ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ

Zdzisław Duda

# Dwupoziomowe sterowanie rozdziałem zasobów w dużych systemach w warunkach losowych

P. 3344/97

AUTOMATYKA
z. 121

GLIWICE
1997

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
ZESZYTY NAUKOWE
Nr 1375

Biblioteka Główna
P.3341/97

Zdzisław Duda

# Dwupoziomowe sterowanie rozdziałem zasobów w dużych systemach w warunkach losowych

Gliwice 1997

**OPINIODAWCY**

Prof. dr hab. inż. Piotr Tatjewski
Dr hab. inż. Konrad Wojciechowski -
Profesor Politechniki Śląskiej

**KOLEGIUM REDAKCYJNE**

REDAKTOR NACZELNY – Prof. dr hab. Zygmunt Kleszczewski
REDAKTOR DZIAŁU – Dr inż. Anna Skrzywan - Kosek
SEKRETARZ REDAKCJI – Mgr Elżbieta Leśko

**REDAKCJA**
Mgr Kazimiera Szafir

**REDAKCJA TECHNICZNA**
Alicja Nowacka

**Wydano za zgodą**
**Rektora Politechniki Śląskiej**

PL ISSN 0434 - 0760

**Wydawnictwo Politechniki Śląskiej**
**ul. Kujawska 3, 44 - 100 Gliwice**

Nakł. 110 + 83 Ark. wyd. 10 Ark. druk. 8,5 Papier offset. kl. III 70 x 100, 80 g
Oddano do druku 08.12.1997 Podpis. do druku 08.12.1997 Druk ukończ. w grudniu 1997

Fotokopie, druk i oprawę wykonał „ROLEK", Gliwice, ul. Kazimierza Wielkiego 4

## Podziękowania

Niniejsza praca została zrealizowana w Zakładzie Teorii Sterowania Instytutu Automatyki Politechniki Śląskiej w Gliwicach i sfinansowana z grantów, badań kierunkowych i badań własnych. Ostateczna jej wersja powstała w ramach projektu badawczego Nr 8 T11A 031 10.

Opracowanie zawiera wyniki badań prowadzonych samodzielnie oraz we współpracy z Prof. R. Gessingiem, który wprowadził i jako pierwszy badał własności tzw. ograniczenia elastycznego, odgrywającego kluczową rolę przy syntezie algorytmów sterowania przedstawionych w pracy. Uważam za mój miły obowiązek wyrazić Mu, jako Dyrektorowi Instytutu Automatyki oraz Kierownikowi Zakładu Teorii Sterowania, moją szczerą wdzięczność za zachętę do napisania niniejszej monografii, za pomoc okazaną w rozwijaniu idei pracy oraz za bardzo cenne uwagi merytoryczne i redakcyjne.

Dziękuję również kolegom z Zakładu Teorii Sterowania za liczne dyskusje i krytyczne uwagi, które przyczyniły się do ulepszenia treści pracy.

## SPIS TREŚCI

**Oznaczenia** ..... 13

**Wprowadzenie** ..... 21

**Rozdział 1. Algorytmy rozdziału zasobów przy ograniczeniu elastycznym na sterowanie**

1.1. Opis problemu rozdziału zasobów ..... 27
1.2. Struktura układu sterowania i dostępna informacja ..... 29
1.3. Algorytm sterowania dwupoziomowego oparty na metodzie optymalizacji parametrycznej ..... 30
1.3.1. Sformułowanie problemu rozdziału zasobów ..... 31
1.3.2. Sformułowanie i rozwiązanie problemu optymalizacji lokalnej ..... 33
1.3.3. Rozwiązanie problemu rozdziału zasobów ..... 36
1.3.4. Algorytm sterowania dla kwadratowego wskaźnika jakości ..... 39
1.3.4.1. Przykład ..... 41
1.4. Algorytm sterowania dwupoziomowego oparty na metodzie cen ..... 44
1.4.1. Sformułowanie problemu ..... 44
1.4.2. Rozwiązanie problemu rozdziału zasobów ..... 45
1.4.3. Algorytm rozdziału zasobów dla kwadratowego wskaźnika jakości ..... 47
1.4.3.1. Przykład ..... 49
1.5. Uwagi końcowe ..... 52

**Rozdział 2. Algorytmy rozdziału zasobów przy dodatkowych ograniczeniach na sterowanie**

2.1. Algorytm rozdziału zasobów przy ograniczeniach na wartość średnią i wariancję sterowania ..... 53
2.1.1. Rozwiązanie problemu ..... 55
2.1.2. Przykłady ..... 59
2.2. Algorytm rozdziału zasobów przy ograniczeniach na wartość średnią i znak sterowania ..... 61
2.2.1. Rozwiązanie problemu ..... 62
2.2.2. Przykłady ..... 64

2.3. Algorytm rozdziału zasobów przy ograniczeniach na wartość średnią i prawdopodobieństwo wystąpienia nieujemnych sterowań ... 68
2.4. Uwagi końcowe ... 73

**Rozdział 3. Synteza algorytmu rozdziału zasobów z periodyczną koordynacją**
3.1. Model systemu ... 75
3.2. Struktura układu sterowania i dostępna informacja ... 76
3.3. Sformułowanie problemu ... 77
3.4. Rozwiązanie problemu ... 78

**Rozdział 4. Algorytmy sterowania dla dynamicznych podsystemów**
4.1. Algorytm sterowania dwupoziomowego przy tej samej częstotliwości podejmowania decyzji ... 84
4.1.1. Opis systemu ... 84
4.1.2. Struktura układu sterowania i dostępna informacja ... 84
4.1.3. Sformułowanie i rozwiązanie problemu ... 85
4.1.4. Równania filtracji stanu do wyznaczania ocen $\hat{x}_n^i$ ... 87
4.1.5. Równania filtracji stanu do wyznaczania ocen $\bar{x}_n^i$ ... 87
4.1.5.1. Wyznaczenie macierzy $\tilde{P}_{n+1|n}^i$ ... 88
4.1.5.2. Wyznaczenie macierzy $\tilde{P}_n^i$ ... 89
4.1.5.3. Wyznaczenie macierzy $\tilde{P}_n^{i*}$ ... 89
4.1.6. Własności procesu $\hat{x}_n^i$ ... 90
4.1.7. Przykład ... 91
4.2. Algorytmy sterowania dwupoziomowego przy zróżnicowanej częstotliwości podejmowania decyzji ... 92
4.2.1. Model systemu ... 92
4.2.2. Struktura układu sterowania i dostępna informacja ... 93
4.2.3. Sformułowanie problemu ... 94
4.2.4. Synteza algorytmu sterowania metodą optymalizacji parametrycznej ... 95
4.2.5. Synteza algorytmu sterowania metodą cen ... 97
4.2.5.1. Rozwiązanie problemu ... 99
4.2.5.2. Algorytm sterowania przy pełnej formie kwadratowej wskaźnika jakości ... 100



4.2.6. Przykład ... 102
4.3. Uwagi końcowe ... 104

**Rozdział 5. Synteza algorytmów sterowania dla powiązanych podsystemów**
5.1. Algorytm sterowania dla podsystemów statycznych ... 105
5.1.1. Model systemu ... 105
5.1.2. Struktura układu sterowania i struktura informacyjna ... 107
5.1.3. Rozwiązanie problemu ... 108
5.1.3.1. Synteza lokalnego prawa sterowania $a_i^o(y_i, p_i)$ ... 108
5.1.3.2. Synteza prawa sterowania koordynatora $b_i^o(m)$ ... 109
5.1.3.3. Dyskusja rozwiązania ... 110
5.1.3.4. Przykład ... 112
5.2. Algorytm sterowania dla podsystemów dynamicznych ... 113
5.2.1. Równania filtracji stanu $\hat{x}_n^i$ ... 115
5.2.2. Równania filtracji stanu $\bar{x}_n^i$ ... 116
5.2.3. Przykład ... 118
5.2.4. Uwagi końcowe ... 120

**Zakończenie** ... 121

**Literatura** ... 123

**Streszczenie** ... 131

## CONTENTS

**Notation** ..... 13
**Introduction** ..... 21

**Chapter 1. Resource allocation algorithms under control elastic constraint**
1.1. Resource allocation problem description ..... 27
1.2. Control structure and available information ..... 29
1.3. Two-level control algorithm based on parametric optimization ..... 30
1.3.1. Resource allocation problem formulation ..... 31
1.3.2. Formulation and solution to a local optimization ..... 33
1.3.3. Solution to the resource allocation problem ..... 36
1.3.4. Control strategy for a quadratic performance index ..... 39
1.3.4.1. Example ..... 41
1.4. Two-level control algorithm based on price optimization ..... 44
1.4.1. Problem formulation ..... 44
1.4.2. Solution to the resource allocation problem ..... 45
1.4.3. Control strategy for the quadratic performance index ..... 47
1.4.3.1. Example ..... 49
1.5. Final conclusions ..... 52

**Chapter 2. Resource allocation algorithms under additional control constraints**
2.1. Resource allocation strategy under control mean and control variance constraints ..... 53
2.1.1. Solution to the problem ..... 55
2.1.2. Examples ..... 59
2.2. Resource allocation strategy under control mean and control sign constraints ..... 61
2.2.1. Solution to the problem ..... 62
2.2.2. Examples ..... 64
2.3. Resource allocation strategy under control mean and probability of nonnegative control constraints ..... 68
2.4. Final conclusions ..... 73

**Chapter 3. Synthesis of resource allocation algorithm with periodic coordination**
3.1. Model of a system ..... 75
3.2. Control structure and available information ..... 76
3.3. Problem formulation ..... 77
3.4. Solution to the problem ..... 78

**Chapter 4. Control algorithms for dynamic subsystems**
4.1. Two-level control strategy with equal decision-making frequency ..... 84
4.1.1. System description ..... 84
4.1.2. Control structure and available information ..... 84
4.1.3. Problem formulation and its solution ..... 85
4.1.4. Filtering equations for $\tilde{x}_n^i$ ..... 87
4.1.5. Filtering equations for $\bar{x}_n^i$ ..... 87
4.1.5.1. Determination of the matrix $\bar{P}_{n+1|n}^i$ ..... 88
4.1.5.2. Determination of the matrix $\bar{P}_n^i$ ..... 89
4.1.5.3. Determination of the matrix $\bar{P}_n^{i*}$ ..... 89
4.1.6. Properties of the process $\tilde{x}_n^i$ ..... 90
4.1.7. Example ..... 91
4.2. Two-level control strategies with different decision-making frequencies ..... 92
4.2.1. Model of a system ..... 92
4.2.2. Control structure and available information ..... 93
4.2.3. Problem formulation ..... 94
4.2.4. Control algorithm synthesis based on parametric method ..... 95
4.2.5. Control algorithm synthesis based on price method ..... 97
4.2.5.1. Solution to the problem ..... 99
4.2.5.2. Control strategy with the full quadratic form of the performance index ..... 100
4.2.6. Example ..... 102
4.3. Final conclusions ..... 104



**Chapter 5. Control algorithms synthesis for interconnected subsystems**
5.1. Control algorithm for static subsystems ..... 105
5.1.1. Model of a system ..... 105
5.1.2. Control and information structures ..... 107
5.1.3. Solution to the problem ..... 108
5.1.3.1. Synthesis of the local law $a_i^o(y_i, p_i)$ ..... 108
5.1.3.2. Synhesis of the coordinator law $b_i^o(m)$ ..... 109
5.1.3.3. Discussion of the solution ..... 110
5.1.3.4. Example ..... 112
5.2. Control algorithm for dynamic subsystems ..... 113
5.2.1. Filtering equations for $\hat{x}_n^i$ ..... 115
5.2.2. Filtering equations for $\bar{x}_n^i$ ..... 116
5.2.3. Example ..... 118
5.2.4. Final conclusions ..... 120

**Conclusion** ..... 121

**References** ..... 123

**Summary** ..... 131

## OZNACZENIA

**Ważniejsze oznaczenia stosowane w rozdziale 1 i 2**

$a_n^i(y_n^i, p_n^i)$ - prawo sterowania $i$—tego lokalnego decydenta wyznaczone metodą optymalizacji parametrycznej

$a_n^i(y_n^i, \lambda_n)$ - prawo sterowania $i$—tego lokalnego decydenta wyznaczone metodą cen

$a = \{a_n^i(.), \quad n = 0, 1, 2, ..., N, \quad i = 1, 2, ..., M\}$

$b_n^i(m_n)$ - prawo sterowania koordynatora wyznaczone metodą optymalizacji parametrycznej

$b = \{b_n^i(.), \quad n = 0, 1, 2, ..., N, \quad i = 1, 2, ..., M\}$

$b_n(m_n)$ - prawo sterowania koordynatora wyznaczone metodą cen

$b_{k|n}^i(m_n)$ - prawo sterowania koordynatora wyznaczone metodą optymalizacji parametrycznej w układzie OLF

$b_{k|n}(m_n)$ - prawo sterowania koordynatora wyznaczone metodą cen w układzie OLF

$\Delta u_n$ - pojemność rezerwowa

$d_n$ - dopływ zasobów do magazynu

$d_{k|n} = E_{|m_n} d_k$

$e_n = E_{|m_n} \sum_{i=1}^{M} a_n^i(y_n^i, \lambda_n)$ - zmienna zagregowana

$e_{k|n} = \sum_{i=1}^{M} p_{k|n}^i$ - zmienna zagregowana w układzie OLF

$e_{k|n}^* = \{e_{k|n}, \quad k = n, n+1, ..., n+N'\}$

$E(.)$ - wartość średnia wyrażenia $(.)$

$E_{|y}(.)$ - wartość średnia warunkowa wyrażenia $(.)$ przy zadanym $y$

$h_n$ - wielkość zasobów w magazynie

$\bar{h}_{k|n} = E_{|m_n} h_k$

$I(a, b)$ - wtórny wskaźnik jakości

$I_n^i(a_n^i, b_n^i)$ - lokalny wskaźnik jakości

$\lambda_n^i, \lambda_n, \mu_n^i$ - mnożniki Lagrange'a

$m_n^i$ - zagregowana informacja przekazywana z podsystemu do koordynatora

$m_n^* = [m_n^1, m_n^2, ..., m_n^M]$

$m_n^{**}$ - dodatkowa informacja dostępna koordynatorowi

$m_n = [m_n^*, m_n^{**}]$

$M$ - liczba podsystemów

$N$ - horyzont sterowania

$N'$ - przesuwny horyzont

$p_n^i$ - zmienna koordynująca (wytyczna koordynatora)

$p_{k|n}^i$ - zmienna koordynująca w układzie OLF

$\sigma_n^{i2} = E(\hat{z}_n^i - \bar{z}_n^i)^2$

$u_n^i$ - sterowanie $i-$tego lokalnego decydenta

$y_n^i$ - wielkość wyjściowa (pomiarowa) w $i-$tym podsystemie

$z_n^i$ - zapotrzebowanie $i-$tego odbiorcy

$\hat{z}_n^i = E_{|y_n^i} z_n^i$

$\bar{z}_n^i = E_{|m_n} z_n^i = E_{|m_n^i} z_n^i$

$\bar{z}_n = [\bar{z}_n^1, \bar{z}_n^2, ..., \bar{z}_n^M]$

$\bar{z}_{k|n}^i = E_{|m_n^i} z_k^i$

**Ważniejsze oznaczenia stosowane w rozdziale 3**

$a_n^i(y_n^i, p_k^i)$ - prawo sterowania $i-$tego lokalnego decydenta

$b_k^i(m_k)$ - prawo sterowania koordynatora

$\Delta u_k$ - pojemność rezerwowa



$e_{k|n}$ - zmienna zagregowana w metodzie cen

$E(.)$ - wartość średnia wyrażenia (.)

$E_{|y}(.)$ - wartość średnia warunkowa wyrażenia (.) przy zadanym $y$

$I(a, b)$ - wtórny wskaźnik jakości

$I_k^i$ - lokalny wskaźnik jakości zapisany dla horyzontu czasowego $[kL, (k+1)L-1]$

$k$. - indeks czasu obowiązujący na poziomie wyższym

$L$ - stosunek częstotliwości podejmowania decyzji przez lokalnych decydentów i koordynatora

$\lambda_n^i$ - mnożnik Lagrange'a

$m_k$. - informacja dostępna w chwili $k$. na poziomie wyższym

$M$ - liczba podsystemów

$p_k^i$ - zmienna koordynująca (wytyczna koordynatora)

$p_{k.|n.}^i$ - zmienna koordynująca w układzie OLF

$u_n^i$ - sterowanie $i-$tego lokalnego decydenta

$z_n^i$ - zapotrzebowanie $i-$tego odbiorcy

$\hat{z}_n^i = E_{|y_n^i} z_n^i$

$\bar{z}_n^i = E z_n^i$

$\bar{z}_{n.}^i = \sum_{l=nL}^{(n+1)L-1} \bar{z}_l^i$

**Ważniejsze oznaczenia stosowane w rozdziale 4**

$a_n^i(\mathbf{y_n^i}, p_n^i)$ - prawo sterowania $i-$tego lokalnego decydenta

$a_n^i(\mathbf{y_n^i}, s_n^i)$ - prawo sterowania $i-$tego lokalnego decydenta przy zróżnicowanej częstotliwości podejmowania decyzji

$\mathbf{a_{kL,(k+1)L-1}} = [a_{kL}^{1T} ... a_{kL}^{MT}, a_{kL+1}^{1T} .... a_{kL+1}^{MT}, a_{(k+1)L-1}^{1T} ... a_{(k+1)L-1}^{MT}]^T$

$b^i_n(\mathbf{m_n})$ - prawo sterowania koordynatora

$b^i_{k.}(\mathbf{m_{k.}}, \mathbf{e_{k.}})$ - prawo sterowania koordynatora przy zróżnicowanej częstotliwości podejmowania decyzji

$d^i_{kL}(\mathbf{y^i_{kL}}, p^i_{k.})$ - prawo sterowania $i-$tego lokalnego decydenta przy zróżnicowanej częstotliwości podejmowania decyzji

$e^i_n$ - zakłócenie pomiaru $m^i_n$

$\bar{e}_{n|n}, \bar{e}_{k.|k.}$ - zmienne zagregowane

$\bar{e}_{k|n} = E_{|\mathbf{m_n}} \sum_{i=1}^{M} a^i_k(\mathbf{y^i_k}, p^i_k)$

$\mathbf{e_k} = [\bar{e}^T_{k.|k.} \quad \bar{e}^T_{(k+1).|k} \ldots . \bar{e}^T_{(N-1).|k.}]^T$

$E^i_n = E(e^i_n e^{iT}_n)$

$I(a, b)$ - wtórny wskaźnik jakości

$k.$ - indeks czasu obowiązujący na poziomie wyższym przy zróżnicowanej częstotliwości podejmowania decyzji

$m^i_n = D^i_n y^i_n$

$\mathbf{m^i_n} = [m^{iT}_0 \quad m^{iT}_1 \ldots m^{iT}_n]^T$

$\mathbf{m_n} = [\mathbf{m^{1T}_n} \quad \mathbf{m^{2T}_n} \ldots \mathbf{m^{MT}_n}]^T$

$\mathbf{m_{k.}} = [\mathbf{m^{1T}_{k.}} \quad \mathbf{m^{2T}_{k.}} \ldots \mathbf{m^{MT}_{k.}} \quad \mathbf{v^T_{k.}}]^T$

$\bar{m}^i_{n+1|n} = E_{|\mathbf{m_n}} m^i_{n+1}$

$M$ - liczba podsystemów

$N$ - horyzont sterowania

$p^i_n, p^i_{k.}$ - zmienne koordynujące

$p_n = [p^{1T}_n \quad p^{2T}_n \ldots p^{MT}_n]^T$

$P^i_{n|n-1} = E[(x^i_n - \hat{x}_{n|n-1})(x^i_n - \hat{x}_{n|n-1})^T]$

$P^i_n = E[(x^i_n - \hat{x}_n)(x^i_n - \hat{x}_n)^T]$



$\bar{P}^i_{n+1|n} = E(\tilde{\bar{x}}^i_{n+1|n} \tilde{\bar{x}}^{iT}_{n+1|n})$

$\bar{P}^i_n = E[(x^i_n - \bar{x}^i_n)(x^i_n - \bar{x}^i_n)^T]$

$\bar{P}^{i*}_n = E[(\hat{x}^i_n - \bar{x}^i_n)(\hat{x}^i_n - \bar{x}^i_n)^T]$

$r^i_n$ - zakłócenie pomiarowe

$s^i_{kL} = \sum_{n=kL}^{(k+1)L-1} u^i_n$

$u^i_n$ - sterowanie $i-$tego lokalnego decydenta

$w^i_n$ - zakłócenie stanu

$W^i_n = E(w^i_n w^{iT}_n)$

$x^i_n$ - stan

$x_n = [x^{1T}_n \quad x^{2T}_n \ldots x^{MT}_n]^T$

$\hat{x}^i_n = E_{|\mathbf{y^i_n}} x^i_n$

$\bar{x}^i_{n+1|n} = E_{|\mathbf{m^i_n}} x^i_{n+1}$

$\bar{x}_n = E_{|\mathbf{m_n}} x_n$

$\tilde{x}^i_n = x^i_n - \hat{x}^i_n$

$\tilde{\bar{x}}^i_{n+1|n} = x^i_{n+1} - \bar{x}^i_{n+1|n}$

$y^i_n$ - wielkość wyjściowa (pomiarowa) w $i-$tym podsystemie

$\mathbf{y^i_n} = [y^{iT}_0 \quad y^{iT}_1 \ldots y^{iT}_n]^T$

$\hat{z}^i_n = E_{|y^i_n} z^i_n$

$\bar{z}^i_n = E z^i_n$

$\bar{z}^i_{n.} = \sum_{l=nL}^{(n+1)L-1} \bar{z}^i_l$

**Ważniejsze oznaczenia stosowane w rozdziale 5**

$a_i(y_i, p_i)$ - prawo sterowania lokalnego decydenta

$b_i(m)$ - prawo sterowania koordynatora

$\Delta u_i = u_i - p_i$

$e_i, e_n^i$ - błędy pomiarowe

$m_i, m_n^i$ - zagregowana informacja przekazywana z $i-$tego podsystemu do koordynatora

$m = [m_1^T \;\; m_2^T ... m_M^T]^T$

$m_n^i = D_n^i y_n^i$

$\mathbf{m_n^i} = [m_0^{iT} \;\; m_1^{iT} ... m_n^{iT}]^T$

$\mathbf{m_n} = [\mathbf{m_n^{1T}} \;\; \mathbf{m_n^{2T}} ... \mathbf{m_n^{MT}}]^T$

$p_i, p_n^i$ - zmienne koordynujące

$p = [p_1^T \;\; p_2^T .... p_M^T]^T$

$p_n = [p_n^{1T} \;\; p_n^{2T} .... p_n^{MT}]^T$

$r_n^i$ - błąd pomiarowy

$u_i, u_n^i$ - sterowanie lokalnego decydenta

$u = [u_1^T \;\; u_2^T .... u_M^T]^T$

$u_n = [u_n^{1T} \;\; u_n^{2T} .... u_n^{MT}]^T$

$w_i^*$ - zakłócenie wyjścia w podsystemie statycznym

$w_n^i$ - zakłócenie stanu

$w_n = [w_n^{1T} \;\; w_n^{2T} .... w_n^{MT}]^T$

$w^* = [w_1^{*T} \;\; w_2^{*T} .... w_M^{*T}]^T$

$\tilde{w}_i = E_{|y_i} w_i$

$\bar{w}_i = E_{|m} w_i$

$\tilde{w}_i^* = w_i^* - \bar{w}_i^*$

$\bar{w} = [(\bar{w}_1 + \bar{z}_1)^T \;\; ....(\bar{w}_M + \bar{z}_M)^T$

$w_i = A_{ii} w_i^*$



$\tilde{w}_i^* = E_{|y_i} w_i^*$

$\bar{w}_i^* = E_{|m} w_i^*$

$\hat{v}_i = E_{|y_i} v_i$

$v_i = \sum_{j \neq i} B_{ij} u_j$

$v_n^i = \sum_{j \neq i} A_n^{i,j} x_n^j$

$\bar{v}_i = E_{|m} v_i$

$\bar{v}_n^i = E_{|\mathbf{m_n}} v_n^i$

$x_i$ - wyjście w podsystemie statycznym

$x_n^i$ - stan w podsystemie dynamicznym

$x = [x_1^T \;\; x_2^T .... x_M^T]^T$

$x_n = [x_n^{1T} \;\; x_n^{2T} .... x_n^{MT}]^T$

$\bar{x}_n^i = E_{|\mathbf{m_n}} x_n^i$

$\hat{x}_n^i = E_{|\mathbf{y_n^i}} x_n^i$

$\tilde{x}_n^i = \hat{x}_n^i - \bar{x}_n^i$

$\check{x}_n^i = x_n^i - \bar{x}_n^i$

$\hat{x}_{n+1|n}^i = E_{|\mathbf{y_n^i}} x_{n+1}^i$

$\bar{x}_{n+1|n}^i = E_{|\mathbf{m_n}} x_{n+1}^i$

$\hat{x}_{n+1|n+}^i = E_{|\mathbf{y_n^i}, x_{n+1}^i} x_{n+1}^i$

$y_i, y_n^i$ - wielkości wyjściowe (pomiarowe) w $i-$tym podsystemie

$\mathbf{y_n^i} = [y_0^{iT} \;\; y_1^{iT} ... y_n^{iT}]^T$

$z_i = \sum_{j \neq i} A_{ij} w_j^*$

$\bar{z}_i = E_{|m} z_i$

# WPROWADZENIE

Problemy sterowania dużymi systemami w warunkach niepewności stanowią istotną i stale aktualną dziedzinę badań. Złożoność opracowywanych w czasie syntezy algorytmów sterowania zależy od przyjętej struktury układu sterowania i struktury informacyjnej. Znane są własności tzw. klasycznej struktury informacyjnej (*classical information pattern*), w której zakłada się, że decydenci dysponują w danej chwili identyczną informacją, która może być przez nich wykorzystana również w chwilach następnych. Wiadomo np., że dla takiej struktury i dla problemu LQG optymalne prawa sterowania są liniowymi funkcjami oceny stanu wyznaczanej z równań filtru Kalmana. Wydaje się jednak, że w wielkich systemach, być może składających się z rozproszonych podsystemów, występowanie jednego centralnego decydenta lub decydentów dysponujących jednakową informacją o całym systemie może prowadzić do trudności w realizacji opracowanych algorytmów sterowania, wynikających z konieczności przesyłania i przetwarzania zbyt dużej ilości informacji. Badane są więc własności struktur sterowania, w których decydenci dysponują zróżnicowaną informacją. Są to tzw. nieklasyczne struktury informacyjne (*non-classical information pattern*) [12, 13, 46, 47, 67, 75]. Dokonując syntezy algorytmu sterowania optymalnego w takiej strukturze można jednak napotkać na istotne trudności w określeniu prawa sterowania [75].

Istnieją szczególne przypadki nieklasycznej struktury informacyjnej, w której prawa sterowania są łatwo wyznaczalne jako liniowe funkcje ocen stanu. Należy do nich tzw. częściowo zawierająca się struktura informacyjna (*partially nested information structure)* [14, 48], w której przyjmuje się, że $j-$ty decydent zna w chwili $l$ bieżący pomiar $y_l^j$ oraz to, co znał i jakie decyzje podjął wcześniej. Ponadto zna on także wektor informacji $y_k^i$ dostępnej dla tych decydentów, przez których wyznaczone sterowanie oddziałuje na pomiar $y_l^j$. Tak więc dopuszczalne prawo sterowania $j-$ tego decydenta w chwili $l$ jest funkcją $u_l^j = a_l^j(\mathbf{y_1^j}, \mathbf{u_{l-1}^j}, \mathbf{y_k^i})$, gdzie $\mathbf{y_1^j} = \{y_0^j, y_1^j, ..., y_l^j\}$, zaś $\mathbf{u_{l-1}^j} = \{u_0^j, u_1^j, ..., u_{l-1}^j\}$.

W [51] autorzy rozważają problem LQG (problem liniowo-kwadratowy z gaussowskimi zakłóceniami), zakładając, że prawo sterowania $i-$tego decydenta w chwili $n$ należy do klasy funkcji dopuszczalnych o postaci $u_n^i = a_n^i(\mathbf{y_{n-1}^1}, \mathbf{y_{n-1}^2}, ...., \mathbf{y_{n-1}^{i-1}}, \mathbf{y_n^i}, \mathbf{y_{n-1}^{i+1}}, ..., \mathbf{y_{n-1}^M})$, gdzie $\mathbf{y_k^i}$ jest wektorem informacji dostępnej dla $i-$tego decydenta w chwili $k$, zaś $M$ jest liczbą decydentów.

W cytowanych i wielu innych pozycjach literatury autorzy nie wprowadzają dodatkowych ograniczeń na zmienne stanu czy zmienne sterujące. Widać więc, że synteza algorytmów realizowanych w złożonych systemach, składających się z wielu podsystemów, prowadzi, przy założeniu omawianych struktur informacyjnych, do mało racjonalnych strategii sterowania.

Drugim ważnym problemem spotykanym przy realizacji sterowania złożonymi systemami, zarówno deterministycznymi jak i w warunkach niepewności, jest złożoność obliczeń numerycznych. Nakład obliczeniowy może być zmniejszony poprzez, o ile jest to możliwe, dekompozycję obliczeń. Zagadnienia te są dyskutowane między innymi w [25, 26, 52, 63]. W celu pokonania złożoności obliczeniowej oraz trudności związanych z przesyłaniem i przetwarzaniem informacji należy sięgnąć do zdecentralizowanych, hierarchicznych struktur sterowania.

Sterowanie zdecentralizowane polega na istnieniu równorzędnych decydentów dysponujących informacją dotyczącą sterowanego podsystemu i podejmujących decyzje niezależnie od siebie. Inną możliwością jest realizacja sterowania w strukturze wielopoziomowej (hierarchicznej), w której oprócz lokalnych decydentów na poziomie niższym występuje decydent centralny (koordynator) na poziomie wyższym. Istotną sprawą jest tutaj fakt, że centralny decydent dysponuje bardziej zagregowaną informacją o systemie, nie ma bezpośredniego dostępu do sterowanych podsystemów, a jego zadaniem jest koordynacja pracy lokalnych decydentów. Istnienie takiej struktury jest szczególnie uzasadnione wtedy, gdy podsystemy dążą do minimalizacji strat lokalnych. Wówczas zadaniem koordynatora jest zmniejszenie "stopnia" konfliktu i dbałość o dobrą pracę całego systemu.

Istnienie podsystemów może być z góry narzucone, np. w systemie rozdziału zasobów z rozproszonymi odbiorcami, pobierającymi zasoby ze wspólnego magazynu. Podsystemy te mogą być niezależne, a mimo to nie mogą działać niezależnie ze względu na wspólność zasobów. W sytuacji ograniczonych zasobów pierwsza decyzja należeć będzie do koordynatora dbającego o nieprzekroczenie ograniczenia na ilość zasobów w magazynie. Przekaże on wytyczne lokalnym jednostkom decyzyjnym, które wykorzystując swoją bardziej szczegółową informację określą ostateczny przydział zasobów swoim podsystemom. Jeżeli podsystemy są powiązane między sobą, to istnienie jednostki nadrzędnej, neutralizującej konflikt między nimi, wydaje się jeszcze bardziej naturalne.

W literaturze można spotkać wiele prac, w których omawiane są metody dekompozycji i koordynacji [25, 26, 27, 28, 54, 60, 63, 10, 56, 57, 72, 73]. W większości przypadków są one wprowadzone z czysto obliczeniowego punktu widzenia (zmniejszenia pracochłonności obliczeń). Do klasycznych metod można zaliczyć metodę optymalizacji parametrycznej oraz metodę cen [25, 26]. Pierwsza polega na tym, że na jednym poziomie ekstremalizowany



jest wskaźnik względem zmiennych lokalnych przy zadanych zmiennych koordynacyjnych, natomiast na drugim poziomie poszukiwane są optymalne wartości zmiennych koordynacyjnych. W drugiej metodzie wprowadza się mnożniki Lagrange'a (ceny), które pełnią rolę zmiennych koordynacyjnych. Wiele zadań można rozwiązywać dowolną z tych metod, ale doświadczenia numeryczne pokazują, że najczęściej trzeba stosować procedury mieszane.

Problemy sterowania dwupoziomowego (wielopoziomowego) wielkimi systemami w warunkach niepewności zajmują znacznie mniej miejsca w literaturze.

Interesujące podejście przedstawione jest w [13], gdzie autorzy rozpatrują problem sterowania dwupoziomowego dla przypadku LQG, w którym koordynator otrzymuje informacje od lokalnych decydentów periodycznie i przesyła im w zamian wartości zmiennych koordynujących. Zmienne te są dokonywanymi przez koordynatora, na podstawie informacji dostępnej na poziomie wyższym, ocenami istniejącej interakcji pomiędzy podsystemami.

Problemy sterowania statystycznie optymalnego realizowanego w strukturze dwupoziomowej rozważane są również w pracach [7, 8, 9]. Stosowane tam modele mają postać ciągłych w czasie równań stanu, a występująca w nich losowość wynika z gwałtownych zmian parametrów wywołanych np. awariami lub skokowymi zmianami punktów pracy zachodzących w losowych chwilach i modelowanych łańcuchami Markowa. Celem sterowania jest zapewnienie odpornej stochastycznej stabilności i gwarantowanego kosztu pomimo istniejących ograniczeń informacyjnych.

Idea sterowania dwupoziomowego (wielopoziomowego) może mieć zastosowanie również w problemach rozdziału zasobów w wielkich systemach. Rozważania na ten temat można znaleźć np. w [63, 50, 49, 65].

Oryginalna metoda koordynacji stosowana przy rozwiązywaniu problemów rozdziału zasobów w wielkich systemach z niepewnością została zaproponowana przez Gessinga [33, 34, 35]. Rozpatrywane systemy składają się z rozproszonych podsystemów (odbiorców zasobów), w których jednostki decyzyjne dysponują zróżnicowaną informacją. Sterowanie realizowane jest w dwupoziomowej strukturze hierarchicznej z koordynatorem na poziomie wyższym i lokalnymi decydentami na poziomie niższym. Zakłada się tam, że koordynator dysponuje zagregowaną informacją otrzymaną od lokalnych decydentów, na podstawie której wyznacza i przesyła na poziom niższy wytyczne (wartości zmiennych koordynujących). Lokalni decydenci podejmują ostateczne decyzje o przydziale zasobów swoim podsystemom na podstawie bardziej szczegółowej informacji, dotyczącej tych podsystemów, oraz wytycznych otrzymanych od koordynatora.

Do koordynacji autor wprowadza tzw. ograniczenie elastyczne, które umożliwia decentralizację sterowania i dekompozycję obliczeń, co jak wspomniano wcześniej, jest niezwykle istotne przy sterowaniu wielkimi systemami.

Za zmienne koordynujące uważa się oceny (średnie warunkowe) sterowań lokalnych wyznaczane przez koordynatora na podstawie informacji dostępnej na poziomie wyższym. Poza tym ograniczenie elastyczne, zwane też równaniem koordynacji, daje lokalnym decydentom pewną swobodę w podejmowaniu decyzji, dzięki czemu mogą oni lepiej wykorzystać do sterowania swoją bardziej szczegółową informację. Rozważane są problemy rozdziału zasobów zarówno dla statycznych [33, 35], jak i dynamicznych [34] modeli odbiorców oraz kwadratowego wskaźnika jakości jako miary strat w systemie.

Niniejsza praca zawiera wyniki dalszych badań dotyczących głównie syntezy i analizy algorytmów rozdziału ograniczonych zasobów w warunkach losowych, prowadzonych samodzielnie i we współpracy z Gessingiem. Istotną rolę odgrywa w nich ograniczenie elastyczne oraz jego modyfikacje. Przy formułowaniu większości problemów rozpatrywane są systemy składające się z nie oddziałujących na siebie odbiorców zasobów (podsystemów) oraz magazynu, z którego zasoby te są pobierane. Zakłada się w nich, że sterowanie realizowane jest w dwupoziomowej strukturze hierarchicznej z koordynatorem na poziomie wyższym i lokalnymi decydentami na poziomie niższym, dysponującymi zróżnicowaną informacją pomiarową.

Celem syntezy jest konstrukcja praw sterowania (jako funkcji dostępnej informacji), dla których wskaźnik jakości przyjmuje minimalną wartość.

Ograniczenie elastyczne, jako równanie koordynacji, wprowadza się również w ostatnim rozdziale pracy, luźno związanym z zadaniem rozdziału zasobów. Wyniki tam uzyskane mogą być wykorzystane przy problemach sterowania optymalnego w dużych systemach w warunkach losowych, w których istnieje konieczność dekompozycji obliczeń i decentralizacji sterowania.

Układ pracy jest następujący:

Cztery pierwsze rozdziały zawierają rozważania dotyczące syntezy i analizy algorytmów rozdziału zasobów. W rozważaniach tych rozpatrywane są systemy składające się z niepowiązanych podsystemów (odbiorców), które pobierają zasoby ze wspólnego magazynu. Oczywiście, zaproponowana idea sterowania może być wykorzystana również w innych zagadnieniach.

W rozdziale piątym przedstawiono syntezę algorytmów sterowania dla powiązanych podsystemów.

W szczególności rozdział pierwszy zawiera syntezę i analizę dwu algorytmów sterowania rozdziałem zasobów przy ograniczeniu elastycznym na sterowanie i zmodyfikowanym ograniczeniu na ilość zasobów w magazynie. Synteza pierwszego algorytmu oparta jest na metodzie optymalizacji parametrycznej, natomiast drugiego na zmodyfikowanej metodzie cen.



W rozdziale drugim opracowane są algorytmy rozdziału zasobu uwzględniające dodatkowe ograniczenia, takie jak: ograniczenie na wariancję sterowania, na znak sterowania czy też na prawdopodobieństwo realizacji nieujemnego sterowania.

W rozdziale trzecim dokonana jest synteza algorytmu sterowania realizowanego w strukturze dwupoziomowej, w której koordynator określa i przesyła wytyczne na poziom niższy z mniejszą częstotliwością w stosunku do częstotliwości, z jaką są wyznaczane sterowania przez lokalnych decydentów. Taka strategia umożliwia więc dalsze zmniejszenie ilości informacji przekazywanej na poziom niższy.

W trzech pierwszych rozdziałach rozpatrywane są systemy składające się z podsystemów statycznych. Rozdział czwarty zawiera algorytm sterowania dla podsystemów dynamicznych, opracowany w pracy [39]. Realizacja tego algorytmu wymaga znajomości ocen stanu wyznaczanych na bieżąco przez koordynatora i lokalnych decydentów. W rozdziale czwartym podane jest rozwiązanie tego problemu prowadzące do niekonwencjonalnych równań filtracji stanu.

W powyższych rozważaniach przyjmuje się, że decyzje podejmowane są z tą samą częstotliwością na obu poziomach. W celu zmniejszenia ilości informacji przekazywanej pomiędzy poziomami został opracowany algorytm przedstawiony w drugiej części rozdziału czwartego.

W czterech pierwszych rozdziałach zakłada się, że jedynym elementem łączącym podsystemy są wspólnie dzielone zasoby.

W rozdziale piątym rozpatrywany jest duży system, składający się z powiązanych, rozproszonych podsystemów, w którym decydenci dysponują zróżnicowaną informacją pomiarową. Ze względu na przyjętą strukturę informacyjną zakłada się, że sterowanie realizowane jest w strukturze dwupoziomowej. Jako równanie koordynacji wprowadza się ograniczenie elastyczne, umożliwiające dekompozycję obliczeń i decentralizację sterowania. Prezentowane jest podejście, w którym w dwoisty sposób traktowane jest sterowanie lokalnego decydenta. Z punktu widzenia dostępnej informacji wielkość ta jest zmienną decyzyjną dla wyznaczającego je lokalnego decydenta, natomiast jest ona zmienną losową dla pozostałych decydentów. Ma to swoje odzwierciedlenie w trakcie syntezy układu sterowania.

W zakończeniu krótko podsumowano wyniki wcześniejszych rozważań wskazując na ważniejsze własności opracowanych algorytmów sterowania.

# ROZDZIAŁ 1

# ALGORYTMY ROZDZIAŁU ZASOBÓW PRZY OGRANICZENIU ELASTYCZNYM NA STEROWANIE

W niniejszym rozdziale rozważany jest przypadek rozdziału zasobów dla statycznych odbiorców, realizowany w strukturze dwupoziomowej przy zróżnicowanej informacji decydentów obu poziomów. Istotną rolę odgrywa tutaj lokalne ograniczenie elastyczne na sterowanie.

W punktach pierwszym i drugim opisane są problem, oraz struktura układu sterowania i dostępnej informacji. Punkt trzeci zawiera sformułowanie zadania, jego rozwiązanie metodą optymalizacji parametrycznej, oraz rozważania dla kwadratowego wskaźnika jakości wraz z przykładami ilustrującymi pewne własności opracowanego algorytmu. W punkcie czwartym przedstawiona jest synteza algorytmu rozdziału zasobów oparta na metodzie cen. W algorytmie tym lokalne ograniczenie elastyczne zostało zastąpione globalnym ograniczeniem elastycznym na sterowanie. Wreszcie punkt piąty zawiera krótkie podsumowanie uzyskanych wyników.

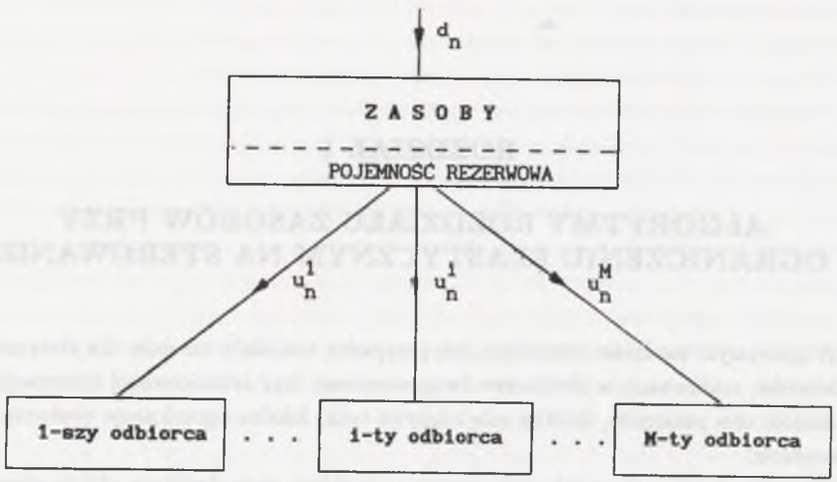
## 1.1. Opis problemu rozdziału zasobów

Rozważmy system złożony z $M$ statycznych, nie powiązanych odbiorców o losowych zapotrzebowaniach $z_n^i$, pobierających w dyskretnym przedziale czasu $(n, n+1)$ zasoby $u_n^i$, $i = 1, 2, ..., M$, z magazynu zasilanego dopływem $d_n$, jak to zostało pokazane na rys. 1.

Na wielkość zasobów w magazynie narzucone są ograniczenia nierównościowe w postaci:

$$h_{min} \leq h_n + d_n - \sum_{i=1}^{M} u_n^i \leq h_{max}, \quad n = 0, 1, ... \tag{1.1}$$

gdzie $h_n$ oznacza wielkość zasobów w magazynie w chwili $n$, $h_{min}, h_{max}$ odpowiednio minimalne i maksymalne napełnienie magazynu, zaś $d_n$ jest dopływem zasobów do magazynu w okresie (n, n+1). W dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że ograniczenie górne ($\leq h_{max}$) jest nieaktywne, co oznacza, że magazyn jest w stanie pomieścić aktualne zasoby występujące w systemie. Tym niemniej opracowane w dalszej części pracy algorytmy rozdziału zasobów mogą być po niewielkiej modyfikcji wykorzystane również przy tym ograniczeniu.




Rys.1. Struktura systemu
Fig.1. System structure

Zmienne występujące w (1.1) mogą być wektorami, gdy dzielone zasoby mają kilka składników reprezentowanych przez składowe tych wektorów.

Przyjmijmy, że model pomiaru wielkości $y_n^i$ w $i-$tym podsystemie ma postać:

$$y_n^i = g_n^i(z_n^i, w_n^i), \tag{1.2}$$

gdzie $w_n^i$ jest błędem pomiarowym, zaś $g_n^i$ jest daną funkcją wektorową.

Zasadniczo, rozważania będą dotyczyć przypadku, gdy w pewnych okresach zapotrzebowania odbiorców nie mogą być w pełni pokrywane (występuje deficyt).

Niech wskaźnik jakości wyrażający straty w całym systemie wynikające z deficytu zasobów, ma postać:

$$\bar{I} = \sum_{n=0}^{N} \sum_{i=1}^{M} l_n^i(u_n^i, z_n^i), \tag{1.3}$$

gdzie $l_n^i$ są danymi skalarnymi funkcjami zmiennych $u_n^i$ i $z_n^i$, zaś $N$ oznacza horyzont sterowania.

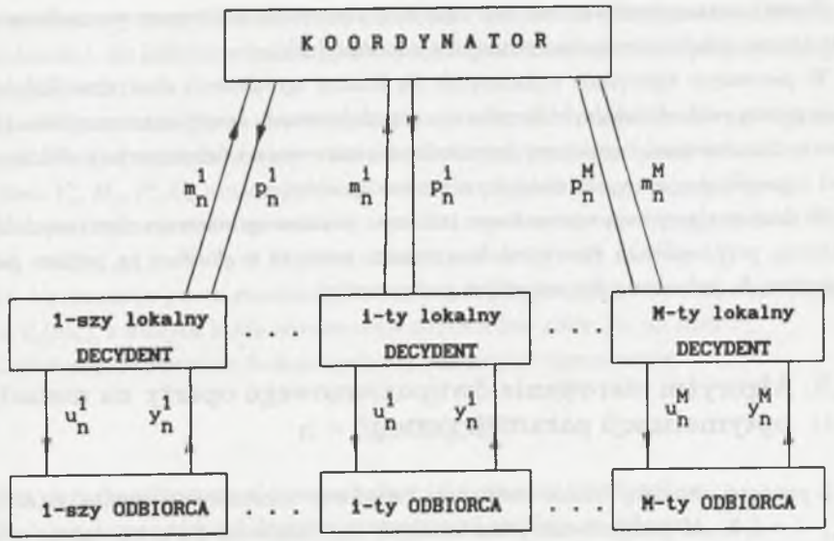
Zadaniem jest tak rozdzielać zasoby pomiędzy odbiorców, aby wskaźnik jakości (1.3) przyjmował minimalną wartość przy ograniczeniu (1.1).



Rozwiązanie zadania polegające na wyznaczeniu sterowań $u_n^i$, $i = 1, 2, ..., M$, $n = 0, 1, ..., N$, dla których wskaźnik jakości (1.3) przy ograniczeniu (1.1) przyjmuje minimalną wartość, jest w przypadku niepełnej informacji niemożliwe. Stąd należy sformułować problem wtórny, którego rozwiązanie zależeć będzie zarówno od dostępnej informacji, jak i od zaproponowanej struktury układu sterowania.

## 1.2. Struktura układu sterowania i dostępna informacja

Możliwość rozwiązania sformułowanego wyżej zadania i złożoność algorytmu sterowania zależą od dostępnej informacji oraz od przyjętej struktury układu sterowania. W rozpatrywanym problemie zakładamy, że decyzje o rozdziale zasobów podejmowane są w strukturze dwupoziomowej z lokalnymi decydentami na poziomie niższym i koordynatorem na poziomie wyższym, jak to zostało pokazane na rys. 2.




Rys.2. Struktura układu sterowania
Fig.2. Control structure

Zakładamy, że w każdym punkcie decyzyjnym informacja składa się z dwóch składników. Pierwszy wynika z doświadczeń z przeszłości i jest dany w postaci odpowiednich rozkładów prawdopodobieństwa, drugi wynika natomiast z pomiarów wykonywanych w systemie.

Przyjmujemy więc, że $i$–ty lokalny decydent dysponuje w chwili $n$ informacją pomiarową $y_n^i$, określoną przez (1.2).

Na poziom wyższy przekazywany jest w chwili $n$ z każdego podsystemu wektor przetworzonej informacji $m_n^i = d_n^i(y_n^i)$ o mniejszym wymiarze w stosunku do wektora $y_n^i$. Zatem koordynator dysponuje w chwili $n$ informacją $m_n^* = [m_n^1, m_n^2, ..., m_n^M]$ otrzymaną od lokalnych decydentów oraz informacją o wielkości zasobów w magazynie i o dopływie do magazynu oznaczoną przez $m_n^{**}$.

Na podstawie dostępnej informacji $m_n = [m_n^*, m_n^{**}]$ koordynator wyznacza wytyczne $p_n^i$, $i = 1, 2, ..., M$ dla lokalnych decydentów.

Ostateczne decyzje $u_n^i$, $i = 1, 2, ..., M$ o przydziale zasobów poszczególnym podsystemom są podejmowane przez lokalnych decydentów na podstawie dostępnej dla nich bardziej szczegółowej informacji $y_n^i$, $i = 1, 2, ..., M$ oraz wytycznych $p_n^i$ otrzymywanych od koordynatora.

Poniżej zostaną przedstawione dwa algorytmy sterowania realizowane w przedstawionej strukturze układu sterowania i strukturze informacyjnej.

W pierwszym algorytmie wykorzystuje się lokalne ograniczenie elastyczne [33], które daje pewną swobodę lokalnym decydentom w podejmowaniu decyzji oraz umożliwia, (przy pewnych założeniach) częściową decentralizację sterowania i dekompozycję obliczeń, co jest szczególnie istotne przy dużej wymiarowości problemu.

W drugim algorytmie wprowadzone jest tzw. globalne ograniczenie elastyczne, dzięki któremu przy realizacji sterowania koordynator przesyła w chwili $n$ na poziom niższy wytyczną $\lambda_n$ jednakową dla wszystkich podsystemów.

## 1.3. Algorytm sterowania dwupoziomowego oparty na metodzie optymalizacji parametrycznej

Z przyjętej struktury układu sterowania i struktury informacyjnej wynika, że decyzje $u_n^i$, $i = 1, 2, ..M$ podejmowane przez lokalnych decydentów są dla koordynatora zmiennymi losowymi. Ich rozkład może być określony po wcześniejszym wyznaczeniu prawa sterowania lokalnego decydenta podczas syntezy algorytmu sterowania.

Niech wytyczna koordynatora $p_n^i$ oznacza wstępny przydział zasobów $i$– temu podsystemowi w chwili $n$ i stanowi ocenę wielkości $u_n^i$ wyznaczoną przy wykorzystaniu informacji



wyższego poziomu. Najczęściej używaną oceną jest warunkowa wartość oczekiwana, stąd przyjmuje się, że [33]:

$$p_n^i = E_{|m_n}(u_n^i)_{u_n^i = a_n^i(.)}, \quad i = 1, 2, ..., M, \tag{1.4}$$

gdzie $E_{|m_n}$ oznacza operację warunkowego uśredniania przy zadanym $m_n$, zaś $a_n^i(.)$ jest dopuszczalnym prawem sterowania określonym w czasie syntezy algorytmu sterowania.

Ograniczenie (1.4), zwane lokalnym ograniczeniem elastycznym, pozostawia pewną swobodę w wyborze decyzji $u_n^i$ lokalnym decydentom, dzięki czemu mogą oni lepiej wykorzystać swoją bardziej szczegółową informację. W dalszych rozważaniach zostanie pokazane, że ograniczenie to umożliwia, przy pewnych założeniach, częściową decentralizację sterowania oraz dekompozycję obliczeń. Jest to szczególnie istotne przy dużej wymiarowości problemu.

### 1.3.1. Sformułowanie problemu rozdziału zasobów

W trakcie syntezy układu sterowania należy określić klasę dopuszczalnych praw sterowania oraz wyznaczyć postać optymalnych praw sterowania (koordynatora i lokalnych decydentów), dla których wskaźnik jakości przyjmuje minimalną wartość przy istniejących ograniczeniach.

Przez dopuszczalne prawa sterowania będziemy rozumieć funkcje określonych argumentów, dla których minimalizowany wskaźnik jakości przyjmuje skończoną wartość.

Niech $Y_n^i, M_n, P_n^i, U_n^i$ oznaczają zbiory wektorów odpowiednio $y_n^i, m_n, p_n^i$ oraz $u_n^i$.

Za dopuszczalne prawa sterowania $i$– tego lokalnego decydenta przyjmujemy zbiór funkcji $u_n^i = a_n^i(y_n^i, p_n^i)$, z których każda odwzorowuje zbiór $Y_n^i \times P_n^i$ na zbiór $U_n^i$.

Za dopuszczalne prawa sterowania koordynatora przyjmujemy natomiast zbiór funkcji $p_n^i = b_n^i(m_n)$, z których każda odwzorowuje odpowiednio zbiór $M_n$ na zbiór $P_n^i$.

Zakładamy, że powyższe funkcje spełniają następujące ograniczenie:

$$p_n^i = E_{|m_n} a_n^i(y_n^i, p_n^i) \tag{1.5}$$

Wytyczna koordynatora $p_n^i$, zwana będzie dalej zmienną koordynującą.

W dalszych rozważaniach będziemy rozpatrywać problem, w którym:

**Z1.** Rozkłady prawdopodobieństwa zmiennych losowych $z_n^i, w_n^i$ występujące w (1.2) są znane;

**Z2.** Zmienne losowe $y_n^i$, $z_n^i$ są niezależne od $m_n^{**}, m_n^j$ oraz $p_n^j$ dla $i \neq j$.

Dla przyjętej struktury układu sterowania i struktury informacyjnej wskaźnik jakości (1.3) nie może być minimalizowany. Wprowadzamy zatem wtórny wskaźnik jakości w postaci:

$$I(a,b) = E\sum_{n=0}^{N}\sum_{i=1}^{M} l_n^i[a_n^i(y_n^i, p_n^i), z_n^i]_{p_n^i = b_n^i(.)}, \tag{1.6}$$

gdzie $E$ jest symbolem wartości oczekiwanej, zaś $a = \{a_n^i,\ n = 0,1,...,N,\ i = 1,2,...,M\}$, $b = \{b_n^i\ \ n = 0,1,..,N,\ \ i = 1,2,...,M\}$ są zbiorami funkcji dopuszczalnych, dla których wskaźnik (1.6) przyjmuje skończoną wartość.

Odnośnie funkcji $l_n^i(u_n^i, z_n^i)$ oraz sterowania $u_n^i$ założymy, że:

**Z3.** Funkcja $l_n^i(u_n^i, z_n^i)$ jest różniczkowalna w sposób ciągły względem $u_n^i$ dla dowolnego $z_n^i$;

**Z4.** Wartości sterowań $u_n^i$ należą do przestrzeni euklidesowej o odpowiednim wymiarze;

**Z5.** Sterowanie $u_n^i$ nie wpływa na wartości zmiennych $y_n^j$ oraz $z_n^j$ dla $i \neq j$.

Brak górnego ograniczenia na decyzje $u_n^i$ oznacza, że fizycznie możliwe jest dostarczenie odbiorcom wielkości zasobów wynikającej z decyzji decydentów.

W czasie realizacji sterowania mogą wystąpić ujemne wartości zmiennych $u_n^i$. Ich liczba zależeć będzie od rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych losowych występujących w problemie oraz od wielkości deficytu zasobów. Analiza wyników badań symulacyjnych może prowadzić do przyjęcia lub odrzucenia algorytmu, w którym nie uwzględniono ograniczenia na znak sterowania.

Ponieważ zmienna $u_n^i = a_n^i(y_n^i, p_n^i)$ jest dla koordynatora zmienną losową o nieznanej wartości w chwili $n$, więc ograniczenie (1.1) nie może być przez niego brane pod uwagę. W dalszych rozważaniach przyjmiemy, że koordynator uwzględnia przy wyznaczaniu wytycznych ograniczenie na wielkość zasobów w magazynie w zmodyfikowanej postaci:

$$h_{min} + \Delta u_n \leq \bar{h}_n + \bar{d}_n - \sum_{i=1}^{M} p_n^i, \quad p_n^i \geq 0, \tag{1.7}$$

gdzie $\Delta u_n$ jest tzw. pojemnością rezerwową w magazynie, zaś $\bar{h}_n$ i $\bar{d}_n$ są ocenami wielkości zasobów w magazynie oraz dopływu, dokonanymi przez koordynatora w chwili $n$ na podstawie dostępnej informacji $m_n$.

Wymaganie nieujemności $p_n^i$ jest równoznaczne z wymaganiem nieujemności średniej warunkowej sterowania, wyznaczonej przez koordynatora.



W czasie pracy systemu wielkość zasobów w magazynie powinna być większa od $\sum_{i=1}^{M} p_n^i$, ponieważ dla poszczególnych realizacji może się zdarzyć, że $\sum_{i=1}^{M} u_n^i > \sum_{i=1}^{M} p_n^i$. Zatem pewien zapas zasobów $\Delta u_n$ występujący w (1.7) jest niezbędny do zaspokojenia zwiększonych zapotrzebowań odbiorców. Istnienie zapasu zasobów, wynikającego z występujących w systemie zakłóceń, jest znane w praktyce.

Dla opisanego systemu, założonej struktury układu sterowania i dostępnej informacji wśród dopuszczalnych praw sterowania należy znaleźć $u_n^{io} = a_n^{io}(y_n^i, p_n^i)$ oraz $p_n^{io} = b_n^{io}(m_n)$, $i = 1,2,...,M$, $n = 0,1,...,N$, dla których wtórny wskaźnik jakości (1.6) przyjmuje minimalną wartość przy ograniczeniach (1.5), (1.7).

Zauważmy, że rozwiązanie sformułowanego problemu może być stosowane w przypadku, gdy w systemie możliwe jest generowanie dostatecznie licznego zbioru realizacji zmiennych losowych, a zatem i decyzji sterujących, dla którego uzasadnione jest stosowanie miary jakości w postaci wartości oczekiwanej.

### 1.3.2. Sformułowanie i rozwiązanie problemu optymalizacji lokalnej

Poniżej zostanie sformułowane zadanie optymalizacji lokalnej oraz podane jego rozwiązanie, bazujące na lemacie, który będzie wykorzystywany przy rozwiązywaniu różnych wariantów problemu rozdziału zasobów formułowanych w niniejszej pracy.

Zadanie optymalizacji lokalnej polega na wyznaczeniu optymalnego prawa sterowania $a_n^{io}(y_n^i, p_n^i)$, minimalizującego lokalny wskaźnik jakości:

$$I_n^i(a_n^i, b_n^i) = E l_n^i[a_n^i(y_n^i, p_n^i), z_n^i]_{p_n^i = b_n^i(m_n)} \tag{1.8}$$

dla dowolnej dopuszczalnej funkcji $b_n^i(m_n)$ i przy ograniczeniu elastycznym:

$$p_n^i = E_{|m_n} a_n^i(y_n^i, p_n^i) \tag{1.9}$$

Do rozwiązania powyższego zadania zostanie wykorzystany następujący lemat.

**Lemat podstawowy**

Niech przy założeniach **Z1** i **Z2** funkcja $u_n^{io} = a_n^{io}(y_n^i, p_n^i)$ będzie dopuszczalnym prawem sterowania, dla którego zachodzi:

$$E_{|m_n^i, p_n^i} l_n^i[a_n^{io}(y_n^i, p_n^i), z_n^i] = \min_{a_n^i} E_{|m_n^i, p_n^i} l_n^i[a_n^i(y_n^i, p_n^i), z_n^i] \tag{1.10}$$

przy ograniczeniu:

$$p_n^i = E_{|m_n^i, p_n^i} a_n^i(y_n^i, p_n^i), \quad m_n^i \in M_n^i, \quad p_n^i \in P_n^i, \tag{1.11}$$

gdzie $p_n^i = b_n^i(m_n)$ zaś $m_n^i = d_n^i(y_n^i)$ jest częścią wektora $m_n$.

Wówczas funkcja $u_n^{io} = a_n^{io}(y_n^i, p_n^i)$ jest optymalnym prawem sterowania, minimalizującym (1.8) oraz

$$I_n^i(a_n^{io}, b_n^i) = \min_{a_n^i} I_n^i(a_n^i, b_n^i) = E\{\min_{a_n^i} E_{|m_n} l_n^i[a_n^i(y_n^i, p_n^i), z_n^i]\}_{p_n^i = b_n^i(m_n)} \tag{1.12}$$

przy ograniczeniu (1.9).

**Dowód** przebiega podobnie do przedstawionego w [33].
Z założeń wynika, że:

$$E_{|m_n^i, p_n^i} l_n^i[a_n^i(y_n^i, p_n^i), z_n^i] \geq E_{|m_n^i, p_n^i} l_n^i[a_n^{io}(y_n^i, p_n^i), z_n^i], \tag{1.13}$$

zaś operację uśredniania $E_{|m_n^i, p_n^i}$, występującą w (1.13) można zastąpić uśrednieniem $E_{|m_n}$, tzn.

$$E_{|m_n} l_n^i[a_n^i(y_n^i, p_n^i), z_n^i] \geq E_{|m_n} l_n^i[a_n^{io}(y_n^i, p_n^i), z_n^i] \tag{1.14}$$

Po podstawieniu $p_n^i = b_n^i(m_n)$ i uśrednieniu obu stron (1.14) względem $m_n$ otrzymamy:

$$E l_n^i[a_n^i(y_n^i, p_n^i), z_n^i]_{p_n^i = b_n^i(m_n)} \geq E l_n^i[a_n^{io}(y_n^i, p_n^i), z_n^i]_{p_n^i = b_n^i(m_n)} \tag{1.15}$$

Zatem

$$\inf_{a_n^i} E l_n^i[a_n^i(y_n^i, p_n^i), z_n^i]_{p_n^i = b_n^i(m_n)} \geq E l_n^i[a_n^{io}(y_n^i, p_n^i), z_n^i]_{p_n^i = b_n^i(m_n)} \tag{1.16}$$

Ponieważ funkcja $a_n^{io}$ należy do dopuszczalnych praw sterowania, więc zachodzi następujący związek:

$$\inf_{a_n^i} E l_n^i[a_n^i(y_n^i, p_n^i), z_n^i]_{p_n^i = b_n^i(m_n)} \leq E l_n^i[a_n^{io}(y_n^i, p_n^i), z_n^i]_{p_n^i = b_n^i(m_n)} \tag{1.17}$$

Porównując (1.16) i (1.17) oraz uwzględniając oznaczenie (1.8) można zauważyć, że

$$I_n^i(a_n^{io}, b_n^i) = \min_{a_n^i} I_n^i(a_n^i, b_n^i) \tag{1.18}$$

Zatem prawo sterowania $a_n^{io}$ wyznaczone z (1.10) minimalizuje wskaźnik lokalny (1.8) dla dowolnej dopuszczalnej funkcji $b_n^i$.

Zastępując operację uśredniania $E_{|m_n^i, p_n^i}$ występującą w (1.10) i (1.11) uśrednieniem $E_{|m_n}$, otrzymamy:

$$E_{|m_n} l_n^i[a_n^{io}(y_n^i, p_n^i), z_n^i] = \min_{a_n^i} E_{|m_n} l_n^i[a_n^i(y_n^i, p_n^i), z_n^i] \tag{1.19}$$



oraz

$$p_n^i = E_{|m_n} a_n^i(y_n^i, p_n^i) \tag{1.20}$$

Po podstawieniu $p_n^i = b_n^i(m_n)$ i uśrednieniu obu stron (1.19) dostajemy:

$$E l_n^i[a_n^{io}(y_n^i, p_n^i), z_n^i]_{p_n^i = b_n^i(m_n)} = E\{\min_{a_n^i} E_{|m_n} l_n^i[a_n^i(y_n^i, p_n^i), z_n^i]\}_{p_n^i = b_n^i(m_n)} \tag{1.21}$$

Zatem optymalne prawo sterowania $a_n^{io}$ wyznaczone z (1.10) przy ograniczeniu (1.11) spełnia (1.12) przy ograniczeniu (1.9).

Funkcjonały $E_{|m_n^i, p_n^i} l_n^i[a_n^i(y_n^i, p_n^i), z_n^i]$, przy założeniu **Z5** oraz $E_{|m_n^i, p_n^i} a_n^i(y_n^i, p_n^i)$, występujące odpowiednio w (1.10), (1.11), są ciągłe i różniczkowalne w sensie *Frèchet*a [58] w unormowanej przestrzeni funkcji $a_n^i(y_n^i, p_n^i)$ z normą $[E_{|m_n^i, p_n^i}(a_n^{iT} a_n^i)]^{1/2}$. Ponieważ każde dopuszczalne prawo sterowania $a_n^i(y_n^i, p_n^i)$, spełniające (1.11), jest punktem regularnym tego ograniczenia [58], więc istnieje taki wektor mnożników Lagrange'a $\lambda_n^i$, że zadanie (1.10) przy ograniczeniu (1.11) sprowadza się do równoważnego zadania bez ograniczeń w postaci [58, 33]:

$$L_n^{io} = \min_{a_n^i}\{E_{|m_n^i, p_n^i} l_n^i[a_n^i(y_n^i, p_n^i), z_n^i] + \lambda_n^{iT}[E_{|m_n^i, p_n^i} a_n^i(y_n^i, p_n^i) - p_n^i]\}$$

lub

$$L_n^{io} = \min_{a_n^i} E_{|m_n^i, p_n^i}\{l_n^i[a_n^i(y_n^i, p_n^i), z_n^i] + \lambda_n^{iT}[a_n^i(y_n^i, p_n^i) - p_n^i]\} \tag{1.22}$$

Odpowiedni dobór tych mnożników zapewnia spełnienie ograniczenia (1.11).
Zagadnienie tego typu zwane jest też izoperymetrycznym problemem rachunku wariacyjnego, zaś ograniczenie elastyczne (1.11) można nazwać warunkiem izoperymetryczności.

Operację uśredniania warunkowego $E_{|m_n^i, p_n^i}\{.\}$ występującą w (1.22) można też wykonać w kolejności $E_{|m_n^i, p_n^i}[E_{|y_n^i, p_n^i}\{.\}]$, ponieważ informacja $m_n^i$, wynikająca z zależności $m_n^i = d_n^i(y_n^i)$, jest zagregowana w stosunku do informacji $y_n^i$. Zatem problem minimalizacji (1.22) względem funkcji $a_n^i$ sprowadza się do znacznie prostszego zadania minimalizacji względem zmiennej $u_n^i$ w postaci:

$$L_n^{io} = E_{|m_n^i, p_n^i} \min_{u_n^i} E_{|y_n^i, p_n^i}[l_n^i(u_n^i, z_n^i) + \lambda_n^{iT}(u_n^i - p_n^i)] \tag{1.23}$$

Jeśli oznaczyć przez $L_n^{i*}(y_n^i, u_n^i, \lambda_n^i) = E_{|y_n^i, p_n^i} l_n^i(u_n^i, z_n^i) + \lambda_n^{iT} u_n^i$, to otrzymamy następujący warunek konieczny na minimum funkcjonału (1.23):

$$\frac{\partial L_n^{i*}(y_n^i, u_n^i, \lambda_n^i)}{\partial u_n^i} = 0 \tag{1.24}$$

Po wyznaczeniu z (1.24) $u_n^i$ jako funkcji zmiennych $y_n^i$ oraz $\lambda_n^i$ i wstawieniu jej do (1.11) możemy znaleźć wartości mnożników Lagrange'a zależne od $m_n^i$ i $p_n^i$. Optymalna postać prawa sterowania $a_n^{io}(y_n^i, p_n^i)$ wynika ze wstawienia tak obliczonych $\lambda_n^i$ do $u_n^i$ obliczonej z (1.24) jako funkcji zmiennych $y_n^i$ oraz $\lambda_n^i$.

### 1.3.3. Rozwiązanie problemu rozdziału zasobów

Do rozwiązania zadania minimalizacji wskaźnika jakości (1.6) przy ograniczeniach (1.5) i (1.7) zostanie zastosowana metoda programowania dynamicznego w wersji stochastycznej, wynikająca z zasady optymalności Bellmana [5, 3, 30, 31].

Zgodnie z tą zasadą optymalna postać praw sterowania $a_n^i$ oraz $b_n^i$ $i = 1, 2, .., M$, $n = 0, 1, ..., N$ wynika z wykonania ciągu operacji minimalizacji i uśredniania [3, 30, 31] przy ograniczeniach (1.5), (1.7) w wyrażeniu:

$$I(a^o, b^o) = \min_{a_0, b_0} \min_{a_1, b_1} ... \min_{a_N, b_N} E \sum_{n=0}^{N} \sum_{i=1}^{M} l_n^i(.) =$$

$$= \min_{a_0, b_0} \{E \sum_{i=1}^{M} l_0^i(.) + \min_{a_1, b_1} \{E \sum_{i=1}^{M} l_1^i(.) + .... + \min_{a_N, b_N} \{E \sum_{i=1}^{M} l_N^i(.)\}...\}\},$$

gdzie $a_n = \{a_n^i\}$, $b_n = \{b_n^i\}$, $i = 1, 2, ..., M$.

Optymalna wartość wskaźnika jakości za okres $(n, N)$ wynosi więc:

$$I_{n,N}^o = \min_{a_n, b_n} ... \min_{a_N, b_N} E \sum_{k=n}^{N} \sum_{i=1}^{M} l_k^i(.) =$$

$$= E \min_{a_n, b_n} ... \min_{a_N, b_N} E_{|m_0, m_1, ..., m_n} \sum_{k=n}^{N} \sum_{i=1}^{M} l_k^i(.) =$$

$$= E \min_{a_n, b_n} E_{|m_0, m_1, ..., m_n} \{\sum_{i=1}^{M} l_n^i[a_n^i(y_n^i, p_n^i), z_n^i] + \bar{S}_{n+1}(.)\}_{p_n^i = b_n^i(.)}, \qquad (1.25)$$

gdzie $\bar{S}_{n+1}(.) = \min_{a_{n+1}, b_{n+1}} ... \min_{a_N, b_N} E_{|m_0, m_1, ..., m_{n+1}} \sum_{k=n+1}^{N} \sum_{i=1}^{M} l_k^i(.)$.

Załóżmy, że wyrażenie $\bar{S}_{n+1}(.)$ nie zależy od sterowań $u_k^i, k = 0, 1, ..., n,\ i = 1, 2, ..., M$.

Wówczas zadanie poszukiwania praw lokalnych decydentów sprowadza się do minimalizacji wyrażenia

$$E_{|m_n} \sum_{i=1}^{M} l_n^i[a_n^i(y_n^i, p_n^i), z_n^i]$$

względem $a_n$ przy ograniczeniu (1.5) i przy $p_n^i$ traktowanym jako parametr.

Po wyznaczeniu $a_n^{io}(y_n^i, p_n^i)$, $i = 1, 2, ..., M$, wstawieniu do (1.25) i minimalizacji podług $p_n^i$, $i = 1, 2, ..., M$ przy ograniczeniu (1.7) otrzymamy wyrażenie $\bar{S}_n(.)$, które zależy



między innymi od $\bar{h}_n$. Wielkość $\bar{h}_n$ (ocena poziomu zasobów w magazynie dokonana na podstawie informacji dostępnej na poziomie wyższym) jest funkcją wcześniejszych wytycznych koordynatora, co powoduje, że wyrażenie $\bar{S}_n(.)$ nie zależy od $u_k^i, k = 0, 1, ..., n-1$, $i = 1, 2, ..., M$.

Z powyższego rozumowania wynika, że zadanie poszukiwania praw lokalnych decydentów sprowadza się do zagadnienia minimalizacji w (1.26)

$$I_n(a_n^o, b_n) = E\{\min_{a_n} E_{|m_n} \sum_{i=1}^{M} l_n^i[a_n^i(y_n^i, p_n^i), z_n^i]\}_{p_n^i = b_n^i(m_n)} \qquad (1.26)$$

przy ograniczeniu (1.5) dla dowolnego dopuszczalnego zbioru funkcji $b_n$.

Przy założeniu **Z5**, że $y_n^i$ oraz $z_n^i$ nie zależą od $u_n^j$ dla $i \neq j$, zadanie poszukiwania minimum względem $a_n = \{a_n^i\}$, $i = 1, 2, ..., M$ można zdekomponować na $M$ niezależnych zadań lokalnych w postaci:

$$I_n^i(a_n^{io}, b_n) = E\{\min_{a_n^i} E_{|m_n} l_n^i[a_n^i(y_n^i, p_n^i), z_n^i]\}_{p_n^i = b_n^i(m_n)} \qquad (1.27)$$

przy ograniczeniu (1.5).

Z lematu podstawowego wynika, że powyższe zadanie minimalizacji sprowadza się do problemu (1.10) przy ograniczeniu (1.11), który został rozwiązany w punkcie 1.3.2. Zauważmy, że zadanie optymalizacji lokalnej rozwiązywane jest w trakcie syntezy układu sterowania, a nie w trakcie realizacji algorytmu w trybie on-line.

Zadanie koordynatora polega na określeniu funkcji $b^o$ minimalizujących wskaźnik jakości (1.6) w postaci:

$$I(a^o, b^o) = E \sum_{n=0}^{N} \sum_{i=1}^{M} l_n^i[a_n^{io}(y_n^i, p_n^i), z_n^i]_{p_n^i = b_n^i(m_n)} \qquad (1.28)$$

względem $b$ przy ograniczeniu (1.7), gdzie $b = \{b_n^i,\ n = 0, 1, ..., N,\ i = 1, 2, ..., M\}$.

Widzimy, że dla koordynatora jest to dynamiczny problem optymalizacji z ograniczeniami nierównościowymi. Jedną z możliwości jego rozwiązania jest wykorzystanie idei sterowania w układzie otwartym ze sprzężeniem (OLF) [74] z przesuwnym horyzontem $N'$. Zgodnie z tą ideą w chwili $n$ koordynator określa wytyczne wynikające z minimalizacji w (1.29)

$$I_n^* = \min_{b_{n+N'|n}} E \sum_{k=n}^{n+N'} \sum_{i=1}^{M} l_k^i[a_k^{io}(y_k^i, p_{k|n}^i), z_k^i]_{p_{k|n}^i = b_{k|n}^i(m_n)}, \qquad (1.29)$$

gdzie $b_{n+N'|n} = \{b_{k|n}^i(m_n),\ k = n, n+1, ..., N',\ i = 1, 2, ..., M\}$.

Zadanie to można sprowadzić do poszukiwania wartości zmiennych $p_{n+N'|n} = \{p^i_{k|n}, k = n, n+1, ..., n+N',\ i = 1, 2, ..., M\}$, wynikających z minimalizacji w (1.30)

$$I^*_n = E\{\min_{p_{n+N'|n}} E_{|m_n} \sum_{k=n}^{n+N'} \sum_{i=1}^{M} l^i_k[a^{io}_k(y^i_k, p^i_{k|n}), z^i_k]\}_{p^{io}_{k|n} = b^{io}_{k|n}(m_n)} \tag{1.30}$$

przy ograniczeniach:

$$h_{min} + \Delta u_{n+j-1} \le \bar{h}_{n+j|n},\quad j = 1, 2, ..., N'+1 \tag{1.31}$$

$$p^i_{n+j|n} \ge 0,\quad i = 1, ..., M,\quad j = 0, 1, ..., N', \tag{1.32}$$

gdzie $\bar{h}_{n+j|n}$ jest predykcją wielkości zasobów w magazynie w chwili $n+j$ dokonaną przez koordynatora na podstawie informacji $m_n$. Ocena ta może być wyznaczona z równania:

$$\bar{h}_{n+j|n} = \bar{h}_{n|n} + \sum_{k=n}^{n+j-1} \bar{d}_{k|n} - \sum_{k=n}^{n+j-1} \sum_{i=1}^{M} p^i_{k|n}, \tag{1.33}$$

gdzie $\bar{h}_{n|n}$ oraz $\bar{d}_{k|n}$ są odpowiednio ocenami wielkości zasobów w chwili $n$ oraz dopływu w okresie $(k, k+1)$ dokonanymi w chwili $n$.

Zgodnie z ideą sterowania w układzie OLF na poziom niższy przesyłane są w chwili $n$ tylko wartości zmiennych koordynacyjnych $p^i_n = p^i_{n|n},\ i = 1, 2, ..., M$.

Wartości zmiennych $p^i_{k|n}$ są wyznaczane na poziomie wyższym w trakcie realizacji algorytmu rozdziału zasobów w chwilach $n = 0, 1, ..., N$. Zauważmy, że jest to problem optymalizacji statycznej przy ograniczeniach nierównościowych na zmienne decyzyjne o wymiarowości zależnej od wymiaru wektora $p^i_n$, liczby podsystemów $M$ oraz przesuwnego horyzontu $N'$. Czasami wymiarowość problemu można zmniejszyć przez wprowadzenie tzw. zmiennej zagregowanej $e_{k|n}$ w postaci:

$$e_{k|n} = \sum_{i=1}^{M} p^i_{k|n},\quad k = n, n+1, ..., n+N' \tag{1.34}$$

Wówczas dla chwili $n$ należy wyznaczyć metodą analityczną zależność $p^{io}_{k|n}$, $i = 1, 2, ..., M$ od $e_{k|n}$ z minimalizacji w (1.35)

$$I^o_k = E \min E_{|m_n} \sum_{i=1}^{M} l^i_k[a^{io}_k(y^i_k, p^i_k), z^i_k] \tag{1.35}$$

względem $p^i_{k|n},\ i = 1, 2, ..., M$, przy ograniczeniu (1.34). Natomiast numerycznie trzeba obliczać wartości składowych wektorów $e^*_{n+N'|n} = \{e_{n|n}, e_{n+1|n}, ..., e_{n+N'|n}\}$ wynikających z minimalizacji w (1.36)

$$I^*_n = E \min_{e^*_{n+N'|n}} E_{|m_n} \sum_{k=n}^{n+N'} \sum_{i=1}^{M} l^i_k[a^{io}_k(y^i_k, p^{io}_{k|n}(e_{k|n})), z^i_k] \tag{1.36}$$



przy ograniczeniach:

$$h_{min} + \Delta u_{n+j-1} \le \bar{h}_{n+j|n} = \bar{h}_{n|n} + \sum_{k=n}^{n+j-1} \bar{d}_{k|n} - \sum_{k=n}^{n+j-1} e_{k|n}$$

$$e_{n+j-1|n} \ge 0,\quad j = 1, 2, ...N'+1 \tag{1.37}$$

Jeśli po zastosowaniu takiej procedury otrzymane wartości $p^{io}_{k|n},\ i = 1, ..., M$, $k = n, n+1, ..., n+N'$ będą nieujemne, wówczas można je przesłać na poziom niższy. Zauważmy, że wymiarowość problemu numerycznego nie zależy w tym przypadku od liczby podsystemów. W przykładach zostanie pokazane, że dla kwadratowego wskaźnika jakości na poziom niższy wystarczy przekazywać wartości jednej zmiennej, jednakowe dla wszystkich podsystemów, co prowadzi do dalszego zmniejszania ilości zróżnicowanej informacji przesyłanej w systemie.

### 1.3.4. Algorytm sterowania dla kwadratowego wskaźnika jakości

Rozpatrzmy problem rozdziału zasobów sformułowany w punkcie 1.3.1 przy założeniu, że wskaźnik jakości (1.6) ma postać:

$$I = E \sum_{n=0}^{N} \sum_{i=1}^{M} [z^{iT}_n Q^i_n z^i_n + 2 z^{iT}_n G^i_n a^i_n + a^{iT}_n H^i_n a^i_n], \tag{1.38}$$

gdzie macierze $\begin{bmatrix} Q^i_n & G^i_n \\ G^{iT}_n & H^i_n \end{bmatrix}$ są symetryczne, dodatnio półokreślone, zaś macierze $H^i_n$ są dodatnio określone.

Optymalne prawa sterowania $a^{io}_n$ możemy wyznaczyć wykorzystując zależność (1.24), z której wynika, że

$$u^{io}_n = -(H^i_n)^{-1}(G^{iT}_n \hat{z}^i_n + \lambda^i_n), \tag{1.39}$$

gdzie $\hat{z}^i_n = E_{|y^i_n} z^i_n$.

Wstawiając (1.39) do ograniczenia elastycznego (1.5) obliczymy $\lambda^i_n$ wyrażone wzorem

$$\lambda^i_n = -H^i_n p^i_n - G^{iT}_n \bar{z}^i_n, \tag{1.40}$$

gdzie $\bar{z}^i_n = E_{|m^i_n} z^i_n = E_{|m^i_n} z^i_n$, co wynika z założenia **Z2**.

Ostatecznie optymalne prawo sterowania $i$-tego lokalnego decydenta przyjmie postać:

$$u^{io}_n = p^i_n - (H^i_n)^{-1} G^{iT}_n (\hat{z}^i_n - \bar{z}^i_n) \tag{1.41}$$

Zadanie koordynatora polega na minimalizacji wskaźnika (1.28) przy ograniczeniu (1.7) względem $\{b^i_n\}$, który dla $a^{io}_n$ określonego przez (1.41) można zapisać jako:

$$I(a^o, b) = E \sum_{n=0}^{N} \sum_{i=1}^{M} [p^{iT}_n H^i_n p^i_n + 2 p^{iT}_n G^{iT}_n \bar{z}^i_n]_{|p^i_n = b^i_n(m_n)} + r, \tag{1.42}$$

gdzie

$$r = E\sum_{n=0}^{N}\sum_{i=1}^{M}[z_n^{iT}Q_n^i z_n^i - (\hat{z}_n^i - \bar{z}_n^i)^T G_n^i (H_n^i)^{-1} G_n^{iT}(\hat{z}_n^i - \bar{z}_n^i)] \tag{1.43}$$

Wprowadzając zmienną zagregowaną $e_{k|n}$ zdefiniowaną przez (1.34) i rozwiązując zadanie minimalizacji w (1.35) przy ograniczeniu (1.34) możemy wyznaczyć analityczną zależność $p_{k|n}^i$ od $e_{k|n}$ dla $k = n, n+1, ..., N'$ w postaci:

$$p_{k|n}^i = -(H_k^i)^{-1}(G_k^{iT}\bar{z}_{k|n}^i + \lambda_k), \tag{1.44}$$

gdzie $\bar{z}_{k|n}^i = E_{|m_n^i} z_k^i$, zaś $\lambda_k$ jest mnożnikiem Lagrange'a wyrażonym jako:

$$\lambda_k = -H_k(\sum_{i=1}^{M}(H_k^i)^{-1}G_k^{iT}\bar{z}_{k|n}^i + e_{k|n}), \tag{1.45}$$

gdzie $H_k = [\sum_{i=1}^{M}(H_k^i)^{-1}]^{-1}$. Po wstawieniu (1.44) z uwzględnieniem (1.45) do (1.36) otrzymamy numeryczne zadanie minimalizacji (1.46) względem
$e_{n+N'|n}^* = \{e_{n|n}, e_{n+1|n}, ..., e_{n+N'|n}\}$ przy ograniczeniu (1.37)

$$I_n^* = \min_{e_{n+N'|n}^*} \sum_{k=n}^{n+N'}[e_{k|n}^T H_k e_{k|n} + 2e_{k|n}^T H_k \sum_{i=1}^{M}(H_k^i)^{-1}G_k^{iT}\bar{z}_{k|n}^i] + S(m_n), \tag{1.46}$$

gdzie wyrażenie $S(m_n)$ nie zależy od poszukiwanych zmiennych.

Zauważmy, że z (1.41), (1.44) i (1.45) wynika, że w przypadku, gdy $p_{k|n}^i$, $i = 1, 2, .., M$, $k = n, n+1, ..., n+N'$ są nieujemne, to na poziom niższy wystarczy przesyłać w chwili $n$ wartości $\lambda_n$ wspólne dla wszystkich podsystemów zamiast $p_n^i = p_{n|n}^i, i = 1, 2, ..., M$.

W prawach sterowania lokalnych decydentów oraz wytycznych koordynatora występują oceny zmiennej losowej $z_n^i$, których postać oraz sposób ich wyznaczania zależą od modelu pomiaru (1.2), równania przetwarzającego informację $y_n^i$ w $m_n^i$ ($m_n^i = d_n^i(y_n^i)$) oraz od rozkładu zmiennych losowych w nich występujących. W przypadku liniowych równań i rozkładów normalnych oceny te mają postać analityczną i są w łatwy sposób wyznaczalne.

W ograniczeniu (1.37) występuje wielkość charakteryzująca tzw. pojemność rezerwową w magazynie. Jest ona niezbędna do zapewnienia realizowalności sterowania lokalnego wynikającego z zależności (1.41) i zależy od funkcji rozkładu sumy sterowań lokalnych, będących dla koordynatora w chwili $n$ zmiennymi losowymi. W niektórych przypadkach można określić jej wielkość metodą analityczną (jak to zostanie pokazane w przykładzie), w innych zaś eksperymentalnie w czasie badań symulacyjnych.



**1.3.4.1. Przykład**

Rozpatrzmy system składający się z $M$ podsystemów, których zapotrzebowania $z_n^i$ są zmiennymi losowymi o znanych rozkładach prawdopodobieństwa.

Niech wskaźnik jakości ma postać:

$$I = E\sum_{n=0}^{N}\sum_{i=1}^{M}(u_n^i - z_n^i)^2_{u_n^i = a_n^i(.)} \tag{1.47}$$

Załóżmy, że $y_n^i = z_n^i$ oraz przyjmijmy, że na poziom wyższy nie jest przekazywana żadna informacja pomiarowa.

Z równań (1.41), (1.44) i (1.45) wynika, że optymalne prawo sterowania $i-$ tego lokalnego decydenta ma postać:

$$u_n^{io} = p_n^i + (z_n^i - \bar{z}_n^i), \tag{1.48}$$

gdzie $\bar{z}_n^i = Ez_n^i$, zaś $p_n^i$ wyraża się wzorem:

$$p_n^i = p_{n|n}^i = \bar{z}_n^i + \frac{1}{M}(e_{n|n} - \sum_{i=1}^{M}\bar{z}_n^i) \tag{1.49}$$

Zmienna zagregowana $e_{n|n}$ jest wyznaczana na bieżąco poprzez minimalizację w (1.46) tzn.

$$I_n^* = \min_{e_{n+N'|n}^*} \frac{1}{M}\sum_{k=n}^{n+N'}(e_{k|n}^2 - 2e_{k|n}\sum_{i=1}^{M}\bar{z}_k^i) + \frac{1}{M}\sum_{k=n}^{n+N'}\sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{M}\bar{z}_k^i\bar{z}_k^j \tag{1.50}$$

przy ograniczeniu (1.37).

Z (1.44) wynika, że $p_{n|n}^i = \bar{z}_n^i - \lambda_n$, a zatem (1.48) można przedstawić jako:

$$u_n^{io} = z_n^i - \lambda_n, \tag{1.51}$$

gdzie $\lambda_n = \frac{1}{M}(e_{n|n} - \sum_{i=1}^{M}\bar{z}_n^i)$. Zatem na poziom niższy koordynator może przekazywać w chwili $n$ tylko jedną wartość $\lambda_n$ wspólną dla wszystkich podsystemów.

Pozostaje jeszcze problem wyznaczenia wielkości pojemności rezerwowej występującej w (1.37).

Niech $u_k^*$ oznacza minimalną wielkość zasobu, dla której prawdopodobieństwo, że $\sum_{i=1}^{M}u_k^i \le u_k^*$ przy zadanym $e_{k|k}$ jest równe $\beta$, tzn.

$$P(\sum_{i=1}^{M}u_k^i \le u_k^*|e_{k|k}) = \beta \tag{1.52}$$

Wykorzystując (1.48) możemy (1.52) zapisać jako:

$$P[\sum_{i=1}^{M}(z_k^i - \bar{z}_k^i) \leq (u_k^* - e_{k|k})|e_{k|k}] = \beta \tag{1.53}$$

Z (1.53) wynika, że

$$\Delta u_k = F_{z_k}^{-1}(\beta) - \sum_{i=1}^{M} \bar{z}_k^i, \tag{1.54}$$

gdzie $\Delta u_k = u_k^* - e_{k|k}$, zaś $F_{z_k}^{-1}(\beta)$ jest wartością funkcji odwrotnej do dystrybuanty zmiennej losowej $z_k = \sum_{i=1}^{M} z_k^i$ dla założonego $\beta$.

Jeśli założyć, że $z_k^i$ ma rozkład normalny o parametrach $N(\bar{z}_k^i, \sigma_k^i)$, to zmienna losowa $z_k$ ma też rozkład normalny o parametrach $N(\sum_{i=1}^{M} \bar{z}_k^i, \sqrt{\sum_{i=1}^{M} \sigma_k^{i2}})$. Korzystając np. z Matlaba (toolbox Stats) można dla zadanego $\beta$ wyznaczyć wartość $F_{z_k}^{-1}(\beta)$ lub też po standaryzacji zmiennej losowej $z_k$ skorzystać z tablic rozkładu normalnego.

Dla innych rozkładów wyznaczenie wartości $F_{z_k}^{-1}(\beta)$ może być uciążliwe. Wówczas należy dobrać wielkość pojemności rezerwowej eksperymentalnie.

Inne własności proponowanej metody można znaleźć w [40, 43].

Dla przykładu numerycznego załóżmy, że system składa się z $M = 10$ podsystemów, dla których zmienna losowa $z_n^i$, $i = 1, 2, ..., M$ ma rozkład normalny o parametrach $N[i + 2, (i + 2)/3]$. Dla takich parametrów prawdopodobieństwo wystąpienia nieujemnej wartości $z_n^i$ wynosi 0.9986. Przyjmijmy też, że dopływ zasobu do magazynu jest zmienną losową o wariancji równej zero.

W tabeli 1.1 zostały przedstawione wyniki badań symulacyjnych dla $N = 480$ oraz $\beta = 0.9986$. W tabeli tej przez $\bar{z}_n$ oznaczono sumę średnich zapotrzebowań wszystkich podsystemów w okresie $(n, n + 1)$ tzn. $\bar{z}_n = \sum_{i=1}^{M=10} \bar{z}_n^i$.

Jak widać z tabeli 1.1 na jakość sterowania wpływa długość przesuwnego horyzontu $N'$ w układzie OLF. Oznacza to, że występowanie w systemie koordynatora i jego wytyczne mają istotne znaczenie. Wpływ przesuwnego horyzontu jest znaczący przy założeniu, że dysponuje się dobrym modelem prognoz dopływu.

Ze wzrostem deficytu rośnie liczba ujemnych sterowań $u_n^i$. W symulacji przyjmuje się wtedy, że $u_n^i = 0$, co prowadzi do realizacji sterowania suboptymalnego. Algorytm uwzględniający ograniczenie na znak sterowania zostanie przedstawiony w dalszej części pracy.

Dla rozpatrywanego systemu przeprowadzono też obliczenia przy założeniu struktury jednopoziomowej z centralnym decydentem, dysponującym informacją o średnich zapotrzebowaniach odbiorców, a więc mniej szczegółową informacją o podsystemach. Z otrzymanych rezultatów wynika, że decentralizacja sterowania z wykorzystaniem informacji lokalnych decydentów daje lepsze rezultaty niż centralne sterowanie z mniej szczegółową informacją koordynatora i zwiększoną pojemnością przeznaczoną na sterowane zasoby. Uboższa informacja centralnego decydenta ma tu decydujące znaczenie.



Tabela 1.1

Wyniki badań symulacyjnych

| Sredni dopływ $\bar{d}_n$ | Przes. hor. $N'$ | Wartość wskaźnika $I$ | Liczba sterowań ujemnych | Liczba sterowań optymalnych |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{z}_n$ | 1 | 0 | 0 | 4800 |
| $\bar{z}_n$ | 2 | 0 | 0 | 4800 |
| $\bar{z}_n$ | 3 | 0 | 0 | 4800 |
| $0.9\bar{z}_n$ | 1 | 4611 | 48 | 4752 |
| $0.9\bar{z}_n$ | 2 | 3309 | 28 | 4772 |
| $0.9\bar{z}_n$ | 3 | 2778 | 19 | 4781 |
| $0.8\bar{z}_n$ | 1 | 18650 | 207 | 4593 |
| $0.8\bar{z}_n$ | 2 | 15125 | 160 | 4640 |
| $0.8\bar{z}_n$ | 3 | 13597 | 134 | 4666 |
| $0.75\bar{z}_n$ | 1 | 39821 | 459 | 4341 |
| $0.75\bar{z}_n$ | 2 | 34739 | 396 | 4404 |
| $0.75\bar{z}_n$ | 3 | 32767 | 360 | 4440 |
| $0.62\bar{z}_n$ | 1 | brak rozwiązania | | |

Przy większym deficycie może zdarzyć się, że rozwiązanie nie istnieje. Zachodzi to wtedy, gdy zbiór dopuszczalnych decyzji koordynatora spełniających ograniczenia (1.31), (1.32) lub (1.37) jest zbiorem pustym. W przykładzie numerycznym dobrano wartość $\Delta u_n$ zgodnie z (1.54), co doprowadziło w trakcie realizacji sterowania do sprzeczności powyższych ograniczeń. Można uniknąć tego efektu poprzez eksperymentalny dobór pojemności rezerwowej.

W pracach [40, 43] wskazano na inne własności proponowanego algorytmu rozdziału zasobów w strukturze hierarchicznej. Z przeprowadzonych tam badań symulacyjnych wynika, że bardziej opłaca się przeznaczyć część pojemności magazynu na gromadzenie zasobów rezerwowych, umożliwiających wykorzystanie bardziej szczegółowej informacji lokalnych decydentów, niż pozostawić całą pojemność do dyspozycji koordynatora.

W pracy [43] podjęto próbę zastosowania omówionej idei sterowania do realnego systemu wodnego dorzecza Czarnej Przemszy i Brynicy. Inny sposób retencji wody w tym systemie został opracowany przez Centralne Biuro Studiów i Projektów Budownictwa Wodnego - oddział w Krakowie. Symulując pracę systemu realizującego oba algorytmy, uzyskano w pewnym sensie porównywalne wyniki.

## 1.4. Algorytm sterowania dwupoziomowego oparty na metodzie cen [41, 44]

W punktach 1.3.1-1.3.3 sformułowano i rozwiązano problem rozdziału zasobów w systemie składającym się z niepowiązanych odbiorców przy założeniu, że prawa sterowania lokalnych decydentów mają postać $u_n^i = a_n^i(y_n^i, p_n^i)$, co oznacza, że lokalne podsystemy otrzymują różne wytyczne $p_n^i$.

W niniejszych rozważaniach założymy w sformułowaniu problemu, że prawa sterowania lokalnych decydentów zależą od wytycznej wspólnej dla wszystkich podsystemów.

W punkcie tym zostanie dokonana synteza algorytmu sterowania dla systemu, układu sterowania i struktury informacyjnej szczegółowo omówionej w punktach 1.1 i 1.2, przy zastąpieniu lokalnego ograniczenia elastycznego (1.5) przez globalne ograniczenie elastyczne wprowadzone w dalszej części rozważań.

### 1.4.1. Sformułowanie problemu

Przypomnijmy, że algorytm rozdziału zasobów oparty na metodzie optymalizacji parametrycznej wynika z minimalizacji wskaźnika jakości (1.6) przy ograniczeniach (1.5), (1.7) oraz przy założeniach (**Z1-Z5**). W sformułowaniu problemu za dopuszczalne prawa sterowania lokalnych decydentów i koordynatora przyjęto funkcje odpowiednio $u_n^i = a_n^i(y_n^i, p_n^i)$ oraz $p_n^i = b_n^i(m_n)$, związane między sobą lokalnym ograniczeniem elastycznym (1.5).

Niech $Y_n^i, M_n, \Lambda_n, U_n^i$ oznaczają zbiory wektorów odpowiednio $y_n^i, m_n, \lambda_n$ oraz $u_n^i$.

Obecnie za dopuszczalne prawa sterowania $i-$ tego lokalnego decydenta przyjmiemy zbiór funkcji $u_n^i = a_n^i(y_n^i, \lambda_n)$, z których każda odwzorowuje odpowiedni zbiór $Y_n^i \times \Lambda_n$ na zbiór $U_n^i$.

Za dopuszczalne prawa sterowania koordynatora przyjmiemy natomiast zbiór funkcji $\lambda_n = b_n(m_n)$, z których każda odwzorowuje odpowiednio zbiór $M_n$ na zbiór $\Lambda_n$.

Zakładamy, że powyższe funkcje spełniają następujące globalne ograniczenie elastyczne:

$$e_n = E_{|m_n} \sum_{i=1}^{M} a_n^i(y_n^i, \lambda_n), \tag{1.55}$$

gdzie $e_n$ oznacza wstępny przydział zasobów dla wszystkich podsystemów i stanowi ocenę wielkości $\sum_{i=1}^{M} u_n^i$ wyznaczaną przez koordynatora. Na tej podstawie określi on wytyczną (cenę) $\lambda_n$ przekazywaną w chwili $n$ na poziom niższy.



Wśród dopuszczalnych praw sterowania należy znaleźć takie $u_n^{io} = a_n^{io}(y_n^i, \lambda_n)$, i=1,2,...,M oraz $\lambda_n^o = b_n^o(m_n)$, $n = 0, 1, 2, ..., N$, dla których wskaźnik jakości

$$I = E \sum_{n=0}^{N} \sum_{i=1}^{M} l_n^i[a_n^i(y_n^i, \lambda_n), z_n^i]_{\lambda_n = b_n(m_n)} \tag{1.56}$$

przyjmuje minimalną wartość przy ograniczeniu (1.55) oraz ograniczeniu na wielkość zasobów w magazynie

$$h_{min} + \Delta u_n \leq \bar{h}_n + \bar{d}_n - e_n, \quad e_n \geq 0 \tag{1.57}$$

gdzie $\Delta u_n$ jest pojemnością rezerwową w magazynie, zaś $\bar{h}_n$ i $\bar{d}_n$ są ocenami wielkości zasobów w magazynie oraz dopływu, dokonanymi przez koordynatora w chwili $n$ na podstawie dostępnej informacji $m_n$.

W dalszych rozważaniach będziemy rozwiązywać zadanie przy następujących założeniach:

**Z1.** Rozkłady prawdopodobieństwa zmiennych losowych $z_n^i, w_n^i$ występujące w modelu pomiarów $y_n^i = g_n^i(z_n^i, w_n^i)$ są znane;

**Z2.** Zmienne losowe $y_n^i$, $z_n^i$ są niezależne od $m_n^{**}, m_n^j$ oraz $\lambda_n$ dla $i \neq j$;

**Z3.** Funkcja $l_n^i(u_n^i, z_n^i)$ jest różniczkowalna w sposób ciągły względem $u_n^i$ dla dowolnego $z_n^i$;

**Z4.** Wartości sterowań $u_n^i$ należą do przestrzeni euklidesowej $R^r$, gdzie $r$ jest wymiarem wektora $u_n^i$;

**Z5.** Sterowanie $u_n^i$ nie wpływa na wartości zmiennych $y_n^j$ oraz $z_n^j$ dla $i \neq j$.

### 1.4.2. Rozwiązanie problemu rozdziału zasobów

Optymalna postać praw sterowania $a_n^i$ oraz $b_n$, $i = 1, 2, .., M$, $n = 0, 1, ..., N$, minimalizujących wskaźnik jakości (1.56) przy ograniczeniach (1.55) i (1.57), wynika z wykonania ciągu operacji minimalizacji i uśredniania [3, 30, 31] w wyrażeniu:

$$I(a^o, b^o) = \min_{a_0, b_0} \{E \sum_{i=1}^{M} l_0^i(.) + \min_{a_1, b_1} \{E \sum_{i=1}^{M} l_1^i(.) + .... + \min_{a_N, b_N} \{E \sum_{i=1}^{M} l_N^i(.)\}...\}\}, \tag{1.58}$$

gdzie $a^o = \{a_0, a_1, ..., a_N\}$, $b^o = \{b_0, b_1, ..., b_N\}$, zaś $a_n = \{a_n^i, \ i = 1, 2, ..., M\}$.

Zadanie wyznaczenia optymalnych praw lokalnych decydentów sprowadza się, podobnie jak w punkcie 1.3.3, do zadania minimalizacji w (1.59)

$$I_n(a_n^o, b_n) = E\{\min_{a_n} E_{|m_n} \sum_{i=1}^{M} l_n^i[a_n^i(y_n^i, \lambda_n), z_n^i]\}_{\lambda_n = b_n(m_n)} \tag{1.59}$$

przy ograniczeniu (1.55) dla dowolnego dopuszczalnego zbioru funkcji $b_n$.

Zadanie minimalizacji w (1.59) przy ograniczeniu (1.55) należy do izoperymetrycznych problemów rachunku wariacyjnego i może być sprowadzone do równoważnego zadania bez ograniczeń w postaci:

$$L_n^o = \min_{a_n} E_{|m_n} \sum_{i=1}^{M} \{l_n^i[a_n^i(y_n^i, \lambda_n), z_n^i] + \lambda_n^T a_n^i(y_n^i, \lambda_n)\}, \tag{1.60}$$

gdzie $\lambda_n$ jest wektorem mnożników Lagrange'a. Odpowiedni dobór tych mnożników zapewnia spełnienie ograniczenia (1.55).

Przy założeniu **Z5** zadanie poszukiwania minimum względem $a_n = \{a_n^i,\ \text{i=1,2,...,M}\}$ dekomponuje się na $M$ niezależnych zadań w postaci:

$$L_n^{io} = \min_{a_n^i} E_{|m_n} \{l_n^i[a_n^i(y_n^i, \lambda_n), z_n^i] + \lambda_n^T a_n^i(y_n^i, \lambda_n)\} \tag{1.61}$$

Przy założeniu **Z2** problem minimalizacji (1.61) względem funkcji $a_n^i$ można sprowadzić do znacznie prostszego zadania minimalizacji lokalnej względem zmiennej $u_n^i$ w postaci:

$$L_n^{io} = E_{|m_n} \min_{u_n^i} E_{|y_n^i, \lambda_n}[l_n^i(u_n^i, z_n^i) + \lambda_n^T u_n^i] \tag{1.62}$$

Jeśli oznaczyć przez $L_n^{i*}(y_n^i, u_n^i, \lambda_n) = E_{|y_n^i, \lambda_n}[l_n^i(u_n^i, z_n^i) + \lambda_n^T u_n^i]$, to otrzymamy następujący warunek konieczny na minimum funkcjonału (1.62):

$$\frac{\partial L_n^{i*}(y_n^i, u_n^i, \lambda_n)}{\partial u_n^i} = 0 \tag{1.63}$$

W przypadku, gdy na poziom wyższy nie jest przekazywana żadna informacja pomiarowa, to powyższe rozważania pozostają słuszne przy braku ograniczenia **Z2**.

Po wyznaczeniu z (1.63) $u_n^i$ jako funkcji zmiennych $y_n^i$ oraz $\lambda_n$ i wstawieniu jej do (1.55) możemy znaleźć zależność mnożników Lagrange'a od $m_n$ i $e_n$, tzn. $\lambda_n = b_n'(m_n, e_n)$. Zauważmy, że zadanie to jest rozwiązywane podczas syntezy algorytmu sterowania w trybie off-line, natomiast do wyznaczenia pozostają jeszcze funkcje $e_n^o = c_n^o(m_n)$, $n = 0, 1, ..., N$, które minimalizują wskaźnik jakości (1.56) w postaci:

$$I(a^o, b^o) = \min_{c} E \sum_{n=0}^{N} \sum_{i=1}^{M} l_n^i[a_n^{io}(y_n^i, \lambda_n), z_n^i]_{\lambda_n = b_n'[m_n, c_n(m_n)]} \tag{1.64}$$

przy ograniczeniu (1.57), gdzie $a^o = \{a_n^{io}\}, b^o = \{b_n^o\}, b_n^o(m_n) = b_n'[m_n, c_n^o(m_n)]$, $c = \{c_n,\ \text{i=1,2,...,M},\ n = 0, 1, ..., N\}$.



Dla koordynatora jest to dynamiczny problem optymalizacji z ograniczeniami nierównościowymi. Jedną z możliwości jego rozwiązania jest wykorzystanie idei sterowania w układzie otwartym ze sprzężeniem (OLF), rozpatrywanej przy konstrukcji algorytmu metodą optymalizacji parametrycznej w punkcie 1.3.3. Zgodnie z tą ideą, w chwili $n$ koordynator określa zmienne zagregowane $e_n = e_{n|n}$, wynikające z minimalizacji w (1.65)

$$I_n^* = \min_{c_{n+N'|n}^*} E \sum_{k=n}^{n+N'} \sum_{i=1}^{M} l_k^i[a_k^{io}(y_k^i, \lambda_k), z_k^i]_{\lambda_k = b_k'[m_n, c_{k|n}(m_n)]}, \tag{1.65}$$

gdzie $c_{n+N'|n}^* = \{c_{k|n}(m_n)\}$, k=n, n+1,...,n+N'.

Zadanie to można sprowadzić do poszukiwania wartości zmiennych $e_{n+N'|n}^* = \{e_{k|n},\ \ k = n, n+1, ..., n+N'\}$, wynikających z minimalizacji w (1.66)

$$I_n^* = E \min_{e_{n+N'|n}^*} E_{|m_n} \sum_{k=n}^{n+N'} \sum_{i=1}^{M} l_k^i[a_k^{io}(y_k^i, \lambda_k), z_k^i]_{\lambda_k = b_k'(m_n, e_{k|n})} \tag{1.66}$$

przy ograniczeniach:

$$h_{min} + \Delta u_{n+j-1} \le \bar{h}_{n+j|n},\ \ j = 1, 2, ..., N'+1 \tag{1.67}$$

$$e_{n+j|n} \ge 0,\ \ j = 0, 1, ..., N', \tag{1.68}$$

gdzie $\bar{h}_{n+j|n}$ jest oceną wielkości zasobów w magazynie w chwili $n+j$ dokonaną przez koordynatora na podstawie informacji $m_n$. Ocena ta może być wyznaczona z równania:

$$\bar{h}_{n+j|n} = \bar{h}_{n|n} + \sum_{k=n}^{n+j-1} \bar{d}_{k|n} - \sum_{k=n}^{n+j-1} e_{k|n}, \tag{1.69}$$

gdzie $\bar{h}_{n|n}$ oraz $\bar{d}_{k|n}$ są odpowiednio ocenami wielkości zasobów w chwili $n$ oraz dopływu w okresie $(k, k+1)$, dokonanymi w chwili $n$.

Obliczenia te przeprowadzane są na poziomie wyższym w trakcie realizacji algorytmu rozdziału zasobów w chwilach $n = 0, 1, ..., N$. Zauważmy, że jest to problem optymalizacji statycznej przy ograniczeniach nierównościowych na zmienne decyzyjne o wymiarowości zależnej od wymiaru wektora $e_n$ oraz przesuwnego horyzontu $N'$.

### 1.4.3. Algorytm rozdziału zasobów dla kwadratowego wskaźnika jakości

Obecnie zbadamy własności algorytmu rozdziału zasobów opracowanego w poprzednim punkcie dla kwadratowego wskaźnika jakości

$$I = E \sum_{n=0}^{N} \sum_{i=1}^{M} (z_n^{iT} Q_n^i z_n^i + 2 z_n^{iT} G_n^i a_n^i + a_n^{iT} H_n^i a_n^i), \tag{1.70}$$

gdzie macierze $\begin{bmatrix} Q_n^i & G_n^i \\ G_n^{iT} & H_n^i \end{bmatrix}$ są symetryczne, dodatnio półokreślone, zaś macierze $H_n^i$ są dodatnio określone.

Jeśli oznaczyć przez $L_n^{i*}(y_n^i, u_n^i, \lambda_n) = E_{|y_n^i,\lambda_n}(z_n^{iT} Q_n^i z_n^i + 2 z_n^{iT} G_n^i u_n^i + u_n^{iT} H_n^i u_n^i + 2\lambda_n^T u_n^i)$, to optymalne prawa sterowania lokalnych decydentów wynikające z (1.63) przyjmą postać:

$$u_n^{io} = -(H_n^i)^{-1}(G_n^{iT} \hat{z}_n^i + \lambda_n), \tag{1.71}$$

gdzie $\hat{z}_n^i = E_{|y_n^i} z_n^i$.

Wstawiając (1.71) do ograniczenia elastycznego (1.55) obliczymy $\lambda_n$ wyrażone wzorem:

$$\lambda_n = -H_n(\sum_{i=1}^{M}(H_n^i)^{-1} G_n^{iT} \bar{z}_n^i + e_n), \tag{1.72}$$

gdzie $H_n = [\sum_{i=1}^{M}(H_n^i)^{-1}]^{-1}$. Z (1.71) widać, że ta sama zmienna $\lambda_n$ pojawia się w prawach sterowania lokalnych decydentów. Wielkość ta może być interpretowana jako cena wyznaczana przez koordynatora i wykorzystana przy koordynacji.

Wstawiając (1.71) z uwzględnieniem (1.72) do (1.70) otrzymamy:

$$I = \sum_{n=0}^{N}[e_n^T H_n e_n + 2 e_n^T H_n \sum_{i=1}^{M}(H_n^i)^{-1} G_n^{iT} \bar{z}_n^i] + S', \tag{1.73}$$

gdzie $S'$ nie zależy od $e_n$, $n = 0, 1, ..., N$.

Zadaniem koordynatora jest obliczanie metodą numeryczną w trakcie realizacji algorytmu wartości $e_n$, minimalizujących (1.73) przy ograniczeniu (1.57). Jedną z możliwości jest wykorzystanie idei sterowania w układzie OLF z przesuwnym horyzontem $N'$, polegającej na minimalizacji w chwili $n$, $n = 0, 1, ..., N$ względem $e_{n+N'|n}^* = \{e_{n|n}, e_{n+1|n}, ..., e_{n+N'|n}\}$ w wyrażeniu:

$$I_n^* = \min_{e_{n+N'|n}^*} \sum_{k=n}^{n+N'} [e_{k|n}^T H_k e_{k|n} + 2 e_{k|n}^T H_k \sum_{i=1}^{M}(H_k^i)^{-1} G_k^{iT} \bar{z}_{k|n}^i] \tag{1.74}$$

przy ograniczeniu:

$$h_{min} + \Delta u_{n+j-1} \leq \bar{h}_{n+j|n} = \bar{h}_{n|n} + \sum_{k=n}^{n+j-1} \bar{d}_{k|n} - \sum_{k=n}^{n+j-1} e_{k|n}$$
$$e_{n+j-1|n} \geq 0, \quad j = 1, 2, ...N' + 1 \tag{1.75}$$

Po zastosowaniu tej procedury koordynator wykorzystuje wartość zmiennej $e_n = e_{n|n}$ do obliczenia wartości $\lambda_n$ zgodnie z (1.72) , którą przesyła na poziom niższy. Przy znajomości wytycznej $\lambda_n$ oraz informacji $y_n^i$ $i-$ty lokalny decydent wyznacza przydział zasobów swojemu podsystemowi zgodnie z (1.71).

Zauważmy, że zastosowanie algorytmu opracowanego w punkcie 1.3.4 w przypadku, gdy $p_{k|n}^i$ są nieujemne, prowadzi do tych samych wyników. Bowiem zgodnie z tym algorytmem koordynator oblicza w chwili $n$ wartości zmiennych koordynujących minimalizujących (1.46) przy ograniczeniach (1.37). Następnie określa wartości $\lambda_n$ z (1.45) dla $k = n$. Wstawiając (1.44) zapisane dla $k = n$ do (1.41) otrzymamy wzór (1.71).



**1.4.3.1. Przykład**

Rozpatrzmy system składający się z $M$ odbiorców (podsystemów), których zapotrzebowania $z_n^i$ są opisane zależnością:

$$z_n^i = v_n^i + v_n, \quad i = 1, 2, .., M, \tag{1.76}$$

gdzie $v_n^i$, $i = 1, 2, ..., M$ są białymi szumami o rozkładzie normalnym $N_{v_n^i}(\bar{v}_n^i, \sigma_n^i)$, niezależnymi od zmiennej losowej $v_n$ o rozkładzie normalnym $N_{v_n}(\bar{v}_n, \sigma_n)$. Zauważmy, że zapotrzebowania zdefiniowane przez (1.76) są wzajemnie zależne.

Załóżmy ponadto, że $y_n^i = z_n^i$, $i = 1, 2, ..., M$ oraz że na poziom wyższy nie jest przekazywana żadna informacja bieżąca o zapotrzebowaniach podsystemów. Koordynator dysponuje więc informacją o średnich zapotrzebowaniach odbiorców $[\bar{z}_n^1, \bar{z}_n^2, ..., \bar{z}_n^M]$.

Niech wskaźnik jakości ma postać:

$$I = E \sum_{n=0}^{N} \sum_{i=1}^{M} \alpha_n^i (z_n^i - u_n^i)^2 {}_{u_n^i = \alpha_n^i(z_n^i, \lambda_n)} \tag{1.77}$$

Optymalne prawa sterowania lokalnych decydentów wynikają z (1.71) i mają postać:

$$u_n^{io} = z_n^i - \frac{1}{\alpha_n^i}\lambda_n, \quad i = 1, 2, ..., M \tag{1.78}$$

Zmienna $\lambda_n$ jest wyznaczana przez koordynatora zgodnie z (1.72) i opisana jest zależnością:

$$\lambda_n = \frac{1}{\sum_{i=1}^{M}(\alpha_n^i)^{-1}}(\sum_{i=1}^{M} \bar{z}_n^i - e_n) \tag{1.79}$$

Zmienna zagregowana $e_n = e_{n|n}$ jest wyznaczana na bieżąco poprzez minimalizację wskaźnika (1.74) dla $H_k = (\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{\alpha_n^i})^{-1}$, $(H_k^i)^{-1} G_k^{iT} = -1$ przy ograniczeniu (1.75).

Pozostaje jeszcze problem wyznaczenia pojemności rezerwowej, występującej w (1.75).

Niech $u_n^*$ oznacza minimalną wielkość zasobów, dla której prawdopodobieństwo, że $\sum_{i=1}^{M} u_n^i \leq u_n^*$ przy zadanym $e_n$ jest równe $\beta$, tzn.

$$P(\sum_{i=1}^{M} u_n^i \leq u_n^* | e_n) = \beta \tag{1.80}$$

Przyjmując oznaczenie $u_n = \sum_{i=1}^{M} u_n^i$ oraz wykorzystując (1.78) wraz z (1.79) możemy zapisać $u_n$ w postaci:

$$u_n = \sum_{i=1}^{M}(z_n^i - \bar{z}_n^i) + e_n \tag{1.81}$$

Zatem

$$P[\sum_{i=1}^{M}(z_n^i - \bar{z}_n^i) \leq (u_n^* - e_n)|e_n] = \beta \tag{1.82}$$

Z (1.82) wynika, że

$$\Delta u_n = F_{z_n}^{-1}(\beta) - \sum_{i=1}^{M} \bar{z}_n^i, \tag{1.83}$$

gdzie $\Delta u_n = u_n^* - e_n$, zaś $F_{z_n}^{-1}(\beta)$ jest wartością funkcji odwrotnej do dystrybuanty zmiennej losowej $z_n = \sum_{i=1}^{M} z_n^i$ dla założonego $\beta$.

Ponieważ $v_n^i, v_n^j$, $i \neq j$ oraz $v_n$ są wzajemnie niezależne i mają rozkłady normalne, więc zmienna losowa $z_n$ ma też rozkład normalny o parametrach: $N_{z_n}[\sum_{i=1}^{M}(\bar{v}_n^i + \bar{v}_n), \sqrt{\sum_{i=1}^{M} \sigma_n^{i2} + M^2\sigma_n^2}]$. Korzystając np. z Matlaba (toolbox Stats) można łatwo znaleźć wartość $F_{z_n}^{-1}(\beta)$ dla zadanego $\beta$. Można też, po standaryzacji zmiennej losowej $\sum_{i=1}^{M}(z_n^i - \bar{z}_n^i)$, skorzystać z tablic unormowanego rozkładu normalnego.

Po standaryzacji zmiennej losowej $\sum_{i=1}^{M}(z_n^i - \bar{z}_n^i)$ możemy (1.82) zapisać w postaci:

$$P(\gamma_n \leq \frac{\Delta u_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^{M}(\sigma_n^i)^2 + M^2\sigma_n^2}}) = \beta, \tag{1.84}$$

gdzie $\gamma_n$ jest zmienną losową o rozkładzie normalnym o parametrach $N_{\gamma_n}(0,1)$.

Obecnie rozpatrzymy dwa proste przypadki ilustrujące pewne własności opracowanego algorytmu rozdziału zasobów.

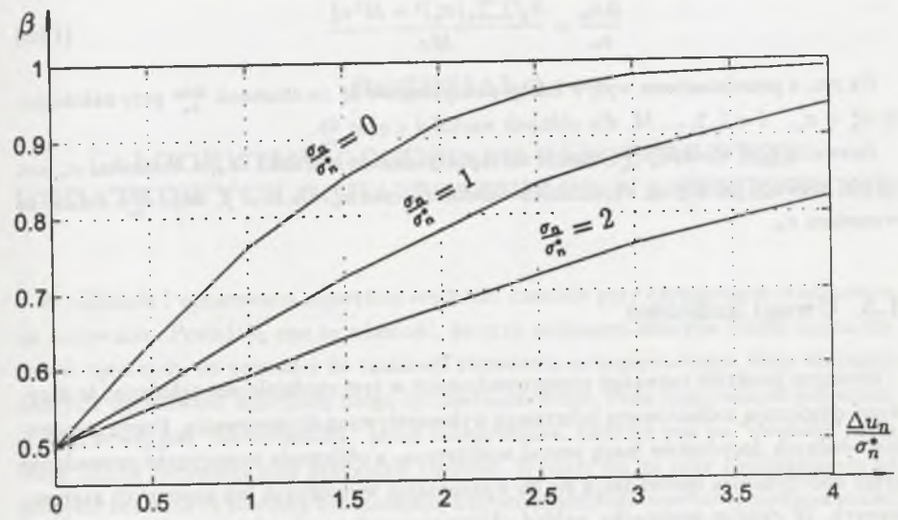
**Przypadek 1**

Załóżmy, że $M = 2$ oraz przyjmijmy oznaczenie $(\sigma_n^*)^2 = (\sigma_n^1)^2 + (\sigma_n^2)^2$. Zależność $\beta$ od $\Delta u_n$ dla różnych wartości $\frac{\sigma_n}{\sigma_n^*}$ jest przedstawiona na rys. 3. Widzimy, że prawdopodobieństwo realizacji algorytmu wzrasta przy wzroście wartości pojemności rezerwowej i przy zmniejszaniu korelacji między zapotrzebowaniami podsystemów.

**Przypadek 2**

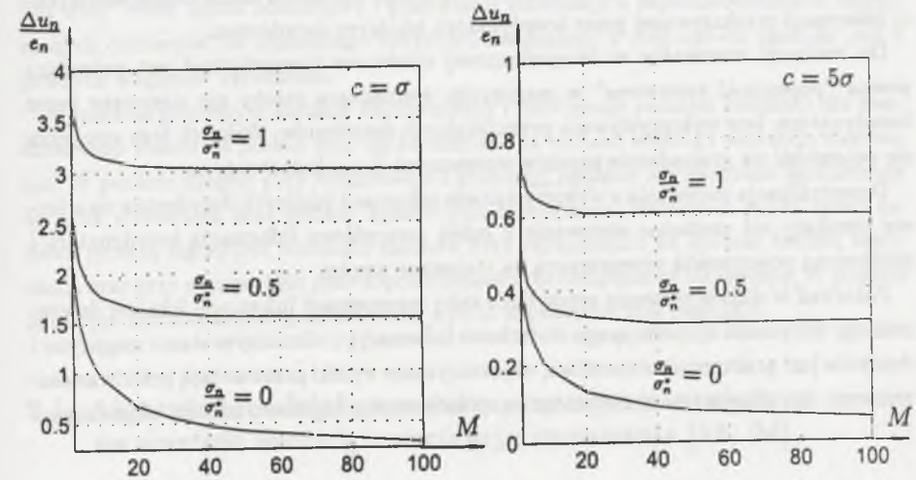
Zbadajmy wpływ liczby podsystemów $M$ na wielkość pojemności rezerwowej $\Delta u_n$ przy zadanym prawdopodobieństwie $\beta$ i przy założeniu, że $\frac{e_n}{M} = c = const$. Założenie to oznacza, że rozpatrujemy system, w którym średnio na każdy podsystem przypada pewna stała wielkość $c$ zasobów.






Rys.3. Wpływ pojemności rezerwowej na prawdopodobieństwo realizacji sterowania lokalnego

Fig.3. Influence of the resource reserve on the control realization probability




Rys.4. Wpływ liczby podsystemów na wielkość pojemności rezerwowej

Fig.4. Influence of the systems number $M$ on the resource reserve

Korzystając z (1.84), dla założonego $\beta = 0.99865$ otrzymujemy, że

$$\frac{\Delta u_n}{e_n} = \frac{3\sqrt{\sum_{i=1}^{M}(\sigma_n^i)^2 + M^2\sigma_n^2}}{Mc} \tag{1.85}$$

Na rys. 4 przedstawiono wpływ liczby podsystemów $M$ na stosunek $\frac{\Delta u_n}{e_n}$ przy założeniu, że $\sigma_n^i = \sigma_n'$, $i = 1, 2, ..., M$, dla różnych wartości $c$ oraz $\frac{\sigma_n}{\sigma_n'}$.

Zauważmy, że wielkość $\frac{\Delta u_n}{e_n}$ maleje asymptotycznie do wartości $3\sigma_n/c$. Ponieważ $\sigma_n$ jest miarą korelacji pomiędzy zapotrzebowaniami $z_n^i$ oraz $z_n^j$ dla $i \neq j$, więc $\frac{\Delta u_n}{e_n}$ rośnie ze wzrostem $\sigma_n$.

## 1.5. Uwagi końcowe

Istotnym punktem rozważań przeprowadzonych w tym rozdziale jest założenie, że decydenci dysponują zróżnicowaną informacją wykorzystywaną do sterowania. Prawa sterowania lokalnych decydentów mają postać analityczną, a obliczenia numeryczne prowadzone przez koordynatora sprowadzają się do wyznaczania wytycznych lub zmiennych zagregowanych. W drugim przypadku nakład obliczeniowy ulega więc istotnemu zmniejszeniu. Częściowa decentralizacja sterowania i dekompozycja obliczeń są możliwe dzięki wprowadzeniu do koordynacji ograniczenia elastycznego, które pozostawia lokalnym decydentom pewną swobodę w podejmowaniu decyzji. Dzięki temu mogą oni lepiej wykorzystać swoją bardziej szczegółową informację pomiarową.

Wprowadzenie globalnego ograniczenia elastycznego umożliwia dalsze zmniejszenie ilości informacji przekazywanej przez koordynatora lokalnym decydentom.

Do realizacji sterowania w dwupoziomowej strukturze hierarchicznej jest potrzebna pewna "pojemność rezerwowa" w magazynie, gromadząca zasoby nie sterowane przez koordynatora, lecz wykorzystywana przez lokalnych decydentów. Wskutek tego zmniejsza się pojemność na gromadzenie zapasów sterowanych przez koordynatora.

Decentralizacja sterowania z wykorzystaniem informacji lokalnych decydentów daje lepsze rezultaty niż centralne sterowanie z mniej szczegółową informacją koordynatora i zwiększoną pojemnością przeznaczoną na sterowane zasoby.

Ponieważ w dużym systemie przesyłanie całej rozproszonej informacji lokalnej do centralnego decydenta dysponującego dodatkowo informacją o aktualnym stanie magazynu i dopływie jest praktycznie niemożliwe, więc otrzymane wyniki przemawiają przeciwko centralnemu sterowaniu i za sterowaniem dwupoziomowym, częściowo zdecentralizowanym.

# ROZDZIAŁ 2

# ALGORYTMY ROZDZIAŁU ZASOBÓW PRZY DODATKOWYCH OGRANICZENIACH NA STEROWANIE

W rozdziale 1 opracowano algorytmy rozdziału zasobów przy ograniczeniu elastycznym na sterowanie. Posiadają one tę własność, że przy większym deficycie rośnie liczba sterowań ujemnych, co prowadzi do realizacji sterowania suboptymalnego. Przy większym deficycie opracowane algorytmy mogą być nierealizowalne. Poza tym wielkość pojemności rezerwowej jest "niesterowalna" przez koordynatora. Rzutuje ona na "swobodę", jaką mają lokalni decydenci przy przydziale zasobów. Wydaje się, że przy zwiększającym się deficycie swoboda ta powinna być mniejsza, a zatem pojemność rezerwowa powinna maleć.

W niniejszym rozdziale zostaną opracowane algorytmy rozdziału zasobów w układzie sterowania dla struktury informacyjnej opisanej w rozdziale 1. Rozważania zostaną ograniczone do przypadku skalarnego i struktury informacyjnej, w której na poziom wyższy nie jest przekazywana żadna informacja pomiarowa o zapotrzebowaniach odbiorców. Proponowana struktura układu sterowania jest szczególnie uzasadniona wtedy, gdy system jest duży (duża liczba odbiorców) i przesyłanie informacji o zapotrzebowaniach rozproszonych odbiorców do centralnego decydenta związanego z magazynem zasobów jest z pewnych względów utrudnione.

W punkcie pierwszym zostanie sformułowany i rozwiązany problem rozdziału dla kwadratowego wskaźnika jakości przy ograniczeniach na wartość średnią i wariancję sterowania. W punkcie drugim przy formułowaniu problemu zostanie wprowadzone ograniczenie na znak sterowania oraz podany sposób jego rozwiązania. Natomiast punkt trzeci zawiera syntezę algorytmu rozdziału zasobów przy ograniczeniu na wartość średnią sterowania oraz przy narzuconym prawdopodobieństwie na nieujemność sterowania. W punkcie czwartym zostaną krótko podsumowane wyniki uzyskane w tym rozdziale.

## 2.1. Algorytm rozdziału zasobów przy ograniczeniach na wartość średnią i wariancję sterowania [18, 24]

W rozdziale pierwszym sformułowano i rozwiązano problem rozdziału zasobów realizowanego w dwupoziomowej strukturze hierarchicznej. Poniżej zostanie przedstawione rozwiązanie powyższego zadania dla przypadku skalarnego, ale przy dodatkowym ograniczeniu na wariancję sterowania.

Tak więc rozpatrywać będziemy system składający się z $M$ statycznych podsystemów o losowych zapotrzebowaniach $z_n^i$, pobierających zasoby $u_n^i$ z magazynu zasilanego dopływem $d_n$, jak to zostało pokazane na rys. 1 w rozdziale pierwszym.

Niech model pomiaru w $i-$tym podsystemie ma postać:

$$y_n^i = z_n^i + w_n^i, \tag{2.1}$$

gdzie $z_n^i$ jest zmienną losową reprezentującą zapotrzebowanie $i-$tego odbiorcy, zaś $w_n^i$ jest błędem pomiarowym.

Niech wskaźnik jakości, który należy minimalizować, wyraża się wzorem:

$$I = E\sum_{n=0}^{N}\sum_{i=1}^{M}(Q_n^i z_n^{i2} + 2G_n^i z_n^i a_n^i + H_n^i a_n^{i2}), \tag{2.2}$$

gdzie $E$ jest symbolem wartości oczekiwanej, $Q_n^i, G_n^i, H_n^i$ są dane, zaś $a_n^i(.)$ jest poszukiwanym prawem sterowania, tzn. $u_n^i = a_n^i(.)$.

Sterowania $u_n^i$ powinny spełniać następującą nierówność:

$$h_{min} \le h_n + d_n - \sum_{i=1}^{M} u_n^i \quad n = 0, 1, ...N, \tag{2.3}$$

gdzie $h_n, h_{min}$ są rzeczywistą oraz minimalną wartością wielkości zasobów w magazynie, zaś $d_n$ reprezentuje dopływ do magazynu.

Oczywiście zadanie to może być rozwiązywane w strukturze jednopoziomowej z jednym decydentem, dysponującym informacją o zapotrzebowaniach odbiorców oraz informacją o aktualnym stanie zasobów w magazynie i o prognozie dopływu. Wymaga to przesyłania informacji z i do rozproszonych odbiorców. Poniżej zostanie rozpatrzony problem rozdziału zasobów rozwiązywany w dwupoziomowej strukturze hierarchicznej przy zróżnicowanej informacji pomiarowej decydentów, na podstawie której podejmują oni decyzje. Zakładamy przy tym, że na poziomie wyższym koordynator dysponuje w chwili $n$ informacją a priori o parametrach statystycznych zapotrzebowań oraz informacją o aktualnym stanie zasobów w magazynie i prognozie dopływu. Na tej podstawie określa on wytyczne $p_n^i$, $i = 1, 2, ..., M$, przekazywane na poziom niższy. Lokalny decydent wyznacza ostateczny przydział zasobów swojemu odbiorcy na podstawie wytycznej $p_n^i$ oraz informacji $y_n^i$.

Tak więc przez dopuszczalne prawa sterowania $i-$tego lokalnego decydenta będziemy rozumieć funkcje $u_n^i = a_n^i(y_n^i, p_n^i)$, zaś przez dopuszczalne prawa sterowania koordynatora funkcje $p_n^i = b_n^i(m_n)$, gdzie $m_n$ reprezentuje informację dostępną na poziomie wyższym w chwili $n$. Zakładamy przy tym, że funkcje te są związane następującymi ograniczeniami:

$$E_{|m_n} a_n^i(y_n^i, p_n^i) = p_n^i, \quad i = 1, 2, ..., M, \quad n = 0, 1, ..., N \tag{2.4}$$

$$E_{|m_n}[a_n^i(y_n^i, p_n^i) - p_n^i]^2 = \Omega_n^{i2}(p_n^i), \quad i = 1, 2, ..., M, \quad n = 0, 1, ..., N \tag{2.5}$$



Przy poszukiwaniu praw sterowania koordynatora i lokalnych decydentów minimalizujących wskaźnik jakości (2.2) przyjmiemy, że

**Z1.** Zmienne losowe $z_n^i, w_n^i$ występujące w modelu pomiarów (2.2) mają rozkłady normalne o znanych parametrach

**Z2.** Zmienne losowe $y_n^i$, $z_n^i$ są niezależne od $m_n$

**Z3.** Wartości sterowań $u_n^i$ należą do przestrzeni liczb rzeczywistych

**Z4.** Sterowanie $u_n^i$ nie wpływa na wartości zmiennych $y_n^j$ oraz $z_n^j$ dla $i \neq j$

### 2.1.1. Rozwiązanie problemu

Dla przyjętej struktury układu sterowania i dostępnej informacji oraz przy przyjętych założeniach, podobnie jak w rozdziale 1, zadanie poszukiwania optymalnych praw lokalnych decydentów sprowadza się do minimalizacji w (2.6)

$$I_n(a_n^o, b_n) = E[\min_{a_n} E_{|m_n} \sum_{i=1}^{M}(Q_n^i z_n^{i2} + 2G_n^i z_n^i a_n^i + H_n^i a_n^{i2})]_{p_n^i = b_n^i(m_n)} \tag{2.6}$$

przy ograniczeniach (2.4), (2.5), dla dowolnego dopuszczalnego zbioru funkcji $b_n$;
$a_n = \{a_n^i(y_n^i, p_n^i),\ i = 1, 2, ..., M\}$, $b_n = \{b_n^i(m_n),\ i = 1, 2, ..., M\}$.

Zadanie minimalizacji (2.6) przy ograniczeniach (2.4), (2.5) można zastąpić równoważnym zadaniem bez ograniczeń w postaci:

$$L_n^o = \min_{a_n} E_{|m_n} \sum_{i=1}^{M}[Q_n^i z_n^{i2} + 2G_n^i z_n^i a_n^i + H_n^i a_n^{i2} + 2\lambda_n^i a_n^i + \mu_n^i (a_n^i - p_n^i)^2], \tag{2.7}$$

gdzie $\lambda_n^i, \mu_n^i$ są mnożnikami Lagrange'a. Odpowiedni dobór tych mnożników zapewnia spełnienie ograniczeń (2.4), (2.5).

Przy założeniu **Z4** zadanie poszukiwania minimum względem $a_n = \{a_n^i,\ i = 1, 2, ..., M\}$ dekomponuje się na M niezależnych zadań w postaci:

$$L_n^{io} = \min_{a_n^i} E_{|m_n}[Q_n^i z_n^{i2} + 2G_n^i z_n^i a_n^i + H_n^i a_n^{i2} + 2\lambda_n^i a_n^i + \mu_n^i (a_n^i - p_n^i)^2] \tag{2.8}$$

Problem minimalizacji (2.8) względem funkcji $a_n^i$ można sprowadzić do znacznie prostszego zadania minimalizacji względem zmiennej $u_n^i$ w postaci:

$$L_n^{io} = E_{|m_n} \min_{u_n^i} E_{|y_n^i, m_n}[H_n^i u_n^{i2} + 2G_n^i u_n^i \hat{z}_n^i + Q_n^i z_n^{i2} + 2\lambda_n^i u_n^i + \mu_n^i (u_n^i - p_n^i)^2], \tag{2.9}$$

gdzie $E_{|y_n^i, m_n}$ oznacza operację uśredniania warunkowego przy zadanym $y_n^i, m_n$, zaś $\hat{z}_n^i = E_{|y_n^i, m_n} z_n^i = E_{|y_n^i} z_n^i$, co wynika z założenia **Z2** i jest oceną $z_n^i$ wyznaczaną przez $i-$tego lokalnego decydenta.

Z minimalizacji wyrażenia (2.9) względem $u_n^i$ otrzymujemy:

$$(H_n^i + \mu_n^i)u_n^i = -\lambda_n^i + \mu_n^i p_n^i - G_n^i \hat{z}_n^i \tag{2.10}$$

Wyliczając $u_n^i$ z (2.10) i wstawiając do (2.4) obliczymy $\lambda_n^i$. Wówczas lokalne prawo sterowania $i-$ tego lokalnego decydenta przyjmie postać:

$$u_n^i = p_n^i - (H_n^i + \mu_n^i)^{-1} G_n^i (\hat{z}_n^i - \bar{z}_n^i), \tag{2.11}$$

gdzie $\bar{z}_n^i = E z_n^i$.

Wstawiając (2.11) do (2.5) wyznaczymy $\mu_n^i$. Ostatecznie, po wstawieniu tak obliczonego $\mu_n^i$ do (2.11), otrzymamy:

$$u_n^i = p_n^i + k_n^i(\hat{z}_n^i - \hat{z}_n^i), \tag{2.12}$$

gdzie $k_n^i = \frac{\Omega_n^i}{\sigma_n^{i2}}$, $\sigma_n^{i2} = E_{|m_n}(\hat{z}_n^i - \bar{z}_n^i)^2 = E(\hat{z}_n^i - \bar{z}_n^i)^2$, co wynika z założenia **Z2**.

Jeśli rozpatrywać przypadek, w którym $k_n^i$ nie zależy od $p_n^i$, to również wariancja sterowania (2.5) nie będzie zależeć od wytycznych koordynatora.

Zauważmy jeszcze, że przy braku ograniczenia (2.5) optymalne prawo lokalnego decydenta ma postać:

$$u_n^{io} = p_n^i - (H_n^i)^{-1} G_n^i (\hat{z}_n^i - \bar{z}_n^i) \tag{2.13}$$

W tym przypadku wariancja sterowania wyrażona jest wzorem:

$$E_{|m_n}(a_n^{io} - p_n^i)^2 = [(H_n^i)^{-1} G_n^i]^2 \sigma_n^{i2} \tag{2.14}$$

Przy ograniczeniach (2.4), (2.5) i dla wariancji sterowania (2.14) algorytm zapewnia najmniejszą wartość wskaźnika jakości (2.2).

Obecnie rozpatrzymy przypadek, w którym założymy następujący związek między parametrami statystycznymi sterowania i zapotrzebowania:

$$\frac{E_{|m_n} a_n^i(y_n^i, p_n^i)}{\sqrt{E_{|m_n}[a_n^i(y_n^i, p_n^i) - p_n^i]^2}} = \frac{p_n^i}{\Omega_n^i} = \frac{\bar{z}_n^i}{\sigma_n^i} \tag{2.15}$$

Wyznaczając $\Omega_n^i$ z (2.15) i wstawiając do (2.12) otrzymamy:

$$u_n^{io} = p_n^i + k_n^{i*} p_n^i (\hat{z}_n^i - \bar{z}_n^i) = \frac{p_n^i}{\bar{z}_n^i} \hat{z}_n^i, \tag{2.16}$$

gdzie $k_n^{i*} = \frac{1}{\bar{z}_n^i}$.



Zauważmy, że wariancja sterowania $u_n^{io}$ zdefiniowana jako $E_{|m_n}(u_n^{io} - p_n^i)^2$ zależy od zmiennych $p_n^i$ obliczanych przez koordynatora. Poza tym dla nieujemnych $p_n^i$ i $\hat{z}_n^i$ wartości sterowań $u_n^i$ są również nieujemne.

Skonstruowany algorytm wymaga pojemności rezerwowej do realizacji lokalnego sterowania .

Jeśli przez $u_n^*$ oznaczyć minimalną wielkość zasobów, dla której prawdopodobieństwo tego, że $\sum_{i=1}^M u_n^i \le u_n^*$ przy zadanym $p_n = [p_n^1, p_n^2, ..., p_n^M]$ jest równe $\beta$, to wykorzystując (2.16) otrzymamy następującą zależność:

$$P(\sum_{i=1}^M k_n^{i*} p_n^i (\hat{z}_n^i - \bar{z}_n^i) \le u_n^* - \sum_{i=1}^M p_n^i | p_n) = \beta \tag{2.17}$$

Przy założeniu **Z1** zmienna losowa $\hat{z}_n = \sum_{i=1}^M \frac{p_n^i}{\bar{z}_n^i}(\hat{z}_n^i - \bar{z}_n^i)$ ma rozkład normalny. Po jej normalizacji zależność (2.17) można zapisać w postaci:

$$P(\gamma_n \le \frac{\Delta u_n}{\sigma_n}) = \beta, \tag{2.18}$$

gdzie $\Delta u_n = u_n^* - \sum_{i=1}^M p_n^i$, $\sigma_n^2 = E(\sum_{i=1}^M (k_n^{i*} p_n^i)^2 (\hat{z}_n^i - \bar{z}_n^i)^2$, zaś $\gamma_n$ jest zmienną losową o rozkładzie normalnym $N(0,1)$.

Wówczas wartość pojemności rezerwowej wynika z zależności:

$$\Delta u_n = \sqrt{E(\sum_{i=1}^M (k_n^{i*} p_n^i)^2 (\hat{z}_n^i - \bar{z}_n^i)^2 F_{\gamma_n}^{-1}(\beta)}, \tag{2.19}$$

gdzie $F_{\gamma_n}^{-1}(\beta)$ jest wartością funkcji odwrotnej do dystrybuanty dla zadanego $\beta$, łatwo wyznaczalną z tablic znormalizowanego rozkładu normalnego.

Zadaniem koordynatora jest określenie wytycznych $p_n^i$ minimalizujących wskaźnik jakości (2.2) dla prawa sterowania $a_n^{io}(y_n^i, p_n^i)$ określonego przez (2.16) przy zmodyfikowanym ograniczeniu nierównościowym na wielkość zasobów w magazynie.

Po wstawieniu (2.16) do (2.2) otrzymamy:

$$I = E[\sum_{n=0}^N \sum_{i=1}^M (H_n^i p_n^{i2} + 2G_n^i \bar{z}_n^i p_n^i + H_n^i k_n^{i2} \sigma_n^{i2} + 2G_n^i k_n^i \sigma_n^{i2} + Q_n^i z_n^{i2})]_{p_n^i = b_n^i(m_n)}, \tag{2.20}$$

gdzie $k_n^i = k_n^{i*} p_n^i$.

Jeśli strategia koordynatora przy wyznaczaniu $p_n^i$ jest oparta na idei sterowania w układzie OLF, to wielkości te trzeba obliczać na bieżąco poprzez minimalizację na drodze numerycznej wskaźnika jakości

$$I_n^* = E_{|m_n} \sum_{l=n}^{n+N'} \sum_{i=1}^M (H_l^i p_{l|n}^{i2} + 2G_l^i \bar{z}_l^i p_{l|n}^i + H_l^i k_l^{i2} \sigma_l^{i2} + 2G_l^i k_l^i \sigma_l^{i2} + Q_l^i z_l^{i2})_{k_l^i = k_l^{i*} p_{l|n}^i} \tag{2.21}$$

przy ograniczeniach:

$$h_{min} + \Delta u_{n+j-1} \leq \bar{h}_{n+j|n}, \quad j = 1, 2, ..., N' + 1 \tag{2.22}$$

$$p^i_{n+j|n} \geq 0, \quad i = 1, ..., M, \quad j = 0, 1, ..., N', \tag{2.23}$$

gdzie $\bar{h}_{n+j|n}$ jest oceną wielkości zasobów w magazynie w chwili $n + j$ dokonaną przez koordynatora na podstawie informacji $m_n$. Ocena ta może być wyznaczona z równania:

$$\bar{h}_{n+j|n} = \bar{h}_{n|n} + \sum_{l=n}^{n+j-1} \bar{d}_{l|n} - \sum_{l=n}^{n+j-1} \sum_{i=1}^{M} p^i_{l|n}, \tag{2.24}$$

gdzie $\bar{h}_{n|n}$ oraz $\bar{d}_{l|n}$ są odpowiednio ocenami wielkości zasobów w chwili $n$ oraz dopływu w okresie $(l, l + 1)$, dokonanymi w chwili $n$.

Realizacja opracowanego algorytmu wymaga obliczeń numerycznych przy minimalizacji wskaźnika (2.21) i przesyłania wyznaczonych wytycznych $p^i_n = p^i_{n|n}, \quad i = 1, 2, ..., M$ poszczególnym decydentom lokalnym. W celu zmniejszenia wymiarowości zadania numerycznego i uzależnienia lokalnych praw sterowania od wytycznej jednakowej dla wszystkich podsystemów powyższy algorytm należy zmodyfikować. W tym celu wprowadźmy zmienną zagregowaną zdefiniowaną jako:

$$e_{l|n} = \sum_{i=1}^{M} p^i_{l|n}, \tag{2.25}$$

reprezentującą wstępny przydział zasobów wszystkim podsystemom, obliczony przez koordynatora. Przy zadanym $e_{l|n}$ zadanie poszukiwania optymalnych wytycznych $p^i_{l|n}$ sprowadza się do minimalizacji wskaźnika jakości

$$I_l = E_{|m_n} \sum_{i=1}^{M} (H^i_l p^{i2}_{l|n} + 2G^i_l \bar{z}^i_l p^i_{l|n} + H^i_l k^{i2}_l \sigma^{i2}_l + 2G^i_l k^i_l \sigma^{i2}_l + Q^i_l z^{i2}_l)_{k^i_l = k^{i*}_l p^i_{l|n}} \tag{2.26}$$

przy ograniczeniu (2.25). Po zastosowaniu metody mnożników Lagrange'a otrzymamy po przekształceniach:

$$p^{io}_{l|n} = -\{H^i_l[1 + (k^{i*}_l \sigma^i_l)^2]\}^{-1}[G^i_l(\bar{z}^i_l + k^{i*}_l \sigma^{i2}_l) + \Lambda_l] \tag{2.27}$$

$$\Lambda_l = -H_l\{\sum_{i=1}^{M}\{H^i_l[1 + (k^{i*}_l \sigma^i_l)^2]\}^{-1} G^i_l(\bar{z}^i_l + k^{i*}_l \sigma^{i2}_l) + e_{l|n}\} \tag{2.28}$$

$$H_l = \{\sum_{i=1}^{M}\{H^i_l[1 + (k^{i*}_l \sigma^i_l)^2]\}^{-1}\}^{-1} \tag{2.29}$$

Po wstawieniu (2.16) i (2.27)-(2.29) do wskaźnika jakości (2.21) będzie on zależał od zmiennej zagregowanej $e_{l|n}, \quad l = n, n + 1, ..., n + N'$. W ten sam sposób można uzależnić zmienną $\Delta u_l$ określoną przez (2.19) od $e_{l|n}$.



Zadanie koordynatora sprowadza się do numerycznego poszukiwania zmiennych zagregowanych $e_{l|n}, \quad l = n, n + 1, ..., n + N'$, a nie wytycznych $p^i_{l|n}, \quad l = n, n + 1, ..., n + N'$, $i = 1, 2, ..., M$. Jeśli wartości wytycznych $p^i_{l|n}, \quad l = n, n + 1, ..., n + N'$, wyliczonych z (2.27)-(2.29) będą nieujemne, to na poziom niższy można przesłać $\Lambda_n$ jednakowe dla wszystkich lokalnych decydentów, którzy są w stanie określić ostateczny przydział zasobów swoim podsystemom zgodnie ze wzorami (2.16) i (2.27).

### 2.1.2. Przykłady

*Przykład 1*

Rozważmy system składający się z $M$ odbiorców (podsystemów), których zapotrzebowania $z^i_n$ są zmiennymi losowymi o wartości średniej $\bar{z}^i_n$ i wariancji $\sigma^{i2}_n$.

Niech wskaźnik jakości ma postać:

$$I = E \sum_{n=0}^{N} \sum_{i=1}^{M} (u^i_n - z^i_n)^2_{u^i_n = \alpha^i_n(.)} \tag{2.30}$$

Załóżmy, że $y^i_n = z^i_n$, co oznacza, że lokalny decydent zna zapotrzebowania swojego odbiorcy. Wówczas optymalne prawa sterowania wynikające z (2.16) wraz z (2.27)-(2.29) wyrażone są zależnościami:

$$u^i_n = \frac{p^i_n}{\bar{z}^i_n} z^i_n \tag{2.31}$$

$$p^i_n = p^i_{n|n} = \bar{z}^i_n - \frac{\Lambda_n}{\alpha^i_n} \tag{2.32}$$

$$\Lambda_n = \frac{1}{\sum_{i=1}^{M} \alpha^i_n{}^{-1}} (\sum_{i=1}^{M} \bar{z}^i_n - e_{n|n}), \tag{2.33}$$

gdzie $\alpha^i_n = 1 + (\frac{\sigma^i_n}{\bar{z}^i_n})^2$.

Wartości zmiennych zagregowanych $e_{n|n}$ należy obliczać na bieżąco poprzez minimalizację wskaźnika (2.21), który po uwzględnieniu (2.27)-(2.29) ma postać:

$$I^*_n = \sum_{k=n}^{n+N'} \frac{(e_k - \sum_{i=1}^{M} \bar{z}^i_k)^2}{\sum_{i=1}^{M} (\alpha^i_k)^{-1}} \tag{2.34}$$

przy ograniczeniach (2.22)-(2.24).

Porównując wzór (2.34) ze wzorem (1.50) z punktu 1.3.4.1 rozdziału 1 widzimy, że dla $e_{k|n} = \sum_{i=1}^{M} \bar{z}^i_k$ wartości wskaźników są zerowe oraz $u^{io}_n = z^i_n$. Oznacza to, że przy odpowiedniej pojemności rezerwowej zapotrzebowania odbiorców mogą być w tym przypadku w pełni zaspokojone.

*Przykład 2*

Rozpatrzmy system opisany w *przykładzie 1*. Ze sformułowania problemu wynika, że do realizacji algorytmu niezbędna jest pojemność rezerwowa w magazynie. Wyznaczmy wielkość tej pojemności przy założeniu, że zapotrzebowania $z_n^i$ mają rozkład normalny o wartości średniej $\bar{z}_n^i = \bar{z}_n^j = \bar{z}_n^*$ i odchyleniu standartowym $\sigma_n^i = \sigma_n^j = \sigma_n^*$. Przy realizacji sterowania zgodnie z (2.16) pojemność rezerwowa wynika z (2.19) i opisana jest zależnością:

$$\Delta u_n = \frac{\sigma_n^* \epsilon_{n|n}}{\sqrt{M}\bar{z}_n^*} F_{\gamma_n}^{-1}(\beta) \tag{2.35}$$

Widzimy, że pojemność rezerwowa zależy od decyzji koordynatora i zmniejsza się wraz ze wzrostem deficytu i wzrostem liczby odbiorców. Jeśli rozpatrzyć strategię sterowania bez ograniczenia (2.5), wówczas lokalne prawo sterowania wynika z (2.13) i dla wskaźnika jakości (2.30) ma postać $u_n^i = p_n^i + z_n^i - \bar{z}_n^i$. Łatwo sprawdzić, że w tym przypadku pojemność rezerwowa wynika z równania:

$$\Delta u_n = \sqrt{M}\sigma_n^* F_{\gamma_n}^{-1}(\beta) \tag{2.36}$$

Wartość tej pojemności nie zależy od wytycznej koordynatora, a zatem nie może być przez niego dobierana.

*Przykład 3*

Rozpatrzmy system rozpatrywany w przykładzie numerycznym zamieszczonym w punkcie 1.3.4.1 rozdziału pierwszego. Wyniki symulacji dla tych samych danych przy realizacji algorytmu opracowanego w niniejszym rozdziale zamieszczone są w tabeli 2.1. Dla porównania w tabeli tej zamieszczone są również wartości wskaźnika jakości otrzymane przy realizacji algorytmu opracowanego w rozdziale pierwszym (patrz tabela 1.1 w punkcie 1.3.4.1 rozdziału 1).

Tabela 2.1

Wyniki badań symulacyjnych dla przes. hor. $N' = 1$

| Średni dopływ $\bar{d}_n$ | Algorytm przy ogr. elastycznym na sterowanie **wskaźnik** | Algorytm przy dodatkowym ogr. na wariancję sterowania **wskaźnik** |
|---|---|---|
| $\bar{z}_n$ | 0 | 0 |
| $0.9\bar{z}_n$ | 4611 | 4361 |
| $0.8\bar{z}_n$ | 18650 | 18116 |
| $0.62\bar{z}_n$ | brak rozwiązania | 72280 |



Z tabeli tej widać, że wyniki są porównywalne. Tym niemniej algorytm uwzględniający ograniczenie na wariancję sterowania może być realizowany w warunkach większego deficytu. Wiąże się to z faktem, że wielkość pojemności rezerwowej jest sterowana przez koordynatora.

## 2.2. Algorytm rozdziału zasobów przy ograniczeniach na wartość średnią i znak sterowania [19]

W punkcie 1.3 rozdziału 1 zostało sformułowane i rozwiązane metodą cen zadanie rozdziału zasobów dla przypadku wielowymiarowego. W niniejszych rozważaniach zostanie rozwiązane zadanie rozdziału zasobów dla przypadku skalarnego przy dodatkowym ograniczeniu na nieujemność sterowania.

Będzie rozpatrywany wskaźnik jakości opisany zależnością:

$$I = E\sum_{n=0}^{N}\sum_{i=1}^{M} l_n^i(u_n^i, z_n^i)_{u_n^i = a_n^i(\cdot)}, \tag{2.37}$$

gdzie $N$ jest horyzontem sterowania, $M$ jest liczbą odbiorców, $l_n^i(.)$ reprezentuje straty wynikające np. z deficytu zasobów w okresie $(n, n+1)$, $z_n^i$ - zapotrzebowania $i-$tego odbiorcy, zaś $u_n^i$ jest wielkością zasobów przyznanych $i-$temu odbiorcy na okres $(n, n+1)$.

Ograniczenia na wielkość zasobów w magazynie oraz na znak sterowania mają postać:

$$h_{min} \le h_n + d_n - \sum_{i=1}^{M} u_n^i, \qquad u_n^i \ge 0, \tag{2.38}$$

gdzie $h_n, h_{min}$ są aktualnym oraz minimalnym dopuszczalnym poziomem zasobów w magazynie, zaś $d_n$ jest dopływem zasobów do magazynu.

Zadaniem jest tak rozdzielić zasoby pomiędzy odbiorców, aby wskaźnik jakości (2.37) przyjmował minimalną wartość przy ograniczeniach (2.38).

Podobnie jak w poprzednich rozważaniach zakładamy, że strategia sterowania jest realizowana w dwupoziomowej strukturze hierarchicznej z koordynatorem na poziomie wyższym i lokalnymi decydentami na poziomie niższym, którzy dysponują zróżnicowaną informacją. Rozpatrzymy przypadek, w którym koordynator dysponuje w chwili $n$ informacją a priori o parametrach statystycznych zapotrzebowań oraz informacją o aktualnym stanie zasobów w magazynie i prognozie dopływu, na podstawie których określa on wytyczną $\lambda_n$ przekazywaną na poziom niższy. Lokalny decydent wyznacza ostateczny przydział zasobów swojemu odbiorcy na podstawie wytycznej $\lambda_n$ oraz informacji pomiarowej:

$$y_n^i = g_n^i(z_n^i, w_n^i) \tag{2.39}$$

Tak więc przez dopuszczalne prawa sterowania $i-$tego lokalnego decydenta przyjmiemy funkcje $u_n^i = a_n^i(y_n^i, \lambda_n)$, zaś przez dopuszczalne prawa sterowania koordynatora funkcje $\lambda_n = b_n(e_n, \bar{z}_n)$ oraz $e_n = c_n(\bar{h}_n, \bar{d}_n, \bar{z}_n)$, gdzie $\bar{z}_n = [\bar{z}_n^1, \bar{z}_n^2, ..., \bar{z}_n^M]$. Wielkość $\bar{z}_n^i$ reprezentuje wartość średnią zapotrzebowania $i-$tego odbiorcy, zaś $\bar{h}_n, \bar{d}_n$ są odpowiednio oceną aktualnej wielkości zasobów w magazynie oraz prognozą dopływu. Zakładamy przy tym, że funkcje te są związane następującym globalnym ograniczeniem elastycznym:

$$e_n = E_{|m_n} \sum_{i=1}^{M} a_n^i(y_n^i, \lambda_n), \tag{2.40}$$

gdzie $m_n$ reprezentuje informację dostępną na poziomie wyższym.

W proponowanej strukturze sterowania oraz strukturze informacyjnej ograniczenie (2.38), podobnie jak w poprzednich rozważaniach, zostanie zastąpione zmodyfikowanym ograniczeniem w postaci:

$$h_{min} + \Delta u_n \leq \bar{h}_n + \bar{d}_n - e_n, \quad e_n \geq 0, \tag{2.41}$$

gdzie $\Delta u_n$ jest pojemnością rezerwową w magazynie niezbędną do realizacji sterowania optymalnego.

Przy syntezie algorytmu sterowania założymy, że

**Z1.** Rozkłady prawdopodobieństwa zmiennych losowych $z_n^i, w_n^i$ występujące w modelu pomiarów (2.39) są znane;

**Z2.** Zmienne losowe $y_n^i$, $z_n^i$ są niezależne od $m_n$;

**Z3.** Sterowanie $u_n^i$ nie wpływa na wartości zmiennych $y_n^j$ oraz $z_n^j$ dla $i \neq j$;

**Z4.** Funkcja $l_n^{i*}(y_n^i, u_n^i) = E_{|y_n^i, \lambda_n} l_n^i[a_n^i(y_n^i, \lambda_n), z_n^i] = E_{|y_n^i} l_n^i(u_n^i, z_n^i)$ jest wypukła i różniczkowalna w sposób ciągły względem $u_n^i$ dla każdego ustalonego $y_n^i$.

### 2.2.1. Rozwiązanie problemu

Dla przyjętej struktury układu sterowania i dostępnej informacji oraz przy przyjętych założeniach, podobnie jak w punkcie 1.3.2 rozdziału 1, zadanie poszukiwania optymalnych praw sterowania lokalnych decydentów sprowadza się do minimalizacji wyrażenia

$$L_n^i(y_n^i, u_n^i, \lambda_n) = E_{|y_n^i, \lambda_n}[l_n^i(u_n^i, z_n^i) - \lambda_n u_n^i] \tag{2.42}$$

względem $u_n^i$ przy ograniczeniu $u_n^i \geq 0$. Mnożnik Lagrange'a $\lambda_n$ został wprowadzony do (2.42) w celu uwzględnienia ograniczenia elastycznego (2.40) przy minimalizacji wskaźnika jakości (2.37).



Przy założeniu **Z4** funkcja $L_n^i(y_n^i, u_n^i, \lambda_n)$ jest wypukła i różniczkowalna względem $u_n^i$. Zatem optymalna wartość sterowania $u_n^{io}$ wynika z warunków Kuhna-Tuckera (koniecznych i wystarczających):

$$\frac{\partial L_n^i(.)}{\partial u_n^i} \geq 0 \tag{2.43}$$

$$u_n^i \frac{\partial L_n^i(.)}{\partial u_n^i} = 0 \tag{2.44}$$

$$u_n^i \geq 0 \tag{2.45}$$

Warunki (2.43)-(2.45) są spełnione dla $u_n^{io}$ o postaci

$$u_n^{io} = max[0, \alpha_n^i(y_n^i, \lambda_n)], \tag{2.46}$$

gdzie $\alpha_n^i(.)$ jest rozwiązaniem równania:

$$\frac{\partial L_n^i(.)}{\partial u_n^i}_{|u_n^i = \alpha_n^i(.)} = 0 \tag{2.47}$$

Wynika to z faktu, że przy założeniu **Z4** funkcja $L_n^i(y_n^i, u_n^i, \lambda_n)$ jest wypukła względem $u_n^i$ przy ustalonych wartościach pozostałych argumentów. Zatem jej pochodna cząstkowa $\frac{\partial L_n^i(.)}{\partial u_n^i}$ jest niemalejącą funkcją argumentu $u_n^i$. Dla $u_n^{io} = max[0, \alpha_n^i(y_n^i, \lambda_n)]$ zachodzi więc następująca zależność:

$$\frac{\partial L_n^i(.)}{\partial u_n^i}_{|u_n^i = u_n^{io}} \geq \frac{\partial L_n^i(.)}{\partial u_n^i}_{|u_n^i = \alpha_n^i(.)} \tag{2.48}$$

Niech $\alpha_n^i(.)$ jest rozwiązaniem równania

$$\frac{\partial L_n^i(.)}{\partial u_n^i}_{|u_n^i = \alpha_n^i(.)} = 0 \tag{2.49}$$

Przy zadanych $y_n^i$ oraz $\lambda_n$ funkcja $\alpha_n^i(y_n^i, \lambda_n)$ wynikająca z (2.49) może przyjmować następujące wartości:

1. $\alpha_n^i(y_n^i, \lambda_n) < 0$. Wtedy $u_n^{io} = 0$, co oznacza, że

$$\frac{\partial L_n^i(.)}{\partial u_n^i}_{|u_n^{io}=0} > \frac{\partial L_n^i(.)}{\partial u_n^i}_{|u_n^i = \alpha_n^i(.)} = 0 \tag{2.50}$$

$$u_n^{io} \frac{\partial L_n^i}{\partial u_n^i}_{|u_n^i = u_n^{io}} = 0 \tag{2.51}$$

2. $\alpha_n^i(y_n^i, \lambda_n) = 0$. Wówczas $u_n^{io} = 0$, co prowadzi do następujących zależności:

$$\frac{\partial L_n^i(.)}{\partial u_n^i}_{|u_n^{io}=0} = \frac{\partial L_n^i(.)}{\partial u_n^i}_{|u_n^i=\alpha_n^i(.)} = 0 \tag{2.52}$$

$$u_n^{io} \frac{\partial L_n^i}{\partial u_n^i}_{|u_n^i=u_n^{io}} = 0 \tag{2.53}$$

3. $\alpha_n^i(y_n^i, \lambda_n) > 0$. Wtedy $u_n^{io} = \alpha_n^i(.)$, a zatem

$$\frac{\partial L_n^i(.)}{\partial u_n^i}_{|u_n^{io}=\alpha_n^i(.)} = 0 \tag{2.54}$$

$$u_n^{io} \frac{\partial L_n^i}{\partial u_n^i}_{|u_n^i=u_n^{io}} = 0 \tag{2.55}$$

Widać więc, że $u_n^{io}$ zdefiniowane przez (2.46)-(2.47) zapewnia spełnienie (2.50)-(2.55), co pociąga za sobą spełnienie (2.43)-(2.45).

Wstawiając (2.46) do ograniczenia elastycznego (2.40) można znaleźć związek między $\lambda_n$ i $e_n$, który w zależności od funkcji gęstości zmiennych losowych może nie mieć postaci analitycznej. W takiej sytuacji również zależność wskaźnika jakości (2.37) od $e_n$, $n = 0, 1, ..., N$ będzie wyznaczana numerycznie. Problem ten będzie zilustrowany na poniższych przykładach.

### 2.2.2. Przykłady

*Przykład 1*

Rozważmy system składający się z $M$ odbiorców zasobów, których zapotrzebowania są zmiennymi losowymi.

Niech wskaźnik jakości ma postać:

$$I = E \sum_{n=0}^{N} \sum_{i=1}^{M} (u_n^i - z_n^i)^2_{|u_n^i=\alpha_n^i(.)} \tag{2.56}$$

Załóżmy, że $y_n^i = z_n^i$, co oznacza, że lokalny decydent zna zapotrzebowania swojego odbiorcy.

Wykorzystując (2.42), (2.46), (2.47) i (2.40) otrzymamy:

$$u_n^{io} = max(0, z_n^i - \lambda_n) \tag{2.57}$$

$$E_{|m_n} \sum_{i=0}^{M} max(0, z_n^i - \lambda_n) = e_n \tag{2.58}$$



Po przekształceniach zależność (2.58) przyjmuje postać:

$$-M\lambda_n + \lambda_n \sum_{i=1}^{M} \int_0^{\lambda_n} f_n^i(z_n^i) dz_n^i - \sum_{i=1}^{M} \int_0^{\lambda_n} z_n^i f_n^i(z_n^i) dz_n^i = e_n - \sum_{i=1}^{M} \bar{z}_n^i, \tag{2.59}$$

gdzie $f_n^i(z_n^i)$ jest gęstością prawdopodobieństwa zapotrzebowania $z_n^i$, zaś $\bar{z}_n^i = Ez_n^i$.

Dla danej funkcji $f_n^i(z_n^i)$ można w sposób analityczny lub numeryczny znaleźć zależność $e_n$ od $\lambda_n$ tzn. funkcję $e_n(\lambda_n)$.

Wstawiając (2.57) do (2.56) otrzymamy zależność wskaźnika jakości od funkcji $\lambda_n = b_n(e_n, \bar{z}_n)$ w postaci:

$$I = E \sum_{n=0}^{N} \sum_{i=1}^{M} E_{|m_n} [max(0, z_n^i - \lambda_n) - z_n^i]^2 \tag{2.60}$$

lub po przekształceniach

$$I = E \sum_{n=0}^{N} E_{|m_n} I_n, \tag{2.61}$$

gdzie

$$I_n = M\lambda_n^2 + \sum_{i=1}^{M} \int_0^{\lambda_n} z_n^{i2} f_n^i(z_n^i) dz_n^i - \lambda_n^2 \sum_{i=1}^{M} \int_0^{\lambda_n} f_n^i(z_n^i) dz_n^i \tag{2.62}$$

Ostatecznie, zależność $I_n(e_n)$ wynika ze złożenia funkcji $e_n(\lambda_n)$ i $I_n(\lambda_n)$, wynikających odpowiednio z (2.59) i (2.62).

Jeśli strategia koordynatora przy wyznaczaniu $e_n$ jest oparta na idei sterowania w układzie OLF, to wielkość tę trzeba obliczać na bieżąco poprzez minimalizację wskaźnika jakości

$$I_n^* = \sum_{k=n}^{n+N'} I_k \tag{2.63}$$

przy ograniczeniach (2.24)-(2.25).

Problemem do rozwiązania pozostaje jeszcze określenie pojemności rezerwowej $\Delta u_n$, która zależy od gęstości prawdopodobieństwa zmiennej $u_n^i$. Dla rozpatrywanego przykładu zadanie to zostanie rozwiązane poniżej.

*Przykład 2*

Rozważmy system opisany w przykładzie 1, w którym losowe zapotrzebowania odbiorców mają rozkład równomierny o parametrach $[0, b_n^i]$. Wyznaczmy wartość strefy rezerwowej $\Delta u_n$ zdefiniowanej jako $\Delta u_n = \sum_{i=1}^{M} (u_{nmax}^i - E_{|m_n} u_n^i)$. Taka strefa zapewni realizację sterowania lokalnego z prawdopodobieństwem 1. Określenie pojemności rezerwowej zapewniającej realizację sterowania lokalnego z prawdopodobieństwem $\beta < 1$ wymaga znajomości funkcji gęstości zmiennej losowej $u_n = \sum_{i=1}^{M} u_n^i$, którą można uzyskać poprzez złożenie rozkładów zmiennych losowych $u_n^i$.

Optymalne prawo sterowania $u_n^i$ jest opisane zależnością (2.57). Można pokazać, że funkcja gęstości prawdopodobieństwa $u_n^i$ będącego dla koordynatora zmienną losową ma postać:

$$f_{nu}^i(u) = \begin{cases} \frac{\lambda_n}{b_n^i} & dla \quad u = 0 \\ \frac{1}{b_n^i} & dla \quad 0 < u \leq b_n^i - \lambda_n \end{cases}$$

Średnia wartość $u_n^i$ wynika z wyrażenia:

$$E_{|m_n} u_n^i = \int_0^{b_n^i - \lambda_n} u_n^i f_{nu}^i(u_n^i) du_n^i = \begin{cases} \frac{b_n^i}{2} - \lambda_n + \frac{\lambda_n^2}{2b_n^i} & dla \quad \lambda_n < b_n^i \\ 0 & dla \quad \lambda_n \geq b_n^i \end{cases}$$

Zatem wielkość pojemności rezerwowej może być wyznaczona z zależności:

$$\Delta u_n = \sum_{i \in I} (\frac{b_n^i}{2} - \frac{\lambda_n^2}{2b_n^i}), \tag{2.64}$$

gdzie $I = \{i : \lambda_n < b_n^i\}$.

Zauważmy, że wielkość pojemności rezerwowej zależy od zmiennej koordynującej $\lambda_n$, a zatem zależy ona od decyzji koordynatora.

*Przykład 3*

Rozpatrzmy system składający się z $M = 10$ odbiorców z losowymi zapotrzebowaniami o rozkładzie równomiernym o parametrach $[0, i/2]$, $i = 1, 2, ..., M$. Zwiększenie liczby odbiorców (podsystemów) nie wprowadza dodatkowej złożoności obliczeń.

Zależności $e_n(\lambda_n)$, $I_n(\lambda_n)$ oraz $\Delta u_n(\lambda_n)$ wynikające odpowiednio z (2.59), (2.62) i (2.64), zostały wyznaczone numerycznie, zaś ich przebiegi są przedstawione na rys. 5 i rys. 6.

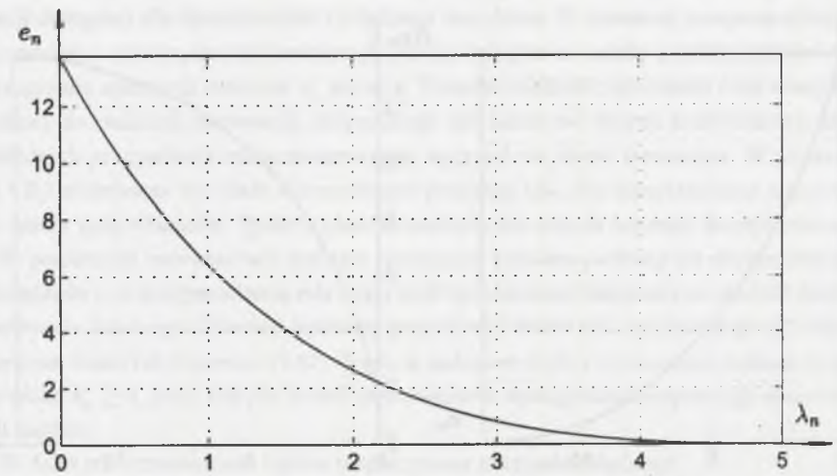
Funkcje $I_n(e_n)$ i $\Delta u_n(e_n)$ wynikają ze złożenia funkcji $I_n(\lambda_n)$ i $\Delta u_n(\lambda_n)$ z funkcją $e_n(\lambda_n)$. Można je aproksymować wielomianami o postaci:

$$\bar{I}_n = \sum_{i=0} a_{n,i} (e_n)^i \tag{2.65}$$

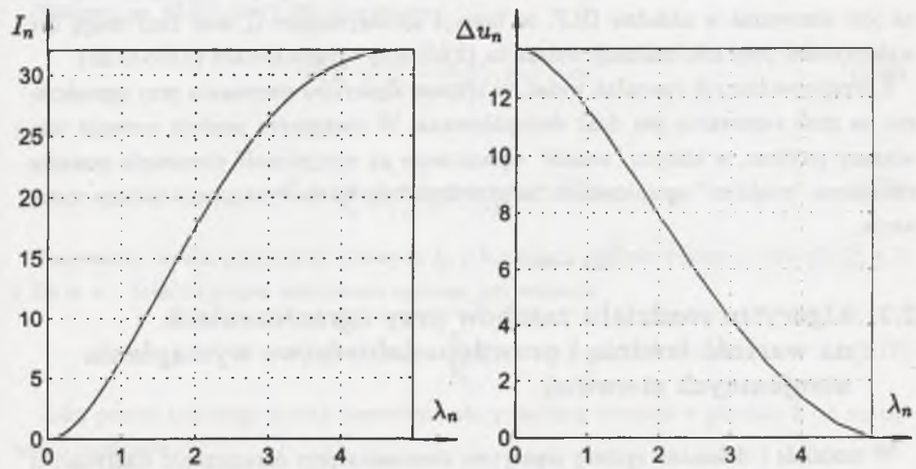
$$\bar{\Delta u}_n = \sum_{j=0} b_{n,j} (e_n)^j \tag{2.66}$$

Przebiegi funkcji aproksymujących $\bar{I}_n(e_n)$ oraz $\bar{\Delta u}_n(e_n)$ są przedstawione na rys. 7.

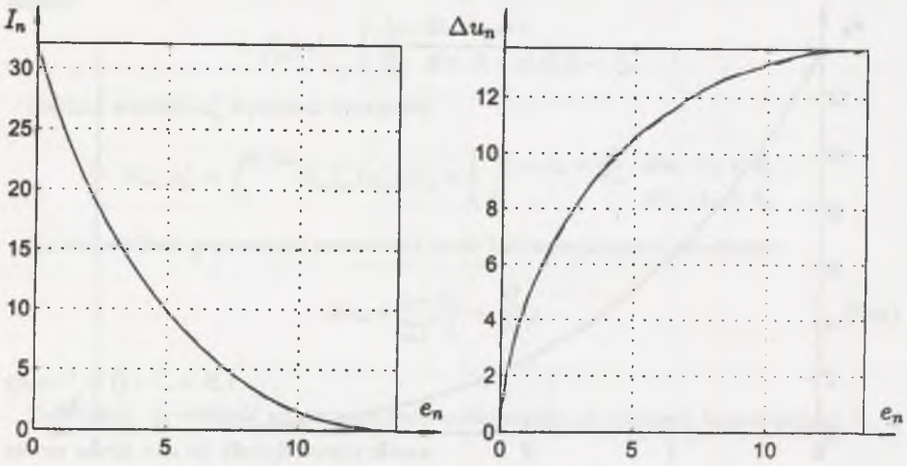





Rys.5. Zależność $e_n$ od $\lambda_n$
Fig.5. Dependence $e_n$ on $\lambda_n$




Rys.6. Zależność $I_n$ i $\Delta u_n$ od $\lambda_n$
Fig.6. Dependence $I_n$ and $\Delta u_n$ on $\lambda_n$




Rys.7. Zależność $I_n$ i $\Delta u_n$ od $e_n$ oraz ich aproksymacje
Fig.7. Dependence $I_n$, $\Delta u_n$ on $e_n$ and their approximations

Jeśli strategia koordynatora przy wyznaczaniu zmiennej zagregowanej $e_n$ jest oparta na idei sterowania w układzie OLF, to funkcje aproksymujące $\bar{I}_n$ oraz $\bar{\Delta u}_n$ mogą być wykorzystane przy minimalizacji wskaźnika (2.63) przy ograniczeniach (2.24)-(2.25).

Z przeprowadzonych rozważań widać, że synteza algorytmu sterowania przy ograniczeniu na znak sterowania jest dość skomplikowana. W następnym punkcie zostanie rozwiązany problem, w którym "twarde" ograniczenie na nieujemność sterowania zostanie zastąpione "miękkim" ograniczeniem na prawdopodobieństwo wystąpienia takiego sterowania.

## 2.3. Algorytm rozdziału zasobów przy ograniczeniach na wartość średnią i prawdopodobieństwo wystąpienia nieujemnych sterowań

W rozdziale 1 dokonano syntezy algorytmu sterowania przy ograniczeniu elastycznym na wartość średnią sterowania. Dla kwadratowego wskaźnika jakości określono tam lokalne prawa sterowania o postaci:

$$u_n^i = p_n^i + k_n^i(\hat{z}_n^i - \bar{z}_n^i), \tag{2.67}$$



gdzie współczynik $k_n^i$ zależy od parametrów wskaźnika jakości, $p_n^i$ jest wytyczną koordynatora, zaś $(\hat{z}_n^i - \bar{z}_n^i)$ jest różnicą ocen zmiennej losowej $z_n^i$ dokonanych na podstawie informacji dostępnej dla koordynatora i lokalnego decydenta. Z rozważań przeprowadzonych w rozdziale 1 wynika, że przy zwiększającym się deficycie na zasoby prawdopodobieństwo wystąpienia ujemnych sterowań $u_n^i$ wzrasta. Ponadto wielkość pojemności rezerwowej niezbędnej do realizacji sterowania optymalnego nie zależy od decyzji koordynatora, co w niektórych przypadkach może niekorzystnie wpływać na jakość sterowania. W punktach 2.1 i 2.2 niniejszego rozdziału sformułowano problemy tak, aby skonstruowane algorytmy nie miały tych własności. Synteza praw sterowania jest jednak bardziej skomplikowana.

W poniższych rozważaniach zostanie rozwiązany problem podobny do sformułowanego w rozdziale 1, w którym istotną rolę odgrywało ograniczenie elastyczne na wartość średnią sterowania lokalnego. Obecnie będziemy poszukiwać sterowania optymalnego $u_n^{io}$ z klasy sterowań liniowych w postaci (2.67). Naszym zadaniem będzie wyznaczenie takiego współczynnika $k_n^i \geq 0$, przy którym prawdopodobieństwo wystąpienia nieujemnego sterowania jest zadane.

W dalszych rozważaniach będzie rozpatrywany przypadek skalarny.

Niech lokalne prawa sterowania mają postać (2.67). Należy wyznaczyć takie $k_n^i \geq 0$, aby prawdopodobieństwo tego, że $u_n^i \geq 0$ przy zadanym $p_n^i$ równało się $\alpha$, tzn.

$$P(u_n^i \geq 0 | p_n^i) = \alpha \tag{2.68}$$

Wstawiając (2.67) do (2.68) otrzymamy:

$$P(\hat{z}_n^i \leq \bar{z}_n^i - \frac{p_n^i}{k_n^i} | p_n^i) = 1 - \alpha \tag{2.69}$$

lub

$$k_n^i = \frac{1}{\bar{z}_n^i - F_{\hat{z}_n^i}^{-1}(1-\alpha)} p_n^i = k_n^{i*} p_n^i \tag{2.70}$$

Zauważmy, że dla zmiennych losowych $\hat{z}_n^i$ o funkcjach gęstości równych zero dla $\hat{z}_n^i \leq 0$ i dla $\alpha = 1$ lokalne prawo sterowania opisane jest wzorem:

$$u_n^i = \frac{p_n^i}{\bar{z}_n^i} \hat{z}_n^i \tag{2.71}$$

Taką postać lokalnego prawa sterowania otrzymaliśmy również w punkcie 2.1.1 niniejszego rozdziału.

Pozostaje jeszcze problem wyznaczenia pojemności rezerwowej i wytycznych koordynatora. Dla prawa sterowania (2.67) przy $k_n^i$ wynikającym z (2.70) problem ten był dyskutowany w punkcie 2.1.1 niniejszego rozdziału. Można więc powtórzyć rozważania prowadzące do zależności (2.17)- (2.29), w których za $k_n^{i*}$ należy przyjąć wielkość wynikającą z (2.70).

*Przykład*

Rozpatrzmy system składający się z $M$ podsystemów, dla których zmienna losowa $z_n^i$ ma rozkład normalny o wartości średniej $\bar{z}_n^i = i+2$ i odchyleniu standartowym $\sigma_n^i = (i+2)/3$. Dla takich danych prawdopodobieństwo wystąpienia ujemnych zapotrzebowań wynosi ok. 0.001.

Niech wskaźnik jakości ma postać:

$$I = E\sum_{n=0}^{N}\sum_{i=1}^{M}(u_n^i - z_n^i)^2_{u_n^i = a_n^i(.)}, \tag{2.72}$$

zaś $\bar{z}_n^i = z_n^i$.

Przy braku ograniczenia na prawdopodobieństwo wystąpienia nieujemnych sterowań lokalne prawo sterowania wyraża się wzorem (1.48) z rozdziału 1, tzn.

$$u_n^i = p_n^i + (z_n^i - \bar{z}_n^i) \tag{2.73}$$

Obliczmy wartość wytycznej $p_n^i$, dla której prawdopodobieństwo wystąpienia nieujemnego sterowania $u_n^i$ wynosi $\alpha$, tzn.

$$P(u_n^i > 0 | p_n^i) = \alpha \tag{2.74}$$

Wstawiając (2.73) do (2.74) otrzymamy:

$$p_n^i = \bar{z}_n^i - F_{z_n^i}^{-1}(1-\alpha), \tag{2.75}$$

gdzie $F_{z_n^i}^{-1}$ jest funkcją odwrotną do dystrybuanty zmiennej losowej $z_n^i$.

W tabeli 2.2 zamieszczone są wartości wytycznych $p_n^i$ wynikające z (2.75), dla których prawdopodobieństwo wystąpienia nieujemnych sterowań lokalnych wynosi $\alpha$.

Jak wiadomo, przy wzroście deficytu wartości wytycznych koordynatora maleją. Wyniki zamieszczone w tab. 2.2 pokazują, że rośnie wówczas prawdopodobieństwo wystąpienia ujemnego sterowania lokalnego.

Wartość pojemności rezerwowej zapewniającej realizację sterowania lokalnego (2.73) wynika ze wzoru (1.54) w rozdziale pierwszym,tzn.

$$\Delta u_n = F_{z_n}^{-1}(\beta) - \sum_{i=1}^{M}\bar{z}_n^i, \tag{2.76}$$

gdzie $F_{z_n}^{-1}(\beta)$ jest wartością funkcji odwrotnej do dystrybuanty zmiennej losowej $z_n = \sum_{i=1}^{M} z_n^i$ dla zadanego prawdopodobieństwa $\beta$.



Tabela 2.2

Zależność wytycznej koordynatora od prawdopodobieństwa wystąpienia nieujemnego sterowania lokalnego (2.73)

| Nr podsyst. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Srednia $\bar{z}_n^i$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| Wytyczna $p_n^i$ dla $\alpha = 0.995$ | 2.6 | 3.4 | 4.3 | 5.2 | 6 | 6.9 | 7.7 | 8.6 | 9.4 | 10.3 |
| Wytyczna $p_n^i$ dla $\alpha = 0.990$ | 2.3 | 3.1 | 3.9 | 4.6 | 5.4 | 6.2 | 7 | 7.7 | 8.5 | 9.3 |
| Wytyczna $p_n^i$ dla $\alpha = 0.985$ | 2.2 | 2.9 | 3.6 | 4.3 | 5 | 5.8 | 6.5 | 7.2 | 7.9 | 8.7 |
| Wytyczna $p_n^i$ dla $\alpha = 0.980$ | 2 | 2.7 | 3.4 | 4.1 | 4.8 | 5.6 | 6.1 | 6.8 | 7.5 | 8.2 |
| Wytyczna $p_n^i$ dla $\alpha = 0.950$ | 1.6 | 2.2 | 2.7 | 3.3 | 3.8 | 4.4 | 4.9 | 5.5 | 6 | 6.6 |
| Wytyczna $p_n^i$ dla $\alpha = 0.900$ | 1.3 | 1.7 | 2.1 | 2.6 | 3 | 3.4 | 3.8 | 4.3 | 4.7 | 5 |

W naszym przypadku wartość średnia tej zmiennej wynosi $\bar{z}_n = \sum_{i=1}^{M}\bar{z}_n^i = 75$, zaś jej odchylenie standartowe $\sigma_n = \sqrt{\sum_{i=1}^{M}\sigma_n^{i2}} = 8.4656$. Przykładowe wartości $\Delta u_n$ dla zadanych prawdopodobieństw $\beta$ są przedstawione w tabeli 2.3.

Tabela 2.3

Zależność pojemności rezerwowej od prawdopodobieństwa realizacji sterowania lokalnego (2.73)

| Prawdopodobieństwo $\beta$ | 0.995 | 0.990 | 0.985 | 0.980 | 0.95 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Pojemność rezerwowa $\Delta u_n$ | 21.8 | 19.7 | 18.4 | 17.4 | 13.9 | 10.8 |

Przy zmniejszającym się prawdopodobieństwie realizacji sterowania lokalnego maleje wartość pojemności rezerwowej. Przy prawdopodobieństwie $\beta = 0.995$ stanowi ona 29% średniego zapotrzebowania systemu i maleje do 14% przy $\beta = 0.9$.

Przy narzuconym prawdopodobieństwie $\alpha$ wystąpienia nieujemnego sterowania lokalnego wielkość $k_n^i$ występująca w (2.67) opisana jest równaniem (2.70). Zależy ona liniowo od $p_n^i$ ze współczynnikiem $k_n^{i*}$. W tabeli 2.4 podana jest zależność $k_n^{i*}$ od $\alpha$.

Tabela 2.4

Zależność współczynnika $k_n^{i*}$ od prawdopodobieństwa wystąpienia nieujemnego sterowania lokalnego (2.67)

| Nr podsyst. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Współcz. $k_n^{i*}$ dla $\alpha = 0.995$ | 0.39 | 0.29 | 0.23 | 0.19 | 0.17 | 0.14 | 0.13 | 0.12 | 0.11 | 0.10 |
| Współcz. $k_n^{i*}$ dla $\alpha = 0.990$ | 0.43 | 0.32 | 0.26 | 0.21 | 0.18 | 0.16 | 0.14 | 0.13 | 0.12 | 0.11 |
| Współcz. $k_n^{i*}$ dla $\alpha = 0.985$ | 0.46 | 0.34 | 0.28 | 0.23 | 0.20 | 0.17 | 0.15 | 0.14 | 0.13 | 0.12 |
| Współcz. $k_n^{i*}$ dla $\alpha = 0.980$ | 0.49 | 0.36 | 0.29 | 0.24 | 0.21 | 0.18 | 0.16 | 0.15 | 0.13 | 0.12 |
| Współcz. $k_n^{i*}$ dla $\alpha = 0.950$ | 0.61 | 0.46 | 0.36 | 0.3 | 0.26 | 0.23 | 0.2 | 0.18 | 0.16 | 0.15 |
| Współcz. $k_n^{i*}$ dla $\alpha = 0.900$ | 0.78 | 0.58 | 0.47 | 0.39 | 0.33 | 0.29 | 0.26 | 0.23 | 0.21 | 0.19 |

Przeprowadzono symulację pracy systemu przy zastosowaniu algorytmu opracowanego w niniejszym punkcie. Wyniki zamieszczone są tabeli 2.5. W tabeli tej zamieszczono też wyniki symulacji przy zastosowaniu poprzednio opracowanych algorytmów.

Tabela 2.5

Wyniki badań symulacyjnych dla $N' = 1$, $\alpha = \beta = 0.9987$

| Średni dopływ $\bar{d}_n$ | Algorytm przy ogr. elastycznym na sterowanie **wskaźnik** | Algorytm przy dodatkowym ogr. na wariancję sterowania **wskaźnik** | Algorytm przy ogr. na prawd. realizacji nieuj. ster. **wskaźnik** |
|---|---|---|---|
| $\bar{z}_n$ | 0 | 0 | 0 |
| $0.9\bar{z}_n$ | 4611 | 4361 | 4393 |
| $0.8\bar{z}_n$ | 18650 | 18116 | 18156 |
| $0.62\bar{z}_n$ | brak rozwiązania | 72280 | 72343 |



## 2.4. Uwagi końcowe

Celem rozważań przeprowadzonych w niniejszym rozdziale była synteza i analiza algorytmów rozdziału zasobów przy ograniczeniach na parametry statystyczne na znak lub prawdopodobieństwo wystąpienia sterowania lokalnego.

Do ich realizacji niezbędna jest pewna pojemność rezerwowa, która może być dobierana przez koordynatora. Jej wielkość maleje wraz ze wzrastającym deficytem zasobów w systemie. Ponadto algorytmy te zapewniają wystąpienie sterowania nieujemnego lub jego wystąpienie ze z góry zadanym prawdopodobieństwem. Niestety, złożoność i nakład obliczeniowy mogą w niektórych przypadkach stwarzać trudności w ich zastosowaniu.

Wydaje się jednak, że opracowane strategie stanowią alternatywę do prostszych algorytmów opracowanych w rozdziale 1, szczególnie przy większym deficycie zasobów w systemie, a wybór algorytmu będzie zależał od wyników badań symulacyjnych przeprowadzonych na konkretnym modelu systemu.

# ROZDZIAŁ 3

# SYNTEZA ALGORYTMU ROZDZIAŁU ZASOBÓW Z PERIODYCZNĄ KOORDYNACJĄ [22, 23]

W rozdziale pierwszym opracowano algorytmy rozdziału zasobów realizowane w strukturze dwupoziomowej, w których wyznaczanie wytycznych przez koordynatora i określanie ostatecznych decyzji przez lokalnych decydentów odbywało się z tą samą częstotliwością. W niniejszym rozdziale zostanie dokonana synteza algorytmu sterowania w strukturze dwupoziomowej, w którym koordynator określa i przesyła wytyczne na poziom niższy z mniejszą częstotliwością w stosunku do sterowań wyznaczanych przez lokalnych decydentów. Taka strategia umożliwia więc dalsze zmniejszenie ilości informacji przekazywanej na poziom niższy.

Podobna idea sterowania oparta na periodycznej koordynacji została przedstawiona między innymi w [13], gdzie wytyczne są ocenami istniejącej interakcji pomiędzy podsystemami.

W celu uniknięcia dość zawiłych przekształceń zostanie rozpatrzony przypadek skalarny, w którym na poziom wyższy nie jest przekazywana żadna informacja z podsystemów.

## 3.1. Model systemu

Model systemu jest bardzo podobny do tego, jaki przedstawiono w rozdziale pierwszym. System ten składa się z $M$ niepowiązanych, rozproszonych podsystemów (odbiorców) pobierających zasoby z magazynu. Zapotrzebowania odbiorców $z_n^i$, $i = 1, 2, ..., M$ są zmiennymi losowymi o znanych funkcjach gęstości prawdopodobieństwa.

Model pomiaru w $i$-tym podsystemie ma postać:

$$y_n^i = g_n^i(z_n^i, w_n^i), \tag{3.1}$$

gdzie $w_n^i$ jest błędem pomiarowym.

Jedynym ograniczeniem nierównościowym branym pod uwagę przy realizacji sterowania jest ograniczenie na wielkość zasobów w magazynie.

Niech wskaźnik jakości wyrażający straty w systemie wynikające np. z niedostarczenia odbiorcom odpowiedniej wielkości zasobów ma postać:

$$\bar{I} = \sum_{n=0}^{NL-1} \sum_{i=1}^{M} (u_n^i - z_n^i)^2 \tag{3.2}$$

gdzie $z_n^i$ reprezentuje zapotrzebowanie $i$–tego odbiorcy w okresie $(n, n+1)$, $a_n^i(.)$ jest poszukiwanym prawem sterowania minimalizującym wskaźnik jakości (3.2), $n$ jest podstawowym okresem, zaś $NL-1$ jest horyzontem sterowania. Bliższe znaczenie $L$ zostanie wyjaśnione w dalszej części rozdziału. Wprowadzenie innej postaci kwadratowego wskaźnika jakości nie powoduje dodatkowych trudności obliczeniowych.

Zadaniem jest tak rozdzielać zasoby pomiędzy odbiorców, aby wskaźnik jakości (3.2) przyjmował minimalną wartość przy ograniczeniach:

$$h_{min} \leq h_n + d_n - \sum_{i=1}^{M} u_n^i \tag{3.3}$$

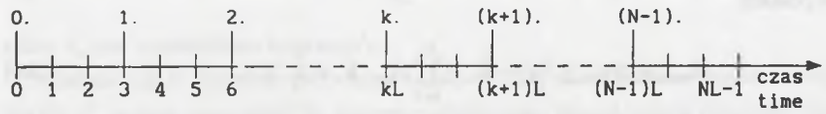
## 3.2. Struktura układu sterowania i dostępna informacja

Zakładamy, że decyzje o rozdziale zasobów podejmowane są w dwupoziomowej strukturze hierarchicznej. Na poziomie niższym lokalni decydenci określają ostateczne decyzje $u_n^i$, $i = 1, 2, ..., M$, z częstotliwością zdefiniowaną przez jednostkę czasu dyskretnego $n = 0, 1, ..., NL-1$. Natomiast na poziomie wyższym koordynator wyznacza i przesyła lokalnym decydentom wytyczne $p_{k.}^i$, $i = 1, 2, ..., M$, z mniejszą częstotliwością, wynikającą z jednostki czasu dyskretnego przyjętego na tym poziomie. Za czas dyskretny obowiązujący na poziomie wyższym przyjmuje się część całkowitą ułamka $\frac{n}{L}$, tzn. $k. = int[\frac{n}{L}]$, gdzie $L$ jest stosunkiem częstotliwości, z jakimi są podejmowane decyzje przez koordynatora i lokalnych decydentów. W dalszej części rozważań dyskretne czasy na obu poziomach będą oznaczane odpowiednio przez $k. = 0., 1., ..., (N-1).$ oraz $n = 0, 1, ..., NL-1$ jak to zostało pokazane na rys. 8.

Decyzje $u_n^i$ o przydziale zasobów $i$-temu odbiorcy podejmowane są w chwilach $n = 0, 1, ..., NL-1$ przez $i$-tego lokalnego decydenta na podstawie informacji $y_n^i$ oraz wytycznej koordynatora $p_{k.}^i$, gdzie $kL \leq n < (k+1)L$.

Koordynator określa wytyczne $p_{k.}^i$ na podstawie informacji $m_{k.}$ o wielkości zasobów w magazynie, o przyszłym dopływie zasobów do magazynu oraz o znajomości średnich zapotrzebowań odbiorców.






Rys.8. Skale czasu obowiązujące na dwu poziomach sterowania
Fig.8. Decision-making frequencies

## 3.3. Sformułowanie problemu

Z przyjętej struktury układu sterowania i struktury informacyjnej wynika, że za dopuszczalne prawa sterowania lokalnych decydentów i koordynatora możemy przyjąć funkcje $u_n^i = a_n^i(y_n^i, p_{k.}^i)$ oraz $p_{k.}^i = b_k^i(m_{k.})$, z których każda odwzorowuje odpowiedni zbiór zmiennych $y_n^i, p_{k.}^i$ i $m_{k.}$ w odpowiedni zbiór decyzji $u_n^i$ i $p_{k.}^i$. Zakładamy przy tym, że funkcje te spełniają ograniczenie elastyczne w postaci:

$$E_{|m_{k.}} \sum_{n=kL}^{(k+1)L-1} a_n^i(y_n^i, p_{k.}^i) = p_{k.}^i, \quad p_{k.}^i \geq 0 \tag{3.4}$$

Wprowadźmy również wtórny wskaźnik jakości

$$I(a, b) = E \sum_{n=0}^{NL-1} \sum_{i=1}^{M} [a_n^i(y_n^i, p_{k.}^i) - z_n^i]^2, \tag{3.5}$$

gdzie $E$ jest symbolem wartości średniej, $a = \{a_0^1, ..., a_{NL-1}^1, ..., a_0^M, ..., a_{NL-1}^M\}$, $b = \{b_{0.}^1, ..., b_{(N-1).}^1, ..., b_{0.}^M, ..., b_{(N-1).}^M\}$.

Przy poszukiwaniu praw sterowania, koordynatora i lokalnych decydentów, minimalizujących wskaźnik jakości (3.5), przyjmiemy, że

**Z1.** Zmienne losowe $z_n^i, w_n^i$ występujące w modelu pomiarów (3.1) mają rozkłady o znanych parametrach.

**Z2.** Zmienne losowe $y_n^i$, $z_n^i$ są niezależne od $m_{k.}$ dla $kL \leq n < (k+1)L$.

**Z3.** Wartości sterowań $u_n^i$ należą do przestrzeni liczb rzeczywistych.

**Z4.** Sterowanie $u_n^i$ nie wpływa na wartości zmiennych $y_n^j$ oraz $z_n^j$ dla $i \neq j$.

Ponieważ zmienna $u_n^i = a_n^i(y_n^i, p_{k.}^i)$ jest dla koordynatora zmienną losową oraz podejmuje on decyzje w chwilach $k. = 0., 1., ..., (N-1).$, więc przy wyznaczaniu wielkości $p_{k.}^i$ ograniczenie w postaci (3.3) nie może być brane pod uwagę. Proponuje się jego modyfikację w postaci:

$$h_{min} + \Delta u_{k.} \leq \bar{h}_{k.} + \bar{d}_{k.} - \sum_{i=1}^{M} p_{k.}^i, \quad k. = 1., 2., ... \tag{3.6}$$

gdzie $\Delta u_{k.}$ jest tzw. pojemnością rezerwową w magazynie, $\bar{h}_{k.}, \bar{d}_{k.}$ są ocenami zasobów w magazynie oraz dopływu dokonanymi przez koordynatora w chwili $k.$.

Istnienie pojemności rezerwowej wynika z ograniczenia elastycznego i było dyskutowane w poprzednich rozdziałach.

Naszym zadaniem jest znalezienie wśród dopuszczalnych praw sterowania takich funkcji $a$ i $b$, które minimalizują wskaźnik jakości (3.5) przy ograniczeniach (3.4) i (3.6).

## 3.4. Rozwiązanie problemu

Dla przyjętej struktury układu sterowania i dostępnej informacji oraz przy przyjętych założeniach, podobnie jak w rozdziale pierwszym, zadanie poszukiwania optymalnych praw sterowania $i$-tego lokalnego decydenta $a_n^{io}(y_n^i, p_{k.}^i)$, $kL \leq n < (k+1)L$ sprowadza się do minimalizacji wskaźnika jakości

$$I_{k.}^i = E \sum_{n=kL}^{(k+1)L-1} [a_n^i(y_n^i, p_{k.}^i) - z_n^i]^2 \tag{3.7}$$

względem funkcji $a_n^i(.)$ przy ograniczeniach:

$$E_{|m_k} a_n^i(y_n^i, p_{k.}^i) = c_n^i p_{k.}^i, \quad p_{k.}^i \geq 0, \quad kL \leq n < (k+1)L \tag{3.8}$$

$$\sum_{n=kL}^{(k+1)L-1} c_n^i = 1 \tag{3.9}$$

Współczynniki $c_n^i$ zostaną wyznaczone w dalszej części rozważań.

Oznaczmy przez

$$S_n^i(m_{k.}, p_{k.}^i, c_n^i) = \min_{a_n^i} E_{|m_k} [a_n^i(y_n^i, p_{k.}^i) - z_n^i]^2, \quad kL \leq n < (k+1)L \tag{3.10}$$

$$S_{k.}^i(.) = \sum_{n=kL}^{(k+1)L-1} S_n^i(.) \tag{3.11}$$



Wówczas optymalne prawa $a_n^{io}(.)$ wynikają z minimalizacji (3.10) przy ograniczeniu (3.8). Zadanie to sprowadza się do minimalizacji w (3.12)

$$L_n^i(m_{k.}, p_{k.}^i, c_n^i, \lambda_n^i) = \min_{a_n^i} E_{|m_k} [(a_n^i - z_n^i)^2 + 2\lambda_n^i(a_n^i - c_n^i p_{k.}^i)], \tag{3.12}$$

gdzie $\lambda_n^i$ jest mnożnikiem Lagrange'a.

Podobnie jak w rozdziale pierwszym zadanie (3.12) poszukiwania minimum względem funkcji $a_n^i$ można sprowadzić do znacznie łatwiejszego poszukiwania minimum względem zmiennej $u_n^i$ w następującym wyrażeniu:

$$L_n^i(m_{k.}, p_{k.}, c_n^i, \lambda_n^i) = E_{|m_k} \min_{u_n^i} E_{|y_n^i, p_{k.}^i} [(u_n^i - z_n^i)^2 + 2\lambda_n^i(u_n^i - c_n^i p_{k.}^i)] \tag{3.13}$$

Dokonując operacji uśredniania w (3.13), a następnie różniczkując otrzymaną zależność względem $u_n^i$ i przyrównując pochodną do zera otrzymamy:

$$u_n^{io} = \hat{z}_n^i - \lambda_n^i, \tag{3.14}$$

gdzie $\hat{z}_n^i$ jest oceną zmiennej $z_n^i$ dokonaną przez $i$-tego lokalnego decydenta na podstawie informacji $y_n^i$, tzn. $\hat{z}_n^i = E_{|y_n^i} z_n^i$.

Podstawiając (3.14) do (3.8), obliczając $\lambda_n^i$ i wstawiając je do (3.14) otrzymamy optymalną postać lokalnego prawa sterowania

$$u_n^{io} = c_n^i p_{k.}^i + (\hat{z}_n^i - \bar{z}_n^i), \tag{3.15}$$

gdzie $\bar{z}_n^i = E z_n^i$.

Wstawiając (3.15) do (3.10) możemy (3.11) zapisać w postaci:

$$S_{k.}^i = \sum_{n=kL}^{(k+1)L-1} [(c_n^i p_{k.}^i - \bar{z}_n^i)^2 + E_{|m_k} (\hat{z}_n^i - \bar{z}_n^i)^2] \tag{3.16}$$

Minimalizując (3.16) względem $c_n^i$, $n = kL, kL+1, ..., (k+1)L-1$ przy ograniczeniu (3.9) otrzymamy:

$$c_n^i = \frac{p_{k.}^i + L\bar{z}_n^i - \sum_{n=kL}^{(k+1)L-1} \bar{z}_n^i}{L p_{k.}^i} \tag{3.17}$$

Po wstawieniu (3.17) do (3.16) otrzymamy: funkcję $S_{k.}^i(.)$ w postaci

$$S_{k.}^i(.) = \frac{1}{L}(p_{k.}^i - \sum_{n=kL}^{(k+1)L-1} \bar{z}_n^i)^2 + E_{|m_k} \sum_{n=kL}^{(k+1)L-1} (\hat{z}_n^i - \bar{z}_n^i)^2 \tag{3.18}$$

Zadanie wyznaczenia przez koordynatora wytycznych $p^i_{n.}$, $i = 1, 2, ..., M$, $n. = 0., 1., ..., (N-1)$. sprowadza się do minimalizacji wskaźnika

$$I = E \sum_{n.=0.}^{(N-1).} \sum_{i=1}^{M} S^i_{n.}(.)_{p^i_{n.}=b^i_{n.}(m_{n.})} \tag{3.19}$$

względem funkcji $b^i_{n.}$ przy ograniczeniu (3.6). Jedną z możliwości rozwiązania jest wykorzystanie idei sterowania w układzie otwartym ze sprzężeniem (OLF) z przesuwnym horyzontem $N'$, o której była mowa w rozdziale pierwszym.

Zgodnie z tą ideą w chwili $n.$ koordynator wyznacza wartości zmiennych $p^i_{k.|n.}$, $k. = n., (n+1), ...., (n+N')., \quad i = 1, 2, ..., M$, które minimalizują wskaźnik:

$$I^*_{n.} = \frac{1}{L} \sum_{k.=n.}^{(n+N').} \sum_{i=1}^{M} (p^i_{k.|n.} - \bar{z}^i_{k.})^2 \tag{3.20}$$

przy ograniczeniach

$$h_{min} + \Delta u_{(n+j-1).} \leq \bar{h}_{(n+j).|n.}, \quad j = 1, 2, ..., N'+1 \tag{3.21}$$

$$p^i_{(n+j).|n.} \geq 0, \quad i = 1, ..., M, \quad j = 0, 1, ..., N', \tag{3.22}$$

gdzie $\bar{z}^i_{n.} = \sum_{l=nL}^{(n+1)L-1} \bar{z}^i_l$, $\bar{h}_{(n+j).|n.}$ jest predykcją wielkości zasobów w magazynie w chwili $(n+j).$, dokonaną przez koordynatora na podstawie informacji $m_{n.}$. Ocena ta może być wyznaczona z równania:

$$\bar{h}_{(n+j).|n.} = \bar{h}_{n.|n.} + \sum_{k.=n.}^{(n+j-1).} \bar{d}_{k.|n.} - \sum_{k.=n.}^{(n+j-1).} \sum_{i=1}^{M} p^i_{k.|n.}, \tag{3.23}$$

gdzie $\bar{h}_{n.|n.}$ oraz $\bar{d}_{k.|n.}$ są odpowiednio ocenami wielkości zasobów w chwili $n.$ oraz dopływu w okresie $(k., (k+1).)$, dokonanymi w chwili $n.$.

W celu zmniejszenia ilości obliczeń (numerycznego poszukiwania $p^i_{k.|n.}$, $i = 1, 2, ..., M$, $k. = n., (n+1)., ..., N'.$, prowadzonych w chwili $n.$ przez koordynatora, możemy wprowadzić zmienną zagregowaną $e_{k.|n.}$, zdefiniowaną przez

$$e_{k.|n.} = \sum_{i=1}^{M} p^i_{k.|n.}, \quad k. = n., (n+1)., ..., (n+N'). \tag{3.24}$$

Wówczas możemy znaleźć analityczną postać prawa sterowania $p^{io}_{k.|n.} = b^{io}_{k.|n.}(m_{n.})$ poprzez minimalizację wyrażenia

$$I_{k.} = \frac{1}{L}(p^i_{k.|n.} - \bar{z}^i_{k.})^2 \tag{3.25}$$

względem $p^i_{k.|n.}$ przy ograniczeniu (3.24).



Po zastosowaniu metody mnożników Lagrange'a otrzymamy:

$$p^{io}_{k.|n.} = \bar{z}^i_{k.} + \frac{e_{k.|n.} - \sum_{i=1}^{M} \bar{z}^i_{k.}}{M} \tag{3.26}$$

Zadanie numerycznego wyznaczania wartości zmiennych zagregowanych $e_{k.|n.}$, $k. = n., (n+1)., ..., (n+N').$ sprowadza się do wstawienia (3.26) do (3.20) i minimalizacji wskaźnika jakości (3.20) zapisanego w postaci:

$$I^*_{n.} = \frac{1}{LM} \sum_{k.=n.}^{(n+N').} (e_{k.|n.} - \sum_{i=1}^{M} \bar{z}^i_{k.})^2 \tag{3.27}$$

przy ograniczeniach

$$h_{min} + \Delta_{(n+j-1).} \leq \bar{h}_{(n+j).|n.} = \bar{h}_{n.|n.} + \sum_{k.=n.}^{(n+j-1).} \bar{d}_{k.|n.} - \sum_{k.=n.}^{(n+j-1).} e_{k.|n.}$$

$$e_{(n+j-1).|n.} \geq 0, \quad j = 1, 2, ...N'+1 \tag{3.28}$$

Z (3.26), (3.17) i (3.15) wynika, że w tym przypadku lokalne prawo sterowania ma postać:

$$u^{io}_n = \hat{z}^i_n + \Lambda_{k.}, \quad n = kL, kL+1, ..., (k+1)L-1, \tag{3.29}$$

gdzie $\Lambda_{k.}$ opisane jest wzorem:

$$\Lambda_{k.} = \frac{e_{k.|n.} - \sum_{i=1}^{M} \bar{z}^i_{k.}}{ML} \tag{3.30}$$

Tak więc w przypadku, gdy po numerycznym wyznaczeniu przez koordynatora $e_{k.|n.}$, a następnie z (3.26) obliczeniu $p^i_{k.|n.}$, $i = 1, 2, ..., M$, $k. = n., (n+1)., ..., (n+N').$, okaże się, że są one nieujemne, to na poziom niższy wystarczy przesłać jedną wspólną dla wszystkich lokalnych decydentów wartość wytycznej $\Lambda_{k.}$.

Pozostaje jeszcze problem wyznaczenia pojemności rezerwowej $\Delta u_{k.}$, występującej w (3.28).

Niech $u^*_{k.}$ oznacza minimalną wielkość zasobów, dla której prawdopodobieństwo tego, że $\sum_{n=kL}^{(k+1)L-1} \sum_{i=1}^{M} u^i_n \leq u^*_{k.}$ przy zadanym $e_{k.|k.}$ jest równe $\beta$, tzn.

$$P(\sum_{n=kL}^{(k+1)L-1} \sum_{i=1}^{M} u^i_n \leq u^*_{k.} | e_{k.|k.}) = \beta \tag{3.31}$$

Wykorzystując (3.15) możemy (3.31) zapisać jako:

$$P[\sum_{n=kL}^{(k+1)L-1} \sum_{i=1}^{M} (\hat{z}^i_n - \bar{z}^i_n) \leq (u^*_{k.} - e_{k.|k.}) | e_{k.|k.}] = \beta \tag{3.32}$$

Z (3.32) wynika, że

$$\Delta u_k = F_{\hat{z}_k}^{-1}(\beta) - \sum_{n=kL}^{(k+1)L-1} \sum_{i=1}^{M} \bar{z}_n^i, \tag{3.33}$$

gdzie $F_{\hat{z}_k}^{-1}(\beta)$ jest odwrotnością dystrybuanty zmiennej losowej $\hat{z}_k = \sum_{n=kL}^{(k+1)L-1} \hat{z}_n^i$.

W [22, 23] podano rezultaty badań symulacyjnych, z których można wyciągnąć wnioski analogiczne do tych, jakie sformułowano na końcu rozdziału pierwszego.

# ROZDZIAŁ 4

# ALGORYTMY STEROWANIA DLA DYNAMICZNYCH PODSYSTEMÓW

W poprzednich rozdziałach pracy dokonano syntezy i analizy algorytmów rozdziału zasobów dla systemów składających się ze statycznych podsystemów. W dalszych rozważaniach zostaną opracowane algorytmy rozdziału zasobów dla systemów składających się z dynamicznych podsystemów opisanych liniowymi równaniami różnicowymi i dla kwadratowego wskaźnika jakości. Algorytmy te mogą być wykorzystane również w zagadnieniach sterowania optymalnego wielkimi systemami w warunkach losowych, przy zróżnicowanej informacji poszczególnych decydentów.

W pierwszej części niniejszego rozdziału zostanie sformułowany problem sterowania, którego częściowe rozwiązanie znajduje się w [34]. W pracy tej wyprowadzone są optymalne prawa sterowania, z których wynika, że zarówno decyzje lokalnych decydentów, jak i koordynatora zależą między innymi od ocen stanu wyznaczanych przez lokalnego decydenta i koordynatora. O ile oceny wyznaczone przez lokalnych decydentów można otrzymać stosując klasyczne równania filtru Kalmana [61], to równania ocen wyznaczonych przez koordynatora wymagają istotnej modyfikacji równań klasycznych. Wynika to z faktu, że występujące w równaniu stanu sterowanie jest dla koordynatora zmienną losową generowaną przez postać prawa sterowania lokalnego decydenta. Zagadnienia te będą omawiane w pierwszej części niniejszego rozdziału.

W rozdziale trzecim dokonano syntezy i analizy algorytmu sterowania dla skalarnego systemu statycznego i szczególnej postaci kwadratowego wskaźnika jakości, realizowanego w strukturze dwupoziomowej, przy zróżnicowanej częstotliwości podejmowania decyzji na obu poziomach. W drugiej części niniejszego rozdziału zostaną przeprowadzone podobne rozważania, ale odnoszące się do wektorowego systemu dynamicznego i ogólnej postaci kwadratowego wskaźnika jakości.

## 4.1. Algorytm sterowania dwupoziomowego przy tej samej częstotliwości podejmowania decyzji [21]

### 4.1.1 Opis systemu

Rozważmy duży system składający się z $M$ podsystemów, z których każdy opisany jest równaniem stanu

$$x_{n+1}^i = A_n^i x_n^i + B_n^i u_n^i + w_n^i \tag{4.1}$$

oraz równaniem wyjścia

$$y_n^i = C_n^i x_n^i + r_n^i, \quad i = 1,2,...,M, \tag{4.2}$$

gdzie $x_n^i, u_n^i$ są wektorami stanu i sterowania o odpowiednich wymiarach, $y_n^i$ jest wektorem wyjścia, zaś $w_n^i, r_n^i$ reprezentują zakłócenia stanu oraz pomiaru.

Zakładamy, że zmienne losowe $w_n^i$ oraz $r_n^i$ są gaussowskimi białymi szumami niezależnymi od $w_n^j, r_n^j$, $i \neq j$, $i,j = 1,2,...,M$ oraz od innych zmiennych dla $k \leq n$. Warunek początkowy $x_0^i$ jest również białym szumem gaussowskim niezależnym od $x_0^j$, $i \neq j$, $i,j = 1,2,...,M$. Przyjmujemy także, że dane jest $Ex_0^i$ oraz $Ew_n^i = 0$, $Er_n^i = 0$. Dane są również macierze kowariancji $W_n^i = Ew_n^i w_n^{iT}$, $R_n^i = Er_n^i r_n^{iT}$ oraz $X_0^i = Ex_0^i x_0^{iT}$.

Wskaźnik jakości, który należy minimalizować, ma postać:

$$\bar{I} = \sum_{n=0}^{N} \sum_{i=1}^{M} (x_n^{iT} Q_n^i x_n^i + 2x_n^{iT} G_n^i u_n^i + u_n^{iT} H_n^i u_n^i), \tag{4.3}$$

gdzie macierze $\begin{bmatrix} Q_n^i & G_n^i \\ G_n^{iT} & H_n^i \end{bmatrix}$ są symetryczne, dodatnio półokreślone, zaś macierze $H_n^i$ są dodatnio określone.

### 4.1.2. Struktura układu sterowania i dostępna informacja

Algorytm sterowania zależy od przyjętej struktury układu sterowania i dostępnej informacji. W dalszych rozważaniach przyjmiemy strukturę dokładnie opisaną w punkcie 1.2 rozdziału pierwszego. Tak więc założymy, że sterowanie realizowane będzie w dwupoziomowej strukturze hierarchicznej z koordynatorem na poziomie wyższym i lokalnymi decydentami na poziomie niższym, dysponującymi zróżnicowaną informacją.

Lokalny $i-$ty decydent otrzymuje w chwili $n$ informację $y_n^i$ wynikającą z (4.2), przetwarza ją do wektora

$$m_n^i = D_n^i y_n^i = F_n^i x_n^i + e_n^i \tag{4.4}$$

o wymiarze mniejszym w stosunku do wektora $y_n^i$ i przesyła na poziom wyższy.



Przyjmujemy , że $i$-ty lokalny decydent zna w chwili $n$ swoje poprzednie decyzje $u_k^i$, $k = 0,1,...(n-1)$ oraz dysponuje informacją pomiarową $\mathbf{y_n^i} = [y_0^{iT}\ y_1^{iT}...y_n^{iT}]^T$. Natomiast koordynator zna w chwili $n$ swoje poprzednie wytyczne $p_k^i$, $k = 1,2,...,(n-1)$ oraz dysponuje informacją $\mathbf{m_n} = [\mathbf{m_n^{1T}}\ \mathbf{m_n^{2T}}...\mathbf{m_n^{MT}}]^T$, gdzie $\mathbf{m_n^i} = [m_0^{iT}\ m_1^{iT}...m_n^{iT}]^T$.

### 4.1.3. Sformułowanie i rozwiązanie problemu

Przez dopuszczalne prawa sterowania $i$-tego lokalnego decydenta będziemy rozumieć funkcje $u_n^i = a_n^i(\mathbf{y_n^i}, p_n^i)$. Natomiast przez dopuszczalne prawa sterowania koordynatora będziemy rozumieć funkcje $p_n^i = b_n^i(\mathbf{m_n})$.

Dodatkowo zakładamy, że powyższe funkcje spełniają ograniczenia:

$$E_{|\mathbf{m_n}} a_n^i(\mathbf{y_n^i}, p_n^i) = p_n^i, \quad i = 1,2,...,M \tag{4.5}$$

$$\sum_{i=1}^{M} p_n^i = \bar{e}_{n|n}, \quad n = 0,1,...,N, \tag{4.6}$$

gdzie $\bar{e}_{n|n} = E_{|\mathbf{m_n}} \sum_{i=1}^{M} a_n^i(\mathbf{y_n^i}, p_n^i)$ oznacza wytyczną koordynatora wyznaczoną w chwili $n$ na podstawie informacji $m_n$ i będącą oceną sumy sterowań lokalnych decydentów realizowanych w okresie $(n, n+1)$.

Przy przyjętej strukturze informacyjnej oraz strukturze układu sterowania wskaźnik jakości (4.3) nie może być minimalizowany. Wprowadzamy więc wtórny wskaźnik jakości

$$I(a,b) = E \sum_{n=0}^{N} \sum_{i=1}^{M} [(x_n^{iT} Q_n^i x_n^i + 2x_n^{iT} G_n^i u_n^i + u_n^{iT} H_n^i u_n^i]_{u_n^i = a_n^i[\mathbf{y_n^i}, b_n^i(\mathbf{m_n})]}, \tag{4.7}$$

gdzie $a = \{a_0^1, a_1^1, ..., a_N^1, ..., a_0^M, a_1^M, ..., a_N^M\}$ oraz $b = \{b_0^1, b_1^1, ..., b_N^1, ..., b_0^M, b_1^M, ..., b_N^M\}$.

W czasie syntezy układu sterowania należy wybrać wśród dopuszczalnych praw sterowania takie, które minimalizują wtórny wskaźnik jakości (4.7) przy ograniczeniach (4.5) i (4.6).

W [34] wyprowadzono optymalne prawa sterowania lokalnych decydentów $u_n^i = a_n^i(\mathbf{y_n^i}, p_n^i)$ i koordynatora $p_n^i = b_n^i(\mathbf{m_n})$.

Prawo sterowania $i$-tego lokalnego decydenta ma postać:

$$u_n^i = p_n^i - (V_n^i)^{-1} O_n^i (\hat{x}_n^i - \bar{x}_n^i), \tag{4.8}$$

gdzie $\hat{x}_n^i = E_{|\mathbf{y_n^i}} x_n^i$, $\bar{x}_n^i = E_{|\mathbf{m_n^i}} x_n^i$.

Macierze $V_n^i, O_n^i$ są zdefiniowane przez $V_n^i = H_n^i + B_n^{iT} S_{n+1}^i B_n^i$, $O_n^i = G_n^{iT} + B_n^{iT} S_{n+1}^i A_n^i$, zaś macierz $S_{n+1}^i$ jest obliczana z równania Riccatiego

$$S_n^i = O_n^i + A_n^{iT} S_{n+1}^i A_n^i - O_n^{iT} (V_n^i)^{-1} O_n^i \tag{4.9}$$

z warunkiem końcowym $S_{N+1}^i = 0$.

Prawo sterowania koordynatora opisane jest zależnością:

$$p_n = -W_n^{-1}\{(U_n\bar{x}_n + B_n^T \sum_{k=n+1}^{N} L_k^{n+1}\bar{e}_{k|n}) -$$
$$-I^T W_n^*[\bar{e}_{n|n} - IW_n^{-1}(U_n\bar{x}_n + B_n^T \sum_{k=n+1}^{N} L_k^{n+1}\bar{e}_{k|n})]\}, \quad (4.10)$$

gdzie $p_n = [p_n^{1T}\ p_n^{2T}...p_n^{MT}]^T$, $x_n = [x_n^{1T}\ x_n^{2T}...x_n^{MT}]^T$, $\bar{x}_n = E_{|\mathbf{m_n}} x_n$, $\bar{e}_{k|n} = E_{|\mathbf{m_n}} \sum_{i=1}^{M} a_k^i(\mathbf{y_k^i}, p_k^i)$ oraz

$$W_n = H_n + B_n^T(S_{n+1} + M_{n+1})B_n \quad (4.11)$$
$$U_n = G_n^T + B_n^T(S_{n+1} + M_{n+1})A_n \quad (4.12)$$
$$W_n^* = (IW_n^{-1}I^T)^{-1} \quad (4.13)$$

Macierze $A_n, B_n, G_n, H_n, S_{n+1}$ są macierzami blokowo-diagonalnymi, zawierającymi odpowiednio $A_n^i, B_n^i, G_n^i, H_n^i, S_n^i$, $i = 1, 2, ..., M$. Macierz $I = [\mathbf{1}, \mathbf{1}, ..., \mathbf{1}]$, gdzie $\mathbf{1}$ jest macierzą jednostkową $r \times r$ wymiarową, zaś $r$ jest wymiarem wektora sterowania $u_n^i$.

Macierze $M_{n+1}$ oraz $L_k^{n+1}$ spełniają następujące równania:

$$M_n = O_n^T V_n^{-1} O_n + A_n^T M_{n+1} A_n - U_n^T W_n^{-1} U_n + U_n^T W_n^{-1} I^T W_n^* I W_n^{-1} U_n \quad (4.14)$$

z warunkiem końcowym $M_{N+1} = 0$.

$$L_n^n = U_n^T W_n^{-1} I^T W_n^* \quad (4.15)$$
$$L_k^n = U_n^T W_n^{-1}[I^T W_n^* I W_n^{-1} - \mathbf{1}]B_n^T L_k^{n+1} + A_n^T L_k^{n+1}, \quad k > n, \quad (4.16)$$

gdzie macierze $O_n$ i $V_n$ są blokowo-diagonalne, zawierające odpowiednio macierze $O_n^i$ oraz $V_n^i$, zaś $\mathbf{1}$ jest macierzą jednostkową $Mr \times Mr$ wymiarową.

Optymalne wartości zmiennych $\bar{e}_{k|n}$, $k \geq n$, $n = 0, 1, ..., N$ można wyznaczyć z minimalizacji odpowiedniego wskaźnika jakości, którego postać jest przedstawiona w [34].

Ze wzorów (4.8) i (4.10) wynika, że wytyczne koordynatora i lokalnych decydentów zależą między innymi od ocen stanu wyznaczanych na bieżąco na podstawie dostępnej informacji. Sposób wyznaczania tych ocen zostanie przedstawiony poniżej. W rozważaniach tych założymy, że zmienne losowe $w_n^i, r_n^i$ występujące w równaniu stanu (4.1) i równaniu pomiaru (4.2) oraz stan początkowy $x_0$ są białymi szumami niezależnymi od siebie, o zerowych wartościach średnich i znanych macierzach kowariancji. Założenia te nie zmniejszają ogólności rozważań. Wyprowadzone wzory będą użyteczne w przypadku braku powyższych założeń [61].



### 4.1.4. Równania filtracji stanu do wyznaczania ocen $\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{n}^\mathbf{i}$

Z opisu modelu $i$–tego podsystemu oraz faktu, że lokalny decydent zna w chwili $n$ wektor informacji $\mathbf{y_n^i}$ oraz ciąg poprzednich swoich decyzji $u_0^i, u_1^i, .., u_{n-1}^i$ wynika, że do wyznaczenia oceny $\hat{x}_n^i = E_{|\mathbf{y_n^i}} x_n^i$ można stosować równania klasycznego filtru Kalmana [61]. Wyrażają się one następującymi wzorami:

$$\hat{x}_{n+1}^i = A_n^i\hat{x}_n^i + B_n^i u_n^i + K_{n+1}^i[y_{n+1}^i - C_{n+1}^i(A_n^i\hat{x}_n^i + B_n^i u_n^i)] \quad (4.17)$$
$$K_n^i = P_{n|n-1}^i C_n^{iT}(C_n^i P_{n|n-1}^i C_n^{iT} + R_n^i)^{-1} \quad (4.18)$$
$$P_{n|n-1}^i = A_{n-1}^i P_{n-1}^i A_{n-1}^{iT} + W_{n-1}^i \quad (4.19)$$
$$P_n^i = (\mathbf{1} - K_n^i C_n^i)P_{n|n-1}^i, \quad (4.20)$$

gdzie $P_{n|n-1}^i = E[(x_n^i - \hat{x}_{n|n-1}^i)(x_n^i - \hat{x}_{n|n-1}^i)^T]$, $\hat{x}_{n|n-1}^i = E_{|\mathbf{y_{n-1}^i}} x_n^i$, $P_n^i = E[(x_n^i - \hat{x}_n^i)(x_n^i - \hat{x}_n^i)^T]$, zaś $\mathbf{1}$ jest macierzą jednostkową.

Za warunek początkowy dla równania (4.17) należy przyjąć $\hat{x}_0^i = K_0^i y_0^i$, natomiast warunek początkowy dla zależności (4.18) i (4.20) określony jest jako $P_{0|-1}^i = X_0^i$.

### 4.1.5. Równania filtracji stanu do wyznaczania ocen $\bar{\mathbf{x}}_\mathbf{n}^\mathbf{i}$

Z poprzednich rozważań wynika, że sterowanie $u_n^i$, będące dla $i$–tego lokalnego decydenta zmienną decyzyjną, jest dla koordynatora zmienną losową. Wstawiając (4.8) do (4.1) otrzymamy:

$$x_{n+1}^i = A_n^i x_n^i + B_n^i p_n^i + [G_n^i(\hat{x}_n^i - \bar{x}_n^i) + w_n^i], \quad (4.21)$$

gdzie $G_n^i = -B_n^i(V_n^i)^{-1}O_n^i$.

Zmienną decyzyjną dla koordynatora jest wielkość $p_n^i$, natomiast wyrażenie ujęte w [.] w (4.21) jest dla niego zakłóceniem. Naszym zadaniem jest wyznaczenie oceny $\bar{x}_n^i = E_{|\mathbf{m_n^i}} x_n^i$.

Postępując podobnie jak w [61] możemy, dla modelu opisanego równaniami (4.21) i (4.4), zapisać równanie filtru Kalmana w postaci:

$$\bar{x}_{n+1}^i = \bar{x}_{n+1|n}^i + \bar{K}_{n+1}^i(m_{n+1}^i - \bar{m}_{n+1|n}^i), \quad (4.22)$$

gdzie:

$$\bar{K}_{n+1}^i = \bar{P}_{n+1|n}^i F_{n+1}^{iT}(F_{n+1}^i \bar{P}_{n+1|n}^i F_{n+1}^{iT} + E_n^i)^{-1} \quad (4.23)$$
$$\bar{P}_{n+1|n}^i = E(\tilde{x}_{n+1|n}^i \tilde{x}_{n+1|n}^{iT}) \quad (4.24)$$
$$\tilde{x}_{n+1|n}^i = x_{n+1}^i - \bar{x}_{n+1|n}^i \quad (4.25)$$
$$\bar{x}_{n+1|n}^i = E_{|\mathbf{m_n^i}} x_{n+1}^i \quad (4.26)$$
$$\bar{m}_{n+1|n}^i = E_{|\mathbf{m_n}} m_{n+1}^i \quad (4.27)$$
$$E_n^i = E(e_n^i e_n^{iT}) \quad (4.28)$$

Zależność (4.22) można też zapisać w postaci:

$$\bar{x}^i_{n+1} = A^i_n \bar{x}^i_n + B^i_n p^i_n + \bar{K}^i_{n+1}[m^i_{n+1} - F^i_{n+1}(A^i_n \bar{x}^i_n + B^i_n p^i_n)] \tag{4.29}$$

Do wyznaczenia wzmocnienia filtru $\bar{K}^i_{n+1}$ należy więc określić postać macierzy $\bar{P}^i_{n+1|n}$.

#### 4.1.5.1. Wyznaczenie macierzy $\bar{P}^i_{n+1|n}$

Macierz kowariancji $\bar{P}^i_{n+1|n}$ zdefiniowana jest przez (4.24). Odejmując stronami równania (4.21) i $\bar{x}^i_{n+1|n} = A^i_n \bar{x}^i_n + B^i_n p^i_n$ otrzymamy:

$$\tilde{x}^i_{n+1|n} = A^i_n(x^i_n - \bar{x}^i_n) + G^i_n(\hat{x}^i_n - \bar{x}^i_n) + w^i_n \tag{4.30}$$

Zatem

$$\begin{aligned}\bar{P}^i_{n+1|n} &= E(\tilde{x}^i_{n+1|n}\tilde{x}^{iT}_{n+1|n}) = \\ &= E[A^i_n(x^i_n - \bar{x}^i_n)(x^i_n - \bar{x}^i_n)^T A^{iT}_n + G^i_n(\hat{x}^i_n - \bar{x}^i_n)(\hat{x}^i_n - \bar{x}^i_n)^T G^{iT}_n + w^i_n w^{iT}_n + \\ &+2A^i_n(x^i_n - \bar{x}^i_n)(\hat{x}^i_n - \bar{x}^i_n)^T G^{iT}_n + 2A^i_n(x^i_n - \bar{x}^i_n)w^{iT}_n + 2G^i_n(\hat{x}^i_n - \bar{x}^i_n)w^{iT}_n]\end{aligned} \tag{4.31}$$

Wartości średnie dwu ostatnich składników w (4.31) są równe zero ze względu na przyjęte założenie o niezależności zmiennych losowych $w^i_n, r^i_n$ i $x^i_0$. Ponieważ zachodzą następujące związki:

$$E(x^i_n \hat{x}^{iT}_n) = E(\hat{x}^i_n \hat{x}^{iT}_n), \quad E(x^i_n \bar{x}^{iT}_n) = E(\bar{x}^i_n \bar{x}^{iT}_n), \quad E(\bar{x}^i_n \hat{x}^{iT}_n) = E(\bar{x}^i_n \bar{x}^{iT}_n), \tag{4.32}$$

więc wartość średnia czwartego składnika w (4.31) wynosi:

$$E[2A^i_n(x^i_n - \bar{x}^i_n)(\hat{x}^i_n - \bar{x}^i_n)^T G^{iT}_n] = E[2A^i_n(\hat{x}^i_n - \bar{x}^i_n)(\hat{x}^i_n - \bar{x}^i_n)^T G^{iT}_n] \tag{4.33}$$

Ostatecznie więc postać macierzy $\bar{P}^i_{n+1|n}$ jest następująca:

$$\bar{P}^i_{n+1|n} = A^i_n \bar{P}^i_n A^{iT}_n + W^i_n + (G^i_n + 2A^i_n)\bar{P}^{i*}_n G^{iT}_n, \tag{4.34}$$

gdzie:

$$\bar{P}^i_n = E[(x^i_n - \bar{x}^i_n)(x^i_n - \bar{x}^i_n)^T] \tag{4.35}$$

$$\bar{P}^{i*}_n = E[(\hat{x}^i_n - \bar{x}^i_n)(\hat{x}^i_n - \bar{x}^i_n)^T] \tag{4.36}$$

$$W^i_n = E(w^i_n w^{iT}_n) \tag{4.37}$$

Zauważmy, że postać macierzy $\bar{P}^i_{n+1|n}$ różni się od $P^i_{n+1|n}$, jaka występuje w klasycznym problemie filtracji (wzór 4.19). Wyrazem różniącym obydwie postaci jest ostatni składnik występujący w (4.34). W (4.34) pojawiają się macierze $\bar{P}^i_n$ i $\bar{P}^{i*}_n$, które należy wyznaczyć w zagadnieniu filtracji stanu.



#### 4.1.5.2. Wyznaczenie macierzy $\bar{P}^i_n$

Macierz kowariancji $\bar{P}^i_n$ jest zdefiniowana przez (4.35). Odejmując stronami równania (4.21) i (4.22) zapisane dla chwili $n$ oraz wykorzystując związki (4.4), (4.26), (4.27) otrzymamy:

$$x^i_n - \bar{x}^i_n = \tilde{x}^i_{n|n-1} - \bar{K}^i_n(F^i_n \tilde{x}^i_{n|n-1} + e^i_n), \tag{4.38}$$

gdzie $\tilde{x}^i_{n|n-1} = x^i_n - \bar{x}^i_{n|n-1}$.

A zatem

$$\begin{aligned}\bar{P}^i_n = E[&\tilde{x}^i_{n|n-1}\tilde{x}^{iT}_{n|n-1} + \bar{K}^i_n F^i_n(\tilde{x}^i_{n|n-1}\tilde{x}^{iT}_{n|n-1})F^{iT}_n \bar{K}^{iT}_n + \bar{K}^i_n e^i_n e^{iT}_n \bar{K}^{iT}_n - \\ &-2\tilde{x}^i_{n|n-1}\tilde{x}^{iT}_{n|n-1}F^{iT}_n \bar{K}^{iT}_n - 2\tilde{x}^i_{n|n-1}e^{iT}_n \bar{K}^{iT}_n + 2\bar{K}^i_n F^i_n \tilde{x}^i_{n|n-1}e^{iT}_n \bar{K}^{iT}_n]\end{aligned} \tag{4.39}$$

Wartości średnie dwu ostatnich składników w (4.39) są równe zero ze względu na przyjęte założenie o niezależności zmiennych losowych $w^i_n, r^i_n$ oraz $x^i_0$. Zależność (4.39) przyjmie więc postać:

$$\bar{P}^i_n = \bar{P}^i_{n|n-1} - 2\bar{P}^i_{n|n-1}F^{iT}_n \bar{K}^{iT}_n + \bar{K}^i_n(F^i_n \bar{P}^i_{n|n-1}F^{iT}_n + E^i_n)\bar{K}^{iT}_n \tag{4.40}$$

Mnożąc prawostronnie obydwie strony równania (4.23) zapisanego dla chwili $n$ przez $(F^i_n \bar{P}^i_{n|n-1}F^{iT}_n + E^i_n)$, a następnie wykorzystując tak otrzymany związek w (4.40) możemy ten ostatni zapisać w prostszej formie:

$$\bar{P}^i_n = (1 - \bar{K}^i_n F^i_n)\bar{P}^i_{n|n-1} \tag{4.41}$$

Zauważmy, że postać macierzy $\bar{P}^i_n$ jest taka sama jak postać macierzy $P^i_n$ (wzór 4.20), która występuje w klasycznym problemie filtracji stanu.

#### 4.1.5.3. Wyznaczenie macierzy $\bar{P}^{i*}_n$

Macierz $\bar{P}^{i*}_n$ jest zdefiniowana przez (4.36). Zależność tę można zapisać jako:

$$\begin{aligned}\bar{P}^{i*}_n &= E\{[(x^i_n - \bar{x}^i_n - (x^i_n - \hat{x}^i_n)][(x^i_n - \bar{x}^i_n - (x^i_n - \hat{x}^i_n)]^T\} = \\ &= E[\tilde{x}^i_n \tilde{x}^{iT}_n + \hat{x}^i_n \hat{x}^{iT}_n - 2(x^i_n - \bar{x}^i_n)(x^i_n - \hat{x}^i_n)^T],\end{aligned} \tag{4.42}$$

gdzie $\tilde{x}^i_n = x^i_n - E_{|\mathbf{m}^i_n} x^i_n$, $\hat{x}^i_n = x^i_n - E_{|\mathbf{y}^i_n} x^i_n$.

Wartość średnią ostatniego składnika występującego w (4.42) możemy przekształcić do następującej postaci:

$$2E[(x^i_n - \bar{x}^i_n)(x^i_n - \bar{x}^i_n)^T] = 2E(x^i_n x^{iT}_n - x^i_n \hat{x}^{iT}_n - \bar{x}^i_n x^{iT}_n + \bar{x}^i_n \hat{x}^{iT}_n) \tag{4.43}$$

Ponieważ zachodzą związki (4.32), więc $2E(\tilde{x}_n^i \tilde{x}_n^{iT}) = 2E(\hat{x}_n^i \hat{x}_n^{iT})$.

Ostatecznie więc postać macierzy $\bar{P}_n^{i*}$ jest następująca:

$$\bar{P}_n^{i*} = \bar{P}_n^i - P_n^i, \tag{4.44}$$

gdzie $\bar{P}_n^i = E[(x_n^i - \bar{x}_n^i)(x_n^i - \bar{x}_n^i)^T]$, $P_n^i = E[(x_n^i - \hat{x}_n^i)(x_n^i - \hat{x}_n^i)^T]$. Zauważmy, że do wyznaczenia macierzy $\bar{P}_n^{i*}$ konieczna jest znajomość macierzy kowariancji $P_n^i$, która jest określana w klasycznym problemie filtracji stanu.

Za warunki początkowe dla równań (4.22) i (4.41) należy przyjąć:

$$\bar{P}_{0|-1}^i = E[(x_0^i - x_{0|-1}^i)(x_0^i - x_{0|-1}^i)^T] = E(x_0^i x_0^{iT}) = X_0^i \tag{4.45}$$

oraz

$$\bar{x}_0^i = \bar{x}_{0|-1}^i + \bar{K}_0^i(m_0^i - F_0^i \bar{x}_{0|-1}^i) = \bar{K}_0^i m_0^i \tag{4.46}$$

W powyższych zależnościach przyjęto, że $\bar{x}_{0|-1}^i = Ex_0^i = 0$.

### 4.1.6. Własności procesu $\tilde{x}_n^i$

Przypomnijmy, że proces $\tilde{x}_n^i$ zdefiniowany jest jako $\tilde{x}_n^i = x_n^i - \bar{x}_n^i$. Odejmując więc od obu stron tożsamości $x_n^i = x_n^i$ równanie filtracji (4.22) zapisane dla chwili $n$ otrzymamy:

$$x_n^i - \bar{x}_n^i = x_n^i - \bar{x}_{n|n-1}^i - \bar{K}_n^i(m_n^i - \bar{m}_{n|n-1}^i) \tag{4.47}$$

Powyższą zależność można też przedstawić w postaci:

$$\tilde{x}_n^i = (1 - \bar{K}_n^i F_n^i)\tilde{x}_{n|n-1}^i - \bar{K}_n^i e_n^i \tag{4.48}$$

Po odjęciu stronami od równania stanu (4.21) zapisanego dla chwili $n$ równania $\bar{x}_{n|n-1}^i = A_{n-1}^i \bar{x}_{n-1}^i + B_{n-1}^i p_{n-1}^i$, a następnie wstawieniu tak otrzymanego wyniku do (4.48) otrzymamy:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_n^i = {} & (1 - \bar{K}_n^i F_n^i)A_{n-1}^i \tilde{x}_{n-1}^i + (1 - \bar{K}_n^i F_n^i)B_{n-1}^i G_{n-1}^i(\hat{x}_{n-1}^i - \bar{x}_{n-1}^i) + \\ & +(1 - \bar{K}_n^i F_n^i)w_{n-1}^i - \bar{K}_n^i e_n^i\end{aligned} \tag{4.49}$$

Ostatecznie, po wykorzystaniu oczywistej zależności $\tilde{x}_n^i - \bar{x}_n^i = \tilde{x}_n^i - \hat{x}_n^i$, gdzie $\tilde{x}_n^i = (x_n^i - \bar{x}_n^i)$, $\hat{x}_n^i = (x_n^i - \hat{x}_n^i)$, proces losowy $\tilde{x}_n^i$, $n = 0, 1, \ldots$ będzie opisany równaniem:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_n^i = {} & (1 - \bar{K}_n^i F_n^i)(A_{n-1}^i + B_{n-1}^i G_{n-1}^i)\tilde{x}_{n-1}^i - (1 - \bar{K}_n^i F_n^i)B_{n-1}^i G_{n-1}^i \hat{x}_{n-1}^i + \\ & +(1 - \bar{K}_n^i F_n^i)w_n^i - \bar{K}_n^i e_n^i\end{aligned} \tag{4.50}$$



Wiadomo [61], że proces $\tilde{x}_n^i$, $n = 0, 1, ..$ dla przyjętego modelu jest procesem Gaussa-Markowa o zerowej wartości średniej i macierzy kowariancji danej wzorem (4.20). Tak więc przy przyjętym założeniu odnośnie do zmiennych $w_n^i$ i $r_n^i$ proces $\tilde{x}_n^i$ jest również procesem Gaussa-Markowa o zerowej wartości średniej i macierzy kowariancji $\bar{P}_n^i$ określonej przez (4.41).

### 4.1.7. Przykład

Jedną z własności rozwiązania nieklasycznego problemu filtracji jest ustalanie się macierzy w nim występujących w przypadku, gdy zagadnienie jest stacjonarne. Dla ilustracji tej własności rozwiązano przykład numeryczny.

Przyjęto, że system opisany jest równaniem stanu (4.21) i równaniami wyjścia (4.2) oraz (4.4) przy następujących danych:

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0.5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad X_0 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Za $G_n^i$ występujące w (4.21) oraz $D_n^i$ występujące w (4.4) przyjmowano różne dane. Składowe macierzy kowariancji $P_n^i$ i $K_n^i$, występujące w klasycznym problemie filtracji (wzory (4.20) i (4.18)) oraz $\bar{P}_n^i$ i $\bar{K}_n^i$ występujące w nieklasycznym zagadnieniu filtracji (wzory (4.23) i (4.41)) ustalały się po kilku krokach.

Przeanalizowano wyniki filtracji w przypadku, gdy macierz $D_n^i$ jest nieosobliwa i stacjonarna. Z analizy rezultatów wynika, że ustalone wartości składowych macierzy $P_n^i$ oraz $\bar{P}_n^i$ są identyczne niezależnie od $G_n^i$.

Jeśli np. za $D_n^i$ przyjąć $D_n^i = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, to ustalone macierze kowariancji $P_n^i$ oraz $\bar{P}_n^i$ mają postać:

$$P_n^i = \bar{P}_n^i = \begin{bmatrix} 1.3920 & -1.0411 \\ -1.0411 & 0.9726 \end{bmatrix}$$

Z punktu widzenia przesyłu informacji przypadek ten jest mało interesujący, gdyż wymiar wektora $m_n^i$ przekazywanego do koordynatora jest taki sam jak wymiar wektora $y_n^i$. Istotne zaś jest przekazywanie przetworzonej, zmniejszonej ilości informacji, co wiąże się ze spełnieniem związku $\dim m_n^i < \dim y_n^i$.

Jeśli za $D_n^i$ przyjąć np. $D_n^i = [2 \;\; 4]$ lub $D_n^i = [2\alpha \;\; 4\alpha]$, to $D_n^i C_n^i$ wyniesie odpowiednio $D_n^i C_n^i = [20 \;\; 21]$ lub $D_n^i C_n^i = \alpha[20 \;\; 21]$. W tym przypadku dla zadanej macierzy $G_n^i$ otrzymano identyczne wartości składowych macierzy $\bar{P}_n^i$ w stanie ustalonym. Na przykład dla powyższych danych i dla $G_n^i = [5 \;\; 5]$ wartości te wynoszą:

$$\bar{P}_n^i = \begin{bmatrix} 4.6242 & -4.3383 \\ -4.3383 & 4.2683 \end{bmatrix}$$

We wszystkich przypadkach, w których wymiar wektora $m_n^i$ jest mniejszy od wymiaru wektora $y_n^i$, różnica macierzy $\bar{P}_n^i - P_n^i$ jest macierzą dodatnio określoną.

Badania numeryczne pokazują, że wyprowadzone niekonwencjonalne równania filtracji stanu mają takie same własności jak równania klasycznego filtru Kalmana. Gdy macierz przekształcenia $D_n^i$ jest nieosobliwa, to wyniki filtracji w obydwu przypadkach są identyczne. Macierze występujące w równaniach filtracji mogą być określone przed bieżącą pracą systemu, w odróżnieniu od oceny stanu, która zależy od napływających pomiarów. Do wyznaczania tych macierzy niezbędna jest znajomość macierzy kowariancji $P_n^i$, występującej w klasycznym problemie filtracji.

## 4.2. Algorytmy sterowania dwupoziomowego przy zróżnicowanej częstotliwości podejmowania decyzji

### 4.2.1. Model systemu

Rozważmy duży system składający się z $M$ dynamicznych podsystemów opisanych równaniani stanu

$$x_{n+1}^i = A_n^i x_n^i + B_n^i u_n^i + w_n^i, \quad i = 1, 2, ..., M \tag{4.51}$$

oraz równaniami wyjścia

$$y_n^i = C_n^i x_n^i + r_n^i, \quad i = 1, 2, ..., M, \tag{4.52}$$

gdzie $x_n^i, u_n^i, w_n^i$ oraz $r_n^i$ są odpowiednio wektorami stanu, sterowania, zakłócenia stanu i zakłócenia pomiaru o odpowiednich wymiarach. Macierze $A_n^i, B_n^i$ oraz $C_n^i$ są znane; $n \in \{0, 1, ...NL-1\}$ jest czasem dyskretnym, $NL-1$ jest czasem końcowym. Znaczenie wielkości $L$ oraz $N$ zostanie wyjaśnione później.

Zakładamy, że zmienne losowe $w_n^i, r_n^i$ są białymi szumami gaussowskimi, niezależnymi od $w_n^j, r_n^j$ dla $i \neq j, \quad i, j = 1, 2, ..., M$ i od $x_k^l$ dla $k \leq n, \quad l = 1, 2, ..., M$, zaś stan początkowy $x_0^i$ jest niezależny od $x_0^j$ dla $i \neq j$. Dodatkowo zmienne losowe mają zerowe wartości średnie i znane macierze kowariancji. Założenie o zerowych wartościach średnich upraszcza obliczenia, a wyprowadzone wzory są użyteczne w przypadku niezerowych wartości średnich.

Wskaźnik jakości, który należy minimalizować, opisany jest zależnością:

$$\bar{I} = \sum_{n=0}^{NL-1} \sum_{i=1}^{M} (x_n^{iT} Q_n^i x_n^i + 2 x_n^i G_n^i u_n^i + u_n^{iT} H_n^i u_n^i), \tag{4.53}$$

gdzie macierze $\begin{bmatrix} Q_n^i & G_n^i \\ G_n^{iT} & H_n^i \end{bmatrix}$ są symetryczne, dodatnio półokreślone, zaś macierze $H_n^i$ są dodatnio określone.



### 4.2.2. Struktura układu sterowania i dostępna informacja

Niech sterowanie realizowane będzie w strukturze dwupoziomowej. Na poziomie niższym lokalni decydenci określają ostateczne decyzje $u_n^i, \quad i = 1, 2, ..., M$, z częstotliwością zdefiniowaną przez jednostkę czasu dyskretnego $n = 0, 1, ..., NL-1$. Natomiast na poziomie wyższym koordynator wyznacza i przesyła lokalnym decydentom wytyczne $p_{k.}^i, \quad i = 1, 2, ..., M$, z mniejszą częstotliwością wynikającą z jednostki czasu dyskretnego przyjętego na tym poziomie. Za czas dyskretny obowiązujący na poziomie wyższym przyjmuje się część całkowitą ułamka $\frac{n}{L}$, tzn. $k. = int[\frac{n}{L}]$., gdzie $L$ jest stosunkiem częstotliwości, z jakimi są podejmowane decyzje przez koordynatora i lokalnych decydentów. W dalszej części rozważań dyskretne czasy na obu poziomach będą oznaczane odpowiednio przez $k. = 0., 1., ..., (N-1)$. oraz $n = 0, 1, ..., NL-1$, jak to zostało pokazane na rys. 8 w rozdziale 3.

Prawa sterowania zależą od dostępnej informacji pomiarowej i struktury układu sterowania.

Informacja pomiarowa $i-$tego lokalnego decydenta w chwili $n$ określona jest przez wektor $\mathbf{y_n^i} = [y_0^{iT} ..... y_n^{iT}]^T$, gdzie $y_n^i$ wynika z (4.52). Decydent niższego poziomu otrzymuje również od koordynatora wartości zmiennych koordynujących $p_{k.}^i$ w chwilach $k. = 0., 1., ..., (N-1)$..

Informacja pomiarowa koordynatora w chwili $k.$ określona jest przez wektor $\mathbf{m_{k.}} = [\mathbf{m_{k.}^{1T}}, ...., \mathbf{m_{k.}^{MT}}, \mathbf{v_{k.}^T}]^T$, gdzie $\mathbf{m_{k.}^i} = [m_{0.}^{iT}, ...., m_{k.}^{iT}]^T$, zaś $\mathbf{v_{k.}} = [v_{0.}^T, ..., v_{k.}^T]^T$. Wielkość $m_{k.}^i$ jest informacją $y_{kL}^i$ przetworzoną przez $i-$tego lokalnego decydenta do postaci:

$$m_{k.}^i = m_{kL}^i = D_{kL}^i y_{kL}^i = F_{kL}^i x_{kL}^i + e_{kL}^i, \tag{4.54}$$

gdzie $F_{kL}^i = D_{kL}^i C_{kL}^i$, zaś $e_{kL}^i = D_{kL}^i r_{kL}^i$. Wielkość $v_{k.}$ reprezentuje dodatkowe informacje, które mogą być wykorzystane przez koordynatora przy podejmowaniu decyzji.

Przyjmujemy, że decydenci znają również swoje poprzednie decyzje potrzebne do wyznaczania ocen stanu niezbędnych przy realizacji sterowania.

Niech $s_{kL}^i$ oznacza ilość zasobów pobraną przez $i-$ty lokalny podsystem w okresie $kL \leq n < (k+1)L$, tzn.:

$$s_{kL}^i = \sum_{n=kL}^{(k+1)L-1} u_n^i \tag{4.55}$$

Dodatkowo niech $p_{k.}^i$ oznacza wstępny przydział zasobów przyznanych przez koordynatora $i-$temu podsystemowi do wykorzystania w przedziale czasu $kL \leq n < (k+1)L$. Przyjmujemy, że zmienna ta stanowi ocenę wielkości $s_{kL}^i$ wyznaczoną na poziomie wyższym na podstawie informacji $\mathbf{m_{k.}}$, tzn.:

$$p_{k.}^i = E_{|\mathbf{m_{k.}}} s_{kL}^i \tag{4.56}$$

Jest to rodzaj ograniczenia elastycznego wprowadzonego w poprzednich rozdziałach, które dopuszcza elastyczność w podejmowaniu decyzji na poziomie niższym.

Jeśli oznaczyć przez $\bar{e}_{k.|k.}$ sumę wytycznych koordynatora w chwili $k.$, to słuszna jest następująca zależność:

$$\sum_{i=1}^{M} p^i_{k.} = \bar{e}_{k.|k.} \tag{4.57}$$

Powyższe równanie można też zapisać w postaci:

$$\mathbf{I}p_{k.} = \bar{e}_{k.|k.}, \tag{4.58}$$

gdzie $p_{k.} = [p^{1T}_{k.}....p^{MT}_{k.}]^T$, $\mathbf{I} = [\mathbf{1}....\mathbf{1}]$, zaś 1 jest macierzą jednostkową o wymiarze $dimu^i_n \times dimu^i_n$.

Równanie to nazywać będziemy równaniem agregacji, zaś zmienną $\bar{e}_{k.|k.}$ zmienną zagregowaną.

Niech $s^i_n$, $kL \le n < (k+1)L$ oznacza ilość zasobów, jaka została do zrealizowania przez $i-$ty podsystem od chwili $n$ do chwili następnej interwencji koordynatora, tzn.

$$s^i_n = \sum_{l=n}^{(k+1)L-1} u^i_l, \quad n \in \{kL, kL+1, ...., (k+1)L-1\} \tag{4.59}$$

Zapisując powyższy wzór dla chwili $(n+1)$ i odejmując stronami otrzymamy:

$$s^i_{n+1} = s^i_n - u^i_n \tag{4.60}$$

dla $n = kL, kL+1, ...., (k+1)L-2$.

W ostatniej chwili rozpatrywanego przedziału czasu, tzn. dla $n = (k+1)L-1$, do zrealizowania pozostanie ilość zasobów równa:

$$u^i_{(k+1)L-1} = s^i_{(k+1)L-1} \tag{4.61}$$

### 4.2.3. Sformułowanie problemu

Przez dopuszczalne prawa sterowania $i-$tego lokalnego decydenta będziemy rozumieć funkcje $u^i_n = a^i_n(\mathbf{y^i_n}, s^i_n)$ oraz $s^i_{kL} = d^i_{kL}(\mathbf{y^i_{kL}}, p^i_{k.})$, z których każda odwzorowuje odpowiedni zbiór zmiennych $\mathbf{y^i_n}, s^i_n$ oraz $\mathbf{y^i_{kL}}, p^i_{k.}$ na odpowiedni zbiór decyzji $u^i_n$ i $s^i_{kL}$.

Przez dopuszczalne prawa sterowania koordynatora rozumie się funkcje $p^i_{k.} = b^i_{k.}(\mathbf{m_{k.}}, \mathbf{e_{k.}})$, które odwzorowują odpowiedni zbiór zmiennych $\mathbf{m_{k.}}, \mathbf{e_{k.}}$ na odpowiedni zbiór decyzji $p^i_{k.}$, gdzie $\mathbf{e_{k.}} = [\bar{e}^T_{k.|k.}\ \bar{e}^T_{(k+1).|k.}.....\bar{e}^T_{(N-1).|k.}]^T$, zaś $\bar{e}_{j.|k.} = E_{|\mathbf{m_k}} \sum_{i=1}^{M} s^i_{jL}$, $j > k$.

Dodatkowo zakładamy, że funkcje te spełniają ograniczenia (4.55), (4.56) oraz (4.58).

Ze względu na przyjętą strukturę informacyjną i układową wskaźnik jakości (4.53) nie może być minimalizowany. Wprowadza się więc wtórny wskaźnik jakości:

$$I = E \sum_{n=0}^{NL-1} \sum_{i=1}^{M} (x^{iT}_n Q^i_n x^i_n + 2x^i_n G^i_n u^i_n + u^{iT}_n H^i_n u^i_n)_{u^i_n = a^i_n(.)} \tag{4.62}$$



Problem polega na wyznaczeniu praw sterowania $a^i_n, d^i_{kL}$ dla lokalnego decydenta oraz $b^i_{k.}$ dla koordynatora, dla których wskaźnik jakości (4.62) przyjmuje minimalną wartość przy istniejących ograniczeniach.

Przy opisie modelu założono, że zmienne losowe mają zerowe wartości średnie. Taki problem można nazwać problemem bazowym. Jego rozwiązanie może być wykorzystane w rozwiązaniu zadania przy niezerowych wartościach średnich [16].

### 4.2.4. Synteza algorytmu sterowania metodą optymalizacji parametrycznej

Do rozwiązania problemu będzie zastosowana metoda programowania dynamicznego w wersji stochastycznej [6, 30, 31].

Oznaczmy przez $I^o(a^o, b^o, d^o)$ minimalną wartość wskaźnika jakości (4.62) tzn.:

$$I^o = \min_{b_0.} \min_{d_0} \min_{\mathbf{a_{0,L-1}}} \min_{b_1.} \min_{d_L} \min_{\mathbf{a_{L,2L-1}}} ..... \min_{b_{(N-1).}} \min_{d_{(N-1)L}} \min_{\mathbf{a_{(N-1)L,NL-1}}} I, \tag{4.63}$$

gdzie $b_{k.} = [b^{1T}_{k.}....b^{MT}_{k.}]^T$, $d_{kL} = [d^{1T}_{kL}.....d^{MT}_{kL}]^T$,
$\mathbf{a_{kL,(k+1)L-1}} = [a^{1T}_{kL}...a^{MT}_{kL}, a^{1T}_{kL+1}...a^{MT}_{kL+1}...a^{1T}_{(k+1)L-1}....a^{MT}_{(k+1)L-1}]^T$.

Wskaźnik (4.63) możemy też zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} I^o = \min_{b_0.} \min_{d_0} \min_{\mathbf{a_{0,L-1}}} \{E \sum_{n=0}^{L-1} \sum_{i=1}^{M} L^i_n(.) + \\ + \min_{b_1.} \min_{d_L} \min_{\mathbf{a_{L,2L-1}}} \{E \sum_{n=L}^{2L-1} \sum_{i=1}^{M} L^i_n(.) + ..... + \\ + \min_{b_{k.}} \min_{d_{kL}} \min_{\mathbf{a_{kL,(k+1)L-1}}} \{E \sum_{n=kL}^{(k+1)L-1} \sum_{i=1}^{M} L^i_n(.) + ..... + \\ + \min_{b_{(N-1).}} \min_{d_{(N-1)L}} \min_{\mathbf{a_{(N-1)L,NL-1}}} \{E \sum_{n=(N-1)L}^{NL-1} \sum_{i=1}^{M} L^i_n(.)\}....\}, \end{aligned} \tag{4.64}$$

gdzie $L^i_n(.) = x^{iT}_n Q^i_n x^i_n + 2x^{iT}_n G^i_n a^i_n + a^{iT}_n H^i_n a^i_n$.

Niech $S_{k.}(\mathbf{m_{k.}})$ oznacza

$$\begin{aligned} S_{k.}(\mathbf{m_{k.}}) = \min_{b_{k.}} \min_{d_{kL}} \min_{\mathbf{a_{kL,(k+1)L-1}}} E_{|\mathbf{m_k}} \{ \sum_{n=kL}^{(k+1)L-1} \sum_{i=1}^{M} L^i_n(.) + ..... + \\ + \min_{b_{(N-1).}} \min_{\mathbf{a_{(N-1)L,NL-1}}} E_{|\mathbf{m}_{(N-1).}} \{ \sum_{n=(N-1)L}^{NL-1} \sum_{i=1}^{M} L^i_n(.)\}....\} \end{aligned} \tag{4.65}$$

przy ograniczeniach (4.51), (4.55), (4.56), (4.58), (4.60), (4.61).

Przy oznaczeniu (4.65) zachodzi następująca zależność:

$$S_{k.}(\mathbf{m_{k.}}) = \min_{p_{k.}} \min_{d_{kL}} \min_{\mathbf{a_{kL,(k+1)L-1}}} E_{|\mathbf{m_k}} [ \sum_{n=kL}^{(k+1)L-1} \sum_{i=1}^{M} L^i_n(.) + S_{(k+1).}(\mathbf{m_{(k+1).}})] \tag{4.66}$$

Lokalne prawa sterowania lokalnych decydentów wynikają więc z minimalizacji w wyrażeniu

$$\bar{S}_{k.}(\mathbf{m}_{k.}, p_{k.}) = \min_{d_{kL}} \min_{\mathbf{a_{kL,(k+1)L-1}}} E_{|\mathbf{m_k}} [\sum_{n=kL}^{(k+1)L-1} \sum_{i=1}^{M} L_n^i(.) + S_{(k+1).}(\mathbf{m_{(k+1).}})] \quad (4.67)$$

dla zadanego $p_{k.}$ i przy ograniczeniach (4.51), (4.55), (4.56), (4.60), (4.61).

Natomiast optymalne prawo sterowania koordynatora można wyznaczyć z minimalizacji w (4.68)

$$S_{k.}(\mathbf{m_{k.}}) = \min_{p_{k.}} \bar{S}_{k.}(\mathbf{m}_{k.}, p_{k.}) \quad (4.68)$$

przy ograniczeniu (4.58).

Stosując metodę indukcji zupełnej załóżmy następnie, że

$$S_{(k+1).}(\mathbf{m_{(k+1).}}) = E_{|\mathbf{m}_{(k+1).}} \sum_{i=1}^{M} [x^{iT}_{(k+1)L-1} V^i_{(k+1)L} x^i_{(k+1)L} + v^i_{(k+1)L}] +$$
$$+ [\bar{x}^T_{(k+1).} M_{(k+1).} \bar{x}_{(k+1).} + 2\bar{x}^T_{(k+1).} \sum_{j.=(k+1).}^{(N-1).} L_{j.}^{(k+1).} \bar{e}_{j.|(k+1).} +$$
$$+ \sum_{l.,j.=(k+1).}^{(N-1).} \bar{e}^T_{l.|(k+1).} M_{l.,j.}^{(k+1).} \bar{e}_{j.|(k+1).} + t_{(k+1).}, \quad (4.69)$$

gdzie $\bar{x}_{(k+1).} = E_{|\mathbf{m}_{(k+1).}} x_{(k+1).}$, $x_{(k+1).} = [x^{1T}_{(k+1).} \ldots . x^{MT}_{(k+1).}]^T$, dla $(k+1). \le l. \le (N-1).$; macierze $V^i_{(k+1)L}, M_{(k+1).}, L_{j.}^{(k+1).}$ oraz $M_{l.,j.}^{(k+1).}$ są dane; skalar $v^i_{k+1)L}$ nie zależy od $u^j_n$ dla $0 \le n \le (k+1)L-1$, ani od $s^j_{lL}$ i $p^j_{l.}$ dla $0 \le l \le k$, zaś skalar $t_{(k+1).}$ nie zależy od $p^j_{l.}$ dla $0. \le l. \le k.$, $j = 1, 2, \ldots, M$.

W [16] pokazano, że prawa sterowania $u^{io}_n = a^{io}_n(\mathbf{y^i_n}, s^i_n)$ wynikają z lokalnej optymalizacji w wyrażeniu

$$\bar{S}^i_n(\mathbf{y^i_n}) = \min_{u^i_n} E_{|\mathbf{y^i_n}} [x^{iT}_n Q^i_n x^i_n + 2x^{iT}_n G^i_n u^i_n + u^{iT}_n H^i_n u^i_n + \bar{S}^i_{n+1}(\mathbf{y^i_{n+1}})] \quad (4.70)$$

przy zadanym $p^i_{k.}$ oraz $s^i_{kL}$ i przy ograniczeniach (4.51), (4.60), (4.61), gdzie

$$\bar{S}^i_{n+1}(\mathbf{y^i_{n+1}}) = E_{|\mathbf{y^i_{n+1}}} (x^{iT}_{n+1} V^i_{n+1} x^i_{n+1} + v^i_{n+1}) \quad (4.71)$$

Zapisując (4.70) i (4.71) dla chwili $(k+1)L-1$, a następnie wykorzystując (4.51), (4.61) oraz rozszerzając stan do postaci $x^{i*}_n = [x^{iT}_n \;\; s^{iT}_n]^T$ dochodzimy do klasycznego równania Bellmana.



W pracy [16] pokazano, że optymalne prawo sterowania $a^{io}_n(.)$ ma postać:

$$u^i_n = -(H^i_n + \mathbf{B^{iT}_n R^i_{n+1} B^i_n})^{-1} (\mathbf{B^{iT}_n R^i_{n+1} A^i_n} + \mathbf{G^{iT}_n}) \hat{x}^{i*}_n, \quad (4.72)$$

gdzie $\hat{x}^{i*}_n = E_{|\mathbf{y^i_n}} x^{i*}_n$, zaś

$$\mathbf{A^i_n} = \begin{bmatrix} A^i_n & 0_1 \\ 0_1^T & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B^i_n} = \begin{bmatrix} B^i_n \\ -1 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{Q^i_n} = \begin{bmatrix} Q^i_n & 0_1 \\ 0_1^T & 0_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G^i_n} = \begin{bmatrix} G^i_n \\ 0_2 \end{bmatrix}, \quad (4.73)$$

gdzie $0_1$ i $0_2$ są macierzami zerowymi o odpowiednich wymiarach.

Macierz $\mathbf{R^i_n}$ spełnia równanie Riccatiego

$$\mathbf{R^i_n} = \mathbf{Q^i_n} + \mathbf{A^{iT}_n R^i_{n+1} A^i_n} -$$
$$-(\mathbf{A^{iT}_n R^i_{n+1} B^i_n} + \mathbf{G^i_n})(H^i_n + \mathbf{B^{iT}_n R^i_{n+1} B^i_n})^{-1} (\mathbf{B^{iT}_n R^i_{n+1} A^i_n} + \mathbf{G^{iT}_n}) \quad (4.74)$$

z warunkiem końcowym $\mathbf{R^i_{(k+1)L-1}} = \begin{bmatrix} Q^i_n + A^{iT}_n V^i_{n+1} A^i_n & G^i_n + A^{iT}_n V^i_{n+1} A^i_n \\ G^{iT}_n + A^{iT}_n V^i_{n+1} A^i_n & H^i_n + B^{iT}_n V^i_{n+1} B^i_n \end{bmatrix}$.

Prawa sterowania $d^i_{kL}(\mathbf{y^i_{kL}}, p^i_{k.})$ wynikają z minimalizacji (4.67) przy ograniczeniu (4.56). Wprowadzając mnożnik Lagrange'a i postępując podobnie jak w rozdziale pierwszym otrzymamy po przekształceniach:

$$s^i_{kL} = p^i_{k.} - (\mathbf{R^{22i}_{kL}})^{-1} (\mathbf{R^{12i}_{kL}})^T (\hat{x}^i_{kL} - \bar{x}^i_{k.}) \quad (4.75)$$

gdzie macierze $\mathbf{R^{11i}_{kL}}$ oraz $\mathbf{R^{12i}_{kL}}$ są podmacierzami macierzy $\mathbf{R^i_{kL}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R^{11i}_{kL}} & \mathbf{R^{12i}_{kL}} \\ (\mathbf{R^{21i}_{kL}})^T & \mathbf{R^{22i}_{kL}} \end{bmatrix}$ o odpowiednich wymiarach.

Macierz $\mathbf{R^i_{kL}}$, która stanowi warunek końcowy do równania Riccatiego (4.74), zależy między innymi od macierzy $V^i_{kL}$ opisanej zależnością $V^i_{kL} = \mathbf{R^{11i}_{kL}} - \mathbf{R^{12i}_{kL}} (\mathbf{R^{22i}_{kL}})^{-1} (\mathbf{R^{12i}_{kL}})^T$.

Prawa sterowania koordynatora wynikają z minimalizacji (4.68) przy ograniczeniu (4.58). Obliczenia są uciążliwe i nie będą tutaj przytaczane. Okazuje się, że postać prawa sterowania koordynatora jest identyczna z (4.10). Dokładna synteza przeprowadzona jest w [16], łącznie z równaniami filtracji, służącymi do wyznaczania ocen stanu niezbędnych do realizacji opracowanego algorytmu.

### 4.2.5. Synteza algorytmu sterowania metodą cen [42, 45]

Realizacja opracowanego algorytmu sterowania wymaga przesyłania przez koordynatora każdemu podsystemowi wytycznej $p^i_{k.}, k. = 0., 1., \ldots, (N-1).$. Obecnie przedstawiona zostanie zmodyfikowana wersja zadania sformułowanego w punkcie trzecim niniejszego

rozdziału. Rozpatrzymy mianowicie problem rozdziału zasobów w systemie składającym się z $M$ podsystemów opisanych równaniami stanu (4.51) i wyjścia (4.52). Przyjmujemy przy tym, że zmienne losowe $w_n^i, r_n^i$ występujące w (4.51) i (4.52) są białymi szumami o parametrach $Ew_n^i = \bar{w}_n^i$, $Er_n^i = \bar{r}_n^i$, $E(w_n^i - \bar{w}_n^i)(w_n^i - \bar{w}_n^i)^T = W_n^i$, $E(r_n^i - \bar{r}_n^i)(r_n^i - \bar{r}_n^i)^T = R_n^i$, niezależnymi od $w_n^j, r_n^j$, $i \neq j$ oraz od $x_0^j$, $i,j = 1,2,...,M$, o parametrach $Ex_0^i = \bar{x}_0^i$ i $E(x_0^i - \bar{x}_0^i)(x_0^i - \bar{x}_0^i)^T = X_0^i$.

Wskaźnik jakości, który ma być minimalizowany, ma postać:

$$\bar{I} = \sum_{n=0}^{NL-1} \sum_{i=1}^{M} (x_{n+1}^{iT} Q_{n+1}^i x_{n+1}^i + u_n^i H_n^i u_n^i) \tag{4.76}$$

Jak widać, jest to nieco inny zapis wskaźnika jakości (4.53), uwzględniający koszty stanu końcowego i nie uwzględniający wyrazu mieszanego $2x_n^{iT} G_n^i u_n^i$. Tym niemniej uzyskane wyniki mogą być wykorzystane przy minimalizacji wskaźnika z pełną formą kwadratową, przy założeniu dokładnego pomiaru stanu, co zostanie pokazane w dalszej części rozważań.

Zakładamy, że sterowanie realizowane jest w dwupoziomowej strukturze z koordynatorem na poziomie wyższym i lokalnymi decydentami na poziomie niższym, z różnymi częstotliwościami podejmowania decyzji na obu poziomach.

Niech $\mathbf{y_n^i} = [y_0^{iT} ... y_n^{iT}]^T$ dla $kL \leq n \leq (k+1)L - 1$ wraz ze zmienną koordynującą $\lambda_{k.}$, otrzymaną w chwili $kL$ od koordynatora, stanowią informację bieżącą $i-$tego lokalnego decydenta.

Niech

$$m_{k.}^i = m_{kL}^i = F_{kL}^i(y_{(k-1)L}^i, ..., y_{kL-1}^i) \tag{4.77}$$

jest zagregowanym wektorem informacji przetworzonej przez $i-$tego lokalnego decydenta i przesłanej koordynatorowi w chwili $kL$. Przykładowo może zachodzić, że $m_{kL}^i = D_{kL}^i y_{kL}^i$ lub $m_{kL}^i = \sum_{n=(k-1)L}^{kL-1} y_n^i$.

Oznaczmy przez $\mathbf{m_{k.}^i} = [m_{0.}^{iT} ... m_{k.}^{iT}]^T$ wektor informacji przesłanej od $i-$tego lokalnego decydenta na poziom wyższy. Informacja pomiarowa $\mathbf{m_{k.}} = [\mathbf{m_{k.}^{1T}} ..... \mathbf{m_{k.}^{MT}}, \mathbf{v_{k.}^T}]^T$, gdzie $\mathbf{v_{k.}} = [v_0^T ... v_k^T]^T$, stanowi informację bieżącą koordynatora. Wielkość $v_{k.}$ reprezentuje dodatkowe informacje dostępne na poziomie wyższym i możliwe do wykorzystania przy podejmowaniu decyzji na tym poziomie.

Przez dopuszczalne prawa sterowania $i-$tego lokalnego decydenta i koordynatora będziemy rozumieć odpowiednio funkcje $u_n^i = a_n^i(\mathbf{y_n^i}, \lambda_{k.})$, $kL \leq n \leq (k+1)L - 1$ oraz $\lambda_{k.} = b_{k.}(\mathbf{m_{k.}})$, $k. = 0., 1., ..., (N-1).$, które spełniają ograniczenie elastyczne

$$E_{|\mathbf{m_{k.}}} \sum_{n=kL}^{(k+1)L-1} \sum_{i=1}^{M} a_n^i(\mathbf{y_n^i}, \lambda_{k.}) = \bar{e}_{k.|k.} \tag{4.78}$$

gdzie $\bar{e}_{k.|k.}$ oznacza wstępny przydział zasobów dokonany przez koordynatora w chwili $k.$.



Z punktu widzenia przyjętej struktury informacyjnej i układowej wskaźnik jakości (4.76) nie może być minimalizowany. Wprowadzamy zatem wtórny wskaźnik jakości, który dla $n$ z przedziału $kL \leq n \leq (k+1)L - 1$ ma postać:

$$I_n(a_{n.}^i, b_{k.}) = E \sum_{i=1}^{M} (x_{n+1}^{iT} Q_{n+1}^i x_n^i + u_n^{iT} H_n^i u_n^i)_{u_n^i = a_n^i[\mathbf{y_n^i}, b_{k.}(\mathbf{m_k})]} \tag{4.79}$$

Zadaniem syntezy jest wyznaczenie praw sterowania lokalnych decydentów $u_n^i = a_n^i(\mathbf{y_n^i}, \lambda_{k.})$, $i = 1,2,...,M$ oraz koordynatora $\lambda_{k.} = b_{k.}(\mathbf{m_k})$, $k. = 0., 1., ..., (N-1).$, dla których wskaźnik jakości

$$I = \sum_{n=0}^{NL-1} I_n(a_{n.}^i, b_{k.}), \quad k = int[\frac{n}{L}] \tag{4.80}$$

przyjmuje minimalną wartość przy ograniczeniach (4.51), (4.78).

Minimalizacja wskaźnika (4.80) będzie przeprowadzona przy następującym upraszczającym założeniu:

**Z1.** Wskaźnik cząstkowy $I_n$ w (4.80) zależy tylko od sterowania $u_n^i$ w chwili $n$, tzn., że pomijamy wpływ wcześniejszych sterowań na jednokrokowy wskaźnik $I_n$.

#### 4.2.5.1. Rozwiązanie problemu

Podstawiając (4.51) do (4.79) otrzymamy:

$$I_n = E \sum_{i=1}^{M} \{[u_n^{iT} S_n^i u_n^i + 2x_n^{iT} P_n^i u_n^i + 2w_n^{iT} Q_{n+1}^i B_n^i u_n^i]_{u_n^i = a_n^i(.)} + r_n\}, \tag{4.81}$$

gdzie

$$S_n^i = H_n^i + B_n^{iT} Q_{n+1}^i B_n^i, \quad P_n^i = A_n^{iT} Q_{n+1}^i B_n^i, \tag{4.82}$$

zaś $r_n$ nie zależy od $u_n^i$.

Oznaczając przez $2\lambda_{k.}$ mnożnik Lagrange,a i biorąc pod uwagę (4.78), (4.79) i (4.80) otrzymamy następujący problem minimalizacji

$$S_{k.}(\mathbf{m_{k.}}) = \min_{a_{n.}^i, b_{k.}} E_{|\mathbf{m_{k.}}} \{ \sum_{n=kL}^{(k+1)L-1} \sum_{i=1}^{M} (u_n^{iT} S_n^i u_n^i + 2x_n^{iT} P_n^i u_n^i + 2w_n^{iT} Q_{n+1}^i B_n^i u_n^i) +$$
$$+2\lambda_{k.} ( \sum_{n=kL}^{(k+1)L-1} \sum_{i=1}^{M} u_n^i - \bar{e}_{k.|k.})]_{u_n^i = a_n^i(.)} \tag{4.83}$$

Przy poczynionych założeniach zadanie poszukiwania prawa sterowania $a_n^i(\mathbf{y_n^i}, \lambda_{k.})$ dla $n = kL, kL+1, ...., (k+1)L - 1$ sprowadza się do minimalizacji w wyrażeniu:

$$S_n^i(\mathbf{y_n^i}, \mathbf{m_k}) = \min_{u_n^i} E_{|\mathbf{y_n^i}, \mathbf{m_k}} (u_n^{iT} S_n^i u_n^i + 2x_n^{iT} P_n^i u_n^i + 2w_n^{iT} Q_{n+1}^i B_n^i u_n^i + 2\lambda_{k.} u_n^i)) \tag{4.84}$$

Uśredniając warunkowo, następnie różniczkując względem $u_n^i$ i przyrównując otrzymane wyrażenie do zera otrzymamy:

$$u_n^i = -(S_n^i)^{-1}(P_n^i \hat{x}_n^i + B_n^{iT} Q_{n+1}^{iT} \bar{w}_n^i + \lambda_{k.}), \tag{4.85}$$

gdzie $\hat{x}_n^i = E_{|\mathbf{y}_n^i} x_n^i$. Wstawiając (4.85) do (4.78) otrzymamy:

$$-\sum_{n=kL}^{(k+1)L-1} \sum_{i=1}^{M} (S_n^i)^{-1}(P_n^i \bar{x}_n^i + B_n^{iT} Q_{n+1}^i \bar{w}_n^i + \lambda_{k.}) = \bar{e}_{k.|k.}, \quad \bar{x}_n^i = E_{|\mathbf{m}_k} x_n^i \tag{4.86}$$

oraz

$$\lambda_{k.} = -S[\sum_{n=kL}^{(k+1)L-1} \sum_{i=1}^{M} (S_n^i)^{-1}(P_n^{iT} \bar{x}_n^i + B_n^{iT} Q_{n+1}^i \bar{w}_n^i) + \bar{e}_{k.|k.}], \tag{4.87}$$

gdzie

$$S = [\sum_{n=kL}^{(k+1)L-1} \sum_{i=1}^{M} (S_n^i)^{-1}]^{-1} \tag{4.88}$$

Z (4.85) widać, że dla $kL \leq n \leq (k+1)L-1$ ta sama zmienna koordynująca $\lambda_{k.}$ jest wykorzystywana przez wszystkich lokalnych decydentów. Wielkość $\lambda_{k.}$ może być interpretowana jako cena wyznaczana przez koordynatora i przesyłana na poziom niższy.

Należy podkreślić, że wartość zmiennej $\lambda_{k.}$ zależy od oceny stanu $\bar{x}_n^i$. Należałoby więc rozwiązać niekonwencjonalny problem estymacji stanu, ponieważ $\bar{x}_n^i$ dla $kL < n$ zależy również od $\lambda_{(k-1).}$. Zadanie to ulega znacznemu uproszczeniu przy nieuwzględnianiu dynamiki podsystemów, co może być uzasadnione dla stabilnych podsystemów z dużym tłumieniem i dla dużego $L$.

#### 4.2.5.2. Algorytm sterowania przy pełnej formie kwadratowej wskaźnika jakości

Otrzymany algorytm sterowania został opracowany dla pierwotnego wskaźnika jakości, w którym nie uwzględniono wyrazu biliniowego $2x_n^{iT} G_n^i u_n^i$. Wskaźnik ten dla potrzeb sterowania może być zapisany w nieco innej postaci:

$$\bar{I}^* = \sum_{n=0}^{NL} \sum_{i=1}^{M} (x_n^i Q_n^i x_n^i + u_n^i H_n^i u_n^i) \tag{4.89}$$

Obecnie zostanie przeprowadzona modyfikacja rozwiązania dla pierwotnego wskaźnika jakości

$$\bar{I} = \sum_{n=0}^{NL} \sum_{i=1}^{M} (x_n^{iT} Q_n^i x_n^i + 2x_n^{iT} G_n^i u_n^i + u_n^{iT} H_n^i u_n^i), \tag{4.90}$$

gdzie macierz $\begin{bmatrix} Q_n^i & G_n^i \\ G_n^{iT} & H_n^i \end{bmatrix}$ jest symetryczna i dodatnio półokreślona, zaś macierz $H_n^i$ jest dodatnio określona.



Zauważmy, że forma kwadratowa występująca w (4.90) może być zapisana w postaci:

$$L_n^i = x_n^{iT} Q_n^i x_n^i + 2x_n^{iT} G_n^i u_n^i + u_n^{iT} H_n^i u_n^i =$$
$$= [u_n^i + (H_n^i)^{-1} G_n^{iT} x_n^i]^T H_n^i [u_n^i + (H_n^i)^{-1} G_n^{iT} x_n^i] + x_n^{iT} [Q_n^i - G_n^i (H_n^i)^{-1} G_n^{iT}] x_n^i \tag{4.91}$$

Niech $u_n^{*i}$ jest nowym sterowaniem zdefiniowanym przez:

$$u_n^{*i} = u_n^i + (H_n^i)^{-1} G_n^{iT} x_n^i \tag{4.92}$$

Podstawiając (4.92) do (4.91) otrzymamy:

$$L_n^i = u_n^{*iT} H_n^i u_n^{*i} + x_n^{iT} Q_n^{*i} x_n^i, \tag{4.93}$$

gdzie

$$Q_n^{*i} = Q_n^i - G_n^i (H_n^i)^{-1} G_n^{iT}$$

Podstawiając z kolei $u_n^i$ wynikające z (4.92) do równania stanu (4.51) i ograniczenia elastycznego (4.78) otrzymamy:

$$x_{n+1}^i = A_n^{*i} x_n^i + B_n^i u_n^{*i} + w_n^i, \tag{4.94}$$

gdzie

$$A_n^{*i} = A_n^i - B_n^i (H_n^i)^{-1} G_n^{iT}$$

oraz

$$E_{|\mathbf{m}_k} \sum_{n=kL}^{(k+1)L-1} \sum_{i=1}^{M} [u_n^{*i} - (H_n^i)^{-1} G_n^{iT} x_n^i] = \bar{e}_{k.|k.} \tag{4.95}$$

Zatem zmodyfikowany problem sprowadza się do minimalizacji wskaźnika

$$I^* = E \sum_{n=0}^{NL} \sum_{i=1}^{M} (x_n^{iT} Q_n^{*i} x_n^i + u_n^{*iT} H_n^i u_n^{*i}) \tag{4.96}$$

przy ograniczeniach (4.94), (4.95).

Zauważmy, że zmiana ograniczenia elastycznego (4.78) na (4.95) nie zmienia postaci rozwiązania (4.85). Natomiast zmieni się sposób wyznaczania zmiennej $\lambda_{k.}$.

Wstawiając $u_n^{*i}$ z (4.92) do ograniczenia (4.95) otrzymamy:

$$\sum_{n=kL}^{(k+1)L-1} \sum_{i=1}^{M} [-(S_n^i)^{-1}(P_n^{iT} \bar{x}_n^i + B_n^{iT} Q_{n+1}^i \bar{w}_n^i + \lambda_{k.}) - (H_n^i)^{-1} G_n^{iT} \bar{x}_n^i] = \bar{e}_{k.|k.}$$

Wówczas

$$\lambda_{k.} = -S\{\bar{e}_{k.|k.} + \sum_{n=kL}^{(k+1)L-1} \sum_{i=1}^{M} [(S_n^i)^{-1}(P_n^{iT} \bar{x}_n^i + B_n^{iT} Q_{n+1}^i \bar{w}_n^i) + (H_n^i)^{-1} G_n^{iT} \bar{x}_n^i]\} \tag{4.97}$$

gdzie S jest określone przez (4.88). Macierze $S_n^i$ i $P_n^i$ występujące w (4.97) są określone przez (4.82), w których $Q_n^i$ i $A_n^i$ należy zastąpić $Q_n^{*i}$ i $A_n^{*i}$.

Przy założeniu dokładnego pomiaru stanu można wyznaczyć sterowanie $u_n^i$ z zależności $u_n^i = u_n^{*i} - (H_n^i)^{-1} G_n^{iT} x_n^i$.

### 4.2.6. Przykład

Rozpatrzmy system opisany równaniami stanu

$$z_{n+1}^i = a(z_n^i - u_n^i) + w_{n+1}^i, \quad 0 \le a \le 1, \tag{4.98}$$

gdzie $z_n^i$, $u_n^i$ są skalarami reprezentującymi odpowiednio zapotrzebowania i przydziały zasobów $i$–temu odbiorcy, $w_n^i$ jest białym szumem niezależnym od $z_0^j$, i, j=1,2,...,M, $Ew_n^i = \bar{w}_n^i$, $E(w_n^i - \bar{w}_n^i)^2 = W_n^i$, $Ez_0^i = \bar{z}_0^i$, $E(z_0^i - \bar{z}_0^i)^2 = Z_0^i$.

Dynamika obiektu wynika z faktu, że niezaspokojone zapotrzebowania odbiorców $z_n^i - u_n^i$ w okresie $(n, n+1)$ przenoszą się na następny okres ze współczynnikiem $a$.

Niech wskaźnik jakości, który należy minimalizować, ma postać:

$$I = E \sum_{n=0}^{NL} \sum_{i=1}^{M} (u_n^i - z_n^i)^2_{u_n^i = a_n^i(\cdot)} \tag{4.99}$$

Załóżmy, że równanie pomiaru w $i$–tym podsystemie ma postać $y_n^i = z_n^i$. Przyjmijmy też, że na poziom wyższy nie jest przekazywana żadna informacja pomiarowa z poziomu niższego.

Dla rozpatrywanego przypadku mamy $x_n^i = z_n^i$, $Q_n^i = 1$, $G_n^i = -1$, $H_n^i = 1$. Wstawiając powyższe dane do (4.91)-(4.94) otrzymamy $u_n^{*i} = u_n^i - z_n^i$, $Q_n^{*i} = 0$, $A_n^{*i} = 0$, $B_n^i = -a$. Z (4.82) mamy $S_n^i = 1, P_n^i = 0$, zaś z (4.85) wynika, że $u_n^{*i} = -\lambda_{k.}$.

Zatem prawa sterowania $a_n^{io}$ mają postać:

$$u_n^i = z_n^i - \lambda_{k.} \tag{4.100}$$

Z (4.88) mamy $S = \frac{1}{ML}$, zaś z (4.97) otrzymujemy, że

$$\lambda_{k.} = \frac{1}{ML}[\sum_{n=kL}^{(k+1)L-1} \sum_{i=1}^{M} \bar{z}_n^i - \bar{e}_{k.|k.}], \quad Ez_n^i = \bar{z}_n^i \tag{4.101}$$

Wstawiając (4.100) do (4.98) i uśredniając obie strony tak otrzymanego równania stanu otrzymamy:

$$\bar{z}_{n+1}^i = a\lambda_{k.} + \bar{w}_{n+1}^i, \quad k = int(\frac{n}{L}) \tag{4.102}$$

Ostatecznie prawo sterowania koordynatora ma postać:

$$\lambda_{k.} = \frac{1}{M[L-(L-1)a]}[Ma\lambda_{(k-1).} + \sum_{n=kL}^{(k+1)L-1} \sum_{i=1}^{M} \bar{w}_n^i - \bar{e}_{k.|k.}] \tag{4.103}$$

Przy realizacji sterowania zgodnie ze (4.100) wartość wskaźnika jakości wynosi:

$$I = E \sum_{k.=0.}^{(N-1).} \sum_{i=1}^{M} \lambda_{k.}^2 = ME \sum_{k=0.}^{(N-1).} \lambda_{k.}^2 \tag{4.104}$$



Jak widać, wskaźnik jakości (4.104) zależy od zmiennych zagregowanych $\bar{e}_{k.|k.}$, $k. = 0., 1., ..., (N-1).$. Jeśli w rozważaniach uwzględnić ograniczenia na ilość zasobów w magazynie, to stosując ideę sterowania w układzie OLF z przesuwnym horyzontem $N'$. zmienne te można wyznaczyć z numerycznej minimalizacji wskaźnika cząstkowego

$$I_{k.} = \sum_{j.=k.}^{(k+N').} \lambda_{j.}^2 \tag{4.105}$$

przy ograniczeniu

$$h_{min} + \Delta u \le \bar{h}_{k.|k.} + \sum_{l.=k.}^{(k+j-1).} (\bar{d}_{l.|k.} - \bar{e}_{l.|k.}), \quad j = 1, 2, ..., N'+1$$
$$\bar{e}_{(k+j).|k.} \ge 0, \quad j = 0, 1, ..., N' \tag{4.106}$$

względem $\bar{e}_{k.|k.}$, $\bar{e}_{(k+1).|k.}, ..., \bar{e}_{(k+N').|k.}$, gdzie $\bar{h}_{k.|k.}$ oraz $\bar{d}_{l.|k.}$ są odpowiednio ocenami zasobów w chwili $k.$, oraz dopływu w okresie $[l., (l+1).]$, dokonanymi w chwili $k.$, $\Delta u$ jest pojemnością rezerwową, zaś $N'$ jest przesuwnym horyzontem.

Dla dość dużego $L$ oraz dostatecznie dużego tłumienia (dla małego $a$) możemy pominąć pierwszy składnik w nawiasie [.], występujący w (4.103). Wówczas

$$\lambda_{k.} = \frac{1}{M[L-(L-1)a]}[\sum_{n=kL}^{(k+1)L-1} \sum_{i=1}^{M} \bar{w}_n^i - \bar{e}_{k.|k.}] \tag{4.107}$$

Jako przykład numeryczny rozpatrzmy system składający się z pięciu podsystemów ($M = 5$). Analiza większej liczby podsystemów nie wprowadza dodatkowych trudności obliczeniowych. Załóżmy, że $w_n^i$ jest stacjonarnym białym szumem gaussowskim zdefiniowanym przez wartość średnią $\bar{w}_n^i = 1$ oraz wariancję $\sigma_n^{i2} = \sigma^2$.

Magazyn jest zasilany periodycznym, znanym dopływem $d_n$ z okresem 336. Całkowity dopływ w tym okresie jest mniejszy od średnich zapotrzebowań systemu.

W obliczeniach numerycznych przyjęto $a = 0.5, L = 7, NL = 3360, h_{min} = 0$, $N' = 1, 2, 3$ oraz różne wartości $\frac{\sigma}{\bar{w}}$.

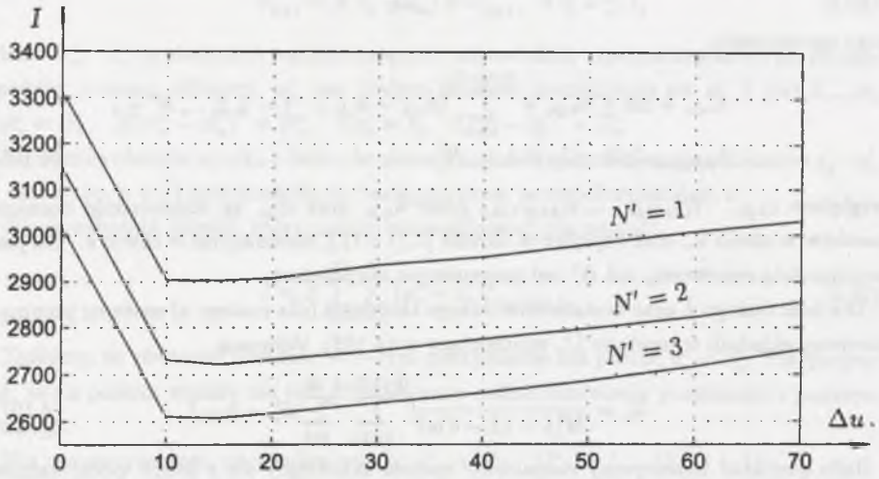
Dla $N' = 1, 2, 3$ oraz $\frac{\sigma}{\bar{w}} = 0.6$ zbadano wpływ pojemności rezerwowej $\Delta u$ na jakość sterowania. Wyniki są przedstawione na rys. 9.

Z rysunku widać, że istnieje taka pojemność rezerwowa, dla której wskaźnik jakości przyjmuje minimalną wartość.

Przeanalizowano również wpływ stosowania uproszczonych reguł (4.107) na jakość sterowania. Z badań numerycznych wynika, że dla rozpatrywanego przykładu realizacja sterowania zgodnie z (4.103) oraz z (4.107) prowadzi do prawie takich samych wartości wskaźnika jakości.

W trakcie realizacji algorytmu pojawiały się bardzo rzadko ujemne sterowania wynikające ze (4.100). Wtedy przyjmowano za $u_n^i$ zero. Stanowiło to kilka procent ogólnej liczby decyzji podjętych przez lokalnych decydentów.

Zauważmy jeszcze, że w rozpatrywanym przykładzie $Q_n^{*1} = 0$. Oznacza to, że przy braku dodatkowych ograniczeń sterowanie optymalne $u_n^{*1}$ jest zerowe zarówno dla wielokrokowego, jak i jednokrokowego wskaźnika jakości. Wprawdzie w naszym problemie istnieje ograniczenie elastyczne, ale dzięki swej "miękkości" może ono nie pogarszać w istotny sposób jakości sterowania.




Rys.9. Wpływ pojemności rezerwowej na jakość sterowania
Fig.9. Influence of the reserve capacity on the control quality

## 4.3. Uwagi końcowe

Niekonwencjonalne równania filtracji wyprowadzone w niniejszym rozdziale mają takie same własności jak równania klasycznego filtru Kalmana. Gdy macierz przekształcenia informacji $y_n^i$ w $m_n^i$ jest nieosobliwa, wtedy wyniki filtracji na obu poziomach są identyczne. Proces obliczania wzmocnienia w nieklasycznym filtrze wymaga równoczesnego rozwiązywania klasycznego zadania filtracji. Odpowiednie macierze można obliczyć przed rozpoczęciem sterowania i wykorzystać podczas jego realizacji.

Proponowana struktura układu sterowania, zakładająca zróżnicowaną częstotliwość podejmowania decyzji na obu poziomach, umożliwia dalsze zmniejszenie ilości informacji przetwarzanej i przesyłanej między poziomami.

Dynamika podsystemów, zróżnicowana informacja decydentów oraz periodyczna koordynacja sprawiają, że problem jest trudny do rozwiązania. Wprowadzone uproszczenia prowadzą do efektywnego i stosunkowo prostego rozwiązania zadania. W niektórych przypadkach wprowadzenie jednokrokowego wskaźnika jakości oraz nieuwzględnianie przez koordynatora dynamiki podsystemów może prowadzić do niewielkiego pogorszenia jakości sterowania.

# ROZDZIAŁ 5

# SYNTEZA ALGORYTMÓW STEROWANIA DLA POWIĄZANYCH PODSYSTEMÓW

W dotychczasowych rozważaniach przy syntezie praw sterowania istotne znaczenie miało, wprowadzone jako równanie koordynacji, ograniczenie elastyczne na sterowanie. Dzięki niemu w opracowanych algorytmach sterowania możliwa była częściowa decentralizacja sterowania i dekompozycja obliczeń. Rozpatrywane były systemy składające się z lokalnych podsystemów, nie oddziałujących na siebie. Tym, co je wiązało, były wspólnie dzielone zasoby. Obecnie zostaną opracowane algorytmy sterowania w dużym systemie, składającym się z podsystemów powiązanych między sobą, zapewniające minimum kwadratowego wskaźnika jakości. W pierwszej części rozdziału zostaną rozpatrzone systemy składające się z podsystemów statycznych, zaś w drugiej części systemy składające się z podsystemów dynamicznych.

## 5.1. Algorytm sterowania dla podsystemów statycznych [36, 37, 38]

### 5.1.1. Model systemu

Rozpatrzmy model systemu składającego się z $M$ rozproszonych statycznych podsystemów opisanych równaniami

$$x_i = B_{ii}^* u_i + v_i^* + w_i^*, \quad i = 1, 2, .., M, \tag{5.1}$$

$$v_i^* = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M} A_{ij}^* x_j, \quad i = 1, 2, ..., M, \tag{5.2}$$

gdzie $x_i, u_i, v_i^*, w_i^*$ reprezentują odpowiednio wyjście, sterowanie, interakcję pomiędzy podsystemami oraz zakłócenie wyjścia; $B_{ii}^*, A_{ij}^*, \quad i, j = 1, 2, ..., M, i \neq j$ są macierzami o odpowiednich wymiarach. W dalszych rozważaniach symbol sumy występujący w (5.2) będzie zastąpiony przez $\sum_{i \neq j}$.

Model pomiarów ma postać:

$$y_i = C_i w_i^* + e_i \tag{5.3}$$

$$m_i = F_i y_i, \tag{5.4}$$

gdzie $y_i, e_i$ są wektorami reprezentującymi pomiary oraz błędy pomiarowe; $m_i$ oznacza przetworzony pomiar o mniejszym wymiarze w stosunku do wektora $y_i$; $C_i, F_i$ są macierzami o odpowiednich wymiarach.

Zakładamy, że zakłócenia $w_i^*, v_i^*$ są niezależne od $w_j^*, v_j^*$, $i \neq j = 1, 2, ..., M$ i od $u_l$, $l = 1, 2, ..., M$.

Pierwotny wskaźnik jakości, który ma być minimalizowany, ma postać:

$$\bar{I} = \sum_{i=1}^{M} (x_i^T Q_i x_i + 2 x_i^T G_i u_i + u_i^T H_i u_i), \tag{5.5}$$

gdzie macierze $\begin{bmatrix} Q_n^i & G_n^i \\ G_n^{iT} & H_n^i \end{bmatrix}$ są symetryczne, dodatnio półokreślone, zaś macierze $H_n^i$ są dodatnio określone. Wprowadźmy następujące oznaczenia dla wektorów

$$x = [x_1^T x_2^T ... x_M^T]^T, \quad u = [u_1^T u_2^T ... u_M^T]^T, \quad w^* = [w_1^{*T} w_2^{*T} ... w_M^{*T}]^T \tag{5.6}$$

oraz dla macierzy

$$B^* = diag[B_{11}^* B_{22}^* ... B_{MM}^*], \quad A^* = [A_{ij}^* \delta_{ij}],$$
$$Q = diag[Q_1 Q_2 ... Q_M], \quad G = diag[G_1 G_2 ... G_M], \quad H = diag[H_1 H_2 ... H_M], \tag{5.7}$$

gdzie $\delta_{ij} = 0$ dla $i = j$ oraz $\delta_{ij} = 1$ dla $i \neq j$.

Przy powyższych oznaczeniach zależności (5.1) i (5.5) możemy zapisać w postaci:

$$x = B^* u + A^* x + w^* \tag{5.8}$$

$$\bar{I} = x^T Q x + 2 x^T G u + u^T H u \tag{5.9}$$

Oznaczając przez

$$B = A B^*, \quad w = A w^*, \quad A = (\mathbf{1} - A^*)^{-1}, \tag{5.10}$$

gdzie $\mathbf{1}$ jest macierzą jednostkową i zakładając, że macierz $A$ istnieje, możemy równanie (5.8) przedstawić jako:

$$x = Bu + w \tag{5.11}$$



Z (5.11) wynika, że $i$-ty podsystem opisany jest równaniem:

$$x_i = B_{ii} u_i + \sum_{j \neq i} B_{ij} u_j + A_{ii} w_i^* + \sum_{j \neq i} A_{ij} w_j^*, \tag{5.12}$$

gdzie macierze $B_{ii}, B_{ij}, A_{ii}, A_{ij}$ wynikają z (5.11) i (5.10).

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$v_i = \sum_{j \neq i} B_{ij} u_j, \quad w_i = A_{ii} w_i^*, \quad z_i = \sum_{j \neq i} A_{ij} w_j^* \tag{5.13}$$

model $i$–tego podsystemu można przedstawić w postaci:

$$x_i = B_{ii} u_i + v_i + w_i + z_i \tag{5.14}$$

Zauważmy, że zakłócenia $w_i$ i $z_i$ są nieskorelowane.

Celem sterowania jest minimalizacja wskaźnika jakości (5.5) przy ograniczeniu (5.14).

### 5.1.2. Struktura układu sterowania i struktura informacyjna

Złożoność algorytmu sterowania zależy od przyjętej struktury układu sterowania i struktury informacyjnej.

Załóżmy, że sterowanie realizowane będzie w strukturze dwupoziomowej z koordynatorem na poziomie wyższym i lokalnymi decydentami na poziomie niższym, jak to zostało przedstawione na rys. 2 w rozdziale pierwszym.

Informacja a priori składa się z równań modelu (5.1)-(5.5) lub z (5.14), (5.13), (5.3)-(5.5) oraz znajomości rozkładów zmiennych losowych, występujących w problemie.

Załóżmy, że $i$-ty lokalny decydent otrzymuje od swojego podsystemu informację $y_i$, która jest przetwarzana i w formie zagregowanej $m_i$ przesyłana na poziom wyższy. Tutaj koordynator na podstawie zebranej informacji $m = [m_1^T m_2^T ... m_M^T]^T$ określa wytyczne $p_i$, $i = 1, 2, ..., M$, które przesyła na poziom niższy. $I$–ty lokalny decydent na podstawie wytycznej $p_i$ oraz informacji $y_i$ wyznacza ostateczną wartość sterowania $u_i$.

Dostępność informacji rzutuje na dopuszczalną postać praw sterowania.

Przez dopuszczalne prawa sterowania $i$–tego lokalnego decydenta i koodynatora rozumieć będziemy funkcje odpowiednio: $u_i = a_i(y_i, p_i)$ i $p_i = b_i(m)$, $i = 1, 2, ...M$,, z których każda odwzorowuje zbiór wektorów $y_i, p_i$ i $m$ w zbiór wektorów odpowiednio $u_i$ i $p_i$.

Dodatkowo zakładamy, że funkcje $a_i(.)$ i $b_i(.)$ spełniają ograniczenie elastyczne

$$E_{|m} a_i(y_i, p_i) = p_i, \tag{5.15}$$

gdzie $E_{|m}$ oznacza operację warunkowego uśredniania przy zadanym $m$.

Przy rozpatrywanej strukturze informacyjnej wskaźnik jakości (5.5) nie może być minimalizowany. Wprowadźmy zatem wtórny wskaźnik jakości w postaci:

$$I(a,b) = E\sum_{i=1}^{M}(x_i^T Q_i x_i + 2x_i^T G_i u_i + u_i^T H_i u_i)_{u_i=a_i[y_i,b_i(m)]}, \tag{5.16}$$

gdzie $a = \{a_1, a_2, ..., a_M\}$, $b = \{b_1, b_2, ..., b_M\}$.

Dla modelu rozpatrywanego systemu i założonej struktury układowo - informacyjnej wśród dopuszczalnych praw sterowania należy znaleźć optymalne prawa $u_i^o = a_i^o(y_i, p_i)$ oraz $p_i^o = b_i^o(m)$, które minimalizują wskaźnik jakości (5.16) przy ograniczeniu (5.14).

### 5.1.3. Rozwiązanie problemu

Z punktu widzenia dostępnej informacji zmienna $u_i$ w czasie realizacji algorytmu sterowania jest dla $i$–tego lokalnego decydenta zmienną decyzyjną ($decu_i$), natomiast dla pozostałych decydentów jest ona zmienną losową ($ranu_i$). Ten fakt musi mieć swoje odzwierciedlenie przy syntezie sterowania lokalnego $a_i^o(y_i, p_i)$. Zatem przy jego wyznaczaniu zmienna $u_i$, występująca w (5.14) odgrywa rolę zmiennej decyzyjnej ($decu_i$), natomiast zmienne $u_j$, $j \neq i$, występujące w $v_i$, pełnią rolę zmiennych losowych ($ranu_j$). Prowadzi to do optymalizacji $i$–tego podsystemu prowadzonej przez $i$–tego lokalnego decydenta. Tylko wtedy określone prawa sterowania będą należały do klasy praw dopuszczalnych.

#### 5.1.3.1. Synteza lokalnego prawa sterowania $a_i^o(y_i, p_i)$

Oznaczmy przez

$$S_i(m,p_i) = \min_{a_i} E_{|m}[(B_{ii}a_i + v_i + w_i + z_i)^T Q_i(B_{ii}a_i + v_i + w_i + z_i) +$$
$$+2(B_{ii}a_i + v_i + w_i + z_i)^T G_i a_i + a_i^T H_i a_i] \tag{5.17}$$

Optymalne prawo sterowania $a_i^o$ wynika z minimalizacji (5.17) przy ograniczeniu (5.15). Po wprowadzeniu mnożnika Lagrange'a $\lambda_i$ otrzymamy równoważne zadanie minimalizacji bez ograniczeń

$$\bar{S}_i(m,p_i,\lambda_i) = \min_{a_i} E_{|m}[(B_{ii}a_i + v_i + w_i + z_i)^T Q_i(B_{ii}a_i + v_i + w_i + z_i) +$$
$$+2(B_{ii}a_i + v_i + w_i + z_i)^T G_i a_i + a_i^T H_i a_i + 2\lambda_i^T(a_i - p_i)] \tag{5.18}$$

Dobór odpowiedniej wartości mnożnika $\lambda_i$ zapewni spełnienie ograniczenia (5.15).

Zadanie minimalizacji (5.18) względem funkcji $a_i$ można sprowadzić do problemu minimalizacji względem zmiennej $u_i$ w wyrażeniu

$$\bar{S}_i(m,p_i,\lambda_i) = E_{|m}\min_{u_i} E_{|m,y_i}[(B_{ii}u_i + v_i + w_i + z_i)^T Q_i(B_{ii}u_i + v_i + w_i + z_i) +$$
$$+2(B_{ii}u_i + v_i + w_i + z_i)^T G_i u_i + u_i^T H_i u_i + 2\lambda_i^T(u_i - p_i)] \tag{5.19}$$



Po wykonaniu uśrednienia $E_{|m,y_i}$ otrzymamy:

$$\bar{S}_i(m,p_i,\lambda_i) = E_{|m}\min_{u_i} E_{|m,y_i}[u_i^T V_i^T u_i + 2u_i^T(B_{ii}^T Q_i + G_i^T)(\bar{v}_i + \hat{w}_i + \bar{z}_i) + 2\lambda_i^T u_i] +$$
$$+E_{|m}[(v_i + w_i + z_i) - 2\lambda_i^T p_i], \tag{5.20}$$

gdzie $\bar{v}_i = E_{|m}v_i, \bar{z}_i = E_{|m}z_i, \hat{w}_i = E_{|y_i}w_i$, $V_i^T = B_{ii}^T Q_i B_{ii} + B_{ii}^T G_i + G_i^T B_{ii} + H_i$.

Różniczkując w (5.20) względem $u_i$ i przyrównując wynik do zera otrzymamy po przekształceniach:

$$u_i = -V_i^{-1}[(B_{ii}^T Q_i + G_i^T)(\bar{v}_i + \hat{w}_i + \bar{z}_i) + \lambda_i] \tag{5.21}$$

Podstawiając (5.21) do (5.15), wyznaczając $\lambda_i$, a następnie wstawiając je do (5.21) wyznaczymy ostateczną postać optymalnego sterowania lokalnego $u_i$

$$u_i = p_i - V_i^{-1}(B_{ii}^T Q_i + G_i^T)(\hat{w}_i - \bar{w}_i) = p_i - V_i^{-1}(B_{ii}^T Q_i + G_i^T)A_{ii}(\hat{w}_i^* - \bar{w}_i^*), \tag{5.22}$$

gdzie $\bar{w}_i^* = E_{|m}w_i^* = E_{|m_i}w_i^*$ oraz $\hat{w}_i^* = E_{|y_i}w_i^*$.

Wstawiając (5.22) i wynikające z (5.13) oraz (5.15) wyrażenie $\bar{v}_i = E_{|m}v_i = \sum_{i\neq j} B_{ij}p_j$ do (5.17) otrzymamy po przekształceniach:

$$S_i(m,p_i) = p_i^T V_i p_i + 2p_i^T(B_{ii}^T Q_i + G_i^T)(\sum_{j\neq i} B_{ij}p_j) +$$
$$+(\sum_{j\neq i} B_{ij}p_j)^T Q_i(\sum_{j\neq i} B_{ij}p_j) + 2p_i^T(B_{ii}^T Q_i + G_i^T)(\bar{w}_i + \bar{z}_i)$$
$$+2(\sum_{j\neq i} B_{ij}p_j)^T Q_i(\bar{w}_i + \bar{z}_i) + s_i, \tag{5.23}$$

gdzie

$$s_i = E_{|m}[\tilde{v}_i^T Q_i \tilde{v}_i + 2\tilde{v}_i^T Q_i \tilde{z}_i + (w_i + z_i)^T Q_i(w_i + z_i) -$$
$$-(\hat{w}_i - \bar{w}_i)^T(G_i + Q_i^T B_{ii})V_i^{-1}(B_{ii}^T Q_i + G_i^T)(\hat{w}_i - \bar{w}_i)]$$
$$\tilde{v}_i = v_i - \bar{v}_i, \quad \tilde{z}_i = z_i - \bar{z}_i \tag{5.24}$$

Zauważmy, że $s_i$ jest niezależne od $p_j$, $j = 1, 2, ..., M$.

#### 5.1.3.2. Synteza praw sterowania koordynatora $b_i^o(m)$

Optymalne prawa sterowania koordynatora wynikają z minimalizacji wyrażenia:

$$S(m,p) = \sum_{i=1}^{M} S_i(m,p_i), \tag{5.25}$$

gdzie $p = [p_1^T p_2^T ... p_M^T]^T$.

Wstawiając (5.23) do (5.25) otrzymamy:

$$S(m,p) = p^T(H + B^TQB + G^TB + B^TG)p + 2p^T(B^TQ + G^T)\bar{w} + \sum_{i=1}^{M} s_i, \qquad (5.26)$$

gdzie $\bar{w} = [(\bar{w}_1 + \bar{z}_1)^T \ (\bar{w}_2 + \bar{z}_2)^T ....(\bar{w}_M + \bar{z}_M)^T]^T$.

Po zróżniczkowaniu (5.26) względem $p$ i przyrównaniu wyniku do zera otrzymamy:

$$p = -(H + B^TQB + G^TB + B^TG)^{-1}(B^TQ + G^T)\bar{w} \qquad (5.27)$$

Optymalna wartość wskaźnika (5.16) może być obliczona po wstawieniu (5.27) do (5.26) i uśrednieniu powstałego wyrażenia. Po przekształceniach otrzymamy:

$$I_2^o = E[\sum_{i=1}^{M} s_i - \bar{w}^T(G + QB)(H + B^TQB + B^TG + G^TB)^{-1}(B^TQ + G^T)\bar{w}] \qquad (5.28)$$

### 5.1.3.3. Dyskusja rozwiązania

Rozpatrzmy problem sterowania realizowanego w strukturze jednopoziomowej z centralnym decydentem, dysponującym taką informacją, jaka była dostępna koordynatorowi w dyskutowanej wcześniej strukturze dwupoziomowej. W tym przypadku dopuszczalne prawa sterowania mają postać $u_i = a_i(m)$. Wykorzystując (5.20), (5.22)-(5.24) i fakt, że $v_i = \bar{v}_i, \hat{w}_i = \bar{w}_i$, widzimy, że prawo sterowania w strukturze jednopoziomowej jest określone przez (5.27) po zastąpieniu $u$ przez $p$. Sterowanie to zapewnia minimalną wartość wskaźnika jakości wynikającą z wyrażenia:

$$I_1^o = E[\sum_{i=1}^{M}(w_i + z_i)^TQ_i(w_i + z_i) - \\ -\bar{w}^T(G + QB)(H + B^TQB + B^TG + G^TB)^{-1}(B^TQ + G^T)\bar{w}] \qquad (5.29)$$

Odejmując (5.29) od (5.28) otrzymamy:

$$I_1^o - I_2^o = E\sum_{i=1}^{M}[\Delta u_i^T V_i \Delta u_i - (\sum_{j\neq i} B_{ij}\Delta u_j)^T Q_i \sum_{j\neq i} B_{ij}\Delta u_j - 2(\sum_{j\neq i} B_{ij}\Delta u_j)^T Q_i \tilde{z}_i], \qquad (5.30)$$

gdzie:

$$\Delta u_i = u_i - p_i = -V_i^{-1}(B_{ii}^TQ_i + G_i^T)A_{ii}(\hat{w}_i^* - \bar{w}_i^*)$$
$$\tilde{v}_i = \sum_{j\neq i} B_{ij}\Delta u_j \qquad (5.31)$$



Z (5.31) i z założenia o niezależności zakłóceń $w_i^*$ i $w_j^*$, $i \neq j$ wynika, że (5.30) możemy zapisać jako:

$$I_1^o - I_2^o = E\sum_{i=1}^{M}(\Delta u_i^T V_i \Delta u_i - \sum_{j\neq i}\Delta u_j^T B_{ij}^T Q_i B_{ij}\Delta u_j - 2\sum_{j\neq i}\Delta u_j^T B_{ij}^T Q_i A_{ij}\tilde{w}_j^*), \qquad (5.32)$$

gdzie $\tilde{w}_j^* = w_j^* - \bar{w}_j^*$.

Realizacja sterowania w strukturze dwupoziomowej jest uzasadniona w przypadku, gdy $I_1^o - I_2^o > 0$.

Obecnie znajdziemy warunki, przy których $i-$ty lokalny nie powinien pojawić się w strukturze dwupoziomowej. W tym celu wyodrębnijmy z (5.32) te składniki, które zawierają $\Delta u_i$. Utworzą one wskaźnik cząstkowy $\Delta I^i$ o postaci:

$$\Delta I^i = E[\Delta u_i^T(V_i - \sum_{j\neq i} B_{ji}^T Q_j B_{ji})\Delta u_i - 2\Delta u_i^T \sum_{j\neq i} B_{ji}^T Q_j A_{ji}\tilde{w}_i^*] \qquad (5.33)$$

Pojawienie się $i-$tego lokalnego decydenta jest uzasadnione w przypadku, gdy $\Delta I^i > 0$. Po wykorzystaniu (5.31) warunek ten zachodzi, gdy

$$\Delta I^i = tr\{[K_i^T(V_i - \sum_{j\neq i} B_{ji}^T Q_j B_{ji})K_i - 2K_i^T \sum_{j\neq i} B_{ji}^T Q_j A_{ji}]P_{ii}^{\tilde{w}}\} > 0, \qquad (5.34)$$

gdzie $tr(.)$ oznacza ślad macierzy, zaś

$$P_{ii}^{\tilde{w}} = E(\hat{w}_i^* - \bar{w}_i^*)(\hat{w}_i^* - \bar{w}_i^*)^T \qquad (5.35)$$
$$K_i = -V_i^{-1}(B_{ii}^TQ_i + G_i^T)A_{ii} \qquad (5.36)$$

Jeżeli macierz $P_{ii}^{\tilde{w}}$ jest dodatnio określona ($P_{ii}^{\tilde{w}} > 0$), to warunkiem wystarczającym spełnienia (5.34) jest zachodzenie następującej zależności:

$$K_i^T(V_i - \sum_{j\neq i} B_{ji}^T Q_j B_{ji})K_i - 2K_i^T \sum_{j\neq i} B_{ji}^T Q_j > 0 \qquad (5.37)$$

Pojawienie się $i-$ tego lokalnego decydenta w strukturze dwupoziomowej wydaje się być uzasadnione w przypadku, gdy wpływ sterowania $u_i$ na wyjście $x_i$ jest znacznie silniejszy w stosunku do jego wpływu na wyjścia $x_j$, $j \neq i$.

Przeanalizujmy jeszcze problem sterowania realizowanego w strukturze jednopoziomowej z centralnym decydentem, dysponującym kompletną informacją, a więc zadanie minimalizacji wskaźnika (5.9) przy ograniczeniu (5.11). W tym przypadku optymalne prawo sterowania ma postać:

$$u^o = -(H + B^TQB + G^TB + B^TG)^{-1}(B^TQ + G^T)w \qquad (5.38)$$

Zauważmy, że optymalne prawo sterowania koordynatora ($b^o$) w strukturze dwupoziomowej opisane przez (5.27) wynika z (5.38) po zastąpieniu w nim $u^o$ i $w$ odpowiednio przez $p^o$ i $\bar{w}$. Zatem optymalne prawo sterowania koordynatora spełnia klasyczną zasadę równoważności [32].

#### 5.1.3.4. Przykład

Rozpatrzmy system składający się z dwóch podsystemów opisanych równaniami:

$$x_1^1 = 2u_1 - x_2 + w_1^{1*}$$
$$x_1^2 = u_1 - x_2 + w_1^{2*} \tag{5.39}$$
$$y_1^1 = w_1^{1*}$$
$$y_1^2 = w_1^{2*} \tag{5.40}$$
$$x_2 = 3u_2 - x_1^1 - x_1^2 + w_2^* \tag{5.41}$$
$$y_2 = w_2^*, \tag{5.42}$$

gdzie zmienne losowe $w_1^* = [w_1^{1*} \;\; w_1^{2*}]^T$ oraz $w_2^*$ mają rozkłady normalne o parametrach $Ew_1^* = [1 \;\; 2]^T$, $Ew_2^* = 2$, $E(w_1^{1*} - Ew_1^{1*})^2 = 2, E(w_2^* - Ew_2^*)^2 = 3$, $E(w_1^{1*} - Ew_1^{1*})(w_1^{2*} - Ew_1^{2*}) = 1$, $E(w_2^* - Ew_2^*) = 3$.

Niech wskaźnik jakości, który należy minimalizować, ma postać:

$$I = E[(x_1^1 - x_1^2)^2 + u_1^2 + 2x_2^2 + 2u_2^2] \tag{5.43}$$

Załóżmy, że z pierwszego podsystemu przekazywana jest na poziom wyższy zagregowana informacja $m_1 = y_1^1 + y_1^2$, zaś z drugiego podsystemu nie jest przekazywana żadna informacja pomiarowa.

Zgodnie z (5.22) optymalne prawa sterowania lokalnych decydentów opisane są wzorami:

$$u_1^o = p_1 - 0.5[(\hat{w}_1^{1*} - \bar{w}_1^{1*}) - (\hat{w}_1^{2*} - \bar{w}_1^{2*})] \tag{5.44}$$
$$u_2^o = p_2 - 0.3(\hat{w}_2^* - \bar{w}_2^*), \tag{5.45}$$

zaś optymalne wytyczne koordynatora mają postać:

$$p_1^o = -0.42\bar{w}_1^{1*} + 0.11\bar{w}_1^{2*} + 0.16\bar{w}_2^*, \tag{5.46}$$
$$p_2^o = -0.08\bar{w}_1^{1*} + 0.39\bar{w}_1^{2*} - 0.16\bar{w}_2^* \tag{5.47}$$

Z postawienia zadania wynika, że $\hat{w}_1^* = w_1^*$, $\hat{w}_2^* = w_2^*$ oraz $\bar{w}_2^* = Ew_2^* = 2$, natomiast oceny $\bar{w}_1^*$ mogą być wyznaczone z zależności [61]:

$$[\bar{w}_1^{1*} \;\; \bar{w}_1^{2*}]^T = E[w_1^{1*} \;\; w_1^{2*}]^T + R_{w_1 m_1} R_{m_1}^{-1}(m_1 - Em_1), \tag{5.48}$$



gdzie

$$R_{w_1 m_1} = E[w_1^{1*} - Ew_1^{1*} \;\; w_1^{2*} - Ew_1^{2*}]^T[(w_1^{1*} - Ew_1^{1*}) + (w_1^{2*} - Ew_1^{2*})] =$$
$$= [3 \;\; 2]^T, \tag{5.49}$$
$$R_{m_1} = E[(w_1^{1*} - Ew_1^{1*}) + (w_1^{2*} - Ew_1^{2*})]^2 = 5 \tag{5.50}$$

W celu stwierdzenia, czy dany lokalny decydent powinien pojawić się w strukturze dwupoziomowej, należy obliczyć wartości $\Delta I^i$, $i = 1, 2$ ze wzoru (5.34). Po wstawieniu danych z przykładu otrzymamy, że $\Delta I^1 = -3.2$, zaś $\Delta I^2 = 5.4$. Oznacza to, że lokalny decydent pierwszego podsystemu nie powinien pojawić się w w dwupoziomowej strukturze sterowania.

## 5.2. Algorytm sterowania dla podsystemów dynamicznych [39]

W poprzednich punktach przedstawiono rozwiązanie problemu sterowania systemem statycznym. Obecnie zostanie przedstawione rozwiązanie problemu sterowania dla systemu dynamicznego, składającego się z powiązanych między sobą podsystemów. Rozpatrywany będzie system opisany równaniem stanu

$$x_{n+1}^i = A_n^i x_n^i + v_n^i + B_n^i u_n^i + w_n^i \tag{5.51}$$
$$v_n^i = \sum_{j \neq i}^{M} A_n^{i,j} x_n^j \tag{5.52}$$

oraz równaniem wyjścia

$$y_n^i = C_n^i x_n^i + r_n^i, \quad i = 1, 2, .., M, \tag{5.53}$$

gdzie $x_n^i, u_n^i$ są wektorami stanu i sterowania o odpowiednich wymiarach, $y_n^i$ jest wektorem wyjścia, zaś $w_n^i, r_n^i$ reprezentują zakłócenia stanu oraz pomiaru.

Zakładamy, że zmienne losowe $w_n^i$ oraz $r_n^i$ są gaussowskimi białymi szumami niezależnymi od $w_n^j, r_n^j$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, ..., M$ oraz od innych zmiennych dla $k \leq n$. Warunek początkowy $x_0^i$ jest również białym szumem gaussowskim niezależnym od $x_0^j$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, ..., M$. Przyjmujemy także, że dane jest $Ex_0^i$ oraz $Ew_n^i = 0$, $Er_n^i = 0$, . Dane są również macierze kowariancji $W_n^i = Ew_n^i w_n^{iT}$, $R_n^i = Er_n^i r_n^{iT}$ oraz $X_0^i = Ex_0^i x_0^{iT}$.

Wskaźnik jakości, który należy minimalizować, ma postać:

$$\bar{I} = \sum_{n=0}^{N} \sum_{i=1}^{M} (x_n^{iT} Q_n^i x_n^i + u_n^{iT} H_n^i u_n^i), \tag{5.54}$$

gdzie macierz $Q_n^i$ jest symetryczna i dodatnio półokreślona, zaś macierz $H_n^i$ jest dodatnio określona.

Wielkość $v_n^i$ zdefiniowana przez (5.52) reprezentuje interakcję pomiędzy podsystemami.

Zakładamy też, że sterowanie realizowane jest w strukturze dwupoziomowej opisanej w punkcie 4.1.2 rozdziału czwartego. W tej strukturze równanie przetworzonego wyjścia ma postać:

$$m_n^i = D_n^i y_n^i = F_n^i x_n^i + e_n^i \tag{5.55}$$

o wymiarze mniejszym w stosunku do wektora $y_n^i$.

Jako dopuszczalne prawa sterowania $i-$ tego lokalnego decydenta przyjmujemy funkcje $u_n^i = a_n^i(\hat{x}_n^i, \bar{x}_n^i, p_n^i)$, z których każda odwzorowuje zbiór zmiennych $\hat{x}_n^i, \bar{x}_n^i, p_n^i$ w zbiór decyzji $u_n^i$. Przez $\hat{x}_n^i$ oznaczono ocenę stanu $x_n^i$ wyznaczaną przez $i-$tego lokalnego decydenta, zaś przez $\bar{x}_n^i$ oznaczono ocenę stanu $x_n^i$ wyznaczaną przez koordynatora.

Jako dopuszczalne prawa sterowania koordynatora przyjmujemy natomiast funkcje $p_n = b_n(\mathbf{m_n})$, które odwzorowują zbiór wartości $\mathbf{m_n}$ w zbiór wytycznych $p_n$. Przez $p_n$ oznaczono wektor $p_n = [p_n^{1T}\ p_n^{2T} ....p_n^{MT}]^T$. Zakładamy, że funkcje te spełniają ograniczenie elastyczne.

$$E_{|\mathbf{m_n}} a_n^i(\hat{x}_n^i, \bar{x}_n^i, p_n^i) = p_n^i \tag{5.56}$$

Ze względu na przyjętą strukturę informacyjną wskaźnik jakości (5.54) nie może być minimalizowany. Wprowadzamy zatem wtórny wskaźnik jakości:

$$I(a,b) = E\sum_{n=0}^{N}\sum_{i=1}^{M}(x_n^{iT}Q_n^i x_n^i + u_n^{iT}H_n^i u_n^i)_{u_n^i = a_n^i(.)}, \tag{5.57}$$

gdzie $a_n^i = a_n^i[\hat{x}_n^i, \bar{x}_n^i, b_n^i(\mathbf{m_n})]$, $a = \{a_0^1, ...., a_N^1, ..., a_0^M, ..., a_N^M\}$, $b = \{b_0^1, ...., b_N^1, ..., b_0^M, ..., b_N^M\}$.

Zadaniem syntezy układu sterowania jest znalezienie wśród dopuszczalnych praw takich, które minimalizują wtórny wskaźnik jakości (5.57) przy ograniczeniu (5.56).

W [39] zostały wyznaczone optymalne prawa sterowania lokalnych decydentów $a_n^i(\hat{x}_n^i, \bar{x}_n^i, p_n^i)$ oraz koordynatora $p_n = b_n(\mathbf{m_n})$.

Prawo sterowania $i-$tego lokalnego decydenta wynika z lokalnej optymalizacji i ma postać:

$$u_n^i = p_n^i - L_n^i(\hat{x}_n^i - \bar{x}_n^i), \tag{5.58}$$

gdzie $\hat{x}_n^i = E_{|\mathbf{y_n^i}} x_n^i$, $\bar{x}_n^i = E_{|\mathbf{m_n}} x_n^i$ oraz

$$L_n^i = (V_n^i)^{-1} B_n^{iT} S_{n+1}^i A_n^i \tag{5.59}$$

$$V_n^i = H_n^i + B_n^{iT} S_{n+1}^i B_n^i \tag{5.60}$$

$$S_n^i = Q_n^i + A_n^{iT} S_{n+1}^i A_n^i - A_n^{iT} S_{n+1}^i B_n^i (V_n^i)^{-1} B_n^{iT} S_{n+1}^i A_n^i \tag{5.61}$$

$$S_N^i = Q_N^i \tag{5.62}$$



Równanie stanu (5.51) zapisane dla całego systemu ma postać:

$$x_{n+1} = A_n x_n + B_n u_n + w_n, \tag{5.63}$$

gdzie $x_n = [x_n^{1T} .....x_n^{MT}]^T$, $u_n = [u_n^{1T} .....u_n^{MT}]^T$, $w_n = [w_n^{1T} .....w_n^{MT}]^T$ są wektorami stanu, sterowania i zakłócenia dla całego systemu. Macierze $A_n$ i $B_n$ wynikają z (5.51) i (5.63).

Optymalne prawo sterowania koordynatora wynika z globalnej optymalizacji i ma postać:

$$p_n = -(V_n^*)^{-1} B_n^T S_{n+1}^* A_n \bar{x}_n, \tag{5.64}$$

gdzie:

$$V_n^* = V_n + B_n^T M_{n+1} B_n \tag{5.65}$$

$$V_n = diag[V_n^1, ..., V_n^M] \tag{5.66}$$

$$M_{n+1} = A_n^{*T} N_{n+1} A_n^* + A_n^T S_{n+1}^* A_n - A_n^T S_{n+1}^* B_n (V_n^*)^{-1} B_n^T S_{n+1}^* A_n \tag{5.67}$$

$$A_n^* = diag[A_n^1, ..., A_n^M] \tag{5.68}$$

$$N_{n+1} = diag[N_{n+1}^1, ...., N_{n+1}^M] \tag{5.69}$$

$$N_{n+1}^i = S_{n+1}^i B_n^i (V_n^i)^{-1} B_n^{iT} S_{n+1}^i - S_{n+1}^i \tag{5.70}$$

$$S_{n+1}^* = S_{n+1} + M_{n+1} \tag{5.71}$$

$$S_{n+1} = diag[S_{n+1}^1, ...., S_{n+1}^M] \tag{5.72}$$

z warunkami brzegowymi $S_N^i = Q_N^i$, $M_N = 0$.

Przy realizacji sterowania (5.58) i (5.64) niezbędna jest znajomość ocen stanu $\hat{x}_n^i$ oraz $\bar{x}_n^i$, które zostaną wyprowadzone poniżej.

### 5.2.1. Równania filtracji stanu $\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{n}^\mathbf{i}$

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\hat{x}_{n+1|n}^i = E_{|\mathbf{y_n^i}} x_{n+1}^i, \quad \hat{x}_{n+1|n+}^i = E_{|\mathbf{y_n^i}, x_{n+1}^i} x_{n+1}^i, \quad \bar{x}_{n+1|n}^i = E_{|\mathbf{m_n}} x_{n+1}^i$$

Ponieważ informacja $\mathbf{y_n^i}$ dotyczy tylko $i-$tego podsystemu, więc oceny wyznaczone przez koordynatora nie mogą być poprawione przez $i-$tego lokalnego decydenta. Zatem przy wyznaczaniu ocen $\hat{x}_n^i$ zakładamy, że

**Z1.** Ocena zmiennej $v_n^i$ występującej w (5.51) wyznaczana przez $i-$tego lokalnego decydenta jest równa ocenie $\bar{v}_n^i = E_{|\mathbf{m_n}} v_n^i$, wyznaczanej przez koordynatora;

**Z2.** Korekcja $\hat{x}_{n+1|n+}^i - \hat{x}_{n+1|n}^i$ wyznaczana przez $i-$tego lokalnego decydenta jest równa korekcji $\bar{x}_{n+1}^i - \bar{x}_{n+1|n}^i$ wyznaczanej przez koordynatora.

Założenia te oznaczają, że oceny $v_n^i$ i poprawki $\bar{x}_{n+1}^i - \bar{x}_{n+1|n}^i$ wyznaczane przez koordynatora są wykorzystywane przez $i$–tego lokalnego decydenta bez żadnych poprawek.

Oceny $\hat{x}_{n+1}^i$ można wyznaczyć z zależności [61]:

$$\hat{x}_{n+1}^i = \hat{x}_{n+1|n+}^i + \hat{K}_{n+1}^i(y_{n+1}^i - C_{n+1}^i \hat{x}_{n+1|n+}^i), \tag{5.73}$$

gdzie macierz wzmocnienia filtru zdefiniowana jest jako:

$$\hat{K}_{n+1}^i = \hat{P}_{n+1|n+}^i C_{n+1}^{iT}(C_{n+1}^i \hat{P}_{n+1|n+}^i C_{n+1}^{iT} + R_{n+1}^i)^{-1}, \tag{5.74}$$

gdzie

$$\hat{P}_{n+1|n+}^i = E(\tilde{x}_{n+1|n+}^i \tilde{x}_{n+1|n+}^{iT}), \quad \tilde{x}_{n+1|n+}^i = x_{n+1}^i - \hat{x}_{n+1|n+}^i \tag{5.75}$$

Ocena stanu $\bar{x}_{n+1}^i = E_{|\mathbf{m}_{n+1}} x_{n+1}^i$ dokonana przez koordynatora wynika z klasycznej postaci filtru Kalmana

$$\bar{x}_{n+1}^i = \bar{x}_{n+1|n}^i + \bar{K}_{n+1}^i[m_{n+1} - F_{n+1}(A_n \bar{x}_n + B_n p_n)] \tag{5.76}$$

$$\bar{x}_{n+1|n}^i = A_n^i \bar{x}_n^i + \bar{v}_n^i + B_n^i p_n^i, \tag{5.77}$$

gdzie $m_{n+1} = [m_{n+1}^{1T} ... m_{n+1}^{MT}]^T$, $F_{n+1} = diag[F_{n+1}^1, ..., F_{n+1}^M]$

Uśredniając warunkowo $E_{|y_n^i, \bar{x}_{n+1}^i}(.)$ obie strony równania (5.51) i wykorzystując założenia **Z1-Z2** wraz z (5.58), (5.77) otrzymamy po przekształceniach:

$$\hat{x}_{n+1|n+}^i = \bar{x}_{n+1}^i + \Phi_n^i(\hat{x}_n^i - \bar{x}_n^i), \tag{5.78}$$

gdzie $\Phi_n^i = A_n^i - B_n^i L_n^i$.

Z (5.73), (5.78) i (5.74) widać, że do wyznaczenia oceny $\hat{x}_n^i$ przez $i$–tego lokalnego decydenta niezbędna jest znajomość oceny stanu $\bar{x}_n^i$ oraz znajomość macierzy $\hat{P}_{n+1|n+}^i$. Sposób określania tych wielkości zostanie podany w dalszych rozważaniach.

### 5.2.2. Równania filtracji stanu $\bar{x}_n^i$

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\Phi_n = diag[\Phi_n^1, ..., \Phi_n^M], \quad \bar{K}_n = diag[\bar{K}_n^1, ..., \bar{K}_n^M],$$
$$C_n = diag[C_n^1, ..., C_n^M], \quad L_n = diag[L_n^1, ..., L_n^M]$$
$$e_n = [e_n^{1T} ..... e_n^{MT}]^T, \quad \tilde{x}_{n+1|n+} = [\tilde{x}_{n+1|n+}^{1T} ..... \tilde{x}_{n+1|n+}^{MT}]^T$$
$$\tilde{\bar{x}}_{n+1}^i = \hat{x}_{n+1}^i - \bar{x}_{n+1}^i, \quad \tilde{\bar{x}}_n = [\tilde{\bar{x}}_n^{1T} .... \tilde{\bar{x}}_n^{MT}]^T$$
$$\tilde{\bar{x}}_{n+1} = x_{n+1} - \bar{x}_{n+1}$$

Przy powyższych oznaczeniach cały system może być opisany równaniem:

$$x_{n+1} = A_n x_n + B_n p_n - B_n L_n \tilde{\bar{x}}_n + w_n, \tag{5.79}$$



zaś równanie filtracji stanu $x_n$ przyjmie postać:

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_{n+1|n} + \bar{K}_{n+1}(F_{n+1}\bar{x}_{n+1|n} + e_{n+1}) \tag{5.80}$$

$$\bar{x}_{n+1|n} = A_n \bar{x}_n + B_n p_n \tag{5.81}$$

Macierz wzmocnień filtru $\bar{K}_{n+1}$ wynika z zależności:

$$\bar{K}_{n+1} = \bar{P}_{n+1|n} F_{n+1}^T (F_{n+1} \bar{P}_{n+1|n} F_{n+1}^T + E_n)^{-1}, \tag{5.82}$$

gdzie

$$\bar{P}_{n+1|n} = E(\tilde{\bar{x}}_{n+1|n} \tilde{\bar{x}}_{n+1|n}^T), \quad E_n = E(e_n e_n^T)$$

Po dość skomplikowanych przekształceniach otrzymamy:

$$\bar{P}_{n+1|n} = A_n \bar{P}_n A_n^T - A_n \bar{P}_n L_n^T B_n^T - B_n L_n \bar{P}_n A_n^T + B_n L_n P_n L_n^T B_n^T + W_n \tag{5.83}$$

$$\bar{P}_{n+1|n} = E(x_{n+1} - \bar{x}_{n+1|n})(\hat{x}_{n+1} - \bar{x}_{n+1})^T = A_n \bar{P}_n - B_n L_n P_n \tag{5.84}$$

$$\begin{aligned}
&\hat{P}_{n+1|n+} = E(x_{n+1} - \hat{x}_{n+1|n+})(x_{n+1} - \hat{x}_{n+1|n+})^T = \\
&= (1 - \bar{K}_{n+1}F_{n+1})\bar{P}_{n+1|n}(1 - \bar{K}_{n+1}F_{n+1})^T - \Phi_n \bar{P}_{n+1|n}^T (1 - \bar{K}_{n+1}F_{n+1})^T - \\
&-(1 - \bar{K}_{n+1}F_{n+1})\bar{P}_{n+1|n}\Phi_n^T + \Phi_n P_n \Phi_n^T + \bar{K}_{n+1}E_{n+1}\bar{K}_{n+1}^T
\end{aligned} \tag{5.85}$$

$$\bar{P}_{n+1} = E(x_{n+1} - \bar{x}_{n+1})(x_{n+1} - \bar{x}_{n+1})^T = (1 - \bar{K}_{n+1}F_{n+1})\bar{P}_{n+1|n} \tag{5.86}$$

$$\begin{aligned}
&\hat{P}_{n+1|n+} = E(x_{n+1} - \hat{x}_{n+1|n+1})(\hat{x}_n - \bar{x}_n)^T = \\
&= (1 - \bar{K}_{n+1}F_{n+1})\bar{P}_{n+1|n} - \Phi_n P_n
\end{aligned} \tag{5.87}$$

$$\begin{aligned}
&P_{n+1} = E(\hat{x}_{n+1} - \bar{x}_{n+1})(\hat{x}_{n+1} - \bar{x}_{n+1})^T = \\
&= \Phi_n P_n \Phi_n^T + \hat{K}_{n+1} C_{n+1} \hat{P}_{n+1|n+} \Phi_n^T + \Phi_n \hat{P}_{n+1|n+}^T C_{n+1}^T \hat{K}_{n+1}^T + \\
&+\hat{K}_{n+1}(C_{n+1}\hat{P}_{n+1|n+}C_{n+1}^T + R_{n+1})\hat{K}_{n+1}^T
\end{aligned} \tag{5.88}$$

$$\begin{aligned}
&\bar{P}_{n+1} = E(x_{n+1} - \bar{x}_{n+1})((\hat{x}_{n+1} - \bar{x}_{n+1})^T = \\
&= (1 - \bar{K}_{n+1}F_{n+1})[\bar{P}_{n+1|n+}\Phi_n^T(1 - \hat{K}_{n+1}C_{n+1})^T + \\
&+\bar{P}_{n+1|n}(1 - \bar{K}_{n+1}F_{n+1})^T C_{n+1}^T \hat{K}_{n+1}^T] + \\
&+\bar{K}_{n+1}(E_{n+1}\bar{K}_{n+1}^T C_{n+1} - D_{n+1}R_{n+1})\hat{K}_{n+1}^T
\end{aligned} \tag{5.89}$$

Jak widać, równania filtracji stanu $\bar{x}_n$ wyznaczane przez koordynatora są skomplikowane. Macierze kowariancji oraz macierz wzmocnień mogą być wyznaczone przed realizacją sterowania. Kolejność ich wyznaczania przedstawiona jest na rys. 10.

Za warunki początkowe należy przyjąć $\bar{P}_{0|-1} = X_0$, $P_{-1} = 0$ oraz $\bar{P}_{-1} = 0$, co wynika z zależności:

$$\bar{x}_{-1} = \hat{x}_{-1} = Ex_{-1} \tag{5.90}$$

Oceny $\bar{x}_n$ są wyznaczane z równań (5.80), (5.81) z warunkiem początkowym

$$\bar{x}_0 = Ex_0 + \bar{K}_0(m_0 - F_0 E x_0), \tag{5.91}$$

co wynika z (5.80) i (5.81) dla $n = -1$ oraz z warunku $\bar{x}_{0|-1} = Ex_0$. Oceny stanu $\hat{x}_n^i$ wyznaczane przez $i-$tego lokalnego decydenta wynikają z równań (5.73) i (5.78) z warunkami początkowymi

$$\hat{x}_0^i = \bar{x}_0^i + \hat{K}_0^i(y_0^i - C_0^i\bar{x}_0^i), \tag{5.92}$$

co wynika z (5.73) po podstawieniu $\hat{x}_{0|-1+}^i = \bar{x}_0^i$, oraz z (5.78), (5.90).

### 5.2.3. Przykład

Rozważmy model systemu opisanego równaniami (5.51)-(5.55), dla których:

$$B_n^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_n^1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad A_n^{1,2} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_n^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_n^2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad A_n^{2,1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C_n^1 = C_n^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_n^1 = D_n^2 = [1 \;\; 1]$$

$$Q_n^1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_n^1 = 1$$

$$Q_n^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_n^2 = 2$$

Zakłócenia $w_n^1, w_n^2, r_n^1, r_n^2$ mają rozkłady normalne o zerowych wartościach średnich i macierzach kowariancji $W_n^1 = W_n^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $R_n^1 = R_n^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Warunek początkowy $x_0$ ma również rozkład normalny o zerowej wartości średniej i macierzy kowariancji $X_0^1 = X_0^2 = R_n^1$.

Z obliczeń numerycznych wynika, że macierze wzmocnień filtrów ustalają się do wartości

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 0.42 & -0.09 \\ 0.3 & 0.06 \\ -0.01 & 0.46 \\ -0.02 & 0.39 \end{bmatrix}, \quad \hat{K} = \begin{bmatrix} 0.43 & -0.05 \\ 0.05 & 0.38 \end{bmatrix}$$

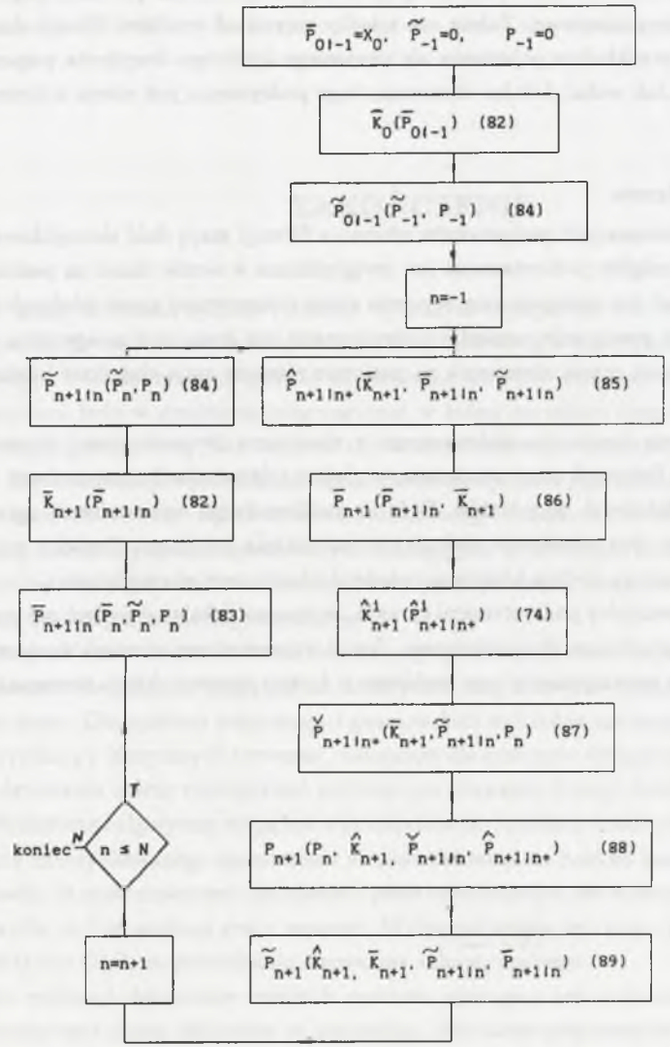
Optymalne prawa sterowania lokalnych decydentów oraz koordynatora wyrażają się wzorami:

$$u_n^1 = p_n^1$$

$$u_n^2 = p_n^2 - [0.18 \;\; 0.08][\hat{x}_n^2 - \bar{x}_n^2]$$

$$p_n = \begin{bmatrix} -0.22 & -0.14 & 0.15 & 0.25 \\ 0.64 & 0.59 & -0.27 & -0.23 \end{bmatrix} \bar{x}_n$$






Rys.10. Algorytm wyznaczania macierzy $\bar{K}_n$
Fig.10. Determination of the matrix $\bar{K}_n$

W pracy [39] podano warunki, przy których lokalny decydent nie powinien pojawić się w strukturze dwupoziomowej. Zależą one między innymi od wyników filtracji stanu. W analizowanym przykładzie pojawienie się pierwszego lokalnego decydenta pogarsza jakość sterowania. Jak widać, lokalne sterowanie tego podsystemu jest równe wytycznej koordynatora.

### 5.2.4. Uwagi końcowe

W przypadku powiązanych podsystemów równania filtracji mają dość skomplikowaną postać. Interakcja między podsystemami jest uwzględniana w ocenie stanu na poziomie wyższym, natomiast nie występuje ona w ocenie stanu dokonywanej przez lokalnych decydentów. Tak więc powiązanie pomiędzy podsystemami jest brane pod uwagę przez koordynatora, natomiast prawa sterowania na poziomie niższym mają charakter lokalny i zdecentralizowany.

Synteza algorytmu sterowania realizowanego w strukturze dwupoziomowej doprowadziła do uzyskania liniowych praw sterowania względem odpowiednich ocen zarówno koordynatora, jak i lokalnych decydentów. Było to możliwe dzięki wprowadzeniu ograniczenia elastycznego oraz dwoistemu traktowaniu sterowania lokalnego. Ponadto prawo sterowania koordynatora spełnia klasyczną zasadę stochastycznej równoważności.

Oddziaływanie pomiędzy podsystemami sprawia, że czasami lokalny decydent nie powinien pojawić się w strukturze dwupoziomowej. Został wyprowadzony warunek wystarczający, umożliwiający rozstrzygnięcie tego problemu w trakcie syntezy układu sterowania.

# ZAKOŃCZENIE

W pracy dokonano syntezy i analizy wybranych algorytmów sterowania w warunkach niepewności, realizowanych w strukturze dwupoziomowej z koordynatorem na poziomie wyższym i lokalnymi decydentami na poziomie niższym. Sformułowane problemy rozwiązywane były w strukturze informacyjnej, w której decydenci dysponują zróżnicowaną informacją pomiarową (*non-classical information pattern*), wykorzystywaną do sterowania. Do koordynacji wprowadzono ograniczenie elastyczne i jego odmiany, prowadzące do uzyskania sterowania częściowo zdecentralizowanego i obliczeniowo zdekomponowanego. Cechą charakterystyczną opracowanych strategii jest to, że lokalni decydenci mają pewną swobodę w podejmowaniu ostatecznych decyzji, dzięki czemu mogą oni lepiej wykorzystać swoją bardziej szczegółową informację.

Dla problemów liniowo-kwadratowych i przy ograniczeniu elastycznym optymalne prawa sterowania decydentów mają postać analityczną i są liniowymi funkcjami odpowiednich ocen stanu. Dla systemu statycznego i gaussowskich rozkładów zmiennych losowych oceny te wynikają z klasycznych rozważań, natomiast dla systemów dynamicznych przy realizacji sterowania należy rozwiązywać nieklasyczne równania filtracji stanu.

Opracowane algorytmy mogą być wykorzystane do problemu rozdziału zasobów. Uwzględnienie zmodyfikowanego ograniczenia nierównościowego na poziom zasobów w magazynie sprawia, że część zmiennych określanych przez koordynatora jest wyznaczana numerycznie w trybie on line podczas pracy systemu. Wykorzystywana jest przy tym idea sterowania w układzie OLF, co prowadzi do sterowania suboptymalnego.

Do realizacji algorytmów rozdziału zasobów wymagana jest pojemność rezerwowa wykorzystywana przez odbiorców w przypadku, gdy suma przyznanych zasobów przez lokalnych decydentów jest większa od ilości zasobów proponowanych przez koordynatora. Przy ograniczeniu elastycznym i braku innych ograniczeń na sterowanie lokalne wielkość tej pojemności nie zależy od decyzji koordynatora i może być wyznaczona eksperymentalnie lub analitycznie (dla pewnych rozkładów zmiennych losowych). Badania symulacyjne pokazują, że bardziej opłacalne jest przeznaczenie części zasobów na gromadzenie zapasów umożliwiających realizację algorytmu niż pozostawienie całości zasobów do dyspozycji koordynatora. Wynika stąd, że decentralizacja sterowania z wykorzystaniem informacji lokalnych decydentów daje lepsze rezultaty, niż centralne sterowanie z mniej szczegółową informacją koordynatora i zwiększoną ilością sterowanych przez niego zasobów. Otrzymane wyniki przemawiają za sterowaniem dwupoziomowym, częściowo zdecentralizowanym.

Brak kontroli koordynatora nad wielkością pojemności rezerwowej może prowadzić do przerwania realizacji algorytmu. Żeby temu zapobiec, wprowadzono dodatkowe ograniczenia na sterowanie, które sprawiają, że wielkość pojemności rezerwowej jest sterowana przez koordynatora i maleje wraz ze wzrostem deficytu. Istnieją przypadki, w których prowadzi to do poprawy jakości sterowania.

Do rozwiązania sformułowanych problemów zastosowano metodę optymalizacji parametrycznej lub metodę cen. Ta druga umożliwia zmniejszenie ilości zróżnicowanej informacji (wytycznych) przesyłanej lokalnym decydentom.

Dalsze zmniejszenie ilości informacji przekazywanej do i przetwarzanej przez koordynatora można osiągnąć przez zróżnicowanie częstotliwości podejmowania decyzji na obu poziomach.

Bardziej szczegółowe wnioski i uwagi są zamieszczone na końcu poszczególnych rozdziałów.

# LITERATURA


1. Aoki M.: Optimization of stochastic systems, Academic Press, NY, 1967
2. Aoki M.: Control of large scale dynamic systems by aggregation, *IEEE Trans. on AC*, AC-13, No. 3, 246-253, 1968
3. Åström K.J.: Introduction to Stochastic Control Theory, Academic Press, NY, 1970
4. Bayard D. S.: A Forward Method for Optimal Stochastic Nonlinear and Adaptive Control, *IEEE Trans. on AC*, AC-36, No. 9, 1046-1053, 1991
5. Bellman R.: Programowanie dynamiczne, PWN, Warszawa, 1967
6. Bertsekas P.D.: Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models, Prentice-Hall, NY, 1987
7. Boukas E.K., A. Świerniak, K. Simek and H. Yang: Robust stabilization and guaranteed cost control of large scale linear systems with jumps, *Kybernetica*, v. 33, No. 1, 121-131, 1997
8. Boukas E.K., A. Świerniak and H. Yang: Decentralized feedback controllers for uncertain interconnected systems with Markovian jumping parameters, *Applied Mathematics and Computer Science*, v.5, No. 3, 469-479, 1995
9. Boukas E.K., A. Świerniak and H. Yang: Hierarchical robust control of linear systems with jumps, *1st IFAC Workshop on "New trends in design of control systems"*, 240-243, Smolenice, 1994
10. Brdyś M., and P.D. Roberts: Optimal structures for steady-state adaptive optimising control of large scale industrial processes, *Int. J. Systems Sci.*, v. 18, 1305-1322, 1986
11. Camacho A.: Externalities, optimality and informationally decentralized resource allocation processes, *Int. Econ. Rev.*, No. 11, 318-327, 1970

12. Chong C.Y. and M. Athans: On the stochastic control of linear systems with different information sets, *IEEE Trans. on AC*, AC-16, No. 5, 423-430, 1971

13. Chong C.Y. and M. Athans: On the periodic coordination of linear stochastic systems, *Automatica*, v. 12, No. 4, 321-335, 1976

14. Chu K.C.: Team decision theory and information structure in optimal control problems, *IEEE Trans. on AC*, AC-17, No. 1, 22-28, 1972

15. Dreyfus S.E. and A.M. Law: The Art and Theory of Dynamic Programming, NY, Academic, 1977

16. Duda Z.: Dwupoziomowy hierarchiczny rozdział zasobów w warunkach niepewności przy zróżnicowanej częstotliwości podejmowania decyzji, *praca doktorska*, Gliwice, 1986

17. Duda Z.: Optymalny rozdział zasobów w dużym systemie statycznym przy ograniczeniach na parametry statystyczne sterowania, *XXIII Ogólnopolska Konferencja Zastosowań Matematyki*, 29-30, Zakopane, 1994

18. Duda Z.: Two-level allocation problem under constraints on control statistical parameters, *Archives of Control Sciences*, v. 5(XLI), No. 1-2, 109-119, 1996

19. Duda Z: Two-level resource allocation problem under control constraints, *Modelling and Simulation, ESM'96*, Society for Computer Simulation Int., 343-347, Budapeszt, 1996

20. Duda Z.: Wypukły problem rozdziału zasobów w dużym systemie z niepewnością, *XXV Ogólnopolska Konferencja Zastosowań Matematyki*, 31-32, Zakopane, 1996

21. Duda Z. and R. Gessing: O pewnym niekonwencjonalnym problemie filtracji stanu, *Archiwum Automatyki i Telemechaniki*, v. XXXIII, Z.1, 29-38, 1988

22. Duda Z. and R. Gessing: Two-level stochastic control with periodic coordination for a resource allocation problem, *Int. J. Systems Sci.*, v. 23, No. 2, 263-271, 1992

23. Duda Z. and R. Gessing: Two-level resource allocation with periodic coordination, *7th IFAC/IFORS/IIASA Confer. on Modelling and Control of National Economies*, 58-61, Beijing, 1992



24. Duda Z. and R. Gessing: Two-level allocation problem with control mean and variance constraints, *IFAC/IFORS/IMACS Symp. on Large Scale Systems: Theory and Applications*, 361-365, London, 1995

25. Findeisen W.: Wielopoziomowe układy sterowania, PWN, Warszawa, 1974

26. Findeisen W., F.N. Bailey, M. Brdyś, K. Malinowski, P. Tatjewski and A. Woźniak: Control and Coordination in Hierarchical Systems, Wiley, London, 1980

27. Findeisen W.: Decentralized and hierarchical control under consistency or disagreement of interests, *Automatica*, v. 18, No. 6, 647-664, 1982

28. Findeisen W.: Interests, structures and decisions in hierarchical control, *Control-Theory and Advanced Technology*, v. 2, No. 2, 77-103, 1986

29. Geromel J.C. and O.S. Silva Filho: Partial Closed-Loop Control Structure for Linear Stochastic Systems, *IEEE Trans. on AC*, AC-34, No. 2, 243-246, 1989

30. Gessing R.: Zasada minimalizacji i uśredniania jako metoda wyznaczania algorytmów sterowania statystycznie optymalnego, *Archiwum Automatyki i Telemechaniki*, T.21, Z.4, 447-465, 1976

31. Gessing R.: Zastosowanie zasady minimalizacji i uśredniania do wyznaczania algorytmów sterowania optymalnego, *Archiwum Automatyki i Telemechaniki*, T. XXI, Z.4, 467-482, 1976

32. Gessing R.: Uogólniona zasada stochastycznej równoważności i jej zastosowania, *Archiwum Automatyki i Telemechaniki*, T. XXIII, Z.4, 327-343, 1977

33. Gessing R.: Two-level hierarchical control for stochastic optimal resource allocation, *Int. J. Control*, v. 41, No. 1, 161-175, 1985

34. Gessing R.: Optimal control laws for two-level hierarchical resource allocation, *Large Scale Systems*, v. 12, No. 1, 69-82, 1987

35. Gessing R.: Optimal control laws for a two-level linear quadratic problem, *Analysis and Optimization of Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1988

36. Gessing R. and Z. Duda: Decentralized, stochastic control for a LQ-static problem, *IFAC/IMACS Int. Symp. on Distributed Intelligence Systems: Methods and Applications*, 181-186, Varna, 1988

37. Gessing R. and Z. Duda: Decentralized, stochastic control for a LQ-static problem, *selected papers from the IFAC/IMACS Symp. on Distributed Intelligence Systems: Methods and Applications*, 175-180, Oxford, 1989

38. Gessing R. and Z. Duda: Decentralized, stochastic control for a static LQ problem, *Int. J. Systems Sci.*, v. 21, No. 2, 397-405, 1990

39. Gessing R. and Z. Duda: Two-level stochastic LQ control problem for a dynamic system, *Int. J. Systems Sci.*, v. 21, No. 4, 711-722, 1990

40. Gessing R. and Duda Z., Two-level optimal resource allocation in a large scale system, *11th IFAC World Congress*, 74-78, Tallinn, 1990

41. Gessing R. and Z. Duda: Price coordination for a two-level control structure with different information of controllers, *IFAC Workshop on Automatic Control for Quality and Productivity ACQP'92*, 279-286, Türkiye, 1992

42. Gessing R. and Z. Duda: Resource allocation in large scale dynamic system with different information of controllers, *12th World Congress IFAC*, 299-302, Sydney, 1993

43. Gessing R., Z. Duda: Optymalne reguły decyzyjne rozdziału zasobów w strukturze dwupoziomowej, *Monografie Komitetu Gospodarki Wodnej PAN*, Z.4, 135-149, 1994

44. Gessing R. and Z. Duda: Price co-ordination for a resource allocation problem in a large-scale system, *Int. J. Systems Sci.*, v. 26, No. 11, 2245-2253, 1995

45. Gessing R. and Z. Duda: Two-level, partially decentralized resource allocation in a large scale dynamic system, *Archives of Control Sciences*, v. 4(XL), No. 3-4, 299-310, 1995

46. Ho Y.C.: Team Decision Theory and Information Structures, *IEEE Proc.*, v. 68, No. 6, 644-654, 1980

47. Ho Y.C. and T.S. Chang: Another look at the nonclassical information structure, *IEEE Trans. on AC*, AC-25, No. 3, 537-540, 1980



48. Ho Y.C. and Chu K.C.: Information structure in dynamic multi-person control problems, *Automatica*, v. 10, No. 4, 341-352, 1974

49. Jamshidi M.: Large Scale Systems- Modeling and Control, North Holland, 1983

50. Kassicieh K.: Evaluation of incentive structure strategies in resource allocation problems, *Large Scale Systems*, v. 10, 193-202, 1986.

51. Kurtaran B., and R. Sivan: LQG control with one step delay sharing pattern, *IEEE Trans. on AC*, AC-19, No. 5, 571-574, 1974

52. Lasdon L.S.: Optimization theory for large systems, Mac Milan, NY, 1970

53. Lasserre J.B., C. Bes and F. Roubellat: On the Open-Loop Solution of Linear Stochastic Optimal Control Problems, *IEEE Trans. on AC*, AC-29, No. 6, 562-564, 1984

54. Li D.: Hierarchical Control for Large-Scale Systems with General Multiple Linear-Quadratic Structure, *Automatica*, v. 29, No. 6, 1451-1461, 1993

55. Lin J., Z. Amini and P.D. Roberts: New coordination strategy for on-line hierarchical optimizing control of large industrial processes, *Int. J. Control*, v.54, No. 5, 1075-1096, 1991

56. Lin J., C. Han, P.D. Roberts and B. Wan: New approach to stochastic optimising control of steady state using dynamic information, *Int. J. Control*, v. 50, No. 6, 2205-2235, 1989.

57. Lin J., M. Wang, and P.D. Roberts: A composite dynamic and steady state approach to stochastic optimizing control of steady state systems with output dependent constraints, *Proc. of the IEE*, v. 138, 123-138, 1991.

58. Luenberger D.G.: Teoria optymalizacji, PWN, Warszawa, 1974

59. Luus R.: Application of dynamic programming to high-dimensional non-linear optimal control problems, *Int. J. Control*, v. 52, No. 1, 239-250, 1990

60. Malinowski K.: Practical issues of coordination and control and optimization of large-scale stochastic systems, *Stochastic large-scale engineering systems*, Marcell Dekker Inc., NY, 1992

61. Meditch J.S.: Estymacja i sterowanie statystycznie optymalne w układach liniowych, WNT, Warszawa, 1975

62. Meier L., R.F. Larson and A.I. Tether: Dynamic programming for stochastic control of discrete systems, *IEEE Trans. on AC*, AC-16, No. 6, 767-775, 1971

63. Mesarovic M.D., D. Macko and Y. Takahara: Theory of hierarchical multilevel systems, Academic Press, NY, 1970

64. Papoulis A.: Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne, WNT, Warszawa, 1972

65. Radner R.: Allocation in a scare resource under uncertainty, in *Decision and Organization*, Amsterdam, 1972

66. Sandell N.R. and M. Athans: Solution of some nonclassical LQG stochastic decision problem, *IEEE Trans. on AC*, AC-19, No. 2, 108-115, 1974

67. Sandell N.R., P. Varaiya, M. Athans and M. Safonov: Survey of decentralized control methods for large-scale systems, *IEEE Trans. on AC*, AC-23, No. 2, 108-128, 1978

68. Sethi S.P. and Q. Zhang: Multilevel hierarchical decision making in stochastic marketing-production systems, *SIAM J. Control and Optimization*, v. 33, No. 2, 528-553, 1995

69. Singh M. G.: Dynamical Hierarchical Control, North-Holland, Amsterdam, 1977

70. Šiljak D.D. and M.K. Sundareshan: A multi-level optimization of large scale dynamic systems, *IEEE Trans. on AC*, AC-21, No. 1, 79-84, 1976

71. Tamura H. and T. Yoskikawa: Large-Scale Systems Control and Decision Making, Marcell Dekker Inc., NY, 1990

72. Tatjewski P.: On line hierarchical control of steady state systems using the augmented interaction balance method with feedback, *Large Scale Systems*, v. 8, 1-18, 1985

73. Tatjewski P., N. Abdullah, and P.D. Roberts: Comparison of some algorithms for hierarchical steady-state optimising control of interconnected industrial systems, *Proc. of the IEE Int. Confer. Control'88*, 527-531, 1988



74. Tse E. and M. Athans: Adaptive stochastic control for a class of linear systems, *IEEE Trans. on AC*, AC-17, No. 1, 38-52, 1972

75. Witsenhausen H.S.: A counterexample in stochastic optimal control, *SIAM J. Control*, v. 6, No. 1, 131-147, 1968

76. Witsenhausen H.S.: Separation of estimation and control for discrete-time systems, *Proc. IEEE*, No. 9, 1557-1566, 1971

77. Wojciechowski K., Z. Duda: Optymalny rozdział zasobów wody w systemie: przypadek odbiorców statycznych, *ZN Pol. Śl., s. Automatyka*, Z.68, 165-175, 1983

78. Wojciechowski K., Z. Duda: Sterowanie rozdziałem zasobów w warunkach niepewności, *ZN Pol. Śl., s. Automatyka*, Z.76, 149-158, Gliwice, 1984

79. Wojciechowski K. and Z. Duda: Decentralized resource allocation in large scale system under uncertaint conditions, *System Science*, v. 9., No. 3, 31-37, 1983

# DWUPOZIOMOWE STEROWANIE ROZDZIAŁEM ZASOBÓW W DUŻYCH SYSTEMACH W WARUNKACH LOSOWYCH


## Streszczenie

Praca zawiera wyniki syntezy i analizy algorytmów rozdziału zasobów w dużych systemach w warunkach losowych. Rozpatrywane są systemy składające się z odbiorców zasobów (podsystemów) oraz magazynu, z którego zasoby te są pobierane. Losowość wynika z niepełnej znajomości zapotrzebowań odbiorców, dopływu oraz wielkości zasobów w magazynie.

Celem syntezy jest konstrukcja praw sterowania, dla których wskaźnik jakości wyrażający straty w systemie przyjmuje minimalną wartość.

Złożoność opracowywanych algorytmów zależy od przyjętej struktury układu sterowania i struktury informacyjnej. W pracy zakłada się, że sterowanie realizowane jest w dwupoziomowej strukturze hierarchicznej z koordynatorem na poziomie wyższym i lokalnymi decydentami na poziomie niższym, dysponującymi zróżnicowaną informacją.

Do koordynacji wprowadza się tzw. ograniczenie elastyczne oraz jego modyfikacje, które umożliwiają decentralizację sterowania i dekompozycję obliczeń. Za zmienne koordynujące uważa się oceny (średnie warunkowe) sterowań lokalnych decydentów, wyznaczane przez koordynatora na poziomie wyższym. Ograniczenie elastyczne jako równanie koordynacji daje lokalnym decydentom pewną swobodę w podejmowaniu decyzji, dzięki czemu mogą oni lepiej wykorzystać do sterowania swoją bardziej szczegółową informację.

Pokazano, że dla kwadratowego wskaźnika jakości lokalne prawa sterowania mają postać analityczną, a obliczenia numeryczne, wynikające z nierównościowego ograniczenia na wielkość zasobów w magazynie, sprowadzają się jedynie do wyznaczania przez koordynatora wartości tzw. zmiennych zagregowanych. Jest to zadanie dynamiczne, którego rozwiązanie w pracy oparto na idei sterowania w układzie otwartym ze sprzężeniem (OLF).

Do realizacji opracowanych algorytmów wymagana jest pewna "pojemność rezerwowa" w magazynie, wykorzystywana czasami przez lokalnych decydentów. Przy pewnych założeniach określono jej wielkość analitycznie.

Z badań symulacyjnych wynika, że bardziej opłaca się przeznaczyć część pojemności magazynu na gromadzenie zasobów, niż pozostawić ją całą do dyspozycji koordynatora.

Dokonano też syntezy algorytmów sterowania przy dodatkowych ograniczeniach na wariancję, na znak oraz na prawdopodobieństwo realizacji nieujemnych sterowań lokalnych.

Dla statycznego problemu skalarnego i przy założeniu braku przesyłu bieżącej informacji z podsystemów do koordynatora uzyskane wyniki badań symulacyjnych wskazują na lepsze własności opracowanego algorytmu w porównaniu z poprzednimi strategiami, prowadzącymi czasami do realizacji sterowań suboptymalnych.

W pracy przedstawiono również algorytmy sterowania realizowanego w dwupoziomowej strukturze hierarchicznej dla przypadku kwadratowego wskaźnika jakości i dynamicznych podsystemów opisanych różnicowymi równaniami liniowymi. Sterowania decydentów zależą między innymi od ocen stanu dokonywanych zarówno przez koordynatora, jak i lokalnych decydentów. Przy zróżnicowanej informacji prowadzi to do niekonwencjonalnych równań filtracji, obowiązujących na poziomie wyższym.

Idea ograniczenia elastycznego jako równania koordynacji została wykorzystana do syntezy praw sterowania dla systemu składającego się z powiązanych poprzez interakcję podsystemów zarówno statycznych, jak i dynamicznych. W przypadku dynamicznym równania filtracji mają dość skomplikowaną postać. Interakcja pomiędzy podsystemami jest uwzględniana w ocenie stanu na poziomie wyższym, natomiast prawa sterowania na poziomie niższym mają charakter lokalny i zdecentralizowany.

Oddziaływanie pomiędzy podsystemami sprawia, że czasami lokalny decydent nie powinien pojawić się w strukturze dwupoziomowej. W pracy został wyprowadzony warunek wystarczający, umożliwiający rozstrzygnięcie tego problemu w trakcie syntezy algorytmu sterowania.

# TWO-LEVEL RESOURCE ALLOCATION IN LARGE SCALE SYSTEMS UNDER RANDOM CONDITIONS

## Summary

Synthesis and analysis of resource allocation in large scale systems are presented. Systems containing receivers (subsystems) and a storage reservoir are considered. Randomness results from incomplete knowledge of receiver demands, an inflow and an amount of resources in the storage reservoir.

The problem is to construct control laws for which a performance index representing losses in the system takes a minimal value.

The form and complexity of the solution depend on information and control structures. In the monograph it is discussed a two-level hierarchical control structure with a coordinator on the upper level and local controllers on the lower level having different information. The coordinator has essential information for the whole system, while the local controllers have more detailed information concerning the particular subsystems.

An elastic constraint and its modifications are introduced to coordination. Owing to this it is possible to partially decentralize control actions and to decompose calculations. The coordinate variables are estimates (conditional means) of local controls determined by the coordinator. The elastic constraint, as the coordination constraint, allows some freedom in taking decisions by local decision makers, which can better utilise their more detailed information. It is shown that for quadratic performance index local control laws have an analytical form. Values of aggregated variables are determined by the coordinator in numerical calculations resulting from an inequality constraint on the storage reservoir capacity. It is a dynamic problem, which is solved in the open loop feedback (OLF) control structure.

Some "reserve capacity" in the storage reservoir is needed to realize the control strategies. It can be determined (under some assumptions) in an analytical way. From numerical calculations it results, that it is wortwhile to devote a part of the reservoir for creating the "reserve capacity".

Synthesis of control algorithms under additional constraints on control variance, control sign and nonnegative control realization probability is presented. For a static scalar problem and without transmiting any information from the local controllers to the coordinator, numerical results show that the strategy is better than previous ones.

For quadratic performance index and dynamic linear discrete subsystems control strategies are presented. Control variables depend on state estimates made by decision makers. Non - conventional filtering equations resulting from different information should be solved by the coordinator.

Control strategies with the elastic constraint are made for a system consisting of interconnected static or dynamic subsystems. In dynamic case filtering equations have rather complicated form. Local control laws are decentralized while interaction is taken into account by the coordinator. It is possible that some local controllers should not appear in the two-level structure. Derived sufficient condition allows to investigate this problem in the control synthesis.