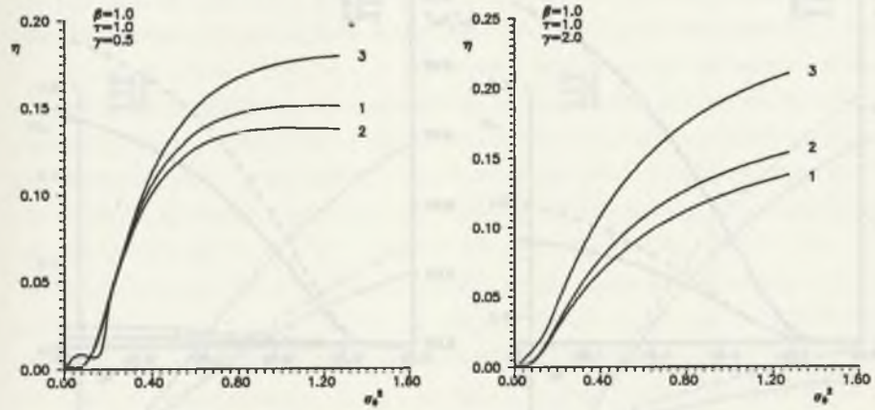
w związku z tym wariancję przemieszczenia obliczamy z relacji

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p^{(1)}(x)dx$$

Forma zlinearyzowana związana z równaniem (53) jest liniowym, stochastycznym równaniem różniczkowym

$$\ddot{y}(t,\omega) + \beta\dot{y}(t,\omega) + C_i y(t,\omega) = z(t,\omega), \qquad t\in\mathbb{R},\omega\in\Omega \qquad (56)$$

gdzie wielkości C_i, i=1,2,3 zależą od wyboru metody linearyzacji.



Rys.6.2. Porównanie względnych błędów wyznaczenia odchylenia standardowego dla różnych mls.(krzywa "i" odpowiada mls. typu i-ego)

Fig.6.2. Comparison of relative errors of standard deviations for different mls. (curve "i" corresponds with mls. of i-th type)

Oznaczmy przez $\tilde{x}$ i $\tilde{y}_i$ R-rozwiązania równań (53) i (56) odpowiednio oraz przez σ_x, $\sigma_{y,i}$ odpowiadające tym rozwiązaniom odchylenia standardowe. Dalej używamy też notacji σ_0 do oznaczenia odchylenia standardowego rozwiązania liniowej wersji równania (53), tzn. dla γ=1.0. Przedstawiono absolutne błędy wyznaczenia odchylenia standardowego dla różnych metod linearyzacji

$$\sigma_{err,i} = |\sigma_x - \sigma_{y,i}|$$

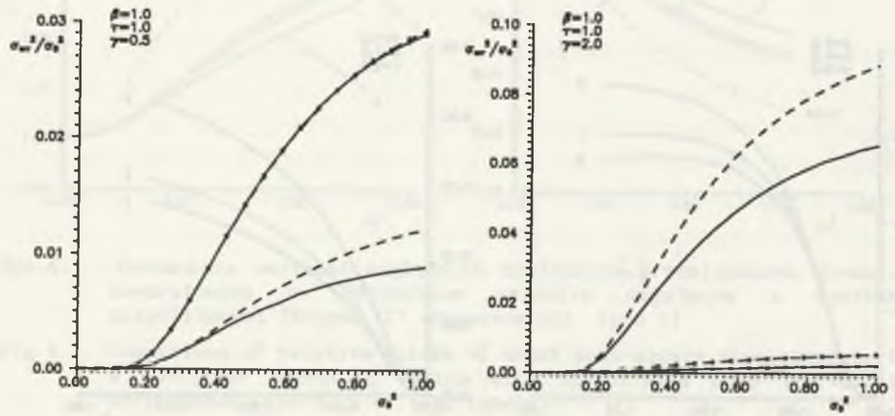
oraz błędy względne

$$\eta_i = \sigma^2_{err,i}\Big/\sigma_0^2$$

i $\sigma^2_{y,i}\Big/\sigma_0^2$ związane z konwencjonalnymi (i=1,2) oraz najnowszą (i=3) mls. Dla uproszczenia, rozpatrzono tylko rozwiązania stacjonarne.

Wykorzystując gęstość prawdopodobieństwa (55) wyznaczono metodą numerycznego całkowania drugie momenty rozwiązań, zarówno równania nieliniowego (53), jak i jego liniowej aproksymacji (56).

Na rys.6.1 przedstawiono porównanie względnych wielkości drugich momentów rozwiązania, wyznaczonych w sposób dokładny, z analogicznymi wielkościami otrzymanymi trzema mls. Krzywa "i" odpowiada mls. typu i. Porównanie mls. można znaleźć również w innych pracach, np. [79,241,243].



Rys.6.3. Porównanie dokładnych, bezwzględnych błędów wyznaczenia odchylenia standardowego w nieliniowym układzie drgającym z wynikami teoretycznymi (linia ciągła - dokładny błąd mls. typu 1, linia przerywana - dokładny błąd mls. typu 3, linie z symbolami - teoretyczne błędy odpowiednich mls.)

Fig.6.3. Comparison of exact, absolute errors of standard deviations in nonlinear vibrating system with theoretical bounds (continuous line - exact error of 1-st mls., dashed line - exact error of 3-rd mls., line with symbols - theoretical error bounds of corresponding mls.)

Rys.6.2 ilustruje wielkości błędów względnych η_i związanych z mls. typu i. Jak widać z rys.6.1 i 6.2, konwencjonalne metody linearyzacji (i=1,2) dają wyniki, które są bliższe rezultatom dokładnym, niż wyniki metody energetycznej (i=3).

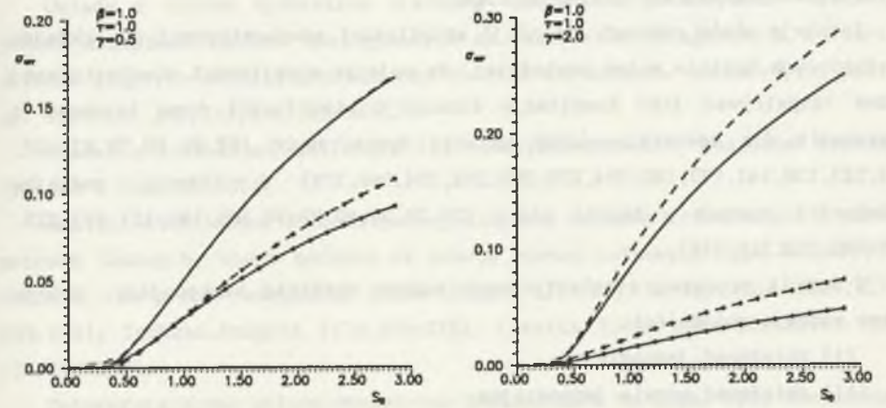
Na podstawie analizy teoretycznej (tw. 6.8) można przewidzieć zakres błędu wyznaczenia odchylenia standardowego, co wynika z prostego oszacowania

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^1}|\sigma_x - \sigma_y| \le \sup_{t\in\mathbb{R}^1}\left(\mathbb{E}\left(|\tilde{x}(t,\omega) - \tilde{y}(t,\omega)|^2\right)\right)^{1/2} \le \text{const}\,\sup_{t\in\mathbb{R}^1}\rho(1)$$

a stała wynika z nierówności (42). Ponieważ konwencjonalne mls. (i=1,2) dają wyniki (i=1,2) bliskie sobie, nie będą one dalej rozróżniane.

Na rys.6.3 porównano absolutne błędy wyznaczenia odchylenia standardowego $\left|\sigma_x - \sigma_y\right|$, dla dwóch metod linearyzacji (1 i 3), wyznaczone dokładnie, z teoretycznym oszacowaniem błędu wynikającym z nierówności (42).

Względne błędy wyznaczenia odchylenia standardowego $(\sigma_x - \sigma_y)^2/\sigma_0^2$, dla tych samych metod linearyzacji, wyznaczone dokładnie, oraz oszacowania teoretyczne są przedstawione na rys.6.4.■



Rys.6.4. Porównanie dokładnych, względnych błędów wyznaczenia odchylenia standardowego w nieliniowym układzie drgającym z wynikami teoretycznymi (oznaczenia jak na rys. 6.3)

Fig.6.4. Comparison of exact, relative errors of standard deviations in nonlinear vibrating system with theoretical bounds (notion is the same as in fig.6.3)

Głównym celem rozważań przedstawionych w powyższym przykładzie nie było wyłącznie porównanie trzech, aktualnie używanych, mls. zastosowanych do typowego układu mechanicznego, ale wykorzystanie teoretycznych możliwości oszacowania błędu wyznaczenia odchylenia standardowego rozwiązania problemu zlinearyzowanego w porównaniu z rozwiązaniem ścisłym. Zastosowana technika jest podobna do metod badania stabilności i daje wyniki o podobnej dokładności. Naturalnie, aby uzyskać bardziej dokładne oszacowanie błędu, należy wykorzystać bardziej subtelne metody analizy.

Rozdział VII. STABILNOŚĆ NIELINIOWYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

W rozdziale niniejszym rozpatrywane będą zagadnienia stabilności nieliniowych układów dynamicznych opisanych stochastycznymi, nieliniowymi równaniami całkowymi zdefiniowanymi na lzga. G.

Istnieje wiele różnych definicji stabilności stochastycznej dla układów nieliniowych. Ogólnie można powiedzieć, że pojęcia stabilności stochastycznej można rozpatrywać jako kombinacje koncepcji stabilności typu Lapunowa i Lagrange'a dla zdeterminowanych układów dynamicznych [52, 56, 60, 78, 87, 102, 109, 123, 138, 141, 177, 183, 214, 225, 285, 302, 354, 366, 374] i różnych rodzajów zbieżności znanych w teorii miary [20, 28, 33, 40, 92-94, 105, 149, 157, 163, 225, 279-280, 313, 315, 318].

W teorii procesów stochastycznych możemy wyróżnić następujące, dobrze znane rodzaje zbieżności:

(i) zbieżność jednostajna;

(ii) zbieżność prawie jednostajna;

(iii) zbieżność prawie wszędzie (z prawdopodobieństwem 1 ≡ mod(ℙ));

(iv) zbieżność w sensie średnim (w $L^m(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, $m \geq 1$);

(v) zbieżność według miary.

Wynika stąd, że koncepcji stabilności stochastycznych, nieliniowych układów dynamicznych jest co najmniej pięciokrotnie więcej niż w przypadku zdeterminowanym. Przegląd tych definicji można znaleźć w pracy Ahmeda, Teo [6].

Ze względu na fakt, że w niniejszej pracy do opisu układów dynamicznych wykorzystywany jest aparat równań całkowych, w analizie stabilności nie będzie stosowana metoda funkcjonałów Lapunowa. Zainteresowanego czytelnika odsyłamy do literatury [225, 279-280, 354].

W przypadku gdy układ fizyczny opisany jest równaniem całkowym, pojęcie stabilności Lapunowa traci sens. Na ogół zostaje ono zastąpione ogólniejszym pojęciem ciągłej zależności rozwiązania od funkcji pobudzającej, przy czym ciągłość jest określona np. przez normę przestrzeni Banacha sygnałów stochastycznych, w której badamy rozwiązanie.

W ciągu ostatnich 30 lat częstotliwościowe kryteria stabilności układów zdeterminowanych z czasem ciągłym, oparte na wynikach Sandberga [214-217], Zamesa [302] i Jakubowicza [377-382], były rozszerzane na wiele sposobów. Prace Corduneanu [52], Desoera, Vidyasagara [60], Jakubowicza [381-382], Kudrewicza [138], Harrisa, Valenci [109] dają obszerny przegląd tych wyników, szczegóły można znaleźć w pracach [3, 15, 18, 23, 31, 43, 47-48, 51-52, 57-62, 78, 85-86, 88, 98-100, 103, 109, 112, 129-130, 138, 144, 147, 151-154, 160, 162, 165-166, 169, 173-174, 176-180, 195, 213-217, 225, 285, 254-255, 292-296, 300, 302, 350, 354, 377-382].

Układy z czasem dyskretnym nie były badane tak intensywnie, niemniej jednak większość wyników analogicznych do rezultatów osiągniętych w teorii układów ciągłych została sformułowana również dla układów dyskretnych, patrz np. [109, 121, 141, 213, 272, 365-366].

Obszerną literaturę dotyczącą tej tematyki czytelnik znajdzie w pracy Cypkina i Popkowa [374].

Analiza stabilności stochastycznej ciągłych układów dynamicznych o parametrach losowych, które opisano za pomocą równań całkowych typu Volterry 2 rodzaju, to przede wszystkim prace Ahmeda [2, 4, 6], Skrzypczyka [204, 227-233, 244], Tsokosa, Padgett [170, 275-278], Liewita [348] oraz [21-22, 69, 101, 172, 279-280].

Deterministyczne układy dynamiczne zdefiniowane na lzga. były analizowane, z punktu widzenia ich stabilności, w pracy Falba, Freedmana, Zamesa [87].

Pewne wyniki dotyczące własności, prostszych od rozpatrywanych w pracy, układów dynamicznych zdefiniowanych na pierścieniu abelowym podali Emre i Khargonekar [73-74, 133], patrz również [124].

W pracy ograniczono rozważania dotyczące stabilności do pojęć związanych ze stabilnością w sensie średnim, ale analiza prowadzona jest w rozszerzonej przestrzeni energetycznej, co pozwala na uwzględnienie sygnałów o nieograniczonej energii średniej.

Podstawowe pojęcia i definicje dotyczące rozpatrywanych rodzajów stabilności układów dynamicznych opisanych wielowymiarowymi, losowymi równaniami całkowymi podane są w części 7.1.1 niniejszego rozdziału. Następne dwie części pracy zawierają wyniki dotyczące stabilności układu opisanego równaniem całkowym w dwóch przypadkach: gdy część nieliniowa zawiera się w pewnym sektorze stożkowym oraz gdy nieliniowość zawiera się w sektorze określonym formą kwadratową w rozszerzonej przestrzeni sygnałów $L_e^{2,2}$.

W części 7.3 przedstawione zostały własności asymptotyczne rozwiązań oraz dodatkowe założenia, przy których rozwiązania $x(t,\cdot)$ dążą do zera przy "$t \longrightarrow \infty$".

Pokazano między innymi, że znane do tej pory wyniki teorii układów ciągłych i dyskretnych, zarówno w przypadku stochastycznym, jak i deterministycznym, są wnioskami z przedstawionej poniżej, ogólnej teorii stabilności układów dynamicznych zdefiniowanych na lzga.

7.1. STABILNOŚĆ UKŁADÓW, KTÓRYCH CZĘŚĆ NIELINIOWA LEŻY W SEKTORZE STOŻKOWYM

Układy dynamiczne w tej części pracy rozpatrywane będą jak układy sterowania. Przypomnijmy (por. rozdz. II), że matematyczny model takiego układu dynamicznego można opisać jako pary sygnałów stochastycznych wejściowych u i wyjściowych y, należących do pewnych przestrzeni funkcyjnych, oraz dowolną (nieliniową) relację A zdefiniowaną na elementach tych przestrzeni, określającą związek między sygnałami wejściowymi i wyjściowymi postaci

$$y = Ax \tag{1}$$

Wprowadzone określenie dopuszcza relacje wieloznaczne, które jednemu wejściu przyporządkowują kilka wielkości wyjściowych. Jeśli ograniczyć rozważania do relacji jednoznacznych, to A będzie operatorem, nazywanym różnie: operatorem przejścia, operacją wejście-wyjście itp.

7.1.1. Oznaczenia i definicje

Wprowadzimy do rozważań nową przestrzeń sygnałów stochastycznych. Niech Q będzie domkniętą podpółgrupą lzga. G, dla której $\mu(Q)>0$. Półgrupa Q określa częściowe uporządkowanie grupy G, patrz część 2.2. Zakłada się dalej, że półgrupa Q jest ustalona.

DEFINICJA 7.1. Przestrzeń sygnałów stochastycznych $x(t,\omega)$, $t\in G, \omega\in\Omega$ takich, że $x_\tau \in L^{p,q}(G;\mathbb{R}^n)$, $\forall\ \tau\in G$, $p,q\geq 1$, oznaczać będziemy $L_e^{p,q}(G;\mathbb{R}^n)$, stanowi ona rozszerzenie (ze względu na półgrupę Q) przestrzeni $L^{p,q}(G;\mathbb{R}^n)$. ■

Stabilność rozpatrywanych układów dynamicznych będziemy rozumieć w sensie "wejście-wyjście", ogólnie znanym w literaturze [60,109,302].

DEFINICJA 7.2. Niech operator $A: L_e^{p,q}(G;\mathbb{R}^n) \longrightarrow L_e^{p,q}(G;\mathbb{R}^m)$, $p,q\geq 1$. Układ dynamiczny opisany operatorem A nazwiemy słabo stabilnym w sensie średnim, jeżeli istnieją nieujemne stałe rzeczywiste $\gamma,\beta<\infty$ takie, że prawdziwe jest oszacowanie

$$\|(Ax_\tau)_\tau\|_{p,q} \leq \gamma\|x_\tau\|_{p,q} + \beta \qquad \forall\ \tau\in Q, x\in L_e^{p,q}(G) \blacksquare \tag{2}$$

DEFINICJA 7.3. Układ dynamiczny opisany operatorem A nazwiemy stabilnym (silnie) w sensie średnim, jeżeli w relacji (1) możemy przyjąć $\beta\equiv 0$. ■

Jeżeli dla pewnego operatora A zachodzi oszacowanie typu (2), to umownie przyjmuje się, że operator A jest $L_e^{p,q}(G;\mathbb{R}^n)$ - stabilny.

Ogólnie można powiedzieć, że jeżeli $A\emptyset=\emptyset \bmod(\mathbb{P})$, to z nierówności (2), przy $\beta=0$, można wnioskować o ciągłości operatora A w zerze ø rozszerzonej przestrzeni $L_e^{p,q}(G;\mathbb{R}^n)$. Zauważmy między innymi, że układ dynamiczny stabilny w sensie definicji 7.3 posiada stabilne rozwiązanie zerowe. Wynikają stąd również pewne modyfikacje definicji 7.3 spotykane w literaturze, por. [60, 302]. Można powiedzieć, że najbardziej ogólne sformułowanie powinno pokrywać się po prostu z definicją ciągłości operatora A w punkcie $\emptyset\in L_e^{p,q}(G;\mathbb{R}^n)$.

DEFINICJA 7.4. Układ dynamiczny opisany operatorem $A : L_e^{p,q}(G;\mathbb{R}^n) \longrightarrow L_e^{p,q}(G;\mathbb{R}^m)$, $p,q\geq 1$, nazywamy stabilnym (silnie) w sensie średnim, jeżeli

$$\forall\ \tau\in Q, \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ \forall\ x\in L_e^{p,q}(G): \|x_\tau\|_{p,q} < \delta \Rightarrow \|(Ax)_\tau\|_{p,q} < \varepsilon. \blacksquare$$

Oczywiście, ze stabilności w sensie definicji 7.3 wynika natychmiast stabilność w sensie definicji 7.4.

W podobny sposób można określić stabilność układu dynamicznego w innych przestrzeniach sygnałów stochastycznych, co może łączyć się z rozmaitymi wymaganiami stawianymi takim układom. Na przykład stabilność drgań okresowych w stanie ustalonym wymagać będzie innych przestrzeni sygnałów stochastycznych, aniżeli analiza stanów nieustalonych w układach stabilizujących ruch układu.

Dla uproszczenia notacji będziemy dalej używać następującego oznaczenia:

$$\|x(\cdot,\cdot)\|_{p\tau,q} := \|x_\tau(\cdot,\cdot)\|_{p,q} \tag{4}$$

DEFINICJA 7.5. Dla relacji opisującej związek wejście - wyjście układu dynamicznego $A: L_e^{p,q}(G;\mathbb{R}^n) \longrightarrow L_e^{p,q}(G;\mathbb{R}^n)$ zdefiniujemy wielkość

$$\gamma(A) := \inf_{\gamma}\left\{\gamma\in\mathbb{R}_+^1 : \|Ax\|_{p\tau,q} \le \gamma\|x\|_{p\tau,q} + \beta,\ \forall\ x\in L_e^{p,q}(G;\mathbb{R}^n),\ \tau\in Q\right\} \tag{5}$$

która nazywana będzie średnim współczynnikiem wzmocnienia. ■

Oczywiste jest, że jeżeli $\gamma(A)<\infty$, to układ dynamiczny jest stabilny. Często normalizuje się równania układu w taki sposób, że zachodzi $A\emptyset=\emptyset$, wówczas

$$\gamma(A) = \sup\left\{\frac{\|Ax\|_{p\tau,q}}{\|x\|_{p\tau,q}} : x\in L_e^{p,q}(G;\mathbb{R}^n),\ \tau\in Q,\ x_\tau\neq\emptyset\right\} \tag{6}$$

Szczególne znaczenie odgrywa w zastosowaniach przestrzeń $L_e^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)$. W celu ustalenia uwagi przyjmiemy, że wszystkie sygnały wejściowe i wyjściowe układów dynamicznych rozpatrywanych w tym rozdziale są elementami przestrzeni $L_e^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)$.

Niech dalej spełnione będą następujące założenia:

H1) S będzie liniowym, stacjonarnym, przyczynowym operatorem losowym typu Volterry-Stieltjesa, określonym przez miarę macierzową o wahaniu ograniczonym $s\in M_Q(G;L^\infty(\omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)))$ oraz nośniku $\mathrm{supp}(s)\subset Q$, postaci

$$(Sx)(t,\omega) := \int_{Q_t} s(d\tau,\omega)x(t-\tau,\omega), \qquad t\in Q,\ \omega\in\Omega \tag{7}$$

dla dowolnych $x\in L_e^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)$. ■

Mówiąc dalej o dowolnym stacjonarnym, liniowym i przyczynowym operatorze losowym będziemy stale uważać, że ma on postać operatora całkowego typu (7). W przypadku deterministycznym naturalnie miara $s(\cdot)$ nie jest losowa.

H2) Liniowe, stacjonarne i przyczynowe operatory K, C, R są określone w analogiczny do (H1) sposób, odpowiednio przez miary nielosowe k, c i r. ■

Opierając się na koncepcji Safonova i Athansa [213] sformułujemy poniżej dwie hipotezy, które odgrywać będą podstawową rolę w dalszych rozważaniach.

H3) Niech dany będzie operator K. Załóżmy, że istnieją operatory C, R i S oraz liczba rzeczywista $\varepsilon>0$ taka, że

$$\|S(y-Cx)\|_{2\tau,2}^2 \le \|Rx\|_{2\tau,2}^2 - \varepsilon\left(\|x\|_{2\tau,2}^2 + \|y\|_{2\tau,2}^2\right) \tag{8}$$

$\forall\ y=Kx,\ x\in L_e^{2,2}(G;\mathbb{R}^n),\ \tau\in Q$. Powiemy wówczas, że operator K należy do wnętrza sektora stożkowego o parametrach (C, R, S), co oznaczamy dalej

$$K \in \mathrm{Int}\left(\mathrm{St}\left(C,R,S;L_e^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)\right)\right)$$

H4) Jeżeli

$$\|S(y-Cx)\|_{2\tau,2}^2 \ge \|Rx\|_{2\tau,2}^2 \tag{9}$$

$\forall\ x=-Ky,\ y\in L_e^{2,2}(G;\mathbb{R}^n),\ \tau\in Q$, to mówimy, że relacja odwrotna do -K, oznaczona dalej $(-K)^I$, leży poza sektorem stożkowym o parametrach (C, R, S), tzn.

$$(-K)^I \notin \mathrm{St}\left(C,R,S;L_e^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)\right) \ ■$$

Notacja A^I używana będzie do oznaczenia operacji odwrotnej do A, tzn. A^I będzie relacją przyporządkowującą każdej funkcji $y\in L_e^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)$ jej przeciwobraz, tj. zbiór funkcji $x\in L_e^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)$ takich, że $y=Ax$. Relacja A^I jest zawsze określona, nawet dla operatorów A, dla których operator odwrotny A^{-1} nie istnieje.

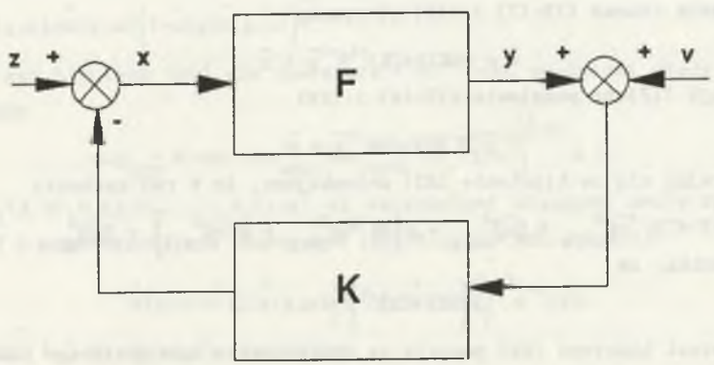
7.1.2. Uogólnienie kryterium Nyquista

Weźmy pod uwagę wielowymiarowy układ dynamiczny ze sprzężeniem zwrotnym, który może być przedstawiony schematycznie jak na rys. 7.1. Sygnały stochastyczne z i v uważane będą za wejściowe, sygnały x i y za wyjściowe. Układ można opisać za pomocą dwóch równań operatorowych

$$y = Fx \tag{10}$$

$$x = -K(y + v) + z \tag{11}$$

gdzie $x,y,z,v\in L_e^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)$ oraz $K,F: L_e^{2,2}(G;\mathbb{R}^n) \longrightarrow L_e^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)$, operator F jest nieliniowy.



Rys. 7.1. Schemat układu dynamicznego ze sprzężeniem zwrotnym
Fig. 7.1. Scheme of a feedback dynamic system

Niech $u:=\left[x^T,y^T\right]^T$, $w:=\left[z^T,v^T\right]$ oraz relacja między wejściem u i wyjściem w układu dynamicznego (10-11) dana jest pewną operacją A:

$$w = Au$$

Badaniem stabilności tego układu zajmiemy się poniżej.

TWIERDZENIE 7.1. Przypuśćmy, że istnieją liniowe, stabilne w $L_e^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)$ operatory C,R i S takie, że dla operatora F spełniona jest hipoteza (H3), a dla operatora $(-K)^I$ hipoteza (H4). Jeżeli istnieją stabilne w $L_e^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)$ operatory S^{-1} i R^{-1} oraz stabilny w $L_e^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)$ operator $(I+CK)^{-1}$, to system dynamiczny (10-11) jest stabilny silnie w $L_e^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)$.

Dowód. Na podstawie równania (11) możemy napisać

$$K(y+v) = K(I+CK)^{-1}(Cz-Cx+y+v) \tag{12}$$

i dalej na podstawie (11-12)

$$x = -K(I+CK)^{-1}(Cz-Cx+y+v) + z \tag{13}$$

Zauważmy, że

$$Cz - Cx + y + v = (F-C)x + Cz + v \tag{14}$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$\tilde{y} = S(y-C(x-z)+v) \tag{15}$$

$$\tilde{x} = Rx \tag{16}$$

$$\tilde{z} = Rz \tag{17}$$

$$\tilde{v} = S(v+Cz) \tag{18}$$

Na podstawie równań (15-17) i (13) otrzymamy

$$\tilde{x} = -RK(I+CK)^{-1}S^{-1}\tilde{y} + \tilde{z} \tag{19}$$

i z relacji (12) na podstawie (15-16) i (18)

$$\tilde{y} = S(F-C)R^{-1}\tilde{x} + \tilde{v} \tag{20}$$

Opierając się na hipotezie (H3) wnioskujemy, że $\forall\ \tau\in Q$ zachodzi

$$\left\|S(F-C)R^{-1}\tilde{x}\right\|_{2\tau,2}^2 \le \left\|\tilde{x}\right\|_{2\tau,2}^2 - \varepsilon\left(\left\|R^{-1}\tilde{x}\right\|_{2\tau,2}^2 + \left\|F\tilde{x}\right\|_{2\tau,2}^2\right) < \left\|\tilde{x}\right\|_{2\tau,2}^2 \tag{21}$$

a stąd wynika, że

$$\gamma\left(S(F-C)R^{-1}\right) < 1 \tag{22}$$

Natomiast hipoteza (H4) pozwala na stwierdzenie następującego faktu

$$\left\|S(I+CK)y\right\|_{2\tau,2}^2 \ge \left\|Rx\right\|_{2\tau,2}^2 = \left\|RKy\right\|_{2\tau,2}^2 \tag{23}$$

dla dowolnych y takich, że x=Ky. Z istnienia operatorów S^{-1} i $(I+CK)^{-1}$ wynika, że relacja u=S(I+CK)y określa wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie między

u i y i oczywiście, $y=(I+CK)^{-1}S^{-1}u$. Na tej podstawie z nierówności (23) wynika natychmiast, że

$$\left\|u\right\|_{2\tau,2}^2 \ge \left\|RK(I+CK)^{-1}S^{-1}u\right\|_{2\tau,2}^2$$

$\forall\ u\in L_e^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)$, $\tau\in Q$, a stąd

$$\gamma\left(RK(I+CK)^{-1}S^{-1}\right) \le 1 \tag{24}$$

Z oszacowań (22) i (24) norm operatorów wynika natychmiast silna stabilność układu (19-20) w $L_e^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)$, a stąd stabilność układu wyjściowego (10-11). ■

Wykorzystanie sektora stożkowego pozwala na dokładniejsze określenie brzegu obszaru stabilności, por. [213].

Dalsze rozważania poprzedzone zostaną udowodnieniem kilku lematów.

LEMAT 7.2. Przypuśćmy, że losowy operator całkowy K opisuje układ dynamiczny typu (7), a C,R,S są deterministycznymi operatorami całkowymi i spełnione są następujące założenia:

(i) $\inf_{m\in\mathbb{M}} \det\left(\hat{s}(m)\right) \neq 0$;

(ii) $\inf_{m\in\mathbb{M}} \det\left(I+\hat{c}(m)\hat{k}(m,\omega)\right) \neq 0 \mod(\mathbb{P})$;

(iii) $\sup_{\chi\in\hat{G}} \mathbb{P}\text{-ess sup}_{\omega\in\Omega} \max_{1\le r\le n} \mu_r(\chi,\omega) < \infty$,

gdzie $\mu_1(\chi,\omega),\mu_2(\chi,\omega),\ldots,\mu_n(\chi,\omega)$ są wartościami własnymi macierzy hermitowskiej o współczynnikach losowych $\hat{l}^*(\chi,\omega)\hat{l}(\chi,\omega)$, $\chi\in\hat{G},\omega\in\Omega$ oraz $\hat{l}(\chi,\omega)=\hat{k}(\chi,\omega)\left(I+\hat{c}(\chi)\hat{k}(\chi,\omega)\right)^{-1}$.

Wówczas hipoteza (H4) dla operatora $(-K)^I$ jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sup_{\chi\in\hat{G}} \mathbb{P}\text{-ess sup}_{\omega\in\Omega} \max_{1\le r\le n} \left(\sigma_r(\chi,\omega)\right)^{1/2} \le 1 \tag{25}$$

gdzie $\sigma_1(\chi,\omega),\sigma_2(\chi,\omega),\ldots,\sigma_n(\chi,\omega)$ są wartościami własnymi macierzy hermitowskiej o współczynnikach losowych $\hat{h}^*(\chi,\omega)\hat{h}(\chi,\omega)$, $\chi\in\hat{G},\omega\in\Omega$ oraz

$$\hat{h}(\chi,\omega)=\hat{r}(\chi)\hat{k}(\chi,\omega)\left(I+\hat{c}(\chi)\hat{k}(\chi,\omega)\right)^{-1}\hat{s}^{-1}(\chi).$$

Dowód. ($\Rightarrow$) Niech x=-Ky. Oznaczymy

$$\tilde{y} = S(y-Cx) \tag{26}$$

Załóżmy, że nierówność (25) jest spełniona. Stąd wynika bezpośrednio, że

$$\left\|\hat{r}(\chi)\hat{k}(\chi,\omega)\left(I+\hat{c}(\chi)\hat{k}(\chi,\omega)\right)^{-1}\hat{s}^{-1}(\chi)\hat{y}_\tau(\chi,\omega)\right\|_{2,2}^2 \le \left\|\hat{y}_\tau(\chi,\omega)\right\|_{2,2}^2, \quad \forall\ \tau\in Q \tag{27}$$

Dalsze kroki dowodu będą tylko sygnalizowane. Szczegółowe rozważania są powtórzeniem techniki z dowodu twierdzenia 5.7. Mamy zatem

$$\|Rx\|^2_{2\tau,2} = \|RK(I+CK)^{-1}S^{-1}\tilde{y}\|^2_{2\tau,2} = \|RK(I+CK)^{-1}S^{-1}\tilde{y}_\tau\|^2_{2\tau,2} \le$$

$$\le \int_Q \|RK(I+CK)^{-1}S^{-1}\tilde{y}_\tau(t,\cdot)\|_2^2 \mu(dt) \qquad (28)$$

Z nierówności (28) wynika

$$\|Rx\|^2_{2\tau,2} \le \int_{\hat{G}} \left\|\hat{r}(\chi)\hat{k}(\chi,\omega)\left(I+\hat{c}(\chi)\hat{k}(\chi,\omega)\right)^{-1}\hat{s}^{-1}(\chi)\hat{y}_\tau(\chi,\omega)\right\|_2^2 m(d\chi) \le$$

$$\le \int_{\hat{G}} \left\|\hat{y}_\tau(\chi,\omega)\right\|_2^2 m(d\chi) = \left\|y_\tau(\chi,\omega)\right\|^2_{2\tau,2} = \|S(y-Cx)\|^2_{2\tau,2}$$

na podstawie relacji (26-27). To kończy dowód tezy lematu wprost. □

(⇐) Przypuśćmy, że hipoteza (H4) jest spełniona. Wybierzmy ciąg $\{\hat{y}_k(\chi,\omega)\}$, $k=1,2,3,\ldots$ o normach w $L^2(\hat{G};\mathbb{R}^n)$ równych 1, mod(P) taki, że

$$1 = \left\|\hat{y}_k(\cdot,\omega)\right\|_2^2 \ge \left\|\hat{r}(\cdot)\hat{k}(\cdot,\omega)\left(I+\hat{c}(\cdot)\hat{k}(\cdot,\omega)\right)^{-1}\hat{s}^{-1}(\cdot)\hat{y}_k(\cdot,\omega)\right\|_2^2 \longrightarrow$$

$$\left|\hat{r}(\chi^\gamma)\hat{k}(\chi^\gamma,\omega)\left(I+\hat{c}(\chi^\gamma)\hat{k}(\chi^\gamma,\omega)\right)^{-1}\hat{s}^{-1}(\chi^\gamma)\right|^2, \qquad \mathrm{mod}(P)$$

dla pewnego $\chi^\gamma\in\hat{G}$, przy $n\longrightarrow\infty$, por. tw.5.1. To dowodzi nierówności (25). ■

LEMAT 7.3. Niech K oznacza operator całkowy typu (7), a C,R i S będą operatorami nielosowymi, stabilnymi w $L^{2,2}_e(Q;\mathbb{R}^n)$ i ponadto

$$\inf_{m\in\mathbb{M}} \left|\det\left(\hat{r}(m)\right)\right| \neq 0. \qquad (29)$$

Wówczas hipoteza (H3) dla operatora K jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists\ \varepsilon>0\ \forall\ \hat{x}\in L^{2,2}(\hat{G};\mathbb{R}^n)$, $\chi\in\hat{G}$ jest spełniona nierówność

$$\left|\hat{s}(\chi)\left(\hat{k}(\chi,\omega)-\hat{c}(\chi)\right)\hat{x}(\chi,\omega)\right|^2 \le \left|\hat{r}(\chi)\hat{x}(\chi,\omega)\right|^2 - \varepsilon\left|\hat{x}(\chi,\omega)\right|^2, \quad \mathrm{mod}(P) \qquad (30)$$

Dowód. (⇒) Załóżmy, że relacja (30) jest prawdziwa. Niech $\tilde{x} = Rx$. Dla $y=Kx$ mamy

$$\|S(y-Cx)\|^2_{2\tau,2} = \|S(K-C)x\|^2_{2\tau,2} = \|S(K-C)R^{-1}\tilde{x}\|^2_{2\tau,2} \qquad (31)$$

Korzystając z faktu, że operator R^{-1} jest przyczynowy i wykorzystując twierdzenie Parsevala [318,319] równość (31) można kontynuować

$$\|S(y-Cx)\|^2_{2\tau,2} = \|S(K-C)R^{-1}\tilde{x}_\tau\|^2_{2\tau,2} \le \int_Q \|(S(K-C)R^{-1}\tilde{x}_\tau)(t,\cdot)\|_2^2\mu(dt) =$$

$$= \int_{\hat{G}} \left\|\hat{s}(\chi)\left(\hat{k}(\chi,\cdot)-\hat{c}(\chi)\right)\hat{r}^{-1}(\chi)\hat{\tilde{x}}_\tau(\chi,\cdot)\right\|_2^2 m(d\chi) \le$$

$$\le \int_{\hat{G}} \left(\left\|\hat{\tilde{x}}_\tau(\chi,\cdot)\right\|_2^2 - \varepsilon\left\|\hat{r}^{-1}(\chi)\hat{\tilde{x}}_\tau(\chi,\cdot)\right\|_2^2 \right) m(d\chi) \qquad (32)$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z oszacowania (30). Ponownie wykorzystując twierdzenie Parsevala otrzymamy

$$\|S(y-Cx)\|^2_{2\tau,2} \le \int_Q \left(\left\|\tilde{x}_\tau(t,\cdot)\right\|_2^2 - \varepsilon\left\|(R^{-1}\tilde{x}_\tau)(t,\cdot)\right\|_2^2 \right)\mu(dt) =$$

$$= \int_{Q_\tau} \left\|\tilde{x}_\tau(t,\cdot)\right\|_2^2\mu(dt) - \varepsilon\int_{Q_\tau}\left\|(R^{-1}\tilde{x}_\tau)(t,\cdot)\right\|_2^2\mu(dt) =$$

$$= \|\tilde{x}_\tau\|^2_{2\tau,2} - \varepsilon\|R^{-1}\tilde{x}_\tau\|^2_{2\tau,2} = \|Rx\|^2_{2\tau,2} - \varepsilon\|x\|^2_{2\tau,2} \le$$

$$\le \|Rx\|^2_{2\tau,2} - \varepsilon'\left(\|x\|^2_{2\tau,2} + \|Kx\|^2_{2\tau,2}\right)$$

gdzie $\varepsilon'=\varepsilon/(1+\gamma^2(K))$ ponieważ K jest operatorem $L^{2,2}_e(Q;\mathbb{R}^n)$-stabilnym. □

(⇐) Rozumowanie dla warunku koniecznego prowadzimy w taki sam sposób, jak w dowodzie lematu 7.2. To kończy dowód. ■

PRZYKŁAD 7.1. Weźmy pod uwagę jednowymiarowy układ ciągły, $G=\mathbb{R}^1$, $Q=\mathbb{R}^1_+$. Niech dalej

$$\hat{c}(i\nu) := \hat{c}(i\nu)$$

$$\hat{r}(i\nu) := \hat{\tilde{r}}(i\nu)\hat{s}(i\nu)$$

gdzie $\nu\in\mathbb{R}^1$ oraz spełniony jest następujący warunek

$$\left|\hat{k}(i\nu,\omega) - \hat{c}(i\nu)\right|^2 \le \left|\hat{\tilde{r}}(i\nu)\right|^2 - \varepsilon \qquad (33)$$

dla pewnego $\varepsilon>0$, $\forall\ \nu\in\mathbb{R}^1$, mod(P). Nierówność (33) jest warunkiem wystarczającym, aby zachodziła relacja (30). Zatem operator losowy K generowany przez miarę losową k leży wewnątrz sektora stożkowego, tzn.

$$K \in \mathrm{Int}\left(\mathrm{St}\left(C,R,S;L^{2,2}_e(G;\mathbb{R}^n)\right)\right)$$

Interpretacja geometryczna warunku (33), dla jednej z możliwych realizacji procesu $\hat{k}(i\nu,\omega_0)$, $\omega_0\in\Omega$, $\nu\in\mathbb{R}^1$, przedstawiona została na rys.7.2. ■

LEMAT 7.4. Niech $f(x,\omega)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $\omega\in\Omega$, będzie nieliniową funkcją losową, która odwzorowuje $\mathbb{R}^n\times\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^m$ i spełnia warunki Caratheodory'ego. Generuje ona operator nieliniowy F

$$(Fx)(t,w) := f(x(t,\omega),\omega), \qquad t\in G,\ x\in L^{2,2}_e(Q;\mathbb{R}^n) \qquad (34)$$

Załóżmy, że C,R i S będą stałymi macierzami oraz że S^{-1} istnieje. Wówczas hipoteza (H3) dla operatora F jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\|S(f(x(t,\cdot),\cdot) - Cx(t,\cdot))\|_2^2 \le \|Rx(t,\cdot)\|_2^2 - \varepsilon\|x(t,\cdot)\|_2^2 \qquad (35)$$

$\forall\, x\in L_e^{2,2}(Q;\mathbb{R}^n)$, $t\in Q$.

Dowód. ($\Rightarrow$) Niech $y(t,\omega):=f(x(t,\omega),\omega)$ i nierówność (35) jest spełniona. Wynika stąd, że

$$\left(\|Sy(t,\cdot)\|_2 - \|SCx(t,\cdot)\|_2\right)^2 \le \|Rx(t,\cdot)\|_2^2 - \varepsilon\|x(t,\cdot)\|_2^2 \le \|Rx(t,\cdot)\|_2^2 \quad \forall\, t\in Q$$

$$\|Sy(t,\cdot)\|_2 - \|SCx(t,\cdot)\|_2 \le \|Rx(t,\cdot)\|_2 \quad \forall\, t\in Q \qquad (36)$$

Przypomnijmy, że $\sigma_{max}(S)$ ($\sigma_{min}(S)$) oznacza największą (najmniejszą) wartość własną macierzy hermitowskiej $S^{\bullet}S$. Z nierówności (36) wynika następujące oszacowanie

$$\sigma_{min}(S)\|y(t,\cdot)\|_2 - \sigma_{max}(S)\sigma_{max}(C)\|x(t,\cdot)\|_2 \le \sigma_{max}(R)\|x(t,\cdot)\|_2, \quad \forall\, t\in Q$$

a stąd w oczywisty sposób

$$\|y(t,\cdot)\|_2 \le \alpha\|x(t,\cdot)\|_2, \quad \forall\, t\in Q \qquad (37)$$

gdzie $\alpha = \dfrac{\sigma_{max}(R)}{\sigma_{min}(S)} + \dfrac{\sigma_{max}(S)\sigma_{max}(C)}{\sigma_{min}(S)}$. Na podstawie nierówności (37) mamy

$$\|S(Fx-Cx)\|_{2\tau,2}^2 = \int_{Q_\tau} \|S(f(x(t,\cdot),\cdot) - Cx(t,\cdot))\|_2^2\mu(dt) \le$$

$$\le \int_{Q_\tau} \left(\|Rx(t,\cdot)\|_2^2 - \varepsilon\|x(t,\cdot))\|_2^2\right)\mu(dt) \le$$

$$\le \int_{Q_\tau} \left(\|Rx(t,\cdot)\|_2^2 - \varepsilon'\left(\|x(t,\cdot))\|_2^2 + \|y(t,\cdot))\|_2^2\right)\right)\mu(dt) =$$

$$= \|Rx\|_{2\tau,2}^2 - \varepsilon'\left(\|x\|_{2\tau,2}^2 + \|y\|_{2\tau,2}^2\right)$$

dla $\varepsilon' \le \varepsilon/(1+\alpha^2)$. Ostatnia nierówność dowodzi tezy lematu. □

($\Leftarrow$) Załóżmy, że hipoteza (H3) jest spełniona. Niech $x(t,\omega)=x_0(\omega)$ mod(P) będzie zmienną losową ε pewną stałą dodatnią. Mamy dalej

$$\|S(f(x_0(\cdot),\cdot)-Cx_0(\cdot))\|_2^2 = \frac{1}{\mu(Q_t)}\|S(Fx_0-Cx_0)\|_{2\tau,2}^2 \le$$

$$\le \frac{1}{\mu(Q_t)}\left(\|Rx_0\|_{2\tau,2}^2 - \varepsilon\left(\|x_0\|_{2\tau,2}^2 + \|y\|_{2\tau,2}^2\right)\right) \le$$

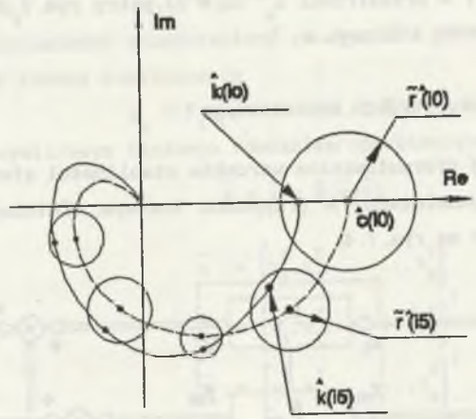
$$\le \frac{1}{\mu(Q_t)}\left(\|Rx_0\|_{2\tau,2}^2 - \varepsilon\|x_0\|_{2\tau,2}^2\right) = \|Rx_0(\cdot)\|_2^2 - \varepsilon\|x_0(\cdot)\|_2^2$$

co kończy dowód. ■

PRZYKŁAD 7.2. Należy zaznaczyć, że w sytuacji, gdy układ dynamiczny (10-11) jest jednowymiarowy, możemy przyjąć np., że $S=1, C=\lambda, R=r$, gdzie $\lambda, r\in\mathbb{R}^1$.

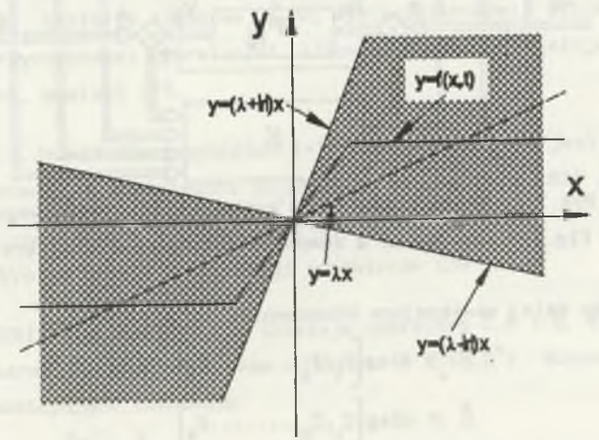
Nierówność (35) przyjmie w tym przypadku postać

$$\|y-\lambda x\|_{2\tau,2}^2 \le r^2\|x\|_{2\tau,2}^2 - \varepsilon\left(\|x\|_{2\tau,2}^2 + \|y\|_{2\tau,2}^2\right) \le r^2\|x\|_{2\tau,2}^2 \qquad (38)$$



Rys. 7.2. Interpretacja geometryczna warunku częstotliwościowego

Fig. 7.2. Geometrical interpretation of a frequency condition



Rys. 7.3. Interpretacja geometryczna sektora stożkowego

Fig. 7.3. Geometrical interpretation of conic sector

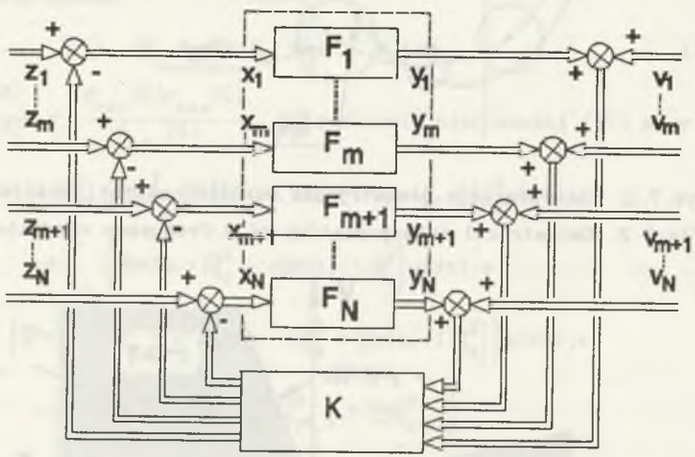
Otrzymana relacja jest podobna do relacji znanej z analizy stabilności układów ciągłych, por. [138, 214-216, 302]. Z nierówności (38) wynika między innymi, że

$$\|y\|_{2\tau,2} \leq (|r|+|\lambda|)\|x\|_{2\tau,2}$$

a więc układy opisane relacją (38) mają ograniczone średnie wzmocnienie (czyli współczynnik $\gamma(\cdot)$ w przestrzeni $L_e^{2,2}(Q;\mathbb{R}^n)$), patrz rys. 7.3. Jeżeli r=0, mamy do czynienia z układem liniowym. ■

7.1.3. Stabilność złożonego układu dynamicznego

Zajmiemy się poniżej sformułowaniem warunków stabilności złożonego, wielowymiarowego układu dynamicznego w przypadku losowym. Załóżmy, że układ dynamiczny ma budowę jak na rys. 7.4.



Rys. 7.4. Schemat złożonego systemu wielowymiarowego
Fig. 7.4. Scheme of a composed multidimensional system

Przyjmiemy dalej następujące oznaczenia:

$$\tilde{F} := \operatorname{diag}\left[F_1, F_2, \ldots\ldots, F_N\right] \tag{39}$$

$$\tilde{C} := \operatorname{diag}\left[C_1, C_2, \ldots\ldots, C_N\right] \tag{40}$$

$$\tilde{R} := \operatorname{diag}\left[R_1, R_2, \ldots\ldots, R_N\right] \tag{41}$$

$$\tilde{S} := \operatorname{diag}\left[S_1, S_2, \ldots\ldots, S_N\right] \tag{42}$$

gdzie $\tilde{C}, \tilde{R}, \tilde{S}$ są macierzami klatkowymi, natomiast relacja $\operatorname{diag}\left[F_1, F_2, \ldots\ldots, F_N\right]$ jest zdefiniowana w sposób następujący:

$$\operatorname{diag}\left[F_1, F_2, \ldots\ldots, F_N\right]\left[x_1^T, x_2^T, \ldots\ldots, x_N^T\right]^T = \left[(F_1x_1)^T, (F_2x_2)^T, \ldots\ldots, (F_Nx_N)^T\right]^T$$

$\left[z_1, z_2, \ldots\ldots, z_N\right]$ oznacza macierz klatkową, której kolumnami są wektory $z_1, z_2, \ldots, z_N$.

Układ dynamiczny przedstawiony na rys. 7.4 jest opisany systemem wielowymiarowych równań nieliniowych

$$y_i = F_i x_i, \qquad i=1,2,3,\ldots,N \tag{43}$$

oraz wielowymiarowym liniowym równaniem operatorowym (całkowym)

$$\tilde{x} = \tilde{z} - \tilde{K}(\tilde{y}+\tilde{v}) \tag{44}$$

gdzie

$$\tilde{x} := \left[x_1^T, x_2^T, \ldots\ldots, x_N^T\right]^T$$

$$\tilde{y} := \left[y_1^T, y_2^T, \ldots\ldots, y_N^T\right]^T$$

$$\tilde{v} := \left[v_1^T, v_2^T, \ldots\ldots, v_N^T\right]^T$$

$$\tilde{z} := \left[z_1^T, z_2^T, \ldots\ldots, z\right]^T$$

$$\tilde{K} := \left[K_{ij}\right], \quad i,j=1,2,\ldots,N$$

i elementy K_{ij} macierzy klatkowej $\tilde{K}$ są wielowymiarowymi, liniowymi, stacjonarnymi i przyczynowymi operatorami całkowymi Volterry-Stieltjesa o parametrach losowych, postaci (7).

LEMAT 7.5. Jeżeli dla wszystkich i=1,2,...,N spełniona jest hipoteza (H3) dla operatorów F_i i odpowiednio (C_i, R_i, S_i), to hipoteza (H3) jest prawdziwa również dla operatora $\tilde{F}$ i trójki $(\tilde{C}, \tilde{R}, \tilde{S})$.

Dowód. Wynika prosto z definicji operatorów (39-42). ■

TWIERDZENIE 7.6. Załóżmy, że istnieją operatory $\tilde{C}, \tilde{R}$ i $\tilde{S}$, które są liniowe, stacjonarne, przyczynowe oraz stabilne w $L_e^2(Q;\mathbb{R}^n)$. Niech ponadto będą spełnione następujące założenia:

(i) $\sup_{\chi\in G} \sigma_{\max}\left(\hat{\tilde{C}}(\chi)\right) < \infty$,

$\sup_{\chi\in G} \sigma_{\max}\left(\hat{\tilde{R}}(\chi)\right) < \infty$,

$\sup_{\chi\in G} \sigma_{\max}\left(\hat{\tilde{S}}(\chi)\right) < \infty$;

(ii) $\inf_{m\in\mathfrak{M}} \left|\det\left(\tilde{\hat{r}}(m)\right)\right| \neq 0$,

$\inf_{m\in\mathfrak{M}} \left|\det\left(\tilde{\hat{s}}(m)\right)\right| \neq 0$;

(iii) dla wszystkich i=1,2,...,N spełniona jest hipoteza (H3) dla operatorów F_i i odpowiednio (C_i,R_i,S_i);

(iv) losowe operatory $\tilde{F}$ i $\tilde{K}$ opisujące układ dynamiczny (43-44) są przyczynowe i układ jest $L_e^{2,2}(Q;\mathbb{R}^n)$-stabilny w przypadku, gdy $F_i=C_i$, dla i=1,2,....,N;

(v) $\sup_{\chi\in\hat{G}} \mathbb{P}\text{-ess sup}_{\omega\in\Omega} \sigma_{max}\left(\hat{h}(\chi,\omega)\right) \leq 1$,

gdzie $\hat{h}(\chi,\omega)=\tilde{\hat{r}}(\chi)\tilde{\hat{k}}(\chi,\omega)\left(I+\tilde{\hat{c}}(\chi)\tilde{\hat{k}}(\chi,\omega)\right)^{-1}\tilde{\hat{s}}^{-1}(\chi)$.

Wówczas układ dynamiczny (43-44) jest stabilny w $L_e^{2,2}(Q;\mathbb{R}^n)$.

Dowód. Na podstawie założenia (iv) z lematu 7.5 wynika w sposób oczywisty, że spełniona jest hipoteza (H3) dla operatora $\tilde{F}$ i trójki $(\tilde{C},\tilde{R},\tilde{S})$. Z warunku (v) i pozostałych założeń wynika, że spełnione są wymogi lematu 7.2, a zatem dla relacji $(-\tilde{K})^I$ spełniona jest hipoteza (H4).

Na podstawie udowodnionego wcześniej twierdzenia 7.1 wnioskujemy zatem, że teza twierdzenia została uzasadniona. ■

UWAGA 7.7. Można zauważyć, że jeżeli macierz $\tilde{\hat{K}}(m,\omega)$ jest odwracalna $\forall$ m∈$\mathfrak{M}$, mod(P), to warunek (v) można zapisać inaczej

(v') $\inf_{\chi\in\hat{G}} \mathbb{P}\text{-ess inf}_{\omega\in\Omega} \sigma_{min}\left(\hat{u}(\chi,\omega)\right) \geq 1$,

gdzie $\hat{u}(\chi,\omega)=\tilde{\hat{s}}(\chi)\left(\tilde{\hat{c}}(\chi)+\tilde{\hat{k}}^{-1}(\chi,\omega)\right)\tilde{\hat{r}}^{-1}(\chi)$. ■

7.2. STABILNOŚĆ UKŁADÓW, KTÓRYCH CZĘŚĆ NIELINIOWA LEŻY W SEKTORZE OPISANYM FORMĄ KWADRATOWĄ

W rozpatrywanym w części 7.1 złożonym układzie dynamicznym nieliniowa część układu opisana była relacją nierówności dla pewnej szczególnej formy kwadratowej.

Stabilność ciągłych układów dynamicznych w przypadku deterministycznym, których część nieliniowa opisana była relacją nierówności dla pewnych ogólnych form kwadratowych, intensywnie badał Jakubowicz [377-382], por. również [138, str. 190].

Zagadnienia związane z relacją między stabilnością wejście-wyjście i stabilnością w sensie Lapunowa, oparte na pojęciu tzw. (Q,S,R) - dyssypatywności badane były przez Hilla i Moylana [112,174].

Na przypadek ciągłych układów stochastycznych, o parametrach losowych, wyniki Jakubowicza zostały rozszerzone przez Liewita [384] oraz Skrzypczyka [227,229-232].

Badany będzie rozpatrywany wcześniej układ dynamiczny z dwoma wejściami opisany równaniami (10-11). Załóżmy, że prawdziwa jest hipoteza:

H5) Relacja opisująca układ nieliniowy F ma postać:

$$D_1(y,x) + \beta \geq 0$$

gdzie $\beta\geq 0$ i $D_1(\cdot)$ jest pewną formą kwadratową zmiennych y i x w wielowymiarowej (zależnej od wymiarów wektorów y i x) rozszerzonej przestrzeni $L_e^{2,2}(Q;\mathbb{R}^n)$. ■

Poniżej przedstawione zostanie dość ogólne twierdzenie dotyczące stabilności w sensie średnim, które jest rozszerzeniem znanych wyników [138,227, 377-382], na przypadek losowych układów dynamicznych określonych na lzga. G.

Załóżmy, że w dalszych rozważaniach τ jest ustalonym elementem półgrupy $Q\subset G$.

TWIERDZENIE 7.8. Jeżeli $\|K\|_{2\tau,2}<\infty$ i $D_1(y,x)+\beta\geq 0$, a ponadto forma kwadratowa $D_1(y,Ky)$ jest ujemnie określona, to układ dynamiczny (10-11) jest słabo stabilny w $L_e^{2,2}(Q;\mathbb{R}^n)$.

Dowód. Oznaczymy przez

$$D_2(w,v) := D_1(w+v) - D_1(w) - D_1(v)$$

formę dwuliniową i przez 2q normę formy D [120, str. 191]. Otrzymamy dalej

$$D_1(y,K(y+v)+z) =$$

$$= D_1(y,Ky)+D_1(0,Kv)+D_1(0,z)+D_2\left(\{0,Kv\},\{y,Ky\}\right)+D_2\left(\{0,z\},\{y,K(y+v)\}\right) \leq$$

$$\leq D_1(y,Ky) + D_1(0,Kv) + D_1(0,z) + 2q\|Kv\|_{2\tau,2}\|\{y,Ky\}\|_{2\tau,2} +$$

$$+ 2q\|z\|_{2\tau,2}\|\{y,K(y+v)\}\|_{2\tau,2} \qquad (45)$$

Ponieważ $D_1(y,x)+\beta\geq 0$, a forma kwadratowa $D_1(y,Ky)\leq -\delta\|y\|^2_{2\tau,2}$, $\delta>0$, więc nierówność (45) można zapisać w postaci

$$-\delta\|y\|^2_{2\tau,2} + q\|Kv\|^2_{2\tau,2} + q\|z\|^2_{2\tau,2} + 2q\|Kv\|^2_{2\tau,2}\left(\|y\|^2_{2\tau,2} + \|Ky\|^2_{2\tau,2}\right)^{1/2} +$$

$$+ 2q\|z\|^2_{2\tau,2}\left(\|y\|^2_{2\tau,2} + \|K(y+v)\|^2_{2\tau,2}\right)^{1/2} + \beta \geq 0 \qquad (46)$$

Po prostych oszacowaniach z nierówności (46) wynika, że

$$-\delta\|y\|^2_{2\tau,2} + 2q\left(1+\|K\|^2_{2\tau,2}\right)^{1/2}\left(\|K\|_{2\tau,2}\|v\|_{2\tau,2} + \|z\|_{2\tau,2}\right)\|y\|_{2\tau,2} +$$

$$+ q\left(\|z\|_{2\tau,2} + \|K\|_{2\tau,2}\|v\|_{2\tau,2}\right)^2 + \beta \geq 0$$

czyli

$$\|y\|_{2\tau,2} \leq \frac{2}{\delta}\left(2q\left(1+\|K\|^2_{2\tau,2}\right)^{1/2} + (\delta q)^{1/2}\right)\max\left(1, \|K\|_{2\tau,2}\right)\|\{z,v\}\|_{2\tau,2} + \left(\frac{\beta}{\delta}\right)$$

a stąd wynika, że układ (10-11) jest słabo stabilny w $L^{2,2}_e(Q;\mathbb{R}^n)$. ■

Z twierdzenia 7.8 wynika, jako interesujący wniosek, twierdzenie Skeletona dla układów deterministycznych [87].

PRZYKŁAD 7.3. Niech forma kwadratowa opisująca jednowymiarową relację nieliniową ma postać

$$D_1(y,x) := \int_{Q_t} y(t)x(t)\mu(dt) - \alpha\int_{Q_t} |y(t)|^2\mu(dt) \geq 0\,, \qquad t\in Q \qquad (47)$$

gdzie α jest ustaloną liczbą rzeczywistą. ■

Możemy łatwo udowodnić następujący wynik.

WNIOSEK 7.9. Weźmy pod uwagę jednowymiarowy układ dynamiczny (10-11). Jeżeli funkcja nieliniowa (10) spełnia warunek (47) i ponadto:

(i) $\sup_{\chi\in\hat{G}} \mathbb{P}\text{-ess}\sup_{\omega\in\Omega} \left|\hat{k}(\chi,\omega)\right| < \infty$;

(ii) $\sup_{\chi\in\hat{G}} \mathbb{P}\text{-ess}\sup_{\omega\in\Omega} \operatorname{Re}\left(\hat{k}(\chi,\omega)\right) < \alpha$;

to rozpatrywany układ dynamiczny jest silnie stabilny w $L^{2,2}_e(Q;\mathbb{R}^n)$. ■

Jak łatwo zauważyć, w przypadku układu ciągłego i deterministycznego, otrzymujemy znany wynik [138, str. 142].

PRZYKŁAD 7.4. Niech forma kwadratowa opisująca relację jednowymiarową ma tym razem postać:

$$D_1(y,x) := \beta\int_{Q_t} |y(t)|^2\mu(dt) - \int_{Q_t} y(t)x(t)\mu(dt) \geq 0, \qquad t\in Q \qquad (48)$$

gdzie β jest ustaloną liczbą rzeczywistą. ■

WNIOSEK 7.10. Jeżeli funkcja nieliniowa (10) spełnia warunek (48), jest spełniony warunek (i) wniosku 7.9 i ponadto

(i) $\inf_{\chi\in\hat{G}} \mathbb{P}\text{-ess}\inf_{\omega\in\Omega} \operatorname{Re}\left(\hat{k}(\chi,\omega)\right) > \beta$;

to układ dynamiczny (10-11) jest silnie stabilny w $L^{2,2}_e(Q;\mathbb{R}^n)$. ■

Powyższy wynik jest również znany w teorii układów ciągłych [138].

7.3. WŁASNOŚCI ASYMPTOTYCZNE

Rozważania tej części pracy oparte są na następującym lemacie.

LEMAT 7.11. Jeżeli q jest liczbą rzeczywistą, $1<q<\infty$ i $q'=q/(q-1)$ oraz $k\in L^q(G;\mathbb{R}^1)$ i $x\in L^{q'}(G;\mathbb{R}^1)$, to całka

$$v(t) := \int_G k(t-\tau)x(\tau)\mu(d\tau)$$

(i) istnieje $\forall\, t\in G$ i określa funkcję z przestrzeni $C_0(G;\mathbb{R}^1)$;

(ii) jeżeli $k\in L^1(G;\mathbb{R}^1)$ i $x\in L^\infty(G;\mathbb{R}^1)$, to całka istnieje $\forall\, t\in G$ i określa funkcję jednostajnie ciągłą z przestrzeni $C_u(G;\mathbb{R}^1)\subset C(G;\mathbb{R}^1)$;

(iii) jeżeli spełnione są warunki punktu (ii) i ponadto $x\in L^2(G;\mathbb{R}^1)$, to splot v jest funkcją z $C_0(G;\mathbb{R}^1)$.

Dowód. Ad. (i-ii) patrz [372, str. 376].

Ad. (iii). Dowód przeprowadzony zostanie metodą nie wprost. Funkcja v należy do $L^2(G;\mathbb{R}^1)\cap C_u(G;\mathbb{R}^1)$. Wobec tego $\forall\,\varepsilon>0$ istnieje otoczenie U punktu e takie, że $|v(t)-v(s)|\leq\varepsilon$ $\forall\, t,s: t-s\in U$. Jeżeli $v\notin C_0(G;\mathbb{R}^1)$, to wówczas $\exists\,\varepsilon_0>0$, takie, że dla dowolnego zbioru zwartego $F\subset G$ istnieje $t_0\in F'$, dla którego $|v(t_0)|\geq\varepsilon_0$.

Ponieważ $v^2(\cdot)$ jest nieujemną funkcją mierzalną taką, że

$$\int_G v^2(t)\mu(dt) < \infty$$

więc istnieje funkcja y określona na G taka, że

$$0 \leq y(t) \leq v^2(t), \qquad \forall\, t\in G$$

oraz

$$\int_G y(t)\mu(dt) = \int_G v^2(t)\mu(dt)$$

Ponadto dla dowolnej liczby rzeczywistej $\alpha\geq 0$ zachodzi, że zbiór $\{t\in G: y(t)>\alpha\}$ jest σ-zwarty. Niech $A = \{t\in G: y(t)>0\}$. Prawdziwy jest ciąg nierówności

$$\int_G v^2(t)\mu(dt) \geq \int_A v^2(t)\mu(dt) \geq \int_A y(t)\mu(dt) = \int_G y(t)\mu(dt) = \int_G v^2(t)\mu(dt)$$

a na tej podstawie

$$\int_A v^2(t)\mu(dt) = \int_G v^2(t)\mu(dt)$$

Ponieważ A jest zbiorem σ-zwartym, istnieją zwarte podzbiory $G_1, G_2, G_3, \ldots$ grupy G takie, że $G_n \subset G_{n+1}$ dla wszystkich naturalnych n, spełniające warunek

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = A$$

Taki wybór zbiorów G_n pociąga za sobą, że

$$\int_G v^2(t)\mu(dt) = \lim_{n\to\infty} \int_{G_n} v^2(t)\mu(dt)$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{G\setminus G_n} v^2(t)\mu(dt) = 0 \qquad (49)$$

Istnieje taki punkt $t_0 \in \bigcup_{k=n+1}^{\infty} G_k$, że $t_0+U \subset \bigcup_{k=n+1}^{\infty} G_k$. Można to łatwo wykazać. Dalej mamy

$$\int_{G\setminus G_n} v^2(t)\mu(dt) \geq \int_{t_0+U} v^2(t)\mu(dt)$$

Niech $\varepsilon_0 = 2\varepsilon$. Z jednostajnej ciągłości v wynika, że $\forall\, t: t-t_0 \in U$

$$|v(t)| \geq |v(t_0)| - |v(t) - v(t_0)| \geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$$

a stąd wynika, że

$$\int_{t_0+U} v^2(t)\mu(dt) \geq \varepsilon^2\mu(U) > 0$$

co dowodzi sprzeczności z (49). To kończy dowód. ■

Opierając się na lemacie 7.11 sformułujemy poniżej lemat dla funkcji o wartościach wektorowych, który wykorzystany zostanie w analizie własności asymptotycznych nieliniowych układów stochastycznych.

LEMAT 7.12. Niech q i q' będą takie same jak w lemacie 7.11. Jeżeli ponadto $k \in L^q(G; L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}; \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)))$ i $x \in L^{q'}(G; L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R}^m))$, to całka

$$v(t,\omega) = \int_G k(t-\tau,\omega)x(\tau,\omega)\mu(d\tau)$$

(i) istnieje $\forall\, t \in G$, mod(P) i jest funkcją losową z $C_0(G; L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R}^n))$;

(ii) jeżeli $k \in L^1(G; L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}; \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)))$ i $x \in L^\infty(G; L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R}^m))$, to całka istnieje mod(P), $\forall\, t \in G$ i określa funkcję jednostajnie ciągłą w sensie średniokwadratowym, tj. $v \in C_u(G; L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R}^n))$;

(iii) jeżeli spełnione są warunki punktu (ii) oraz $x \in L^2(G; L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R}^m))$, to splot jest funkcją losową klasy $C_0(G; L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R}^n))$.

Dowód. Wynika z rozumowania analogicznego do przeprowadzonego w dowodzie lematu 7.11 i teorii całki w przestrzeniach wektorowych [64, 315]. ■

Możemy teraz sformułować wyniki dotyczące własności asymptotycznych rozwiązań układu równań (10-11) opisującego nieliniowy układ dynamiczny o parametrach losowych.

TWIERDZENIE 7.13. Przypuśćmy, że

(i) wszystkie rozwiązania układu równań (10-11) spełniają warunek

$$Fx \in L^{2,2}(Q; \mathbb{R}^m), \quad \forall\, x \in L^{2,2}(Q; \mathbb{R}^m);$$

(ii) $k \in L^2(Q; L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}; \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)))$;

(iii) $z, v \in L^{2,2}(Q; \mathbb{R}^m)$ oraz $z \in \mathcal{B}_0^2(Q; \mathbb{R}^m)$.

Wówczas sygnał x będący rozwiązaniem układu równań (10-11) również należy do przestrzeni $L^{2,2}(Q; \mathbb{R}^m) \cap \mathcal{B}_0^2(Q; \mathbb{R}^m)$, tzn. posiada skończoną energię średnią, jest ograniczony w sensie średnim i dąży do zera w sensie średniokwadratowym przy "$t \longrightarrow \infty$". Jeżeli ponadto $z \in C_0(G; L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R}^m))$, to również sygnał x jest elementem przestrzeni $C_0(G; L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R}^m))$.

Dowód. Wynika wprost z własności (i) lematu 7.12. ■

TWIERDZENIE 7.14. Przypuśćmy, że

(i) $\forall$ rozwiązania x układu równań (10-11) spełniony jest warunek, że

$$\|(Fx)(t,\cdot)\|_2 \in L^2(Q; \mathbb{R}^m) \cap \mathcal{B}(Q; \mathbb{R}^m), \qquad \forall\, x \in L^{2,2}(Q; \mathbb{R}^m),$$

tzn. nieliniowość jest funkcją ograniczoną w sensie średnim $\forall\, t \in Q$;

(ii) $k \in L^1(Q; L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}; \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)))$;

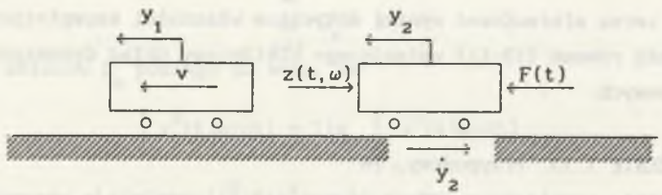
(iii) $v, z \in L^{2,2}(Q; \mathbb{R}^m)$ oraz $z \in \mathcal{B}^2(Q; \mathbb{R}^m)$.

Wówczas każdy sygnał x będący rozwiązaniem układu równań (10-11) ma skończoną energię średnią i jest ograniczony w sensie średnim, tzn. należy do przestrzeni $L^{2,2}(Q; \mathbb{R}^m) \cap \mathcal{B}^2(Q; \mathbb{R}^m)$. Jeżeli ponadto sygnały $v, z \in \mathcal{B}_0^2(Q; \mathbb{R}^m)$, to również $x \in \mathcal{B}_0^2(Q; \mathbb{R}^m)$.

Dowód. Wynika wprost z własności (iii) lematu 7.12. ■

7.4. PRZYKŁAD

Weźmy pod uwagę dwa pojazdy mechaniczne poruszające się jeden za drugim, wzdłuż toru prostoliniowego, jak przedstawiono na rys. 7.5.



Rys. 7.5. Modelowanie ruchu dwóch pojazdów
Fig. 7.5. Modelling of two cars motion

Równania opisujące ruch pojazdów są następujące

$$\dot{y}_1 = v$$

$$m\ddot{y}_2 = -\dot{y}_2 + F(t) - z(t,\omega)$$

gdzie m oznacza masę drugiego pojazdu, F - siłę napędową działającą na drugi pojazd, którą uważać będziemy za sterowanie, czyli wejściowy sygnał sterujący, v jest prędkością pierwszego wehikułu, a zarazem wymuszeniem kinematycznym, z jest zakłóceniem stochastycznym.

Przyjmując dalej, że m=1, $x_1=\dot{y}_2-v$, $x_2=y_1-y_2$, otrzymamy

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1, & 0\\-1, & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}F(t) + \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}z(t,\omega), \qquad t\geq 0, \omega\in\Omega \tag{50}$$

Rozważmy projekt nieliniowego układu sterującego ruchem drugiego pojazdu w systemie ze sprzężeniem zwrotnym, postaci

$$F(t)=f(x_1,x_2) := -f_1(x_1)-f_2(x_2) \tag{51}$$

gdzie f_1 i f_2 oznaczają pewne funkcje nieliniowe. Będziemy zakładać dalej, że funkcje te spełniają "nierówności sektorowe" postaci

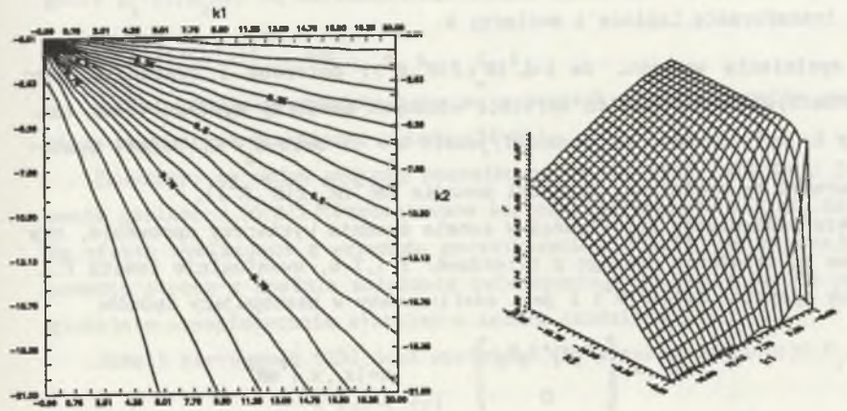
$$m_i \leq \frac{f_i(y)}{y} \leq M_i, \qquad i=1,2 \qquad \forall\ y\in\mathbb{R}^1 \tag{52}$$

gdzie m_i, M_i są pewnymi stałymi. Niech $k_i=(M_i+m_i)/2$, $f_i(y)=k_i y - g_i(y)$, i=1,2. Wprowadzone do rozważań funkcje g_i mają także własności sektorowe, podobne

do (52), ze zmienionymi stałymi, tzn. $\tilde{m}_i = -(M_i-m_i)/2$, $\tilde{M}_i=(M_i-m_i)/2$, lub w postaci, która pojawiła się w nierówności (38), w przykładzie 8.2

$$|g_i(y) - \lambda_i y| \leq r|y|, \qquad \forall\ y\in\mathbb{R}^1$$

gdzie $\lambda_i=0$, $r=\max_i \frac{1}{2}\left(M_i-m_i\right)$, dla i=1,2.



Rys. 7.6. Dopuszczalne wartości brzegowe parametrów systemu stabilnego
Fig. 7.6. Admissible boundary values of parameters of stable system

Równania zamkniętego układu sterowania w zmienionych oznaczeniach będą miały postać

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1-k_1, & -k_2\\-1 & , \quad 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}g_1(x_1)+g_2(x_2)\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}z(t,\omega) \tag{53}$$

Oznaczmy dalej

$$x := [x_1, x_2]^T, \quad A := \begin{bmatrix}-1-k_1, -k_2\\-1 \quad , \ 0\end{bmatrix}, \quad g(x) := \begin{bmatrix}g_1(x_1)+g_2(x_2)\\0\end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$$

W nowych oznaczeniach równanie (53) przyjmuje standardową postać, por. część 3.3.2.

$$\dot{x}(t,\omega) = Ax(t,\omega) + g(x(t,\omega)) + bz(t,\omega), \qquad t\geq 0, \omega\in\Omega \tag{54}$$

Równanie (53=54) można w prosty sposób przekształcić w równanie całkowe typu Volterry 2 rodzaju

$$x(t,\omega) = \tilde{z}(t,\omega) + \int_0^t k(t-\tau)g(x(\tau,\omega))d\tau \tag{55}$$

gdzie, zgodnie z wcześniej przyjętą notacją $k(t):=\exp(At)$,

$$\tilde{z}(t,\omega) := k(t)x(0,\omega) + \int_0^t k(t-\tau)bz(\tau,\omega)d\tau, \qquad t\geq 0, \omega\in\Omega$$

natomiast

$$\hat{k}(s) = \begin{bmatrix} s/\delta & -k_2/\delta \\ -1/\delta & (1+k_1+s)/\delta \end{bmatrix}, \qquad \delta=(1+k_1+s)s-k_2$$

oznacza transformatę Laplace'a macierzy k.

Do spełnienia warunku, że $k\in L^1(\mathbb{R}^1_+;\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2))$ potrzeba i wystarcza, aby części rzeczywiste wszystkich wartości własnych macierzy systemu (54), tzn. macierzy A, były ujemne, co zachodzi, jeżeli $k_1 > -1$ oraz $k_2 < 0$. Jeżeli wymienione warunki są spełnione, zachodzi ponadto $k\in L^2(\mathbb{R}^1_+;\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2))$.

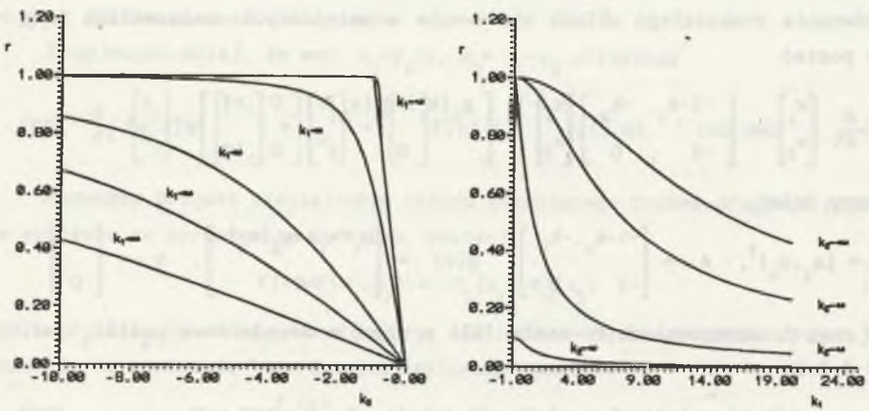
W celu zapewnienia stabilności w sensie średnim wystarczy sprawdzić, czy spełnione są założenia jednego z twierdzeń: 7.1, 7.6, ewentualnie lematu 7.2.

Niech operator $C\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ i jest zdefiniowany w następujący sposób:

$$Cx := \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad x=[x_1,x_2]^T\in\mathbb{R}^2$$

Z nierówności (52) wynika, że

$$\|g(x) - Cx\|^2 = |g_1(x_1)+g_2(x_2)-\lambda_1 x_1-\lambda_2 x_2|^2 \leq r^2\|x\|^2$$



Rys. 7.7. Granice tolerancji parametru sektora r układu stabilnego

Fig. 7.7. Conic sector bounds of parameter r of a stable system

W rozpatrywanym przykładzie warunki częstotliwościowe mogą być wyrażone np. w postaci następującej:

$$\inf_{\mathrm{Re}(s)\geq 0} \det\left(I - C\hat{k}(s)\right) \neq 0;$$

$$\sup_{\mathrm{Re}(s)\geq 0} \max_{1\leq r\leq 2}\left(\mu_r(s)\right) < \infty,$$

gdzie $\mu_1(s), \mu_2(s)$ są wartościami własnymi macierzy hermitowskiej $\hat{l}^*(s)\hat{l}(s)$, $\hat{l}(s)=\hat{k}(s)\left(I+C\hat{k}(s)\right)^{-1}$, $s\in\mathbb{C}^1$.

Wyniki obliczeń przedstawione są w postaci granic obszarów parametrów, które zapewniają stabilność układu (54=55).

Zauważmy, że wpływ warunku początkowego $x_2(0)$ jest taki sam, jak zakłócenie postaci $x_2(0)\delta(t)$. Prezentowane wartości parametrów r, k_1, k_2 zapewniają, że efekty wynikające z warunków początkowych w chwili t=0 zanikają. Jeżeli ponadto proces z spełnia założenia twierdzenia 7.13 lub 7.14, to układ jest globalnie asymptotycznie stabilny w sensie rozdziału 7.3.

Jeżeli nierówność (53) jest spełniona dla przyrostów funkcji f_i, tzn.

$$m_i \leq \frac{f_i(x)-f_i(y)}{x-y} \leq M_i, \qquad i=1,2 \qquad \forall\, x,y\in\mathbb{R}^1$$

przy tych samych oznaczniach, to można pokazać, że wpływ warunków początkowych zanika przy $t\longrightarrow\infty$. Jeżeli natomiast proces z jest sumą

$$z(t,\omega) = z_1(t,\omega) + z_2(t,\omega)$$

procesu stacjonarnego w silnym sensie z_1 i procesu, który spełnia założenia twierdzenia 7.13 lub 7.14, to "odpowiedź" systemu, czyli proces $\left[x_1^T, x_2^T\right]^T$, jest asymptotycznie stacjonarny [244].

Rozdział VIII. DRGANIA OKRESOWE I PRAWIE OKRESOWE

Rozdział niniejszy dotyczy w całości problematyki drgań okresowych i prawie okresowych w złożonych nieliniowych układach dynamicznych o parametrach losowych. Rozpatrywane są dwa zasadnicze rodzaje układów, układy autonomiczne (część 8.4) i nieautonomiczne (część 8.3). Układy nieautonomiczne to takie, które pobudzane są zewnętrznym sygnałem okresowym lub prawie okresowym i których parametry zmieniają się w czasie. W przypadku okresowym poszukuje się wtedy rozwiązań okresowych o takim samym okresie, jaki posiadają zewnętrzne pobudzenie i parametry układu.

Zakłada się stale, że dyskutowane układy nieautonomiczne opisywane będą wielowymiarowym, nieliniowym, losowym równaniem całkowym typu Volterry - Stieltjesa 2. rodzaju:

$$x(t,\omega) = z(t,\omega) + \int_Q k(d\tau,\omega)f(x(t-\tau,\omega)), \qquad t\in Q, \omega\in\Omega$$

Odmienne zagadnienia związane są z układami autonomicznymi. Ich parametry nie zmieniają się w czasie, a zewnętrzne pobudzenie może być najwyżej sygnałem stałym. W układach takich mogą wystąpić drgania okresowe, których okresu nie można z góry przewidzieć. W związku z tym założono, że rozważane układy autonomiczne opisywane będą wielowymiarowym, nieliniowym, losowym równaniem całkowym typu Volterry-Stieltjesa 1. rodzaju:

$$y(t,\omega) = \int_Q h(ds,\omega)g(y(t-s,\omega),\omega), \qquad t\in Q, \omega\in\Omega$$

W obu przypadkach zakłada się, że Q jest podgrupą pewnej częściowo uporządkowanej lzga. G, QcG, natomiast h jest miarą o wahaniu ograniczonym.

Poszukiwanie drgań okresowych i prawie okresowych poprzedzone zostało dyskusją nad "stanem ustalonym" sygnału w układzie dynamicznym (część okresowa lub prawie okresowa sygnału) oraz nad jego "stanem nieustalonym" (część sygnału o skończonej energii). Dalsza analiza dotyczy tylko zjawisk ustalonych z pominięciem sygnałów przejściowych, zanikających "przy $t \longrightarrow \infty$", tzn. należących np. do przestrzeni $C_0(Q;L^2(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$. Odpowiednie równania stanu ustalonego wyprowadzone zostały w częściach 8.1 i 8.2 niniejszego rozdziału.

Równania drgań okresowych i prawie okresowych przybierają postać nieskończonego układu nieliniowych równań losowych. Rozwiązanie takiego nieskończonego układu równań nie jest praktycznie możliwe nawet w przypadku deterministycznym. Analiza prowadzona jest za pomocą metod przybliżonych, polegających na obcięciu układu nieskończonego do aproksymującego go układu, składającego się ze skończonej liczby równań. Metody postępowania w przypadku deterministycznym były wszechstronnie badane, por. np. [138].

Zasadniczo, analiza oparta została na koncepcjach znanych w metodach deterministycznych: filtru idealnego i funkcji opisującej i w tym sensie stanowi ich uogólnienie na zagadnienia stochastyczne, por. [52,138,168-169,303].

Rozważania oparte zostały na twierdzeniach Banacha i Leraya-Schaudera o punkcie stałym operatora. Wykorzystuje się pojęcie indeksu Leraya-Schaudera dla przypadku homotopii operatorów zwartych oraz dla operatorów zwartych z zaburzeniem w postaci małego operatora zwężającego. Pojęcia te służą do rozwiązania i analizy układów analizowanych równań losowych w odpowiednio dobranych przestrzeniach Banacha procesów stochastycznych.

Sformułowanie zagadnienia i odpowiadających im wyników jest na tyle ogólne, że pozwala na rozpatrywanie zarówno ciągłych, jak również dyskretnych układów stochastycznych.

Przedstawione wyniki są użyteczne dla bardzo wielu zastosowań. W celu zademonstrowania przydatności jednego z wyników teoretycznych przedyskutowano w części 8.3.4 przykład specyficznego, dyskretnego układu dynamicznego z parametrycznym zakłóceniem stochastycznym.

8.1. RÓWNANIA DRGAŃ OKRESOWYCH I PRAWIE OKRESOWYCH

Weźmy pod uwagę stochastyczny układ dynamiczny (ze sprzężeniem zwrotnym) opisany n-wymiarowym losowym równaniem całkowym typu Volterry-Stieltjesa 2. rodzaju, określonym na lzga. G

$$x(t,\omega) = z(t,\omega) + \int_{Q_t} h(ds,\omega)f(x(t-s,\omega),\omega), \qquad t\in Q, \omega\in\Omega \tag{1}$$

gdzie $\mathrm{supp}(h)\subset Q$, $h\in\mathcal{V}(G;L^\infty(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$, oznaczymy przez $\mathcal{V}ar_G^\infty(h)$ bezwzględne wahanie funkcji h. Załóżmy ponadto, że:

P1) operacja F określona przez nieliniowość f spełnia w przestrzeni $L^{2,2}(Q;\mathbb{R}^n)$ warunek Lipschitza ze stałą α i $f(0,\cdot)=0$ mod($\mathbb{P}$). Niech dalej F odwzorowuje przestrzeń $B^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)$ w siebie i spełnia w $B^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)$ warunek Lipschitza z tą samą stałą α. ■

Dla uproszczenia rozważań przyjmiemy, że spełnione są dodatkowo następujące hipotezy:

P2) $\alpha\sup_{\chi\in\hat{G}} \operatorname{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} \max_r\left(\lambda_r(\chi,\omega)\right)^{1/2}<1$,

gdzie $\lambda_1(\chi,\omega),\lambda_2(\chi,\omega),\ldots,\lambda_n(\chi,\omega)$ są wartościami własnymi macierzy hermitowskiej $\hat{h}^*(\chi,\omega)\hat{h}(\chi,\omega)$. ■

P3) $\forall\ x_0\in B^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)\ \exists\ N>0$ takie, że $\sup_{t\in Q}\|f(x_0(t,\omega),\omega)\|_2\le N$. ■

P4) $v(t):=\mathcal{V}ar^{\infty}_{Q\setminus Q_t}(h)\in L^2(Q;\mathbb{R}^1)$. ■

Hipotezy (P1-P3) gwarantują, że dla każdego procesu stochastycznego $z\in L^{2,2}(Q;\mathbb{R}^n)$ (ewentualnie $z\in B^{2,2}(Q;\mathbb{R}^n)$) równanie (1) ma w $L^{2,2}(Q;\mathbb{R}^n)$ (lub $B^{2,2}(Q;\mathbb{R}^n)$) jednoznaczne rozwiązanie, które zależy w sposób ciągły od wymuszenia z. Jeżeli z jest procesem ograniczonym w sensie średnim, taką samą własność posiada również rozwiązanie x. Wynika to z prostej relacji

$$\|x(t,\cdot)\|_2 \le N\,\mathcal{V}ar^{\infty}_{Q}(h) + \|z(t,\cdot)\|_2, \qquad \forall\ t\in Q \tag{2}$$

Przypuśćmy, że na wejściu układu dynamicznego pojawił się sygnał $z(t,\omega)$, $t\in Q,\omega\in\Omega$, $\operatorname{supp}(z)\subset Q$, który jest sumą

$$z(t,\omega) = z_0(t,\omega) + \theta_z(t,\omega), \qquad t\in Q,\omega\in\Omega \tag{3}$$

sspo. z_0 oraz sygnału $\theta_z\in L^{2,2}(Q;\mathbb{R}^n)$. Można oczekiwać, że sygnał, który jest rozwiązaniem x równania (1), będzie miał podobną postać

$$x(t,\omega) = x_0(t,\omega) + \theta_x(t,\omega), \qquad t\in Q,\omega\in\Omega \tag{4}$$

gdzie x_0 jest funkcją prawie okresową, a $\theta_x\in L^{2,2}(Q;\mathbb{R}^n)$.

Podstawmy równanie (4) do wyrażenia (1), otrzymamy

$$x_0(t,\omega)+\theta_x(t,\omega) = z_0(t,\omega)+\theta_z(t,\omega)+\int_{Q_t} h(ds,\omega)f\left(x_0(t-s,\omega)+\theta_x(t-s,\omega),\omega\right) \tag{5}$$

Równanie (5) można przepisać w postaci równoważnego układu dwóch równań

$$x_0(t,\omega) = z_0(t,\omega) + \int_{Q} h(ds,\omega)f\left(x_0(t-s,\omega),\omega\right) \tag{6}$$

$$\theta_x(t,\omega) = \theta_z(t,\omega) + \int_{Q_t} h(ds,\omega)\left(f\left(x_0(t-s,\omega)+\theta_x(t-s,\omega),\omega\right)-f\left(x_0(t-s,\omega),\omega\right)\right) - \int_{Q\setminus Q_t} h(ds,\omega)f\left(x_0(t-s,\omega),\omega\right) \tag{7}$$

Na mocy poczynionych założeń, równanie (6) posiada w przestrzeni sspo. $B^{2,2}(Q;\mathbb{R}^n)$ dokładnie jedno rozwiązanie dla dowolnego sygnału $z_0\in B^{2,2}(Q;\mathbb{R}^n)$. Rozwiązanie to nie zależy od zakłócenia θ_z i wobec założenia (P3) jest

ograniczone w sensie średnim. Rozwiązanie to może być interpretowane jako "stan ustalony" układu dynamicznego (1).

Zastanówmy się zatem nad równaniem (7). Na podstawie hipotez (P3) i (P4) oraz nierówności

$$\left\|\int_{Q\setminus Q_t} h(ds,\omega)f\left(x_0(t-s,\omega),\omega\right)\right\|_2 \le N\,\mathcal{V}ar^{\infty}_{Q\setminus Q_t}(h) \tag{8}$$

możemy stwierdzić, że sygnał $\theta_z(t,\omega)-\int_{Q\setminus Q_t} h(ds,\omega)f\left(x_0(t-s,\omega),\omega\right)\in L^{2,2}(Q;\mathbb{R}^n)$, a operacja Ψ określona na przestrzeni $L^{2,2}(Q;\mathbb{R}^n)$ relacją

$$(\Psi\theta)(t,\omega) := \int_{Q_t} h(ds,\omega)\left(f\left(x_0(t-s,\omega)+\theta(t-s,\omega),\omega\right)-f\left(x_0(t-s,\omega),\omega\right)\right) \tag{9}$$

posiada oszacowanie

$$\|\Psi\theta\|_{2,2} \le \sup_{\chi\in\hat{G}} \mathbb{P}\text{-ess}\sup_{\omega\in\Omega} \max_r\left(\lambda_r(\chi,\omega)\right)^{1/2}\|f(x_0+\theta,\cdot)-f(x_0,\cdot)\|_{2,2} \le \alpha\sup_{\chi\in\hat{G}} \mathbb{P}\text{-ess}\sup_{\omega\in\Omega} \max_r\left(\lambda_r(\chi,\omega)\right)^{1/2}\|\theta\|_{2,2} \tag{10}$$

Wynika stąd, że wszystkie rozwiązania równania (7) należą do $L^{2,2}(Q;\mathbb{R}^n)$. Warunki, kiedy $\theta_x\in C_0(Q;L^2(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n)$, tzn. $\theta_x\longrightarrow 0$ przy "$t\longrightarrow\infty$", wynikają z rozważań części 7.3. Sygnał θ_x można interpretować np. jako zanikające zaburzenie spowodowane istnieniem w układzie niezerowych warunków początkowych. Dla przypadku ciągłego, tzn. $G=\mathbb{R}^1, Q=\mathbb{R}^1_+$, powyższe wyniki można porównać z interesującą analizą zawartą w pracach Corduneanu [52], Sandberga [214 - 215], Kudrewicza[138] i Skrzypczyka [237-238,245-246].

Jeżeli operacja F przekształca funkcje okresowe w okresowe, to te same rozważania, dotyczące istnienia i jednoznaczności rozwiązań, obowiązują dla okresowych rozwiązań (należących do przestrzeni $L^{2,2}_H(Q;\mathbb{R}^n)$) równania (5), dla $G=\mathbb{R}^1, Q=\mathbb{R}^1_+$, por. [144,214-215].

Dalszą analizę ograniczymy do badania własności drgań okresowych i prawie okresowych w układzie dynamicznym opisanym następującym równaniem całkowym Volterry-Stieltjesa

$$x(t,\omega) = z(t,\omega) + \int_{Q} h(ds,\omega)f(x(t-s,\omega),\omega), \qquad t\in G,\omega\in\Omega \tag{11}$$

przy tych samych wstępnych założeniach jak dla równania (1).

8.2. ROZKŁAD ROZWIĄZANIA W SZEREG FOURIERA

Niech sygnał wejściowy z będzie losowym wielomianem trygonometrycznym

$$z(t,\omega) = \sum_k z_k(\omega)\chi_k(t) , \qquad t\in G, \omega\in\Omega,\ z_k\in L^2(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{C}^n),\ \chi_k\in\hat{G} \tag{12}$$

gdzie $\chi_k\in A(\hat{G},H)$, $\forall k$ jest daną funkcją H-okresową. $A(\hat{G},H)$ jest anihilatorem zbioru H w G. Można udowodnić, że z jest rzeczywiście funkcją H-okresową i odwrotnie: każdy wielomian trygonometryczny H-okresowy ma postać (12) patrz [207,372-373]. Załóżmy dalej, że:

Q1) funkcja nieliniowa f przekształca zbiór funkcji H-okresowych w siebie i $f(0,\omega)=0 \bmod(\mathbb{P})$. ■

Poszukiwać będziemy H-okresowego rozwiązania równania (11). Przedstawmy w tym celu sygnały $x(t,\omega)$ i $u(t,\omega)=f(x(t,\omega),\omega)$ w postaci odpowiednich szeregów Fouriera

$$x(t,\omega) = \sum_k x_k(\omega)\chi_k(t) , \qquad u(t,\omega) = \sum_k u_k(\omega)\chi_k(t) \tag{13}$$

Podobnie jak w rozdziale IV, przyjmiemy, że $\bar{\chi}_k=\chi_{-k}$. W związku z tym, ponieważ interesują nas wyłącznie rozwiązania rzeczywiste, naturalne staje się założenie, że $\bar{z}_k=z_{-k}$, $\bar{x}_k=x_{-k}$, $\bar{u}_k=u_{-k}$. Podstawiając w równaniu (11) szeregi Fouriera odpowiednich funkcji (12) i (13) i porównując współczynniki przy odpowiednich charakterach otrzymamy

$$x_k(\omega) = z_k(\omega) + \hat{h}(\chi_k,\omega)u_k(x_0(\omega),x_1(\omega),x_2(\omega),\ldots,\omega) \qquad k=0,1,2,\ldots \tag{14}$$

gdzie

$$u_k(x_0(\omega),x_1(\omega),x_2(\omega),\ldots,\omega) = \frac{1}{\mu(G/H)}\int_{G/H}\bar{\chi}_k(t)u(t,\omega)\mu(dt) \tag{15}$$

są współczynnikami Fouriera sygnału u. W nieskończonym układzie losowych równań algebraicznych (14) równania dla numerów ujemnych zostały pominięte ze względu na poczynione założenia.

Korzystając z faktu, że przestrzenie $L_H^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)$ i $l^2(L^2(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{C}^n))=l^{2,2}$ są izometrycznie izomorficzne, układ równań (14) będziemy traktować jako losowe równanie operatorowe w przestrzeni $l^{2,2}$. Oznaczymy

$$\eta(\omega) := \left[x_0^T(\omega),x_1^T(\omega),x_2^T(\omega),\ldots\right]^T, \qquad \zeta(\omega) := \left[z_0^T(\omega),z_1^T(\omega),z_2^T(\omega),\ldots\right]^T \tag{16}$$

$$(A\eta)(\omega) := \left[(\hat{k}(\chi_0,\omega)x_0(\omega))^T,(\hat{k}(\chi_1,\omega)x_1(\omega))^T,(\hat{k}(\chi_2,\omega)x_2(\omega))^T,\ldots\right] \tag{17}$$

$$(U\eta)(\omega) := \left[u_0^T(x_0,x_1,x_2,..,\omega),u_1^T(x_0,x_1,x_2,..,\omega),u_2^T(x_0,x_1,x_2,..,\omega)...\right]^T \tag{18}$$

Zgodnie z notacją (16-18), równanie (14) przyjmie postać uproszczoną

$$\eta(\omega) = \zeta(\omega) + A(\omega)U(\omega)\eta(\omega) \tag{19}$$

Z twierdzeń 5.2-5.3, izometrii przestrzeni $L_H^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)$ i $l^2(L^2(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{C}^n))$ wynika, że charakterystyki operatora liniowego A, rozpatrywanego jako odwzorowanie przestrzeni $l^{2,2}$ w siebie, są następujące

$$\|A\|_{l^{2,2}} \le \sup_{\chi_n}\ \mathbb{P}\text{-ess sup}_{\omega\in\Omega}\ \max_r\left(\lambda_r(\chi,\omega)\right)^{1/2} \tag{20}$$

$$\sup_{l^{2,2}}(A) \le \sup_{\chi_n}\ \mathbb{P}\text{-ess sup}_{\omega\in\Omega}\ \max_r\left(\mu_r(\chi,\omega)\right) \tag{21}$$

$$\inf_{l^{2,2}}(A) \ge \inf_{\chi_n}\ \mathbb{P}\text{-ess inf}_{\omega\in\Omega}\ \min_r\left(\mu_r(\chi,\omega)\right) \tag{22}$$

gdzie $\lambda_1(\chi,\omega),\lambda_2(\chi,\omega),\ldots,\lambda_n(\chi,\omega)$ określone jak w (P2), natomiast $\mu_1(\chi,\omega)$, $\mu_2(\chi,\omega),\mu_3(\chi,\omega),\ldots,\mu_n(\chi,\omega)$ są wartościami własnymi macierzy hermitowskiej $\frac{1}{2}\left[\hat{h}^*(\chi,\omega)+\hat{h}(\chi,\omega)\right]$ oraz dla skrócenia zapisu $\sup_{\chi_n}$ oznacza $\sup_{\chi_n\in A(\hat{G},H)}$ (analogicznie $\inf_{\chi_n}$). Własności operatora U można wywnioskować bezpośrednio z własności operatora F. Korzystając z powyższego łatwo jest udowodnić następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 8.1. Jeżeli operator F spełnia w $L_H^{2,2}(Q;\mathbb{R}^n)$ warunek Lipschitza ze stałą α i jeżeli

$$q := \alpha\sup_{\chi_n}\ \mathbb{P}\text{-ess sup}_{\omega\in\Omega}\ \max_r\left(\lambda_r(\chi,\omega)\right)^{1/2} < 1 \tag{23}$$

to dla dowolnej funkcji losowej H-okresowej $z\in L_H^{2,2}(Q;\mathbb{R}^n)$ równanie (11=19) ma w przestrzeni $L_H^{2,2}(Q;\mathbb{R}^n)$ dokładnie jedno H-okresowe rozwiązanie $\tilde{x}$, a współczynniki Fouriera tego równania spełniają nierówność

$$\|\tilde{x}_n\|_2 \le \|z_n\|_2 + \frac{\alpha}{2^{1/2}(1-\alpha q)}\|\hat{h}(\chi_n,\omega)\|_\infty \tag{24}$$

dla $n=0,1,2,3,\ldots$.

Dowód. Wynika z twierdzenia o punkcie stałym dla operacji zwężających i własności operatorów: liniowego A i nieliniowego F. ■

Założenia podanego twierdzenia są dość silne. Podstawowe pytanie, które można zadać, to czy o własnościach układu (11=14=19) można wnioskować na podstawie zredukowanego, skończonego układu równań. Metoda redukcji układu równań (11=19) do skończonego układu równań, w przypadku ciągłym $G=\mathbb{R}^1$, jest dobrze znana i prowadzi do metod: filtru idealnego i funkcji opisującej, por. [138].

8.3. DRGANIA OKRESOWE W UKŁADACH NIEAUTONOMICZNYCH

Twierdzenie 8.1 podaje warunki, których spełnienie gwarantuje istnienie i jednoznaczność rozwiązań okresowych równania (11). Z twierdzenia Banacha o punkcie stałym wynika, że rozwiązanie to może być uzyskane metodą kolejnych przybliżeń. Metoda ta wymaga spełnienia dość silnych założeń i często zawodzi. Nie można jej stosować np. w przypadkach, gdy równanie (11) posiada wiele rozwiązań lub gdy nieliniowość nie spełnia warunku Lipschitza (nawet lokalnie). Dlatego w dalszych rozważaniach wykorzystane zostaną bardziej subtelne metody związane z indeksem punktu stałego Leraya-Schaudera oraz homotopią operatorów zwartych. Notacja i oznaczenia patrz [303].

8.3.1. Metody rzutowe rozwiązywania równań

Niech $A_\Lambda(\hat{G},H)\subset A(\hat{G},H)$ będzie skończonym podzbiorem charakterów. Dla uproszczenia notacji przyjmiemy, że Λ oznaczać będzie pewien skończony zbiór numerów $\{0,1,2,..,N\}$, takich, że $\chi_k\in A_\Lambda(\hat{G},H)$ $\forall k\in\Lambda$. Mając ten fakt na uwadze określimy w $l^{2,2}$ operator rzutowy

$$(P\eta)_n := \begin{cases} x_n & \text{dla } n\in\Lambda \\ 0 & \text{dla } n\notin\Lambda \end{cases} \tag{25}$$

gdzie zachowujemy oznaczenia (16). Por. [157,159,171].

Każdy element $\eta\in l^{2,2}$ można jednoznacznie przedstawić w postaci sumy $\eta=v+w$, gdzie $v=P\eta$, $w=(I-P)\eta$. Oznaczmy $\zeta=a+b$, gdzie $a=P\zeta$, $b=(I-P)\zeta$. Wówczas równanie (19) można przepisać w postaci układu dwóch równań

$$v = a + PAU(v + w) \tag{26}$$

$$w = b + (I-P)AU(v+w) \tag{27}$$

Wybierzmy zbiór Λ tak, aby dla każdego $v\in P(l^{2,2})$ równanie (27) posiadało w podprzestrzeni $(I-P)(l^{2,2})$ jednoznaczne rozwiązanie (zauważmy, że założenie dotyczące jednoznaczności można pominąć). Jeżeli np. warunek (23) w twierdzeniu 8.1 zastąpić słabszym

$$q = \alpha\sup_{\chi_n\notin\Lambda} \mathbb{P}\text{-ess sup}_{\omega\in\Omega} \max_r\left(\lambda_r(\chi,\omega)\right)^{1/2} < 1 \tag{28}$$

to teza twierdzenia 8.1 pozostaje prawdziwa w zastosowaniu do równania (27).

Jeżeli przez R oznaczymy rezolwentę operatora (I-P)AU, to rozwiązanie $\tilde{w}$ równania (27) możemy zapisać w postaci

$$\tilde{w} = b + R(v+b) \tag{29}$$

i oczywiście $R:P(l^{2,2})\longrightarrow(I-P)(l^{2,2})$. Jednocześnie z nierówności

$$\|R(v+b)\|_{2,2} = \|(I-P)AU(v+\tilde{w})\|_{2,2} \le q\|v+\tilde{w}\|_{2,2} \le q\|v+b\|_{2,2}+q\|w-b\|_{2,2} \tag{30}$$

wynika oszacowanie

$$\|R(v+b)\|_{2,2} \le \frac{1}{1-q}\|v+b\|_{2,2} \tag{31}$$

Jeżeli rozwiązanie $\tilde{w}$ równania (27), znalezione dowolną metodą, np. kolejnych przybliżeń, wstawimy do równania (26), to otrzymamy

$$v = a + PAU(v+b+R(v+b)) \tag{32}$$

Równanie operatorowe (32) jest skończonym układem losowych algebraicznych równań nieliniowych.

8.3.2. Metoda filtru idealnego

Metod rozwiązywania równań, zarówno typu (26) jak i (32) istnieje wiele, istota problemu leży jednak gdzie indziej. Jeżeli liczba q jest dużo mniejsza od jedności, to oszacowanie (31) sugeruje, że w równaniu (32) składnik R(v+b) można pominąć bez popełnienia "dużego" błędu. Otrzymamy wówczas równanie

$$v = a + PAU(v+b) \tag{33}$$

którego rozwiązanie, zarówno pod względem teoretycznym, jak i praktycznym, jest dużo prostsze niż problemu (26-27). Za przybliżone rozwiązanie problemu (26-27) będziemy zatem uważać funkcję $\tilde{\eta}=\tilde{v}+b$, gdzie $\tilde{v}\in P(l^{2,2})$ jest rozwiązaniem układu równań (33). Technika ta, dla przypadku $G=R^1$, nosi nazwę metody filtru idealnego, por. [138].

Oszacowanie dokładności, z jaką rozwiązanie przybliżone aproksymuje rozwiązanie dokładne, jest głównym celem dalszej analizy. Zamieszczone wyniki są niewielką modyfikacją pracy Skrzypczyka [245].

Zaczniemy od przekształcenia równania (27). Zapiszemy je w postaci

$$v - PAU(v+b) - a = PA(PU(v+w) - PU(v+b)) \tag{34}$$

Oznaczymy dalej

$$\begin{aligned} \Phi(v) &:= PAU(v+b) - a \\ G(v,w) &:= PA(PU(v+w) - PU(v+b)) \\ \Gamma(v,w) &:= (I-P)AU(v+w) + b \end{aligned} \tag{35}$$

wówczas równania (26) i (27=34) przyjmują postać, która będzie dalej często wykorzystywana

$$w - \Gamma(v,w) = b \tag{36}$$

$$v - \Phi(v) = G(v,w) \tag{37}$$

Zauważmy, że w nowych oznaczeniach równanie przybliżone (33) przyjmuje postać lewej strony równania (37), tzn.

$$v - \Phi(v) = 0 \tag{38}$$

W dalszych rozważaniach rozwiązanie równania (38) oznaczać będziemy przez $\tilde{v}$. Biorąc pod uwagę określenie zbioru Λ, równanie (38) w notacji nawiązującej do postaci (14) może być zapisane w następujący sposób

$$x_k(\omega)-\hat{h}(\chi_k,\omega)u_k\left(x_0(\omega),x_1(\omega),x_2(\omega),\ldots,x_N(\omega),z_{N+1}(\omega),z_{N+2}(\omega),\ldots,\omega\right)=z_k(\omega) \tag{39}$$

dla $k=0,1,2,\ldots\ldots,N$.

TWIERDZENIE 8.2. Niech $\tilde{v}\in P_\Lambda(l^{2,2})$ będzie rozwiązaniem równania przybliżonego (38). Niech dalej $U(\tilde{v}+b)$ będzie lokalnie klasy C^1. Jeżeli $\Phi'(\tilde{v})$ jest bijekcją i ponadto liczba

$$\kappa = \sup_{\chi\notin A_\Lambda} \mathbb{P}\text{-ess sup}_{\omega\in\Omega} \max_r\left\{\lambda_r(\chi,\omega)\right\}^{1/2} \tag{40}$$

jest wystarczająco mała, to równanie (19) posiada dokładnie jedno rozwiązanie w małym otoczeniu $\tilde{v}+b$. Notacja pozostaje jak w hipotezie (P2).

Dowód. Idea dowodu jest podobna do zawartej w twierdzeniu 8.3. Zauważmy, że operacja lokalnie różniczkowalna spełnia warunek Lipschitza. Teza wynika z twierdzenia Banacha o punkcie stałym i z twierdzenia o lokalnej odwracalności odwzorowań w przestrzeniach funkcyjnych, por. [70,157,303]. ■

8.3.3. Metoda funkcji opisującej

W szczególnym przypadku, gdy zbiór Λ zawiera tylko jeden numer (n=1 dla ustalenia uwagi), metoda filtru idealnego nazywana będzie, przez analogię do przypadku klasycznego $G=\mathbb{R}^1$, metodą funkcji opisującej. Układ równań (39) redukuje się wtedy do jednego równania n-wymiarowego zmiennej zespolonej

$$x_1(\omega)-\hat{h}(\chi_1,\omega)u_1\left(x_1(\omega),z_0(\omega),z_2(\omega),z_3(\omega),z_4(\omega),\ldots,\omega\right)=z_1(\omega) \tag{41}$$

$$u_1(x_1,z_0,z_2,z_3,z_4,\ldots,\omega) =$$

$$= \frac{1}{\mu(G/H)}\int_{G/H}\bar{\chi}_1(t)f\left(x_1\chi_1(t)+\bar{x}_1\bar{\chi}_1(t)+z_0\chi_0(t)+\sum_{k=2}^{\infty}\left(z_k\chi_k(t)+\bar{z}_k\bar{\chi}_k(t)\right),\omega\right)\mu(dt) \tag{42}$$

Układ n równań zespolonych (41) można, oczywiście, przepisać w postaci układu 2n równań rzeczywistych.

Analizować będziemy układ dynamiczny opisany losowym równaniem całkowym (11), gdzie z jest H-okresowym procesem stochastycznym (12) i spełniona jest hipoteza (Q1). Załóżmy dalej, że

R1) X_H i Y_H będą dwoma przestrzeniami Banacha H-okresowych procesów stochastycznych $x(t,\cdot)\in L^2(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n)$, $\forall\, t\in Q$. Przypuśćmy, że $z\in X_H$. ■

R2) Operator nieliniowy $F: X_H \longrightarrow Y_H$ i jest operatorem ciągłym. ■

R3) Losowy operator A dany relacją

$$(Au)(t,\omega) := \int_Q h(d\tau,\omega)u(t-\tau,\omega) = \sum_k \hat{h}(\chi_k,\omega)u_k(\omega)\chi_k(t)$$

gdzie $u(t,\omega)=\sum_k u_k(\omega)\chi_k(t)$, $t\in Q, \omega\in\Omega$, jest liniowym i zwartym operatorem przekształcającym przestrzeń Y_H w X_H. ■

R4) Oznaczymy przez P i (I-P) operatory rzutowe

$$(Pu)(t,\omega) := u_1(\omega)\chi_1(t) + \bar{u}_1(\omega)\bar{\chi}_1(t)$$

$$((I-P)u)(t,\omega) := \sum_{k\neq 1} u_k(\omega)\chi_k(t)$$

dla $t\in Q, \omega\in\Omega$. ■

Zauważmy, że mimo pewnych modyfikacji w stosunku do rozważań dotyczących metody filtru idealnego wyniki części 8.3.2 pozostają prawdziwe. W związku z tym równanie (11) jest równoważne układowi dwóch równań wynikających bezpośrednio z równań (36-37)

$$w - \Gamma(v,w) = b \tag{43}$$

$$v - \Phi(v) = G(v,w) \tag{44}$$

gdzie $\Phi(v):=PAF(v+b)-a$, $G(v,w):=PA(PF(v+w)-PF(v+b))$, $\Gamma(v,w):=(I-P)AF(v+w)+b$. Ponieważ $v(t,\omega)=x_1(\omega)\chi_1(t)+\bar{x}_1(\omega)\bar{\chi}_1(t)$, w dalszych rozważaniach używane są zamiennie oznaczenia: $\Phi(v)\equiv\Phi(x_1)$, $G(v,w)\equiv G(x_1,w)$, co nie powinno prowadzić do nieporozumień.

Uzasadnienie metody funkcji opisującej polega na ustaleniu związków pomiędzy rozwiązaniami równania przybliżonego (38) i rozwiązaniami układu równań (43-44). Oczywiście, twierdzenie 8.2 znajduje tutaj zastosowanie, niemniej jednak wymaga ono silnej różniczkowalności operatora F. Osłabienie założeń tego twierdzenia może być przeprowadzone na różne sposoby. Poniżej pokazany zostanie jeden z możliwych kierunków postępowania.

UWAGA 8.1. W dalszych rozważaniach wykorzystywane są szeroko, bez szczegółowego cytowania, własności operatorów zwartych oraz określenia związane z homotopią operatorów zwartych i indeksem Leraya-Schaudera. Notacja i wyniki dotyczące tych własności są zgodne z [303].

TWIERDZENIE 8.3. Jeżeli prawdziwe są hipotezy (R1-R4) i ponadto spełnione są następujące założenia:

(i) istnieje rozwiązanie $\tilde{v}\in P(X_H)$ (odpowiednio $\tilde{x}_1\in L^2(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{C}^n)$) równania przybliżonego (38), które w pewnym małym otoczeniu $\mathcal{U}(\tilde{v},r_1)$, $r_1>0$, jest rozwiązaniem izolowanym;

(ii) $\exists\, r_2>0\ \forall\, v\in\mathcal{U}(\tilde{v},r_1)$

$$(I-P)AF(v+w)\in\mathcal{U}(0,r_2) \qquad \forall\, w\in\mathcal{U}(b,r_2);$$

to równanie (11) posiada w przestrzeni X_H co najmniej jedno H-okresowe rozwiązanie $x(t,\omega)$, $t\in\mathbb{Q}$, $\omega\in\Omega$, dla którego zachodzi oszacowanie

$$\|x(\cdot,\cdot)-\tilde{x}(\cdot,\cdot)\|_{X_H} \le r_1 + r_2$$

gdzie $\tilde{x}(t,\omega)=\tilde{x}_1(\omega)\chi_1(t)+\bar{\tilde{x}}_1(\omega)\bar{\chi}_1(t)+z_0\chi_0(t)+\sum_{k=2}^{\infty}\left(z_k\chi_k(t)+\bar{z}_k\bar{\chi}_k(t)\right)$.

Dowód. Z założenia o istnieniu izolowanego rozwiązania $\tilde{v}\in P(X_H)$ równania przybliżonego (38) wynika, że istnieje pewne otoczenie $\mathcal{U}(\tilde{v},r_1)$, $r_1>0$, tego rozwiązania, w którym jego lokalny indeks Leraya-Schaudera

$$i(\Phi,\mathcal{U}(\tilde{v},r_1)) \neq 0 \tag{45}$$

oraz $\exists\,\alpha>0$ takie, że

$$\sup_{\|v-\tilde{v}\|_{P(X_H)}=r_1}\|\Phi(v)\|_{P(X_H)} > \alpha \tag{46}$$

Z założenia (ii) wynika, że $\forall\, v\in\mathcal{U}(\tilde{v},r_1)$, prawa strona równania (43) określa ciągłe odwzorowanie $\mathcal{U}(b,r_2)$ w siebie. Można łatwo wykazać, że odwzorowanie to jest pełnociągłe. Wynika stąd na podstawie twierdzenia Schaudera o punkcie stałym, że równanie (43) posiada rozwiązanie $\tilde{w}\in\mathcal{U}(b,r_2)$.

Jednocześnie z ciągłości operacji $G(v,w)$ wynika, że $\forall\, v\in\mathcal{U}(\tilde{v},r_1)\ \exists\, r_2>0$ takie, że $\forall\, \|w-b\|_{(I-P)(X_H)}\le r_2$ zachodzi

$$\|G(v,w)\|_{P(X_H)} < \alpha \tag{47}$$

Z nierówności (46-47) wynika [336], że operatory zwarte Φ i Φ-G są homotopijne na brzegu zbioru $\partial\mathcal{U}(\tilde{v},r_1)$. Nierówność (45) gwarantuje, że indeks punktu stałego Leraya-Schaudera operatora Φ-G

$$i(\Phi-G,\mathcal{U}(\tilde{v},r_1)) \neq 0 \tag{48}$$

W konsekwencji z ostatniej nierówności wynika, że równanie (44) ma co najmniej jedno rozwiązanie $\tilde{\tilde{v}}\in\mathcal{U}(\tilde{v},r_1)$. Równanie (11) posiada więc w przestrzeni X_H rozwiązanie $x=\tilde{\tilde{v}}+\tilde{w}$. Zauważmy ponadto, że

$$\|x(\cdot,\cdot)-\tilde{x}(\cdot,\cdot)\|_{X_H} = \|\tilde{\tilde{v}}+\tilde{w}-\tilde{v}-b\|_{X_H} \le \|\tilde{\tilde{v}}-\tilde{v}\|_{P(X_H)} + \|\tilde{w}-b\|_{(I-P(X_H)} \le r_1 + r_2 \tag{49}$$

Ostatnia nierówność daje oszacowanie błędu, jaki popełniamy przy wyznaczaniu drgań okresowych metodą funkcji opisującej. To kończy dowód. ■

8.3.4. Przykład

Weźmy pod uwagę jednowymiarowy układ drgający z wymuszeniem parametrycznym opisany równaniem

$$M\ddot{x}(t,\omega)+R\dot{x}(t,\omega)+(C+2a(\omega)\cos(2\nu t))x(t,\omega)-\varepsilon^2 f_1(x(t-t_0,\omega))=0, \qquad t\in\mathbb{R}^1_+,\omega\in\Omega \tag{50}$$

Równanie (50) może opisywać wiele układów mechanicznych, przykłady techniczne por. [102]. Interpretacja poszczególnych składników równania typu (50) była przeprowadzona w części 3.2, w szczególności w częściach 3.2.3 i 3.2.4 dyskutowana była kwestia opóźnienia w układzie mechanicznym.

Ponieważ interesuje nas stan ustalony w układzie dynamicznym (50) przyjmiemy, że $x(0,\omega)=\dot{x}(t,\omega)=0$ i równanie (50) można w standardowy sposób przekształcić do postaci równania całkowego typu Volterry 1. rodzaju postaci

$$x(t,\omega) = \int_0^{\infty} f(x(t-\tau,\omega),\omega)k(\tau)d\tau, \qquad t\in\mathbb{R}^1_+,\omega\in\Omega \tag{51}$$

W celu zademonstrowania możliwości zastosowania przedstawionych wyników do znalezienia drgań okresowych dyskretnego układu dynamicznego opisanego losowym równaniem całkowym na grupie $G=\mathbb{Z}^1$, $Q=\mathbb{Z}^1_+$, postaci

$$x(k,\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} f(x(k-j,\omega),\omega)h(j), \qquad k\in\mathbb{Z}^1_+ \tag{52}$$

gdzie $\sum_{j=0}^{\infty}|h(j)|<\infty$, natomiast

$$f(x(k,\omega),\omega) := (1+2a(\omega)\cos(2\nu k))x(k,\omega) - \varepsilon^2 f_1(x(k-k_0,\omega)),$$

$a(\cdot)$ jest zmienną losową, $\tau\in\mathbb{Z}^1_+$, $\nu=2\pi/\tau$, $f_1(x):=x^3$, $x\in\mathbb{R}^1$. Dla ustalenia uwagi (nie zmniejsza to w niczym ogólności rozważań), przyjmiemy, że zmienna losowa $a(\cdot)$ ma rozkład równomierny na przedziale $[1,4]$.

Grupa charakterów $\hat{\mathbb{Z}}^1$ grupy dyskretnej $\mathbb{Z}^1$ jest izomorficzna z torusem $\mathbb{T}$, tzn. jest zbiorem liczb zespolonych postaci

$$\hat{\mathbb{Z}}^1 = \{e^{inx} : n\in\mathbb{Z}^1, x\in\mathbb{R}^1, |x|\le 2\pi\}$$

Podgrupa H, generowana przez dyskretne sygnały okresowe o okresie $\tau\in\mathbb{Z}^1_+$, przyjmuje postać $H=\tau\mathbb{Z}^1$. Podobnie

$$G/H = \{n : n=m+k\tau \bmod(\tau),\ m,k\in\mathbb{Z}^1\} \cong \{0,1,2,\ldots,\tau-1 \bmod(\tau)\}$$

Podgrupa ortogonalna (anihilator) $A(\hat{G},H)$ jest zdefiniowana następująco

$$A(\hat{G},H) := \{\chi\in\hat{G} : \chi(g)=1\ \forall g\in H\}$$

w szczególności w rozpatrywanym przypadku musi zachodzić

$$e^{inx} = 1 \qquad \text{dla } n=k\tau,\ k\in\mathbb{Z}^1, x\in\mathbb{R}^1, |x|\le 2\pi$$

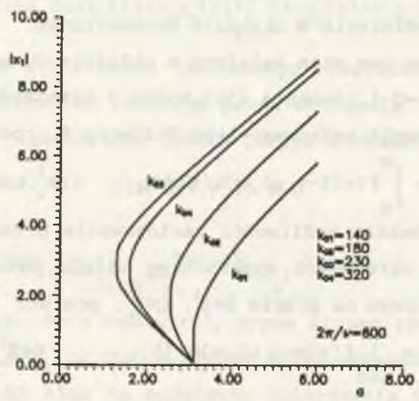
Ostatnia równość zachodzi dla $\tau x=2\pi l$, dla $l\in\mathbb{Z}^1$, tzn. dla $x=2\pi l/\tau=\nu l$. Stąd wynika, że anihilator jest zbiorem charakterów postaci

$$A(\hat{\mathbb{Z}}^1,H) = \{e^{in\nu l} : n,l\in\mathbb{Z}^1\} \tag{53}$$

Łatwo sprawdzić, że dowolny charakter $\chi(n)=\exp(in\nu l)$ jest funkcją H-okresową. Rzeczywiście, dla $n\in\mathbb{Z}^1, k\in H$ mamy

$$\chi(n+k) = e^{i(n+k)\nu l} = e^{in\nu l}\cdot e^{ik\nu l} = e^{in\nu l} = \chi(n)$$

ponieważ $k\nu=k_1 2\pi$, gdzie $k_1\in\mathbb{Z}^1$.



Rys. 8.1. Rozwiązania równania (56) dla różnych wartości k_0

Fig. 8.1. Solutions of eq. (56) for different values of k_0

UWAGA 8.2. Charaktery na grupie dyskretnej można wprowadzić inaczej, tak aby pozostać w zgodzie z notacją przyjętą w technice dla przekształcenia Z, które jest niczym innym, jak przekształceniem Fouriera na grupie dyskretnej $\mathbb{Z}^1$. W tym celu zauważmy, że $\exp(inx)$ dla $n\in\mathbb{Z}^1$ i $|x|\le 2\pi$ jest liczbą zespoloną. Niech $z=\exp(ix)$, oczywiście $|x|\le 1$.

Zbiór charakterów $\hat{\mathbb{Z}}^1$ grupy dyskretnej $\mathbb{Z}^1$ zapiszemy w postaci

$$\hat{\mathbb{Z}}^1 = \{z^n : n\in\mathbb{Z}^1, z\in\mathbb{C}^1, |z|\le 1\}$$

Definicja przekształcenia Z, znana w literaturze [115,121,141,272,366], pokrywa się, przy tak wprowadzonej notacji, z wprowadzoną w dodatku B. Mamy

$$\hat{h}(z) = \hat{h}(\chi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n h(n) = \int_{\mathbb{Z}^1} \bar{\chi}(g)h(g)\mu(dg), \qquad \chi\in\hat{\mathbb{Z}}^1$$

Anihilator $A(\hat{\mathbb{Z}}^1,H)$ jest, w tym przypadku, zbiorem n-tych pierwiastków zespolonych z liczby 1. Wyznaczenie tych pierwiastków prowadzi "de facto" do powrotu do notacji (52). ■

Zgodnie z metodą funkcji opisującej, poszukiwać będziemy rozwiązania przybliżonego równania (50) w postaci

$$\tilde{x}(n,\omega) = \tilde{x}_1(\omega)\chi_1(n) + \tilde{\bar{x}}_1(\omega)\bar{\chi}_1(n), \qquad n\in\mathbb{Z}^1$$

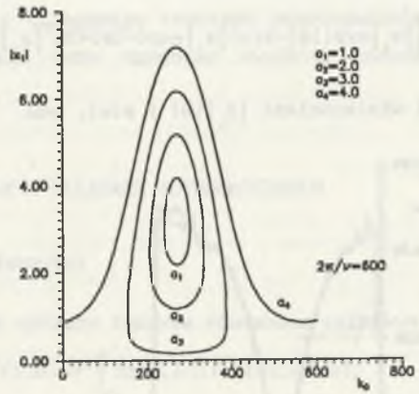
gdzie $\chi_1(n)=\exp(i\nu n)$, a $\tilde{x}_1(\omega)$ jest losowym rozwiązaniem równania wynikającego z (38), które w tym przypadku przyjmie postać

$$x_1(\omega) - \hat{h}(\chi_1)u_1(x_1(\omega),\omega) = 0 \tag{54}$$

gdzie $\hat{h}(\chi_1)=\hat{h}(z)\Big|_{z=\chi_1}$, a funkcja u_1 dana jest relacją nieliniową

$$u_1(x_1,\omega) = \frac{1}{\tau}\sum_{k=0}^{\tau-1}\Big(\Big(1 + 2a(\omega)\cos(2\nu k)\Big)\Big(x_1\chi_1(k) + \bar{x}_1\bar{\chi}_1(k)\Big)\bar{\chi}_1(k) -$$

$$- \varepsilon^2 f_1\Big(x_1\chi_1(k-k_0) + \bar{x}_1\bar{\chi}_1(k-k_0)\Big)\Big)\bar{\chi}_1(k) \tag{55}$$



Rys. 8.2. Rozwiązania równania (56) dla różnych wartości $a(\omega_1)$

Fig. 8.2. Solutions of eq. (56) for different values of $a(\omega_1)$

Niech $\tau>4$. Dokonamy przekształceń kolejnych składników wzoru (55). Zauważmy

$$\frac{1}{\tau}\sum_{k=0}^{\tau-1}\Big(\Big(1 + 2a(\omega)\cos(2\nu k)\Big)\Big(x_1 + \bar{x}_1\exp(-12\nu k)\Big) = x_1 + \frac{1}{\tau}\sum_{k=0}^{\tau-1} 2a(\omega)\bar{x}_1\cos^2(2\nu k) =$$

$$= x_1\ 2a(\omega)\bar{x}_1\frac{1}{\tau}\sum_{k=0}^{\tau-1}\frac{1}{2}\Big(1 + \cos(4\nu k)\Big) = x_1 + a(\omega)\bar{x}_1$$

Wynika to z faktu, że

$$\sum_{k=0}^{\tau-1}\cos(4\nu k) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\tau-1}\left(\exp(i8\pi k/\tau) + \exp(-i8\pi k/\tau)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1-\exp(i8\pi)}{1-\exp(i8\pi/\tau)} + \frac{1}{2}\,\frac{1-\exp(-i8\pi)}{1-\exp(-i8\pi/\tau)} = 0 \qquad \text{dla } \tau\neq 4$$

Dalej mamy

$$\frac{1}{\tau}\sum_{k=0}^{\tau-1}\varepsilon^2\Big(x_1^3\exp(i3\nu(k-k_0)) + 3x_1^2\bar{x}_1\exp(i2\nu(k-k_0)-i\nu(k-k_0)) +$$

$$+ 3x_1\bar{x}_1^2\exp(i\nu(k-k_0)-i2\nu(k-k_0)) + \bar{x}_1^3\exp(-i3\nu(k-k_0))\Big) =$$

$$= \varepsilon^2\frac{1}{\tau}\sum_{k=0}^{\tau-1}3x_1^2\bar{x}_1\exp(-i\nu k_0) = 3\varepsilon^2|x_1|^2x_1\exp(-i\nu k_0)$$

Wówczas równanie (55) przyjmie postać

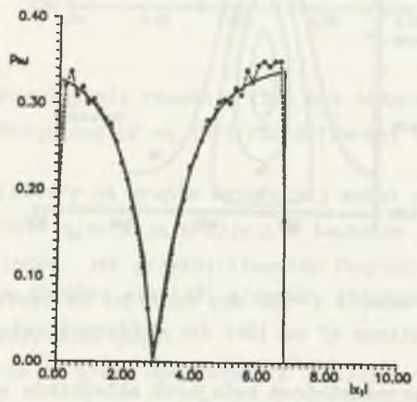
$$u_1(x_1,\omega) = x_1 + a(\omega)\bar{x}_1 - 3\varepsilon^2x_1|x_1|^2\exp(-i\nu k_0) =$$

$$= |x_1|\exp(i\phi) + a(\omega)|x_1|\exp(-i\phi) - 3\varepsilon^2|x_1|^3\exp(-i\nu k_0+i\phi)$$

gdzie $x_1=|x_1|\exp(i\phi)$. Z równania (55) wynika

$$|x_1|\exp(i\phi)-\hat{h}(\chi_1)\Big(|x_1|\exp(i\phi)-a(\omega)|x_1|\exp(-i\phi)+3\varepsilon^2|x_1|^3\exp(-i\nu k_0+i\phi)\Big)=0 \tag{56}$$

z nieznanymi losowymi wielkościami $|x_1|(\omega)$ i $\phi(\omega)$, $\omega\in\Omega$.



Rys. 8.3. Dokładna funkcja gęstości prawdopodobieństwa $|x|$ (linia ciągła) i funkcja gęstości uzyskana metodą Monte-Carlo (linia przerywana)

Fig. 8.3. Exact probability density function of $|x|$ (continuous line) and a density function obtained by Monte-Carlo method (dashed line)

Operacja F odwzorowuje $L_H^{2,2}$ w siebie i jest w sposób ciągły różniczkowalna. Jeżeli liczba $\kappa=\sup_{|z|\le 1}|\hat{h}(z)|$ jest wystarczająco mała, założenia twierdzenia 8.2 są spełnione.

Równanie (56) ma rozwiązania losowe. Załóżmy, że $x_1(\cdot)\not\equiv 0$. Dla wartości $2\pi/\nu=600$ wyznaczone zostały niezerowe rozwiązania $|x_1|$. Wartości rozwiązań $|x_1|(\omega_1)$ dla ustalonego $\omega_1\in\Omega$ są przedstawione na rys. 8.1 i 8.2, dla odpowiednio zmieniających się współczynników k_0 i $a(\omega_1)$. Łatwo zauważyć, że równanie (56) posiada maksymalnie dwa niezerowe rozwiązania, zależne od wielkości parametrów.

W celu zilustrowania losowego charakteru tych rozwiązań została wyznaczona funkcja gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej $|x_1|$. Zostało to wykonane dwoma sposobami. Po pierwsze, funkcję gęstości wyznaczono na podstawie równania (56), które określa funkcyjne przekształcenie miary prawdopodobieństwa generowanej przez zmienną losową a, w miarę związaną ze zmiennymi losowymi $|x_1|$ i ϕ. Wyniki zostały porównane z funkcją gęstości uzyskaną na drodze symulacji numerycznej metodą Monte-Carlo (liczebność próbki 100000 symulacji). Na rys. 8.3 przedstawione jest porównanie wyników dla funkcji gęstości brzegowego rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej $|x_1|$. Zaobserwowana została duża zgodność wyników, świadcząca o poprawności obliczeń.

8.4. DRGANIA OKRESOWE W UKŁADACH AUTONOMICZNYCH

8.4.1. Podstawowe własności

Układ dynamiczny opisany losowym równaniem całkowym Volterry-Stieltjesa

$$x(t,\omega) = z(t,\omega) + \int_0 h(ds,\omega)f(x(t-s,\omega),\omega), \qquad t\in Q,\omega\in\Omega \tag{57}$$

nazwiemy autonomicznym, jeżeli $z(t,\omega)=z_0(\omega)=\text{const}(\omega)$, $\omega\in\Omega$, a operacja F, generowana przez nieliniowość f, jest przemienna z operacją przesunięcia w czasie (takie operatory nazywane bywają "filtrami", por. dodatek C), tzn.

$$(Fx(s+\tau,\omega))(t,\omega) = (Fx(s,\omega))(t+\tau,\omega), \qquad \forall\,\tau\in G,\omega\in\Omega \tag{58}$$

Operacje posiadające powyższą własność nazywane bywają również stacjonarnymi. Operacje stacjonarne przekształcają funkcje H-okresowe w funkcje H-okresowe o tym samym okresie. Istotnie, niech $x(t+\tau,\omega)=x(t,\omega)$, $\forall\,\tau\in H$, mod(P).

Zauważmy, że

$$(Fx(s,\omega))(t,\omega) = (Fx(s+\tau,\omega))(t,\omega) = (Fx(s,\omega))(t+\tau,\omega), \quad \forall\ \tau\in H, \mathrm{mod}(P)$$

co dowodzi okresowości funkcji $(Fx)(t,\omega)$.

Załóżmy, że

S1) operacja F przekształca w sposób ciągły przestrzeń funkcji prawie okresowych $B^{2,2}(G;\mathbb{R}^n)$ w siebie i jest ograniczona, tzn. istnieje stała $N>0$ taka, że $|(Fx)(t,\omega)|<N\ \forall\ x\in\mathbb{R}^n, \omega\in\Omega$. ■

S2) Równanie (57) posiada stałe $x(t,\omega)=\mathrm{const}(\omega)\ \forall\ t\in Q$ rozwiązanie. ■

Wówczas równanie rozpatrywanego układu autonomicznego (57) można zawsze sprowadzić do równoważnego równania całkowego 1. rodzaju. Istotnie, niech $x_0(\omega)$ oznacza funkcję losową będącą rozwiązaniem równania (57), tzn.

$$x_0(\omega) = z_0(\omega) + K(\chi_0,\omega)f(x_0,\omega) \tag{59}$$

gdzie $K(\chi_0,\omega)=\int_0 h(ds)$. Z hipotezy (S1) wynika, że funkcja losowa $f(x_0,\omega)$ jest ciągłą funkcją zmiennej losowej x_0. Niech x_0 będzie takim dowolnym rozwiązaniem równania (59), wówczas proces $y(t,\omega)=x(t,\omega)-x_0(\omega)$ spełnia równanie

$$y(t,\omega) = \int_0 h(ds,\omega)g(y(t-s,\omega),\omega) \qquad t\in Q, \omega\in\Omega \tag{60}$$

gdzie $g(y,\omega)=f(y+x_0,\omega)-f(x_0,\omega)$, $y\in\mathbb{R}^n$, oczywiście $g(0,\omega)=0\ \forall\ \omega\in\Omega$.

Będą nas interesowały niezerowe rozwiązania równania (60). Łatwo zauważyć, że prawdziwy jest następujący rezultat, wynika on natychmiast z własności funkcji nieliniowej f.

TWIERDZENIE 8.4. Jeżeli proces $x(t,\omega), t\in Q, \omega\in\Omega$, jest rozwiązaniem równania (60), to proces $x(t+\tau,\omega)$, $t\in Q, \omega\in\Omega$, jest również rozwiązaniem tego równania $\forall\ \tau\in G$.

Dowód. Wynika wprost z własności układu autonomicznego. ■

Wynika stąd natychmiast, że rozważania z części 8.3 niniejszej pracy nie mogą być przeniesione na sformułowane powyżej zagadnienie drgań w układach autonomicznych.

Przy poszukiwaniu rozwiązań H-okresowych postaci

$$x(t+\tau,\omega) = \sum_k x_k(\omega)\chi_k(t+\tau) = \sum_k \Big(x_k(\omega)\chi_k(\tau)\Big)\chi_k(t)$$

równania (60), o nieustalonym okresie (podgrupie H), można ograniczyć się do znalezienia jednego rozwiązania spośród nieskończonej ilości rozwiązań $x(t+\tau,\omega)$ różniących się "przesunięciem" argumentu.

Stosując rozumowanie analogiczne do przedstawionego w opisie metody funkcji opisującej poszukiwać będziemy rozwiązania w postaci

$$x(t,\omega) = x_0(\omega) + x_1(\omega)\chi_1(t) + \bar{x}_1(\omega)\bar{\chi}_1(t) + \sum_{|k|\geq 2} x_k(\omega)\chi_k(t) \tag{61}$$

Zauważmy, że $x_1\chi_1+\bar{x}_1\bar{\chi}_1=2\mathrm{Re}(x_1)\mathrm{Re}(\chi_1)-2\mathrm{Im}(x_1)\mathrm{Im}(\chi_1)$. Ze względów formalnych (bez zmniejszania ogólności) przyjmiemy, że $\mathrm{Im}(x_1)=0$ i $x_1>0\ \forall\ \omega\in\Omega$, wówczas równość (61) przyjmie postać

$$x(t,\omega) = x_0(\omega) + 2x_1(\omega)\mathrm{Re}\Big(\chi_1(t)\Big) + \sum_{|k|\geq 2} x_k(\omega)\chi_k(t) \tag{62}$$

Zadanie określenia rozwiązania równania (60) w postaci szeregu (62) jest dodatkowo skomplikowane faktem, że nie jest znana podgrupa H grupy G decydująca o okresie drgań rozwiązania. Z drugiej strony wiadomo, że jeżeli znamy okres funkcji periodycznej, to generuje on w sposób jednoznaczny podgrupę $H\subset G$. Jak jednak sformułować warunki dotyczące tego okresu, aby podgrupa H była dyskretna, podobnie jak odpowiadający jej, interesujący nas, bazowy zbiór charakterów, będący anihilatorem $H^\perp$ zbioru H.

Niech $\{H_\lambda\}, \lambda\in\mathbb{R}^1_+$ będzie jednoparametryczną rodziną normalnych, dyskretnych podgrup H_λ tej samej grupy G. Dla anihilatora każdej z tych podgrup zachodzi $H_\lambda^\perp=A_\lambda(\hat{G},H_\lambda)$. Jak wiemy, $(G/H_\lambda)\hat{}=H_\lambda^\perp$. Charaktery $\chi^{(\lambda)}$ ze zbioru $H_\lambda^\perp$ oznaczać będziemy zgodnie z przyjętą wcześniej notacją.

Będziemy zakładać, że założenia wstępne niniejszego paragrafu, dotyczące postaci rozwiązań, pozostają w mocy dla każdego $\lambda\in\mathbb{R}^1_+$.

Przyjmiemy dalej, że prawdziwe będzie stale następujące założenie:

S3) rodzina charakterów $\{H_\lambda^\perp\}, \lambda\in\mathbb{R}^1_+$, jest ciągłą funkcją parametru λ. ■

Dalszy ciąg rozumowania będzie podobny do przedstawionego w części 8.3. Jeżeli podstawimy funkcję postaci (62) do równania (60), to porównując współczynniki przy odpowiednich charakterach otrzymamy nieskończony układ równań losowych

$$x_k(\omega) = \hat{h}\Big(\chi_k^{(\lambda)},\omega\Big)u_k(\lambda,x_0(\omega),x_1(\omega),x_2(\omega),\ldots,\omega), \qquad k=0,1,2,\ldots \tag{63}$$

w którym funkcje u_k określimy podobnie jak poprzednio

$$u_k(\lambda,x_0,x_1,x_2,\ldots,\omega) := \frac{1}{\mu(G/H_\lambda)}\int_{G/H_\lambda} f\Big(\sum_l x_l\chi_l^{(\lambda)}(t),\omega\Big)\chi_k^{(\lambda)}(t)\mu(dt) \tag{64}$$

Wyznaczeniu podlegają zmienne $\lambda, x_0(\omega), x_1(\omega), x_2(\omega), \ldots\ldots$

8.4.2. Metoda funkcji opisującej

Metoda funkcji opisującej polega na obcięciu nieskończonego układu równań (63) do jednego n-wymiarowego losowego równania zespolonego, przez zastąpienie współczynników $\hat{h}(\chi_k^{(\lambda)})$ zerami dla $k\neq 1$ (dla ustalenia uwagi). Wówczas układ równań (63), redukuje się do jednego wektorowego równania zespolonego, które będziemy zapisywać w postaci

$$x_1(\omega) - \Phi(\lambda, x_1(\omega), \omega) = x_1(\omega) - \hat{h}\left(\chi_1^{(\lambda)}, \omega\right) u_1(\lambda, 0, x_1(\omega), 0, 0, \ldots, \omega) \qquad (65)$$

Jeżeli $\tilde{x}_1$ i $\tilde{\lambda}$ będą zmiennymi dodatnimi spełniającymi równanie zespolone (65), to funkcję losową

$$\tilde{x}(t,\omega) = 2\tilde{x}_1(\omega)\mathrm{Re}\left(\chi_1^{(\tilde{\lambda})}(t+\tau)\right), \qquad t\in Q, \omega\in\Omega \qquad (66)$$

dla dowolnych $\tau\in G$ uważać będziemy za przybliżone rozwiązanie równania (60).

Poniżej pokażemy, że jeżeli istnieją $\tilde{x}_1(\cdot)>0 \bmod(\mathbb{P})$, $\tilde{\lambda}>0$, to dokładne rozwiązanie równania (60) jest okresowe i ma postać

$$x(t,\omega) = x_0(\omega) + 2x_1(\omega)\mathrm{Re}\left(\chi_1^{(\lambda)}(t+\tau)\right) + \sum_{|k|\geq 2} x_k(\omega)\chi_k^{(\lambda)}(t+\tau) \qquad (67)$$

gdzie $\tau\in G$ oraz $\|x_1(\cdot)-\tilde{x}_1(\cdot)\|_2$, $|\lambda-\tilde{\lambda}|$, $\|x_1(\cdot)\|_2$ dla $i=0,\pm 2,\pm 3,\ldots$ są liczbami małymi.

Układ równań (63) przepiszemy w postaci dwóch układów równań, z których pierwszy zawiera równania o numerach $k\neq 1$

$$x_k(\omega) = \hat{h}\left(\chi_k^{(\lambda)}\right) u_k(\lambda, x_0(\omega), x_1(\omega), x_2(\omega), \ldots, \omega) \qquad k=0,2,3,\ldots \qquad (68)$$

a drugi równanie o numerze $k=1$, które ma postać

$$x_1(\omega) = \hat{h}\left(\chi_1^{(\lambda)}\right) u_1(\lambda, x_0(\omega), x_1(\omega), x_2(\omega), \ldots, \omega) \qquad (69)$$

Będziemy zakładać dalej, że następujące hipotezy są prawdziwe:

T1) X i Y oznaczają dwie przestrzenie Banacha nieskończonych wektorów, których elementami są n-wymiarowe zespolone zmienne losowe typu $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}; \mathbb{C}^n)$. Niech

$$\eta(\omega) := \left[x_0^T(\omega), x_1^T(\omega), x_2^T(\omega), \ldots\right]^T, \qquad \omega\in\Omega. \blacksquare$$

Mogą to być np. przestrzenie z normami:

$$\|\eta(\cdot)\|_{X_1} := \left(\sum_k (1+k^2)\|x_k(\cdot)\|_2^2\right)^{1/2}$$

$$\|\eta(\cdot)\|_{X_2} := \left(\|x_0(\cdot)\|_2^2 + 2\sum_k \|x_k(\cdot)\|_2^2\right)^{1/2}$$

$$\|\eta(\cdot)\|_{X_3} := \sup_{t\in G}\left\| \sum_k x_k(\cdot)\chi_k(t) \right\|_2$$

gdzie $\chi_k\in(G/H)^{\wedge}$, H jest normalną podgrupą w G;

$$\|\eta(\cdot)\|_{X_4} := \sum_k \|x_k(\cdot)\|_2$$

gdzie założono $x_{-k}(\cdot)=\bar{x}_k(\cdot) \bmod(\mathbb{P})$ $\forall$ k . $\blacksquare$

T2) P i (I-P) oznaczają podobnie jak poprzednio operatory rzutowe

$$P\eta := \left[0^T, x_1^T, 0^T, 0^T, \ldots\right]^T, \quad (I-P)\eta := \left[x_0^T, 0^T, x_2^T, x_3^T, \ldots\right]^T \blacksquare$$

W dalszych rozważaniach używać będziemy następujących oznaczeń:

$$(U_\lambda\eta)(\omega) := \left[u_0^T(\lambda, x_0, x_1, \ldots, \omega), u_1^T(\lambda, x_0, x_1, \ldots, \omega), \ldots\right]^T \qquad (70)$$

$$(A_\lambda\eta)(\omega) := \left[\left(\hat{h}(\chi_0^{(\lambda)}, \omega)x_0\right)^T, \left(\hat{h}(\chi_1^{(\lambda)}, \omega)x_1\right)^T, \left(\hat{h}(\chi_2^{(\lambda)}, \omega)x_2\right)^T, \ldots\right]^T \qquad (71)$$

$\tilde{\eta} := \left[0^T, \tilde{x}_1^T, 0^T, 0^T, \ldots\right]^T$, a przez δ_X i δ_Y normy elementu $\left[0^T, 1^T, 0^T, 0^T, \ldots\right]^T$ odpowiednio w przestrzeniach X i Y. Załóżmy, że przestrzenie X i Y są w dalszych rozważaniach ustalone.

TWIERDZENIE 8.5. Załóżmy, że spełnione są hipotezy (T1-T2) i ponadto:

(i) istnieje niepusty zbiór $D:=\{(\lambda, x_1): |\lambda-\tilde{\lambda}|\leq r_1, \ \|x_1-\tilde{x}_1\|_2\leq r_2\}$, który nie zawiera w swoim wnętrzu, ani na brzegu ∂D, innych rozwiązań równania (65) poza punktem $(\tilde{\lambda}, \tilde{x}_1)$ oraz indeks Leraya-Schaudera

$$i(\Phi, D) \neq 0$$

(ii) $\forall$ $\lambda\in[\tilde{\lambda}-r_1, \tilde{\lambda}+r_1]$ operator U_λ, określony relacją (70), odwzorowuje kulę $\mathcal{U}(\tilde{\eta}, r)$ przestrzeni X w przestrzeń Y, zależy w sposób ciągły od parametru λ i spełnia w tej kuli warunek Lipschitza

$$\|U_\lambda\eta_1 - U_\lambda\eta_2\|_Y \leq \alpha(r, r_1)\|\eta_1 - \eta_2\|_X, \qquad \forall\ \eta_1, \eta_2\in\mathcal{U}(\tilde{\eta}, r); \qquad (72)$$

(iii) operator A_λ określony relacją (71) jest liniowym, zwartym przekształceniem przestrzeni Y w X, zależnym w sposób ciągły od parametru $\lambda\in\mathcal{U}(\tilde{\lambda}, r_1)$, funkcja $\hat{h}(\chi_1^{(\lambda)}, \omega)$ jest ciągła $\forall$ $\lambda\in\mathcal{U}(\tilde{\lambda}, r_1)$;

(iv) prawdziwa jest nierówność

$$q(r, r_1) < \min\left(r-\delta_X r_1, \ \frac{\delta_Y}{\alpha(r, r_1)} \inf_{\partial D}\|\Phi(\lambda, x_1, \omega)\|_2\right) \qquad (73)$$

gdzie

$$q(r, r_1) := \sup_{\lambda\in\mathcal{U}(\tilde{\lambda}, r_1)} \|(I-P)A_\lambda\|_{Y\to X}\left(r+\delta_X\|\tilde{x}_1\|_2\right)\alpha(r, r_1).$$

Wówczas równanie (60) posiada rozwiązanie okresowe

$$x(t,\omega) = x_0(\omega) + 2x_1(\omega)\mathrm{Re}\left(\chi_1^{(\lambda)}(t)\right) + 2\sum_{|k|\geq 2}\mathrm{Re}\left(x_k(\omega)\chi_k^{(\lambda)}(t)\right) \tag{74}$$

i ponadto zachodzą następujące oszacowania rozwiązania przybliżonego (66):

$$|\lambda-\tilde{\lambda}|\leq r_1,\ \ \|x_1-\tilde{x}_1\|<r_2,\ \ \left\|\left[x_0^T, 0^T, x_2^T, x_3^T, \dots\right]^T\right\|_X \leq q(r,r_1).$$

Dowód. Niech

$$\Gamma(\lambda,x_1,(I-P)\eta) := (I-P)A_\lambda U_\lambda \eta$$

W notacji operatorowej równanie (68) można zapisać w postaci

$$(I-P)\eta = \Gamma(\lambda,x_1,(I-P)\eta) \tag{75}$$

Dla każdego ustalonego punktu $(\lambda,x_1)\in D$, jeżeli

$$\|(I-P)\eta\|_X \leq r_3 := r-\delta_X r_1$$

to

$$\|\eta-\tilde{\eta}\|_X \leq \|P(\eta-\tilde{\eta})\|_X + \|(I-P)(\eta-\tilde{\eta})\|_X =$$

$$= \|P(\eta-\tilde{\eta})\|_X + \|(I-P)\eta\|_X \leq \delta_X r_1 + r_3 = r$$

Wynika stąd, że jeśli $\|(I-P)\eta\|_X \leq r_3$, $\|x_1-\tilde{x}_1\|_2\leq r_1$, to η należy do dziedziny operatora U_λ, a $(I-P)\eta$ do dziedziny operatora Γ. Operator Γ przekształca kulę $\|(I-P)\eta\|_X\leq r_3$ podprzestrzeni $(I-P)X$ w podprzestrzeń $(I-P)X$ i zachodzi oszacowanie

$$\|\Gamma(\lambda,x_1,(I-P)\eta)\|_X \leq \|(I-P)A_\lambda\|_{Y\to X}\,\|U_\lambda\eta\|_Y \leq$$

$$\leq \sup_{\lambda\in\mathcal{U}(\tilde{\lambda},r_1)}\|(I-P)A_\lambda\|_{Y\to X}\left(r+\delta_X\|\tilde{x}_1\|_2\right)\alpha(r,r_1) = q(r,r_1)$$

Jeżeli $q(r,r_1)\leq r_3$, to na mocy założenia (iv), operator Γ odwzorowuje kulę $\|(I-P)\eta\|_X\leq r_3$ w siebie. Pokażemy, że jest w tej kuli zwężający. Z warunku Lipschitza (72) dla operatora U_λ, prawdziwego w kuli o promieniu $r>r_3$ wynika

$$\|\Gamma(\lambda,x_1,(I-P)\eta_1) - \Gamma(\lambda,x_1,(I-P)\eta_2)\|_{(I-P)X} \leq$$

$$\leq \|(I-P)A_\lambda\|_{Y\to X}\,\|U_\lambda(I-P)\eta_1 - U_\lambda(I-P)\eta_2\|_Y \leq$$

$$\leq \sup_{\lambda\in\mathcal{U}(\tilde{\lambda},r_1)}\|(I-P)A_\lambda\|_{Y\to X}\alpha(r,r_1)\|(I-P)\eta_1 - (I-P)\eta_2\|_X \tag{76}$$

Z warunku (73) łatwo wynika, że Γ jest operatorem zwężającym w kuli $\|(I-P)\eta\|_X\leq r_3$. Układ równań (63=75) ma więc w tej kuli dokładnie jedno rozwiązanie

$$v(\lambda,x_1,\omega) = \left[x_0^T(\lambda,x_1,\omega), 0^T, x_2^T(\lambda,x_1,\omega), x_3^T(\lambda,x_1,\omega), \dots\right]^T \tag{77}$$

spełniające warunek $\|v\|_X \leq q(r,r_1)$ i zależne w sposób ciągły od parametrów λ i x_1. Podstawmy rozwiązanie (77) do równania (69). Niech dalej

$$F(\lambda,x_1,\omega) := \hat{h}\left(\chi_1^{(\lambda)}\right)\left[u_1(\lambda,x_0(\lambda,x_1,\omega),x_1,x_2(\lambda,x_1,\omega),\dots,\omega) - \right.$$

$$\left. - u_1(\lambda,0,x_1,0,0,\dots\dots,\omega)\right] \tag{78}$$

będzie zwartym operatorem zmiennych w obszarze D. Łatwo zauważyć, że

$$\|F(\lambda,x_1,\omega)\|_Y = \|F(\lambda,x_1,\omega)\|_2\delta_Y \leq \alpha(r,r_1)\|v\|_X \leq \alpha(r,r_1)q(r,r_1) \tag{79}$$

Z ostatniej nierówności wynika, że

$$\|F(\lambda,x_1,\omega)\|_2 < \inf_{\partial D}\|\Phi(\lambda,x_1,\omega)\|_2$$

a stąd, że

$$\inf_{\partial D}\|\Phi(\lambda,x_1,\omega) - F(\lambda,x_1,\omega)\|_2 > 0$$

To dowodzi, że operatory Φ oraz Φ-F są homotopijne na ∂D. Na podstawie własności homotopii operatorów zwartych wynika z założenia (i), że

$$i(\Phi-F,D) \neq 0$$

a stąd, że równanie (69) posiada we wnętrzu obszaru D co najmniej jedno rozwiązanie. Z istnienia rozwiązania równania (69) wynika wprost istnienie rozwiązania układu równań (63), które zapisujemy w postaci (74).

Oszacowania dokładności rozwiązania przybliżonego wynikają wprost z definicji obszaru D i nierówności (76). ■

UWAGA 8.3. W konstrukcji dowodu twierdzenia 8.5 wykorzystuje się warunek Lipschitza funkcji nieliniowej f. Można zauważyć, że z warunku tego można zrezygnować rozumując podobnie jak w dowodzie twierdzenia 8.3. Analogicznie, jeśli założymy ciągłość operatora A_λ, $\forall\ \omega\in\Omega$, założenie o zwartości otrzymamy w sposób naturalny, ponieważ wówczas $A_\lambda:\mathbb{C}^n\longrightarrow\mathbb{C}^n$ $\forall\ \omega\in\Omega$ [245-246]. ■

Rozdział IX. PODSUMOWANIE I WNIOSKI KOŃCOWE

Aby lepiej zrozumieć genezę pracy, zwróćmy uwagę zarówno na zaskakujące podobieństwa, jak i różnice, które zauważamy porównując wyniki teorii układów dynamicznych z czasem ciągłym z wynikami analogicznej teorii, gdy czas jest elementem innego zbioru, np. dyskretnego zbioru liczb całkowitych lub torusa. Wspomniane zbiory chwil czasowych nie zostały wymienione przypadkowo, odgrywają one w teorii układów mechanicznych decydującą rolę. Zauważmy, że wszystkie, z punktu widzenia matematyki, stanowią podzbiory zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}^1$. Ponieważ dla osi rzeczywistej charakterystyczna jest topologia przedziałowa, wynika stąd, dla wspomnianych już podzbiorów, ogromne podobieństwo w opisie wszystkich cech związanych ze zbieżnością. Dla przykładu wymienić tu można takie podstawowe własności, jak ciągłość czy całkowalność. W związku z tym najważniejsze cechy sygnału fizycznego, takie jak: ciągłość, ograniczoność, okresowość, stacjonarność, energia, moc, własności asymptotyczne określane są w bardzo podobny sposób zarówno dla sygnałów z czasem ciągłym, jak i dyskretnym.

Zwróćmy uwagę na jeszcze inną analogię. Transformacja Z jest ważnym narzędziem analizy liniowych, stacjonarnych układów dynamicznych z czasem dyskretnym. Jak pokazano, patrz dodatek B, transformacja Z jest dla układów z czasem dyskretnym tym, czym dla układów z czasem ciągłym jest transformacja Laplace'a. Można powiedzieć więcej, transformacja Z jest jakby logicznym połączeniem pomiędzy analizą sygnałów z czasem ciągłym i dyskretnym, ponieważ transformata Laplace'a $\hat{f}(s)$ idealnego sygnału impulsowego f(t) jest związana z Z-transformatą F(z) sygnału z czasem dyskretnym f(nT) poprzez przekształcenie $z=\exp(sT)$. Wymieniona funkcja odwzorowuje lewą półpłaszczyznę zbioru $\mathbb{C}^1$ w jednostkowy dysk. Wynika stąd natychmiast, że wnętrze dysku jednostkowego, jego brzeg - okrąg jednostkowy oraz dopełnienie dysku mają dla układów z czasem dyskretnym takie samo znaczenie, jakie dla układów z czasem ciągłym odgrywają: lewa półpłaszczyzna $\mathbb{C}^1$, oś urojona $z=j\nu$ oraz prawa półpłaszczyzna $\mathbb{C}^1$. Mając powyższe na uwadze spostrzegamy natychmiast, że powszechnie znane w stabilności: twierdzenie

Nyquista dla układów z czasem ciągłym i twierdzenie Cypkina dla układów z czasem dyskretnym wyrażają mniej więcej tę samą treść. Takich analogii można pokazać więcej, a jednak teorie układów z czasem ciągłym i dyskretnym są w zasadzie rozwijane niezależnie. Generalnie można powiedzieć, że teoria ciągłych układów dynamicznych znacznie wyprzedziła w rozwoju analogiczną teorię układów dyskretnych, zwłaszcza w takich dziedzinach, jak teoria drgań okresowych i prawie okresowych, teoria bifurkacji i chaosu.

Podstawowym celem pracy stała się zatem odpowiedź na pytanie:

> W jakim zakresie można próbować stworzyć uniwersalną teorię pozwalającą na wszechstronną analizę różnorodnych, praktycznych zagadnień z zakresu dynamiki złożonych układów mechanicznych, z czasem zarówno ciągłym, jak i dyskretnym?

Próbę odpowiedzi na tak sformułowane pytanie podjęto przyjmując, że w całej pracy stosowane będą konsekwentnie następujące założenia:

i) układy mechaniczne rozpatrywane będą jako szczególne układy dynamiczne, rozumiane jako uporządkowane zbiory pewnych pojęć, co pozwoli na uogólnienia wykraczające poza zakres mechaniki;

ii) czas, w tak rozumianych układach dynamicznych, jest elementem pewnej grupy przemiennej (abelowej), częściowo lub całkowicie uporządkowanej;

iii) do opisu zjawisk, zachodzących w rozpatrywanych układach dynamicznych, zastosowano losowe równania całkowe.

Założenia (i-iii) omówione są szczegółowo w rozdziale 2. Mechaniczny układ dynamiczny zdefiniowany został jako obiekt, który rozpatrywany jest z punktu widzenia teorii systemów. Części 2.1 i 2.2 zawierają elementy nowości w stosunku do istniejącej teorii, natomiast część 2.3 jest całkowicie oryginalna. Wprowadzone zostały nowe sposoby opisu modeli losowych układów dynamicznych. Wykorzystano w tym celu, kluczowe dla całej pracy, nowe pojęcie równania całkowego Volterry określonego na lokalnie zwartej grupie abelowej.

Rozdział 3 zawiera omówienie licznych przykładów modelowania układów mechanicznych przy zastosowaniu równań całkowych. W części 3.1 nowością jest fragment punktu 3.1.2. Część 3.2.1 zawiera pewne elementy nowości, części 3.2.2 - 3.2.4 stanowią istotne rozszerzenie publikowanych wyników na układy z wielowymiarowym, całkowym sprzężeniem zwrotnym. Część 3.3 dotycząca zagadnień z czasem dyskretnym jest całkowicie oryginalna.

Tematyka rozdziału 4 była do tej pory najlepiej opracowana pod względem matematycznym. Omówienie najważniejszych, z punktu widzenia zastosowań, sygnałów deterministycznych i stochastycznych oparto w zasadzie na znanych wynikach matematycznych. W przypadku deterministycznym, elementy nowości pojawiają się tylko w przypadku sygnałów okresowych, w części 4.1.3. W przypadku stochastycznym elementy nowości dotyczą wprowadzenia przestrzeni C_0, $\mathcal{B}_0$, C/C_0, które są wykorzystywane przy analizie stanów ustalonych w sensie średnim w układach dynamicznych. Wydaje się, że całkowitą nowością jest treść punktu 4.2.4 dotycząca sygnałów stochastycznych okresowych.

Rozdział 5 jest konsekwencją wprowadzenia do rozważań nowego rodzaju operatorów całkowych Volterry. Jego treść poświęcona jest w całości badaniu ich własności w przestrzeniach sygnałów, które są szczególnie ważne z punktu widzenia zastosowań. Nowością są prawie wszystkie wyniki zawarte w tym rozdziale.

Rozdział 6 poświęcony jest w całości linearyzacji statystycznej. Najważniejsze wyniki dotyczą głównie próby oszacowania błędów linearyzacji statystycznej w zastosowaniu do układów dynamicznych. Niezależnie od tego nowością są: wielowymiarowa wersja nowej metody linearyzacji statystycznej oparta na własnościach energetycznych oraz przykład 6.4 wykorzystujący ścisłe rozwiązanie nowej klasy równań Fokkera - Plancka, opracowane przez autora.

Zagadnienia stabilności, to jedyny dział dynamiki, w którym praktycznie zastosowano koncepcję zawartą w założeniu (ii). Rozdział 7 w całości stanowi uogólnienie wyników deterministycznych znanych dla układów z czasem ciągłym i częściowo znanych dla układów z czasem dyskretnym.

Rozdział 8 zawiera uogólnienie wyników deterministycznych dla układów z czasem ciągłym, na przypadek układów określonych na grupie z jednoczesnym uwzględnieniem ich charakteru probabilistycznego.

W celu ułatwienia czytania i zrozumienia pracy, w trzech dodatkach podano uzupełniające wiadomości o charakterze matematycznym. Dodatek B zawiera oryginalne wyniki autora dotyczące określenia pewnych przekształceń całkowych funkcji zdefiniowanych na grupie, natomiast dodatek C podstawowe wiadomości dotyczące przekształceń procesów stochastycznych stacjonarnych w układach dynamicznych i ich oszacowania. W znacznej mierze są to wyniki oryginalne.

Intencją autora, w całej pracy, było takie przedstawienie wyników, aby wywołać u czytelnika wrażenie, że są one jak najbardziej naturalną i prostą konsekwencją uogólnień w sformułowaniu problemu, zwłaszcza w stosunku do

klasycznego ujęcia dynamiki układów ciągłych lub dyskretnych. Z tego powodu praca jest próbą uporządkowania i zaawansowania istniejącego stanu wiedzy w przedstawionym zakresie dynamiki i w maksymalnym stopniu próbuje odwoływać się do znanych czytelnikowi, klasycznych wyników z dynamiki układów mechanicznych w warunkach probabilistycznych.

Należy zaznaczyć, że pomimo monograficznego charakteru opracowania, wydaje się, że łatwo wskazać, w jakim kierunku powinny iść dalsze badania:

- wyniki rozdziału 5 zawierają oszacowania dotyczące zasadniczo tylko sygnałów hilbertowskich, okresowych i prawie okresowych. W zasadzie pominięto prawie w całości analizę układów dynamicznych w przestrzeniach innych sygnałów, np. ciągłych czy ograniczonych;
- skrótowo potraktowano analizę korelacyjną układów liniowych, pomijając na przykład możliwość generalizacji uogólnionej metody spektralnej w teorii niestacjonarnych procesów losowych w układach dynamicznych;
- wyniki analizy dokładności metod linearyzacji statystycznej trudno uznać za w pełni satysfakcjonujące, zwłaszcza w odniesieniu do najnowszej metody opartej na własnościach energetycznych;
- analiza stabilności dotyczyła tylko własności w sensie średnim, z pominięciem innych ważnych aspektów tej tematyki, na przykład stabilności z prawdopodobieństwem 1;
- własności asymptotyczne oparte są na podstawowych wynikach dotyczących splotu i wydaje się, że mogą być w znacznym stopniu rozszerzone;
- zagadnienia drgań okresowych i prawie okresowych, które rozpatrywane były w rozdziale 8, można uznać jedynie za wstępne potraktowanie problemu, zwłaszcza że pominięto całkowicie niezwykle złożone problemy dotyczące bifurkacji i chaosu.

Należy zaznaczyć, że dalsze zaawansowanie badań w omawianych dziedzinach wymaga z jednej strony rozwoju teorii równań całkowych zdefiniowanych na grupach częściowo uporządkowanych, a z drugiej silniejszych wyników dotyczących przekształceń całkowych funkcji określonych na grupach.

W ostatecznym podsumowaniu warto zauważyć, że wszystkie osiągnięte wyniki wynikają z własności algebraicznych zbioru czasowego i w żadnym wypadku nie zależą od własności różniczkowych trajektorii układów dynamicznych. Ostatnia konkluzja, biorąc pod uwagę dominującą rolę równań różniczkowych w teorii układów dynamicznych, wydaje się zdumiewająca.

Dodatek A. PODSTAWOWE WIADOMOŚCI O GRUPACH ABELOWYCH

W całej pracy podstawowymi obiektami będą grupy. Dla pewnych celów związanych z naszymi zastosowaniami bardziej odpowiednie będą obiekty zwane półgrupami. Przez półgrupę rozumieć będziemy uporządkowaną parę składającą się z niepustego zbioru G i odwzorowania binarnego $(x,y) \longrightarrow xy$, odwzorowującego $G\times G \longrightarrow G$ takiego, że $x(yz)=(xy)z$ $\forall$ $x,y,z\in G$. Jednym słowem, półgrupa jest dowolnym niepustym zbiorem z określoną na nim łączną operacją binarną. Elementem neutralnym (jedynką) półgrupy G nazywany jest element $e\in G$, dla którego $ex=xe=e$ $\forall$ $x\in G$. Półgrupa G może mieć tylko jeden element neutralny. Przez półgrupę multiplikatywną (addytywną) rozumiemy taką półgrupę, w której obraz elementu (x,y) oznaczamy xy $(x+y$ odpowiednio). W półgrupie addytywnej symbol "0" oznacza element neutralny nazywany zerem i w tym przypadku $0+x=x+0=x$ $\forall$ $x\in G$.

Elementem odwracalnym w półgrupie G nazywany jest element x, dla którego istnieje element $y\in G$ taki, że $xy=yx=e$. Element y określony jest w sposób jednoznaczny, oznaczamy go x^{-1} i nazywamy elementem odwrotnym do x. Jeżeli półgrupa G jest addytywna, to element odwrotny do x oznaczamy $-x$. W tym przypadku $0=x+(-x)=-x+x$. Dla dowolnego $y\in G$ oznaczymy $y-x=y+(-x)$.

Grupą nazywać będziemy półgrupę z elementem neutralnym, w której każdy element jest odwracalny. Grupę G (półgrupę) nazwiemy abelową (przemienną), jeżeli $xy=yx$ $\forall$ $x,y\in G$.

PRZYKŁADY

$\mathbb{R}^1$ addytywna grupa liczb rzeczywistych, analogicznie $\mathbb{R}^k$, $k\geq 1$, k-wymiarowa rzeczywista przestrzeń wektorowa.

$\mathbb{C}^1$ addytywna grupa liczb zespolonych, podobnie $\mathbb{C}^r$, $r\geq 1$.

$\mathbb{Q}$ addytywna grupa liczb wymiernych.

$\mathbb{Z}^1$ addytywna grupa liczb całkowitych, analogicznie $\mathbb{Z}^k$, $k\geq 1$, "krata" punktów w przestrzeni $\mathbb{R}^k$ o współrzędnych w $\mathbb{Z}^1$. Dla dowolnego $a\in\mathbb{R}^1$ określimy grupę $a\mathbb{Z}^1$ jako zbiór $\{ak : k\in\mathbb{Z}^1\}$, w praktyce będziemy brać $a>0$.

$\mathbb{T}^1$ multiplikatywna grupa liczb zespolonych o module 1 postaci $\left\{e^{i2\pi x} : |x|\leq 1\right\}$ jest ona izomorficzna z grupą ilorazową $\mathbb{R}^1/\mathbb{Z}^1$. Grupa $\mathbb{T}^k$, $k\geq 1$ jest k-wymiarowym torusem. Oczywiście $\mathbb{T}^1\subset\mathbb{C}^1$.

$\mathbb{Z}(m)=\{0,1,2,.....,m-1\}$, skończona grupa cykliczna zawierająca m elementów z operacją binarną będącą dodawaniem mod m.■

Elementy grupy oznaczane będą małymi literami t,s,τ,g,h,....

Niech A i B będą podzbiorami grupy G. AB oznaczać będzie zbiór $\{ab: a\in A, b\in B\}$, natomiast A^{-1} zbiór $\{a^{-1}: a\in A\}$. Piszemy dalej aB dla oznaczenia $\{a\}B$ i Ba dla $B\{a\}$. $A^2:=AA$, $A^3:=AAA$ itd.

Dla podgrupy H grupy G symbol G/H oznaczać będzie przestrzeń warstw względem H. Punktami G/H będą zbiory (warstwy) xH i $G/H=\{xH: x\in G\}$. Niech H będzie normalną, domkniętą podgrupą grupy G. Odwzorowanie kanoniczne G na G/H oznaczymy przez $\pi_H: x\longrightarrow y=\pi_H(x)=xH$. Grupa G/H nazywana będzie grupą ilorazową grupy G względem podgrupy H. W dalszych rozważaniach założono, że warunek normalności podgrupy H jest zawsze spełniony.

Przyjmiemy dalej, że grupa G jest grupą ze strukturą przestrzeni topologicznej, tzn. z określonym systemem zbiorów otwartych. Jeżeli binarna operacja grupowa oraz inwersja $x\longrightarrow x^{-1}$ grupy G na siebie są ciągłe w sensie wprowadzonej topologii, to grupę będziemy nazywać grupą topologiczną.

Będziemy mówić, że grupa G jest zwarta (przeliczalnie zwarta), jeżeli jej dowolne otwarte pokrycie zawiera podpokrycie skończone i że jest lokalnie zwarta (lokalnie przeliczalnie zwarta), jeżeli każdy element grupy posiada otoczenie ze zwartym (przeliczalnie zwartym) domknięciem.

Jeżeli H jest podgrupą grupy topologicznej G, to H jest grupą topologiczną względem topologii generowanej przez grupę G. Jeżeli G jest lokalnie zwartą grupą abelową (zwartą grupą abelową) i H jest dowolną podgrupą, to przestrzeń G/H jest lokalnie zwartą grupą abelową (zwartą grupą abelową).

W całej pracy przyjmuje się, że grupy, z którymi mamy do czynienia, są lokalnie zwarte. Dla skrócenia notacji lokalnie zwartą grupę abelową będziemy oznaczać lzga. [17,30,34,76,207,284,314,355,372-373].

DEFINICJA A1. Niech M będzie dowolnym zbiorem ,który zawiera więcej niż jeden element i w którym określona jest relacja "≤" pomiędzy pewnymi parami elementów należącymi do M. Mówimy, że relacja "≤" porządkuje zbiór M, jeżeli spełnione są następujące warunki:

(i) Jeżeli x≤y i y≤z wówczas x≤z ;

(ii) x ≤ x ;

(iii) Jeżeli x≤y i y≤x wówczas x=y ;

∀ x,y,z ∈ M. Jeżeli zbiór M=G jest grupą abelową, mówimy, że struktura grupowa i struktura porządku są zgodne ze sobą, jeżeli następujący dodatkowy warunek jest spełniony:

(iv) Jeżeli z ∈ G i x≤y to xz≤yz ∀ x,y ∈ G.■

Uporządkowany zbiór M z odpowiednią strukturą grupy abelowej jest nazywany uporządkowaną grupą abelową [34,284,372].

DEFINICJA A2. Niech M będzie dowolnym zbiorem, który zawiera więcej niż jeden element i w którym określona jest relacja "<" pomiędzy pewnymi parami elementów należącymi do M. Mówimy, że relacja "<" określa całkowite liniowe uporządkowanie zbioru M, jeżeli są spełnione następujące warunki:

(i) Jeżeli x<y i y<z, to x<z;

(ii) Jeżeli x<y, to nie zachodzi y<x;

(iii) Jeżeli x≠y, to x<y lub y<x;

∀ x,y,z ∈ M. Jeżeli zbiór M=G jest grupą abelową, powiemy, że struktura grupowa i struktura porządku liniowego są zgodne ze sobą, jeżeli następujący dodatkowy warunek jest spełniony:

(iv) Jeżeli z∈G i x<y, to xz<yz ∀ x,y ∈ G.■

Liniowo uporządkowany zbiór M z odpowiadającą mu abelową strukturą grupową nazywany jest grupą abelową liniowo uporządkowaną [34,284,372].

Jeżeli "<" jest relacją porządku liniowego i x<y, to przyjęto mówić, że x poprzedza y lub x jest mniejsze od y (względem uporządkowania "<") oraz że y następuje po x lub y jest większe niż x. Jeżeli M jest liniowo uporządkowany ze względu na porządek "<" , możemy zdefiniować uporządkowanie w następujący sposób

x≤y wtedy i tylko wtedy, gdy x<y lub x=y

Niech G będzie grupą uporządkowaną ze względu na relację "≤" . Wynika z założenia (iv) def. A1, że jeżeli e≤x i e≤y, to y≤xy. Oznaczymy przez Q zbiór x∈G takich, że $\{x: e\le x\}$ jest domknięty ze względu na operacje grupowe. Ponieważ relacja x≤y jest równoważna $e\le yx^{-1}$, stąd wynika, że $yx^{-1}\in Q$.

Odwrotnie wynika stąd następujący wynik.

LEMAT A1 . Jeżeli Q⊂G, e∈Q i QQ⊂Q, to relacja $yx^{-1}\in Q$ definiuje relację porządku zgodną ze strukturą grupową w G. Ta relacja określa liniowy

porządek w grupie wtedy i tylko wtedy, gdy $Q \cap Q^{-1} = \{e\}$. Wprowadzona w taki sposób relacja całkowicie porządkuje G, jeżeli ponadto $Q \cup Q^{-1} = G$ [34]. ■

Dla grup uporządkowanych przyjęto, że element x, spełniający warunek $e \leq x$, jest dodatni (ewentualnie ujemny, gdy $x \leq e$). Zauważmy, że e jest jedynym elementem, który jest jednocześnie dodatni i ujemny. Dowolny element, który spełnia warunek $e < x$, nazywany jest ściśle dodatnim (ściśle ujemnym, jeżeli $x < e$).

Powiemy, że podzbiór $A \subset G$ jest ograniczony w G, jeżeli posiada górną i dolną granicę w G. Zbiór G nazwiemy zupełnym (ze względu na porządek "<") wtedy i tylko wtedy, gdy każdy niepusty podzbiór G ograniczony z góry posiada supremum.

Dla $a, b \in G$ takich, że $a < b$, oznaczmy $]a,b[:= \{x \in G : a < x < b\}$. Niech rodzina wszystkich zbiorów $]a,b[$ będzie otwartą bazą topologii na G, zauważmy, że G nie posiada elementu największego ani najmniejszego, co powoduje, że $G = \cup\{]a,b[: a < b\}$. A zatem G jest normalną grupą T_0. Dalej używać będziemy notacji $[a,b] := \{x \in G : a \leq x \leq b\}$ dla określenia domkniętych i ograniczonych zbiorów (przedziałów).

Zakładamy dalej, że relacja $yx^{-1} \in Q$ $(x, y \in G)$ jest relacją porządku zgodną ze strukturą grupową i ponadto $Q \cap Q^{-1} = \{e\}$ oraz $Q \cup Q^{-1} = G$. W konsekwencji będziemy rozpatrywać G jako liniowo uporządkowany zbiór z topologią przedziałową postaci

$$]a, \infty[:= \{x \in G : x > a\},$$

gdzie $]\infty, a[:= \{x \in G : x < a\}$, $a \in G$, jest otwartą bazą tej topologii. Ponieważ w grupie uporządkowanej nie ma elementu największego i najmniejszego, można wprowadzić alternatywną topologię określoną przez otwarte przedziały postaci $]a,b[$, gdzie $a < b$. Zakładamy dalej, że grupa G jest zupełna ze względu na porządek "<".

Więcej szczegółów o grupach uporządkowanych czytelnik znajdzie w następujących pracach [34, 284, 314, 372].

DEFINICJA A3. W dowolnej lzga. G można określić miarę niezmienniczą μ. Miara ta posiada następujące własności:

(i) μ jest miarą regularną;

(ii) $\mu(F) < \infty$ dla dowolnego zwartego podzbioru $F \subset G$;

(iii) $\mu(U) > 0$ dla dowolnego otwartego podzbioru $U \subset G$;

(iv) μ jest miarą niezmienniczą, tzn. $\mu(gE) = \mu(E)$ dla dowolnego elementu $g \in G$ i każdego zbioru borelowskiego $E \in G$.

Miara taka jest jedyna z dokładnością do czynnika stałego. Nazywamy ją niezmienniczą miarą Haara [33, 314, 372]. ■

Niech dalej stale G oznacza lzga. z miarą Haara μ. Wówczas $\mu(G) < \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest grupą zwartą. Jeżeli grupa G nie jest zwarta, to zawsze $\mu(G) = \infty$.

Szczegóły dotyczące całkowania na grupach lokalnie zwartych czytelnik znajdzie w [33, 105, 314, 372].

Podstawową rolę w zagadnieniach związanych z przekształceniami całkowymi (np. przekształceniem Fouriera) i szeregami funkcji okresowych i prawie okresowych określonych na grupach odgrywają specjalne funkcje, zwane charakterami.

DEFINICJA A4. Charakterem lzga. G jest nazywana ciągła, zespolona funkcja χ określona na G i taka, że

(i) $\chi(g) \in \mathbb{C}^1$ $\forall$ $g \in G$;

(ii) $|\chi(g)| = 1$ $\forall$ $g \in G$ [207, 372]. ■

Iloczyn $\chi_1 \chi_2$ charakterów określa się jako zwykłe mnożenie:

$$(\chi_1 \chi_2)(g) := \chi_1(g) \chi_2(g), \qquad \forall\ g \in G$$

Dowodzi się, że każda lzga. G posiada "wystarczająco dużo" charakterów, tzn. dla dowolnego $g \in G$, $g \neq e$ istnieje charakter $\chi(\cdot)$ taki, że $\chi(g) \neq 1$.

Charaktery grupy G same tworzą multiplikatywną grupę abelową z mnożeniem jako działaniem grupowym, elementem neutralnym jest funkcja 1 $(\chi(g) = 1$ $\forall$ $g \in G)$ i $\chi^{-1} = \bar{\chi}$.

DEFINICJA A4. Grupę wszystkich ciągłych charakterów grupy G nazywamy grupą charakterów grupy G lub grupą sprzężoną (dualną) i oznaczamy $\hat{G}$. Miarę Haara w grupie dualnej oznaczać będziemy $m(\cdot)$ [207, 372]. ■

PRZYKŁADY

$G = \mathbb{R}^1$ każdy charakter grupy $\mathbb{R}^1$ ma postać $x \longrightarrow \exp(i2\pi xy)$, $\forall$ $y \in \mathbb{R}^1$, stąd wynika, że grupa charakterów jest izomorficzna z grupą $\mathbb{R}^1$, co zaznaczamy $\hat{\mathbb{R}}^1 \cong \mathbb{R}^1$.

$G = \mathbb{Z}^1$ grupa charakterów jest grupą obrotów koła, tzn. $\hat{\mathbb{Z}}^1 = \{\exp(i2\pi nx) : |x| \leq 1, n \in \mathbb{Z}^1\}$, łatwo zauważyć, że $\hat{\mathbb{Z}}^1 = \mathbb{T}^1$.

$G = \mathbb{T}^1$ grupą dualną do grupy obrotów koła jest grupa liczb całkowitych, jej charakterami są funkcje $\{\exp(i2\pi nx : n \in \mathbb{Z}^1, |x| \leq 1\}$, tzn. $\hat{\mathbb{T}}^1 = \mathbb{Z}^1$. ■

Inne przykłady czytelnik znajdzie np. w pracy [372, str. 506].

Dodatek B. PRZEKSZTAŁCENIA CAŁKOWE

W tej części pracy zebrano, najważniejsze dla zastosowań, fakty z teorii przekształceń całkowych miar i funkcji wektorowych, określonych na lzga. G. Na wynikach tych w decydującym stopniu oparte są te fragmenty pracy, w których analizowane są układy dynamiczne zawierające część liniową stacjonarną.

Przez $M(G;\mathbb{R}^n)$ i $M(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$ oznaczać będziemy przestrzenie liniowe regularnych miar borelowskich określonych na $\mathfrak{F}(G)$ o wartościach, odpowiednio w $\mathbb{R}^n$ i $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$.

Niech M_Q oznaczać będzie domkniętą podprzestrzeń miar należących do M, $M_Q \subset M$, których nośnik zawarty jest w Q. Przez $Q \subset G$ stale oznaczamy półgrupę o dodatniej mierze Haara $\mu(Q)>0$.

Przedstawione wyniki są rozszerzoną wersją pracy Skrzypczyka [234] i uogólnieniem wyników Falba i Freedmana [77].

Zakłada się, że czytelnik w zasadzie zna teorię algebr Banacha, a w szczególności teorię Gelfanda algebr przemiennych [210, 306, 320].

Zauważmy, że dla $k\in M(G;\mathbb{R}^n)$ i $h\in\mathbb{R}^n$ mamy $k_h(\cdot) := \langle k(\cdot), h\rangle \in M(G;\mathbb{R}^1)$ i transformatę Fouriera-Stieltjesa miary k_h definiujemy w zwykły sposób

$$\hat{k}_h(\chi) = \int_G \bar{\chi}(g)k_h(dg), \qquad \chi\in\hat{G}$$

por. [77, 234, 371-373].

DEFINICJA B1. Niech $k\in M(G;\mathbb{R}^n)$. Transformata Fouriera-Stieltjesa miary k, oznaczona dalej $\hat{k}$ jest funkcją zespoloną określoną na $\hat{G}$, o wartościach w $\mathbb{R}^n$, taką, że

$$\hat{k}_h(\chi) = \hat{k}(\chi)_h$$

tzn. $\langle \hat{k}(\cdot), h\rangle = \langle k, h\rang\hat{}\,(\cdot)$, $\forall\, h\in\mathbb{R}^n$ [234, 371-373]. ■

DEFINICJA B2. Niech $k\in M(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$. Transformata F-S miary k, oznaczone dalej $\hat{k}$, jest odwzorowaniem określonym na $\hat{G}$, o wartościach w $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, określonym w sposób następujący

$$\hat{k}(\chi) = \int_G \bar{\chi}(g)k(dg), \qquad \chi\in\hat{G} \tag{1}$$

patrz również [234, 371-373]. ■

TWIERDZENIE B1. Niech $k\in M(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$. Transformata F-S miary k ma następujące własności:

(i) $\hat{k}\in C(\hat{G};\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$;

(ii) $\hat{k}(\cdot)$ jest funkcją ograniczoną;

(iii) ograniczony operator dwuliniowy $T_\chi : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}^1$ określony relacją

$$T_\chi(h_1,h_2) = \int_G \bar{\chi}(g)\langle k(dg)h_1, h_2\rangle \qquad \forall\, h_1,h_2\in\mathbb{R}^n$$

jest w sposób jednoznaczny związany z operatorem $\hat{k}(\chi)$ dla każdego $\chi\in\hat{G}$, tzn. $T_\chi(h_1,h_2)=\langle\hat{k}(\chi)h_1,h_2\rangle$.

Dowód. Ponieważ $|\bar{\chi}(g)|=1$ $\forall\,\chi\in\hat{G}$ i miara k ma wahanie ograniczone, więc operator $\hat{k}$, wprowadzony relacją (i) jest dobrze określony, por. [372-373] i można go oszacować

$$|\hat{k}(\chi)| \le \int_G |\bar{\chi}(g)||k(dg)| \le \mathcal{V}ar_G(k), \qquad \forall\,\chi\in\hat{G}$$

gdzie $\mathcal{V}ar_G(k)$ oznacza wahanie bezwzględne miary wektorowej k [64, 70, 372-373]. Stąd wynika, że $\hat{k}$ jest funkcją ograniczoną. Dalej mamy

$$\left|\hat{k}(\chi_1)-\hat{k}(\chi_2)\right| \le \sup_{g\in G}\left|\bar{\chi}_1(g)-\bar{\chi}_2(g)\right| \mathcal{V}ar_G(k), \qquad \forall\,\chi_1,\chi_2\in G$$

i ponieważ wahanie $\mathcal{V}ar_G(k)$ jest ograniczone, a topologia na G jest topologią zbieżności jednostajnej, $\hat{k}$ jest w sposób oczywisty funkcją ciągłą. Zauważmy, że miara η określona relacją

$$\eta(\cdot) = \langle k(\cdot)h_1, h_2\rangle$$

dla dowolnych $h_1,h_2\in\mathbb{R}^n$ jest elementem $M(G;\mathbb{R}^1)$ i jej przekształcenie F-S ma postać następującą

$$\hat{\eta}(\chi) = \langle\hat{k}(\chi)h_1, h_2\rangle$$

To kończy dowód. ■

Teoria transformacji Fouriera funkcji wektorowych z przestrzeni $L^p(G;\mathbb{R}^n)$ i $L^p(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$, dla $p\ge 1$, wynika z powyższych rozważań, szczegóły patrz [77, 372-373].

DEFINICJA B3. Przypuśćmy, że $x\in L^2(G;\mathbb{R}^n)$ i $k\in M(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$. Splotem funkcji operatorowej k i funkcji wektorowej x nazwiemy wynik operacji

$$(k * x)(g) = \int_G k(dh)x(g-h), \qquad g\in G \ ■ \tag{2}$$

LEMAT B2. Jeżeli $x\in L^2(G;\mathbb{R}^n)$, $k\in M(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$, to splot $(k*x)\in L^2(G;\mathbb{R}^n)$, jest określony prawie wszędzie i zachodzi oszacowanie

$$\|(k*x)(\cdot)\|_2 \le \mathcal{V}ar_G(k)\|x(\cdot)\|_2 \tag{3}$$

Dowód. Formalnie możemy napisać

$$\int_G |(k*x)(g)|^2\mu(dg) = \int_G \langle\int_G k(dh)x(g-h), \int_G k(ds)x(g-s)\rangle\mu(dg) =$$

$$= \int_G\int_G\int_G \langle k(dh)x(g-h), k(ds)x(g-s)\rangle\mu(ds) \le$$

$$\le \int_G\int_G\int_G |k(dh)||x(g-h)||k(ds)||x(g-s)|\mu(ds) \le \mathcal{V}ar_G^2(k)\|x(\cdot)\|_2^2$$

na podstawie twierdzeń Fubiniego i Tonellego, nierówności Schwartza oraz niezmienniczości miary Haara. Ponieważ

$$\int_G\int_G\int_G \langle k(dh)x(g-h), k(ds)x(g-s)\rangle\mu(ds) = \int_G \langle\int_G k(dh)x(g-h), \int_G k(ds)x(g-s)\rangle\mu(dg)$$

więc całka podwójna $\int_G\int_G \langle k(dh)x(g-h), k(ds)x(g-s)\rangle$ istnieje prawie wszędzie zgodnie z twierdzeniem Fubiniego [372], ponadto

$$\int_G\int_G \langle k(dh)x(g-h), k(ds)x(g-s)\rangle = \langle\int_G k(dh)x(g-h), \int_G k(ds)x(g-s)\rangle$$

co kończy dowód [77, 372]. ■

TWIERDZENIE B3. Jeżeli $x\in L^2(G;\mathbb{R}^n)$, $k\in M(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$, to

$$(k*x)\hat{}\,(\chi) = \hat{k}(\chi)\hat{x}(\chi), \qquad \forall\ \chi\in\hat{G} \tag{4}$$

Dowód. Ponieważ $x, k*x\in L^2(G;\mathbb{R}^n)$, transformaty Fouriera $\hat{x}$ i $(k*x)\hat{}$ są dobrze określone. Podobnie, ponieważ transformata $\hat{k}$ jest ograniczona, $\hat{k}\hat{x}\in L^2(G;\mathbb{C}^n)$. Stąd wynika, że wszystkie wielkości w równaniu (4) mają sens. Niech $h\in\mathbb{R}^n$, wówczas

$$\langle(k*x)\hat{}\,(\cdot), h\rangle = (\langle(k*x)(\cdot), h\rangle)\hat{} =$$

$$\left(\langle\int_G k(ds)x(g-s), h\rangle\right)\hat{} = \left(\int_G \langle k(ds)x(g-s), h\rangle\right)\hat{} \tag{5}$$

Niech $\{h_i\}$, $i=1,2,\ldots,n$ będzie bazą ortonormalną w $\mathbb{R}^n$. Możemy napisać

$$x(g) = \sum_{i=1}^n \langle x(g), h_i\rangle h_i = \sum_{i=1}^n x_{h_i}(g)h_i, \qquad \forall\ g\in G \tag{6}$$

gdzie $x_h(g)=\langle x(g), h_i\rangle$. Podstawmy (6) do relacji (5), otrzymamy

$$\langle(k*x)\hat{}\,(\cdot), h\rangle = \sum_{i=1}^n \left(\int_G \langle k(ds)h_i, h\rangle x_{h_i}(g-s)\right)\hat{} = \sum_{i=1}^n \left(\langle k(\cdot)h_i, h\rangle\right)\hat{}\ \hat{x}_{h_i}(\cdot) \tag{7}$$

co wynika wprost z definicji splotu.

Ponieważ

$$\widehat{\langle k(\cdot)h_i, h\rangle} = \left(\langle kh_i, h\rangle\right)\hat{}\,(\cdot)$$

więc

$$\langle(k*x)\hat{}\,(\cdot), h\rangle = \widehat{\langle k(\cdot)\sum_{i=1}^n x_{h_i}(\cdot)h_i, h\rangle} = \widehat{\langle kx, h\rangle}(\cdot)$$

co kończy dowód. ■

Odnotujmy dla porządku, że jeżeli $k, l\in M(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$, to możliwe jest określenie iloczynu tensorowego miar $(k\otimes l)\in M(G\times G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$.

DEFINICJA B4. Niech $k, l\in M(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$. Splotem $k*l$ miar operatorowych k i l nazwiemy miarę określoną w sposób następujący

$$(k*l)(E) := \int_G\int_G 1_{E_2}(t,s)(k\times l)(dt,ds) \tag{8}$$

gdzie $E\in\mathfrak{F}(G)$, $E_2=\{(t,s): t,s\in G, t+s\in E\}$. Z określenia wynika, że $E_2\in\mathfrak{F}(G\times G)$ [117]. ■

Własności splotu patrz [117, 328, 371-373]. Z ważniejszych własności odnotujmy, że mnożenie splotowe jest łączne oraz

$$\mathcal{V}ar_G(k*l) \le \mathcal{V}ar_G(k)\mathcal{V}ar_G(l) \tag{9}$$

Czasem bardziej praktyczny jest zapis nieformalny relacji (8)

$$(k*l)(E) = \int_G k(E-y)l(dy)$$

będziemy z niego dalej korzystać.

TWIERDZENIE B4. Niech $k, l\in M(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$. Prawdziwa jest relacja

$$(k*l)\hat{}\,(\chi) = \hat{k}(\chi)\hat{l}(\chi), \qquad \forall\ \chi\in\hat{G} \tag{10}$$

Dowód. Wynika łatwo z własności splotu [106, s. 128].

$$(k*l)\hat{}\,(\chi) = \int_G\int_G \bar{\chi}(ts)(k*l)(dt,ds) =$$

$$= \int_G\left(\int_G \bar{\chi}(t)k(dt)\right)\bar{\chi}(s)l(ds) = \int_G \bar{\chi}(t)k(dt)\int_G \bar{\chi}(s)l(ds) \qquad \forall\ \chi\in\hat{G},$$

co dowodzi relacji (10) [317, 372]. ■

W teorii przekształceń całkowych dużą rolę odgrywają algebry Banacha. Zauważmy, że przestrzeń $M(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$ jest nieprzemienną algebrą Banacha nad polem liczb zespolonych, ze splotem jako działaniem mnożenia i wahaniem bezwzględnym $\mathcal{V}ar_G(\cdot)$ jako normą [372]. Jeżeli grupa G nie jest dyskretna, to algebra ta posiada jedynkę. Co więcej, można dokonać dekompozycji algebry M na

sumę prostą $M(G) = M_d(G)\oplus M_s(G)\oplus M_a(G)$ zbiorów miar operatorowych nieciągłych M_d, miar osobliwych M_s oraz miar absolutnie ciągłych M_a. Zapisując miarę k, która jest elementem $M(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$ w postaci sumy $k=k_d+k_s+k_a$ otrzymamy

$$\mathcal{V}ar_G(k) = \mathcal{V}ar_G(k_d)+\mathcal{V}ar_G(k_s)+\mathcal{V}ar_G(k_a)$$

Jeżeli grupa G jest dyskretna, to $M(G)=M_d(G)=M_a(G)$ i $M_s(G)=\{\emptyset\}$.

DEFINICJA B5. Niech $k,l\in M(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$ i $x\in L^2(G;\mathbb{R}^n)$. Zdefiniujemy operator

$$(T_k x)(g) := (k*x)(g).\blacksquare$$

Każde odwzorowanie T_k jest ograniczonym operatorem określonym na przestrzeni $L^2(G;\mathbb{R}^n)$, a $T_k x\in L^2(G;\mathbb{R}^n)$. Dowodzi się, że odwzorowanie $k\longrightarrow T_k$ jest dokładną ~-reprezentacją algebry $M(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$, tzn. $T_k\neq 0$, jeżeli $k\neq 0$ [117].

DEFINICJA B6. Niech B_M oznacza zbiór wszystkich tak określonych operatorów T_k, gdzie $k\in M(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$. Określimy normę w przestrzeni B_M jako

$$\|T_k\|_{B_M} := \mathcal{V}ar_G(k).\blacksquare \qquad (11)$$

Innymi słowami, przestrzenie B_M i $M(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$ są izometrycznie izomorficzne, co upoważnia do zastosowania skróconej notacji, w której mierze o wahaniu ograniczonym $k\in M(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$ odpowiada operator $K=T_k\in B_M$ [77,117].

Ponieważ $M(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$ jest przestrzenią zupełną, przestrzeń B_M będzie również zupełna ze względu na normę $\|\cdot\|_{B_M}$, tzn. jest przestrzenią Banacha. Splotowi miar k*l odpowiada złożenie operatorów K i L (lub T_k i T_l), a dokładniej

$$((KL)x)(g) = (K(Lx))(g) = (k*(l*x))(g)$$

Stąd wynika, że B_M jest nieprzemienną algebrą Banacha.

DEFINICJA B7. Przez B_Q oznaczymy podzbiór B_M operatorów takich, że

$$B_Q := \left\{K\in B_M:\ k\in M_Q(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))\right\}$$

W przypadku gdy $e\notin Q$ wówczas definiujemy

$$B_Q := \left\{K+\lambda I:\ K\in B_M,\ \lambda\in\mathbb{C}^1,\ k\in M_Q(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))\right\}$$

Wynika to z faktu, że w tym przypadku $M_Q(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$ jest algebrą bez jedynki i stwierdzenie to pozostaje prawdziwe nawet wtedy, gdy G jest grupą dyskretną. Dalej zakładamy stale, że $e\in Q$.$\blacksquare$

LEMAT B5. B_Q jest domkniętą podalgebrą B_M.

Dowód. Niech $K,L\in B_Q$, $k,l\in M_Q(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$. Aby udowodnić, że $KL\in B_Q$, wystarczy wykazać, że $\mathrm{supp}(k*l)\subset Q$. Z pomocą relacji (9), dla dowolnych $h_1,h_2\in\mathbb{R}^n$, miara k*l określa jednoznacznie operator dwuliniowy

$$T_E(h_1,h_2) := \langle (k*l)(E)h_1,h_2\rangle = \langle\int_G k(E-y)l(dy)h_1,h_2\rangle =$$

$$= \int_G \langle k(E-y)l(dy)h_1,h_2\rangle = \sum_{i=1}^{n}\int_G \langle k(E-y)h_1,h_2\rangle\langle l(dy)h_1,h_2\rangle \qquad (12)$$

gdzie $\{h_i\}$, $i=1,2,\ldots,n$ baza ortonormalna. Nośnik funkcji po prawej stronie równości (12) zawiera się w Q na mocy twierdzenia 1.2.1 [371, s.48], stąd wynika, że $\mathrm{supp}(T_E)\subset Q$, a to dowodzi, że $\mathrm{supp}(k*l)\subset Q$. Wynika stąd dalej, że B_Q jest podalgebrą B_M. Aby udowodnić, że B_Q jest algebrą domkniętą wystarczy wykazać, że jeżeli ciąg miar $\{k_n(\cdot)\}$, $\mathrm{supp}(k_n)\subset Q$, $n=1,2,\ldots$ jest zbieżny do k w sensie normy (11), to $\mathrm{supp}(k)\subset Q$.

Niech $\lim_{n\to\infty} k_n = k$. Pokażemy, że

$$\mathrm{supp}(k) \subset \underline{\lim_{n\geq 1}}\ \mathrm{supp}(k_n) \qquad (13)$$

Załóżmy, że zawieranie (13) nie zachodzi. Wówczas istnieje element $g\in\mathrm{supp}(k)$ taki, że dla dowolnego otoczenia U(g) istnieje podciąg $\{n_i\}$, $i\geq 1$ w zbiorze liczb naturalnych taki, że $U\cap\mathrm{supp}\left(k_{n_i}\right)=\{\emptyset\}$, $\forall\ i\geq 1$. Stąd wynika, że

$$g\in U\cap\mathrm{supp}(k) \subset U\cap\mathrm{supp}\left(\left\{k_{n_i}: i\geq 1\right\}^d\right),$$

a z drugiej strony $\mathrm{supp}\left(\left\{k_{n_i}: i\geq 1\right\}^d\right)\subset U'$, co doprowadza do sprzeczności.$\blacksquare$

Odnotujmy, że elementy B_Q są operatorami przyczynowymi ze względu na Q.

DEFINICJA B8. Niech W_Q oznacza zbiór wszystkich liniowych odwzorowań A przestrzeni $L^2(G;\mathbb{R}^n)$ w siebie takich, że

(i) A jest operatorem przyczynowym ze względu na Q;

(ii) $(Ax)\hat{}\,(\chi) = A(\chi)\hat{x}(\chi)$, $\forall\ x\in L^2(G;\mathbb{R}^n)$, $\chi\in\hat{G}$, gdzie $A(\chi)\in C(G;\mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n))$.$\blacksquare$

W_Q jest przestrzenią liniową, wprowadzimy w W_Q normę

$$\|A\|_{W_Q} := \sup_{\chi\in\hat{G}} |A(\chi)|$$

W_Q jest algebrą Banacha z jedynką [77]. B_Q jest podalgebrą W_Q.

DEFINICJA B9. Oznaczymy przez $\bar{B}_Q$ domknięcie B_Q w sensie normy przestrzeni W_Q.$\blacksquare$

Przestrzeń miar rzeczywistych $M_Q(G;\mathbb{R}^1)=M_Q(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^1,\mathbb{R}^1))$ jest przemienną algebrą Banacha z operacją mnożenia określoną jako splot miar. Ponieważ $M_Q(G;\mathbb{R}^1)$ jest algebrą Banacha z jedynką, można zastosować do analizy tej algebry teorię Gelfanda [210,320].

Niech $\mathfrak{M}$ oznacza przestrzeń ideałów maksymalnych w $M_Q(G;\mathbb{R}^1)$. Określimy reprezentację Gelfanda miary $k\in M_Q(G;\mathbb{R}^1)$ jako $\hat{k}(m)$, $m\in\mathfrak{M}$. Zauważmy, że dla każdego $m\in\mathfrak{M}$ istnieje taki charakter $\chi\in\hat{G}$, że $\hat{k}(\chi)=\hat{k}(m)$ $\forall$ $k\in M_Q(G;\mathbb{R}^1)$. Dla algebry z jedynką zachodzi

$$\sup_{\chi\in\hat{G}} |\hat{k}(\chi)| = \sup_{m\in\mathfrak{M}} |\hat{k}(m)|$$

Ta relacja między charakterami i maksymalnymi ideałami jest często wykorzystywana w pracy.

Możemy rozszerzyć reprezentację Gelfanda algebry $M_Q(G;\mathbb{R}^1)$ do ciągłego homomorfizmu B_Q w $\mathcal{B}(\mathfrak{M};\mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n))$, która oznaczać będzie przestrzeń ograniczonych odwzorowań $\mathfrak{M}\longrightarrow\mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$. Jeżeli $K\in B_Q$ i odpowiednio $k\in M_Q(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$, to miara k_{12} określona wzorem

$$k_{12}(dg) := \langle k(dg)h_1,h_2\rangle, \qquad h_1,h_2\in\mathbb{R}^n$$

jest elementem przestrzeni $M_Q(G;\mathbb{R}^1)$. Niech $\hat{k}_{12}(m)$ oznacza reprezentację Gelfanda miary k_{12}, wówczas

$$\hat{k}_{12}(m) = \Big(\langle k(\cdot)h_1,h_2\rangle\Big)\hat{}\,(m), \qquad \forall\ m\in\mathfrak{M},\ h_1,h_2\in\mathbb{R}^n$$

LEMAT B6. Niech $k\in M_Q(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$ i niech m będzie ustalonym ideałem przestrzeni $\mathfrak{M}$. Wówczas odwzorowanie

$$T_m(h_1,h_2) := (\langle k(\cdot)h_1,h_2\rangle)\hat{}\,(m), \qquad m\in\mathfrak{M}$$

jest ograniczonym operatorem dwuliniowym $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{C}^1$.

Dowód. Wynika z faktu, że odwzorowanie $k_{12}\longrightarrow\hat{k}_{12}$ jest homomorfizmem $M_Q(G;\mathbb{R}^1)\longrightarrow C(\mathfrak{M};\mathbb{C}^1)$ i ponadto

$$\sup_{m\in\mathfrak{M}} |T_m(h_1,h_2)| = \sup_{m\in\mathfrak{M}} |\hat{k}_{12}(m)| \le \mathcal{V}ar_G(k)|h_1||h_2|$$

$\forall$ $h_1,h_2\in\mathbb{R}^n$. To kończy dowód.■

Z lematu wynika, że $\forall$ $m\in\mathfrak{M}$, istnieje jednoznacznie określony element $\hat{k}(m)\in\mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$ taki, że

$$T_m(h_1,h_2) = \langle\hat{k}(m)h_1,h_2\rangle$$

W ten sposób zostało określone odwzorowanie $M_Q(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))\longrightarrow\mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$, $\forall$ $m\in\mathfrak{M}$.

DEFINICJA B10. Zdefiniujemy odwzorowanie $K:B_Q\longrightarrow\mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$ jako $\hat{K}(m):=\hat{k}(m)$ $\forall$ $m\in\mathfrak{M}$. Odwzorowanie to nazwiemy rozszerzonym odwzorowaniem Gelfanda, przez analogię do [77,234].■

Po drodze niejako został udowodniony następujący wynik.

LEMAT B7. Rozszerzona transformacja Gelfanda jest ciągłym homomorfizmem $B_Q\longrightarrow\mathcal{B}(\mathfrak{M};\mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n))$ i zachodzi oszacowanie

$$\sup_{m\in\mathfrak{M}} |\hat{K}(m)| \le \mathcal{V}ar_G(k), \qquad \forall\ k\in M_Q(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$$

Dowód. Pokażemy, że $(k*l)\hat{}\,(m)=\hat{K}(m)\hat{L}(m)$, $\forall$ $k,l\in M_Q(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$. Mamy

$$\langle(k*l)(E)h_i,h_j\rangle=\int_G\langle k(E-y)l(dy)h_i,h_j\rangle=\int_G\langle k(E-y)\Big(\sum_{p=1}^n\langle l(dy)h_i,h_p\rangle h_p\Big),h_j\rangle=$$

$$=\sum_{p=1}^n\int_G\langle k(E-y)h_p,h_j\rangle\langle l(dy)h_i,h_p\rangle=\sum_{p=1}^n\Big(k_{pj}*l_{ip}\Big)(E) \tag{14}$$

gdzie $k_{pj}(\cdot)=\langle k(\cdot)h_p,h_j\rangle$, $l_{ip}(\cdot)=\langle l(\cdot)h_i,h_p\rangle$. Z definicji transformacji Gelfanda wynika wprost

$$\langle(k*l)\hat{}\,(m)h_i,h_j\rangle=\sum_{p=1}^n\hat{k}_{pj}(m)\cdot\hat{l}_{ip}(m), \qquad \forall\ m\in\mathfrak{M} \tag{15}$$

Z drugiej strony

$$\langle\hat{K}(m)\hat{L}(m)h_i,h_j\rangle=\langle\hat{K}(m)\Big(\sum_{p=1}^n\langle\hat{L}(m)h_i,h_p\rangle h_p,h_j\rangle=$$

$$=\sum_{p=1}^n\langle\hat{K}(m)h_p,h_j\rangle\langle\hat{L}(m)h_i,h_p\rangle=\sum_{p=1}^n\hat{k}_{pj}(m)\cdot\hat{l}_{ip}(m), \qquad \forall\ m\in\mathfrak{M} \tag{16}$$

Równości (15-16) zachodzą dla wszystkich h_i i h_j, co kończy dowód pierwszej części.□

Zauważmy, że dla dowolnych $h,d\in\mathbb{R}^n$ prawdziwe jest

$$\sup_{\chi\in\hat{G}}|\hat{k}(\chi)| = \sup_{\chi\in\hat{G}}\sup_{|h|=1,\,|d|=1}|\langle\hat{k}(\chi)h,d\rangle| =$$

$$=\sup_{|h|=1,\,|d|=1}\sup_{\chi\in\hat{G}}|\langle\hat{k}(\chi)h,d\rangle| = \sup_{|h|=1,\,|d|=1}\sup_{m\in\mathfrak{M}}|\langle\hat{k}(m)h,d\rangle| =$$

$$=\sup_{m\in\mathfrak{M}}\sup_{|h|=1,\,|d|=1}|\langle\hat{k}(m)h,d\rangle| = \sup_{m\in\mathfrak{M}}|\hat{K}(m)| \tag{17}$$

To kończy dowód.■

DEFINICJA B11. Niech $K\in B_Q$. Widmem operatora K, oznaczonym dalej $Sp_{B_Q}(K)$, nazywamy podzbiór $\mathbb{C}^1$ taki, że

$$Sp_{B_Q}(K) := \left\{\lambda\in\mathbb{C}^1:\ (K-\lambda I)^{-1} \text{ nie istnieje w } B_Q\right\}$$

Podobnie, jeżeli $A\in W_Q$, to widmem operatora A, oznaczonym dalej $Sp_{W_Q}(A)$ nazwiemy podzbiór $\mathbb{C}^1$ taki, że

$$Sp_{W_Q}(A) := \left\{\lambda\in\mathbb{C}^1:\ (A-\lambda I)^{-1} \text{ nie istnieje w } W_Q\right\}. \blacksquare$$

DEFINICJA B12. Niech $K\in B_Q$ i $m\in\mathfrak{M}$. Wówczas $\hat{K}(m)\in\mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$ i widmo operatora $\hat{K}(m)$, oznaczone dalej $\sigma\left(\hat{K}(m)\right)$, będzie podzbiorem $\mathbb{C}^1$ określonym relacją

$$\sigma(\hat{K}(m)) := \left\{\lambda\in\mathbb{C}^1:\ (\hat{K}(m)-\lambda I)^{-1} \text{ nie istnieje w } \mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)\right\}. \blacksquare$$

LEMAT B8. Jeżeli $K\in B_Q$, to

$$\bigcup_{m\in\mathfrak{M}} \sigma(\hat{K}(m)) \subset Sp_{B_Q}(K)$$

Dowód. Jest prostą konsekwencją faktu, że transformata Gelfanda jest homomorfizmem algebraicznym $B_Q \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$. Niech $\lambda\notin Sp_{B_Q}(K)$. Wówczas istnieje operator $L\in B_Q$ taki, że

$$(K-\lambda I)L = L(K-\lambda I) = I \tag{18}$$

Ponieważ transformata Gelfanda jest homomorfizmem, wynika stąd

$$(\hat{K}(m)-\lambda I)\hat{L}(m) = \hat{L}(m)(\hat{K}(m)-\lambda I) = I, \qquad \forall\ m\in\mathfrak{M}$$

Stąd wynika, że $\lambda\notin\bigcup_{m\in\mathfrak{M}} \sigma(\hat{K}(m)). \blacksquare$

TWIERDZENIE B9. Jeżeli $K\in B_Q$, to $\bigcup_{m\in\mathfrak{M}} \sigma(\hat{K}(m)) = Sp_{B_Q}(K)$.

Dowód. Z lematu B8 wynika, że musimy udowodnić zawieranie tylko w jedną stronę, czyli $\bigcup_{m\in\mathfrak{M}} \sigma(\hat{K}(m)) \supset Sp_{B_Q}(K)$, tzn., że z faktu odwracalności operatora $\hat{K}(m)$, dla dowolnego $m\in\mathfrak{M}$, wynika odwracalność operatora K w przestrzeni B_Q.

Niech $\{h_1,h_2,\ldots,h_n\}$ będzie bazą ortonormalną w $\mathbb{R}^n$, oznaczymy przez k miarę z $M_Q(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$ odpowiadającą operatorowi K, a przez $k_{ij}, i,j=1,2,\ldots,n$ składowe miary macierzowej k, tzn. $k_{ij}(\cdot)=\langle k(\cdot)h_i,h_j\rangle$.

Niech ${}^{\bullet}\det(k)$ oznacza miarę z przestrzeni $M_Q(G;\mathbb{R}^1)$

$${}^{\bullet}\det(k) := \sum_{\Theta}\left(\operatorname{sgn}(\Theta)k_{1\Theta(1)}{}^{\bullet}k_{2\Theta(2)}{}^{\bullet}\cdots\cdots{}^{\bullet}k_{n\Theta(n)}\right)$$

gdzie sumowanie przebiega po wszystkich permutacjach Θ grupy symetrycznej rzędu n! i $\operatorname{sgn}(\Theta)$ oznacza znak permutacji Θ.

Niech dalej ${}^{\bullet}\operatorname{dop}[k]_{ij}$ oznacza element macierzy dołączonej, czyli transponowanej macierzy dopełnień algebraicznych

$${}^{\bullet}\operatorname{dop}[k]_{ji} = (-1)^{i+j}\cdot{}^{\bullet}\operatorname{dop}[k]_{ij}$$

gdzie $[k]_{ij}$ oznacza $(n-1)\times(n-1)$ wymiarową macierz dopełnienia algebraicznego elementu k_{ij}. Zauważmy, że $\forall\ m\in\mathfrak{M}$

$$\left({}^{\bullet}\det(k)\right)\hat{}\,(m) = \det\left(\hat{k}(m)\right)$$

$$\left({}^{\bullet}\operatorname{dop}[k]_{ij}\right)\hat{}\,(m) = \operatorname{dop}\left[\hat{k}(m)\right]_{ij}$$

gdzie $\det(\cdot)$ i $\operatorname{dop}[\cdot]_{ij}$ są standardowymi oznaczeniami dla wyznacznika i macierzy dołączonej w zastosowaniu do macierzy $\hat{k}(m) = \left[\hat{k}_{ij}(m)\right], i,j=1,2,\ldots,n$.

Jeżeli macierz $\hat{k}(m)$ jest odwracalna dla dowolnego $m\in\mathfrak{M}$, to $\det(\hat{k}(m))\neq 0$ $\forall\ m\in\mathfrak{M}$, stąd wynika, że ${}^{\bullet}\det(k)$ nie należy do żadnego maksymalnego ideału i w związku z tym posiada odwrotność w $M_Q(G;\mathbb{C}^1)$.

Niech l będzie elementem $M_Q(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$ takim, że

$$l_{ij}(\cdot) = \left({}^{\bullet}\det(k)\right)^{-1}\cdot\left({}^{\bullet}\operatorname{dop}[k]_{ij}\right)$$

Łatwo jest wykazać, że operator $L\in B_Q$ i L jest dwustronną odwrotnością operatora K ze względu na złożenie w B_Q. $\blacksquare$

UWAGA B10. Z faktu, że $B_Q\subset W_Q$ wynika, że jeżeli $K\in B_Q$, to $Sp_{W_Q}(K) \subset Sp_{B_Q}(K)$. $\blacksquare$

Możemy rozszerzyć pojęcie transformaty Gelfanda na przestrzeń $\bar{B}_Q$.

DEFINICJA B13. Niech $\bar{B}_Q\ni K=\lim_{n\to\infty} K_n$, $K_n\in B_Q$. Z określenia przestrzeni $\bar{B}_Q$ i B_Q wynika, że

$$(Kx)\hat{}\,(\chi) = K(\chi)\hat{x}(\chi), \qquad (K_n x)\hat{}\,(\chi) = \hat{k}_n(\chi)\hat{x}(\chi)$$

i ciąg $\{\hat{k}_n(\chi)\}$ jest zbieżny jednostajnie do $\hat{K}(\chi)$ na $\hat{G}$. Z relacji (17) wynika, że ciąg $\{K_n(m)\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$ i posiada granicę, która

jest interesującym nas rozszerzeniem, oznaczymy ją $\hat{K}(m)$. Zbudowane rozszerzenie transformaty Gelfanda jest homomorfizmem $\bar{B}_Q \longrightarrow \mathcal{B}(\mathfrak{M}; \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n))$.■

Analogicznie do B10, dowodzi się następującego wyniku.

LEMAT B11. Jeżeli $K \in \bar{B}_Q$, to $\bigcup_{m\in\mathfrak{M}} \sigma(\hat{K}(m)) = Sp_{B_Q}(K)$.■

Funkcje analityczne na elementach przestrzeni B_Q, $\bar{B}_Q$ i W_Q określa się w sposób standardowy dla algebr Banacha [210,306].

Przedstawione rozważania pozostają prawdziwe dla miar abstrakcyjnych o wartościach w przestrzeni Hilberta [234]. Szczególnym przypadkiem jest analiza harmoniczna w podalgebrach $M(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$, np. w $M_a(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)) = L^1(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$. Rozważania podane dla tego przypadku przez Falba i Freedmana [77] są o tyle skomplikowane, że L^1 jest algebrą splotową bez jedynki(z tzw. jedynką aproksymatywną), co wiąże się z pewnymi trudnościami formalnymi.

PRZYKŁAD B1. Niech $G=\mathbb{Z}^1$, $Q=\mathbb{Z}^1_+$. Jak wiemy, grupa dualna $\hat{\mathbb{Z}}^1$ jest grupą obrotów koła, tzn. $\hat{\mathbb{Z}}^1=\{\exp(ik\theta): 0\le\theta<2\pi, k\in\mathbb{Z}^1\}$ ze zwykłym mnożeniem jako operacją dualną. Jeżeli $x\in L^2(G;\mathbb{R}^n)$, to transformata Fouriera $\hat{x}(\exp(ik\theta))$ jest określona relacją

$$\hat{x}\left(e^{ik\theta}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-ik\theta}$$

Jeżeli $l\in L^1_Q(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$, to $\sum_i |l(i)|<\infty$ i $l(i)=0$ dla $i<0$. W celu określenia transformaty Gelfanda funkcji l zauważmy, że przestrzeń ideałów maksymalnych przestrzeni $L^1_Q(G;\mathbb{R}^1)$ jest, w omawianym przypadku, dyskiem jednostkowym $|z|\le 1$, $z\in\mathbb{C}^1$ [306]. Wynika stąd, że transformata Gelfanda jest związana z tzw. transformatą Z i jeżeli $z\in\{s\in\mathbb{C}^1: |s|\le 1\}$, to

$$\hat{l}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} l(i)z^i$$

Prostym wnioskiem z twierdzenia B9 jest, że operator $L\in B_Q$ jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy $\det\left(\hat{L}(z)\right) \neq 0$ dla wszystkich z takich, że $|z|\le 1$.■

PRZYKŁAD B2. Niech $G=\mathbb{R}^1$, $Q=\mathbb{R}^1_+$. Wówczas $\hat{\mathbb{R}}^1\cong\mathbb{R}^1$. Jeżeli $x\in L^2(G;\mathbb{R}^n)$, to jego przedstawienie Fouriera jest następujące

$$\hat{x}(i\nu) = \hat{x}\left(e^{i\nu t}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\nu t}x(t)dt, \qquad \nu\in\mathbb{R}^1.$$■

Analogicznie, jeżeli $k\in L^1_Q(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$, to odpowiedni element przestrzeni B_Q jest operatorem splotowym

$$(Kx)(t) = \int_0^t k(t-s)x(s)ds$$

Należy podkreślić, że ponieważ L^1_Q jest algebrą bez jedynki, więc przestrzeń B_Q jest izomorficzna z przestrzenią $L^1_Q(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))\oplus\{\delta\}$, gdzie δ oznacza tzw. jedynkę aproksymatywną [210,306,372], można ją traktować jako uogólnienie dystrybucji delta Diraca.

W decydującej dla naszych celów przestrzeni $L^1_Q(\mathbb{R}^1_+;\mathbb{R}^1)\oplus\{\delta\}$, przestrzeń ideałów maksymalnych koresponduje z półpłaszczyzną zespoloną $\mathrm{Re}(s)\ge 0$, $s\in\mathbb{C}^1$ [306,320], a odpowiednia transformata Gelfanda pokrywa się z transformatą Laplace'a funkcji $k\in L^1_Q(\mathbb{R}^1_+;\mathbb{R}^1)$, tzn.

$$\hat{k}(s) := \int_0^{\infty} e^{-st}k(t)dt, \qquad \mathrm{Re}(s)\ge 0$$

W konsekwencji, jeżeli $\inf_{\mathrm{Re}(s)\ge 0}|\det(\hat{K}(s)-\lambda I)|>0$, to operator $K-\lambda\delta$ jest odwracalny w B_Q (także w W_Q i $\bar{B}_Q$). Wynik ten stanowi treść twierdzenia Wienera-Levy'ego [52, s. 16].■

PRZYKŁAD B3. Powtórzmy założenia z przykładu B2. Jeżeli ponadto $k\in M_Q(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$ i miara k nie posiada części osobliwej, to w naszej notacji jest to przypadek, gdy $M=M_d\oplus M_a$. Przestrzeń maksymalnych ideałów, w tym przypadku dla $M_Q\ominus M_s(\mathbb{R}^1_+;\mathbb{R}^1)$ pokrywa się z półpłaszczyzną zespoloną $\mathrm{Re}(s)\ge 0$, a transformata Gelfanda z transformatą Laplace'a-Stieltjesa miary k

$$\hat{k}(s) := \int_0^{\infty} e^{-st}k(dt), \qquad \mathrm{Re}(s)\ge 0$$

Jeżeli

$$\inf_{\mathrm{Re}(s)\ge 0}|\det(\hat{K}(s)|>0 \qquad (19)$$

to operator K jest odwracalny w B_Q. Dowodzi się, że gdy miara k posiada część osobliwą, warunek (19) nie jest wystarczający [320, s. 213].■

Dodatek C. PROCESY STOCHASTYCZNE STACJONARNE

Analizę rozpoczniemy od przypomnienia pewnych algebr Banacha, które odgrywają znaczącą rolę w analizie procesów stochastycznych stacjonarnych zdefiniowanych na grupach abelowych.

Zauważmy na początku, że $L^1(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$ jest nieprzemienną algebrą Banacha nad polem $\mathbb{C}^1$, ze względu na splot (w notacji $\bullet$) i normę $\|\cdot\|_{L^1}$. Jeżeli G jest dyskretna, to $L^1(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$ zawiera jedność δ. W przypadku gdy G nie jest grupą dyskretną, rozpatrywana algebra nie zawiera jedności, wygodne może być wówczas jej formalne uzupełnienie o dodatkowy element δ, zwany dalej jednością w taki sposób, że zachodzą relacje $\delta\bullet\delta=\delta$ oraz $k\bullet\delta=\delta\bullet k=k$, $\forall\ k\in L^1$. δ może być uważana jako formalne uogólnienie dystrybucji δ Diraca. Zakładać będziemy dalej, że $\|\delta\|_{L^1}=1$ i rozszerzoną w ten sposób algebrę oznaczać będziemy $L^1(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))\oplus\{\delta\}$. Elementami tak wprowadzonej algebry będą pary $(k,\lambda\delta)$, gdzie $k\in L^1(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$ i $\lambda\in\mathbb{C}^1$ oraz dodawanie "+" i mnożenie "$\bullet$" będą zdefiniowane, jak następuje

$$\Big(k,\lambda\delta\Big) + \Big(l,\nu\delta\Big) = \Big(k+l,(\lambda+\nu)\delta\Big) \tag{1}$$

$$\Big(k,\lambda\delta\Big) \bullet \Big(l,\nu\delta\Big) = \Big(k\bullet l+\nu k+\lambda l,\lambda\nu\delta\Big) \tag{2}$$

$\forall\ k,l\in L^1(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$, $\lambda,\nu\in\mathbb{C}^1$.

W celu podkreślenia subtelności rozważań będziemy rozpatrywać przypadek, gdy grupa G nie jest dyskretna. Więcej szczegółów i literatura patrz dod. B.

DEFINICJA C1. Oznaczymy $L^2(F^x;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$ przestrzeń mierzalnych funkcji macierzowych o wymiarach $n\times n$, określonych na $\hat{G}$ i posiadających następującą własność: macierz $k\in L^2(F^x;L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\int_{\hat{G}} \mathrm{tr}\Big(k(\chi)F^x(d\chi)k^*(\chi)\Big)m(d\chi) < \infty.\ \blacksquare$$

Zajmiemy się dalej analizą spektralną pewnych specjalnych układów dynamicznych, zwanych dalej filtrami granicznymi. Nazwę tę wywodzić będziemy z klasycznej analizy ciągłych procesów stacjonarnych w liniowych układach dynamicznych [92,94,107].

W celu zachowania pełnej ścisłości prowadzonych rozważań wprowadzimy pewne algebry Banacha, które będą odgrywać zasadniczą rolę w naszej analizie sygnałów stacjonarnych opisanych na lzga.

Niech dalej $L^2(\xi)$ oznacza przestrzeń wszystkich stacjonarnych w szerokim sensie procesów stochastycznych 2. rzędu $\eta(t,\omega)$, $t\in G,\omega\in\Omega$, które można otrzymać z ξ poprzez niewyprzedzającą, liniową transformację, tzn. $L^2(\xi)\longrightarrow L^2(\xi)$, por. [94,361].

Zauważmy, że przestrzeń $L^1(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))\oplus\{\delta\}$ może być "zrealizowana" jako algebra ograniczonych liniowych odwzorowań przestrzeni $L^2(\xi)$ w siebie.

DEFINICJA C2. Niech B_s oznacza zbiór wszystkich liniowych odwzorowań $L^2(\xi)$ w siebie, postaci

$$(\tilde{K}x)(t,\omega) := \int_{\hat{G}} k(th^{-1})x(h,\omega)\mu(dh) + \lambda x(t,\omega) \tag{3}$$

gdzie $k\in L^1(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$ oraz $\lambda\in\mathbb{C}^1$. W skrócie będziemy pisać $\tilde{K}=K+\lambda\delta$.$\blacksquare$

Jasne jest, że $\tilde{K}x\in L^2(\xi)$, jeżeli $x\in L^2(\xi)$.

DEFINICJA C3. Dla ustalonego procesu ξ transformację $\tilde{K}$ będziemy nazywać filtrem dopuszczalnym, przez analogię do [92,94,107].$\blacksquare$

Załóżmy, że $\{\hat{k}_n(\chi)\}$ jest ciągiem podstawowym w $L^2(F^\xi;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$. W tym przypadku zdefiniujemy

$$\hat{k}(\chi) := \operatorname*{l.i.m.}_{n\to\infty} \hat{k}_n(\chi) \qquad \text{w } L^2(F^\xi) \quad \text{(w skrócie)}$$

a stąd wynika, że

$$\int_{\hat{G}} \mathrm{tr}\Big(\hat{k}(\chi)F^\xi(d\chi)\hat{k}^*(\chi)\Big) < \infty.\ \blacksquare$$

DEFINICJA C4. $\hat{k}(\chi)$ będzie nazywany charakterystyką częstotliwościową filtru granicznego i zdefiniujemy

$$\tilde{K} := \operatorname*{l.i.m.}_{n\to\infty} \tilde{K}_n \tag{4}$$

gdzie operatory całkowe $\tilde{K}_n$ są definiowane przez odpowiednie jądra k_n, a $\tilde{K}$ będzie nazywany filtrem granicznym.$\blacksquare$

Jeżeli proces ξ, stacjonarny w szerokim sensie, jest ciągły w sensie średniokwadratowym, to posiada reprezentację spektralną postaci [107,118,299]

$$\xi(t,\omega) = \int_{\hat{G}} \chi(t)\zeta_\xi(d\chi)$$

gdzie ζ_ξ jest procesem spektralnym (zwanym też miarą spektralną) związanym z funkcją strukturalną następującą relacją

$$\mathbb{E}\left(\zeta_\xi(d\chi)\zeta_\xi^*(d\chi)\right) = F^\xi(d\chi), \qquad \mathrm{tr}\left(F^\xi(\hat{G})\right) < \infty$$

Proces na wyjściu filtru granicznego przyjmie postać

$$(\tilde{K}\xi)(t,\omega) = \int_{\hat{G}} \chi(t)\hat{k}(\chi)\zeta_\xi(d\chi) + \lambda\xi(t,\omega) \tag{5}$$

ewentualnie w skrócie (ponieważ $I \in L^2(F^\xi; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$)

$$(\tilde{K}\xi)(t,\omega) = \int_{\hat{G}} \chi(t)\left(\hat{k}(\chi) + \lambda I\right)\zeta_\xi(d\chi)$$

Zauważmy dalej, że iloczyn (złożenie operatorów) i suma filtrów granicznych mogą być przedstawione w następujący sposób

$$\left(\left(\tilde{K}\circ\tilde{L}\right)\xi\right)(t,\omega) = \int_{\hat{G}} \chi(t)\left(\hat{k}(\chi)+\lambda I\right)\left(\hat{l}(\chi)+\nu I\right)\zeta_\xi(d\chi) \tag{6}$$

oraz

$$\left(\left(\tilde{K}+\tilde{L}\right)\xi\right)(t,\omega) = \int_{\hat{G}} \chi(t)\left(\hat{k}(\chi)+\hat{l}(\chi)+(\lambda+\nu)I\right)\zeta_\xi(d\chi) \tag{7}$$

gdzie "$\circ$" oznacza zwykłe złożenie operatorów.

DEFINICJA C5. Niech $\bar{B}_S$ oznacza przestrzeń liniowych odwzorowań B_S domkniętą w opisany wyżej sposób. ■

LEMAT C1. Niech $\tilde{K}=K+\lambda\delta$ będzie elementem $\bar{B}_S$. Wówczas $\tilde{K}=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k(\cdot)\equiv 0$ oraz $\lambda=0$.

Dowód. Oczywiste jest, że jeżeli $k(\cdot)\equiv 0$ i $\lambda=0$, to $\tilde{K}=0$. Z drugiej strony, niech $\tilde{K}=K+\lambda\delta=0$. Mamy wtedy

$$\int_{\hat{G}} \chi(t)\hat{k}(\chi)\zeta_\xi(d\chi) = -\lambda\int_{\hat{G}} \chi(t)\zeta_\xi(d\chi), \qquad \forall\ \chi\in\hat{G},\ \zeta_\xi\in L^2(F^\xi)$$

Ponieważ reprezentacja całkowa jest izomorfizmem $L^2(\xi) \equiv L^2(F^\xi)$, więc wnioskujemy stąd, że $\hat{k}(\chi)=-\lambda I\ \ \forall\ \chi\in\hat{G}$ i na podstawie twierdzenia 23.11 [372, s. 458] $\lambda=0$ i $k(\cdot)=0$. ■

WNIOSEK C2. Jeżeli $\tilde{K}=K+\lambda\delta$ jest elementem $\bar{B}_S$, to $k(\cdot)$ oraz λ w sposób jednoznaczny reprezentują $\tilde{K}$. ■

Teraz, wiedząc, że reprezentacja $\tilde{K}=K+\lambda\delta$ jest jednoznaczna, widzimy, że

$$\|\tilde{K}\|_{\bar{B}_S} := \sup_{\chi\in\hat{G}} \left|\hat{k}(\chi) + \lambda I\right|$$

definiuje normę w $\bar{B}_S$. Ponieważ $L^2(F^\xi)$ i $\mathbb{C}^1$ są zupełne, wynika stąd, że $\bar{B}_S$ jest zupełna ze względu na $\|\cdot\|_{\bar{B}_S}$.

LEMAT C3. Niech $\tilde{K}=K+\lambda\delta$ i $\tilde{L}=L+\nu\delta$ będą elementami $\bar{B}_S$. Wówczas $(KL)\tilde{\ } = (K\bullet L+\lambda L+\nu K, \lambda\nu\delta)$ jest elementem $\bar{B}_S$ oraz

$$\|(KL)\tilde{\ }\|_{\bar{B}_S} \le \|\tilde{K}\|_{\bar{B}_S}\,\|\tilde{L}\|_{\bar{B}_S}$$

Dowód. Niech

$$\xi(t,\omega) = \int_{\hat{G}} \chi(t)\zeta_\xi(d\chi)$$

Mamy dalej

$$\eta(t,\omega) = (\tilde{L}\xi)(t,\omega) = \int_{\hat{G}} \chi(t)\hat{l}(\chi)\zeta_\xi(d\chi) + \nu\xi(t,\omega) \tag{8}$$

gdzie

$$F^\eta(d\chi) = \hat{l}(\chi)F^\xi(d\chi)\hat{l}^*(\chi), \qquad \mathbb{E}\left(\zeta_\eta(d\chi)\zeta_\eta^*(d\chi)\right) = F^\eta(d\chi)$$

Kontynuując równość (8) możemy napisać

$$(\tilde{K}\eta)(t,\omega) = \int_{\hat{G}} \chi(t)\hat{k}(\chi)\zeta_\eta(d\chi) + \lambda\eta(t,\omega) =$$

$$= \int_{\hat{G}} \chi(t)\left(\hat{k}(\chi)\hat{l}(\chi)+\nu\hat{k}(\chi)+\lambda\hat{l}(\chi)\right)\zeta_\xi(d\chi) + \lambda\nu\xi(t,\omega)$$

skąd wynika pierwsza część tezy lematu. □

Druga część jest konsekwencją następujących nierówności

$$\left\|(KL)\tilde{\ }\right\|_{\bar{B}_S} = \sup_{\chi\in\hat{G}} \left|\hat{k}(\chi)\hat{l}(\chi) + \lambda\hat{l}(\chi) + \nu\hat{k}(\chi) + \lambda\nu I\right| \le$$

$$\le \sup_{\chi\in\hat{G}} \left|\hat{k}(\chi) + \lambda I\right| \sup_{\chi\in\hat{G}} \left|\hat{l}(\chi) + \nu I\right|$$

A zatem $\bar{B}_S$ jest algebrą Banacha. Ten fakt jest intensywnie wykorzystywany w pracy. ■

W dalszej analizie będziemy potrzebować bardziej dokładnego oszacowania normy filtru granicznego.

LEMAT C4. Prawdziwe jest następujące oszacowanie

$$\|\tilde{K}\|_{\bar{B}_S} \le \sup_{\chi\in\hat{G}} \sigma_{\max}\left(\tilde{k}\hat{\ }(\chi)\right)$$

gdzie $\tilde{k}\hat{\ }(\chi)=\hat{k}(\chi)+\lambda I$.

Dowód. Niech

$$\eta(t,\omega) = \int_{\hat{G}} \chi(t)\tilde{k}\hat{\ }(\chi)\zeta_\xi(d\chi) \tag{9}$$

bezpośrednio z (9) wynika

$$\eta^*(t,\omega) = \int_{\hat{G}} \bar{\chi}(t)\zeta_\xi^*(d\chi)\tilde{k}\hat{\ }^*(\chi)$$

i na tej podstawie

$$\mathbb{E}\left(\eta(t,\omega)\eta^{*}(t,\omega)\right) = \mathbb{E}\left(\int_{\hat{G}}\int_{\hat{G}}\chi_1(t)\bar{\chi}_2(t)\tilde{k}^{\wedge}(\chi_1)\zeta_{\xi}(d\chi_1)\zeta_{\xi}^{*}(d\chi_2)\tilde{k}^{\wedge *}(\chi_2)\right) =$$

$$= \int_{\hat{G}}\chi(t)\tilde{k}^{\wedge}(\chi)F^{\xi}(d\chi)\tilde{k}^{\wedge *}(\chi) \qquad (10)$$

Kontynuując otrzymamy

$$\sup_{t\in G}\|\eta(t,\omega)\|_2^2 = \sup_{t\in G}\operatorname{tr}\left(\mathbb{E}\left(\eta(t,\omega)\eta^{*}(t,\omega)\right)\right) =$$

$$= \sup_{t\in G}\int_{\hat{G}}\chi(t)\operatorname{tr}\left(\tilde{k}^{\wedge}(\chi)F^{\xi}(d\chi)\tilde{k}^{\wedge *}(\chi)\right) = \sup_{t\in G}\int_{\hat{G}}\chi(t)\operatorname{tr}\left(\tilde{k}^{\wedge *}(\chi)\tilde{k}^{\wedge}(\chi)F^{\xi}(d\chi)\right) \le$$

$$\le \sup_{\chi\in\hat{G}}\operatorname{tr}\left(\tilde{k}^{\wedge *}(\chi)\tilde{k}^{\wedge}(\chi)\right)\|\xi(\cdot,\cdot)\|^2_{C(G;L^2)} \qquad (11)$$

Ostatnia nierówność wynika z faktu, że transformacja Fouriera zachowuje relację porządku. ■

LEMAT C5. Następujące oszacowania macierzy kowariancji są prawdziwe:

(i) $\operatorname{Re}\langle\eta(t,\cdot),\xi(t,\cdot)\rangle_2 \le \sup_{\chi\in\hat{G}}\lambda_{max}\left(\tilde{k}^{\wedge}(\chi)\right)\|\xi(t,\cdot)\|_2^2$;

(ii) $\operatorname{Re}\langle\eta(t,\cdot),\xi(t,\cdot)\rangle_2 \ge \inf_{\chi\in\hat{G}}\lambda_{min}\left(\tilde{k}^{\wedge}(\chi)\right)\|\xi(t,\cdot)\|_2^2$;

$\forall\, t\in G$, notacja pozostaje taka sama, jak w lemacie C4.

Dowód. Bezpośrednio z definicji (9) wynika, że

$$\langle\eta(t,\cdot),\xi(t,\cdot)\rangle_2 = \mathbb{E}\left(\eta^{T}(t,\omega)\bar{\xi}(t,\omega)\right) =$$

$$= \mathbb{E}\left(\int_{\hat{G}}\int_{\hat{G}}\chi_1(t)\bar{\chi}_2(t)\zeta_{\xi}^{T}(d\chi_1)\tilde{k}^{\wedge T}(\chi_1)\bar{\zeta}_{\xi}(d\chi_2)\right) =$$

$$= \int_{\hat{G}}\chi(t)\mathbb{E}\left(\zeta_{\xi}^{T}(d\chi)\tilde{k}^{\wedge T}(\chi)\bar{\zeta}_{\xi}(d\chi)\right) = \int_{\hat{G}}\chi(t)\mathbb{E}\left(\operatorname{tr}\left(\bar{\zeta}_{\xi}(d\chi)\zeta_{\xi}^{T}(d\chi)\tilde{k}^{\wedge T}(\chi)\right)\right) \qquad (12)$$

Z podstawowych wiadomości z algebry liniowej wynika, że dla macierzy C, która odwzorowuje $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, prawdziwe jest oszacowanie

$$\operatorname{Re}\langle Cx,x\rangle = \frac{1}{2}\langle(C+C^{*})x,x\rangle \qquad (13)$$

Wykorzystując równość (13) w (12) otrzymujemy

$$2\operatorname{Re}\langle\eta(t,\omega),\xi(t,\omega)\rangle_2 = \int_{\hat{G}}\chi(t)\mathbb{E}\left(\operatorname{tr}\left(\zeta_{\xi}(d\chi)\zeta_{\xi}^{*}(d\chi)\left(\tilde{k}^{\wedge}(\chi)+\tilde{k}^{\wedge *}(\chi)\right)\right)\right) \le$$

$$\le \int_{\hat{G}}\chi(t)\operatorname{tr}\left(\left(\tilde{k}^{\wedge}(\chi)+\tilde{k}^{\wedge *}(\chi)\right)F^{\xi}(d\chi)\right) \qquad (14)$$

i nierówność (i) jest prostym wnioskiem z nierówności (14). □

Nierówność (ii) można udowodnić w analogiczny sposób. ■

LITERATURA

1. Adomian G., Stochastic Systems, Academic Press, New York, London 1983.
2. Ahmed N.U., A Class of Stochastic Nonlinear Integral Equations on L^p Spaces and Its Applications to Optimal Control, Information and Control Vol.14(1969), 512-523.
3. Ahmed N.U., L^p ($p\ge1$) and Orlicz Stability of a Class of Nonlinear Time-Varying Feedback Control Systems, Information and Control, Vol.19(1971), 114-123.
4. Ahmed N.U., Nonlinear Integral Equations on Reflexive Banach Spaces with Applications to Stochastic Integral Equations and Abstract Evolution Equation, J. Integral Equations, Vol.1(1979), 1-15.
5. Ahmed N.U., Semigroup Theory with Applications to Systems and Control, Longman Scientific & Technical, Essex 1991.
6. Ahmed N.U., Teo K.L., On the Stability of a Class of Nonlinear Stochastic Systems, Information and Control, Vol.20(1972), 276-293.
7. Amerio L., Prouse G., Almost-Periodic Functions and Functional Equations, Van Nostrand Reinhold Comp., New York 1971.
8. Anderssen R.S., The Application and Numerical Solution of Integral Equations, Sijthoff and Noordhoff 1980.
9. Anton J., Falb P., Frequency Domain Criteria for Stability of Systems Modelled by Certain Partial Differential Equations, in Instability of Continuous Systems, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1971, 11-14.
10. Arato M., Linear Stochastic systems with Constant Coefficients, A Statistical Approach, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1982.
11. Arnold L., Wihstutz V., Wide Sense Stationary Solutions of Linear Systems with Additive Noise, SIAM J. Control and Opt., Vol.21(1983), 413-426.
12. Atalik T.S., Utku S., Stochastic Linearization of Multidegree-of-Freedom Nonlinear Systems, J. of Earthquake Eng. and Structural Dynamics, Vol.4(1976), 411-420.
13. Bajon W., Osiński Z., Drgania układu z nieliniową charakterystyką sprężystą typu $|x|^{1/2}$ przy wymuszeniu stochastycznym, Zag. Drgań Niel. 13, PWN, Warszawa 1972, 193-204.
14. Baker C.T., The Numerical Treatment of Integral Equations, Clarendon Press, Oxford 1977.
15. Baker R.A., Desoer C.A., Asymptotic Stability in the Large of a Class of Single Loop Feedback Systems, SIAM J. Control, Vol.6(1968), 9-47.

16. Baranowski A., Skrzypczyk J., O pewnych własnościach asymptotycznych rozwiązań stochastycznych równań różniczkowo-całkowych i całkowych, Zesz. Nauk. Pol. Śl., ser. Mat.-Fiz. 28, Gliwice 1976, 11-31.

17. Barut A.O., Rączka R., Theory of Group Representation and Applications, PWN, Warszawa 1977.

18. Belle Isle A., Kozin F., On the Almost-Sure Sample Stability of Systems with Randomly Time Varying Delays, The J. of IFAC, Vol. 8(1972), 755-764.

19. Beltyukov B.A., Solution of Nonlinear Integral Equations by Newton's Method, J. Diff. Eq., Vol. 2(1964), 555-560.

20. Bensoussan A., Équations intégrales opérationnelles stochastique, C.R. Acad. Sci. 269(1969), A423-A425.

21. Bensoussan A., Sur les propriétés de la solution d'une équation intégrale opérationnelle stochastique, C.R. Acad. Sci., 269(1969), A457-A459.

22. Bensoussan A., Filtrage Optimal des Systemes Lineaires, Dunod, Paris 1971.

23. Bergen A.R., Iwens R.P., Rault A.J., On the Input-Output Stability of Nonlinear Feedback Systems, IEEE Trans. Aut. Control, AC-11(1966), 742-745.

24. Bharucha-Reid A.T., On Random Operator Equations in Banach Spaces, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. sci. math. astr. et phys., Vol. VII(1959), 561-564.

25. Bharucha-Reid A.T., Sur les équations integrales aléatoires de Fredholm a noyaux séparables, C.R. Acad. Sci., 250(1960), 454-456, 657-658.

26. Bharucha-Reid A.T., On Random Solutions of Integral Equations in Banach Spaces, Trans. Second Prague Conf. Information theory, Statistical Decision Function and Random Processes, Acad. Press, New York 1960, 27-48.

27. Bharucha-Reid A.T., On the Theory of Random Equations, Proc. Symp. Appl. Math. 16(1964), AMS, Providence Rhode Island, 40-69.

28. Bharucha-Reid A.T., Random Integral Equations, Acad. Press, New York and London 1972.

29. Bharucha-Reid A.T., Römisch W., Projective Schemes for Random Operator Equations, J. Integral Eq., Vol. 8(1985), 95-112.

30. Białynicki-Birula A., Algebra, PWN, Warszawa 1971.

31. Bicart T.A., Prada G., Bounded Input Power-Bounded Output Power Stability Criterion, J. of IFAC, Vol. 7(1971), 261-264.

32. Booton R.C., Nonlinear Control Systems With Random Inputs, Trans. IRE, CT-1(1964).

33. Bourbaki N., Topologie Generale I et II, Herman & C^{ie} Ed., Paris 1951.

34. Bourbaki N., Algebre: Groupes et Corps Ordonnés, Modules Sur les Anneaux Principaux, Éléments de Mathématique, Herman, Paris 1964.

35. Bourbaki N., Théorie des Ensembles, Éléments de Mathématique, Herman, Paris 1970.

36. Bourbaki N., Elements of Mathematics, General Topology Chapters 1-4, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokyo 1980.

37. Bracewell R., Przekształcenie Fouriera i jego zastosowania, WNT, Warszawa 1968.

38. Brauer F., A Nonlinear Variation of Constants Formula for Volterra Equations, Math. Syst. Theory, Vol. 6(1972), 226-234.

39. Brucq D., Etude des opérateurs aleatoires linéaires d'un espace de Hilbert dans lui-méme, Thése Doct. sci. math. Fasc. sci., Paris 1970.

40. Bunke H., Gewöhnliche Differentialgleichungen Mit Zufälligen Parametern Akademie-Verlag, Berlin 1972.

41. Cabaña E.M., On Barrier Problems for the Vibrating String, Z. Warsch. ver. Geb. 22(1972), 13-24.

42. Cabaña E.M., On the Barrier Problem for Sine Series with Independent Gaussian Coefficients, Z. Warsch. ver. Geb. 24(1972), 215-219.

43. Callier F.M., Desoer C.A., L^p Stability ($1 \leq p \leq \infty$) of Multivariable Nonlinear Time-Varying Feedback Systems that are Open-Loop Unstable, Colloque Int. 10-14 Sept. 1973, Toulouse, France, VI-2, 1-14.

44. Casciati F., Equivalent Linearization of Hysteretic Structures, CISM Course on Stochastic Methods in Structural Mechanics, Udine August 28-30 1985 (nie publikowane).

45. Caughey T.K., Equvalent Linearization Techniques, J. Acoust. Soc. Amer., Vol. 35(1963), 1706-1711.

46. Caughey T.K., Gray A.H., On the Almost Sure Stability of Linear Dynamic Systems with Stochastic Coefficients, J. Appl. Mech., Vol. 32(1965).

47. Chen C.T., On the Stability of Sampled-Data Feedback Systems with Time-Varying Gain, IEEE Trans. Aut. Control, AC-11(1966), 624-625.

48. Chen C.T., L^p-Stability of Linear Time Varying Feedback Systems, SIAM J. Control Vol. 6(1968), 186-193.

49. Christensen M.J., Bharucha-Reid A.T., Numerical Solution of Random Integral Equations I. Fredholm Equations of the Second Kind, J. Integral Eq. Vol. 3(1981), 217-231.

50. Christensen M.J., Bharucha-Reid A.T., Numerical Solution of Random Integral Equations II. Fredholm Equations with Degenerate Kernels, J. Integral Eq. Vol. 3(1981), 333-344.

51. Clement Ph., MacCamy R.C., Nohel J.A., Asymptotic Properties of Solutions of Nonlinear Abstract Volterra Equations, J. Integral Eq. Vol. 3(1981), 185-216.

52. Corduneanu C., Integral Equations and Stability of Feedback Systems, Academic Press, New York-London 1973.

53. Cristescu R., Ordered Vector Spaces and Linear Operators, Ed. Academiei Bucuresti România, Abacus Press Tunbridge Wells, Kent, England 1976.

54. Dafermos C.M., An Abstract Volterra Equation with Applications to Linear Viscoelasticity, J. Diff. Eq., Vol. 7(1970), 554-569.

55. Daniel V.W., Convolution Operators on Lebesgue Spaces of the Half-Line, TAMS, Vol. z164(1972), 479-488.

56. Demidowicz B.P., Matematyczna teoria stabilności, WNT, Warszawa 1972.

57. Desch W., Exponential Stabilization of Volterra Integrodifferential Equations in Hilbert Space, J. Diff. Eq., Vol. 70(1987), 366-389.

58. Desoer C.A.,On the General Formulation of the Nyquist Criterion,IEEE Trans.Circuit Theory,CT-12(1963),230-234.
59. Desoer C.A.,Chen M.J.,Design of Multivariable Feedback Systems with Stable Plant,IEEE Trans.AC,AC-26(1981),408-415.
60. Desoer C.A.,Vidyasagar M.,Feedback Systems:Input-Output Properties, Academic Press,New York,San Francisco, London 1975.
61. Desoer C.A.,Wu M.Y.,Stability of Linear Time-Invariant Systems, IEEE Trans.CT,CT-15(1968),245-250.
62. Desoer C.A.,Wu M.Y.,Stability of Multiple-Loop Feedback Linear Time-Invariant Systems,J.Math.Anal.Appl.,Vol.23(1968),121-129.
63. DeVries J.,A Universal Topological Transformation Group in $L^2(GxG)$, Math.Syst.Theory,Vol.9(1975),46-50.
64. Dinculeanu N.,Vector Measures,Oxford 1967.
65. Distefano J.N.,Creep Bucling of Slender Columns,Proc.Amer.Soc.Civil Eng.,Vol.91(1965),127-150.
66. Distefano J.N.,Sackman J.,On Asymptotic Stability of Nonlinear Hereditary Phenomena,Q.A.M.,Vol.24(1966).
67. Distefano J.N.,Sackman J.,Stability Analysis of a Nonlinear Viscoelastic Column,ZAMM,Vol.47(1967),349-358.
68. Distefano N.,A Volterra Integral Equation in the Stability of Some Linear Hereditary Phenomena,J.Math.Anal.Appl.,Vol.23(1968),365-383.
69. Drozdov A.D.,Kolmanovskii,Stochastic Stability of Viscoelastic Bars, Stochastic Anal.and Appl.,Vol.10(1992),265-276.
70. Dunford I.,Schwartz J.T.,Linear Operators, Part I, Interscience Publ., New York,London 1958.
71. Edwards R.E., Fourier Series a Modern Introduction, Vol.I, Springer-Verlag,New York-Heidelberg-Berlin 1979; Vol.II,1982.
72. Eggermont P.P.B., On Monotone Abel-Volterra Integral Equations on the-Half Line,Numer.Math.,Vol.52(1988),65-79.
73. Emre E.,On Necessary and Sufficient Conditions for Regulation of Linear Systems Over Rings, SIAM J.Control and Optimization, Vol.20 (1982), 155-160.
74. Emre E.,Khargonekar P.P.,A Note on Dynamic Output Feedback For Linear Systems Over Rings, IEEE AC,Vol.AC-29 (1984) ,88-90.
75. Engelking R.,Topologia ogólna,PWN, Warszawa 1975.
76. Faith C., Algebra:Rings,Modules and Categories I, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1973.
77. Falb P.L.,Freedman M.I.,A Generalized Transform Theory For Causal Operators, SIAM J.Control, Vol.7(1969),452-471.
78. Falb P.L.,Freedman M.I.,Zames G.,Input-Output Stability - A General Viewpoint,Fourth Congress IFAC Warszawa 16-21 June 1969,WCT-NOT, Tech. Sesion N.41,3-15.
79. Falsone G., Elishakoff I., Modified Stochastic Linearization Technique For Colored Noise Excitation Of Duffing Oscillator, Int.J.Non-Linear Mechanics, Vol.29(1994), 65-69.

80. Fenyö S.,Stolle H.W.,Theorie und Praxis der Linearen Integralgleichungen 1,VEB Deutscher Verlag der Wissensch.,Berlin 1982.
81. Fenyö S.,Stolle H.W.,Theorie und Praxis der Linearen Integralgleichungen 2,VEB Deutscher Verlag der Wissensch.,Berlin 1983.
82. Fenyö S.,Stolle H.W.,Theorie und Praxis der Linearen Integralgleichungen 3,VEB Deutscher Verlag der Wissensch.,Berlin 1983.
83. Fenyö S.,Stolle H.W.,Theorie und Praxis der Linearen Integralgleichungen 4,VEB Deutscher Verlag der Wissensch.,Berlin 1984.
84. Flak S.,Skrzypczyk J.,Second-Order Linearization for Nonlinear Dynamic Systems Described by Volterra Integral Equations,Mat. Sympozjum Modelowanie w Mechanice,PTMTiS Beskid Śląski 4-11 marca 1985,29-34.
85. Freedman M.I.,L^2-Stability of Time-Varying Systems-Construction of Multipliers with Prescribed Phase Characteristic,SIAM J.Control, Vol.6 (1968),559-578.
86. Freedman M.I.,Falb P.L., Anton J., A Note on Causality and Analycity , SIAM J.Control,Vol.7(1969),472-478.
87. Freedman M.I.,Falb P.L.,Zames G.,A Hilbert Space Stability Theory Over Locally Compact Abelian Groups,SIAM J.Control,Vol.7,(1969), 479-495.
88. Freedman M.I.,Zames G.,Logarithmic Variation Criteria for the Stability of Systems with Time-Varying Gains, SIAM J.Control, Vol.6 (1965), 487-507.
89. Gajewski H,Gröger K.,Zacharias K.,Nichtlineare Operator-gleichungen , Akademie-Verlag, Berlin 1974.
90. Gangolli R.,Positive Definite Kernels and Homogeneous Spaces and Certain Stochastic Processes,related to Lévy's Brownian Motion of Several Parameters,Ann.Inst.H.Poincaré,Sect.B,Vol.2(1967),121-225.
91. Giergiel J., Uhl T., Identyfikacja układów mechanicznych, PWN,Warszawa 1990.
92. Gihman I.I.,Skorochod A.W.,Wstęp do teorii procesów stochastycznych, PWN, Warszawa 1968.
93. Gihman I.I.,Skorohod A.V.,Stochastic Differential Equations,Springer-Verlag,Berlin-Heidelberg-New York 1972.
94. Gihman I.I.,Skorohod A.V.,The Theory of Stochastic Processes I,Sprin-er-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1980.
95. Gohberg I.,Kaashoek M.A.,Time-Varying Linear Systems With Boundary Conditions and Integral Operators, I.The Transfer Operator and Its Properties,Int.Eq.and Operator Th.,Vol.7(1984),325-391.
96. Górecki H.,Fuksa S.,Grabowski P.,Korytowski A., Analysis and Synthesis of Time Delay Systems, PWN, Warszawa 1989.
97. Gradowczyk M.H.,Distefano J.M.,The Viscoelastic Theory of Thin Shallow Shells,Ing.Archiv,Vol.34(1965),304-312.
98. Gripenberg G.,Stability Problems for Some Nonlinear Volterra Equations J.Integral Eq.,Vol.2(1980),247-258.
99. Gripenberg G.Behavior of Resolvents of Abstract Volterra Equations,J. Math.Anal. and Appl.,Vol.122(1987),427-438.

100. Grossman S.I., Existence and Stability of a Class of Nonlinear Volterra Integral Equations, TAMS, Vol. 150(1970), 541-556.

101. Gutmann R.L., Michel A.N., Stability of Interconnected Systems Described by Stochastic Nonlinear Volterra Integral Equations, SIAM J. Math. Anal. Vol. 10(1979), 217-236.

102. Gutowski R., Swietlicki W.A., Dynamika i drgania układów mechanicznych, PWN, Warszawa 1986.

103. Hajek O., Compactness and Asymptotic Stability, Math. Syst. Theory, Vol. 4 (1970), 154-156.

104. Hale J., Theory of Functional Differential Equations, Springer-Verlag, New York 1977.

105. Halmos P.R., Measure Theory, Springer-Verlag, New York-Heidelberg 1974.

106. Halmos P.R., Sunder V.S., Bounded Integral Operators on L^2 Spaces, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1978.

107. Hannan E.J., Group Representations and Applied Probability, Methuen's Monographs, London 1965.

108. Hannsgen K.B., On a Nonlinear Volterra Equation, Michigan Math. J., Vol. 16 (1969), 365-376.

109. Harris C.J., Valenca J.M.E., The Stability Of Input-Output Dynamical Systems, Academic Press London, New York 1983.

110. Hartman P., Ordinary Differential Equations, J. Wiley & Sons, New York - London-Sydney 1964.

111. Hartman S., Wstęp do analizy harmonicznej, PWN, Warszawa 1969.

112. Hill D.J., Moylan P.J., Connections Between Finite-Gain and Asymptotic Stability, IEEE Trans. AC, AC-25(1980), 931-936.

113. Hladik J., La transformation de Laplace á plusieurs variables, Mason & Cie, Paris 1969.

114. Holtzman J.M., Analysis of Statistical Linearization of Nonlinear Control Systems, SIAM J. Control, Vol. 6(1968), 235-243.

115. Howard R.A., Dynamic Probabilistic Systems, Vol. I : Markov Models, J. Wiley & Sons Inc., New York-London-Sydney-Toronto 1971.

116. Hönig C.S., Volterra-Stieltjes Integral Equations, North-Holland/American Elsevier, Amsterdam-Oxford-New York 1975.

117. Huneycutt J.E., Products and Convolutions of Vector Valued Set Functions, Studia Math., T. XLI (1972), 119-129.

118. Jajte R., On Stochastic Processes Over an Abelian Locally Compact Group Coll. Math., Vol. XVII(1967), 351-355.

119. Jerri A.J., Introduction to Integral Equations with Applications, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel 1985.

120. Jumarie M.G., Méthode des deux premiéres fonctions propres pour systémes non linéaires définis par leurs noyaux de Green-Laplace, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 274(1972), Ser. A. 1833-1835.

121. Jury E.I., Some New Results in Stability and Performance Index of Linear Discrete Systems, Coll. Int. 10-14 Sept. 1973 Toulouse France VI4, 1-17.

122. Kahane J.P., Series de Fourier absolument convergentes, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1970.

123. Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A., Topics in Mathematical System Theory, Mc Graw-Hill Book Comp., New York 1969.

124. Kamen E.W., Green W.L., Asymptotic Stability of Linear Difference Equation Defined Over a Commutative Banach Algebras, J. Math. Anal. Appl., 75 (1980), 584-601.

125. Kampé de Fériet M.J., Fonctions aléatoires définies sur un groupe abstrait, C.R. 225(1947), 428-429.

126. Kampé de Fériet M.J., Analyse harmonique des fonctions aléatoires strictement stationnaires, C.R. 225(1947), 623-624.

127. Kampé de Fériet M.J., Analyse harmonique des fonctions aléatoires stationnaires d'ordre 2 definies sur un groupe Abélian localement compact, C.R. 226(1948), 868-870.

128. Kantorovitsch L.W., Akilov G.P., Functional Analysis, Reidel Publ., Amsterdam 1981.

129. Kartsatos A.G., Existence of Bounded Solution and Asymptotic Relationship for Nonlinear Volterra Integral Equations, Math. Syst. Theory, Vol. 8 (1974), 266-275.

130. Kartsatos A.G., Locally Invertible Operators and Existence Problems in Differential Systems, Tohohu Math. J., Vol. 28(1976), 167-176.

131. Kawata T., Fourier Analysis in Probability Theory, Academic Press, New York-San Francisco-London 1972.

132. Kelley J.L., General Topology, Springer-Verlag, New York-Heidelberg 1975.

133. Khargonekar P.P., On Matrix Fraction Representations for Linear Systems Over Commutative Rings, SIAM J. Control and Optimization, Vol. 20 (1982), 172-197.

134. Klamka J., Controllability of Dynamical Systems, PWN, Warszawa 1991.

135. Kline M., Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford University Press, New York 1972.

136. Kołodziej W., Wybrane rozdziały analizy funkcjonalnej, PWN, Warszawa 1970

137. Kravvaritis D., Existence of Solutions for Nonlinear Random Operator Equations in Banach Spaces, J. Math. Anal. andAppl., Vol. 141(1989), 235-247.

138. Kudrewicz J., Częstotliwościowe metody w teorii nieliniowych układów dynamicznych, WNT, Warszawa 1970.

139. Kuratowski K., Wstęp do teorii mnogości i topologii, PWN, Warszawa 1972.

140. Kushner H.J., Clark D.S., Stochastic Approximation Methods for Constrained and Unconstrained Systems, Springer-Verlag, New York-Berlin 1978.

141. Kuzin L.T., Analiza i synteza dyskretnych układów sterowania, WNT, Warszawa 1965.

142. Lakshmikantham V., Leela S., Differential and Integral Inequalities, Vol. 1, Academic Press, New York 1969.

143. Lankaster P., Theory of Matrices, Academic Press, New York 1969.

144. Layton W., Existence of Almost Periodic Solutions to Delay Differential Equations with Lipschitz Nonlinearities, J. Diff. Eq., Vol. 55(1984), 151-164.

145. Lee A.C.H., Padgett W.J., On Random Nonlinear Contractions, Math. Syst. Theory, Vol. 11(1977), 77-84.

146. Lee A.C.H., Padgett W.J., A Random Nonlinear Integral Equation in Population Growth Problems, J. Integral Eq., Vol. 2(1980), 1-10.

147. Lefevre C., Raoult A., M_2 Stability and Parametric Systems, Fourth Congress IFAC, Warszawa, 16-21 June 1969, WCT NOT, Techn. Session N. 41, 16-33.

148. Lessner L., A Lattice Theoretic Characterisation of an Integral Operator, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 53(1975), 391-395.

149. Lusternik L.A., Sobolew W.I., Elementy analizy funkcjonalnej, PWN, Warszawa 1959.

150. Maak W., Fastperiodische Funktionen, Springer-Verlag, Berlin 1967.

151. MacFarlane A.G.J., Belletrutti J.J., The Characteristic Locus Design Method, Automatica, Vol. 9(1973), 575-588.

152. MacFarlane A.G.J., Postlethwaite I., The Generalized Nyquist Criterion and Multivariable Root Loci, Int. J. Control, Vol. 25(1977), 81-127.

153. MacCamy R.C., Remarks on Frequency Domain Methods for Volterra Integral Equations, J. Math. Anal. and Appl., Vol. 55(1976), 555-575.

154. MacCamy R.C., Wong J.S., Stability Theorems for Some Functional Equations, TAMS, Vol. 164(1972), 1-38.

155. Mackey G.W., The Laplace Transform for Locally Compact Abelian Groups, Proc. National Acad. Sci. USA, Vol. 34(1948), 156-162.

156. Marcus M.B., Pisier G., Random Fourier Series with Applications to Harmonic Analysis, Ann. Math. Studies, Vol. 101, New Jersey 1981.

157. Maurin K., Analiza cz. I - Elementy, PWN, Warszawa 1971.

158. Maurin K., Analiza cz. II -Wstęp do analizy globalnej, PWN, Warszawa 1971.

159. Maurin K., Methods of Hilbert Spaces, PWN, Warszawa 1972.

160. Mc Callum D.B., Tsokos C.P., L^P Stability of a Non-Linear Control System Int. J. Syst. Sci., Vol. 3(1972), 215-223.

161. Mecke J., Stationäre zufällige Maße auf lokalkompakten Abelschen Gruppen, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, Geb. 9(1967), 36-58.

162. Meyer A.U., Computation of Initial State Regions for System Stability Via Frequency Response Criteria, Fourth Congress IFAC, Warszawa, 16-21 June 1969, WCT NOT, Technical Session N. 41, 123-144.

163. Meyer P.A., Probability and Potentials, Blaisolell Publ. Comp., Waltham, Massachusetts, Toronto-London 1966.

164. Miller K.S., Complex Stochastic Processes, Addison-Wesley Publ. Comp. Inc. London-Amsterdam-Don Mills, Ontario-Sydney-Tokyo 1974.

165. Miller R.K., Asymptotic Behavior of Solutions of Nonlinear Volterra Equations, Bull. AMS, Vol. 72(1966), 153-156.

166. Miller R.K., On the Linearization of Volterra Integral Equations, J. Math. Anal. Appl., Vol. 23(1968), 198-208.

167. Miller R.K., Nonlinear Volterra Integral Equations, W.A. Benjamin Inc., Menlo Park, California 1971.

168. Miller R.K., Michel A.N., On Existence of Periodic Motions in Nonlinear Control Systems With Periodic Inputs, SIAM J. Control and Opt., Vol. 18 (1980), 585-598.

169. Miller R.K., Michel A.N., Krenz G.S., On Limit Cycles of Feedback Systems Which Contain a Hysteresis Nonlinearity, SIAM J. Control and Opt., Vol. 24 (1986), 276-305.

170. Milton J.S., Padgett W.J., Tsokos C.P., On the Existence and Uniqueness of a Random Solution to a Perturbated Random Integral Equation of the Fredholm Type, SIAM J. Appl. Math., Vol. 22(1972), 194-208.

171. Mlak W., Wstęp do teorii przestrzeni Hilberta, PWN, Warszawa 1972.

172. Morozan T., The Method of V.M. Popov for Control Systems With Random Parameters, J. Math. Anal. Appl., Vol. 16(1966), 201-215.

173. Mossaheb S., The Circle Criterion and the L^P-Stability of Feedback Systems, SIAM J. Control and Opt., 20 (1982), 144-152.

174. Moylan P.J., Hill D.J., Stability Criteria For Large-Scale Systems, IEEE Trans. AC, AC-23(1978), 143-149.

175. Mukherjea A., Bharucha-Reid A.T., Separable Random Operators I, Rev. roumaine math. pures et appl., Vol. 14(1969), 1553-1561.

176. Narendra K.S., Cho Y.S., Stability Analysis of Nonlinear and Time-Varying Discrete Systems, SIAM J. Control, Vol. 6(1968), 625-646.

177. Narendra K.S., Taylor J.H., Frequency Domain Criteria for Absolute Stability, Academic Press Inc., New York London 1973.

178. Naumann J., On Second Order Evolution Inequalities of Volterra Type in Theory of Nonlinear Operators, Proc. of V Int. Summer School, Akademie-Verlag, Berlin 1978, 185-193.

179. Nohel J.A., Problems in Qualitative Behavior of Solutions of Nonlinear Volterra Equations, in Nonlinear Integral Equations, Wisconsin 1964.

180. Nohel J.A., Qualitative Behavior of Solutions of Nonlinear Volterra Equations, in Stability Problems of Solutions of Differential Equations ed. Oderisi, Gubbio 1966.

181. Nowacki W., Teoria pełzania, Arkady, Warszawa 1963.

182. Nussbaumer H.J., Fast Fourier Transform and Convolution Algorithms, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1982.

183. Ogata K., Metody przestrzeni stanów w teorii sterowania, WNT, Warszawa 1974.

184. Ortega J.M., Rheinboldt W.C., Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, Academic Press, New York 1970.

185. Padgett W.J., On a Random Volterra Integral Equations, Math. Syst. Theory, Vol. 7(1973), 164-169.

186. Padgett W.J., Almost Surely Continuous Solutions of a Nonlinear Stochastic Integral Equations, Math. Systems Theory, Vol. 10(1976), 69-75.

187. Padgett W.J., Tsokos C.P., On a Stochastic Integral Equation of the Volterra Type in Telephone Traffic Theory, J. Appl. Prob., Vol. 8(1971), 269-275.

188. Padgett W.J., Tsokos C.P., On a Stochastic Integral Equation of the Fredholm Type, Z. Warsch. verw., Grb. 23(1972), 22-31.

189. Pincus M., Gaussian Processes and Hammerstein Integral Equations, TAMS, Vol. 134(1968), 193-214.

190. Piskorek A., Równania całkowe, WNT, Warszawa 1980.

191. Piszczek K., Drgania zdeterminowane i przypadkowe układu o jednym stopniu swobody przy charakterystyce sprężystości w postaci linii łamanej, Rozpr. Inż., Vol. 18, N. 4, (1970).

192. Piszczek K., Wpływ nieliniowości na niektóre charakterystyki drgań przypadkowych, Zag. Drgań Nielin., Vol. 12, 113-127.

193. Piszczek K., Metody stochastyczne w teorii drgań mechanicznych , PWN, Warszawa 1982.

194. Piszczek K., Nizioł J., Random Vibration of Mechanical Systems, PWN, Warszawa 1986.

195. Podowski M., The New Method of Analysis of a Certain Class of Integral Equations Describing Dynamics of Physical Systems, Arch. Appl. Mech., Vol. 5(1974), 833-847.

196. Pogorzelski W., Równania całkowe i ich zastosowania - Własności ogólne równań Fredholma i Volterry, t. I, PWN, Warszawa 1953.

197. Pogorzelski W., Równania całkowe i ich zastosowania-Równania całkowe nieliniowe, Zastosowania równań całkowych w teorii równań różniczkowych t. II, PWN, Warszawa 1958.

198. Pogorzelski W., Równania całkowe i ich zastosowania-Własności całki typu Cauchy'ego, Zagadnienia brzegowe w teorii funkcji analitycznych, Równania całkowe mocno-osobliwe liniowe i nieliniowe, t. III, PWN, Warszawa 1960.

199. Pogorzelski W., Równania całkowe i ich zastosowania-Całki osobliwe i równania całkowe osobliwe w przestrzeni, Zagadnienia brzegowe o pochodnych stycznościowych dla równań eliptycznych i parabolicznych, Układy paraboliczne równań cząstkowych, Zastosowania fizyczne i techniczne równań całkowych, PWN, Warszawa 1970.

200. Pop-Stojanovic Z.R., On Multidimensional Generalized Homogeneous Random Fields in $\mathbb{R}^n$, Math. Syst. Theory, Vol. 4(1970), 6-9.

201. Probabilistic Methods in Applied Mathematics, Vol. 2, Academic Press, New-York-London 1970.

202. Probabilistic Methods in Applied Mathematics, Vol. 3, Academic Press, New-York-London 1973.

203. Przeworska-Rolewicz D., Equations With Transformed Argument, An Algebrai Approach, PWN, Warszawa 1973.

204. Przybylak S., Skrzypczyk J., On Some Asymptotic Properties Of Nonstationary Systems, Zesz. Nauk. Pol. Śl., ser. Mat.-Fiz. 28, Gliwice 1989, 335-352.

205. Ramm A.G., Theory and Applications of Some New Classes of Integral Equations, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1980.

206. Rao A.N.V., Padgett W.J., On the Solution of a Class of Stochastic Integral Systems, J. Integral Eq., Vol. 4(1982), 145-162.

207. Reiter H., Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups, Clarendon Press, Oxford 1968.

208. Roberts J.B., Spanos P.D., Random Vibrations and Statistical Linearization, J. Wiley, Chichester 1990.

209. Ronkov A., Bainov D., Integral Equations and Inequalities of Volterra Type for Functions Defined in Partially Ordered Spaces, J. Math. Anal. and Appl., Vol. 125(1987), 483-507.

210. Rudin W., Functional Analysis, McGraw-Hill Book Comp., New York 1973.

211. Rymarz Cz., Mechanika Ośrodków Ciągłych, PWN, Warszawa 1993.

212. Saitoh S., Integral Transforms in Hilbert Spaces, Proc. Japan Acad., Ser. A Vol. 58(1982), 361-364.

213. Safonov M.G., Athans M., A Multiloop Generalization of the Circle Criterion for Stability Margin Analysis, IEEE Trans. AC, AC-26 (1981), 415-422.

214. Sandberg I.W., On the L^2-Boundedness of Solutions of Nonlinear Functional Equations, BSTJ, Vol. 43, July 1964, 1581-1599.

215. Sandberg I.W., A Frequency-Domain Condition for the Stability of Feedback Systems Containing a Single Time-Varying Nonlinear Element, BSTJ, Vol. 43(1964), 1601-1608.

216. Sandberg I.W., A Condition for the L^∞-Stability of Feedback Systems Containing a Single Time-Varying Nonlinear Element, BSTJ, Vol. 43(1964), 1815-1817.

217. Sandberg I.W., Benes V.E., On the Properties of Nonlinear Integral Equations That Arises in the Theory of Dynamical Systems, BSTJ, Vol. 43(1964), 2839-2853.

218. Schmidt J., Die Regula Falsi für Operatoren in Banachräumen, Z. Angew. Math. Mech., Vol. 41, 61-63.

219. Schmidt J., Eine Übertragung der Regula Falsi auf Gleichungen im Banachraum I, II, Z. Angew. Math. Mech., Vol. 43, 1-8, 97-110.

220. Schwabik S., Tvrdy M., Vejvoda O., Differential and Integral Equations, D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht-Boston-London 1979.

221. Skalmierski B., Mechanika, PWN, Warszawa 1977.

222. Skalmierski B., Mechanics, PWN, Warszawa, Elsevier, Amsterdam 1991.

223. Skalmierski B., Tylikowski A., Procesy stochastyczne w dynamice, PWN, Warszawa 1972.

224. Skalmierski B., Tylikowski B., Stabilność układów dynamicznych , PWN, Warszawa 1973.

225. Skelton R.E., Dynamic Systems Control, Linear Systems Analysis and Synthesis, J. Wiley & Sons, Inc., New York 1988.

226. Skrzypczyk J., Stabilność układów dynamicznych opisanych losowymi równaniami całkowymi, Praca doktorska Pol. Śląska, Gliwice 1975.

227. Skrzypczyk J.,Kryterium V.M.Popova dla stochastycznego nieliniowego równania całkowego,Konf. Nauk. Wydz. Autom. i Inform.,sekcja C,Gliwice 18-20 września 1973,Gliwice C335-C342.

228. Skrzypczyk J.,L_m^p-Stabilność w sensie średnim nieliniowych stochastycznych równań całkowych, Zesz.Nauk. Pol.Śl., ser. Automatyka 28, Gliwice 1974,5-24.

229. Skrzypczyk J., Stabilność rozwiązań nieliniowych stochastycznych równań całkowych w przestrzeniach Banacha, Zesz.Nauk. Pol.Śl., ser. Automatyka 28, Gliwice 1974,25-36.

230. Skrzypczyk J.,Stability in the Mean of Dynamic Systems Described by Random Integral Equations,Proc. Symp. on Stochastic Control IFAC,25-27 September 1974,Budapest 1976,197-204.

231. Skrzypczyk J.,Uwagi dotyczące stabilności w sensie średnim układu dynamicznego opisanego losowym równaniem całkowym Volterry,III Symp. Dynamiki i Stat. Konstrukcji,Rzeszów 7-8 październik 1976,207-214.

232. Skrzypczyk J.,Uwagi o przybliżonych metodach rozwiązywania równań operatorowych w ε-łańcuchowych przestrzeniach Banacha, Zesz.Nauk.Pol.Śl., ser. Mat.-Fiz. 28, Gliwice 1976, 151-161.

233. Skrzypczyk J.,Frequency Methods in Hilbert Space Theory of Dynamic Systems,Proc. of the VIIIth Int. Conf. on Nonlinear Oscillations, Prague 1978,Acad.Publ.House of the Czech.Acad.of Science,Prague 1979,659-664.

234. Skrzypczyk J. ,Analysis of Statistical Linearization of Random Nonlinear Volterra Equations, Proc.of Xth Int. Conference on Nonlinear Oscillations, Varna 1984,Publ.Hause of Bulgarian Acad.Sci., Sofia 1985,750-753.

235. Skrzypczyk J.,Second-Order Linearization Method for Nonlinear Dynamic Systems Described by the Volterra Integral Equations,Studia geotechnica et mechanica,Vol.VIII(1986).

236. Skrzypczyk J.,Periodic Vibrations in Nonlinear Dynamic Systems Described by Integral Equations on Locally Compact Abelian Groups,XII Symp. Drgania w układach fizycznych, 15-17 maja 1986 Białżejewko,Zbiór referatów,PTMTiS 1986,246-247.

237. Skrzypczyk J.,Periodic and Almost Periodic Vibrations in Nonlinear Dynamic Systems Described by Integral Equations Over Locally Compact Abelian Groups,XIth Int.Conf.on Nonlinear Oscillations,Budapest 17-23 1987.

238. Skrzypczyk J.,Statistical Linearization Of Nonlinear Dynamic Systems Described By Integral Equations Over Locally Compact Abelian Groups, Proc. of Conf. Nonlinear And Random Vibrations, Oberwolfach 1986 September 14-20,Oberwolfach 1987.

239. Skrzypczyk J., A Note On Nonlinear Volterra Integral Equations Over Locally Compact Groups, Zesz.Nauk. Pol.Śl., ser.Mat.-Fiz. 28, Gliwice 1989,353-363.

240. Skrzypczyk J.,Wyznaczanie dokładnych charakterystyk probabilistycznych w nieliniowych układach dynamicznych, Zesz.Nauk. Pol.Śl., ser.Mechanika 113, Gliwice 1993, 369-376.

241. Skrzypczyk J., Uwagi o nowej metodzie linearyzacji statystycznej opartej na minimalizacji błędu kwadratowego energii potencjalnej, Sympozjon Modelowanie w Mechanice Wisła luty 1994, Zesz.Nauk. Pol.Śl., ser.Mechanika 115, Gliwice 1994, 357-365.

242. Skrzypczyk J., Exact Steady-State Probability Density Functions For Second Order Nonlinear Systems Under External Stationary Excitations, J. Theor. Appl. Mech. 32 (1994), 501-518.

243. Skrzypczyk J., Accuracy Analysis of Statistical Linearization Methods in Nonlinear Continuous Systems Described by Random Integral Equations J. Theor. Appl. Mech. 32 (1994), (w druku).

244. Skrzypczyk J.,Some Asymptotic Properties of Nonstationary Processes in Dynamical Systems,w Structural Safety and Reliability Vol.I-III, A.A.Balkema Publ., Rotterdam, The Netherlands 1993.

245. Skrzypczyk J., On Existence of Periodic and Almost Periodic Motions in Nonlinear Dynamical Systems Over Locally Compact Abelian Groups,Second International Conference On Computational Stochastic Mechanics,Athens, Greece 13-15 June, 1994 (w druku).

246. Skrzypczyk J., On Existence of Periodic Motions in Nonlinear Random Dynamical Systems Described by Abstract Integral Equations, Seventh International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering, CERRA-ICASP 7, Paris, France, July 10-13, 1995 (w druku).

247. Skrzypczyk J.,Kaczmarczyk S.,O modelu matematycznym drgań struny o zmiennej długości,XII Symp. Modelowanie w Mechanice,Zbiór referatów, Gliwice-Wisła 1983,213-222.

248. Sobczyk K., Metody dynamiki statystycznej, PWN, Warszawa 1973.

249. Socha L., Równania momentów w stochastycznych układach dynamicznych, PWN, Warszawa 1993.

250. Solodownikow W.W., Nichtlineare und selbsteinsteliende Systeme, Veb Verlag Technik,Berlin 1975.

251. Spanos P.D., Hysteretic Structural Vibrations Under Random Load, J. Acoust.Soc.Am.,Vol65(1979),404-410.

252. Spanos P.D., Stochastic Linearization in Structural Dynamics, Applied Mechanics Reviews (1981),1-8.

253. Spiegel M.,Laplace-Transformationen,McGraw-Hill Book Comp.,Düsseldorf-New York 1977.

254. Staffans O.J.,Some Energy Estimates for a Nondifferentiated Volterra Equation,J.Diff.Eq.,Vol.32(1979),285-293.

255. Stig-Olof Londen,The Qualitative Behavior of the Solutions of a Nonlinear Volterra Equation,Michigan Math.J.,Vol.18(1971),321-330.

256. Susłow G.K., Mechanika teoretyczna, PWN, Warszawa 1960.

257. Szabatin J.,Podstawy teorii sygnałów, WKiŁ, Warszawa 1982.

258. Szlenk W., Wstęp do teorii gładkich układów dynamicznych,PWN, Warszawa 1982.

259. Szmydt Z.,Transformacja Fouriera i równania różniczkowe liniowe, PWN, Warszawa 1972.

260. Szopa J.,Application of Volterra Stochastic Integral Equations of the II-kind to the Analysis of Dynamic Systems of Variable Inertia, J.Techn.Physics,Vol.17(1976),423-433.

261. Szopa J.,Metoda wyznaczania funkcji momentów wyjścia stochastycznych liniowych układów niestacjonarnych, Arch. Automatyki i Telemechaniki, Vol.22(1977),359-374.

262. Szopa J.,O wyznaczaniu wariancji stochastycznych układów dynamicznych za pomocą stochastycznych równań całkowych przy uwzględnieniu jednego wyrazu rezolwenty, Zesz.Nauk Pol.Śl., ser.Mat.-Fiz. 28, Gliwice 1977, 187-202.

263. Szopa J.,response of a Multidegree-of-Freedom System of Variable Coefficients to Random Excitation,ZAMM,t.62(1982),321-328.

264. Szopa J.,Response of Stochastic Linear System,J.Eng.Mech.Div.,ASCE,EM1 (1981),1-11.

265. Szopa J.,The Analysis of Dynamic Systems of Variable Inertia Described by the Nonlinear Stochastic Differential Equations, VIII ICNO Conf., Prague 11-15 September 1978.

266. Szopa J.,Metody badania i wrażliwość dynamicznych układów stochastycznych, Zesz.Nauk. Pol.Śl.,ser.Mat.-Fiz. 45, Gliwice 1985.

267. Szopa J.,Wojtylak M.,O wyznaczaniu charakterystyk probabilistycznych rozwiązań wahadła podwójnego o zmiennej długości poddanego wymuszeniom losowym,Mechanika Teoret. i Stos. 17(1979),237-245.

268. Szopa J.,Wojtylak M.,Wariancja stochastycznych układów dynamicznych w fazie rozruchu przy wolnych zmianach parametrów, Zesz.Nauk. Pol.Śl., ser. Mat.-Fiz. 28, Gliwice 1977,203-208.

269. Taibleson M.H.,Fourier Analysis on Local Fields,Princeton Univ. Press, Princeton,New Jersey 1975.

270. Takahashi Y.,Rabius M.J.,Auslander D.M.,Sterowanie i systemy dynamiczne, WNT, Warszawa 1976.

271. To C.W.S.,Li D.M., Equivalent Nonlinearization of Nonlinear systems to Random Excitations, Stochastic Structural Dynamics 1,New Theoretical Developments,Springer-Verlag,Berlin-Heidelberg-New York 1991, 245-266.

272. Tretter S.A.,Introduction to Discrete-Time Signal Processing,J.Wiley & Sons,New York 1976.

273. Trott G.W.,Christensen G.S.,A Larger Region of Convergence for the Volterra Series,Int.J.Control,Vol.14(1971),377-384.

274. Tsokos C.P., On a Stochastic Integral Equation of the Volterra Type, Math.Syst.theory,Vol.3(1969),222-231.

275. Tsokos C.P.,The Method of V.M.Popov For Differential Systems With Random Parameters,J.Appl.Prob.,Vol.8(1971),298-310.

276. Tsokos C.P.,Hamdan M.A.,Stochastic Asymptotic Exponential Stability of Stochastic Integral Equations,J.Appl.Prob.,Vol.9(1972),169-177.

277. Tsokos Ch.P.,Padgett W.J., Random Integral Equations With Applications To Stochastic Systems, Springer-Verlag,Berlin 1971.

278. Tsokos CH.P.,Padgett W.J.,Random Integral Equations With Applications To Life Sciences And Engineering, Academic Press,New York,London 1974.

279. Tylikowski A.,Stabilność stochastyczna ciągłych układów dynamicznych, Zesz.Nauk. Pol.Śl.,ser.Automatyka 20,Gliwice 1972.

280. Tylikowski A., Stochastyczna stateczność układów ciągłych, PWN, Warszawa 1991.

281. Vinokurov V.R.,Optimal Control of Processes Described by Integral Equations I,II,III, SIAM J.Control,Vol.7(1969),324-355.

282. Vo-Khac Khoan,M.,Etude Abstraite d'equations aleatoires non-lineaires. Equations integrales de Volterra-Fredholm, C.R.Acad.Sc., Paris, t.274 (1972),ser.A,1725-1728.

283. Volterra Equations,Proceedings,Otaniemi,Finland 1978,Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1979.

284. Vulikh B.Z., Introduction to the Theory of Partially Ordered Spaces, Wolters-Noordhoff Sci. Publ. Ltd.,Groningen 1967.

285. Ward J.R.,The Existence of Solutions,Stability and Linearization of Volterra Systems,Mat,Syst,Theory,Vol.11(1977),177-197.

286. Wazan M.,Stochastic Approximation,University Press,Cambridge 1969.

287. Wedig W.,Zur Integration stochastischer Systeme mit stückweise linearen Kennlinien,Ingenieur-Archiv,Vol.49(1980),201-215.

288. Wen Y.K.,Equivalent Linearization for Hysteretic Systems Under Random Excitations,J.Appl.Mech.,Vol.47(1980).

289. Wen Y.K.,Equivalent Linearization Technique for Hysteretic Systems Under random Excitations,Trans.ASME,Vol.47(1980),150-154.

290. Wierzbicki A.,Modele i wrażliwość układów sterowania,WNT,Warszawa 1977

291. Wiggins S.,Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos,Springer-Verlag,New York-Berlin-Heidelberg-London 1990.

292. Willems J.C.,Stability,Instability,Invertibility and Causality,SIAM J. Control,Vol.7(1969),645-671.

293. Willems J.C.,Some Results on the L^p Stability of Linear Time-Varying Systems,IEEE Trans.AC,AC-14(1969),660-665.

294. Willems J.C.,Brockett R.W.,Rearrangement Inequalities for Stability Analysis,IEEE AC,AC-13(1968),543-549.

295. Wong E.,Stochastic Processes in Information and Dynamical Systems, McGraw-Hill Book Comp., New York 1971.

296. Wu M.Y.,Desoer C.A.,L^p-Stability ($1\leq p\leq\infty$) of Nonlinear Time-Varying Feedback Systems,SIAM J.Control,Vol.7(1969),356-364.

297. Wunsch G.,Systemtheorie,Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Partig K.-G.,Leipzig 1975.

298. Xie-Ping Ding,Existence,Uniqueness and Approximation of Solutions for a System of Nonlinear Random Operator Equations,Nonlinear Anal. Th. Methods and Appl.,Vol.8,563-576.

299. Yaglom A.M.,Second-order Homogeneous Random Fields,Proc.Fourth Berkeley Symp.Math.Stat. and Prob.,Vol.291961),593-622.

300. Yasuda Y., Ito H., Ishizu H., On the Input-Output Stability of Linear Time-Varying Systems, SIAM J. Appl. Math., Vol. 38(1980), 175-188.

301. Yosida K., Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 1966.

302. Zames G., On the Input-Output Stability of Nonlinear Time-Varying Feed-back Systems-Part I: Conditions Using Concepts of Loop Gain Conicity and Positivity, IEEE Trans. AC, AC-11(1966), 228-238; Part II: Conditions Involving Circles in the Frequency Plane and Sector Nonlinearities, 465-476.

303. Zeidler E., Nonlinear Functional Analysis and its Applications I, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo 1986.

304. Zhang X., Elishakoff I., Zhang R.A., Stochastic Linearization Technique Based on Minimum Mean Square Deviation on Potential energies, in Stochastic Structural Dynamics 1, Springer-Verlag, Berlin 1991, 327-338.

305. Zhang B.G., Padgett W.J., On the Existence and Uniqueness of Random Solutions to Some Nonlinear Stochastic Integral Equations, J. Integral Eq., Vol. 8(1985), 217-228.

306. Żelazko W., Algebry Banacha, PWN, Warszawa 1968.

307. Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштайн А.И., Мултипликативны системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах, Изд. Элм, Баку 1981.

308. Азбелев Н.В., Цалюк З.Б., К вопросу о единственности решения интегрального уравнения, Докл. АН СССР 156(1964), 239-242.

309. Артемъев В.М., Степанов В.Л., К оценке точности метода статистической линеаризации, Автоматика и Телемеханика, 37(1978), 181-185.

310. Бендат Дж., Пирсол А., Измерение и анализ случайных процессов, Изд. Мир, Москва 1974.

311. Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов вып. 1, Изд. Мир, Москва 1974.

312. Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов вып. 2, Прогноз и управление Изд. Мир, Москва 1974.

313. Боурбаки Н., Общая топология: Основные структуры, Изд. Наука, Москва 1968.

314. Боурбаки Н., Общая топология: Топологические группы, числа и связанные с ними группы и пространства, Изд. Наука, Москва 1969.

315. Боурбаки Н., Интегрирование, меры на локально компактных пространствах, продолжение меры, интегрирование мер, меры на отделимых пространствах, Изд. Наука, Москва 1977.

316. Бухвалов А.В., Критерий интегральной представимости линейных операторов Функциональный анализ и его применение, Т. 9(1975), 51-62.

317. Вайнберг М.М., Вариационный метод и метод монотонных операторов, Изд. Наука, Москва 1972.

318. Вентцель А.Д., Курс теории случайных процессов, Изд. Наука, Москва 1975.

319. Верлань А.Ф., Сизиков В.С., Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ, Изд. Наукова Думка, Киев 1977.

320. Гельфанд И.М., Райков Д.А., Шилов Г.Е., Коммутативные нормированные кольца, Гос. Изд. Физ.-Мат. Лит., Москва 1960.

321. Годунов С.К., Рябенький В.С., Введение в теорию разностных схем, Гос. Изд. Физ.-Мат. Лит., Москва 1962.

322. Годунов С.К., Рябенький В.С., Разностные схемы, Изд. Наука, Москва 1977.

323. Гохберг И.Ц., Фельдман И.А., Уравнения в свертках и проекционные методы их решения, Изд. Наука, Москва 1971.

324. Диментберг М.Ф., Случайные процессы в динамических системах с переменными параметрами, Изд. Наука, Москва 1989.

325. Дискретные нелинейные системы, Изд. Машиностр., Москва 1982.

326. Дмитриевский А.А., Внешняя баллистика, Изд. Машиностроение, Москва 1972.

327. Дороговцев А.Я., Некоторые замечания о дифференциальных уравнениях возмущаемых периодическими случайными процессами, УМЖ, Т. XIV(1962), 119-128.

328. Желобенко Д.П., Гармонический анализ на полупростых комплексных группах Ли, Изд. Наука, Москва 1974.

329. Казаков И.Й., Статистическая теория систем управления в пространстве состояний, Изд. Наука, Москва 1975.

330. Калайда А.Ф., Янишевский А.Т., О решении интегральных уравнений в пространствах с весом, Вычисл. и Прикл. Мат., вып. 20, Изд. Киевского Унив., (1973), 68-77.

331. Кляцкин В.И., Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами, Изд. Наука, Москва 1975.

332. Колмогоров А.Н., Фомин С.В., Элементы теории функций и функционального анализа, Изд. Наука, Москва 1976.

333. Коротков В.Б., О некоторых свойствах частично интегральных операторов, Докл. АН СССР, Т. 217(1974), 752-754.

334. Коротков В.Б., О сильных интегральных операторах, Мат. Заметки, Т. 16(1974) 907-912.

335. Коротков В.Б., Интегральные операторы, Изд. Наука, Сибирское Отделение, Новосибирск 1983.

336. Красносельский М.А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Гос. Изд. Техн.-Теор. Лит., Москва 1956.

337. Красносельский М.А., Положительные решения операторных уравнений, Гос. Изд. Физ.-Мат. Лит., Москва 1962.

338. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е., Соболевский П.Е., Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, Изд. Наука, Москва 1967.

339. Красовский А.А., Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем, Изд. Наука, Москва 1974.

340. Кудревич Я., Положительные операторы и условия устойчивости динамических систем, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Techn. Sci., Vol. 12(1964), 921-924.

341. Курчатов В.А., Об одном методе линейной интерполяции решения функциональных уравнений, ДАН СССР, Т. 198(1971), 524-526.

342. Курчатов В.А., Об условиях применения одного метода линейной интерполяции для решения функциональных уравнений, Изд. Высших Учебных Заведений Н. 8(1975), 55-63

343. Курчатов В.А.,Об эффективности метода симметрической разностной линеаризации для решения функциональных уравнений,Изд. Высших Учебных Заведений Н.10(1977),86-99.

344. Курчатов В.А.,Метод разностной линеаризации,оптимальной по порядку погрешности численного дифференцирования,Ж.Выч.Мат.и Мат.Физ.,Т.20(1980) 827-840.

345. Курчатов В.А.,Метод разностной линеаризации,абсолютно оптимальный по точности,для решения некоторых классов операторных уравнений,Изв. Высших Учебных Заведений,Н.9(1982),25-35.

346. Курчатов В.А.,Метод линеаризации для решения уравнений с разрывными операторами,Дифф. Уравн.,Т.XXI(1985),1596-1603.

347. Левин Б.П.,Теоретические основы статистической радиотехники Т.1, Изд. Советское Радио,Москва 1974.

348. Левит М.В.,Частотные условия абсолютной стохастической устойчивости систем автоматического управления со случайными внешними воздействами, ДАН СССР,Т.195(1970),769-772.

349. Левитан Б.М., Теория операторов обобщенного сдвига, Изд. Наука, Москва 1973.

350. Лихтарников А.Л.,Якубович В.А.,Частотная теорема для непрерывных однопараметрических полугрупп,Сер. Мат.,Т.41(1977),895-911.

351. Лопатинский Я.Б.,Формулы Фредгольма для систем линейных интегральных уравнений,в Теория общих граничных задач,Изд. Наукова Думка,Киев 1984.

352. Лоран П.Ж.,Аппроксимация и оптимизация,Изд. Мир,Москва 1975.

353. Мамедов Я.Д.,Одностопонные оценки в условиях исследования решений дифференциальных уравнений в Банаховых пространствах,Изд. Элм,Баку 1971.

354. Мартынюк А.А.,Гутовский Р.,Интегральные неравенства и устойчивость движения,Изд. Наукова Думка,Киев 1979.

355. Наймарк М.А.,Теория представлений групп,Изд. Наука,Москва 1976.

356. Основы автоматического управления,Изд. Наука,Москва 1974.

357. Панков А.А.,Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциально-операторных уравнений,Наукова Думка,Киев 1985.

358. Параев Ю.И.,Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации,Изд.Советское Радио,Москва 1976.

359. Пугачев В.С., Теория случайных функций и её применение в теории автоматического управления, Гос.Изд.Физ.-Мат.Лит., Москва 1962.

360. Пупков К.А.,Капалин В.И.,Ющенко А.С.,Функциональные ряды в теории нелинейных систем,Изд. Наука,Москва 1976.

361. Розанов Ю.А.,Теория обновляющих процессов,Изд. Наука,Москва 1974.

362. Розенвассер Е.Н.,Воловодов С.К.,Операторные методы и колебательные процессы,Изд.Наука,Москва 1985.

363. Садовяк А.М.,Аналог формулы Коши для линейных стохастических дифференциальных уравнений без последствия,Литовский Мат. Сб.,Т.14(1974),173-178.

364. Садовяк А.М.,Царьков Е.Ф.,Аналог формулы Коши для стохастических дифференциальных уравнений,ТВП,Т.18(1973),415-416.

365. Самарский А.А.,Введение в теорию разностных схем,Изд.Наука,Москва 1971

366. Самарский А.А., Гулин А.В., Устойчивость разностных схем, Изд. Наука, Москва 1973.

367. Статистические методы в проектировании нелинейных систем автоматического управления,Изд. Машиностр.,Москва 1970.

368. Толстов Г.П.,Ряды Фурье,Изд. Наука,Москва 1980.

369. Филатов А.Н.,Методы усреднения в дифференциальных и интегродифференциальных уравнениях,Изд. ФАН,Ташкент 1971.

370. Филиппов И.Г.,Ширинкулов Т.Ш.,Мирзакадилов С.М.,Нестационарные колебания линейных упругих и вязкоупругих сред,Изд. ФАН,Ташкент 1979.

371. Хейер Х.,Вероятностные меры на локально компактных группах,Изд. Мир, Москва 1981.

372. Хъюитт Э.,Росс К., Абстрактный гармонический анализ, т.1, Изд. Наука, Москва 1975.

373. Хъюитт Э.,Росс К., Абстрактный гармонический анализ, т.2, Изд. Наука, Москва 1975.

374. Цыпкин Я.З.,Попков Ю.С.,Теория нелинейных импульсных систем,Изд.Наука, Москва 1973.

375. Яглом А.М.,Положительно-определённые функции и однородные поля на группах и однородных пространствах,ДАН СССР,Т.135(1960),1342-1345.

376. Ядренко М.И., Спектральная теория случайных полей, Изд. Вища Школа, Киев 1980.

377. Якубович В.А.,Методы матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем,Автом. и Телемех., Т.25(1964) часть 1; Т.26 (1965) часть 2 и 3.

378. Якубович В.А.,Частотные условия устойчивости решений нелинейных интегральных уравнений автоматического управления,Вестник Ленингр. Унив., Н.7(1967),109-125.

379. Якубович В.А.,Необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости при некоторых типах квадратичных ограничений,ДАН СССР,Т.209(1973), 312-315.

380. Якубович В.А.,Минимизация квадратичных функционалов при квадратичных ограничениях и необходимость частотного условия в квадратичном критерии абсолютной устойчивости нелинейных систем управления, ДАН СССР, Т.209(1973),1039-1042.

381. Якубович В.А.,Частотная теорема для случая,когда пространства состояний и управлений - гильбертовы,и её применение в некоторых задачах оптимального управления,Сиб. Мат. Ж., Т.15 (1974) часть 1, 639-668; Т.16 (1975) часть 2, 1081-1102.

382. Якубович В.А.,Абсолютная устойчивость импульсных систем с несколькими нелинейными и нестационарными блоками, Автоматика и Телемеханика, Т.28 (1967) часть 1;Т.29(1968) часть 2.

WYKAZ OZNACZEŃ

$A \subseteq B$, $A \subset B$, $A \supseteq B$, $A \supset B$ - zawieranie zbiorów A i B 13

A^d, A' - domknięcie, dopełnienie zbioru A 13

$A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ - część wspólna, suma, różnica zbiorów 13

$a \in A$ - a jest elementem zbioru A 13

$\mathbb{Z}^1$, $\mathbb{Z}^k$, k=2,3,.. - zbiory liczb całkowitych 13

$\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^k$, k=2,3,.. - zbiory liczb rzeczywistych 13

$\mathbb{C}^1$, $\mathbb{C}^k$, k=2,3,.. - zbiory liczb zespolonych 13

$\mathbb{R}^1_+$, $\mathbb{Z}^1_+$, $\mathbb{R}^k_+$, k=2,3,.. - podzbiory liczb nieujemnych 13

A^T, x^T, A^*, x^*, $\bar{A}$, $\bar{x}$ - operacje macierzowe 13

$[a_{jk}]$ - macierz dwuwskaźnikowa 13

$\det(A)$ - wyznacznik macierzy A 13

$\mathrm{tr}(A)$ - ślad macierzy A 13

$\sum_j a_j(\,)$ - suma elementów 13

$|x|$ - norma euklidesowa wektora x 13

$\langle x, y \rangle$ - iloczyn skalarowy wektorów x i y 13

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ - przestrzeń macierzy rzeczywistych o wymiarach n×m 13

$\mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ - przestrzeń macierzy zespolonych o wymiarach n×m 13

I - macierz jednostkowa 13

$\sigma_{max}(A), \sigma_{min}(A)$ - wartości osobliwe macierzy 13

$\lambda_{max}(A), \lambda_{min}(A)$ - ekstremalne wartości własne 13

$\forall, \exists, \neg, \Leftarrow, \Leftrightarrow, \Rightarrow, :=, \equiv, \vee, \wedge$ - oznaczenia logiczne 14

$\cong$ - izomorfizm 14

lzga. - lokalnie zwarta grupa abelowa 14

G, H - grupy abelowe 14

e - element neutralny grupy 14

$\hat{G}$ - grupa dualna 14

$\mu(\cdot), m(\cdot)$ - miary Haara na G i $\hat{G}$ odpowiednio 14

G/H - przestrzeń warstw 14

$\pi_H(\cdot)$ - odwzorowanie kanoniczne 14

(G_B, i_B) - kompaktyfikacja Bohra 14

$\{x: \mathcal{R}\}$ - zbiór elementów x, dla których spełniona jest relacja $\mathcal{R}$ 14

$A+B$ - zbiór $\{a+b: a \in A, b \in B\}$ 14

$-A$ - zbiór $\{-a: a \in A\}$ 14

$a+B$ - zbiór $\{a\}+B$ 14

$2A, 3A$ - A+A, A+A+A 14

$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ - przestrzeń probabilistyczna 15

$\omega \in \Omega$ - zdarzenie elementarne 15

$\mathfrak{F}(\Omega)$ - σ-ciało podzbiorów borelowskich Ω 15

$\mathbb{P}(\cdot)$ - miara probabilistyczna 15

$x(\omega), \omega \in \Omega$ - zmienna losowa 15

$x: A \longrightarrow B$ - x odwzorowuje A w B 15

$\mathbb{E}, \mathbb{E}(\cdot)$ - operator wartości oczekiwanej 15

$\int_\Omega x(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$ - całka względem miary probabilistycznej $\mathbb{P}$ 15 15

$\|\cdot\|_p, L^p(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}; \mathbb{C}^n), 1 \le p \le \infty$ - przestrzeń zmiennych losowych zespolonych rzędu p 15

$\|\cdot\|_p, L^p(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R}^n), 1 \le p \le \infty$ - przestrzeń zmiennych losowych rzeczywistych rzędu p 15

$\langle \cdot, \cdot \rangle_2, \|\cdot\|_2, L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}; \mathbb{C}^n)$ - iloczyn skalarowy, norma, przestrzeń zmiennych losowych hilbertowskich 15

$|||\cdot|||$ - istotne supremum 15

$\inf, \sup$ - infimum, supremum 15

$\mathrm{ess}\cdot\sup, \mathrm{ess}\cdot\inf$ - istotne supremum, istotne minimum 15

$\xi(t, \omega), t \in G, \omega \in \Omega$ - proces stochastyczny 16

$A \times B$ - iloczyn kartezjański zbiorów A i B 16

$\mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$ - σ-ciało podzbiorów borelowskich w $\mathbb{R}^n$ 16

$F_{t_1, t_2, .., t_k}(x_1, x_2, .., x_k)$ - dystrybuanta wektora losowego 16

$\sigma_\xi^2(t), t \in G$ - macierz wariancji 16

$R_{\xi\xi}(t_1, t_2), t_1, t_2 \in G$ - macierz funkcji autokorelacji 17

$R_{\xi\eta}(t_1, t_2), t_1, t_2 \in G$ - macierz funkcji korelacji wzajemnej 17

$\blacksquare$ - koniec dowodu, lematu etc. 18

$(G, \le)$ - grupa uporządkowana 20

$\int_Q$ - całka na zbiorze Q 22

$\mathcal{V}(Q; L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)))$ - przestrzeń sygnałów stochastycznych o wahaniu ograniczonym 22

Q - podpółgrupa G 22

$G_\tau \equiv \tau\text{-}Q$ - podzbiór grupy G 23

$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_1)$ - suma zbiorów A_1 23

$Q_t \equiv G_t \cap Q$ - podzbiór półgrupy Q 23

$1_A(\cdot)$ - funkcja charakterystyczna zbioru A 24

$f_\tau(\cdot)$ - obcięcie funkcji w punkcie τ 24

$L^2(G;\mathbb{R}^n)$ - przestrzeń Lebesgue'a 24

$C_0(G;\mathbb{R}^n)$ - podprzestrzeń funkcji ciągłych 24

$\mathrm{supp}(x)$ - nośnik funkcji x 25

$L^1(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$ - przestrzeń funkcji całkowalnych o wartościach w $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ 25

$x*y$ - splot funkcji x i y 25

$\int_G (\cdot)\mu(\cdot)$ - całka względem miary Haara 25

$\mathrm{mod}(\mathbb{P})$ - z prawdopodobieństwem 1 26

$L^\infty(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$ - przestrzeń macierzowych zmiennych losowych istotnie ograniczonych 26

Δ - oznaczenie trójkąta 26

$L^1_{loc}(G;L^\infty(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)))$ - przestrzeń sygnałów stochastycznych lokalnie całkowalnych 26

$s'(\cdot)$ - pochodna funkcji 28

$>,\geq,<,\leq,=$ - relacje algebraiczne 28

$\dot{M},\ddot{M},\dot{q},\ddot{q}$ - pochodna, 2. pochodna względem czasu 31

$e_\xi, e_\eta, e_\zeta, r$ - wektory bazowe, wektor w przestrzeni trójwymiarowej 36

$\frac{d^2r}{dt^2}, \frac{dr}{dt}$ - przyspieszenie, prędkość w ruchu względnym 36

$w \times r$ - iloczyn wektorowy wektorów w i r 36

$\{t_k\}, k=1,2,3,\ldots$ - ciąg elementów t_k 42

$\delta(\cdot)$ - dystrybucja delta Diraca 44

$x(t^-)$ - granica lewostronna funkcji w t 44

$\mathbb{T}^1$ - torus jednowymiarowy 47

$\mathrm{mod}(\tau)$ - dodawanie modulo τ 47

$\Sigma^{\tilde{Q}}$ - przekrój poprzeczny pola wektorowego 48

$P_{\tilde{Q}}$ - odwzorowanie Poincare'go 48

$C(G;\mathbb{R}^n), C(G;\mathbb{C}^n)$ - przestrzenie sygnałów ciągłych 51

$C_0(G;\mathbb{R}^n), C_{00}(G;\mathbb{R}^n)$ - podprzestrzenie sygnałów ciągłych 51

$C_0(G;\mathbb{C}^n), C_{00}(G;\mathbb{C}^n)$ - jw. 51

$\|\cdot\|_u$ - norma zbieżności jednostajnej 51

$C(A;\mathbb{R}^n), C_0(A;\mathbb{R}^n), C_{00}(A;\mathbb{R}^n)$ - podprzestrzenie sygnałów ciągłych 51

$\mathcal{B}(G;\mathbb{R}^n), \mathcal{B}_0(G;\mathbb{R}^n), \mathcal{B}_{00}(G;\mathbb{R}^n)$ - przestrzenie sygnałów ograniczonych 51

$L^p(G;\mathbb{R}^n), 1\leq p<\infty$ - przestrzeń sygnałów całkowalnych 51

$\|x(\cdot)\|_p$ - norma sygnału w $L^p(G;\mathbb{R}^n), 1\leq p<\infty$ 52

$l^2(\mathbb{R}^n)$ - przestrzeń ciągów sumowalnych z kwadratem 52

$L^p(A;\mathbb{R}^n), 1\leq p<\infty$ - podprzestrzeń sygnałów całkowalnych 52

$L^\infty(G;\mathbb{R}^n)$ - przestrzeń sygnałów istotnie ograniczonych 52

$\tilde{f}\circ\pi_H$ - złożenie odwzorowań 52

$\mathbb{R}^1/\tau\mathbb{Z}^1 \tilde{=} \mathbb{T}^\tau$ - grupa liczb zespolonych 52

$L^2_H(G;\mathbb{R}^n)$ - zbiór sygnałów H-okresowych 53

$\hat{x}(\cdot)$ - transformata Fouriera fumkcji x 53

χ - charakter, element grupy $\hat{G}$ 53

$C_0(\hat{G};\mathbb{R}^n)$ - podprzestrzeń funkcji ciągłych na $\hat{G}$ 53

$CAP(G;\mathbb{R}^n)$ - zbiór sygnałów prawie okresowych 54

spo. - sygnał prawie okresowy 54

$\mathrm{Trig}(G;\mathbb{R}^n)$ - zbiór wielomianów trygonometrycznych 54

$M(\cdot)$ - wartość średnia spo. (moc sygnału) 54

$\lim_{n\to\infty}$ - limes(granica) 54

$B^p(G;\mathbb{R}^n), 1\leq p\leq\infty$ - przestrzeń spo. w sensie Besicovitcha 55

$F_B f$ - transformata Fouriera-Bohra 55

$\mathrm{Sp}(f)$ - spektrum funkcji f 55

$\lim_{n\to\infty}\sup$, $\overline{\lim}_{n\to\infty}$ - limes superior(granica górna) 56

$\bar{M}(\cdot)$ - średnia moc sygnału 56

$M^p(G;\mathbb{R}^n), 1\leq p<\infty$ - zbiór sygnałów o ograniczonej mocy średniej 56

$\langle x(\cdot)\rangle$ - półnorma sygnału $x(\cdot)$ 56

$M^p_0(G;\mathbb{R}^n)$ - podprzestrzeń $M^p(G;\mathbb{R}^n)$ 56

$\mathcal{B}^p(G;\mathbb{R}^n)$ - $M^p(G;\mathbb{R}^n)/M^p_0(G;\mathbb{R}^n)$ 56

$C(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$ - przestrzeń sygnałów stochastycznych ciągłych w sensie p-średnim 58

$C(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{C}^n))$ - jw. o wartościach zespolonych 58

$C(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)))$ - jw. o wartościach macierzowych 58

$C_0(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$ - podprzestrzeń $C(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$ 58

$C_{00}(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$ - jw. 58

$\mathcal{B}(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))=\mathcal{B}^p(G;\mathbb{R}^n)$ - przestrzeń sygnałów stochastycznych ograniczonych w sensie p-średnim 59

$\mathcal{B}_0(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))=\mathcal{B}_0^p(G;\mathbb{R}^n)$ - podprzestrzeń $\mathcal{B}^p(G;\mathbb{R}^n)$ 59

$C/C\ (G;L^2(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$ - podprzestrzeń sygnałów stochastycznych ciągłych 59

$C/C_0(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{C}^n))$ - jw. 59

$L^{r,q}(G;\mathbb{R}^n)=L^r(G;L^q(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$ - przestrzeń sygnałów stochastycznych całkowalnych 60

$\|\cdot\|_{r,q}$ - mieszana norma 60

$\langle\cdot,\cdot\rangle_{2,2}$ - mieszany iloczyn skalarowy 60

$\zeta_\xi(\cdot)$ - proces spektralny procesu ξ 61

$F^\xi(\cdot)$ - miara spektralna procesu ξ 61

$L^{2,2}_H(G;\mathbb{R}^n)$ - przestrzeń sygnałów stochastycznych H-okresowych 63

$L^2_H(G/H;L^2(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$ - jw. 63

$l^2(L^2(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{C}^n))$ - przestrzeń ciągów losowych 63

sspo. - przestrzeń stochastycznych spo. 64

$CAP^p(G;\mathbb{R}^n)=CAP(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$ - przestrzeń sspo. rzędu p 64

$Trig^p(G;\mathbb{R}^n)$ - przestrzeń wielomianów losowych 64

$Trig^p(G;L^p(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$ - jw. 64

l.i.m. - lim w sensie średnim 64

$B^p(G;L^q(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))=B^{p,q}(G;\mathbb{R}^n)$ - przestrzeń sspo. w sensie Besicovitcha 65

$M^{p,q}(G;\mathbb{R}^n)=M^p(G;L^q(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P};\mathbb{R}^n))$ - przestrzeń sygnałów stochastycznych o ograniczonej mocy średniej 67

$M_0^{p,q}(G;\mathbb{R}^n)$ - podprzestrzeń $M^{p,q}(G;\mathbb{R}^n)$ 67

Re(z), Im(z) - część rzeczywista, urojona liczby z 67

$B^{p,q}(G;\mathbb{R}^n)$ - $M^{p,q}(G;\mathbb{R}^n)/M_0^{p,q}(G;\mathbb{R}^n)$ 67

$\|A\|_2, \sup_2(A), \inf_2(A)$ - norma, sup, inf operatora A w L^2 71

$\max_r, \min_r$ - wartości maksymalne, minimalne 73

$\|A\|_X, \sup_X(A), \inf_X(A)$ - norma, sup, inf operatora A w p. X 75

$\|A\|_{2,2}$ - norma operatora A w $L^{2,2}$ 78

$\sup_{2,2}(A), \inf_{2,2}(A)$ - sup, inf operatora A w $L^{2,2}$ 79

mls. - metoda linearyzacji statystycznej 82

$\hat{k}(m)$ - reprezentacja Gelfanda miary k 86

$\mathfrak{M}$ - przestrzeń ideałów maksymalnych 86

m - ideał maksymalny, $m\in\mathfrak{M}$ 86

∇_x - gradient 94

$L_e^{p,q}$ - przestrzeń rozszerzona 102

$\|\cdot\|_{p\tau,q}$ - norma w przestrzeni rozszerzonej 103

$\gamma(A)$ - średni współczynnik wzmocnienia 104

M_Q - przestrzeń miar 104

Int(St) - wnętrze sektora stożkowego 104

St - sektor stożkowy 104

A^I - operacja odwrotna do A 105

S^{-1} - operator odwrotny do operatora S 106

diag - macierz diagonalna 112

D_1, D_2 - forma kwadratowa, dwuliniowa 115

max(a,b) - wartość maksymalna ze zbioru $\{a,b\}$ 116

$\mathcal{V}ar_G^\infty(h)$ - wahanie bezwzględne funkcji h 125

$\hat{A}(G,H)$ - anihilator zbioru H w G 128

$\hat{A}_\Lambda(G,H)$ - skończony podzbiór $\hat{A}(G,H)$ 130

P, I-P - operatory rzutowe 130

$i(\Phi,\mathcal{U})$ - indeks Leraya-Schaudera 134

$H^\perp$ - $\hat{A}(G,H)$ 141

$M(G;\mathbb{R}^n), M(G;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n))$ - przestrzenie miar 156

M_Q - podprzestrzeń miar 156

$\hat{k}(h)$ - transformata Fouriera-Stieltjesa h 156

F-S - skrót "Fouriera-Stieltjesa" 156

$\mathcal{V}ar_G(h)$ - wahanie bezwzględne miary h 157

B_M, B_Q - przestrzenie operatorów 160

$W_Q, \bar{B}_Q$ - przestrzenie operatorów 161

$\lim_{n\to\infty}\inf, \overline{\lim_{n\geq 1}}$ - limes inferior(granica dolna) 161

$Sp_X(A)$ - widmo operatora A w p. X 164

$\sigma(A)$ - widmo operatora A 164

$L^2(\xi)$ - przestrzeń procesów stochastycznych 169

$B_S, \bar{B}_S$ - przestrzenie operatorów 169,170

STRESZCZENIE

W pracy przedstawiona jest jednolita teoria matematyczna pozwalająca na wszechstronną analizę różnorodnych zagadnień z zakresu dynamiki złożonych układów mechanicznych o parametrach losowych poddanych zakłóceniom stochastycznym. W całej pracy zakłada się, że układy mechaniczne rozpatrywane są jako układy dynamiczne, rozumiane jako uporządkowane zbiory pewnych pojęć, co pozwala na uogólnienia wykraczające poza zakres mechaniki. Czas, w tak rozumianych układach dynamicznych, jest elementem pewnej grupy przemiennej (abelowej), częściowo lub całkowicie uporządkowanej. Rozpatrywane są, w zasadzie, układy dynamiczne o parametrach losowych znajdujące się pod wpływem oddziaływań stochastycznych. Do opisu zjawisk zachodzących w omawianych układach dynamicznych zastosowano losowe równania całkowe.

Początkowe rozdziały zawierają wstępne definicje i oznaczenia oraz podstawowe wiadomości o układach dynamicznych. Wprowadza się, kluczowe dla całej pracy, pojęcie losowego równania całkowego Volterry określonego na lokalnie zwartej grupie abelowej i związane z tym nowe modele matematyczne układów dynamicznych.

Przytoczone są liczne przykłady modelowania układów mechanicznych przy zastosowaniu równań całkowych. Analizowane są układy dynamiczne z czasem ciągłym i dyskretnym oraz określone na torusie.

Jeden z rozdziałów poświęcono w całości na omówienie najważniejszych, z punktu widzenia zastosowań, sygnałów deterministycznych i stochastycznych.

Rozpatrywane są szczegółowo następujące zagadnienia dynamiki: podstawowe metody linearyzacji statystycznej wraz z analizą ich dokładności, stabilność w sensie średnim oraz zagadnienia drgań okresowych i prawie okresowych.

Uzupełnieniem pracy są trzy dodatki, które zawierają więcej informacji z zakresu teorii grup, przekształceń całkowych i procesów stacjonarnych.

Wykaz literatury zawiera 382 pozycje.

РЕЗЮМЕ

В работе представлена однородная математическая теория которая допускает универсальный анализ разнообразных проблем из динамики сложных механических систем со случайными параметрами, находящихся под влиянием стохастических возмущений. Во всей работе предполагается, что механические системы рассмотривается как динамические системы, которые понимаем как упорядоченные множества некоторых понятий, что позваляет на обобщения выходящие вне области механики. Время, в так понимаемых динамических системах, является элементом некоторой коммутативной (абелевой) группы, вполне или частично упорядоченной. Рассмотриваемы, в принципе, динамические системы со случайными параметрами находящиеся под влиянием стохастических возмущений. Для описания явлений, в описываемых динамических системах, использовано случайные интегральные уравнения.

Начальные разделы содержают вступительные определения и означения, а также элементарные информации о динамических системах. Вводится, фундаментальное для целой работы, понятие случайного интегрального уравнения типа Вольтерры определенного на локально компактной абелевой группе и связанные с етом новые математические модели динамических систем.

Представлены многочисленные примеры моделирования механических систем при применении интегральных уравнений. Рассмотрены динамические системы с непрерывным и дискретным временем, а также определенные на торе.

Один из разделов посвящен в целом обсуждении найболее важных, с точки зрения применений, детерминистических и стохастических сигналов.

Рассмотрено подробно следующие проблемы динамики: главные методы статистической линеаризации вместе с анализом их точности, устойчивость в среднем, а также проблемы периодических и почти периодических колебаний.

Пополнением работы ябляются три приложения, в которых помещены дополнительные информации из теории групп, интегральных преобразований, а также стационарных процессов.

Указатель литературы содержает 382 позиции.

CONTENTS

This book presents, in the most systematic way, the theoretical foundations of analysis of a variety of dynamical problems arising in the theory of composed mechanical systems with random parameters subjected to stochastic excitations. It is assumed consequently, that mechanical systems are considered as dynamical systems i.e. ordered sets of some notions, so wide generalizations are possible going beyond limits of mechanics. A time, in such general system formulation, is an element of some ordered or partially ordered commutative (Abelian) group. There are considered, in general, dynamic systems with random parameters subjected to stochastic excitations. To describe occurances in considered dynamic systems random integral equations are applied.

Initial chapters contain basic definitions and notion as well as introductory informations about dynamic systems. It is introduced a definition of the random Volterra integral equation defined over a locally compact Abelian group, which is a key-conception for the whole paper. As a consequence new types of mathematical models of dynamic systems are introduced too.

There are presented many of mechanical system modelling examples using integral equations. Dynamic systems with a continuous and discrete time are considered as well as defined over torus.

One of chapters is devoted in a whole to discuss the most important, with respect to applications, deterministic and stochastic signals.

The following dynamical problems are considered in details: basic methods of statistical linearizations with the accuracy analysis of approximations, stability in the mean and a variety of problems about periodic and almost periodic oscillations.

The monograph is completed by three appendixes, which contain additional informations about group theory, integral transformations and stationary processes.

Bibliography contains 382 positions.

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
Politechniki Śląskiej
P.3361/94/120