ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ

Stanisław KOWALIK

PODEJMOWANIE DECYZJI W GÓRNICTWIE W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI

P.3351/96

GÓRNICTWO
z. 228

GLIWICE
1996

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 1332

P.3351/96

Stanisław KOWALIK

PODEJMOWANIE DECYZJI W GÓRNICTWIE W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI

GLIWICE 1996

OPINIODAWCY

Prof. dr hab. inż. Bernard Drzęźla
Dr hab. Józef Drewniak, Prof. Uniwersytetu Śląskiego

KOLEGIUM REDAKCYJNE

REDAKTOR NACZELNY – Prof. dr hab. inż. Jan Bandrowski
REDAKTOR DZIAŁU – Dr hab. inż. Franciszek Plewa
SEKRETARZ REDAKCJI – Mgr Elżbieta Leśko

REDAKCJA

Mgr Anna Błażkiewicz

REDAKCJA TECHNICZNA

Alicja Nowacka

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0372 - 9508

Wydawnictwo Politechniki Śląskiej
ul. Kujawska 3, 44 - 100 Gliwice

Nakl. 150 + 83 Ark. wyd. 14 Ark druk. 13 Papier offset. kl. III 70 x 100, 80 g
Oddano do druku 21. 10. 1996 Podpis. do druku 21. 10. 1996 Druk ukończ. w listopadzie 1996

Fotokopie, druk i oprawę wykonał: "ROLEK", Gliwice, ul. Kazimierza Wielkiego 4

SPIS TREŚCI

Str.

1. WSTĘP ... 15
2. CEL, TEZA I ZAKRES PRACY ... 17
3. WYKORZYSTANIE KORELACJI USZEREGOWAŃ W PODEJMOWANIU DECYZJI ... 20
   - 3.1. Uszeregowanie obiektów ... 20
   - 3.2. Określenie zgodności opinii dwóch ekspertów ... 21
   - 3.3. Określenie zgodności opinii grupy ekspertów ... 24
   - 3.4. Badanie istotności współzależności opinii ekspertów oraz eliminacja ekspertów o ekstremalnych opiniach ... 26
   - 3.5. Przykład wykorzystania korelacji uszeregowań do lokalizacji epicentrum grupy wstrząsów w kopalni ... 27
4. DECYZJE N-WYMIAROWE PRZY WYKORZYSTANIU EKSPERTÓW I WSPOMAGANIA KOMPUTEROWEGO ... 34
   - 4.1. Cybernetyczny model przedsiębiorstwa ... 34
   - 4.2. Określenie opinii n-wymiarowej ... 36
   - 4.3. Definicja bliskości dwóch opinii oraz bliskości jednej opinii od zbioru opinii wzajemnie zbliżonych do siebie ... 38
   - 4.4. Znajdywanie najliczniejszego zbioru opinii zbliżonych ... 40
   - 4.5. Określenie decyzji "optymalnej" ... 44
   - 4.6. Przykład wykorzystania komputera do określania strefy niebezpiecznej przy wstrząsach górniczych ... 45
   - 4.7. Zwiększenie liczby opinii bliskich ... 47
5. WYKORZYSTANIE TEORII GIER O SUMIE ZEROWEJ ... 48
   - 5.1. Rodzaje gier ... 48
   - 5.2. Gry o sumie zerowej ... 50
   - 5.3. Strategie oraz macierz bezpieczeństwa ... 51
   - 5.4. Punkt siodłowy i zasada maksyminu (minimaksu) ... 52
   - 5.5. Zasada dominacji ... 54

Str.

5.6. Strategie mieszane ... 57
5.7. Przykłady zastosowania teorii gier o sumie zerowej w górnictwie ... 61
6. WYKORZYSTANIE TEORII GIER NIEKOOPERACYJNYCH O SUMIE NIEZEROWEJ DO PODEJMOWANIA DECYZJI ... 71
6.1. Gry niekooperacyjne ... 71
6.2. Punkt równowagi w grze niezerowej ... 72
6.3. Poszukiwanie rozwiązania w grach niekooperacyjnych o sumie niezerowej ... 75
7. PODEJMOWANIE DECYZJI KOMPROMISOWYCH W OPARCIU O TEORIĘ GIER KOOPERACYJNYCH ... 80
7.1. Gry kooperacyjne ... 80
7.2. Wybór strategii maksymalizujących sumę zysków z podziałem proporcjonalnym do wartości gry ... 82
7.3. Obszar negocjacji gry ... 83
7.4. Rozwiązanie gry wykorzystujące poziomy bezpieczeństwa wynikające z wartości gry ... 85
7.5. Wykorzystanie strategii gróźb jako status quo ... 87
7.6. Wybór metody postępowania ... 90
8. WYKORZYSTANIE ZASAD GRY Z NATURĄ W PODEJMOWANIU DECYZJI ... 91
8.1. Konflikt między decydentem a Naturą ... 91
8.2. Zasada minimalnego ryzyka ... 92
8.3. Wskaźnik pesymizmu-optymizmu ... 94
8.4. Zasada równych prawdopodobieństw ... 95
8.5. Porównanie strategii bezpiecznych ze strategiami stosowanymi w grze z Naturą ... 96
9. PODEJMOWANIE DECYZJI W SYTUACJACH NIEPEWNYCH Z WYKORZYSTANIEM PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO ... 97
9.1. Charakter procesów decyzyjnych przy wykorzystaniu programowania dynamicznego ... 97
9.2. Ogólne sformułowanie problemu ... 98
9.3. Podejmowanie decyzji kolejno przez decydentów na podstawie znajomości poprzednich decyzji ... 101

Str.

9.3.1. Przedsiębiorstwo P_1 jako pierwsze podejmuje decyzję ... 101
9.3.2. Przedsiębiorstwo P_2 jako pierwsze podejmuje decyzję ... 101
9.4. Podejmowanie decyzji równocześnie przez przedsiębiorstwa na poszczególnych etapach ... 105
9.4.1. Wykorzystanie zasady dominacji i strategii maksyminowych przy wyborze decyzji ... 105
9.4.2. Wykorzystanie strategii Nasha przy wyborze decyzji ... 108
9.4.3. Wykorzystanie strategii optymalnych w sensie Pareto ... 110
9.5. Stosowanie różnych sposobów znajdywania strategii "optymalnych" ... 112
10. WYKORZYSTANIE TEORII ZBIORÓW ROZMYTYCH DO PODEJMOWANIA DECYZJI ... 114
10.1. Zastosowanie teorii zbiorów rozmytych w różnych dziedzinach ... 114
10.2. Zbiory rozmyte ... 115
10.3. Operacje na zbiorach rozmytych ... 117
10.4. Wypukłe zbiory rozmyte ... 131
10.5. Liczby rozmyte ... 132
10.6. Reprezentacja typu L-R liczb rozmytych ... 136
10.7. Relacje rozmyte (wielowartościowe) ... 137
11. PODEJMOWANIE DECYZJI W OTOCZENIU ROZMYTYM ... 141
11.1. Określenie otoczenia rozmytego ... 141
11.2. Decyzja rozmyta ... 142
11.3. Decyzja optymalna ... 143
11.4. Podejmowanie decyzji przy wielu celach i wielu ograniczeniach ... 144
11.5. Podejmowanie decyzji z wykorzystaniem różnych definicji decyzji rozmytej ... 145
11.6. Możliwość wykorzystania teorii zbiorów rozmytych w górnictwie ... 150
12. PODEJMOWANIE DECYZJI GRUPOWYCH W OPARCIU O TEORIĘ ZBIORÓW ROZMYTYCH ... 152
12.1. Uporządkowania preferencyjne decydentów ... 152
12.2. Określenie grupowej preferencji społecznej ... 153
13. WYKORZYSTANIE LICZB ROZMYTYCH DO PROGNOZOWANIA SILNYCH WSTRZĄSÓW GÓRNICZYCH ... 159
13.1. Model matematyczny zagrożenia wstrząsami ... 159

Str.

13.2. Określenie liczby rozmytej T_{1roz} ... 163
13.3. Określenie stopnia wiarygodności prognozy ... 165
14. SIECI NEURONOWE ... 170
14.1. Własności i zastosowania sieci neuronowych ... 170
14.2. Pojedynczy neuron ... 171
14.3. Warstwa neuronów ... 172
14.4. Uczenie pojedynczego neuronu ... 174
14.5. Uczenie liniowej sieci neuronowej ... 175
14.6. Samouczenie się sieci neuronowej ... 176
14.7. Sieci wielowarstwowe ... 177
14.8. Sieci nieliniowe ... 177
14.9. Przykład wykorzystania sieci neuronowej w górnictwie ... 181
15. ZAKOŃCZENIE ... 194
LITERATURA ... 196
STRESZCZENIA ... 202

CONTENTS

Page

1. INTRODUCTION ... 15
2. PURPOSE, THESIS AND SCOPE OF THE WORK ... 17
3. UTILISING RANK CORRELATION IN DECISION MAKING ... 20
3.1. Lining objects up ... 20
3.2. Determining an agreement of opinions expressed by two experts ... 21
3.3. Determining an agreement of opinions expressed by a group of experts ... 24
3.4. Examining the significance of the correlation of the experts'opinions and eliminating extreme opinions ... 26
3.5. Example of utilising rank correlation in locating the epicentre of tremors in a mine ... 27
4. N-DIMENSIONAL DECISIONS WITH THE UTILISATION OF EXPERTS AND COMPUTER-AIDED SYSTEM ... 34
4.1. Cybernetic model of a plant ... 34
4.2. Determining n-dimensional opinion ... 36
4.3. Definitions of the proximity of two opinions and the proximity of one opinion to the set of opinions close to each other ... 38
4.4. Finding the most numerous set of close opinions ... 40
4.5. Determining the optimum decision ... 44
4.6. Example of computer application in determining a danger area in the case of tremors ... 45
4.7. Increase in the number of close opinions ... 47
5. MAKING USE OF THE THEORY OF ZERO-SUM GAMES ... 48
5.1. Kinds of games ... 48
5.2. Zero-sum games ... 50
5.3. Strategies and safety matrix ... 51
5.4. Saddle point and maximin (minimax) principle ... 52
5.5. Domination priciple ... 54
5.6. Mixed strategies ... 57

Page

5.7. Examples of the application of the zero-sum games theory in mining ... 61

6. UTILISING THE THEORY OF NON-COOPERATIWE NONZERO-SUM GAMES IN DECISION MAKING ... 71

6.1. Non-cooperative games ... 71

6.2. Balance point in a nonzero-sum game ... 72

6.3. Search for a solution in non-cooperative nonzero-sum games ... 75

7. MAKING COMPROMISE DECISIONS ON THE BASIS OF THE THEORY OF COOPERATIVE GAMES ... 80

7.1. Cooperative games ... 80

7.2. Choice of strategies maximizing the sum of gains with the division proportional to the value of the game ... 82

7.3. Negotiation area of the game ... 83

7.4. Solution to the game utilising safety levels resulting from the value of the game ... 85

7.5. Making use of threat theories as status quo ... 87

7.6. Choice of the procedure ... 90

8. MAKING USE OF THE PRINCIPLES OF THE GAME WITH NATURE ... 91

8.1. Conflict between a decision-maker and Nature ... 91

8.2. Principle of minimal risk ... 92

8.3. Index of pessimism-optimism ... 94

8.4. Principle of equal probabilities ... 95

8.5. Comparision of safe strategies with the strategies applied to the game with Nature ... 96

9. DECISION MAKING IN UNCERTAIN SITUATIONS WITH THE UTILISATION OF DYNAMIC PROGRAMMING ... 97

9.1. Character of decision making processes while using dynamic programming ... 97

9.2. Formulating a problem in a general way ... 98

9.3. Making decisions by decision-makers successively on the basis of the knowledge of the previous decisions ... 101

9.3.1. Plant P_1 as the first to make a decision ... 101

9.3.2. Plant P_2 as the first to make a decision ... 101

9.4. Making decisions concurrently by plants on particular stages ... 105

Page

9.4.1. Utilising domination principle and maximin strategies for the choice of a decision ... 105

9.4.2. Making use of Nash strategy for the choice of a decision ... 108

9.4.3. Utilising optimum strategies as understood by Pareto ... 110

9.5. Using different methods of finding "optimum" strategies ... 112

10. UTILISING THE THEORY OF FUZZY SETS IN DECISION MAKING ... 114

10.1. Application of the theory of fuzzy sets to different fields ... 114

10.2. Fuzzy sets ... 115

10.3. Operations on fuzzy sets ... 117

10.4. Convex fuzzy sets ... 131

10.5. Fuzzy numbers ... 132

10.6. L-R representation of fuzzy numbers ... 136

10.7. Fuzzy relations (multiple-valued) ... 137

11 DECISION MAKING IN FUZZY NEIGHBOURHOOD ... 141

11.1. Defining a fuzzy neighbourhood ... 141

11.2. Fuzzy decision ... 142

11.3. Optimum decision ... 143

11.4. Decision making with many purposes and many restrictions ... 144

11.5. Decision making with the utilisation of different definitions of a fuzzy decision. 145

11.6. Usability of the theory of fuzzy sets in mining ... 150

12. MAKING GROUP DECISIONS ON THE BASIS OF THE THEORY OF FUZZY SETS ... 152

12.1. Preferential ordering of decision-makers ... 152

12.2. Defining a group social preference ... 153

13. UTILISING FUZZY NUMBERS IN PREDICTING POWERFUL TREMORS ... 159

13.1. Mathematical model of the tremor hazard ... 159

13.2. Defining fuzzy number T_{1roz} ... 163

13.3. Determining a reliability degree of a prediction ... 165

14. NEURON NETWORKS ... 170

14.1. Properties and utilization of neuron networks ... 170

14.2. Single neuron ... 171

14.3. Layer of neurons ... 172

Page

14.4. Teaching a single neuron ... 174
14.5. Teaching a linear neuron network ... 175
14.6. Neuron network learning ... 176
14.7. Multilayer networks ... 177
14.8. Nonlinear networks ... 177
14.9. Example of utilising a neuron network in mining ... 181
15. CONCLUSION ... 194
LITERATURE ... 196
SUMMARY ... 202

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

1. ВСТУПЛЕНИЕ ... 15
2. ЦЕЛЬ, ТЕЗИС И ОБЪЕМ РАБОТЫ ... 17
3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РАНГОВОЙ КОРРЕЛЯЦИИ ДЛЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ... 20
   3.1. Упорядочение объектов ... 20
   3.2. Определение сходства мнений двух экспертов ... 21
   3.3. Определение сходства мнений группы экспертов ... 24
   3.4. Исследование существенности взаимозависимости мнений экспертов и исключение экспертов выражающих крайные мнения ... 26
   3.5. Пример использования ранговой корреляции для локализации эпицентра группы толчков на шахте ... 27
4. Н-РАЗМЕРНЫЕ РЕШЕНИЯ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЭКСПЕРТОВ И КОМПЬЮТЕРА ... 34
   4.1. Кибернетическия модель предприятия ... 34
   4.2. Определение н-размерного мнения ... 36
   4.3. Определение сходства двух мнений а также сходства одного мнения и множества мнений взаимно близких друг другу ... 38
   4.4. Нахождение самого численного множества сходных мнений ... 40
   4.5. Определение „оптимального" решения ... 44
   4.6. Пример использования компьютера для определения опасной зоны при горных толчках ... 45
   4.7. Увеличение числа близких мнений ... 47
5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРИИ ИГР С НУЛЕВОЙ СУММОЙ ... 48
   5.1. Виды игр ... 48
   5.2. Игры с нулевой суммой ... 50
   5.3. Стратегии и матрица безопасности ... 51
   5.4. Седловая точка и принцип максимина (минимакса) ... 52

Стр.

5.5. Принцип доминирования 54
5.6. Смешанные стратегии 57
5.7. Пример использования теории игр с нулевой суммой в горном деле 61
6. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРИИ НЕКООПЕРИРУЮЩИХ ИГР С НЕНУЛЕВОЙ СУММОЙ ДЛЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ 71
6.1. Некооперирующие игры 71
6.2. Точка баланса в ненулевой игре 72
6.3. Поиски решения в некооперативных играх с ненулевой суммой 75
7. ПРИНЯТИЕ КОМПРОМИССНЫХ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ КООПЕРАТИВНЫХ ИГР 80
7.1. Кооперирующие игры 80
7.2. Выбор стратегий максимизующих сумму выгод с делением пропорциональным значению игры 82
7.3. Область переговоров игры 83
7.4. Решение игры использующее уровни безопасности вытекающие из значения игры 85
7.5. Использование стратегий угроз как статус-кво 87
7.6. Выбор метода выполнения работы 90
8. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИНЦИПОВ ИГРЫ С ПРИРОДОЙ ПРИ ПРИНЯТИИ РЕШЕНИЙ 91
8.1. Конфликт между ответственным лицом и Природой 91
8.2. Принцип минимального риска 92
8.3. Показатель песимизма-оптимизма 94
8.4. Принцип равных вероятностей 95
8.5. Сравнение безопасных стратегий со стратегиями применяемыми в игре с Природой 96
9. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В НЕЯСНЫХ СИТУАЦИЯХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИНАМИЧЕСКЕГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ 97
9.1. Характер процессов принятия решений с использованием динамического программирования 97
9.2. Общая постановка проблемы 98
9.3. Принятие решений поочередно ответственными лицами на основании знания предыдущих решений 101
9.3.1. Предприятие P_1 первым принимает решение 101

Стр.

9.3.2. Предприятие P_2 первым принимает решение 101
9.4. Принятие решений одновременно двумя предприятиями на отделных стадиях 105
9.4.1. Использование принципа доминирования и максиминовых стратегий при выборе решения 105
9.4.2. Использование стратегий Наша при выборе решения 108
9.4.3. Использование оптимальных стратегий в смысле Парето 110
9.5. Применение разных способов нахождения „оптимальных" стратегий 112
10. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРИИ РАЗМЫТЫХ МНОЖЕСТВ ДЛЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ 114
10.1. Применение теории размытых множеств в разных областях 114
10.2. Размытые множества 115
10.3. Операции на размытых множествах 117
10.4. Выпуклые размытые множества 131
10.5. Размытые числа 132
10.6. Представление типа L-R размытых чисел 136
10.7. Размытые отношения (многозначимые) 137
11. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В РАЗМЫТОЙ СРЕДЕ 141
11.1. Определение размытой среды 141
11.2. Размытое решение 142
11.3. Оптимальное решение 143
11.4. Принятие решений при многих целях и многих ограничениях 144
11.5. Принятие решений с использованием разных определений размытого решения 145
11.6. Возможность использования теории размытых множеств в горном деле 150
12. ПРИНЯТИЕ ГРУППОВЫХ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ РАЗМЫТЫХ МНОЖЕСТВ 152
12.1. Преференциальные упорядочивания ответственных лиц 152
12.2. Определение групповой преференции 153

Стр.

13. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РАЗМЫТЫХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ПРОГНОЗА МОЩНЫХ ГОРНЫХ УДАРОВ 159
13.1. Математическая модель удароопасности 159
13.2. Определение размытого числа T_{froz} 163
13.3. Определение степени достоверности прогноза 165
14. НЕЙТРОННЫЕ СЕТИ 170
14.1. Свойства и применения нейтронных сетей 170
14.2. Отдельный нейтрон 171
14.3. Слой нейтронов 172
14.4. Обучение отдельного нейтрона 174
14.5. Обучение линейной нейтронной сети 175
14.6. Самоучение нейтронной сети 176
14.7. Многослойные сети 177
14.8. Нелинейные сети 177
14.9. Пример использования нейтронной сети в горном деле 181
15. ЗАКЛЮЧЕНИЕ 194
ЛИТЕРАТУРА 196
РЕЗЮМЕ 202

1. WSTĘP

Nowoczesne zarządzanie i kierowanie przedsiębiorstwem wymaga stosowania nowoczesnych metod. Naukowe podejście do spraw kierowania i zarządzania przedsiębiorstwem narzuca, że są to metody matematyczne w dużym stopniu wykorzystujące technikę komputerową. Przedsiębiorstwo traktuje się jako system złożony. W takim systemie można wyodrębnić pewne podsystemy jako składowe części przedsiębiorstwa. Podsystemy z kolei można podzielić na mniejsze fragmenty, aż do ustalenia pojedynczych elementów. Aby taki system złożony mógł sprawnie pracować, muszą być podejmowane właściwe decyzje na różnych szczeblach zarządzania. Decyzje mogą być podejmowane przez pojedynczych ludzi lub przez zespoły do tego powołane. Decyzje te nie tylko mają być podjęte, ale także powinny być wykonane.

Zarządzanie przedsiębiorstwem traktuje się jako proces składający się z ciągu podejmowanych kolejno decyzji. Decyzja polega na wyborze jednego z możliwych kierunków działania, który przy uwzględnieniu określonych kryteriów jest najlepszy czy optymalny.

Ze względu na złożoność, wielkość, poziom skomplikowania danego systemu czy podsystemu, wybór najlepszej decyzji może być trudny. Często też występują sytuacje, gdy posiadane informacje są niepewne lub niepełne. Mówimy wtedy o warunkach niepewności w podejmowaniu decyzji. Informacje też mogą być nieprecyzyjnie przedstawione. Decyzje nieraz trzeba podjąć na podstawie opisu słownego sytuacji. Opis ten często może być opisem tylko przybliżonym. Mogą też wystąpić sytuacje, że różni decydenci będą mieli różne opinie na temat tego samego zagadnienia. Zajdzie więc potrzeba eliminowania opinii zbyt różniących się od grupy pozostałych.

W górnictwie ważnym zagadnieniem jest bezpieczeństwo pracy górników pracujących na dole w kopalni. Górnicy narażeni są na występowanie szeregu zjawisk niebezpiecznych, takich jak wstrząsy podziemne, tąpania, zalanie wodą, wyrzuty gazów, zagrożenia metanowe, pożary. Zjawiska te nie zawsze można przewidzieć i trudno je jak na razie opisać za pomocą związków matematycznych. Mamy tu wyraźnie do czynienia z warunkami niepewnymi, z którymi spo-

tykają się górnicy. Należy zwrócić uwagę na znaczenie warunków niepewnych w górnictwie i na wagę decyzji podejmowanych w sytuacjach niepewnych czy zagrożeniowych, ponieważ chodzi tu o życie wielu ludzi.

W warunkach gospodarki rynkowej, w związku z występowaniem konkurencji między przedsiębiorstwami, sytuacje niepewne mogą doprowadzić do konfliktu interesów przedsiębiorstw. Każde z przedsiębiorstw chce maksymalizować swoje zyski. W związku z tym rozwija się teoria gier niekooperacyjnych, a także kooperacyjnych.

W związku z występowaniem różnego rodzaju sytuacji niepewnych wymagane jest stosowanie różnych metod matematycznych, które opisywałyby daną sytuację i które umożliwiałyby podjęcie decyzji optymalnej. Do opisu takich sytuacji wykorzystuje się też teorię zbiorów rozmytych.

Duże zainteresowanie budzi nowa rozwijająca się metoda oparta na modelach sieci neuronowych. Istnieje szereg możliwości zastosowań sieci neuronowych w różnych dziedzinach życia.

Praca przedstawiona w formie pracy habilitacyjnej została oparta w dużej mierze na wcześniejszych publikacjach [51]-[58]. Rozdziały 4, 5, 7, 8, 9, 10 zostały napisane na podstawie prac (odpowiednio) [52], [51], [57], [55], [53], [56]; rozdział 11 na podstawie prac [56] i [58], a rozdział 12 na podstawie pracy [54].

2. CEL, TEZA I ZAKRES PRACY

Kadra kierująca pracą kopalń spotyka się z różnymi problemami, które wymagają skutecznych i efektywnych rozwiązań, decyzji. Decyzje te podejmowane są w oparciu o wiedzę, doświadczenie i intuicję decydentów. Technika komputerowa umożliwia, jeżeli decydenci dysponować będą odpowiednimi metodami opisującymi sytuację decyzyjną, odpowiednimi algorytmami i programami, w miarę szybkie przeszukiwanie możliwych i wybór najkorzystniejszych rozwiązań. Różnorodność i złożoność problemów, z którymi spotyka się kadra kierownicza kopalni, skłoniły mnie do zaprezentowania szerokiego wachlarza problemów, metod, algorytmów i programów wspomagających procesy decyzyjne.

Celem pracy jest zaprezentowanie różnych metod matematycznych, które by pomagały w zarządzaniu przedsiębiorstwem w warunkach niepewności, opracowanie odpowiednich algorytmów i programów obliczeniowych oraz przedstawienie przykładów wykorzystujących technikę komputerową. Szczególnie zwrócono uwagę na przykłady z dziedziny górnictwa dotyczące sytuacji niebezpiecznych występujących na dole w kopalni.

Teza pracy polega na wykazaniu, że stosowanie tych metod jest opłacalne dla przedsiębiorstwa. Można przez to zwiększyć zysk przedsiębiorstwa lub zabezpieczyć się przed ewentualną stratą. W tak ważnej dziedzinie jak bezpieczeństwo górników pracujących na dole w kopalni można zwiększyć poziom tego bezpieczeństwa. Wiąże się to z dokładniejszą lokalizacją zjawisk niebezpiecznych czy z prognozowaniem tych zjawisk. Prezentowane metody można wykorzystać w różnych dziedzinach działalności przedsiębiorstwa.

Zakres pracy obejmuje różne metody oraz przykłady zaprezentowane w kolejnych rozdziałach. Rozważania rozpoczynają się od korelacji uszeregowań. Na początku rozważono korelację uszeregowań podanych przez dwóch ekspertów. Oceniono zgodność tych uszeregowań dotyczących ważności pewnych obiektów (rozdział 3.2). Następnie uogólniono rozważania na grupę ekspertów. Oceniono zgodność opinii grupy ekspertów. Opinie były wyrażone poprzez rangi. Przeprowadzono testowanie współczynnika zgodności Kendala i Babingtona-Smitha oraz zaprezentowano sposób eliminacji ekspertów o opiniach zbyt różniących się od pozostałych (rozdział 3.3 i 3.4). Zaprezentowaną teorię wykorzystano do określania epicentrum grupy wstrząsów podziemnych w kopalni.

W rozdziale 4 zaprezentowano sposób podejmowania decyzji na podstawie tzw. opinii wielowymiarowych przedstawionych przez ekspertów. Określono też inną metodę wyłaniania opinii zbliżonych do siebie i eliminowania pozostałych, tj. zbyt różniących się od siebie. Podano przykład wykorzystania tej metody do lokalizacji wstrząsu podziemnego przy użyciu różnych metod pomiarowych.

Następnie rozważono metody związane z teorią gier, mianowicie, z teorią gier konfliktowych o sumie zerowej (rozdział 5), z teorią gier niekooperacyjnych o sumie niezerowej (rozdział 6) oraz z teorią gier kooperacyjnych (rozdział 7). Zwrócono uwagę na korzyści zastosowania kooperacji w porównaniu z działaniem przedsiębiorstw nie stosujących kooperacji.

W rozdziale 8 zaprezentowano trzy metody teorii gier z Naturą. Natura została utożsamiona z górotworem, na którym operują górnicy.

Rozdział 9 dotyczy wieloetapowego procesu decyzyjnego, w którym konkurujące ze sobą przedsiębiorstwa mają na celu osiągnięcie jak największych zysków. Sytuacje niepewne objawiają się tutaj tym, że przedsiębiorstwo nie wie, jakie kolejne decyzje podejmie zakład konkurencyjny. Przy rozważaniu tego wieloetapowego procesu decyzyjnego wykorzystano metody programowania dynamicznego.

W rozdziale 10 odniesiono się do sytuacji niepewnych w przypadku, gdy informacje, na podstawie których ma być podjęta decyzja, są niedokładne, nieprecyzyjnie przedstawione lub niepewne. Zaprezentowano tu metody teorii zbiorów rozmytych.

Metody podejmowania decyzji w tzw. otoczeniu rozmytym oraz przy użyciu różnych definicji decyzji rozmytej przedstawiono w rozdziale 11.

Podejmowanie decyzji grupowych w oparciu o teorię zbiorów rozmytych z wykorzystaniem tzw. grupowej preferencji społecznej przedstawiono w rozdziale 12.

W rozdziale 13 przedstawiono przykład wykorzystania liczb rozmytych do prognozowania wystąpienia silnych wstrząsów w kopalni.

W rozdziale 14 przedstawiono podstawy nowej metody: teorii sieci neuronowych. Zwrócono uwagę na bardzo szerokie możliwości wykorzystania sieci neuronowych w niektórych dziedzinach życia.

W pracy skoncentrowano uwagę na problemach, które można opisać w sposób sformalizowany i opracować dla nich odpowiednie algorytmy, procedury obliczeniowe itd. Do zagadnień prezentowanych w przedmiotowej pracy można również stosować inny sposób wynikający z psychologicznej teorii decyzji. Psychologiczna teoria decyzji koncentruje swoją uwagę na decydencie indywidualnym lub zbiorowym, jego sposobie postrzegania problemu, stosowanych

kryteriach oceny dobroci rozwiązań itd. Rozważania zawarte w przedmiotowej pracy kierowane są do kadry inżynieryjnej kopalni, która w zależności od pojawiającego się problemu może skorzystać z szerokiej gamy propozycji zawartych w pracy i wybrać ten algorytm, który jest najbardziej odpowiedni dla danego problemu. Wyniki uzyskane przy zastosowaniu odpowiednich algorytmów są klasycznym materiałem przeddecyzyjnym. Decyzja może, ale nie musi wynikać z wyników obliczeń, przeto z rozważań o charakterze psychologicznym mogłem w sposób świadomy zrezygnować.

3. WYKORZYSTANIE KORELACJI USZEREGOWAŃ W PODEJMOWANIU DECYZJI

3.1. Uszeregowanie obiektów

W życiu gospodarczym zachodzi często potrzeba uszeregowania obiektów, np. kopalń chociażby ze względu na osiągane wyniki ekonomiczne, produkcyjne czy też stopień trudności realizacji procesów produkcyjnych. Jest to sytuacja, gdzie mamy do dyspozycji n obiektów $O_1,...,O_n$, które będą podlegały w jakiś sposób ocenie. Zależeć nam będzie na określeniu kolejności ważności tych obiektów. Przez pojęcie obiekt możemy tu również rozumieć pewne cechy czy aspekty, które podlegają ocenie. Przyjmujemy założenie, że nie jesteśmy w stanie dokładnie zbadać danych obiektów, czy pomierzyć porządkowanych cech. Będziemy więc mieli do czynienia z sytuacją niepewną w podejmowaniu decyzji. Przykładowo, możemy łatwo uszeregować kopalnie pod względem znaczenia w kraju, czy na rynku eksportowym, ale dokładne obliczenia numeryczne pod tym względem byłyby bardzo uciążliwe. Obiekty mogą być bardzo skomplikowane, a pewne parametry mogą być niedostępne, nieobserwowalne lub niemierzalne. W takiej sytuacji decydujemy się na wykorzystanie metody grupowej oceny ekspertów [2], [59], [62], [91], [97]. W metodzie tej przyjmuje się, że m ekspertów ocenia n obiektów. Każdy ekspert ma przedstawić uszeregowanie n obiektów $O_1,...,O_n$ według ważności. Przypisanie każdemu obiektowi liczby naturalnej oznaczającej ważność obiektu według opinii eksperta nazywa się szeregowaniem. Ekspert nadaje pewną rangę obiektowi w postaci liczby naturalnej z zakresu od 1 do n. Przyjmujemy, że ekspert różnym obiektom nadaje różne rangi.

Punktem wyjścia do rozważań jest zbiór m uporządkowań n obiektów. Każde uporządkowanie stanowi ciąg n-elementowy utworzony z liczb naturalnych z zakresu 1,...,n. Uporządkowania te przedstawiono w tablicy 3.1.

Tablica 3.1

Tablica rang

Eksperci	Obiekty			
	1	2	...	n
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}
:	:	:		:
m	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}

W tablicy tej przyjęto następujące oznaczenia:

m - liczba ekspertów,

n - liczba obiektów,

x_{ij} - ranga określona przez i-tego eksperta dla j-tego obiektu (i=1,...,m; j=1,...,n).

Do oceny grupowej zgodności uporządkowań ekspertów powrócimy w rozdziale 3.3. Najpierw rozważymy zgodność uporządkowań dwóch ekspertów.

3.2. Określenie zgodności opinii dwóch ekspertów

Przez opinie dwóch ekspertów będziemy rozumieli dwa wybrane wiersze z tablicy 3.1. Będą to więc rangi dwóch ekspertów dotyczące n obiektów. Dla ustalenia uwagi przyjmujemy, że będą to eksperci k-ty i l-ty. Tak więc dysponujemy dwoma ciągami liczb: $x_k = \{x_{k1},...,x_{kn}\}$ i $x_l = \{x_{l1},...,x_{ln}\}$.

Do oceny zgodności opinii dwóch ekspertów wykorzystuje się współczynnik korelacji ρ_{kl} określony wzorem [35], [97]:

$$\rho_{kl} = \frac{\operatorname{cov}(x_k, x_l)}{\sigma_k \sigma_l}, \tag{3.1}$$

gdzie: $\operatorname{cov}(x_k,x_l)$ - oznacza kowariancję uszeregowań ekspertów k-tego i l-tego,

σ_k - odchylenie standardowe rang k-tego eksperta,

σ_l - odchylenie standardowe rang l-tego eksperta.

Estymatorem zgodnym współczynnika korelacji ρ_{kl} jest współczynnik korelacji z próby, który oznaczany jest zwykle jako r_{kl}. Współczynnik ten obliczamy według wzoru:

$$r_{kl} = \frac{\sum_{j=1}^{n}(x_{kj} - \bar{x}_k)(x_{lj} - \bar{x}_l)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_{kj} - \bar{x}_k)^2 \cdot \sum_{j=1}^{n}(x_{lj} - \bar{x}_l)^2}}. \tag{3.2}$$

We wzorze tym wielkości $\bar{x}_k$ i $\bar{x}_l$ oznaczają średnie arytmetyczne rang podanych przez k-tego i l-tego eksperta. Wzór (3.2) można przedstawić jeszcze w innej postaci dogodniejszej do obliczeń numerycznych [35]:

$$r_{kl} = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_{kj}x_{lj} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{kj}\sum_{j=1}^{n} x_{lj}}{\sqrt{\left[\sum_{j=1}^{n} x_{kj}^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{kj}\right)^2\right]\left[\sum_{j=1}^{n} x_{lj}^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{lj}\right)^2\right]}}. \tag{3.3}$$

Współczynnik korelacji jest unormowaną miarą korelacji i zawiera się w przedziale [-1,+1].

Wzory powyższe dotyczą określenia korelacji między pomiarami dowolnych dwóch wielkości przyjmujących wartości rzeczywiste. W naszych rozważaniach mamy do czynienia z dwoma ciągami liczb naturalnych z zakresu od 1 do n, tylko różnie uporządkowanych, tj.:

$$x_{kj},\ x_{lj} \in \{1,2,...,n\}. \tag{3.4}$$

Uprości to znacznie postać wzorów i obliczenia związane z wyznaczaniem współczynnika korelacji. Wykorzystamy do tego następujące zależności:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{kj} = \sum_{j=1}^{n} x_{lj} = \sum_{j=1}^{n} j = n(n+1)/2, \tag{3.5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{kj}^2 = \sum_{j=1}^{n} x_{lj}^2 = \sum_{j=1}^{n} j^2 = n(n+1)(2n+1)/6, \tag{3.6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{kj}x_{lj} = \left[\sum_{j=1}^{n} x_{kj}^2 + \sum_{j=1}^{n} x_{lj}^2 - \sum_{j=1}^{n}(x_{kj} - x_{lj})^2\right]/2. \tag{3.7}$$

Podstawiając wzory (3.5), (3.6), (3.7) do (3.3), otrzymujemy:

$$r_{kl} = 1 - \frac{6}{n^3 - n}\sum_{j=1}^{n}(x_{kj} - x_{lj})^2. \tag{3.8}$$

Współczynnik r_{kl} dany wzorem (3.8) nazywany jest w literaturze współczynnikiem korelacji uporządkowań Spearmana [2], [97]. Jeżeli dla każdego j (j=1,...,n) jest $x_{kj}=x_{lj}$, wtedy $r_{kl}=+1$.

Mówimy wtedy, że opinie ekspertów k-tego i l-tego są całkowicie zgodne. W przypadku gdy $x_{kj}=n-x_{lj}+1$ (j=1,...,n), wtedy $r_{kl} = -1$. Mówimy wtedy, że opinie ekspertów k-tego i l-tego są przeciwstawne.

Dotychczas czyniliśmy założenie, że każdy ekspert powinien różnym obiektom przypisać różne liczby naturalne spośród zbioru {1,...,n}. Może się zdarzyć, że ekspert nie jest w stanie określić różnic między kilkoma obiektami. W takim przypadku zamiast rang, które są kolejnymi liczbami naturalnymi, przypisuje się tym obiektom średnią arytmetyczną z tych liczb [97]. Mówimy wtedy, że rangi tych obiektów są połączone. Rozpatrzymy teraz, jaką postać będzie miał współczynnik korelacji uporządkowań Spearmana w przypadku występowania rang połączonych. Zbadamy najpierw, o ile różni się suma kwadratów rang połączonych od sumy kwadratów rang nie połączonych. Ustalmy, że zostaje połączonych t rang począwszy od pozycji p+1. Suma kwadratów rang nie połączonych wynosi:

$$\sum_{j=1}^{t}(p+j)^2 = tp^2 + pt(t+1) + t(t+1)(2t+1)/6. \tag{3.9}$$

Natomiast suma kwadratów rang połączonych jest:

$$\sum_{j=1}^{t}[p+(t+1)/2]^2 = tp^2 + pt(t+1) + t(t+1)^2/4. \tag{3.10}$$

Różnica między tymi wartościami wynosi:

$$T = (t^3 - t)/12. \tag{3.11}$$

Zakładamy teraz, że u eksperta k-tego wystąpiło r grup rang połączonych. Liczebność tych grup oznaczamy $t_{k1},t_{k2},...,t_{kr}$.

Różnica między sumami kwadratów rang nie połączonych i połączonych wyniesie:

$$T_k = \sum_{u=1}^{r}(t_{ku}^3 - t_{ku})/12. \tag{3.12}$$

Podobnie przyjmując, że u eksperta l-tego wystąpiło s grup rang połączonych o liczebnościach $t_{l1},t_{l2},...,t_{ls}$, można obliczyć wartość tej różnicy:

$$T_l = \sum_{v=1}^{s}(t_{lv}^3 - t_{lv})/12. \tag{3.13}$$

Wariancja dla eksperta k-tego zmniejszy się więc o wielkość T_k/n, a dla eksperta l-tego o wielkość T_l/n. Przekształcamy wzór (3.8) do postaci takiej jak (3.1) lub (3.2), aby w mianowniku pod pierwiastkiem uzyskać iloczyn wariancji:

$$r_{kl} = \frac{(n^2-1)/12 - (1/(2n))\sum_{j=1}^{n}(x_{kj}-x_{lj})^2}{\sqrt{[(n^2-1)/12][(n^2-1)/12]}}. \qquad (3.14)$$

Każdą z wariancji występującą w liczniku i mianowniku we wzorze (3.14) zmniejszamy odpowiednio o wielkość T_k/n lub T_l/n. Otrzymujemy:

$$r_{kl} = \frac{(n^2-1)/12 - \left[\sum_{j=1}^{n}(x_{kj}-x_{lj})^2 - (T_k+T_l)\right]/(2n)}{\sqrt{[(n^2-1)/12 - T_k/n][(n^2-1)/12 - T_l/n]}}. \qquad (3.15)$$

Po przemnożeniu licznika i mianownika tego ułamka przez 2n otrzymujemy:

$$r_{kl} = \frac{(n^2-1)/6 - \sum_{j=1}^{n}(x_{kj}-x_{lj})^2 - T_k - T_l}{\sqrt{[(n^3-n)/6 - 2T_k][(n^3-n)/6 - 2T_l]}}. \qquad (3.16)$$

Wzór (3.16) określa współczynnik korelacji uporządkowań Spearmana w przypadku występowania rang połączonych [2], [97]. Wzór (3.16) jest równoważny wzorowi (3.8) w przypadku $T_k=T_l=0$.

3.3. Określenie zgodności opinii grupy ekspertów

Powrócimy teraz do rozważań rozpoczętych w rozdziale 3.1. Punktem wyjścia do rozważań będzie tablica 3.1, która zawiera rangi m ekspertów dotyczące n obiektów. Dla każdej kolumny tej tablicy obliczamy sumę rang R_j:

$$R_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}, \qquad (j = 1,\ldots,n). \qquad (3.17)$$

W przypadku gdy w każdym wierszu uporządkowania są dokładnie rosnące, to sumy R_j wynoszą:

$$R_j = mj, \qquad (j = 1,\ldots,n). \qquad (3.18)$$

Wartość średnia tych sum wynosi:

$$R_{sr} = \left(\sum_{j=1}^{n} R_j\right)/n = \left(\sum_{j=1}^{n} mj\right)/n = m(n+1)/2. \qquad (3.19)$$

Zgodność opinii grupy ekspertów będziemy oceniali poprzez stosunek wariancji:

$$\rho_w = S_{Rn}/S_{Ru}, \qquad (3.20)$$

gdzie:

S_{Rn} - oznacza wariancję sum rang R_j na podstawie tablicy 3.1,

S_{Ru} - oznacza wariancję sum rang R_j w przypadku pełnej zgodności uporządkowań, tj., gdy $R_j=mj$.

Wariancja S_{Rn} wynosi:

$$S_{Rn} = \sum_{j=1}^{n}(R_j - m(n+1)/2)^2/n. \qquad (3.21)$$

Natomiast S_{Ru} jest:

$$S_{Ru} = \sum_{j=1}^{n}(mj - m(n+1)/2)^2/n = m^2(n^3-n)/(12n). \qquad (3.22)$$

Wobec tego wielkość ρ_w możemy przedstawić w postaci:

$$\rho_w = \frac{12}{m^2(n^3-n)}\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - m(n+1)/2\right]^2. \qquad (3.23)$$

Obliczony wskaźnik ρ_w nazywa się współczynnikiem zgodności Kendalla i Babingtona-Smitha [2], [91]. Współczynnik ten jest unormowaną miarą korelacji i zawiera się w przedziale [0,1]. Przyjmuje wartość 1 w przypadku uporządkowań identycznych oraz wartość 0 dla uporządkowań całkowicie niezgodnych.

Wzór (3.23) został wyprowadzony, przy założeniu że nie występowały rangi połączone. W przypadku łączenia rang przez ekspertów należy wprowadzić poprawki analogiczne jak (3.12) i (3.13) uwzględniające wszystkich ekspertów. Oznaczamy:

r_i - liczba grup rang połączonych dla i-tego eksperta,

t_{ij} - liczba rang w grupie j-tej dla i-tego eksperta.

Poprawka dla i-tego eksperta wynosi:

$$T_i = \sum_{j=1}^{r_i}(t_{ij}^3 - t_{ij})/12. \qquad (3.24)$$

Po uwzględnieniu wszystkich poprawek wzór (3.23) przybiera następującą postać [2], [91]:

$$\rho_w = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - m(n+1)/2\right]^2}{m^2(n^3-n)/12 - m\sum_{i=1}^{m} T_i}. \qquad (3.25)$$

Jest to współczynnik zgodności Kendalla i Babingtona-Smitha w przypadku stosowania rang połączonych.

3.4. Badanie istotności współzależności opinii ekspertów oraz eliminacja ekspertów o ekstremalnych opiniach

Zgodność opinii grupy ekspertów wyrażonych poprzez rangi określa współczynnik zgodności wyrażony wzorem (3.23) lub (3.25). Do stwierdzenia, czy ta zgodność jest istotna, służy test χ^2 [59], [91].

Stawiamy hipotezę zerową H_0, taką że współczynnik zgodności ρ_w jest równy zero ($H_0 : \rho_w = 0$) wobec hipotezy alternatywnej H_1, takiej że współczynnik zgodności ρ_w jest różny od zera ($H_1 : \rho_w \neq 0$). Weryfikacja hipotezy H_0 polega na porównaniu dwóch liczb: jednej obliczonej na podstawie statystyki χ^2 z drugą odczytaną z tablic rozkładu χ^2. Statystyka χ^2 ma postać [59], [62], [91]:

$$\chi^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - m(n+1)/2\right]^2}{mn(n+1)/12} = m(n-1)\rho_w . \qquad (3.26)$$

Prawostronny obszar krytyczny w tym teście jest określony przez nierówność $\chi^2 \geq \chi^2_\alpha$. χ^2_α jest wartością krytyczną odczytaną z tablicy rozkładu χ^2 dla ustalonego z góry poziomu istotności α i dla n-1 stopni swobody, tak aby zachodziło:

$$P\{\chi^2 \geq \chi^2_\alpha\} = \alpha . \qquad (3.27)$$

Jeżeli jest spełniona nierówność $\chi^2 \geq \chi^2_\alpha$, to hipotezę H_0 o niezależności uporządkowań odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej H_1. Jeżeli natomiast zajdzie nierówność $\chi^2 < \chi^2_\alpha$, to stwierdzamy, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0.

Odrzucenie hipotezy zerowej ($H_0 : \rho_w = 0$) i przyjęcie hipotezy alternatywnej ($H_1 : \rho_w \neq 0$) oznacza, że na poziomie istotności α opinie ekspertów są zgodne (tzn. uszeregowania rangami obiektów są podobne).

W przypadku nieodrzucenia hipotezy H_0 należy wyeliminować z grupy ekspertów jednego lub kilku o ekstremalnych (najbardziej różniących się od pozostałych) opiniach. Wyeliminowanie takiego eksperta podwyższa zgodność ocen pozostałej grupy ekspertów. Najpierw tworzymy macierz K współczynników korelacji r_{kl} dla wszystkich ekspertów (korelacje między wierszami tablicy 3.1). Wykorzystujemy do tego wzory (3.8) lub (3.16):

$$K = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.28)$$

Macierz korelacji K jest macierzą symetryczną posiadającą na głównej przekątnej same jedynki. Następnie obliczamy współczynniki korelacji wielorakiej dla każdego eksperta:

$$R_{i(1..i-1,i+1..n)} = \sqrt{1 - \Delta / \Delta_{ii}} , \qquad (3.29)$$

gdzie: Δ jest wyznacznikiem macierzy K, a Δ_{ii} jest minorem po usunięciu z macierzy K i-tego wiersza i i-tej kolumny.

Współczynnik korelacji wielorakiej określa stopień skorelowania uszeregowania rang eksperta i-tego od pozostałych uszeregowań. Ze zbioru ekspertów eliminujemy tego, który posiada najmniejszy współczynnik korelacji wielorakiej.

Następnie obliczamy współczynnik zgodności Kendalla i Babingtona-Smitha na podstawie wzoru (3.23) lub (3.25) dla pomniejszonej grupy ekspertów. Współzależność ocen ekspertów badamy za pomocą testu χ^2. Postępujemy tak dalej, aż do przyjęcia hipotezy alternatywnej H_1 mówiącej o istotnej współzależności rozpatrywanych rang porządkujących.

W celu otrzymania ostatecznego uszeregowania obiektów obliczamy dla każdego obiektu średnią arytmetyczną rang ekspertów o zgodnych opiniach. Te średnie arytmetyczne stanowią nowe rangi dla wynikowego uszeregowania obiektów.

3.5. Przykład wykorzystania korelacji uszeregowań do lokalizacji epicentrum grupy wstrząsów w kopalni

Do przykładu wykorzystamy dane liczbowe zawarte w pracy [71]. W pracy tej przeanalizowano przykłady dotyczące trzech grup wstrząsów zarejestrowanych w rejonie 2A/509 w KWK "Szombierki" i jednej grupy ognisk impulsów sejsmoakustycznych. Obliczenia dotyczące lokalizacji tych wstrząsów przeprowadzono według pięciu metod:

a) według algorytmu A. Kijki przez kopalnianą służbę geofizyczną,

b) według metody P dla ważonej funkcji błędu lokalizacji,

c) według metody P dla nieważonej funkcji błędu lokalizacji,

d) według metody PA dla ważonej funkcji błędu lokalizacji,

e) według metody PA dla nieważonej funkcji błędu lokalizacji.

Weźmiemy pod uwagę jedną grupę wstrząsów oznaczonych numerami 124,126,...,131 [71]. Położenie w przestrzeni ogniska wstrząsu oznaczono symbolami x, y, z. Zmienne x, y, z określają miejsce wstrząsu względem ustalonego punktu w kopalni. Za pomocą różnych metod otrzymano różne wyniki dotyczące ogniska wstrząsu. Ilustruje to tablica 3.2.

Epicentrum grupy wstrząsów określa się, obliczając średnie arytmetyczne ze współrzędnych x, y, z. Każda z pięciu metod wyznacza inne epicentrum. Podaje to tablica 3.3.

Uwaga: W całej pracy przy zapisie liczb rzeczywistych część ułamkowa liczby będzie oddzielona kropką (zamiast przecinkiem) od części całkowitej.

Tablica 3.2

Lokalizacja grupy wstrząsów

Numer wstrząsu		Metoda a	Metoda b	Metoda c	Metoda d	Metoda e
124	x	6800	6794.32	6794	7009	6726
	y	-1650	-1631.06	-1631	-1801	-1694
	z	- 600	-922.68	-919	-656	-664
126	x	6770	6732.86	6732	6928	6721
	y	-1680	-1651.38	-1651	-1808	-1717
	z	-620	-397.85	-397	-560	-566
127	x	6810	6780.51	6903	7034	6814
	y	-1600	-1596.20	-1700	-1773	-1670
	z	-570	-499.86	-684	-574	-574
128	x	6830	6819.17	6819	7206	6932
	y	-1630	-1638.27	-1638	-1561	-1730
	z	-540	-575.49	-574	-576	-574
129	x	6770	6767.52	6767	6990	6749
	y	-1640	-1631.23	-1631	-1800	-1699
	z	-520	-603.34	-602	-596	-599
130	x	6880	6945.36	6944	7699	7281
	y	-1640	-1712.61	-1712	-2060	-1864
	z	-540	-852.41	-850	-596	-586
131	x	6820	6765.70	6765	7048	6831
	y	-1600	-1634.36	-1634	-1819	-1714
	z	-570	-369.39	-369	-547	-549

Źródło: pozycja literatury [71]

Tablica 3.3

Epicentrum grupy wstrząsów

Współrzędne epicentrum	Metoda a	Metoda b	Metoda c	Metoda d	Metoda e
x	6811.43	6800.78	6800.14	7130.57	6864.86
y	-1634.29	-1642.16	-1641.86	-1803.14	-1726.86
z	-565.71	-603.00	-588.57	-586.43	-587.43

W tym konkretnym przypadku będziemy się starali przypisać poszczególnym metodom jakieś rangi oraz rozważymy, czy do określenia epicentrum grupy wstrząsów należy wziąć pod uwagę współrzędne x, y, z wszystkich pięciu metod, czy też pominąć którąś z metod dającą wyniki zbyt różniące się od pozostałych. Na pierwszy rzut oka widać na podstawie tablicy 3.3, że metoda d daje rezultaty najbardziej różniące się od pozostałych. Podstawą rangowania będą wzajemne odległości w przestrzeni trójwymiarowej pomiędzy epicentrum na podstawie tablicy 3.3 wyznaczone za pomocą różnych metod. Odległości te przedstawiono w tablicy 3.4.

Tablica 3.4

Odległości między środkami grupy wstrząsów wyznaczonych za pomocą różnych metod

	Metoda 1 a	Metoda 2 b	Metoda 3 c	Metoda 4 d	Metoda 5 e
1. Metoda a	0.00	39.57	26.59	351.65	109.07
2. Metoda b	39.57	0.00	14.47	367.36	107.34
3. Metoda c	26.59	14.47	0.00	367.70	106.84
4. Metoda d	351.65	376.36	376.70	0.00	276.45
5. Metoda e	109.07	107.34	106.84	276.45	0.00

Liczby w tablicy 3.4 oznaczamy symbolem d_{ij}. Jedna liczba d_{ij} określa odległość środka grupy wstrząsów wyznaczonego metodą i-tą od środka tej samej grupy wstrząsów wyznaczonego metodą j-tą. Tablica 3.4 będzie podstawą do szeregowania. Szeregowania będziemy do-

konywali z punktu widzenia każdej z metod z osobna. Mniejszym odległościom d_{ij} przypisujemy rangi niższe, a większym wyższe.

Z punktu widzenia metody a:

- najlepszą metodą jest metoda a (d_{11}= 0.00, x_{11}=1),
- kolejną metodą jest metoda c (d_{13}= 26.59, x_{13}=2),
- kolejną metodą jest metoda b (d_{12}= 39.57, x_{12}=3),
- kolejną metodą jest metoda e (d_{15}=109.07, x_{15}=4),
- ostatnią metodą jest metoda d (d_{14}=351.65, x_{14}=5).

Z punktu widzenia metody b:

- najlepszą metodą jest metoda b (d_{22}= 0.00, x_{22}=1),
- kolejną metodą jest metoda c (d_{23}= 14.47, x_{23}=2),
- kolejną metodą jest metoda a (d_{21}= 39.57, x_{21}=3),
- kolejną metodą jest metoda e (d_{25}=107.34, x_{25}=4),
- ostatnią metodą jest metoda d (d_{24}=367.36, x_{24}=5).

Podobnie ustalamy rangi z punktu widzenia metod c, d, e.

Takie szeregowanie jest równoważne z szeregowaniem w następującej sytuacji. Mamy do dyspozycji pięciu ekspertów reprezentujących pięć metod obliczeniowych a, b, c, d, e. Każdy z tych ekspertów uważa, że metoda reprezentowana przez niego jest najlepsza i najdokładniej wyznacza epicentrum grupy wstrząsów. Każdy z tych ekspertów ocenia pozostałe metody obliczając odległość między epicentrum wstrząsów określonym przez niego a epicentrum wyznaczonym za pomocą innej metody. Im większa jest ta odległość, tym ranga jest większa.

Wyniki szeregowania przedstawiono w tablicy 3.5. Jest ona zbudowana na wzór tablicy 3.1.

Tablica 3.5

Tablica rang dla pięciu metod

Eksperci (metody)	Obiekty (metody)				
	1 (a)	2 (b)	3 (c)	4 (d)	5 (e)
1 (a)	1	3	2	5	4
2 (b)	3	1	2	5	4
3 (c)	3	2	1	5	4
4 (d)	3	4	5	1	2
5 (e)	4	3	2	5	1

W tej tablicy nie ma rang połączonych, więc obliczamy współczynnik zgodności Kendalla i Babingtona-Smitha na podstawie wzoru (3.23). Przyjmując, że m=n=5, mamy:

$$\rho_w = \frac{12}{m^2(n^3-n)} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - m(n+1)/2 \right]^2 = 0.2. \qquad (3.30)$$

Zbadamy teraz, czy zgodność uszeregowań zawartych w tablicy 3.5 (wyrażona poprzez współczynnik zgodności Kendalla i Babingtona-Smitha) jest istotna. Stosujemy test χ^2. Stawiamy hipotezę zerową H_0, taką że współczynnik zgodności ρ_w jest równy zero ($H_0 : \rho_w = 0$) wobec hipotezy alternatywnej H_1, takiej że współczynnik zgodności ρ_w jest różny od zera ($H_1 : \rho_w \neq 0$). Wartość statystyki χ^2 na podstawie wzoru (3.26) wynosi:

$$\chi^2 = m(n-1)\rho_w = 5 \cdot 4 \cdot 0.2 = 4.0. \qquad (3.31)$$

Przyjmujemy typowy poziom istotności α=0.05. Z tablicy rozkładu χ^2 odczytujemy wartość krytyczną χ^2_α dla α=0.05 i 4 stopni swobody; χ^2_α=9.488. Otrzymujemy:

$$\chi^2 = 4.0 < 9.488 = \chi^2_\alpha. \qquad (3.32)$$

Nierówność $\chi^2 < \chi^2_\alpha$ wskazuje na to, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0.

Należy więc przejść do wyeliminowania jednej metody. W tym celu obliczamy macierz korelacji K, wykorzystując wzory (3.8) i (3.28):

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.7 & -0.7 & 0.1 \\ 0.6 & 1 & 0.9 & -0.9 & 0.3 \\ 0.7 & 0.9 & 1 & -1 & 0.4 \\ -0.7 & -0.9 & -1 & 1 & -0.4 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 & -0.4 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.33)$$

W macierzy tej zauważamy, że pojawiły się elementy r_{34} i r_{43} równe -1. Oznacza to liniową zależność pomiędzy trzecim i czwartym wierszem tablicy 3.5. Jednocześnie oznacza to, że uszeregowania zawarte w wierszu trzecim i czwartym są całkowicie przeciwstawne. Jeżeli potraktujemy wiersz trzeci i czwarty w tablicy 3.5 jako rangi ekspertów, to oznacza to, że eksperci trzeci i czwarty są całkowicie sprzeczni co do swoich sądów i należy jednego z nich wyeliminować. Współczynniki korelacji w macierzy K w wierszu czwartym są ujemne, co oznacza, że uszeregowanie zaprezentowane w tablicy 3.5 przez czwartego eksperta jest niezgodne z uszeregowaniami pozostałych ekspertów. Eliminujemy z dalszych rozważań eksperta czwartego, innymi słowy - metodę d. Oznacza to, że z tablicy 3.5 należy wykreślić wiersz czwarty. Otrzymujemy następującą tablicę rang.

Tablica 3.6

Zredukowana tablica rang

Eksperci (metody)	Obiekty (metody)				
	1 (a)	2 (b)	3 (c)	4 (d)	5 (e)
a	1	3	2	5	4
b	3	1	2	5	4
c	3	2	1	5	4
e	4	3	2	5	1

Zauważmy, że w tym konkretnym przypadku wyeliminowaliśmy jedną metodę (jednego "eksperta") bez obliczania współczynników korelacji wielorakiej. Wynikło to z tego, że w macierzy K pojawiły się współczynniki $r_{34}=r_{43}=1$.

Obliczamy teraz na podstawie tablicy 3.6 współczynnik zgodności Kendalla i Babingtona-Smitha. Mamy m=4, n=5. Współczynnik ten wynosi:

$$\rho_w = \frac{12}{m^2(n^3-n)} \cdot \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - m(n+1)/2\right]^2 = 0.625. \qquad (3.34)$$

Za pomocą testu χ^2 badamy, czy zgodność uszeregowań w tablicy 3.6 wyrażona poprzez współczynnik ρ_w na podstawie wzoru (3.34) jest istotna. Stawiamy hipotezę zerową H_0, taką że współczynnik zgodności ρ_w jest równy zero ($H_0 : \rho_w=0$) wobec hipotezy alternatywnej H_1, takiej że współczynnik zgodności ρ_w jest różny od zera ($H_1 : \rho_w \neq 0$). Wartość statystyki χ^2 na podstawie wzoru (3.26) wynosi:

$$\chi^2 = m(n-1)\rho_w = 4 \cdot 4 \cdot 0.625 = 10.0. \qquad (3.35)$$

Z tablicy rozkładu χ^2 odczytujemy wartość krytyczną χ^2_α dla $\alpha=0.05$ i 4 stopni swobody. $\chi^2_\alpha=9.488$. Otrzymujemy:

$$\chi^2 = 10.0 > 9.488 = \chi^2_\alpha. \qquad (3.36)$$

Nierówność $\chi^2>\chi^2_\alpha$ wskazuje na to, że należy odrzucić hipotezę H_0, a przyjąć hipotezę H_1. Oznacza to, że zależność uszeregowań w tablicy 3.6 jest istotna.

W pracy [71] współrzędne epicentrum grupy wstrząsów zostały określone jako średnie arytmetyczne współrzędnych x, y, z. Na podstawie pięciu metod epicentrum to ma współrzędne x=6881.56, y=-1689.66, z=-586.23.

Po wyeliminowaniu z rozważań metody d (dającej w tym przypadku wyniki zbyt różniące się od pozostałych metod) epicentrum wstrząsów ma współrzędne x=6819.30, y=-1661.29, z=-586.18.

Wystąpiły tu różnice:

dla współrzędnej x - 62.26 metrów,

dla współrzędnej y - 28.37 metrów,

dla współrzędnej z - 0.05 metrów.

4. DECYZJE N-WYMIAROWE PRZY WYKORZYSTANIU EKSPERTÓW I WSPOMAGANIA KOMPUTEROWEGO

4.1. Cybernetyczny model przedsiębiorstwa

Z podejmowaniem decyzji spotykamy się w każdej dziedzinie życia i to bardzo często. Decyzje mogą być bardzo poważne - natury ekonomicznej, politycznej, wojskowej czy gospodarczej. Decyzje może podejmować decydent indywidualny bądź zbiorowy. Decyzje mogą mieć też charakter osobisty w stosunku do pojedynczych ludzi. Zawsze zależeć nam będzie na tym, aby decyzja była dla niego najlepsza, tj. podjęta w sposób optymalny ze względu na pewne kryteria. Przeważnie wykorzystuje się do tego różnego rodzaju metody matematyczne.

Przedstawimy teraz, jak różni autorzy podchodzą do podejmowania decyzji oraz na co zwracają przy tym uwagę.

W pracy [4] autor przedstawia w rozdziale 15 model przedsiębiorstwa cybernetycznego. Przestrzeń, w której zawierają się wyniki działalności przedsiębiorstwa, jest zbiorem warunków i zmiennych, które określają popyt na produkowane wyroby. Autor zwraca uwagę na fakt, że decydent podejmujący decyzje nie jest w stanie uwzględnić wszystkich czynników oddziaływających na tak wielki układ cybernetyczny, jakim jest przedsiębiorstwo. Komputer przerasta bardzo poważnie zdolności ludzkie pod tym względem. Należy zdać sobie dokładnie sprawę z tego, pod jakim względem podejmowana decyzja ma być optymalna, jaki jest cel naszego działania i jakie powinny być kryteria, aby decyzja była najlepsza.

Praca [37] poświęcona jest zastosowaniom matematyki w ekonomii. Do podejmowania optymalnych decyzji ekonomicznych określonego rodzaju można wykorzystać takie metody matematyczne, jak programowanie liniowe, metodę najmniejszych kwadratów, teorię metody reprezentatywnej.

Praca [45] poświęcona jest optymalnym decyzjom ekonomicznym. Wykorzystuje się tutaj liniowe modele optymalizacyjne, programowanie dynamiczne, nieliniowe, programowanie w liczbach całkowitych oraz programowanie stochastyczne.

W pracy [59] w rozdziale 3.2 omawia się wykorzystanie opinii ekspertów do określania potencjalnego zbioru cech oraz do wyboru cech istotnych ze względu na cel badania. Sondaż opinii ekspertów może być przeprowadzony w sposób bezpośredni lub pośredni. Przy bezpo-

średnim sposobie sondażu opinii ekspertów organizowana jest tzw. "burza mózgów" w gronie kilkunastu osób będących znawcami przedmiotu badania. Metoda pośrednia posługuje się wywiadem lub ankietą. Na podstawie ocen ekspertów wydaje się "najlepszą decyzję".

W pracy [61] poruszanych jest wiele zagadnień optymalizacyjnych z różnych dziedzin ekonomii i działalności gospodarczej. Omawiane są sposoby optymalizacji decyzji ekonomicznych przy wykorzystaniu programowania liniowego, dynamicznego i rachunku prawdopodobieństwa. Omawiane też są zagadnienia transportowe i planowanie działalności gospodarczej układów produkcyjnych.

W pracy [71] omawia się metody lokalizacji wstrząsów w górnictwie za pomocą sejsmometrów. Prace te wykorzystano do przykładu omawianego w rozdziale 4.6. Porównano wyniki programu komputerowego określającego decyzje n-wymiarowe z metodami stosowanymi w pracy [71].

W pracy [82] rozdział 1.2 poświęcony jest optymalnym decyzjom. Ważnym zagadnieniem poruszanym tutaj jest dobór kryterium, według którego ustala się, która decyzja jest najlepsza, czyli optymalna. Decyzja może być podjęta przez jednego decydenta lub przez zespół decydentów.

Rozdział obecnie omawiany dotyczy wyboru decyzji na podstawie zbioru m opinii $\{D_1,..,D_m\}$ podanych przez ekspertów. Przez opinię n-wymiarową albo przestrzenną rozumiemy tu opinię określającą n aspektów wybranego zagadnienia, np. należy określić epicentrum wstrząsu górniczego w kopalni. Potrzebne do tego jest podanie trzech współrzędnych miejsca wstrząsu.

W pracy wykorzystuje się przedziały tolerancji dla każdej współrzędnej opinii. Wprowadza się także pojęcie bliskości dwóch opinii n-wymiarowych.

W pracy zdefiniowano też pojęcie bliskości opinii od zbioru opinii sobie bliskich. Spośród elementów zbioru $\{D_1,...,D_m\}$ znajdywany jest najliczniejszy podzbiór opinii wzajemnie bliskich. Na podstawie tego podzbioru określa się decyzję "optymalną" oraz obszar tolerancji, w którym znajduje się decyzja wybrana. System wspomagania decyzji oparty na tych założeniach został opracowany w języku programowania TURBO BASIC i uruchomiony na komputerze IBM PC.

4.2. Określenie opinii n-wymiarowej

Rozdział ten dotyczy opinii wymiernych albo mierzalnych, tj. takich, które mogą być przedstawione w postaci liczbowej. Jedna opinia będzie rozpatrywana w n aspektach, innymi słowy - w n wymiarach. Przykładowo, do określenia punktu w przestrzeni trzeba podać trzy współrzędne: dwie współrzędne określające punkt na płaszczyźnie oraz trzecią wysokość, gdy punkt leży nad płaszczyzną, lub głębokość, gdy punkt leży pod płaszczyzną. Ma to zastosowanie na przykład przy lokalizacji centrum pożaru w kopalni na określonej głębokości albo przy określaniu epicentrum wstrząsu podziemnego w kopalni. To są opinie trójwymiarowe. Ważne to jest ze względu na bezpieczeństwo górników pracujących na dole w kopalni. Inny przykład opinii trójwymiarowej to lokalizacja miejsca i głębokości wiercenia przy poszukiwaniu ropy naftowej.

Opinie n-wymiarowe niekoniecznie muszą mieć charakter przestrzenny, np. mogą mieć charakter ekonomiczny. Ilustracją tego może być podjęcie decyzji o:

a) wielkości kwot pieniędzy, które mają być zainwestowane,

b) ustaleniu wysokości normy w związku z nowymi inwestycjami,

c) liczbie robotników przesuniętych do innej pracy po zrealizowaniu inwestycji.

Ostatni przykład wskazuje na to, że opinie n-wymiarowe, niekoniecznie w każdym wymiarze, muszą być określane w tych samych jednostkach. Współrzędne opinii i-tej będziemy kolejno oznaczali przez $x_{i1},...,x_{in}$. Do każdej współrzędnej będą jeszcze dołączone dwie liczby: tzw. tolerancja dolna i tolerancja górna. Oznacza to, że np. współrzędna x_{ij} zawiera się w przedziale:

$$[x_{ij} - tdx_{ij} , x_{ij} + tgx_{ij}], \qquad (4.1)$$

gdzie tdx_{ij}, tgx_{ij} są odpowiednio tolerancjami dolną i górną. Tolerancje te można interpretować jako dopuszczalny błąd z dołu i z góry przy określaniu danej współrzędnej. Innymi słowy, jest to ograniczenie dolne i górne dla poszczególnych współrzędnych.

Wprowadzimy teraz formalne oznaczenia dla różnych wielkości występujących w tym rozdziale:

m - liczba opinii,
n - liczba współrzędnych opinii,
i - numer opinii (i=1,...,m),
j - numer współrzędnej opinii (j=1,...,n),
D_i - i-ta opinia,
x_{ij} - wartość j-tej współrzędnej i-tej opinii,

tdx_{ij} - tolerancja dolna j-tej współrzędnej i-tej opinii,
tgx_{ij} - tolerancja górna j-tej współrzędnej i-tej opinii.

Na podstawie wartości współrzędnych i tolerancji określimy ograniczenia i przedziały tolerancji dla i-tej opinii:

odx_{ij} - ograniczenie dolne j-tej współrzędnej i-tej opinii,
ogx_{ij} - ograniczenie górne j-tej współrzędnej i-tej opinii,
PTX_{ij} - przedział tolerancji dla j-tej współrzędnej i-tej opinii.

Te ograniczenia i przedziały wyznaczamy na podstawie wzorów:

$$odx_{ij} = x_{ij} - tdx_{ij} , \qquad (4.2)$$

$$ogx_{ij} = x_{ij} + tgx_{ij} , \qquad (4.3)$$

$$PTX_{ij} = [odx_{ij} , ogx_{ij}] . \qquad (4.4)$$

Definicja 4.1

Opinię i-tą D_i określamy jako zbiór 3n liczb:

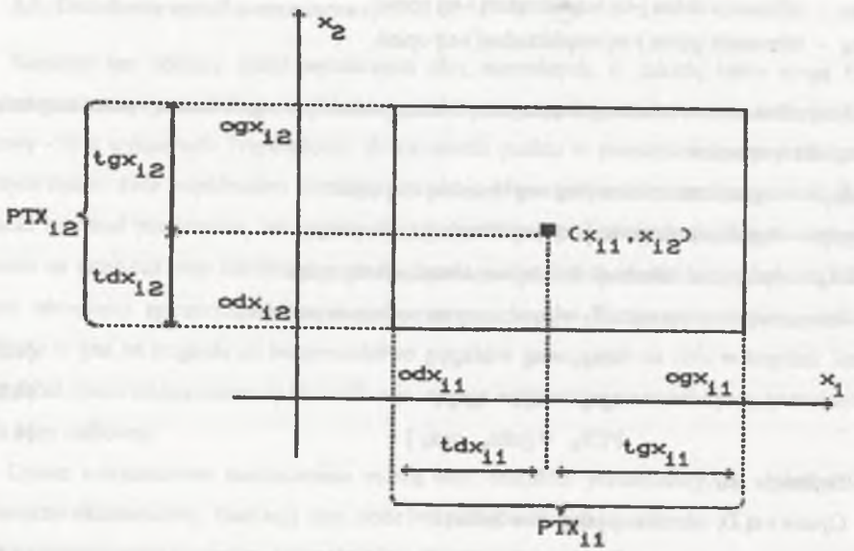
$$D_i = \{x_{ij} , tdx_{ij} , tgx_{ij} \}, \quad (j=1,...,n), \qquad (4.5)$$

gdzie: x_{ij} oznaczają wartości poszczególnych współrzędnych opinii, a tdx_{ij} i tgx_{ij} są tolerancjami dolnymi i górnymi dla tych wartości.

Uwaga 4.1

Ponieważ wygodniej jest ilustrować omawiane pojęcia na płaszczyźnie niż w przestrzeni, będziemy więc rysunki przedstawiali w dwóch wymiarach (n=2).

Na rysunku 4.1 przedstawiono graficzną interpretację opinii D_i. Określimy teraz pojęcie eksperta. Ekspertem jest człowiek, który podaje opinie, tzn. w tym przypadku 3n liczb. Ekspert, podając swoją opinię, może też wykorzystać pomiary różnych urządzeń przy określaniu potrzebnych liczb. W każdym razie dla opracowanego systemu nie jest ważne, kto jest ekspertem, natomiast jest wymagane, aby systemowi udostępniono zbiór m opinii $\{D_1,...,D_m\}$. Będziemy w dobrej sytuacji, gdy wszyscy eksperci wydadzą podobne opinie. Świadczy to o tym, że oceny ekspertów są zbliżone. Może się też zdarzyć, że opinie niektórych są zbyt różniące się od pozostałych. Opinie takich ekspertów nie będą brane pod uwagę w dalszych rozważaniach. System automatycznie je wyeliminuje ze zbioru $\{D_1,...,D_m\}$. W związku z tym wprowadzono pojęcie bliskości dwóch opinii.



Rys. 4.1. Graficzne przedstawienie opinii D_i
Fig. 4.1. Graphical prezentation of the opinion D_i

4.3. Definicja bliskości dwóch opinii oraz bliskości jednej opinii od zbioru opinii wzajemnie zbliżonych do siebie

Definicja 4.2

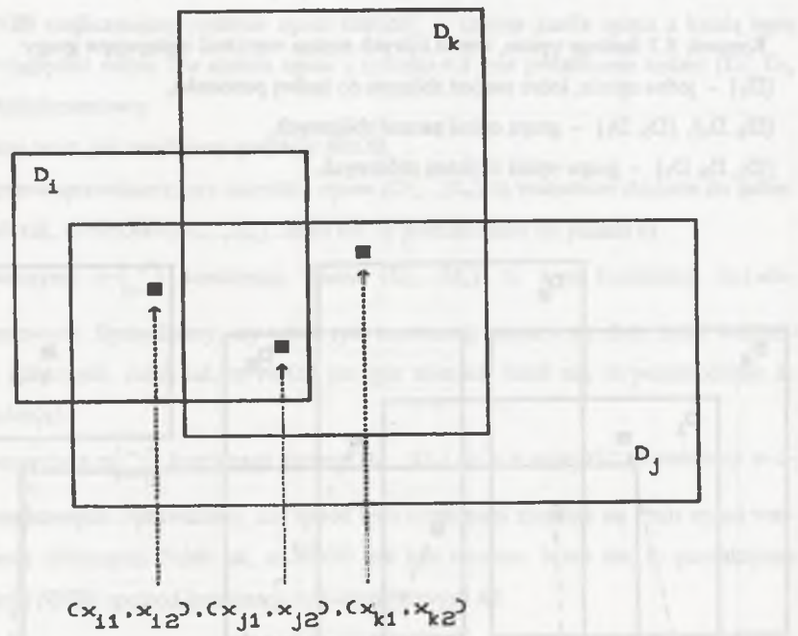
Dwie opinie D_i i D_k są zbliżone do siebie, gdy zachodzi warunek:

$$\forall_j \; x_{ij} \in PTX_{kj} \;\wedge\; x_{kj} \in PTX_{ij}, \quad (j=1,\ldots,n). \tag{4.6}$$

Należy zauważyć, że warunek bliskości nie jest przechodni, tzn., że jeżeli opinie D_i i D_j są zbliżone oraz opinie D_j i D_k też są zbliżone, to z tego nie wynika, że opinie D_i i D_k są zbliżone:

(D_i zbliżone D_j) $\wedge$ (D_j zbliżone D_k) nie wynika, że (D_i zbliżone D_k).

Ilustruje to rysunek 4.2.



Rys. 4.2. Graficzne przedstawienie nieprzechodniości relacji bliskości opinii
Fig. 4.2. Graphical prezentation of nontransitiveness of the relation of opinions proximity

Zbiór m opinii zaproponowanych przez ekspertów zostanie przez relację bliskości podzielony na wiele grup, np. grupy opinii: parami zbliżonych, trójkami zbliżonych itd. W najgorszym przypadku będzie to grupa, w której nie ma opinii zbliżonych. W najlepszym przypadku, gdy opinie wszystkich ekspertów są prawie takie same, otrzymamy jedną grupę, w której wszystkie m opinii będą zbliżone do siebie.

Dla wygody zapisu zdefiniujemy jeszcze bliskość opinii ze zbiorem opinii wzajemnie zbliżonych do siebie.

Definicja 4.3

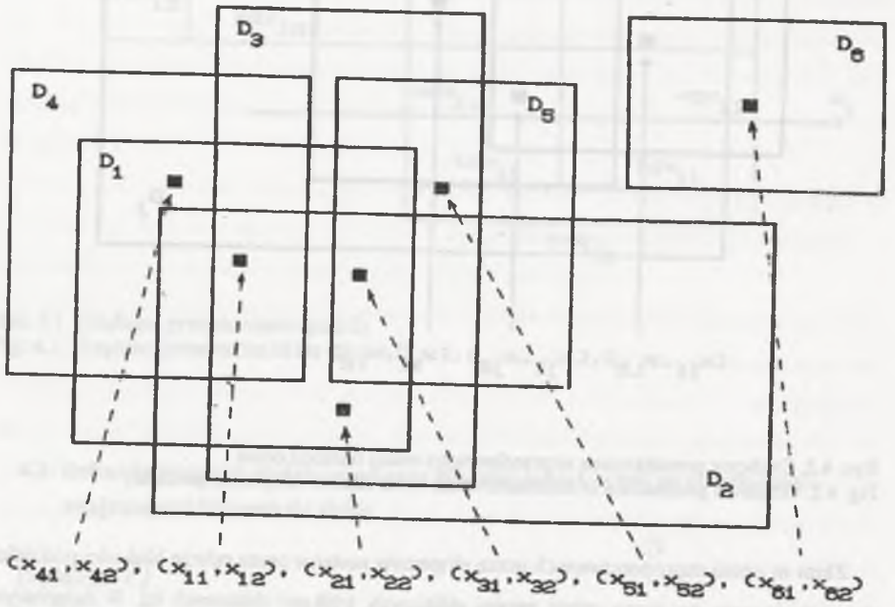
Opinia D jest zbliżona ze zbiorem $A=\{A_1,\ldots,A_k\}$ opinii zbliżonych, jeżeli jest ona zbliżona do każdej opinii zbioru A:

$$D \text{ zbliżona do } A \;\Leftrightarrow\; \forall_j \; D \text{ zbliżona do } A_i, \qquad (i=1,\ldots,k). \tag{4.7}$$

Relację bliskości na schematach blokowych będziemy zaznaczać skrótowo symbolem ".bl.".

4.4. Znajdywanie najliczniejszego zbioru opinii zbliżonych

Rysunek 4.3 ilustruje opinie, wśród których można rozróżnić następujące grupy:
$\{D_6\}$ - jedna opinia, która nie jest zbliżona do żadnej pozostałej,
$\{D_1, D_4\}$, $\{D_3, D_5\}$ - grupa opinii parami zbliżonych,
$\{D_1, D_2, D_3\}$ - grupa opinii trójkami zbliżonych.



Rys. 4.3. Podział opinii na grupy
Fig.4.3. Division of the opinions into groups

Naszym zadaniem będzie znaleźć spośród zbioru opinii $\{D_1,...,D_m\}$ najliczniejszy podzbiór opinii NPOB (najliczniejszy podzbiór opinii bliskich), w którym każda opinia z każdą będą zbliżone względem siebie. Dla sześciu opinii z rysunku 4.3 tym podzbiorem będzie $\{D_1, D_2, D_3\}$ jako trójelementowy.

Pokażemy teraz, jak znajdujemy podzbiór NPOB.

a) Najpierw sprawdzamy, czy wszystkie opinie $\{D_1,...,D_m\}$ są wzajemnie zbliżone do siebie. Jeżeli tak, to NPOB=$\{D_1,...,D_m\}$. Jeżeli nie, to przechodzimy do punktu b).

b) Tworzymy $s=\binom{m}{m-1}$ kombinacji zbioru $\{D_1,...,D_m\}$, tj. s=m kombinacji m-1-elementowych. Sprawdzamy, czy wśród tych kombinacji znajduje się zbiór opinii wzajemnie zbliżonych. Jeżeli tak, to NPOB jest tym zbiorem. Jeżeli nie, to przechodzimy do punktu c).

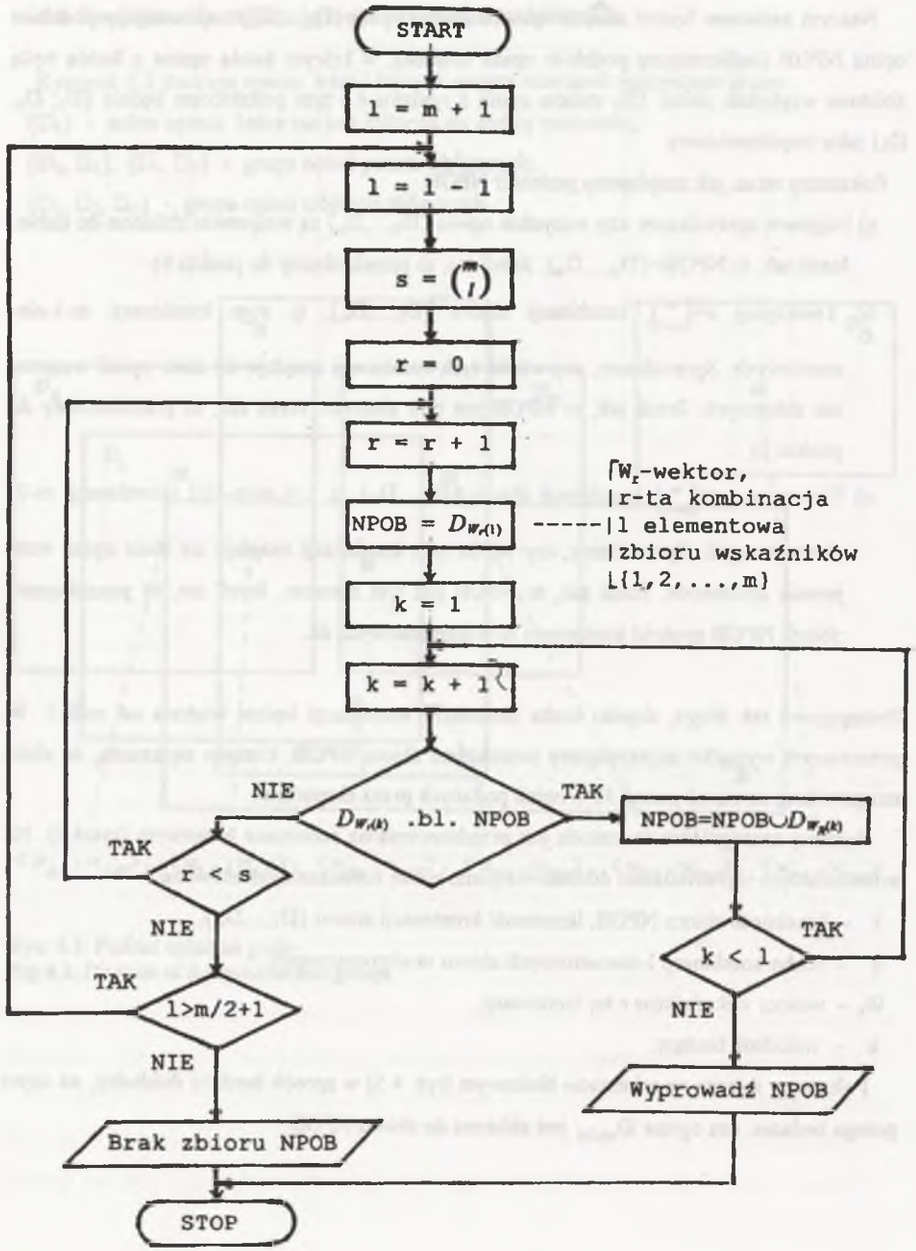
c) Tworzymy $s=\binom{m}{m-2}$ kombinacji zbioru $\{D_1,...,D_m\}$, tj. $s = m(m-1)/2$ kombinacji m-2-elementowych. Sprawdzamy, czy wśród tych kombinacji znajduje się zbiór opinii wzajemnie zbliżonych. Jeżeli tak, to NPOB jest tym zbiorem. Jeżeli nie, to poszukujemy zbioru NPOB spośród kombinacji m-3-elementowych itd.

Postępujemy tak długo, dopóki liczba elementów kombinacji będzie większa od m/2+1. W przeciwnym wypadku zaprzestajemy poszukiwań zbioru NPOB, kierując się zasadą, że zbiór ten powinien zawierać ponad 50% opinii podanych przez ekspertów.

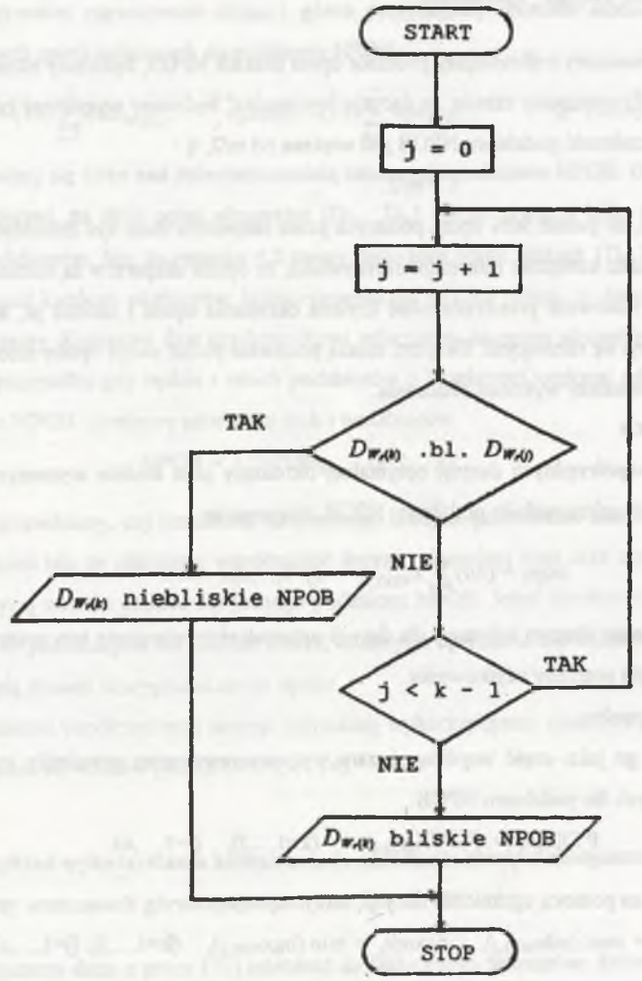
Bardziej szczegółowo ta metoda jest przedstawiona na schemacie blokowym (rys.4.4). Na schemacie tym wprowadzono dodatkowe pomocnicze oznaczenia, mianowicie:

l - liczebność zbioru NPOB, liczebność kombinacji zbioru $\{D_1,...,D_m\}$,
s - liczba kombinacji l-elementowych zbioru m-elementowego,
W_r - wektor wskaźników r-tej kombinacji,
k - wskaźnik bieżący.

Pokażemy jeszcze na schemacie blokowym (rys. 4.5) w sposób bardziej dokładny, na czym polega badanie, czy opinia $D_{W_r(k)}$ jest zbliżona do zbioru NPOB.



Rys. 4.4. Schemat blokowy wyznaczania zbioru NPOB
Fig. 4.4. Block diagram of NPOB set determination



Rys. 4.5. Schemat blokowy określania bliskości opinii od zbioru opinii
Fig. 4.5. Block diagram of defining the opinion proximity from the opinion set

4.5. Określenie decyzji "optymalnej"

Mając wyznaczony najliczniejszy podzbiór opinii bliskich NPOB, będziemy określać decyzję "optymalną". Przyjmujemy zasadę, że decyzję "optymalną" będziemy wyznaczać tylko w przypadku, gdy liczebność podzbioru NPOB jest większa od m/2, tj.:

$$l > m/2 . \qquad (4.8)$$

Oznacza to, że ponad 50% opinii podanych przez ekspertów musi być zbliżonych. W przeciwnym wypadku komputer informuje użytkownika, że opinie ekspertów są rozbieżne. Należy z ekspertami ponownie przedyskutować kryteria określania opinii i uściślić je, aby nie było dużo opinii zbyt się różniących. Eksperci muszą ponownie podać swoje opinie zmodyfikowane oraz ponownie należy wykonać obliczenia.

Definicja 4.4

Wartości współrzędnych decyzji optymalnej określamy jako średnie arytmetyczne współrzędnych opinii należących do podzbioru NPOB, mianowicie:

$$xopt_j = (1/l)\sum_{k=1}^{l} x_{w(k),j}, \qquad (j=1,...,n). \qquad (4.9)$$

Przy określaniu obszaru tolerancji dla decyzji optymalnej przyjmujemy trzy warianty zależne od interpretacji i potrzeby użytkownika.

a) Obszar minimalny

Określamy go jako część wspólną obszaru wyznaczonego przez przedziały tolerancji dla opinii należących do podzbioru NPOB.

$$PTXopt_j = \bigcap_k PTX_{w(k),j}, \qquad (k=1,..,l), \quad (j=1,...,n). \qquad (4.10)$$

Rozpisując to za pomocą ograniczeń decyzji, otrzymujemy:

$$odxopt_j = \max_k (odx_{w(k),j}), \quad ogxopt_j = \min_k (ogx_{w(k),j}), \quad (k=1,..,l), (j=1,...,n). \qquad (4.11)$$

b) Obszar maksymalny

Wyznaczamy go przez sumy mnogościowe przedziałów tolerancji poszczególnych współrzędnych opinii należących do podzbioru NPOB.

$$PTXopt_j = \bigcup_k PTX_{w(k),j}, \qquad (k=1,..,l), \quad (j=1,...,n). \qquad (4.12)$$

Rozpisując to za pomocą ograniczeń decyzji, otrzymujemy:

$$odxopt_j = \min_k (odx_{w(k),j}), \quad ogxopt_j = \max_k (ogx_{w(k),j}), \quad (k=1,..,l), (j=1,...,n). \qquad (4.13)$$

c) Obszar średni

Jako optymalne ograniczenia dolne i górne przyjmujemy wartości średnie ograniczeń współrzędnych opinii należących do podzbioru NPOB.

$$odxopt_j = (1/l)\sum_{k=1}^{l} odx_{w(k),j}, \qquad ogxopt_j = (1/l)\sum_{k=1}^{l} ogx_{w(k),j}, \qquad (j=1,...,n). \qquad (4.14)$$

Zastanowimy się teraz nad jednoznacznością znalezienia podzbioru NPOB. Okazuje się, że może się zdarzyć, że zbiór opinii ekspertów $\{D_1,...,D_m\}$ będzie zawierał kilka takich równolicznych podzbiorów. Np. na rysunku 4.2 mamy dwie pary opinii bliskich $\{D_i, D_j\}$, $\{D_j, D_k\}$. Gdy liczebność każdego ze zbiorów będzie mniejsza od m/2 lub równa, to decyzji optymalnej nie wyznaczamy. Komputer daje użytkownikowi informacje, że opinie ekspertów są zbyt rozbieżne. W przypadku gdy będzie r takich podzbiorów o liczebności większej od m/2, to ostateczny zbiór NPOB określamy jako sumę tych r podzbiorów:

$$NPOB = \bigcup_s NPOB_s , \quad (s=1,...,r). \qquad (4.15)$$

Następnie sprawdzamy, czy liczebność otrzymanego iloczynu podzbiorów stanowi ponad 50% liczby m. Jeżeli tak, to obliczamy współrzędne decyzji optymalnej xopt oraz ograniczenia, tak jak to powyżej zostało podane dla jednego podzbioru NPOB. Jeżeli liczebność znalezionego zbioru NPOB jest mniejsza niż m/2 lub równa, to decyzja optymalna nie będzie wyznaczona, a eksperci będą musieli skorygować swoje opinie.

Do określenia współrzędnych decyzji optymalnej wykorzystujemy wzór (4.9), a do obszaru tolerancji jeden ze wzorów (4.11), (4.13), (4.14).

4.6. Przykład wykorzystania komputera do określania strefy niebezpiecznej przy wstrząsach górniczych

Wykorzystamy dane z pracy [71] odnośnie do faktycznych wstrząsów, które miały miejsce w kopalni węgla kamiennego "Szombierki" w rejonie 2A/509. Wstrząsy są rejestrowane na bieżąco w kopalni przez układ sejsmometrów. Dla przykładu zajmiemy się jednym wstrząsem, który w pracy [71] ma numer 34. Na podstawie danych z sejsmometrów wstrząs lokalizowany był według pięciu różnych metod obliczeniowych:

a) przez kopalnianą służbę geofizyczną w oparciu o algorytm A. Kijki,

b) według metody P dla ważonej funkcji błędu lokalizacji,

c) według metody P dla nieważonej funkcji błędu lokalizacji,

d) według metody PA dla ważonej funkcji błędu lokalizacji,

e) według metody PA dla nieważonej funkcji błędu lokalizacji.

Współrzędne miejsca wstrząsu oznaczono poprzez x, y, z. Są to współrzędne wyrażone w metrach od ustalonego punktu odniesienia w kopalni. Współrzędna z oznacza głębokość pod ziemią.

Otrzymano następujące rezultaty lokalizacji wstrząsu [71]:

metoda	x	y	z
a)	6820	-1620	-520
b)	6828.21	-1658.83	-554.42
c)	6815	-1658	-531
d)	6855	-1663	-535
e)	6919	-1816	-581
średnia wart.	6847.44	-1683.17	-544.28

Tolerancje w obliczeniach [71] zostały przyjęte jako:

58.33 [m] - dla metody a),

52.01 [m] - dla metody b), d),

99.27 [m] - dla metody c), e).

Mając takie dane, wykorzystamy algorytm komputerowy. W naszym rozumieniu mamy pięciu ekspertów a), b), c), d), e), którzy określili swoje decyzje trójwymiarowe x, y, z wraz z tolerancjami.

Jako macierz X współrzędnych decyzji przyjmujemy:

$$X = \begin{bmatrix} 6820 & -1620 & -520 \\ 6828.21 & -1658.83 & -554.42 \\ 6815 & -1658 & -531 \\ 6855 & -1663 & -535 \\ 6919 & -1816 & -581 \end{bmatrix}.$$

Macierze tolerancji dolnych TDX oraz tolerancji górnych TGX są następujące:

$$TDX = TGX = \begin{bmatrix} 58.33 & 58.33 & 58.33 \\ 52.01 & 52.01 & 52.01 \\ 99.27 & 99.27 & 99.27 \\ 52.01 & 52.01 & 52.01 \\ 99.27 & 99.27 & 99.27 \end{bmatrix}.$$

Program komputerowy dał następujące wyniki obliczeń:

Minimalny obszar niebezpieczny

Nr współrzędnej	Dolna granica obszaru	Epicentrum wstrząsu	Górna granica obszaru
1	6802.990	6839.553	6878.330
2	-1678.330	-1649.958	-1610.990
3	-578.330	-535.105	-502.410

Maksymalny obszar niebezpieczny

Nr współrzędnej	Dolna granica obszaru	Epicentrum wstrząsu	Górna granica obszaru
1	6755.730	6839.553	6954.270
2	-1757.270	-1649.958	-1558.730
3	-630.270	-535.105	-431.730

Średni obszar niebezpieczny

Nr współrzędnej	Dolna granica obszaru	Epicentrum wstrząsu	Górna granica obszaru
1	6774.147	6839.553	6904.958
2	-1715.363	-1649.958	-1584.552
3	-600.510	-535.105	-469.700

Porównanie wyników programu ze współrzędnymi x, y z obliczonymi jako średnie z metod a), b), c), d), e) [71] wskazuje, że wystąpiły różnice w określeniu epicentrum wstrząsu. Dla współrzędnej x ta różnica wynosi około 8[m], dla y 33[m], a dla z 9[m]. Różnice te powstały dlatego, że program komputerowy odrzucił dane uzyskane metodą e) jako zbyt różniące się od danych uzyskanych pierwszymi czterema metodami. Innymi słowy, decyzja eksperta e) została wyeliminowana jako niebliska pozostałym.

4.7. Zwiększenie liczby opinii bliskich

System wspomagania decyzji zaprezentowany w tym opracowaniu można wykorzystywać do ustalania interesujących nas obszarów. Wykorzystuje się tu pewne przesłanki czy sugestie pochodzące z różnych źródeł informacji. Te źródła traktuje się jako ekspertów. Metodę zaprezentowaną tutaj można określić jako wymagającą od ekspertów rzetelnej oceny sytuacji przy podawaniu opinii. Decyzja optymalna będzie określona przez system jedynie wtedy, gdy ponad 50% opinii ekspertów będzie bliskich. Z punktu widzenia matematycznego zwiększenie liczby opinii bliskich można osiągnąć poprzez:

a) zmniejszenie wariancji poszczególnych współrzędnych opinii,

b) rozszerzenie przedziałów tolerancji dla współrzędnych opinii.

5. WYKORZYSTANIE TEORII GIER O SUMIE ZEROWEJ

Gospodarka rynkowa, nadwyżka podaży węgla nad popytem sprawiają, że Spółki Węglowe obligowane są do konkurowania na rynku węglowym oraz - co równie ważne - na rynku surowców energetycznych. Konkurują nie tylko węgiel z węglem, ale i węgiel z gazem, ropą naftową itd. Za uzasadnione uznano zaprezentowanie takich metod, które w pierwszej kolejności wykazują, czy bardziej zasadna jest kooperacja czy konkurencja, a przy wyborze konkurencji wskazują, jak można uzyskać przewagę konkurencyjną.

W górnictwie węglowym metody teorii gier odgrywają szczególną rolę, gdyż górnictwo jako takie prowadzi grę z Naturą i gra ta może przybierać formy gry konkurencyjnej - gry z Naturą lub gry kooperacyjnej, jeśli umiejętnie wykorzystuje się rozpoznane prawa natury (gry z Naturą).

5.1. Rodzaje gier

W kolejnych czterech rozdziałach będziemy zajmowali się wykorzystaniem teorii gier do podejmowania decyzji. Teoria gier zajmuje się sytuacjami, w których występuje konflikt interesów. Konflikt interesów zachodzi nie tylko wtedy, gdy strony uczestniczące w konflikcie są całkowicie przeciwstawne, ale także wtedy, gdy są one tylko częściowo niezgodne. W przypadku całkowicie przeciwstawnych interesów stron mamy do czynienia z grami o sumie zerowej [50], [67], [96], [102]. Gdy konflikt stron jest tylko częściowy, mamy do czynienia z grami o sumie niezerowej [50], [67], [96]. W grach o sumie niezerowej, jeśli uczestnicy gry uzgadniają między sobą działania, to mamy do czynienia z grami kooperacyjnymi [50], [67], [96], a jeśli nie uzgadniają, to z grami niekooperacyjnymi [50], [67], [96]. W grze może uczestniczyć dwóch graczy lub więcej. Z tego powodu każda z wyżej wymienionych gier może być dwuosobowa [50], [67], [96], [102] lub n-osobowa [50], [67], [96]. Uczestników gry nazywamy graczami lub partnerami. Poszczególne możliwe decyzje graczy nazywamy strategiami.

Na przykładzie gry dwuosobowej o sumie zerowej wyjaśnimy, skąd bierze się określenie "gra o sumie zerowej". Strategie gracza pierwszego oznaczymy symbolami $A_1,\ldots,A_m$, natomiast

strategie gracza drugiego $B_1,\ldots,B_n$. Każdej parze strategii (A_i,B_j) przyporządkowany jest określony wynik gry w_{ij}. Wynik w_{ij} oznacza wypłatę albo wielkość wygranej gracza pierwszego w wyniku zastosowania przez gracza pierwszego strategii A_i, a przez gracza drugiego strategii B_j. Gracz drugi traci wielkość w_{ij}. Innymi słowy: przy zastosowaniu pary strategii (A_i,B_j) gracz drugi płaci graczowi pierwszemu wielkość w_{ij}. Jeśli wielkość w_{ij} jest ujemna, to gracz pierwszy płaci graczowi drugiemu. Termin gra o sumie zerowej wywodzi się stąd, ze wygrana jednego gracza równa się przegranej drugiego gracza. Suma wypłat dla obydwu graczy wynosi więc zero. Taką grę możemy przedstawić w postaci macierzowej.

$$\begin{array}{cc} & \text{Gracz 2} \\ & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \cdots & B_n \end{array} \\ \text{Gracz 1} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{array} & \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{m1} & w_{m2} & \cdots & w_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Wykorzystanie gier o sumie zerowej przedstawione jest w dalszym ciągu tego rozdziału.

W grach o sumie niezerowej każdy z graczy ma osobną macierz wypłat. Suma wypłat dla obydwu graczy przy zastosowaniu strategii (A_i,B_j) może być różna od zera. Zmiana strategii graczy może spowodować równoczesne zwiększenie wypłat dla obydwu graczy lub równoczesne zmniejszenie wypłat dla obydwu graczy albo zwiększenie wypłaty jednego z graczy przy równoczesnym zmniejszeniu wypłaty drugiego gracza. Jeżeli partnerzy wybierają swoje strategie działania nie porozumiewając się przy tym między sobą, to mamy do czynienia z grami niekooperacyjnymi [50], [67], [96]. Zagadnienia te omówione są w rozdziale 6.

Jeśli partnerzy uzgadniają ze sobą wybór strategii działania, to mamy do czynienia z grami kooperacyjnymi [50], [67], [96]. Problemy związane z rozwiązywaniem gier kooperacyjnych przedstawione są w rozdziale 7.

Specjalne metody w grach z Naturą [50], [55], [85] zaprezentowane są w rozdziale 8. Naturę traktuje się jak naszego przeciwnika w grze. Strategie Natury wybierane są przypadkowo lub z określonym prawdopodobieństwem.

Występują też inne rodzaje gier, którymi jednak nie będziemy się zajmowali w tej pracy. Do nich zaliczamy gry o nieskończonej liczbie strategii [67], gry stochastyczne [67], gry rekursywne [67], gry o przeżycie [67], wielokomponentowe gry zużycia [67]. W grach o nieskończonej liczbie strategii zbiór strategii działania ma moc continuum. Pozostałe gry zaliczają się do gier sekwencyjnie składanych w czasie o skomplikowanych regułach składania.

5.2. Gry o sumie zerowej

W rozdziale tym będziemy zajmowali się sytuacjami konfliktowymi między dwoma decydentami działającymi na wspólnym rynku. My będziemy utożsamiali się z decydentem reprezentującym interesy kopalni, natomiast partnera w konflikcie interesów będziemy traktowali jako naszego rywala, o którego działaniu nie zawsze wszystko wiemy. Możemy jedynie spodziewać się albo przypuszczać, jak może postąpić Przeciwnik, ale którą z możliwych dróg wybierze, nie wiemy. My z kolei też możemy podejmować różne decyzje. Gdyby wynik naszego działania zależał tylko od nas, to bylibyśmy całkowicie pewni, jak mamy postąpić. Zakładamy jednak, że Przeciwnik jest naszym partnerem w pewnej grze. Wynik naszego działania zależy w równym stopniu od nas, jak i od niego. Przyjmujemy też, że między nami a Przeciwnikiem jest pewien konflikt interesów. My z tej gry chcemy dla siebie wyciągnąć jak najwięcej korzyści, a Przeciwnik broni się przed tym i chce te korzyści zminimalizować. Sytuacji konfliktowych w życiu jest bardzo wiele. Mogą one dotyczyć rodzaju uczestników, np. jednostki, grupy, organizacji, społeczeństwa. Sytuacje konfliktowe mogą występować w odniesieniu do rodzaju działań, np. współzawodnictwo sportowe, walki zbrojne, konkurencja ekonomiczna, działania dyplomatyczne. Konflikt może też dotyczyć charakteru dóbr, np. dobra materialne, władza, prestiż. Może on występować w innym kontekście jak np. nieporozumienie małżeńskie, napięte stosunki międzyludzkie w zakładzie pracy. Może to też być konflikt przekonań, konflikt wartości itp.

My w tym rozdziale będziemy się zajmowali konfliktem interesów w kopalni, w którym jedna strona maksymalizuje, a druga minimalizuje funkcje kosztów. Dla przykładu, jako naszego Przeciwnika wybierzemy Naturę reprezentowaną przez górotwór, natomiast My będziemy reprezentowani przez górników operujących na tym górotworze. Ceną albo wartością gry pomiędzy Naturą a ludźmi będzie bezpieczeństwo górników pracujących na dole. Wyjaśnimy jeszcze, dlaczego będziemy traktowali górotwór jako naszego Przeciwnika, a nie sprzymierzeńca. W kopalni na dole górnicy spotykają się z takimi zjawiskami jak wstrząsy, wycieki wody, ulatnianie się gazu itp. Zjawiska te są skierowane przeciw bezpieczeństwu górników, a naszym zadaniem będzie podejmowanie decyzji maksymalizujących poziom bezpieczeństwa. Dla zilustrowania zasad teorii gier o sumie zerowej będziemy traktowali Naturę jako naszego Przeciwnika, któremu zależy na minimalizacji poziomu bezpieczeństwa. Natomiast specjalne metody gry z Naturą będą przedstawione w rozdziale 8.

5.3. Strategie oraz macierz bezpieczeństwa

Wszelkie nasze działania oraz działania Przeciwnika będziemy nazywali strategiami. Termin ten został wzięty z teorii gier. W terminologii teorii gier decydent podejmujący działania w kopalni nazywany jest jednym graczem, a nasz Przeciwnik drugim graczem [93], [102].

Przykład 5.1

Niech gracz 1, tzn. my, ma do dyspozycji osiem strategii:

- wiercimy otwór w ścianie węglowej w miejscu x_i (i=1,...,8).

Gracz 2, tj. Natura, ma następujące strategie:

1 - wyrzuty gazów,
2 - wyrzuty skał,
3 - wypływ wody,
4 - wypływ kurzawki,
5 - opad skał z niezabezpieczonego stropu lub ociosu,
6 - opad skał z niezabezpieczonej calizny,
7 - zagrożenie gazowe dwutlenkiem węgla,
8 - zagrożenie metanowe,
9 - wstrząsy podziemne,
10 - tąpania.

My przy wyborze naszej strategii musimy wziąć pod uwagę prawdopodobieństwo występowania tych zjawisk niekorzystnych. Innymi słowy, należy kierować się stopniem bezpieczeństwa pracujących górników dla każdej naszej strategii w odniesieniu do sytuacji niebezpiecznych określonych strategiami Natury. Ten stopień bezpieczeństwa będziemy określali w procentach. Np. 100% oznacza, że dane zjawisko niekorzystne w określonej naszej strategii nie wystąpi, czyli bezpieczeństwo górników ze względu na to niekorzystne zjawisko jest całkowite, tj. stuprocentowe.

Aby zilustrować to zagadnienie, przyjmujemy konkretne wartości liczbowe w naszej przykładowej grze. Nasze strategie oznaczamy symbolami $A_1,...,A_8$, a strategie Natury $B_1,...,B_{10}$.

		Natura									
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}
My	A_1	99	96	100	93	94	92	100	91	93	100
	A_2	88	100	96	85	91	96	90	100	99	87
	A_3	95	93	97	94	93	94	98	95	92	96
	A_4	100	98	96	97	95	100	98	96	100	99
	A_5	95	97	88	92	90	99	89	96	100	95
	A_6	91	100	98	92	92	98	90	100	99	92
	A_7	100	98	100	95	94	94	100	96	95	100
	A_8	87	97	95	96	91	100	95	95	98	99

Otrzymaną tablicę nazywamy macierzą poziomów bezpieczeństwa. W teorii gier taką tablicę nazywa się macierzą wypłat. Analizując liczby w tej macierzy, stwierdzamy, że:

1. Gdy zastosujemy strategie A_1, tzn., że wiercimy otwór w miejscu x_1, to:
   a) najmniejszy stopień bezpieczeństwa wynosi 91% dla strategii B_8,
   b) bezpieczeństwo górników jest stuprocentowe dla strategii B_3, B_7, B_{10}.
2. Gdy zastosujemy strategie A_2, tzn., że wiercimy otwór w miejscu x_2, to:
   a) najmniejszy stopień bezpieczeństwa wynosi 85% dla strategii B_4,
   b) bezpieczeństwo górników jest stuprocentowe dla strategii B_2, B_8 itd.

W teorii gier taką tablicę nazywa się macierzą wypłat dla gracza pierwszego. Wartości podane w tej macierzy gracz drugi płaci graczowi pierwszemu. Graczowi pierwszemu zależy na maksymalizowaniu wygranej. Gracz drugi stara się, aby straty jego były jak najmniejsze.

5.4. Punkt siodłowy i zasada maksyminu (minimaksu)

Przy wyborze strategii A_i kierujemy się zasadą, aby jak najmniej stracić. Gdy My stosujemy strategię A_1, a Natura B_8, bezpieczeństwo górników wynosi 91%; lub więcej, gdy Natura zastosuje inną strategię B_j. Wybieramy najmniejszą liczbę z pierwszego wiersza macierzy wypłat, tzn. 91%. Jest to najmniejszy poziom bezpieczeństwa górników przy zastosowaniu strategii A_1. Tak samo analizujemy pozostałe strategie A_i. W wierszach macierzy wypłat znajdujemy minima. Minimalne poziomy bezpieczeństwa dla kolejnych wierszy wynoszą:

- dla strategii A_2 85%,
- dla strategii A_3 92%,
- dla strategii A_4 95%,
- dla strategii A_5 88%,
- dla strategii A_6 90%,

- dla strategii A_7 94%,
- dla strategii A_8 87%.

Następnie ze znalezionych minimów wybieramy największe, tj. z liczb 91, 85, 92, 95, 88, 90, 94, 87 wybieramy liczbę 95 występującą w strategii A_4. Co przez to osiągnęliśmy? Stwierdzamy, że strategia A_4 jest lepsza od pozostałych, bo gwarantuje nam poziom bezpieczeństwa wynoszący 95% niezależnie od zastosowanych strategii B_j Natury. Ten poziom może być większy, gdyby Natura zastosowała strategię różną od B_5. Np strategia A_2 gwarantuje nam jedynie bezpieczeństwo wynoszące 85%. Strategię A_4 nazywamy w tym przypadku strategią maksymalizującą poziom bezpieczeństwa dla gracza pierwszego, tzn. dla nas. Liczbę 95 oznaczamy przez V_1 i nazywamy dolną ceną lub wartością gry.

$$V_1 = \max (91,85,92,95,88,90,94,87) = 95.$$

Zajmiemy się teraz graczem drugim, tj. Naturą. Zakładamy, że Natura działa na naszą niekorzyść. Stosując strategię B_1 maksymalnie Natura pozwoli osiągnąć bezpieczeństwo 100%, a np. stosując strategię B_4 97%. W każdej kolumnie macierzy wypłat znajdujemy maksimum. Z tych liczb wybieramy najmniejszą, tj. 95%, występującą w strategii B_5. Z punktu widzenia Natury strategia B_5 jest lepsza od pozostałych, bo pozwala osiągnąć poziom bezpieczeństwa tylko 95% - więcej nie, niezależnie od zastosowanych przez nas strategii A_i. Stosując strategię B_5 Natura mogłaby osiągnąć rezultat jeszcze lepszy dla niej, gdybyśmy nie zastosowali swojej wybranej strategii A_4. Liczbę 95 wybraną ze strategii B_5 oznaczamy przez V_2 i nazywamy górną ceną gry.

$$V_2 = \min (100,100,100,97,95,100,100,100,100,100) = 95.$$

Jeżeli $V_1=V_2$, to punkt leżący na skrzyżowaniu wybranych strategii A_4 i B_5 nazywa się punktem siodłowym gry. Termin ten został zaczerpnięty z teorii gier. Jest to punkt, dla którego wszystkie pozostałe liczby w wierszu macierzy są nie mniejsze i jednocześnie wszystkie liczby w kolumnie są nie większe od niego [50], [67], [74], [102].

Przejdziemy teraz do ogólnego omówienia poszukiwania punktu siodłowego dla macierzy poziomów bezpieczeństwa o wymiarach m wierszy i n kolumn. Dana jest macierz $\{w_{ij}\}$, gdzie i=1,...,m; j=1,...,n. Dla gracza pierwszego, tzn. dla nas, stosujemy zasadę maksyminu. Mówi ona, że dolną cenę gry należy obliczyć według wzoru:

$$V_1 = \max_i \min_j \{w_{ij}\} \quad \text{dla} \quad i=1,...,m; \quad j=1,...,n. \tag{5.1}$$

Strategię wyznaczoną w ten sposób nazywa się maksyminową dla gracza pierwszego. Dla gracza drugiego, tj. dla Natury, stosujemy zasadę minimaksu. Mówi ona, że górną cenę gry należy obliczyć według wzoru:

$$V_2 = \min_j \max_i \{w_{ij}\} \quad \text{dla } i=1,...,m; \quad j=1,...,n. \tag{5.2}$$

Strategia wyznaczona w ten sposób nazywa się minimaksową dla gracza drugiego. Jeżeli $V_1=V_2$, to gra posiada punkt siodłowy, a gracze powinni stosować strategie wyznaczone przez ten punkt. W tym przypadku strategie maksyminowa i minimaksowa są strategiami optymalnymi dla graczy. Ceną gry jest tutaj liczba $V=V_1=V_2$. Według terminologii Steinhausa [50] takie gry nazywamy zamkniętymi. Natomiast gdy $V_1 \neq V_2$, to gry nazywamy otwartymi.

W naszym przykładzie punkt siodłowy występuje. Cena gry wynosi $V=V_1=V_2=95\%$. Strategią optymalną dla nas jest A_4, a dla Natury B_5. Oznacza to, że powinniśmy podjąć decyzję o wierceniu otworu w miejscu x_4. Mamy tu pewną przewagę nad Naturą, ponieważ Natura może nie zastosować swojej optymalnej decyzji B_5, lecz inną. Wtedy możemy uzyskać poziom bezpieczeństwa wynoszący nawet 100%. Gdyby Natura potrafiła rozumować tak jak my, to na pewno wybrałaby strategię B_5.

5.5. Zasada dominacji

Może się okazać, że pewne strategie są lepsze. Pozwalają osiągnąć większy zysk niezależnie od posunięć przeciwnika. Analizując nasz przykład widzimy, że np. strategia A_4 jest lepsza od A_5, ponieważ odpowiednie liczby wiersza czwartego macierzy wypłat mają większe wartości niż wiersza piątego. Mówimy wtedy, że strategia A_5 jest zdominowana przez strategię A_4. Strategię dominującą A_4 zostawiamy, a strategię zdominowaną eliminujemy.

Rozważymy to teraz z punktu widzenia Natury. Strategią lepszą dla Natury jest ta, która zawiera mniejsze liczby przy porównaniu z inną strategią. Dla Natury np. lepszą strategią jest B_4 niż B_{10}, ponieważ odpowiednie liczby w kolumnie czwartej są mniejsze od liczb w kolumnie dziesiątej. Strategią dominującą jest B_4, a zdominowaną B_{10}.

Zapiszemy to teraz w postaci ogólnej dla macierzy o m wierszach i n kolumnach. Mówimy, że strategia A_k dominuje nad strategią A_l gracza pierwszego, gdy:

$$\forall_j w_{kj} \geq w_{lj} \qquad (j=1,...,n). \tag{5.3}$$

Mówimy, że strategia B_r dominuje nad strategią B_s Natury, gdy:

$$\forall_i w_{ir} \leq w_{is} \qquad (i=1,...,m). \tag{5.4}$$

Zasada dominacji pomaga upraszczać gry eliminując z rozważań strategie, które nie będą używane.

Przykład 5.2

Dana jest następująca macierz poziomów bezpieczeństwa jak w przykładzie 5.1.

		Natura									
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}
My	A_1	99	96	100	93	94	92	100	91	93	100
	A_2	88	100	96	85	91	96	90	100	99	87
	A_3	95	93	97	94	93	94	98	95	92	96
	A_4	100	98	96	97	95	100	98	96	100	99
	A_5	95	97	88	92	90	99	89	96	100	95
	A_6	91	100	98	92	92	98	90	100	99	92
	A_7	100	98	100	95	94	94	100	96	95	100
	A_8	87	97	95	96	91	100	95	95	98	99

Wykorzystując zasadę dominacji, wyznaczymy najlepsze strategie dla nas i dla Natury. Spośród naszych strategii:

- strategia A_4 dominuje nad strategią A_5,
- strategia A_4 dominuje nad strategią A_8,
- strategia A_7 dominuje nad strategią A_1,
- strategia A_7 dominuje nad strategią A_3,
- strategia A_6 dominuje nad strategią A_2.

Natura posiada strategie dominujące B_4 i B_5:

- strategia B_4 dominuje nad strategią B_{10},
- strategia B_5 dominuje nad strategią B_2.

Z macierzy wypłat eliminujemy strategie zdominowane A_1, A_2, A_3, A_5, A_8, B_2 i B_{10}.

Otrzymujemy następującą zredukowaną macierz wypłat:

		Natura							
		B_1	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9
My	A_4	100	96	97	95	100	98	96	100
	A_6	91	98	92	92	98	90	100	99
	A_7	100	100	95	94	94	100	96	95

W tej macierzy my nie posiadamy strategii dominujących, natomiast Natura ma następujące strategie dominujące i zdominowane:

- strategia B_4 dominuje nad strategią B_9;
- strategia B_5 dominuje nad strategiami B_3, B_4, B_6, B_8, B_9;
- strategia B_6 dominuje nad strategią B_9;
- strategia B_7 dominuje nad strategią B_1.

Strategie zdominowane eliminujemy. Otrzymujemy następującą macierz:

		Natura	
		B_5	B_7
My	A_4	95	98
	A_6	92	90
	A_7	94	100

W tej zredukowanej macierzy zauważamy, że:

- strategia A_4 dominuje nad strategią A_6,
- strategia A_7 dominuje nad strategią A_6.

Natomiast Natura nie posiada strategii dominującej. Z macierzy eliminujemy więc drugi wiersz. Otrzymujemy:

		Natura	
		B_5	B_7
My	A_4	95	98
	A_7	94	100

Zauważamy, że strategia B_5 dominuje nad B_7. Po wyeliminowaniu strategii zdominowanej B_7 otrzymujemy:

		Natura
		B_5
My	A_4	95
	A_7	94

Teraz z kolei strategia A_4 dominuje nad strategią A_7.

Ostatecznie otrzymujemy następującą macierz gry:

		Natura
		B_5
My	A_4	[95]

Rozważania te doprowadziły do tego samego rezultatu co poprzednio, że optymalnymi strategiami są A_4 i B_5. Gdyby Natura potrafiła analizować tę macierz tak jak my, to zastosowałaby strategię B_5 przeciw naszej A_4. Gdy zastosuje inną, to my zyskamy.

5.6. Strategie mieszane

Te strategie stosujemy do gier nie posiadających punktu siodłowego [50], [96],[102].

Przykład 5.3

Dana jest macierz:

	B_1	B_2
A_1	60	90
A_2	100	80

Strategii dominujących tu nie ma. Obliczamy dolną i górną cenę gry:

$$V_1 = \max_i \min_j w_{ij} = \max(60,80) = 80, \tag{5.5}$$

$$V_2 = \min_j \max_i w_{ij} = \min(100,90) = 90. \tag{5.6}$$

Okazuje się, że $V_1 \neq V_2$. Strategią maksyminową jest strategia A_2, a strategią minimaksową jest strategia B_2. Stosując naszą strategię A_2 przeciw strategii B_2, dostajemy poziom bezpieczeństwa równy 80%. Czy nie da się go jednak podnieść, skoro cena gry zawiera się między 80% a 90%? Gdyby tę grę można przeprowadzać wielokrotnie, to nie zawsze musielibyśmy stosować strategię A_2. Zastosowanie strategii A_1 przeciw B_2 daje nam bezpieczeństwo 90%. Zachodzi pytanie: jak często zmieniać poszczególne strategie? Dla gier typu 2 x 2, tzn. takich, gdzie występuje dwóch graczy i każdy z nich ma dwie strategie, zagadnienie jest rozwiązane. Opiera się ono na następującym twierdzeniu [50].

TWIERDZENIE 5.1

Składowe optymalnej strategii partnera 1 (2) są odwrotnie proporcjonalne do bezwzględnych wartości różnic elementów odpowiednich wierszy (kolumn) macierzy.

Powracamy do przykładu 5.3. Znajdujemy optymalną strategię mieszaną składającą się ze strategii A_1 i A_2. Obliczamy różnice bezwzględne elementów w wierszach macierzy.

	B_1	B_2	
A_1	60	90	30
A_2	100	80	20

Są to liczby 30 i 20. Częstotliwość występowania strategii A_1 i A_2 jest odwrotnie proporcjonalna do tych liczb. Znaczy to, że na 50 rozegranych gier gracz 1 powinien zastosować 20 razy strategię A_1 i 30 razy strategię A_2. Kolejność występowania tych strategii jest zupełnie przypadkowa.

Sprawdzamy teraz, jak to się ma dla drugiego gracza dysponującego strategiami B_1 i B_2.

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 60 & 90 \\ 100 & 80 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} 40 & 10 \end{array} \end{array}$$

Odejmując elementy w kolumnach macierzy i biorąc ich moduły otrzymujemy liczby 40 i 10. Częstotliwość występowania strategii B_1 i B_2 jest odwrotnie proporcjonalna do tych liczb. Oznacza to, że na 50 gier należy zastosować 10 razy strategię B_1 i 40 razy strategię B_2.

Obliczamy cenę tej gry.

a) Jeżeli gracz 1 stosuje strategię mieszaną przeciw strategii B_1

$$V = (2/5) \cdot 60 + (3/5) \cdot 100 = 24+60 = 84.$$

b) Jeżeli gracz 1 stosuje strategię mieszaną przeciw strategii B_2

$$V = (2/5) \cdot 90 + (3/5) \cdot 80 = 36+48 = 84.$$

c) Jeżeli gracz 2 stosuje strategię mieszaną przeciw strategii A_1

$$V = (1/5) \cdot 60 + (4/5) \cdot 90 = 12+72 = 84.$$

d) Jeżeli gracz 2 stosuje strategię mieszaną przeciw strategii A_2

$$V = (1/5) \cdot 100 + (4/5) \cdot 80 = 20+64 = 84.$$

Cena gry jest więc jednakowa dla obydwu partnerów. Porównując tę liczbę z ceną V_1=80 zagwarantowaną przez strategię maksyminową, widzimy, że zastosowanie strategii mieszanej pozwoliło nam zwiększyć poziom bezpieczeństwa o 4%.

Określenie strategii mieszanej dla gry o macierzy wypłat typu m×n jest trudniejsze i wymaga zastosowania metod programowania liniowego [50], [67].

Przykład 5.4

Dana jest gra w postaci macierzy o 4 wierszach i 4 kolumnach

$$\begin{array}{c} \\ \\ \text{Gracz B} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{bmatrix} 92 & 93 & 91 & 94 \\ 91 & 92 & 95 & 94 \\ 92 & 93 & 94 & 91 \\ 94 & 92 & 92 & 92 \end{bmatrix} \end{array}$$

Strategii dominujących tu nie ma. Obliczamy dolną i górną cenę gry:

$$V_1 = \max_i \min_j w_{ij} = \max (91,91,91,92) = 92. \tag{5.7}$$

$$V_2 = \min_j \max_i w_{ij} = \min (94,93,95,94) = 93. \tag{5.8}$$

Okazuje się, że $V_1 \neq V_2$. Strategią maksyminową jest strategia A_4, a strategią minimaksową jest strategia B_2. Stosując strategię A_4 przeciw strategii B_2, gracz A otrzymuje wypłatę 92.

Wykorzystując metodę simpleksów z programowania liniowego [50], [67], otrzymujemy następujące częstotliwości p_i występowania strategii A_i: 8/27, 3/27, 7/27, 9/27. Strategie B_j powinny występować z następującymi częstotliwościami q_j: 5/18, 7/18, 3/18, 3/18. Obliczamy teraz wartość gry w przypadku zastosowania przez gracza A swojej najlepszej strategii mieszanej. Dla strategii optymalnej wartość gry powinna być jednakowa niezależnie od użytej strategii przeciwnika.

W przypadku użycia przez przeciwnika strategii B_1 jest:

$$V = \sum_{i=1}^{4} p_i w_{i1} = \frac{8}{27} \cdot 92 + \frac{3}{27} \cdot 91 + \frac{7}{27} \cdot 92 + \frac{9}{27} \cdot 94 = 92\frac{5}{9}.$$

Dla strategii B_2 mamy:

$$V = \sum_{i=1}^{4} p_i w_{i2} = \frac{8}{27} \cdot 93 + \frac{3}{27} \cdot 92 + \frac{7}{27} \cdot 93 + \frac{9}{27} \cdot 92 = 92\frac{5}{9}.$$

Dla kolejnych strategii B_3 i B_4 otrzymujemy:

$$V = \sum_{i=1}^{4} p_i w_{i3} = \frac{8}{27} \cdot 91 + \frac{3}{27} \cdot 95 + \frac{7}{27} \cdot 94 + \frac{9}{27} \cdot 92 = 92\frac{5}{9}.$$

$$V = \sum_{i=1}^{4} p_i w_{i4} = \frac{8}{27} \cdot 94 + \frac{3}{27} \cdot 94 + \frac{7}{27} \cdot 91 + \frac{9}{27} \cdot 92 = 92\frac{5}{9}.$$

Obliczamy teraz wartość gry w przypadku zastosowania przez gracza B swojej najlepszej strategii mieszanej. Dla strategii A_1, A_2, A_3 i A_4 używanych przez gracza A otrzymujemy:

$$V = \sum_{j=1}^{4} q_j w_{1j} = \frac{5}{18} \cdot 92 + \frac{7}{18} \cdot 93 + \frac{3}{18} \cdot 91 + \frac{3}{18} \cdot 94 = 92\frac{5}{9}.$$

$$V = \sum_{j=1}^{4} q_j w_{2j} = \frac{5}{18} \cdot 91 + \frac{7}{18} \cdot 92 + \frac{3}{18} \cdot 95 + \frac{3}{18} \cdot 94 = 92\frac{5}{9}.$$

$$V = \sum_{j=1}^{4} q_j w_{3j} = \frac{5}{18} \cdot 92 + \frac{7}{18} \cdot 93 + \frac{3}{18} \cdot 94 + \frac{3}{18} \cdot 91 = 92\frac{5}{9}.$$

$$V = \sum_{j=1}^{4} q_j w_{4j} = \frac{5}{18} \cdot 94 + \frac{7}{18} \cdot 92 + \frac{3}{18} \cdot 92 + \frac{3}{18} \cdot 92 = 92\frac{5}{9}.$$

Tak więc optymalną strategią mieszaną dla gracza A jest

$$(\frac{8}{27}\cdot A_1,\ \frac{3}{27}\cdot A_2,\ \frac{7}{27}\cdot A_3,\ \frac{9}{27}\cdot A_4).$$

Dla gracza B optymalną strategią mieszaną jest:

$$(\frac{5}{18}\cdot B_1,\ \frac{7}{18}\cdot B_2,\ \frac{3}{18}\cdot B_3,\ \frac{3}{18}\cdot B_4).$$

Była to interpretacja częstotliwościowa strategii mieszanej. Podamy teraz interpretację udziałową strategii mieszanej.

Przykład 5.5

Kopalnia ma zainwestować swój kapitał w jeden z obiektów $O_1,...,O_9$, przy czym dochodowość tej inwestycji zależy od tego, czy nastąpią warunki $W_1,...,W_9$ zgodnie z podaną macierzą wypłat.

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_7	W_8	W_9
O_1	20	22	22	17	20	20	16	20	20
O_2	18	20	20	20	23	23	16	20	20
O_3	18	20	20	17	20	20	20	24	24
O_4	23	20	23	20	16	20	20	15	20
O_5	20	17	20	24	20	24	20	15	20
O_6	20	17	20	20	16	20	25	20	25
O_7	24	24	20	20	20	15	20	20	14
O_8	20	20	16	25	25	20	20	20	14
O_9	20	20	16	20	20	15	26	26	20

Zagadnienie to traktujemy jak grę dwuosobową. Jest to gra otwarta nie posiadająca punktu siodłowego. Kopalnia może sobie zagwarantować minimalny zysk wynoszący 17%, gdy zainwestuje kapitał w obiekt O_3. Kopalnia ma też inne wyjście. Może zainwestować kapitał w kilka obiektów lub we wszystkie. Pytanie, jakie się nasuwa, to w jakich proporcjach? Po rozwiązaniu tej gry za pomocą metody simpleksów okazuje się, że kopalnia powinna zainwestować kapitał w poszczególne obiekty w następujących proporcjach: 0, 0, 0.417, 0, 0.333, 0, 0.25, 0, 0. Innymi słowy, kopalnia powinna zainwestować 42% swojego kapitału w obiekt O_3, 33% w obiekt O_5 i 25% w obiekt O_7. Pozwoli jej to na zapewnienie sobie większego zysku o około 3% w porównaniu z zyskiem gwarantowanym przez strategię maksyminową wskazującą na obiekt O_3. Zastosowanie strategii mieszanej spowodowało, że minimalny gwarantowany zysk będzie większy.

Należy jeszcze rozstrzygnąć, jak postąpić, gdy gra nie posiada punktu siodłowego, a rozgrywana jest tylko jeden raz i nie da się do niej zastosować interpretacji częstotliwościowej ani udziałowej. W takich sytuacjach stosuje się strategię bezpieczną, tj. maksyminową wyznaczoną na podstawie macierzy gry.

5.7. Przykłady zastosowań teorii gier o sumie zerowej w górnictwie

Przykład 5.6

Zajmiemy się porównaniem wysokonapięciowych sieci elektroenergetycznych w trzech kopalniach na podstawie danych rzeczywistych zawartych w pracy [60]. Sieci te będą oceniane ze względu na występujące w nich doziemienia. Doziemienia stanowią poważne zagrożenie dla pracujących pod ziemią górników. "Wydaje się, iż uzasadniony jest pogląd, że u podstaw niepowodzeń w dziedzinie zabezpieczeń ziemnozwarciowych sieci leży głównie brak dostatecznego eksperymentalnego rozeznania zjawisk i struktury doziemień w sieciach rzeczywistych" [60]. W trzech kopalniach oznaczonych symbolami A, B, C dokonano pomiarów występowania doziemień za pomocą rejestratorów. Rejestratory w kopalniach A i B były wyposażone w cztery liczniki działające odpowiednio ze zwłoką t=0.1s, t=1s, t=5s, t=10s. Rejestrator w kopalni C był wyposażony w pięć liczników działających ze zwłoką t=0.1s, t=1s, t=3s, t=5s, t=10s. Pomiarów dokonywano w różnych kopalniach w różnym okresie od roku do dwóch lat. Symbolami $n^{\cdot}_{0.1}$, $n^{\cdot}_{1}$, $n^{\cdot}_{3}$, $n^{\cdot}_{5}$, $n^{\cdot}_{10}$ oznaczono średnią liczbę doziemień w ciągu jednego miesiąca, trwających odpowiednio nie krócej niż 0.1s, 1s, 3s, 5s, 10s [60]. Dla trzech kopalń A, B, C te czasy są następujące (tabl. 5.1).

Tablica 5.1

Wyniki rejestracji doziemień w kopalnianych sieciach 6kV z izolowanym punktem zerowym

Kopalnie	Średnia liczba doziemień				
	$n^{\cdot}_{0.1}$	$n^{\cdot}_{1}$	$n^{\cdot}_{3}$	$n^{\cdot}_{5}$	$n^{\cdot}_{10}$
A	29	4.7	-	2.9	2
B	30	5.9	-	2	1.4
C	10.6	4.2	3.3	2.9	2.5

Źródło: pozycja literatury [60]

Z punktu widzenia średniej liczby doziemień w ciągu jednego miesiąca najlepszą siecią (najbezpieczniejszą) jest sieć w kopalni C. Średnia liczba $n^{\cdot}_{0.1}$ wszystkich zarejestrowanych doziemień jest zdecydowanie najmniejsza (10.6<29, 10.6<30).

Tablicę 5.1 zanalizujemy jeszcze pod względem występowania doziemień o czasach trwania w poszczególnych przedziałach czasowych, tj. [0.1,1), [1,3), [3,5), [5,10), [10,∞). Na podstawie tablicy 5.1 możemy wyznaczyć średnią liczbę doziemień w wyżej wymienionych przedziałach czasowych. Tę liczbę dla każdego przedziału oznaczamy odpowiednio przez l_1, l_2, l_3, l_4, l_5. Wyniki przedstawia tablica 5.2.

Tablica 5.2

Średnia liczba doziemień w ciągu miesiąca w poszczególnych przedziałach czasowych

Kopalnie	Średnia liczba doziemień				
	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
A	24.3	1.8	0	0.9	2
B	24.1	3.9	0	0.6	1.4
C	6.4	0.9	0.4	0.4	2.5

Tablicę 5.2 potraktujemy jako macierz gry, w której jeden partner ma do dyspozycji strategie A, B, C (tj. wybór sieci kopalnianej), a drugi partner ma do wyboru strategie l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 (tj. wybór czasu trwania doziemienia).

Ze względu na zagrożenia, jakie mogą spowodować nieprzewidziane doziemienia, nas interesuje, aby w każdym przedziale czasowym wystąpiła jak najmniejsza liczba doziemień. Analizując tablicę 5.2, widzimy, że nie ma strategii dominujących spośród A, B, C.

Zbadamy teraz, którą strategię wskaże zasada minimaksu jako najbezpieczniejszą:

$$\min_i \max_j \{w_{ij}\} = \min(24.3, 24.1, 6.4) = 6.4.$$

Tak więc po przyjęciu kryterium, aby w każdym przedziale czasowym wystąpiła mała liczba doziemień, najbezpieczniejszą siecią jest sieć w kopalni C. Ta gra ma też punkt siodłowy, ponieważ:

$$\max_j \min_i \{w_{ij}\} = \max(6.4, 0.9, 0, 0.4, 1.4) = 6.4.$$

Ceną gry jest tutaj liczba 6,4.

Rozpatrzymy teraz zagrożenie z innego punktu widzenia. Analizując tablicę 5.2, widzimy, że duża liczba doziemień w każdej kopalni ma czas trwania bardzo krótki zawierający się w przedziale od 0.1s do 1s. W pozostałych przedziałach występuje mniej doziemień, ale o dłuższym czasie trwania.

Zajmiemy się teraz oceną wymienionych sieci elektroenergetycznych, stosując kryterium, aby łączny czas trwania doziemień w poszczególnych przedziałach był możliwie mały. Ponieważ nie są znane dokładne czasy trwania poszczególnych doziemień, a tylko przedziały ich występowania, więc obliczenia będą też tylko przybliżone. Jako wartość średnią doziemień występujących w danym przedziale przyjmujemy średnią arytmetyczną lewego i prawego końca przedziału. Będą to dla pierwszych czterech przedziałów liczby 0.55, 2, 4, 7.5. Natomiast dla piątego przedziału [10,∞) ta średnia nie jest znana. Praktycznie może ona wynosić kilka minut, do chwili usunięcia awarii. Tę średnią oznaczymy przez x. Po przemnożeniu liczb z tablicy 5.2 przez średni czas trwania doziemień w poszczególnych przedziałach otrzymujemy przybliżoną wartość całkowitego czasu trwania doziemień w tych przedziałach. Wartości te zapisane są w tablicy 5.3.

Tablica 5.3

Łączny czas trwania doziemień w ciągu miesiąca w poszczególnych przedziałach

Kopalnie	Średnia liczba doziemień				
	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
A	13.365	3.6	0	6.75	2x
B	13.255	7.8	0	4.5	1.4x
C	3.52	1.8	1.6	3	2.5x

Rozważymy teraz, które ze strategii A, B, C wskaże zasada minimaksu przy nieokreślonej wartości parametru x:

$$\min_i \max_j \{w_{ij}\} = \min(\max(13.365, 2x), \max(13.255, 1.4x), \max(3,52, 2,5x)) =$$

$$= \begin{cases} 3.52 & \text{dla} \quad x \in [0.1, 1.408), \\ 2.5x & \text{dla} \quad x \in [1.408, 5.302), \\ 13.255 & \text{dla} \quad x \in [5.302, 9.468), \\ 1.4x & \text{dla} \quad x \in [9.468, \infty). \end{cases}$$

Ponieważ x z założenia jest większe od 10, to:

$$\min_i \max_j \{w_{ij}\} = 1.4x.$$

Wskazuje to na strategię B. Do tego samego wniosku możemy dojść wstawiając w tablicy 5.3 w miejsce x liczbę 10, jako dolną granicę przedziału [10,∞). Otrzymujemy:

Tablica 5.4

Łączny czas trwania doziemień w ciągu miesiąca w poszczególnych przedziałach (dla x=10)

Kopalnie	Średnia liczba doziemień				
	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
A	13.365	3.6	0	6.75	20
B	13.255	7.8	0	4.5	14
C	3.52	1.8	1.6	3	25

Liczby w kolumnie piątej przewyższają wszystkie pozostałe w tablicy. Ze wzrostem x liczby w kolumnie piątej będą wzrastały proporcjonalnie, ale zawsze najmniejszą z nich będzie druga. Wynika to z faktu, że dla x>10 jest spełniona nierówność:

$$1.4x < 2x < 2.5x.$$

Ponieważ wynik gry 1.4x występuje dla strategii B, to najlepszą (najbezpieczniejszą) siecią elektromagnetyczną jest więc sieć w kopalni B, ze względu na rozważany punkt widzenia.

Przykład 5.7

Przykład będzie dotyczył określenia zmiennych opisujących tąpnięcia oraz ich wartości, które powodują wzrost zagrożenia tąpaniami. Wykorzystamy do tego dane zawarte w pracy [62]. Jako zbiór zmiennych przyjęto [62]:

Z_2 - zmienna zagregowana,

k_H - odległość od krawędzi eksploatacyjnej,

L_S - odległość od frontu eksploatacyjnego,

S - szerokość wyrobiska.

Dla każdej zmiennej określono przedziały występowania:

1) dla zmiennej Z_2

- przedział 1 zawiera się w granicach (500-600)
- przedział 2 zawiera się w granicach (601-700)
- przedział 3 zawiera się w granicach (701-800)
- przedział 4 zawiera się w granicach (801-1000);

2) dla zmiennej k_H

- przedział 1 zawiera się w granicach (0-0.4)
- przedział 2 zawiera się w granicach (0.41-1);

3) dla zmiennej L_S

- przedział 1 zawiera się w granicach (0-60)
- przedział 2 zawiera się w granicach (61-180);

4) dla zmiennej S

- przedział 1 zawiera się w granicach (2-4)
- przedział 2 zawiera się w granicach (4.1-5)
- przedział 3 zawiera się w granicach (5.1-6)" [62].

Liczbę tąpnięć dla poszczególnych kombinacji analizowanych przedziałów określono na podstawie 152 Kart Katalogowych Tąpań [62]. Dane dotyczące liczby tąpań zawarte są w tablicy 5.5.

Tablica 5.5

Liczba tąpnięć dla poszczególnych kombinacji analizowanych przedziałów zmiennych

Lp.	Numer przedziałów Z_2	Numer przedziałów k_H	Numer przedziałów L_S	Numer przedziałów S	Liczba tąpnięć
1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	2
2	1	1	1	2	4
3	1	1	1	3	0
4	1	1	2	1	0
5	1	1	2	2	1
6	1	1	2	3	0
7	1	2	1	1	0
8	1	2	1	2	0
9	1	2	1	3	0
10	1	2	2	1	0
11	1	2	2	2	1
12	1	2	2	3	0
13	2	1	1	1	0
14	2	1	1	2	7
15	2	1	1	3	2
16	2	1	2	1	0
17	2	1	2	2	6
18	2	1	2	3	0
19	2	2	1	1	1
20	2	2	1	2	1
21	2	2	1	3	1
22	2	2	2	1	0
23	2	2	2	2	2
24	2	2	2	3	0
25	3	1	1	1	5
26	3	1	1	2	12

cd. tablicy 5.5

1	2	3	4	5	6
27	3	1	1	3	5
28	3	1	2	1	0
29	3	1	2	2	6
30	3	1	2	3	1
31	3	2	1	1	1
32	3	2	1	2	6
33	3	2	1	3	2
34	3	2	2	1	0
35	3	2	2	2	4
36	3	2	2	3	0
37	4	1	1	1	9
38	4	1	1	2	9
39	4	1	1	3	5
40	4	1	2	1	0
41	4	1	2	2	8
42	4	1	2	3	0
43	4	2	1	1	1
44	4	2	1	2	4
45	4	2	1	3	0
46	4	2	2	1	0
47	4	2	2	2	3
48	4	2	2	3	0

Źródło: pozycja literatury [62]

Przejdziemy teraz do interpretacji tablicy 5.5 w języku teorii gier. Zmienne Z_2, k_H, L_S, S opisujące warunki powstawania tąpań utożsamiamy z graczami, natomiast numery przedziałów występowania tych zmiennych ze strategiami. Liczba tąpnięć stanowi tu wynik gry. Np. przy zastosowaniu przez gracza Z_2 strategii 4, przez gracza k_H strategii 1, przez gracza L_S strategii 2, przez gracza S strategii 2 otrzymujemy wynik gry 8. Mamy tu do czynienia z grą czteroosobową. Naszym zadaniem będzie ocenić, które strategie poszczególnych graczy są najbardziej niebezpieczne, tzn. najbardziej sprzyjają powstawaniu tąpań.

Taką grę możemy zapisać w postaci tablicy czterowymiarowej $W=\{w_{i,j,k,l}\}$ (i=1,2,3,4; j=1,2; k=1,2; l=1,2,3). Tablica ta ma kształt hiperprostopadłościanu w przestrzeni czterowymiarowej. Możemy ją przedstawić na płaszczyźnie w postaci przekrojów ustalając dwie zmienne, np.:

Gracz Z_2, i=1
Gracz k_H, j=1

Gracz L_S (k=)	l = 1	2	3
1	2	4	0
2	0	1	0

Gracz Z_2, i=1
Gracz k_H, j=2

Gracz L_S (k=)	l = 1	2	3
1	0	0	0
2	0	1	0

Gracz Z_2, i=2
Gracz k_H, j=1

Gracz L_S (k=)	l = 1	2	3
1	0	7	2
2	0	6	0

Gracz Z_2, i=2
Gracz k_H, j=2

Gracz L_S (k=)	l = 1	2	3
1	1	1	1
2	0	2	0

Gracz Z_2, i=3
Gracz k_H, j=1

Gracz L_S (k=)	l = 1	2	3
1	5	12	5
2	0	6	1

Gracz Z_2, i=3
Gracz k_H, j=2

Gracz L_S (k=)	l = 1	2	3
1	1	6	2
2	0	4	0

Gracz Z_2, i=4
Gracz k_H, j=1

Gracz L_S (k=)	l = 1	2	3
1	9	9	5
2	0	8	0

Gracz Z_2, i=4
Gracz k_H, j=2

Gracz L_S (k=)	l = 1	2	3
1	1	4	0
2	0	3	0

Można też ustalić strategie k_H i L_S; wtedy otrzymujemy mniej przekrojów, ale o większej liczbie elementów.

Gracz k_H, j=1
Gracz L_S, k=1

Gracz Z_2 (i=)	l = 1	2	3
1	2	4	0
2	0	7	2
3	5	12	5
4	9	9	5

Gracz k_H, j=1
Gracz L_S, k=2

Gracz Z_2 (i=)	l = 1	2	3
1	0	1	0
2	0	6	0
3	0	6	1
4	0	8	0

Gracz k_H, j=2 Gracz k_H, j=2

Gracz L_S, k=1 Gracz L_S, k=2

Gracz S Gracz S

Gracz Z_2 (i=)	l =	1	2	3
	1	0	0	0
	2	1	1	1
	3	1	6	2
	4	1	4	0

Gracz Z_2 (i=)	l =	1	2	3
	1	0	1	0
	2	0	2	0
	3	0	4	0
	4	0	3	0

W wyniku analizy tych przekrojów stwierdzamy, że:

- strategia i=3 dominuje nad strategią i=1 gracza Z_2, ponieważ

$$\forall_{j,k,l} w_{3,j,k,l} \geq w_{1,j,k,l} \qquad (j=1,2;\ k=1,2;\ l=1,2,3),$$

- strategia i=3 dominuje nad strategią i=2 gracza Z_2, ponieważ

$$\forall_{j,k,l} w_{3,j,k,l} \geq w_{2,j,k,l} \qquad (j=1,2;\ k=1,2;\ l=1,2,3),$$

- strategia i=4 dominuje nad strategią i=1 gracza Z_2, ponieważ

$$\forall_{j,k,l} w_{4,j,k,l} \geq w_{1,j,k,l} \qquad (j=1,2;\ k=1,2;\ l=1,2,3),$$

- strategia l=2 dominuje nad strategią l=1 gracza S, ponieważ

$$\forall_{i,j,k} w_{i,j,k,2} \geq w_{i,j,k,1} \qquad (i=1,2,3,4;\ j=1,2;\ k=1,2),$$

- strategia l=2 dominuje nad strategią l=3 gracza S, ponieważ

$$\forall_{i,j,k} w_{i,j,k,2} \geq w_{i,j,k,3} \qquad (i=1,2,3,4;\ j=1,2;\ k=1,2).$$

Z dalszych rozważań eliminujemy z gry strategie zdominowane, tj. strategie i=1, i=2 gracza Z_2 oraz strategie l=1, l=3 gracza S. Należy zwrócić uwagę, że eliminacja z gry jednej strategii w przestrzeni czterowymiarowej oznacza usunięcie z tablicy gry jednego przekroju trójwymiarowego tej tablicy. Gdy usuwamy strategię gracza Z_2, oznacza to usunięcie zbioru liczb umieszczonego w prostopadłościanie o wymiarach 2×2×3, tj. dwunastu liczb. Natomiast, gdy usuwamy strategię gracza S, to eliminujemy zbiór liczb umieszczony w prostopadłościanie o wymiarach 4×2×2, tj. szesnaście liczb. Część usuwanych liczb jest wspólna dla obydwu graczy.

Po wyeliminowaniu strategii zdominowanych tablica wypłat zredukowała się do kostki sześciennej w przestrzeni trójwymiarowej o wymiarach 2×2×2. Przedstawiamy ją w postaci dwóch przekrojów:

Gracz Z_2, i=3 Gracz Z_2, i=4

Gracz S, l=2 Gracz S, l=2

Gracz L_S Gracz L_S

Gracz k_H (j=)	k =	1	2
	1	12	6
	2	6	4

Gracz k_H (j=)	k =	1	2
	1	9	8
	2	4	3

Na podstawie tych macierzy zauważamy, że:

- strategia j=1 dominuje nad strategią j=2 gracza k_H, ponieważ

$$\forall_{i,k} w_{i,1,k,2} \geq w_{i,2,k,2} \qquad (i=3,4;\ k=1,2),$$

- strategia k=1 dominuje nad strategią k=2 gracza L_S, ponieważ

$$\forall_{i,j} w_{i,j,1,2} \geq w_{i,j,2,2} \qquad (i=3,4;\ j=1,2).$$

Po wyeliminowaniu z gry strategii j=2 gracza k_H oraz strategii k=2 gracza L_S otrzymujemy macierz wypłat w następującej postaci:

Gracz k_H (j=1)

Gracz L_S (k=1)

Gracz S (l=2)

Gracz Z_2 (i=)		
	3	12
	4	9

Widzimy, że strategia i=3 dominuje nad strategią i=4 gracza Z_2, ponieważ 12>9.

Postępując w kolejności odwrotnej do eliminowania strategii zdominowanych, możemy wyciągnąć następujące wnioski dotyczące parametrów opisujących tąpnięcia pod względem zagrożenia dla pracujących górników:

1) sytuacja, gdy zmienna $Z_2 \in (701 - 800)$ jest bardziej niebezpieczna, niż gdy $Z_2 \in (801 - 1000)$;
2) sytuacja, gdy zmienna $k_H \in (0 - 0.4)$ jest bardziej niebezpieczna, niż gdy $k_H \in (0.41 - 1)$;
   sytuacja, gdy zmienna $L_S \in (0 - 60)$ jest bardziej niebezpieczna, niż gdy $L_S \in (61 - 180)$;
3) sytuacja, gdy zmienna $Z_2 \in (701 - 800)$ jest bardziej niebezpieczna, niż gdy $Z_2 \in (500 - 600)$;
   sytuacja, gdy zmienna $Z_2 \in (701 - 800)$ jest bardziej niebezpieczna, niż gdy $Z_2 \in (601 - 700)$;
   sytuacja, gdy zmienna $Z_2 \in (801 - 1000)$ jest bardziej niebezpieczna, niż gdy $Z_2 \in (500 - 600)$;
   sytuacja, gdy zmienna $S \in (4.1 - 5)$ jest bardziej niebezpieczna, niż gdy $S \in (2 - 4)$;
   sytuacja, gdy zmienna $S \in (4.1 - 5)$ jest bardziej niebezpieczna, niż gdy $S \in (5.1 - 6)$.

W rozdziale 5 wykorzystano jedynie niektóre elementy teorii gier. Do wyznaczania poziomu bezpieczeństwa związanego z pracami dołowymi górników wzorowano się na grach dwuosobowych o sumie zerowej. Określono sposób znajdywania strategii maksyminowych i minimaksowych i związanych z nimi cen gry dolną i górną. Dla gier, w których przeciwnicy mają do dyspozycji po dwie strategie, przedstawiono sposób znajdywania strategii mieszanej. Strategie mieszane zilustrowano na przykładach za pomocą interpretacji częstotliwościowej i udziałowej. W rozdziale tym zwrócono uwagę na to, że do tak ważnego czynnika związanego z pracą górnika jak bezpieczeństwo można zastosować teorię gier. Odpowiednie wykorzystanie tej teorii pomaga w podjęciu optymalnych strategii działania, a przez to podnosi poziom bezpieczeństwa pracy.

6. WYKORZYSTANIE TEORII GIER NIEKOOPERACYJNYCH O SUMIE NIEZEROWEJ DO PODEJMOWANIA DECYZJI

Podstawowym celem każdego podmiotu gospodarczego jest kreowanie odbiorcy. W słowie kreowanie zawierają się również pozyskanie i utrzymanie odbiorcy. W gospodarce rynkowej, w której występują nadprodukcja i konkurencja, utrata odbiorcy oznacza stratę przychodów i wzrost kosztów (zapasy, niewykorzystane zdolności produkcyjne); pozyskanie odbiorcy oznacza wzrost przychodów i obniżenie kosztów z tytułu skali produkcji. Te sytuacje dobrze opisują modele gier niekooperacyjnych o sumie niezerowej.

6.1. Gry niekooperacyjne

W rozdziale tym nasza uwaga koncentrować się będzie na sytuacji, w której występuje konflikt interesów dwu lub więcej decydentów. Każdemu z nich będzie zależało na maksymalizacji swoich zysków. W teorii gier o sumie zerowej wypłata dla jednego gracza oznaczała stratę dla drugiego. Tak więc suma wypłat dla graczy była równa zero. W grach o sumie niezerowej przyjmuje się, że wypłaty dla graczy mogą być różne. Zmiana strategii działania może spowodować zwiększenie zysków dla wszystkich graczy, może spowodować równoczesne zmniejszenie zysków lub zyski jednych graczy mogą być większe, a innych mniejsze. Ponieważ nie ma żadnych istotnych różnic między problemami wieloosobowymi a dwuosobowymi (poza trudnościami obliczeniowymi), będziemy więc prowadzili rozważania na przykładzie dwóch decydentów. Grę taką można przedstawić w postaci dwóch macierzy A i B [93]:

$$A = \{a_{ij}\} \qquad (i=1,...,m; \quad j=1,...,n), \tag{6.1}$$

$$B = \{b_{ij}\} \qquad (i=1,...,m; \quad j=1,...,n), \tag{6.2}$$

gdzie: a_{ij} oznacza wypłatę dla gracza (decydenta) pierwszego, a

b_{ij} oznacza wypłatę dla gracza (decydenta) drugiego w przypadku zastosowania strategii

α_i przez gracza pierwszego i

β_j przez gracza drugiego.

$$A = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.3}$$

Grę taką można też przedstawić w postaci tablicy par liczb (a_{ij}, b_{ij}) [50], [67], [96]:

$$A = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{B} \\ \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} (a_{11},b_{11}) & \cdots & (a_{1n},b_{1n}) \\ \vdots & & \vdots \\ (a_{m1},b_{m1}) & \cdots & (a_{mn},b_{mn}) \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.4}$$

Jak widać, wartość wygranych (a_{ij}, b_{ij}) zależy od obydwu graczy, tj. od odpowiedniego wyboru strategii α_i i β_j.

6.2. Punkt równowagi w grze niezerowej

Definicja 6.1 [50]

Punktem równowagi w grze niekooperacyjnej nazywamy parę strategii $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$, jeżeli przy strategii partnera pierwszego α_{i_0} partner drugi osiąga maksymalny zysk stosując strategię β_{j_0}, i podobnie przy strategii partnera drugiego β_{j_0} partner pierwszy osiąga maksymalny zysk stosując strategię α_{i_0}.

Punkt równowagi jest to taka para strategii $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$, że partnerzy stosując ją nie chcą żadnej zmiany. Jeśli partner pierwszy wybierze α_{i_0}, to dla drugiego najlepszą strategią jest β_{j_0}. Odwrotnie, gdy drugi partner wybierze β_{j_0}, to dla pierwszego najlepszą strategią jest α_{i_0}.

Jeżeli gra posiada jeden punkt równowagi, to gracze powinni stosować strategie określone przez ten punkt. Jeżeli gra posiada więcej punktów równowagi, to się komplikuje.

Przedstawimy teraz grę posiadającą dwa punkty równowagi. Ta gra, oparta na konflikcie małżeńskim, znana jest w literaturze pod nazwą "walka płci" [50], [67], [93].

Przykład 6.1

$$A = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \beta_1 & \beta_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \beta_1 & \beta_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.5}$$

lub

$$A = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{B} \\ \beta_1 \quad \beta_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} (2,1) & (-1,-1) \\ (-1,-1) & (1,2) \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.6}$$

Partnerem A jest mąż, partnerem B żona. Mają oni do wyboru dwie rozrywki na wieczór: mecz bokserski albo balet. Obydwoje bardziej wolą wspólne spędzenie wieczoru. Ustalają oni pewne "wskaźniki przyjemności" będące wartościami wypłat w grze. Mogą oni:

- wspólnie iść na mecz bokserski (strategie (α_1,β_1)), wtedy mąż osiągnie "wskaźnik przyjemności" 2, a żona 1,
- wspólnie iść na balet (strategie (α_2,β_2)), wtedy mąż osiągnie "wskaźnik przyjemności" 1, a żona 2,
- oddzielnie iść na różne imprezy (strategie $(\alpha_1,\beta_2),(\alpha_2,\beta_1)$), wtedy uzyskują wskaźniki po - 1.

W myśl definicji 6.1 ta gra posiada dwa punkty równowagi (α_1,β_1) i (α_2,β_2). Istnienie tych dwóch punktów komplikuje sytuację. Partnerzy nie mogą podjąć żadnej satysfakcjonującej ich decyzji, przy założeniu że nie mogą się ze sobą porozumiewać.

Pokażemy teraz przykład gry z jednym punktem równowagi. Będzie on miał na celu pokazanie, jak niekorzystny jest brak kooperacji.

Przykład 6.2

Dwa konkurujące ze sobą przedsiębiorstwa P_1 i P_2 dążą do maksymalnego zwiększenia swoich zysków poprzez realizację swoich strategii działania. Przedsiębiorstwo P_1 ma do dyspozycji sześć strategii $\alpha_1,\ldots,\alpha_6$, a przedsiębiorstwo P_2 sześć strategii $\beta_1,\ldots,\beta_6$. Tablica zysków w mln złotych przedstawia się następująco:

$$P_1 \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} P_2 \\ \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4 \quad \beta_5 \quad \beta_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} (90,90) & (70,92) & (50,94) & (30,96) & (10,98) & (0,100) \\ (92,70) & (72,72) & (52,74) & (32,76) & (12,78) & (2,80) \\ (94,50) & (74,52) & (54,54) & (34,56) & (14,58) & (4,60) \\ (96,30) & (76,32) & (56,34) & (36,36) & (16,38) & (6,40) \\ (98,8) & (78,12) & (58,14) & (38,16) & (18,18) & (8,20) \\ (100,0) & (80,2) & (60,4) & (40,6) & (20,8) & (10,10) \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.7}$$

Jedynym punktem równowagi w tej grze w myśl definicji 6.1 jest para strategii (α_6,β_6) dająca zysk przedsiębiorstwom odpowiednio (10 mln zł, 10 mln zł). Do tego samego rezultatu można dojść analizując macierze zysków dla każdego przedsiębiorstwa z osobna:

$$P_1: A = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 90 & 70 & 50 & 30 & 10 & 0 \\ 92 & 72 & 52 & 32 & 12 & 2 \\ 94 & 74 & 54 & 34 & 14 & 4 \\ 96 & 76 & 56 & 36 & 16 & 6 \\ 98 & 78 & 58 & 38 & 18 & 8 \\ 100 & 80 & 60 & 40 & 20 & 10 \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.8}$$

$$P_2: B = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 90 & 92 & 94 & 96 & 98 & 100 \\ 70 & 72 & 74 & 76 & 78 & 80 \\ 50 & 52 & 54 & 56 & 58 & 60 \\ 30 & 32 & 34 & 36 & 38 & 40 \\ 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.9}$$

Stosując zasadę bezpieczeństwa maksyminu, otrzymujemy:

$\max_i \min_j \{a_{ij}\} = \max(0,2,4,6,8,10) = 10 \Rightarrow \alpha_6$,

$\max_j \min_i \{b_{ij}\} = \max(0,2,4,6,8,10) = 10 \Rightarrow \beta_6$.

To samo otrzymujemy, stosując zasadę dominacji.

Dla przedsiębiorstwa P_1 strategia α_6 dominuje nad pozostałymi.

Dla przedsiębiorstwa P_2 strategia β_6 dominuje nad pozostałymi.

Wszystkie metody matematyczne przy braku kooperacji wskazują, że należy wybrać strategie (α_6,β_6). Daje to zysk przedsiębiorstwom po 10 milionów złotych. Jest to mały zysk w porównaniu z 90 milionami złotych, które każde z przedsiębiorstw mogło uzyskać, stosując strategie (α_1,β_1). Wybór tych strategii wymaga jednak wcześniejszego uzgodnienia i dotrzymania umowy przez obydwa przedsiębiorstwa. Innymi słowy, musiałaby wystąpić kooperacja między przedsiębiorstwami w zakresie wyboru strategii działania.

6.3. Poszukiwanie rozwiązania w grach niekooperacyjnych o sumie niezerowej

Ogólnie przyjmujemy, że macierze gry A i B posiadają m wierszy i n kolumn.

Definicja 6.2

Strategia k-ta dominuje nad strategią l-tą w macierzy A, jeżeli:

$$\forall_i \; a_{kj} \geq a_{ij}, \qquad (j=1,\ldots,n). \tag{6.10}$$

Strategię k-tą nazywamy dominującą nad strategią l-tą, a strategię l-tą nazywamy zdominowaną przez strategię k-tą [50], [96], [102].

Definicja 6.3

Strategia r-ta dominuje nad strategią s-tą w macierzy B, jeżeli:

$$\forall_i \; b_{ir} \geq b_{is}, \qquad (i=1,\ldots,m). \tag{6.11}$$

Strategię r-tą nazywamy dominującą nad strategią s-tą, a strategię s-tą nazywamy zdominowaną przez strategię r-tą [50], [96], [102].

Definicja 6.4 [93]

Para strategii o wskaźnikach (u,v) stanowi rozwiązanie równowagi niekooperacyjnej w sensie Nasha, dla procesu dwuosobowego o sumie niezerowej określonego przez macierze A i B, jeżeli dla każdego wskaźnika "i" oraz "j" są spełnione nierówności:

$$a_{uv} \geq a_{iv} \quad \text{i} \quad b_{uv} \geq b_{uj}. \tag{6.12}$$

W grach o sumie niezerowej może występować kilka punktów równowagi w sensie Nasha, przy czym rezultaty w tych punktach są różne. Przy wyborze decyzji w takim przypadku można skorzystać z następującej definicji:

Definicja 6.5 [93]

Para strategii o wskaźnikach (u,v) jest lepsza od pary strategii określonej wskaźnikami (p,q), jeżeli:

$$a_{uv} \geq a_{pq} \quad \text{i} \quad b_{uv} \geq b_{pq}. \tag{6.13}$$

Przynajmniej jedna z tych nierówności musi być ostra.

Uwaga: Jeżeli zagadnienie rozpatrujemy z punktu widzenia minimalizacji kosztów, a nie maksymalizacji zysków, to znaki nierówności "≥" w powyższych wzorach należy zmienić na "≤".

Powracając do "walki płci", możemy stwierdzić, że w tej grze nie występują strategie dominujące. Natomiast są dwie pary strategii (α_1,β_1) i (α_2,β_2), które są punktami równowagi niekooperacyjnej w sensie Nasha. Wśród znalezionych par strategii równowagi nie ma strategii lepszych.

Definicja 6.6 [67]

Dwie pary strategii (α_i,β_j) i (α_k,β_l) będących w równowadze są ze sobą równoważne, gdy wygrane graczy są takie same, tj.:

$$a_{ij} = a_{kl} \quad i \quad b_{ij} = b_{kl}. \tag{6.14}$$

Definicja 6.7 [67]

Pary strategii są zamienne, jeżeli (α_i,β_l) i (α_k,β_j) są także parami strategii w równowadze.

Definicja 6.8 [67]

Gra niekooperacyjna jest rozwiązalna w sensie Nasha, jeżeli każde dwie pary strategii w równowadze są zamienne.

Dotychczas rozważaliśmy gry, które posiadały co najmniej jeden punkt równowagi w sensie Nasha. Istnieją jednak gry, które nie posiadają żadnego punktu równowagi. Wystarczy nieco zmienić liczby w macierzach wypłat z przykładu 6.2, aby otrzymać taką grę.

Przykład 6.3.

Dwa przedsiębiorstwa P_1 i P_2 (jak w przykładzie 6.2) mają następującą tablicę zysków:

$$P_1 = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} P_2 & \\ \beta_1 & \beta_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} (3,1) & (1,2) \\ (2,4) & (4,2) \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.15}$$

Żadna z par strategii, (α_1,β_1), (α_1,β_2), (α_2,β_1), (α_2,β_2) w tej grze nie stanowi punktu równowagi. Gdyby taka gra była wykonywana wielokrotnie, to można by stosować różne strategie z określoną częstotliwością. Nash udowodnił [67], że taka gra ma rozwiązanie w zakresie strategii mieszanych.

TWIERDZENIE 6.1 [50]

"Każda niekooperacyjna gra niezerowa o skończonej liczbie strategii ma przynajmniej jeden punkt równowagi w zakresie strategii mieszanych".

Definicja 6.9 [93]

"Para (y_0, z_0) stanowi rozwiązanie równowagi Nasha w strategiach mieszanych dla dwuosobowego problemu decyzyjnego (A, B), jeśli dla każdego y ze zbioru Y i z ze zbioru Z spełnione są nierówności:

$$y_0^T A z_0 \le y^T A z_0, \qquad y_0^T B z_0 \le y_0^T B z\ ". \tag{6.16}$$

Dla naszych przykładów przez y oznacza się tutaj częstotliwość występowania strategii α_1, a przez 1-y częstotliwość α_2. Strategia β_1 występuje z częstotliwością z, a β_2 z częstotliwością 1-z. "Para $(y_0^T A z_0, y_0^T B z_0)$ stanowi wynik równowagi Nasha w strategiach mieszanych. Można wykazać, że podobnie jak w przypadku punktu siodłowego w strategiach mieszanych istnieje zawsze co najmniej jedno rozwiązanie równowagi Nasha w tego typu strategiach" [93].

Wyznaczenie strategii Nasha jest skomplikowane i wiąże się z zastosowaniem programowania nieliniowego. Nie będziemy się dalej tym zajmować. Proste przykłady i sposób znalezienia takich strategii mieszanych przedstawiono w pracy [93].

Na zakończenie podamy jeszcze przykład wykorzystania teorii gier o sumie niezerowej w górnictwie.

Przykład 6.4

Przykład będzie dotyczył wybrania jednej spośród ośmiu mieszanin samozestalających wykonanych na bazie odpadów poflotacyjnych i popiołów lotnych. Wybór będzie dokonywany w oparciu o maksymalizację wytrzymałości na ściskanie mieszanin samozestalających oraz o maksymalizację nośności podsadzki samozestalającej. Dane rzeczywiste do przykładu zostały zaczerpnięte z pracy [80]. Wytrzymałość różnych mieszanin była badana po 28 dniach, a nośność po 72 godzinach. Badania były przeprowadzone w dwóch wersjach: w warunkach powietrznosuchych i w komorze klimatyzacyjnej [80]. Dane liczbowe przedstawia tablica 6.1.

Tablica 6.1

Wyniki badań mieszanin podsadzki samozestalającej

Mieszanina	Warunki powietrznosuche		Komora klimatyzacyjna	
	Wytrzymałość po 28 dniach [MPa]	Nośność po 72 godz. [MPa]	Wytrzymałość po 28 dniach [MPa]	Nośność po 72 godz. [MPa]
1	0.83	0.21	1.34	0.22
2	0.69	0.12	0.55	0.07
3	0.95	0.45	1.67	0.50
4	0.89	0.23	0.69	0.15

cd. tablicy 6.1

5	0.87	>0.5	0.89	0.30
6	0.85	0.07	0.75	0.02
7	0.91	0.05	0.60	0.01
8	0.71	0.30	0.69	0.12

Źródło: pozycja literatury [80].

Dane liczbowe z tej tablicy potraktujemy jako wyniki pewnej gry dwuosobowej, niekooperacyjnej o sumie niezerowej. Gracz A będzie dysponował ośmioma strategiami $\alpha_1,\ldots,\alpha_8$ określonymi jako wybór mieszaniny samozestalającej. Graczowi A będzie zależało na maksymalizacji wytrzymałości na ściskanie mieszaniny samozestalającej. Gracz B będzie dysponował dwiema strategiami β_1 i β_2: wiązanie mieszaniny w warunkach powietrznosuchych (β_1) lub w komorze klimatyzacyjnej (β_2). Graczowi B zależy na maksymalizacji nośności podsadzki samozestalającej. Tę grę możemy zapisać w postaci:

$$\begin{array}{cc} & \text{Gracz B} \\ & \begin{array}{cc} \beta_1 & \beta_2 \end{array} \\ \text{Gracz A} \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{array} & \begin{bmatrix} (0.83, 0.21) & (1.34, 0.22) \\ (0.69, 0.12) & (0.55, 0.07) \\ (0.95, 0.45) & (1.67, 0.50) \\ (0.89, 0.23) & (0.69, 0.15) \\ (0.87, > 0.5) & (0.89, 0.30) \\ (0.85, 0.07) & (0.75, 0.02) \\ (0.91, 0.05) & (0.60, 0.01) \\ (0.71, 0.30) & (0.69, 0.12) \end{bmatrix} \end{array} \qquad (6.17)$$

Jedynym punktem równowagi w tej grze w myśl definicji 6.1 jest para strategii (α_3,β_2) dająca wynik gry (1.67, 0.5). Jeżeli gracz A zdecyduje się na wybranie strategii α_3, to dla gracza B najlepszą strategią będzie β_2. Odwrotnie, gdy drugi partner wybierze β_2, to dla pierwszego najlepszą strategią jest α_3. Na podstawie definicji 6.4 stwierdzamy również, że para strategii (α_3,β_2) stanowi rozwiązanie tej gry, ponieważ:

$$\forall_i a_{32} \geq a_{i2} \quad \text{oraz} \quad \forall_j b_{32} \geq b_{3j} \qquad (6.18)$$

Do tego samego rezultatu możemy dojść, wykorzystując definicje strategii dominujących i zdominowanych. Dla gracza A mamy:

- strategia α_1 dominuje nad α_2, α_8;
- strategia α_3 dominuje nad $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8$;
- strategia α_4 dominuje nad α_2, α_8;
- strategia α_5 dominuje nad $\alpha_2, \alpha_6, \alpha_8$;
- strategia α_6 dominuje nad α_2, α_8;
- strategia α_7 dominuje nad α_2;
- strategia α_8 dominuje nad α_2.

Po wyeliminowaniu z gry strategii zdominowanych graczowi A została tylko jedna strategia α_3. Dla gracza B w tym przypadku lepszą strategią jest β_2, ponieważ $b_{32}>b_{31}$ (0.5>0.45). Tak więc najlepszą mieszaniną samozestalającą spośród ośmiu przebadanych jest trzecia. Na podstawie pracy [80] skład tej mieszaniny jest następujący: 40% - odpady poflotacyjne, 40% - popioły lotne, 16% - woda słona, 4% - cement 350.

7. PODEJMOWANIE DECYZJI KOMPROMISOWYCH W OPARCIU O TEORIĘ GIER KOOPERACYJNYCH

Doświadczenia płynące z konkurencji wyniszczających, bankructwa i upadłości szeregu dużych i małych przedsiębiorstw stanowiły o potrzebie poszukiwania takich rozwiązań, które nie eliminują konkurencji, ale wprowadzają do niej cechy humanitarne.

W warunkach konkurencji, nadprodukcji o wynikach decydują przede wszystkim potencjały (rzeczowe, intelektualne) konkurentów. To z kolei przemawia za potrzebą poszukiwania nowych rozwiązań, które w praktyce przybierają różne postacie monopolizacji przez koncentrację kapitału, tworzenie holdingów, ale także tworzenie związków i więzi kooperacyjnych, które w znaczący sposób zwiększają potencjał konkurencyjny. O ile można negatywnie oceniać monopolizację, a świadczą o tym ustawy antymonopolowe, o tyle więzi kooperacyjne są nie tylko prawnie dopuszczalne, ale pozytywnie oceniane przez polityków i ekonomistów.

7.1. Gry kooperacyjne

Rozważana tematyka wykorzystuje teorię gier o sumie niezerowej [50], [57], [67], [72], [73], [93], [96]. Gry o sumie niezerowej nie są ściśle konkurencyjne, tak jak to się ma w przypadku gier o sumie zerowej [50], [67], [93], [96], [102]. W grach o sumie zerowej, ile jeden partner zyskuje, tyle drugi traci. W grach o sumie niezerowej partnerzy mają ustalone różne wypłaty i zmiana strategii może spowodować równoczesny wzrost wypłat u obu partnerów (graczy) lub też równoczesne ich zmniejszenie. W tym rozdziale będziemy się zajmowali dwuosobowymi grami kooperacyjnymi. Oznacza to, że partnerzy najpierw uzgadniają między sobą, jakie decyzje należy podjąć. Ta kooperacja partnerów przy podejmowaniu decyzji ma na celu osiągnięcie jak największych zysków (wypłat gry). Gdyby partnerzy nie współdziałali, to zyski mogłyby być o wiele niższe. Taką problematyką zajmuje się teoria niekooperacyjnych gier o sumie niezerowej [50], [67], [72], [93], [96].

W rozdziale tym będziemy wykorzystywali też podstawowe pojęcia z teorii gier o sumie zerowej, takie jak strategia czysta, strategia mieszana, punkt siodłowy gry, strategia dominująca, strategia zdominowana, cena gry [50], [57], [67], [93], [96], [102]. Tych pojęć nie będziemy definiowali, ponieważ zostały one omówione wcześniej (rozdziały 5.2, 5.3, 5.4).

Przez strategie będziemy rozumieli w odniesieniu do kopalni takie działania, które w przyszłości pozwolą jej zwiększyć zysk. Mogą to być przykładowo:

- wiercenie nowego szybu,
- zakup nowej obudowy ścianowej FAZOS-18/35 Pp,
- zakup kombajnu KGS-440/B,
- zainstalowanie w kopalni nowej sieci komputerowej typu UNIX,
- wysłanie pracowników na szkolenie do Anglii,
- rozbudowa magazynu,
- zwolnienie grupy pracowników,
- zmiana cen sprzedawanego węgla itp.

Ponieważ omawiana problematyka dotyczy nie tylko kopalni, ale także innych zakładów pracy czy firm prywatnych, więc dalej będziemy używali słowa przedsiębiorstwo zamiast kopalnia lub gracz.

Ponieważ w pracy często będziemy posługiwali się strategiami mieszanymi i wartością (ceną) gry oraz będziemy te strategie wyznaczali w konkretnych przykładach, dlatego przypomnimy, w jaki sposób wyznaczamy te strategie dla gier dwuosobowych o dwóch strategiach, tj. gier typu 2×2 (ponieważ tego rodzaju przykłady będą występowały w pracy).

Jeżeli gra nie posiada punktu siodłowego i jest powtarzana wielokrotnie, to stosuje się wtedy różne strategie czyste z określonymi częstotliwościami. Taka kombinacja liniowa strategii czystych nazywa się strategią mieszaną. Na jej podstawie określa się cenę gry. Stosowanie wyznaczonej strategii mieszanej pozwala graczowi na osiągnięcie ceny gry niezależnie od posunięć partnera.

Zakładamy, że gracz A ma do dyspozycji strategie czyste α_1 i α_2, a gracz B strategie czyste β_1 i β_2. Taką grę możemy przedstawić w następującej postaci:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \beta_1 & \beta_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} \begin{bmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} B \\ \\ \end{array} \tag{7.1}$$

gdzie:

a_{ij} - oznacza wypłatę dla gracza A przy zastosowaniu strategii (α_i, β_j),

b_{ij} - oznacza wypłatę dla gracza B przy zastosowaniu strategii (α_i, β_j).

Przyjmujemy, że gracz A będzie stosował strategię α_1 z prawdopodobieństwem p, a strategię α_2 z prawdopodobieństwem 1-p. Natomiast gracz B będzie stosował strategię β_1 z prawdopodobieństwem q, a strategię β_2 z prawdopodobieństwem 1-q. Mówimy, że gracz A stosuje strategię mieszaną $(p\alpha_1, (1-p)\alpha_2)$, a gracz B stosuje strategię mieszaną $(q\beta_1, (1-q)\beta_2)$. Prawdopodobieństwa p i q maksymalizujące poziomy bezpieczeństwa graczy wyznaczamy na podstawie wzorów [50], [96]

$$p = (a_{22} - a_{21}) / (a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21}), \tag{7.2}$$

$$q = (b_{22} - b_{12}) / (b_{11} - b_{12} + b_{22} - b_{21}). \tag{7.3}$$

Wartość (cenę) gry dla gracza A oblicza się na podstawie wzoru:

$$W_A = pa_{1j} + (1-p)a_{2j} \qquad (j = 1 \text{ lub } 2). \tag{7.4}$$

Dla gracza B wartość gry wynosi:

$$W_B = qb_{i1} + (1-q)b_{i2} \qquad (i = 1 \text{ lub } 2). \tag{7.5}$$

W rozdziale tym rozważania nasze będziemy ilustrowali na przykładach dwóch fikcyjnych przedsiębiorstw o podobnym profilu produkcyjnym, których celem jest maksymalizacja zysków.

7.2. Wybór strategii maksymalizujących sumę zysków z podziałem proporcjonalnym do wartości gry

Przyjmujemy, że mamy do czynienia z dwoma przedsiębiorstwami A i B. Przedsiębiorstwa te będą podejmowały pewne działania o charakterze inwestycyjno-modernizacyjnym mające na celu zwiększenie swoich zysków. Ponieważ przyjmujemy, że przedsiębiorstwa te mają podobny profil produkcyjny i działają na jednym rynku, to zysk jednego przedsiębiorstwa jest uzależniony od podjętych działań drugiego przedsiębiorstwa (i odwrotnie). Te działania będziemy nazywać strategiami. Przyjmujemy, że przedsiębiorstwo A ma do dyspozycji strategie α_1 i α_2, a przedsiębiorstwo B strategie β_1 i β_2. W tej metodzie postępowania przyjmujemy, że przedsiębiorstwa uzgodniły miedzy sobą wybór pary strategii (α_k, β_l) dający im sumaryczny największy zysk. Podział tego zysku będzie proporcjonalny do wartości (ceny) gry poszczególnych graczy (przedsiębiorstw).

Przykład 7.1

Dana jest gra:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B & \\ \beta_1 & \beta_2 \end{array} \\ A\ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} & \begin{bmatrix} (1, 8) & (3, 2) \\ (4, 3) & (2, 5) \end{bmatrix} \end{array} \tag{7.6}$$

Parą strategii, która daje największy sumaryczny zysk, jest (α_1, β_1). Uważamy, że partnerzy A i B doszli do porozumienia o zastosowaniu strategii (α_1, β_1) dających sumaryczny zysk 1+8=9 jednostek. Jak podzielić "sprawiedliwie" ten zysk? W tym rozdziale punktem wyjścia do rozważań będzie cena gry. Obliczamy więc cenę gry dla każdego gracza z osobna. Gracz A może sobie zapewnić wygraną 2.5 stosując strategię mieszaną $(0.5\alpha_1, 0.5\alpha_2)$ niezależnie od zastosowanych strategii partnera [50], [67], [96], [102]. Tak samo gracz B może sobie zapewnić zysk 4.25 stosując strategię mieszaną $(0.375\beta_1, 0.675\beta_2)$ nie biorąc pod uwagę posunięć partnera [50], [67], [96], [102]. Oznacza to, że bez współdziałania ze sobą partnerzy mogą uzyskać sumaryczny zysk wynoszący 2.5+4.25=6.75. Przy współdziałaniu mogą uzyskać więcej, tj. 9. Zysk 9 podzielimy więc proporcjonalnie do ceny gry dla poszczególnych graczy, tj.:

zysk A = 9 · 2.5 / 6.75 = 3.333,

zysk B = 9 · 4.75 / 6.75 = 5.667.

Okazało się, że obydwaj partnerzy współdziałając uzyskali więcej aniżeli wtedy, gdyby nie współdziałali i stosowali swoje najlepsze strategie mieszane. Ten sposób wyboru strategii i podziału zysku stosujemy wtedy, gdy w grze występuje tylko jedna para strategii dająca sumaryczny największy zysk. Żadna inna para strategii czystych ani żadna strategia mieszana nie da partnerom większego sumarycznego zysku. Nie trzymając się tej wybranej pary strategii gracze mogą sobie zapewnić zyski równe odpowiednim cenom gry. Ponieważ zastosowanie tej wybranej strategii daje większy sumaryczny zysk, to partnerzy dzielą się nim proporcjonalnie do swoich cen gry.

7.3. Obszar negocjacji gry

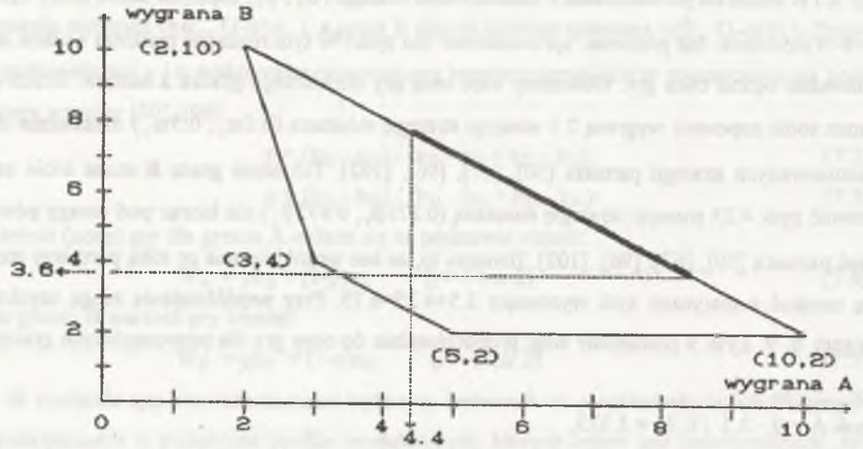
Najpierw rozważymy cały obszar wypłat osiąganych w grze negocjacyjnej. W tym celu będziemy rozpatrywać wszystkie możliwe kombinacje strategii mieszanych. Posłużymy się do tego przykładem 7.2.

Przykład 7.2

Dana jest gra:

$$A \quad \begin{matrix} & B \\ & \beta_1 \quad \beta_2 \\ \alpha_1 & \\ \alpha_2 & \end{matrix} \begin{bmatrix} (2,10) & (5,2) \\ (10,2) & (3,4) \end{bmatrix} \tag{7.7}$$

Obszar wypłat osiągalnych w tej grze negocjacyjnej przedstawiony jest na rysunku 7.1.



Rys. 7.1. Obszar wypłat oraz obszar negocjacji w grze kooperacyjnej
Fig. 7.1. The payoff area and the negotiation area in a cooperative game

Nie mamy tu jednej wyróżnionej pary strategii, która dawałaby największy sumaryczny zysk. Najwyższe wypłaty osiągane są na boku czworokąta miedzy punktami (2, 10) i (10, 2). Każdy punkt spoza tego odcinka może być "poprawiony" w tym sensie, że obaj gracze łącznie mogą otrzymać więcej w jakimś innym punkcie. Równocześnie dla punktów leżących na tym odcinku każdy z graczy może poprawić swoją wypłatę jedynie kosztem drugiego. Zbiór takich punktów nazywa się zbiorem łącznie niedominowanym albo zbiorem optymalnym w sensie Pareto [66], [94]. Rozwiązanie gry negocjacyjnej powinno więc znajdować się w zbiorze punktów łącznie niedominowanych.

Rozpatrzymy jeszcze, czy każdy z punktów zbioru optymalnego w sensie Pareto jest możliwy do przyjęcia przez partnerów. Partner A nie zgodzi się na rozwiązanie (α_1, β_1) dające mu wypłatę 2, skoro jego minimalna wypłata zagwarantowana strategią mieszaną $(0.7\alpha_1, 0.3\alpha_2)$ wynosi 4.4. Także partner B nie przystanie na rozwiązanie (α_2, β_1) dające mu wypłatę 2, ponieważ jego minimalna wypłata zagwarantowana strategią mieszaną $(0.2\beta_1, 0.8\beta_2)$ wynosi 3.6.

Rozwiązanie gry musi znajdować się na pogrubionej części odcinka łączącego punkty (2, 10) i (10, 2). Uwzględniając oba podane kryteria możemy następująco scharakteryzować obszar, w którym powinno być zawarte rozwiązanie gry negocjacyjnej:

a) dla żadnego punktu (pary wypłat) tego obszaru gracze nie mogą łącznie poprawić swoich wypłat (optymalność w sensie Pareto),
b) w żadnym z punktów gracz nie otrzymuje mniej, niż zapewnia mu jego poziom bezpieczeństwa.

Tak scharakteryzowany obszar par wypłat nazywa się obszarem negocjacji gry [67], [96].

Trzeba wyraźnie zaznaczyć, że omawiana tematyka dotyczy gier kooperacyjnych. Oznacza to, że uzgodnione przez partnerów strategie działania będą realizowane w grze. Istnieje tu pokusa, aby przechytrzyć partnera i zastosować inną strategię, nie taką, jaka wynika z kooperacji. Celem takiego działania byłoby zwiększenie swojego indywidualnego zysku z jednoczesnym zmniejszeniem zysku partnera. Skutkiem nierzetelności jednego z partnerów może być zerwanie kooperacji. Wyznaczaniem strategii przy braku współdziałania partnerów zajmuje się teoria gier niekooperacyjnych.

7.4. Rozwiązanie gry wykorzystujące poziomy bezpieczeństwa wynikające z wartości gry

Przedstawimy teraz rozwiązanie gry negocjacyjnej zaproponowane przez Nasha [67], [72], [96]. Dla gry należy określić pewną parę wypłat (u_0, v_0), tzw. "status quo". Są to wypłaty, jakie otrzymują gracze w przypadku nieuzgodnienia podziału zysków. Każdy z graczy może zagwarantować sobie wygraną równą wartości gry (cenie gry), stosując odpowiednią strategię mieszaną. Te ceny gry będą traktowane jako poziomy bezpieczeństwa dla poszczególnych graczy. Stanowić one będą jednocześnie "status quo" dla danej gry. Nash podaje rozwiązanie gry jako parę (u,v) maksymalizującą wartość iloczynu [67], [72], [96]:

$$(u - u_0)(v - v_0) \tag{7.8}$$

gdzie: u - ozn. wypłatę pierwszego gracza,
v - ozn. wypłatę drugiego gracza,

u_0 - ozn. cenę gry dla pierwszego gracza,

v_0 - ozn. cenę gry dla drugiego gracza.

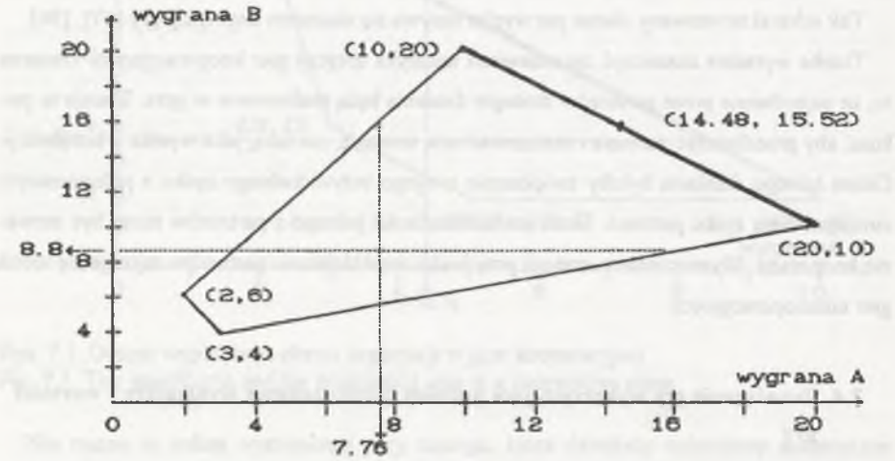
Para (u,v) musi leżeć w obszarze negocjacji gry.

Przykład 7.3

Dana jest gra:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \beta_1 & \beta_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} \begin{bmatrix} (2,6) & (20,10) \\ (10,20) & (3,4) \end{bmatrix} \end{array} \qquad (7.9)$$

Obszar wypłat osiąganych w tej grze negocjacyjnej przedstawiony jest na rysunku 7.2.



Rys. 7.2. Obszar wypłat, obszar negocjacji i punkt „status quo" określony na podstawie ceny gry

Fig. 7.2. The payoff area, the negotiation area and the „status quo" point determined on the basis the value of the game

Wartość gry dla gracza A wynosi 7.76 przy zastosowaniu strategii mieszanej ($0.28\alpha_1$, $0.72\alpha_2$). Dla gracza B wartością gry jest 8.8 przy zastosowaniu strategii mieszanej ($0.3\beta_1$, $0.7\beta_2$). Tak więc obszarem negocjacji gry w tym przypadku jest cały bok czworokąta (rys. 7.2) leżący pomiędzy punktami (10, 20) i (20, 10). Naszym celem jest znalezienie pary (u,v) maksymalizującej wyrażenie:

$$(u - 7.76)(v - 8.8). \qquad (7.10)$$

Para (u,v) musi leżeć w obszarze negocjacji gry, a więc na prostej o równaniu:

$$v = 30 - u. \qquad (7.11)$$

Podstawiając (11) do (10), możemy przedstawić (10) w postaci funkcji:

$$f(u) = (u - 7.76)(21.2 - u) = -u^2 + 28.96u - 164.512. \qquad (7.12)$$

Maksimum tej funkcji występuje w punkcie u=14.48 i wynosi v=15.52. Tak więc sumaryczny zysk 30 powinien zostać podzielony w następujących proporcjach: 14.48 dla A i 15.52 dla B.

Powstaje jeszcze do rozwiązania problem: jakie strategie mieszane powinni uzgodnić partnerzy A i B, aby otrzymać takie zyski. Oznaczmy przez p prawdopodobieństwo użycia pary strategii (α_2, β_1), a przez (1-p) prawdopodobieństwo użycia pary strategii (α_1, β_2). Mamy wtedy:

$$p(10, 20) + (1 - p)(20, 10) = (14.48, 15.52). \qquad (7.13)$$

Rozpisujemy wzór (7.13) na dwa równania:

$$\begin{cases} 10p + 20(1-p) = 14.48, \\ 20p + 10(1-p) = 15.52. \end{cases} \qquad (7.14)$$

Jest to układ dwóch równań liniowo zależnych. Wystarczy więc rozwiązać jedno z nich. Po rozwiązaniu mamy p=0.552. Tak więc partnerzy powinni używać tylko pary strategii (α_2, β_1) z prawdopodobieństwem 0.552 oraz pary strategii (α_1, β_2) z prawdopodobieństwem 0.448. Natomiast strategie (α_1, β_1) oraz (α_2, β_2) nie powinny być w ogóle używane.

Zastanówmy się jeszcze przez chwilę, jaki zysk osiągnęliby partnerzy A i B, gdyby nie zaakceptowali rozważanej w tym rozdziale metody, a przystaliby na zysk proporcjonalny do wartości gry (rozdział 7.2). Sumaryczna wartość gry wynosi 7.76 + 8.8 = 16.56. Zyski poszczególnych graczy wynosiłyby wtedy:

dla A: $u = 7.76 \times 30 / 16.56 = 14.058 \approx 14,$ (7.15)

dla B: $v = 8.8 \times 30 / 16.58 = 15.942 \approx 16.$ (7.16)

7.5. Wykorzystanie strategii gróźb jako status quo

Nash [73] zaproponował jeszcze inne rozwiązanie w grach negocjacyjnych oparte na strategiach groźby. Wybór takiej strategii stawia przeciwnika w możliwie najmniej korzystnym dla niego położeniu. Zwykle jednak, gdyby taka strategia została wykonana, pogorszyłaby również w jakimś stopniu położenie grożącego. Rozwiązanie takiej gry negocjacyjnej obejmuje dwa etapy: pierwszy polega na wyborze przez obu graczy właściwych strategii gróźb, a drugi

na targu o końcowy podział zysku przy ustalonym status quo będącym punktem w obszarze wypłat odpowiadającym zastosowaniu wybranych wcześniej strategii gróźb [73], [96].

Rozpatrzmy wykorzystanie strategii gróźb dla gry przedstawionej w przykładzie 7.3 w rozdziale 7.4. Gra ta ma postać:

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} B & \\ \beta_1 & \beta_2 \end{matrix} \\ A \begin{matrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} (2,6) & (20,10) \\ (10,20) & (3,4) \end{bmatrix} \end{array} \qquad (7.17)$$

Obszar wypłat osiąganych w tej grze negocjacyjnej przedstawiony jest na rysunku 7.3. Obszarem negocjacji gry jest bok czworokąta (rys. 7.3) leżący pomiędzy punktami (10, 20) i (20, 10). Rozwiązanie (u, v) musi leżeć na prostej o równaniu:

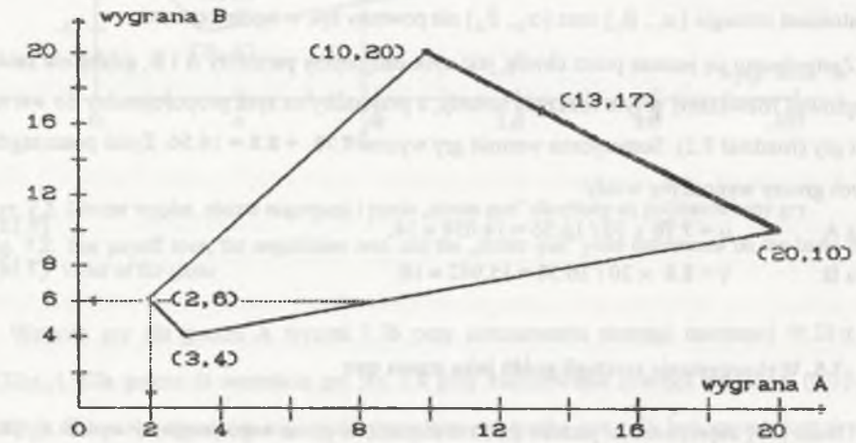
$$v = 30 - u. \qquad (7.18)$$

Poszukujemy (u_0, v_0), takiego by $(u - u_0)(v - v_0)$ było maksymalne. Wykorzystując równanie (7.18) otrzymujemy:

$$f(u) = (u - u_0)(30 - u - v_0). \qquad (7.19)$$

Maksimum tej funkcji jest w punkcie:

$$u = [30 + (u_0 - v_0)] / 2. \qquad (7.20)$$



Rys. 7.3. Obszar wypłat, obszar negocjacji i punkt "status quo" określony na podstawie strategii gróźb

Fig. 7.3. The payoff area, the negotiation area and the „status quo" point determined on the basis of the threat strategies

Tyle otrzymuje gracz pierwszy przy ustalonym (u_0, v_0). Wykorzystując wzór (7.18), obliczamy wypłatę dla gracza drugiego:

$$v = 30 - u = [30 - (u_0 - v_0)] / 2. \qquad (7.21)$$

Każdy z graczy pragnie zmaksymalizować swoją wygraną. Gracz 1 dąży do tego, by $(u_0 - v_0)$ było jak największe, a gracz 2, by $(u_0 - v_0)$ było jak najmniejsze.

Przejdziemy teraz do wyznaczenia strategii gróźb i określenia status quo (u_0, v_0). Przypuśćmy, że gracz 1 wybiera strategię mieszaną $(p\alpha_1, (1-p)\alpha_2)$, a gracz 2 strategię $(q\beta_1, (1-q)\beta_2)$. Strategie te prowadzą w rozważanej grze do następujących wypłat:

$$u = p(2q + 20(1-q)) + (1-p)(10q + 3(1-q)) = 2pq + 20p(1-q) + 10(1-p)q + 3(1-p)(1-q), \qquad (7.22)$$

$$v = q(6p + 20(1-p)) + (1-q)(10p + 4(1-p)) = 6pq + 10p(1-q) + 20(1-p)q + 4(1-p)(1-q). \qquad (7.23)$$

Obliczamy teraz $(u_0 - v_0)$:

$$u_0 - v_0 = -4pq + 10p(1-q) - 10(1-p)q - (1-p)(1-q). \qquad (7.24)$$

Prawa strona tej równości może być zapisana jako gra, w której gracz 1 stosuje swoją strategię z prawdopodobieństwami p i (1-p), a gracz 2 z prawdopodobieństwami q i (1-q). Współczynniki liczbowe oznaczają wypłaty gry. Są to różnice wypłat otrzymywanych przez gracza 1 i gracza 2. Ta gra ma postać:

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} q & 1-q \end{matrix} \\ \begin{matrix} p \\ 1-p \end{matrix} & \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ -10 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (7.25)$$

Jest to ściśle konkurencyjna gra rozgrywana przy ustalaniu status quo dla strategii gróźb. W tej grze występują strategie dominujące. Dla gracza 1 dominującą strategią jest pierwsza (z prawdopodobieństwem p), a dla gracza 2 też pierwsza (z prawdopodobieństwem q). Ta gra posiada punkt siodłowy o wartości -4. Tak więc strategiami groźby są strategie czyste (α_1, β_1). Te strategie prowadzą w grze pierwotnej do pary wypłat (2, 6) i to stanowi status quo tej gry wyznaczony przez strategie gróźb.

Znajdujemy teraz maksimum wyrażenia:

$$(u - u_0)(v - v_0) = (u - 2)(v - 6) = (u - 2)(24 - u). \qquad (7.26)$$

Sprowadza się to do znalezienia maksimum paraboli o równaniu:

$$f(u) = -u^2 + 26u - 48. \qquad (7.27)$$

Maksimum to występuje dla u=13 i osiąga wartość v=17. Tak więc sumaryczny zysk 30 powinien zostać podzielony w następujących proporcjach: 13 dla A i 17 dla B.

7.6. Wybór metody postępowania

W tym rozdziale przedstawiono trzy metody postępowania przy negocjacji. Wybór metody nie jest przypadkowy. O ile w grze występuje jedna para strategii dająca sumaryczny największy zysk, to należy zastosować pierwszą z omawianych metod. Nie ma w tym przypadku dylematu, którą parę strategii wybrać.

Gdy istnieje wiele par strategii, gdzie sumaryczny zysk jest taki sam i jednocześnie jest maksymalny, wtedy stosujemy metodę drugą.

Jeśli mamy sytuację taką jak poprzednio, a w negocjacji dochodzi element groźby, tj. gdy jeden z partnerów grozi zastosowaniem strategii najbardziej niekorzystnej dla przeciwnika, wtedy stosujemy trzecią omówioną metodę postępowania.

Problematyka poruszana w tym rozdziale wydaje się aktualna ze względu na przeprowadzaną prywatyzację w Polsce oraz restrukturyzację górnictwa. Głównym czynnikiem istnienia kopalń, przedsiębiorstw czy firm staje się opłacalność produkcji. Zakłady nierentowne stają przed groźbą likwidacji. Przedsiębiorstwom zależy na zwiększeniu zysków. Zakłady łączą się w spółki czy holdingi po to, aby produkcja stała się opłacalna. Na rynku zaczynają obowiązywać zasady konkurencji. Rozdział niniejszy miał wykazać, ze współpraca w podejmowaniu decyzji może przynieść obopólne większe korzyści aniżeli ścisła konkurencja. Potwierdzają to metody zaprezentowane w tej pracy.

8. WYKORZYSTANIE ZASAD GRY Z NATURĄ W PODEJMOWANIU DECYZJI

Przemysł wydobywczy, a szczególnie górnictwo węgla kamiennego, w którym dominują (przynajmniej w Polsce) kopalnie głębinowe, ma to do siebie, że każda robota górnicza narusza istniejący, ustalony stan w górotworze. Naruszenie tego stanu stanowi źródło zagrożeń, z czego wynika, że roboty należy prowadzić tak, aby te zagrożenia były możliwie najmniejsze.

Sztuka górnicza polega między innymi i na tym, aby prowadzić grę z Naturą, a nie grę przeciw Naturze. Doświadczenia wielu pokoleń górników, a także wyniki badań naukowych potwierdzają, że można,i to z zyskiem, wykorzystywać prawa Natury przez odpowiednie prowadzenie robót górniczych. Klasycznym przykładem tego jest wykorzystanie ciśnienia eksploatacyjnego do urabiania węgla; o tych elementach traktują modele gry z Naturą.

8.1. Konflikt między decydentem a Naturą

Będziemy zajmowali się podejmowaniem decyzji w sytuacjach konfliktowych. Konflikt będzie występował pomiędzy człowiekiem decydującym o eksploatacji węgla w kopalni a Naturą reprezentowaną przez górotwór [55]. Sytuacje konfliktowe bada teoria gier o sumie zerowej [50], [67], [74], [82], [85], [93], [96], [102]. W teorii gier zakłada się, że partnerzy uczestniczący w grze mają do dyspozycji szereg strategii działania do wyboru. W dalszej części naszych rozważań ograniczymy się do gier dwuosobowych. Można je w łatwy sposób zilustrować w postaci macierzy wypłat. Przyjmujemy, że partner 1 (gracz 1) ma do dyspozycji strategie $A_1,...,A_m$, natomiast partner 2 (gracz 2) ma do dyspozycji strategie $B_1,...,B_n$. Pokazane to jest na poniższej macierzy wypłat W.

$$W = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \cdots & B_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{m1} & w_{m2} & \cdots & w_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \tag{8.1}$$

Wielkość w_{ij} oznacza tutaj wypłatę dla pierwszego gracza w przypadku, gdy gracz 1 zdecyduje się na strategię A_i, a gracz 2 na strategię B_j. Wypłata w_{ij} jest równocześnie stratą dla gracza 2. Innymi słowy, przy zastosowaniu pary strategii (A_i, B_j) gracz 2 płaci graczowi 1 wielkość w_{ij}. Graczowi 1 zależy na maksymalizacji zysku, a graczowi 2 na minimalizacji strat. Metody znajdywania strategii optymalnych są opisane w pracach [50], [51], [67], [74], [82], [85], [93], [96], [102].

Przyjmujemy teraz, że graczem 2 będzie Natura reprezentowana przez górotwór. Naturę będziemy traktowali jako naszego rywala, który stwarza sytuacje niebezpieczne dla pracy górników. Zjawiskami niebezpiecznymi, z którymi spotykają się górnicy na dole w kopalni, mogą być: wstrząsy, tąpnięcia, wycieki wody, ulatnianie się gazu itp. Te zjawiska są skierowane przeciwko bezpieczeństwu górników. Naszym zadaniem będzie podejmowanie decyzji maksymalizujących poziom bezpieczeństwa. Ponieważ Natura nie potrafi rozumować tak jak człowiek, nie potrafi stosować zasady dominacji czy określać punktu siodłowego, możemy więc przypuszczać, że nie zawsze będzie stosowała swoją strategię najgorszą dla górników. W związku z tym powstały pewne metody wykorzystujące ten fakt [50].

8.2. Zasada minimalnego ryzyka

Nasze rozważania rozpoczniemy od prostego przykładu ilustrującego istotę zagadnienia.

Przykład 8.1

Niech gracz 1, tzn. My, ma do dyspozycji dwie strategie:

A_1 - urabianie calizny węglowej materiałem wybuchowym,

A_2 - urabianie calizny węglowej maszyną.

Gracz 2, tj. Natura, ma następujące strategie:

B_1 - wyrzuty gazów i skał,

B_2 - wypływ wody,

B_3 - wypływ kurzawki,

B_4 - opad skał z niezabezpieczonego stropu lub ociosu,

B_5 - opad skał z niezabezpieczonej calizny,

B_6 - zagrożenie gazowe dwutlenkiem węgla,

B_7 - zagrożenie metanowe,

B_8 - tąpania.

My przy wyborze naszej strategii musimy kierować się stopniem bezpieczeństwa pracujących górników dla każdej naszej strategii w odniesieniu do sytuacji niebezpiecznych określonych strategiami Natury. Ten stopień bezpieczeństwa będziemy określali w procentach. Np. 100% oznacza, że dane zjawisko niekorzystne w określonej naszej strategii nie wystąpi, czyli bezpieczeństwo górników ze względu na to niekorzystne zjawisko jest całkowite, tj. stuprocentowe. W celu zilustrowania tego zagadnienia przyjmujemy konkretne wartości liczbowe w naszej przykładowej grze.

$$W = My \begin{matrix} \\ A_1 \\ A_2 \end{matrix} \overset{\text{Natura}}{\begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & B_7 & B_8 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 76 & 85 & 75 & 75 & 79 & 83 & 80 & 75 \\ 78 & 81 & 74 & 95 & 84 & 80 & 75 & 85 \end{bmatrix} \tag{8.2}$$

Jest to macierz wypłat W dla gracza 1, tzn. dla Nas. Klasyczna teoria gier nakazuje zbadać, czy są strategie dominujące, a następnie znaleźć punkt siodłowy gry (o ile jest). Analizując macierz wypłat W widzimy, że Natura posiada strategię dominującą B_3 nad pozostałymi, ponieważ:

$$\forall_i \; w_{i3} \le w_{ij}. \tag{8.3}$$

Po wyeliminowaniu z gry strategii zdominowanych Nam pozostaje jedynie zdecydować się na strategię A_1 zapewniającą bezpieczeństwo górników na poziomie 75%. Natomiast strategia A_2 gwarantuje bezpieczeństwo tylko w 74%. Tak więc strategiami optymalnymi w tej grze w myśl klasycznej teorii gier są A_1 dla Nas i B_3 dla Natury. Gwarantuje to poziom bezpieczeństwa górników w 75%.

W naszych rozważaniach braliśmy pod uwagę to, że Natura, aby zmniejszyć nasze zyski, celowo i świadomie wybierze strategię B_3 lepszą dla siebie, a gorszą dla Nas. Zasada minimalnego ryzyka nie czyni takiego założenia. Przyjmuje się tu, że Natura równie dobrze może wybrać inną strategię. My natomiast przy wyborze strategii będziemy się kierowali minimalnym ryzykiem dla Nas. Analizując jeszcze raz macierz wypłat W, wydaje się, że lepiej zdecydować się nam na strategię A_2. Ryzykujemy tu utratę 1% przy zastosowaniu przez Naturę strategii B_3 (74% zamiast 75%), ale możemy zyskać więcej przy zastosowaniu innych strategii B_j.

Zasadę minimalnego ryzyka określił pierwszy L. Savage [86]. Polega ona na tym, że dla każdej strategii B_j Natury określamy wielkość ryzyka pierwszego gracza przy poszczególnych jego strategiach. Prześledzimy to na macierzy W z przykładu 8.1.

Zakładając, że Natura zastosuje strategię B_1, My ryzykujemy utratę 2%, obierając strategię A_1, natomiast nic nie ryzykujemy, obierając strategię A_2. Przyjmując teraz, że Natura zastosuje

strategię B_2, My nic nie ryzykujemy, obierając A_1, natomiast ryzykujemy utratę 4% w przypadku obrania A_2 itd. W ten sposób tworzymy macierz ryzyka R.

Natura

$$W = \text{My} \begin{matrix} \\ A_1 \\ A_2 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & B_7 & B_8 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 20 & 5 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{8.4}$$

Do tej macierzy stosujemy strategię minimaksową. W każdym wierszu znajdujemy element największy. Z tych elementów wybieramy najmniejszy. Numer wiersza tak wybranego elementu wskazuje na strategię, którą mamy zastosować. W naszym przypadku mamy:

$$\min_i \max_j \{w_{ij}\} = \min \{20, 5\} = 5. \tag{8.5}$$

Liczba 5 występuje w drugim wierszu. Tak więc wybraną strategią w myśl zasady minimalnego ryzyka jest strategia A_2.

8.3. Wskaźnik pesymizmu-optymizmu

Zasada wskaźnika pesymizmu-optymizmu została opracowana przez L. Hurwicza [38]. Mówi ona, że w każdym wierszu macierzy wypłat W należy znaleźć elementy minimalne i maksymalne:

$$\text{wmin}_i = \min_j \{w_{ij}\}, \tag{8.6}$$

$$\text{wmax}_i = \max_j \{w_{ij}\}, \tag{8.7}$$

$$(i=1,...,m;\ j=1,...,n).$$

Wielkości wmin_i oraz wmax_i stanowią oceny: pesymistyczną i optymistyczną strategii A_i. Dla każdej decyzji A_i gracza pierwszego, tj. dla Nas, określamy λ-ocenę, która jest kombinacją liniową wielkości wmin_i oraz wmax_i, tj. kombinacją oceny pesymistycznej i optymistycznej. λ-ocenę strategii A_i określamy jako:

$$\lambda\text{-ocena } A_i = \lambda \cdot \text{wmin}_i + (1-\lambda) \cdot \text{wmax}_i. \tag{8.8}$$

Wielkość λ może przybierać wartości z przedziału [0,1]. Dla $\lambda=1$ odpowiada to pesymistycznej zasadzie maksyminowych strategii, tj. strategii bezpiecznych, i traktowaniu gry jako zerowej. Dla $\lambda=0$ odpowiada to poszukiwaniu strategii maksymalizującej wypłatę przy współudziale partnera drugiego, tj. Natury. Wszystkim pozostałym wartościom λ odpowiadają pewne fazy pośrednie. Dobór współczynnika λ zależy od nas. Możemy uznać, że przypadki optymistyczne mają większą szansę wystąpienia niż pesymistyczne lub odwrotnie. Po obliczeniu wszystkich λ-ocen wybieramy strategię A_i, która uzyskała najwyższą ocenę.

Przykład 8.2

Mamy do dyspozycji następujące strategie dotyczące sposobu kierowania stropem przy robotach wybierkowych eksploatacyjnych:

A_1 - na zawał,

A_2 - z podsadzką suchą,

A_3 - z podsadzką hydrauliczną.

Natura będzie miała te same strategie co w przykładzie 1. Macierz W przedstawia się następująco:

Natura

$$W = \text{My} \begin{matrix} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & B_7 & B_8 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 78 & 85 & 80 & 68 & 70 & 90 & 94 & 69 \\ 82 & 83 & 77 & 78 & 76 & 90 & 95 & 75 \\ 80 & 79 & 81 & 73 & 75 & 90 & 96 & 70 \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{8.9}$$

Należy wyznaczyć, którą strategię przeciw Naturze ma wybrać gracz 1 (tzn. My), wykorzystując wskaźnik pesymizmu-optymizmu.

Dla strategii A_1, A_2 i A_3 obliczamy λ-oceny:

$$\lambda\text{-ocena } A = \lambda \cdot \text{wmin}_1 + (1-\lambda) \cdot \text{wmax}_1 = 68\lambda + 94(1-\lambda), \tag{8.10}$$

$$\lambda\text{-ocena } A = \lambda \cdot \text{wmin}_2 + (1-\lambda) \cdot \text{wmax}_2 = 75\lambda + 95(1-\lambda), \tag{8.11}$$

$$\lambda\text{-ocena } A = \lambda \cdot \text{wmin}_3 + (1-\lambda) \cdot \text{wmax}_3 = 70\lambda + 96(1-\lambda). \tag{8.12}$$

Na podstawie doświadczenia ustalono, że λ powinno wynosić 0.4. Uwzględniając tę liczbę, otrzymujemy:

$$\lambda\text{-ocena } A_1 = 68 \cdot 0.4 + 94 \cdot 0.6 = 83.6, \tag{8.13}$$

$$\lambda\text{-ocena } A_2 = 75 \cdot 0.4 + 95 \cdot 0.6 = 87.0, \tag{8.14}$$

$$\lambda\text{-ocena } A_3 = 70 \cdot 0.4 + 96 \cdot 0.6 = 85.6. \tag{8.15}$$

Najlepszą ocenę uzyskała strategia A_2. Tak więc zasada wskaźnika pesymizmu-optymizmu wskazała, że powinniśmy zastosować strategię A_2.

8.4. Zasada równych prawdopodobieństw

Jeżeli w grze z Naturą nie mamy żadnych danych czy przesłanek, które strategie Natury są bardziej lub mniej prawdopodobne, to stosujemy zasadę tzw. równych prawdopodobieństw. Uważamy, że jeżeli Natura dysponuje n strategiami $B_1,...,B_n$, to każda z tych strategii ma prawdopodobieństwo wystąpienia 1/n. Zasada równych prawdopodobieństw zakłada, że Natu-

ra stosuje strategię mieszaną ze współczynnikami dla każdej strategii czystej 1/n. Dla każdej strategii A_i obliczamy jej wartość, stosując wzór:

$$\text{wartość } A_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}, \qquad (i=1,...m). \tag{8.16}$$

Wybieramy strategię, która ma największą wartość.

Przykład 8.3

Mamy do dyspozycji dwie strategie dotyczące wiercenia w węglu lub skale płonnej:

A_1 - wiercenie wiertarką elektryczną,

A_2 - wiercenie wiertarką pneumatyczną.

Natura będzie miała te same strategie co w przykładzie 1. Macierz W przedstawia się następująco:

$$W = My \quad \begin{matrix} \\ A_1 \\ A_2 \end{matrix} \begin{matrix} \text{Natura} \\ B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad B_4 \quad B_5 \quad B_6 \quad B_7 \quad B_8 \end{matrix} \begin{bmatrix} 91 & 80 & 82 & 80 & 85 & 90 & 60 & 80 \\ 91 & 90 & 86 & 76 & 85 & 90 & 86 & 76 \end{bmatrix} \tag{8.17}$$

Należy wyznaczyć strategię, którą powinien zastosować gracz 1 wykorzystując zasadę równych prawdopodobieństw.

Dla strategii A_1 i A_2 obliczamy wartości:

$$\text{wartość } A_1 = (91+80+82+80+85+90+60+80)/8 = 81, \tag{8.18}$$

$$\text{wartość } A_2 = (91+90+86+76+85+90+86+76)/8 = 85. \tag{8.19}$$

Większą wartość posiada strategia A_2 i tę wybieramy.

8.5. Porównanie strategii bezpiecznych ze strategiami stosowanymi w grze z Naturą

Jak widać na przykładzie 8.1, zaprezentowane metody mogą wskazać inną strategię, niż by to wynikało z zasady maksyminu. W przykładzie 8.1 zasada minimalnego ryzyka wskazała na strategię A_2, jako korzystniejszą dla nas. Klasyczna teoria gier wskazała na strategię A_1. Zaprezentowane metody w grach z Naturą wykorzystują fakt, że Natura nie jest istotą myślącą i nie zawsze złośliwie stawia nas w najgorszej sytuacji. W klasycznej teorii gier wykorzystującej pojęcie punktu siodłowego wyznaczamy strategię bezpieczną dla nas, która gwarantuje, że wypłata nie będzie niższa pomimo stosowania dowolnych strategii przeciwnika. W grach z Naturą tę wypłatę możemy zwiększyć, stosując prezentowane metody.

9. PODEJMOWANIE DECYZJI W SYTUACJACH NIEPEWNYCH Z WYKORZYSTANIEM PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Zarządzanie można definiować jako sekwencyjny proces decyzyjny. Tak jak wyróżnia się zarządzanie strategiczne, taktyczne i operacyjne, tak również można wyróżnić decyzje strategiczne, taktyczne i operacyjne. W tak rozumianym zarządzaniu ważne jest, aby decyzje tworzące swoistego rodzaju ciągi, podejmowane w kolejnych momentach czasowych, nie były względem siebie decyzjami sprzecznymi albo też nie wykluczały możliwości osiągnięcia sukcesu zawartego w celu działania. Niepewność świata zewnętrznego wymaga też stosowania decyzji korygujących, naprowadzających przedsiębiorstwo na ścieżkę sukcesu. Dla tych sytuacji przeprowadzono rozważania teoretyczne uzupełnione odpowiednimi przykładami.

9.1. Charakter procesów decyzyjnych przy wykorzystaniu programowania dynamicznego

Będziemy zajmowali się problemami podejmowania decyzji w warunkach niepewności, tj. takich, gdzie nie jesteśmy w stanie z góry przewidzieć dokładnie, jaki będzie efekt końcowy podjętej przez nas decyzji. Będziemy zajmowali się sytuacjami, gdzie jest kilku decydentów i efekt końcowy zależy od decyzji wszystkich decydentów. Przyjmujemy też założenie, że aby osiągnąć pożądany rezultat naszych działań, każdy z decydentów będzie musiał podjąć szereg kolejnych decyzji. Tak więc będziemy rozważali procesy decyzyjne wieloetapowe [53]. Każdy z decydentów będzie się kierował przy tym swoim własnym celem. Na przykład, kilka przedsiębiorstw o podobnym profilu produkcyjnym planuje swój rozwój czy modernizację. Celem tego planowania jest np. osiągnięcie maksymalnego sumarycznego zysku po okresie trzech lat. Decyzje o charakterze strategicznym podejmują przedsiębiorstwa co roku. Mamy tu do czynienia z trzyetapowym procesem decyzyjnym. W zależności od tego, czy decydenci będą podejmowali swoje decyzje w poszczególnych latach niezależnie od siebie, czy też będą je podejmowali kolejno, znając, jaką decyzję podjął przeciwnik, powstaną wtedy różne warianty

procesu decyzyjnego. Decydenci mogą też nie oglądać się jeden na drugiego i z góry zaplanować ciąg decyzji na okres trzech lat. W zależności od przyjętych strategii działania zyski poszczególnych przedsiębiorstw mogą być różne [53].

W zagadnieniach, gdzie mamy podany efekt końcowy, np. całkowity zysk po trzech latach, a celem naszym jest określenie ciągu decyzji prowadzących do pożądanego efektu końcowego, stosujemy metody programowania dynamicznego [5], [100]. Znając możliwe warianty procesu decyzyjnego w chwili końcowej, wybieramy najkorzystniejsze, które prowadzą z etapu poprzedniego do końcowego. Z kolei przechodzimy o jeden etap wstecz i wybieramy decyzje korzystniejsze prowadzące do wyznaczonych już lepszych decyzji w etapie przedostatnim. Cofając się tak dalej w procesie decyzyjnym, dochodzimy do początku, gdzie są podejmowane pierwsze decyzje. Wybrany w ten sposób ciąg decyzji korzystniejszych stanowi strategie działania danego przedsiębiorstwa.

Może się zdarzyć, że na poszczególnych etapach podejmowania kolejnych decyzji interesy przedsiębiorstw mogą być sprzeczne. Mamy wówczas do czynienia z sytuacją konfliktową. Wykorzystuje się wtedy teorię gier do podejmowania decyzji na danym etapie. Cały proces podejmowania kolejnych decyzji jest oparty na metodach programowania dynamicznego, a na danym etapie określa się decyzję w pewien sposób optymalną. Może to być optymalność w sensie Nasha [93], [96], optymalność w sensie Pareto [96], [98] lub optymalność oparta na zasadzie maksyminu [50], [67], [82], [93], [96], [102]. Zasada maksyminu wyznacza tzw. bezpieczną decyzję. Polega ona na tym, że zaznaczamy minimalne zyski przy różnych decyzjach. Wybieramy decyzję, która zapewnia największy zysk spośród zaznaczonych minimalnych. Zasada maksyminu jest wzięta z teorii gier i gwarantuje, że zysk przedsiębiorstwa nie będzie mniejszy od tak wyznaczonego. W procesie decyzyjnym będziemy wyróżniali pewne stany tego procesu. Znaczy to, że po podjęciu swoich decyzji przez różnych decydentów proces przechodzi w inny stan. Jeżeli ten stan jest znany dla poszczególnych decydentów, to mamy do czynienia ze wzrostem informacji wraz z biegiem procesu decyzyjnego.

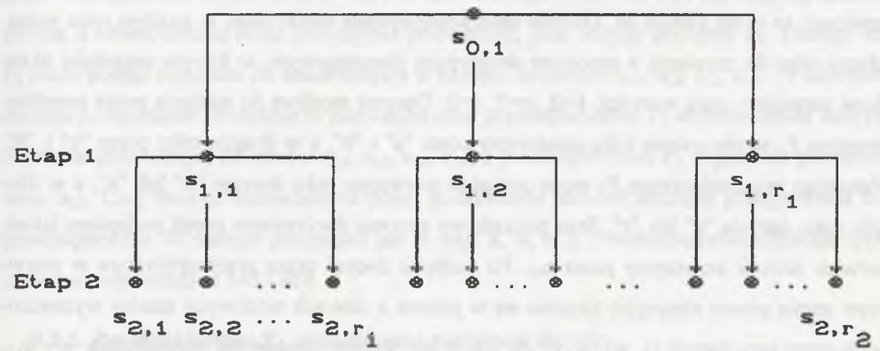
9.2. Ogólne sformułowanie problemu

Mamy do dyspozycji k przedsiębiorstw o podobnym profilu produkcyjnym. Oznaczamy je jako $P_1,...,P_k$. Będziemy rozważali proces decyzyjny wieloetapowy. Przyjmujemy, że tych etapów będzie m. Każde z przedsiębiorstw na każdym etapie podejmuje jedną decyzję spośród n możliwych. Celem tego działania jest, aby przedsiębiorstwo po podjęciu m kolejnych decyzji

osiągnęło maksymalny zysk. Liczbę możliwych układów decyzji w pierwszym etapie podjętych przez k przedsiębiorstw określa wzór na liczbę wariacji z powtórzeniami:

$$r_1 = w_n^{(k)} = n^k. \tag{9.1}$$

Oznacza to, że proces decyzyjny w pierwszym etapie po podjęciu decyzji przez przedsiębiorstwa przechodzi w jeden z r_1 możliwych stanów. Ogólnie liczbę możliwych stanów na j-tym etapie będziemy oznaczali przez r_j (j=1,...,m). Stany będziemy oznaczali symbolem $s_{j,l}$. Jest to stan występujący na j-tym etapie o numerze l. W każdym stanie określone są zyski, jakie mogą osiągnąć przedsiębiorstwa. Z kolei w każdym ze stanów $s_{1,1},...,s_{1,r_1}$ każde z k przedsiębiorstw ma możliwość podjęcia jednej z n możliwych decyzji. Ilustruje to rysunek 9.1.



Rys. 9.1. Schemat wieloetapowego procesu decyzyjnego
Fig. 9.1. Diagram of multi-stage decision-making process

Liczba możliwych stanów na drugim etapie wynosi:

$$r_2 = r_1 \times r_1 = r_1^2. \tag{9.2}$$

Każde z k przedsiębiorstw ma możliwość podjęcia jednej z n możliwych decyzji. Tak więc liczba możliwych stanów na trzecim etapie wynosi:

$$r_3 = r_1^2 \times r_1 = r^3. \tag{9.3}$$

Ogólnie, liczba możliwych stanów na j-tym etapie wynosi:

$$r_j = (n^k)^j = n^{k \cdot j}. \tag{9.4}$$

Na ostatnim m-tym etapie mamy więc stanów:

$$r_m = n^{k \cdot m}. \tag{9.5}$$

Ponieważ są znane zyski możliwe do osiągnięcia przez przedsiębiorstwa na poszczególnych etapach, obliczamy więc sumaryczne całkowite zyski po m etapach. Każde z przedsiębiorstw kieruje się zasadą, aby swoje całkowite zyski miało jak największe. W ostatnim etapie bierze więc pod uwagę w każdym ze stanów tylko te decyzje, które pozwalają osiągnąć większy zysk. Z kolei sprawdzamy, które decyzje są korzystniejsze dla poszczególnych przedsiębiorstw w przedostatnim etapie. Posuwamy się tak dalej wstecz, aż do stanu początkowego. Wyznaczone korzystniejsze decyzje stanowią ścieżkę dla procesu decyzyjnego i ukazują, przez jakie stany będzie on przechodził.

Nasze rozważania będziemy kontynuowali dalej na przykładzie dwóch przedsiębiorstw P_1 i P_2, które produkują podobne artykuły. Przedsiębiorstwa te będą podejmowały decyzje o charakterze ekonomiczno-modernizacyjnym mające na celu osiągnięcie maksymalnego zysku całkowitego za okres dwóch lat. Decyzje będą podejmowane dwukrotnie, w każdym roku jedna. Mamy więc do czynienia z procesem decyzyjnym dwuetapowym, w którym wcześniej określone parametry mają wartości: k=2, m=2, n=2. Decyzje możliwe do podjęcia przez przedsiębiorstwo P_1 w pierwszym roku oznaczymy przez "a" i "b", a w drugim roku przez "c" i "d". Natomiast przedsiębiorstwo P_2 może podjąć w pierwszym roku decyzje "w" lub "x", a w drugim roku decyzje "y" lub "z". Stan początkowy procesu decyzyjnego przed podjęciem jakiejkolwiek decyzji oznaczymy przez $s_{0,1}$. Po podjęciu decyzji przez przedsiębiorstwa w pierwszym etapie proces decyzyjny znajdzie się w jednym z czterech możliwych stanów wyznaczonych przez pary decyzji (a, w), (a, x), (b, w), (b, x). Stany te oznaczymy odpowiednio $s_{1,1}$, $s_{1,2}$, $s_{1,3}$, $s_{1,4}$. W drugim etapie, po podjęciu kolejnych decyzji przez przedsiębiorstwa P_1 i P_2 proces decyzyjny przejdzie w jeden spośród kolejnych szesnastu stanów wyznaczonych przez układ czterech decyzji. Stany te oznaczymy symbolami $s_{2,1}$, $s_{2,2},\ldots,s_{2,16}$. Ten dwuetapowy proces decyzyjny przedstawiony jest za pomocą grafu na rysunku 9.2. Po drugim roku zaznaczono zysk całkowity Z_1 i Z_2 przedsiębiorstw możliwy do osiągnięcia w poszczególnych stanach. Rozważymy teraz na przykładach różne struktury informacyjne dla tych dwóch przedsiębiorstw P_1 i P_2.

9.3. Podejmowanie decyzji kolejno przez decydentów na podstawie znajomości poprzednich decyzji

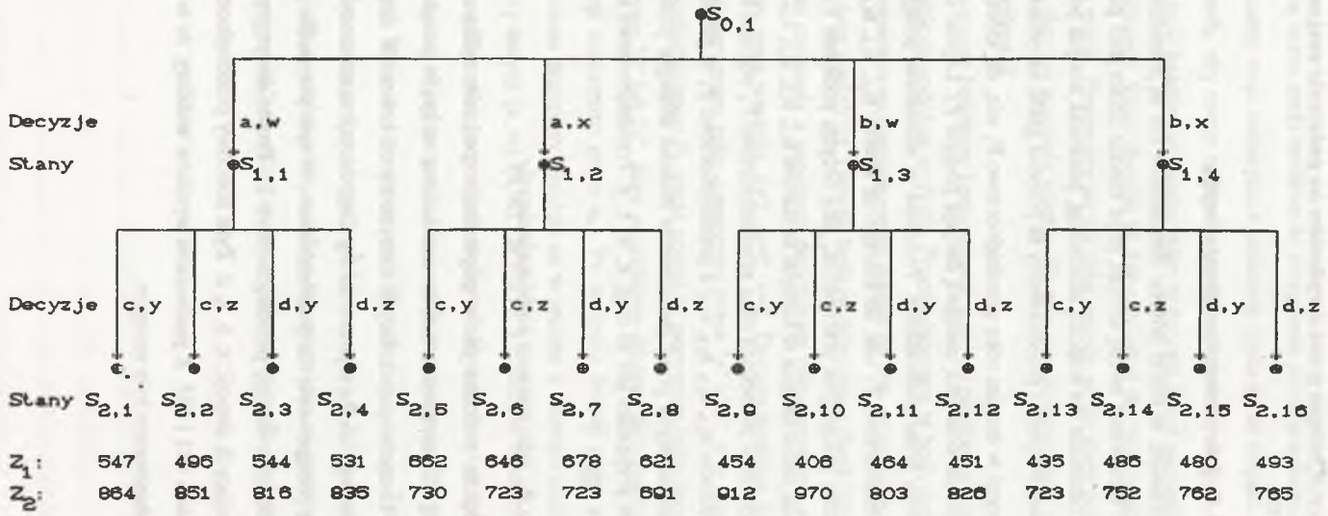
9.3.1. *Przedsiębiorstwo P_1 jako pierwsze podejmuje decyzję*

Mamy do czynienia z sytuacją, w której pozycje decydentów nie są jednakowe. Przedsiębiorstwo P_1 ma możliwość forsowania swojej decyzji, gdyż zawsze działa jako pierwszy decydent. Przedsiębiorstwo P_2 natomiast ma większą informację, ponieważ zna już podjętą decyzję przez P_1. Rozważymy proces decyzyjny przedstawiony za pomocą grafu na rysunku 9.3.

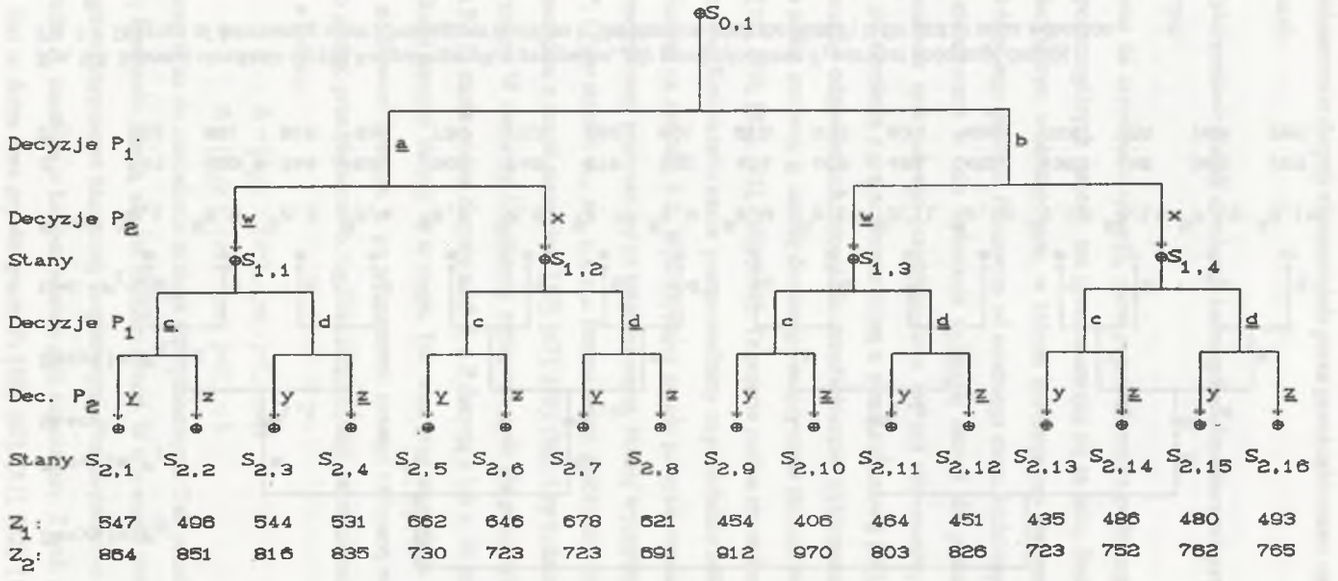
Przy podejmowaniu decyzji w drugim roku przedsiębiorstwo P_2 wie, do którego ze stanów $s_{1,1}$, $s_{1,2}$, $s_{1,3}$, $s_{1,4}$ doszedł proces oraz jaką następną decyzję podjęło P_1. Lepsze decyzje dla P_2 na drugim etapie zaznaczono przez podkreślenie. Podobnie w momencie podejmowania decyzji w drugim roku przedsiębiorstwo P_1 wie, do którego ze stanów $s_{1,1}$, $s_{1,2}$, $s_{1,3}$, $s_{1,4}$ doszedł proces, a równocześnie może precyzyjnie przewidzieć, jaką decyzję podejmie P_2. Dlatego też P_1 może podjąć najlepsze dla siebie decyzje w każdym ze stanów $s_{1,1}$, $s_{1,2}$, $s_{1,3}$, $s_{1,4}$. Te najlepsze decyzje podkreślono. Podobnie w pierwszym roku przedsiębiorstwo P_2 wybiera lepszą decyzję dla siebie prowadzącą do stanów $s_{1,1}$, $s_{1,2}$, $s_{1,3}$, $s_{1,4}$, a przedsiębiorstwo P_1 w punkcie początkowym $s_{0,1}$. Ciąg decyzji zaznaczonych przez podkreślenie stanowi strategię postępowania dla przedsiębiorstw. W naszym przypadku jest to ciąg: a, w, c, y. Przedsiębiorstwa uzyskają zyski końcowe odpowiednio 547 i 864.

9.3.2. *Przedsiębiorstwo P_2 jako pierwsze podejmuje decyzję*

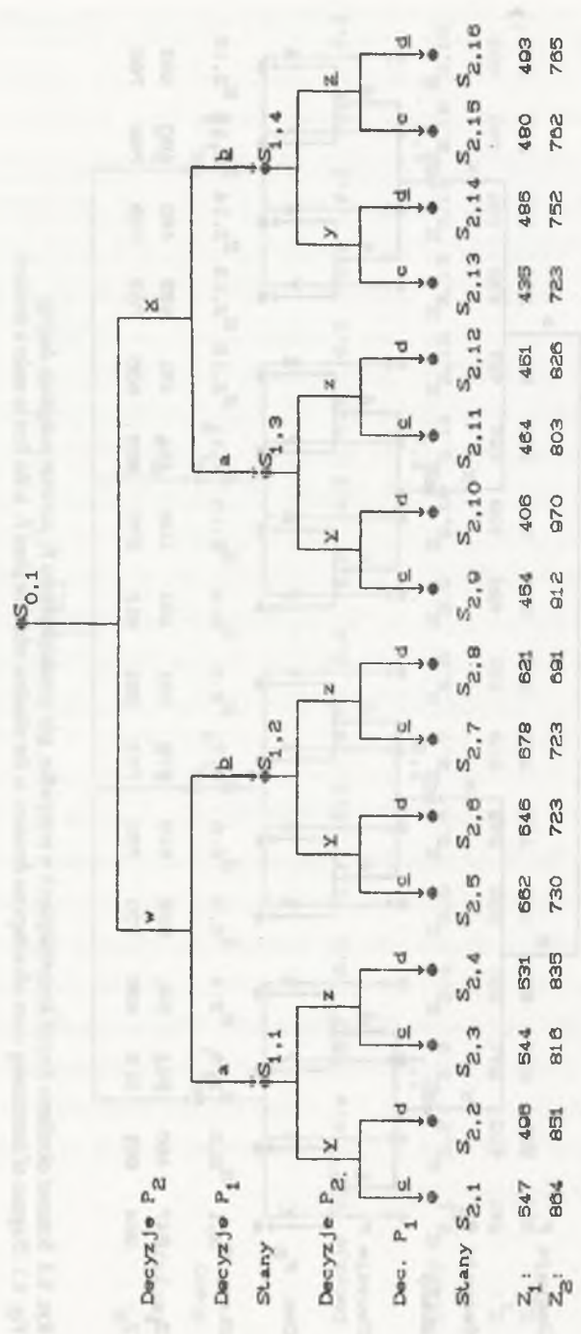
Rozumowanie nasze będzie podobne jak w poprzednim rozdziale, tylko role przedsiębiorstw P_1 i P_2 się zmienią. Korzystniejsze decyzje zaznaczono na grafie przedstawionym na rysunku 9.4. Wybór tych korzystniejszych decyzji zaczyna się od końca. W drugim roku zaznaczamy korzystniejsze decyzje dla P_1, a potem dla P_2. Ciąg decyzji zaznaczonych przez podkreślenie stanowi strategię postępowania dla przedsiębiorstw. W tym przypadku jako pierwsze w punkcie startowym podejmuje decyzję przedsiębiorstwo P_2. Proces decyzyjny w tym przypadku składa się z następujących decyzji: x, b, z, d. Zysk końcowy przedsiębiorstw wynosi w tym przypadku odpowiednio 493 i 765. Z porównania wyników widzimy, że w tym przypadku zyski dla obydwu przedsiębiorstw były mniejsze.



Rys.9.2. Schemat dwuetapowego procesu decyzyjnego dla dwóch przedsiębiorstw P_1 i P_2
Fig. 9.2. Diagram of two-stage decision-making process for two plants P_1 and P_2



Rys. 9.3. Schemat określania decyzji korzystniejszych w przypadku, gdy przedsiębiorstwo P_1 pierwsze podejmuje decyzję
Fig. 9.3. Diagram of determining more advantageous decisions in the situation when the plant P_1 is the first to make a decision



Rys. 9.4. Schemat określania decyzji korzystniejszych w przypadku, gdy przedsiębiorstwo P_2 pierwsze podejmuje decyzję
Fig. 9.4. Diagram of determining more advantageous decisions in the situation when the plant P_2 is the first to make a decision

9.4. Podejmowanie decyzji równocześnie przez przedsiębiorstwa na poszczególnych etapach

9.4.1. *Wykorzystanie zasady dominacji i strategii maksyminowych przy wyborze decyzji*

Mamy teraz do czynienia z sytuacją, gdzie przedsiębiorstwa podejmują równocześnie swe decyzje na poszczególnych etapach, nie porozumiewając się ze sobą. Będziemy zajmowali się procesem decyzyjnym wieloetapowym, w którym interesuje nas maksymalny zysk przedsiębiorstw na końcu tego procesu. Począwszy od ostatniego etapu, będziemy rozgrywali gry między przedsiębiorstwami w celu wyłonienia najlepszej decyzji dla poszczególnych przedsiębiorstw. Ponieważ zysk jednego przedsiębiorstwa nie jest równoważny ze stratą drugiego, mamy więc do czynienia z grą niekooperacyjną o sumie niezerowej [50], [67], [93], [96]. W celu wyznaczenia odpowiednich decyzji dla przedsiębiorstw wykorzystamy metody znane z teorii gier o sumie zerowej, tj. zasadę dominacji i znajdywanie strategii maksyminowych [50], [51], [67], [70], [74], [82], [93], [96], [102]. Te pojęcia można też wykorzystywać w grach o sumie niezerowej. Rozważania nasze przeprowadzimy na przykładzie omawianym poprzednio i przedstawionym na rysunku 9.2. Wykorzystując zasadę programowania dynamicznego [5], [59], [99], rozgrywamy pierwsze gry na ostatnim etapie. Należy wyznaczyć decyzje dla przedsiębiorstw P_1 i P_2 w stanach $s_{1,1}$, $s_{1,2}$, $s_{1,3}$, $s_{1,4}$. Innymi słowy, należy rozwiązać niezależnie cztery gry dwuosobowe o sumie niezerowej [50], [67], [93], [96]. Gry będziemy zapisywali w postaci macierzowej. W macierzy A będziemy zapisywali zyski dla przedsiębiorstwa P_1, a w macierzy B dla P_2. P_1 może podjąć decyzję c lub d, a P decyzję y lub z. W terminologii teorii gier odpowiednikami naszych decyzji są strategie. Tak więc przy omawianiu teorii gier będziemy posługiwali się słowem strategia, a po wyznaczeniu strategii najlepszej wskażemy, jaką decyzję powinno podjąć przedsiębiorstwo. Ogólnie przyjmujemy, że macierze gry A i B posiadają m wierszy i n kolumn:

$$A = \{a_{ij}\}, \quad (i=1,...,m; \ j=1,...,n), \tag{9.6}$$

$$B = \{b_{ij}\}, \quad (i=1,...,m; \ j=1,...,n). \tag{9.7}$$

Przejdziemy teraz do omówienia strategii maksyminowych. Tak przedsiębiorstwo P_1, jak i P_2 będzie się kierowało zasadą, aby jak najmniej stracić. W tym sensie decyzje podjęte w oparciu o strategie maksyminowe nazywamy bezpiecznymi. Przedsiębiorstwo P_1, analizując swoją macierz zysków A, zaznacza w każdym wierszu zysk najmniejszy. Z tych zysków wybiera zysk największy. Jest to dolna cena gry dla gracza P_1 [50], [67], [81], [82], [102]. Numer wiersza

macierzy A, w którym tak znaleziony zysk występuje, określa decyzję dla P_1. Przedsiębiorstwo P_2 zaznacza w każdej kolumnie macierzy B zyski minimalne. Z tych zysków minimalnych wybiera największy. Jest to dolna cena gry dla gracza P_2 [50], [67], [81], [82], [102]. Numer kolumny macierzy B, w którym tak znaleziony zysk występuje, określa decyzję dla P_2. Stosowanie strategii maksyminowych gwarantuje, że zyski przedsiębiorstw nie będą mniejsze od określonych przez dolne ceny gry. Mogą natomiast być większe.

Dolna cena gry dla P_1 wyraża się wzorem:

$$V_1 = \max_i \min_j \{a_{i,j}\}, \quad (i=1,...,m; \ j=1,...,n). \tag{9.8}$$

Dla przedsiębiorstwa P_2 dolna cena gry wyraża się wzorem:

$$V_2 = \max_j \min_i \{b_{i,j}\}, \quad (i=1,...,m; \ j=1,...,n). \tag{9.9}$$

Rozważymy teraz proces podejmowania decyzji zilustrowany na rysunku 9.2 dla przedsiębiorstw P_1 i P_2. Rozpoczniemy określanie decyzji od końcowego etapu, tj. w drugim roku.

W stanie $s_{1,1}$ mamy do rozegrania grę określoną macierzami:

$$A = \begin{array}{c} \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 547 & 496 \\ 544 & 531 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 864 & 851 \\ 816 & 835 \end{bmatrix} \end{array}$$

Żadne z przedsiębiorstw nie ma strategii dominujących w myśl definicji 6.1 i 6.2. P_1 oblicza dolną cenę gry na podstawie wzoru (9.8):

$$V_1 = \max_i \min_j \{a_{i,j}\} = \max(496, 531) = 531. \tag{9.10}$$

Ta cena V_1 określa strategię (bezpieczną) maksyminową dla P_1. Jest nią "d". Natomiast P_2 oblicza swoją dolną cenę gry na podstawie wzoru (9.9):

$$V_2 = \max_j \min_i \{b_{i,j}\} = \max(816, 835) = 835. \tag{9.11}$$

Strategią (bezpieczną) maksyminową dla P_2 jest więc "z".

W stanie $s_{1,2}$ mamy do rozegrania grę określoną macierzami:

$$A = \begin{array}{c} \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 662 & 646 \\ 678 & 621 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 730 & 736 \\ 723 & 691 \end{bmatrix} \end{array}$$

Żadne z przedsiębiorstw nie ma strategii dominujących w myśl definicji 6.1 i 6.2. P_1 oblicza dolną cenę gry na podstawie wzoru (9.8):

$$V_1 = \max_i \min_j \{a_{i,j}\} = \max(646, 621) = 646. \tag{9.12}$$

Ta cena V_1 określa strategię (bezpieczną) maksyminową dla P_1. Jest nią "c". Natomiast P_2 oblicza swoją dolną cenę gry na podstawie wzoru (9.9):

$$V_2 = \max_j \min_i \{b_{i,j}\} = \max(723, 691) = 723. \tag{9.13}$$

Strategią (bezpieczną) maksyminową dla P_2 jest więc "y".

W stanie $s_{1,3}$ mamy do rozegrania grę określoną macierzami:

$$A = \begin{array}{c} \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 454 & 406 \\ 464 & 451 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 912 & 970 \\ 803 & 826 \end{bmatrix} \end{array}$$

Tutaj P_1 ma strategię dominującą "d", a dla P_2 dominującą strategią jest "z". Gwarantowane zyski przedsiębiorstw przy trzymaniu się tych strategii są odpowiednio Z_1=451 i Z_2=826.

W stanie $s_{1,4}$ mamy do rozegrania grę określoną macierzami:

$$A = \begin{array}{c} \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 435 & 486 \\ 480 & 493 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 723 & 752 \\ 762 & 765 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dominującą strategią dla P_1 jest tutaj "d", a dla P_2 "z". Zestawienie wybranych decyzji jest następujące:

Stan	Wybrane decyzje	Zyski Z_1, Z_2
$s_{1,1}$	(d, z)	(531, 835)
$s_{1,2}$	(c, y)	(662, 730)
$s_{1,3}$	(d, z)	(451, 826)
$s_{1,4}$	(d, z)	(493, 765)

Należy rozegrać jeszcze jedną grę odnoszącą się do stanu początkowego $s_{0,1}$. Gra ta jest określona przez macierze:

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} w & x \end{array} \\ \begin{bmatrix} 531 & 662 \\ 451 & 493 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ a \\ b \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} w & x \end{array} \\ \begin{bmatrix} 835 & 730 \\ 826 & 765 \end{bmatrix} \end{array}$$

Strategią dominującą dla P_1 jest tutaj "a", a dla P_2 "w". Zyski przedsiębiorstw wynoszą odpowiednio Z_1=531 i Z_2=835. Tak więc przedsiębiorstwo P_1 powinno w pierwszym roku podjąć decyzję "a", a P_2 decyzję "w". W drugim roku przedsiębiorstwa powinny podjąć decyzje odpowiednio "d" i "z". W tym przypadku proces decyzyjny doszedł do stanu końcowego $s_{2,4}$, w którym przedsiębiorstwa uzyskają zyski Z_1=531 i Z_2=835.

9.4.2. *Wykorzystanie strategii Nasha przy wyborze decyzji*

W celu wyznaczenia odpowiednich decyzji dla przedsiębiorstw wykorzystamy definicje równowagi niekooperacyjnej w sensie Nasha. Rozważania nasze przeprowadzimy na przykładzie omawianym poprzednio i przedstawionym na rysunku 9.2. Rozważania te będą podobne jak w rozdziale 9.4.1, tylko kryterium wyboru decyzji będzie inne. Zamiast stosowania zasady dominacji i strategii maksyminowych będziemy poszukiwali punktu równowagi w sensie Nasha. Wykorzystując zasadę programowania dynamicznego [5], [59], [100] rozgrywamy pierwsze gry na ostatnim etapie. Należy wyznaczyć decyzje dla przedsiębiorstw P_1 i P_2 w stanach $s_{1,1}$, $s_{1,2}$, $s_{1,3}$, $s_{1,4}$. Innymi słowy, należy rozwiązać niezależnie cztery gry dwuosobowe o sumie niezerowej [50], [67], [93], [96]. Jako rozwiązania tych gier będziemy przyjmowali punkty równowagi w sensie Nasha. Strategie odpowiadające tym punktom równowagi nazywają się strategiami Nasha [50], [67], [81], [93], [96]. Te strategie zostały omówione w rozdziale 6.

W stanie $s_{1,1}$ mamy do rozegrania grę określoną macierzami:

$$A = \begin{array}{c} \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 547 & 496 \\ 544 & 531 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 864 & 851 \\ 816 & 835 \end{bmatrix} \end{array}$$

W tym stanie występują dwa punkty równowagi w sensie Nasha. Te punkty są określone przez pary strategii (c, y) oraz (d, z). Zyski odpowiadające tym strategiom są następujące (547, 864) i (531, 835). W myśl definicji 6.4 para strategii (c, y) jest lepsza od pary (d, z). Wobec tego przedsiębiorstwo P_1 powinno obrać strategię "c", a P_2 "y".

W stanie $s_{1,2}$ mamy do rozegrania grę określoną macierzami:

$$A = \begin{array}{c} \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 662 & 646 \\ 678 & 621 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 730 & 736 \\ 723 & 691 \end{bmatrix} \end{array}$$

W tym stanie występują dwa punkty równowagi w sensie Nasha. Te punkty są określone przez pary strategii (d, y) oraz (c, z). Zyski odpowiadające tym strategiom są następujące (678, 723) i (646, 736). W myśl definicji 6.4 nie ma w tej grze strategii lepszych. Ta gra nie ma rozwiązania [96]. Żadne z przedsiębiorstw nie ma strategii dominujących w myśl definicji 6.1 i 6.2. Decydujemy się więc na zastosowanie strategii maksyminowych. P_1 oblicza dolną cenę gry na podstawie wzoru (9.8):

$$V_1 = \max_i \min_j \{a_{i,j}\} = \max (646, 621) = 646. \qquad (9.14)$$

Ta cena V_1 określa strategię (bezpieczną) maksyminową dla P_1. Jest nią "c". Natomiast P_2 oblicza swoją dolną cenę gry na podstawie wzoru (9.9):

$$V_2 = \max_j \min_i \{b_{i,j} = \max (723, 691) = 723. \qquad (9.15)$$

Strategią (bezpieczną) maksyminową dla P_2 jest więc "y".

W stanie $s_{1,3}$ mamy do rozegrania grę określoną macierzami:

$$A = \begin{array}{c} \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 454 & 406 \\ 464 & 451 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 912 & 970 \\ 803 & 826 \end{bmatrix} \end{array}$$

Punktem równowagi w sensie Nasha (wzór 6.11) jest tutaj para strategii (d, z).

W stanie $s_{1,4}$ mamy do rozegrania grę określoną macierzami:

$$A = \begin{array}{c} \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 435 & 486 \\ 480 & 493 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 723 & 752 \\ 762 & 765 \end{bmatrix} \end{array}$$

W myśl definicji 6.3 punktem równowagi w sensie Nasha jest tutaj para strategii (d, z). Te punkty równowagi Nasha i odpowiadające im decyzje są następujące:

Stan	Punkt równowagi	Z_1 Z_2	Decyzje
$s_{1,1}$	$(a_{u,v}, b_{u,v})$ =	(547, 864)	(c, y)
$s_{1,2}$	$(a_{u,v}, b_{u,v})$ =	(662, 730)	(c, y)
$s_{1,3}$	$(a_{u,v}, b_{u,v})$ =	(451, 826)	(d, z)
$s_{1,4}$	$(a_{u,v}, b_{u,v})$ =	(493, 765)	(d, z)

Należy rozegrać jeszcze jedną grę odnoszącą się do stanu początkowego $s_{0,1}$. Gra ta jest określona przez macierze:

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} w & x \end{array} \\ \begin{bmatrix} 547 & 662 \\ 451 & 493 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ a \\ b \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} w & x \end{array} \\ \begin{bmatrix} 864 & 730 \\ 826 & 765 \end{bmatrix} \end{array}$$

Punktem równowagi w sensie Nasha jest tutaj para $(a_{u,v}, b_{u,v})$ = (547, 864), odpowiadająca temu punktowi jest para decyzji (a, w). Tak więc przedsiębiorstwo P_1 powinno w pierwszym roku podjąć decyzję "a", a P_2 decyzję "w". W drugim roku przedsiębiorstwa powinny podjąć decyzje odpowiednio "c" i "y". W tym przypadku proces decyzyjny doszedł do stanu końcowego $s_{2,1}$. Zyski będą wynosiły odpowiednio 547 dla P_1 i 864 dla P_2.

Należy zwrócić uwagę na to, że wartości rozwiązań maksyminowych nie są lepsze (a więc nie większe) niż pary wartości jakiegokolwiek rozwiązania równowagi Nasha [93]. Ma to odzwierciedlenie w zyskach w stanie końcowym $s_{2,4}$ przy zastosowaniu strategii maksyminowych oraz w stanie $s_{2,1}$ przy wykorzystaniu strategii Nasha. Zyski te wynoszą odpowiednio (531, 835) w pierwszym przypadku i (547, 864) w drugim przypadku.

9.4.3. *Wykorzystanie strategii optymalnych w sensie Pareto*

Rozważania nasze przeprowadzimy na przykładzie omawianym poprzednio i przedstawionym na rysunku 9.2. Rozważania te będą podobne jak w rozdziale 9.4.1, tylko kryterium wyboru decyzji będzie inne. Będziemy poszukiwali takiej pary strategii najlepszej w tym sensie, że każdy inny wynik można "poprawić" co najmniej dla jednego gracza, nie czyniąc tym samym szkody drugiemu. W tym sensie o takim wyniku mówi się, że jako jedyny nie jest łącznie (dla obu graczy) dominowany przez żaden inny wynik. Wynik o tej własności nazywa się optymalnym w sensie Pareto [67], [96]. Wynik optymalny w sensie Pareto to taki, że nie ma innego wyniku w tej grze, przy którym co najmniej jeden gracz nie uzyskałby mniej. W stanie $s_{1,1}$ mamy do rozegrania grę określoną macierzami:

$$A = \begin{matrix} \\ c \\ d \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} y & z \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 547 & 496 \\ 544 & 531 \end{bmatrix} \end{matrix} \qquad B = \begin{matrix} \\ c \\ d \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} y & z \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 864 & 851 \\ 816 & 835 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

W tym stanie wynikiem optymalnym w sensie Pareto jest para zysków (547, 864). Strategiami optymalnymi w sensie Pareto są "c" i "y", które odpowiadają temu wynikowi. Każde odstępstwo od tych strategii powoduje zmniejszenie zysków dla co najmniej jednego gracza. Zyski odpowiadające tym strategiom są następujące (547, 864). Wobec tego przedsiębiorstwo P_1 powinno obrać strategie "c", a P_2 "y".

W stanie $s_{1,2}$ mamy do rozegrania grę określoną macierzami:

$$A = \begin{matrix} \\ c \\ d \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} y & z \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 662 & 646 \\ 678 & 621 \end{bmatrix} \end{matrix} \qquad B = \begin{matrix} \\ c \\ d \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} y & z \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 730 & 736 \\ 723 & 691 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

W tym stanie wynikiem optymalnym w sensie Pareto jest para zysków (662, 730). Strategiami optymalnymi w sensie Pareto są "c" i "y", które odpowiadają temu wynikowi. Nie ma innego wyniku w tej grze, przy którym co najmniej jeden gracz nie uzyskałby mniej. Zyski odpowiadające tym strategiom są następujące (662, 730). Wobec tego przedsiębiorstwo P_1 powinno obrać strategię "c", a P_2 "y".

W stanie $s_{1,3}$ mamy do rozegrania grę określoną macierzami:

$$A = \begin{matrix} \\ c \\ d \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} y & z \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 454 & 406 \\ 464 & 451 \end{bmatrix} \end{matrix} \qquad B = \begin{matrix} \\ c \\ d \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} y & z \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 912 & 970 \\ 803 & 826 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

W tym stanie wynikiem optymalnym w sensie Pareto jest para zysków (454, 912). Strategiami optymalnymi w sensie Pareto są "c" i "y", które odpowiadają temu wynikowi. Każde odstępstwo od tych strategii powoduje zmniejszenie zysków dla co najmniej jednego gracza. Zyski odpowiadające tym strategiom są następujące (454, 912). Wobec tego przedsiębiorstwo P_1 powinno obrać strategię "c", a P_2 "y".

W stanie $s_{1,4}$ mamy do rozegrania grę określoną macierzami:

$$A = \begin{matrix} \\ c \\ d \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} y & z \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 435 & 486 \\ 480 & 493 \end{bmatrix} \end{matrix} \qquad B = \begin{matrix} \\ c \\ d \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} y & z \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 723 & 752 \\ 762 & 765 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

W tym stanie wynikiem optymalnym w sensie Pareto jest para zysków (493, 765). Strategiami optymalnymi w sensie Pareto są "d" i "z", które odpowiadają temu wynikowi. Zestawienie wybranych decyzji i zysków przedstawia się następująco:

Stan	Wybrane decyzje	Zyski Z_1, Z_2
$s_{1,1}$	(c, y)	(547, 864)
$s_{1,2}$	(c, y)	(662, 730)
$s_{1,3}$	(c, y)	(454, 912)
$s_{1,4}$	(d, z)	(493, 765)

Należy rozegrać jeszcze jedną grę odnoszącą się do stanu początkowego $s_{0,1}$. Gra ta jest określona przez macierze:

$$A = \begin{matrix} \\ a \\ b \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} w & x \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 547 & 662 \\ 454 & 493 \end{bmatrix} \end{matrix} \qquad B = \begin{matrix} \\ a \\ b \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} w & x \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 864 & 730 \\ 912 & 765 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Wynikiem optymalnym w sensie Pareto jest para zysków (547, 864). Strategiami optymalnymi w sensie Pareto są "a" i "w", które odpowiadają temu wynikowi. Tak więc przedsiębiorstwo P_1 powinno w pierwszym roku podjąć decyzję "a", a P_2 decyzję "w". W drugim roku przedsiębiorstwa powinny podjąć decyzje odpowiednio "c" i "y". W tym przypadku proces decyzyjny doszedł do stanu końcowego $s_{2,1}$. Zyski będą wynosiły odpowiednio 547 dla P_1 i 864 dla P_2 .

Strategie Nasha oraz Pareto doprowadziły w tym przypadku do tego samego stanu końcowego $s_{2,1}$ procesu decyzyjnego. Różnice wystąpiły przy rozwiązywaniu gry w stanie $s_{1,3}$. Stan ten jednak nie uczestniczył w procesie decyzyjnym. Proces przechodził przez stany $s_{0,1}$, $s_{1,1}$, $s_{2,1}$.

9.5. Stosowanie różnych sposobów znajdywania strategii "optymalnych"

W rozdziale 9 przedstawiono problemy podejmowania decyzji przez przedsiębiorstwa mające na celu maksymalizacje swojego zysku. Proces podejmowania decyzji był wieloetapowy Niepewność sytuacji wyrażała się tutaj przez to, że zysk danego przedsiębiorstwa nie zależał tylko od decyzji podejmowanych przez nie, ale także od decyzji innych przedsiębiorstw uczestniczących w procesie decyzyjnym. Ponieważ celem przedsiębiorstw była maksymalizacja zysków na końcu wieloetapowego procesu decyzyjnego, wykorzystano więc do rozwiązania tego zagadnienia metody programowania dynamicznego. Proces podejmowania decyzji zilustrowany był na przykładzie dwóch przedsiębiorstw P_1 i P_2.

W rozdziale 9.3 przedstawiono proces podejmowania decyzji kolejno przez decydentów na podstawie znajomości poprzednich decyzji. W punkcie 9.3.1 przedsiębiorstwo P_1 jako pierwsze podejmowało decyzję. W punkcie 9.3.2 role przedsiębiorstw odwróciły się. Jako pierwsze podejmowało decyzję przedsiębiorstwo P_2. Zyski po dwóch latach okazały się różne w tych dwóch przypadkach.

W rozdziale 9.4 przedstawiono proces podejmowania decyzji, w którym przedsiębiorstwa na poszczególnych etapach podejmują decyzje równocześnie, nie komunikując się przy tym między sobą. Spowodowało to, że na poszczególnych etapach należało rozegrać pewne gry między przedsiębiorstwami w celu wyłonienia decyzji najlepszych. Gry te nie były konfliktowe. Zwiększenie zysku przez jedno przedsiębiorstwo nie było równoważne ze stratą przez inne przedsiębiorstwo. W teorii gier te gry sklasyfikowane są jako niekooperacyjne gry o sumie niezerowej. Niektóre gry o sumie niezerowej nastręczają wiele trudności w rozwiązywaniu i jeszcze nie doczekały się pełnego opracowania matematycznego. Pewne gry nie mają rozwiązań, inne mają ich kilka. W związku z tym powstały różne sposoby znajdywania strategii najlepszych w tych grach. W prezentowanej pracy przedstawiono trzy sposoby znajdywania strategii "optymalnych":

a) przez wykorzystanie zasady dominacji i strategii maksyminowych,

b) przez wykorzystanie strategii Nasha,

c) przez wykorzystanie strategii optymalnych w sensie Pareto.

Stosując różne kryteria optymalności strategii, można uzyskać różne wyniki końcowe. W omawianym przykładzie przedsiębiorstw P_1 i P_2 zyski uzyskane po dwóch latach w przypadku a) były mniejsze niż w przypadku b) i c). Przedsiębiorstwa mogłyby zwiększyć swoje zyski, stosując kooperacje. Ponadplanowe zyski uzyskane w wyniku kooperacji musiałyby odpowiednio podzielić między siebie. Te zagadnienia były omawiane w rozdziale 7.

10. WYKORZYSTANIE TEORII ZBIORÓW ROZMYTYCH DO PODEJMOWANIA DECYZJI

10.1. Zastosowanie teorii zbiorów rozmytych w różnych dziedzinach

Informacje dotyczące otaczającego nas świata są często nieprecyzyjne, niepełne lub niepewne. Mają one najczęściej formę opisową (jakościową), nie poddają się kwantyfikacji. Powstała niedawno teoria zbiorów rozmytych stwarza możliwość opisu formalnego tej informacji nieprecyzyjnej [10], [22], [28], [44], [56], [104]. Te matematyczne metody teorii zbiorów rozmytych pozwalają pełniej i w sposób bardziej naturalny opisać zjawiska świata rzeczywistego. Warunki niepewności w podejmowaniu decyzji objawiają się tutaj poprzez niejednoznaczność i nieprecyzyjność opisu sytuacji, w jakiej ma być podjęta decyzja. Innymi słowy, opis otaczającego nas świata jest niedokładny, a my musimy podejmować pewne decyzje.

Teoria zbiorów rozmytych jak na razie nie jest jednoznaczną strukturą matematyczną. "Jest to raczej rodzina teorii o różnym stopniu ogólności i różnych specyficznych możliwościach zastosowań" [10]. My będziemy wzorowali się na klasycznej teorii zbiorów rozmytych opracowanej przez L.A.Zadeha [104]. Po raz pierwszy w 1965 roku Zadeh w swojej pracy [104] określił pojęcie rozmytości (fuzziness) oraz sformułował podstawowe pojęcia dotyczące zbiorów rozmytych (fuzzy sets). Na tych pojęciach opierają się reguły tzw. logiki rozmytej. W 1970 roku wspólnie z Bellmanem opublikował pracę [6] o podejmowaniu decyzji w warunkach rozmytych. W następnych latach teoria zbiorów rozmytych szybko się rozbudowała i zrobiła błyskawiczną karierę. W 1973 roku Zadeh w swojej pracy [106] podaje podstawowe pojęcia i reguły logiki rozmytej. Warto w tym miejscu wspomnieć, że na wiele lat przed wprowadzeniem pojęcia zbioru rozmytego polski matematyk Jan Łukasiewicz stworzył podstawy logiki wielowartościowej [68], [69]. W związku z rozwojem nowej teorii prace Łukasiewicza budzą ponowne zainteresowanie [32], [64], [75], [90], [103]. Teoria zbiorów rozmytych wzoruje się na klasycznej teorii zbiorów z uwzględnieniem tzw. funkcji przynależności elementu do zbioru. W związku z tym wprowadza się specjalny zapis zbiorów rozmytych oraz określa się działania na tych zbiorach. Wprowadza się też pojęcie liczb rozmytych oraz odpowiednie operatory arytmetyczne. Podejmowanie decyzji w rozmytych warunkach otoczenia polega na odpowiednim wnioskowaniu z przesłanek o charakterze rozmytym. Prezentowana teoria znalazła już szereg zastosowań w różnych dziedzinach. Na przykład, prace [39], [40], [99] dotyczą topologii indukowanej w zbiorach rozmytych; prace [26], [31], [48] omawiają miarę w zbiorach rozmytych; a praca [49] rozważa struktury algebraiczne w tych zbiorach. Z zakresu sterowania ukazały się prace [14], [15], [16], [18], [19], [20], [33], [78], [79]. Zastosowania w mechanice przedstawione są w pracach [13], [88], a w budowie modeli sieciowych w pracach [11], [12]. Zagadnienie stabilności z wykorzystaniem zbiorów rozmytych przedstawione jest w publikacji [77]. Rozważa się też pojęcie entropii z wykorzystaniem tych zbiorów [23], [24], [25]. Teoria ta ma również zastosowanie w takich dziedzinach jak organizacja [41], [42]; wnioskowanie [17], [21], [76]; podejmowanie decyzji [18], [21], [22], [43], [101]; diagnozowanie medyczne [86], [87], [105].

10.2. Zbiory rozmyte

W klasycznej teorii zbiorów każdy zbiór posiada jednoznacznie określone granice oddzielające elementy należące do niego od nienależących. Jeżeli mamy zbiór A i element x, to możemy stwierdzić, czy element x należy do zbioru A, czy też nie należy. Oznaczmy przez X przestrzeń wszystkich rozpatrywanych elementów x. W tej przestrzeni jest określona funkcja charakterystyczna zbioru A [10], [22], [28], [44]. Funkcja ta zdefiniowana jest następująco:

$$\bigvee_{x \in X} \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \in A, \\ 0 & \text{dla} \quad x \notin A. \end{cases} \tag{10.1}$$

Funkcja charakterystyczna χ_A odwzorowuje przestrzeń X w zbiór {0,1}. W wielu przypadkach, gdy operuje się pojęciami charakteryzowanymi w sposób nieprecyzyjny, występują trudności w określeniu przynależności elementu do danego zbioru. Funkcja charakterystyczna określona wzorem (10.1) jest wtedy niewygodna i mocno ograniczająca zastosowanie jej do sytuacji niedokładnie określonych. Zadeh w swej pracy [104] wprowadził pojęcie zbioru rozmytego. Zbiór rozmyty posiada taką własność, że jego funkcja określająca przynależność elementu do zbioru odwzorowuje przestrzeń X w odcinek [0,1]. Jest to więc rozszerzenie przeciwdziedziny funkcji charakterystycznej określonej wzorem (10.1) na odcinek [0,1].

Definicja 10.1 [21]

Zbiorem rozmytym A określonym na przestrzeni X jest zbiór uporządkowanych par:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \quad \text{dla } x \ X\}, \tag{10.2}$$

gdzie: μ_A jest funkcją przynależności zbioru A.

Przykład 10.1

Niech X oznacza zbiór cyfr {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9},

A - cyfrę średnią,

B - cyfrę dużą.

Funkcje przynależności zbiorów rozmytych A i B mogą być następujące:

$\mu_A(0)=0$, $\mu_B(0)=0$,
$\mu_A(1)=0$, $\mu_B(1)=0$,
$\mu_A(2)=0.4$, $\mu_B(2)=0$,
$\mu_A(3)=0.7$, $\mu_B(3)=0$,
$\mu_A(4)=1$, $\mu_B(4)=0$,
$\mu_A(5)=1$, $\mu_B(5)=0.3$,
$\mu_A(6)=0.8$, $\mu_B(6)=0.6$,
$\mu_A(7)=0.5$, $\mu_B(7)=0.8$,
$\mu_A(8)=0$, $\mu_B(8)=1$,
$\mu_A(9)=0$; $\mu_B(9)=1$.

Przykład 10.2

Niech X = R będzie przestrzenią liczb rzeczywistych, a A zbiorem liczb dużo większych od 100. Funkcję przynależności zbioru A możemy określić następująco:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \le 100, \\ \dfrac{1}{1+100(x-100)^{-1}} & \text{dla} \quad x > 100. \end{cases}$$

Definicja 10.2

Nośnikiem zbioru A nazywamy zbiór U elementów przestrzeni X, dla których $\mu_A(x)>0$. Oznaczamy go przez supp A (ang. support):

$$\text{supp } A = \{x: \mu_A(x)>0\}. \tag{10.3}$$

Definicja 10.3

Wysokością zbioru A jest kres górny funkcji $\mu_A(x)$, tzn.:

$$\sup_{x \in X} \mu_A(x) \tag{10.4}$$

Definicja 10.4

Zbiór rozmyty nazywamy znormalizowanym, gdy jego wysokość jest równa 1.

W celu uproszczenia zapisu zbioru rozmytego L.A.Zadeh wprowadził specjalną notację do teorii zbiorów rozmytych [10], [104]. Zbiory rozmyte, których nośniki są nieprzeliczalne, zapisujemy w postaci:

$$A = \int_X \mu_A(x) / x. \tag{10.5}$$

Jeżeli nośnik jest przeliczalny, to zbiór rozmyty zapisujemy w postaci:

$$A = \sum_i \mu_A(x_i) / x_i. \tag{10.6}$$

Tak więc zbiory A i B przedstawione w przykładzie 10.1 można zapisać w postaci:

$$A = 0.4/2 + 0.7/3 + 1/4 + 1/5 + 0.8/6 + 0.5/7,$$

$$B = 0.3/5 + 0.6/6 + 0.8/7 + 1/8 + 1/9.$$

Należy zwrócić uwagę na to, że w takim zapisie biorą udział jedyne elementy należące do nośnika rozpatrywanego zbioru.

W teorii zbiorów rozmytych wprowadza się też pojęcia zawierania się i równości zbiorów.

Definicja 10.5

Zbiór rozmyty A zawiera się w zbiorze rozmytym B ($A \subset B$) wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{x \in X} \ \mu_A(x) \le \mu_B(x). \tag{10.7}$$

Definicja 10.6

Zbiór rozmyty A jest równy zbiorowi rozmytemu B ($A = B$) wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{x \in X} \ \mu_A(x) = \mu_B(x). \tag{10.8}$$

10.3. Operacje na zbiorach rozmytych

Definicja 10.7 (suma)

Sumą zbiorów rozmytych A i B nazywamy zbiór $A \cup B$ określony przez funkcję przynależności:

$$\forall_{x \in X} \ \mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x). \tag{10.9}$$

Definicja 10.8 (iloczyn, przecięcie)

Iloczynem zbiorów rozmytych A i B nazywamy zbiór $A \cap B$ określony przez funkcję przynależności:

$$\forall_{x \in X} \ \mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x). \tag{10.10}$$

***Definicja 10.9** (dopełnienie, uzupełnienie)*

Uzupełnieniem zbioru rozmytego A nazywamy zbiór A' określony przez funkcję przynależności:

$$\forall_{x\in X} \mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x). \tag{10.11}$$

***Definicja 10.10** (suma ograniczona)*

Sumą ograniczoną zbiorów rozmytych A i B nazywamy zbiór A⊕B określony przez funkcję przynależności:

$$\forall_{x\in X} \mu_{A\oplus B}(x) = \min(\mu_A(x) + \mu_B(x), 1). \tag{10.12}$$

***Definicja 10.11** (różnica ograniczona)*

Różnicą ograniczoną zbiorów rozmytych A i B nazywamy zbiór A⊖B określony przez funkcję przynależności:

$$\forall_{x\in X} \mu_{A\ominus B}(x) = \max(\mu_A(x) - \mu_B(x), 0). \tag{10.13}$$

***Definicja 10.12** (iloczyn ograniczony)*

Iloczynem ograniczonym zbiorów rozmytych A i B nazywamy zbiór A⊙B określony przez funkcję przynależności:

$$\forall_{x\in X} \mu_{A\odot B}(x) = \max(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1). \tag{10.14}$$

***Definicja 10.13** (suma algebraiczna)*

Sumą algebraiczną zbiorów rozmytych A i B nazywamy zbiór A+B określony przez funkcję przynależności:

$$\forall_{x\in X} \mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x). \tag{10.15}$$

***Definicja 10.14** (iloczyn algebraiczny)*

Iloczynem algebraicznym zbiorów rozmytych A i B nazywamy zbiór AB określony przez funkcję przynależności:

$$\forall_{x\in X} \mu_{AB}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x). \tag{10.16}$$

***Definicja 10.15** (suma drastyczna)*

Sumą drastyczną zbiorów rozmytych A i B nazywamy zbiór A∨B określony przez funkcję przynależności:

$$\forall_{x\in X} \mu_{A\vee B}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \mu_A(x) > 0 \text{ i } \mu_B(x) > 0, \\ \mu_A(x) & \text{dla } \mu_B(x) = 0, \\ \mu_B(x) & \text{dla } \mu_A(x) = 0. \end{cases} \tag{10.17}$$

***Definicja 10.16** (iloczyn drastyczny)*

Iloczynem drastycznym zbiorów rozmytych A i B nazywamy zbiór A∧B określony przez funkcję przynależności:

$$\forall_{x\in X} \mu_{A\wedge B}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \mu_A(x) < 1 \text{ i } \mu_B(x) < 1, \\ \mu_A(x) & \text{dla } \mu_B(x) = 1, \\ \mu_B(x) & \text{dla } \mu_A(x) = 1. \end{cases} \tag{10.18}$$

W przypadku gdy liczba rzeczywista dodatnia α przemnożona przez wysokość zbioru A nie jest większa od 1, możemy zdefiniować mnożenie zbioru przez liczbę.

***Definicja 10.17** (mnożenie przez liczbę rzeczywistą)*

Iloczynem zbioru rozmytego A przez liczbę rzeczywistą $\alpha\in[0, 1]$ nazywamy zbiór αA określony przez funkcję przynależności:

$$\forall_{x\in X} \mu_{\alpha A}(x) = \alpha\mu_A(x). \tag{10.19}$$

Dla liczby rzeczywistej $\alpha>0$ możemy określić potęgę zbioru rozmytego w myśl następującej definicji.

***Definicja 10.18** (potęgowanie algebraiczne zbioru rozmytego)*

Potęgą α zbioru rozmytego A nazywamy zbiór A^α określony przez funkcję przynależności:

$$\forall_{x\in X} \mu_{A^\alpha}(x) = [\mu_A(x)]^\alpha. \tag{10.20}$$

***Definicja 10.19** (iloczyn kartezjański)*

Iloczynem kartezjańskim zbioru rozmytego A z przestrzeni X i zbioru rozmytego B z przestrzeni Y nazywamy zbiór A×B określony przez funkcję przynależności:

$$\forall_{x\in X}\forall_{y\in Y} \mu_{A\times B}(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y)). \tag{10.21}$$

***Definicja 10.20** (obcięcie zbioru rozmytego)*

α - obcięciem zbioru rozmytego A nazywamy zbiór A_α określony następująco:

$$A_\alpha = \{x\in X : \mu_A(x)\geq\alpha\}, \qquad \alpha\in[0, 1]. \tag{10.22}$$

Jako szczególne przypadki potęgowania, które często występują w zastosowaniach, rozpatruje się operacje koncentracji i rozpraszania.

***Definicja 10.21** (koncentracja)*

Koncentracją zbioru rozmytego A nazywamy zbiór CON(A) określony następująco:

$$\mathrm{CON}(A) = A^2. \tag{10.23}$$

Funkcja przynależności tego zbioru wyraża się wzorem:

$$\mu_{\mathrm{CON}(A)}(x) = \mu_A^2(x). \tag{10.24}$$

Definicja 10.22 (rozpraszanie)

Rozproszeniem zbioru rozmytego A nazywamy zbiór DIL(A) określony następująco:

$$DIL(A) = A^{1/2}. \tag{10.25}$$

Funkcja przynależności tego zbioru wyraża się wzorem:

$$\mu_{DIL(A)}(x) = \mu_A^{1/2}(x). \tag{10.26}$$

Definicja 10.23 (intensyfikacja kontrastu)

Zbiorem rozmytym o zintensyfikowanym kontraście nazywamy zbiór INT(A) określony następująco:

$$INT(A) = \begin{cases} CON(A) & \text{dla} \quad \mu_A(x) < 0.5, \\ DIL(A) & \text{dla} \quad \mu_A(x) \geq 0.5. \end{cases} \tag{10.27}$$

Funkcja przynależności tego zbioru wyraża się wzorem:

$$\mu_{INT(A)}(x) = \begin{cases} \mu_A^2(x) & \text{dla} \quad \mu_A(x) < 0.5, \\ \mu_A^{1/2}(x) & \text{dla} \quad \mu_A(x) \geq 0.5. \end{cases} \tag{10.28}$$

Definicja 10.24 (zmniejszenie kontrastu)

Zbiorem rozmytym o zmniejszonym kontraście nazywamy zbiór BLR(A) określony następująco:

$$BLR(A) = \begin{cases} DIL(A) & \text{dla} \quad \mu_A(x) < 0.5, \\ CON(A) & \text{dla} \quad \mu_A(x) \geq 0.5. \end{cases} \tag{10.29}$$

Funkcja przynależności tego zbioru wyraża się wzorem:

$$\mu_{BRL(A)}(x) = \begin{cases} \mu_A^{1/2}(x) & \text{dla} \quad \mu_A(x) < 0.5, \\ \mu_A^2(x) & \text{dla} \quad \mu_A(x) \geq 0.5. \end{cases} \tag{10.30}$$

Podamy teraz przykład zastosowania operatorów rozmytych dla zbiorów przeliczalnych.

Przykład 10.3

Zilustrujemy teraz wprowadzone operacje na przykładzie dwóch zbiorów A - cyfra średnia oraz zbioru B - cyfra duża. Zbiory te były określone w przykładzie 10.1 w rozdziale 10.2.

$A \cup B$ = 0.4/2 + 0.7/3 + 1/4 + 1/5 + 0.8/6 + 0.8/7 + 1/8 + 1/9,

$A \cap B$ = 0.3/5 + 0.6/6 + 0.5/7,

A' = 1/0 + 1/1 + 0.6/2 + 0.3/3 + 0.2/6 + 0.5/7 + 1/8 + 1/9,

B' = 1/(0+1+2+3+4) + 0.7/5 + 0.4/6 + 0.2/7,

$A \oplus B$ = 0.4/2 + 0.7/3 + 1/(4+5+6+7+8+9),

$A \ominus B$ = 0.4/2 + 0.7/3 + 1/4 + 0.7/5 + 0.2/6,

$A \odot B$ = 0.3/5 + 0.4/6 + 0.3/7,

$A \dot{+} B$ = 0.4/2 + 0.7/3 + 1/(4+5) + 0.92/6 + 0.9/7 + 1/(8+9),

AB = 0.3/5 + 0.48/6 + 0.4/7,

$A \dot{\vee} B$ = 0.4/2 + 0.7/3 + 1/(4+5+6+7+8+9),

$A \dot{\wedge} B$ = 0.3/5,

$0.2A$ = 0.08/2 + 0.14/3 + 0.2/4 + 0.2/5 + 0.16/6 + 0.1/7,

$0.5B$ = 0.15/5 + 0.3/6 + 0.4/7 + 0.5/8 + 0.5/9,

A^3 = 0.064/2 + 0.343/3 + 1/(4+5) + 0.512/6 + 0.125/7,

B^3 = 0.027/5 + 0.216/6 + 0.512/7 + 1/(8+9),

$A \times B$ = 0.3/[(2,5)+(3,5)+(4,5)+(5,5)+(6,5)+(7,5)] + 0.4/[(2,6)+(2,7)+(2,8)+(2,9)] + 0.5/[(7,6)+(7,7)+(7,8)+(7,9)] + 0.6/[(3,6)+(4,6)+(5,6)+(6,6)] + 0.7/[(3,7)+(3,8)+(3,9)] + 0.8/[(6,7)+(6,8)+(6,9)+(4,7)+(5,7)] + 1/[(4,8)+(4,9)+(5,8)+(5,9)],

$A_{0.6}$ = 0.7/3 + 1/4 + 1/5 + 0.8/6,

$B_{0.6}$ = 0.6/6 + 0.8/7 + 1/8 + 1/9,

CON(A) = 0.16/2 + 0.49/3 + 1/(4+5) + 0.64/6 + 0.25/7,

CON(B) = 0.09/5 + 0.36/6 + 0.64/7 + 1/(8+9),

$DIL(A) = \sqrt{0.4}/2 + \sqrt{0.7}/3 + 1/(5+6) + \sqrt{0.8}/6 + \sqrt{0.5}/7,$

$DIL(B) = \sqrt{0.3}/5 + \sqrt{0.6}/6 + \sqrt{0.8}/7 + 1/(8+9),$

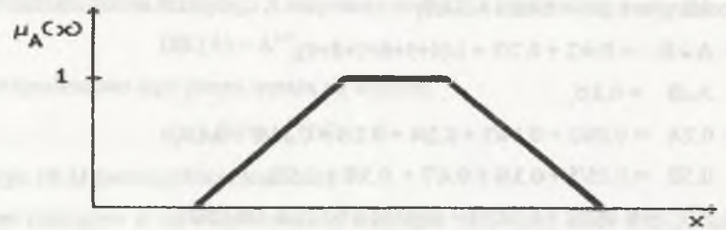
$INT(A) = 0.16/2 + \sqrt{0.7}/3 + 1/(5+6) + \sqrt{0.8}/6 + \sqrt{0.5}/7,$

$INT(B) = 0.09/5 + \sqrt{0.6}/6 + \sqrt{0.8}/8 + 1/(8+9),$

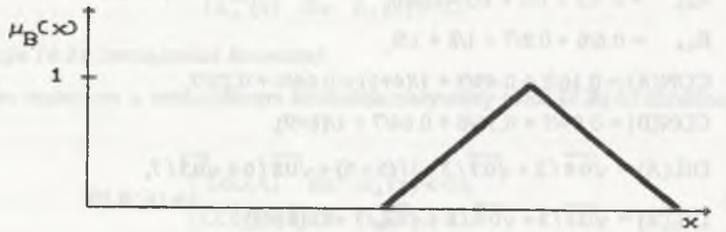
$BLR(A) = \sqrt{0.4}/2 + 0.49/3 + 1/(4+5) + 0.64/6 + 0.25/7,$

$BLR(B) = \sqrt{0.3}/5 + 0.36/6 + 0.64/7 + 1/(8+9).$

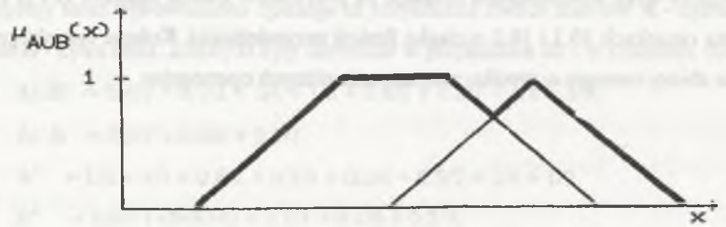
Zilustrujemy teraz wprowadzone operacje na przykładzie dwóch zbiorów A i B przedstawionych na rysunkach 10.1 i 10.2 o ciągłej funkcji przynależności. Kolejne rysunki prezentują otrzymane zbiory rozmyte w wyniku zastosowania różnych operatorów.



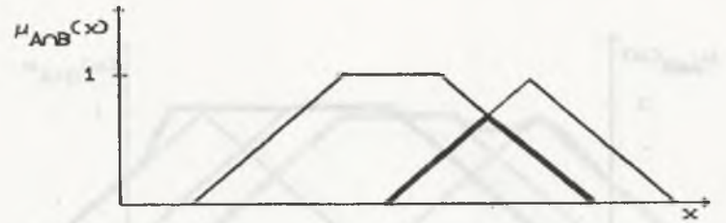
Rys. 10.1. Zbiór rozmyty A o funkcji przynależności $\mu_A(x)$
Fig. 10.1. Fuzzy set A of membership function $\mu_A(x)$



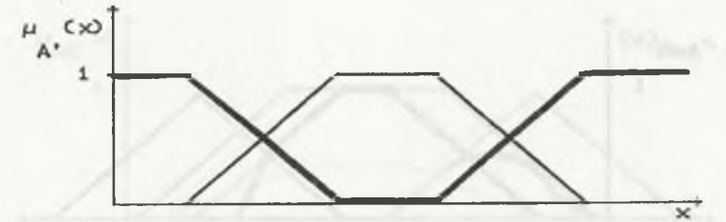
Rys. 10.2. Zbiór rozmyty B o funkcji przynależności $\mu_B(x)$
Fig. 10.2. Fuzzy set B of membership function $\mu_B(x)$



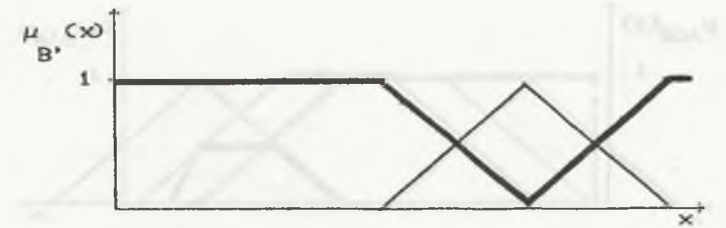
Rys. 10.3. Suma zbiorów rozmytych o funkcji przynależności $\mu_{A\cup B}(x)$
Fig. 10.3. Sum of fuzzy sets of membership function $\mu_{A\cup B}(x)$



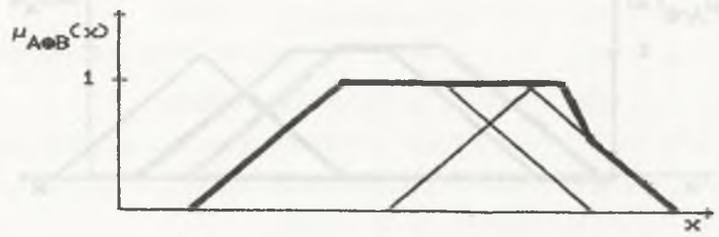
Rys. 10.4. Iloczyn zbiorów rozmytych o funkcji przynależności $\mu_{A\cap B}(x)$
Fig. 10.4. Product of fuzzy sets of membership function $\mu_{A\cap B}(x)$



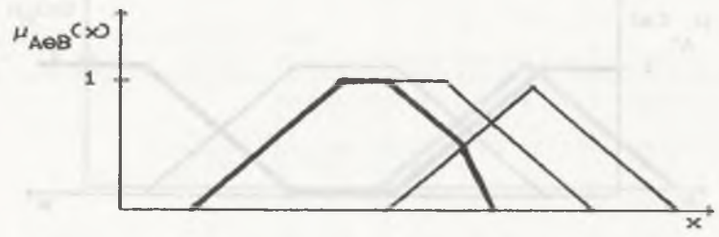
Rys. 10.5. Dopełnienie zbioru rozmytego o funkcji przynależności $\mu_{A'}(x)$
Fig. 10.5. Complement of fuzzy set of membership function $\mu_{A'}(x)$



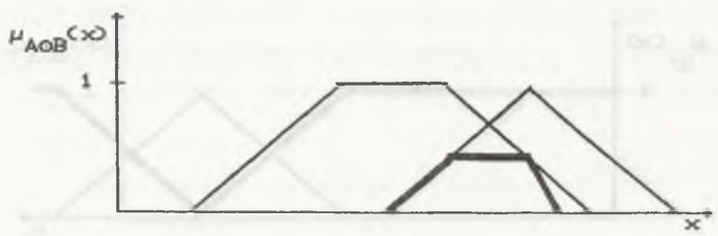
Rys. 10.6. Dopełnienie zbioru rozmytego o funkcji przynależności $\mu_{B'}(x)$
Fig. 10.6. Complement of fuzzy set of membership function $\mu_{B'}(x)$



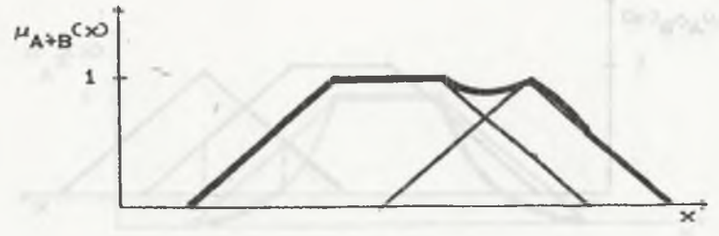
Rys. 10.7. Suma ograniczona zbiorów rozmytych o funkcji przynależności $\mu_{A\oplus B}(x)$
Fig. 10.7. Limited sum of fuzzy sets of membership function $\mu_{A\oplus B}(x)$



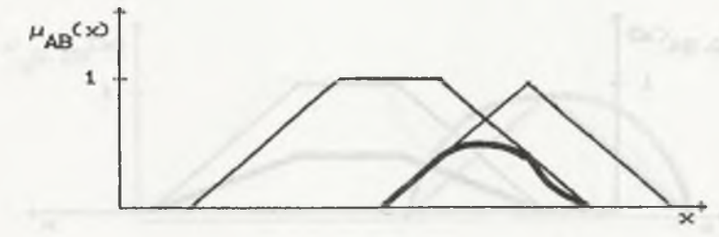
Rys. 10.8. Różnica ograniczona zbiorów rozmytych o funkcji przynależności $\mu_{A\ominus B}(x)$
Fig. 10.8. Limited difference of fuzzy sets of membership function $\mu_{A\ominus B}(x)$



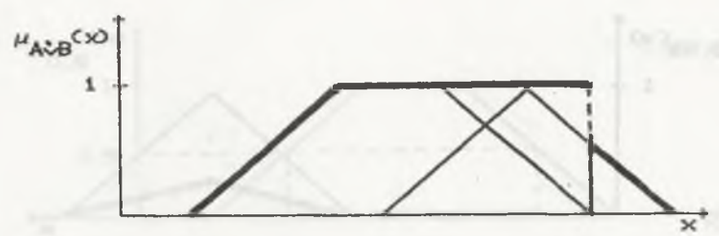
Rys. 10.9. Iloczyn ograniczony zbiorów rozmytych o funkcji przynależności $\mu_{A\odot B}(x)$
Fig. 10.9. Limited product of fuzzy sets of membership function $\mu_{A\odot B}(x)$



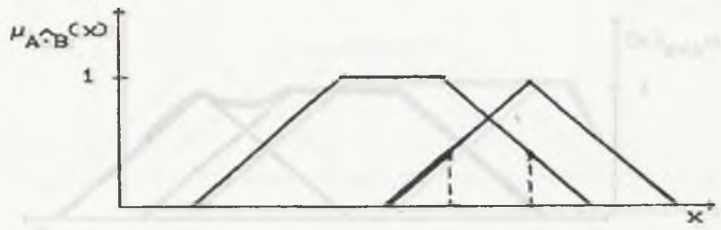
Rys. 10.10. Suma algebraiczna zbiorów rozmytych o funkcji przynależności $\mu_{A\dot{+}B}(x)$
Fig. 10.10. Algebraic sum of fuzzy sets of membership function $\mu_{A\dot{+}B}(x)$



Rys. 10.11. Iloczyn algebraiczny zbiorów rozmytych o funkcji przynależności $\mu_{AB}(x)$
Fig. 10.11. Algebraic product of fuzzy sets of membership function $\mu_{AB}(x)$



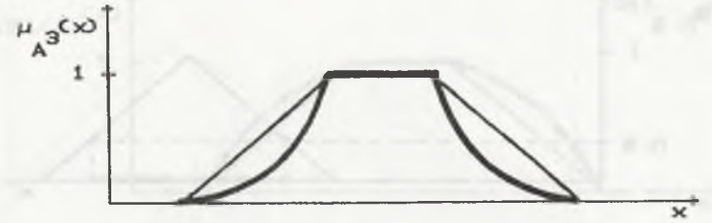
Rys. 10.12. Suma drastyczna zbiorów rozmytych o funkcji przynależności $\mu_{A\dot{\vee}B}(x)$
Fig. 10.12. Algebraic sum of fuzzy sets of membership function $\mu_{A\dot{\vee}B}(x)$



Rys. 10.13. Iloczyn drastyczny zbiorów rozmytych o funkcji przynależności $\mu_{A \hat{} B}(x)$
Fig. 10.13. Drastic product of fuzzy sets of membership function $\mu_{A \hat{} B}(x)$

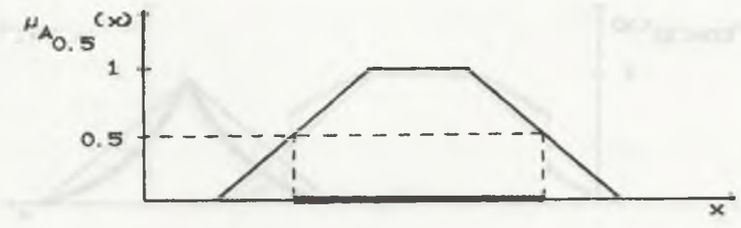
Rys. 10.14. Mnożenie zbioru rozmytego A przez liczbę $\alpha = 0.5$
Fig. 10.14. Multiplication of fuzzy set A by number $\alpha = 0.5$

Rys. 10.15. Mnożenie zbioru rozmytego B przez liczbę $\alpha = 0.3$
Fig. 10.15. Multiplication of fuzzy set B by number $\alpha = 0.3$

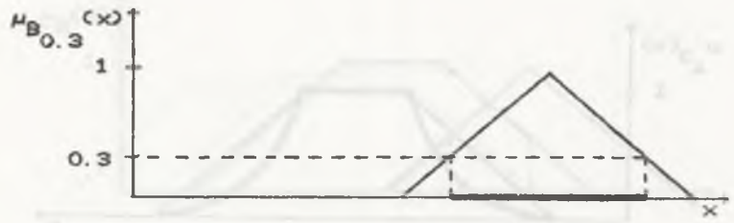


Rys. 10.16. Potęgowanie zbioru rozmytego A ($\alpha = 3$)
Fig. 10.16. Involution of fuzzy set A ($\alpha = 3$)

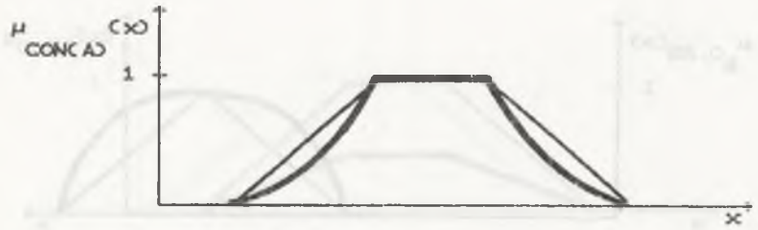
Rys. 10.17. Potęgowanie zbioru rozmytego B ($\alpha = 0.25$)
Fig. 10.17. Involution of fuzzy set B ($\alpha = 0.25$)



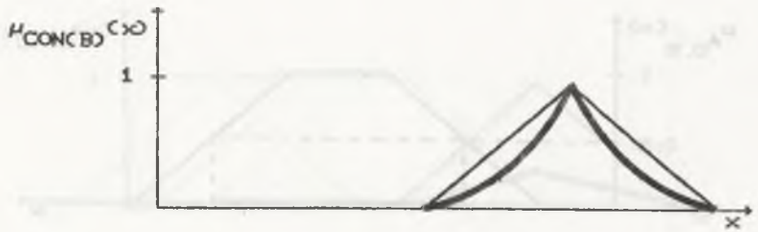
Rys. 10.18. Obcięcie zbioru rozmytego A dla $\alpha = 0.5$
Fig. 10.18. Cut of fuzzy set A for $\alpha = 0.5$



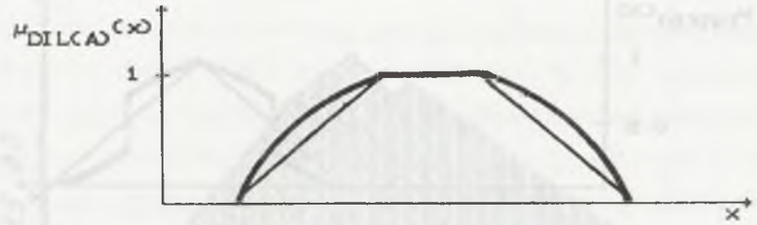
Rys. 10.19. Obcięcie zbioru rozmytego B dla $\alpha = 0.3$
Fig. 10.19. Cut of fuzzy set B for $\alpha = 0.3$



Rys. 10.20. Koncentracja zbioru rozmytego A
Fig. 10.20. Concentration of fuzzy set A

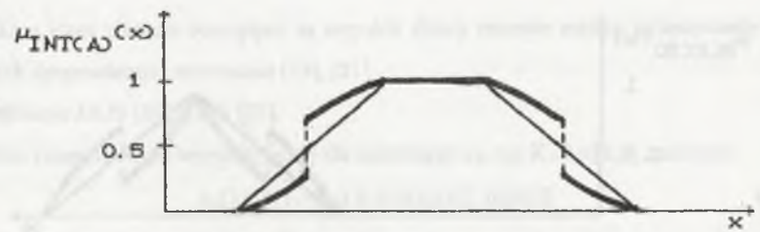


Rys. 10.21. Koncentracja zbioru rozmytego B
Fig. 10.21. Concentration of fuzzy set B



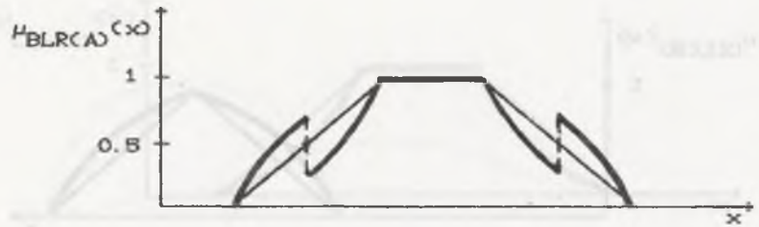
Rys. 10.22. Rozpraszanie zbioru rozmytego A
Fig. 10.22. Disperse of fuzzy set A

Rys. 10.23. Rozpraszanie zbioru rozmytego B
Fig. 10.23. Disperse of fuzzy set B



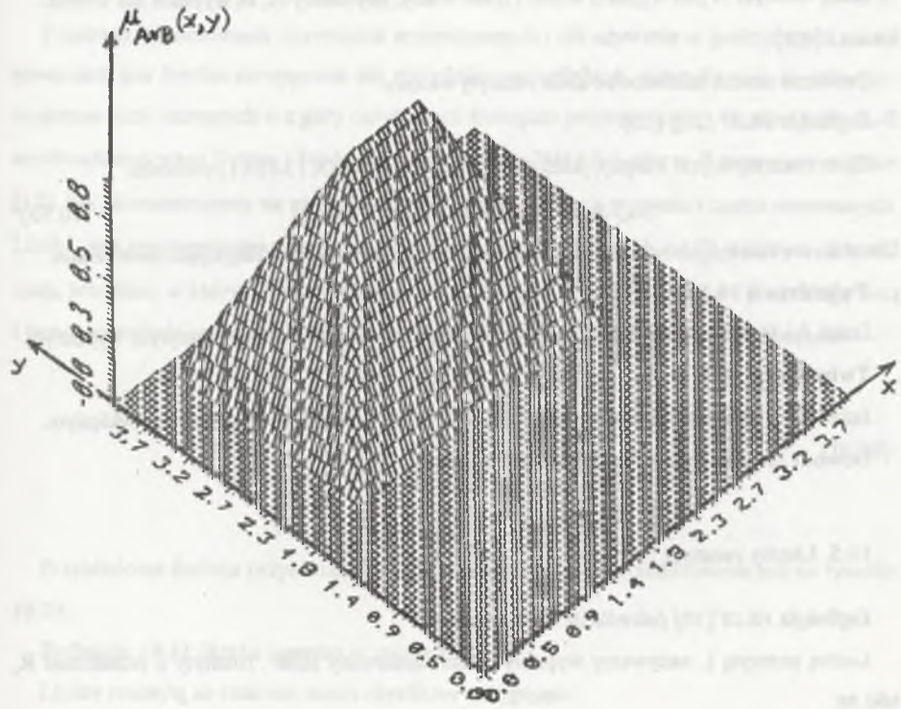
Rys. 10.24. Intensyfikacja kontrastu zbioru rozmytego A
Fig. 10.24. Intensification of contrast of fuzzy set A

Rys. 10.25. Intensyfikacja kontrastu zbioru rozmytego B
Fig. 10.25. Intensification of contrast of fuzzy set B



Rys. 10.26. Zmniejszenie kontrastu zbioru rozmytego A
Fig. 10.26. Decrease of contrast of fuzzy set A

Rys. 10.27. Zmniejszenie kontrastu zbioru rozmytego B
Fig. 10.27. Decrease of contrast of fuzzy set B



Rys. 10.28. Iloczyn kartezjański zbiorów rozmytych A i B
Fig. 10.28. Cartesian product of fuzzy sets A and B

10.4. Wypukłe zbiory rozmyte

Ważną klasą zbiorów rozmytych są wypukłe zbiory rozmyte mające zastosowanie w problemach optymalizacji i sterowania [19], [21].

Definicja 10.25 [10], [21], [22]

Zbiór rozmyty A jest wypukły, jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ i $\lambda \in [0,1]$ zachodzi:

$$\mu_A[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2] \geq \min[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)]. \tag{10.31}$$

Wykorzystując pojęcie α-obcięcia zbioru rozmytego:

$$A_\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\} \tag{10.32}$$

można też zdefiniować rozmyty zbiór wypukły w następujący sposób:

Definicja 10.26 [10], [21], [22]

Zbiór rozmyty A jest wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy zbiory A_α są wypukłe dla wszystkich $\alpha \in [0,1]$.

Podobnie można zdefiniować zbiór rozmyty wklęsły.

Definicja 10.27 [21], [22]

Zbiór rozmyty A jest wklęsły, jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ i $\lambda \in [0,1]$ zachodzi

$$\mu_A[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2] \le \max[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)]. \qquad (10.33)$$

Dla zbiorów rozmytych wypukłych i wklęsłych można udowodnić następujące twierdzenia

Twierdzenie 10.1

Jeżeli A i B są zbiorami rozmytymi wypukłymi, to $A \cap B$ jest zbiorem rozmytym wypukłym.

Twierdzenie 10.2

Jeżeli A i B są zbiorami rozmytymi wklęsłymi, to $A \cup B$ jest zbiorem rozmytym wklęsłym.

Dowody tych twierdzeń można znaleźć w pracach [21], [22].

10.5. Liczby rozmyte

Definicja 10.28 [10] *(określenie liczby rozmytej)*

Liczbą rozmytą L nazywamy wypukły i znormalizowany zbiór rozmyty z przestrzeni R, taki że:

a) istnieje dokładnie jedno $x_0 \in R$, dla którego $\mu_L(x_0)=1$; x_0 jest nazywane średnią wartością L,

b) funkcja $\mu_L(x)$ jest półciągła z góry.

Przykładem liczby rozmytej jest:

$$\text{L = około 10, gdzie } \mu_L(x) = \frac{1}{1+(x-10)^2}. \qquad (10.34)$$

Definicja 10.29 (liczba dodatnia)

Liczba rozmyta L jest dodatnia, jeśli:

$$\mu_L(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x \le 0. \qquad (10.35)$$

Innymi słowy, liczba rozmyta dodatnia to taka, dla której nośnik ma własność:

$$\forall\, x \in \text{supp L} \quad \text{jest } x>0. \qquad (10.36)$$

Definicja 10.30 (liczba ujemna)

Liczba rozmyta L jest ujemna, jeśli:

$$\mu_L(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x \ge 0. \qquad (10.37)$$

Innymi słowy, liczba rozmyta ujemna to taka, dla której nośnik ma własność:

$$\forall\, x \in \text{supp L} \quad \text{jest } x<0. \qquad (10.38)$$

Ponieważ zdefiniowanie operatorów arytmetycznych i ich używanie w praktycznych zastosowaniach jest bardzo niewygodne dla tak zdefiniowanych liczb, zdecydowano się na wprowadzenie liczb rozmytych o z góry określonych funkcjach przynależności. Są nimi liczby L-R wprowadzone przez Dubois i Prade cytowane w pracy [44] lub liczby $\alpha-\beta$ omawiane w pracy [10]. My skoncentrujemy się na liczbach $\alpha-\beta$, jako wygodnych w użyciu i często stosowanych. Liczba jest reprezentowana przez czwórkę liczb rzeczywistych (a, b, α, β). Liczby a i b oznaczają przedział, w którym funkcja przynależności osiąga wartość 1. Liczby α i β określają lewą i prawą szerokość rozkładu. Funkcja przynależności $\mu_L(x)$ jest zdefiniowana następująco:

$$\mu_L(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < a-\alpha, \\ (1/\alpha)(x-a+\alpha) & \text{dla} \quad x \in [a-\alpha, a), \\ 1 & \text{dla} \quad x \in [a,b], \\ (1/\beta)(b+\beta-x) & \text{dla} \quad x \in (b, b+\beta], \\ 0 & \text{dla} \quad x > b+\beta. \end{cases} \qquad (10.39)$$

Przykładowa funkcja przynależności $\mu_L(x)$ liczby rozmytej L przedstawiona jest na rysunku 10.29.

Definicja 10.31 (liczba rozmyta ze znakiem minus)

Liczbę rozmytą ze znakiem minus określamy następująco:

$$-L = (-b, -a, \beta, \alpha). \qquad (10.40)$$

Definicja 10.32 (odwrotność liczby rozmytej)

Liczbę odwrotną określamy w następujący sposób:

$$1/L = (1/b,\ 1/a,\ \beta/(b(b+\beta)),\ \alpha/(a(a-\alpha))) \qquad \text{(dla L>0 lub L<0)}. \qquad (10.41)$$

Definicja 10.33 (suma liczb rozmytych)

Niech $L_1 = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_2)$ i $L_2 = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$. Sumę liczb rozmytych określamy w następujący sposób:

$$L_1+L_2 = (a_1+a_2,\ b_1+b_2,\ \alpha_1+\alpha_2,\ \beta_1+\beta_2). \qquad (10.42)$$

Definicja 10.34 (różnica liczb rozmytych)

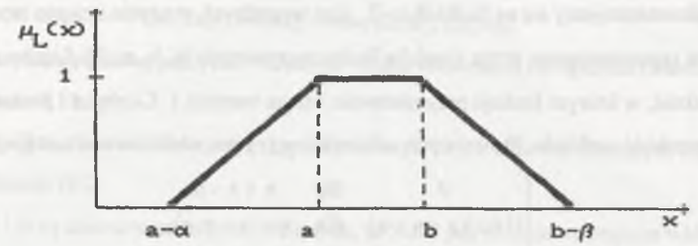
Różnicę liczb rozmytych określamy w następujący sposób:

$$L_1-L_2 = (a_1-b_2,\ b_1-a_2,\ \alpha_1+\beta_2,\ \alpha_2+\beta_1). \qquad (10.43)$$

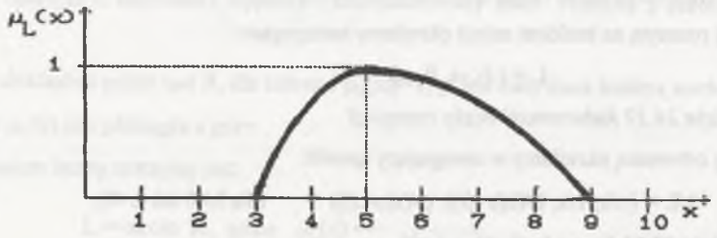
Definicja 10.35 (iloczyn liczb rozmytych)

Iloczyn liczb rozmytych określamy w następujący sposób:

$$L_1 \cdot L_2 = \begin{cases} (a_1a_2, b_1b_2, a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1 - \alpha_1\alpha_2, b_1\beta_2 + b_2\beta_1 + \beta_1\beta_2) & \text{dla } L_1 > 0, L_2 > 0, \\ (a_1b_2, b_1a_2, b_2\alpha_1 - a_1\beta_2 + \alpha_1\beta_2, -b_1\alpha_2 + a_2\beta_1 - \beta_1\alpha_2) & \text{dla } L_1 < 0, L_2 > 0, \\ (b_1a_2, a_1b_2, b_1\alpha_2 - a_2\beta_1 + \beta_1\alpha_2, -b_2\alpha_1 + a_2\beta_2 - \alpha_1\beta_2) & \text{dla } L_1 > 0, L_2 < 0, \\ (b_1b_2, a_1a_2, -b_1\beta_2 - b_2\beta_1 - \beta_1\beta_2, -a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2) & \text{dla } L_1 < 0, L_2 < 0. \end{cases} \tag{10.44}$$



Rys. 10.29. Wykres przykładowej funkcji przynależności liczby rozmytej α - β
Fig. 10.29. Graph of example of membership function of fuzzy number α - β



Rys. 10.30. Funkcja przynależności liczby rozmytej L-R (5,2,4)
Fig. 10.30. The membership function of fuzzy number L-R (5,2,4)

***Definicja 10.36** (iloraz liczb rozmytych)*

Iloraz liczb rozmytych określamy w następujący sposób:

$$L_1 / L_2 = \begin{cases} (a_1 / b_2, b_1 / a_2, (a_1\beta_2 + b_2\alpha_1) / (b_2(b_2 + \beta_2)), (b_1\alpha_2 + a_2\beta_1) / (a_2(a_2 - \alpha_2))) \\ \qquad \text{dla } L_1 > 0, L_2 > 0, \\ (a_1 / a_2, b_1 / b_2, (a_2\alpha_1 - a_2\alpha_2) / (a_2(a_2 - \alpha_2)), (b_2\beta_1 - b_1\beta_2) / (b_2(b_2 + \beta_2))) \\ \qquad \text{dla } L_1 < 0, L_2 > 0, \\ (b_1 / b_2, a_1 / a_2, (b_1\beta_2 - b_2\beta_1) / (b_2(b_2 + \beta_2)), (a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1) / (a_1(a_1 - \alpha_1))) \\ \qquad \text{dla } L_1 > 0, L_2 < 0, \\ (b_1 / a_2, a_1 / b_2, (-b_1\alpha_2 - a_2\beta_1) / (a_2(a_2 - \alpha_2)), (-a_1\beta_2 - b_2\alpha_1) / (b_2(b_2 + \beta_2))) \\ \qquad \text{dla } L_1 < 0, L_2 < 0. \end{cases} \tag{10.45}$$

***Definicja 10.37** (maksimum z liczb rozmytych)*

Liczbę większą z dwu liczb rozmytych określa się w następujący sposób:

$$\max(L_1, L_2) = (\max(a_1, a_2), \max(b_1, b_2), \alpha, \beta), \tag{10.46}$$

gdzie:

$$\alpha = \begin{cases} a_2 + \alpha_1 - \min(a_1, a_2) & \text{dla } a_1 - \alpha_1 > a_2 - \alpha_2, \\ a_1 + \alpha_2 - \min(a_1, a_2) & \text{dla } a_1 - \alpha_1 < a_2 - \alpha_2, \end{cases}$$

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_1 & \text{dla } a_1 \geq a_2, \\ \alpha_2 & \text{dla } a_1 < a_2, \end{cases} \quad \text{i} \quad a_1 - \alpha_1 = a_2 - \alpha_2,$$

$$\beta = \begin{cases} b_1 + \beta_1 - \max(b_1, b_2) & \text{dla } b_1 + \beta_1 > b_2 + \beta_2, \\ b_2 + \beta_2 - \max(b_1, b_2) & \text{dla } b_1 + \beta_1 < b_2 + \beta_2, \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} \beta_1 & \text{dla } b_1 \geq b_2, \\ \beta_2 & \text{dla } b_1 < b_2, \end{cases} \quad \text{i} \quad b_1 + \beta_1 = b_2 + \beta_2.$$

***Definicja 10.38** (minimum z liczb rozmytych)*

Liczbę mniejszą z dwu liczb rozmytych określa się w następujący sposób:

$$\min(L_1, L_2) = (\min(a_1, a_2), \min(b_1, b_2), \alpha, \beta), \tag{10.47}$$

gdzie:

$$\alpha = \begin{cases} a_1 + \alpha_2 - \max(a_1, a_2) & \text{dla } a_1 - \alpha_1 > a_2 - \alpha_2, \\ a_2 + \alpha_1 - \max(a_1, a_2) & \text{dla } a_1 - \alpha_1 < a_2 - \alpha_2, \end{cases}$$

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_2 & \text{dla } a_1 \geq a_2, \\ \alpha_1 & \text{dla } a_1 < a_2, \end{cases} \quad \text{i} \quad a_1 - \alpha_1 = a_2 - \alpha_2,$$

$$\beta = \begin{cases} b_2 + \beta_2 - \min(b_1, b_2) & \text{dla } b_1 + \beta_1 > b_2 + \beta_2, \\ b_1 + \beta_1 - \min(b_1, b_2) & \text{dla } b_1 + \beta_1 < b_2 + \beta_2, \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} \beta_2 & \text{dla} \quad b_1 \geq b_2, \\ \beta_1 & \text{dla} \quad b_1 < b_2, \end{cases} \quad \text{i} \quad b_1 + \beta_1 = b_2 + \beta_2.$$

10.6. Reprezentacja typu L-R liczb rozmytych

Dubois i Prade [29] zaproponowali standardową trójparametryczną reprezentację liczb rozmytych za pomocą tzw. funkcji odniesienia typu L i typu R. Funkcja odniesienia typu L określa lewostronną część liczby rozmytej, a funkcja odniesienia typu R określa prawostronną część liczby rozmytej.

Liczby takie nazywamy liczbami typu L-R.

Definicja 10.39 [44]

Funkcje odniesienia typu L i typu R liczby rozmytej definiuje się następująco:

1) $L(-x)=L(x)$, $R(-x)=R(x)$;
2) $L(0)=1$, $R(0)=1$;
3) L i R są funkcjami malejącymi w przedziale $[0, \infty)$.

Przykładami takich funkcji mogą być:

$$L(x), R(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \in [-1, +1], \\ 0 & \text{dla} \quad x \notin [-1, +1]. \end{cases} \tag{10.48}$$

$$L(x), R(x) = \max(0, (1-|x|^p)) \quad \text{dla } p>1; \tag{10.49}$$

$$L(x), R(x) = \exp(-|x|^p) \quad \text{dla } p>1; \tag{10.50}$$

$$L(x), R(x) = \frac{1}{1+|x|^p} \quad \text{dla } p>1. \tag{10.51}$$

Definicja 10.40 [44]

Liczbą rozmytą A jest liczba typu L-R wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m-x}{\alpha}\right), & \alpha > 0, \quad \forall\, x \leq m, \\ R\left(\dfrac{x-m}{\beta}\right), & \beta > 0, \quad \forall\, x \geq m. \end{cases} \tag{10.52}$$

Liczbę taką zapisujemy w uproszczonej postaci z trzema parametrami jako:

$$A = (m, \alpha, \beta), \tag{10.53}$$

gdzie: m - wartość średnia ($\mu_A(m) = 1$),

α - "rozrzut" lewostronny,

β - "rozrzut" prawostronny.

Na rysunku 10.30 pokazana jest funkcja przynależności liczby rozmytej A=(5,2,4). Funkcje L i R są określone wzorem (10.49) dla p=2.

Definicje 10.31 do 10.38 możemy wykorzystać do określania działań na liczbach rozmytych typu L-R. We wzorach (10.40) i (10.41) należy przyjąć a=b=m, natomiast we wzorach (10.42) - (10.47) $a_1=b_1=m_1$ oraz $a_2=b_2=m_2$. Funkcja przynależności liczby rozmytej typu α-β przybiera wtedy kształt trójkąta, zamiast trapezu. Liczbę taką możemy zapisać za pomocą trzech parametrów (tak jak i liczbę rozmytą typu L-R) - wzór (10.53). Tak więc do obliczeń na liczbach rozmytych typu L-R możemy wykorzystać wzory (10.40) - (10.47), uwzględniając wcześniej podane podstawienia a=b=m lub $a_1=b_1=m_1$ i $a_2=b_2=m_2$.

10.7. Relacje rozmyte (wielowartościowe)

W teorii mnogości jednym z podstawowych pojęć jest pojęcie relacji między dwoma niepustymi zbiorami X i Y, definiowanej jako podzbiór iloczynu kartezjańskiego X×Y. Podamy teraz definicję relacji wielowartościowej [10], [22], [28], [44].

Definicja 10.41

Relacją rozmytą między dwoma niepustymi zbiorami X i Y nazywamy podzbiór rozmyty R iloczynu kartezjańskiego X×Y, określony przez funkcję przynależności μ_R:

$$\mu_R : X \times Y \to [0, 1]. \tag{10.54}$$

Relacja rozmyta R jako podzbiór rozmyty iloczynu kartezjańskiego X×Y zapisywana jest też w postaci:

$$R \in F(X \times Y), \tag{10.55}$$

gdzie F jest zbiorem (klasą, rodziną) wszystkich relacji rozmytych.

Wartości funkcji przynależności $\mu_R(x, y)$ interpretujemy jako stopień powiązania między elementami $x \in X$ i $y \in Y$.

Jeżeli zbiory X i Y posiadają skończoną liczbę elementów, tj. $X=\{x_1,...,x_m\}$, $Y=\{y_1,...,y_n\}$, to funkcję przynależności relacji R możemy zapisać w postaci macierzowej:

$$\mu_R(x, y) = [\mu_R(x_i, y_j)] = \begin{bmatrix} \mu_R(x_1, y_1), & \cdots & ,\mu_R(x_1, y_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_R(x_m, y_1), & \cdots & ,\mu_R(x_m, y_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11}, & \cdots & ,r_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{m1}, & \cdots & ,r_{mn} \end{bmatrix}, \tag{10.56}$$

gdzie $r_{ij} \in [0, 1]$; $i=1,...,m$; $j=1,...,n$.

Przykład 10.4

Dane są zbiory cyfr X=Y={0,1,2,3,4,5}. Określamy relację: x jest "dużo większy niż" y. Relację tę możemy zapisać za pomocą tabeli:

X\Y	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
2	0.1	0	0	0	0	0
3	0.5	0.1	0	0	0	0
4	0.8	0.5	0.1	0	0	0
5	1	0.8	0.5	0.1	0	0

Najważniejszym działaniem na relacjach rozmytych jest składanie. Ogólna definicja złożenia relacji rozmytych jest następująca [28].

Definicja 10.42

Niech R∈F(X, Y) i S∈F(Y, Z) będą dwiema relacjami rozmytymi. Złożeniem relacji R i S nazywamy relację ROS∈F(X, Z) określoną wzorem:

$$(ROS)(x, z) = \sup_{y \in Y} (R(x, y) * S(y, z)) \quad \text{dla } x \in X,\ z \in Z, \tag{10.57}$$

gdzie * oznacza jedną z operacji min, max, $\cdot$, $\odot$, $\wedge$, $\dot{+}$, $\oplus$, $\dot{\vee}$ (z definicji 10.10 - 10.16). Złożenie określone wzorem (10.57) nazywamy sup-* złożeniem. W przypadku skończonego zbioru Y supremum (w obliczeniach) zastępowane jest przez maksimum. Podobnie określamy złożenie dualne relacji R i S.

Definicja 10.43

Niech R∈F(X, Y) i S∈F(Y, Z) będą dwiema relacjami rozmytymi. Złożeniem dualnym relacji R i S nazywamy relację RO'S∈F(X, Z) określoną wzorem:

$$(RO'S)(x, z) = \inf_{y \in Y} (R(x, y) * S(y, z)) \quad \text{dla } x \in X,\ z \in Z. \tag{10.58}$$

Złożenie określone wzorem (10.58) nazywamy inf-* złożeniem. W przypadku skończonego zbioru Y infimum (w obliczeniach) zastępowane jest przez minimum.

Podstawowym i najważniejszym rodzajem składania relacji rozmytych jest złożenie typu maksyminowego [10], [22], [28], [44]. Funkcja przynależności takiego złożenia jest następująca:

$$\mu_{ROS}(x, z) = \sup_{y \in Y} [\min (\mu_R(x, y), \mu_S(y, z))] \quad \text{dla } x \in X,\ z \in Z. \tag{10.59}$$

Dualne do tego złożenia jest złożenie typu minimaksowego określone równaniem:

$$\mu_{RO'S}(x, z) = \inf_{y \in Y} [\max (\mu_R(x, y), \mu_S(y, z))] \quad \text{dla } x \in X,\ z \in Z. \tag{10.60}$$

Wyróżnia się jeszcze następujące typy złożeń [20]: sup-$\cdot$, sup-$\odot$, sup-$\wedge$ oraz dualne do nich inf-$\dot{+}$, inf-$\oplus$, inf-$\dot{\vee}$.

W przypadku relacji zapisanych w postaci macierzy składanie odpowiada iloczynowi macierzy, w którym sumowanie zastąpione jest przez max (min), a mnożenie przez działanie *.

Przykład 10.5

Dane są dwie relacje rozmyte R i S zapisane w postaci macierzowej:

$$R = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.1 \\ 0.5 & 1 & 0.4 \\ 0.7 & 1 & 0.6 \\ 0.4 & 1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.9 & 0.7 & 0.1 \\ 0.8 & 1 & 1 & 0.3 \\ 0.6 & 1 & 0.9 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Podamy teraz postać różnego rodzaju złożenia tych relacji:

a) złożenie typu max-min oraz dualne typu min-max

$$ROS = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.3 \\ 0.8 & 1 & 1 & 0.3 \\ 0.8 & 1 & 1 & 0.3 \\ 0.8 & 1 & 1 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix} \qquad RO'S = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.9 & 0.7 & 0.2 \\ 0.5 & 0.9 & 0.7 & 0.4 \\ 0.6 & 0.9 & 0.7 & 0.6 \\ 0.5 & 0.9 & 0.7 & 0.3 \\ 0.5 & 0.9 & 0.7 & 0.1 \end{bmatrix}$$

b) złożenie typu max-$\cdot$ oraz dualne typu min-$\dot{+}$

$$ROS = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.5 & 0.15 \\ 0.8 & 1 & 1 & 0.3 \\ 0.8 & 1 & 1 & 0.3 \\ 0.8 & 1 & 1 & 0.3 \\ 0.32 & 0.4 & 0.4 & 0.12 \end{bmatrix} \qquad RO'S = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.92 & 0.76 & 0.28 \\ 0.75 & 0.95 & 0.85 & 0.52 \\ 0.84 & 0.97 & 0.91 & 0.68 \\ 0.7 & 0.94 & 0.82 & 0.44 \\ 0.55 & 0.91 & 0.73 & 0.19 \end{bmatrix}$$

c) złożenie typu max-$\odot$ oraz dualne typu min-$\oplus$

$$ROS = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.8 & 1 & 1 & 0.3 \\ 0.8 & 1 & 1 & 0.3 \\ 0.8 & 1 & 1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 \end{bmatrix} \qquad RO'S = \begin{bmatrix} 0.7 & 1 & 0.9 & 0.3 \\ 1 & 1 & 1 & 0.6 \\ 1 & 1 & 1 & 0.8 \\ 0.9 & 1 & 1 & 0.5 \\ 0.6 & 1 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$$

d) złożenie typu max-$\wedge$ oraz dualne typu min-$\vee$

$$ROS = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.8 & 1 & 1 & 0.3 \\ 0.8 & 1 & 1 & 0.3 \\ 0.8 & 1 & 1 & 0.3 \\ 0 & 0.4 & 0.4 & 0 \end{bmatrix} \qquad RO'S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.6 & 1 & 0.9 & 0.2 \end{bmatrix}$$

11. PODEJMOWANIE DECYZJI W OTOCZENIU ROZMYTYM

11.1. Określenie otoczenia rozmytego

Podstawowym pojęciem takiego podejścia do podejmowania decyzji, zaproponowanego przez Bellmana i Zadeha [6], jest pojęcie otoczenia rozmytego.

Definicja 11.1 [44]

Otoczeniem rozmytym problemu podejmowania decyzji nazywamy następującą czwórkę uporządkowaną:

$$(X, G, C, D), \tag{11.1}$$

gdzie X jest zbiorem możliwych decyzji, G - celem rozmytym, C - ograniczeniem rozmytym, D - decyzją rozmytą.

Elementy zbioru X mogą być dowolne, np. rodzaj materiału, wielkość inwestycji, rodzaj zakupu, strategie rozwoju ekonomicznego itp. - wszystko co podlega wyborowi.

Mamy tu do czynienia z sytuacją, gdzie na możliwe decyzje są nałożone pewne ograniczenia. A więc nie wszystkie decyzje są dopuszczalne. Szukać będziemy najlepszej decyzji spośród dopuszczalnych [56].

Podamy teraz definicję celu rozmytego i ograniczenia rozmytego. Następnie określimy decyzję rozmytą.

Definicja 11.2

Cel rozmyty określa się jako zbiór rozmyty $G \subset X$ o funkcji przynależności $\mu_G(x)$.

Przykładowo, niech $X=R$ będzie zbiorem liczb rzeczywistych. Celem rozmytym może być osiągnięcie liczby dużo większej od 100. Zbiór G można określić przy pomocą funkcji przynależności $\mu_G(x)$, np.:

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \le 100, \\ \dfrac{1}{1+100(x-100)^{-1}} & \text{dla} \quad x > 100. \end{cases} \tag{11.2}$$

Definicja 11.3

Ograniczenie rozmyte definiuje się jako zbiór rozmyty $C \subset X$ o funkcji przynależności $\mu_C(x)$.

I tak na przykład, gdy X=R jest zbiorem liczb rzeczywistych, to ograniczeniem może być warunek, że liczba powinna być około 200. Funkcja przynależności zbioru C może być przedstawiona wzorem:

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 100 \text{ lub } x > 250, \\ 0.02x - 3 & \text{dla } 150 \le x \le 200, \\ -0.02x + 5 & \text{dla } 200 \le x \le 250. \end{cases} \quad (11.3)$$

Jak widać, definicje celu rozmytego i ograniczenia rozmytego są właściwie identyczne. Występuje tu ścisła analogia między tymi pojęciami. W teorii zbiorów rozmytych traktuje się je jednakowo.

11.2. Decyzja rozmyta

Decyzja ma być taka, aby osiągnąć pożądany cel oraz spełnić ograniczenia. Decyzja rozmyta D jest więc pewną agregacją zbiorów rozmytych G i C. Ta agregacja zbiorów G i C może być dokonana na różne sposoby. Podstawową i powszechnie stosowaną decyzją rozmytą jest decyzja rozmyta typu minimum [43], [44]. Opiera się ona na zasadzie, aby osiągnąć cel G i jednoczenie spełnić ograniczenie C. Odpowiada to agregacji zbiorów G i C w sensie iloczynu (przecięcia) zbiorów rozmytych.

Definicja 11.4 [44]

Decyzję rozmytą typu minimum określa się jako:

$$D = G \cap C. \quad (11.4)$$

Funkcja przynależności decyzji rozmytej D jest następująca:

$$\mu_D(x) = \min(\mu_G(x), \mu_C(x)). \quad (11.5)$$

W literaturze tę definicję nazywa się "pesymistyczną", jako że bazuje na mniejszych wartościach funkcji $\mu_G(x)$ i $\mu_C(x)$ [21], [22], [44]. Dla celu G i ograniczenia C przedstawionych wzorami (11.2) i (11.3) decyzja D będzie jak na rysunku 11.1. Możliwe dopuszczalne decyzje są z przedziału (150, 250).

Można też tworzyć decyzje rozmyte wykonując inne działania na zbiorach G i C, np.:

a) decyzja rozmyta typu iloczyn algebraiczny

$$D = G \cdot C, \quad (11.6)$$

b) decyzja rozmyta typu kombinacja wypukła o funkcji przynależności

$$\mu_D(x) = r \cdot \mu_G(x) + (1-r) \cdot \mu_C(x), \quad r \in [0, 1], \quad (11.7)$$

c) decyzja rozmyta typu maksimum

$$D = G \cup C. \quad (11.8)$$

Ostatnia wymieniona decyzja nazywana jest "optymistyczną" [21], [22], [44].

11.3. Decyzja optymalna

Otrzymana decyzja rozmyta jako iloczyn celu i ograniczenia daje pewną wskazówkę, jaka decyzja nierozmyta jest najlepsza. Będziemy wybierać taką decyzję nierozmytą, której stopień przynależności w decyzji rozmytej jest największy.

Definicja 11.5

Decyzją optymalną nazywamy takie x_{opt}, że:

$$\mu_D(x_{opt}) = \sup_{x \in X} \mu_D(x). \quad (11.9)$$

Należy zwrócić uwagę, że decyzja x_{opt} nie zawsze musi być jednoznaczna, a nawet może nie istnieć w przypadku, gdy zbiory G i C są rozłączne.

Na rysunku 11.1 decyzją optymalną jest $x_{opt} \approx 222.47$.

Podamy teraz przykład związany z pracą i bezpieczeństwem górników.

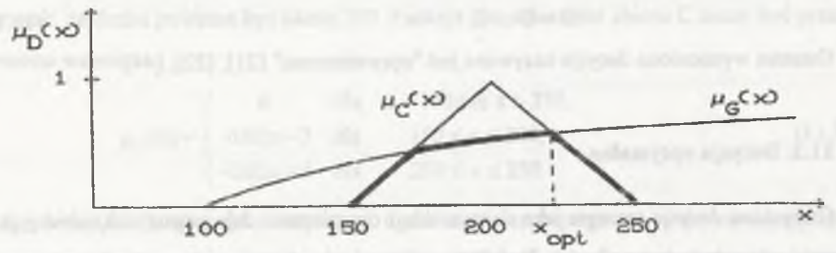
Przykład 11.1

W kopalni należy wywiercić otwór w górotworze w odległości około 500 metrów od wyznaczonego punktu. Ponieważ własności górotworu w tym rejonie nie są całkowicie znane, należy wziąć pod uwagę to, aby bezpieczeństwo górników było możliwie duże. Cel G "około 500 metrów" scharakteryzowano funkcją przynależności:

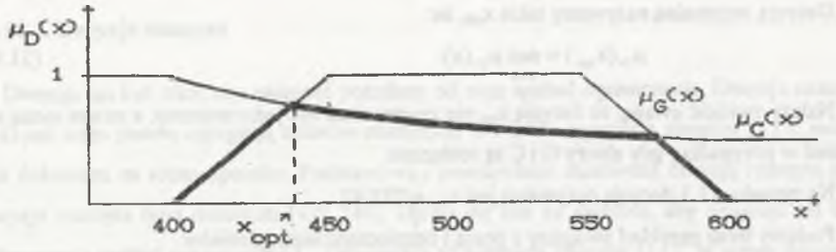
$$\mu_G(x) = \begin{cases} 0.02x - 8 & \text{dla } 400 < x < 450, \\ 1 & \text{dla } 450 \le x \le 550, \\ -0.02x + 12 & \text{dla } 550 < x < 600, \\ 0 & \text{dla } x \le 400 \text{ lub } x \ge 600. \end{cases} \quad (11.10)$$

Bezpieczeństwo pracy górników na interesującym nas kierunku od wyznaczonego punktu określono w sposób przybliżony za pomocą funkcji:

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \le x \le 400, \\ 1.25 \cdot 10^{-5}(x - 600)^2 + 0.5 & \text{dla } 400 < x < 600, \\ 0.5 & \text{dla } x \ge 600. \end{cases} \quad (11.11)$$



Rys. 11.1. Wyznaczanie decyzji rozmytej i optymalnej
Fig. 11.1. Calculating of fuzzy decision and optimal decision



Rys. 11.2. Decyzja rozmyta i optymalna dla wiercenia otworu w górotworze (przykład 11.1)
Fig. 11.2. Fuzzy decision and optimal decision for perforation in rock mass (example 11.1.)

Liczba 1 oznacza tu bezpieczeństwo równe 100%. Funkcje $\mu_G(x)$ i $\mu_C(x)$ pokazane są na rysunku 11.2. Możliwymi decyzjami do podjęcia są $x \in [400, 600]$. Decyzja optymalna x_{opt} maksymalizuje funkcję przynależności $\mu_D(x)$:

$$\mu_D(x_{opt}) = \sup_{x \in [400,\,600]} \mu_D(x) = \sup_{x \in [400,\,600]} \min[\mu_G(x), \mu_C(x)] \qquad (11.12)$$

Maksimum dla funkcji $\mu_D(x)$ jest osiągnięte dla $x_{opt} \approx 440.83$. Należy więc wywiercić otwór w odległości 440.83 metrów od wyznaczonego punktu.

11.4. Podejmowanie decyzji przy wielu celach i wielu ograniczeniach

Na zakończenie rozszerzymy nasze rozważania na bardziej ogólny przypadek z wieloma celami rozmytymi i wieloma ograniczeniami rozmytymi. Przyjmujemy, że mamy k celów rozmytych $G_1,...,G_k$ i l ograniczeń rozmytych $C_1,...,C_l$. Decyzję rozmytą będziemy określać jako iloczyn:

$$D = G_1 \cap ... \cap G_k \cap C_1 \cap ... \cap C_l. \qquad (11.13)$$

Funkcja przynależności $\mu_D(x)$ jest określona wzorem:

$$\mu_D(x) = \min[\mu_{G_1}(x),...,\mu_{G_k}(x), \mu_{C_1}(x),...,\mu_{C_l}(x)] \qquad (11.14)$$

Jako decyzję optymalną x_{opt} będziemy przyjmowali takie x, dla którego funkcja $\mu_D(x)$ przyjmuje największą wartość. Decyzja optymalna jest określona wzorem (11.9), tym samym co w przypadku jednego celu i jednego ograniczenia.

11.5. Podejmowanie decyzji z wykorzystaniem różnych definicji decyzji rozmytej

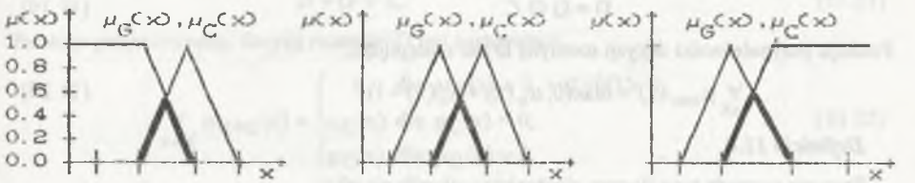
W pracy [28] udowodniono, że:

$$a \wedge b \le a \odot b \le a \cdot b \le a \wedge b \le a \vee b \le a \dot{+} b \le a \oplus b \le a \dot{\vee} b \quad \text{dla } a, b \in [0,1]. \qquad (11.15)$$

Ponieważ my operujemy funkcjami przynależności zbiorów rozmytych, a wartości tych funkcji zawierają się w przedziale [0, 1], więc możemy zapisać:

$$\mu_{A \triangle B}(x) \le \mu_{A \oplus B}(x) \le \mu_{A \cdot B}(x) \le \mu_{A \cap B}(x) \le \mu_{A \cup B} \le \mu_{A \dot{+} B}(x) \le \mu_{A \oplus B}(x) \le \mu_{A \dot{\vee} B}(x). \qquad (11.16)$$

Jak wcześniej powiedzieliśmy, decyzję rozmytą określa się przeważnie wzorami (11.4) i (11.5). W literaturze tę definicję nazywa się "pesymistyczną", jako że bazuje na mniejszych wartościach funkcji $\mu_G(x)$ i $\mu_C(x)$. Uznawane jest to za pewną wadę tej definicji, ponieważ dla dowolnego x, $\mu_D(x)$ jest zawsze równa mniejszej wartości z $\mu_G(x)$ i $\mu_C(x)$. Funkcje przynależności mogą być bardzo różne, a iloczyn ich może być taki sam. Pokazuje to rysunek 11.3.



Rys. 11.3. Iloczyn zbiorów rozmytych G i C
Fig. 11.3. Product of fuzzy sets G and C

Dlatego też próbuje się tworzyć inne definicje decyzji rozmytej rekompensujące tę wadę. Czasami w literaturze można też spotkać określenia definicji rozmytych za pomocą wzorów (11.6), (11.7), (11.8). Nie ma natomiast definicji opartych na wzorach (10.12), (10.14), (10.15), (10.17), (10.18) [58]. Wydaje się, że można by wprowadzić takie definicje, z uwagi na to że możemy spotkać się z sytuacjami, które wymagałyby określenia decyzji rozmytej na

podstawie tych wzorów. Na przykład, gdy mamy dwa zbiory rozmyte G i C i chcemy wyznaczyć decyzję rozmytą opartą na iloczynie (przecięciu) tych zbiorów, ale koniecznie zależy nam na tym, aby ten iloczyn był wyznaczony jedynie w przypadku, gdy $\mu_G(x)=1$ lub $\mu_C(x)=1$. Odpowiada to agregacji zbiorów G i C w sensie iloczynu drastycznego. Rozważmy też inną sytuację, gdy jesteśmy bardzo mało wymagający względem zbiorów G i C. Najbardziej satysfakcjonuje nas fakt, gdy $\mu_G(x)>0$ i $\mu_C(x)>0$. Wtedy uważamy, że decyzja rozmyta spełnia jednocześnie cel rozmyty i ograniczenie rozmyte i przyjmujemy, że $\mu_D(x)=1$. Gdy równocześnie $\mu_G(x)$ i $\mu_C(x)$ nie są większe od zera, to zadowalamy się tą, która jest różna od zera. Ta sytuacja odpowiada agregacji zbiorów G i C w sensie sumy drastycznej.

Wprowadzimy teraz osiem definicji decyzji rozmytych opartych na wzorach (10.9) do (10.18) w kolejności określonej przez wzory (11.15) i (11.16) [58].

Definicja 11.6

Decyzję rozmytą typu iloczyn drastyczny określa się jako:

$$D = G \mathbin{\hat{\wedge}} C. \tag{11.17}$$

Funkcja przynależności decyzji rozmytej D jest następująca:

$$\forall_{x\in X}\ \mu_{G\hat{\wedge}C}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad \mu_G(x) < 1 \quad \text{i} \quad \mu_C(x) < 1, \\ \mu_G(x) & \text{dla} \quad \mu_C(x) = 1, \\ \mu_C(x) & \text{dla} \quad \mu_G(x) = 1. \end{cases} \tag{11.18}$$

Definicja 11.7

Decyzję rozmytą typu iloczyn ograniczony określa się jako:

$$D = G \odot C. \tag{11.19}$$

Funkcja przynależności decyzji rozmytej D jest następująca:

$$\forall_{x\in X}\ \mu_{G\odot C}(x) = \max(0, \mu_G(x) + \mu_C(x) - 1). \tag{11.20}$$

Definicja 11.8

Decyzję rozmytą typu iloczyn algebraiczny określa się jako:

$$D = G \cdot C. \tag{11.21}$$

Funkcja przynależności decyzji rozmytej D jest następująca:

$$\forall_{x\in X}\ \mu_{G\cdot C}(x) = \mu_G(x) \cdot \mu_C(x). \tag{11.22}$$

Definicja 11.9

Decyzję rozmytą typu iloczyn mnogościowy (przecięcie) określa się jako:

$$D = G \cap C. \tag{11.23}$$

Funkcja przynależności decyzji rozmytej D jest następująca:

$$\forall_{x\in X}\ \mu_{G\cap C}(x) = \min(\mu_G(x), \mu_C(x)) = \mu_G(x) \wedge \mu_C(x). \tag{11.24}$$

Definicja 11.10

Decyzję rozmytą typu suma mnogościowa określa się jako:

$$D = G \cup C. \tag{11.25}$$

Funkcja przynależności decyzji rozmytej D jest następująca:

$$\forall_{x\in X}\ \mu_{G\cup C}(x) = \max(\mu_G(x), \mu_C(x)) = \mu_G(x) \vee \mu_C(x). \tag{11.26}$$

Definicja 11.11

Decyzję rozmytą typu suma algebraiczna określa się jako

$$D = G \dot{+} C. \tag{11.27}$$

Funkcja przynależności decyzji rozmytej D jest następująca:

$$\forall_{x\in X}\ \mu_{G\dot{+}C}(x) = \mu_G(x) + \mu_C(x) - \mu_G(x) \cdot \mu_C(x). \tag{11.28}$$

Definicja 11.12

Decyzję rozmytą typu suma ograniczona określa się jako:

$$D = G \oplus C. \tag{11.29}$$

Funkcja przynależności decyzji rozmytej D jest następująca:

$$\forall_{x\in X}\ \mu_{G\oplus C}(x) = \min(\mu_G(x) + \mu_C(x), 1). \tag{11.30}$$

Definicja 11.13

Decyzję rozmytą typu suma drastyczna określa się jako:

$$D = G \hat{\vee} C. \tag{11.31}$$

Funkcja przynależności decyzji rozmytej D jest następująca:

$$\forall_{x\in X}\ \mu_{G\hat{\vee}C}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad \mu_G(x) > 0 \quad \text{i} \quad \mu_C(x) > 0, \\ \mu_G(x) & \text{dla} \quad \mu_C(x) = 0, \\ \mu_C(x) & \text{dla} \quad \mu_G(x) = 0. \end{cases} \tag{11.32}$$

Decyzje typu iloczyn możemy ogólnie nazwać "pesymistycznymi". Stosujemy je wtedy, gdy zależy nam, aby w jakimś stopniu cel rozmyty G i ograniczenie rozmyte C były jednocześnie osiągnięte. Natomiast decyzje typu suma nazywamy "optymistycznymi" z tego względu, że zadowalamy się, gdy zostanie osiągnięty rozmyty cel G lub rozmyte ograniczenie C.

Podamy teraz przykład związany z pracą i bezpieczeństwem górników.

Przykład 11.2

W kopalni należy wywiercić otwór w górotworze w odległości około 800 metrów od wyznaczonego punktu. Ponieważ własności górotworu w tym rejonie nie są całkowicie znane,

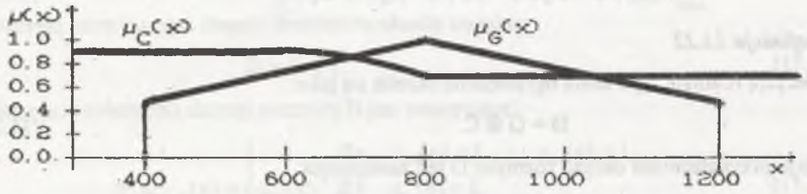
należy wziąć pod uwagę to, aby bezpieczeństwo górników było możliwie duże. Cel G "około 800 metrów" scharakteryzowano funkcją przynależności:

$$\mu_G(x) = \begin{cases} -0.00125|x-800|+1 & \text{dla} \quad 400 < x < 1200, \\ 0 & \text{dla} \quad x \le 400 \text{ lub } x \ge 1200. \end{cases} \tag{11.33}$$

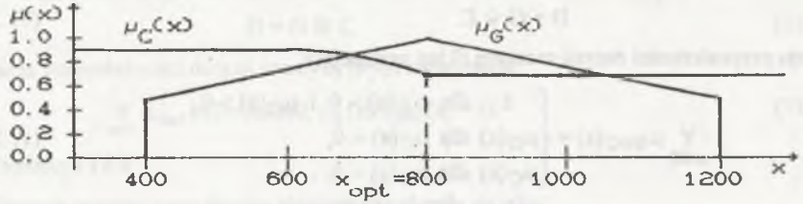
Bezpieczeństwo pracy górników na interesującym nas kierunku od wyznaczonego punktu określono w sposób przybliżony za pomocą funkcji:

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 0.9 & \text{dla} \quad 0 \le x \le 600, \\ 5 \cdot 10^{-6}(x-600)^2 + 0.9 & \text{dla} \quad 600 < x < 800, \\ 0.7 & \text{dla} \quad x \ge 800. \end{cases} \tag{11.34}$$

Funkcje $\mu_G(x)$ i $\mu_C(x)$ pokazane są na rysunku 11.4. Decyzje optymalne wyznaczone według różnych definicji przedstawione są na rysunkach 11.5, 11.6, 11.7, 11.8, 11.9, 11.10, 11.11.

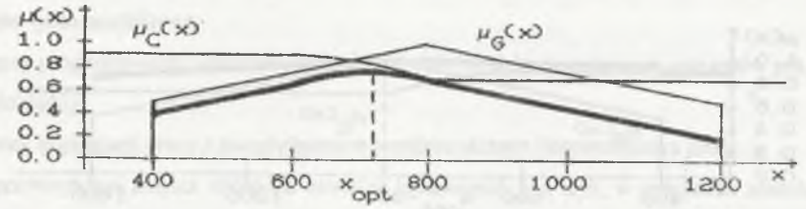


Rys. 11.4. Funkcja przynależności zbiorów G i C
Fig. 11.4. The membership function of se G and C

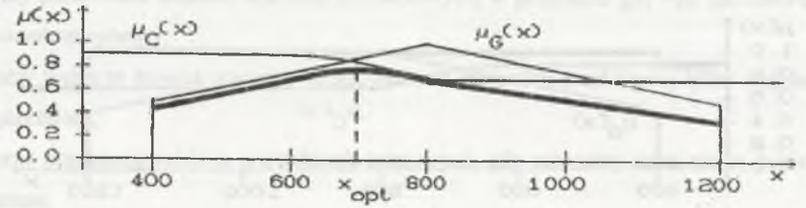


Rys. 11.5. Decyzja rozmyta i optymalna (D = G ◊ C)
Fig. 11.5. Fuzzy decision and optimal decision (D = G ◊ C)

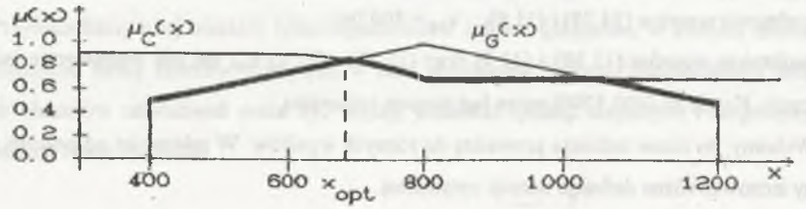
Na podstawie wzorów (11.18) i (11.9) x_{opt} = 800 [m],
na podstawie wzorów (11.20) i (11.9) x_{opt} = 725 [m],
na podstawie wzorów (11.22) i (11.9) x_{opt} = 716 [m],
na podstawie wzorów (11.24) i (11.9) x_{opt} = 689 [m],
na podstawie wzorów (11.26) i (11.9) x_{opt} = 800 [m],



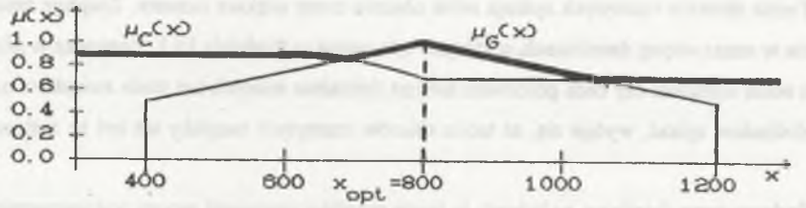
Rys. 11.6. Decyzja rozmyta i optymalna (D = G ⊙ C)
Fig. 11.6. Fuzzy decision and optimal decision (D = G ⊙ C)



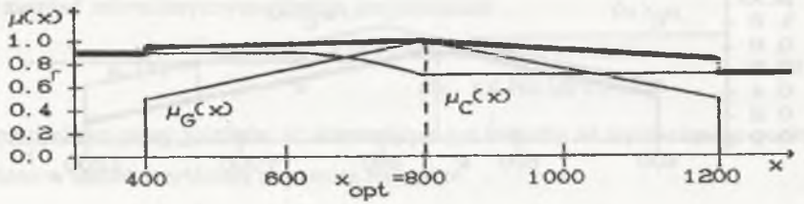
Rys. 11.7. Decyzja rozmyta i optymalna (D = G · C)
Fig. 11.7. Fuzzy decision and optimal decision (D = G · C)



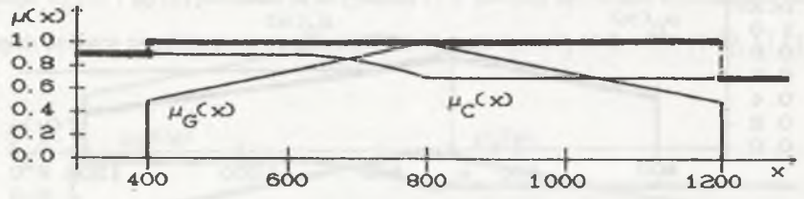
Rys. 11.8. Decyzja rozmyta i optymalna (D = G ∩ C)
Fig. 11.8. Fuzzy decision and optimal decision (D = G ∩ C)



Rys. 11.9. Decyzja rozmyta i optymalna (D = G ∪ C)
Fig. 11.9. Fuzzy decision and optimal decision (D = G ∪ C)



Rys. 11.10. Decyzja rozmyta i optymalna (D = G ∔ C)
Fig. 11.10. Fuzzy decision and optimal decision (D = G ∔ C)



Rys. 11.11. Decyzja rozmyta (D = G ⊕ C), (D = G ∨ C)
Fig. 11.11. Fuzzy decision (D = G ⊕ C), (D = G ∨ C)

na podstawie wzorów (11.28) i (11.9) $x_{opt} = 800$ [m],

na podstawie wzorów (11.30) i (11.9) oraz (11.32) i (11.9) x_{opt} nie jest wyznaczone jednoznacznie. Każde $x \in (400,1200)$ może być decyzją optymalną.

Widzimy, że różne definicje prowadzą do różnych wyników. W zależności od potrzeb możemy stosować różne definicje decyzji optymalnej.

11.6. Możliwość wykorzystania teorii zbiorów rozmytych w górnictwie

Teoria zbiorów rozmytych zyskuje sobie obecnie coraz większe uznanie. Znajduje zastosowanie w coraz więcej dziedzinach, o których była mowa w rozdziale 10.1. Ponieważ w górnictwie wiele wielkości czy cech górotworu nie jest dokładnie znanych lub wiele związków nie da się dokładnie opisać, wydaje się, że teoria zbiorów rozmytych mogłaby też być tu zastosowana.

Podamy teraz dziedziny, w których ta teoria mogłaby usprawnić proces podejmowania decyzji w górnictwie:

a) przy ustalaniu rejonów szczególnie niebezpiecznych w kopalni, gdy znajomość górotworu jest tylko przybliżona,

b) przy prognozowaniu wstrząsów i tąpań, gdy opis zjawiska powstawania wstrząsów jest niedokładny,

c) przy organizacji pracy z uwzględnieniem możliwie dużego bezpieczeństwa pracy,

d) przy wyborze miejsca wiercenia otworów badawczych pod szyb, w przypadku niedokładnego oszacowania warunków naturalnych złoża,

e) przy wyborze sposobu organizacji głębienia szybu ze względu na rozmyty opis warunków hydrogeologicznych,

f) przy planowaniu drążenia wyrobisk korytarzowych, w przypadku gdy opis górotworu ma charakter rozmyty,

g) przy wyborze miejsca otworów strzałowych, w przypadku przybliżonej tylko znajomości górotworu,

h) przy organizacji robót w wyrobiskach ścianowych, gdy parametry ścian nie są dokładnie znane,

i) przy inwestycjach, gdy przewidywane efekty można tylko w przybliżeniu ocenić,

j) przy projektowaniu kopalń, gdy wskaźnik oceny ekonomicznej efektywności inwestycji trudno jest ocenić. Trudno przewidzieć, ile będzie on wynosił po zrealizowaniu inwestycji.

Przytoczyliśmy tutaj niektóre tylko zagadnienia z zakresu górnictwa, w których można by wykorzystać teorię zbiorów rozmytych w celu polepszenia procesu podejmowania decyzji. Tych obszarów zastosowań może być więcej, ponieważ sytuacji niejasnych i nieprecyzyjnie opisanych może być dużo.

12. PODEJMOWANIE DECYZJI GRUPOWYCH W OPARCIU O TEORIĘ ZBIORÓW ROZMYTYCH

12.1. Uporządkowania preferencyjne decydentów

Będziemy rozważać sytuację, w której mamy do czynienia z grupą decydentów i każdy z członków grupy ma możliwość podjęcia pewnej liczby decyzji. Różne decyzje są bardziej lub mniej preferowane przez poszczególnych członków grupy. Będziemy rozpatrywać zadanie, jak otrzymać na podstawie uporządkowań preferencyjnych poszczególnych członków grupy pewne uporządkowanie preferencyjne właściwe dla całej grupy. Wykorzystamy tu podejście wykorzystujące teorię zbiorów rozmytych zaproponowane przez Blina [8] oraz Blina i Whinstona [9] omawiane także w pracach [44], [54]. Przyjmujemy następujący model podejmowania decyzji. Dane są:

$A = \{a_1,...,a_m\}$ - zbiór decyzji,

$B = \{b_1,...,b_n\}$ - zbiór decydentów (członkowie grupy),

$O_k \subset A \times A$ - uporządkowanie preferencyjne (nierozmyte) k-tego decydenta. Jeżeli decydent preferuje bardziej a_i niż a_j, to para decyzji $(a_i, a_j) \in O_k$, co zapisujemy w postaci $a_i > a_j$.

Uporządkowania preferencyjne decyzji różnych decydentów mogą być różne, a nawet sprzeczne ze sobą. Naszym zadaniem będzie znaleźć takie jedno uporządkowanie preferencyjne decyzji, aby było ono najbardziej odpowiednie i charakterystyczne dla całej grupy. Ogólnie można powiedzieć, że zadaniem podejmowania decyzji grupowych jest określenie pewnego odwzorowania:

$$(O_1, O_2, \ldots, O_n) \rightarrow O_0. \tag{12.1}$$

Jest to wyznaczenie z uporządkowań preferencyjnych poszczególnych decydentów pewnego najadekwatniejszego uporządkowania preferencyjnego grupowego O_0.

Definicja 12.1 [44]

Grupowe uporządkowanie preferencyjne nazywamy preferencją społeczną i określamy jako relację rozmytą $R \subset A \times A$ o funkcji przynależności:

$$\mu_R : A \times A \rightarrow [0, 1]. \tag{12.2}$$

Wartości funkcji przynależności $\mu_R(a_i, a_j)$ określają stopień preferencji decyzji a_i nad a_j. Rozmytość w określaniu uporządkowania preferencyjnego decyzji dla całej grupy wyraża się tutaj poprzez funkcję przynależności μ_R, której wartości są ułamkami z przedziału [0, 1]. Przykładowo, jeżeli wszyscy decydenci uważają, że decyzja "a" jest bardziej preferowana niż 'b", to możemy uznać, że preferencja społeczna (grupowa) też jest taka, że a>b. Przyjmujemy wtedy, że:

$$\mu_R(a, b) = 1. \tag{12.3}$$

Jeżeli natomiast część decydentów bardziej preferuje decyzję "a", a część bardziej decyzję "b", to stopień preferencji grupowej "a" nad "b" może wynosić np. 0.7, 0.6 lub 0.3. Możemy powiedzieć, że decyzja "a" jest tylko w pewnym stopniu bardziej preferowana niż "b". Jeżeli mamy do czynienia ze zbiorem n decydentów i m decyzji, to ustalenie kolejności preferencji wszystkich decyzji bardziej się komplikuje.

12.2. Określenie grupowej preferencji społecznej

Dla każdego decydenta b_k tworzymy macierz preferencji S_k na podstawie zbioru uporządkowania preferencyjnego O_k.

$$S = [s_{ij}^k], \quad \text{gdzie } s_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{gdy } (a_i, a_j) \in O_k, \\ 0, & \text{gdy } (a_i, a_j) \notin O_k. \end{cases} \tag{12.4}$$

Na podstawie macierzy preferencji S_k tworzymy macierz sumaryczną - N preferencji indywidualnych:

$$N = \sum_{k=1}^{n} S_k. \tag{12.5}$$

Jako preferencję społeczną całej grupy decydentów przyjmujemy relację rozmytą o stopniach przynależności:

$$\mu_R(a_i, a_j) = \frac{1}{n} n_{ij}, \tag{12.6}$$

gdzie n_{ij} są elementami macierzy N.

Zadaniem naszym będzie wyznaczenie z tej relacji rozmytej, odzwierciedlającej preferencję społeczną grupy, pewnego nierozmytego uporządkowania preferencyjnego decyzji. Tę procedurę wyznaczania preferencji grupowej będziemy opierać na pojęciu α-obcięcia zbioru rozmytego.

Określamy najpierw α-obcięcie relacji rozmytej R dla parametru $\alpha=\tau$, gdzie τ jest pewnym poziomem akceptacji preferencji w grupie.

$$R_\tau = \{(a_i, a_j) : \mu_R(a_i, a_j) \geq \tau\}. \qquad (12.7)$$

Zbiór R_τ zawiera pary decyzji wchodzących w skład uporządkowania preferencyjnego, dla którego poziom akceptacji nie jest niższy od przyjętego τ w całej grupie. Przytoczymy tutaj metodę zaproponowana przez Blina [8], a opisaną w pracach [44], [54].

1. Należy uporządkować wszystkie elementy macierzy μ_R różne od zera w ciąg silnie malejący $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_s$, tzn., jeżeli w macierzy μ_R kilka elementów ma tę samą wartość, to w utworzonym ciągu ta wartość wystąpi tylko jeden raz.
2. Wyznaczamy zbiór R_{τ_1}.
3. Sprawdzamy, czy wyznaczony zbiór pozwala na określenie uporządkowania preferencyjnego dla wszystkich decyzji.

   Uwaga.

   Uporządkowanie preferencyjne będzie określone, gdy zbiór R_τ będzie zawierał m(m-1)/2 par decyzji. Każda decyzja musi wystąpić dokładnie w m-1 parach zbioru R_τ. Decyzja najbardziej preferowana musi wystąpić m-1 razy na pierwszej pozycji w parach. Decyzja druga pod względem preferencji musi wystąpić m-2 razy na pierwszej pozycji oraz 1 raz na drugiej itd. Najmniej preferowana decyzja wystąpi m-1 razy na drugiej pozycji w parach, natomiast nie pojawi się na pierwszej pozycji.
4. Jeżeli nie da się określić uporządkowania preferencyjnego, to wyznaczamy nowy zbiór R_{τ_i} dla kolejnego i.
5. Ze zbioru tego eliminujemy pary, które wskazują na preferencję sprzeczną z parami zbioru $R_{\tau_{i-1}}$.
6. Należy przejść do punktu 3.
7. Jeżeli udało się określić uporządkowanie preferencyjne w punkcie 4, to jest to koniec obliczeń. Jest to poszukiwane grupowe uporządkowanie preferencyjne.
8. Jeżeli dla i=1,...,s nie udało się na podstawie zbiorów R_τ określić uporządkowania preferencyjnego decyzji, to stwierdzamy, że takie grupowe uporządkowanie preferencyjne nie istnieje. Stanowiska decydentów są zbyt rozbieżne. Powinni oni przedyskutować i uściślić kryteria ustalania preferencji oraz ponownie przedstawić bardziej zbliżone swoje stanowiska.

Podamy teraz prosty przykład zastosowania wyżej przedstawionej procedury.

Przykład 12.1

Dyrektor kopalni powołał grupę dziesięciu decydentów w celu ustalenia ważności i kolejności podjęcia aktualnie pilnych decyzji. Te decyzje oznaczono symbolami:

a - zakup nowego kombajnu węglowego KWB-3RUW/4000 i obudowy ścianowej PIOMA 25/45 OZ,

b - zakup nowych komputerów IBM PC i sieci komputerowej UNIX WARE,

c - wysłanie na szkolenie do Anglii grupy pracowników z zakresu nowoczesnego zarządzania,

d - rozbudowa magazynu.

Decydenci przedstawili kolejność preferowania decyzji w następującej postaci:

Decydent	Preferowanie decyzji
b_1	c > a > b > d,
b_2, b_3	b > a > c > d,
b_4	c > d > b > a,
b_5, b_6, b_7	b > a > d > c,
b_8	d > c > a > b,
b_9, b_{10}	a > d > b > c.

Temu zapisowi odpowiadają następujące uporządkowania preferencyjne poszczególnych decydentów:

$O_1 =$ {(c, a), (c, b), (c, d), (a, b), (a, d), (b, d)},

$O_2 = O_3 =$ {(b, a), (b, c), (b, d), (a, c), (a, d), (c, d)},

$O_4 =$ {(c, d), (c, b), (c, a), (d, b), (d, a), (b, a)},

$O_5 = O_6 = O_7 =$ {(b, a), (b, d), (b, c), (a, d), (a, c), (d, c)},

$O_8 =$ {(d, c), (d, a), (d, b), (c, a), (c, b), (a, b)},

$O_9 = O_{10} =$ {(a, d), (a, b), (a, c), (d, b), (d, c), (b, c)}.

Na podstawie tych uporządkowań tworzymy macierze preferencji S_k dla każdego decydenta:

$$S_1 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad S_2 = S_3 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$S_4 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad S_5 = S_6 = S_7 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$S_8 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad S_9 = S_{10} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Z tych macierzy tworzymy macierz sumaryczną N:

$$N = \sum_{k=1}^{10} S_k = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & 7 & 8 \\ 6 & 0 & 7 & 6 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Określamy teraz preferencję społeczną (grupową) jako relację rozmytą o następującej funkcji przynależności:

$$\mu_R = \frac{1}{10} \cdot N = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.7 & 0.8 \\ 0.6 & 0 & 0.7 & 0.6 \\ 0.3 & 0.3 & 0 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Obliczamy teraz relacje R_τ według wzoru (12.7):

$R_{\tau=0.8} = \{(a, d)\}$,

$R_{\tau=0.7} = \{(a, c), (a, d), (b, c)\}$,

$R_{\tau=0.6} = \{(a, c), (a, d), (b, a), (b, c), (b, d), (d, c)\}$.

Na tym obliczenia możemy przerwać, ponieważ dla $R_{\tau=0.6}$ otrzymujemy już uporządkowanie zawierające wszystkie pary. Zbiór $R_{\tau=0.6}$ jest więc poszukiwanym grupowym uporządkowaniem preferencyjnym O_0. Na podstawie zbioru O_0 możemy zapisać decyzje w kolejności ich preferowania przez grupę w dogodny, czytelny i zwięzły sposób:

$$b > a > d > c.$$

Jest to rozwiązanie wyżej przedstawionego zagadnienia podejmowania decyzji grupowych.

W celu uzupełnienia przedstawiamy także pozostałe R_τ:

$R_{\tau=0.4} = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, c), (b, d), (c, d), (d, b), (d, c)\}$,

$R_{\tau=0.3} = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, c), (b, d), (c, a), (c, b), (c, d), (d, b), (d, c)\}$,

$R_{\tau=0.2} = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, c), (b, d), (c, a), (c, b), (c, d), (d, a), (d, b), (d, c)\}$.

Tak więc decyzją najważniejszą i podjętą w pierwszej kolejności powinna być decyzja o zakupie komputerów i sieci komputerowej dla kopalni. W drugiej kolejności należy zakupić kombajn i obudowę ścianową. Kolejną decyzją jest rozbudowa magazynu. Ostatnią decyzją jest wysłanie pracowników na szkolenie do Anglii.

Przedstawimy jeszcze inny sposób określania funkcji przynależności relacji rozmytej R reprezentującej preferencję społeczną [44]. Zamiast wzoru (12.6) można zastosować wzór następujący:

$$\mu_R(a_i, a_j) = r_{ij} = \begin{cases} (n_{ij} - n_{ji})/n, & \text{gdy} \quad n_{ij} > n_{ji}, \\ 0, & \text{gdy} \quad n_{ij} \le n_{ji}. \end{cases} \tag{12.8}$$

Przykład 12.2

Wyznaczymy teraz uporządkowanie grupowe dla dziesięciu decydentów z przykładu 12.1 stosując wzór (12.8). Otrzymamy funkcje przynależności μ_R w postaci:

$$\mu_R = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Obliczamy kolejne R_τ według wzoru (12.7):

$R_{\tau=0.6} = \{(a, d)\}$,

$R_{\tau=0.4} = \{(a, c), (a, d), (b, c)\}$,

$R_{\tau=0.2} = \{(a, c), (a, d), (b, a), (b, c), (b, d), (d, c)\}$.

Otrzymaliśmy uporządkowanie to samo co poprzednio: $b > a > d > c$.

Podsumowując możemy stwierdzić, że zaprezentowaną metodę możemy wykorzystać w różnych dziedzinach życia, nie tylko w górnictwie. Nadaje się ona tam, gdzie mamy podjąć szereg decyzji, a ważność decyzji ocenia grupa ekspertów. Preferencje decyzji przez poszczególnych ekspertów mogą być różne, a nawet sprzeczne. Zaprezentowana metoda pozwala określać preferencję społeczną (grupową) całego zespołu decydentów. Należy tu nadmienić, że nie zawsze da się określić taką preferencję dla całej grupy decydentów. W przypadku dużej rozbieżności stanowisk ekspertów taka preferencja grupowa nie istnieje. Rozważmy najprost-

szy przykład. Niech eksperci b_1 i b_2 mają do dyspozycji dwie decyzje a_1 i a_2. Ekspert b_1 bardziej preferuje decyzję a_1, a ekspert b_2 bardziej a_2. Mamy więc do czynienia z następującymi uporządkowaniami preferencyjnymi:

$$O_1 = \{(a_1, a_2)\}, \qquad O_2 = \{(a_2, a_1)\}.$$

Są to uporządkowania sprzeczne ze sobą. W takiej sytuacji można by powołać dodatkowego eksperta lub też eksperci powinni przekonsultować swoje opinie w celu uzgodnienia stanowisk. To samo dotyczy sytuacji, gdy mamy większą liczbę ekspertów i decyzji. Gdy stanowiska ich są zbyt rozbieżne, powinni oni przedyskutować i uściślić kryteria ustalania preferencji oraz ponownie przedstawić bardziej zbliżone swoje stanowiska.

13. WYKORZYSTANIE LICZB ROZMYTYCH DO PROGNOZOWANIA SILNYCH WSTRZĄSÓW GÓRNICZYCH

13.1. Model matematyczny zagrożenia wstrząsami

W rozważaniach wykorzystamy teorię zaprezentowaną w pracach [62], [63] (rozdział 5). W pracach tych zakłada się, że modelem matematycznym zagrożenia wstrząsami obiektów podziemnych jest dwustanowy proces stochastyczny Markowa. Po odpowiednich przekształceniach rozwiązanie przedstawionego układu równań Kołmogorowa ma następującą postać:

$$P_0(t) = \frac{\tau}{\tau+\vartheta} + \frac{\vartheta}{\tau+\vartheta}\exp[-(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\vartheta})t], \tag{13.1}$$

$$P_1(t) = \frac{\vartheta}{\tau+\vartheta}[1-\exp(-(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\vartheta})t)]. \tag{13.2}$$

Interesującą funkcją jest $P_1(t)$, która jest interpretowana jako "czasowe prawdopodobieństwo pozostawania górotworu w stanie aktywności i zdatności do generowania silnych wstrząsów" [62]. Funkcja $P_0(t)$ charakteryzuje czasowe prawdopodobieństwo uspokojenia górotworu. Zachodzi zależność:

$$P_0(t) + P_1(t) = 1. \tag{13.3}$$

We wzorach tych oznaczono:

"τ - średni czas pomiędzy kolejnymi, porównywalnymi silnymi wstrząsami górniczymi, charakteryzującymi chwilową zdatność górotworu do ich generowania,

ϑ - czas, który charakteryzuje powrót górotworu do stanu względnej równowagi,

t - czas obserwacji porównywalnych niebezpiecznych wstrząsów górniczych liczony od t_0" [62].

Celem prognozowania było wyznaczenie trzech wielkości T_1, T_2, P_1 na podstawie wzorów:

$$T_1 = \frac{\tau\vartheta}{\tau+\vartheta}, \tag{13.4}$$

$$T_2 = \tau, \tag{13.5}$$

$$P_1 = \frac{\vartheta}{\tau+\vartheta}, \tag{13.6}$$

gdzie:

"T_1 - oczekiwany czas bezpieczny,

T_2-T_1 - oczekiwany czas niebezpieczny,

P_1 - prawdopodobieństwo stacjonarne" [62].

Podstawą do obliczeń były wartości w pierwszych czterech kolumnach w tablicach 13.1 i 13.2. Wartości czasów TAU (τ) i TETA (ϑ) są przygotowywane przez Dział Tąpań Kopalni lub można je odczytać z interpretacji opisu sejsmoakustycznego [62]. Skuteczność prognozy wyznacza się na podstawie prawdziwości relacji T_1<TAU. Jeżeli ta relacja jest prawdziwa, to prognoza jest dobra. W przeciwnym wypadku prognoza jest zła. Interpretacja tej nierówności jest taka, że silny wstrząs nie powinien wystąpić przed upływem prognozowanego bezpiecznego czasu T_1. Wstrząs występuje w czasie TAU i gdy TAU<T_1, to prognoza nie sprawdziła się (jest zła). W pracy [62] obliczono T_1 na podstawie wartości TAUŚR i TETAŚR jako średnich arytmetycznych z trzech poprzednich wartości TAU i TETA.

W podejściu wykorzystującym liczby rozmyte określimy na podstawie pomiarów wielkość τ_{roz}, jako liczbę rozmytą charakteryzującą górotwór pod względem średniego czasu pomiędzy kolejnymi silnymi wstrząsami górniczymi. Także na podstawie pomiarów określimy liczbę rozmytą ϑ_{roz} charakteryzującą czas powrotu górotworu do stanu względnej równowagi. Do zapisu będziemy używali liczb rozmytych w postaci $\alpha - \beta$, które zostały opisane w rozdziale 10.5. Tak więc liczbę rozmytą τ_{roz} określamy następująco:

$$\tau_{roz} = (a_\tau, b_\tau, \alpha_\tau, \beta_\tau), \tag{13.7}$$

a liczbę rozmytą jako:

$$\vartheta_{roz} = (a_\vartheta, b_\vartheta, \alpha_\vartheta, \beta_\vartheta). \tag{13.8}$$

Wyniki obserwacji aktywności sejsmologicznej i sejsmoakustycznej w ścianie 239, pokład 620 w KWK "Pstrowski" były przedstawione w postaci histogramów i diagramów [62]. Szerokość przedziału klasowego w szeregu rozdzielczym, na podstawie którego były budowane histogramy i diagramy, wynosiła 8 godzin. Wobec tego w naszych rozważaniach do obliczeń przyjmiemy dla liczb rozmytych parametry $\alpha_\tau = \beta_\tau = \alpha_\vartheta = \beta_\vartheta = 8$. Ponieważ interesuje nas wartość średnia τ_{sr} i ϑ_{sr}, wobec tego pozostałe parametry liczb rozmytych τ_{roz} i ϑ_{roz} przyjmiemy jako $a_\tau = b_\tau = \tau_{sr}$, $a_\vartheta = b_\vartheta = \vartheta_{sr}$. Otrzymamy przez to uproszczoną postać liczb rozmytych, których funkcja przynależności ma kształt trójkąta, a nie trapezu. Po tych uwagach liczby rozmyte możemy zapisać jako:

Tablica 13.1

Metoda sejsmologiczna - wyznaczanie czasowej zdatności górotworu do wystąpienia niebezpiecznego zdarzenia (silnego wstrząsu) - wariant 3 - z pamięcią 3 ostatnich zdarzeń

Nr	Data	TAU	TETA	TAU ŚR	TETA ŚR	P_1	T_1	T_2	Skut. prog.
1	5.9.88	168	127						
2	6.9.88	37	22						
3	13.9.88	165	81						
4	23.9.88	239	84	123.333	76.6667	.383333	47.2778	123.333	dobra
5	27.9.88	99	25	147.000	62.3333	.297771	43.7723	147.000	dobra
6	29.9.88	44	28	167.667	63.3333	.274170	45.9692	167.667	zła
7	4.10.88	109	61	127.333	45.6667	.263969	33.6121	127.333	dobra
8	9.10.88	136	122	84.000	38.0000	.311475	26.1639	84.000	dobra
9	11.10.88	49	28	96.333	70.3333	.422000	40.6527	96.333	dobra
10	13.10.88	50	17	98.000	70.3333	.417822	40.9465	98.000	dobra
11	17.10.88	78	45	78.333	55.6667	.415423	32.5415	78.333	dobra
12	23.10.88	143	29	59.000	30.0000	.337079	19.8876	59.000	dobra
13	26.10.88	88	54	90.333	30.3333	.251381	22.7081	90.333	dobra
14	28.10.88	47	23	103.000	42.6667	.292906	30.1693	103.000	dobra
15	7.11.88	233	160	92.667	35.3333	.276042	25.5799	92.667	dobra
16	9.11.88	41	28	122.667	79.0000	.391736	48.0529	122.667	zła

Źródło: pozycja literatury [62].

Tablica 13.2

Metoda sejsmoakustyczna - wyznaczenie czasowej zdatności górotworu do wystąpienia niebezpiecznego zdarzenia (silnego wstrząsu) - wariant 3 - z pamięcią 3 ostatnich zdarzeń

Nr	Data	TAU	TETA	TAU ŚR	TETA ŚR	P_1	T_1	T_2	Skut. prog.
1	4.9.88	84	67						
2	9.9.88	111	47						
3	11.9.88	57	24						
4	18.9.88	177	119	84.000	46.0000	.353846	29.7231	84.000	dobra
5	22.9.88	90	62	115.000	63.3333	.35514	40.8411	115.000	dobra
6	25.9.88	77	52	108.000	68.3333	.387524	41.8526	108.000	dobra
7	30.9.88	122	55	114.667	77.6667	.403813	46.3039	114.667	dobra
8	2.10.88	44	5	96.333	56.3333	.368996	35.5466	96.333	dobra
9	5.10.88	65	41	81.000	37.3333	.315493	25.5549	81.000	dobra
10	8.10.88	64	24	77.000	33.6667	.304217	23.4247	77.000	dobra
11	10.10.88	48	40	57.667	23.3333	.288066	16.6118	57.667	dobra
12	12.10.88	49	39	59.000	35.0000	.37234	21.9681	59.000	dobra
13	16.10.88	112	39	53.667	34.3333	.390152	20.9381	53.667	dobra
14	21.10.88	119	39	69.667	39.3333	.360856	25.1397	69.667	dobra
15	23.10.88	48	17	93.333	39.0000	.29471	27.5063	93.333	dobra
16	1.11.88	216	85	93.000	31.6667	.254011	23.623	93.000	dobra
17	7.11.88	136	86	127.667	47.0000	.269084	34.3531	127.667	dobra
18	10.11.88	65	24	133.333	62.6667	.319728	42.6304	133.333	dobra

Źródło: pozycja literatury [62]

$$\tau_{roz} = (\tau_{sr}, \alpha_\tau, \beta_\tau), \tag{13.9}$$

$$\vartheta_{roz} = (\vartheta_{sr}, \alpha_\vartheta, \beta_\vartheta). \tag{13.10}$$

Funkcje przynależności tych liczb przedstawione są na rysunkach 13.1 i 13.2.

Rys. 13.1. Wykres funkcji przynależności liczby rozmytej τ_{roz}
Fig. 13.1. Graph of membership function of fuzzy number τ_{roz}

Rys. 13.2. Wykres funkcji przynależności liczby rozmytej ϑ_{roz}
Fig. 13.2. Graph of membership function of fuzzy number ϑ_{roz}

Na podstawie tych liczb rozmytych określimy liczbę rozmytą T_{1roz}, która będzie charakterystyczna dla danego górotworu i będzie mówiła, jaki jest czas bezpieczny.

13.2. Określenie liczby rozmytej T_{1roz}

Do wyznaczenia liczby T_{1roz} wykorzystamy wzór (13.4):

$$T_{1roz} = \frac{\tau_{roz}\,\vartheta_{roz}}{\tau_{roz} + \vartheta_{roz}}. \tag{13.11}$$

Do obliczenia T_{1roz} będziemy wykorzystywali następujące działania na liczbach rozmytych:

- suma liczb rozmytych,
- iloczyn liczb rozmytych,
- iloraz liczb rozmytych.

Wykorzystując wzory (10.39), (10.41), (10.42) przy poczynionych założeniach (13.9) i (13.10) mamy:

$$\tau_{roz} + \vartheta_{roz} = (\tau_{sr} + \vartheta_{sr}, \alpha_\tau + \alpha_\vartheta, \beta_\tau + \beta_\vartheta), \tag{13.12}$$

$$\tau_{roz} \cdot \vartheta_{roz} = (\tau_{sr}\vartheta_{sr}, \tau_{sr}\alpha_\vartheta + \vartheta_{sr}\alpha_\tau - \alpha_\tau\alpha_\vartheta, \tau_{sr}\beta_\vartheta + \vartheta_{sr}\beta_\tau + \beta_\tau\beta_\vartheta). \tag{13.13}$$

Dzielenie dwóch liczb rozmytych $L=(a_l, \alpha_l, \beta_l)$, i $M=(a_m, \alpha_m, \beta_m)$ określone jest wzorem:

$$L/M = (a_l / a_m, (a_l\beta_m + a_m\alpha_l)/(a_m(a_m + \beta_m)), (a_l\alpha_m + a_m\beta_l)/(a_m(a_m - \alpha_m)). \tag{13.14}$$

Przyjmując, że $L=\tau_{roz} \cdot \vartheta_{roz}$ i $M=\tau_{roz} + \vartheta_{roz}$ oraz wykorzystując wzór (13.11), otrzymujemy:

$$T_{1roz} = (T_{1sr}, \alpha_{T_1}, \beta_{T_1}) = L/M=$$

$$=(a_l / a_m, (a_l\beta_m + a_m\alpha_l)/(a_m(a_m + \beta_m)), (a_l\alpha_m + a_m\beta_l)/(a_m(a_m - \alpha_m)). \tag{13.15}$$

gdzie: $a_l = \tau_{sr}\vartheta_{sr}$,

$a_m = \tau_{sr} + \vartheta_{sr}$,

$\alpha_l = \tau_{sr}\alpha_\vartheta + \vartheta_{sr}\alpha_\tau - \alpha_\tau\alpha_\vartheta$,

$\alpha_m = \alpha_\tau + \alpha_\vartheta$,

$\beta_l = \tau_{sr}\beta_\vartheta + \vartheta_{sr}\beta_\tau + \beta_\tau\beta_\vartheta$,

$\beta_m = \beta_\tau + \beta_\vartheta$.

Wraz z upływem czasu otrzymujemy nowe informacje, tj. nowe τ i nowe ϑ. Wobec tego korygujemy wyznaczone już wcześniej τ_{sr} i ϑ_{sr} według wzorów:

$$\text{nowe } \tau_{sr} = (i \cdot \tau_{sr} + \tau)/(i+1), \tag{13.16}$$

$$\text{nowe } \vartheta_{sr} = (i \cdot \vartheta_{sr} + \vartheta)/(i+1), \tag{13.17}$$

gdzie i oznacza liczbę wziętych pod uwagę wielkości τ i ϑ.

Inaczej, jeżeli kolejne wielkości τ i ϑ ustawimy w ciąg $\{\tau_i\}$ i $\{\vartheta_i\}$ i oznaczymy:

τ_i - i-ty element ciągu $\{\tau_i\}$,

ϑ_i - i-ty element ciągu $\{\vartheta_i\}$,

τ_{sr_i} - τ_{sr} obliczone na podstawie "i" elementów ciągu $\{\tau_i\}$,

ϑ_{sr_i} - ϑ_{sr} obliczone na podstawie "i"elementów ciągu $\{\vartheta_i\}$,

to

$$\tau_{sr_{i+1}} = (i \cdot \tau_{sr_i} + \tau_{i+1})/(i+1), \tag{13.18}$$

$$\vartheta_{sr_{i+1}} = (i \cdot \vartheta_{sr_i} + \vartheta_{i+1})/(i+1). \tag{13.19}$$

Celem prognozy jest wyznaczenie wielkości T_{1roz} na podstawie wzoru (13.15). Jest to czas bezpieczny, w którym nie powinien wystąpić silny wstrząs. Jeżeli silny wstrząs wystąpi w czasie $\tau > T_{1roz}$, to prognoza jest dobra. Jeżeli czas τ wystąpienia kolejnego wstrząsu okaże się mniejszy od T_{1roz}, to prognoza jest zła.

13.3. Określenie stopnia wiarygodności prognozy

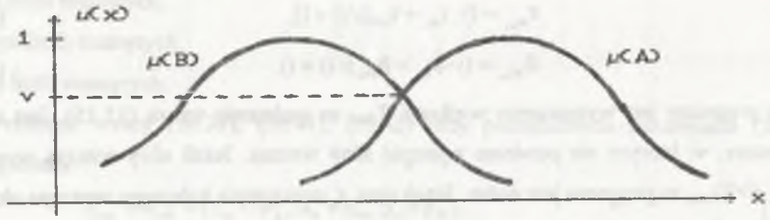
Mamy tu do czynienia z porównywaniem dwu liczb: jednej rzeczywistej τ z drugą rozmytą T_{1roz}. W ogólnym przypadku porównywanie liczb rozmytych nie jest zagadnieniem oczywistym, jakby się wydawało. Najpierw określimy stopień, w kórym jedna liczba rozmyta jest większa od drugiej.

Definicja 13.1 [44]

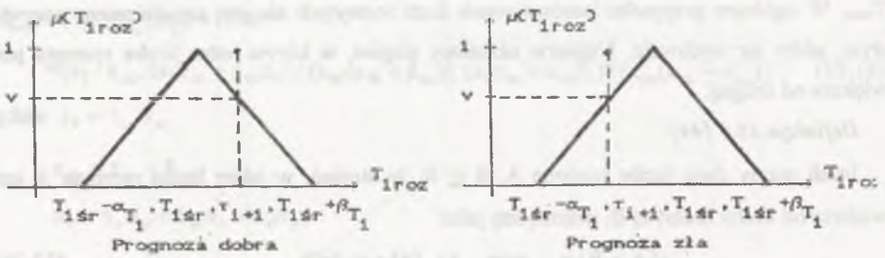
Jeżeli mamy dwie liczby rozmyte A, B $\subseteq$ R, to stopień, w jakim liczba rozmyta A jest większa od liczby rozmytej B, definiujemy jako:

$$v(A > B) = \max_{y>x;\ x,y\in R} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)). \tag{13.20}$$

Graficznie stopień v(A>B) zilustrowany jest na rysunku 13.3. Jeżeli wskaźnik jest bliski jedności, tym trudniej odpowiedzieć na pytanie, czy A jest większe od B. Oznaczać to może zarówno, że A jest bardzo bliskie B [44]. W naszym konkretnym przypadku, gdy porównujemy liczbę rzeczywistą τ z liczbą rozmytą T_{1roz}, której funkcja przynależności ma kształt trójkąta, ten problem nie występuje. Wartość wskaźnika $v(\tau > T_{1roz})$ określamy jako wartość rzędnej na wykresie $\mu_{T_{1roz}}(x)$ w punkcie $x=\tau$. Ilustuje to rysunek 13.4. W celu stwierdzenia prawdziwości prognozy porównuje się liczbę τ z liczbą rzeczywistą T_{1sr} (tak jak to opisano w rozdziale 13.1 i 13.2). W przypadku gdy funkcje przynależności dwóch liczb rozmytych $\mu_A(x)$ i $\mu_B(x)$ są rozłączne (nie mają wspólnej dziedziny określoności), to stopień v(A>B)=0. W naszym przypadku zależy nam, aby różnica między τ i T_{1sr} była duża, by stopień $v(\tau > T_{1roz})$ był równy zero lub był bliski zero. Wtedy uzyskujemy lepszą wiarygodność prognozy. Jeżeli $T_{1sr} > \tau$, wtedy prognoza jest zła i $v(T_{1roz} > \tau)$ określa stopień, w jakim T_{1roz} jest większe od τ. Zdefiniujemy teraz współczynnik pewności prognozy.



Rys. 13.3. Porównywanie liczb rozmytych
Fig. 13.3. Comparison of fuzzy numbers



Rys. 13.4. Określanie trafności prognozy
Fig. 13.4. Determining the accuracy of prediction

Definicja 13.2

Współczynnikiem pewności prognozy nazywamy wielkość określoną wzorem:

$$W = 1 - v(\tau > T_{1roz}), \quad \text{gdy } \tau > T_{1sr} \quad \text{lub} \tag{13.21}$$

$$W = 1 - v(T_{1roz} > \tau), \quad \text{gdy } \tau < T_{1sr}. \tag{13.22}$$

Uzyskaliśmy przez to pewną miarę pewności prognozy. Tak prognozom dobrym, jak i złym możemy przypisać zdefiniowany wyżej współczynnik W i ocenić, na ile miarodajna jest ta prognoza.

Wyniki przeprowadzonych obliczeń przedstawiono w tablicach 13.3 i 13.4. Prognozy wykorzystujące liczby rozmyte okazały się równie trafne jak w tablicach 13.1 i 13.2.

Tablica 13.3

Metoda sejsmologiczna - wyznaczanie czasowej zdatności górotworu do wystąpienia niebezpiecznego zdarzenia (silnego wstrząsu) przy wykorzystaniu liczb rozmytych

Nr	Data	TAU	TETA	TAU ŚR	TETAŚR	P_1	$ALFA_T$	T_1	$BETA_T$	T_2	Sk. prog.	W
1	5.9.88	168	127									
2	6.9.88	37	22									
3	13.9.88	165	81									
4	23.9.88	239	84	123.33	76.67	0.38	10.61	47.28	13.15	123.33	dobra	1
5	27.9.88	99	25	152.25	78.50	0.34	10.58	51.79	12.75	152.25	dobra	1
6	29.9.88	44	28	141.60	67.80	0.32	10.40	45.85	12.79	141.60	zła	0.18
7	4.10.88	109	61	125.33	61.17	0.33	10.30	41.11	12.98	125.33	dobra	1
8	9.10.88	136	122	123.00	61.14	0.33	10.31	40.84	13.03	123.00	dobra	1
9	11.10.88	49	28	124.63	68.75	0.36	10.47	44.31	13.08	124.63	dobra	0.36
10	13.10.88	50	17	116.22	64.22	0.36	10.39	41.36	13.09	116.22	dobra	0.65
11	17.10.88	78	45	109.60	59.50	0.35	10.30	38.56	13.28	109.60	dobra	1
12	23.10.88	143	29	106.73	58.18	0.35	10.27	37.65	13.34	106.73	dobra	1
13	26.10.88	88	54	109.75	55.75	0.34	10.20	36.97	13.24	109.75	dobra	1
14	28.10.88	47	23	108.08	55.62	0.34	10.20	36.72	13.28	108.08	dobra	0.77
15	7.11.88	233	160	103.71	53.29	0.34	10.15	35.20	13.36	103.71	dobra	1
16	9.11.88	41	28	112.33	60.40	0.35	10.31	39.28	13.23	112.33	dobra	0.13

Tablica 13.4

Metoda sejsmoakustyczna - wyznaczanie czasowej zdatności górotworu do wystąpienia niebezpiecznego zdarzenia (silnego wstrząsu) przy wykorzystaniu liczb rozmytych

Nr	Data	TAU	TETA	TAU ŚR	TETAŚR	P_1	$ALFA_{Tl}$	T_1	$BETA_{Tl}$	T_2	Sk. prog.	W
1	4.9.88	84	67									
2	9.9.88	111	47									
3	11.9.88	57	24									
4	18.9.88	177	119	84.00	46.00	0.35	9.94	29.72	13.86	84.00	dobra	1
5	22.9.88	90	62	107.25	64.25	0.37	10.40	40.18	13.37	107.25	dobra	1
6	25.9.88	77	52	103.80	63.80	0.38	10.40	39.51	13.44	103.80	dobra	1
7	30.9.88	122	55	99.33	61.83	0.38	10.36	38.11	13.52	99.33	dobra	1
8	2.10.88	44	5	102.57	60.86	0.37	10.34	38.20	13.45	102.57	dobra	0.43
9	5.10.88	65	41	95.25	53.88	0.36	10.17	34.41	13.58	95.25	dobra	1
10	8.10.88	64	24	91.89	52.44	0.36	10.13	33.39	13.66	91.89	dobra	1
11	10.10.88	48	40	89.10	49.60	0.36	10.05	31.86	13.72	89.10	dobra	1
12	12.10.88	49	39	85.36	48.73	0.36	10.03	31.02	13.83	85.36	dobra	1
13	16.10.88	112	39	82.33	47.92	0.37	10.00	30.29	13.92	82.33	dobra	1
14	21.10.88	119	39	84.62	47.23	0.36	9.98	30.31	13.84	84.62	dobra	1
15	23.10.88	48	17	87.07	46.64	0.35	9.96	30.37	13.76	87.07	dobra	1
16	1.11.88	216	85	84.47	44.67	0.35	9.90	29.22	13.83	84.47	dobra	1
17	7.11.88	136	86	92.69	47.19	0.34	9.98	29.22	13.59	92.69	dobra	1
18	10.11.88	65	24	95.24	49.47	0.34	10.05	32.56	13.54	95.24	dobra	1

Dodatkowo każdej prognozie przypisaliśmy współczynnik W określający stopień pewności tej prognozy. Liczba P_1 charakteryzuje aktywność i podatność górotworu do generowania silnych wstrząsów. Liczba ta jako prawdopodobieństwo jest z zakresu [0, 1]. Na podstawie tej liczby można ocenić procentowo bezpieczeństwo górników stykających się bezpośrednio z danym górotworem.

14. SIECI NEURONOWE

14.1. Własności i zastosowania sieci neuronowych

Sieci neuronowe stanowią nową dziedzinę nauk technicznych. Używa się ich jako wygodnych systemów do przetwarzania informacji. Ta nowa dziedzina wywodzi się z badań nad tworzeniem modelu działania mózgu ludzkiego. Podstawą do tych badań były prace naukowe z zakresu neurofizjologii i bioniki. Po ukazaniu się prac dotyczących opisu matematycznego komórki nerwowej oraz powiązaniu tego opisu z zagadnieniami przetwarzania danych zaczęły się rozwijać sieci neuronowe jako samodzielna nowa gałąź nauki.

Najważniejszą własnością sieci neuronowych jest ich zdolność do przetwarzania informacji w sposób równoległy, w odróżnieniu od komputerów, gdzie obliczenia wykonuje się sekwencyjnie (szeregowo). Odpowiednikiem programowania na komputerze może być proces uczenia się sieci neuronowych. To uczenie się jest zasadniczym atutem sieci neuronowych. Ważną cechą sieci neuronowych jest też ich zdolność do adaptacji i samoorganizacji.

Za pracą [94] przytaczamy też aktualne kierunki zastosowań sieci neuronowych:

- diagnostyka układów elektronicznych,
- badania psychiatryczne,
- prognozy giełdowe,
- prognozowanie sprzedaży,
- poszukiwanie ropy naftowej,
- interpretacja badań biologicznych,
- prognozy cen,
- analiza badań medycznych,
- planowanie remontów maszyn,
- prognozowanie postępów w nauce,
- typowania w wyścigach konnych,
- analiza problemów produkcyjnych,
- optymalizacja działalności handlowej,
- analiza spektralna,

- optymalizacja utylizacji odpadów,
- dobór surowców,
- selekcja celów śledztwa w kryminalistyce,
- dobór pracowników,
- sterowanie procesami przemysłowymi.

Z dziedziny ekonomii ważniejsze zastosowania to:

- predykcja (prognozy ekonomiczne, prognozy zmian rynku, gra na giełdzie),
- klasyfikacja i rozpoznawanie podmiotów gospodarczych (identyfikacja i klasyfikacja przedsiębiorstw pod względem ich rozwoju gospodarczego, stagnacji czy regresji),
- kojarzenie danych (automatyzacja procesu wnioskowania na podstawie dużej ilości zgromadzonych danych),
- analiza danych (określanie związków w bazie danych),
- filtracja sygnałów (obróbka wstępna danych statystycznych, eliminacja informacji niepotrzebnej),
- optymalizacja (poszukiwanie optymalnych decyzji gospodarczych).

14.2. Pojedynczy neuron

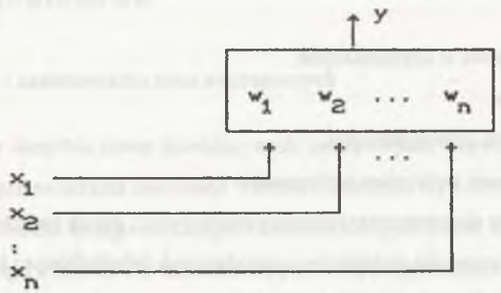
Neuron jest elementem o wielu wejściach i jednym wyjściu. Przedstawiony jest on schematycznie na rysunku 14.1. Sygnały wejściowe oznaczono przez $x_1,...,x_n$, a sygnał wyjściowy przez y. Sygnały wejściowe oraz sygnał wyjściowy mogą przyjmować wartości z pewnego ograniczonego przedziału, ale można je przeskalować i przyjąć założenie, że są z przedziału domkniętego [-1,1]:

$$x_j, y \in [-1,1] \quad (j=1,...,n). \tag{14.1}$$

Zależność między wyjściem y a wejściami $x_1,...,x_n$ może być liniowa lub nieliniowa. Sieci zbudowane z takich elementów nazywamy odpowiednio liniowymi sieciami neuronowymi lub nieliniowymi sieciami neuronowymi. Najpierw rozważymy zależność liniową. Przyjmuje się, że związek między wyjściem y a wyjściami $x_1,...,x_n$ ma postać:

$$y = \sum_{j=1}^{n} w_j x_j. \tag{14.2}$$

Współczynniki w_j nazywane są wagami synaptycznymi. Mogą one podlegać modyfikacji w trakcie procesu uczenia sieci neuronowej. Wzór (14.2) możemy zapisać w postaci wektorowej.



Rys. 14.1. Pojedynczy neutron
Fig. 14.1. Single neuron

Wielkości x_j grupujemy w jeden wektor kolumnowy X, a z wag w_j tworzymy wektor kolumnowy W. Związek (14.2) możemy zapisać w postaci iloczynu skalarnego wektorów:

$$y = W \times X \tag{14.3}$$

lub w postaci zwykłego iloczynu wektorów:

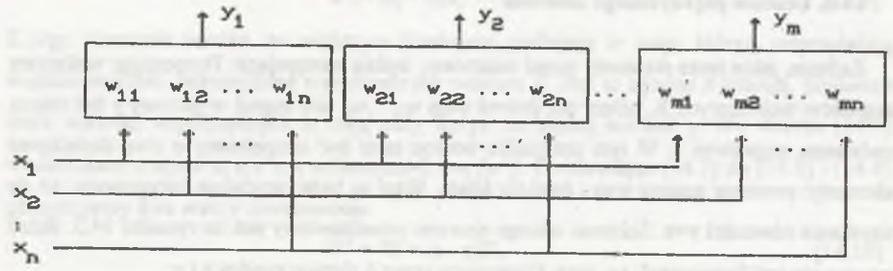
$$y = W^T X, \tag{14.4}$$

gdzie W^T oznacza wektor transponowany.

Z własności iloczynu skalarnego wynika, że im bardziej położenia wektorów W i X są zbliżone do siebie (im kąt między wektorami W i X jest mniejszy), tym wartość wyjścia y jest większa. W tym sensie można rozumieć, że neuron rozpoznaje sygnały wejściowe. Za pomocą wag można zapamiętać (ustalić) pewien zespół sygnałów wzorcowych, a na wejście podawać różne sygnały wejściowe. Jeżeli sygnały wejściowe będą podobne do wzorca, to wartość y będzie duża. W ten sposób rozumiemy rozpoznawanie sygnałów przez neuron.

14.3. Warstwa neuronów

Warstwa neuronów stanowi najprostszą sieć. Jest to połączenie równoległe neuronów. Sygnały wejściowe $x_1,...,x_n$ podawane są do każdego neuronu, natomiast każdy neuron ma swój wektor wag. Warstwa neuronów przedstawiona jest na rysunku 14.2. Przyjmujemy, że mamy m takich neuronów. Wektor X wymusza na każdym neuronie inną wartość sygnału wyjściowego y_i. Największa wartość sygnału y_i wskazuje, który wektor wag jest najbardziej podobny



Rys. 14.2. Warstwa neuronów
Fig. 14.2. Layer of neurons

do wektora X. Sieć tego typu może rozpoznawać m różnych klas obiektów. Zależność matematyczną między sygnałami wejściowymi $x_1,...x_n$ a sygnałami wyjściowymi $y_1,...,y_m$ można zapisać następująco:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j \qquad (i=1,...,m), \tag{14.5}$$

gdzie:

n - liczba sygnałów wejściowych,

m - liczba neuronów,

j - numer sygnału wejściowego,

i - numer neuronu,

x_j - j-ty sygnał wejściowy,

y_i - i-ty sygnał wyjściowy,

w_{ij} - j-ta waga na i-tym neuronie.

W zapisie macierzowym zależność (14.5) można przedstawić jako:

$$Y = W^T X, \tag{14.6}$$

gdzie:

$X=\{x_j\}$ wektor sygnałów wejściowych sieci,

$Y=\{y_i\}$ wektor sygnałów wyjściowych sieci,

$W^T=\{w_{ij}\}$ transponowana macierz wag.

Przekształcenie sygnału X w sygnał Y można traktować jako pewnego rodzaju filtrację. W związku z tym o sieciach, które przekształcają sygnały według zależności (14.5), mówi się jako o filtrach

14.4. Uczenie pojedynczego neuronu

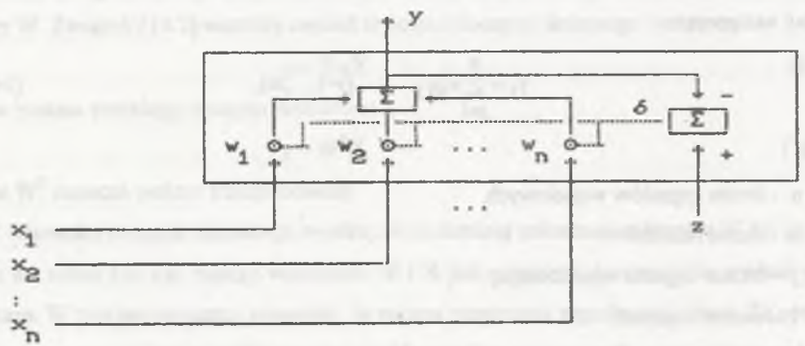
Zadanie, jakie teraz stawiamy przed neuronem, będzie następujące. Dysponując wektorem sygnałów wejściowych X, należy tak dobrać wagi $w_1,...,w_n$, aby sygnał wyjściowy y był równy zadanemu sygnałowi z. W tym przypadku neuron musi być uzupełniony o dwa dodatkowe elementy: procesor zmiany wag i detektor błędu. Wagi w_j będą iteracyjnie korygowane, aż do uzyskania równości y=z. Schemat takiego neuronu przedstawiony jest na rysunku 14.3. Jeżeli neuron nie jest "nauczony", to $y \neq z$. Oznaczamy przez δ różnicę między z i y:

$$\delta = z - y. \tag{14.7}$$

Korekcji wag dokonuje się według wzoru:

$$W' = W + \eta\delta X, \tag{14.8}$$

gdzie η jest współczynnikiem liczbowym decydującym o szybkości uczenia.



Rys. 14.3. Uczenie neuronu
Fig. 14.3. Teaching a neuron

Jeżeli z>y, to δ>0 i wektor W' jest sumą wektora W i wektora X pomnożonego przez ηδ (w tym przypadku $0<\eta\delta<1$). Wektor W' jest bliższy wektorowi X aniżeli wektor W. Kąt pomiędzy wektorami W' i X jest mniejszy od kąta pomiędzy wektorami W i X. Jeżeli z<y, to δ<0 i wektor W' jest różnicą pomiędzy wektorem W i ηδX ($-1<\eta\delta<0$). Sygnał y jest za duży i ta korekcja powoduje zbliżenie się wektora wag do X. Ze wzoru (14.8) wynika, że korekcja wag jest wprost proporcjonalna do δ. Jeżeli δ na moduł jest większa, to następuje większa korekcja wektora W. Dla δ=0 korekcja nie występuje (W'=W). Rozpisując równanie (14.8) we współrzędnych, mamy:

$$w'_j = w_j + \eta\delta x_j. \tag{14.9}$$

Z tego równania wynika, że większym korekcjom podlegają te wagi, którym odpowiadają większe wartości bezwzględne współrzędnych wektora X. Jest to zgodne z intuicją, ponieważ małe wartości współrzędnych x_j mają mały wpływ na błędną wartość y. We wzorze (14.9) wielkościami stałymi są x_j i η, a zmiennymi δ i w_j (w'_j). Podstawiając (14.7) do (14.8) i (14.9) otrzymujemy dwa wzory równoważne:

$$W' = W + (z - y)X, \tag{14.10}$$

$$w'_j = w_j + (z - y)x_j. \tag{14.11}$$

Wagi w_j są iteracyjnie korygowane według wzoru (14.11) (uwzględniając (14.2)) aż do zrównania się wartości y z wartością z. Wartości startowe wektora wag przyjmuje się w tym przypadku losowo. Przedstawiony algorytm uczenia (dopasowania wag do wektora X) nazywany jest w literaturze regułą DELTA, a neuron uczący się ADALINE [94].

14.5. Uczenie liniowej sieci neuronowej

Przedstawione rozważania uogólnimy na sieć neuronową zaprezentowaną w rozdziale 14.3. Każdy z neuronów sieci ma swoją zadaną wartość z_i. Taka sieć w literaturze nazywana jest MADALINE [84], [94]. W tym przypadku uczeniu podlega macierz W zgodnie z regułą:

$$(W')^T = W^T + (Z - Y)X^T. \tag{14.12}$$

Po rozpisaniu tego wzoru otrzymujemy:

$$w'_{ij} = w_{ij} + (z_i - y_i)x_j. \tag{14.13}$$

Wagi w_{ij} są iteracyjnie korygowane według wzoru (14.13) (przy uwzględnieniu (14.5)) aż do zajścia równości $y_i=z_i$ dla wszystkich neuronów.

Sieci zbudowane w ten sposób mogą być wykorzystywane do filtracji sygnałów, eliminacji zakłóceń, wyszukiwania określonych cech sygnału. Mogą one też służyć do odtwarzania sygnału na podstawie jego fragmentu. Nauczona wcześniej sieć potrafi odtworzyć zestaw zapamiętanych informacji w przypadku przedstawienia jej informacji niepełnej lub niedokładnej. Ta możliwość sieci nazywa się pamięcią asocjacyjną. Jest to nowy kierunek rozwoju sieci neuronowych.

14.6. Samouczenie się sieci neuronowej

Przy uczeniu neuronu lub sieci neuronowej zakładaliśmy poprzednio, że istnieje wartość zadana z dla neuronu lub wektor wartości zadanych Z dla sieci. Wartości zadane spełniały rolę tzw. nauczyciela w procesie uczenia sieci. W wielu przypadkach jest to założenie zbyt krępujące lub niemożliwe do spełnienia, gdy nie znamy wymaganych wartości zadanych wektora Z. To spowodowało, że powstały nowe techniki uczenia sieci bez nauczyciela. Zasada tego uczenia polega na tym, że waga w_{ij} w procesie iteracyjnym uczenia się wzrasta o wielkość proporcjonalną do iloczynu j-tej składowej wektora X oraz i-tej składowej wektora Y. Za pomocą wzoru możemy to ująć następująco:

$$w'_{ij} = w_{ij} + x_j y_i, \tag{14.14}$$

gdzie:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j. \tag{14.15}$$

Jest to tzw. algorytm Hebba. Nazwa pochodzi od nazwiska twórcy algorytmu. Taka sieć ma własności autoasocjacyjne. Wzmacnianiu ulegają te wagi, dla których odpowiadające składowe wektora X są duże. Dzieje się to jedynie w tych neuronach, dla których wyjścia z neuronów są duże (składowa wektora Y duża). Neuron wytrenowany do rozpoznawania pewnego sygnału X potrafi także rozpoznać sygnały podobne do niego.

Wprowadza się też pewne modyfikacje wzoru (14.14) [94]. W związku z tym wprowadzimy wielkość k oznaczającą numer kroku iteracyjnego w procesie uczenia.

1) Przyrostowe samouczenie (differential hebbian learning)

$$w_{ij}^{(k+1)} = w_{ij}^{(k)} + \eta[(x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)})(y_i^{(k)} - y_i^{(k-1)})]. \tag{14.16}$$

2) "Gwiazda wejść" (instar training)

$$w_{ij}^{(k+1)} = w_{ij}^{(k)} + \eta^{(k)}(x_j^{(k)} - w_{ij}^{(k)}). \tag{14.17}$$

3) "Gwiazda wyjść" (outstar)

$$w_{ij}^{(k+1)} = w_{ij}^{(k)} + \eta^{(k)}(y_i^{(k)} - w_{ij}^{(k)}). \tag{14.18}$$

4) Uczenie z dyskryminacją

$$w_{ij}^{(k+1)} = w_{ij}^{(k)} + \eta(\hat{x}_j^{(k)} \cdot \hat{y}_i^{(k)}). \tag{14.19}$$

gdzie:

$$\hat{x}_j^{(k)} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x_j^{(k)} > \varepsilon, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku;} \end{cases} \tag{14.20}$$

$$\hat{y}_i^{(k)} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } y_i^{(k)} > \varepsilon, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku;} \end{cases} \tag{14.21}$$

ε - wartość progowa.

5) Uogólniony algorytm z dyskryminacją (reguła Hebb/Anti-Hebb)

$$w_{ij}^{(k+1)} = w_{ij}^{(k)} + \eta \hat{x}_j^{(k)} (2\hat{y}_i^{(k)} - 1). \tag{14.22}$$

6) Algorytm Hopfielda

$$w_{ij}^{(k+1)} = w_{ij}^{(k)} + \eta(2\hat{x}_j^{(k)} - 1)(2\hat{y}_i^{(k)} - 1). \tag{14.23}$$

Istnieją jeszcze bardziej skomplikowane i wyrafinowane metody uczenia, takie jak uczenie z rywalizacją czy uczenie z forsowaniem. Można się z nimi dokładnie zapoznać w odpowiedniej literaturze fachowej [84], [94].

14.7. Sieci wielowarstwowe

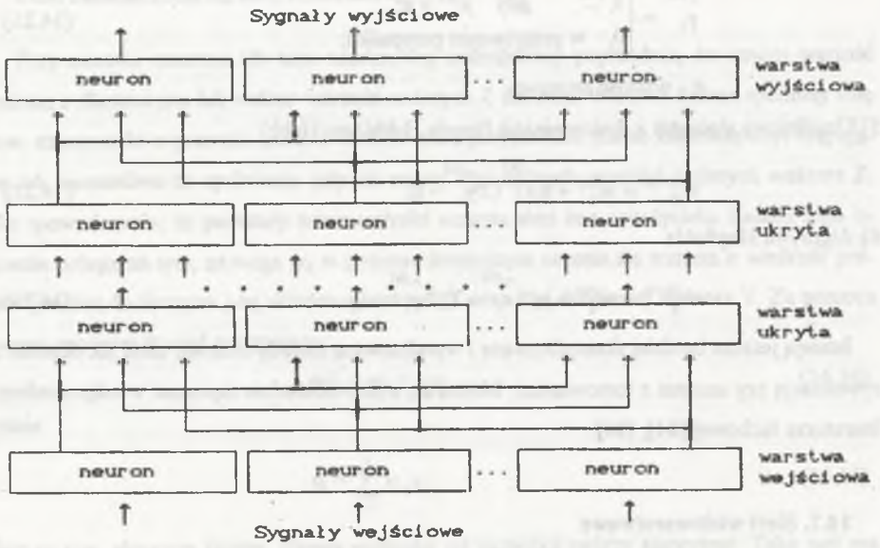
Sieci wielowarstwowe to takie, gdzie wyjścia neuronów z pierwszej warstwy wprowadza się na wejścia do kolejnej warstwy neuronów. Schematycznie przedstawia to rysunek 14.4. Pierwszą warstwę, do której wprowadza się wektor X (dane wejściowe), nazywa się warstwą wejściową. Kolejne warstwy nazywają się warstwami ukrytymi. Ostatnia warstwa nazywa się warstwą wyjściową. Na wyjściach neuronów tej warstwy otrzymuje się wektor wyjściowy Y (wyniki końcowe). Za pomocą nieliniowych sieci wielowarstwowych można zrealizować dowolne odwzorowania sygnałów X w wyjściowe sygnały Y. Sieci takie potrafią rozpoznawać bardzo skomplikowane obszary określone przez różne sygnały X.

14.8. Sieci nieliniowe

Sieci nieliniowe zbudowane są z neuronów zawierających nieliniowy element przetwarzania. Wprowadzenie takiego elementu do neuronu jest uzasadnione tym, że nie wszystkie zagadnienia da się rozwiązać za pomocą sieci liniowych oraz tym, że rzeczywiste neurony biologiczne są nieliniowe. Nieliniowy element przetwarzający w neuronie opisany jest równaniem:

$$y = \varphi(e), \tag{14.24}$$

gdzie: φ jest funkcją nieliniową, a e jest wyjściem z liniowej części neuronu, tj.:



Rys. 14.4. Sieć wielowarstwowa
Fig. 14.4. Multilayer networks

$$e = \sum_{j=1}^{n} w_j x_j. \tag{14.25}$$

W sieciach nieliniowych najczęściej stosuje się uogólnioną postać wzoru (14.25) rozszerzoną o wyraz stały w_0.

$$e = \sum_{j=1}^{n} w_j x_j + w_0. \tag{14.26}$$

W celu ujednolicenia zapisu przyjmuje się fikcyjny sygnał i wtedy wzór (14.26) można przedstawić w postaci:

$$e = \sum_{j=0}^{n} w_j x_j. \tag{14.27}$$

Wzór (14.27) wykorzystuje się najczęściej; określa on najbardziej typową postać łącznego pobudzenia neuronu (dla liniowej jego części). Istnieją też inne formuły określania sygnału e na podstawie znajomości wektora wag W i wektora sygnałów wejściowych X [84], [94].

Przejdziemy teraz do omówienia różnych postaci funkcji określającej nieliniowość neuronu (wzór (14.24)). Najchętniej i najczęściej spotykanym przekształceniem nieliniowym jest funkcja logistyczna:

$$y=1/(1 + \exp(-\beta e)). \tag{14.28}$$

Zaletą tej funkcji jest to, że jej pochodną można łatwo obliczyć za pomocą wartości samej funkcji:

$$\frac{dy}{dx} = \beta y(1 - y) \tag{14.29}$$

Inną funkcją stosowaną w nieliniowych sieciach neuronowych jest tangens hiperboliczny:

$$y=\tanh(\beta e). \tag{14.30}$$

Dla tej funkcji też w łatwy sposób można wyrazić pochodną w zależności od wartości:

$$\frac{dy}{dx} = \beta y(1 + y)(1 - y). \tag{14.31}$$

Inne funkcje wykorzystywane w nieliniowych sieciach neuronowych to [94]:

- fragment sinusoidy

$$y = \begin{cases} -1, & \text{gdy} \quad e < -\pi/2, \\ \sin(\beta e), & \text{gdy} \quad -\pi/2 \le e \le \pi/2, \\ 1, & \text{gdy} \quad e > \pi/2; \end{cases} \tag{14.32}$$

- funkcja signum

$$y = \begin{cases} 1, & \text{gdy} \quad e > 0, \\ 0, & \text{gdy} \quad e = 0, \\ -1, & \text{gdy} \quad e < 0; \end{cases} \tag{14.33}$$

- zmodyfikowana funkcja signum

$$y = \begin{cases} 1, & \text{gdy} \quad e > 0, \\ -1, & \text{gdy} \quad e \le 0; \end{cases} \tag{14.34}$$

- funkcja skoku jednostkowego

$$y = \begin{cases} 1, & \text{gdy} \quad e > 0, \\ 0, & \text{gdy} \quad e \le 0; \end{cases} \tag{14.35}$$

- funkcja perceptronowa

$$y = \begin{cases} e, & \text{gdy} \quad e > 0, \\ 0, & \text{gdy} \quad e \le 0; \end{cases} \tag{14.36}$$

- funkcja BAM (Bidirectional Associative Memory)

$$y^{(k+1)} = \begin{cases} 1, & \text{gdy} \quad e > 0, \\ y^{(k)}, & \text{gdy} \quad e = 0, \\ -1, & \text{gdy} \quad e < 0; \end{cases} \tag{14.37}$$

- funkcja BSB (Brain State in a Box)

$$y = \begin{cases} 1, & \text{gdy} \quad e \ge 1, \\ e, & \text{gdy} \quad -1 < e < 1, \\ -1, & \text{gdy} \quad e \le 1; \end{cases} \tag{14.38}$$

- funkcja SPR (Spatio-Temporal Pattern Recognition)

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + f(-\alpha y^{(k)} + \beta e^{+}), \tag{14.39}$$

gdzie: f(u) jest "funkcją ataku" określoną następująco:

$$f(u) = \begin{cases} u, & \text{gdy} \quad u > 0, \\ \gamma u, & \text{gdy} \quad u \le 0, \end{cases} \tag{14.40}$$

a e^{+} jest dodatnią wartością sygnału e

$$e^{+} = \begin{cases} e, & \text{gdy} \quad e > 0, \\ 0, & \text{gdy} \quad e \le 0. \end{cases} \tag{14.41}$$

Dla neuronów, które posiadają różne elementy nieliniowe, proces uczenia będzie się odbywał według różnych algorytmów. Przytoczymy jedynie wzór dla neuronu o logistycznej funkcji $y=\varphi(e)$:

$$w_j^{(k+1)} = w_j^{(k)} + \eta(z^{(k)} - y^{(k)})(1 - y^{(k)})x_j^{(k)}y^{(k)}. \tag{14.42}$$

Przedstawiliśmy tu jedynie w skrócie podstawowe wiadomości o sieciach neuronowych. Szczegóły i dokładniejsze informacje na ten temat można znaleźć w odpowiedniej literaturze fachowej [84], [94]. Praktyczne wykorzystanie tej teorii może nastręczać wiele trudności w związku z tym, że sieć będzie się trudno uczyła. Może wystąpić potrzeba skalowania lub normowania sygnałów albo też może zajść potrzeba zmiany struktury sieci. Nieco tych trudności przedstawimy w poniższym przykładzie.

14.9. Przykład wykorzystania sieci neuronowej w górnictwie

Omawianą wyżej teorię wykorzystamy do nauczenia sieci neuronowej w celu wyznaczania grubości powłoki poślizgowej obudowy wielowarstwowej szybu. Ta tematyka dokładnie omówiona jest w pracy [30]. Warstwa taka spełnia następujące funkcje:

"- zapewnienie równomierności obciążenia trzonu nośnego obudowy, składającego się na ogół ze szczelnej, zewnętrznej ścianki stalowej, rdzenia betonowego oraz ewentualnie - wewnętrznego płaszcza stalowego lub kolumny tubingów; pomimo pewnego wzrostu obciążenia obudowy w wyniku parcia warstwy poślizgowej, uzyskuje się w ten sposób zwiększenie komfortu pracy konstrukcji;

- wytworzenie strefy amortyzującej deformacje ociosów, będące rezultatem wybierania złoża w najbliższym sąsiedztwie szybu, a także deformacje samego trzonu nośnego obudowy, spowodowane ruchami stopy lub głowicy szybu pod wpływem eksploatacji" [30].

Grubość warstwy poślizgowej wyznacza się na podstawie dziesięciu parametrów wejściowych. Parametry te przedstawione są w tablicy 14.1.

W pracy [30] dokonano przykładowych obliczeń grubości warstwy poślizgowej dla 72 wariantów danych wejściowych spośród 15 tysięcy kombinacji - jak piszą autorzy. "Czas trwania obliczeń jednego cyklu wyniósł około 5 minut na mikrokomputerze IBM PC XT TURBO" [30].

Nasuwa się pogląd, że można by nauczyć sieć neuronową zależności między parametrami wejściowymi a grubością warstwy poślizgowej na podstawie tych przeliczonych 72 wariantów. Innych wariantów spośród 15 tysięcy nie trzeba by już przeliczać, a sieć neuronowa dawałaby odpowiedź, jaka powinna być grubość warstwy poślizgowej dla innego wariantu.

Przeprowadzimy więc eksperyment z uczeniem sieci neuronowej. Badane warianty danych wejściowych przedstawione są w tablicy 14.2a, 14.2b i 14.2c. Sieć neuronowa zainstalowana na komputerze wymaga, aby pierwszą warstwą wejściową były neurony o jednym wejściu i jednym wyjściu. Te neurony stanowią tzw. warstwę buforową. Nie zmieniają one sygnałów wejściowych. Ponieważ sygnałów wejściowych jest dziesięć, to tę warstwę zbudowano z dziesięciu takich neuronów. Drugą kolejną warstwę, a według wcześniejszych oznaczeń pierwszą ukrytą, stanowiło dziesięć neuronów o dziesięciu wejściach i jednym wyjściu. W ostatniej wyjściowej warstwie był tylko jeden neuron o dziesięciu wejściach i jednym wyjściu. Sieć była nieliniowa. Nieliniowość w neuronach była wyrażona poprzez funkcję tangens hiperboliczny. Dane z tablicy 14.2c zredukowano o cztery warianty o numerach 53, 54, 55, 56, ponieważ te

Tablica 14.1

Wartości parametrów wejściowych

Lp.	Rodzaj parametru	Przyjęte wartości
1	Kąt obrotu stopy szybowej α, rd	0.001, 0.002, 0.003
2	Ciężar właściwy asfaltu γ_a, KN/m^3	11, 12, 13
3	Głębokość posadowienia stopy H_s, m	400, 600, 800
4	Średnica szybu w świetle D, m	4, 6, 8
5	Moduł sprężystości pierścienia wewnętrznego E_1, GPa	107, 210
6	Moduł sprężystości rdzenia betonowego E_2, GPa	32.4, 34.4, 36.0
7	Moduł sprężystości pierścienia zewnętrznego E_3, GPa	210
8	Grubość pierścienia wewnętrznego G_1, m	0.005, 0.01, 0.02, 0.04,0.06,0.08
9	Grubość rdzenia betonowego G_2, m	0.4, 0.6, 0.8
10	Grubość pierścienia zewnętrznego G_3, m	0.005, 0.01, 0.02

Źródło: pozycja literatury [30].

warianty zawierały niekompletne dane wejściowe. Brak było parametrów E_1 i G_1. Tak więc dla 68 zestawów pomiarowych przeprowadzono nauczanie sieci. Ilość iteracji zadano 100 tysięcy. Wyniki nauczania sieci neuronowej okazały się niezadowalające. Funkcja nauczania (funkcja błędu, rysunek 14.7) zbyt wolno zmniejszała swoje wartości oraz pojawiały się cyklicznie większe wartości funkcji błędu. Ta sieć trudno się uczyła, z uwagi na to że dane wejściowe były z bardzo różnych przedziałów liczbowych. Na przykład:

parametr H_S przybierał wartości 400, 600, 800;

parametr E_1 posiadał wartości 107, 210; natomiast

parametr α miał wartości liczbowe 0.001, 0.002, 0.003;

parametr G_3 miał wartości liczbowe 0.005, 0.01, 0.02.

Parametry α i G_3 w porównaniu z parametrami H_S i E_1 były mało znaczące. Korekcja wag w procesie uczenia spowodowana parametrami H_S i E_1 mogła przewyższyć wartości samych parametrów α i G_3.

Zdecydowano się więc na przeskalowanie wszystkich sygnałów do przedziału [0,1] i powtórzenie nauczania sieci neuronowej. W nowym eksperymencie zrezygnowano z parametru wejściowego E_3, jako że w każdym wariancie miał on wartość stałą 210. Skalowanie było inne dla każdego parametru. Był to więc pewien rodzaj kodowania wielkości wejściowych i wyjściowych sieci. Sygnały zostały zakodowane w następujący sposób:

Tablica 14.2a

Badanie wartości wariantów

Lp.	α	γ_a	H_S	D	E_1	E_2	E_3	G_1	G_2	G_3	d
1	0.001	11	400	4	210	32.4	210	0.01	0.4	0.01	6.9
2	0.003	11	400	4	210	32.4	210	0.01	0.4	0.01	20.70
3	0.001	12	400	4	210	32.4	210	0.01	0.4	0.01	6.7
4	0.003	12	400	4	210	32.4	210	0.01	0.4	0.01	20.1
5	0.001	13	400	4	210	32.4	210	0.01	0.4	0.01	6.5
6	0.003	13	400	4	210	32.4	210	0.01	0.4	0.01	19.60
7	0.001	11	800	4	210	32.4	210	0.01	0.4	0.01	8.8
8	0.003	11	800	4	210	32.4	210	0.005	0.4	0.005	26.4
9	0.001	12	800	4	210	32.4	210	0.005	0.4	0.005	7.9
10	0.003	12	800	4	210	32.4	210	0.005	0.4	0.005	23.6
11	0.001	13	800	4	210	32.4	210	0.005	0.4	0.005	7.3
12	0.003	13	800	4	210	32.4	210	0.005	0.4	0.005	21.9
13	0.002	11	800	6	210	32.4	210	0.005	0.4	0.005	17.0
14	0.002	12	800	6	210	32.4	210	0.005	0.4	0.005	15.9
15	0.002	13	800	6	210	32.4	210	0.005	0.4	0.005	15.0
16	0.002	11	800	8	210	32.4	210	0.005	0.4	0.01	17.5
17	0.002	12	800	8	210	32.4	210	0.005	0.4	0.005	16.6
18	0.002	13	800	8	210	32.4	210	0.005	0.8	0.005	15.9
19	0.002	11	800	8	210	32.4	210	0.005	0.8	0.005	23.9
20	0.002	12	800	8	210	32.4	210	0.005	0.8	0.005	22.9
21	0.002	13	800	8	210	32.4	210	0.005	0.8	0.005	21.9
22	0.002	12	800	8	210	32.4	210	0.005	0.6	0.005	20.1
23	0.002	11	600	6	210	32.4	210	0.005	0.4	0.005	16.7
24	0.003	12	600	6	210	32.4	210	0.005	0.4	0.005	16.0

Źródło: pozycja literatury [30].

- parametr α

  0.001 ↔ 0, 0.002 ↔ 0.5, 0.003 ↔ 1;

- parametr γ_a

  11 ↔ 0, 12 ↔ 0.5, 13 ↔ 1;

Tablica 14.2b

Badane wartości wariantów

Lp.	α	γ_a	H_s	D	E_1	E_2	E_3	G_1	G_2	G_3	d
25	0.002	13	600	6	210	32.4	210	0.01	0.40	0.01	15.3
26	0.002	11	600	8	210	32.4	210	0.01	0.40	0.01	17.1
27	0.002	12	600	8	210	32.4	210	0.01	0.40	0.01	16.5
28	0.002	13	600	8	210	32.4	210	0.01	0.40	0.01	15.9
29	0.002	11	800	8	210	32.4	210	0.01	0.80	0.01	24.7
30	0.002	12	600	8	210	32.4	210	0.01	0.80	0.01	20.4
31	0.002	13	600	8	210	32.4	210	0.01	0.80	0.01	19.9
32	0.002	12	600	8	210	32.4	210	0.01	0.60	0.01	18.8
33	0.002	11	600	6	210	32.4	210	0.02	0.40	0.02	19.0
34	0.002	12	600	6	210	32.4	210	0.02	0.40	0.02	18.2
35	0.002	13	600	6	210	32.4	210	0.02	0.40	0.02	17.6
36	0.002	11	600	8	210	32.4	210	0.02	0.40	0.02	18.9
37	0.002	12	600	8	210	32.4	210	0.02	0.40	0.02	18.4
38	0.002	13	600	8	210	32.4	210	0.02	0.40	0.02	17.9
39	0.002	11	800	8	210	32.4	210	0.02	0.80	0.02	26.5
40	0.002	12	600	8	210	32.4	210	0.02	0.80	0.02	21.2
41	0.002	13	600	8	210	32.4	210	0.02	0.80	0.02	20.6
42	0.002	12	600	8	210	32.4	210	0.02	0.60	0.02	20.0
43	0.002	13	800	8	210	32.4	210	0.01	0.40	0.01	16.3
44	0.002	13	800	8	210	32.4	210	0.02	0.40	0.01	17.3
45	0.003	13	800	8	210	32.4	210	0.01	0.60	0.01	19.8
46	0.002	13	800	8	210	32.4	210	0.02	0.60	0.01	20.5
47	0.002	13	800	8	210	32.4	210	0.01	0.80	0.01	22.6
48	0.002	13	800	8	210	32.4	210	0.02	0.80	0.01	23.1

Źródło: pozycja literatury [30]

- parametr H_s

400 ↔ 0, 600 ↔ 0.5, 800 ↔ 1;

- parametr D

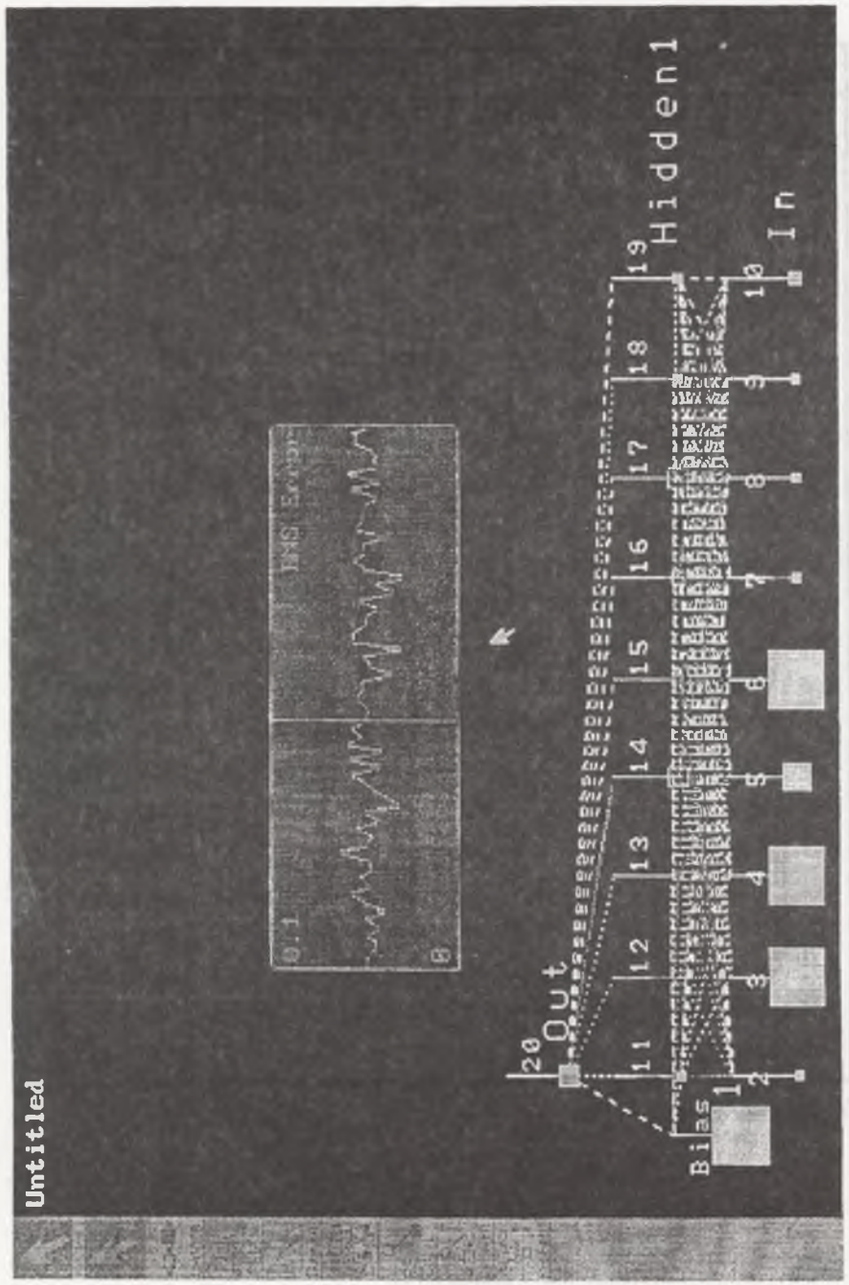
4 ↔ 0, 6 ↔ 0.5, 8 ↔ 1;

Tablica 14.2c

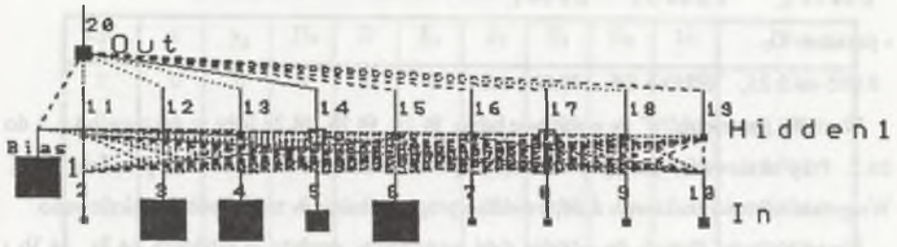
Badane wartości wariantów

Lp.	α	γ_a	H_s	D	E_1	E_2	E_3	G_1	G_2	G_3	d
49	0.002	13	800	8	210	32.4	210	0.01	0.4	0.01	16.4
50	0.002	13	800	8	210	32.4	210	0.01	0.4	0.02	17.6
51	0.002	13	800	8	210	32.4	210	0.01	0.8	0.01	22.8
52	0.002	13	800	8	210	32.4	210	0.01	0.8	0.02	23.5
53	0.002	13	800	8	-	32.4	210	-	0.4	0.01	15.9
54	0.002	13	800	8	-	32.4	210	-	0.8	0.01	22.5
55	0.002	13	800	8	-	32.4	210	-	0.4	0.02	17.1
56	0.002	13	800	8	-	32.4	210	-	0.8	0.02	23.2
57	0.002	13	800	8	210	34.4	210	0.01	0.4	0.01	17.2
58	0.002	13	800	8	210	34.4	210	0.01	0.6	0.01	20.6
59	0.002	13	800	8	210	34.4	210	0.01	0.8	0.01	23.3
60	0.002	13	800	8	210	36.0	210	0.01	0.4	0.01	17.4
61	0.002	13	800	8	210	36.0	210	0.01	0.6	0.01	20.8
62	0.002	13	800	8	210	36.0	210	0.01	0.8	0.01	23.5
63	0.002	13	800	8	107	32.4	210	0.04	0.4	0.02	19.4
64	0.002	13	800	8	107	32.4	210	0.06	0.4	0.02	20.5
65	0.002	13	800	8	107	32.4	210	0.08	0.4	0.02	21.6
66	0.002	13	800	8	107	32.4	210	0.04	0.8	0.02	24.8
67	0.002	13	800	8	107	32.4	210	0.06	0.8	0.02	25.5
68	0.002	13	800	8	107	32.4	210	0.08	0.8	0.02	26.3
69	0.002	13	800	8	107	32.4	210	0.04	0.4	0.01	17.8
70	0.002	13	800	8	107	32.4	210	0.08	0.4	0.01	20.2
71	0.002	13	800	8	107	32.4	210	0.04	0.8	0.01	23.7
72	0.002	13	800	8	107	32.4	210	0.08	0.8	0.01	25.6

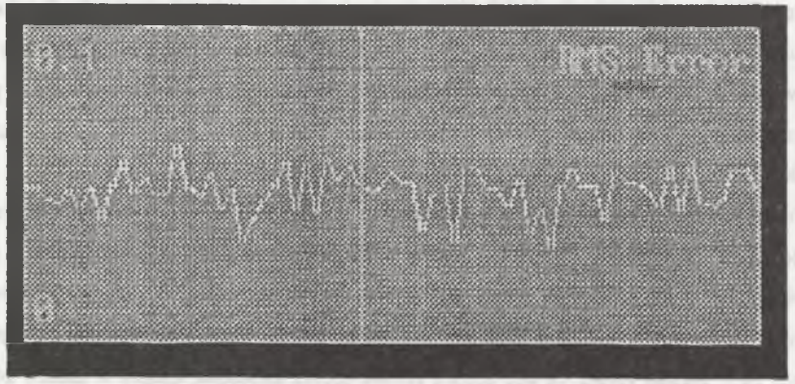
Źródło: pozycja literatury [30].



Rys. 14.5. Obraz z monitora komputera w trakcie uczenia sieci neuronowej
Fig. 14.5. The picture from a computer screen while teaching a neuron network



Rys. 14.6. Struktura sieci neuronowej (obraz z monitora komputera)
Fig. 14.6. The structure of a neuron network (the picture from a computer screen)



Rys. 14.7. Funkcja uczenia (funkcja błędu) w trakcie uczenia sieci neuronowej (obraz z monitora komputera)

Fig. 14.7. The function of teaching (the function of error) while teaching a neuron network (the picture from a computer screen)

- parametr E_1

  $107 \leftrightarrow 0$, $210 \leftrightarrow 1$;

- parametr E_2

  $32.4 \leftrightarrow 0.1$ $34.4 \leftrightarrow 0.6$ $36.0 \leftrightarrow 1$;

- parametr G_1

  $0.005 \leftrightarrow 0.05$, $0.01 \leftrightarrow 0.1$, $0.02 \leftrightarrow 0.2$, $0.04 \leftrightarrow 0.4$, $0.06 \leftrightarrow 0.6$, $0.08 \leftrightarrow 0.8$;

- parametr G_2

$0.04 \leftrightarrow 0$, $0.6 \leftrightarrow 0.5$ $0.8 \leftrightarrow 1$;

- parametr G_3

$0.005 \leftrightarrow 0.25$, $0.01 \leftrightarrow 0.5$, $0.02 \leftrightarrow 1$.

Wartości parametru "d" na podstawie tablic 14.2a, 14.2b, 14.2c były w zakresie od 6.5 do 26.5. Przy skalowaniu przyjęto, że $d \in [5,30]$ i temu zakresowi odpowiada przedział [0,1]. Wszystkie wartości parametru d odpowiednio proporcjonalnie w ten sposób przeskalowano.

Nowe wartości danych do uczenia sieci neuronowej zawarto w tablicach 14.3a, 14.3b i 14.3c. Struktura sieci neuronowej przedstawiona jest na rysunkach 14.5 i 14.6. Element "Bias" o numerze 1 oznacza sygnał stały równy 1 ($x_0 \equiv 1$) zgodnie z ustaleniami przedstawionymi w rozdziale 14.8. Warstwę wejściową (buforową) stanowiły neurony o numerach od 2 do 10. Następna warstwa zbudowana była z dziewięciu neuronów o dziewięciu wejściach i jednym wyjściu (numery neuronów od 11 do 19). Ostatnią wyjściową warstwą był jeden neuron o dziewięciu wejściach i jednym wyjściu. Nieliniowość w neuronach była reprezentowana przez funkcję tangens hiperboliczny. Ilość iteracji zadano 200 tysięcy. Fragment funkcji uczenia (funkcji błędu) dla tego przypadku przedstawiony jest na rysunku 14.7.

Po wykonaniu tych obliczeń przeprowadzono porównanie wartości zadanych (parametr wyjściowy d zakodowany - grubość warstwy poślizgowej - na podstawie tablicy 14.3) z odpowiedzią sieci po nauczaniu, dla 68 wariantów danych wejściowych. Wyniki porównania przedstawiono w tablicy 14.4. Wyniki porównania po odkodowaniu tych wartości przedstawia tablica 14.5. Można uznać, że sieć została prawie dobrze nauczona. Liczby w tablicy 14.5 są prawie takie same.

Tablica 14.3a

Badane wartości wariantów (zakodowane)

Lp.	α	γ_a	H_S	D	E_1	E_3	G_1	G_2	G_3	d
1	0	0	0	0	1	0.1	0.05	0	0.25	0.076
2	1	0	0	0	1	0.1	0.05	0	0.25	0.628
3	0	0.5	0	0	1	0.1	0.05	0	0.25	0.068
4	1	0.5	0	0	1	0.1	0.05	0	0.25	0.604
5	0	1	0	0	1	0.1	0.05	0	0.25	0.060
6	1	1	0	0	1	0.1	0.05	0	0.25	0.584
7	0	0	1	0	1	0.1	0.05	0	0.25	0.152
8	1	0	1	0	1	0.1	0.05	0	0.25	0.856
9	0	0.5	1	0	1	0.1	0.05	0	0.25	0.116
10	1	0.5	1	0	1	0.1	0.05	0	0.25	0.744
11	0	1	1	0	1	0.1	0.05	0	0.25	0.092
12	1	1	1	0	1	0.1	0.05	0	0.25	0.676
13	0.5	0	1	0.5	1	0.1	0.05	0	0.25	0.480
14	0.5	0.5	1	0.5	1	0.1	0.05	0	0.25	0.436
15	0.5	1	1	0.5	1	0.1	0.05	0	0.25	0.400
16	0.5	0	1	1	1	0.1	0.05	0	0.25	0.500
17	0.5	0.5	1	1	1	0.1	0.05	0	0.25	0.464
18	0.5	1	1	1	1	0.1	0.05	1	0.25	0.436
19	0.5	0	1	1	1	0.1	0.05	1	0.25	0.756
20	0.5	0.5	1	1	1	0.1	0.05	1	0.25	0.716
21	0.5	1	1	1	1	0.1	0.05	1	0.25	0.676
22	0.5	0.5	1	1	1	0.1	0.05	0.5	0.25	0.604
23	0.5	0	0.5	0.5	1	0.1	0.05	0	0.25	0.468
24	1	0.5	0.5	0.5	1	0.1	0.05	0	0.25	0.440

Tablica 14.3b

Badane wartości wariantów (zakodowane)

Lp.	α	γ_a	H_s	D	E_1	E_2	G_1	G_2	G_3	d
25	0.5	1	0.5	0.5	1	0.1	0.05	0	0.25	0.412
26	0.5	0	0.5	1	1	0.1	0.05	0	0.25	0.484
27	0.5	0.5	0.5	1	1	0.1	0.05	0	0.25	0.460
28	0.5	1	0.5	1	1	0.1	0.05	0	0.25	0.436
29	0.5	0	1	1	1	0.1	0.05	1	0.25	0.788
30	0.5	0.5	0.5	1	1	0.1	0.05	1	0.25	0.616
31	0.5	1	0.5	1	1	0.1	0.05	1	0.25	0.596
32	0.5	0.5	0.5	1	1	0.1	0.05	1	0.25	0.552
33	0.5	0	0.5	0.5	1	0.1	0.2	0	1	0.560
34	0.5	0.5	0.5	0.5	1	0.1	0.2	0	1	0.528
35	0.5	1	0.5	0.5	1	0.1	0.2	0	1	0.504
36	0.5	0	0.5	1	1	0.1	0.2	0	1	0.556
37	0.5	0.5	0.5	1	1	0.1	0.2	0	1	0.536
38	0.5	1	0.5	1	1	0.1	0.2	0	1	0.516
39	0.5	0	1	1	1	0.1	0.2	1	1	0.860
40	0.5	0.5	0.5	1	1	0.1	0.2	1	1	0.648
41	0.5	1	0.5	1	1	0.1	0.2	1	1	0.624
42	0.5	0.5	0.5	1	1	0.1	0.2	0.5	1	0.600
43	0.5	1	1	1	1	0.1	0.1	0	0.25	0.452
44	0.5	1	1	1	1	0.1	0.2	0	0.25	0.492
45	0.5	1	1	1	1	0.1	0.1	0.5	0.25	0.592
46	0.5	1	1	1	1	0.1	0.2	0.5	0.25	0.620

Tablica 14.3c

Badane wartości wariantów (zakodowane)

Lp.	α	γ_a	H_s	D	E_1	E_2	G_1	G_2	G_3	d
47	0.5	1	1	1	1	0.1	0.1	1	0.25	0.704
48	0.5	1	1	1	1	0.1	0.2	1	0.25	0.724
49	0.5	1	1	1	1	0.1	0.05	0	0.5	0.456
50	0.5	1	1	1	1	0.1	0.05	0	1	0.504
51	0.5	1	1	1	1	0.1	0.05	1	0.5	0.712
52	0.5	1	1	1	1	0.1	0.05	1	1	0.740
57	0.5	1	1	1	1	0.6	0.1	0	0.5	0.488
58	0.5	1	1	1	1	0.6	0.1	0.5	0.5	0.624
59	0.5	1	1	1	1	0.6	0.1	1	0.5	0.732
60	0.5	1	1	1	1	1	0.1	0	0.5	0.496
61	0.5	1	1	1	1	1	0.1	0.5	0.5	0.632
62	0.5	1	1	1	1	1	0.1	1	0.5	0.740
63	0.5	1	1	1	0	0.1	0.4	0	1	0.576
64	0.5	1	1	1	0	0.1	0.6	0	1	0.620
65	0.5	1	1	1	0	0.1	0.8	0	1	0.664
66	0.5	1	1	1	0	0.1	0.4	1	1	0.792
67	0.5	1	1	1	0	0.1	0.6	1	1	0.820
68	0.5	1	1	1	0	0.1	0.8	1	1	0.852
69	0.5	1	1	1	0	0.1	0.4	0	0.25	0.512
70	0.5	1	1	1	0	0.1	0.8	0	0.25	0.608
71	0.5	1	1	1	0	0.1	0.4	1	0.25	0.748
72	0.5	1	1	1	0	0.1	0.8	1	0.25	0.812

Tablica 14.4

Porównanie wyników (zakodowanych)

Lp.	d zadane	d z sieci	Lp.	d zadane	d z sieci	Lp.	d zadane	d z sieci
1	0.076	0.073	24	0.440	0.442	47	0.704	0.704
2	0.628	0.625	25	0.412	0.410	48	0.724	0.722
3	0.068	0.072	26	0.484	0.481	49	0.456	0.460
4	0.604	0.601	27	0.460	0.464	50	0.504	0.502
5	0.060	0.059	28	0.436	0.436	51	0.712	0.711
6	0.584	0.583	29	0.788	0.792	52	0.740	0.741
7	0.152	0.157	30	0.616	0.618	57	0.488	0.490
8	0.856	0.856	31	0.596	0.597	58	0.624	0.626
9	0.116	0.120	32	0.552	0.553	59	0.732	0.732
10	0.744	0.741	33	0.560	0.559	60	0.496	0.494
11	0.092	0.096	34	0.528	0.530	61	0.632	0.631
12	0.676	0.677	35	0.504	0.499	62	0.740	0.739
13	0.480	0.480	36	0.556	0.554	63	0.576	0.575
14	0.436	0.432	37	0.536	0.540	64	0.620	0.623
15	0.400	0.400	38	0.516	0.520	65	0.664	0.663
16	0.500	0.502	39	0.860	0.862	66	0.792	0.791
17	0.464	0.467	40	0.648	0.649	67	0.820	0.823
18	0.436	0.438	41	0.624	0.628	68	0.852	0.853
19	0.756	0.755	42	0.600	0.597	69	0.512	0.510
20	0.716	0.716	43	0.452	0.453	70	0.608	0.606
21	0.676	0.676	44	0.492	0.491	71	0.748	0.748
22	0.604	0.606	45	0.592	0.590	72	0.812	0.809
23	0.468	0.463	46	0.620	0.621			

Tablica 14.5

Porównanie wyników (odkodowanych)

Lp.	d zadane	d z sieci	Lp.	d zadane	d z sieci	Lp.	d zadane	d z sieci
1	6.900	6.835	24	16.000	16.061	47	22.600	22.600
2	20.700	20.633	25	15.300	15.260	48	23.100	23.043
3	6.700	6.792	26	17.100	17.030	49	16.400	16.496
4	20.100	20.033	27	16.500	16.602	50	17.600	17.546
5	6.500	6.480	28	15.900	15.891	51	22.800	22.785
6	19.600	19.576	29	24.700	24.802	52	23.500	23.528
7	8.800	8.920	30	20.400	20.450	57	17.200	17.251
8	26.400	26.393	31	19.900	19.920	58	20.600	20.650
9	7.900	8.006	32	18.800	18.837	59	23.300	23.298
10	23.600	23.522	33	19.000	18.966	60	17.400	17.357
11	7.300	7.400	34	18.200	18.260	61	20.800	20.782
12	21.900	21.917	35	17.600	17.482	62	23.500	23.471
13	17.000	17.007	36	18.900	18.839	63	19.400	19.367
14	15.900	15.809	37	18.400	18.497	64	20.500	20.566
15	15.000	15.009	38	17.900	17.993	65	21.600	21.580
16	17.500	17.542	39	26.500	26.560	66	24.800	24.786
17	16.600	16.671	40	21.200	21.220	67	25.500	25.586
18	15.900	15.949	41	20.600	20.711	68	26.300	26.332
19	23.900	23.876	42	20.000	19.914	69	17.800	17.738
20	22.900	22.896	43	16.300	16.317	70	20.200	20.144
21	21.900	21.892	44	17.300	17.266	71	23.700	23.690
22	20.100	20.150	45	19.800	19.750	72	25.300	25.229
23	16.700	16.576	46	20.500	20.514			

15. ZAKOŃCZENIE

W pracy przedstawiono różne metody matematyczne odnoszące się do różnego rodzaju sytuacji niepewnych, w których należy podjąć decyzje. Decyzje mogą być podejmowane indywidualnie lub grupowo. Trudności w podejmowaniu decyzji mogą być różnego typu, np. niezgodność opinii ekspertów, konflikt interesów przedsiębiorstw, posiadane informacje niekompletne lub niejasno wyrażone albo też ogrom zagadnienia przerastający możliwości precyzyjnego opisu matematycznego.

W pracy omawiane problemy ilustrowano licznymi rysunkami i schematami blokowymi.

Przedstawiono też różne przykłady zastosowania omawianych zagadnień. W przykładach starano się zwrócić uwagę na korzyści wynikające z zastosowania danej metody w podejmowaniu decyzji w trudnych sytuacjach. W dobie komputeryzacji wykonanie obliczeń numerycznych związanych z poruszanymi zagadnieniami nie stanowi problemu. Wyniki uzyskane z obliczeń mogą w istotny sposób pomóc w podjęciu decyzji. Metody przedstawione w pracy można potraktować jako narzędzia w procesie wspomagania podejmowania decyzji w sytuacjach niepewnych.

Następujące tematy wprowadzają nowe elementy oraz oryginalne ujęcie materiału:

1. Przedstawienie w sposób kompleksowy i szczegółowy korelacji uszeregowań w odniesieniu do podejmowania decyzji (rozdział 3.1, 3.2, 3.3).
2. Opracowanie metody eliminacji ekspertów o ekstremalnych opiniach, wykorzystującej współczynnik korelacji wielorakiej (rozdział 3.4).
3. Zastosowanie korelacji uszeregowań do lokalizacji epicentrum grupy wstrząsów w kopalni (rozdział 3.5).
4. Określenie pojęcia opinii n-wymiarowej (rozdział 4.2).
5. Określenie pojęcia optymalnej decyzji n-wymiarowej (rozdział 4.5).
6. Zdefiniowanie bliskości dwóch opinii n-wymiarowych (rozdział 4.3).
7. Zdefiniowanie bliskości jednej opinii n-wymiarowej od zbioru opinii wzajemnie zbliżonych do siebie (rozdział 4.3).

8. Określenie obszarów tolerancji: minimalnego, maksymalnego i średniego dla decyzji optymalnej (rozdział 4.5).
9. Zastosowanie decyzji n-wymiarowych do określania strefy niebezpiecznej przy wstrząsach górniczych (rozdział 4.6).
10. Adaptacja metod teorii gier do zagadnień górniczych (rozdziały 5, 6, 7, 8).
11. Ogólne sformułowanie procesu decyzyjnego wieloetapowego w przypadku występowania wielu decydentów (rozdział 9.2).
12. Wprowadzenie nowych definicji decyzji rozmytej (definicje 11.6, 11.7, 11.11, 11.12, 11.13).
13. Wprowadzenie nowych pojęć rozmytych dotyczących górotworu: τ_{roz}, υ_{roz} (rozdział 13.1); T_{1roz} (rozdział 13.2).
14. Zdefiniowanie współczynnika pewności prognozy (rozdział 13.2).
15. Modyfikacja metody prognozowania silnych wstrząsów podziemnych z uwzględnieniem teorii zbiorów rozmytych (rozdział 13).
16. Wykorzystanie sieci neuronowej do wyznaczania grubości powłoki poślizgowej obudowy wielowarstwowej szybu (rozdział 14.9).

W warunkach gospodarki rynkowej, w związku z występowaniem konkurencji, podejmowane decyzje uwzględniające wyniki odpowiednich metod matematycznych w istotny sposób mogą przyczynić się do zwiększenia zysku przedsiębiorstwa.

Nowoczesne zarządzanie i kierowanie przedsiębiorstwem wymaga naukowego podejścia i stosowania różnych metod matematycznych z wykorzystaniem techniki komputerowej.

LITERATURA

1. Ackoff R.L.: Decyzje optymalne w badaniach stosowanych. PWN, Warszawa 1969.
2. Aivazyan S.A., Yenyukov I.S., Meshalkin L.D.: Applied statistics. Finansy i statistika, Moscow 1985.
3. Barton R.F.: Wprowadzenie do symulacji i gier. WNT, Warszawa 1974.
4. Beer S.: Cybernetyka a zarządzanie. PWN. Warszawa 1966.
5. Bellman R.E., Dreyfus E.: Programowanie dynamiczne, zastosowania. PWE, Warszawa 1967.
6. Bellman R.E., Zadeh L.A.: Decision - making in fuzzy enviroment. Management Science 17, N.4, 1970.
7. Blackwell D., Girshick M.A.: Theory of Games and Statistical Decisions. John Wiley, New York 1954.
8. Blin J.M.: Fuzzy relations in group decision theory. J. Cybern., vol. 3, 1974.
9. Blin J.M., Whinston A.B.: Fuzzy sets and social choice. J. Cybern., vol. 3, 1974.
10. Bolc L., Borodziewicz W., Wójcik M.: Podstawy przetwarzania informacji niepewnej i niepełnej. PWN, Warszawa 1991.
11. Chanas S.: Model sieciowy z nieostro określonymi czasami trwania czynności. Instytut Organizacji i Zarządzania Politechniki Wrocławskiej. Komunikat 203, Wrocław 1976.
12. Chanas S.: Metody budowy i analizy modelu sieciowego przedsięwziecia z nieostro określonymi czasami trwania czynności. Instytut Organizacji i Zarządzania Politechniki Wrocławskiej. Komunikat 220, Wrocław 1977.
13. Cholewa W.: Zastosowanie zbiorów rozmytych w projektowaniu układów diagnozujących stan maszyn. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Mechanika Nr 79, Gliwice 1983.
14. Czaja-Pośpiech D., Czogała E., Pedrycz W.: Sterowanie rozmyte jako matematyczna formalizacja heurystycznego sposobu sterowania złożonymi procesami. Podstawy Sterowania 8, 1978.
15. Czaja-Pośpiech D., Czogała E., Pedrycz W.: Metoda sterowania oparta na regułach logiki rozmytej. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Automatyka Nr 42, Gliwice 1978.

16. Czaja-Pośpiech D., Czogała E., Pedrycz W.: Regulatory DDC a regulatory rozmyte w sterowaniu procesami przemysłowymi. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Automatyka Nr 47, Gliwice 1979.
17. Czaja-Pośpiech D., Czogała E., Pedrycz W.: Wielokrotne implikacje i złożeniowe reguły wnioskowania w logice wielowartościowej (rozmytej). Zesz. Nauk. Pol. Śl. Mat.-Fiz. Nr 31, Gliwice 1980.
18. Czogała E.: Probabilistic sets in decision making and control. Verlag TUV Rheinland, Koln 1984.
19. Czogała E., Pedrycz W.: Koncepcja sterowania rozmytego oparta o stany charakterystyczne. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Automatyka Nr 47, Gliwice 1979.
20. Czogała E., Pedrycz W.: Problemy sterowania w systemach opisanych równaniami relacyjnymi. Prace VIII Krajowej Konferencji Automatyki, Szczecin 1980.
21. Czogała E., Pedrycz W.: Elementy i metody teorii zbiorów rozmytych. Skrypt Pol. Śl. Nr 989, Gliwice 1980.
22. Czogała E., Pedrycz W.: Elementy i metody teorii zbiorów rozmytych. PWN, Warszawa 1985.
23. De Luca A., Termini S.: Entropy of L-fuzzy sets. Inform. Control 24, 1974.
24. De Luca A., Termini S.: On the convergence of entropy measures of a fuzzy set. Kybernetes 6, 1977.
25. De Luca A., Termini S.: Entropy and energy measures of a fuzzy set. In: Gupta, Ragade, Yager [36]. North-Holland Amsterdam 1979.
26. Deng Z.: Fuzzy pseudo-metric spaces. JMAA 86, 1982.
27. Drewniak J.: Fuzzy relation calculus. Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego Nr 1063, Katowice 1989.
28. Drewniak J.: Podstawy teorii zbiorów rozmytych. Skrypt Uniwersytetu Śląskiego Nr 347, Katowice 1987.
29. Dubois D., Prade H.: Operations on fuzzy numbers. Int. J. Syst. Sci., vol. 9, 1978.
30. Duda Z., Kohutek Z., Kuśmierz J., Mikołajek M., Szefer G.: Wyznaczanie grubości powłoki poślizgowej obudowy wielowarstwowej szybu ze względu na obrót stopy po wybraniu złoża w obrębie filara ochronnego. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Górnictwo Nr 202, Gliwice 1993.
31. Erceg M.A.: Metric spaces in fuzzy set theory. JMAA 69, 1979.
32. Giles R.: Łukasiewicz logic and fuzzy set theory. IJMMS 8, 1976.

33. Gorzałczany M.B., Stachowicz M.S.: O pewnych koncepcjach budowy regulatorów rozmytych. Zesz. Nauk. AGH, Elektryfikacja i Mechanizacja Nr 131, Kraków 1981.
34. Greń J.: Gry statystyczne i ich zastosowania. PWE, Warszawa 1967.
35. Greń J.: Statystyka matematyczna. Modele i zadania. PWN, Warszawa 1982.
36. Gupta M.M., Ragade R.K., Yager R.R.: Advances in fuzzy set theory and applications. North-Holland, Amsterdam 1979.
37. Hagemejer W., Hellwig Z., Przelaskowski W., Vielrose E.: Zagadnienia matematyki stosowanej w ekonomii. Zakład im. Ossolińskich, Wrocław 1966.
38. Hurwicz L.: Optimality Criteria for Decision Making Under Ignorance. Cowles Commission Discussion Paper, Statistics No 370, 1951.
39. Hutton B.: Products of fuzzy topological spaces. Gen. Topology Appl. 11, 1980.
40. Hutton B., Reilly L.: Separation axioms in fuzzy topological spaces. FSS 3, 1980.
41. Kacprzyk J.: Próba zastosowania zmiennych lingwistycznych do opisu i optymalizacji struktur organizacyjnych. Prace VI Krajowej Konf. Autom., Poznań 1974.
42. Kacprzyk J.: Zastosowanie zbiorów rozmytych do optymalnego przydziału stanowisk pracy. Archiwum Autom. Telemech. 20, 1975.
43. Kacprzyk J.: Wieloetapowe podejmowanie decyzji w warunkach rozmytości. PWN, Warszawa 1983.
44. Kacprzyk J.: Zbiory rozmyte w analizie systemowej. PWN, Warszawa 1983.
45. Kantorowicz L., Gorstko A.: Optymalne decyzje ekonomiczne. PWE, Warszawa 1976.
46. Karbownik A.: Studium wielkości wydobycia projektowanej kopalni podziemnej węgla kamiennego z uwzględnieniem niepewności informacji. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Górnictwo Nr 146, Gliwice 1986.
47. Kaźmierczak J.: Teoria gier w cybernetyce. Wiedza Powszechna, Warszawa 1973.
48. Knopfmacher J.: On measures of fuzziness. J. of Math. Anal. and Appl. 49, 1975.
49. Koczy L.T., Hajnal M.: A new attempt to axiomatize fuzzy algebra with an application example. Problems of Control and Information Theory, Vol. 6, 1977.
50. Kofler E.: Wstęp do teorii gier. PZWS, Warszawa 1963.
51. Kowalik S.: Wykorzystanie teorii gier do określania bezpieczeństwa. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Górnictwo Nr 210, Gliwice 1993.
52. Kowalik S.: Wybór decyzji n-wymiarowej przy wykorzystaniu metody ekspertów i wspomagania komputerowego. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Automatyka Nr 113, Gliwice 1995.

53. Kowalik S.: Podejmowanie decyzji w sytuacjach niepewnych z wykorzystaniem programowania dynamicznego. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Górnictwo Nr 218, Gliwice 1994.
54. Kowalik S.: Podejmowanie decyzji grupowych w oparciu o teorię zbiorów rozmytych. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Górnictwo Nr 219, Gliwice 1994.
55. Kowalik S.: Podejmowanie decyzji w oparciu o teorię gier wykorzystujące zasady gry z Naturą. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Górnictwo Nr 219, Gliwice 1994.
56. Kowalik S.: Wykorzystanie teorii zbiorów rozmytych do podejmowania decyzji. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Górnictwo Nr 219, Gliwice 1994.
57. Kowalik S.: Podejmowanie decyzji kompromisowych w oparciu o teorię gier kooperacyjnych. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Automatyka Nr 113, Gliwice 1995.
58. Kowalik S.: Podejmowanie decyzji w oparciu o teorię zbiorów rozmytych z wykorzystaniem różnych definicji decyzji rozmytej. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Górnictwo Nr 225, Gliwice 1995.
59. Kozdrój M., Przybyła H.: Teoria organizacji i zarządzania. Część 3. Modele matematyczne w organizacji produkcji górniczej. Skrypt Pol. Śl. Nr 1272, Gliwice 1986.
60. Krasucki F., Cholewa A.: Badania struktury doziemień w kopalnianych sieciach elektroenergetycznych 6kV. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Górnictwo Nr 82, Gliwice 1994.
61. Kryński H., Badach A.: Zastosowanie matematyki do podejmowania decyzji ekonomicznych. PWE, Warszawa 1976.
62. Krzemień S.: Systemowo-informacyjne modele oceny stanu zagrożenia wstrząsami górniczymi w kopalniach węgla kamiennego. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Górnictwo Nr 198, Gliwice 1991.
63. Krzemień S.: Teoretyczne podstawy określania miar stanu zagrożenia bezpieczeństwa w wyrobiskach górniczych. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Górnictwo Nr 204, Gliwice 1992.
64. Lee R.C.T., Chang C.L.: Some properties of fuzzy logic. Inform. Control 19, 1971.
65. Lesz M.: Ekonomiczne gry decyzyjne. PWE, Warszawa 1979.
66. Lesz M.: Techniczno-ekonomiczne zastosowania metod programowania dynamicznego. PWE, Warszawa 1968.
67. Luce R.D., Raiffa H.: Gry i decyzje. PWE, Warszawa 1964.
68. Łukasiewicz J.: Interpretacja liczbowa teorii zdań. Ruch Filozoficzny 7, Warszawa 1922.
69. Łukasiewicz J.: Selected works. PWN, Warszawa 1970.
70. Mc Kinsey J.C.: Introduction to the Theory of Games. Mc Graw Hill, New York 1952.

71. Mendecki A.: Metody jednoczesnej lokalizacji ognisk grupy wstrząsów górotworu i wyznaczania parametrów anizotropii prędkości fal sejsmicznych. Praca doktorska, Pol. Śl., Wydział Górniczy, Gliwice 1981.
72. Nash J.F.: Noncooperative games. Annals of Mathematics. vol. 54, 1951.
73. Nash J.F.: Two-person cooperative games. Econometrica. vol. 21, 1953.
74. Owen G.: Teoria gier. PWN, Warszawa 1975.
75. Pedrycz W.: On the use of fuzzy Łukasiewicz logic for fuzzy control. Archiwum Automatyki i Telemechaniki. Nr 3, 1980.
76. Pedrycz W.: O metodzie predykcji opartej na logice wielowartościowej. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Automatyka Nr 47, Gliwice 1979.
77. Pedrycz W.: Stabilność w systemach opisanych relacjami rozmytymi. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Automatyka Nr 47, Gliwice 1979.
78. Pedrycz W.: O wyznaczaniu sterowania w dialogowych systemach sterowania opisanych równaniami relacyjnymi. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Automatyka Nr 50, Gliwice 1980.
79. Pedrycz W.: Sterowanie i systemy rozmyte. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Automatyka Nr 70, Gliwice 1983.
80. Plewa F., Mysłek Z.: Wpływ zasolonych wód dołowych na własności podsadzki samozestalającej. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Górnictwo Nr 222, Gliwice 1994.
81. Polkowski L.T.: Wstęp do teorii gier. WPW - Politechnika Warszawska, Warszawa 1987.
82. Potocki Cz., Przybyła H.: Badania operacyjne w górnictwie. Skrypt Pol. Śl. Nr 906, Gliwice 1980.
83. Przybyła H.: Sformalizowane metody odnowy frontu eksploatacyjnego w kopalniach węgla kamiennego. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Górnictwo Nr 153, Gliwice 1988.
84. Rumelhart D.E., Mc Clelland J.L. (eds.): Parallel distributed processing. The Mit Press, Cambridge, Massachusetts 1986.
85. Sadowski W.: Teoria podejmowania decyzji. PWE, Warszawa 1976.
86. Sanchez E.: Inverses of fuzzy relations. Application to possibility distributions and medical diagnosis. Proc. IEEE Conf. Decision and Control. New Orleans 1977.
87. Sanchez E.: Medical diagnosis and composite fuzzy relations. Advances in fuzzy sets theory and applications. North-Holland Amsterdam 1979.

88. Sarna M.: Adekwatność modelowania matematycznego technicznych systemów mechanicznych w języku teorii zbiorów rozmytych. Zesz. Nauk. Pol. Łódź, Rozprawy Naukowe 48, Łódź 1983.
89. Savage L.J.: The theory of statistical decision. Journal of the Amercan Statistical Associoation No 46, 1951.
90. Skala H.J.: On many-valued logics, fuzzy sets, fuzzy logics and their applications. FSS 1, 1978.
91. Steczkowski J., Zeliaś A.: Statystyczne metody analizy cech jakościowych. PWE, Warszawa 1981.
92. Szalek M.: Pojęcia i metody teorii gier. PAN, Warszawa 1963.
93. Świerniak A.: Podejmowanie decyzji w sytuacjach konfliktowych. Skrypt Pol. Śl. Nr 1420, Gliwice 1988.
94. Tadeusiewicz R.: Sieci neuronowe. Akademicka Oficyna Wydawnicza, Warszawa 1993.
95. Trembecki A.: Matematyczne metody w górnictwie. Wydawnictwo "Śląsk", Katowice 1969.
96. Tyszka T.: Konflikty i strategie. WNT, Warszawa 1978.
97. Udny Yule G., Kendall M.G.: Wstęp do teorii statystyki. PWN, Warszawa 1966.
98. Vajda S.: Theory of Games and Linear Programming. New York 1956.
99. Weiss M.D.: Fixed points, separation, and induced topologies for fuzzy sets. J. of Math. Anal. and Appl. 1, 1975.
100. Wendcel E.: Elementy programowania dynamicznego. PWE, Warszawa 1968.
101. Wilk T.: Algorytmy podejmowania decyzji z zastosowaniem zbiorów rozmytych. Prace VII Krajowej Konf. Automatyki., Rzeszów 1977.
102. Williams J.D.: Strateg doskonały. Wprowadzenie do teorii gier. PWN, Warszawa 1965.
103. Wygralak M.: A few words on the importance of Jan Łukasiewicz works for fuzzy subsets theory. Zeszyty Nauk. Akad. Ekonom., Poznań (w druku).
104. Zadeh L.A.: Fuzzy sets. Information and Control, vol. 8, 1965.
105. Zadeh L.A.: Biological application of the theory of fuzzy sets and systems. Biocybernetics of the central nervous system. Boston, Little 1969.
106. Zadeh L.A.: Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decisision processes. IEEE Trans. Systems Man and Cybernetics SMC, 3 January 1973.

PODEJMOWANIE DECYZJI W GÓRNICTWIE W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI

Streszczenie

W pracy przedstawiono szereg metod matematycznych, które mogą być przydatne w zarządzaniu przedsiębiorstwem i w podejmowaniu trudnych decyzji. W pracy zaprezentowano jedynie te metody, które dotyczą sytuacji niepewnych, gdzie nie dysponujemy kompletną i pewną informacją. Decyzje musimy podejmować w sytuacji, gdzie informacja może być niepełna, nieprecyzyjna, niejasna. W przypadku niedostatku wiedzy odwołujemy się do ekspertów i dopiero na podstawie ich opinii podejmujemy odpowiednią decyzję. W praktyce bardzo często występują różnego rodzaju sytuacje niepewne i wtedy pojawiają się problemy z podjęciem właściwej decyzji. Z uwagi na to, że w życiu występuje dużo sytuacji niejasnych i to różnego typu, w pracy przedstawiono różne rodzaje metod matematycznych.

Prezentację metod rozpoczęto od metod ekspertowych. Przedstawiono metody korelacji uszeregowań w podejmowaniu decyzji. Najpierw określono zgodność opinii wyrażonych poprzez rangi dwóch ekspertów. Zgodność tę badano za pomocą współczynnika Spearmana. Następnie rozważono zgodność opinii grupy ekspertów. Do badania tej zgodności wykorzystano współczynnik zgodności Kendala i Babingtona-Smitha. Przedstawiono też sposób eliminowania ekspertów o ekstremalnych opiniach. Przedstawiono przykład wykorzystania rangowej korelacji do lokalizacji epicentrum grupy wstrząsów w kopalni.

Następnie rozważono zagadnienia, gdy opinie ekspertów nie są rangami (tj. kolejnymi liczbami naturalnymi), lecz dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Wprowadzono do rozważań tolerancję dolną i górną dla opinii oraz zdefiniowano tzw. opinię wielowymiarową. Określono sposób wyłaniania opinii zbliżonych do siebie i eliminowania pozostałych, zbyt różniących się od zasadniczej grupy opinii zbliżonych do siebie. Podano przykład wykorzystania tej metody do lokalizacji wstrząsu podziemnego przy użyciu różnych metod pomiarowych.

W kolejnych rozdziałach przedstawiono metody związane z teorią gier. Podstawy teorii gier konfliktowych o sumie zerowej omówiono w rozdziale 5. Zagadnieniu podejmowania decyzji w warunkach konkurencji rynkowej poświęcono rozdział 6 dotyczący niekooperacyjnych gier

o sumie niezerowej. Podejmowanie decyzji z wykorzystaniem kooperacji między przedsiębiorstwami, także w warunkach konkurencji rynkowej, przedstawiono w rozdziale 7 dotyczącym teorii gier kooperacyjnych.

W rozdziale 8 przedstawiono metody teorii gier z Naturą. Górotwór, na którym operują górnicy, został utożsamiony z Naturą. Omówiono tu zasadę minimalnego ryzyka, wskaźnik pesymizmu-optymizmu i zasadę równych prawdopodobieństw.

Podejmowanie decyzji z wykorzystaniem programowania dynamicznego w wieloetapowym procesie decyzyjnym przedstawiono w rozdziale 9. Zagadnienie zilustrowano na przykładzie dwóch konkurujących ze sobą przedsiębiorstw, które mają na celu osiągnięcie jak największych zysków.

Opisowi sytuacji niepewnych, w przypadku gdy informacje, na podstawie których ma być podjęta decyzja, są niedokładne, nieprecyzyjnie przedstawione lub niepewne, poświęcono następny rozdział dotyczący teorii zbiorów rozmytych.

W rozdziale 11 przedstawiono metody podejmowania decyzji w tzw. otoczeniu rozmytym oraz przy użyciu różnych definicji decyzji rozmytej.

W następnym rozdziale opisano sposób podejmowania decyzji grupowych w oparciu o teorię zbiorów rozmytych z wykorzystaniem tzw. grupowej preferencji społecznej.

Przykład wykorzystania liczb rozmytych do prognozowania wystąpienia silnych wstrząsów w kopalni przedstawiono w rozdziale 13.

Podstawy nowej gałęzi nauki teorii sieci neuronowych przedstawiono w rozdziale 14. Sieci te mogą być wykorzystywane w różnych dziedzinach życia.

W pracy zaprezentowano różnego rodzaju metody matematyczne, ponieważ w praktyce występują różnorakie sytuacje niepewne i różnorodne trudności mogą wystąpić w podejmowaniu decyzji. Właściwe i optymalne decyzje podnoszą efektywność zarządzania i przynoszą wymierne korzyści dla przedsiębiorstwa.

DECISION MAKING IN MINING IN CONDITIONS OF UNCERTAINTY

Summary

The work presents a number of mathematical methods which can be useful in managing a plant and making difficult decisions. The work deals only with the methods which concern uncertain situations when we do not have complete and reliable information at our disposal. We have to make decisions in situations in which information can be incomplete, imprecise or unclear. In the case of the lack of knowledge we refer to experts and on the basis of their opinions we make adequate decisions. In practice we face different kinds of uncertain situations and then difficulty making a suitable decision appears. Since in life there are so many unclear situations of different type, the work presents different kinds of mathematical methods.

Expert methods begin the presentation of methods. The methods of rank correlation in decision making have been presented. First, an agreement of the opinions expressed by the ranks of two experts has been determined. The agreement has been examined by means of Spearman's coefficient. Next, an agreement of the opinions expressed by a group of experts has been considered. Kendal and Babington-Smith's coefficient of concordance has been utilised for examining this agreement. The way to eliminate experts expressing extreme opinions has been also presented. An example of utilising rank correlation for locating the epicentre of tremors in a mine has been given.

Next, problems when experts' opinions are not ranks (i.e. successive natural numbers) but arbitrary real numbers have been considered. Upper and lower tolerance for opinions has been introduced into considerations and so-called multilayer opinion has been defined. The way of forming opinions close to each other and the way of eliminating the others, basically different from the group of opinions close to each other, has been determined. An example of utilising this methods has been given.

The following chapters deal with the methods connected with the theory of games. The principles of zero-sum conflicting games have been discussed in Chapter 5. The problem of making decisions under competitive market conditions has been shown in Chapter 6 concerning non-cooperative nonzero-sum games. Decision-making with the utilisation of cooperation between plants, also under competitive market conditions, has been presented in Chapter 7 concerning the theory of cooperative games.

Chapter 8 deals with the methods of the theory of games with Nature. Rock mass on which miners work is identified with Nature. The principle of minimum risk, the pessimism-optimism index and the principle of equal probabilities have been discussed here.

Making decisions with the utilisation of dynamic programming for multi-stage decision-making process has been presented in Chapter 9. The problem has been illustrated with the example of two plants competing with each other and aiming at the gains as large as possible.

The next chapter concerning the theory of fuzzy sets deals with the description of uncertain situations in which the information on the basis of which a decision is to be made is inaccurate, imprecise or unreliable.

Chapter 11 presents the methods of making decisions in so-called fuzzy neighbourhood and with the utilisation of different definitions of a fuzzy decision.

The next chapter describes the way of making group decisions on the basis of the theory of fuzzy sets with the utilisation of so-called group social preference.

The example of making use of fuzzy numbers in predicting the occurrence of powerful tremors in a mine has been given in Chapter 13.

The principles of a new branch of science - the theory of neuron networks - have been presented in Chapter 14. These networks can be utilised in many fields of life.

The work describes different kinds of mathematical methods because we face various uncertain situations in life and different kinds of difficulties may occur while making decisions. Right and optimum decisions increase the efficiency of management and bring in substantial profits to a plant.

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В ГОРНОМ ДЕЛЕ В УСЛОВИЯХ НЕУВЕРЕННОСТИ

Р е з ю м е

В работе представлен ряд математических методов, которые могут пригодится для управления предприятием, и для принятия тяжелых решений. Рассматриваются лишь те методы, которые относятся к неопределенным ситуациям, когда не располагаем полной и надежной информацией. Решения надо принимять и в случаях, когда информация может оказаться недостаточной, неточной и неясной. В случае недостатка данных обращаемся к экспертам и только на основе их мнений принимаем соответствующее решение. На практике очень часто встречаем разные неясные ситуации и тогда появляются трудности с принятием правильного решения. Из-за того, что в жизни имеем дело с большим количеством разного рода неясных ситуаций, в данной работе представлены разного рода математические методы.

Просмотр методов начинается с экспертных методов. Представляются методы ранговой корреляции при принятии решений. Сначала определяется сходство мнений выраженных рангами двух экспертов. Сходство это исследовалось с помощью коэффициента Спермана. Затем рассматривалось сходство мнений группы экспертов. Для исследования этого сходства был использован коэффициент конкордантности Кендаля и Бабингтона-Смиса. Представлен тоже способ исключения экспертов выражающих экстремальные мнения. Представлен пример использования ранговой корреляции для локализации эпицентра группы толчков на шахте.

Дальше рассмотрены вопросы, когда мнения экспертов не являются рангами (т.е. очередными натуральными числами), но любыми действительными числами. В рассуждениях учитывается нижний и верхний допуск и тоже дается определе-ние т.н. многомерного мнения. Был определен способ выделения мнений близких друг другу и исключения остальных, слишком отличающихся от основной группы сходных мнений. Дается тоже пример использования этого метода для локализации подземного толчка с использованием разных измерительных методов.

В очередных главах представляются методы связанные с теорией игр. Основы теории конфликтных игр с нулевой суммой рассматриваются в главе 5. Вопросу принятия решений в условиях рыночной конкуренции посвящена глава 6 о некооперативных играх с ненулевой суммой. Принятие решения с использованием кооперации между предприятиями, тоже в условиях рыночной конкуренции, представляется в главе 7, в которой говорится о теории некооперативных игр.

В главе 8 рассматриваются методы теории игр с Природой. Горные породы, в которых ведутся горне работы отождествляются с Природой. Описывается здесь принцип минимального риска, показатель пессимизма-оптимизма и принципы равных вероятностей.

Принятие решений с использованием динамического программирования в многоэтапном процессе принятия решений представляется в главе 9. Этод вопрос проилльюстрирован на примере двух соперничающих предприятий, целью которых является добиться самой большой прибыли.

В следующей главе говорится о теории размытых множеств. Описываются в ней неясные ситуации, когда информация, на основании которой должно быть принято решение, является неточной, неполной или сомнительной.

В главе 11 представляются методы принятия решений в т.н. размытой среде и при использовании разных определений размытого решения.

В следующей главе описывается способ принятия групповых решений на основании теории размытых множеств с использованием т.н. групповой общественной преференции.

Пример использования размытых чисел для прогнозов выступленя мощных толчков на шахте, представлен в главе 13.

Основы новой отрасли науки, теории нейронных сетей, представляются в главе 14. Данные сети могут быть использованы в разных областях жизни.

В работе продемонстрированы разного рода математические методы, так как на практике встречаются разнообразные неясные ситуации, так и разного рода трудности могут появиться при принятии решений. Правильные и оптимальные решения увеличивают эффективность управления и приносят измеримые выгоды предприятию.

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
Politechniki Śląskiej
P.3351/96/228