Aleksander KRÓL
Politechnika Śląska
Wydział Transportu

SIECI BAYESOWSKIE JAKO NARZĘDZIE WSPOMAGAJĄCE PROCES PODEJMOWANIA DECYZJI

Streszczenie. W trakcie podejmowania decyzji często istnieje konieczność wykorzystania informacji, które są niepewne lub niekompletne. Wśród wielu narzędzi formalnych wspomagających proces podejmowania decyzji godne uwagi wydają się sieci bayesowskie (przekonaniowe). Ich nazwa pochodzi od zajmującego ważne miejsce w rachunku prawdopodobieństwa i statystyce twierdzenia Bayesa, które postuluje rewizję wcześniejszych przekonań w świetle nowych faktów. Wiedza dziedzinowa jest tu zakodowana w postaci grafu, którego topologia naśladuje przyczynową strukturę dziedziny.
Słowa kluczowe: systemy decyzyjne, sieci bayesowskie, wartość informacji.

BAYESIAN NETWORKS AS A TOOL FOR SUPPORTING DECISION MAKING

Summary. When decision making there is often a need to use information that is uncertain or incomplete. Among many formal tools for supporting decision-making process Bayesian networks (belief) seem to be noteworthy. The name origins from Bayes' theorem, occupying an important place in probability and statistics, which postulates a revision of the earlier beliefs in the light of new facts. The knowledge is here encoded in the form of a graph, which mimics the topology of the causal structure of the domain.
Keywords: decision systems, bayesian networks, value of information.

1. Wprowadzenie

Sieci bayesowskie w sposób graficzny reprezentują probabilistyczne zależności przyczynowo-skutkowe pomiędzy różnymi zmiennymi losowymi, odpowiadające zdarzeniom lub informacjom. Jest to jedna z metod prezentacji wiedzy w systemach eksperckich, szczególnie ułatwiają wnioskowanie w warunkach niepewności. Podobnie jak inne metody sztucznej inteligencji, mogą być narzędziami wspomagającymi proces podejmowania decyzji.

2. Podstawowe pojęcia

2.1. Własności prawdopodobieństwa

Prawdopodobieństwo $P(A)$ jest wielkością opisującą szanse zajścia zdarzenia *A*. Nie istnieje jednoznaczna metoda obliczania prawdopodobieństwa, ani nawet jednoznaczna jego interpretacja. Bardzo często realne procesy są zbyt złożone, aby obliczyć prawdopodobieństwo ich zajścia z pewnych podstawowych własności albo zbyt rzadkie, aby posłużyć się danymi historycznymi. W wielu rzeczywistych sytuacjach ma zatem zastosowanie subiektywne prawdopodobieństwo bayesowskie, bazujące na stanie wiedzy osoby dokonującej wnioskowania. Niezależnie od sposobu dokonania obliczeń, funkcja rzeczywista określona na zbiorze zdarzeń może być traktowana jako prawdopodobieństwo, jeżeli spełnia aksjomaty Kołmogorowa:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \tag{1}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) <=> A \cap B = \emptyset \tag{2}$$

Należy zauważyć, że zaistnienie pewnego zdarzenia może mieć wpływ na prawdopodobieństwo zajścia pewnego, innego zdarzenia – niektóre fakty mogą zmienić nasze uprzednie założenia dotyczące prawdopodobieństw. Ten związek pomiędzy prawdopodobieństwami zdarzeń jest formalnie opisany przez pojęcie prawdopodobieństwa warunkowego. Prawdopodobieństwo warunkowe $P(A|B)$ zdarzenia A przy założeniu, że zaszło zdarzenie B jest wyrażone jako:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0 \tag{3}$$

$P(A \cap B)$ jest prawdopodobieństwem łącznego zajścia zdarzeń *A* i *B*. Jeśli $P(A|B) = P(A)$, to zajście zdarzenia *B* nie wpłynęło na prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia *A* i wtedy te dwa zdarzenia są niezależne. Zatem dla zdarzeń niezależnych mamy:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{4}$$

Jeśli jakieś zdarzenie *B* może zajść na kilka wzajemnie wykluczających się sposobów A_i, które wyczerpują wszystkie możliwości (a których prawdopodobieństwa $P(A_i)$ są znane), jego prawdopodobieństwo może być wyrażone jako prawdopodobieństwo zupełne:

$$P(B) = \sum_i P(A_i)P(B|A_i) \tag{5}$$

Wspomnianą powyżej ewentualną konieczność rewizji pierwotnych założeń dotyczących prawdopodobieństw w świetle nowych faktów wyraża ilościowo twierdzenie Bayesa:

- właśnie zaszło zdarzenie *B*, które mogło zajść na kilka wzajemnie wykluczających się sposobów, a którego prawdopodobieństwo zostało obliczone za pomocą wzoru (5),
- ta wiedza pozwala na ponowne obliczenie prawdopodobieństwa zajścia każdego ze zdarzeń A_k – od pierwotnej wartości $P(A_k)$ dochodzimy do nowej wartości $P(A_k|B)$:

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k)P(B \mid A_k)}{P(B)} \tag{6}$$

Mimo pozornej prostoty powyższy formalizm pozwala wyjaśnić pewne paradoksy związane z interpretacją prawdopodobieństwa. Jeden z takich paradoksów można zilustrować przykładem pewnego procesu produkcyjnego, w którym gotowe wyroby poddane są testowi jakości. Test wydaje się być wiarygodny, ale nie jest idealny – może zdyskwalifikować wyrób dobrej jakości (zdarzenie *F*+), a zaakceptować wyrób wadliwy (zdarzenie *F*–). Przyjmijmy następujące założenia:

- prawdopodobieństwo fałszywego pozytywnego wyniku $P(F+) = 0{,}01$,
- prawdopodobieństwo fałszywego negatywnego wyniku $P(F-) = 0{,}05$,
- jeden wyrób na tysiąc może być wadliwy $P(WADA) = 0{,}001$.

Wtedy korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo zupełne (5) można obliczyć prawdopodobieństwo wyniku pozytywnego (zgłoszenie wady) i prawdopodobieństwo wyniku negatywnego (akceptacja wyrobu):

$$P(+) = P(WADA)\big(1 - P(F-)\big) + (1 - P(WADA))P(F+) = 0{,}01094 \tag{7}$$

$$P(-) = P(WADA)P(F-) + \big(1 - P(WADA)\big)\big(1 - P(F+)\big) = 0{,}98906 \tag{8}$$

Teraz korzystając ze wzoru Bayesa (6) można sprawdzić, co w rzeczywistości oznacza wynik pozytywny testu – zgłoszenie wyrobu jako wadliwego:

$$P(DOBRY \mid +) = \frac{(1 - P(WADA))P(F+)}{P(+)} = 0.91316 \tag{9}$$

$$P(WADA \mid +) = \frac{P(WADA)(1 - P(F-))}{P(+)} = 0.08684 \tag{10}$$

Jak można więc zauważyć, pomimo że opisywany test sprawia wrażenie wiarygodnego, wynik pozytywny wcale nie oznacza wykrycia wadliwego wyrobu – wprost przeciwnie, prawdopodobieństwo, że zakwestionowany wyrób jest dobrej jakości jest większe od 90%.

W przypadku wyniku negatywnego – akceptacji wyrobu test zachowuje się zgodnie z potocznymi oczekiwaniami:

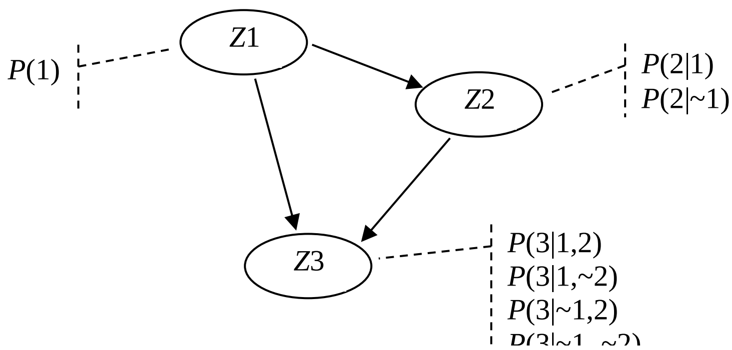
$$P(DOBRY \mid -) = \frac{(1 - P(WADA))(1 - P(F+))}{P(-)} = 0.99995 \tag{11}$$

$$P(WADA \mid -) = \frac{P(WADA)P(F-)}{P(-)} = 0.00005 \tag{12}$$

Obliczone wartości (11) i (12) sugerują, że wyrób zaakceptowany przez test może być praktycznie traktowany jako dobry jakościowo.

2.2. Sieci bayesowkie

Sieć bayesowska to acykliczny graf skierowany. Każdy wierzchołek reprezentuje zmienną losową, a krawędzie reprezentują relacje przyczynowo-skutkowe pomiędzy tymi zmiennymi losowymi. Dla każdego wierzchołka X jest zdefiniowana tablica prawdopodobieństw warunkowych $P(X|P_1, P_2, ...)$, gdzie P_1, P_2, … są bezpośrednimi rodzicami X. Dla wierzchołków bez rodziców (tzw. przyczyn pierwotnych) prawdopodobieństwa warunkowe sprowadzają się do prostych prawdopodobieństw. Rysunek 1 przedstawia prostą sieć bayesowską z trzema binarnymi zmiennymi losowymi (przyjmującymi tylko dwie wartości: prawda i fałsz) [1].



Rys. 1. Struktura prostej, binarnej sieci bayesowskiej
Fig. 1. The structure of a simple, binary bayesian network

W ogólności topologia grafu sieci bayesowskiej odwzorowuje przyczynowo-skutkową strukturę rozpatrywanej dziedziny. Topologia sieci jest z reguły konstruowana przy udziale ekspertów, choć istnieje wiele prac, gdzie pokazano możliwość jej automatycznej generacji. Prawdopodobieństwa warunkowe związane z każdym wierzchołkiem sieci mogą być również ustalone na podstawie wiedzy ekspertów, istnieje też możliwość określenia ich w procesie automatycznego uczenia, na podstawie zgromadzonych danych statystycznych [3].

2.3. Wnioskowanie w sieci bayesowkiej

Sieć bayesowska określając relacje pomiędzy zmiennymi losowymi pozwala obliczyć prawdopodobieństwa zajścia zdarzeń reprezentowanych przez te zmienne losowe. Zastosowanie praktyczne sieci bayesowkiej polega na wprowadzeniu do niej tych informacji, które są aktualnie dostępne – ustaleniu wartości niektórych zmiennych losowych, a następnie aktualizacji rozkładów prawdopodobieństw dla pozostałych zmiennych losowych.

Ponieważ liczba możliwych stanów sieci jest bardzo duża – dla sieci o n zmiennych binarnych wynosi 2^n, więc algorytmy dokonujące aktualizacji wartości prawdopodobieństw są obliczeniowo złożone. W skrajnie niekorzystnych przypadkach są to problemy klasy NP. W praktyce jednak dla sieci złożonych z dziesiątek lub nawet setek wierzchołków czasy aktualizacji są rzędu ułamków sekund lub sekund [2, 6].

3. Modelowanie systemów decyzyjnych

Rozwiązywanie teoretycznych modeli problemów decyzyjnych polega na obliczaniu oczekiwanej użyteczności dla możliwych decyzji i wybraniu tej, dla której wartość jest największa. Użyteczność jest miarą subiektywnych preferencji i jest funkcją, która liczbę rzeczywistą przyporządkowuje możliwym rezultatom podjętych decyzji. Użyteczność powinna być określona przy udziale eksperta [7].

3.1. Oprogramowania realizujące wnioskowanie bayesowskie

Mimo że zasady wnioskowania bayesowskiego wynikają wprost z podstaw rachunku prawdopodobieństwa i nie są trudne w zrozumieniu, to jego praktyczne zastosowanie w złożonych systemach wymaga użycia dedykowanych pakietów oprogramowania. Jednym z najbardziej znanych jest pakiet GeNIe, opracowany przez zespół z Decision Systems Laboratory na Uniwersytecie w Pittsburghu pod kierownictwem prof. Marka Drużdżela [4]. Pakiet GeNIe implementuje klasyczny model sieci bayesowskiej z dodatkowymi elementami wspomagającymi zastosowania diagnostyczne i procesy podejmowania decyzji. Graf odpowiadający sieci bayesowkiej wraz z dodatkowymi węzłami reprezentującymi różne warianty decyzji i węzłami obliczającymi odpowiadające im użyteczności tworzy diagram wpływu [5].

4. Przykład prostego systemu decyzyjnego

Aby zilustrować zastosowanie sieci bayesowskich do budowy systemów wspomagających proces podejmowania decyzji przy użyciu pakietu GeNIe zbudowano prosty model gry z naturą. Załóżmy, że podejmujący decyzję ma do wyboru trzy możliwości działania, a natura może przyjmować trzy stany. Szacowane skutki finansowe dla każdej z decyzji przy każdym ze stanów natury przedstawiono w tabeli 1.

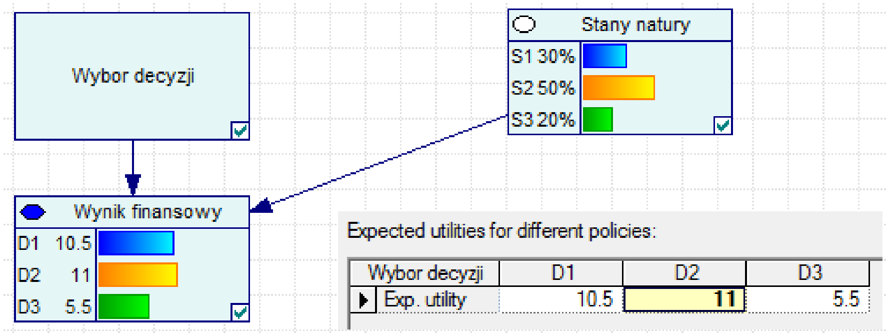
Tabela 1

Tabela wypłat

Decyzja	Stan natury		
	S_1	S_2	S_3
D_1	5	10	20
D_2	-5	25	0
D_3	15	0	5

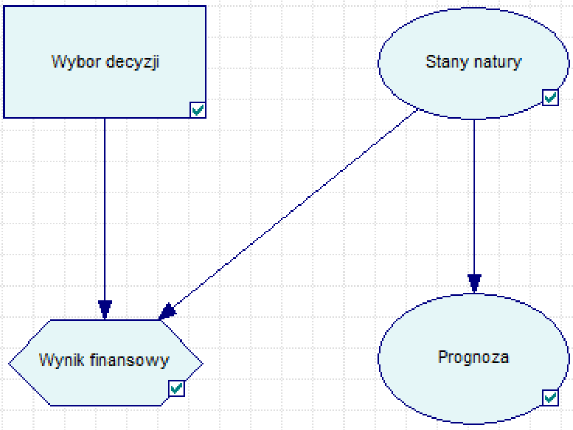
Źródło: opracowanie własne.

Prawdopodobieństwa wystąpienia poszczególnych stanów natury są znane podejmującemu decyzję i wynoszą odpowiednio: $P(S_1) = 0.3$, $P(S_1) = 0.5$, $P(S_2) = 0.2$. Diagram wpływu dla tej sytuacji pokazano na rys. 2. Jako wartość użyteczność przyjęto szacowany wynik finansowy według tabeli wypłat.



Rys. 2. Diagram wpływu i obliczona wartość użyteczności
Fig. 2. Influence diagram and calculated utility value

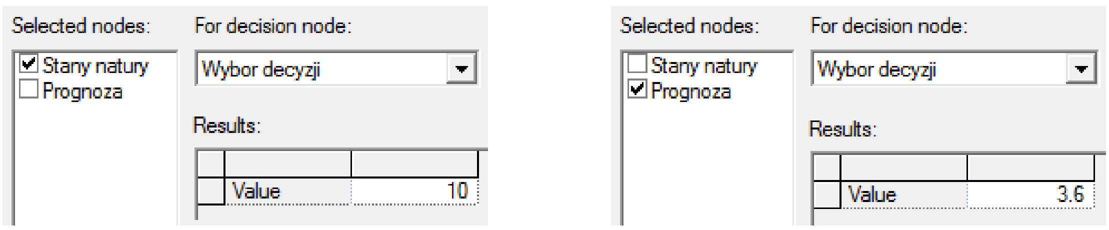
Uzyskany wynik dla tak prostego przypadku jest trywialny i zgodny z wynikiem obliczonym przy zastosowaniem kryterium Bayesa. Należy jednak pamiętać, że w rzeczywistości podejmujący decyzję z reguły nie zna wprost prawdopodobieństw wystąpienia stanów natury i musi opierać się na prognozach ekspertów. Prognozy te są zaś obarczone niepewnością. Sytuację taką można zamodelować wprowadzając do diagramu wpływu nowy węzeł. Węzeł ten odpowiadający procesowi opracowania prognozy jest następnikiem węzła „Stan natury", a związane z nim prawdopodobieństwa warunkowe reprezentują omylność eksperta. Założono, że z prawdopodobieństwem 0.60 ekspert jest w stanie przewidzieć prawidłowo przyszły stan natury, z prawdopodobieństwem 0.15 jego prognoza będzie niepoprawna, a z prawdopodobieństwem 0.10 ekspert nie będzie potrafił podać swoich przewidywań (rys. 3).



Stany natury	S1	S2	S3
Prawdopodobnie_S1	0.6	0.15	0.15
Prawdopodobnie_S2	0.15	0.6	0.15
Prawdopodobnie_S3	0.15	0.15	0.6
Prognoza_watpliwa	0.1	0.1	0.1

Rys. 3. Diagram wpływu wraz z węzłem „Prognoza”
Fig. 3. Influence diagram with “Prognoza” node

Oczywiste jest, że jakakolwiek informacja co do przyszłego stanu natury ma dla podejmującego decyzję kluczową wartość. Algorytm operujący na prezentowanym tutaj diagramie wpływu pozwala na ilościowe określenie tej wartości: gdyby w dowolny sposób można pozyskać pewną informację o przyszłym stanie natury, to jej wartość dla podejmującego decyzję w tym modelowym przypadku wynosiłaby 10 (rys. 4a); jeśli zaś podejmujący decyzję zmuszony jest opierać się na obarczonej niepewnością prognozie eksperta, to taka informacja ma wartość 3.6 (rys. 4b).

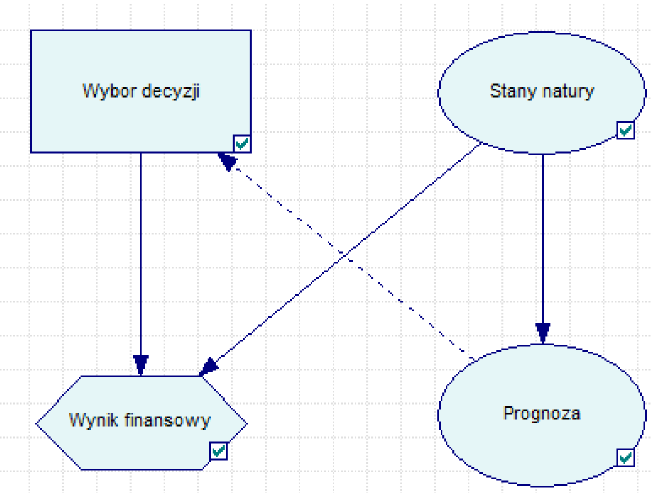


a) b)

Rys. 4. Wartość informacji dla podejmującego decyzję
Fig. 4. Value of information for the decision maker

Wartość informacji może być liczbą dodatnią, wtedy jej wykorzystanie skutkuje zwiększeniem spodziewanej użyteczności, może mieć wartość zero, wtedy uzyskana informacja jest nieistotna z punktu widzenia podejmowanej decyzji.

Podejmujący decyzję powinien więc wykorzystać prognozę. Wpływ posiadania informacji na proces podejmowania decyzji zaznaczono dodatkowym łukiem na diagramie wpływu. Dodatkowa informacja, mimo swojej niepewności, sprawia, że oczekiwana wartość spodziewanej użyteczności nigdy nie będzie mniejsza niż bez niej.



Expected utilities for different policies:

Prognoza	Prawdopodobnie_S1		
Wybor decyzji	D1	D2	D3
Exp. utility	7.8947368	3.4210526	**10**
Prognoza	Prawdopodobnie_S2		
Wybor decyzji	D1	D2	D3
Exp. utility	10.2	**19.4**	2.2
Prognoza	Prawdopodobnie_S3		
Wybor decyzji	D1	D2	D3
Exp. utility	**14.0625**	6.875	5.3125
Prognoza	Prognoza_watpliwa		
Wybor decyzji	D1	D2	D3
Exp. utility	10.5	**11**	5.5

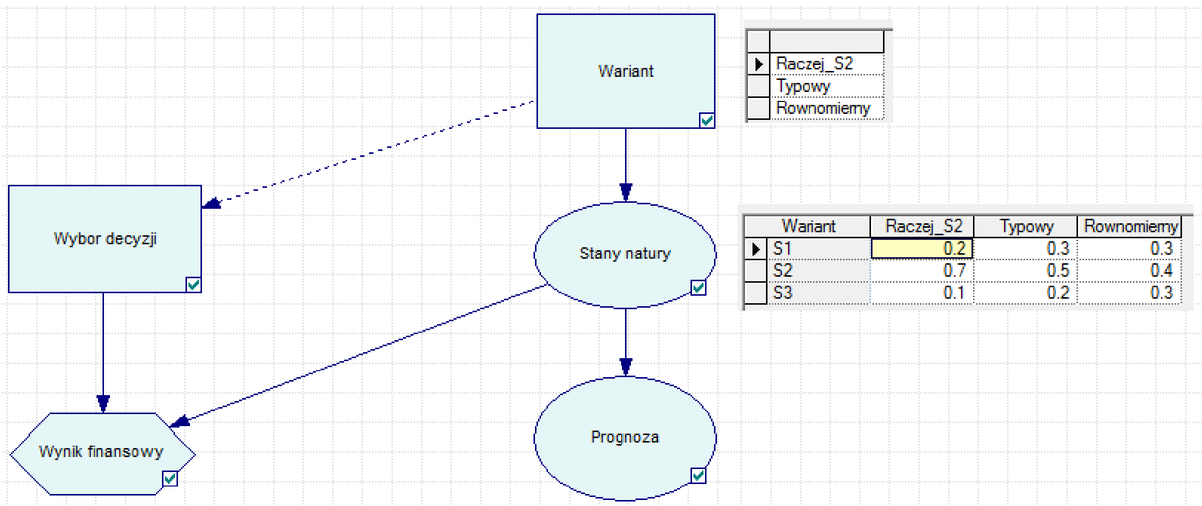
Rys. 5. Wykorzystanie prognozy eksperta przy podejmowaniu decyzji
Fig. 5. The use of an expert forecasts when deciding

Porównanie pierwotnego modelu (rys. 2) z modelem uwzględniającym informacje dostarczone przez prognozę eksperta (rys. 5) jednoznacznie to ilustruje. Jedynie, gdy ekspert nie jest w stanie podać prognozy obie sytuacje są takie same.

Diagramy wpływu umożliwiają ponadto przeprowadzenie analizy wrażliwości badanego modelu na wartości parametrów wejściowych. Przypuśćmy, że przyjęte pierwotnie wartości prawdopodobieństwa stanów natury są w miarę dobrze określone na podstawie zebranych danych, ale wykluczyć nie można sytuacji, że nieco inne wartości tych prawdopodobieństw również odpowiadałyby sytuacji rzeczywistej. Możemy te inne rozkłady prawdopodobieństw wprowadzić do modelu i następnie zbadać jego zachowanie. W tym celu do diagramu dodajemy nowy węzeł decyzyjny, który będzie sterował wyborem wariantu rozkładu prawdopodobieństwa (rys. 6). Założono trzy możliwe warianty rozkładu prawdopodobieństwa:

- „raczej S_2", w którym prawdopodobieństwo zaistnienia stanu S_2 jest znacząco większe niż pozostałych,
- „typowy" – identyczny z rozkładem pierwotnym,
- „równomierny", w którym wszystkie stany natury mają zbliżone prawdopodobieństwa zaistnienia.

Teraz prawdopodobieństwa w węźle „Stan natury" są prawdopodobieństwami warunkowymi i w zależności od wybranego wariantu rozkładu przyjmują odpowiednie wartości.



Rys. 6. Testowanie różnych wariantów danych wejściowych
Fig. 6. Testing different variants of the input data

Po aktualizacji sieci zostają obliczone wartości spodziewanej użyteczności dla podejmowanych decyzji w zależności od wariantu (rys. 7a). Zostają również zmodyfikowane rozkłady prawdopodobieństw w każdym węźle sieci. W prezentowanym modelu będą to między innymi prawdopodobieństwa uzyskania poszczególnych prognoz od ekspertów (rys. 7b).

Expected utilities for different policies:

Wariant	Raczej_S2	Typowy	Rownomiemy
D1	10	10.5	**11.5**
D2	**16.5**	**11**	8.5
D3	3.5	5.5	6

a)

Conditional marginal probability distributions:

Wariant	Raczej_S2	Typowy	Rownomiemy
Prawdopodobnie_S1	0.24	0.285	0.285
Prawdopodobnie_S2	0.465	0.375	0.33
Prawdopodobnie_S3	0.195	0.24	0.285
Prognoza_watpliwa	0.1	0.1	0.1

b)

Rys. 7. a) Wyniki finansowe dla różnych wariantów rozkładu prawdopodobieństwa zaistnienia stanów natury, b) spodziewane prognozy ekspertów
Fig. 7. a) Financial gains for different variants of the probability distribution of the occurrence of states of nature, b) the expected experts forecasts

Jak można zauważyć w dość szerokim zakresie zmienności danych wejściowych decyzja sugerowana przez model jest taka sama (D_2). Jedynie dla wariantu „równomierny" optymalna decyzja jest inna niż pierwotnie. Stosując więc tego typu analizę dla danych znanych tylko w przybliżeniu można zbadać wrażliwość modelowanego systemu decyzyjnego na ewentualne błędy w szacowaniu wartości danych wejściowych.

5. Podsumowanie

Budowa sieci bayesowskiej i diagramu wpływu modelujących dany problem decyzyjny dostarcza wydajnego narzędzia wspomagającego lub nawet automatyzującego proces podejmowania decyzji. Niezależnie od ewentualności takiego praktycznego zastosowania diagramy wpływu pozwalają na wgląd w problem decyzyjny. Można zbadać jakościowo jego strukturę, poznać zmienne mające wpływ na problem, poznać występujące przyczyny niepewności i sposoby jej redukcji. Symulacje ułatwiają rozpoznanie możliwych decyzji alternatywnych i związanych z nimi wartości spodziewanej użyteczności. Możliwe jest określenie wartości możliwej do pozyskania informacji oraz badanie wrażliwości podejmowanych decyzji na dane wejściowe. Ten poznawczy aspekt zastosowania sieci bayesowskich wydaje się równie ważny.

Bibliografia

1. Bolstad W.M.: Introduction to Bayesian statistics. Wiley-Interscience, 2004.
2. Cheng J., Druzdzel M.J.: AIS-BN: An adaptive importance sampling algorithm for evidential reasoning in large Bayesian networks. Journal of Artificial Intelligence Research, Vol. 13, 2000, pp. 155-188,
3. Heckerman D., Geiger D., Chickering D.M.: Learning Bayesian networks: the combination of knowledge and statistical data, Machine Learning 20 (3), 1995, pp. 197-243.
4. http://genie.sis.pitt.edu/
5. Owczarek T.: Modelowanie sytuacji decyzyjnych przy wykorzystaniu diagramów wpływu, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Organizacja i Zarządzanie, z. 45, Wyd. Pol. Śląskiej, Gliwice 2008.
6. Yuan C., Druzdzel M.J.: An importance sampling algorithm based on evidence pre-propagation. Proceedings of the 19th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence, Morgan Kaufmann Publishers Inc., 2003, pp. 624-631.
7. Zaleski Z.: Model SEU jako narzędzie analizy procesów decyzyjnych. Roczniki Filozoficzne. Tom XXVII, zeszyt 4, 1979, ss. 105-123.

Abstract

The paper deals with the Bayesian networks and the influence diagrams applied for decision making. At the beginning some main ideas of probability, Bayes' theorem and Bayesian inference are reminded. The concept of the revision of the prior belief in the light of the new facts is here emphasized. Next, the simple model of decision system is presented and implemented using GeNIe software. As the model is expanded the notions of uncertainty and value of information are introduced. Finally, the sensitivity analysis for the input assumptions of the model is performed.