

**ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ**

P3361 / 94

ANDRZEJ WAWRZYNEK

**MODELOWANIE KRZEPNIĘCIA
I STYGNIĘCIA METALI
ORAZ PROBLEMÓW DYFUZJI CIEPŁA
ZA POMOCĄ METODY R-FUNKCJI**

MECHANIKA

Z. 119

**GLIWICE
1994**

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 1243



P.3361/94

ANDRZEJ WAWRZYNEK

**MODELOWANIE KRZEPNIĘCIA
I STYGNIECIA METALI
ORAZ PROBLEMÓW DYFUZJI CIEPŁA
ZA POMOCĄ METODY R-FUNKCJI**

GLIWICE 1994

OPINIODAWCY

Prof. dr hab. inż. Ryszard Parkitny
Prof. dr hab. inż. Józef Suchy

KOLEGIUM REDAKCYJNE

REDAKTOR NACZELNY — Prof. dr hab. inż. Jan Bandrowski
REDAKTOR DZIAŁU — Dr hab. inż. Jan Kaźmierczak
Profesor Politechniki Śląskiej
SEKRETARZ REDAKCJI — Mgr Elżbieta Leško

REDAKCJA

Mgr Roma Łoś

REDAKCJA TECHNICZNA

Alicja Nowacka

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0434-0817

Wydawnictwo Politechniki Śląskiej
ul. Kujawska 3, 44-100 Gliwice

Nakł. 150+83 Ark. wyd. 8 Ark. druk. 8,5 Papier offset. kl.III 70x100, 80g
Oddano do druku 15.06.94 Podpis. do druku 15.06.94 Druk ukończ. w czerwcu 1994
Zam. 243/94 Cena zł 32.000,—

Fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

WSTĘP 11
1. WSTĘP 11
2. WSTĘP 11
3. WSTĘP 11
4. WSTĘP 11
5. WSTĘP 11
6. WSTĘP 11
7. WSTĘP 11
8. WSTĘP 11
9. WSTĘP 11
10. WSTĘP 11
11. WSTĘP 11
12. WSTĘP 11
13. WSTĘP 11
14. WSTĘP 11
15. WSTĘP 11
16. WSTĘP 11
17. WSTĘP 11
18. WSTĘP 11
19. WSTĘP 11
20. WSTĘP 11
21. WSTĘP 11
22. WSTĘP 11
23. WSTĘP 11
24. WSTĘP 11
25. WSTĘP 11
26. WSTĘP 11
27. WSTĘP 11
28. WSTĘP 11
29. WSTĘP 11
30. WSTĘP 11
31. WSTĘP 11
32. WSTĘP 11
33. WSTĘP 11
34. WSTĘP 11
35. WSTĘP 11
36. WSTĘP 11
37. WSTĘP 11
38. WSTĘP 11
39. WSTĘP 11
40. WSTĘP 11
41. WSTĘP 11
42. WSTĘP 11
43. WSTĘP 11
44. WSTĘP 11
45. WSTĘP 11
46. WSTĘP 11
47. WSTĘP 11
48. WSTĘP 11
49. WSTĘP 11
50. WSTĘP 11
51. WSTĘP 11
52. WSTĘP 11
53. WSTĘP 11
54. WSTĘP 11
55. WSTĘP 11
56. WSTĘP 11
57. WSTĘP 11
58. WSTĘP 11
59. WSTĘP 11
60. WSTĘP 11
61. WSTĘP 11
62. WSTĘP 11
63. WSTĘP 11
64. WSTĘP 11
65. WSTĘP 11
66. WSTĘP 11
67. WSTĘP 11
68. WSTĘP 11
69. WSTĘP 11
70. WSTĘP 11
71. WSTĘP 11
72. WSTĘP 11
73. WSTĘP 11
74. WSTĘP 11
75. WSTĘP 11
76. WSTĘP 11
77. WSTĘP 11
78. WSTĘP 11
79. WSTĘP 11
80. WSTĘP 11
81. WSTĘP 11
82. WSTĘP 11
83. WSTĘP 11
84. WSTĘP 11
85. WSTĘP 11
86. WSTĘP 11
87. WSTĘP 11
88. WSTĘP 11
89. WSTĘP 11
90. WSTĘP 11
91. WSTĘP 11
92. WSTĘP 11
93. WSTĘP 11
94. WSTĘP 11
95. WSTĘP 11
96. WSTĘP 11
97. WSTĘP 11
98. WSTĘP 11
99. WSTĘP 11
100. WSTĘP 11

Pracę dedykuje Bratu ZBIGNIEWOWI
oraz moim Synom
ADAMOWI, JACKOWI i PAWŁOWI

SPIS TREŚCI

PODSTAWOWE OZNACZENIA	11
WSTĘP	13
WPROWADZENIE	17
I.1. Operacje logiczne i ich własności	20
I.2. Geometryczna interpretacja funkcji logicznych	22
DEFINICJA I WŁASNOŚCI R-FUNKCJI	26
RÓWNANIE BRZEGU OBSZARU Ω	32
III.1. Równanie całego brzegu	32
III.2. Równanie części brzegu	36
III.3. Normalizacja równań brzegu	37
OGÓLNA STRUKTURA ROZWIĄZANIA	42
IV.1. Definicja GSS	42
IV.2. Rozszerzenie operatorów brzegowych na cały obszar	43
IV.3. Przykłady podstawowych struktur rozwiązania	44
ZAGADNIENIA STACJONARNEGO PRZEPŁYWU CIEPŁA W ELEMENTACH MASZYN I URZĄDZEŃ	47
V.1. Sformułowanie problemu	47
V.2. Ogólna struktura rozwiązania	50
V.3. Rozwiązanie stacjonarnego problemu wymiany ciepła	55
V.4. Przykłady numeryczne	56
NIESTACJONARNE ZAGADNIENIA WYMIANY CIEPŁA	71
VI.1. Problemy liniowe	71
VI.2. Przykłady numeryczne rozwiązania problemów liniowych	76

VI.3. Problemy nieliniowe	86
VI.3.1. Metody linearyzacji równania przewod- nictwa	88
VI.3.2. Metoda przemiennej fazy	90
VI.3.3. Metoda zapasu temperatury	94
VI.3.4. Metoda poprawiania pola temperatury	95
 CZASOPRZESTRZENNA WERSJA MRF	103
VII.1. Zagadnienia ze stałym brzegiem geometrycznym	103
VII.2. Zadanie ze zmiennym brzegiem	121
 PODSUMOWANIE I WNIOSKI KOŃCOWE	125
 LITERATURA	127
 STRESZCZENIE	134

CONTENTS

BASIC NOTATION	11
PREFACE	13
INTRODUCTION	17
I.1. Logical operators and their property	20
I.2. Geometrical interpretation of logical functions	22
 DEFINITION AND PROPERTIES OF R-FUNCTIONS	26
 EQUATION OF THE BOUNDARY OF DOMAIN Ω	32
III.1. Equation of the whole boundary	32
III.2. Equation of the part of the boundary	36
III.3. Normalization of the equations determining the boundary	37
 GENERAL STRUCTURE OF THE SOLUTION	42
IV.1. Definition of the GSS	42
IV.2. Expansion of boundary operators for the whole do- main	43
IV.3. Examples of basic structures of the solution	44
 STATIONARY PROBLEMS OF THE HEAT TRANSFER	47
V.1. Formulation of the problem	47
V.2. General structure of the solution	50
V.3. Solution of the stationary heat transfer problem	55
V.4. Numerical examples	56
 NON-STATIONARY HEAT EXCHANGE PROBLEMS	71
VI.1. Linear problems	71
VI.2. Numerical examples of linear problems solution	76

VI.3. Nonlinear problems	86
VI.3.1. Methods of linearization of the heat transfer equation	88
VI.3.2. Alternating Phase Truncation Method	90
VI.3.3. Temperature Recovere Method	94
VI.3.4. Method of temperature field correction	95
 SPATIAL - TIME VERSION OF <i>MRF</i>	 103
VII.1. Problems with constant geometrical boundary	103
VII.2. Moving boundary problems	121
 FINAL REMARKS AND CONCLUSIONS	 125
 LITERATURE	 127
 SUMMARY	 134

INHALTS VERZEICHNIS

BASIS - NOTATION	11
EINLEITUNG	13
EINFÜHRUNG	17
I.1. Logische Operationen und ihre Eigenschaften	20
I.2. Geometrische Interpretation der logischen Funktionen	22
DEFINITION UND EIGENSCHAFTEN DER R-FUNKTION	26
RANDGLEICHUNG DES BEREICHES Ω	32
III.1. Gleichung des ganzen Randes	32
III.2. Gleichung des Randteiles	36
III.3. Normalisierung der Randgleichungen	37
ALLGEMEINE STRUKTUR DER LÖSUNG (GSS)	42
IV.1. Definition des GSS	42
IV.2. Expansion des Randoperators in dem ganzen Bereich	43
IV.3. Beispiele der Lösungen der Basis-Strukturen	44
PROBLEME DER STATIONÄREN WÄRMESTRÖMUNG	47
V.1. Problemformulierung	47
V.2. Allgemeine Lösungsstruktur	50
V.3. Lösung des stationären Problem des Wärmeaustauschens	55
V.4. Numerische Beispiele	56
UNSTATIONÄRE PROBLEME DES WÄRMEAUSTAUSCHENS	71
VI.1. Lineare Probleme	71
VI.2. Beispiele der numärischen Linearlösungen der Probleme	76

VI.3. Nichtlineare Probleme	86
VI.3.1. Linearisations-Methode der Wärmeleit- fähigkeits-Gleichung	88
VI.3.2. Methode der Phasenpermutation	90
VI.3.3. Methode der Temperaturvorrat	94
VI.3.4. Methode der Temperaturfeldverbesserung	95
RAUMZEITLICHE VERSION	103
VII.1. Problem mit konstanten geometrischen Rand	103
VII.2. Problem mit Wechselrand	121
RESÜMEE UND SCHLUßFOLGERUNGEN	125
LITERATUR	127
ZUSAMMENFASSUNG	134

PODSTAWOWE OZNACZENIA

$x = (x_1, x_2, x_3)$	- zmienne przestrzenne
t	- czas
$\Omega, \partial\Omega$	- obszar geometryczny i jego brzeg
$\Omega_1, \Omega_2,$	- podobszary składające się na obszar Ω
$\Omega_A, \Omega_B,$	- podobszary składające się na obszar Ω
$\partial\Omega_i$	- i -ta część brzegu $\partial\Omega$
ω	- analityczny opis obszaru Ω (rozdz.III.1.)
ω_i	- analityczny opis i -tej części brzegu (III.18)
\cap, \cup	- część wspólna i suma zbiorów
\wedge, \vee	- logiczna koniunkcja i alternatywa
\wedge^*, \vee^*	- R -koniunkcja i R -alternatywa (II.6-9)
\wedge_0, \vee_0	- R_0 -koniunkcja i R_0 -alternatywa (II.7)
B_k, B_2	- funkcja logiki k -wartościowej i funkcja boolowska
∇	- gradient (operator)
∇^2	- laplasjan
D_1	- operator różniczkowy (III.30)
$\partial(\cdot)/\partial n$	- pochodna normalna do brzegu
$\partial(\cdot)/\partial v$	- pochodna kierunkowa
Φ	- funkcja przybliżająca poszukiwaną funkcję wewnątrz obszaru (IV.7)
A_k, A_{kl}	- poszukiwane parametry
ρ	- gęstość
λ	- współczynnik przewodzenia ciepła
c	- właściwa pojemność cieplna
α	- współczynnik przejmowania ciepła
q_i	- strumień ciepła zadany na brzegu $\partial\Omega_i$
q_v	- wydajność objętościowych źródeł ciepła
T	- temperatura
T^∞	- temperatura otoczenia
T_{od}	- temperatura odniesienia
T^*	- temperatura krytyczna
T^t	- temperatura w chwili t
U	- entalpia
f_i, h_i	- przekształcone warunki brzegowe dla $\partial\Omega_i$ (V.19-21).

WSTĘP

Niniejsza praca powstawała w latach 1990 - 1993, początkowo w ramach Centralnego Programu Badań Podstawowych 02.09 koordynowanego przez prof. dra inż. Wacława SAKWĘ, a potem w ramach indywidualnego grantu nr 3 1138 91 01 (1991-92).

Praca poświęcona jest zastosowaniom metody R -funkcji (MRF) do rozwiązywania problemów cieplnych termomechaniki, a w szczególności zagadnień wymiany ciepła związanych z obliczeniami stacjonarnych i niestacjonarnych pól temperatury w elementach maszyn i urządzeń oraz z symulacją numeryczną procesów krzepnięcia i stygnięcia metalu w szeroko rozumianym układzie odlew-otoczenie.

Podstawy metody zostały opracowane w latach 60 przez V.L.RVACHEVA. Jej autor zaproponował liczne jej zastosowania do rozwiązywania problemów, np. teorii sprężystości [47],[48], wymiany ciepła [49],[50] i innych [17],[18].

Metoda R -funkcji jest dwuetapową metodą analityczno-numeryczną. Etap pierwszy polega na wyprowadzeniu analitycznego równania rozpatrywanego brzegu. Stosując R -funkcje możliwe jest opisanie złożonego brzegu obszaru za pomocą jednej funkcji uwikłanej, złożonej z funkcji elementarnych. Podobnie poszczególne części brzegu, na których zadane mogą być dowolne warunki brzegowe, opisuje się funkcjami elementarnymi. Pierwszy etap, analityczny, kończy wyprowadzenie ogólnej struktury rozwiązania (general structure of solution - GSS) będącej klasą funkcji spełniających, w sposób ścisły, wszystkie zadane warunki brzegowe. GSS zawiera w swej strukturze nieznanne parametry, których wyznaczenie stanowi część drugą - numeryczną - metody.

W pracy rozważamy zagadnienia stacjonarnego i niestacjonarnego przepływu ciepła, w tym również zadania z ruchomymi brzegami związane z termodynamiką procesów odlewniczych (krzepnięcie i stygnięcie). Dla zadań niestacjonarnych stosujemy dwa nowe podejścia w relacji do opisanych w literaturze metod bazujących na R -funkcjach (por.[46-49]), a mianowicie metodę kombinowaną, w której pochodną temperatury po czasie zastępujemy jej różnicową dyskretyzacją. Wyprowadzono odpowiedni fun-

kcjonał, za pomocą którego znajdujemy nieznanne parametry. Drugie podejście polega na potraktowaniu zmiennej czasowej w ten sam sposób jak zmienne przestrzenne. Możemy więc (przenosząc nazewnictwo z metody elementów skończonych) mówić o czasoprzestrzennych R -funkcjach.

W rozprawie omówiono również metody rozwiązywania zadań nieliniowego przepływu ciepła z nieliniowościami zarówno w równaniach różniczkowych (zmienne z temperaturą parametry termofizyczne), jak i w warunkach brzegowych. Rozwiązania wymienionych problemów z tej dziedziny, w tym również symulację numeryczną krzepnięcia uzyskano łącząc podstawowe, przedstawione w pracy, algorytmy wykorzystujące R -funkcje z pewnymi metodami linearyzacji równania przewodnictwa ciepła (na etapie obliczeń numerycznych).

Pierwsze cztery rozdziały pracy zawierają niezbędne podstawy matematyczne metody, w tym związki pomiędzy operacjami na zbiorach a operacjami logicznymi, definicję R -funkcji, algorytm tworzenia znormalizowanych równań dowolnego obszaru. Wszystkie definicje są zilustrowane przykładami dotyczącymi również praktyki inżynierskiej. Przedstawiono także ogólne struktury rozwiązania dla podstawowych problemów brzegowych termomechaniki (warunki Dirichleta, Neumanna i Newtona).

Rozdział V poświęcony jest zastosowaniu R -funkcji do rozwiązywania liniowych i nieliniowych stacjonarnych zagadnień wymiany ciepła. Określono GSS w postaci umożliwiającej rozwiązywanie zadań z warunkami brzegowymi I, II, i III rodzaju zadanymi na dowolnych częściach rozpatrywanego brzegu obszaru. Szczegółowo wyprowadzono ostateczny układ równań problemu. Przykłady numeryczne posłużyły do testowania zaproponowanego sposobu postępowania. Porównano uzyskane rozwiązania z rozwiązaniami analitycznymi i metodą różnic skończonych. Wyniki przedstawiono w postaci wykresów porównawczych i tabel.

W rozdziale VI wyprowadzono funkcjonał będący podstawą algorytmu rozwiązywania zadań niestacjonarnej wymiany ciepła. Algorytm ten opiera się na metodzie R -funkcji połączonej z dyskretyzacją czasu. Obok przykładów testujących przedstawiono rozwiązania konkretnych zadań technicznych, takich jak rozkład temperatury w krystalizatorze urządzenia do ciągłego odlewania stali (COS) oraz w rynnice spustowej pieca karbidowego, a także symulację krzepnięcia stalowego wlewka ciągłego o nietypowym kształcie i obliczeń krzepnięcia węzłów cieplnych. Rozwiązania porównano z wynikami uzyskanymi innymi metodami oraz z roz-

wiązaniami tych samych problemów; ale traktowanych jako stacjonarne.

Rozdział ostatni zawiera omówienie uogólnionej, czasoprzestrzennej wersji MRF. Uogólnienie to polega na zastosowaniu R -funkcji do opisu czasoprzestrzeni odpowiadającej danemu zagadnieniu. Zmienna czasowa traktowana jest tak samo jak zmienna przestrzenna. Przedstawiono GSS dla uogólnionej wersji MRF. Czasoprzestrzenną wersję metody ilustrują przykłady testujące algorytm dla prostych zadań 1D i 2D, jak również przykład obliczeń cieplnych dla bardziej złożonego obszaru geometrycznego (przekrój elementu urządzenia grzewczego).

W końcowej części monografii przedstawiono wnioski dotyczące oceny efektywności metody, jej zalet i wad oraz zwrócono uwagę na problemy, które mogłyby być przedmiotem dalszych badań.

Niniejsza rozprawa zawiera m.in. wyniki prac autora opublikowanych w czasopismach krajowych i referowanych na międzynarodowych i krajowych konferencjach, np. w Mediolanie, Brukseli, Swansea i Southampton.

Praca ta nie mogłaby powstać, gdyby nie aktywna współpraca z Koleżankami i Kolegami z Katedry Mechaniki Teoretycznej, Instytutu Odlewnictwa i Instytutu Matematyki Politechniki Śląskiej.

Jednakże najwięcej zawdzięczam wielogodzinnym dyskusjom prowadzonym z kierownikiem Katedry Mechaniki Teoretycznej Profesorem dr. hab. inż. Bohdanem MOCHNACKIM.

Rozdział I

WPROWADZENIE

Znaczna część problemów technicznych i fizycznych sprowadza się do rozwiązywania odpowiedniego zadania brzegowego lub początkowo-brzegowego, sformułowanego lokalnie bądź globalnie. Jedynie nieliczne zadania tego typu można rozwiązać w sposób analityczny, podając ich dokładne rozwiązania. Potrzeby praktyki inżynierskiej i szybki rozwój techniki komputerowej zintensyfikowały badania nad zastosowaniem metod numerycznych do rozwiązywania tych zagadnień, w tym również problemów termomechaniki oraz wymiany ciepła.

Najbardziej ogólnie postawione zagadnienie termomechaniki stawia sobie za cel wyznaczenie dwóch wzajemnie sprzężonych pól - pola naprężeń i pola temperatury. Jednakże tak ogólny problem jest bardzo trudno lub wręcz niemożliwy do rozwiązania. Najczęściej najpierw wyznacza się pole temperatury, traktując je jako niezależne od naprężeń (odkształceń), a następnie pole naprężeń - zależne od znanej już w tym momencie temperatury.

Pole temperatury w obszarze ciała stałego (np. w elementach maszyny, urządzenia, lub też w obszarze krzepnącego metalu) zależy nie tylko od wielkości i charakteru rozkładu źródeł ciepła w badanym obiekcie i jego otoczeniu oraz jego własności termofizycznych, ale również od kształtu obiektu, jego sposobu kontaktu z innymi obiektami, a także wzajemnych oddziaływań między elementami układu. Uwzględnienie geometrycznych informacji jest niezbędne i często kłopotliwe w każdej metodzie numerycznej, szczególnie w przypadku obiektów o skomplikowanym kształcie. Metody starsze, takie jak metoda Ritza lub Galerki-

na czy nawet metoda kolokacji (oczywiście w swej pierwotnej formie) wręcz nie mogą być zastosowane do takich obiektów. W metodzie różnic skończonych (MRS) badany obszar pokrywamy siatką punktów, odpowiednio zagęszczając ją w miejscach o skomplikowanym kształcie lub stosując bardziej "wyrafinowane" gwiazdy wielopunktowe. W metodzie elementów skończonych (MES) dzielimy badany obszar na odpowiednio małe elementy, by możliwie dokładnie odwzorować badany obiekt.

Inną trudnością, na jaką często napotykamy przy numerycznym rozwiązywaniu zagadnień początkowo-brzegowych mechaniki (w tym również w przepływie ciepła), jest uwzględnienie, w możliwie dokładny sposób, warunków brzegowych i początkowych.

Jedną z możliwości spełnienia tych postulatów może być zastosowanie analityczno-numerycznej metody R -funkcji (MRF).

R -funkcje nie są funkcjami specjalnymi w klasycznym sensie, takim jak np. funkcje Bessela lub wielomiany Legendre'a. Są to, w znacznym uproszczeniu, funkcje pozwalające dowolnie skomplikowany obszar (również niespójny lub wklęsły), przedstawiony w postaci logicznej, opisać za pomocą ciągłej funkcji, złożonej z funkcji elementarnych.

Kontynuując ten werbalny opis, możemy w metodzie R -funkcji wyróżnić następujące etapy: etap analityczny, w którym należy wyprowadzić tzw. "ogólną strukturę rozwiązania" - GSS (general structure of the solution), będącą właściwie klasą funkcji spełniających w sposób ścisły na zadanym brzegu, zadane dowolnie skomplikowane warunki brzegowe. GSS zawiera w swej strukturze nieznanne parametry. Etap drugi - numeryczny - polega na wyznaczeniu tych nieznananych parametrów dowolną metodą, wykorzystującą warunek spełnienia równania problemu wewnątrz obszaru lub minimalizację odpowiedniego funkcjonału.

W celu jaśniejszego przedstawienia istoty metody rozpatrzmy następujący prosty przykład:

■ **Przykład I.1. (zginanie belki o sztywności EI)**

Wyznamy ugięcie belki o długości jednostkowej ($l=1$) zamocowanej przegubowo na końcach w taki sposób, że jako warunki brzegowe możemy przyjąć odpowiednio ugięcia $w(0)=0$ i $w(1)=0.5$. Belka obciążona jest równomiernie rozłożonym obciążeniem ciągłym, a jej sztywność wynosi EI .

Przyjmijmy ugięcie w postaci

$$w(x) = x(1-x)\Phi + \frac{1}{2}x, \quad (I.1)$$

gdzie przez Φ oznaczono nieznaną funkcję. Jak łatwo sprawdzić, funkcja $w=w(x)$ spełnia obydwa warunki brzegowe. Jeśli wprowadzimy oznaczenia $\omega = \omega(x) = x(1-x)$, to zauważymy, że ω przyjmuje wartość zero jedynie dla punktów brzegowych $x=0$ i $x=1$; wartości dodatnie jedynie dla punktów z przedziału $(0,1)$ i na koniec - wartości ujemne na zewnątrz tego przedziału. Możemy więc funkcję $\omega(x)$ traktować jako opis analityczny badanego obszaru, tj. pręta o długości jednostkowej. Poszukiwane ugięcie spełnia znane równanie postaci

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} \quad (I.2)$$

Jeżeli nieznaną funkcję Φ przyjmiemy w postaci wielomianu drugiego stopnia ($\Phi = ax^2 + bx + c$) i wstawimy do równania (I.1), to wówczas rozwiązaniem powyższego problemu będzie funkcja (I.1), gdzie

$$\Phi(x) = \frac{q}{24EI}(x^2 + 2lx + 4l^2) \quad (I.3)$$

Uogólniając: funkcję określoną równaniem (I.1) możemy przedstawić w postaci

$$w(x) = w(\omega, \Phi, \varphi) = \omega\Phi + \varphi, \quad (I.4)$$

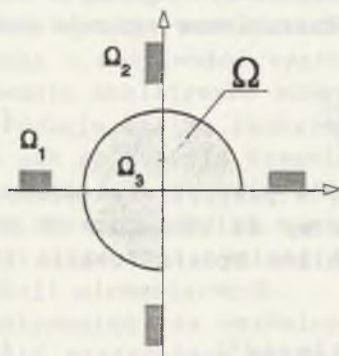
przy czym $\varphi = 0.5x$ (drugi składnik wzoru (I.1)) jest rozszerzeniem niejednorodnego warunku brzegowego na cały pręt. Równanie to jest przykładem ogólnej struktury rozwiązania (GSS).

■ Z powyższego przykładu wynika, że skonstruowanie GSS musi być poprzedzone:

- wyprowadzeniem funkcji opisującej równania brzegu rozpatrywanego obszaru (lub jego części),
- rozszerzeniem dziedziny operatorów (warunków) brzegowych na cały obszar i ich modyfikacją (funkcją φ), tzn. znalezieniem takiej funkcji określonej w całym obszarze, która na brzegu jest równa zadanej wartości (w powyższym przykładzie jest to funkcja $\varphi = 0.5x$).

I.1. Operacje logiczne i ich własności

Dowolnie skomplikowany obszar możemy przedstawić w postaci operacji na skończonej liczbie podobszarów, np. obszar Ω (3/4 okręgu) pokazany na rysunku I.1. jest złożeniem następujących podobszarów: Ω_1 - górnej półpłaszczyzny opisanej poprzez warunek $y \geq 0$; Ω_2 - lewej półpłaszczyzny, czyli $x \leq 0$ i Ω_3 - koła o jednostkowym promieniu i o środku w początku układu współrzędnych, czyli $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cap \Omega_3$.



Rys. I.1. Podobszary tworzące obszar Ω
Fig. I.1. Subdomains which constitute domain Ω

Jednocześnie każdemu obszarowi możemy przyporządkować funkcję logiczną o tej własności, że dla punktów należących do obszaru przyjmować ona będzie wartość 1, a dla pozostałych punktów wartość zero.

□ DEFINICJA I.1.

Funkcję $f: B_k^n \rightarrow B_k$, gdzie $B_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$ nazywamy funkcją logiki k -wartościowej. Gdy $k=2$, mówimy o funkcji boolowskiej.

Funkcjami boolowskimi postaci $f: B_2 \otimes B_2 \rightarrow B_2$ są koniunkcja, alternatywa, negacja, implikacja, operacja Scheffera, równoważność itd. Poniższe tabele I.1. i I.2. prezentują zbiór wartości tych funkcji dla różnych par argumentów.

□ DEFINICJA I.2.

Układ H funkcji logicznych nazywamy zupełnym, jeśli każda funkcja algebry logiki może być przedstawiona jako superpozycja funkcji z układu H .

Koniunkcja, alternatywa i negacja (patrz tabela I.1) stanowią zupełny układ funkcji logicznych. Funkcje z tabeli I.2 można przedstawić jako:

$$\begin{aligned} X \sim Y &= \bar{X} \vee \bar{Y} \\ X \sim Y &= (\bar{X} \wedge \bar{Y}) \vee (X \wedge Y) \\ X / Y &= \bar{X} \wedge \bar{Y}. \end{aligned} \tag{I.5}$$

Tabela I.1
Wartości funkcji logicznych stanowiących układ zupełny

ARGUMENTY		FUNKCJA		
		koniunkcja	alternatywa	negacja
X	Y	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	\bar{X}
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0

Następujące własności koniunkcji i alternatywy pozwalają upraszczać bardziej skomplikowane operacje logiczne (por. [47], [49]):

- a) $X \wedge Y = Y \wedge X$
- b) $X \wedge (Y \wedge Z) = (X \wedge Y) \wedge Z$
- c) $X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$
- d) $\overline{X \wedge Y} = \bar{X} \vee \bar{Y}$
- e) $\bar{\bar{X}} = X$
- f) $X \wedge 0 = 0$ i $X \vee 0 = X$
- g) $X \wedge 1 = X$ i $X \vee 1 = 1$
- h) $X \wedge \bar{X} = 0$ i $X \vee \bar{X} = 1$
- j) $X \wedge X = X$
- k) $X \vee (F \wedge X) = X$
- l) $(F \wedge X) \vee (F \wedge \bar{X}) = F$

Tabela I.2
Wartości funkcji logicznych wyrażonych poprzez funkcje układu zupełnego

ARGUMENTY		FUNKCJA		
		implikacja	równoważność	operacja Scheffera
X	Y	$X \rightarrow Y$	$X \sim Y$	\bar{X}
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	0

Jeśli w punktach a) do d) oraz j) zamienić operacje na przecięne, to otrzymane zależności pozostaną nadal prawdziwe.

Własnościom tym poświęciliśmy tyle uwagi ze względu na ich ścisły związek z własnościami R -funkcji (patrz pkt I.2).

I.2. Geometryczna interpretacja funkcji logicznych

Założymy, że analizowany obiekt zajmuje w przestrzeni \mathbb{R}^n obszar Ω . Wprowadzimy nową funkcję logiczną $\Omega^*: \mathbb{R}^n \rightarrow \{0,1\}$ sprzężoną z obszarem Ω w następujący sposób:

$$\Omega^*(\mathbf{x}) = \Omega^*(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{dla } \mathbf{x} \in \Omega \\ 0, & \text{dla } \mathbf{x} \notin \Omega \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

Funkcje dwuwartościowe typu (I.7) nazywamy funkcjami charakterystycznymi danego obszaru. Każdej funkcji dwuwartościowej można przyporządkować odpowiedni obszar geometryczny - zbiór tych punktów przestrzeni \mathbb{R}^n , dla których przyjmuje ona wartość jeden.

Tak więc funkcje charakterystyczne mogą być argumentami funkcji boolowskich. Jeśli $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$, są charakterystykami pewnych obszarów, a funkcja $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ - funkcją boolowską, to funkcja $\Omega^* = F(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n)$ jest również funkcją charakterystyczną odpowiadającą pewnemu obszarowi w przestrzeni \mathbb{R}^n .

Przykład I.2.

a) Funkcją charakterystyczną okręgu o jednostkowym promieniu i środku w początku układu jest funkcja Ω^* , która przyjmuje wartość 1 dla każdego $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, dla którego spełniony jest warunek: $1-x^2-y^2 \geq 0$. Funkcję tę będziemy symbolicznie zapisywali w następujący sposób:

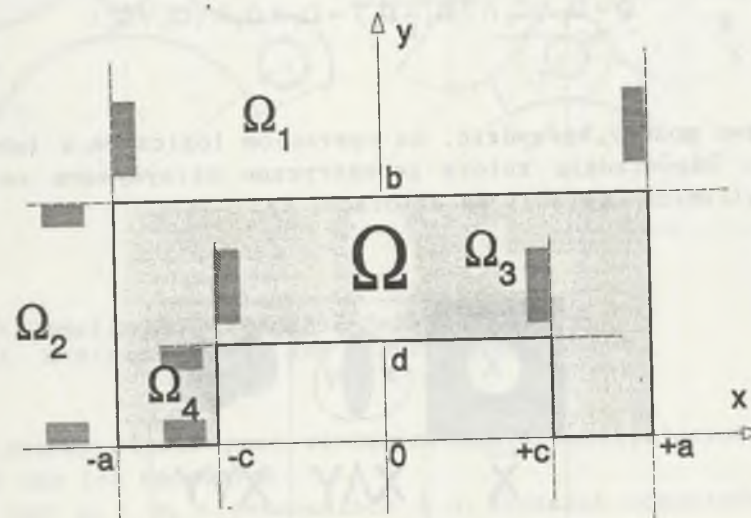
$$\Omega^* = \{1-x^2-y^2 \geq 0\} \quad (\text{I.8})$$

b) Kwadrat o jednostkowych bokach równoległych do osi współrzędnych i środkiem symetrii w początku układu współrzędnych ma charakterystykę postaci

$$\Omega^* = \{(1-x^2 \geq 0) \wedge (1-y^2 \geq 0)\} \quad (\text{I.9})$$

W dalszej części pracy tak dla obszaru geometrycznego, jak i odpowiadającej mu charakterystyki będziemy stosowali to samo oznaczenie (bez gwiazdki).

Przykład I.3. (Równanie charakterystyczne krystalizatora)



Rys.I.2. Przekrój poprzeczny krystalizatora odlewania ciągłego
Fig.I.2. Cross section of the continuous casting mould

W przykładzie tym wyznaczmy równanie charakterystyczne obszaru przekroju poprzecznego krystalizatora odlewania ciągłego, którego kształt przedstawia rysunek I.2. Obszar Ω tworzy część wspólna następujących pasm lub ich dopełnień:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{a^2 - x^2 \geq 0\}, \\ \Omega_2 &= \{(b-y)y \geq 0\}, \\ \Omega_3 &= \{c^2 - x^2 \geq 0\}, \\ \Omega_4 &= \{(d-y)y \geq 0\};\end{aligned}\quad (I.10)$$

a mianowicie (jako działanie na zbiorach)

$$\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap (\overline{\Omega_3 \cap \Omega_4}) = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap (\overline{\Omega_3} \cup \overline{\Omega_4}) \quad (I.11)$$

lub w postaci logicznej

$$\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2 \wedge (\overline{\Omega_3 \wedge \Omega_4}) = \Omega_1 \wedge \Omega_2 \wedge (\overline{\Omega_3} \vee \overline{\Omega_4}) \quad (I.12)$$

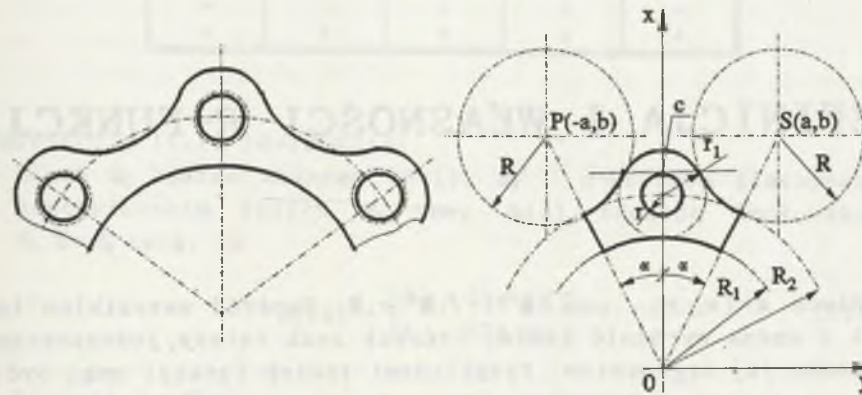
Łatwo możemy sprawdzić, że operacjom logicznym z tabel I.1. i I.2. odpowiadają zbiory geometryczne otrzymywane za pomocą analogicznych operacji na zbiorach, tj.

\overline{X}	$X \wedge Y$	$X \vee Y$
$X \rightarrow Y$	$X \sim Y$	X / Y

Rys.I.3. Operacje logiczne i operacje na zbiorach
Fig.I.3. Logical operations and operations on sets

■ Przykład I.3. (Pierścień pośredni zespołu koła samochodu ciężarowego)

Na zakończenie tego rozdziału wyprowadzimy równanie charakterystyczne powtarzalnego fragmentu pierścienia pośredniego koła samochodu ciężarowego (wykonywanego jako odlew - por.[30]).



Rys.I.4. Analizowany obszar i jego podobszary
Fig.I.4. Analyzed domain and its sub-domains

Analizowany obszar jest złożeniem ośmiu następujących podobszarów lub ich dopełnień:

- dwóch kół Ω_1 i Ω_2 o promieniach R i środkach odpowiednio w punktach P i S ,
- dwóch kół Ω_3 i Ω_4 o promieniach odpowiednio r_1 i r oraz środka w punkcie leżącym na osi OY o rzędnej R_2 ,
- koła Ω_5 o środku w początku układu współrzędnych i promieniu R_1 ,
- dwóch półpłaszczyzn, których krawędziami są proste Ω_6 i Ω_7 przechodzące przez początek układu współrzędnych o współczynnikach kierunkowych $\pm \tan \alpha$,
- półpłaszczyzny, której krawędzią jest prosta pozioma o równaniu $y=c$.

Równanie charakterystyczne ma postać

$$\Omega = (\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2} \cap \overline{\Omega_3 \cup \Omega_4}) \cap (\overline{\Omega_5} \cup \Omega_6) \cup (\Omega_7 \cap \overline{\Omega_8}) \quad (I.13)$$

Rozdział II

DEFINICJA I WŁASNOŚCI R-FUNKCJI

Niech $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ i $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Spośród wszystkich funkcji f można wyróżnić takie, których znak zależy jednoznacznie od znaku jej argumentów. Przykładami takich funkcji mogą być:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 x_2, \\ y_2 &= x_1^2 + x_2^2 + 1, \\ y_3 &= x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Tabela II.1. pokazuje, jak znak każdej z funkcji (II.1) zależy od znaku (a nie wartości) jej argumentów. Łatwo zauważyć, że funkcje

$$\begin{aligned} y_4 &= 1 + x_1 x_2 \\ y_5 &= 1 - x_1 - x_2 \\ y_6 &= x_1 + x_2 \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

nie posiadają tej własności.

Traktując "dodatniość" i "ujemność" jako pewne cechy charakteryzujące różne obiekty, mówimy, że cechy argumentów określają cechy funkcji (jej "dodatniość" lub "ujemność"). Możliwe jest oczywiście wyróżnienie innych cech, np. przypisanie jednej cechy liczbom, których moduł jest mniejszy od jeden, a drugiej pozostałym liczbom.

Zbiór funkcji, których argumenty jednoznacznie określają daną własność (np. "dodatniość" lub "ujemność"), nazywamy R-funkcjami. Jest to najbardziej ogólna definicja. Z punktu widzenia dalszych rozważań powyższą definicję uściślimy i ograniczymy.

Tabela II.1
Wartości funkcji określonych wzorami (II.1)

x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
-	-	+	+	-
-	+	-	+	-
+	-	-	+	-
+	+	+	+	+

□ DEFINICJA II.1. (R-funkcje)

Niech B_2 będzie zbiorem $\{0,1\}$, B_2^n - n -krotnym iloczynem kartezjańskim zbioru B_2 oraz $S_2(x)$ funkcją boolowską $S_2: \mathbb{R} \rightarrow B_2$ taką, że

$$S_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x < 0, \\ 1, & \text{dla } x \geq 0. \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

Funkcję $y = f(x_1, \dots, x_n)$ nazywamy R-funkcją, jeżeli istnieje taka funkcja boolowska $F: B_2^n \rightarrow B_2$ ($Y = F(X_1, \dots, X_n)$, gdzie $X_i \in B_2$), która spełnia warunek

$$S_2[f(x_1, \dots, x_n)] = F[S_2(x_1), \dots, S_2(x_n)]. \quad (\text{II.4})$$

WNIOSEK II.1.

Każdej funkcji boolowskiej F odpowiada nieskończona liczba R-funkcji. Np. funkcji równoważności logicznej $X \sim Y$ można przyporządkować następujące R-funkcje:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 x_2, \\ y_2 &= x_1 x_2 (1 + x_1^2 + x_2^2), \\ y_3 &= (1 - 2^{-x_1}) (3^{x_2} - 1), \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

itd.

Dla pierwszej z funkcji (II.5) mamy: $S_2(x_1 x_2) = S_2(x_1) \sim S_2(x_2)$ i analogicznie dla pozostałych.

□ DEFINICJA II.2. (Gałąź R-funkcji)

Zbiór wszystkich R-funkcji odpowiadających danej funkcji boolowskiej nosi nazwę gałęzi R-funkcji.

Ponieważ zbiór R -funkcji jest zbiorem niepoliczalnym, nie istnieje skończony zupełny układ tych funkcji (inaczej niż w przypadku funkcji logicznych). Niemniej jednak wprowadza się pojęcie dostatecznie zupełnego układu R -funkcji (por.[49]):

□ DEFINICJA II.3. (Dostatecznie zupełny układ R -funkcji)

Układ H R -funkcji nazywamy dostatecznie zupełnym, jeśli zgodnie z zasadami tworzenia funkcji złożonych można za pomocą funkcji układu H utworzyć R -funkcję z każdej gałęzi.

Przytoczmy teraz, bez dowodu, bardzo ważne twierdzenie (por.[51]).

○ TWIERDZENIE II.1.

Niech H będzie pewnym układem R -funkcji, a H_1 - odpowiadającym mu układem funkcji logicznych (boolowskich). Jeśli układ H_1 jest układem zupełnym, to układ H jest dostatecznie zupełny.

Jak już wcześniej stwierdzono, układ trzech funkcji logicznych (boolowskich): koniunkcji, alternatywy (dyzjunkcji) oraz negacji stanowi układ zupełny, za pomocą którego można wyrazić inne funkcje logiczne. Układowi temu, opierając się na twierdzeniu II.1, można przyporządkować nieskończenie wiele dostatecznie zupełnych układów R -funkcji.

Najczęściej stosowanymi układami są (por.[47],[49]):

a) układ R_α

$$\begin{aligned} x_1 \wedge_\alpha x_2 &= \frac{1}{1+\alpha} (x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2}) , \\ x_1 \vee_\alpha x_2 &= \frac{1}{1+\alpha} (x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2}) , \\ \bar{x} &= -x ; \end{aligned} \quad (II.6)$$

gdzie $\alpha = \alpha(x_1, x_2)$ jest dowolną funkcją, spełniającą warunek: $-1 < \alpha(x_1, x_2) \leq 1$.

b) układ R_0

$$\begin{aligned} x_1 \wedge_0 x_2 &= x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} , \\ x_1 \vee_0 x_2 &= x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} , \\ \bar{x} &= -x . \end{aligned} \quad (II.7)$$

Układ ten powstał z układu R_α dla $\alpha=0$. Jego pierwsze dwie funkcje mają nieciągłą pierwszą pochodną, jeśli jednocześnie obydwa argumenty przyjmą wartość zero.

c) układ R_1

$$\begin{aligned} x_1 \wedge_1 x_2 &= \frac{1}{2} (x_1 + x_2 - |x_1 - x_2|) = \min(x_1, x_2) , \\ x_1 \vee_1 x_2 &= \frac{1}{2} (x_1 + x_2 + |x_1 - x_2|) = \max(x_1, x_2) , \\ \bar{x} &= -x . \end{aligned} \quad (II.8)$$

d) układ R_0^m

$$\begin{aligned} x_1 \wedge_0^m x_2 &= (x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) (x_1^2 + x_2^2)^{m/2} , \\ x_1 \vee_0^m x_2 &= (x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) (x_1^2 + x_2^2)^{m/2} , \\ \bar{x} &= -x . \end{aligned} \quad (II.9)$$

Układ ten składa się z funkcji klasy C^m .

Pokażemy teraz, że R -funkcje pierwszego układu (II.6) odpowiadają układowi zupełnemu: koniunkcji, alternatywy i negacji, czyli że są: R -koniunkcją, R -dyzjunkcją i R -negacją. Zajmiemy się pierwszą z funkcji (II.6) - R -koniunkcją. Wyrażenie $w_1 = x_1 \wedge_\alpha x_2$ należy do gałęzi, która sprzężona jest z koniunkcją $X \wedge Y$. Wynika to z następującego rozumowania. Rozpaść trzmy trójkąt o bokach, których długości wynoszą $a = |x_1|$ i $b = |x_2|$, a cosinus kąta między nimi α . Wówczas trzeci bok ma długość równą $c = (x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha |x_1| |x_2|)^{1/2}$. Możliwe są następujące przypadki:

1. obydwa argumenty są dodatnie, wówczas zgodnie z nierównością trójkąta $a + b > c$ i $w_1 = a + b - c > 0$;
2. jeden z argumentów jest ujemny, a drugi dodatni, wtedy dwumian $x_1 + x_2$ jest różnicą boków trójkąta, a więc $a - b < c$, czyli $w_1 = a - b - c < 0$;
3. obydwa argumenty są ujemne - jak łatwo zauważyć $w_1 < 0$.

Poniższa tabela kończy dowód dla R -koniunkcji.

Tabela II.2
Wartości R -koniunkcji dla różnych par argumentów

x_1	x_2	$x_1 \wedge_{\alpha} x_2$	X	Y	$X \wedge Y$
+	+	+	1	1	1
+	-	-	1	0	0
-	+	-	0	1	0
-	-	-	0	0	0

Dla R -dyzjunktji $w_2 = x_1 \vee_{\alpha} x_2$ dowód jest analogiczny:

1. jeśli $x_1 > 0$ i $x_2 > 0$, to $w_2 = a + b + c > 0$;
2. jeśli $x_1 x_2 < 0$, to $w_2 = a - b + c > 0$;
3. jeśli $x_1 < 0$ i $x_2 < 0$, to ponieważ wartość bezwzględna sumy argumentów jest większa od trzeciego składnika, więc $w_2 < 0$; ostatecznie

Tabela II.3
Wartości R -dyzjunktji dla różnych par argumentów

x_1	x_2	$x_1 \vee_{\alpha} x_2$	X	Y	$X \vee Y$
+	+	+	1	1	1
+	-	+	1	0	1
-	+	+	0	1	1
-	-	-	0	0	0

Dla trzeciej funkcji układu mamy:

$$S_2(\bar{x}) = S_2(-x) = \overline{S_2(x)} \quad (\text{II.10})$$

co kończy cały dowód.

Każdy z układów funkcji (II.6-9) można uzupełnić o inne funkcje, sprzężone z innymi operacjami logicznymi, np. z implikacją lub równoważnością. I tak dla układu (II.6) funkcją sprzężoną z implikacją $X \rightarrow Y$ jest funkcja postaci

$$x_1 \rightarrow_{\alpha} x_2 \equiv \frac{1}{1+\alpha} (x_2 - x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 2\alpha x_1 x_2}) \quad (\text{II.11})$$

Przedstawimy teraz niektóre własności R -funkcji należących do opisanych wyżej układów, użyteczne podczas tworzenia równań skomplikowanych obszarów (por. [46-50] oraz zależności (I.6)):

- a) $x_1 \wedge^* x_2 \equiv x_2 \wedge^* x_1$
- b) $x_1 \wedge_1 (x_1 \wedge_1 x_3) \equiv (x_1 \wedge_1 x_2) \wedge_1 x_3$
- c) $x_1 \wedge_1 (x_2 \vee_1 x_3) \equiv (x_1 \wedge_1 x_2) \vee_1 (x_1 \wedge_1 x_3)$
- d) $\overline{x_1 \wedge^* x_2} \equiv \overline{x_1} \vee^* \overline{x_2} \quad (\text{II.12})$
- e) $\overline{\overline{x}} = x$
- f) $x_1 \vee^* x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0 \text{ i } x_1 \geq 0 \text{ lub } x_1 = 0 \text{ i } x_2 \geq 0$
- g) $x_1 \vee^* x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ i } x_2 \leq 0 \text{ lub } x_2 = 0 \text{ i } x_1 \leq 0$

gdzie symbole \wedge^* i \vee^* oznaczają jedną z R -koniunkcji i R -dyzjunktji (II.6-9).

Rozdział III

RÓWNANIE BRZEGU OBSZARU Ω

III.1. Równanie całego brzegu

Jak pokazaliśmy w poprzednich rozdziałach, każdemu obszarowi Ω można przyporządkować określającą go jednoznacznie operację logiczną. Z kolei każdej operacji logicznej odpowiada gałąź R -funkcji. Na podstawie twierdzenia II.1., funkcję z danej gałęzi można przedstawić za pomocą jednego z układów (II.6-9), a to prowadzi do określenia funkcji złożonej z funkcji elementarnych, jednoznacznie opisującej dany obszar.

Uściślimy te rozważania w formie następującego twierdzenia (por.[20]):

o TWIERDZENIE III.1.

Niech $\omega_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i=1, \dots, k$ oznaczają funkcje odpowiednio przyporządkowane zbiorom $\Omega_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \omega_i(x) > 0\}$ w ten sposób, że

$$\omega_i(x) \begin{cases} = 0 & \text{dla } x \in \partial\Omega_i \\ > 0 & \text{dla } x \in \Omega_i \\ < 0 & \text{dla } x \in \Omega_i \cup \partial\Omega_i \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Niech $F: B_2^k \rightarrow B_2$ będzie funkcją boolowską sprzężoną (definiującą) z obszarem Ω , złożonym z podobszarów Ω_i , taką że

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : F[S_2(\omega_1(x)), \dots, S_2(\omega_k(x))] = 1\}; \quad (\text{III.2})$$

załóżmy, że F może być wyrażona poprzez koniunkcję, alternatywę i negację (por.pkt I), wówczas funkcja

$\omega(x) = F[\omega_1(x), \dots, \omega_k(x)]$ spełnia warunki

$$\omega(x) \begin{cases} = 0 & \text{dla } x \in \partial\Omega \\ > 0 & \text{dla } x \in \Omega \\ < 0 & \text{dla } x \in \Omega \cup \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

WNIOSEK III.1.

Tworząc równania brzegu obszaru Ω możemy zastępować operatory działań na zbiorach (podobszarach) Ω_i operatorami logicznymi działającymi na funkcje charakterystyczne tych podobszarów, a te następnie zastępować odpowiednimi operacjami algebraicznymi, których argumentami są funkcje ω_i .

WNIOSEK III.2.

Funkcja ω opisująca obszar Ω jest R -funkcją (sprzężoną z operatorem logicznym F), której argumentami są $\omega_1, \dots, \omega_k$ i składa się z R -koniunkcji, R -dyzjunkcji oraz R -negacji.

W celu zilustrowania powyższych rozważań wyprowadzimy równanie obszaru, o którym była mowa w przykładzie I.4.

■ Przykład III.1. (Równanie przekroju poprzecznego krystalizatora)

Przekrój poprzeczny krystalizatora odlewania ciągłego (por. rys.I.2.) ma funkcję charakterystyczną postaci

$$\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2 \wedge (\overline{\Omega_3} \vee \overline{\Omega_4}) \quad (\text{III.4})$$

tzn., że

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : [(a^2 - x^2) \geq 0 \wedge (b-y)y \geq 0 \wedge ((c^2 - x^2) \geq 0 \vee (d-y)y \geq 0)] = 1\} \quad (\text{III.5})$$

lub krócej

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : [\omega_1 \geq 0 \wedge \omega_2 \geq 0 \wedge (\overline{\omega_3} \vee \overline{\omega_4})] = 1\} \quad (\text{III.6})$$

gdzie przyjęto oznaczenia

$$\begin{aligned} \omega_1 &= a^2 - x^2, & \omega_2 &= (b-y)y, \\ \omega_3 &= c^2 - x^2, & \omega_4 &= (d-y)y; \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

Zastępując operatory logiczne R -operatorami, równanie brzegu przekroju przedstawionego na rys.I.2. ma postać:

$$\omega(x, y) = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge (\overline{\omega_3} \vee \overline{\omega_4}) = 0 ; \quad (III.8)$$

Jeżeli przyjmiemy, że operator \wedge jest R_0 -koniunkcją (II.6)₁, to wówczas

$$\omega = \omega(x, y) = \omega_1 + \omega_2 - \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} + \overline{\omega_3 + \omega_4} + \sqrt{\omega_3^2 + \omega_4^2} - \sqrt{(\omega_1 + \omega_2 - \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2})^2 + (\overline{\omega_3 + \omega_4} + \sqrt{\omega_3^2 + \omega_4^2})^2} = 0. \quad (III.9)$$

Prześledzimy jeszcze jeden przykład:

■ Przykład III.2. (Równanie kwadratu z otworem kołowym)

Wyznamy równanie kwadratu jednostkowego z otworem kołowym w jego środku i o promieniu 0.5.

Etap 1 - definicja podobszarów $\partial\Omega_i, i=1, 2, 3$

$$\Omega_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \omega_i(x, y) > 0\},$$

gdzie:

$$\omega_1 = (1-x)x, \quad \omega_2 = (1-y)y,$$

$$\omega_3 = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2$$

Etap 2 - definicja danego obszaru (za pomocą operacji na zbiorach)

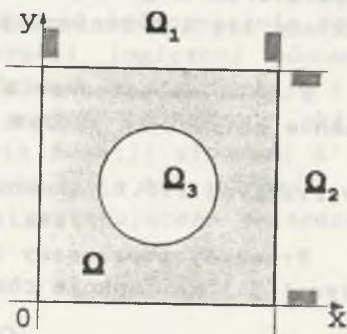
$$\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \overline{\Omega_3} \quad (III.10)$$

Etap 3 - operator logiczny sprzężony z (III.10)

$$F = F(X_1, X_2, \overline{X_3}) = X_1 \wedge X_2 \wedge \overline{X_3}. \quad (III.11)$$

Etap 4 - R-funkcja (operator algebraiczny) opisująca dany obszar

$$\omega = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \overline{\omega_3}. \quad (III.12)$$



Rys.III.1. Obszar Ω w kształcie kwadratu z otworem
Fig.III.1. The domain Ω as a square with the hole

Etap 5 - wykorzystanie wybranego R-układu (por.(II.6-9))

$$\omega = (1-x)x + (1-y)y - \sqrt{(1-x)^2x^2 + (1-y)^2y^2} + \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 +$$

$$- \sqrt{\left[(1-x)x + (1-y)y - \sqrt{(1-x)^2x^2 + (1-y)^2y^2} \right]^2 + \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \right]^2} \quad (III.13)$$

Ostatecznie obszar przedstawiony na rysunku III.1. i jego brzeg możemy opisać jako

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \omega(x, y) > 0\}, \quad (III.14)$$

$$\partial\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \omega(x, y) = 0\}.$$

Podsumowując powyższe przykłady podkreślimy raz jeszcze bardzo ważną własność otrzymywanych równań obszarów. R-funkcja $\omega(x)$:

- a) przyjmuje wartość zero tylko i wyłącznie dla punktów należących do brzegu danego obszaru;
- b) jest dodatnia tylko i wyłącznie dla punktów należących do wnętrza obszaru;
- c) jest ujemna dla punktów należących do dopełnienia badanego obiektu geometrycznego.

Na zakończenie tego rozdziału przykład funkcji nie spełniającej tych własności, a pozornie dobrze opisującej zadany obszar.

■ Przykład III.3.

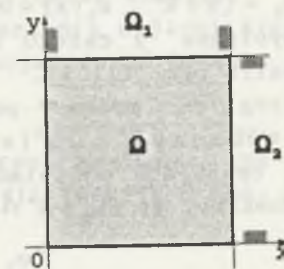
Kwadrat przedstawiony na rysunku III.2. powstaje jako część wspólna dwóch pasm:

$$\omega_1 = [(1-x)x] > 0 \text{ i } \omega_2 = [(1-y)y] > 0.$$

Równanie

$$\omega^* = (1-x)x(1-y)y = 0$$

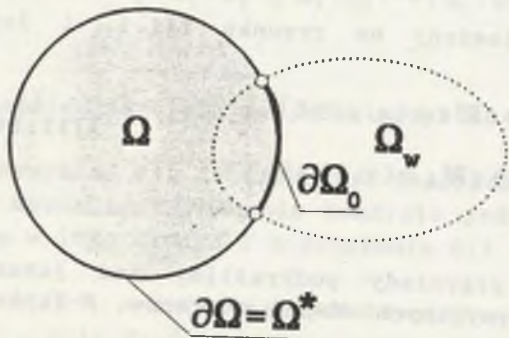
jest prawdziwe nie tylko dla punktów należących do kwadratu, ale również dla wszystkich innych punktów brzegowych obydwu pasm.



Rys.III.2. Obszar Ω - kwadrat jednostkowy
Fig.III.2. Domain Ω - elementary square

III.2. Równanie części brzegu

Najczęściej w praktyce badawczej lub inżynierskiej mamy do czynienia z problemami brzegowymi, w których dla różnych części brzegu zadane są warunki różnego typu lub zadane są różne wartości funkcji brzegowych.



Rys. III.3. Fragment $\partial\Omega_0$ brzegu $\partial\Omega$
Fig. III.3. Part $\partial\Omega_0$ of the whole boundary $\partial\Omega$

$\partial\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \omega_0(x) = 0\}$ brzegu $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \omega(x) = 0\}$, która jest "wycinana" z całego brzegu $\partial\Omega$ obszarem $\Omega_w = \{x \in \mathbb{R}^n : \omega_w(x) > 0\}$ (patrz rys. III.3).

Brzeg $\partial\Omega$ możemy potraktować jako "zdegenerowany" obszar $\Omega^* = \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : -\omega^2(x) \geq 0\}$. Oczywiście znane są R -funkcje ω i ω_w opisujące odpowiednie obszary, a poszukiwaną - funkcja ω_0 . Zauważmy, że $\partial\Omega_0 = \Omega^* \cap \Omega_w$, a to oznacza, iż

$$\omega_0 = (-\omega^2) \wedge \omega_w = \omega^2 \vee \overline{\omega_w}, \quad (\text{III.15})$$

czyli (dla R_0 -układu)

$$\omega_0 = \omega^2 + \overline{\omega_w} + \sqrt{\omega^4 + (\overline{\omega_w})^2} \quad (\text{III.16})$$

W praktyce obliczeniowej możliwe jest również stosowanie prostszej zależności (por. [20])

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \omega_w^2} - \omega_w \quad (\text{III.17})$$

I tak np. wyznaczając rozkład temperatury w symetrycznym obiekcie analizujemy jedynie jego część i wówczas na powierzchniach symetrii zadajemy zerowy strumień ciepły, a warunki na pozostałych częściach brzegu wynikają z warunków fizycznych problemu. Pojawia się więc problem opisu tylko części brzegu danego obszaru Ω .

Założmy, że rozpatrujemy część

■ Przykład III.4. (Równanie części brzegu)

Założmy, że poszukujemy równania części brzegu ω_{AB} obszaru przedstawionego na rysunku I.2., należącej do krawędzi półpiaszczczyzny $\omega(x, y) = b - y \geq 0$. Brzeg ten "wycinany" jest z prostej $y = b$ poprzez pasmo $\omega_w(x, y) = a^2 - x^2 \geq 0$. Korzystając z zależności (III.15-17) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \omega_{AB} &= \omega^2 \vee \overline{\omega_w} = \\ &= (b-y)^2 + (x^2 - a^2) + \sqrt{(b-y)^4 + (x^2 - a^2)^2}. \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

III.3. Normalizacja równań brzegu

W zagadnieniach opisanych równaniami różniczkowymi wyższego rzędu (np. równanie biharmoniczne) konieczne jest spełnienie dwóch lub więcej warunków brzegowych, np. zadana jest poszukiwana wielkość i pochodna w kierunku normalnym do brzegu (ugięcie płyty, problem tarczowy itp.). Z kolei w problemach wymiany ciepła typowe warunki brzegowe sprowadzają się do zadania wartości temperatury na jednej części brzegu, a na drugiej jej pochodnej w kierunku normalnym (strumień ciepła).

W tak postawionych problemach dla wyznaczenia ogólnej struktury rozwiązania konieczna jest normalizacja równań brzegu.

□ DEFINICJA III.1.

Równanie $\omega(x) = 0$ nazywamy znormalizowanym na $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \omega = 0\}$ do N -tego rzędu, jeśli funkcja ω spełnia następujące warunki:

$$\begin{aligned} \omega|_{\partial\Omega} &= 0, \\ \frac{\partial\omega}{\partial n}|_{\partial\Omega} &= 1, \\ \frac{\partial^2\omega}{\partial n^2}|_{\partial\Omega} &= \frac{\partial^3\omega}{\partial n^3}|_{\partial\Omega} = \dots = \frac{\partial^N\omega}{\partial n^N}|_{\partial\Omega} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

gdzie n oznacza normalną wewnętrzną do powierzchni $\partial\Omega$.

W pracy korzystać będziemy jedynie z równań brzegu znormalizowanych do pierwszego rzędu. Aby wyznaczyć takie równanie, możemy posługiwać się następującą zależnością (por. [49],[50])

$$\omega = \frac{\omega_*}{(\omega_*^2 + \nabla^2 \omega_*)^{1/2}}, \quad (\text{III.20})$$

gdzie ω_* jest dowolnym równaniem brzegu $\partial\Omega$, a $\nabla(\cdot)$ - (operatorem) gradientem. Jeśli wartość bezwzględna gradientu funkcji ω_* nigdzie nie jest równa zero, to możemy zastosować inną, prostszą zależność

$$\omega = \frac{\omega_*}{|\nabla \omega_*|}. \quad (\text{III.21})$$

■ **Przykład III.5.** (Znormalizowane równania okręgu, prostej i pasma)

Stosując zależność (III.21) łatwo sprawdzić, że następujące równania są znormalizowanymi równaniami podstawowych figur geometrycznych:

a) okrąg o promieniu r i środku w punkcie $O(a, b)$

$$\omega = \frac{1}{2r} [r^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2] = 0; \quad (\text{III.22})$$

b) prosta $y = ax + b$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} (y-ax-b) = 0; \quad (\text{III.23})$$

c) pasmo ograniczone prostymi $x = a$ i $x = b$ ($b > a$)

$$\omega = \frac{1}{b-a} (x-a)(b-x) = 0. \quad (\text{III.24})$$

Tworząc równanie obszaru bardziej skomplikowanego, trudno byłoby korzystać z zależności (III.20,21). Przytoczymy teraz bardzo ważne twierdzenie, pozwalające ominąć tę trudność.

o **TWIERDZENIE III.1.**

Niech obszar $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie wynikiem złożenia m podobszarów $\Omega_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \omega_i(x) > 0\}$ ($i=1, 2, \dots, m$) i opisany R -funkcją $\omega = \omega(x) = \omega(\omega_1, \dots, \omega_m)$, będącą superpozycją

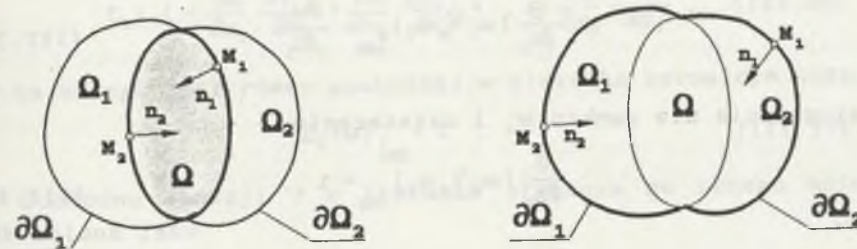
R -koniunkcji, R -dyzjunkcji i R -negacji.

Jeżeli równania ω_i są znormalizowane do pierwszego rzędu na brzegach odpowiadających im obszarów, tzn.

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial n_1} \Big|_{\partial \Omega_1} = \frac{\partial \omega_2}{\partial n_2} \Big|_{\partial \Omega_2} = \dots = \frac{\partial \omega_m}{\partial n_m} \Big|_{\partial \Omega_m} = 1, \quad (\text{III.25})$$

gdzie przez n_i oznaczono wektor normalny do brzegu odpowiedniego podobszaru, to wówczas funkcja ω jest również znormalizowana do pierwszego rzędu na brzegu obszaru Ω .

Słuszności tego twierdzenia dowodzą dwie własności R -koniunkcji i R -dyzjunkcji (dowód przeprowadzimy dla dwóch podobszarów):



Rys. III.4a. Koniunkcja obszarów Ω_1 i Ω_2
Fig. III.4a. Conjunction of the domains Ω_1 i Ω_2

Rys. III.4b. Suma obszarów Ω_1 i Ω_2
Fig. III.4b. Sum of the domains Ω_1 i Ω_2

a) Niech obszar Ω będzie częścią wspólną dwóch obszarów Ω_1 i Ω_2 (patrz rysunek III.4a), więc

$$\omega = \omega_1 \wedge \omega_2 \geq 0. \quad (\text{III.26})$$

Zauważmy, że punkt $M_1 \in \partial\Omega$, ale również $M_1 \in \Omega_2$ i $M_1 \in \partial\Omega_1$, a stąd mamy dla tego punktu $\omega_1 = 0$ i $\omega_2 > 0$ oraz

$$\frac{\partial}{\partial n_1} (\omega_1 \wedge \omega_2) \Big|_{\partial \Omega} = \frac{\partial \omega_1}{\partial n_1} \quad (\text{III.27})$$

Zamieniając wskaźniki 1 na 2 i odwrotnie otrzymamy zależność słuszną dla punktu M_2 ($\omega_1 > 0$ i $\omega_2 = 0$)

$$\frac{\partial}{\partial n_2} (\omega_1 \wedge_\alpha \omega_2) \Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial \omega_2}{\partial n_2} \quad (\text{III.28})$$

Ponieważ obydwa brzegi są znormalizowane, więc możemy napisać

$$\frac{\partial}{\partial n} (\omega_1 \wedge_\alpha \omega_2) \Big|_{\partial\Omega} = 1 \quad (\text{III.29})$$

b) Niech obszar Ω będzie sumą dwóch obszarów Ω_1 i Ω_2 (patrz rysunek III.4b), więc

$$\omega = \omega_1 \vee_\alpha \omega_2 \geq 0. \quad (\text{III.30})$$

Dla punktu M_2 mamy: $M_2 \in \partial\Omega$ oraz $M_2 \notin \Omega_2$ i $M_2 \in \partial\Omega_1$, a stąd dla tego punktu $\omega_1 = 0$ i $\omega_2 < 0$ oraz

$$\frac{\partial}{\partial n_1} (\omega_1 \vee_\alpha \omega_2) \Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial \omega_1}{\partial n_1} \quad (\text{III.31})$$

Analogicznie dla punktu M_1 i ostatecznie

$$\frac{\partial}{\partial n_2} (\omega_1 \vee_\alpha \omega_2) \Big|_{\partial\Omega} = 1. \quad (\text{III.32})$$

Przytoczymy jeszcze jedno twierdzenie (bez dowodu) ważne przy wyprowadzaniu znormalizowanych równań części brzegu:

o TWIERDZENIE III.2.

Jeśli $\omega = 0$ jest znormalizowanym do pierwszego rzędu równaniem brzegu $\partial\Omega$, Ω_w - obszarem opisanym funkcją ω_w ("wycinającym" z $\partial\Omega$ część brzegu $\partial\Omega_0$), to równanie

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 \vee_\alpha \omega_w} = 0, \quad (|\alpha| < 1) \quad (\text{III.33})$$

jest znormalizowanym do pierwszego rzędu równaniem części brzegu $\partial\Omega_0$.

Normalizacja równań brzegu obszaru pociąga za sobą interesujące własności operatorów różniczkowania:

a) Niech f będzie funkcją określoną na brzegu $\partial\Omega$. Wówczas pochodna w kierunku normalnym n do brzegu, iloczynu ωf (ω - znormalizowane równanie $\partial\Omega$) wynosi

$$\frac{\partial}{\partial n} (\omega f) = \frac{\partial \omega}{\partial n} f + \omega \frac{\partial f}{\partial n} = f. \quad (\text{III.34})$$

b) Korzystając z definicji i własności operacji wyznaczania gradientu oraz definicji wektora normalnego do krzywej (powierzchni) mamy

$$n = \nabla \omega \Big|_{\partial\Omega}, \quad (\text{III.35})$$

$$\frac{\partial f}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = \nabla f \circ n \Big|_{\partial\Omega} = \nabla f \circ \nabla \omega \Big|_{\partial\Omega} = D_1 f \Big|_{\partial\Omega};$$

gdzie D_1 jest operatorem różniczkowania w postaci

$$D_1(\cdot) = \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \omega}{\partial x_n} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_n}, \quad (\text{III.36})$$

który na brzegu jest równy pochodnej w kierunku normalnym oraz

$$D_1(\omega) \Big|_{\partial\Omega} = 1. \quad (\text{III.37})$$

c) Pochodna funkcji f w kierunku stycznym do brzegu może być określona jako

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} \Big|_{\partial\Omega} = T_1 f \Big|_{\partial\Omega}; \quad (\text{III.38})$$

gdzie T_1 jest operatorem różniczkowania zdefiniowanym (w przestrzeni \mathbb{R}^2) jako

$$T_1(\cdot) = -\frac{\partial \omega}{\partial x_2} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_2} \quad (\text{III.39})$$

Łatwo sprawdzić, że

$$T_1(\omega) \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (\text{III.40})$$

Rozdział IV

OGÓLNA STRUKTURA ROZWIĄZANIA

IV.1. Definicja GSS

Rozważmy następujący problem brzegowy (por. [20]):
Dane są operatory: operator \mathcal{L} - którego dziedziną jest przestrzeń $X(\Omega)$ funkcji określonych w obszarze Ω oraz operatory l_i ($i=1, \dots, m$) - rozpięte nad przestrzenią funkcji określonych na powierzchni (krzywej - w przypadku 2D) $\partial\Omega$.
Poszukujemy takiej funkcji $u \in X(\Omega)$, która spełnia równanie operatorowe

$$\mathcal{L}u = f \text{ w } \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (\text{IV.1})$$

i warunki brzegowe w postaci

$$l_i u = \varphi_i \text{ na } \partial\Omega_i, \quad i=1, 2, \dots, m, \quad (\text{IV.2})$$

przy czym

$$\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \dots \cup \partial\Omega_m = \partial\Omega. \quad (\text{IV.3})$$

Ogólną strukturą rozwiązania powyższego problemu nazywamy klasę funkcji (przekształceń) $T: \mathcal{F} \rightarrow X(\Omega)$ spełniających następujące warunki:

$$\bigwedge_{\varphi \in \mathcal{F}} l_i T(\varphi) = \varphi_i \text{ na } \partial\Omega_i, \quad i=1, 2, \dots, m, \quad (\text{IV.4})$$

gdzie \mathcal{F} jest przestrzenią funkcji określonych w Ω .
Innymi słowy GSS może być zapisana w formie

$$T = T(\Phi, \omega, \varphi), \quad (\text{IV.5})$$

gdzie ω definiuje obszar Ω (por. np. (III.9)), a $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest

klasą funkcji określonych w Ω i spełniających wszystkie zadane warunki brzegowe, tzn.

$$\varphi|_{\partial\Omega_i} = \varphi_i, \quad i=1, 2, \dots, m. \quad (\text{IV.6})$$

Funkcja $\Phi = \Phi(\mathbf{x})$, występująca we wzorze (IV.5) jest dowolną, nieznaną funkcją (por. przykład I.1.). Z reguły przyjmuje się w postaci

$$\Phi = \sum_{k=1}^N A_k \phi_k(\mathbf{x}) \quad (\text{IV.7})$$

Parametry A_k ($k=1, 2, \dots, N$) wyznaczamy z równań problemu, a funkcje ϕ_k mogą być składnikami, np. szeregu trygonometrycznego, potęgowego bądź wielomianami Czebyszewa itp.
Konkretna postać GSS zależy m.in. od rodzaju rozważanych warunków brzegowych (patrz rozdz. IV.3.).

IV.2. Rozszerzenie operatorów brzegowych na cały obszar

W przykładzie I.1. jako ogólną strukturę rozwiązania uzyskaliśmy klasę funkcji określoną wzorem (I.4). We wzorze tym funkcja $\varphi = 0.5x$ spełnia obydwa warunki brzegowe ($\varphi(0) = 0$ i $\varphi(1) = 0.5$) i jest określona w całym obszarze badanego obiektu ($x \in (0, 1)$).

Zauważmy jeszcze, że funkcja postaci $T = \omega\Phi$ spełnia jednorodny warunek brzegowy: $T = 0$ dla $x \in \partial\Omega$, ponieważ $\omega = 0$. Niżej uogólnimy te związki.

Niech brzeg rozpatrywanego obszaru $\partial\Omega$ będzie podzielony na m takich części, że $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \dots \cup \partial\Omega_m$ i $\forall i \neq j \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j = \emptyset$.
Poszukiwanej funkcji $T(x)$ narzucamy warunek brzegowy postaci

$$T|_{\partial\Omega} = \varphi_0 = \begin{cases} \varphi_1(\mathbf{x}) & \text{dla } \mathbf{x} \in \partial\Omega_1 \\ \vdots & \vdots \\ \varphi_m(\mathbf{x}) & \text{dla } \mathbf{x} \in \partial\Omega_m \end{cases} \quad (\text{IV.8})$$

przy czym każda z elementarnych funkcji φ_i określona jest w

całym obszarze $\Omega \cup \partial\Omega$; wówczas funkcja φ "sklejająca" warunki brzegowe będzie następująca

$$\varphi = \frac{\varphi_1 \omega_1^{-1} + \dots + \varphi_m \omega_m^{-1}}{\omega_1^{-1} + \dots + \omega_m^{-1}} = \frac{\sum_{i=1}^m \varphi_i \omega_i^{-1}}{\sum_{i=1}^m \omega_i^{-1}} \quad (\text{IV.9})$$

Prawdziwa jest wtedy równość

$$\varphi = \varphi_i|_{\partial\Omega_i}, \quad i=1, 2, \dots, m. \quad (\text{IV.10})$$

Aby przekonać się o słuszności dwóch powyższych zależności, zapiszemy je w przekształconej postaci, ograniczając się do brzegu o trzech częściach: $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3$, wtedy

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\varphi_1 \omega_1^{-1} + \varphi_2 \omega_2^{-1} + \varphi_3 \omega_3^{-1}}{\omega_1^{-1} + \omega_2^{-1} + \omega_3^{-1}} = \\ &= \frac{\varphi_1 \omega_2 \omega_3 + \varphi_2 \omega_1 \omega_3 + \varphi_3 \omega_1 \omega_2}{\omega_2 \omega_3 + \omega_1 \omega_3 + \omega_1 \omega_2} \end{aligned} \quad (\text{IV.11})$$

Weźmy teraz np. punkt $M \in \partial\Omega$ należący do pierwszej części brzegu, to $\omega_1 = 0$, a stąd dwa ostatnie składniki licznika i mianownika (IV.9) znikają i $\varphi = \varphi_1$.

IV.3. Przykłady podstawowych struktur rozwiązania

W tej części przedstawimy jedynie struktury dla problemów brzegowych lub początkowo-brzegowych, w których zadano warunek jednego typu na całym brzegu, np. stacjonarny problem wyznaczenia rozkładu temperatury w obszarze ze źródłami ciepła, z zadaną temperaturą na całym brzegu. Innym przykładem może być wyznaczenie rozkładu temperatury w obszarze ogrzewanym strumieniem ciepła, ze znaną temperaturą początkową w całym obszarze.

Poszukujemy funkcji T określonej w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, która na brzegu $\partial\Omega$ spełnia:

a) Warunek I rodzaju - zadanie Dirichleta

$$T|_{\partial\Omega} = \varphi_0. \quad (\text{IV.12})$$

Jak łatwo sprawdzić, funkcja postaci

$$T = \omega \Phi + \varphi_0, \quad (\text{IV.13})$$

przyjmuje na brzegu wartość φ_0 .

b) Warunek II rodzaju - zadanie Neumanna

$$\frac{\partial \omega}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \psi_0, \quad (\text{IV.14})$$

gdzie n - normalna do brzegu $\partial\Omega$, wówczas funkcja

$$T = \Phi - \omega D_1 \Phi + \omega \varphi, \quad (\text{IV.15})$$

jest GSS tego problemu, co wynika z następujących przekształceń: warunek (IV.14) zapisany z wykorzystaniem własności (III.36-37) ma postać

$$\begin{aligned} D_1(T)|_{\partial\Omega} &= D_1[\Phi - \omega D_1(\Phi) + \omega \varphi]|_{\partial\Omega} = \\ &= \{D_1(\Phi) - D_1[\omega D_1(\Phi)] + D_1(\omega \varphi)\}|_{\partial\Omega}. \end{aligned} \quad (\text{IV.16})$$

Z własności (III.34) wynika, że drugi składnik równania (IV.16) redukuje się z pierwszym, a trzeci równy jest φ , co kończy dowód.

c) Warunek III rodzaju

$$\frac{\partial T}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \varphi_0 + \psi_0 T|_{\partial\Omega}, \quad (\text{IV.17})$$

gdzie: ψ_0 , jak i φ_0 są danymi funkcjami. GSS ma postać

$$T = \Phi_0 - \omega D_1 \Phi_0 + \omega \Phi_1; \quad (\text{IV.18})$$

Funkcje Φ_0 i Φ_1 są dowolnymi funkcjami, zawierającymi m.in. równania poszczególnych części brzegu, funkcje brzegowe f_i , h_i oraz nieznanne parametry, wyznaczane w części numerycznej metody. Szczegóły doboru tych funkcji, jak i dowód na to, że (IV.18) spełnia warunek (IV.17), zostaną pokazane w dalszej części pracy (rozdz.V. i VI.).

d) Warunki typu płytowego (belkowego)

Wyznaczając ugięcie płyty np. przegubowo zamocowanej na brzegu stawiamy dwa warunki na każdym brzegu - ugięcie i moment zginający równają się zero, tzn.

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + v_0 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \right) |_{\partial\Omega} = 0 \quad (\text{IV.19})$$

Ogólna struktura rozwiązania dla tak postawionego problemu brzegowego jest następująca (przytaczamy bez dowodu, gdyż nie będzie wykorzystywana w dalszej części pracy)

$$u = \omega \Phi_1 - \frac{\omega^2}{2} [\Phi_1(D_2\omega + \phi_0 T_2\omega) + 2D_1\Phi_1 - \omega \Phi_2] \quad (\text{IV.20})$$

przy czym Φ_0 i Φ_1 są dowolnymi funkcjami, $D_2(\cdot) = D_1(D_1(\cdot))$ i $T_2(\cdot) = T_1(T_1(\cdot))$ są operatorami drugiego rzędu (por. wzory (III.36) i (III.39)).

Rozdział V

Zagadnienia stacjonarnego przepływu ciepła w elementach maszyn i urządzeń

Problemy obliczeń stacjonarnych pól temperatury pojawiają się przy obliczeniach cieplnych dotyczących pewnych elementów maszyn i urządzeń (np. w korpusie turbiny pracującej przez odpowiednio długi czas generuje się pole, które jest polem stacjonarnym), a także jako pierwszy etap wyznaczania naprężeń cieplnych.

W tej części pracy zostanie omówione zastosowanie R-funkcji do wyznaczania ustalonych pól temperatury. Wyprowadzone będą: ogólna struktura rozwiązania oraz odpowiedni funkcjonal problemu, z minimalizacji którego można będzie znaleźć nieznanne współczynniki. Na koniec przedstawione będą przykłady numeryczne ilustrujące i testujące wcześniejsze rozważania teoretyczne. Zostaną porównane rozwiązania dwiema metodami. Wyznaczone również będą pola temperatury w obszarach konkretnych elementów maszyn i urządzeń.

V.1. Sformułowanie problemu

Stacjonarne pole temperatury opisane jest lokalnie za pomocą równania Poissona (pole źródłowe) lub Laplace'a (pole bezźródłowe), bądź globalnie za pomocą odpowiedniego funkcjonału (por. [39],[66]).

Niech badanemu, rzeczywistemu obiektowi odpowiada obszar geometryczny $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (lub \mathbb{R}^2). Załóżmy, że rzeczywiste oddziaływanie między obiektem a otoczeniem można opisać poprzez zadanie odpowiednich warunków brzegowych na odpowiednich częściach brzegu $\partial\Omega$. Tak więc przyjmijmy, że brzeg $\partial\Omega$ składa się z $n = n_1 + n_2 + n_3$ części (odpowiadających warunkom I, II, III rodzaju), takich że

$$\begin{aligned} \partial\Omega &= \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \dots \cup \partial\Omega_n \\ \bigwedge_{i,j} \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j &= \emptyset \end{aligned} \quad (\text{V.1})$$

Analitycznie cały brzeg $\partial\Omega$ oraz jego fragmenty $\partial\Omega_i$ opisane są odpowiednio równaniami: $\omega = \omega(x)$ i $\omega_i = \omega_i(x)$.

Na n_1 częściach $\partial\Omega$ określono temperaturę brzegu T_{oi} ($i = 1, 2, \dots, n_1$) - warunek I rodzaju; na n_2 częściach - strumień ciepła q_j ($j = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$), czyli warunek II rodzaju i na n_3 częściach brzegu zadano warunek ciągłości strumienia (temperatura otoczenia wynosi odpowiednio T_k^∞ , $k = n_1 + n_2 + 1, \dots, n$) - warunek III rodzaju, tzn.

a) dla $i = 1, 2, \dots, n_1$

$$T|_{\partial\Omega_i} = T_{oi}; \quad (\text{V.2})$$

b) dla $j = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n}|_{\partial\Omega_j} = q_j; \quad (\text{V.3})$$

c) dla $k = n_1 + n_2 + 1, \dots, n$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n}|_{\partial\Omega_k} = \alpha_k (T|_{\partial\Omega_k} - T_k^\infty). \quad (\text{V.4})$$

Wówczas bezźródłowe pole temperatury $T = T(x_1, x_2, x_3)$ w obszarze Ω opisane jest równaniem Laplace'a (opis lokalny)

$$\nabla^2 T(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} = 0, \quad \text{dla } \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega, \quad (\text{V.5})$$

bądź w równoważnym opisie globalnym musi minimalizować funkcjonał

$$\begin{aligned} J[T] &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial T}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial x_3} \right)^2 \right\} d\Omega + \\ &+ \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} \frac{1}{\lambda} \int_{\partial\Omega_j} T q_j d\partial\Omega_j - \sum_{k=n_1+n_2+1}^n \frac{\alpha_k}{\lambda} \int_{\partial\Omega_k} \{ T^2 - 2 T_k^\infty T \} d\partial\Omega_k \end{aligned} \quad (\text{V.6})$$

Innymi słowy, poszukiwane stacjonarne pole temperatury wyznaczamy z rozwiązania równania różniczkowego (V.5) wraz z warunkami brzegowymi (V.2-4) lub poprzez minimalizację funkcjonału (V.6) po wszystkich dopuszczalnych polach temperatury spełniających warunek (V.2).

W przepływie ciepła rozważa się również zagadnienie stacjonarne dla obszaru Ω charakteryzującego się zmienną wartością współczynnika przewodzenia λ , tzn. $\lambda = \lambda(T)$. Równanie różniczkowe opisujące pole temperatury w takim obszarze jest postaci

$$\nabla[\lambda(T) \nabla T(x_1, x_2, x_3)] = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = -q_v, \quad (\text{V.7})$$

gdzie: q_v - wydajność objętościowych źródeł ciepła.

Równanie powyższe sprowadza się do równania Laplace'a przez podstawienie

$$U = \int_{T_{od}}^T \lambda(\theta) d\theta, \quad (\text{V.8})$$

gdzie T_{od} jest przyjętym poziomem odniesienia (np. $T_{od} = 0$), a wielkość U nazywana jest temperaturą Kirchhoffa (por. [2, 5, 16, 34]). Zauważmy, że

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{dU}{dT} \frac{\partial T}{\partial x_i} = \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (\text{V.9})$$

skąd wynika zależność

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x_i} \right] = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2}. \quad (\text{V.10})$$

Wówczas równanie (V.7) sprowadza się do równania Poissona, a mianowicie

$$\nabla^2 U + q_v = 0. \quad (\text{V.11})$$

Wprowadzona zamiana zmiennych (V.8) wymaga zmodyfikowania warunków brzegowych, przy czym warunki I i II rodzaju przebud-

wuje się w sposób bardzo prosty:

$$T|_{\partial\Omega_i} = T_{o_i} \Rightarrow U|_{\partial\Omega_i} = U_{o_i} \quad (V.12)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n}|_{\partial\Omega_j} = q_j \quad - \quad -\frac{\partial U}{\partial n}|_{\partial\Omega_j} = q_j \quad (V.13)$$

Pewien problem może stanowić warunek brzegowy III rodzaju (por. [34, 38]): Korzystając z twierdzenia o wartości średniej możemy pokazać, że

$$T - T^m = \frac{U - U^m}{\lambda(\xi)} \quad (V.14)$$

gdzie $\lambda(\xi)$ jest średnią wartością w sensie całkowym funkcji $\lambda = \lambda(T)$ w przedziale (T^m, T) . Ostatecznie warunek (V.14) przekształca się do postaci

$$-\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\alpha}{\lambda(\xi)} (U - U^m) = \hat{\alpha} (U - U^m) \quad (V.15)$$

Wartość funkcji $\lambda(\xi)$ możemy wyznaczyć w sposób iteracyjny (por. np. [34, 38]).

V.2. Ogólna struktura rozwiązania

Wprowadzimy klasę funkcji, które na zadanym brzegu $\partial\Omega$ spełniają dokładnie wszystkie warunki brzegowe (V.2-4). Zauważmy, że jeśli dobierzemy odpowiednio funkcje Φ_0 i Φ_1 , to funkcja

$$T = \Phi_0 - \omega D_1(\Phi_0) + \omega \Phi_1 \quad (V.16)$$

(por. [55]) może na brzegu $\omega = \omega(x)$ czynić zadość dowolnym warunkom, bo

$$T|_{\partial\Omega} = \Phi_0 \quad (V.17)$$

oraz

$$D_1(T)|_{\partial\Omega} = \frac{\partial T}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \Phi_1 \quad (V.18)$$

gdzie wykorzystano wcześniej wykazane własności funkcji $\omega =$

$= \omega(x)$, a mianowicie $\omega = 0$ i $D_1(\omega) = 1$ dla $x \in \partial\Omega$.

Zanim określimy funkcje Φ_0 i Φ_1 ze wzoru (V.16), przedstawimy warunki brzegowe (V.2-4) w przekształconej postaci:

a) dla $i = 1, 2, \dots, n_1$

$$T|_{\partial\Omega_i} = T_{o_i} = f_i \quad (V.19)$$

b) dla $j = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$

$$\frac{\partial T}{\partial n}|_{\partial\Omega_j} = f_j \quad (V.20)$$

gdzie $f_j = -q_j / \lambda_j$;

c) dla $k = n_1 + n_2 + 1, \dots, n$

$$\frac{\partial T}{\partial n}|_{\partial\Omega_k} = f_k - h_k T|_{\partial\Omega_k} \quad (V.21)$$

gdzie $f_k = \alpha_k T_k^m / \lambda_k$ i $h_k = \alpha_k / \lambda_k$.

Łatwo zauważyć, na podstawie wzorów (V.19-21), że funkcje Φ_0 i Φ_1 muszą spełniać następujące warunki:

a) dla $i = 1, 2, \dots, n_1$

$$\Phi_0|_{\partial\Omega_i} = f_i \quad (V.22)$$

b) dla $j = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$

$$\begin{aligned} \Phi_0|_{\partial\Omega_j} &= \Phi_1|_{\partial\Omega_j} \\ \Phi_1|_{\partial\Omega_j} &= f_j \end{aligned} \quad (V.23)$$

c) dla $k = n_1 + n_2 + 1, \dots, n$

$$\Phi_1|_{\partial\Omega_k} = f_k - h_k \Phi_0 \quad (V.24)$$

aby funkcja (V.16) spełniała odpowiednie warunki brzegowe. We wzorach (V.23-24) pojawiła się nowa funkcja $\Phi = \Phi(x)$, której postać może być dowolna i której poświęcimy więcej uwagi w dalszej części tego rozdziału.

o TWIERDZENIE V.1.

Jeżeli zdefiniujemy funkcje Φ_0 i Φ_1 jako

$$\Phi_0 = g_{01} + \Phi g_{02} \quad (V.25)$$

$$\Phi_1 = g_{11} - \Phi g_{12} ;$$

gdzie

$$g_{01} = \frac{\sum_{j=1}^{n_1} \frac{f_j}{\omega_j}}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{\omega_j}} ; \quad g_{02} = \frac{\sum_{j=n_1+1}^n \frac{1}{\omega_j}}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{\omega_j}} ; \quad (V.26)$$

$$g_{11} = \frac{\sum_{j=n_1+1}^n \frac{f_j}{\omega_j}}{\sum_{j=n_1+1}^n \frac{1}{\omega_j}} ; \quad g_{12} = \frac{\sum_{k=n_2+1}^n \frac{h_k}{\omega_k}}{\sum_{k=n_1+1}^n \frac{1}{\omega_k}} ; \quad (V.27)$$

to wówczas ogólna struktura rozwiązania będzie miała postać

$$T(\mathbf{x}) = g_{01} - \omega D_1(g_{01}) + \omega g_{11} - \omega D_1(\Phi g_{02}) + \Phi g_{02} - \omega \Phi g_{12} . \quad (V.28)$$

Innymi słowy, funkcja postaci (V.28) spełnia ściśle wszystkie warunki brzegowe (V.19-21).

Powyższe twierdzenie, bez umniejszania jego ogólności, udowodnimy dla konkretnej liczby poszczególnych części brzegu, a mianowicie $n_1 = 1$, $n_2 = 2$ i $n_3 = 2$, czyli badany brzeg składa się z 5 części: na jednej zadano warunk I rodzaju, na dwóch - II rodzaju i na dwóch ostatnich - warunek III rodzaju.

Wówczas ogólna struktura rozwiązania przyjmie postać

$$T(\mathbf{x}) = \frac{f_1}{\omega_1} - \omega D_1 \left(\frac{f_1}{\omega_1} \right) + \omega \frac{\sum_{j=2}^5 \frac{f_j}{\omega_j}}{\sum_{j=2}^5 \frac{1}{\omega_j}} + \Phi \frac{\sum_{j=2}^5 \frac{1}{\omega_j}}{\sum_{j=1}^5 \frac{1}{\omega_j}} - \omega D_1 \left(\Phi \frac{\sum_{j=2}^5 \frac{1}{\omega_j}}{\sum_{j=1}^5 \frac{1}{\omega_j}} \right) - \omega \Phi \frac{\sum_{j=4}^5 \frac{h_j}{\omega_j}}{\sum_{j=2}^5 \frac{1}{\omega_j}} \quad (V.29)$$

lub po prostych przekształceniach

$$T(\mathbf{x}) = \frac{f_1 \omega_{2345}}{M_{15}} - \omega D_1 \left(\frac{f_1 \omega_{2345}}{M_{15}} \right) + \omega \frac{f_2 \omega_{345} + f_3 \omega_{245} + f_4 \omega_{235} + f_5 \omega_{234}}{M_{15}} + \Phi \frac{\omega_1 (\omega_{345} + \omega_{245} + \omega_{235} + \omega_{234})}{M_{15}} - \omega D_1 \left(\Phi \frac{\omega_1 (\omega_{345} + \omega_{245} + \omega_{235} + \omega_{234})}{M_{15}} \right) + \Phi \frac{\omega_1 (\omega_{345} + \omega_{245} + \omega_{235} + \omega_{234})}{M_{15}} - \omega \Phi \frac{h_4 \omega_{235} + h_5 \omega_{234}}{M_{25}} . \quad (V.30)$$

W ostatnim wzorze wprowadzono uproszczony zapis iloczynu kilku funkcji ω_i , np. $\omega_{123} = \omega_1 \omega_2 \omega_3$ oraz sumy kilku iloczynów M_{15} i M_{25}

$$M_{15} = \omega_{2345} + \omega_{1345} + \omega_{1245} + \omega_{1235} + \omega_{1234} , \quad (V.31)$$

$$M_{25} = \omega_{345} + \omega_{245} + \omega_{235} + \omega_{234} .$$

Zauważmy, że funkcja (V.30) na brzegu $\partial\Omega_1$ równa się f_1 , gdyż obie funkcje ω i ω_1 są równe zero dla punktów brzegowych. $T(\mathbf{x})$ dla punktów należących do $\partial\Omega_i$ ($i=2, 3, 4, 5$) wynosi

$$T(\mathbf{x}) = \Phi \frac{\omega_1 (\omega_{345} + \omega_{245} + \omega_{235} + \omega_{234})}{M_{15}} , \quad (V.32)$$

tak więc np. dla $\mathbf{x} \in \partial\Omega_3$, $\omega_3 = 0$ i $M_{15} = \omega_{1245}$, a stąd $T(\mathbf{x}) = \Phi$.

Operator D_1 działający na funkcję (V.29) dla punktów brzegowych daje jako wynik

$$D_1(T(\mathbf{x})) \Big|_{\partial\Omega} = \frac{f_2 \omega_{345} + f_3 \omega_{245} + f_4 \omega_{235} + f_5 \omega_{234}}{M_{15}} - \Phi \frac{h_4 \omega_{235} + h_5 \omega_{234}}{M_{25}} . \quad (V.33)$$

Dla $\mathbf{x} \in \partial\Omega_i$ ($i=2, 3, 4, 5$) mamy

$$D_1(T) = f_i , \quad \text{dla } i = 2, 3 , \quad (V.34)$$

$$D_1(T) = f_i - \Phi h_i , \quad \text{dla } i = 4, 5 ,$$

a to oznacza spełnienie pozostałych warunków brzegowych.

W ten sposób wykazaliśmy, że GSS postaci (V.29) rzeczywiście spełnia wszystkie warunki (V.19-21).

Wrócimy w naszych rozważaniach do ogólnej struktury rozwiązania (V.28). W skład GSS wchodzi funkcje: g_{ij} (V.26-27) odpowiedzialne za rozszerzenie warunków brzegowych na cały badany obszar, funkcja $\omega = \omega(\mathbf{x})$ opisująca obszar Ω jako całość oraz do tej pory bliżej nieokreślona funkcja $\Phi = \Phi(\mathbf{x})$. Opiszemy teraz sposoby określania ostatniej z wymienionych funkcji.

Spośród funkcji należących do klasy, jaką jest GSS, poszukujemy takiej, która spełnia równanie różniczkowe problemu, bądź minimalizuje dany funkcjonal. Nasze zadanie polega więc na odpowiednim dobraniu nieznannej funkcji Φ . Możemy to uczynić na wiele sposobów. Najczęściej stosowany (por. [48, 49, 62]) polega na przyjęciu tejże funkcji w postaci

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N A_k \phi_k(\mathbf{x}) \quad (V.35)$$

gdzie $\phi_k(\mathbf{x})$ są znanymi funkcjami, a współczynniki A_k nieznanymi parametrami wyznaczanymi z równań problemu. W przykładach prezentowanych w tej pracy będziemy wyznaczali je metodą globalną (wariacyjną), poprzez znajdowanie wartości stacjonarnej funkcjonału (V.6), bądź metodą Galerkiną, lub wreszcie metodą najmniejszych kwadratów (patrz rozdz.VII.). Gdy badany obszar Ω jest podobszarem przestrzeni dwuwymiarowej (2D), to wówczas wzór (V.35) może przyjąć postać

$$\Phi(x_1, x_2) = \sum_{i,j=1}^N A_{ij} \phi_{ij}(x_1, x_2) \quad (V.36)$$

Niezbadanym do tej pory, od strony matematycznej, problemem jest sposób doboru znanych funkcji ϕ_{ij} . Jak widać z powyższego wzoru, funkcje te mogą być przyjęte np. jako jeden z następujących iloczynów:

$$\begin{aligned} \phi_{ij} &= x_1^i x_2^j \\ \phi_{ij} &= \sin(\pi i x_1) \sin(\pi j x_2) \\ \phi_{ij} &= C_i(x_1) C_j(x_2) \end{aligned} \quad (V.37)$$

gdzie w ostatnim przykładzie funkcje C_i, C_j mogą być np. wielomianami Czebyszewa lub Legendre'a.

Jeżeli dokonamy podziału obszaru Ω na elementy skończone (por.[52, 67]), to funkcje ϕ_{ij} mogą być funkcjami kształtu, a nieznane parametry A_{ij} poszukiwanymi wartościami węzłowymi metody elementów skończonych.

Możliwe jest również znajdowanie nieznanych parametrów metodą kolokacji bądź różnic skończonych. W tym ostatnim przypadku należałoby dokonać dyskretyzacji obszaru Ω (stworzenie odpowiedniej siatki węzłów) i zastąpić pochodne temperatury w równaniu problemu (V.5) różnicami skończonymi.

Wszystkie krótko wyżej opisane metody w efekcie końcowym sprowadzają się do rozwiązania liniowego układu równań algebraicznych o niewiadomych A_{kl} (dla zagadnienia 2D) postaci

$$\sum_{k,l=1}^N K_{ijkl} A_{kl} = B_{ij} \quad (V.38)$$

Zaletami metody globalnej jest mała liczba niewiadomych w równaniu z metodami dyskretnymi (patrz przykłady), a także fakt, że uzyskana funkcja opisująca pole temperatury jest ciągła i gładka (por.[28, 62, 65]).

V.3. Rozwiązanie stacjonarnego problemu wymiany ciepła

Dla uproszczenia zapisu wprowadzimy inne oznaczenie pochodnej cząstkowej po zmiennej przestrzennej lub czasowej (w następnych rozdziałach): $\partial(\cdot)/\partial x_i = (\cdot)_{,i}$, np. $\partial^2 T / \partial x_1 \partial x_2 = T_{,12}$.

Skoncentrujemy naszą uwagę na problemie wyznaczania ustalonego pola temperatury w obszarze Ω z przestrzeni 2D, czyli poszukujemy takiej funkcji T z klasy funkcji (V.28), tj.

$$T(\mathbf{x}) = g_{01} - \omega D_1(g_{01}) + \omega g_{11} - \omega D_1(\Phi g_{02}) + \Phi g_{02} - \omega \Phi g_{12} \quad (V.39)$$

która minimalizowałaby funkcjonał (V.6).

Przyjmijmy, że funkcja Φ , występująca w GSS (V.28) będzie postaci (V.36), czyli

$$\Phi(x_1, x_2) = \sum_{i,j=1}^N A_{ij} \phi_{ij}(x_1, x_2) \quad (V.40)$$

wówczas wzór (V.39) przyjmie formę

$$T(x_1, x_2) = X_0 + \sum_k \sum_l A_{kl} X_{kl} \quad (V.41)$$

gdzie wprowadzono:

$$\begin{aligned} X_0 &= g_{01} - \omega \omega_{,1} g_{01,1} + \omega g_{11} \\ X_{kl} &= \phi_{kl} [g_{02} - \omega (g_{12} + \omega_{,1} g_{02,1} + \omega_{,2} g_{02,2})] + \\ &\quad - \phi_{kl,1} (\omega_{,1} \omega g_{02}) - \phi_{kl,2} (\omega_{,2} \omega g_{02}) \end{aligned} \quad (V.42)$$

Jeżeli funkcję T zdefiniowaną wzorem (V.41) wstawimy do funkcjonału naszego zadania (V.6), to właściwie stanie się on fun-

kcją zmiennych A_{kl} , a warunek stacjonarności tego funkcjonału

$$\delta J[T] = 0, \quad (\text{V.43})$$

zamieni się na warunek konieczny ekstremum funkcji wielu zmiennych w postaci układu równań

$$\frac{\partial J[A_{ij}]}{\partial A_{kl}} = 0, \quad k, l = 1, \dots, N \quad (\text{V.44})$$

lub inaczej

$$\sum_{k,l=1}^N K_{ijkl} A_{kl} = B_{ij} \quad (\text{V.45})$$

gdzie

$$K_{ijkl} = \int_{\Omega} (X_{ij,1} X_{kl,1} + X_{ij,2} X_{kl,2}) d\Omega + \sum_{m=n_1+n_2+1}^n \frac{\alpha_m}{\lambda_m} \int_{\partial\Omega_m} X_{ij} X_{kl} d\partial\Omega_m;$$

$$B_{kl} = - \int_{\Omega} (X_{0,1} X_{kl,1} + X_{0,2} X_{kl,2}) d\Omega - \sum_{m=n_1+n_2+1}^n \frac{\alpha_m}{\lambda_m} T_0 \int_{\partial\Omega_m} X_{kl} d\partial\Omega_m -$$

$$- \sum_{m=n_1+n_2+1}^{n_1+n_2} \frac{q_m}{\lambda_m} \int_{\partial\Omega_m} X_{kl} d\partial\Omega_m.$$

Na koniec zauważmy, że tak strukturę rozwiązania, jak i współczynniki równania (V.46) można nieco uprościć przedstawiając warunki brzegowe II rodzaju w postaci warunków III rodzaju, dla których przyjęto odpowiednie stałe $h_k = 0$.

V.4. Przykłady numeryczne

W tej części pracy przedstawimy, w postaci wykresów i tabel, przykłady numeryczne ilustrujące:

a) porównanie uzyskanych wyników z rozwiązaniami otrzymanymi metodą różnic skończonych lub z rozwiązaniem analitycznym.

b) wpływ na dokładność obliczeń liczby przyjętych wyrazów szeregu (V.40).

Obliczenia zostaną przeprowadzone dla współrzędnych bezwymiarowych, a uzyskane wyniki przedstawione poprzez tempera-

turę zredukowaną θ , określoną następującą zależnością

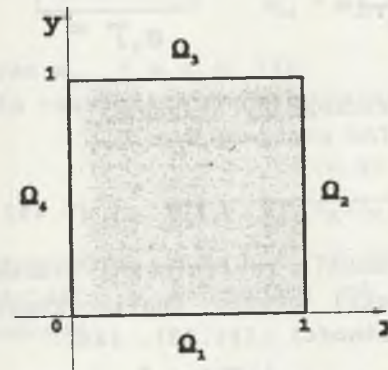
$$\theta(x_1, x_2) = \frac{T(x_1, x_2) - T^{\infty}}{T_{\max} - T^{\infty}} \quad (\text{V.47})$$

Zamiast współrzędnych x_1, x_2 będziemy używać oznaczeń x, y .

■ Przykład V.1.

Wyznaczyć ustalony rozkład temperatury w kwadracie jednostkowym, którego boki ponumerowano jak na rys.V.1.

Rozpatrzmy trzy zadania różniące się rodzajem zadanych warunków brzegowych na poszczególnych częściach brzegu. We wszystkich zadaniach współczynnik przewodzenia ciepła $\lambda = 360$ [W/mK].



Rys.V.1. Obszar Ω i jego części brzegu
Fig.V.1. Domain Ω and its parts of boundary

Zadanie 1.

Brzeg 3 ogrzewany będzie strumieniem $q = 65000$ [W/m²], dla brzegów 2. i 4. założono jednorodny warunek II rodzaju (zerowy strumień ciepła), na brzegu 1. zadano warunek III rodzaju i przyjęto współczynnik przejmowania ciepła $\alpha = 150$ [W/m² K] oraz temperaturę otoczenia $T^{\infty} = 30$ [°C].

Zadanie 2.

Dla brzegów 1. i 3. przyjęto warunki jak w poprzednim zadaniu, a dla pozostałych części warunek III rodzaju z parametrami jak dla brzegu 1.

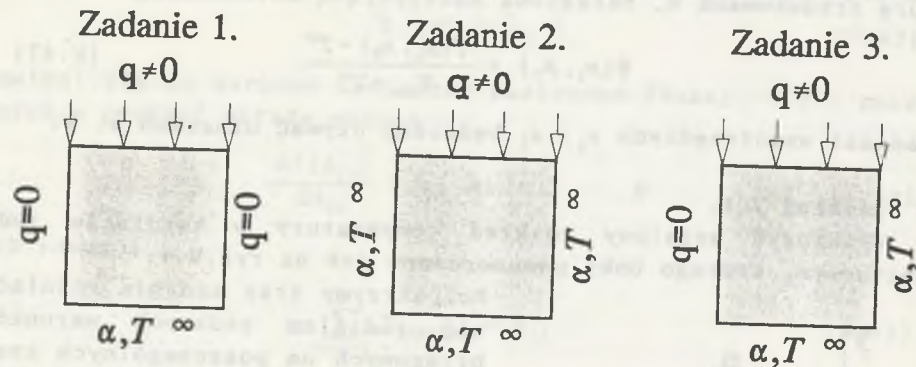
Zadanie 3.

Przyjęto dla brzegu 4. warunek symetrii pola temperatury (zerowy strumień), a dla pozostałych brzegów jak w zadaniu poprzednim.

Znormalizowane do pierwszego rzędu równanie brzegu kwadratu jednostkowego otrzymamy jako złożenie dwóch pasm

$$\Omega_1 = \{(1-x)x > 0\}, \quad \Omega_2 = \{(1-y)y > 0\}. \quad (\text{V.48})$$

czyli (por.rozdz.III.)



Rys. V.2. Warunki brzegowe dla poszczególnych zadań
Fig. V.2. Boundary condition for the problems 1 - 3

$$\omega = (1-x)x + (1-y)y - \sqrt{(1-x)^2 x^2 + (1-y)^2 y^2} \quad (\text{V.49})$$

We wzorze (V.49) zastosowano R_0 -koniunkcję zdefiniowaną wzorem (II.7)₁. Poszczególne fragmenty (boki) brzegu analizowanego kwadratu opisujemy, korzystając z zależności (III.33), tzn.

$$\omega_i = \sqrt{(e_i^2 V_0 w_i)} \quad i=1, 2, 3, 4. \quad (\text{V.50})$$

gdzie e_i oznaczają równanie obszaru zawierającego i -ty bok kwadratu, a w_i dopełnienie obszaru wycinającego z e_i dany bok

$$\begin{aligned} e_1 = y & & w_1 = x(x-1) \\ e_2 = 1-x & & w_2 = y(y-1) \\ e_3 = 1-y & & w_3 = x(x-1) \\ e_4 = x & & w_4 = y(y-1) \end{aligned} \quad (\text{V.51})$$

Ogólna struktura rozwiązania dla trzech powyższych zadań będzie miała postać

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) = \omega \frac{\sum_{j=1}^4 \frac{f_j}{\omega_j}}{\sum_{j=1}^4 \frac{1}{\omega_j}} + \omega \Phi \frac{\sum_{j=1}^4 \frac{h_j}{\omega_j}}{\sum_{j=1}^4 \frac{1}{\omega_j}} + \\ + \Phi - \omega D_1(\Phi) \end{aligned} \quad (\text{V.52})$$

lub po przekształceniu

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) = \omega \frac{f_1 \omega_{234} + f_2 \omega_{134} + f_3 \omega_{124} + f_4 \omega_{123}}{M_{14}} + \\ - \omega D_1(\Phi) + \Phi + \\ - \omega \Phi \frac{h_1 \omega_{234} + h_2 \omega_{134} + h_3 \omega_{124} + h_4 \omega_{123}}{M_{14}} \end{aligned} \quad (\text{V.53})$$

gdzie

$$M_{14} = \omega_{234} + \omega_{134} + \omega_{124} + \omega_{123}, \quad (\text{V.54})$$

oraz $\omega_{123} = \omega_1 \omega_2 \omega_3$ itp.

Dla wszystkich zadań przyjmujemy funkcję Φ w postaci wielomianu

$$\Phi(x, y) = \sum_{\substack{i, j=0 \\ i+j \leq n}}^n A_{ij} x^i y^j. \quad (\text{V.55})$$

Współczynniki f_i i h_i we wzorze (V.52) będą przyjmowały różne wartości w zależności od rozpatrywanego zadania. I tak dla zadania:

$$\begin{aligned} 1. \quad f_1 = \alpha T^\infty / \lambda, \quad f_2 = f_4 = 0, \quad f_3 = q / \lambda, \\ h_1 = \alpha / \lambda, \quad h_2 = h_3 = h_4 = 0, \\ 2. \quad f_1 = f_2 = f_4 = \alpha T^\infty / \lambda, \quad f_3 = q / \lambda, \\ h_1 = h_2 = h_4 = \alpha / \lambda, \quad h_3 = 0, \\ 3. \quad f_1 = f_2 = \alpha T^\infty / \lambda, \quad f_3 = q / \lambda, \quad f_4 = 0, \\ h_1 = h_2 = \alpha / \lambda, \quad h_3 = h_4 = 0. \end{aligned} \quad (\text{V.56})$$

a) Rozwiązanie zadania 1.

Zadanie to z fizycznego i matematycznego punktu widzenia jest bardzo proste, ponieważ dotyczy obiektu symetrycznego z symetrycznymi warunkami brzegowymi (osią symetrii jest prosta $x = 0.5$). W zasadzie jest to problem jednowymiarowy, a to oznacza, że dla każdego przekroju $y = \text{const}$, pole temperatury jest stałe ($T = \text{const}$). Jednakże z numerycznego punktu widzenia, jeśli nie uwzględnić wyżej wymienionych własności tego zadania, jest ono dobrym testem metody R -funkcji. Stosując MRF traktowano badany obszar jako dwuwymiarowy i roz-

wiązywano jako problem dwuwymiarowy, w którym nie zakładano symetrii i stałości pola temperatury dla każdej rzędnej y .

Nietrudno zauważyć, że rozwiązaniem analitycznym zadania pierwszego jest funkcja $T=Cy+D$, której stałe C i D wyznaczamy z warunków brzegowych:

$$dT(1)/dy = f_3 \quad \text{i} \quad dT(0)/dy = f_1 - T(0)h_1.$$

Tak więc dla każdego $x \in (0,1)$ i $y = \text{const}$ temperatura $T = \text{const}$.

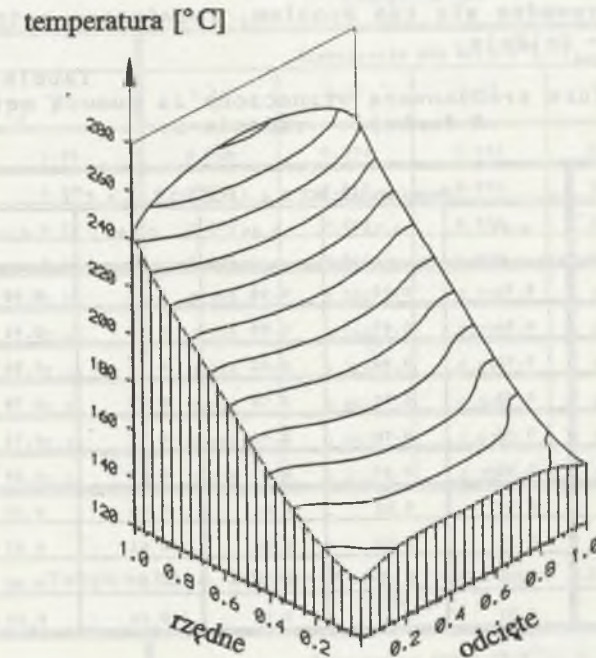
Tabela V.1

Wyniki uzyskane metodą R -funkcji i z rozwiązania analitycznego - zadanie 1.

$\downarrow y$ $\rightarrow x$	Rozwiązanie MRF $\theta = (T - T^*) / (T_{\infty} - T^*)$					Rozwiązanie analityczne
	0.05	0.15	0.25	0.35	0.45	
0.95	0.99	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00
0.85	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.97
0.75	0.94	0.93	0.93	0.93	0.93	0.94
0.65	0.91	0.90	0.90	0.90	0.90	0.91
0.55	0.87	0.87	0.87	0.87	0.87	0.88
0.45	0.84	0.84	0.84	0.84	0.84	0.85
0.35	0.81	0.81	0.82	0.82	0.82	0.82
0.25	0.78	0.78	0.79	0.79	0.79	0.79
0.15	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.76
0.05	0.72	0.72	0.72	0.72	0.71	0.73

Tabela V.1. zawiera porównanie wyników rozwiązania analitycznego i za pomocą R -funkcji. W przypadku tego ostatniego podano rozkład temperatury dla pięciu przekrojów $x=0.05, 0.15, 0.25, 0.35, 0.45$ (otrzymane rozwiązanie jest idealnie symetryczne względem $x=0.5$). Jak widać, rozwiązanie przy użyciu R -funkcji nie jest stałe dla $y=\text{const}$, co wynika z faktu, że wewnątrz rozpatrywanego obszaru przybliżyliśmy stałą funkcję wielomianem Φ . Wydaje się jednakże, że różnice te nie są istotne (mniejsze niż 1%). Ten bardzo prosty problem (ale dość trudny do opisu za pomocą wielomianów) pokazuje dobre własności R -funkcji do wyznaczania jednorodnych pól temperatury.

b) Rozwiązanie zadania 2.



Rys. V.3. Rozkład temperatury dla zadania 2.
Fig. V.3. Temperature distribution for the 2nd problem

Rozwiązaniem zadania 2. powinno być pole temperatury symetryczne względem prostej $x=0.5$. I rzeczywiście przyjmując we wzorze (V.55) $N=5$ (wielomiany już tego rzędu dają zadowalające wyniki - patrz przykład V.2.), otrzymamy jako rozwiązanie idealnie symetryczną powierzchnię przedstawioną na rys.V.3.

Tabele V.2. i V.3. zawierają szczegółowe wyniki liczbowe tego problemu (jedynie dla połowy obszaru, gdyż korzystamy z symetrii rozwiązania). Ze względu na trudności związane ze znalezieniem rozwiązania analitycznego wyniki symulacji numerycznej porównujemy z rozwiązaniami uzyskiwanymi metodą różnic skończonych, która dla tego typu zadań zapewnia bardzo dobrą aproksymację rozwiązania dokładnego. Zastosowano MRS w wariantcie nazywanym w literaturze eliminacją węzłów brzegowych, por. [38] (taki wariant metody daje aproksymację warunków brzegowych o jeden rząd dokładniejszą niż wariant klasyczny). Na

obszar kwadratu nałożono siatkę 30×30 o $\Delta x = \Delta y = 1/30$. Czas rozwiązania za pomocą MRS był dłuższy o ok. 30%. Układ równań, do którego sprowadza się ten problem, rozwiązano metodą iteracyjną Gaussa - Seidela.

Tabela V.2
Temperatura zredukowana wyznaczona za pomocą metody R-funkcji - zadanie 2.

		Rozwiązanie MRF $\theta = (T - T^{\infty}) / (T_{max} - T^{\infty})$				
$\rightarrow x$		0.05	0.15	0.25	0.35	0.45
$\downarrow y$						
0.95		0.91	0.95	0.98	0.99	0.99
0.85		0.84	0.87	0.89	0.91	0.91
0.75		0.78	0.80	0.82	0.83	0.84
0.65		0.73	0.75	0.76	0.77	0.78
0.55		0.68	0.70	0.72	0.73	0.73
0.45		0.63	0.65	0.67	0.69	0.69
0.35		0.59	0.62	0.64	0.65	0.65
0.25		0.55	0.58	0.60	0.61	0.62
0.15		0.53	0.55	0.57	0.57	0.58
0.05		0.51	0.53	0.53	0.54	0.54

Tabela V.3
Temperatura zredukowana wyznaczona metodą różnic skończonych - zadanie 2.

		Rozwiązanie MRS $\theta = (T - T^{\infty}) / (T_{max} - T^{\infty})$				
$\rightarrow x$		0.05	0.15	0.25	0.35	0.45
$\downarrow y$						
0.95		0.93	0.96	0.98	0.99	1.00
0.85		0.86	0.89	0.91	0.92	0.93
0.75		0.80	0.82	0.84	0.86	0.86
0.65		0.74	0.77	0.79	0.80	0.80
0.55		0.69	0.72	0.73	0.75	0.75
0.45		0.65	0.67	0.69	0.70	0.70
0.35		0.61	0.63	0.65	0.66	0.66
0.25		0.58	0.60	0.61	0.62	0.63
0.15		0.55	0.57	0.58	0.59	0.59
0.05		0.52	0.54	0.55	0.56	0.57

Tabela V.4
Temperatura zredukowana wyznaczona za pomocą MRF - zadanie 3.

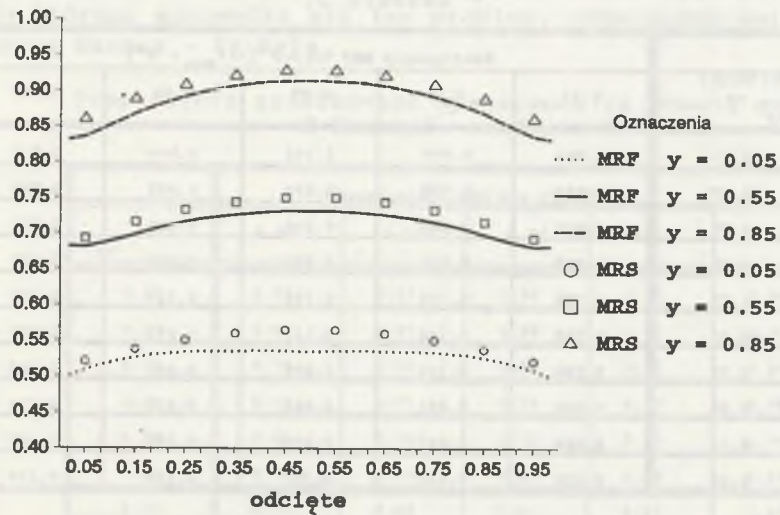
		Rozwiązanie MRF $\theta = (T - T^{\infty}) / (T_{max} - T^{\infty})$				
$\rightarrow x$		0.15	0.35	0.55	0.75	0.95
$\downarrow y$						
0.95		0.986	0.974	0.945	0.904	0.841
0.85		0.927	0.916	0.890	0.850	0.790
0.75		0.879	0.861	0.836	0.800	0.751
0.65		0.837	0.817	0.793	0.760	0.713
0.55		0.798	0.780	0.758	0.724	0.675
0.45		0.760	0.746	0.725	0.691	0.637
0.35		0.724	0.714	0.694	0.660	0.603
0.25		0.691	0.682	0.662	0.630	0.574
0.15		0.660	0.647	0.625	0.599	0.552
0.05		0.630	0.613	0.587	0.564	0.534

Tabela V.5
Temperatura zredukowana wyznaczona za pomocą MRS - zadanie 3.

		Rozwiązanie MRS $\theta = (T - T^{\infty}) / (T_{max} - T^{\infty})$				
$\rightarrow x$		0.15	0.35	0.55	0.75	0.95
$\downarrow y$						
0.95		0.982	0.967	0.940	0.900	0.844
0.85		0.939	0.924	0.897	0.857	0.803
0.75		0.898	0.883	0.857	0.818	0.765
0.65		0.858	0.844	0.818	0.780	0.730
0.55		0.821	0.807	0.782	0.745	0.697
0.45		0.786	0.772	0.748	0.712	0.666
0.35		0.752	0.739	0.715	0.681	0.637
0.25		0.720	0.708	0.685	0.652	0.609
0.15		0.690	0.678	0.656	0.624	0.583
0.05		0.661	0.650	0.629	0.598	0.559

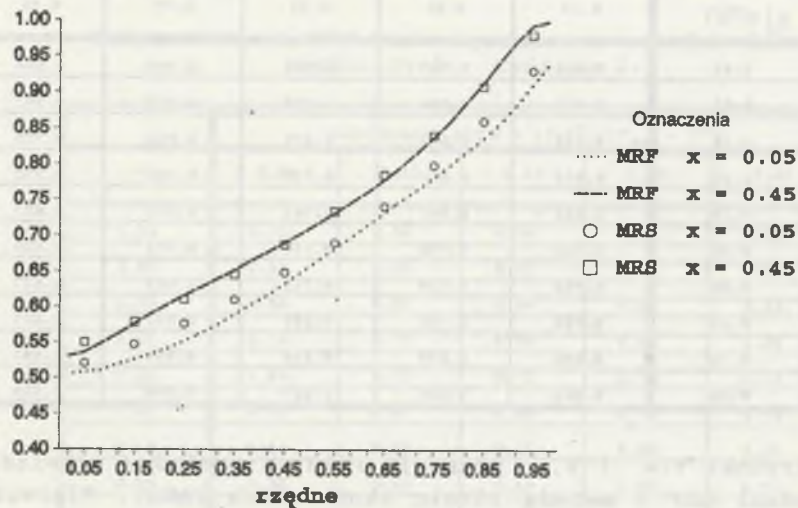
Rysunki V.4. i V.5. pokazują różnicę pomiędzy rozwiązaniami metodami MRF i metodą różnic skończonych (MRS). Pierwszy porównuje wyniki dla $y = \text{const} = 0.05, 0.55, 0.85$; drugi dla $x = \text{const} = 0.05$ i 0.45 . Jak widać, różnice pomiędzy tymi rozwiązaniami nie są duże i nie przekraczają 2%.

temperatura zredukowana



Rys. V.4. Rozkład temperatury dla przekrojów $y = \text{const}$
 Fig. V.4. Temperature distribution for sections $y = \text{const}$

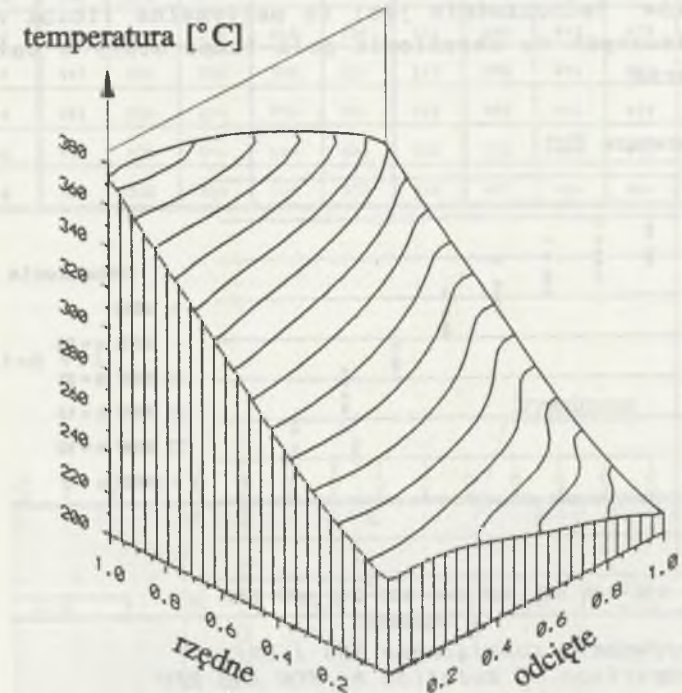
temperatura zredukowana



Rys. V.5. Rozkład temperatury w przekrojach $x = \text{const}$
 Fig. V.5. Temperature distribution for section $x = \text{const}$

c) Rozwiązanie zadania 3.

I na koniec przedstawimy wyniki rozwiązania zadania 3. i porównamy obydwie metody. Pole temperatury będące rozwiązaniem tego problemu jest powierzchnią przedstawioną na rysunku V.6.



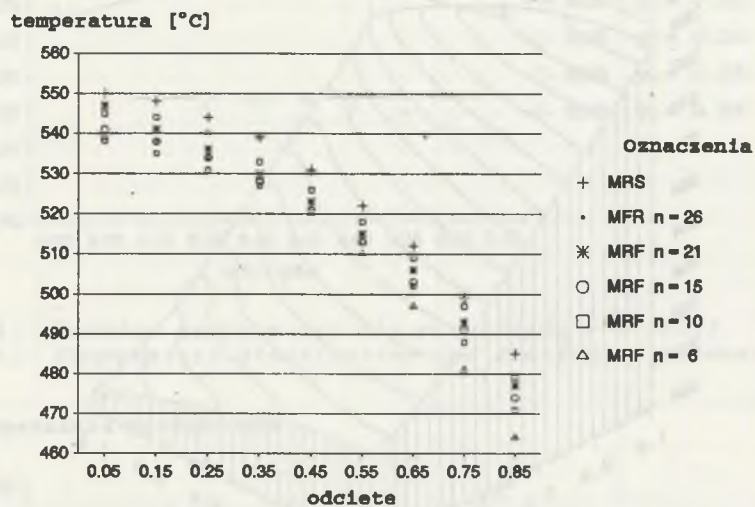
Rys. V.6. Rozkład pola temperatury dla zadania 3.
 Fig. V.6. Temperature distribution for the 3rd problem

Szczegółowe wyniki za pomocą MRF i MRS zawierają tabele V.4-5. Również i one potwierdzają dużą zgodność obydwu rozwiązań.

■ Przykład V.2.

W przykładzie tym rozpatrzmy zadanie podobne do poprzednich, a mianowicie wyznaczmy pole temperatury w kwadracie jednostkowym (patrz rys. V.1.), nakładając na brzeg dolny i lewy warunek symetrii pola temperatury, od góry ogrzewamy go strumieniem q , a na brzeg prawy narzucamy warunek III rodzaju (wartości liczbowe jak w przykładzie V.1.).

Porównamy ze sobą rozwiązania otrzymane metodą różnic skończonych i metodą R -funkcji, przy różnych wielkościach maksymalnego stopnia wielomianu określającego funkcję Φ (por. wzór (V.55)). Obliczenia przeprowadzono dla $N=2,3,4,5,6$ – odpowiada to przyjęciu funkcji Φ jako sumy odpowiednio 6, 10, 15, 21, 28 składników. Jednocześnie jest to maksymalna liczba niewiadomych koniecznych do określenia pola temperatury w całym badanym obszarze.



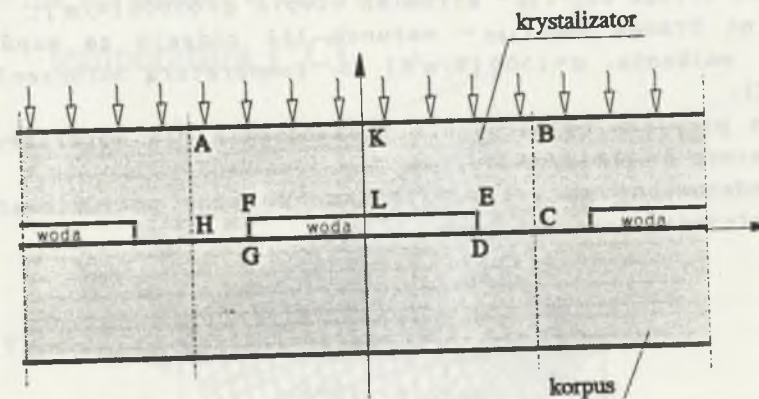
Rys.V.7. Porównanie rozwiązania MRS i MRF
Fig.V.7. Comparison of solution by FDM and RFM

Rysunek V.7. i tabela V.6. ilustrują różnice pomiędzy różnymi rozwiązaniami MRF (tym razem przedstawiliśmy wyniki w wielkościach bezwzględnych) a wynikami uzyskanymi metodą MRS. Porównano temperaturę w przekroju $y=0.55$. Jak łatwo zauważyć, największa różnica pomiędzy dokładnym rozwiązaniem MRS a najmniej dokładnym MRF ($N=2$) wynosi zaledwie $21 [^{\circ}\text{C}]$, co w porównaniu ze średnią temperaturą wynoszącą ok. $500 [^{\circ}\text{C}]$ stanowi mniej niż 5% (temperatura otoczenia wynosiła $30 [^{\circ}\text{C}]$).

Tabela V.6
Porównanie rozwiązania MRS i MRF dla różnych stopni wielomianu

	0.95	0.85	0.75	0.65	0.55	0.45	0.35	0.25	0.15	0.05
MRS	550	548	544	539	531	522	512	499	485	468
N=6	545	544	540	533	526	518	509	497	479	468
N=5	547	541	536	530	523	515	506	493	477	460
N=4	541	538	534	528	521	513	503	491	474	460
N=3	538	535	531	527	521	513	502	488	471	457
N=2	539	538	534	529	520	510	497	481	464	452

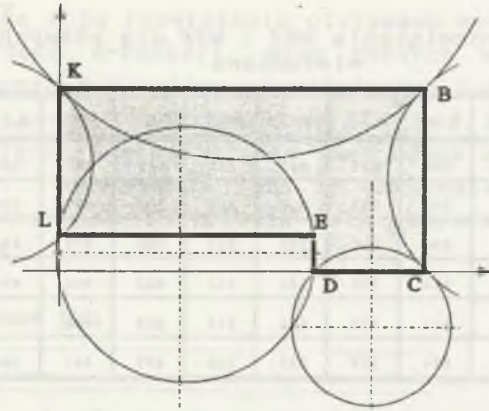
Przykład V.3



Rys.V.8. Fragment urządzenia do ciągłego odlewania stali
Fig.V.8. Part of the continuous casting mould

W rozdziale III (patrz przykład III.1.) wyprowadziliśmy równanie przekroju poprzecznego krystalizatora urządzenia do ciągłego odlewania stali (rys.V.8. i wzór (III.9)). Wyznamy teraz rozkład temperatury w obszarze będącym powtarzalnym fragmentem krystalizatora (rys.V.9.), zakładając następujące warunki brzegowe:

a) na częściach brzegu $\partial\Omega_1 = \Gamma_{D0}$ $\partial\Omega_2 = \Gamma_{CB}$ oraz $\partial\Omega_4 = \Gamma_{KL}$ – zerowy strumień ciepła;



Rys.V.9. Części brzegu $\partial\Omega$ i okręgi je wycinające
Fig.V.9. Parts of domain $\partial\Omega$ and circles which cut theirs

b) na brzegu $\partial\Omega_3 = \Gamma_{BK}$ - strumień ciepła $q = 65000$ [W/m²];

c) na brzegu $\partial\Omega_5 = \Gamma_{LED}$ - warunek III rodzaju ze współczynnikiem wnikania $\alpha = 1500$ [W/m²K] i temperaturą otoczenia $T^\infty = 30$ [°C].

Ponadto przyjęto współczynnik przewodzenia dla materiału krystalizatora $\lambda = 372$ [W/mK].

Przedstawiony na rys.V.9. obszar Ω można potraktować jako wynik złożenia czterech pasm

$$\begin{aligned}\omega_A &= (a-x)x/a \\ \omega_B &= (b-y)y/b \\ \omega_C &= (c-x)x/c \\ \omega_D &= (d-y)y/d\end{aligned}\quad (V.57)$$

i wówczas analityczny opis Ω ma postać

$$\omega = \omega_A \wedge_0 \omega_B \wedge_0 (\overline{\omega_C} \vee_0 \overline{\omega_D}) \quad (V.58)$$

Poszczególne części brzegu $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \dots \cup \partial\Omega_5$ uzyskamy wycinając je z całego brzegu odpowiednimi okręgami, co ilustruje rys.V.9. Tak więc:

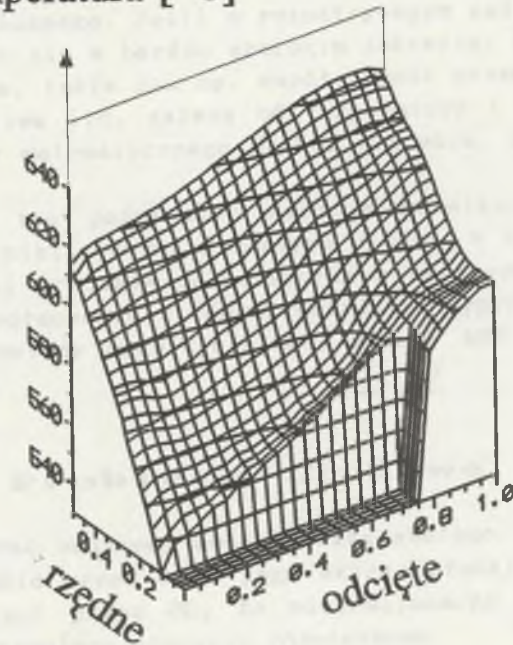
$$\omega_i = \sqrt{-\omega^2 \vee_0 \omega_{wi}}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5; \quad (V.59)$$

gdzie

$$\begin{aligned}\omega_{w1} &= \left(x - \frac{a+d}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{a-d}{2}\right)^2 - \frac{(a-d)^2}{2}, \\ \omega_{w2} &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{2}, \\ \omega_{w3} &= \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}b\right)^2 - \frac{a^2}{2}, \\ \omega_{w4} &= \left(x + \frac{b-c}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b+c}{2}\right)^2 - \frac{(b-c)^2}{2}, \\ \omega_{w5} &= \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{c^2+d^2}{4},\end{aligned}\quad (V.60)$$

Adaptując wcześniej wyprowadzoną ogólną strukturę rozwiązania (V.39) do analizowanego tutaj problemu i po wyznaczeniu nieznanych współczynników wielomianu (V.40) otrzymamy rozkład temperatury w krystalizatorze przedstawiony graficznie na rys.V.10. i liczbowo w tabeli V.7.

temperatura [°C]



Rys.V.10. Rozkład temperatury w krystalizatorze
Fig.V.10. Temperature distribution for cristalizer of CCM

Tabela V.7
Rozkład temperatury w krystalizatorze wyznaczony
metodą R-funkcji

x y	0.05	0.15	0.25	0.35	0.45	0.55	0.65	0.75	0.85	0.95
0.475	612	615	617	619	621	623	625	627	630	631
0.425	598	608	610	612	615	618	621	624	626	622
0.375	588	592	594	597	600	608	613	617	616	616
0.325	578	573	578	586	590	594	604	605	607	610
0.275	568	563	565	569	574	578	586	594	600	605
0.225	557	554	556	559	563	568	574	586	593	600
0.175	549	545	547	551	555	560	566	579	588	596
0.125	540	542	546	551	556	561	565	574	584	592
0.075	0	0	0	0	0	0	0	572	580	588
0.025	0	0	0	0	0	0	0	571	578	585

Rozdział VI

Niestacjonarne zagadnienia wymiany ciepła

Większość technicznych problemów wymiany ciepła zależna jest od czasu i opisana równaniem cząstkowym drugiego rzędu typu parabolicznego. Jeśli w rozpatrywanym zadaniu temperatura może zmieniać się w bardzo szerokim zakresie, to współczynniki termofizyczne, takie jak np. współczynnik przewodzenia ciepła, ciepło właściwe itd. zależą od temperatury i wówczas mamy do czynienia, z matematycznego punktu widzenia, z problemem nieliniowym.

Rozdział ten poświęcimy metodom rozwiązywania zagadnień liniowych i nieliniowych przepływu ciepła, w tym również zadań termodynamiki procesów odlewniczych z zastosowaniem metody R-funkcji, w połączeniu z innymi metodami. Wyprowadzony zostanie funkcjonal metody wykorzystującej zalety MRF i metody różnic skończonych.

VI.1. Problemy liniowe

Rozpatrywać będziemy obszar ciała stałego, który oznaczymy, jak poprzednio przez Ω , a jego brzeg składający się z $n = n_1 + n_2 + n_3$ części przez $\partial\Omega$, to niestacjonarne pole temperatury spełnia następujące równanie różniczkowe

$$c_p \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \right) \quad (\text{VI.1})$$

dla $\mathbf{x} \in \Omega$ i $t \in (0, \infty)$, przy warunkach brzegowych

a) dla $i=1, 2, \dots, n_1$

$$T(\mathbf{x}, t) \Big|_{\partial\Omega_i} = T_{o_i}(t) ; \quad (\text{VI.2})$$

b) dla $j=n_1+1, \dots, n_1+n_2$

$$-\lambda \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_j} = q_j(t) ; \quad (\text{VI.3})$$

c) dla $k=n_1+n_2+1, \dots, n$

$$-\lambda \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_k} = \alpha_k (T(\mathbf{x}, t) \Big|_{\partial\Omega_k} - T_k^*) ; \quad (\text{VI.4})$$

oraz warunek początkowy

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x}) . \quad (\text{VI.5})$$

W celu rozwiązania problemu początkowo-brzegowego (VI.1-5) zastosujemy dla zmiennych przestrzennych $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$ lub $\mathbf{x}=(x_1, x_2)$ metodę R-funkcji, zmienną czasową t poddamy dyskretyzacji.

Łatwo zauważymy, że warunki brzegowe zadania niestacjonarnego nie różnią się od warunków wcześniej omawianego problemu stacjonarnego, więc również ogólna struktura rozwiązania będzie taka sama, czyli będzie opisana równaniem (V.28).

Wyprowadzimy teraz odpowiedni funkcjonal, którego warunek stacjonarności pozwoli wyznaczać nieznane parametry opisujące pole temperatury wewnątrz badanego obszaru (por. poprzednie rozdziały).

Założmy, że będziemy poszukiwali rozkładów temperatury w chwilach czasowych odległych o Δt , wówczas równanie problemu (VI.1) możemy przekształcić do postaci

$$\frac{T(\mathbf{x}, t+\Delta t) - T(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} = \kappa \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 T(\mathbf{x}, t+\Delta t)}{\partial x_i^2} \quad (\text{VI.6})$$

lub w uproszczonej formie

$$\frac{T^{t+\Delta t} - T^t}{\Delta t} = \kappa \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 T^{t+\Delta t}}{\partial x_i^2} , \quad (\text{VI.7})$$

gdzie T^t - oznacza temperaturę w danej chwili, traktowaną jako wielkość znaną, a $T^{t+\Delta t}$ - nieznaną temperaturę w następnym kroku

kroku czasowym, wyrażającą się wzorem analogicznym do wzoru (V.29)

$$T^{t+\Delta t}(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} f_i}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i}} - \omega D_1 \left(\frac{\sum_{i=1}^{n_1} f_i}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i}} \right) + \omega \frac{\sum_{j=n_1+1}^n \frac{f_j}{\omega_j}}{\sum_{j=n_1+1}^n \frac{1}{\omega_j}} + \quad (\text{VI.8})$$

$$+ \Phi \frac{\sum_{j=n_1+1}^n \frac{1}{\omega_j}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i}} - \omega D_1 \left(\Phi \frac{\sum_{j=n_1+1}^n \frac{1}{\omega_j}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i}} \right) - \omega \Phi \frac{\sum_{k=n_1+n_2+1}^n \frac{h_k}{\omega_k}}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{\omega_j}} .$$

przy czym $f_j = -q_j/\lambda$ ($j=n_1+1, \dots, n_1+n_2$) dla warunków II rodzaju, $f_k = \alpha_k T_k^*/\lambda$ ($k=n_1+n_2+1, \dots, n$ dla warunków III rodzaju oraz $h_k = \alpha_k/\lambda$ (por.(V.29)), a także

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{i,j}^N A_{ij} \phi_{ij}(\mathbf{x}) . \quad (\text{VI.9})$$

Po prostych przekształceniach wzór (VI.7) przyjmie postać

$$T^{t+\Delta t} = T^t + \kappa \Delta t \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 T^{t+\Delta t}}{\partial x_i^2} \quad (\text{VI.10})$$

Dla większej przejrzystości w dalszych rozważaniach wprowadzimy nowe oznaczenia temperatur w chwilach $t+\Delta t$ i t : $T^{t+\Delta t} = u(\mathbf{x})$, $T^t = u_0(\mathbf{x})$ oraz pochodnych cząstkowych $\partial(\cdot)/\partial x_i = (\cdot)_{,i}$. W nowym zapisie wzór (VI.7) wyraża się w następujący sposób

$$u(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) + \kappa \Delta t \sum_{i=1}^3 u_{,ii} . \quad (\text{VI.11})$$

Podobnie jak w zagadnieniach stacjonarnych, najlepszą metodą wyznaczenia nieznanymi parametrów opisujących pole temperatury jest globalne sformułowanie problemu poprzez odpowiedni funkcjonal. Uzyskamy go realizując następujący algorytm.

Niech funkcja $v=v(\mathbf{x})$ będzie funkcją klasy $C^1(\Omega)$ i spełnia te same warunki brzegowe co funkcja u . Pomnożymy równanie (VI.10) obustronnie przez v i scałkujemy po całym obszarze Ω :

$$\int_{\Omega} u v d\Omega = \int_{\Omega} u_0 v d\Omega + \kappa \Delta t \int_{\Omega} (u_{,11} + u_{,22} + u_{,33}) v d\Omega . \quad (\text{VI.12})$$

Zajmiemy się teraz tylko ostatnią całką, w ostatnim wzorze, tzn.

$$A = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 u_{,ii} v d\Omega = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} u_{,ii} v d\Omega = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} [(u_{,i} v)_{,i} - u_{,i} v_{,i}] d\Omega \quad (\text{VI.13})$$

Stosując twierdzenie Greena możemy ostatnie wyrażenie przekształcić do postaci

$$A = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} u_{,i} v n_{,i} d\Omega - \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} u_{,i} v_{,i} d\Omega. \quad (\text{VI.14})$$

Skorzystamy z definicji pochodnej w kierunku normalnym do brzegu:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = u_{,n} = \sum_{i=1}^3 u_{,i} n_{,i} \quad (\text{VI.15})$$

oraz z warunków brzegowych, wówczas analizowaną całkę można przedstawić jako

$$A = \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} \int_{\partial\Omega_j} f_j v d\partial\Omega_j + \sum_{k=n_1+n_2+1}^n \int_{\partial\Omega_k} (f_k - h_k u) v d\partial\Omega_k - \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} u_{,i} v_{,i} d\Omega. \quad (\text{VI.16})$$

Podstawimy ostatni wzór do (VI.12), co daje po prostych przekształceniach następujące wyrażenie

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u v d\Omega + \kappa \Delta t \sum_{k=n_1+n_2+1}^n \int_{\partial\Omega_k} h_k u v d\partial\Omega_k + \kappa \Delta t \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} u_{,i} v_{,i} d\Omega = \\ = \int_{\Omega} u_0 v d\Omega + \kappa \Delta t \sum_{j=n_1+1}^n \int_{\partial\Omega_j} f_j v d\partial\Omega_j. \end{aligned} \quad (\text{VI.17})$$

Zauważmy, że lewa strona ostatniej zależności jest formą dwuliniową

$$a(u, v) = \int_{\Omega} u v d\Omega + \kappa \Delta t \left(\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} u_{,i} v_{,i} d\Omega + \sum_{k=n_1+n_2+1}^n \int_{\partial\Omega_k} u v d\partial\Omega_k \right) \quad (\text{VI.18})$$

a prawa funkcjonalem

$$[f, v] = \int_{\Omega} u_0 v d\Omega + \kappa \Delta t \sum_{j=n_1+1}^n \int_{\partial\Omega_j} f_j v d\partial\Omega_j. \quad (\text{VI.19})$$

Ostatecznie mamy

$$a(u, v) = [f, v]. \quad (\text{VI.20})$$

Zgodnie z twierdzeniami analizy funkcjonalnej (por. np. [31]), problem początkowo-brzegowy (VI.1-5) można zastąpić zadaniem poszukiwania ekstremum następującego funkcjonału

$$\begin{aligned} J[v] = \frac{1}{2} a(v, v) - [f, v] = \\ = \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Omega} v^2 d\Omega + \kappa \Delta t \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} (v_{,i})^2 d\Omega + \kappa \Delta t \sum_{k=n_1+n_2+1}^n \int_{\partial\Omega_k} h_k v^2 d\partial\Omega_k \right\} + \\ - \int_{\Omega} u_0 v d\Omega - \kappa \Delta t \sum_{j=n_1+1}^n \int_{\partial\Omega_j} f_j v d\partial\Omega_j. \end{aligned} \quad (\text{VI.21})$$

□ DEFINICJA VI.1. (dopuszczalne pole temperatury)

Przez dopuszczalne pole temperatury będziemy rozumieli każdą funkcję klasy $C^1(\Omega)$, spełniającą warunki brzegowe I rodzaju na odpowiednich częściach brzegu, tzn. dla $x \in \partial\Omega_i$, $i = 1, 2, \dots, n_1$.

Rozwiązanie równania (VI.1) wraz z warunkami (VI.2-5) sprowadza się więc do znalezienia takiego dopuszczalnego pola temperatury, które nadaje funkcjonałowi (VI.21) wartość stacjonarną, inaczej mówiąc spełnia równanie

$$\delta J[v] = 0. \quad (\text{VI.22})$$

Uwzględniając fakt, że poszukiwana funkcja $u = T^{tt} \Delta t$ jest zależna od N współczynników A_{ij} szeregu (VI.9), wyprowadzony funkcjonał niestacjonarnego zagadnienia wymiany ciepła jest funkcją N zmiennych, a warunek stacjonarności sprowadza się do warunku koniecznego ekstremum funkcji wielu zmiennych. W omawianym tutaj przypadku będzie to N równań postaci

$$\frac{\partial J[A_{kj}]}{\partial A_{ij}} = 0. \quad (\text{VI.23})$$

lub przedstawiając inaczej

$$\sum_{i,j} C_{ijkl} A_{kl} = B_{ij} \quad (VI.24)$$

gdzie

$$C'_{ijkl} = \Delta t \sum_{\alpha=1}^3 \int_{\Omega} X_{ij,\alpha} X_{kl,\alpha} d\Omega + \frac{1}{\kappa} \int_{\Omega} X_{ij} X_{kl} d\Omega + \Delta t \sum_{\beta=n_1+n_2+1}^n \int_{\partial\Omega_{\beta}} h_{\beta} X_{ij} X_{kl} d\partial\Omega_{\beta} \quad (VI.25)$$

$$B_{ij} = -\Delta t \sum_{\alpha=1}^3 \int_{\Omega} X_{0,\alpha} X_{kl,\alpha} d\Omega - \frac{1}{\kappa} \int_{\Omega} (X_0 - u_0) X_{ij} d\Omega - \Delta t \sum_{\gamma=n_1+1}^n \int_{\partial\Omega_{\gamma}} f_{\gamma} X_{ij} d\Omega_{\gamma} - \Delta t \sum_{\beta=n_1+n_2+1}^n \int_{\partial\Omega_{\beta}} h_{\beta} X_0 X_{ij} d\Omega_{\beta} \quad (VI.26)$$

oraz

$$X_0 = \omega g_{01} \quad , \quad X_{ij} = (1 - g_{12}) \varphi_{ij} - \omega \sum_{\alpha=1}^3 \omega_{,\alpha} \varphi_{ij,\alpha} \quad (VI.27)$$

VI.2. Przykłady numeryczne rozwiązania problemów liniowych

Przykłady przedstawione poniżej ilustrują:

a) sposób wykorzystania metody R-funkcji w połączeniu z dyskretyzacją czasu,

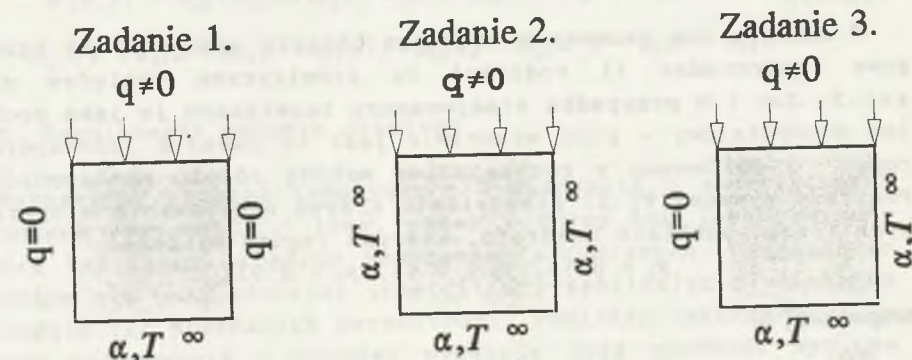
b) porównanie rozwiązań uzyskanych za pomocą zaproponowanego tutaj algorytmu a innymi metodami,

c) zgodność rozwiązania problemu niestacjonarnego, po bardzo długim okresie czasu, z rozwiązaniem stacjonarnym przedstawionym w rozdz.V.6.

d) pola temperatur w elementach maszyn i urządzeń.

Przykład VI.1.

W przykładzie tym rozważymy 3 zadania takie same jak w przykładzie V.1., ale potraktowane jako zagadnienia niestacjonarne, czyli rozwiążemy równanie (VI.1) z warunkami brzegowymi (V.56) i przy warunku początkowym: $T(x,y,0) = 30 [^{\circ}\text{C}]$ w całym obszarze kwadratu o boku jednostkowym. Dodatkowo przyję-

to ciepło właściwe $c = 419 [\text{J/kg K}]$, i gęstość $\rho = 8300 [\text{kg/m}^3]$.

Rys. VI.1. Warunki brzegowe dla poszczególnych zadań
Fig. VI.1. Boundary condition for the problems 1 - 3

Struktura rozwiązania i funkcje przybliżające rozkład wewnątrz obszaru przyjmujemy takie same jak w przykładzie V.1.

$$T(\mathbf{x}) = \omega \frac{f_1 \omega_{234} + f_2 \omega_{134} + f_3 \omega_{124} + f_4 \omega_{123}}{M_{14}} \quad (VI.28)$$

$$- \omega D_1(\Phi) + \Phi - \omega \Phi \frac{h_1 \omega_{234} + h_2 \omega_{134} + h_3 \omega_{124} + h_4 \omega_{123}}{M_{14}}$$

gdzie

$$M_{14} = \omega_{234} + \omega_{134} + \omega_{124} + \omega_{123} \quad (VI.29)$$

oraz $\omega_{123} = \omega_1 \omega_2 \omega_3$, itp.Dla wszystkich zadań przyjmujemy funkcję Φ w postaci wielomianu

$$\Phi(x,y) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j \leq n}}^n A_{ij} x^i y^j \quad (VI.30)$$

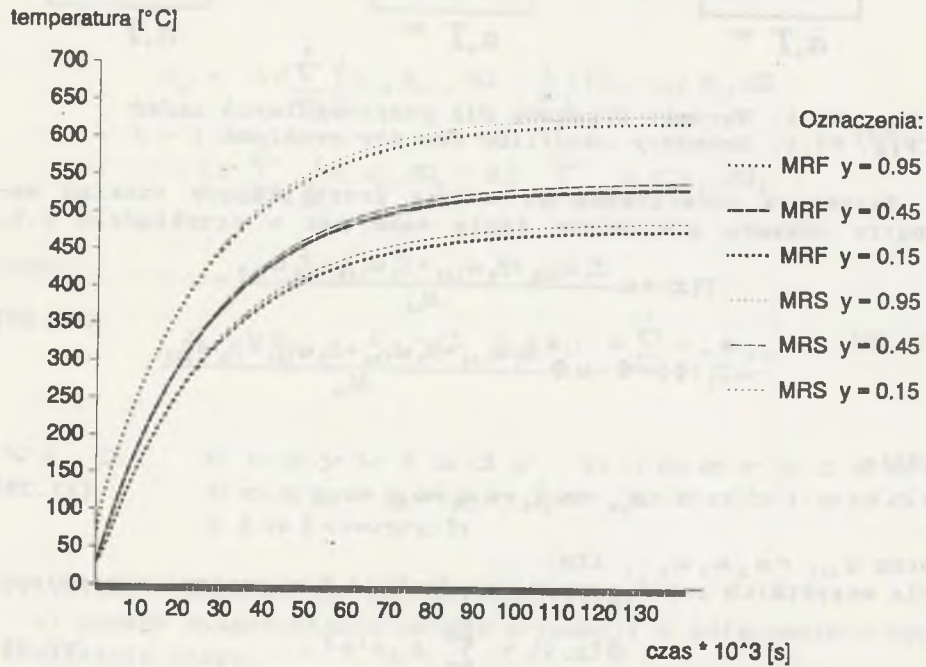
Współczynniki f_i i h_i we wzorze (VI.28) będą przyjmowały różne wartości w zależności od rozpatrywanego zadania. I tak:

$$\begin{aligned} 1. \quad & f_1 = \alpha T^{\infty} / \lambda \quad , \quad f_2 = f_4 = 0 \quad , \quad f_3 = q / \lambda \quad , \\ & h_1 = \alpha / \lambda \quad , \quad h_2 = h_3 = h_4 = 0 \quad , \\ 2. \quad & f_1 = f_2 = f_4 = \alpha T^{\infty} / \lambda \quad , \quad f_3 = q / \lambda \quad , \\ & h_1 = h_2 = h_4 = \alpha / \lambda \quad , \quad h_3 = 0 \quad , \\ 3. \quad & f_1 = f_2 = \alpha T^{\infty} / \lambda \quad , \quad f_3 = q / \lambda \quad , \quad f_4 = 0 \quad , \\ & h_1 = h_2 = \alpha / \lambda \quad , \quad h_3 = h_4 = 0 \quad . \end{aligned} \quad (VI.31)$$

a) Rozwiązanie zadania pierwszego

W zadaniu tym geometria badanego obszaru oraz warunki brzegowe (jednorodne II rodzaju) są symetryczne względem osi $x=0.5$. Jak i w przypadku stacjonarnym rozwiązano je jako problem dwuwymiarowy - choć właściwie jest to zadanie jednowymiarowe - i porównano z rozwiązaniem metodą różnic skończonych. Poniższy rysunek VI.2. przedstawia krzywe nagrzewania w wybranych trzech punktach kwadratu, których rzędne wynoszą:

$$y_1 = 0.15, y_2 = 0.45, y_3 = 0.95.$$



Rys.VI.2. Krzywe nagrzewania wybranych punktów kwadratu - zadanie 1.

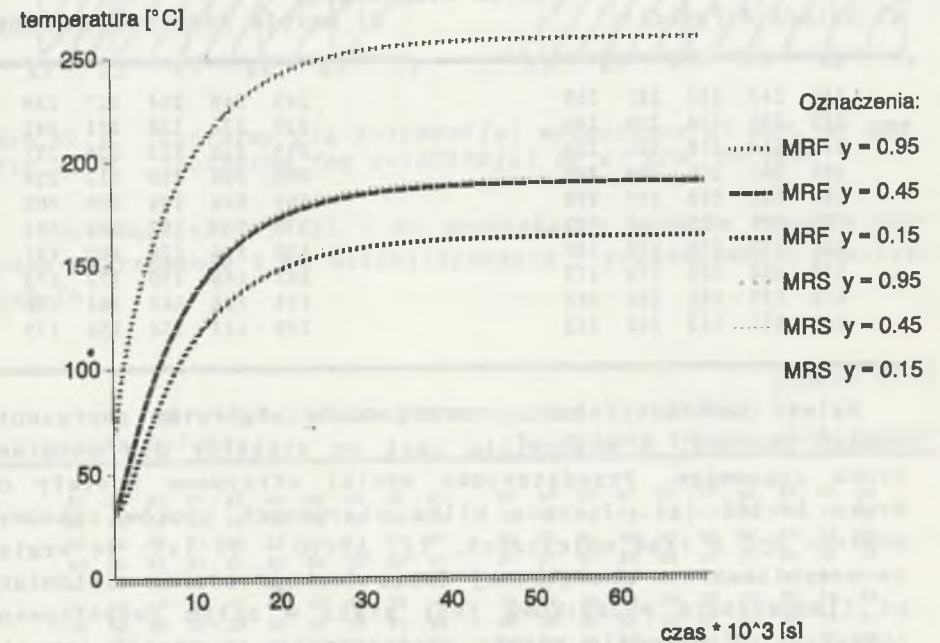
Fig.VI.2. Heating curves for the selected points - 1st problem

Jak widać, różnice pomiędzy krzywymi nagrzewania uzyskanymi za pomocą MRF i MRS są bardzo małe - nie przekraczają w wielkościach bezwzględnych $3[^\circ\text{C}]$, co stanowi mniej niż 1%. Wyniki te uzyskano dla najwyższego stopnia wielomianu Φ wynoszącego 4, czyli końcowy układ zawierał tylko 15 niewiadomych, a funkcja (VI.30) miała następującą rozwiniętą postać

$$\Phi(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{30}x^3 + a_{03}y^3 + a_{31}x^3y + a_{13}xy^3 + a_{22}x^2y^2 + a_{40}x^4 + a_{04}y^4 \quad (\text{VI.32})$$

b) Rozwiązanie zadania drugiego

Wyznamy rozkład temperatury w kwadracie o symetrycznych warunkach brzegowych - lewy, prawy i dolny bok jest obmywany cieczą lub gazem, a górny nagrzewany strumieniem. Rozwiązanie uzyskano nie uwzględniając symetrii i przybliżając wielomianem 5 stopnia (21 nieznanymi parametrami). Poniższy rysunek VI.3. - krzywe nagrzewania - również wykazuje dużą zgodność wyników uzyskanych metodami MRF i MRS.



Rys.VI.3. Krzywe nagrzewania wybranych punktów kwadratu - zadanie 2.

Fig.VI.3. Heating curves for the selected points - 2nd problem

Zestawimy teraz wyniki obliczeń dla tego samego zadania traktowanego jako stacjonarne - rozwiązane metodami MRF i MRS - oraz jako niestacjonarne, ale po długim czasie nagrzewania wynoszącym ok. $t = 87000$ [s].

Tabela VI.4

Problem niestacjonarny - czas $t = 25000$ [s]

a) metoda R-funkcji b) metoda różnic skończonych

326	325	323	320	316	312	307	301	294	281	326	325	324	321	318	314	308	302	294	286
304	304	303	300	297	293	288	282	273	263	309	309	307	304	301	297	292	285	278	270
292	290	288	285	282	278	273	267	260	252	294	293	291	289	285	281	276	270	263	255
280	277	275	272	269	265	261	255	248	240	279	278	277	274	271	267	262	256	249	242
266	263	261	259	256	252	248	242	235	228	265	265	263	261	258	254	249	243	237	230
251	249	248	246	243	239	235	230	222	214	253	252	251	249	246	242	237	232	226	219
237	237	236	234	231	228	224	218	211	202	242	241	240	237	234	231	226	221	215	209
227	227	226	224	222	219	215	210	203	194	231	231	229	227	224	221	217	212	206	200
220	220	219	216	213	210	206	202	197	189	222	221	220	218	215	212	208	203	198	192
212	211	209	206	203	199	196	193	189	184	214	213	212	210	207	204	200	196	191	185

Tabela VI.5

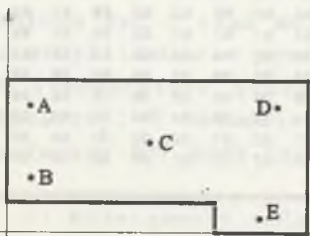
Problem niestacjonarny - czas $t = 100000$ [s]

a) metoda R-funkcji b) metoda różnic skończonych

367	369	367	364	359	354	348	341	332	319	371	370	368	365	361	356	350	342	333	323
349	348	347	344	340	335	329	322	312	300	354	353	351	348	344	339	333	325	317	307
336	334	331	328	324	319	314	307	298	288	338	337	335	332	328	323	317	310	302	292
324	321	318	315	311	306	301	294	286	277	323	322	320	317	313	308	302	295	287	278
309	306	304	301	297	293	288	281	272	263	309	308	306	303	299	294	289	282	274	266
293	291	289	287	283	279	274	268	259	249	295	294	293	290	286	282	276	270	263	254
278	278	276	274	271	267	262	256	247	236	283	282	280	278	274	270	265	258	251	244
267	267	266	264	261	257	252	246	238	227	272	271	269	266	263	259	254	248	241	234
259	259	257	254	251	247	242	237	231	221	261	260	258	256	253	249	244	238	232	225
249	248	246	243	239	234	230	226	221	215	251	250	249	246	243	239	235	229	223	216

Przykład VI.2. (Krystalizator urządzenia COS)

W przykładzie przedstawimy rozwiązanie zadania sformułowanego w poprzednim rozdziale - patrz przykład V.3. - potraktowanego jako problem niestacjonarny. Rysunek VI.6. pokazuje krzywe nagrzewania dla pięciu wybranych punktów (patrz rys.VI.5.) do momentu stabilizacji procesu, tj. w czasie od $t=0$ do $t=100000$ [s]. Natomiast tabela VI.6. zawiera porównanie rozkładów temperatur uzyskanych z rozwiązania zadania stacjonarnego i niestacjonarnego (po ustabilizowaniu się procesu nagrzewania) z zastosowaniem metody R-funkcji.



Rys.VI.5. Położenie wybranych punktów
Fig.VI.5. Position of the selected points

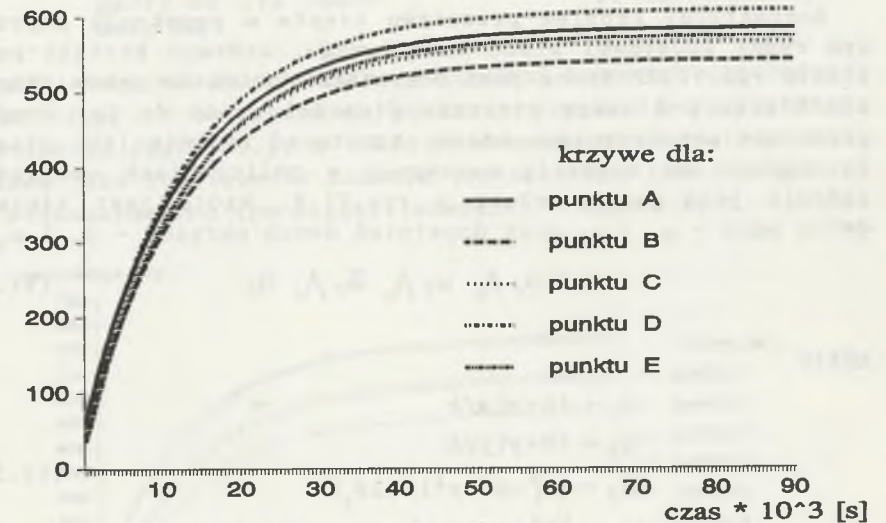
Tabela VI.6

Rozkład temperatury w krystalizatorze

a) problem stacjonarny b) problem niestacjonarny

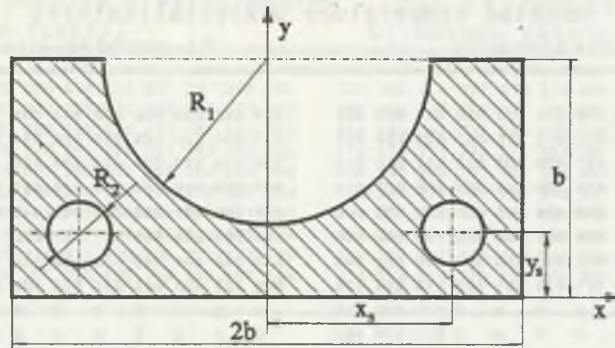
612	615	617	619	621	623	625	627	630	631	594	595	593	592	593	596	601	608	617	623
598	608	610	612	615	618	621	624	626	627	577	584	584	583	585	589	594	601	608	609
588	592	594	597	600	608	613	617	616	616	570	573	573	573	574	583	589	596	600	602
578	573	579	586	590	594	604	605	607	610	567	563	565	571	573	576	587	590	594	598
568	563	565	569	574	578	586	594	600	605	563	560	561	563	566	569	577	585	591	595
557	554	556	559	563	568	574	586	593	600	554	554	556	558	561	564	570	582	588	592
549	545	547	551	555	560	566	579	588	596	543	542	545	549	553	558	564	577	584	589
540	542	546	551	556	561	565	574	584	592	522	528	535	542	548	554	559	570	579	585
0	0	0	0	0	0	0	0	572	580	588	0	0	0	0	0	0	565	574	581
0	0	0	0	0	0	0	0	571	578	585	0	0	0	0	0	0	561	571	579

temperatura [°C]



Rys.VI.6. Krzywe nagrzewania wybranych punktów krystalizatora
Fig.VI.6. The heating curves for selected points in crystallizer domain

Przykład VI.3. (Rynna spustowa pieca karbidowego)



Rys.VI.7. Przekrój poprzeczny rynny spustowej
Fig.VI.7. Cross section of the tapping spout

Rozpatrzmy problem przepływu ciepła w przekroju poprzecznym rynny spustowej pieca karbidowego, którego kształt przedstawia rys.VI.7. Rynna jest oczywiście objektem przestrzennym, ale biorąc pod uwagę stosunek długości rynny do jej wymiarów przekroju poprzecznego, możemy traktować zadanie jako płaskie. Ze względu na symetrię przekroju w obliczeniach uwzględnimy jedynie jego prawą połowę - rys.VI.8, która jest złożeniem dwóch pasm - ω_A i ω_B oraz dopełnień dwóch okręgów - ω_C i ω_D

$$\omega = \omega_A \wedge \omega_B \wedge \bar{\omega}_C \wedge \bar{\omega}_D, \quad (\text{VI.33})$$

gdzie

$$\begin{aligned} \omega_A &= (b-x)x/b \\ \omega_B &= (b-y)y/b \\ \omega_C &= (R_1^2 - x^2 - y^2)/(2R_1) \\ \omega_D &= (R_2^2 - (x-x_s)^2 - (y-y_s)^2)/(2R_2) \end{aligned} \quad (\text{VI.34})$$

Na poszczególnych częściach brzegu $\partial\Omega_i$ ($i=1, 2, \dots, 6$) zadajemy następujące warunki (patrz rys.VI.8.):

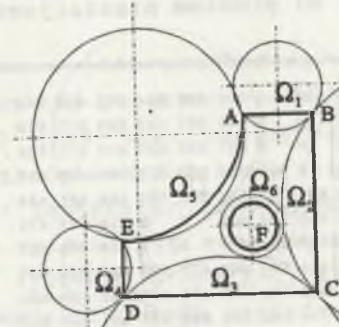
a) dla brzegów $\partial\Omega_1 = \Gamma_{AB}$, $\partial\Omega_2 = \Gamma_{BC}$ oraz $\partial\Omega_3 = \Gamma_{CD}$ - warunek III rodzaju, przy czym $\alpha = 10$ [W/m² K] - ciepło oddawane do otoczenia;

b) dla brzegu $\partial\Omega_5 = \Gamma_{EA}$ - strumień ciepła $q = 65000$ [W/m²] - powierzchnia kontaktu ciekłego karbidu z rynną;

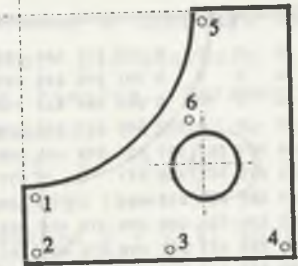
c) dla brzegu $\partial\Omega_4 = \Gamma_{BD}$ - warunek symetrii;

d) dla brzegu $\partial\Omega_6 = \Gamma_F$ - warunek III rodzaju ze współczynnikiem wnikania $\alpha = 100$ [W/m²] i temperaturą wody chłodzącej $T^\infty = 30$ [°C].

Ponadto przyjęto współczynnik przewodzenia dla materiału rynny $\lambda = 372$ [W/mK].

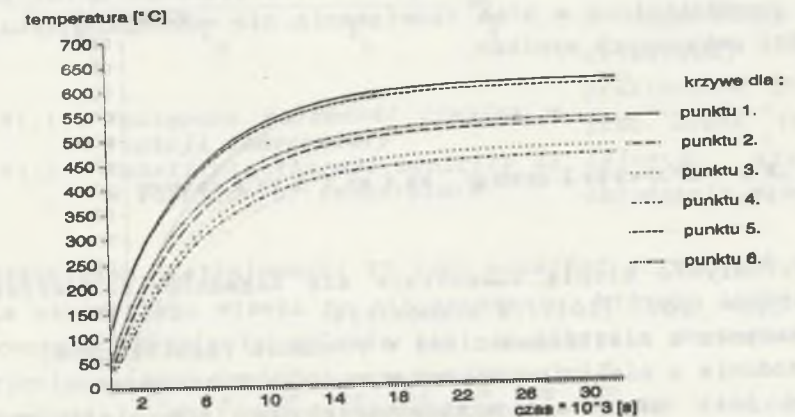


Rys.VI.8. Obszar Ω oraz części brzegu $\partial\Omega_i$
Fig.VI.8. Domain Ω and the parts of its boundary $\partial\Omega_i$



Rys.VI.9. Położenie wybranych punktów
Fig.VI.9. Position of the selected points

Wyniki obliczeń przedstawimy w postaci krzywych nagrzewania - rys. VI.10. - w wybranych punktach przekroju poprzecznego rynny (patrz rys.VI.9.), a także porównamy rozkłady temperatur uzyskane jako rozwiązanie zadania traktowanego jako stacjonarne i niestacjonarne (po ustabilizowaniu) - tabela VI.7.



Rys.VI.10. Krzywe nagrzewania wybranych punktów rynny spustowej
Fig.VI.10. The heating curves for selected points in tapping spout

Tabela VI.7

Krzywe nagrzewania wybranych punktów rynny spustowej

a) problem stacjonarny

b) problem niestacjonarny

0	0	0	0	604	571	546	529	519	511	0	0	0	0	602	589	544	528	518	510	
0	0	0	0	601	568	543	527	518	512	0	0	0	0	599	567	542	526	517	510	
0	0	0	0	589	557	533	518	513	507	0	0	0	0	587	555	531	517	511	506	
0	0	0	0	597	565	535	514	503	497	0	0	0	0	596	564	533	513	501	499	496
614	607	592	567	534	509	496	486	486	485	613	605	591	566	532	508	495	485	485	484	
583	576	562	538	511	0	0	477	473	473	581	574	560	536	509	0	0	475	472	472	
557	552	539	518	498	0	0	468	464	466	556	550	538	517	497	0	0	466	463	464	
541	536	525	508	490	478	469	458	461	462	539	535	524	507	488	477	467	457	459	461	
531	528	521	507	490	476	465	461	460	462	530	526	519	505	489	474	464	459	459	461	
523	522	515	504	489	476	467	463	462	460	522	521	514	502	488	475	465	461	461	458	

Jak łatwo zauważyć, i w tym przypadku różnice między rozwiązaniami są niewielkie. Wykresy uzyskano dla kroku czasowego wynoszącego $\Delta t = 200$ [s]. Zmniejszając Δt nie uzyskuje się dokładniejszych wyników, biorąc za podstawę rozwiązanie metodą różnic skończonych.

Przykład dotyczący przepływu ciepła w układzie rynna - karbid - otoczenie prezentowany był w kilku pracach, m.in. [29], [1] i przedstawione w nich rozwiązania nie odbiegają istotnie od wyżej pokazanych wyników.

VI.3. Problemy nieliniowe

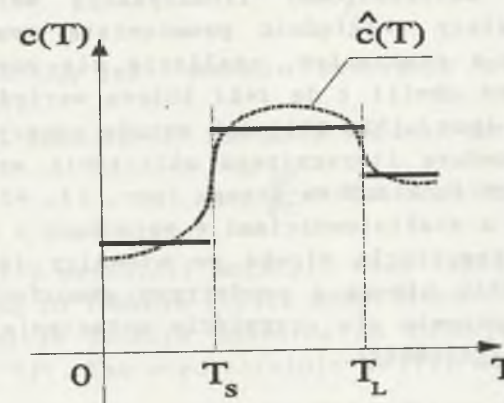
W przepływie ciepła rozpatruje się zagadnienia nieliniowe dwóch typów (por. [16]), a mianowicie:

- 1) zadanie z nieliniowościami w równaniu różniczkowym,
- 2) zadanie z nieliniowościami w warunkach brzegowych.

Możliwe jest oczywiście występowanie obu tych nieliniowości jednocześnie. Przykładem problemu z nieliniowościami I typu może być niestacjonarny przepływ ciepła w objętości wlewka ciąglego wytwarzanego na urządzeniu pionowym. Pole temperatury w krzepnącym metalu opisuje równanie typu

$$c(T) \rho(T) \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x_3} \right) = \text{div}[\lambda(T) \text{grad} T], \quad (\text{VI.35})$$

gdzie v jest prędkością wyciągania wlewka w kierunku osi x_3 (przekrój poprzeczny wlewka znajduje się w płaszczyźnie x_1, x_2); $c(T)$ jest tzw. zastępczą pojemnością cieplną. Parametr ten uwzględnia wydzielanie się ciepła przemiany fazowej w interwale temperatur krzepnięcia (por. [41, 33, 4, 53, 59]) i znacznie zmienia się wraz ze zmianą temperatury (rys. VI.11. dotyczy typowego stopu FeC, dla którego funkcja $c = c(T)$ została w odpowiedni sposób wygładzona - por. [38], [58]).



Rys.VI.11. Zastępcza pojemność cieplna w funkcji temperatury

Fig.VI.11. Substitute thermal capacity as a function of temperature

Warunki brzegowe na powierzchni wlewka ciąglego chłodzonego strumieniem wody doprowadzanej systemem dysz są warunkami III rodzaju, przy czym zarówno współczynnik wnikania α , jak i temperaturę wody chłodzącej można praktycznie przyjąć jako stałe (w kolejnych strefach chłodzenia wlewka).

Przykładem nieliniowości II typu może być stygnięcie całkowicie zakrzepłego wlewka po stripierowaniu, którego temperatura w procesie stygnięcia zmienia się w zakresie dopuszczającym przyjęcie stałych wartości parametrów c , ρ , λ .

Wymiana ciepła pomiędzy powierzchnią wlewka a otoczeniem zachodzi poprzez konwekcję naturalną oraz promieniowanie. Jeżeli nawet przyjąć, że konwekcyjny współczynnik wnikania α_K zdefiniowany wartościami liczb kryterialnych Grashofa i Prandtla nie zmienia się w sposób istotny, to współczynnik radiacyjny α_R ($\alpha = \alpha_K + \alpha_R$) określony zależnością (por. [56])

$$\alpha_R = 10^{-4} c_c \varepsilon_{12} (T + T^\infty) \left[\left(\frac{T}{100} \right)^2 + \left(\frac{T^\infty}{100} \right)^2 \right] \quad (\text{VI.36})$$

gdzie oznaczono przez:

c_c - stałą promieniowania ciała doskonale czarnego wynoszącą

$$c_c = 5.67 \text{ [W/m}^2\text{K}^4\text{]},$$

ε_{12} - zastępczą emisyjność,

T^∞ - temperaturę otoczenia,

T - chwilową temperaturę powierzchni,

zmienia się bardzo silnie z temperaturą i fakt ten należy uwzględnić przy rozwiązywaniu odpowiedniego zadania początkowo-brzegowego. W praktyce obliczeniowej linearyzację warunku brzegowego, w którym należy uwzględnić promienistą wymianę ciepła pomiędzy obiektem a otoczeniem, realizuje się poprzez przyjęcie dla przejścia od chwili t do $t + \Delta t$ zbioru wartości α obliczonych dla chwili t (por. [35, 27]) lub metodę numeryczną uzupełnia się pewną procedurą iteracyjnego obliczania współczynników α_R w wyróżnionych punktach na brzegu (por. [3, 40]).

Przykładem zagadnienia z nieliniowościami w warunkach i równaniu może być proces krzepnięcia wlewka we wlewnicy (chłodzenie w warunkach kontaktu wlewka z powietrzem atmosferycznym). W takim przypadku pojawia się oczywiście połączenie obu omówionych poprzednio nieliniowości.

VI.3.1. Metody linearyzacji równania przewodnictwa

W przypadku zadań stacjonarnych równanie przewodnictwa sprowadza się do postaci (por. rozdz. III)

$$\text{div}(\lambda \text{ grad} T) + q_V = 0 \quad (\text{VI.37})$$

Wprowadzając temperaturę Kirchhoffa (por. [2, 5])

$$U = \int_{T_{od}}^T \lambda(\mu) d\mu \quad (\text{VI.38})$$

równanie (VI.37) staje się liniowe, a mianowicie

$$\text{div grad} U + q_V = 0 \quad (\text{VI.39})$$

Dla równania parabolicznego proces linearyzacji jest bardziej złożony (por. [38], [26]). Istnieje wprawdzie możliwość wpro-

dzenia do równania przewodnictwa temperatury Kirchhoffa, ale nie prowadzi to do jego pełnej linearyzacji. Algorytm postępowania jest następujący:

1) wykorzystując (VI.38) równanie przewodnictwa zapisujemy w postaci

$$c(T) \rho(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div grad} U + q_V \quad (\text{VI.40})$$

2) do dalszych rozważań wprowadzamy entalpię materiału odniesioną do jednostki objętości

$$H(T) = \int_{T_{od}}^T c(\mu) \rho(\mu) d\mu \quad (\text{VI.41})$$

gdzie T_{od} jest umownie przyjętym poziomem odniesienia, np. $T_{od} = 0$,

3) lewa strona równania (VI.40) sprowadza się do postaci

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \text{div grad} U + q_V \quad (\text{VI.42})$$

4) z definicji entalpii oraz temperatury Kirchhoffa wynika, że są to funkcje ściśle monotoniczne (rosnące). Oznacza to, że istnieje funkcja odwrotna do funkcji $U = f(T)$, a mianowicie $T = f^{-1}(U)$. Tak więc entalpię $H = F(T)$ możemy przedstawić jako

$$H = F(f^{-1}(U)) = \varphi(U) \quad (\text{VI.43})$$

Ponieważ

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dU} \frac{\partial U}{\partial t} = \varphi'(U) \frac{\partial U}{\partial t} \quad (\text{VI.44})$$

więc równanie (VI.42) sprowadza się do postaci

$$\varphi'(U) \frac{\partial U}{\partial t} = \text{div grad} U + q_V \quad (\text{VI.45})$$

Jest to jednak równanie nieliniowe (chyba że pochodna $\varphi'(U) = \text{const}$).

W niektórych monografiach (np. [5]) zaleca się stosowanie tego równania zamiast klasycznego równania przewodnictwa ze względu na to, że jest ono "bliższe" równaniu liniowemu. Należy oczywiście do tej samej konwencji sprowadzić warunki brzegowe i początkowe (patrz rozdz. V.1.).

Rzeczywistą linearyzację równań parabolicznych spotykanych w zagadnieniach transportu ciepła uzyskuje się innymi sposobami, których wykorzystanie jest możliwe dopiero na etapie budowy algorytmu numerycznego zagadnienia początkowo - brzegowego (dotyczy to algorytmów, w których realizuje się dyskretyzację czasu). Do najbardziej efektywnych metod tego typu linearyzacji należą:

1) metoda przemiennej fazy (Alternating Phase Truncation Method - APTM) - por. [43, 44, 23, 12, 36, 54];

2) metoda korygowania pola temperatury w wyróżnionych punktach rozważanego obszaru siatkowego - por. [57, 11, 22, 45].

VI.3.2. Metoda przemiennej fazy

Algorytm przemiennej fazy został przedstawiony przez J. Rogersa, M. Cimenta i A. Bergera w pracach [43], [44]. W swojej pierwotnej wersji metoda dotyczyła klasycznego problemu Stefana, np. namarzania gruntu. Dalsze ulepszenia metody rozszerzyły zakres jej zastosowań na zadania z N_f - warunkami Stefana oraz na zadania nieliniowe dotyczące zarówno klasycznych zadań przewodnictwa cieplnego, jak i zadań z ruchomymi brzegami, w których rozpatruje się tzw. strefę dwufazową.

Połączenie algorytmu przemiennej fazy z dowolną metodą numeryczną, w której wprowadza się dyskretyzację czasu, wymaga przebudowy wyjściowego opisu matematycznego na konwencję entalpową. Wprowadza się rozszerzoną definicję entalpii odniesionej do jednostki objętości, a mianowicie

$$H(T) = \int_{T_{ref}}^T c(\mu) \rho(\mu) d\mu + \eta(T) \Delta H, \quad (VI.46)$$

przy czym

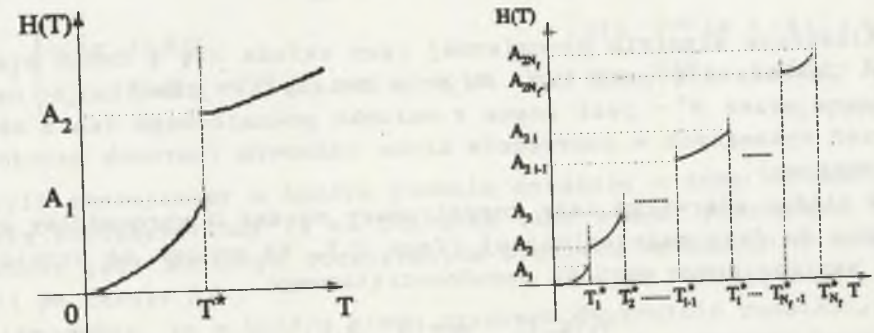
$$\eta(T) = \begin{cases} 0 & \text{dla } T < T^* \\ 1 & \text{dla } T \geq T^* \end{cases} \quad (VI.47)$$

a T^* jest temperaturą przemiany fazowej, w której następuje skokowa zmiana entalpii wynikająca np. z przemiany fazowej, ΔH - jest ciepłem tej przemiany odniesionym do jednostki objętości. Definicję (VI.46) można rozszerzyć w sposób następujący

$$H(T) = \int_{T_{ref}}^T c(\mu) \rho(\mu) d\mu + \sum_{i=1}^{N_f} \eta_i(T) \Delta H_i, \quad (VI.48)$$

gdzie (por rys. VI.12.)

$$\eta(T) = \begin{cases} 0 & \text{dla } T < T^* \\ 1 & \text{dla } T \geq T^* \end{cases} \quad (VI.49)$$



Rys. VI.12. Zależność entalpia - temperatura dla zadania z:
a) dwiema fazami; b) N_f - fazami
Fig. VI.12. The function enthalpy - temperature for the problem with: a) two phases; b) N_f - phases

Równanie przewodnictwa zapisane w konwencji entalpowej jest następujące

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \text{div}[a \text{grad} H] + q_v, \quad (VI.50)$$

gdzie a jest współczynnikiem wyrównywania temperatury (współczynnik dyfuzji cieplnej)

$$a(H) = \frac{\lambda(H)}{c(H) \rho(H)} \quad (VI.51)$$

W przypadku skokowej zmiany entalpii, związanej jak wspomniano poprzednio ze zmianą fazy, warunek Stefana ma postać

$$\begin{cases} -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial v} = -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial v} + \Delta H v, \\ T_2 = T_1 = T^* \end{cases} \quad (VI.52)$$

przy czym wskaźniki 2 i 1 wyróżniają parametry i funkcje odpowiadające różnym sąsiadującym fazom (np. 2 - odpowiada cieczi - faza gorąca; 1 - fazie stałej - faza zimna), a v oznacza tutaj prędkość przyrostu warstwy zakrzepłej w kierunku

normalnym do powierzchni rozdziału faz. Warunek ten w konwencji entalpowej sprowadza się do warunku

$$\begin{cases} -a_2 \frac{\partial H_2}{\partial v} = -a_1 \frac{\partial H_1}{\partial v} + \Delta H v, \\ A_2 = A_1 + \Delta H \end{cases} \quad (\text{VI.53})$$

gdzie (patrz rys.VI.12a.)

$$A_2 = \lim_{T \rightarrow T_1^+} H(T), \quad A_1 = \lim_{T \rightarrow T_1^-} H(T) \quad (\text{VI.54})$$

Klasyczny algorytm przemiennej fazy składa się z dwóch etapów. Zakłada się przy tym, że pole entalpii w chwili t - oznaczane przez H^t - jest znane z warunku początkowego lub z obliczeń wykonanych w poprzednim kroku czasowym (warunek pseudopoczątkowy).

W etapie pierwszym cały rozpatrywany obszar Ω sprowadzamy umownie do fazy najcieplejszej (faza 2.), co polega na przyjęciu następującego warunku pseudopoczątkowego

$$V_2(\mathbf{x}, t) = \max\{H^t, A_2\}, \quad (\text{VI.55})$$

co oznacza, że punktom, w których entalpia jest niższa niż A_2 przyporządkowujemy wartość graniczną A_2 , a w pozostałych zachowujemy entalpię niezmienną, czyli

$$V_2(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} H^t & \text{dla } H^t > A_2 \\ A_2 & \text{dla } H^t \leq A_2 \end{cases} \quad (\text{VI.56})$$

Następnie rozwiązujemy przekształcone równanie przewodnictwa ciepła (VI.50) znajdując "pomocnicze" pole entalpii $V_2(\mathbf{x}, t+\Delta t)$ dla następnego kroku czasowego (problem uwzględnienia warunków brzegowych omówiono na końcu tego paragrafu).

Na zakończenie etapu I odejmujemy od rozwiązania $V_2(\mathbf{x}, t+\Delta t)$ wcześniej dodaną entalpię, definiując w ten sposób nową funkcję $V_2^{(1)}(\mathbf{x}, t+\Delta t)$

$$V_2^{(1)}(\mathbf{x}, t+\Delta t) = \begin{cases} V_2(\mathbf{x}, t+\Delta t) & \text{dla } H^t > A_2 \\ V_2(\mathbf{x}, t+\Delta t) + H^t - V_2(\mathbf{x}, t) & \text{dla } H^t \leq A_2 \end{cases} \quad (\text{VI.57})$$

Etap drugi: rozpatrywany obszar Ω traktujemy jako jednorodny, opisany parametrami odpowiadającymi fazie chłodniejszej (faza 1.) wprowadzając odpowiednią poprawkę funkcji $V_2^{(1)}(\mathbf{x}, t+\Delta t)$, polegającą na przyporządkowaniu punktom o entalpii powyżej wartości granicznej A_1 - nowej wartości, równej granicznej i

pozostawiając niezmienną dla pozostałych punktów, tzn.

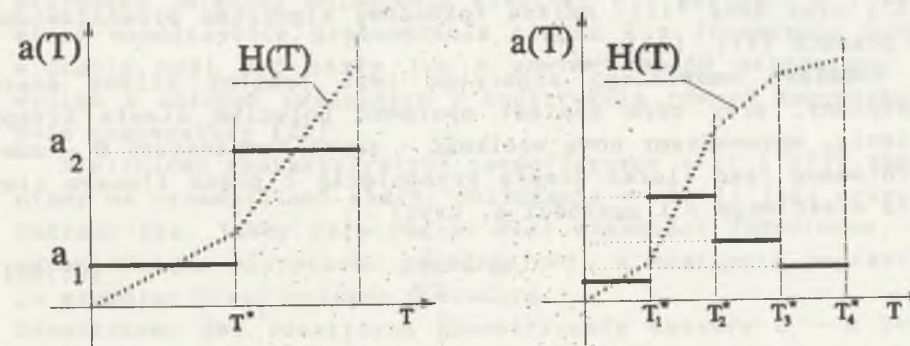
$$V_1(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} A_1 & \text{dla } V_2^{(1)}(\mathbf{x}, t+\Delta t) > A_1 \\ V_2^{(1)}(\mathbf{x}, t+\Delta t) & \text{dla } V_2^{(1)}(\mathbf{x}, t+\Delta t) \leq A_1 \end{cases} \quad (\text{VI.58})$$

Funkcja V_1 staje się warunkiem pseudopoczątkowym dla równania (VI.50.), którego rozwiązanie $V_1(\mathbf{x}, t+\Delta t)$ wymaga również poprawienia, podobnego jak w etapie I :

$$V^{(2)}(\mathbf{x}, t+\Delta t) = H^{t+\Delta t} = \begin{cases} V_1(\mathbf{x}, t+\Delta t) & \text{dla } V^{(1)}(\mathbf{x}, t+\Delta t) \leq A_1 \\ V_1(\mathbf{x}, t+\Delta t) + V_2^{(1)}(\mathbf{x}, t+\Delta t) - V_1(\mathbf{x}, t) & \text{dla } V^{(1)}(\mathbf{x}, t+\Delta t) > A_1 \end{cases} \quad (\text{VI.59})$$

czyli zmniejszamy w każdym punkcie entalpię o taką wartość, o jaką powiększyliśmy ją na początku tego etapu. Poprawiona entalpia jest końcowym rozwiązaniem problemu wyznaczania entalpii po czasie Δt .

Zauważmy, że w każdym kroku czasowym dwukrotnie rozwiązujemy równanie przewodnictwa ciepła. W związku z tym warunki brzegowe II i III rodzaju muszą być odpowiednio uwzględnione, by nie "dublować" ich, powodując podwojenie dostarczanego (lub pobieranego), w analizowanym procesie, strumienia ciepła. Rzeczywisty, wynikający ze sformułowania problemu, warunek brzegowy uwzględniamy jedynie w tej fazie procesu, w której jest uzasadniony warunkami fizycznymi. Przykładowo, analizując proces krzepnięcia wlewka w chwili początkowej ($t=0$), gdy metal



Rys.VI.13. Problem: a) dwufazowy b) wielofazowy
Fig.VI.13. a) Two-phase problem b) Multi-phase problem

znajduje się w fazie ciekłej, niejednorodne warunki brzegowe stawiamy jedynie w pierwszym etapie, a w drugim przyjmujemy, że cały obszar jest izolowany termicznie od otoczenia, czyli strumień ciepła na całym brzegu jest równy zeru (nie oznacza to oczywiście, że wewnątrz nie występuje przepływ ciepła). Najczęściej w następnej chwili czasu "izolacja" ma miejsce w pierwszym etapie, a wymiana ciepła w drugim.

Jeżeli rozpatrujemy zadanie z dziedziny przewodzenia ciepła bez przemian fazowych, to przedstawiony wyżej algorytm pozostaje niezmienny, z tym że $\Delta H = 0$ ($A_1 = A_2$) i warunek Stefana staje się typowym warunkiem IV rodzaju (ciągłości strumienia na granicy dwóch obszarów o różnych parametrach fizycznych). Temperatura graniczna T^* jest pewną opcjonalnie obraną wielkością rozgraniczającą podobszary o dyfuzyjnościach a_1 i a_2 (por. rys. VI.13a.).

W niektórych przypadkach może pojawić się potrzeba zastąpienia rzeczywistej funkcji $a(H)$ funkcją kawałkami stałą o większej liczbie "schodków" i wówczas wykorzystuje się metodę przemiennej fazy w wariacie uogólnionym. Oznacza to konieczność przeprowadzenia obliczeń w tylu etapach (analogicznych do opisanych wyżej), ile umownych faz występuje w rozpatrywanym obszarze (por. rys. VI.13b.).

VI.3.3. Metoda zapasu temperatury

Metoda zapasu temperatury (*temperature recovere method*) pojawiła się pod koniec lat 50 i wykorzystano ją do modelowania numerycznego problemu Stefana. Uogólnienie metody (opisane w następnym podrozdziale) przedstawili J. Szargut i B. Mochnacki [57] oraz Hong [11]. Dalszą rozbudowę algorytmu przedstawiono w pracach [41], [63].

Podstawą omawianego algorytmu jest lokalny bilans energetyczny, przy czym zamiast operować pojęciem ciepła krzepnięcia, wprowadzamy nową wielkość - zapas temperatury Θ - zdefiniowaną jako iloraz ciepła krzepnięcia L przez iloczyn ciepła właściwego c i gęstości ρ , czyli

$$\Theta = \frac{L}{c\rho} \quad (\text{VI.60})$$

Algorytm składa się z następujących etapów:

etap I - przyporządkowania w chwili początkowej każdemu punktowi analizowanego obszaru temperatury T_0 (wyższej od temperatury przemiany fazowej T_{kr}) i zapasu temperatury Θ .

etap II - wyznaczenia temperatury $T^{t+\Delta t}$ w następnym kroku czasowym.

etap III - modyfikacji uzyskanego pola temperatury wg następujących zasad: jeżeli w danym punkcie temperatura jest wyższa od temperatury przemiany T_{kr} , to nie ulega ona zmianie, jak również nie zmieniony pozostaje zapas temperatury. Jeżeli $T^t = T_{kr}$, $T^{t+\Delta t} - T_{kr} = \Delta\Theta \leq 0$ i $\Theta > 0$ (ostatnia nierówność oznacza, że nie został jeszcze wykorzystany zapas temperatury), to wówczas przyjmujemy, że $T^{t+\Delta t} = T_{kr}$, a zapas Θ pomniejszamy o wielkość $\Delta\Theta$. Gdy $\Theta = 0$, to nie korygujemy temperatury.

Etapy II i III powtarzamy aż do momentu, gdy cały analizowany obszar osiągnie temperaturę niższą od temperatury przemiany fazowej, czyli zostanie zakończony proces krzepnięcia.

VI.3.4. Metoda poprawiania pola temperatury

Metoda poprawiania temperatury dla zadań nieliniowych w ujęciu, które zostanie przedstawione w tym podrozdziale, wywodzi się z metody zapasu temperatury. Sprowadza się ona do korygowania pola temperatury na kolejnych poziomach czasu, tzn. poprawiania warunków pseudopoczątkowych. Odpowiednie równanie korygujące pole temperatury w wyróżnionych punktach obszaru można wyprowadzić na podstawie bilansów energii [56], [25] lub metodami analizy matematycznej. Metoda ta może być stosowana w przypadku zmiennej pojemności cieplnej c i gęstości ρ , natomiast współczynnik przewodzenia ciepła λ z formalnego punktu widzenia musi być stały lub w pewien sposób uśredniony, co wynika z założeń związanych z konstrukcją równań korygujących pole temperatury [25].

Nieliniowe charakterystyki termofizyczne $c(T)$ i $\rho(T)$ zamieniamy na przedziałami stałe. Obliczenia w chwili $t+\Delta t$ przeprowadzamy tak, jakby cały obszar miał własności jednorodne, np. odpowiadające pierwszemu przedziałowi, a następnie poprawiamy je stosując niżej opisaną procedurę.

Rozpatrzmy dwa identyczne geometrycznie obszary Ω_1 - o parametrach termofizycznych c_1 , ρ_1 , λ i Ω_2 - c_2 , ρ_2 , λ - ograniczone powierzchniami $\partial\Omega_1$ i $\partial\Omega_2$, na których zadano identyczne warunki brzegowe.

Pola temperatury w obydwu obszarach są rozwiązaniami następujących dwóch niezależnych równań

$$c_1 \rho_1 \frac{\partial T_1(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \lambda \operatorname{div}[\operatorname{grad} T_1(\mathbf{x}, t)] \quad , \quad \mathbf{x} \in \Omega_1 \quad , \quad (\text{VI.61})$$

$$c_2 \rho_2 \frac{\partial T_2(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \lambda \operatorname{div}[\operatorname{grad} T_2(\mathbf{x}, t)] \quad , \quad \mathbf{x} \in \Omega_2 \quad .$$

Wprowadzając nową zmienną czasową $\tau = (c_1 \rho_1 / c_2 \rho_2) t$, pochodną funkcji T_2 określamy następująco

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial T_2}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{c_1 \rho_1}{c_2 \rho_2} \frac{\partial T_2}{\partial \tau} \quad , \quad (\text{VI.62})$$

a równanie (VI.61)₂ przyjmuje z matematycznego punktu widzenia identyczną postać jak równanie (VI.61)₁ (oczywiście inaczej "zdefiniowany" jest czas dla obydwu równań). Wykorzystując tę własność, temperaturę w chwili $t + \Delta t$ dla punktów o własnościach 2. określamy poprzez temperaturę wyznaczoną dla ośrodka jednorodnego o własnościach 1., stosując następującą zależność (por. [38])

$$T_2^{t+\Delta t} = T_2^t - \frac{c_1 \rho_1}{c_2 \rho_2} (T_1^{t+\Delta t} - T_1^t) \quad . \quad (\text{VI.63})$$

Procedurę tę można uogólnić na przypadek, gdy

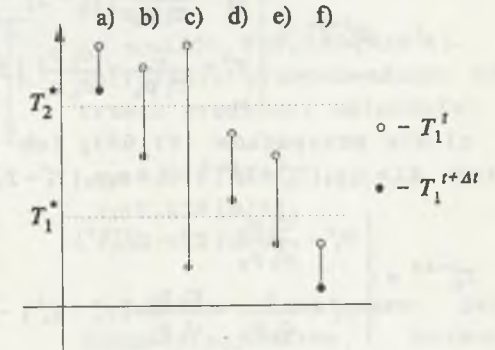
$$c \rho = \begin{cases} c_1 \rho_1 & T < T_1^* \\ c_2 \rho_2 & T_1^* < T < T_2^* \\ \dots & \dots \\ c_n \rho_n & T > T_n^* \end{cases} \quad (\text{VI.64})$$

Dla przejrzystości dalszych rozważań założmy, że w ostatnim wzorze $n=3$. Przypadek taki występuje w obliczeniach numerycznych krzepnięcia stopów. Temperatury T_1^* i T_2^* są odpowiednio temperaturami solidusu i likwidusu; w interwale temperatur krzepnięcia wydziela się ciepło utajone L ; podobszar odpowiadający przedziałowi temperatur (T_1^*, T_2^*) nazywa się strefą dwufazową (mushy zone). Obliczenia składają się z następujących etapów:

Przypadek :

etap I - rozwiązanie równania przewodnictwa ciepła w rozpatrywanym obszarze traktowanym jako jednorodny o stałych c_3, ρ_3 ;

etap II - wyznaczenie temperatury $T_1^{t+\Delta t}$ w wybranych punktach (interesujących nas np. ze względu na całkowanie metodą Gaussa odpowiedniego funkcjonau - VI.21) obszaru i określenie, jakiemu niższemu przypadkowi ona odpowiada (patrz rys. VI.14.)



Rys.VI.14. Przejścia przez izotermy graniczne
Fig.VI.14. Transitions by the limiting isotherms

$$\begin{aligned} \text{a)} & T_1^t > T_2^* \quad \text{i} \quad T_1^{t+\Delta t} > T_2^* \\ \text{b)} & T_1^t > T_2^* \quad \text{i} \quad T_2^* > T_1^{t+\Delta t} > T_1^* \\ \text{c)} & T_1^t > T_2^* \quad \text{i} \quad T_1^* > T_1^{t+\Delta t} \\ \text{d)} & T_2^* > T_1^t > T_1^* \quad \text{i} \quad T_2^* > T_1^{t+\Delta t} > T_1^* \\ \text{e)} & T_2^* > T_1^t > T_1^* \quad \text{i} \quad T_1^* > T_1^{t+\Delta t} \\ \text{f)} & T_2^* > T_1^t \quad \text{i} \quad T_1^* > T_1^{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (\text{VI.65})$$

etap III - korygowanie temperatury korzystając z następujących zależności odpowiadających poszczególnym przypadkom z (VI.65)

a) dla punktów spełniających warunek (VI.65)_a temperatura pozostaje niezmienną, czyli

$$T_2^{t+\Delta t} = T_1^{t+\Delta t} \quad ; \quad (\text{VI.66})$$

b) jeżeli spełniony jest warunek (VI.65)_b lub (VI.65)_c, to zależność określająca ostateczną temperaturę po czasie $t + \Delta t$ zależy od znaku wyrażenia $\Delta L = c_3 \rho_3 (T_2^* - T_1^{t+\Delta t}) - L$, gdzie przez L

oznaczono $L = c_2 \rho_2 (T_2^* - T_1^*)$

$$T_2^{t+\Delta t} = \begin{cases} T_2^* - \frac{c_3 \rho_3}{c_2 \rho_2} (T_2^* - T_1^{t+\Delta t}) & \text{dla } \Delta L < 0 \\ T_1^* + \frac{L}{c_1 \rho_1} - \frac{c_3 \rho_3}{c_1 \rho_1} (T_2^* - T_1^{t+\Delta t}) & \text{dla } \Delta L > 0 \end{cases} \quad (\text{VI.67})$$

c) dla przypadków (VI.65)_d lub (VI.65)_e wyrażenie ΔL ma postać $\Delta L = c_3 \rho_3 (T_2^* - T_1^{t+\Delta t}) - L + c_2 \rho_2 (T_2^* - T_1^t)$ oraz

$$T_2^{t+\Delta t} = \begin{cases} T_1^t - \frac{c_3 \rho_3}{c_2 \rho_2} (T_1^t - T_1^{t+\Delta t}) & \text{dla } \Delta L < 0 \\ T_1^* + \frac{L}{c_1 \rho_1} - \frac{c_2 \rho_2}{c_1 \rho_1} (T_2^* - T_1^t) - \frac{c_3 \rho_3}{c_1 \rho_1} (T_1^t - T_1^{t+\Delta t}) & \text{dla } \Delta L > 0 \end{cases} \quad (\text{VI.68})$$

d) dla ostatniego przejścia (VI.65)_f mamy

$$T_2^{t+\Delta t} = T_1^t - \frac{c_3 \rho_3}{c_1 \rho_1} (T_1^t - T_1^{t+\Delta t}) \quad (\text{VI.69})$$

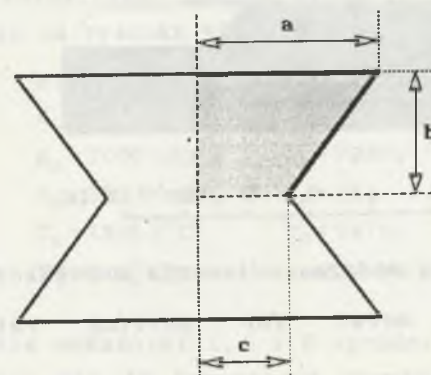
Przykłady testujące opisane powyżej algorytmy w połączeniu z metodą R-funkcji zostały omówione w pracach Autora [13, 14, 28]. W pierwszej wyznaczono rozkłady temperatury w obszarze wężła cieplnego typu L. Porównano rozwiązanie otrzymane za pomocą MRF i metody różnic skończonych dla różnych kroków czasowych i różnych stopni wielomianu.

W [13, 14] wyznaczono kształt frontu krzepnięcia podczas odlewania ciągłego prętów o przekrojach kwadratowym i w kształcie zwanym "psia kość". Przedstawiono wyniki dla różnych prędkości odlewania. Poniżej opiszemy bardziej szczegółowo wyniki dwóch ze wspomnianych prac, tj. [14] i [28].

Przykład VI.4. (Front krzepnięcia w przekroju "psia kość")

W przykładzie tym wykorzystano metodę przemiennej fazy. Rozważono wlewki ciągły o nietypowym kształcie pokazanym na rys. VI.15. Przyjęto, że w instalacji COS (ciągłego odlewania stali) można wyróżnić cztery strefy chłodzenia (por. [32, 23, 37]), a mianowicie:

- krystalizator o długości $l_k = 0.8$ [m];
- I sektor strefy chłodzenia wtórnego - $l_A = 3$ [m];
- II sektor strefy wtórnego chłodzenia - $l_B = 5$ [m];
- strefa chłodzenia końcowego.



Rys. VI.15. Przekrój poprzeczny wlewka ciągłego

Fig. VI.15. Cross section of continuous casting

Przyjęto odpowiednio następujące współczynniki wymiany ciepła w kolejnych strefach

$$\alpha = 1500, 950, 550 \text{ [W/m}^2\text{K]}.$$

Obliczenia przeprowadzono dla trzech prędkości odlewania:

$$v_1 = 0.015 \text{ [m/s]},$$

$$v_2 = 0.020 \text{ [m/s]},$$

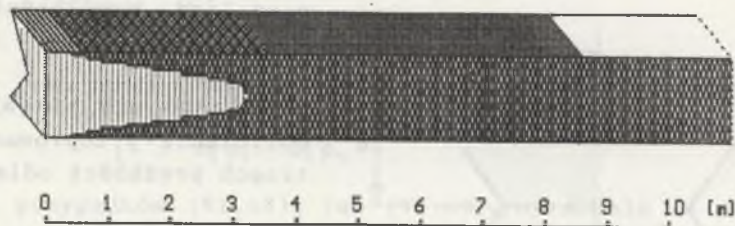
$$v_3 = 0.025 \text{ [m/s]}.$$

Zadanie traktowano jako pseudostacjonarne, opisane równaniem różniczkowym typu (por. (VI.35))

$$v \frac{\partial H}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(a(H) \frac{\partial H}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(a(H) \frac{\partial H}{\partial x_2} \right), \quad (\text{VI.70})$$

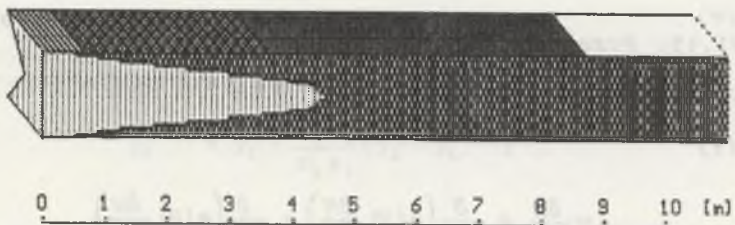
z warunkami brzegowymi trzeciego rodzaju na powierzchniach bocznych oraz warunkiem I rodzaju dla $x_3 = 0$ (temperatura zalewania).

Powyższy opis matematyczny wynika z faktu, że po okresie rozruchu urządzeń w obszarze wlewka ciągłego generuje się pole pseudoustalone (temperatura jest tylko funkcją współrzędnych przestrzennych), z kolei składowa przewodzenia ciepła w kierunku ruchu wlewka może być pominięta, stąd po prawej stronie równania energii operator różniczkowy dotyczy tylko zmiennych x_1 i x_2 . Podsumowując, równanie jest nieliniowym równaniem parabolicznym, w którym zmienna x_3 przejmując rolę czasu. Do rozwiązania zadania wykorzystano algorytm opisany w rozdziale VI.1. uzupełniony przez metodę przemiennej fazy. Pochodną $\partial H / \partial x_3$ przybliżono ilorazem różnicowym. Na rysunkach VI.16-18 pokazano rozwiązania powyższego problemu brzegowego, a w szczególności zasięg ciekłego jądra dla różnych prędkości odlewania.



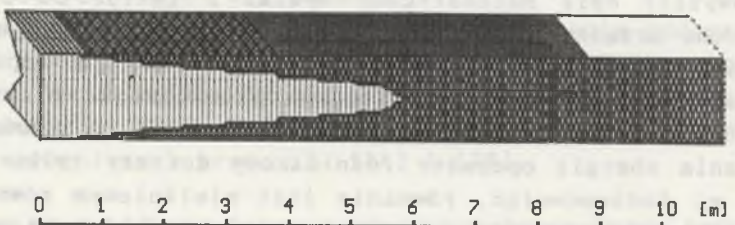
Rys.VI.16. Zasięg ciekłego metalu podczas odlewania z prędkością $v = 0.015$ [m/s]

Fig.VI.16. Range of molten metal for pulling rate $v = 0.015$ [m/s]



Rys.VI.17. Zasięg ciekłego metalu podczas odlewania z prędkością $v = 0.02$ [m/s]

Fig.VI.17. Range of molten metal for pulling rate $v = 0.02$ [m/s]



Rys.VI.18. Zasięg ciekłego metalu podczas odlewania z prędkością $v = 0.025$ [m/s]

Fig.VI.18. Range of molten metal for pulling rate $v = 0.025$ [m/s]

Uzyskane wyniki wykazują dużą zgodność z otrzymanymi w pracy [58].

Następny przykład ilustruje i testuje połączenie dwóch metod: - metody poprawiania temperatury i MRF. Rozwiązanie porównano z wynikami uzyskanymi metodą różnic skończonych.

Przykład VI.4. (Krzepnięcie węża cieplnego typu L)

Rozpatrzmy proces krzepnięcia węża cieplnego przedstawionego na rysunku VII.19., dla którego przyjęto następujące dane

$$\begin{aligned}
 a &= 0.1 \text{ [m]}, & b &= 0.1, & c &= 0.055, & d &= 0.055, \\
 C_L &= 820 \text{ [J/kgK]}, & C_P &= 7700, & C_S &= 690, & & \\
 \rho_L &= 7000 \text{ [kg/m}^3\text{]}, & \rho_P &= 7250, & \rho_S &= 7500, & & \text{(VI.71)} \\
 \lambda_L &= 35 \text{ [W/mk]}, & \lambda_P &= 35, & \lambda_S &= 35, & & \\
 T_L &= 1505 \text{ [}^\circ\text{C]}, & T_S &= 1470, & T_b &= 1450, & T_0 &= f_1 = 1550, \\
 T^\infty &= 30 \text{ [}^\circ\text{C]}, & \alpha &= 500 \text{ [W/m}^2\text{K)}. & & & &
 \end{aligned}$$

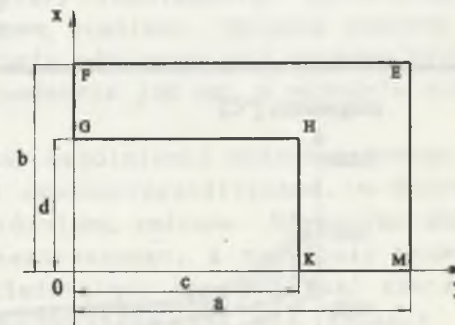
gdzie wskaźniki L, S i P wyróżniają odpowiednio wielkości odnoszące się do temperatur powyżej temperatury likwidusu T_L , poniżej temperatury solidusu T_S oraz strefie przejściowej pomiędzy tymi temperaturami. T_0 i T_b oznaczają odpowiednio temperaturę początkową i temperaturę na brzegu Γ_{GHK} . Na brzegach Γ_{KM} i Γ_{FG} założono warunek symetrii, a dla Γ_{ME} i Γ_{EF} przyjęto warunek III rodzaju.

Tak opisanemu zagadnieniu odpowiada ogólna struktura rozwiązania opisana wzorem (VI.8), w którym przyjęto $n_1=2$, $n_2=2$ i $n_3=2$ oraz $f_1=f_2=T_0$, $f_3=f_4=0$, $f_3=f_4=\alpha T^\infty/\lambda$, $h_3=h_4=\alpha/\lambda$.

Rozwiązanie przedstawimy w postaci krzywych stygnięcia -

rysunek VII.20. - wyznaczony metodami MRF i MRS, dla następujących wybranych punktów: $A(0.075, 0.075)$, $B(0.095, 0.005)$, $C(0.095, 0.095)$, $D(0.075, 0.025)$ oraz tabelarycznie zilustrowanych rozkładów temperatury - tabela VII.7. - po czasie 128 [s].

Zaprezentowane rozwiązania oraz inne, nie publikowane przez autora, potwierdzają zadowalającą efektywność i dokładność użycia metody R-funkcji również w nieliniowych zagadnieniach cieplnych termomechaniki.



Rys.VI.19. Analizowany obszar
Fig.VI.19. Analyzed domain

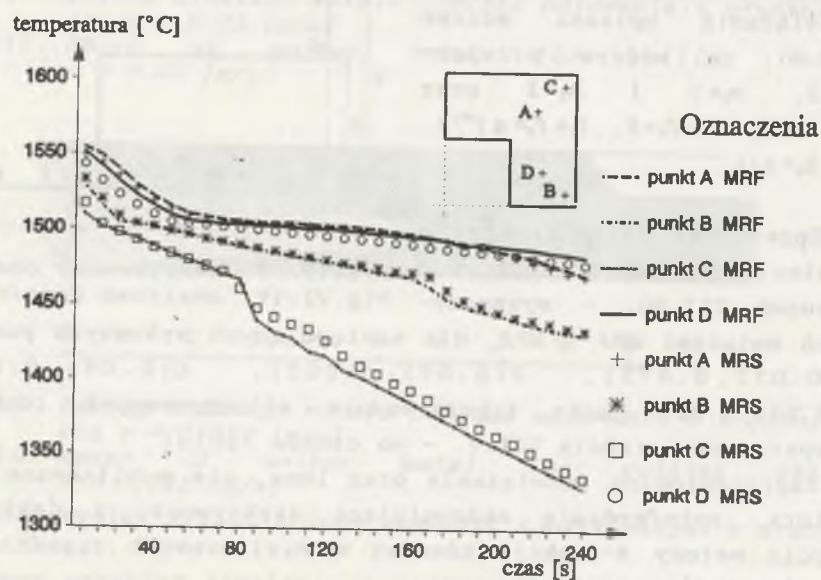
Tabela VII.7
Rozkład temperatury w węźle cieplnym

a) metoda różnic skończonych

1478	1478	1478	1479	1479	1479	1478	1474	1448	1413
1495	1495	1495	1496	1496	1496	1497	1495	1485	1448
1495	1495	1495	1495	1496	1497	1500	1501	1495	1474
1479	1479	1479	1480	1480	1484	1495	1500	1497	1478
1450	1450	1450	1450	1450	1450	1484	1497	1496	1479
					1450	1481	1496	1496	1479
					1450	1480	1495	1496	1479
					1450	1479	1495	1495	1478
					1450	1479	1495	1495	1478
					1450	1479	1495	1495	1478

b) metoda R-funkcji

1477	1480	1477	1473	1470	1471	1473	1472	1436	1406
1495	1499	1497	1493	1491	1492	1495	1496	1489	1436
1496	1501	1500	1497	1496	1498	1401	1403	1496	1472
1488	1492	1491	1488	1487	1491	1498	1501	1495	1473
1450	1450	1450	1450	1450	1450	1491	1498	1492	1471
					1450	1487	1496	1491	1470
					1450	1488	1497	1493	1473
					1450	1491	1500	1497	1477
					1450	1492	1501	1499	1480
					1450	1488	1496	1495	1477

Rys.VI.20. Krzywe stygnięcia w wybranych punktach
Fig.VI.20. Cooling curves for the selected points

Rozdział VII

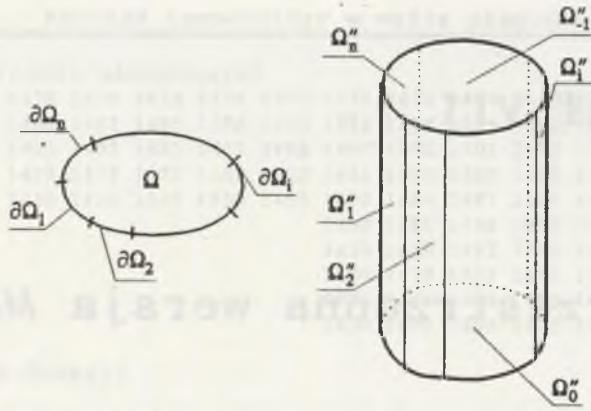
Czasoprzestrzenna wersja MRF

W poprzednim rozdziale omówiliśmy sposoby rozwiązywania zagadnień niestacjonarnych przy użyciu nowego narzędzia, jakim jest metoda R-funkcji. Własności R-funkcji wykorzystaliśmy do tworzenia analitycznego opisu badanego obszaru geometrycznego i konstruowania ogólnej struktury rozwiązania, spełniającej wszystkie zadane warunki brzegowe problemu. Zmienna czasowa i warunek początkowy traktowane były odmiennie niż zmienne przestrzenne i warunki brzegowe - podobnie jak np. w metodzie elementów skończonych.

W tym rozdziale proponujemy uogólnienie dotychczasowego - geometrycznego - podejścia na czasowo-przestrzenne, w którym zmienna czasowa nie będzie wyróżnioną zmienną. Utworzymy analityczny opis obszaru czasoprzestrzennego, a następnie przedstawimy ogólną strukturę, uwzględniającą (spełniającą) również warunek początkowy. Na koniec opiszemy GSS dla zadania, w którym brzeg geometryczny zmienia się w czasie w określony (znany) sposób.

VII.1. Zagadnienia ze stałym brzegiem geometrycznym

Jeszcze raz sformułujemy analizowany problem. Niech rozważany obiekt zajmuje w przestrzeni obszar $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (lub \mathbb{R}^2 lub \mathbb{R}^1) i niech jego brzeg $\partial\Omega$ składa się z n rozłącznych części $\partial\Omega_i$



Rys.VII.1. Obszar Ω i czasoprzestrzenny obszar Ω^*
Fig.VII.1. Domain Ω and spatial-time domain Ω^*

($i=1,2,\dots,n$), na których zadane będą różne warunki brzegowe - I, II lub III rodzaju. Zakładamy, że współczynniki termofizyczne λ , c , ρ są stałe. Niestacjonarne pole temperatury $T(\mathbf{x}, t)$ w obszarze $\Omega(\mathbf{x})$ opisane jest przez równanie Fouriera postaci

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c\rho} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} \quad \text{dla } \mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3) \in \Omega, \quad t \in (0, \infty), \quad (\text{VII.1})$$

do którego musimy dołączyć odpowiednie warunki brzegowe i początkowe. Na $k < n$ części brzegu $\partial\Omega_i$ znana jest temperatura

$$T|_{\partial\Omega_i} = T_{oi} = f_i, \quad i=1, \dots, k; \quad (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega_i \otimes (0, \infty) \quad (\text{VII.2})$$

Na pozostałych częściach $\partial\Omega_j$ ($k < j \leq n$) zadany jest warunek III rodzaju

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \nu} + h_j T \right) |_{\partial\Omega_j} = f_j, \quad j=k+1, \dots, n, \quad (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega_j \otimes (0, \infty), \quad (\text{VII.3})$$

gdzie: $f_j = \alpha_j T_j^\infty / \lambda$ i $h_j = \alpha_j / \lambda$. Jeżeli założyć, że $h_j = 0$ i $f_j = q_j / \lambda$, to otrzymamy warunek II rodzaju. We wzorze (VII.3) operator $\partial(\cdot) / \partial \nu$ oznacza pochodną w kierunku normalnym do brzegu geometrycznego obszaru Ω . Prawe strony w powyższych warunkach - f_i , $i=1,2,\dots,n$ - mogą być oczywiście funkcjami czasu.

Na koniec zakładamy, że znana jest funkcja opisująca temperaturę w chwili początkowej, tj.

$$T(\mathbf{x}, t) |_{t=0} = T_0(\mathbf{x}) = f_0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (\text{VII.4})$$

Iloczyn kartezjański $\Omega^* = \Omega \otimes (0, \theta)$ może być traktowany jako skończony cylinder Ω^* , którego podstawą jest geometryczny obszar Ω , a wysokością czas trwania analizowanego procesu θ . Brzeg czasoprzestrzennego obszaru Ω^* składa się z następujących części (patrz rys.VII.1.):

a) dwóch podstaw będących geometrycznym obszarem odpowiednio w chwilach $t=0$ i $t=\theta$, tj. $\Omega_0^* = \Omega$ i $\Omega_n^* = \Omega'$,

b) powierzchni bocznej złożonej z n fragmentów będących iloczynami kartezjańskimi $\Omega'' = \partial\Omega \otimes (0, \theta) = \Omega_1'' \cup \dots \cup \Omega_n''$, przy czym $\Omega_i'' = \partial\Omega_i \otimes (0, \theta)$ - $i=1,2,\dots,n$.

Analityczna postać wyżej zdefiniowanego obszaru czasoprzestrzennego Ω^* może być przedstawiona jako

$$\omega^* = \omega^*(\mathbf{x}, t) = [\omega(\mathbf{x})] \wedge_0 [(\theta - t)t / \theta]. \quad (\text{VII.5})$$

Przypomnijmy własności funkcji ω^* : dla punktów nie należących do obszaru Ω^* jest ona ujemna, dla punktów brzegowych - równa zero i wreszcie dla punktów należących do wnętrza Ω^* - dodatnia, czyli

$$\omega^*(\mathbf{x}, t) \begin{cases} < 0, & (\mathbf{x}, t) \notin \Omega^* \\ = 0, & (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega^* \\ > 0, & (\mathbf{x}, t) \in \Omega^* \end{cases} \quad (\text{VII.6})$$

Teraz warunki brzegowe (VII.2-3) i początkowe (VII.4) przedstawimy następująco

$$T|_{\Omega_0^*} = f_i, \quad i=0, \dots, k; \quad (\text{VII.7})$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \nu} + h_j T \right) |_{\Omega_j^*} = f_j, \quad j=k+1, \dots, n. \quad (\text{VII.8})$$

Zauważmy, że we wzorze (VII.8) operator $\partial(\cdot) / \partial \nu$ jest, w odróżnieniu od (VII.3), pochodną w kierunku normalnym do brzegu obszaru czasoprzestrzennego Ω^* . Ponieważ warunki te stawiane są na powierzchni bocznej walca, to

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial v} \Big|_{\Omega_j''} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial v} \Big|_{\partial\Omega_j}, \quad j=1, \dots, n. \quad (\text{VII.9})$$

Warunek początkowy (VII.4) jest teraz warunkiem I rodzaju zadaniem na brzegu Ω_0'' , czyli zawarty jest we wzorze (VII.7) dla $i=0$.

Prawidłowo postawione zadanie wymaga określenia warunku brzegowego na brzegu $\Omega^*(x, \theta) = \Omega_{-1}''$. Warunkiem tym może być rozwiązanie zadania stacjonarnego przy założeniu, że czas θ jest duży (see Crank [7]). Innym, mniej dokładnym warunkiem jest założenie, że w końcowej fazie analizowanego procesu prędkość zmian pola temperatury $\partial T / \partial t$ jest mała, czyli

$$\frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{\Omega_{-1}''} = w, \quad (\text{VII.10})$$

a w szczególności równa zero. Rozwiązanie zadania przy założeniu (VII.10) może być traktowane jako pierwszy krok algorytmu iteracyjnego, w którym poprawiana jest funkcja $w = w(x)$.

Ogólna struktura rozwiązania zadania czasoprzestrzennego, określonego na obszarze Ω^* jest postaci

$$T(x, t) = F_0 - \omega D_1(F_0) + \omega F_1 + \Phi F_2 - \omega D_2(\Phi F_2) - \omega \Phi H_1 \quad (\text{VII.11})$$

gdzie

$$F_0 = \frac{\sum_{i=0}^k \frac{f_i}{\omega_i}}{\sum_{i=0}^n \frac{1}{\omega_i}}, \quad F_1 = \frac{\sum_{j=k+1}^n \frac{f_j}{\omega_j}}{\sum_{j=k+1}^n \frac{1}{\omega_j}}, \quad F_2 = \frac{\sum_{j=k+1}^n \frac{1}{\omega_j}}{\sum_{j=0}^n \frac{1}{\omega_j}}, \quad H_1 = \frac{\sum_{j=k+1}^n \frac{h_j}{\omega_j}}{\sum_{j=k+1}^n \frac{1}{\omega_j}} \quad (\text{VII.12})$$

We wzorze (VII.11) D_1 jest operatorem różniczkowym postaci

$$D_1(\cdot) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} + \frac{\partial \omega}{\partial t} \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} \quad (\text{VII.13})$$

spełniającym następujące warunki

$$D_1(\omega) \Big|_{\partial\Omega^*} = 1, \quad (\text{VII.14})$$

$$D_1(\cdot) \Big|_{\Omega_j''} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial v}, \quad j=1, \dots, n,$$

czyli brzeg obszaru walcowego Ω^* jest znormalizowany, a operator ten na powierzchni bocznej walca przechodzi w pochodną normalną do brzegu. Jednocześnie funkcja $\Phi = \Phi(x, t)$ występująca w GSS może mieć postać

$$\Phi(x, t) = \sum a_{ij} \varphi_{ij}(x, t), \quad (\text{VII.15})$$

gdzie a_{ij} są nieznanymi parametrami, a φ_{ij} są danymi funkcjami bazowymi (por. [28], [62]).

Pokażemy teraz, że GSS określona wzorem (VII.11) rzeczywiście spełnia wszystkie warunki (VII.7-8).

Ponieważ $\omega=0$ dla $(x, t) \in \partial\Omega^*$, więc jedynie pierwszy i trzeci składnik struktury jest różny od zera na brzegu, czyli

$$T(x, t) \Big|_{\partial\Omega^*} = F_1 + \Phi F_2 \quad (\text{VII.16})$$

Stąd otrzymujemy następujące zależności

$$T(x, t) \Big|_{\Omega_i''} = f_i, \quad i=0, 1, \dots, k; \quad (\text{VII.17})$$

$$T(x, t) \Big|_{\Omega_j''} = \Phi, \quad j=k+1, \dots, n;$$

Operator $D_1(\cdot)$ działając na funkcję (VII.11), na brzegu obszaru Ω^* przyjmuje postać

$$D_1(T) \Big|_{\partial\Omega^*} = F_1 - \Phi H_1; \quad (\text{VII.18})$$

czyli

$$D_1(T) \Big|_{\Omega_j''} = f_j - \Phi h_j, \quad j=k+1, \dots, n. \quad (\text{VII.19})$$

a to pokazuje, że wszystkie warunki są spełnione.

Uwzględniając wzór (VII.15) GSS można przedstawić jako

$$T(x, y) = X_0 + \sum a_{kl} X_{kl}, \quad (\text{VII.20})$$

gdzie wprowadzono:

$$X_0 = F_0 - \omega \left[\sum_{\alpha=1}^3 (\omega_{,\alpha} F_{0,\alpha}) + F_1 \right] \quad (\text{VII.21})$$

$$X_{kl} = \phi_{kl} \left[F_2 - \omega \left(H_1 + \sum_{\alpha=1}^3 (\omega_{,\alpha} F_{2,\alpha}) \right) \right] - \sum_{\alpha=1}^3 [\phi_{kl,\alpha} (\omega_{,\alpha} \omega F_2)]$$

Łatwo sprawdzić, że

$$X_0 = f_i \wedge X_{kl} = 0 \text{ for } (\mathbf{x}, t) \in \Omega_i'' \quad (i=0, 1, \dots, k) \quad (\text{VII.22})$$

$$X_0 = 0 \wedge X_{kl} \neq 0 \text{ for } (\mathbf{x}, t) \in \Omega_j'' \quad (j=k+1, \dots, n)$$

W celu rozwiązania problemu opisanego równaniami (VII.1-3) należy wyznaczyć nieznanne współczynniki a_{ij} . Możemy to zrobić żądając, by GSS - (VII.11) - spełniała równanie (VII.1) lub np. warunek najmniejszego błędu kwadratowego postaci

$$J[a_{ij}] = \int_{\Omega^*} \left(\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\lambda}{c\rho} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} \right)^2 d\Omega^* \quad (\text{VII.23})$$

albo wreszcie stosując metodę Galerkiną w postaci

$$\int_{\Omega^*} \left[\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\lambda}{c\rho} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} \right] \delta T d\Omega^* = 0 \quad (\text{VII.24})$$

Wariacja δT musi spełniać następujące warunki

$$\delta T = 0 \wedge \delta T_{,\nu} \neq 0 \text{ for } (\mathbf{x}, t) \in \bigcup_{i=1}^k \Omega_i''$$

$$\delta T \neq 0 \text{ for } (\mathbf{x}, t) \in \Omega^* \cup \left(\bigcup_{j=k+1}^n \Omega_j'' \right) \quad (\text{VII.25})$$

$$\delta T_{,\nu} = 0 \text{ for } (\mathbf{x}, t) \in \bigcup_{j=k+1}^n \Omega_j''$$

Ponieważ funkcja T określona jest wzorem (VII.20), więc

$$\delta T = \sum_{ij} X_{ij} \delta a_{ij}, \quad \delta T_{,\alpha} = \sum_{ij} X_{ij,\alpha} \delta a_{ij}, \quad (\text{VII.26})$$

a dzięki własnościom (VII.22) spełnione są warunki (VII.25).

Wyprowadzimy teraz algebraiczny układ równań problemu wynikający z całki (VII.25). Całka po obszarze Ω^* może być traktowana jako złożenie całek po obszarze geometrycznym Ω i czasie t w przedziale $(0, \theta)$, czyli

$$\int_{\Omega^*} \left[\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\lambda}{c\rho} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} \right] \delta T d\Omega^* = \int_{\Omega^*} (T_{,t} - \kappa^2 T_{,\alpha\alpha}) \delta T d\Omega^* = \quad (\text{VII.27})$$

$$= \int_{\Omega^*} T_{,t} \delta T d\Omega^* - \kappa^2 \int_0^\theta \left(\int_{\Omega} T_{,\alpha\alpha} \delta T d\Omega \right) dt$$

(w ostatnim równaniu wprowadzono konwencję sumacyjną względem powtarzających się indeksów α i uproszczony zapis różniczkowania). Wykorzystując twierdzenie Greena o zamianie całki powierzchniowej na krzywoliniową, druga z całek we wzorze (VII.27) przyjmie postać

$$-\int_{\Omega^*} T_{,\alpha} \delta T_{,\alpha} d\Omega^* + \int_{\partial\Omega^*} T_{,\nu} \delta T d\partial\Omega^* = -\int_{\Omega^*} T_{,\alpha} \delta T_{,\alpha} d\Omega^* + \sum_{j=k+1}^n \int_{\Omega_j''} (f_j - h_j T) \delta T d\Omega_j'' \quad (\text{VII.28})$$

W ostatnim przekształceniu uwzględniono fakt, że wariacja funkcji T jest równa zero na tych częściach brzegu na których zadana jest temperatura, czyli dla $i=1, 2, \dots, n_1$. Ponieważ wariacje δa_{ij} ($ij=1, 2, \dots, N$) są dowolne i niezależne, to zakładając kolejno, że tylko jedna z nich jest różna od zera otrzymamy układ równań postaci

$$\delta a_{ij} \left\{ \int_{\Omega^*} (T_{,t} X_{ij} - \kappa^2 T_{,\alpha} X_{ij,\alpha}) d\Omega^* - \kappa^2 \sum_{l=k+1}^n \int_{\Omega_l''} (f_l - h_l T) X_{ij} d\Omega_l'' \right\} \stackrel{(\text{VII.29})}{=} 0$$

Uwzględniając wzór (VII.20) otrzymujemy algebraiczny układ równań z niewiadomymi a_{ij}

$$\sum_{kl} C_{ijkl} a_{kl} = B_{ij}, \quad (\text{VII.30})$$

gdzie

$$C_{ijkl} = \int_{\Omega^*} (X_{kl,t} X_{ij} - \kappa^2 X_{kl,\alpha} X_{ij,\alpha}) d\Omega^* + \kappa^2 \sum_{l=k+1}^n \int_{\Omega''_l} (f_l - h_l X_{kl}) X_{ij} d\Omega''_l \quad (\text{VII.31})$$

$$B_{ij} = \int_{\Omega^*} (X_{0,t} X_{ij} - \kappa^2 X_{0,\alpha} X_{ij,\alpha}) d\Omega^* + \kappa^2 \sum_{l=k+1}^n \int_{\Omega''_l} (f_l - h_l X_0) X_{ij} d\Omega''_l$$

■ Przykład VII.1. (por.[63])

Algorytm przedstawiony wyżej zostanie zastosowany do wyznaczenia pola temperatury w nieskończonej płycie. Wyniki uzyskane poprzez uogólnioną metodę R -funkcji zostaną porównane z rozwiązaniem analitycznym.

Założymy, że wymianę ciepła pomiędzy badanym obiektem a otoczeniem opisuje warunek III rodzaju. Rozpatrzmy trzy przypadki warunków:

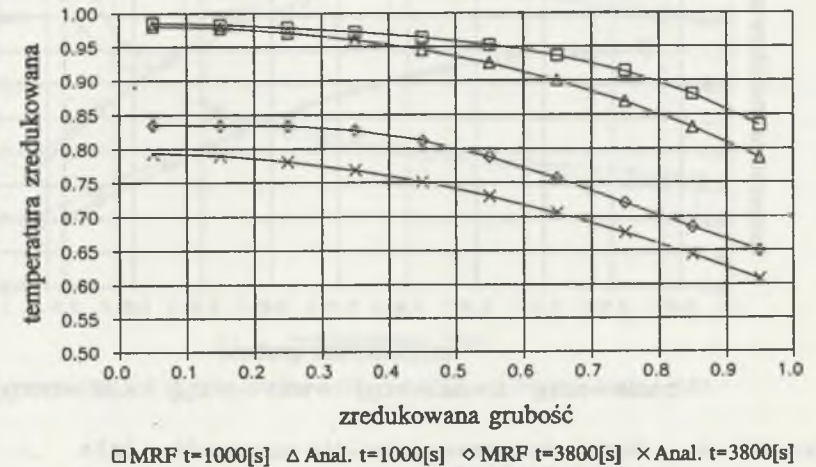
- a) $h_1 = h = 2.0$ [m^{-1}] oraz $f_1 = f = 0.666$ [m^{-1}] ($\alpha = 100$ [$\text{W}/\text{m}^2 \text{K}$]);
 - b) $h_1 = h = 10.0$ [m^{-1}] oraz $f_1 = f = 3.333$ [m^{-1}] ($\alpha = 500$ [$\text{W}/\text{m}^2 \text{K}$]);
 - c) $h_1 = h = 20.0$ [m^{-1}] oraz $f_1 = f = 6.667$ [m^{-1}] ($\alpha = 1000$ [$\text{W}/\text{m}^2 \text{K}$]).
- Temperatury początkowa i otoczenia, dla wszystkich przypadków, wynoszą odpowiednio: $T_0 = f_0 = 500$ [$^{\circ}\text{C}$] i $T^{\infty} = 30$ [$^{\circ}\text{C}$].

Funkcję Φ (por.wzór (VII.14)) przyjmujemy w postaci

$$\Phi = \Phi(\mathbf{x}, t) = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j < N}}^N a_{ij} \left(\frac{x}{g}\right)^i \left(\frac{t}{\theta}\right)^j, \quad (\text{VII.32})$$

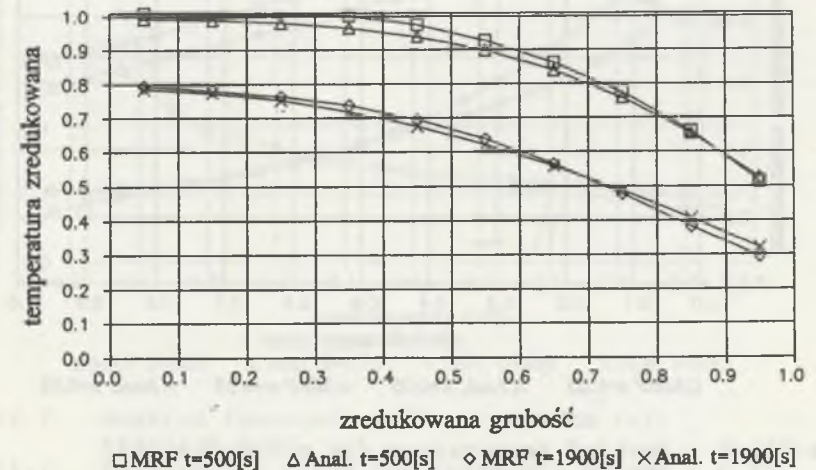
gdzie g jest grubością płyty. Nieznane współczynniki a_{ij} określimy wypełniając warunek (VII.19). Całkowanie numeryczne wykonano stosując metodę Gaussa. Zadawalające wyniki uzyskano dla rzadkiej dyskretyzacji obszaru Ω^* i $N = 5$ (wzór (VII.20)). Końcowy układ równań zawiera wówczas 21 niewiadomych.

Rysunki VII.2-4. pokazują rozkłady temperatury w połowie płyty (ze względu na symetrię warunków brzegowych) dla trzech przypadków, w dwóch różnych chwilach czasu. Rysunki VII.5-7. ilustrują zmianę temperatury w wybranych punktach płyty - w pobliżu środka i brzegu.



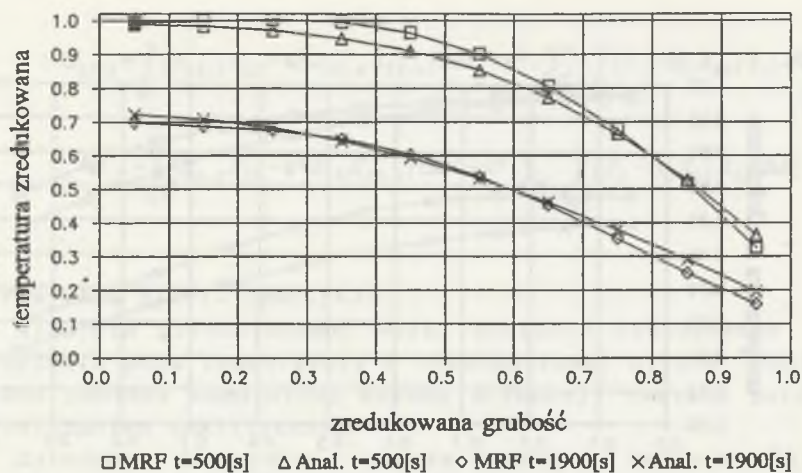
Rys.VII.2. Rozkład temperatury dla przypadku (a): $t=1000$ i 3800 [s]

Fig.VII.2. Temperature field for case (a): $t=1000$ and 3800 [s]

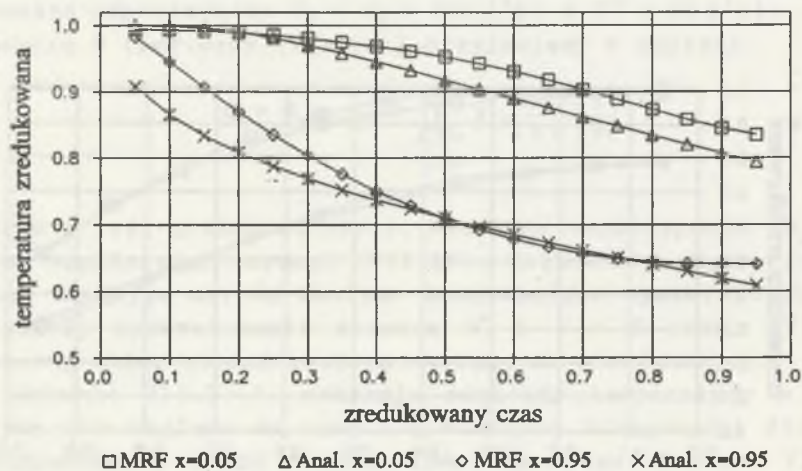


Rys.VII.3. Rozkład temperatury dla przypadku (b): $t=500$ i 1900 [s]

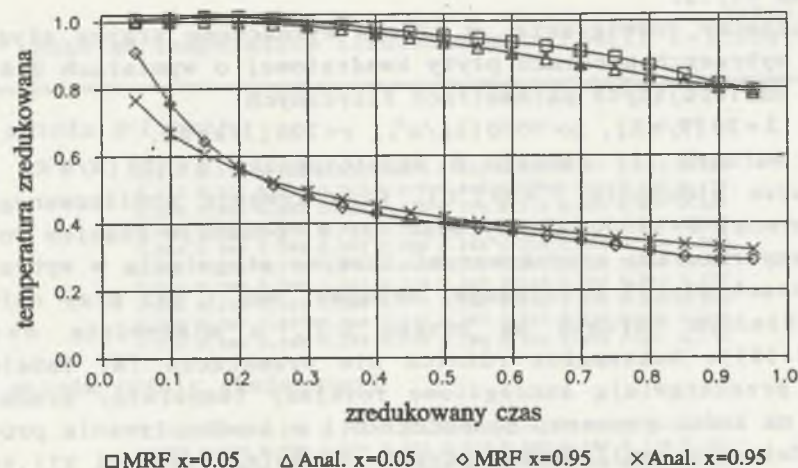
Fig.VII.3. Temperature field for case (b): $t=500$ and 1900 [s]



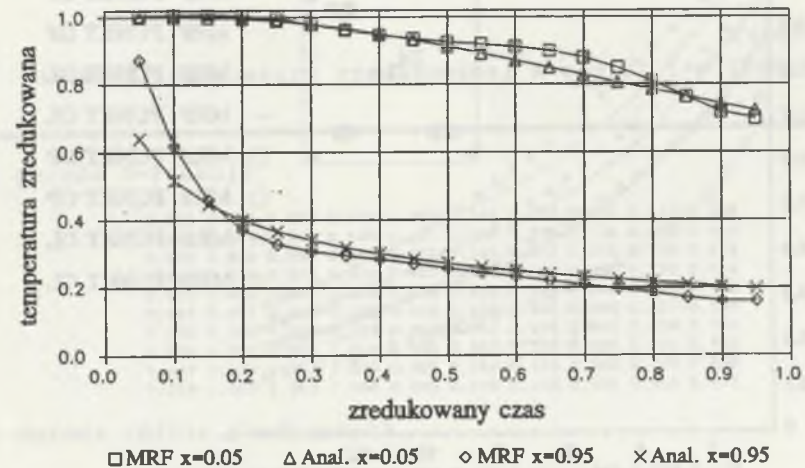
Rys.VII.4. Rozkład temperatury dla przypadku (c):
 $t=500$ i $1900[s]$
Fig.VII.4. Temperature field for case (c): $t=500$ and $1900[s]$



Rys.VII.5. Rozkład temperatury dla przypadku (a):
 $x=0.05$ i 0.95
Fig.VII.5. Temperature field for case (a): $x=0.05$ and 0.95



Rys.VII.6. Rozkład temperatury dla przypadku (b):
 $x=0.05$ i 0.95
Fig.VII.6. Temperature field for case (b): $x=0.05$ i 0.95



Rys.VII.7. Rozkład temperatury dla przypadku (c):
 $x=0.05$ i 0.95
Fig.VII.7. Temperature field for case (c): $x=0.05$ i 0.95

Porównanie rozwiązań za MRF i analitycznego (rys.VII.2 - 7) wykazuje efektywność proponowanego algorytmu. Maksymalna różnica pomiędzy rozwiązaniami nie jest większa niż 7%.

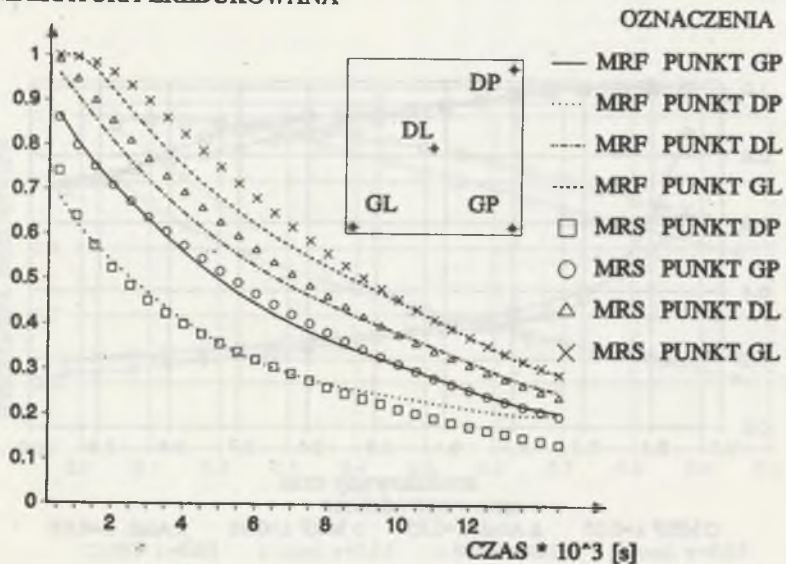
Przykład VII.2.

Przedstawimy rozwiązanie, w którym wyznaczono krzywe stygnięcia w wybranych punktach płyty kwadratowej o wymiarach 0.6×0.6 [m] o następujących parametrach fizycznych

$$\lambda = 30 \text{ [W/mK]}, \rho = 7000 \text{ [kg/m}^3\text{]}, c = 700 \text{ [J/kgK]}.$$

Przyjęto warunek III rodzaju o współczynniku $\alpha = 100 \text{ [W/m}^2\text{K]}$ i temperaturze otoczenia $T^\infty = 30 \text{ [}^\circ\text{C]}$. Czas trwania analizowanego procesu wynosi $\theta = 15000 \text{ [s]}$. Rysunek VII.8. pokazuje różnice pomiędzy temperaturami zredukowanymi (krzywe stygnięcia w wybranych punktach płyty) otrzymanymi metodami MRF i MRS przy najmniej dokładnym warunku na brzegu Ω_1 , a mianowicie $w = 0$ (por. (VII.10)). Maksymalna różnica nie przekracza 7%. Tabele VII.1-3. przedstawiają szczegółowe rozkłady temperatur zredukowanych na końcu procesu, na początku i w środku trwania procesu (w ćwiartce analizowanej płyty). Natomiast rysunki VII.9-11. ilustrują różnice między izotermami uzyskanymi metodami MRF i MRS, w trzech różnych momentach czasu.

TEMPERATURA ZREDUKOWANA



Rys.VII.8. Krzywe stygnięcia w wybranych punktach
Fig.VII.8. Cooling curves for the selected points

Tabela VII.1
Rozkład temperatury zredukowanej w chwili $t = 13500 \text{ [s]}$

a) metoda R-funkcji

0.210	0.210	0.209	0.207	0.204	0.203	0.202	0.201	0.195	0.190
0.217	0.218	0.218	0.218	0.216	0.213	0.207	0.201	0.199	0.195
0.234	0.234	0.234	0.232	0.229	0.223	0.216	0.207	0.201	0.201
0.252	0.251	0.250	0.248	0.243	0.236	0.226	0.216	0.207	0.202
0.268	0.267	0.265	0.262	0.256	0.248	0.236	0.223	0.213	0.203
0.280	0.279	0.277	0.273	0.266	0.256	0.243	0.229	0.216	0.204
0.289	0.288	0.285	0.281	0.273	0.262	0.248	0.232	0.218	0.207
0.295	0.293	0.291	0.285	0.277	0.265	0.250	0.234	0.218	0.209
0.298	0.297	0.293	0.288	0.279	0.267	0.251	0.234	0.218	0.210
0.299	0.298	0.295	0.289	0.280	0.268	0.252	0.234	0.217	0.210

b) metoda różnic skończonych

0.220	0.218	0.215	0.210	0.204	0.195	0.187	0.176	0.164	0.151
0.239	0.238	0.234	0.229	0.222	0.213	0.203	0.192	0.178	0.164
0.257	0.255	0.251	0.246	0.238	0.229	0.218	0.206	0.192	0.176
0.273	0.271	0.267	0.261	0.253	0.243	0.231	0.218	0.203	0.187
0.286	0.284	0.280	0.274	0.265	0.255	0.243	0.229	0.213	0.196
0.298	0.296	0.291	0.285	0.276	0.265	0.253	0.238	0.222	0.204
0.307	0.305	0.300	0.294	0.285	0.274	0.261	0.246	0.229	0.210
0.314	0.312	0.307	0.300	0.291	0.280	0.267	0.251	0.234	0.215
0.319	0.317	0.312	0.305	0.296	0.284	0.271	0.255	0.238	0.218
0.321	0.319	0.314	0.307	0.298	0.286	0.273	0.257	0.239	0.220

Tabela VII.2
Rozkład temperatury zredukowanej w chwili $t = 1500 \text{ [s]}$

a) metoda R-funkcji

0.811	0.806	0.798	0.785	0.768	0.743	0.713	0.679	0.643	0.600
0.862	0.857	0.851	0.838	0.821	0.800	0.770	0.736	0.696	0.643
0.906	0.902	0.896	0.883	0.866	0.845	0.815	0.779	0.736	0.679
0.943	0.938	0.932	0.919	0.902	0.881	0.851	0.815	0.770	0.713
0.972	0.968	0.962	0.949	0.932	0.909	0.881	0.845	0.800	0.743
0.996	0.991	0.985	0.972	0.955	0.932	0.902	0.866	0.821	0.768
1.000	1.000	1.000	0.989	0.972	0.949	0.919	0.883	0.838	0.785
1.005	1.003	1.001	1.000	0.985	0.962	0.932	0.896	0.851	0.798
1.007	1.030	1.003	1.000	0.991	0.968	0.938	0.902	0.857	0.806
1.010	1.007	1.005	1.000	0.996	0.972	0.943	0.906	0.862	0.811

b) metoda różnic skończonych

0.751	0.749	0.744	0.737	0.725	0.709	0.687	0.657	0.619	0.573
0.811	0.809	0.804	0.796	0.784	0.767	0.742	0.710	0.669	0.619
0.861	0.859	0.854	0.845	0.832	0.813	0.788	0.753	0.710	0.657
0.900	0.898	0.892	0.883	0.870	0.850	0.823	0.788	0.742	0.687
0.929	0.927	0.922	0.912	0.898	0.878	0.850	0.813	0.767	0.709
0.951	0.948	0.943	0.933	0.919	0.898	0.870	0.832	0.784	0.725
0.966	0.963	0.957	0.948	0.933	0.912	0.883	0.845	0.796	0.737
0.975	0.973	0.967	0.957	0.943	0.922	0.892	0.854	0.804	0.744
0.981	0.978	0.973	0.963	0.948	0.927	0.898	0.859	0.809	0.749
0.984	0.981	0.975	0.966	0.951	0.929	0.900	0.861	0.811	0.751

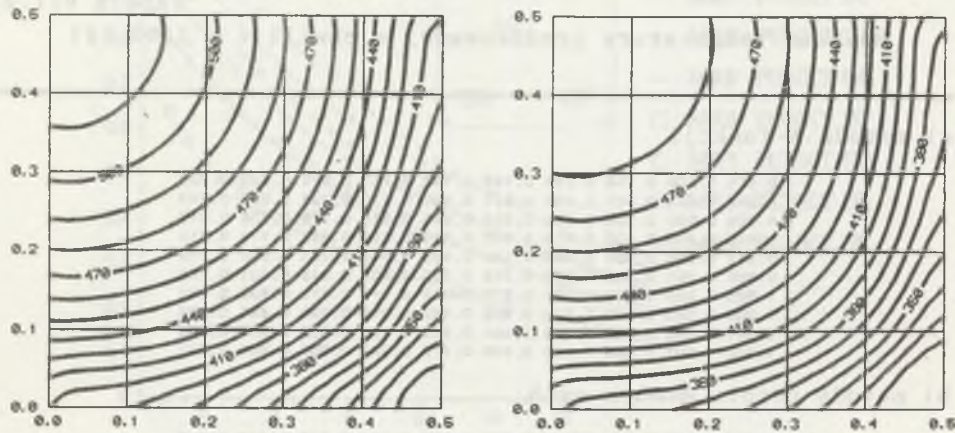
Tabela VII.3
Rozkład temperatury zredukowanej w chwili $t = 8000$ [s]

a) metoda R-funkcji

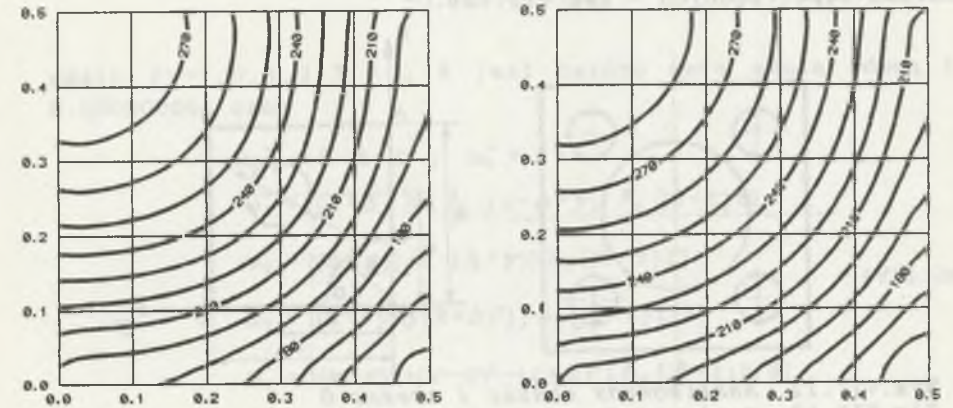
0.355	0.353	0.349	0.345	0.334	0.321	0.302	0.283	0.266	0.251
0.383	0.381	0.379	0.372	0.362	0.347	0.330	0.311	0.289	0.266
0.415	0.413	0.409	0.402	0.391	0.377	0.357	0.334	0.311	0.283
0.447	0.445	0.440	0.432	0.421	0.404	0.383	0.357	0.330	0.302
0.474	0.472	0.466	0.457	0.445	0.428	0.404	0.377	0.347	0.321
0.496	0.494	0.487	0.479	0.464	0.445	0.421	0.391	0.362	0.334
0.511	0.509	0.502	0.494	0.479	0.457	0.432	0.402	0.372	0.345
0.521	0.519	0.513	0.502	0.487	0.466	0.440	0.409	0.379	0.349
0.528	0.526	0.519	0.509	0.494	0.472	0.445	0.413	0.381	0.353
0.532	0.528	0.521	0.511	0.496	0.474	0.447	0.415	0.383	0.355

b) metoda różnic skończonych

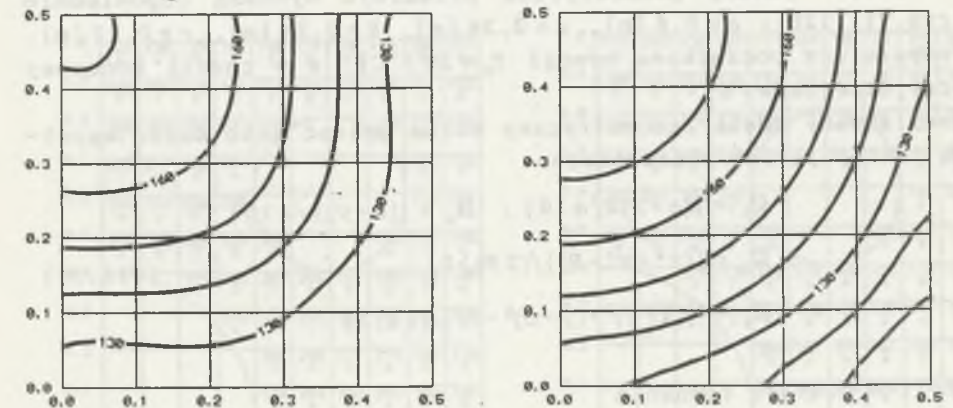
0.383	0.380	0.374	0.366	0.355	0.341	0.325	0.306	0.285	0.262
0.416	0.413	0.407	0.398	0.386	0.371	0.354	0.333	0.311	0.285
0.447	0.444	0.437	0.427	0.414	0.398	0.379	0.358	0.333	0.306
0.474	0.471	0.464	0.453	0.440	0.423	0.403	0.379	0.354	0.325
0.498	0.494	0.487	0.476	0.462	0.444	0.423	0.398	0.371	0.341
0.518	0.514	0.506	0.495	0.480	0.462	0.440	0.414	0.386	0.355
0.534	0.530	0.522	0.510	0.495	0.476	0.453	0.427	0.398	0.366
0.546	0.542	0.534	0.522	0.506	0.487	0.464	0.437	0.407	0.374
0.554	0.550	0.542	0.530	0.514	0.494	0.471	0.444	0.413	0.380
0.558	0.554	0.546	0.534	0.518	0.498	0.474	0.447	0.416	0.383



Rys.VII.9. Rozkłady temperatury w chwili $t=1500$ [s] wyznaczone metodami a) MRF, b) MRS
Fig.VII.9. Temperature fields for $t=1500$ [s] by a) RFM, b) RDM



Rys.VII.10. Rozkłady temperatury w chwili $t=8000$ [s] wyznaczone metodami a) MRF, b) MRS
Fig.VII.10. Temperature fields for $t=8000$ [s] by a) RFM, b) RDM

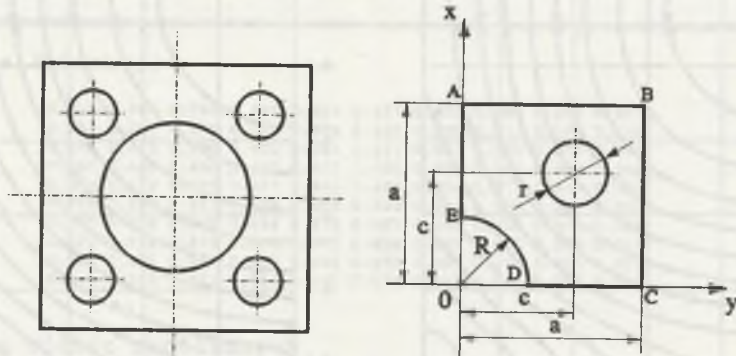


Rys.VII.11. Rozkłady temperatury w chwili $t=13500$ [s] wyznaczone metodami a) MRF, b) MRS
Fig.VII.11. Temperature fields for $t=8000$ [s] by a) RFM, b) RDM

☛ Przykład VII.3. (przekrój elementu grzewczego)

Wyznamy rozkład temperatury w przekroju pokazanym na rysunku VII.12a. Ze względu na symetrię rozpatrywać będziemy

jedynie część tego obszaru znajdująca się w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych - rys.VII.12b.



Rys.VII.12. Analizowany obszar i obszar Ω
Fig.VII.12. Analyzed domain and domain Ω

Przekrój ten ogrzewany jest strumieniem $q = 60000$ [W/m²] na powierzchni DE, chłodzony strumieniem powietrza - $\alpha = 10$ [W/m² K] i $T^\infty = 30$ [°C] - na powierzchniach zewnętrznych AB i BC oraz chłodzony wodą na powierzchni okręgu - $\alpha = 100$ [W/m² K] i $T^\infty = 30$ [°C]. Wymiary geometryczne przekroju wynoszą odpowiednio (rys.VII.12b): $a = 0.6$ [m], $c = 0.36$ [m], $R = 0.24$ [m], $r = 0.12$ [m]. Temperatura początkowa wynosi $T_0 = 30$ [°C], a w chwili końcowej przyjęto, że $w = 0$.

Analizowany obszar geometryczny można opisać jako część wspólną następujących podobszarów:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{(a-x)x/a > 0\}, \quad \Omega_2 = \{(a-y)y/a > 0\} \\ \Omega_3 &= \{(x^2+y^2-R^2)/(2R) > 0\} \\ \Omega_4 &= \{[(x-c)^2+(y-c)^2-r^2]/(2r) > 0\}\end{aligned}\quad (\text{VII.33})$$

czyli w postaci równania

$$\omega(x,y) = [(a-x)/a] \wedge_0 [(a-y)/b] \wedge_0 [(x^2+y^2-R^2)/(2R)] \wedge_0 [((x-c)^2+(y-c)^2-r^2)/(2r)] \quad (\text{VII.34})$$

Poszczególne części brzegu geometrycznego, na których zadano odpowiednie warunki brzegowe, to $\partial\Omega_1 = \Gamma_{ABC}$, $\partial\Omega_2 = \Gamma_{CD} \cup \Gamma_{EA}$, $\partial\Omega_3 = \Gamma_{DE}$ oraz $\partial\Omega_4$ - okrąg o promieniu r .

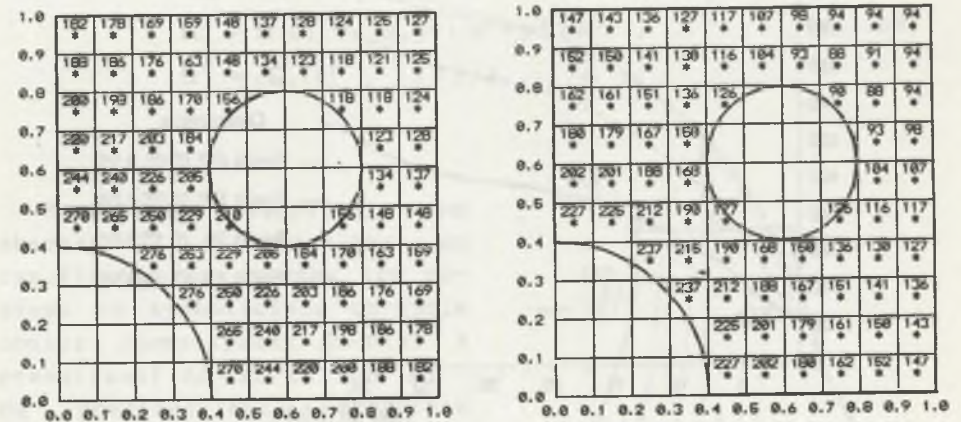
Obszar czasoprzestrzenny powstaje analogicznie do opisanego wcześniej. Równania części brzegu tego obszaru są postaci

$$\omega_i = \sqrt{(\omega^*)^2} \wedge_0 f_i, \quad (\text{VII.35})$$

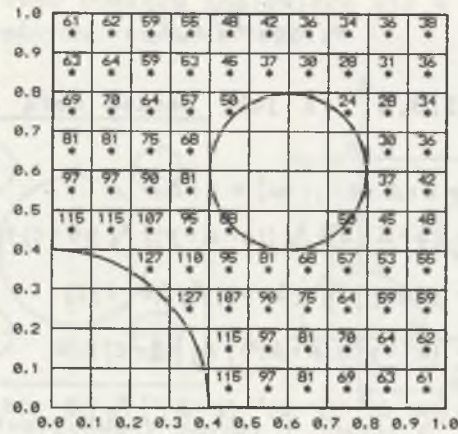
gdzie $i = -1, 0, 1, 2, 3, 4$, Δ jest bardzo małą stałą równą np. 0.000000001 oraz

$$\begin{aligned}\omega_{-1}^* &= \theta - \Delta - t, \quad \omega_0^* = t + \Delta \\ \omega_1^* &= [(a-\Delta-x)] \wedge_0 [(a-\Delta-y)] \wedge_0 [(\theta-t)t] \\ \omega_2^* &= [(\Delta+x)] \wedge_0 [(\Delta+y)] \wedge_0 [(\theta-t)t] \\ \omega_3^* &= [(x^2+y^2-(R+\Delta)^2)] \wedge_0 [(\theta-t)t/\theta] \\ \omega_4^* &= [(x-c)^2+(y-c)^2-(r+\Delta)^2] \wedge_0 [(\theta-t)t/\theta]\end{aligned}\quad (\text{VII.36})$$

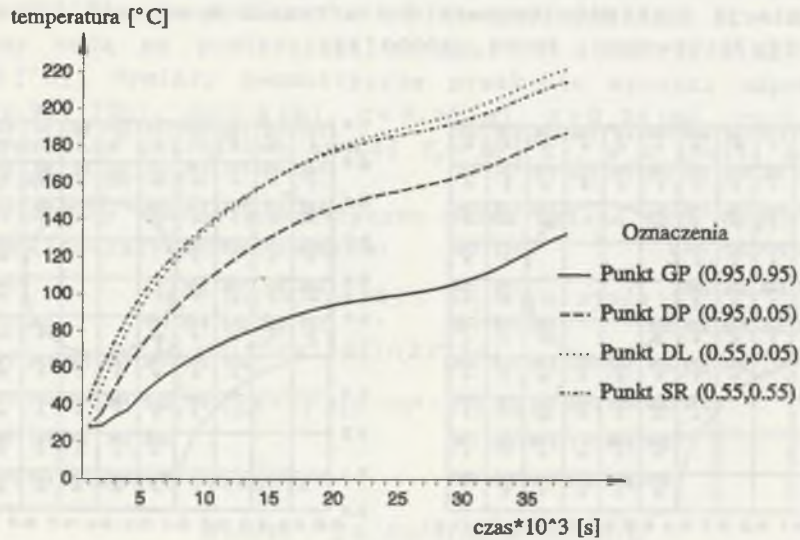
Uzyskane rozwiązanie zilustrujemy za pomocą krzywych nagrzewania czterech wybranych punktów badanego obszaru oraz liczbowej prezentacji rozkładów temperatury w trzech momentach czasu ($\theta = 40000$ [s]): $t = 4000, 20000, 36000$ [s].



Rys.VII.13. Rozkłady temperatury w chwilach $t = 4000$ i 20000 [s]
Fig.VII.13. Temperature fields for $t = 4000$ and 20000 [s]



Rys.VII.14. Rozkład temperatury w chwili $t=36000[s]$
 Fig.VII.14. Temperature field for $t=36000[s]$



Rys.VII.15. Krzywe nagrzewania wybranych punktów
 Fig.VII.15. The heating curves for the selected points

VII.2. Zadanie ze zmiennym brzegiem

Na zakończenie tego rozdziału przedstawimy strukturę rozwiązania zadania czasoprzestrzennego, w którym kształt geometryczny może się zmieniać w czasie w znany sposób, tj. $\Omega = \Omega(t)$. Zadania tego typu pojawiają się m. in. przy obliczeniach numerycznych związanych z hodowlą monokryształów lub w termodynamice procesów odlewniczych, gdy zakłada się określone prawo (np. prawo pierwiastkowe) do opisu przyrostu warstwy zakrzepłego metalu.

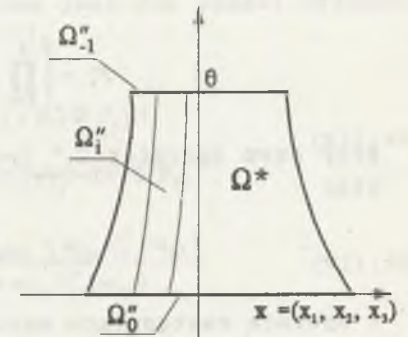
Jako przykład rozpatrzmy przekrój kołowy, którego promień R zmienia się w czasie, z określoną prędkością v_R

$$x^2 + y^2 = (R_0 - v_R t)^2 \quad (VII.37)$$

Dla tak zmieniającego się obszaru zdefiniujemy obszar Ω^* jako stożek ścięty, dla którego poszczególnymi powierzchniami brzegowymi są (por. rozdział VII.1.)

$$\begin{aligned} \Omega''_1 &= \Omega(\theta) = \{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq (R - v_R \theta)^2 \} , \\ \Omega''_0 &= \Omega(0) = \{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2 \} , \\ \Omega''_i &= \partial\Omega_i(t) , \quad i=1, 2, \dots, n , \end{aligned} \quad (VII.38)$$

Rozważamy czasoprzestrzenny obszar Ω^* przedstawiony na rys.VII.16. Na rysunku tym pozioma oś symbolicznie obrazuje obszar geometryczny $\Omega = \Omega(t)$ z przestrzeni 3D lub 2D lub 1D. Na poszczególnych częściach brzegu $\partial\Omega(t)$ możemy zadać różne warunki brzegowe. Jeśli będą to warunki II lub III rodzaju, to będą one określały wartość pochodnej normalnej do brzegu geometrycznego $\partial\Omega$ (por.wzór (VII.3)), ale w odróżnieniu do poprzedniego paragrafu VII.1. nie będzie spełniony warunek (VII.9). Tak więc operator



Rys.VII.16. Obszar czasoprzestrzenny Ω^*
 Fig.VII.16. Spatial-time domain Ω^*

$\partial(\cdot)/\partial\nu$ oznacza pochodną w kierunku, który nie jest normalny do powierzchni bocznej obszaru Ω^* . Wymaga to skonstruowania innej struktury rozwiązania niż we wszystkich dotychczasowych zadaniach (por.[9] oraz wzory (V.28), (VI.8)).

o TWIERDZENIE VII.1.

Ogólna struktura rozwiązania zagadnienia czasoprzestrzennego z warunkami brzegowymi opisanymi zależnościami (VII.7-8) i brzegiem geometrycznym zmieniającym się w określony sposób ma postać (por.[9])

$$T(\mathbf{x}, t) = F_I + \Phi F_0 + F_V [F_{II} - \Phi H_{II} - D_1(F_I) - D_1(\Phi F_0)] \quad (VII.39)$$

gdzie wprowadzono następujące oznaczenia:

$$F_I = \frac{\sum_{i=0}^k \frac{f_i}{\omega_i}}{\sum_{i=0}^n \frac{1}{\omega_i}}; \quad F_0 = \frac{\sum_{j=k+1}^n \frac{1}{\omega_j}}{\sum_{i=0}^n \frac{1}{\omega_i}} \quad (VII.40)$$

$$F_{II} = \frac{\sum_{j=k+1}^n \frac{f_j}{\omega_j}}{\sum_{j=k+1}^n \frac{1}{\omega_j}}; \quad H_{II} = \frac{\sum_{j=k+1}^n \frac{h_j}{\omega_j}}{\sum_{j=k+1}^n \frac{1}{\omega_j}} \quad (VII.41)$$

$$F_V = \left(\prod_{i=0}^k \frac{1}{\omega_i} + \sum_{j=k+1}^n \frac{D_1^V(\omega_j)}{\omega_j} \right)^{-1} \quad (VII.42)$$

przy czym operator D_1^V (por. operator D_1 - (VII.13)) ma postać

$$D_1^V(\cdot) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} \quad (VII.43)$$

i spełnia następujące warunki

$$D_1^V(\omega) \Big|_{\partial\Omega} = 1, \quad D_1^V(\cdot) \Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial n} \quad (VII.44)$$

Jak wynika z ostatniej zależności, operator D_1^V jest dla punktów brzegowych pochodną normalną do $\partial\Omega$. Twierdzenie udowodnimy przyjmując, dla większej przejrzystości wywodu, że $k=1$

(ilość warunków brzegowych I rodzaju) i $n=3$ (liczba części brzegu $\partial\Omega$; $n-k=2$ - ilość warunków brzegowych II lub III rodzaju). Wówczas funkcje (VII.40-42) po przekształceniu wynoszą

$$F_I = \frac{f_0 \omega_{123} + f_1 \omega_{023}}{\omega_{123} + \omega_{023} + \omega_{013} + \omega_{012}}, \quad F_0 = \frac{\omega_{013} + \omega_{012}}{\omega_{123} + \omega_{023} + \omega_{013} + \omega_{012}},$$

$$F_{II} = \frac{f_2 \omega_3 + f_3 \omega_2}{\omega_2 + \omega_3}, \quad H_{II} = \frac{H_2 \omega_3 + H_3 \omega_2}{\omega_2 + \omega_3} \quad (VII.45)$$

$$F_V = \frac{\omega_{0123}}{\omega_{23} + \omega_{01} D_1^V(\omega_{23})}$$

Zauważmy, że dla punktów brzegowych $T = F_I + \Phi F_0$ oraz że dla $(\mathbf{x}, t) \in \Omega_i''$

$$F_I = \begin{cases} f_i & \text{dla } i=0, 1 \\ 0 & \text{dla } i=2, 3 \end{cases} \quad (VII.46)$$

$$F_0 = \begin{cases} 0 & \text{dla } i=0, 1 \\ \Phi & \text{dla } i=2, 3 \end{cases} \quad (VII.47)$$

więc

$$T = \begin{cases} f_i & \text{dla } i=0, 1 \\ \Phi & \text{dla } i=2, 3 \end{cases} \quad (VII.48)$$

Oznacza to, że temperatura określona jest dla części brzegów o numerach 0 i 1 - por. wzory (VII.17)₁.

Jednocześnie

$$D_1^V(T) \Big|_{\partial\Omega^*} = D_1^V(F_I) + D_1^V(\Phi F_0) + D_1^V(F_V) [F_{II} - \Phi H_{II} - D_1^V(F_I) - D_1^V(\Phi F_0)] \quad (VII.49)$$

$$D_1^V(F_V) \Big|_{\partial\Omega^*} = \frac{\omega_{01} D_1^V(\omega_{23}) + \omega_{23} D_1^V(\omega_{01})}{\omega_{23} + \omega_{01} D_1^V(\omega_{23})} \quad (VII.50)$$

oraz

$$D_1^V(F_V) \Big|_{\alpha_0''} = \omega_1, \quad D_1^V(F_V) \Big|_{\alpha_1''} = \omega_0,$$

$$D_1^V(F_V) \Big|_{\alpha_2''} = 1, \quad D_1^V(F_V) \Big|_{\alpha_3''} = 1, \quad (VII.51)$$

otrzymujemy następujące warunki

$$\begin{aligned} D_1^*(T) \Big|_{\Omega_2''} &\neq 0, & D_1^*(T) \Big|_{\Omega_1''} &\neq 0, \\ D_1^*(T) \Big|_{\Omega_2''} &= f_2 - \Phi h_2, & D_1^*(T) \Big|_{\Omega_3''} &= f_3 - \Phi h_3, \end{aligned} \quad (\text{VII.52})$$

Tym samym zakończyliśmy dowód, że *GSS* postaci (VII.39) spełnia wszystkie warunki brzegowo-początkowe (VII.7-8).

Na zakończenie zauważmy, że przy takim postawieniu zagadnienia, jak w tym paragrafie, możliwe staje się rozwiązywanie również zadania, w którym określając jaki ma być efekt badanego procesu (np. rozkład temperatury po czasie Θ), poszukujemy jakie powinny być warunki początkowe (np. rozkład temperatury w chwili $t = 0$). W tym miejscu chcieliśmy zasygnalizować możliwość wykorzystania *MRF* do rozwiązywania zadań odwrotnych przepływu ciepła.

PODSUMOWANIE I WNIOSKI KOŃCOWE

1) Tezą i celem pracy było wykazanie przydatności i celowości stosowania metody *R*-funkcji do wyznaczania pól temperatury. Niewątpliwymi zaletami tej metody są:

- a) dokładne uwzględnienie w obliczeniach nawet najbardziej skomplikowanego kształtu;
- b) rozpatrywany obszar może być wklęsły i wielospójny;
- c) ścisłe spełnienie dowolnych warunków brzegowych;
- d) zadanie sformułowane przy użyciu pojęcia *R*-funkcji najczęściej zawiera bardzo małą liczbę stopni swobody (niewiadomych);
- e) możliwość rozwiązywania zagadnień liniowych i nieliniowych;
- f) możliwe są również nieliniowe warunki brzegowe (wielkości f_i oraz h_i we wzorach (V.26-27) mogą być funkcjami miejsca, czasu lub temperatury);
- g) *MRF* może być uzupełnieniem innych metod, np. metody elementów skończonych (por.[16]) lub metody elementów brzegowych (por.[34]).

2) Najbardziej istotną, zdaniem autora, wadą metody jest konieczność "manualnego" wykonania licznych przekształceń analitycznych w celu uzyskania równania brzegu lub jego części. Może to być źródłem błędów czasami trudnych do wykrycia. Jest to chyba jedna z głównych przyczyn hamujących szersze zastosowanie *MRF*, chociaż pojawiły się prace poświęcone komputerowemu generowaniu równań i struktur rozwiązania (por.[15-17 i 35]).

3) W części numerycznej metody mogą być stosowane dowolne metody dyskretne.

4) Rozwiązania przykładów testujących, jak również bardziej rozbudowanych zadań związanych z obliczeniami cieplnymi, pokazują, że metoda jest efektywna i dokładna. Wszystkie prezentowane w pracy rozwiązania weryfikowano przez porównanie bądź z rozwiązaniami analitycznymi, bądź numerycznymi uzyskanymi za pomocą wielokrotnie sprawdzonych w praktyce programów wykorzystujących *MRS*.

5) W przypadku dyskretyzacji czasu (pochodna po czasie zastąpiona ilorazem różnicowym) krok czasowy miał bardzo mały wpływ na dokładność rozwiązania. Badania prowadzone w tym zakresie miały jedynie charakter "doświadczalny", ale pozwalają wnioskować, że dobór siatki czasu (w rozsądnych granicach z punktu widzenia praktyki obliczeń numerycznych) ma znaczenie drugorzędne dla dokładności rozwiązania.

6) Czas rozwiązania, w przypadku zadań stacjonarnych, jest krótszy lub porównywalny z czasem rozwiązania metodą różnic skończonych. Zależy od stopnia "złożoności" kształtu badanego obiektu. Czas obliczeń zadań niestacjonarnych jest znacznie dłuższy niż w metodzie różnic skończonych. Spowodowane to jest koniecznością obliczania całek tworzących funkcjonal problemu na każdym kroku czasowym (w zadaniu stacjonarnym wykonywane jest jednokrotne całkowanie).

7) Generalnym założeniem pracy było przeprowadzenie badań w zakresie wykorzystania MRF w zagadnieniach przepływu ciepła. Metoda wykorzystująca R-funkcje może być stosowana do rozwiązywania licznych problemów mechaniki, np. zginania płyt, zadań kontaktowych itd. Istnieje możliwość analizy bardziej złożonych problemów technicznych z zakresu termomechaniki poprzez sprzężenie pól naprężeń termicznych z polem temperatury. Ten kierunek badań będzie w przyszłości przedmiotem zainteresowania autora rozprawy.

8) Na zakończenie należy podkreślić, że wiele zagadnień matematycznych dotyczących tej metody nie jest dotychczas zbadanych. Można wymienić tu m.in. wpływ wyboru funkcji opisującej obszar Ω (por. rozdz. I-III) i funkcji Φ (np. wzór (V.40)) na dokładność rozwiązania.

LITERATURA

- [1] Balcer M.: *Problemy modelowania zadań przewodnictwa cieplnego w aspekcie skracania czasu symulacji numerycznej*, Praca doktorska, Pol.Śl., Gliwice 1992.
- [2] Becker M.: *Heat Transfer - a Modern Approach*, N.Y., Plenum Press, London 1986.
- [3] Białecki R., Nowak A.J.: *Zastosowanie metody brzegowych równań całkowych w teorii przewodnictwa ciepła*, Mechanika i Komputer, Vol.6, No.1, ss. 154-205, 1981.
- [4] Borisow W.T.: *Krystalizacja dwuskładnikowego stopu przy zachowaniu stateczności*, (w j.ros.), Doklady Ak. Nauk SSSR, No.136, ss. 583-586, 1961.
- [5] Brebbia C.A., Tjellens J.C.F., Wrobel L.C.: *Boundary Elements Techniques*; Springer-Verlag, Berlin 1984.
- [6] Cecot W., Orkisz J.: *Porównanie wybranych metod analityczno-numerycznych na przykładzie statycznej analizy płyt dowolnego kształtu*, Rozprawy Inż., Vol.31, No.31, ss. 459-472, 1983.
- [7] Crank J.: *The Mathematics of Diffusion*, Oxford at the Clarendon Press 1956.
- [8] Grzymkowski R.: *Zastosowanie zadań odwrotnych w termodynamice procesów odlewniczych*, Z.N.Pol.Śl., Mechanika 104, praca habilitacyjna, Gliwice 1991.
- [9] Grzymkowski R., Wawrzynek A.: *Nieklasyczna metoda wyznaczania pola temperatury w kokili*, Prace Kom. Metalur-

- giczno-Odlewniczej PAN, Metalurgia, Vol.42, ss. 37-41, 1992.
- [10] Grzymkowski R., Wawrzynek A.: *Non-Classical Approach to the Solution of the Initial Problem in Arbitrary Domain*, Proc. of the 1st European Conference on Numerical Methods in Engineering, Brussels 1992.
- [11] Hong C.P., Umeda T., Kimura Y.: *Numerical Models for Casting Solidification Problems*, Part II. Metall. Trans. B, Vol.15B, pp. 101-105, 1984.
- [12] Kapusta A., Mochnacki B.: *The Analysis of Heat Transfer Processes in the Cylindrical Radial Continuous Casting Volume*. Bull. of the Pol. Ac. of Sc., Techn. Sc., Vol. 36, No. 5-6, 1988.
- [13] Kapusta A., Wawrzynek A.: *Application of Rvachev's Function in Numerical Simulation of Moving Boundary Problems*, Solidification of Metals and Alloys, Vol.16, pp. 150-158, 1992.
- [14] Kapusta A., Wawrzynek A.: *Numerical simulation of solidification process in domain of continuous casting with complex shape*, Solidification of Metals and Alloys, Vol.18, pp. 87-94, 1993.
- [15] Korzeniowski M., Orkisz J.: *Zastosowanie R-funkcji do automatycznego generowania charakterystyk elementów skończonych dowolnego kształtu*, Proc. 5th Nat. Conf. Comput. Meth. in Structural Mechanics, Karpacz '81, Vol.1, ss.235-244, 1981.
- [16] Kozdoba L.A.: *Metody rozwiązywania nieliniowych zadań przewodnictwa ciepła*, (w j.ros.), Nauka, Moskwa 1975.
- [17] Kravchenko V.F., Rvachev V.L., Shkvarko Yu.V.: *The method of R-functions in problems of identification of the shape parameters of a scattering object from radio remote sensing data*, Soviet Physics - Doklady, Vol.34, No.31 pp. 58-59, 1989.

- [18] Kravchenko V.F., Rvachev V.L., Sheiko T.I.: *New solutions of electrodynamic exterior problems for complex-shaped regions*, Soviet Physics - Doklady, Vol.35, No.3, pp. 233-235, 1990.
- [19] Kucwaj J., Orkisz J.: *A FORTRAN subroutine of symbolic differentiation*, Mechanika i Komputer, No5, PWN, Warszawa 1982.
- [20] Kucwaj J., Orkisz J.: *Computer approach to the R-functions method of solution of boundary value problems in arbitrary domains*, Computers & Structures, Vol.22, No.1, pp. 1-12, 1986.
- [21] Kucwaj J., Orkisz J.: *Computer approach to an analytical-numerical method of the solution of boundary value problems in mechanics*, Proc. 6th Int. Conf. Structural Mech. Reactor Tech., Paris, '81, Paper M 3,9, 1982.
- [22] Majchrzak E.: *Application of BEM for numerical modelling of 3D Casting Solidification*, IABEM'93, Extended Abstracts, TUB, Braunschweig 1993.
- [23] Majchrzak E.: *Numerical simulation of continuous casting solidification by BEM*, Eng. Anal. with Boundary Elements, Vol.11, pp. 95-99, 1993.
- [24] Majchrzak E.: *Utilization of Boundary Element Method in the Thermal Theory of Foundry*, Proceedings of the 1st Int. Conf., Vol.2 Heat Transfer, Southampton, Ed. Wrobel, L.C. and Brebbia, C.A., Comp. Mech. Publ. de Gruyer, 1991.
- [25] Majchrzak E.: *Zastosowanie metody elementów brzegowych w termodynamiczne procesów odlewniczych*, Praca hab., Zeszyty Naukowe Pol.Śl., No.102, Gliwice 1991.
- [26] Majchrzak E., Mochnacki B.: *A Temperature Field Identification in the Volume of Ingot Mould*, Mat. Konf. Metody i Środki Projektowania Wspomagane Komputrowo, IPBM, pp. 202-209, Warszawa 1989.

- [27] Majchrzak E., Mochnacki B.: *Modelowanie krzepnięcia stopów metodą elementów brzegowych*, Arch TBM, Zeszyt 10, ss. 77-85, 1992.
- [28] Majchrzak E., Wawrzynek A.: *Utilization of R-Functions Method in Numerical Modelling of Solidification Process*. Vol. 1: Conduction, Radiation and Phase Change, Computational Mechanics Publications, Elsevier Applied Science, London and New York, 1992.
- [29] Mazur K.: *Symulacja procesu krzepnięcia metodą elementów skończonych*, Praca doktorska, Pol.Śl., Gliwice 1981 (nie publikowana).
- [30] *Metody poprawnego projektowania technologii odlewniczych*, Poradnik opracowany przez Instytut Odlwnictwa, Kraków 1983.
- [31] Michlin S.G., Smolocki C.L.: *Metody przybliżone rozwiązywania równań różniczkowych i całkowych*, PWN, Warszawa 1972.
- [32] Mochnacki B.: *Numerical Modelling of Continuous Casting Process*. Arch. of Met., Vol. 1, 1983.
- [33] Mochnacki B.: *Substitute Thermal Capacity of Metal Solidifying in an Interval of Temperature*, Bull. of Pol. Ac. of Sc., Techn. Sc., No. 3-4, pp. 127-143, 1984.
- [34] Mochnacki B., Biedrońska M.: *The Application of Collocation Method and Spline Functions to Linear and Non-Linear Problems of Non-Stationary Heat Conduction*, Bull. of the Pol. Ac. of Sc., Techn. Sc., No. 5-6, pp. 297-316, 1984.
- [35] Mochnacki B., Majchrzak E., Kapusta A.: *Linearyzacja matematycznego opisu procesu krzepnięcia i stygnięcia metalu w formie*, Prace Komisji Metalurgiczno-Odlewniczej, Metalurgia, Vol. 42, ss. 27-35, 1992.

- [36] Mochnacki B., Majchrzak E., Kapusta A.: *Numerical Model of Heat Transfer Processes in Solidifying and Cooling Steel Ingot*. Free and Moving Boundary Problems, Vol. 1, de Gruyer, Berlin and New York 1991.
- [37] Mochnacki B., Suchy J.S.: *Modelowanie i symulacja krzepnięcia odlewów*. Wyd.Naukowe PWN, Warszawa 1993.
- [38] Mochnacki B., Suchy J. *Designing of technological process and continuous casting properties on the basis of numerical simulation*, Gietwerk Perspektief, Vol. 13, No4, pp. 22-28, 1993.
- [39] *Modelowanie numeryczne pól temperatury*, Praca zb. pod red. J.Szarguta, Wyd Nauko-Techniczne, Warszawa 1992.
- [40] Nowak A.J. *Metoda elementów brzegowych z zastosowaniem wielokrotnej zasady wzajemności*, Zeszyty Naukowe Pol. Śl., Praca habilitacyjna, Zeszyt Energetyka116, Gliwice 1993.
- [41] *Poradnik Inżyniera, Odlewnictwo, Rozdz.XVII: Metody matematyczne w cieplnych obliczeniach procesów odlewniczych*, WNT, Warszawa 1986.
- [42] Poterasu V.F., Mihalache N.: *Brittle Fracture Materials by BEM and R-functions*,
- [43] Rogers J., Berger A., Ciment M.: *Numerical Solution of a Diffusion Consumption Problem with Free Boundary*, SIAM J. Num. Anal., No. 12, pp. 645-659, 1975.
- [44] Rogers J., Berger A., Ciment M.: *The Alternating Phase Change Truncation Method for a Stefan Problem*, SIAM J. Num. Anal., No. 16, pp. 562-587, 1979.
- [45] Ruddle R.W.: *The Solidification of Casting*, London: The Inst. of Metals, 1957.
- [46] Rwachew L.W., Rwachew W.A.: *Nieklasyczne metody teorii aproksymacji w problemach brzegowych*, (w j.ros.), Naukowa Dumka, Kijew 1979.

- [47] Rwachew W.L.: *Teoria R-funkcji i jej niektóre zastosowania*, (w j.ros.) Naukowa Dumka, Kijew 1982.
- [48] Rwachew W.L., Procenko W.S.: *Zadania kontaktowe teorii sprężystości dla nieklasycznych obszarów*, (w j.ros.), Naukowa Dumka, Kijew 1977.
- [49] Rwachew W.L., Slesarenko A.P.: *Algebra logiki i przekształcenia całkowe w problemach brzegowych*, (w j.ros.), Naukowa Dumka, Kijew 1978.
- [50] Rwachew W.L., Slesarenko A.P.: *Algebrowe i logiczne i projekcyjne metody w zadaniach wymiany ciepła*, (w j.ros.), Naukowa Dumka, Kijew 1978.
- [51] Rwachew W.L.: *Elementy analizy dyskretnej i teorii R-funkcji*, (w j.ros.), Charków 1972.
- [52] Sabonnadiere J.C., Coulomb J.L.: *La methode des elements finis. Du modele ..a la CAO*, Hermes, Paris 1986.
- [53] Samojłowicz I.A.: *Formowanie wlewka*, (w j.ros.), Metalurgia, Moskwa 1977.
- [54] Sarler B., Alujevic A.: *Melting of Anisotropic Crystals by the Boundary Domain Integral Method*, Computational Modelling of Free and Moving Problems, Computational Mechanics Publications de Gruyer, 1991.
- [55] Slesarenko A.P.: *O rozwiązywaniu pewnych zadań brzegowych dla wielospójnych obszarów o złożonej formie metodą strukturalną*, (w j.ros.), Wyd.Inst.Cybernetyki Ak.Nauk USRR, 1971.
- [56] Szargut J.: *Obliczenia cieplne pieców przemysłowych*, Wyd.Śląsk, Katowice 1977.
- [57] Szargut J., Mochnacki B.: *Różnicowy model matematyczny procesu krzepnięcia wlewka stali uspokojonej*, Arch. Hutnictwa, Nr 3, ss.270-289, 1971.

- [58] Szargut J., Skorek J.: *Analysis of Ingot Temperature Field in Continuous Casting*. Metals Technology, Vol. 36, 1980.
- [59] Voller V.R.: *Recent Developments in the Modelling of Solidification Processes*, Computational Modelling of Free and Moving Problems, Computational Mechanics Publications de Gruyer, 1991.
- [60] Waberski A.: *A note on the analysis of nonstationary random vibrations of plates of complex form*, J. Sound Vibr., Vol. 70, pp. 453-457, 1980.
- [61] Waberski A.: *Vibration statistics of thin plates with complex form*, AIAA J., Vol. 16, No. 8, pp. 788-794, 1980.
- [62] Wawrzynek A.: *Application of R-Function Method for Computation of the Temperature Field in the Volume of a Continuous Casting Mould*. Bull. of the Pol. Ac. of Sc., Techn. Sc., Vol. 39, No. 4, 1991.
- [63] Wawrzynek A.: *Modelowanie procesu krzepnięcia odlewu za pomocą R-funkcji*, 30th Symposium Modelling in Mechanics, ss. 259-262, Gliwice 1991.
- [64] Wawrzynek A.: *Zastosowanie metody R-funkcji do wyznaczenia pola temperatury w obszarach o złożonym kształcie*, Arch. Technologii Bud. Maszyn PAN, Zeszyt 10, ss. 133-141, 1992.
- [65] Wawrzynek A.: *Application of R-functions Method to Numerical Solution of Non-Steady Thermal Problems*, Numerical Methods in Thermal Problems, Vol.VIII, Part 1, Pineridge Press, Swansea 1993.
- [66] Wiśniewski S.: *Wymiana ciepła*, PWN, Warszawa 1979.
- [67] Zienkiewicz O.: *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.

**MODELOWANIE KRZEPNIĘCIA
I STYGNIEŃCIA METALI
ORAZ PROBLEMÓW DYFUZJI CIEPŁA
ZA POMOCĄ METODY R-FUNKCJI**

Streszczenie

W pracy zaprezentowano sposób zastosowania metody *R*-funkcji (*MRF*) do numerycznego rozwiązywania zadań wymiany ciepła. Przedstawiono podstawy teoretyczne *R*-funkcji, a następnie nowe algorytmy rozwiązywania problemów liniowych i nieliniowych, a także stacjonarnych i niestacjonarnych. Wprowadzono czasoprzestrzenną wersję *MRF*.

Praca zawiera liczne przykłady testujące zaproponowane algorytmy i ich wykorzystanie do wyznaczania pól temperatury w konkretnych urządzeniach technicznych. Świadczą one o dokładności i efektywności numerycznej omówionej metody.

**MODELLING OF SOLIDIFICATION
AND COOLING OF METALS
AND HEAT DIFFUSION PROBLEMS
BY R-FUNCTION METHOD**

Summary

In this monograph the way of *R*-functions application in the range of heat conduction problems likewise for numerical modelling of moving boundary problems is presented. The new algorithms of numerical solution of linear and non-linear, steady and non-steady problems are discussed. The spatial-time version of *RFM* is also introduced (comp. the chapter VII).

The theoretical investigations are supplemented by numerous examples testing proposed algorithms and their applications in engineering practice. The presented examples confirm the exactness and numerical effectiveness of proposed method.

MODELLIRUNG DER METALLERSTARRUNG UND DER METALLKÜHLUNG UND DER PROBLEME DER WÄRMEDIFFUSION MITTELS DER R-FUNKTION METHODE

Resümee

In dieser Arbeit wurde die Anwendung der R-Funktion-Methode (MRF) in der numerischen Lösung des Wärmeaustauschs, in dem auch die Aufgaben mit beweglichen Grenzen, vorgestellt wurden.

Es wurden die theoretischen Grundlagen der R-Funktion und danach die neue Algorithmen der Problemlösungen der linearischen und nichtlinearischen, wie auch die stationären und unstationären Problemen vorgestellt. Es wurde auch die Raumzeitliche Version der MRF-Methode eingeführt.

Die Arbeit enthält zahlreiche überprüfende Beispiele, welche die vorgeschlagene Algorithmen und ihre Ausnutzung in der Temperaturfeldbestimmung in den Aufgaben der Ingenieurpraxis dienen. Die vorgestellten Ergebnisse bestätigen die Genauigkeit und Effektivität der besprochenen numerischen Methode.

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
Politechniki Śląskiej

P. 3361/94/119

Druk: Drukarnia Gliwice, ul. Zwycięstwa 27, tel. 230 49 80