

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Lesław TOPÓR-KAMIŃSKI

BEZINERCYJNE ELEMENTY OSOBLIWE
JAKO MODELE ELEKTRYCZNYCH
UKŁADÓW AKTYWNYCH



50 – LECIE
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

P. 53 47/96

ELEKTRYKA

Z. 145

GLIWICE
1996

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 1298



P. 3347/96

Lesław TOPÓR-KAMIŃSKI

**BEZINERCYJNE ELEMENTY OSOBLIWE
JAKO MODELE ELEKTRYCZNYCH
UKŁADÓW AKTYWNYCH**

GLIWICE 1996

OPINIODAWCY

Dr hab. inż. Jan Chojcan – Prof. Politechniki Śląskiej

Dr hab. inż. Maciej Siwczyński – Prof. Politechniki Krakowskiej

KOLEGIUM REDAKCYJNE

REDAKTOR NACZELNY – Prof. dr hab. inż. Jan Bandrowski

REDAKTOR DZIAŁU – Doc. dr inż. Zofia Cichowska

SEKRETARZ REDAKCJI – Mgr Elżbieta Leško

REDAKCJA

Mgr Roma Łoś

REDAKCJA TECHNICZNA

Alicja Nowacka

Wydano za zgodą

Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0072-4688

Wydawnictwo Politechniki Śląskiej

ul. Kujawska 3, 44-100 Gliwice

Nakład 110+83 egz. Ark. wyd. 13. Ark. druk. 12. Papier offset. kl. III 70x100, 80g
Podpisano i oddano do druku 08.02.1996 r. Druk ukończono w lutym 1996 r.
Zam. 10/96 Cena zł 6,50

Fotokopie, druk i oprawę wykonano w UKiP sc, Gliwice, ul. Pszczyńska 44

SPIS TREŚCI

CEL I ZAKRES PRACY	9
1. WPROWADZENIE	11
1.1. Występowanie elementów osobliwych w idealnych układach aktywnych	11
1.2. Fizykalne reprezentacje elementów osobliwych	28
2. NULLATOROWO-NORATOROWE MODELE OBWODÓW AKTYWNYCH	44
2.1. Uogólnione pojęcia nullatorów i noratorów wielozaciskowych	44
2.2. Analiza obwodów aktywnych z uogólnionymi wielozaciskowymi elementami osobliwymi	52
2.3. Równoważne obwody zastępcze uogólnionych elementów osobliwych	57
2.4. Modele syntezy obwodów aktywnych na bazie uogólnionych wielozaciskowych elementów osobliwych	63
3. UOGÓLNIONY BEZINERCYJNY DWÓJNIK OSOBLIWY	77
3.1. Dwójniki osobliwe w ujęciu zbiorowym	77
3.2. Analiza sieci z bezinercyjnymi dwójnikami osobliwymi. Poszukiwanie dwójników zastępczych	83
4. BOOLOWSKA ANALIZA BEZINERCYJNYCH SIECI OSOBLIWYCH	99
4.1. Funkcje boolowskie zmiennej rzeczywistej	99
4.2. Formuły boolowskie zmiennej rzeczywistej	106
4.3. Macierze funkcji boolowskich i macierzowe formuły boolowskie	111
4.4. Dowolne bezinercyjne dwójniki osobliwe w ujęciu algebry funkcji boolowskich	114
4.5. Ortogonalne dwójniki osobliwe w ujęciu algebry funkcji i macierzy boolowskich	117
4.6. Dodatek: przykłady wykonania podstawowych operacji boolowskich na funkcjach boolowskich elementarnych	140

5. ORTOGONALNE DWÓJNIKI OSOBLIWE JAKO MODELE RZECZYWISTYCH ELEMENTÓW AKTYWNYCH	142
5.1. Ortogonalne dwójniki osobliwe o ograniczonych obszarach pracy w ujęciu arytmetyki interwałów	142
5.2. Połączenia dwójników osobliwych ortogonalnych z dwójnikami rezystancyjnymi	153
5.3. Częstotliwościowe własności połączeń ortogonalnych dwójników osobliwych z dwójnikami reaktancyjnymi	167
5.4. Własności połączeń ortogonalnych dwójników osobliwych z obwodami RLC	171
6. PODSUMOWANIE I WNIOSKI KOŃCOWE	177
LITERATURA	181
STRESZCZENIA	188

CONTENTS

AIM AND SCOPE OF THE WORK	9
1. INTRODUCTION	11
1.1. Appearance of singular elements in ideal active networks	11
1.2. Physical representation of singular elements	28
2. NULLATOR-NORATOR MODELS OF ACTIVE CIRCUITS	44
2.1. Notions of a generalised multiterminal nullators and norators	44
2.2. Analysis of active circuit with generalized multiterminal singular elements	52
2.3. Equivalent circuit of generalized singular elements	57
2.4. The models of synthesis of active circuits based on the multiterminal singular elements	63
3. GENERALISED INERTIALESS SINGULAR ONE-PORT	77
3.1. The description of the singular one-port by means of a set algebra	77
3.2. Analysis of networks containing a inertialess singular one-ports	83
4. BOOLEAN ANALYSIS OF NONINERTIALES SINGULAR NETWORKS	99
4.1. Boolean functions of real variables	99
4.2. Boolean formulas of real variables	106
4.3. Boolean functions matrices and boolean matrix formulas	111
4.4. The description of the arbitrary inertialess singular one-port by means of a boolean functions algebra	114
4.5. The description of the orthogonal singular one-port by means of a boolean functions and matrix algebra	117
4.6. Appendix: examples of basic boolean operations with the use of elementary boolean functions	140
5. ORTHOGONAL SINGULAR ONE-PORT AS A MODEL REAL ACTIVE DEVICE ..	142
5.1. The description of the orthogonal singular one-port containing bounded operating-region by means of interval arithmetic	142
5.2. Connections of orthogonal singular one-ports with resistive one-ports	153

5.3. Frequency properties of the connections of orthogonal singular one-ports with reactance one-ports.....	167
5.4. Properties of the connections of orthogonal singular one-ports with RLC circuits .	171
6. CONCLUSIONS AND ENDING REMARKS	177
REFERENCES	181
SUMMARY	188

СОДЕРЖАНИЕ

ЦЕЛЬ И ОБЛАСТЬ РАБОТЫ.....	9
1. ПРЕДИСЛОВИЕ	11
1.1. Выступление аномальных элементов в идеальных активных цепях	11
1.2. Физические эквиваленты аномальных элементов	28
2. НУЛЯТОРНО-НОРАТОРНЫЕ МОДЕЛИ АКТИВНЫХ ЦЕПЕЙ.....	44
2.1. Обобщенные понятия многозажимных нуляторов и нораторов	44
2.2. Анализ активных цепей содержащих обобщенные аномальные элементы.....	52
2.3. Эквивалентные схемы обобщенных аномальных элементов.....	57
2.4. Модели синтеза активных цепей определены на базе обобщенных многоходовых аномальных элементов	63
3. ОБОБЩЕННЫЙ БЕЗЫНЕРЦИОННЫЙ АНОМАЛЬНЫЙ ДВУХПОЛЮСНИК	77
3.1. Аномальные двухполюсники в понятии теории множеств	77
3.2. Анализ цепей содержащих безынерционные аномальные цепи Исследование эквивалентных двухполюсников	83
4. БУЛЕВЫЙ АНАЛИЗ БЕЗЫНЕРЦИОННЫХ АНОМАЛЬНЫХ ЦЕПЕЙ.....	99
4.1. Булевы функции действительной переменной.....	99
4.2. Булевы формулы действительной переменной	106
4.3. Матрицы булевых функций и матричные булевы формулы.....	111
4.4. Произвольные безынерционные аномальные двухполюсники в понятии алгебра булевых функций.....	114
4.5. Ортогональные аномальные двухполюсники в понятии алгебра функций и матриц булевых	117
4.6. Приложение. Примеры основных булевых действий для элементарных булевых функций	140

5. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ АНОМАЛЬНЫЕ ДВУХПОЛЮСНИКИ КАК МОДЕЛИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ АКТИВНЫХ УСТРОЙСТВ.....	142
5.1. Ортогональные аномальные двухполюсники с ограниченными рабочими областями арифметики интервалов	142
5.2. Соединения ортогональных аномальных двухполюсников с сопротивленными двухполюсниками.....	153
5.3. Частотные свойства соединений ортогональных аномальных двухполюсников с двухполюсниками типа LC	167
5.4. Свойства соединений ортогональных аномальных двухполюсников с цепями RLC.....	171
6. ПОДВЕДЕНИЕ И ЗАКЛЮЧЕННЫЕ ВЫВОДЫ.....	177
ЛИТЕРАТУРА.....	181
РЕЗЮМЕ	188

CEL I ZAKRES PRACY

Podstawowym celem pracy jest możliwie szerokie ujęcie obecnego stanu wiedzy na temat własności i zastosowań w teorii obwodów bezinercyjnych elementów osobliwych. Większość przedstawionego materiału oparta jest na oryginalnych pracach autora prowadzonych w ramach tej tematyki od roku 1981 [T23]. Inspiracją tej pracy była chęć podjęcia próby stworzenia całościowej, niesprzecznej wewnętrznie teorii skupionych bezinercyjnych układów aktywnych. Może ona stanowić dogodne narzędzie do syntezy i budowy modeli rzeczywistych układów aktywnych, pozwalając uniezależnić się we wstępnym etapie projektowania od ciągle powstających nowych konstrukcji podstawowych przyrządów elektronicznych, takich jak tranzystory nowych technologii, wzmacniacze operacyjne i transkonduktancyjne wielowejściowe oraz konwejerzy prądowe różnego typu.

W rozdziale 1 przedstawiono przegląd różnych przypadków osobliwości występujących w idealnych układach aktywnych. Pokazano także przykłady układów elektronicznych, których idealne modele zawierają przedstawione osobliwości.

W rozdziale 2 wprowadzono pojęcia nullatorów i noratorów wielozaciskowych oraz analizę i syntezę układów liniowych zawierających te elementy osobliwe. Przedstawione metody są rozszerzeniem teorii układów zawierających nullatory i noratory klasyczne. Podano proste przykłady zastosowań do analizy i syntezy układów z aplikacją nowych rodzajów analogowych układów elektronicznych.

W rozdziale 3 wprowadzono ogólny opis dwójnika osobliwego o dowolnym obszarze pracy na płaszczyźnie prądowo-napięciowej, będącego uogólnionym dwójnikiem rezystancyjnym, w ujęciu teorii zbiorów, a także analizę sieci złożonych z takich dwójników.

Opis dwójników osobliwych w ujęciu zbiorowym, jakkolwiek z formalnego punktu widzenia jest najbardziej ogólny, nie stanowi dobrego narzędzia do obliczeń praktycznych. Rolę taką lepiej spełnia boolowska analiza sieci osobliwych, szczególnie ortogonalnych o dowolnych granicach obszarów pracy, w tym także położonych w nieskończoności. Zastosowanie jej na podstawie wprowadzonej przez autora teorii funkcji i formuł boolowskich zmiennej rzeczywistej przedstawiono w rozdziale 4.

Wykorzystanie w praktyce mają dwójniki osobliwe ortogonalne o skończonych granicach obszarów pracy, stanowiące modele rzeczywistych układów elektronicznych o ograniczonych

wielkościach wyjściowych parametrów technicznych. Wydaje się, że dobrą formalizacją opisu sieci z nich złożonych jest zastosowanie algebry interwałów przedstawione w rozdziale 5, w którym pokazano także ich własności w prostych połączeniach z klasycznymi dwójnikami RLC.

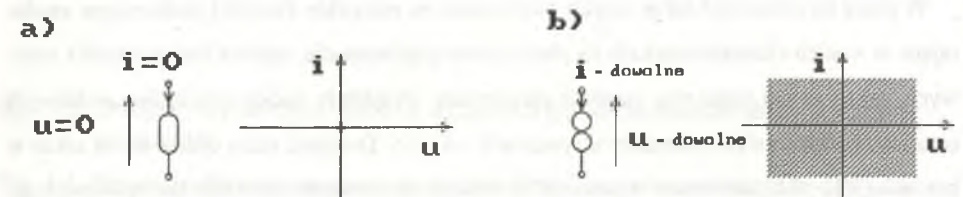
W rozdziale 6 podsumowującym przedstawiono ogólne kryteria realizowalności fizycznej sieci osobliwych opierając się na własnościach topologicznych kształtów obszarów pracy dwójników składowych.

Zamieszczony na końcu pracy zestaw literatury zawiera tylko pozycje cytowane w pracy, bez bardzo obszernej, klasycznej już obecnie literatury ilustrującej zastosowanie nullatora i noratora w teorii układów aktywnych, a które można znaleźć w przypisach podanych prac.

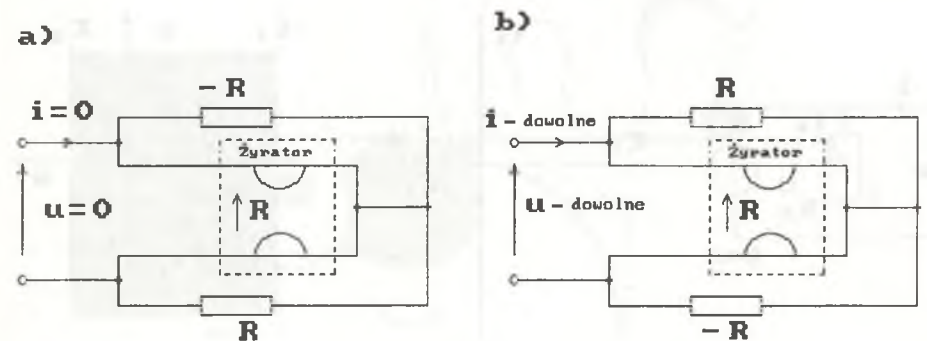
1. WPROWADZENIE

1.1. WYSTĘPOWANIE ELEMENTÓW OSOBLIWYCH W IDEALNYCH UKŁADACH AKTYWNYCH

W roku 1961 Carlin i Youla [C1] wprowadzili do teorii obwodów pojęcie elementów osobliwych nullatora i noratora zwanych także patologicznymi, zdegenerowanymi lub singularnymi, w których wartości prądów i napięć określa się jako zerowe lub dowolne (rys.1.1). Podali także teoretyczne modele tych elementów z wykorzystaniem żyratorów lub cyrkulatorów (rys. 1.2). Zasadnicza ich nowość polegała na tym, że posiadały na płaszczyźnie u - i charakterystyki, które nie były liniami prostymi lub krzywymi, jak to ma miejsce dla rezystancji klasycznych.

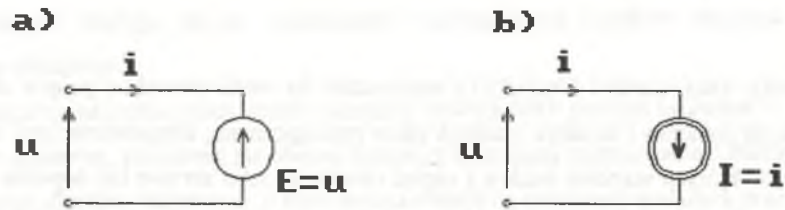


Rys. 1.1. Dwójniki osobliwe nullator i norator oraz ich charakterystyki na płaszczyźnie u - i
 Fig. 1.1. Singular one-ports nullator and norator and their characteristics in u - i plane



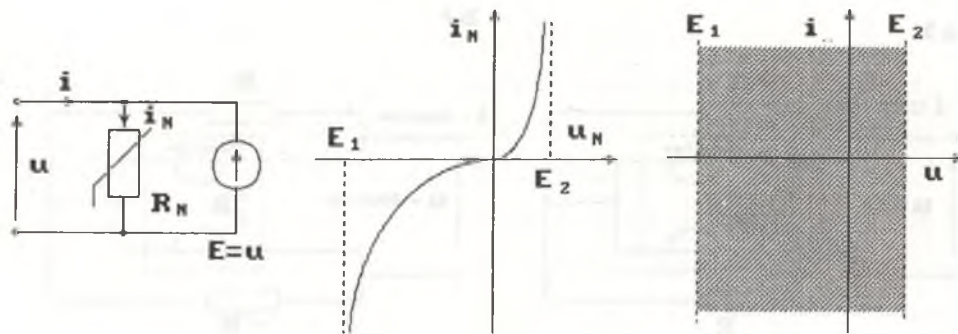
Rys. 1.2. Obwody zastępcze nullatora i noratora zawierające żyrator
 Fig. 1.2. Equivalent circuits of nullator and norator containing gyration

Dziesięć lat przed możliwością istnienia elementów osobliwych sugerował Tellegen [T1], nazywając je wtedy elementami idealnymi. W roku 1967 Devis [D1] zalicza do elementów osobliwych także zwarcie oraz przerwę. W tym samym roku Chua [C13] pokazał model noratora z idealnymi źródłami sterowanymi o wzmacnieniu jednostkowym (rys. 1.3).

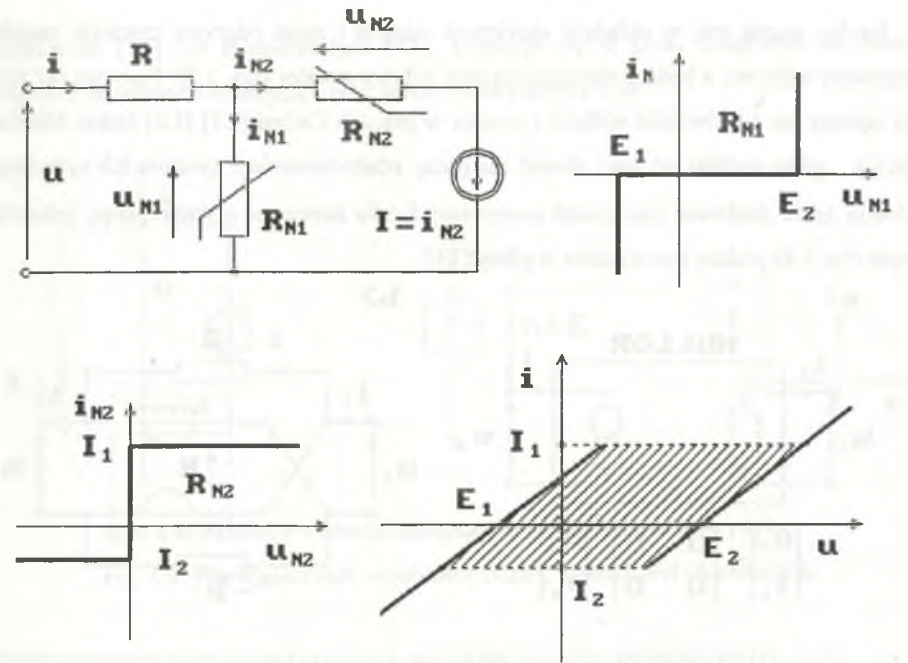


Rys. 1.3. Realizacje obwodów zastępczych noratora z zastosowaniem źródeł sterowanych
Fig. 1.3. Realisation of equivalent circuits of norator by means of controlled sources

W pracy tej rozszerzył także pojęcie osobliwości na wszystkie dwójniki bezinercyjne zawierające w swoich charakterystykach na płaszczyźnie prąd-napięcie, oprócz linii prostych i krzywych, także części obszarów ciągłych płaszczyzny. Przykłady takich obwodów osobliwych oraz ich charakterystyki pokazano na rysunkach 1.4 i 1.5. Dwójniki takie omawiane są także w pracach [V1] [G1], natomiast w pracy [C4] zakłada się istnienie dowolnie skomplikowanego rezystancyjnego dwójnika osobliwego, np. o charakterystyce pokazanej na rys.1.6. ([C4], str. 480, rys. 4).

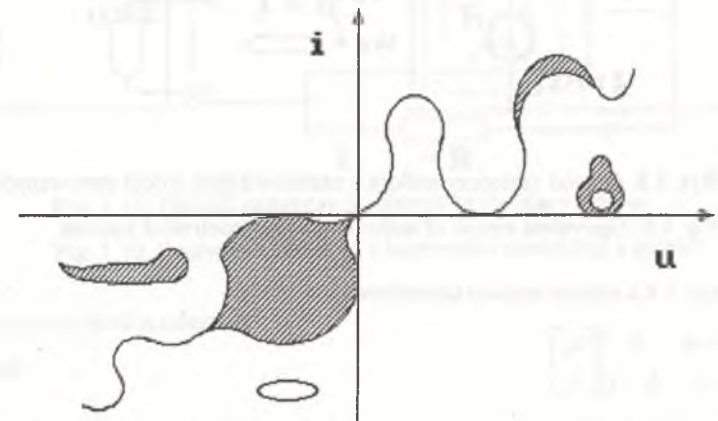


Rys. 1.4. Dwójnik osobliwy o charakterystyce w kształcie pionowego pasa [C13]
Fig. 1.4. Singular one-port whose characteristic consists of a vertical strip of points



Rys. 1.5. Dwójnik rezystancyjno-osobliwy o charakterystyce zawierającej obszar w kształcie czworokąta

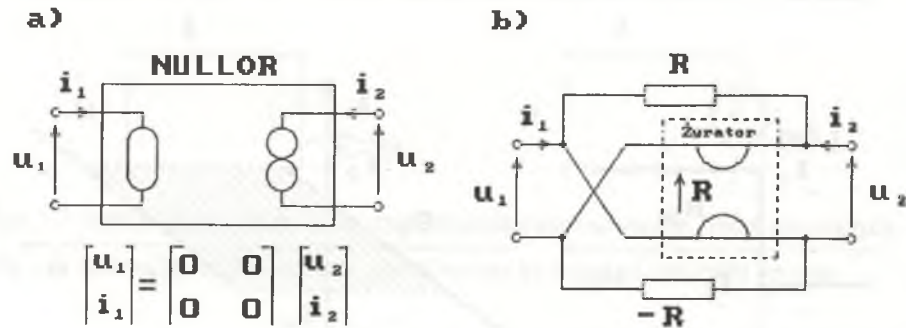
Fig. 1.5. Singular-resistance one-port whose characteristic contains a rectangular region of points



Rys. 1.6. Charakterystyka rezystancyjnego dwójnika osobliwego przedstawiona w pracy [C4]

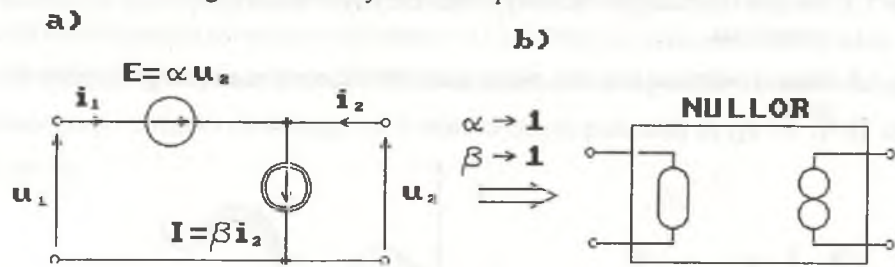
Fig. 1.6. Characteristic of the singular-resistance one-port described in the paper [C4]

Bardzo ważną rolę w układach aktywnych odegrał i nadal odgrywa czwórnik osobliwy nazywany nullore, a będący nierozłączną parą nullator-norator (rys. 1.7). Pierwszy raz został on opisany tak jak dwójniki nullator i norator w pracach Carlina [C1] [C2] (także Martinelli [M3]), gdzie podano też jego obwód zastępczy z zastosowaniem żyratora lub cyrkulatora. Można także zbudować jego model zawierający źródła sterowane o wzmacnieniu jednostkowym (rys. 1.8) podany przez autora w pracy [T4].



Rys. 1.7. Symbol nullora oraz jego obwód zastępczy

Fig. 1.7. Nullor: symbol and equivalent circuit



Rys. 1.8. Obwód zastępczy nullora z zastosowaniem źródeł sterowanych

Fig. 1.8. Equivalent circuit of nullor containing controlled sources

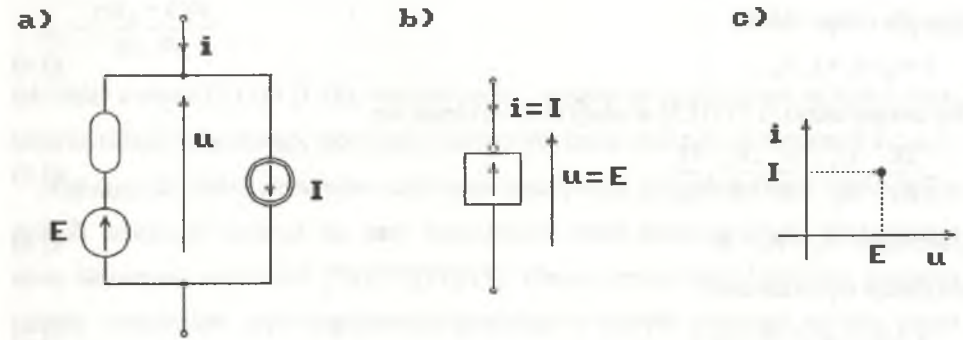
Układ z rys. 1.8 a opisuje macierz łańcuchowa:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 \\ 0 & \beta-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Jeżeli wzmacnienia źródeł sterowanych zmierzać będą do jedności, to właściwości układu zbliżyć się będą do właściwości idealnego nullatora.

Rozwijając koncepcję nullatora, w pracach [S8, T5] przedstawiono modele elementów o charakterystyce punktowej położonej w dowolnym miejscu płaszczyzny u-i, nazwanych

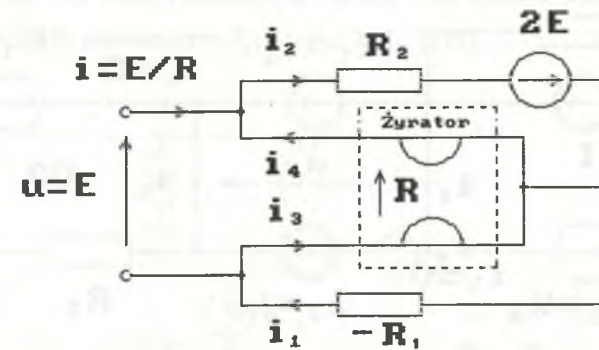
źródłatorami [T5] lub bigeneratorami [S8]. Uzyskuje się je przez dołączenie do zbioru elementów osobliwych idealnych źródeł autonomicznych (rys. 1.9).



Rys. 1.9. Źródłator - obwód zastępczy, symbol oraz charakterystyka

Fig. 1.9. The bigenerator - equivalent circuit, symbol and characteristic

Źródłator posiada także obwód zastępczy, zawierający żyrator, pokazany na rys. 1.10.



Rys. 1.10. Obwód zastępczy źródłatora zawierający żyrator

Fig. 1.10. Equivalent circuit of a bigenerator containing a gyrator

W układzie tym zachodzą zależności:

dla żyratora:

$$i_4 = \frac{U_1}{R}, \quad i_3 = \frac{U_2}{R}, \quad (1.2)$$

dla obciążeń zyratora:

$$i_2 = \frac{U_2 + 2E}{R_2}, \quad i_1 = \frac{U_1}{R_1} \quad (1.3)$$

oraz dla całego układu:

$$i = i_2 - i_4 = i_1 - i_3. \quad (1.4)$$

Po uwzględnieniu (1.2) i (1.3) w relacji (1.4) otrzymuje się:

$$-\frac{2E}{R_2} = \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_2}{R} - \frac{U_1}{R} - \frac{U_1}{R_1}. \quad (1.5)$$

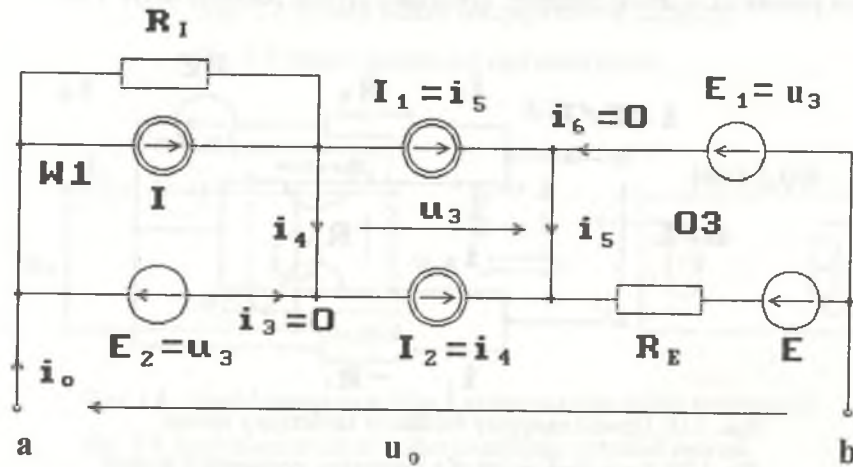
Zakładając: $R_1 = R_2 = R$

otrzymuje się ostatecznie:

$$u = u_2 - u_1 = -E = u_0, \quad (1.7)$$

$$i = \frac{1}{R}(u_1 - u_2) = \frac{E}{R} = i_0. \quad (1.8)$$

Na rys. 1.11 pokazano obwód zastępczy źródłatora zawierający źródła sterowane [T6].



Rys. 1.11. Obwód zastępczy źródłatora zawierający źródła sterowane
Fig. 1.11. Equivalent circuit of a bigenerator containing controlled sources

W układzie tym dla węzła W1 i oczka O3 zachodzą równania:

$$i_0 = I + \frac{u_3}{R_1}, \quad u_3 = i_0 R_E + E \quad (1.9)$$

oraz dla całości:

$$u_3 = u_0. \quad (1.10)$$

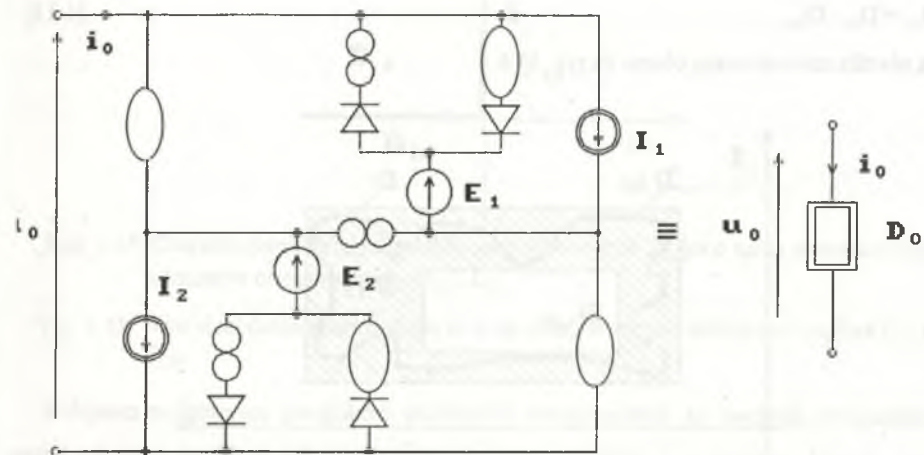
Stąd otrzymuje się:

$$i_0 = \frac{E + IR_1}{R_1 - R_E}, \quad (1.11)$$

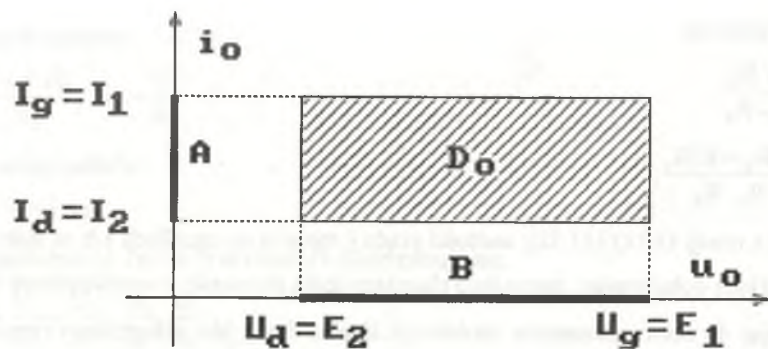
$$u_0 = \frac{(IR_E + E)R_1}{R_1 - R_E}. \quad (1.12)$$

Jak widać z relacji (1.11) i (1.12), wartości prądu i napięcia na zaciskach a-b są stałe i niezależne od układu dołączonego, zatem jego charakterystyka jest punkt o współrzędnych (u_0, i_0) .

Włączając do zbioru elementów osobliwych idealną diodę jako elementarny rezystancyjny dwójnik nieliniowy uzyskuje się, przy współudziale źródeł autonomicznych, nieskończenie wiele elementów osobliwych [T6][T7][T8][T9]. Obszary pracy tych dwójników posiadają kształty ortogonalne, czyli uogólnionych prostokątów, których granicami są linie proste równoległe do osi współrzędnych lub pewne ich odcinki, przy czym proste te mogą być położone w nieskończoności, a odcinki mogą mieć długości nieskończenie małe. Dwójniki osobliwe o ortogonalnych obszarach pracy na płaszczyźnie u-i nazywane będą dwójnikami osobliwymi ortogonalnymi. Jednym z możliwych obwodów zastępczych ortogonalnego dwójnika osobliwego jest układ przedstawiony na rys. 1.12. Granice obszaru pracy tego dwójnika określają źródła autonomiczne E_1, E_2 oraz I_1, I_2 . [T10]



Rys. 1.12. Obwód zastępczy ortogonalnego dwójnika osobliwego
Fig. 1.12. Equivalent circuit of an orthogonal singular one-port

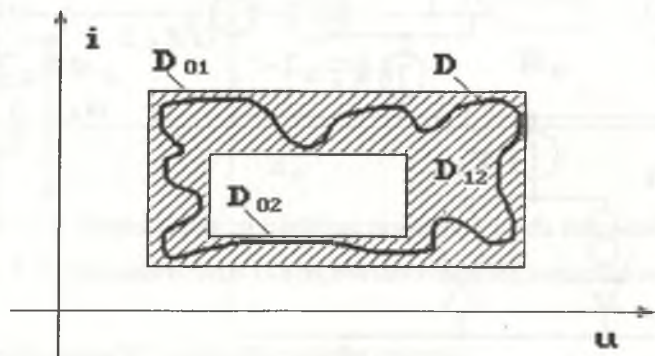


Rys. 1.13. Obszary pracy ortogonalnego dwójnika osobliwego z rys. 1.12
 Fig. 1.13. Operating-region of an orthogonal singular one-port in Fig. 1.12

Oznacza to, że obszar pracy D_o można opisać za pomocą zbiorów A i B określonych przez ich dolne i górne granice: $[I_d, I_g]$ oraz $[U_d, U_g]$. Pozwala to znacznie uprościć poszukiwanie obszarów pracy dwójników zastępczych do danej sieci zawierającej dwójniki osobliwe [T11]. W szczególności, dla każdego dowolnego dwójnika osobliwego D można dobrać pewne dwa dwójniki osobliwe ortogonalne D_{o1} i D_{o2} z nieskończenie wielu (rys. 1.14), takie aby granica obszaru pracy dwójnika D była w pasie D_{o2} opisanym relacją:

$$D_{12} = D_{o1} - D_{o2}, \tag{1.13}$$

którą określa zakresowany obszar na rys. 1.14.



Rys. 1.14. Obszar pracy dowolnego dwójnika osobliwego D ograniczony dwoma dwójnikami ortogonalnymi D_{o1} i D_{o2}

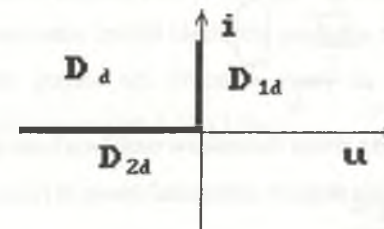
Fig. 1.14. Operating-region of any singular one-port D limited by two orthogonal one-ports D_{o1} and D_{o2}

Można wykazać na podstawie własności działań na zbiorach, że obszar $D'_{12} = D'_{o1} - D'_{o2}$ powstały na skutek przekształceń obszarów D'_{o1} i D'_{o2} , a związanych z poszukiwaniem np. dwójników zastępczych, będzie zawierał w sobie granicę obszaru D' , który powstałby na skutek dokonania na obszarze D tych samych przekształceń.

Zasada ta podkreśla znaczenie, jakie może posiadać w analizie i syntezie układów osobliwych zbiór ortogonalnych dwójników osobliwych. Pozwala bowiem poszukiwać przybliżonych obszarów pracy prostymi metodami dla dwójników osobliwych o dowolnie skomplikowanych kształtach obszarów pracy. Ortogonalne dwójniki osobliwe opisują także własności dwójników, których charakterystyki składają się z podzbiorów ortogonalnych [T12]. Zachodzi to przykładowo dla idealnego elementu diodowego D_d (rys. 1.15), którego obszar pracy jest sumą dwóch podzbiorów ortogonalnych D_{1d} i D_{2d} (półprostych) o granicach $[0,0]$, $[0,\infty]$ oraz $[-\infty,0]$, $[0,0]$, czyli:

$$D_d = D_{1d} \cup D_{2d}. \tag{1.14}$$

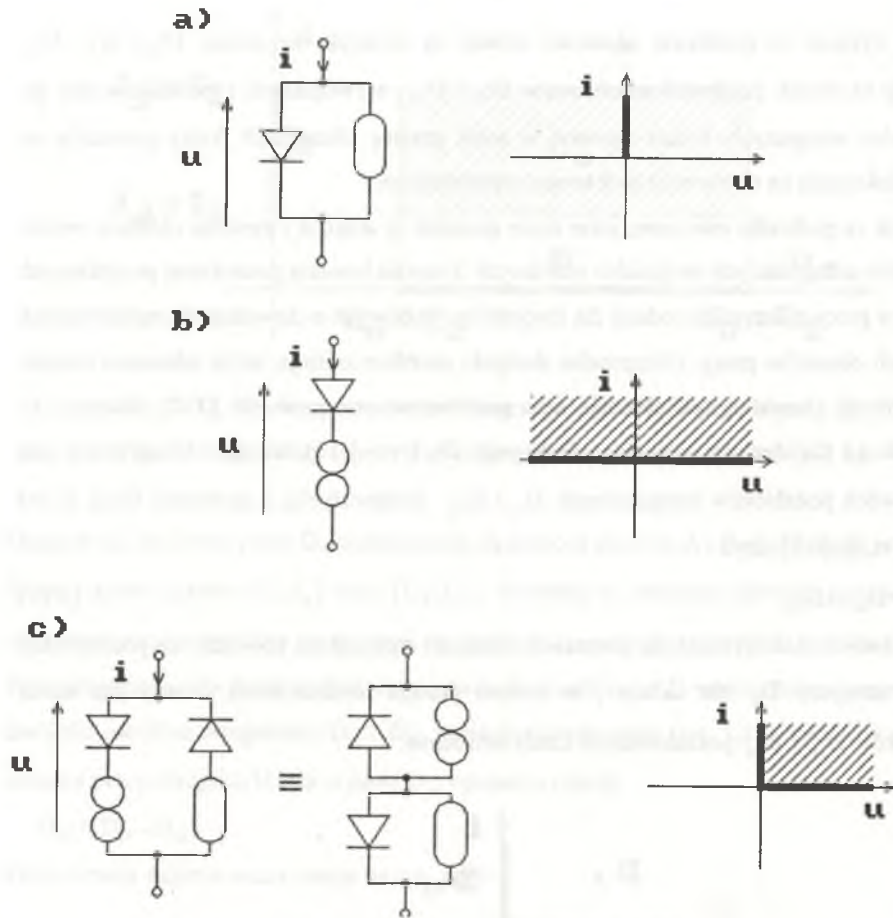
Podobnie można wykazać na podstawie własności operacji na zbiorach, że poszukiwany obszar zastępczy D_d' dla układu, w którym pracuje idealna dioda, równy jest sumie podzbiorów D_{1d}' i D_{2d}' poszukiwanych każdy oddzielnie.



Rys. 1.15. Charakterystyka idealnego elementu diodowego D_d jako suma zbiorowa dwóch obszarów ortogonalnych D_{1d} i D_{2d}

Fig. 1.15. The ideal diode characteristic as a set addition of two orthogonal regions D_{1d} and D_{2d}

Kolejnym podzbiorem dwójników osobliwych ortogonalnych są dwójniki ortogonalne o granicach tylko zerowych lub nieskończonych $[0,\infty]$. Podzbiór ten zawiera elementy o charakterystykach będących półpłaszczyznami, ćwierćpłaszczyznami, półprostymi lub z nich złożone, lecz bez źródeł autonomicznych [T8][T9][T12]. Niektóre z nich pokazano na rys. 1.16.



Rys. 1.16. Niektóre elementy zbioru dwójników osobliwych ortogonalnych typu $[0, \infty]$

Fig. 1.16. Some elements of a singular orthogonal one-port $[0, \infty]$ -type set

Analizę i syntezę sieci osobliwych złożonych z dwójników ortogonalnych $[0, \infty]$ można sformalizować przez wprowadzenie algebry Boole'a w dwu- i wielowymiarowej przestrzeni binarnej [T8] [T12]. W celu uproszczenia wielu rozważań i ze względów praktycznych wyróżnia się trzeci podzbiór elementów osobliwych ortogonalnych zawierający się w poprzednich (pierwszy był zbiorem elementów osobliwych ortogonalnych dowolnych, a drugi elementów osobliwych o granicach obszarów pracy położonych tylko w zerze lub nieskończoności), a składający się tylko z przerwy, zwarcia, nullatora i noratora. Jakkolwiek wydaje się on najbardziej uproszczony, posiada jednak największe znaczenie praktyczne. Opis jego można sformalizować za pomocą algebry Boole'a w jednowymiarowej przestrzeni binarnej [T13] [T14].

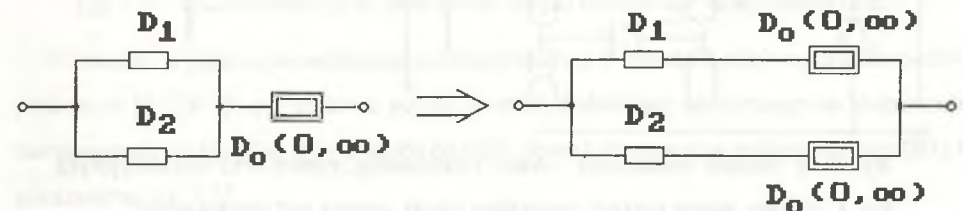
jego można sformalizować za pomocą algebry Boole'a w jednowymiarowej przestrzeni binarnej [T13] [T14].

Elementy osobliwe ortogonalne pozwalają dokonywać operacji typu suma, tożsamość, zmiana znaku, wybór obszaru wartości, niezależnie dla każdej zmiennej zaciskowej łączonych dwójników i generować w ten sposób wiele niekonwencjonalnych połączeń (np. czwórników, tak aby uzyskać sumę współczynników macierzy łańcuchowych [T14][M7][M6]) niemożliwych do zrealizowania za pomocą dwójników rezystancyjnych klasycznych. Elementy osobliwe ortogonalne mają podstawowe znaczenie w tworzeniu wszelkich obwodów o parametrach skupionych, gdyż potrzebne są do tego przerwa, zwarcie oraz idealne źródła, które także do nich należą.

Zbiór elementów osobliwych ortogonalnych $[0, \infty]$ posiada dwie odróżniające je od pozostałych dwójników rezystancyjnych własności, a mianowicie:

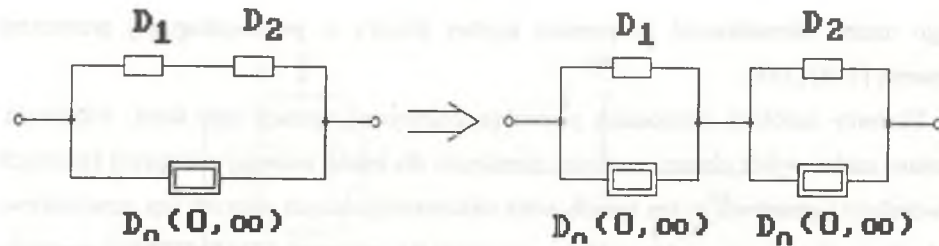
- rozdzielnosc połączenia szeregowego względem równoległego, ortogonalnego dwójnika osobliwego $[0, \infty]$,
- rozdzielnosc połączenia równoległego względem szeregowego, ortogonalnego dwójnika osobliwego $[0, \infty]$.

Powszechnie znane są one dla zwarc, przerw i idealnych diod, a wykazać ich istnienie można na podstawie formalnego opisu algebrą Boole'a [T13][T14][T8][T12]. Własności te, znane w postaci twierdzenia o przesuwaniu źródeł idealnych, posiadają też częściowo źródła idealne. Wynika to stąd, że dwie granice ich obszarów pracy są nieskończone. Własności te zilustrowane są schematami na rysunkach 1.17 i 1.18.



Rys. 1.17. Własności rozdzielnosci połączenia równoległego względem szeregowego ortogonalnego dwójnika osobliwego $[0, \infty]$

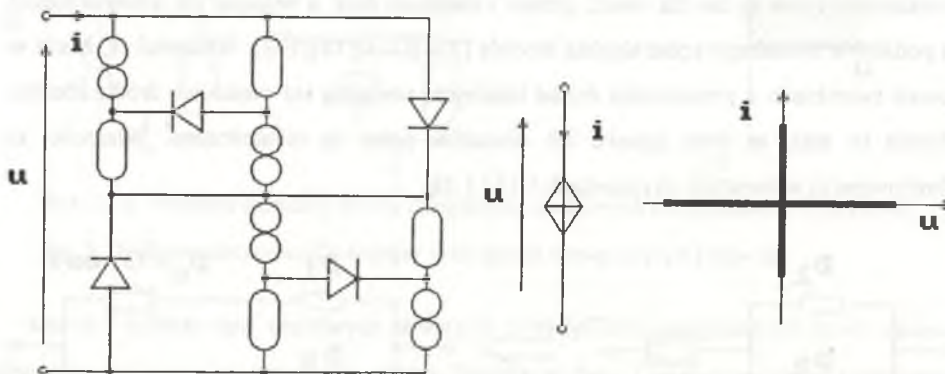
Fig. 1.17. Divisibility properties of parallel connection in relation to series connection of $[0, \infty]$ -type singular one-ports



Rys. 1.18. Własności rozdzielności połączenia szeregowego względem równoległego ortogonalnego dwójnika osobliwego $[0, \infty]$

Fig. 1.18. Divisibility properties of series connection in relation to parallel connection of $[0, \infty]$ -type singular one-ports

Do zbioru elementów osobliwych ortogonalnych zalicza się także element, który ma właściwości przerwy lub zwarcia w zależności od układu dołączonego i może być nazwany noratorem bezmocowym [T7]. Równoważny mu obwód zastępczy, zawierający idealne elementy diodowe, symbol, oraz charakterystykę, pokazano na rys. 1.19. Element taki może się też pojawić w układach nieliniowych zawierających analogowe układy mnożące, traktowane jako źródła podwójnie sterowane [T15][T16].

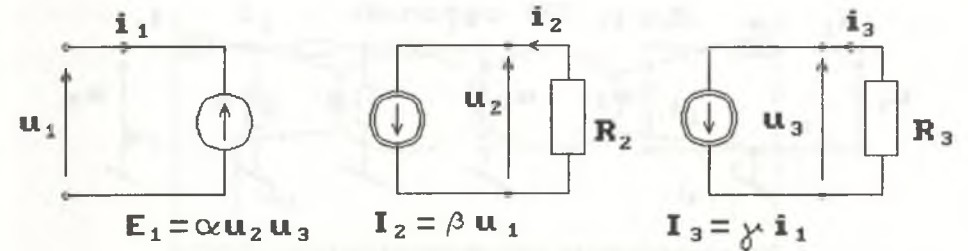


Rys. 1.19. Norator bezmocowy : obwód równoważny, symbol oraz charakterystyka

Fig. 1.19. Zero power norator : equivalent circuit, symbol and characteristic

Przykładowo w układzie przedstawionym na rys. 1.20 napięcie wejściowe opisuje równanie:

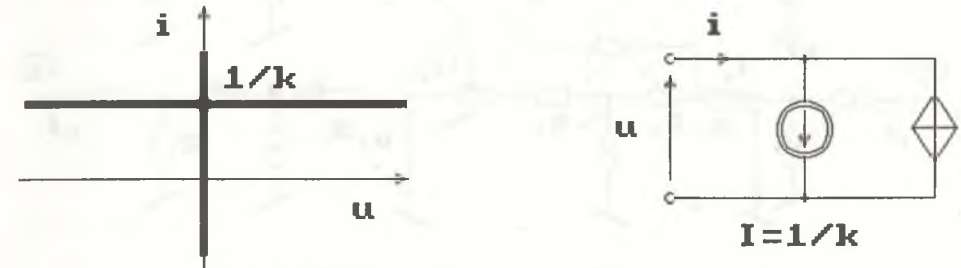
$$u_1 = \alpha\beta\gamma R_2 R_3 u_1 i_1 = k u_1 i_1 \quad (1.15)$$



Rys. 1.20. Obwód zastępczy noratora bezmocowego, zawierający analogowy układ mnożący

Fig. 1.20. Equivalent circuit of the zero power norator with analog multiplier

Dla prądu $i_1 = 1/k$ napięcie u_1 może być dowolne, natomiast dla wszystkich innych wartości prądu i_1 napięcie u_1 może być tylko równe zero. Można go zatem uznać za przesunięty o prąd $1/k$ norator bezmocowy, co pokazano na rys. 1.21. Norator bezmocowy jest także szczególnym przypadkiem źródła mocowego opisanego w pracy [S9], gdy opisujący go parametr $P=0$.



Rys. 1.21. Charakterystyka noratora bezmocowego przesuniętego oraz jego obwód równoważny

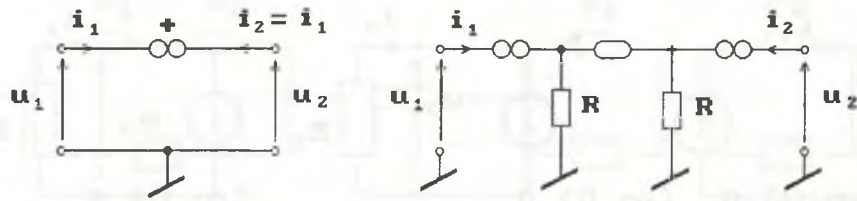
Fig. 1.21. Characteristic of the zero power shifted norator and its equivalent circuit

W związku z coraz powszechniejszym zastosowaniem w układach aktywnych konwejerów prądowych [S4][W2] wprowadzono pojęcie noratora dodatniego, przydatnego do budowy ich teoretycznych modeli [S3][W1]. Posiada on także obwód równoważny podany w pracy [H1] i pokazany na rys. 1.22.

Uogólniając pojęcie noratora, można wprowadzić norator "wzmacniający" o współczynniku przenoszenia K , co oznacza:

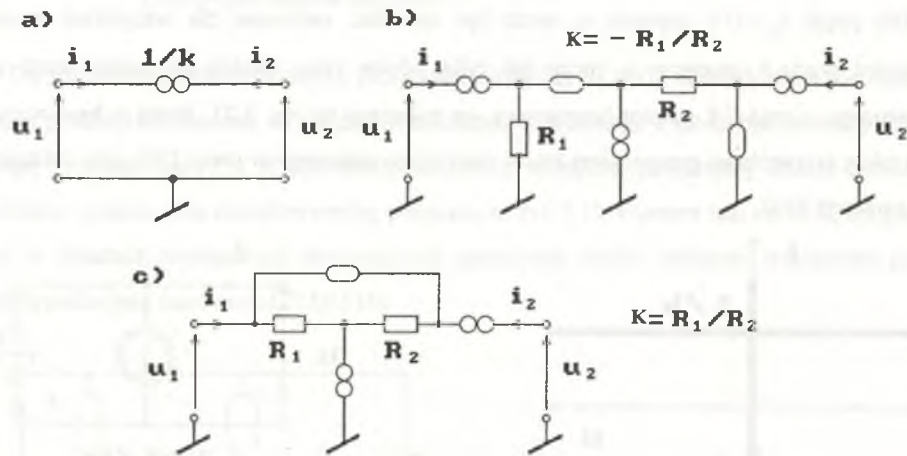
$$i_2 = K i_1 \quad (1.16)$$

Posiada on dwa zastępcze obwody równoważne zależnie od znaku współczynnika K (rys. 1.23).



Rys. 1.22. Norator dodatni - symbol i obwód równoważny

Fig. 1.22. Plus-type norator - symbol and equivalent circuit



Rys. 1.23. Norator uogólniony o współczynniku przenoszenia prądu K oraz jego zastępcze obwody równoważne

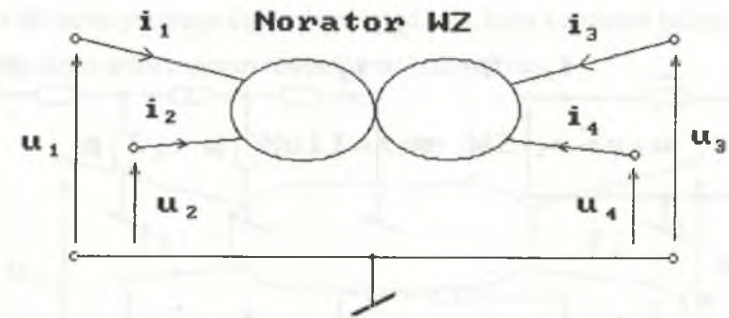
Fig. 1.23. Generalized norator with the current transfer ratio K and its equivalent circuits

Do opisu teoretycznego konwejerów prądowych wielozaciskowych [T29] ma zastosowanie norator wielozaciskowy [T27][T28] (rys. 1.24).

Niechaj przykładowo dla układu o dwóch zaciskach wejściowych i dwóch wyjściowych pokazanego na rys. 1.24 zachodzi :

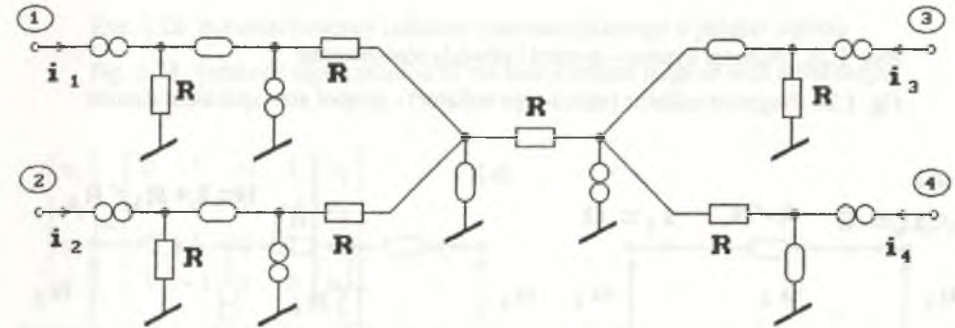
$$\begin{bmatrix} i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}, \quad (1.17)$$

natomiast u_1, u_2, u_3 oraz u_4 mogą mieć wartości dowolne. Relacje te spełnia także obwód równoważny pokazany na rys. 1.25.



Rys 1.24. Schemat blokowy noratora wielozaciskowego o dwóch wejściach i dwóch wyjściach

Fig. 1.24. Block diagram of the multiterminal norator with two input terminals and two output terminals



Rys. 1.25. Norator czterozaciskowy: obwód równoważny

Fig. 1.25. Four-terminal norator: equivalent circuit

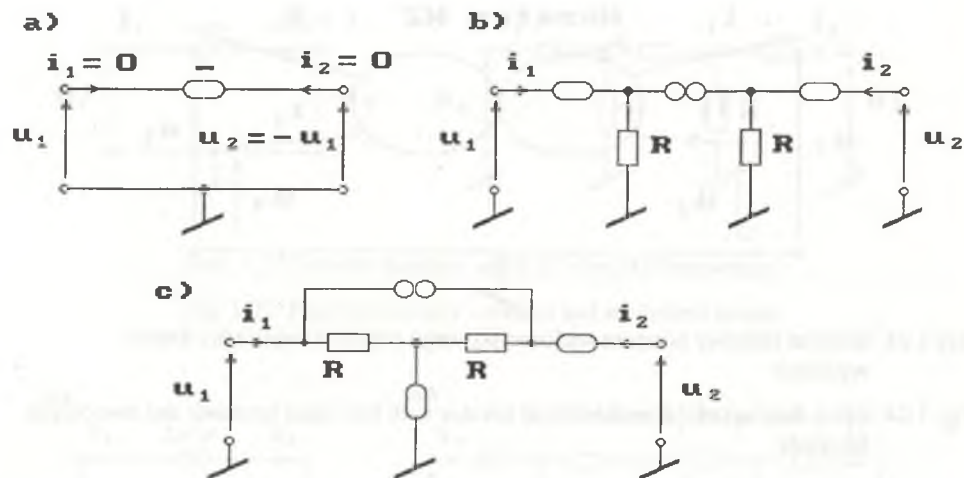
Układ ten dla $i_2 = 0$ staje się noratorem klasycznym widzianym między zaciskami 1-4 lub noratorem dodatnim widzianym między zaciskami 1-3.

Analogicznie do pojęcia noratora dodatniego w pracy [T19] wprowadzono pojęcie nullatora ujemnego. Jest to element osobliwy o obwodzie równoważnym pokazanym na rys. 1.26, dla którego spełnione są relacje:

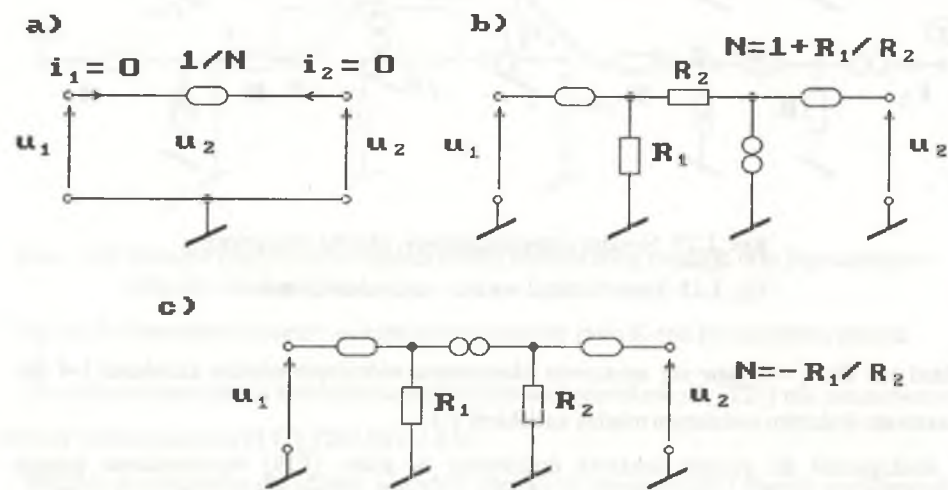
$$i_1 = i_2 = 0 \text{ oraz } u_2 = -u_1. \quad (1.18a)$$

Uogólniając pojęcie nullatora, można wprowadzić nullator "wzmacniający" o współczynniku przenoszenia napięcia N, co oznacza:

$$u_2 = Nu_1. \quad (1.18b)$$



Rys. 1.26. Nullator ujemny - symbol i obwody równoważne
 Fig. 1.26. Negative nullator (minus-type nullator) - symbol and equivalent circuits

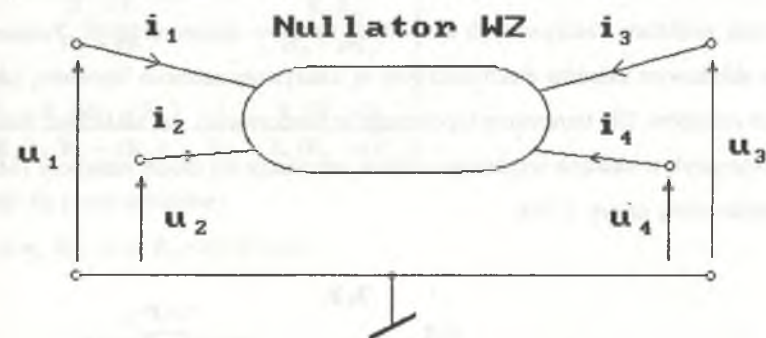


Rys. 1.27. Nullator uogólniony o współczynniku przenoszenia napięcia N
 Fig. 1.27. Generalized nullator with the voltage transfer ratio N

Posiada on dwa zastępcze obwody równoważne zależnie od znaku współczynnika N (rys. 1.27). Rozszerzając pojęcie nullatora na obwód wielozaciskowy [T20], otrzymuje się przykładowo układ jak na rysunku 1.28, który dla prądów spełnia relację:

$$i_1 = i_2 = i_3 = i_4 = 0. \quad (1.19a)$$

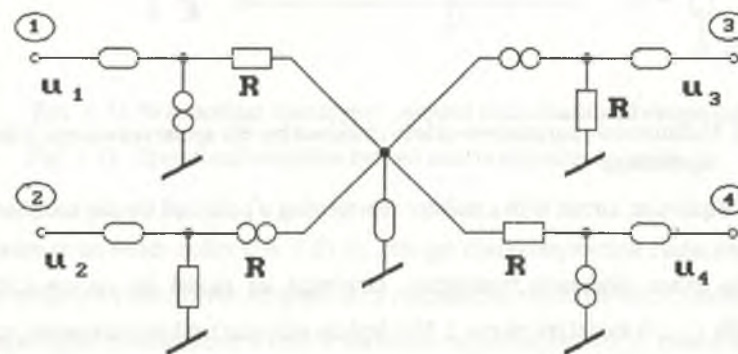
Natomiast dla napięć przyjmuje się w zależności od tego, który z zacisków będzie wyjściowy, że spełniony będzie jeden z wierszy równania macierzowego:



Rys. 1.28. Schemat blokowy nullatora czterozaciskowego o jednym wyjściu
 Fig. 1.28. Symbolic representation of the four-terminal nullator with a one output

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (1.19b)$$

Relacje te spełnia obwód równoważny pokazany na rys. 1.29.

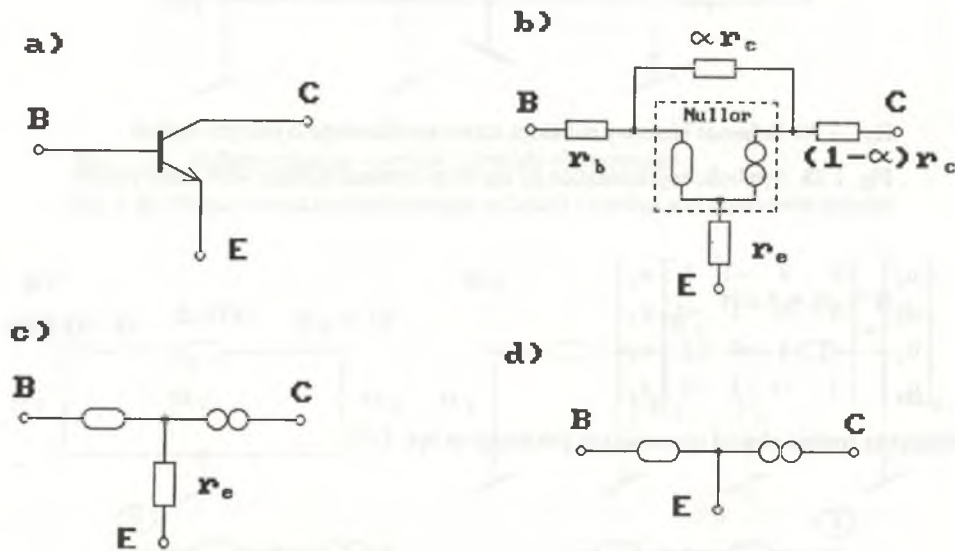


Rys. 1.29. Obwód równoważny nullatora wielozaciskowego opisanego równaniami (1.19a) i (1.19b)

Fig. 1.29. Equivalent circuit of the multiterminal nullator described by Eqs. (1.19a) and (1.19b)

1.2. FIZYKALNE REPREZENTACJE ELEMENTÓW OSOBLIWYCH

Proste zestawy elementów osobliwych lub większe ich sieci mogą być mniej lub bardziej przybliżonymi modelami rzeczywistych aktywnych układów elektronicznych. Podstawowym elementem składowym układów elektronicznych są tranzystory zarówno bipolarne, jak i polowe różnych rodzajów. Dla tranzystora bipolarnego o wzmacnieniu α , zakładając linearyzację jego charakterystyk w układzie wspólnego emitera, otrzymuje się model zastępczy [M3] [M2] [M1], przedstawiony na rys. 1.30 b.



Rys. 1.30. Nullatorowo- noratorowe układy równoważne dla spolaryzowanego tranzystora bipolarnego

Fig. 1.30. Equivalent circuit with a nullator representing a polarized bipolar transistor

Zakładając dalszą idealizację tranzystora, otrzymuje się model jak na rys.1.30c [M6], a następnie dla $r_e \rightarrow 0$ model jak na rys. 1.30d będący nullorem trójkońcówkowym, czyli parą nullator - norator mającą wspólny zacisk. Podobny model jak na rys. 1.30 c i b można przyjąć dla tranzystorów polowych przy daleko posuniętej idealizacji ich charakterystyk i parametrów.

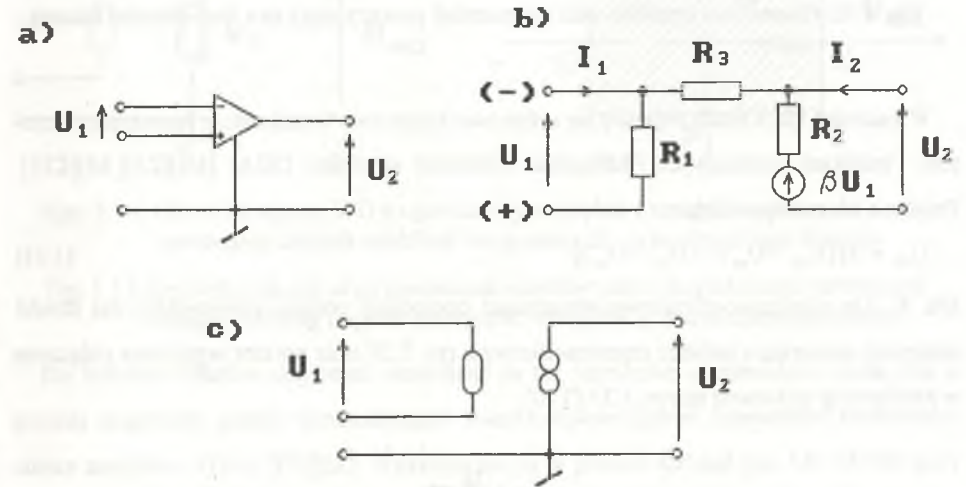
Najbardziej popularnym układem stosowanym w technice analogowej, a zarazem najbardziej uniwersalnym, jest wzmacniacz operacyjny produkowany powszechnie od 30 lat w wielu

wersjach w postaci scalonej. Idealizację rzeczywistego wzmacniacza operacyjnego (rys.1.31 a) przedstawionego jako układ zastępczy na rys. 1.31b [M4], a opisanego macierzą łańcuchową:

$$\begin{bmatrix} \frac{R_2 + R_3}{R_0 - \beta R_3} & \frac{R_0 R_3}{R_0 - \beta R_3} \\ \frac{(R_1 + R_3)(R_2 + R_3)}{R_1 R_3 (R_0 - \beta R_3)} - \frac{1}{R_3} & \frac{R_0 (R_1 + R_3)}{R_1 (R_2 - \beta R_3)} \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

otrzymuje się przez założenie :

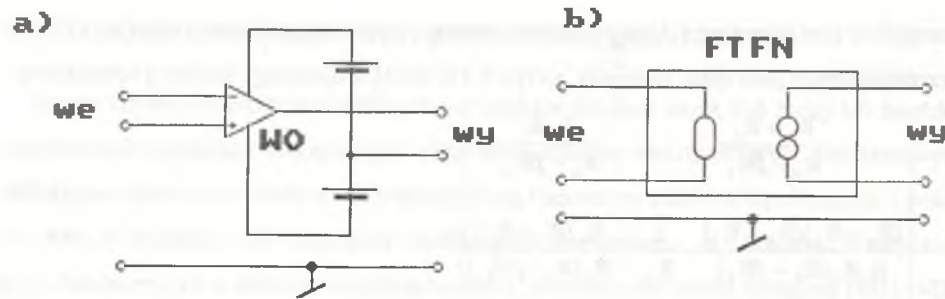
$$R_1 \rightarrow \infty, R_3 \rightarrow \infty, R_2 \rightarrow 0, \beta \rightarrow \infty.$$



Rys. 1.31. Wzmacniacz operacyjny - symbol oraz obwody równoważne

Fig. 1.31. Operational amplifier-symbol and its equivalent circuits

Reprezentuje go wtedy nullor (rys. 1.31 c), którego charakterystyczną cechą jest uziemienie jednego z zacisków wyjściowych noratora. Aby uniezależnić się od tej cechy, buduje się wzmacniacze operacyjne nieuziemione o dwóch zaciskach wyjściowych [H5], zwane też czterozaciskowymi nieuziemionymi nullorami (Four-terminal floating nullor - FTFN) [S1]. Podobny efekt można osiągnąć stosując dla typowego wzmacniacza operacyjnego zasilanie nieuziemione w postaci pokazanej na rys. 1.32.



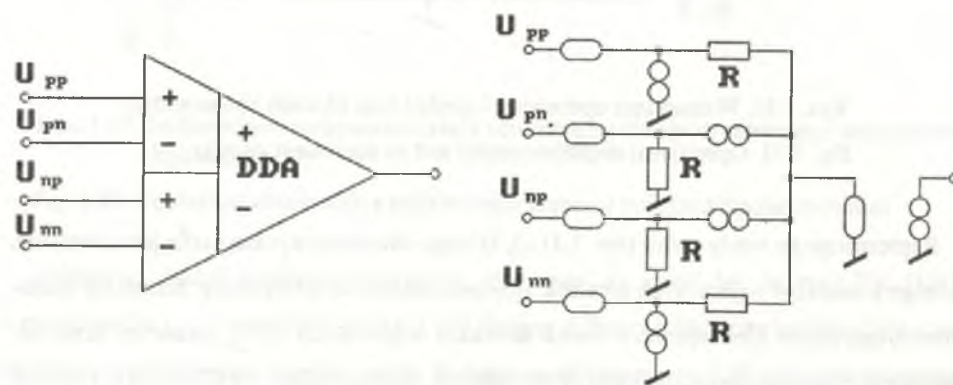
Rys. 1.32. Wzmacniacz operacyjny z nieziemionym zasilaniem jako czterozaciskowy nieziemiony nullor

Fig. 1.32. Operational amplifier with ungrounded power supply as a four-terminal floating nullor

W ostatnich kilku latach pojawiły się różnicowo-różnicowe wzmacniacze operacyjne o czterech zaciskach wejściowych (differential difference amplifier- DDA) [H6][Z1][A2][C11]. Działanie ich opisuje relacja:

$$U_{wy} = A[(U_{pp} - U_{pn}) - (U_{np} - U_{nn})]. \quad (1.21)$$

Dla $A \rightarrow \infty$ różnicowo-różnicowy wzmacniacz operacyjny posiada równoważny mu obwód zastępczy zawierający nullator czterozaciskowy z rys. 1.29 oraz norator wyjściowy połączone w konfiguracji pokazanej na rys. 1.33 [T20].

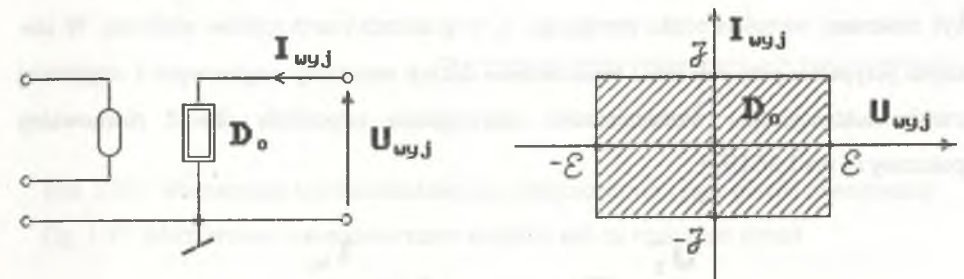


Rys 1.33. Wzmacniacz operacyjny różnicowo-różnicowy - symbol i obwód zastępczy

Fig. 1.33. Operational differential difference amplifier: symbol and equivalent circuit

Każdy wzmacniacz operacyjny nawet traktowany jako idealny posiada ograniczony zakres prądów i napięć wyjściowych do wartości $|U_{wyjmax}| = \mathcal{E}$, $|i_{wyjmax}| = \mathcal{J}$. Po ich przekroczeniu układ staje się nieliniowy lub może nastąpić jego uszkodzenie. Równoważny mu obwód zastępczy (rys. 1.34) [T10] zawiera parę nullator i ortogonalny dwójnik osobliwy o prostokątnym obszarze działania ograniczonym wartościami :

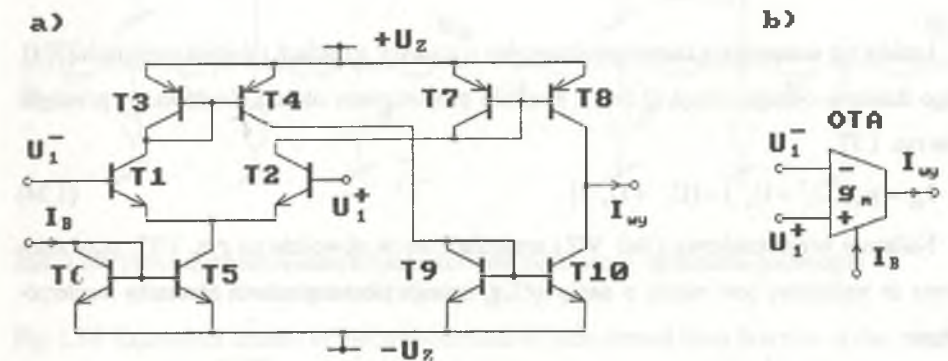
$$U_{max} = \mathcal{E}, U_{min} = -\mathcal{E}, i_{max} = \mathcal{J}, i_{min} = -\mathcal{J}.$$



Rys. 1.34. Obwód zastępczy WO o ograniczonym prądzie i napięciu wyjściowym zawierający dwójnik osobliwy ortogonalny D_0 oraz obszar jego działania

Fig. 1.34. Equivalent circuit of an operational amplifier with a limited output current and voltage, containing singular orthogonal one-port D_0 , and its operating-region

Do budowy układów aktywnych stosowane są też różnicowe wzmacniacze operacyjne o wyjściu prądowym zwane wzmacniaczami transkonduktancyjnymi (operational transconductance amplifier - OTA) [B1][B2]. Wykonywane są w postaci scalonej (np. LM 13700) [L2] [53K1] zarówno na tranzystorach bipolarnych (rys. 1.35), jak i polowych.



Rys. 1.35. Wzmacniacz transkonduktancyjny: schemat i symbol

Fig. 1.35. Transconductance amplifier: schematic diagram and symbol

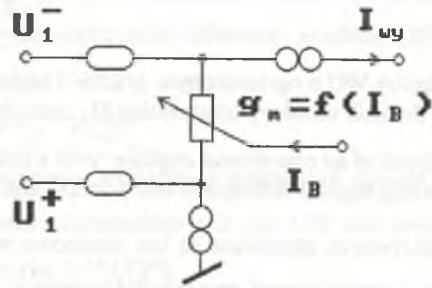
Pracę wzmacniacza transkonduktancyjnego opisuje relacja:

$$I_{wy} = g_m (U_1^+ - U_1^-), \quad (1.22)$$

w której:

$$g_m = I_B / 2U_T. \quad (1.23)$$

przy czym: $U_T = kT/q$, gdzie k jest stałą Boltzmana, q - ładunkiem elektronu, a T temperaturą bezwzględną. Praktycznie U_T zawiera się w granicach 30 mV do 50 mV, przy czym dla temperatury pokojowej ma wartość 26 mV. Przewodność g_m zwana transkonduktancją może być zmieniana wartością prądu sterującego I_B w granicach trzech rzędów wielkości. W idealnym przypadku przy założeniu nieskończenie dużych rezystancji wejściowych i wyjściowej transkonduktancyjnego wzmacniacza operacyjnego odpowiada obwód równoważny pokazany na rys 1.36 [H4].



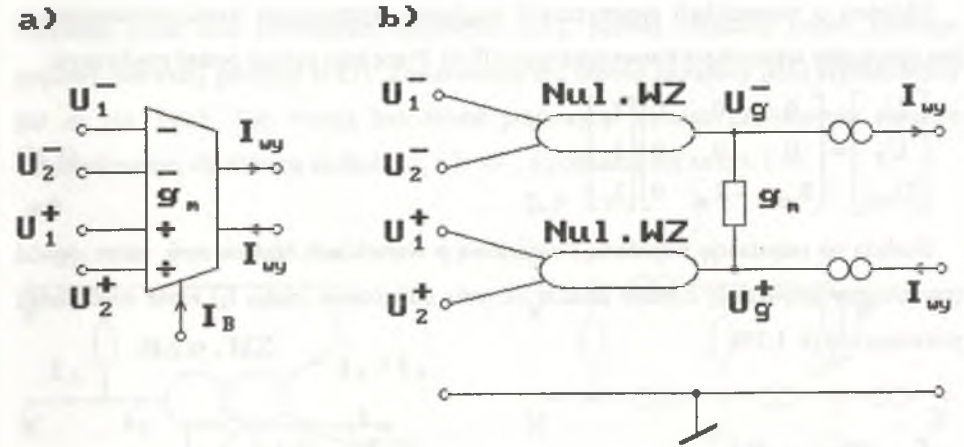
Rys. 1.36. Różnicowy wzmacniacz transkonduktancyjny - obwód zastępczy

Fig. 1.36. Differential transconductance amplifier: equivalent circuit

Istnieje też wzmacniacz transkonduktancyjny o czterech wejściach i dwóch wyjściach [W4]. Jego działanie opisuje relacja (1.24), a symbol i proponowany obwód równoważny przedstawia rys. 1.37.

$$I_{wy} = g_m [(U_1^+ + U_2^+) - (U_1^- + U_2^-)]. \quad (1.24)$$

Nullatory wielozaciskowe (Nul. WZ) znajdujące się w obwodzie na rys. 1.37, przy założeniu że wyjściowy jest zacisk o napięciu U_g , opisuje pierwszy wiersz równania macierzowego:

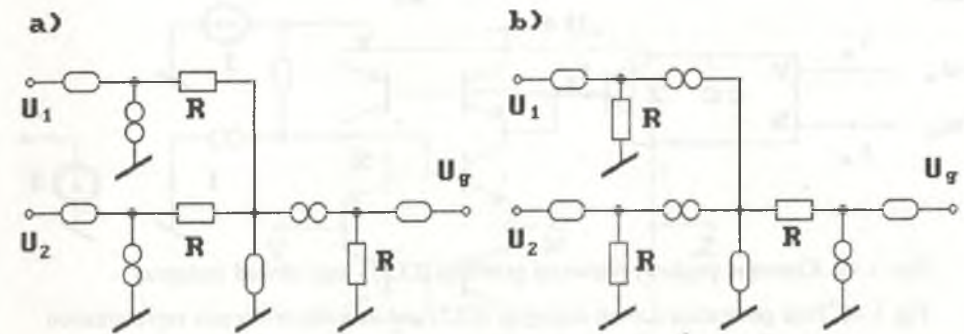


Rys. 1.37. Wzmacniacz transkonduktancyjny wielozaciskowy i jego obwód równoważny

Fig. 1.37. Multiterminal transconductance amplifier and its equivalent circuit

$$\begin{bmatrix} U_g \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_g \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

a odpowiadające im równoważne obwody nullatorowo- noratorowe przedstawia rys. 1.38.



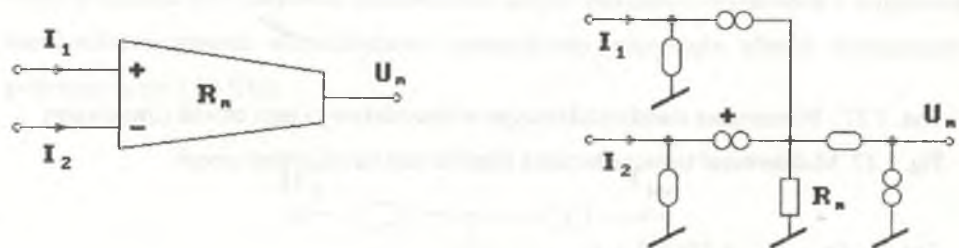
Rys. 1.38. Obwody równoważne trójzaciskowemu nullatorowi opisanemu pierwszym wierszem równania macierzowego (1.25)

Fig. 1.38. Equivalent circuits of the three-terminal nullator derived from first row of the matrix equation (1.25)

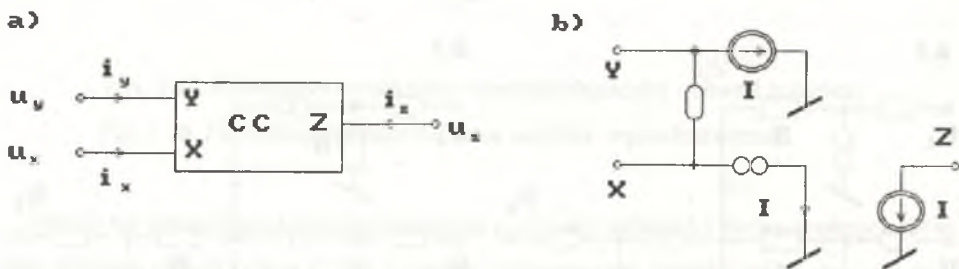
Układem o własnościach symetrycznych względem wzmacniacza transkonduktancyjnego jest operacyjny wzmacniacz transrezystancyjny [C5]. Pracę jego opisuje postać macierzowa:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_{wy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ R_m & -R_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_0 \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

Posiada on rezystancję wejściową i wyjściową o wartościach bliskich zeru, zatem obwód równoważny zawierający norator dodatni (w celu odwrócenia znaku I_2) może mieć kształt pokazany na rys. 1.39b.



Rys. 1.39. Wzmacniacz operacyjny transrezystancyjny i jego obwód równoważny
Fig. 1.39. Operational transresistance amplifier and its equivalent circuit

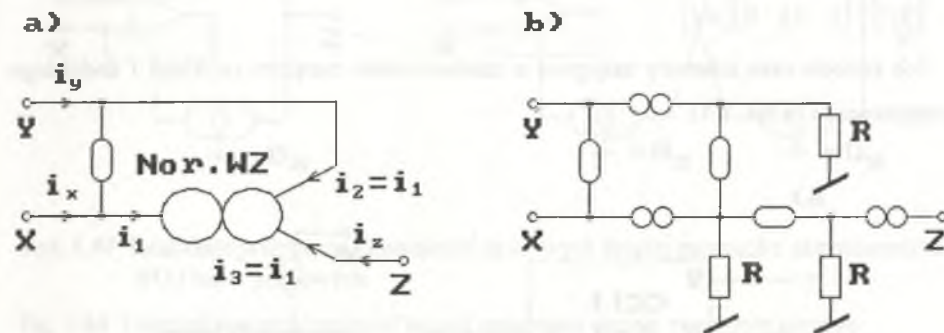


Rys. 1.40. Konwejer prądowy pierwszej generacji (CCI) i jego obwód zastępczy
Fig. 1.40. First generation current conveyor (CCI) and its nullator-norator representation

W roku 1968 Smith i Sedra [S4] wprowadzili do układów elektrycznych element trójkońcówkowy (rys. 1.40a) opisany macierzą hybrydową:

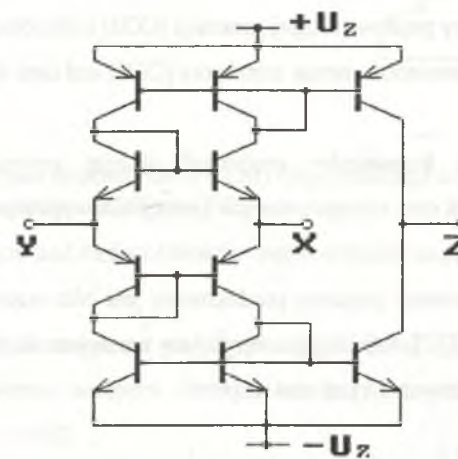
$$\begin{bmatrix} i_y \\ u_x \\ i_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_y \\ i_x \\ u_z \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

nazywany przez nich konwejerem prądowym (CC), później określany nazwą konwejer prądowy pierwszej generacji (CCI). Równoważny mu obwód zastępczy [B4] przedstawiony jest na rys. 140.b. Jego wersja bez źródeł prądowych wymaga zastosowania noratora trójzaciiskowego, dla którego zachodzi $i_3 = i_2 = i_1$, a pokazana jest na rys. 1.41.



Rys. 1.41. Obwody zastępcze CCI: z noratorem wielozaciiskowym (a) lub z rezystorami (b)
Fig. 1.41. Equivalent circuits of the CCI: with a multiterminal norator (a) and or with resistors (b)

Praktyczna realizacja układu CCI za pomocą tranzystorów bipolarnych możliwa do realizacji w postaci scalonej przedstawiona jest na rys. 1.42.

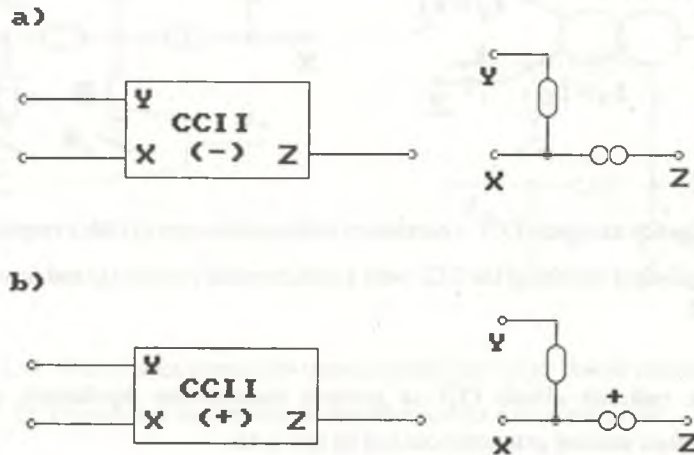


Rys. 1.42. Praktyczna realizacja układu CCI
Fig. 1.42. Practical implementation of CCI

Następnie ci sami autorzy [S5] wprowadzili pojęcie konwejerów prądowych drugiej generacji (CCII) opisanych macierzą hybrydową:

$$\begin{bmatrix} i_y \\ u_x \\ i_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_y \\ i_x \\ u_z \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

Ich symbole oraz schematy zastępcze z zastosowaniem noratora zwykłego i dodatniego przedstawiono na rys. 1.43.

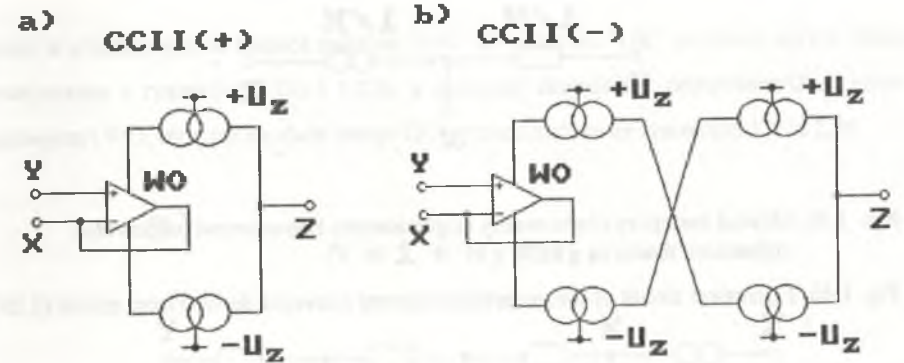


Rys. 1.43. Konwejerzy prądowe drugiej generacji (CCII) i ich obwody zastępcze
Fig. 1.43. Second generation current conveyors (CCII) and their equivalent circuits

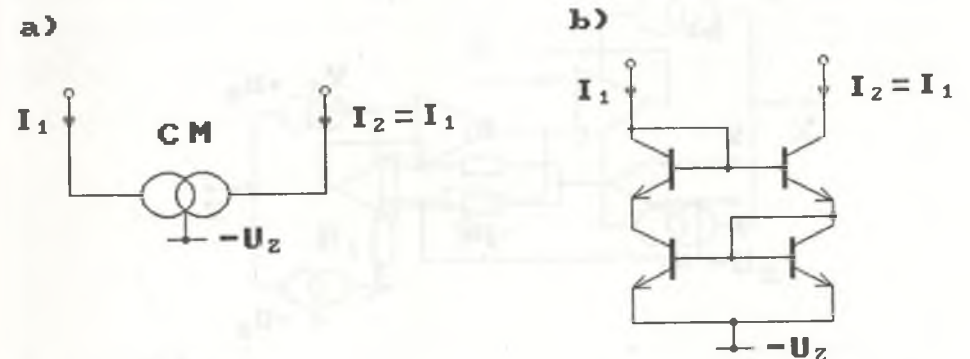
Realizacje praktyczne konwejerów prądowych drugiej generacji z zastosowaniem wzmacniaczy operacyjnych oraz tranzystorowych luster prądowych (rys. 1.45) pokazane są na rys. 1.44.

W postaci scalonej konwejer prądowy produkowany jest jako wzmacniacz AD 844 przez firmę Analog Devices [A3]. Jeżeli uogólni się pojęcie konwejera na układ opisany macierzą (1.28), lecz o wyrazach różnych od jedności, czyli:

$$\begin{bmatrix} i_y \\ u_x \\ i_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ N & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_y \\ i_x \\ u_z \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

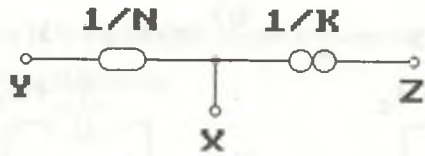


Rys. 1.44. Realizacje praktyczne konwejerów prądowych drugiej generacji z zastosowaniem WO i luster prądowych
Fig. 1.44. Practical implementation of second generation current conveyors using an operational amplifier and current mirrors



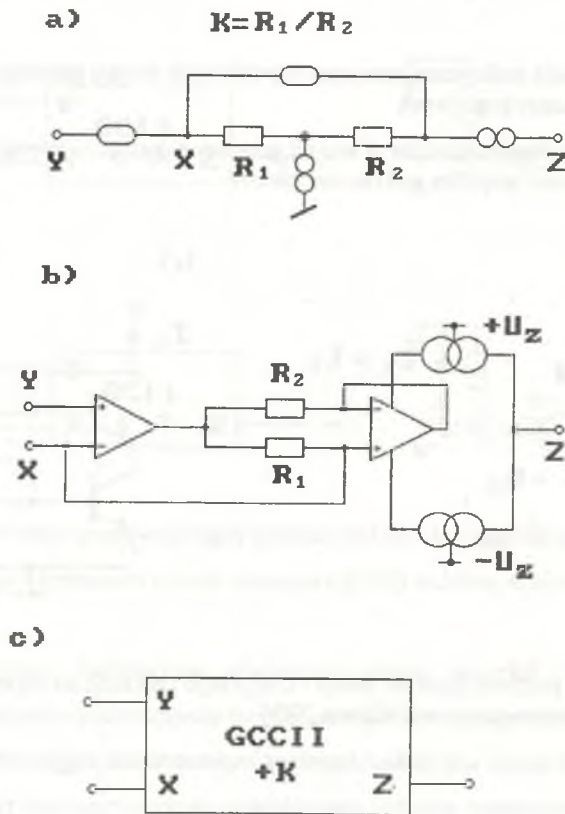
Rys. 1.45. Lustro prądowe (current mirror - CM) i jego realizacja tranzystorowa zaproponowana przez Wilsona [W3]
Fig. 1.45. Current mirror and its four-transistor implementation suggested by Wilson [W3]

otrzyma się układ zwany konwejerem prądowym uogólnionym [S2][C3] (generalized current conveyor - GCC), którego zastępczy obwód równoważny zawiera nullator uogólniony i norator uogólniony (rys. 1.46).



Rys. 1.46. Obwód zastępczy równoważny uogólnionemu konwejerowi prądowemu opisanemu macierzą (1.29)

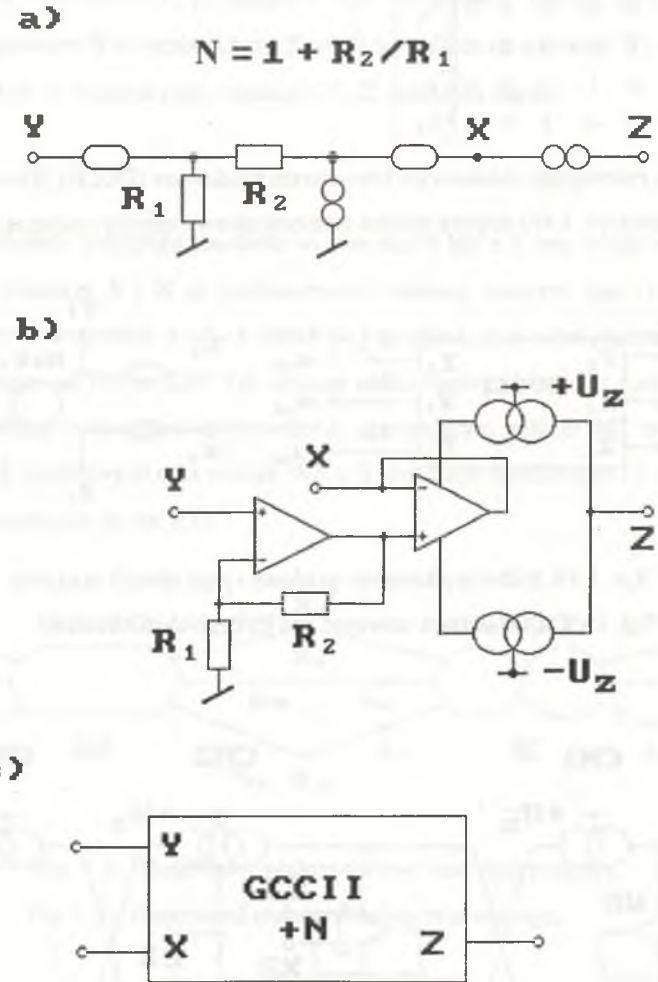
Fig. 1.46. Equivalent circuit of the generalized current conveyor derived from matrix (1.29)



Rys. 1.47. Realizacja uogólnionego konwejera prądowego o współczynnikach przenoszenia $N = 1$, $K = R_1/R_2$

Fig. 1.47. Generalized current conveyor implementation with the voltage transfer ratio $N = 1$, and current ratio $K = R_1/R_2$

Jeżeli w układzie tym w miejsce nulatora "1/N" lub noratora "1/K" podstawi się ich obwody równoważne z rysunków 1.23c i 1.27b, a następnie zbuduje ich odpowiedniki za pomocą konwejera i WO, otrzyma się dwie wersje GCC przedstawione na rysunkach 1.47 i 1.48.



Rys. 1.48. Realizacja uogólnionego konwejera prądowego o współczynnikach przenoszenia $N = 1 + R_1/R_2$, $K = 1$

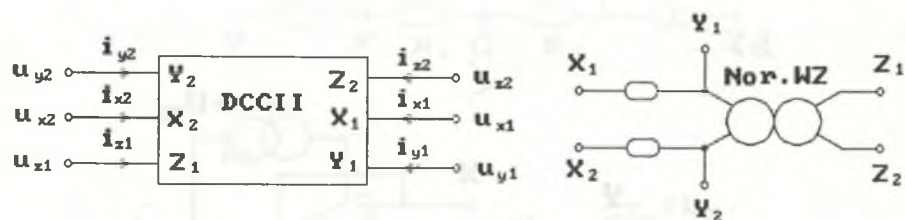
Fig. 1.48. Generalized current conveyor implementation with the voltage transfer ratio $N = 1 + R_1/R_2$, and current ratio $K = 1$

Istnieją też propozycje budowy konwejerów prądowych wielozaciskowych T3][T17][T18].

Układ sześci zaciskowy opisany macierzą:

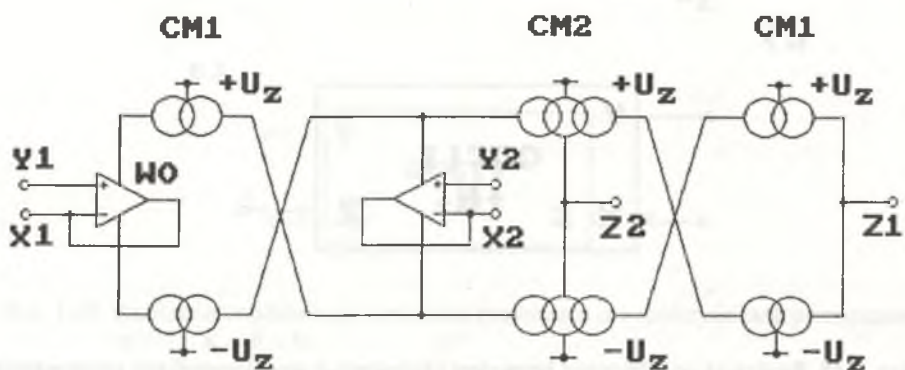
$$\begin{bmatrix} i_{y_1} \\ i_{y_2} \\ u_{x_1} \\ u_{x_2} \\ i_{z_1} \\ i_{z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{y_1} \\ u_{y_2} \\ i_{x_1} \\ i_{x_2} \\ u_{z_1} \\ u_{z_2} \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

można nazwać podwójnym różnicowym konwejerem prądowym (DCCII). Równoważny jemu obwód zastępczy (rys. 1.49) zawiera norator czterozaciskowy opisany macierzą (1.17).



Rys. 1.49. Podwójny konwejer prądowy i jego obwód zastępczy

Fig. 1.49. Dual current conveyor and its equivalent circuit



Rys. 1.50. Podwójny konwejer prądowy- realizacja praktyczna

Fig. 1.50. Practical implementation of dual current conveyor

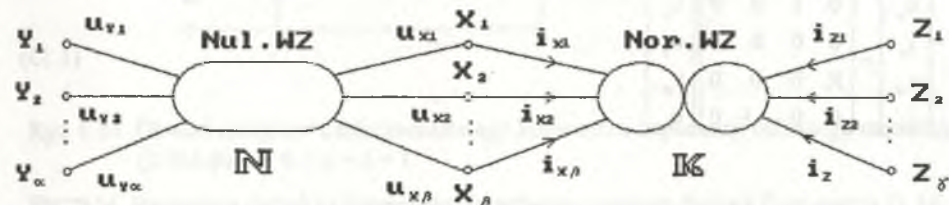
Jego realizacja praktyczna [T18] z zastosowaniem dwóch wzmacniaczy operacyjnych (WO), dwóch par luster prądowych jednowyjściowych (CM1), jednej pary luster prądowych dwuwyjściowych (CM2) przedstawiona jest na rys 1.50.

Ogólnie można sformułować pojęcie konwejera prądowego wielozaciskowego (CCIIWZ) posiadającego: α - zacisków Y, β - zacisków X, γ - zacisków Z. Opisują go dwie macierze przenoszenia: pierwsza N o wymiarach $\alpha \times \beta$ wiążąca napięcia na zaciskach X i Y oraz druga K o wymiarach $\beta \times \gamma$ wiążąca prądy zacisków X i Z, co można zapisać:

$$u_x = Nu_y, \quad (1.31)$$

$$i_z = Ki_x. \quad (1.32)$$

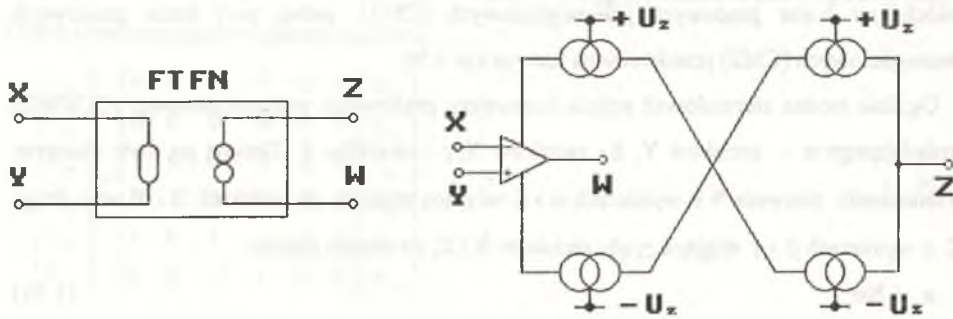
Wyrazy tych macierzy przyjmują standardowo wartości 0 lub ± 1 , lecz można także założyć wartości inne. Macierze N i K są podmacierzami większej macierzy typu (1.30) wiążącej zmienne zaciskowe wszystkich $\alpha + \beta + \gamma$ zacisków konwejera, przy czym pozostałe wyrazy tej macierzy przyjmuje się równe zero. Tak opisany układ wielozaciskowego konwejera prądowego można zastąpić obwodem równoważnym zawierającym nullator WZ o α zaciskach wejściowych i β wyjściowych oraz norator WZ o β zaciskach wejściowych i γ wyjściowych, który przedstawiony jest na rys. 1.51.



Rys. 1.51. Uogólniony wielozaciskowy konwejer prądowy

Fig. 1.51. Generalized multiterminal current conveyor

Konwejer prądowy ujemny CCII(-) (rys. 1.44b) pozwala także na praktyczną realizację czterozaciskowego nieujemnego nullatora (FTFN) [H2][H3], przez przerwanie sprzężenia między wyjściem WO a jego wejściem odwracającym (-) i utworzenie w ten sposób czwartego zacisku W, co pokazano na rys. 1.52.

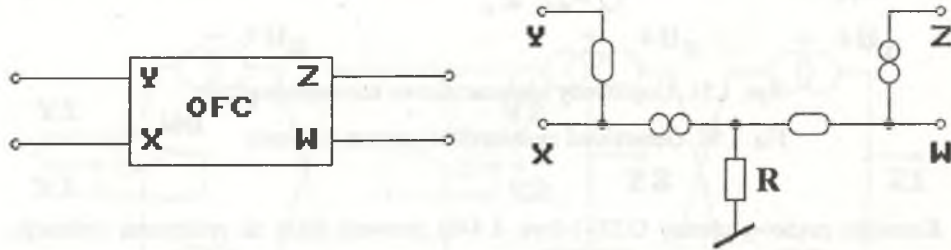


Rys. 1.52. Realizacja czterokońcówkowego nieziemionego nullatora za pomocą zmodyfikowanego ujemnego konwejera prądowego

Fig. 1.52. Four-terminal floating nullor realisation using a negative current conveyor

Na podstawie koncepcji konwejera prądowego buduje się układy scalone o czterech zaciskach pełniących w przybliżeniu rolę FTFN. W pracy [T2] zaproponowano implementację scaloną układu nazwanego operacyjnym konwejerem nieziemionym, którego działanie zdefiniowane jest przez macierz:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ i_y \\ u_w \\ i_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_x \\ u_y \\ i_w \\ u_z \end{bmatrix} \quad (1.33)$$



Rys. 1.53. Obwód zastępczy równoważny operacyjnemu konwejerowi nieziemionemu opisanemu macierzą (1.33)

Fig. 1.53. Equivalent circuit of the floating operational current conveyor derived from matrix (1.33)

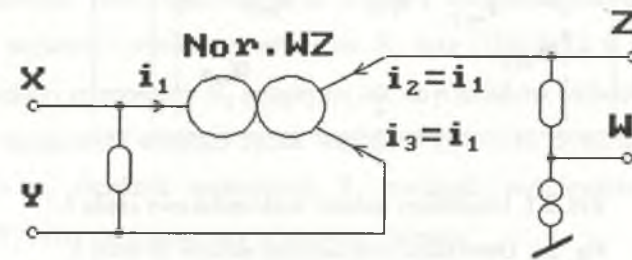
Zaproponowany na jej podstawie zastępczy obwód równoważny może mieć postać przedstawioną na rys. 1.53.

Podobnie w pracy [F1] przedstawiono implementację scaloną czterozaciskowego układu konwertera impedancji opisanego macierzą :

$$\begin{bmatrix} u_x \\ i_y \\ i_z \\ u_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_x \\ u_y \\ u_z \\ i_w \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

Zaproponowany na jej podstawie równoważny obwód zastępczy, przy założeniu $a = b = c = d = 1$, może mieć postać jak na rys. 1.54.

a)



Rys. 1.54. Obwód zastępczy czterozaciskowego konwertera impedancji opisanego macierzą (1.34) dla $a = b = c = d = 1$

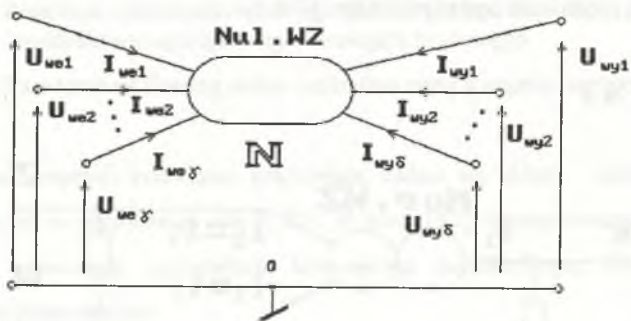
Fig. 1.54. Equivalent circuit of four-terminal impedance converter derived from matrix (1.34) for $a = b = c = d = 1$

Przedstawione przykłady ilustrują możliwość tworzenia zastępczych obwodów równoważnych, zawierających idealne elementy osobliwe dla każdego złożonego analogowego układu aktywnego, których, jak wynika z przeglądu literatury [P1], [D2], [E1], [R1], [S7], [C7], [B3], [C6], [A1], pojawiają się wciąż nowe implementacje scalone, budowane zarówno w technice bipolarnej, jak i coraz bardziej przeważającej technice polowej, a także mieszanej.

2. NULLATOROWO-NORATOROWE MODELE OBWODÓW AKTYWNYCH

2.1. UOGÓLNIONE POJĘCIA NULLATORÓW I NORATORÓW WIELOZACISKOWYCH

Niechaj dany będzie układ o γ zaciskach wejściowych, δ zaciskach wyjściowych oraz jednym zacisku "0" zwanym zaciskiem odniesienia (rys. 2.1).



Rys. 2.1. Uogólniony nullator wielozaciskowy rzędu δ

Fig. 2.1. Generalized multiterminal nullator of order δ

Dla układu tego zachodzą zależności:

$$I_{we1} = I_{we2} = \dots = I_{we\gamma} = 0 \quad (2.1)$$

$$I_{wy1} = I_{wy2} = \dots = I_{wy\delta} = 0 \quad (2.2)$$

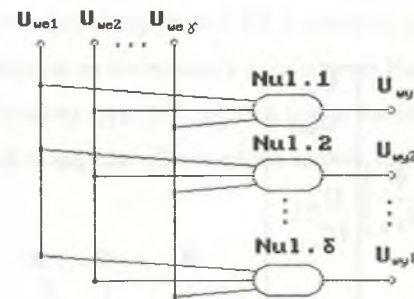
oraz δ równań wiążących napięcia:

$$\begin{bmatrix} U_{wy1} \\ U_{wy2} \\ \vdots \\ U_{wy\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & \dots & N_{1\gamma} \\ N_{21} & N_{22} & \dots & N_{2\gamma} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{\delta 1} & N_{\delta 2} & \dots & N_{\delta\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{we1} \\ U_{we2} \\ \vdots \\ U_{we\gamma} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Definicja 2.1

Układ pokazany na rys. 2.1 i określony równaniami (2.1), (2.2), (2.3) nazywany będzie uogólnionym nullatorem wielozaciskowym (U.Nul.WZ) rzędu δ o macierzy przenoszenia N .

Może on być reprezentowany przez δ układów nullatorów jednowyjściowych o wejściach połączonych jak na rys. 2.2.



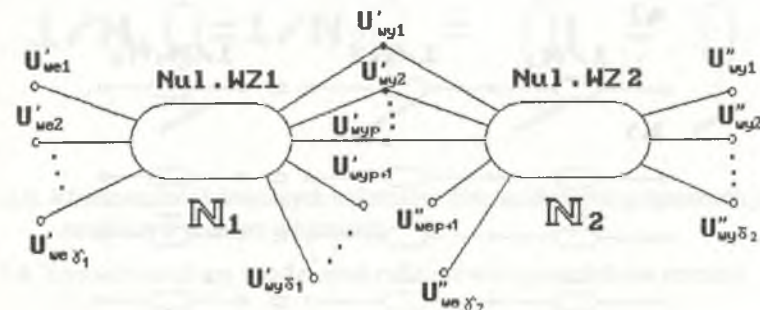
Rys. 2.2. Układ δ nullatorów jednowyjściowych równoważnych U.Nul.WZ rzędu δ

Fig. 2.2. Network δ one-output nullators equivalent to one multiterminal nullator of δ order

Układ ten dla $\delta = \gamma = 1$ oraz $N_{11} = 1$ staje się nullatorem klasycznym, natomiast dla $N_{11} = -1$ nullatorem ujemnym. Jeżeli dwa uogólnione nullatory wielozaciskowe U.Nul.WZ1 o γ_1 wejściach, δ_1 wyjściach i macierzy przenoszenia N_1 oraz U.Nul.WZ2 o γ_2 wejściach, δ_2 wyjściach i macierzy przenoszenia N_2 połączy się tak, że p zacisków wyjściowych pierwszego i p zacisków wejściowych drugiego będzie wspólnych (rys. 2.3), otrzyma się nowy układ U.Nul.WZ3 o γ_3 zaciskach wejściowych, δ_3 zaciskach wyjściowych oraz macierzy przenoszenia N_3 , przy czym parametry te określają równania:

$$\gamma_3 = \gamma_1 + \gamma_2 - p, \quad (2.4)$$

$$\delta_3 = \delta_1 + \delta_2. \quad (2.5)$$



Rys. 2.3. Połączenie dwóch uogólnionych nullatorów wielozaciskowych o p zaciskach wspólnych

Fig. 2.3. The connections of two generalized multiterminal nullators with a p -terminals common

Macierz przenoszenia N_3 o δ_3 wierszach i γ_3 kolumnach ma postać:

$$\begin{bmatrix} U'_{wy1} \\ U'_{wy2} \\ \vdots \\ U'_{wy\delta_1} \\ U''_{wy1} \\ U''_{wy2} \\ \vdots \\ U''_{wy\delta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & | & 0 \\ \hline N_{2p} \times N_{1p} & | & N_{2-p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U'_{we1} \\ U'_{we2} \\ \vdots \\ U'_{we\gamma_1} \\ U''_{we,p+1} \\ \vdots \\ U''_{\gamma_2} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

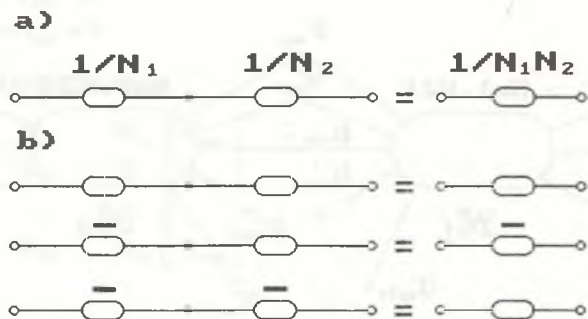
w której:

N_{1p} - jest macierzą utworzoną z macierzy N_1 o p wierszach odpowiadających tym wyjściom U.Nul.WZ1, które są połączone z wejściami U.Nul.WZ2,

N_{2p} - jest macierzą utworzoną z macierzy N_2 o p kolumnach odpowiadających tym wejściom U.Nul.WZ2, które są połączone z wyjściami U.Nul.WZ1,

N_{2-p} - jest podmacierzą macierzy N_2 po skreśleniu p kolumn odpowiadających tym wejściom U.Nul.WZ2, które są połączone z wyjściami U.Nul.WZ1.

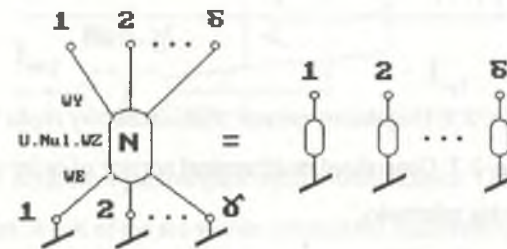
W szczególnym przypadku dla dwóch nullatorów o jednym wejściu i jednym wyjściu oraz współczynnikach przenoszenia N_1 i N_2 ich połączenie szeregowe jest równoważne nullatorowi o współczynniku przenoszenia $N_3 = N_1 \cdot N_2$ (rys. 2.4a). Stąd natychmiast wynikają równoważności połączeń nullatorów ujemnego i klasycznego pokazane na rys. 2.4b.



Rys. 2.4. Równoważne układy połączeń nullatorów dwukońcówkowych

Fig. 2.4. Equivalent connections of two-terminal nullators

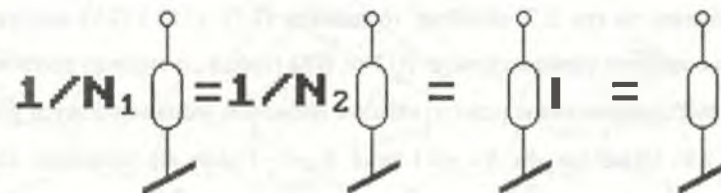
Jeżeli zaciski wejściowe dowolnego U.Nul.WZ o macierzy przenoszenia N połączy się z zaciskiem odniesienia, staje się on równoważny δ nullatorom klasycznym połączonym jednym końcem z zaciskiem odniesienia (rys. 2.5), gdyż na podstawie relacji (2.1), (2.2), (2.3) prąd i napięcie na tych zaciskach mogą mieć tylko wartości zerowe, niezależnie od wartości wyrazów N_{ij} macierzy N .



Rys. 2.5. Równoważność U.Nul.WZ rzędu δ o uziemionych zaciskach wejściowych z δ nullatorami klasycznymi o jednym zacisku uziemionym

Fig. 2.5. Equivalence of a generalized multiterminal nullator of order δ with input terminals grounded with a δ classical nullators with one grounded terminal

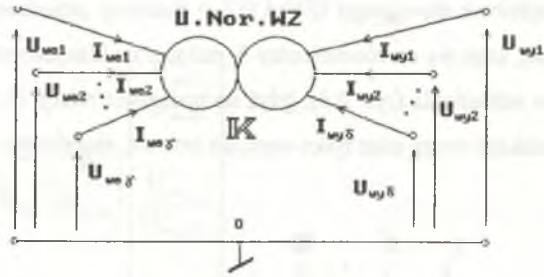
Stąd też wynikają tożsamości dla nullatorów dwuzaciskowych o dowolnych współczynnikach przenoszenia, połączonych jednym zaciskiem z punktem odniesienia, przedstawione na rys. 2.6.



Rys. 2.6. Równoważność dowolnych nullatorów dwuzaciskowych połączonych jednym zaciskiem z punktem odniesienia

Fig. 2.6. Equivalence of any two-terminal nullators with grounded one terminal

Niechaj dany będzie układ o γ zaciskach wejściowych, δ zaciskach wyjściowych oraz jednym zacisku "0" zwanym zaciskiem odniesienia (rys. 2.7).



Rys. 2.7. Uogólniony norator wielozaciskowy rzędu γ

Fig. 2.7. Generalized multiterminal norator of order γ

Dla układu tego zachodzą zależności:

$$U_{we1}, U_{we2}, \dots, U_{we\gamma} - \text{dowolne} \quad (2.7)$$

$$U_{wy1}, U_{wy2}, \dots, U_{wy\delta} - \text{dowolne}, \quad (2.8)$$

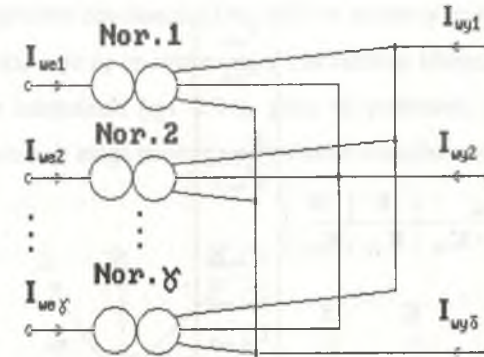
oraz δ równań wiążących prądy zaciskowe, o postaci:

$$\begin{bmatrix} I_{wy1} \\ I_{wy2} \\ \vdots \\ I_{wy\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1\gamma} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2\gamma} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{\delta 1} & K_{\delta 2} & \dots & K_{\delta \gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{we1} \\ I_{we2} \\ \vdots \\ I_{we\gamma} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Definicja 2.2

Układ pokazany na rys. 2.7, określony równaniami (2.7), (2.8) i (2.9) nazywany będzie uogólnionym noratorem wielozaciskowym (U.Nor.WZ) rzędu γ , o macierzy przenoszenia K .

Może on być reprezentowany przez γ układów noratorów jednowejściowych połączonych jak na rys. 2.8. Układ ten dla $\delta = \gamma = 1$ oraz $K_{11} = -1$ staje się noratorem klasycznym, natomiast dla $K_{11} = 1$ noratorem dodatnim. Jeżeli dwa uogólnione noratory wielozaciskowe U.Nor.WZ1 o γ_1 wejściach, δ_1 wyjściach i macierzy przenoszenia K_1 oraz U.Nor.WZ2 o γ_2 wejściach, δ_2 wyjściach i macierzy przenoszenia K_2 połączy się tak, że p zacisków wyjściowych pierwszego i p zacisków wejściowych drugiego będzie wspólnych (rys. 2.9), otrzyma się nowy układ U.Nor.3 o γ_3 zaciskach wejściowych, δ_3 zaciskach wyjściowych oraz macierzy przenoszenia K_3 , przy czym parametry te określają równania:

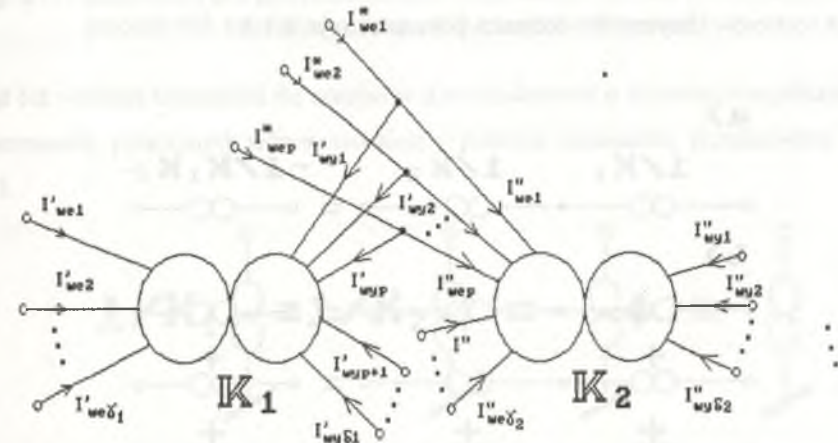


Rys. 2.8. Układ γ noratorów jednowejściowych równoważnych U.Nor.WZ rzędu γ

Fig. 2.8. Equivalent circuit of the γ -order generalized multiterminal norator with γ one-input norators

$$\gamma_3 = \gamma_1 + \gamma_2, \quad (2.10)$$

$$\delta_3 = \delta_1 + \delta_2 - p. \quad (2.11)$$



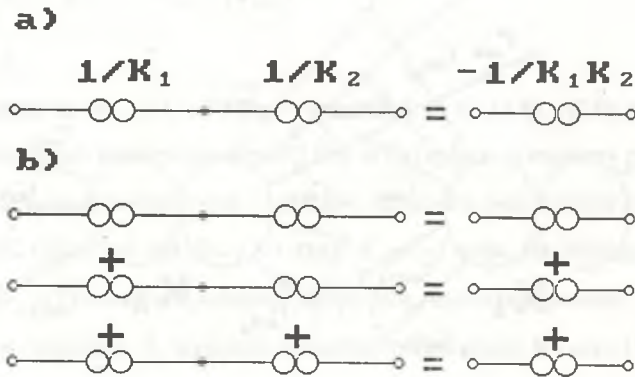
Rys. 2.9. Połączenie dwóch U.Nor.WZ o p zaciskach wspólnych

Fig. 2.9. Connection of two generalized multiterminal norators with a p -terminals common

Ze względu na to, że prądy wejściowe $I'_{we,i} = I''_{we,i} - I'_{wy,i}$ dla $i = 1, 2, \dots, p$, stąd macierz przenoszenia K_3 o δ_3 wierszach i γ_3 kolumnach ma postać:

$$\begin{bmatrix} I'_{wy, p+1} \\ I'_{wy, p+2} \\ \vdots \\ I'_{wy, \delta_1} \\ I''_{wy, 1} \\ I''_{wy, 2} \\ \vdots \\ I''_{wy, \delta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1a} & 0 & 0 \\ -K_{2a} \times K_{1b} & K_{2a} & K_{2b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I'_{we, 1} \\ I'_{c, 2} \\ \vdots \\ \frac{I'_{we, \gamma_1}}{\gamma} \\ I''_{we, 1} \\ \vdots \\ I''_{we, p} \\ I''_{we, p+1} \\ I''_{we, p+2} \\ \vdots \\ I''_{we, \gamma_2} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

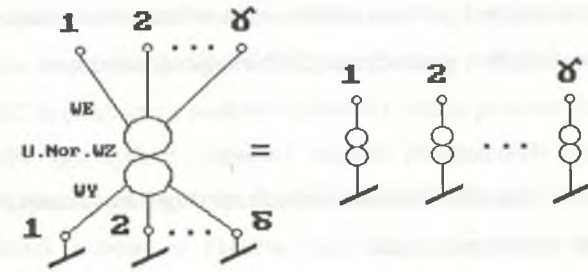
w której K_{1a} i K_{1b} są podmacierzami macierzy K_1 o wymiarach odpowiednio $(\delta_1 - p) \times \gamma_1$ i $p \times \gamma_1$, natomiast K_{2a} i K_{2b} są częściami macierzy K_2 o wymiarach $\delta_2 \times p$ i $\delta_2 \times (\gamma_2 - p)$. W szczególnym przypadku dla dwóch noratorów o jednym wejściu i jednym wyjściu i współczynnikach przenoszenia K_1 i K_2 ich połączenie szeregowe jest równoważne noratorowi o współczynniku przenoszenia $K_3 = -K_1 K_2$ (rys. 2.10a). Stąd wynikają też równoważności połączeń noratorów klasycznych i dodatnich pokazane na rys. 2.10b.



Rys. 2.10. Równoważne układy połączeń noratorów dwukońcówkowych

Fig. 2.10. Equivalent connections of the two-terminal nullators

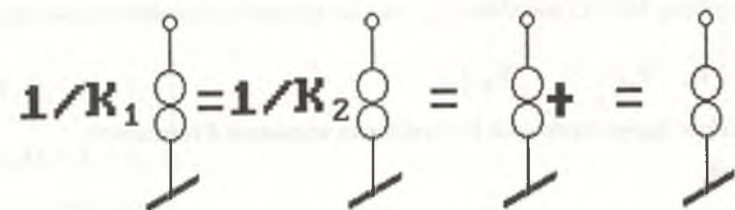
Jeżeli zaciski wyjściowe dowolnego U.Nor.WZ o macierzy przenoszenia K połączy się z zaciskiem odniesienia, staje się on równoważny γ noratorom klasycznym połączonym jednym końcem z zaciskiem odniesienia (rys. 2.11), gdyż na podstawie (2.7), (2.8) i (2.9) prąd i napięcie na tych zaciskach mogą przyjmować wartości dowolne niezależnie od wyrazów K_{ij} macierzy K .



Rys. 2.11. Równoważność U.Nor.WZ rzędu γ o uziemionych zaciskach wyjściowych z γ noratorami klasycznymi o jednym zacisku uziemionym

Fig. 2.11. Equivalence of a generalized multiterminal nullator of order γ with output terminals grounded with a γ classical nullators with one grounded terminal

Stąd też wynikają tożsamości dla noratorów dwuzaciskowych o dowolnych współczynnikach przenoszenia, połączonych jednym zaciskiem z punktem odniesienia, przedstawione na rys. 2.12.



Rys. 2.12. Równoważność dowolnych noratorów dwuzaciskowych połączonych jednym zaciskiem z punktem odniesienia

Fig. 2.12. Equivalence of any two-terminal nullators with grounded one terminal

2.2. ANALIZA OBWODÓW AKTYWNYCH Z UOGÓLNIONYMI WIELOZACISKOWYMI ELEMENTAMI OSOBLIWYMI

Rozpatrywana będzie $n+1$ węzłowa sieć elektryczna złożona z biernych liniowych dwójników klasycznych, opisanych admitancjami Y_{kj} , wymuszeń niezależnych reprezentowanych przez siły prądomotoryczne J_k oraz α uogólnionych nullatorów wielozaciskowych opisanych macierzami przenoszenia N_i , o sumarycznej liczbie wyjść δ , przy czym:

$$\delta = \sum_{i=1}^{\alpha} \delta_i \quad (2.13)$$

oraz β uogólnionych noratorów wielozaciskowych opisanych macierzami przenoszenia K_i , o sumarycznej liczbie wejść γ , przy czym:

$$\gamma = \sum_{i=1}^{\beta} \gamma_i \quad (2.14)$$

W sieci tej jeden z węzłów przyjmuje się za węzeł odniesienia o potencjale zerowym tożsamy z węzłem odniesienia uogólnionych elementów osobliwych N_i i K_i , zwany także punktem odniesienia lub uziemieniem. Część klasyczna tej sieci otrzymana w wyniku pominięcia elementów osobliwych, przy czym w ich miejsce przyjmuje się admitancje zerowe, opisana jest przez macierz admitancyjną Y o postaci:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & Y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & Y_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

wiązącą wektor napięć węzłowych U z wektorem wymuszeń J równaniem:

$$YU=J \quad (2.16)$$

Na skutek istnienia w sieci uogólnionych nullatorów wielozaciskowych, δ spośród n napięć węzłowych jest uzależniona od pozostałych zgodnie z α układami równań określonych macierzami N_i opisującymi te nullatory. Po uwzględnieniu tego faktu w równaniu macierzowym (2.16) zmniejsza się w nim ilość niewiadomych o δ , a tym samym ilość kolumn w macierzy Y .

Przykładowo, jeżeli jedno z wyjść pewnego nullatora przyłączone jest do węzła k -tego, a jego wejścia do węzłów od numeru 1 do γ_k , wtedy zastępując w równaniu (2.16) napięcie U_k zależnością:

$$U_k = \sum_{j=1}^{\gamma_k} N_{kj} U_j \quad (2.17)$$

i po uporządkowaniu składników zgodnie z numeracją napięć otrzymuje się w kolumnach o numerach $j = 1$ do γ_k wyrazy o postaci:

$$\bar{Y}_{wj} = Y_{wj} + N_{kj} Y_{wk}, \quad (2.18)$$

gdzie w oznacza numery kolejnych wierszy. Jednocześnie ze względu na wyeliminowanie napięcia U_k kolumna k -ta przestaje istnieć. W przypadku gdy wszystkie zaciski wejściowe któregoś z U.Nul.WZ są połączone z punktem odniesienia, można pominąć wszystkie kolumny o numerach węzłów zgodnych z numerami węzłów przyłączonych do jego zacisków wyjściowych, gdyż napięcia tych węzłów muszą być zawsze równe zero.

Podobnie na skutek istnienia w układzie uogólnionych noratorów wielozaciskowych, γ prądów węzłowych jest składowymi pozostałych, zgodnie z β układami równań wyrażonych przez macierze przenoszenia K_i opisującymi te noratory. Po uwzględnieniu tego faktu w równaniu macierzowym (2.16) zmniejsza się w nim ilość równań o γ , a tym samym ilość wierszy w macierzy admitancyjnej Y .

Przykładowo, jeżeli wyjście pewnego noratora przyłączone jest do węzła k -tego, a jego wejścia do węzłów od 1 do γ_k , wtedy prąd ten opisuje równanie:

$$I_k = \sum_{j=1}^{\gamma_k} K_{kj} I_j \quad (2.19)$$

Prądy I_j są opisywane także przez równania od 1 do γ_k z zależności (2.16) o postaci:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n Y_{1i} U_i - J_1 &= I_1 \\ \sum_{i=1}^n Y_{2i} U_i - J_2 &= I_2 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ \sum_{i=1}^n Y_{\gamma_k, i} U_i - J_{\gamma_k} &= I_{\gamma_k} \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Uwzględniając zależności (2.19) i (2.20) w wierszu k -tym przyjmuje on postać:

$$\sum_{i=1}^n (Y_{ki} - \sum_{j=1}^{\gamma_k} K_{kj} Y_{ji}) U_i = J_k - \sum_{j=1}^{\gamma_k} K_{kj} J_j \quad (2.21)$$

Po uwzględnieniu wszystkich γ równań typu (2.19), równania o numerach węzłów dołączonych do wejść noratorów mogą być pominięte. W przypadku gdy wszystkie zaciski wyjściowe któregoś z U.Nor.WZ są połączone z punktem odniesienia, można pominąć

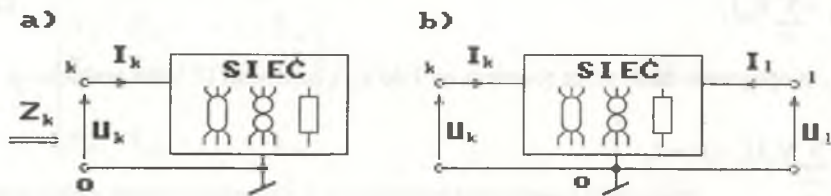
wszystkie wiersze macierzy \mathbf{Y} o numerach odpowiadających numerom węzłów zgodnych z numerami węzłów przyłączonych do jego zacisków wejściowych, gdyż prądy ich mogą mieć wartości dowolne. Tym samym macierz admittancejną \mathbf{Y} zmniejszy się o γ wierszy.

Po uwzględnieniu wszystkich zależności związanych z nullatorami i noratorami istniejącymi w sieci, opisująca ją macierz admittancejną \mathbf{Y} o wymiarach $n \times n$ przekształci się w macierz admittancejną zredukowaną $\tilde{\mathbf{Y}}$ o wymiarach $(n-\gamma) \times (n-\delta)$. Całą sieć opisuje wtedy zredukowany układ równań o postaci:

$$\tilde{\mathbf{Y}}\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{J}} \quad (2.22)$$

Jeżeli macierz admittancejną zredukowaną $\tilde{\mathbf{Y}}$ będzie kwadratowa, co oznacza $n-\gamma = n-\delta$, czyli $\gamma=\delta$ i jednocześnie nieosobliwa, to układ równań (2.22) posiada dokładnie jedno rozwiązanie. Warunek $\gamma=\delta$ wymaga, aby suma ilości zacisków wyjściowych wszystkich nullatorów w układzie była równa sumie ilości zacisków wejściowych wszystkich noratorów. Jeżeli wszystkie elementy osobliwe będą dwuzaciskowe, to warunek $\gamma=\delta$ równoważny jest wymaganiu, aby ilości nullatorów i noratorów w sieci były takie same.

Macierz admittancejną zredukowaną $\tilde{\mathbf{Y}}$ pozwala obliczyć parametry analizowanej sieci jako dwójnika widzianego między wybranym węzłem o numerze k a węzłem odniesienia o potencjale zerowym (rys. 2.13a), przy założeniu braku wymuszeń wewnątrz sieci.



Rys. 2.13. Wyznaczanie parametrów zaciskowych sieci zawierającej uogólnione elementy osobliwe

Fig. 2.13. Determination of the terminal parameters of a network containing generalized singular elements

Impedancja takiego dwójnika, co łatwo wykazać zakładając wymuszenie prądowe do węzła k $I_k = J_k$ i obliczając napięcie U_k tego węzła, wyraża się wzorem:

$$Z_k = \frac{U_k}{I_k} = \frac{\tilde{Y}_{kk}}{|\tilde{\mathbf{Y}}|}, \quad (2.23)$$

w którym:

$|\tilde{\mathbf{Y}}|$ - jest wyznacznikiem zredukowanej macierzy admittancejnej całej sieci,

\tilde{Y}_{kk} - jest dopełnieniem algebraicznym powstałym po skreśleniu w macierzy admittancejnej zredukowanej k -tego wiersza i k -tej kolumny.

Podobnie ze znajomości zredukowanej macierzy admittancejnej można obliczyć transmitancje sieci traktowanej jako czwórnik widziany między dwoma wybranymi węzłami k i l (rys. 2.13b), będącymi zaciskami wejściowymi i wyjściowymi wraz z węzłem odniesienia, który jest dla nich zaciskiem wspólnym. Transmitancje te opisane są przez następujące zależności:

$$H_U = \frac{U_l}{U_k} = \frac{\tilde{Y}_{kl}}{\tilde{Y}_{kk}}, \quad (2.24)$$

$$H_I = \frac{-I_l}{I_k} = \frac{\tilde{Y}_{kl}}{\tilde{Y}_{ll}}, \quad (2.25)$$

$$H_{IU} = \frac{U_l}{I_k} = \frac{\tilde{Y}_{kl}}{|\tilde{\mathbf{Y}}|}, \quad (2.26)$$

$$H_{UI} = \frac{-I_l}{U_k} = \frac{\tilde{Y}_{kl}}{\tilde{Y}_{kk, ll}}, \quad (2.27)$$

w których:

\tilde{Y}_{kl} - jest dopełnieniem algebraicznym powstałym po skreśleniu w macierzy zredukowanej k -tego wiersza i l -tej kolumny,

\tilde{Y}_{ll} - jest dopełnieniem algebraicznym powstałym po skreśleniu w macierzy zredukowanej l -tego wiersza i l -tej kolumny,

$\tilde{Y}_{kk, ll}$ - jest dopełnieniem algebraicznym powstałym po skreśleniu w macierzy zredukowanej k -tej i l -tej kolumny oraz k -tego i l -tego wiersza.

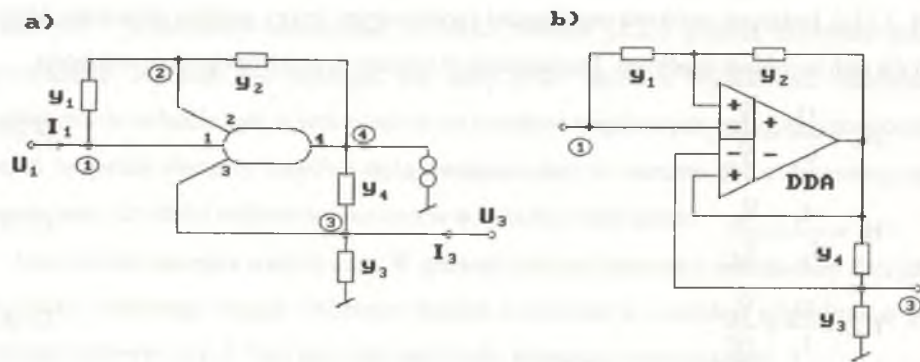
Przedstawiona metoda analizy sieci zawierających uogólnione nullatory i noratory wielozaciskowe jest rozszerzeniem powszechnie znanej metody analizy układów z nullatorami i noratorami dwuzaciskowymi [D1, T4, M4, L1].

Przykład 2.1

Dany jest układ (rys. 2.14a), zawierający cztery admitancje, norator oraz U.Nuł.WZ o trzech zaciskach wejściowych 1, 2, 3 i jednym wyjściowym 4, opisany macierzą przenoszenia:

$$N = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Jego reprezentacją fizyczną jest układ ze wzmacniaczem operacyjnym różnicowo-różnicowym (DDA) z rs. 2.14b. Należy obliczyć impedancje wejściowe całego układu na zaciskach 1 i 2 oraz wszystkie transmitancje między tymi zaciskami względem zacisku odniesienia o potencjale zerowym.



Rys. 2.14. Przykład analizy układu z nullatorem wielozaciskowym (a) i jego reprezentacja fizyczna (b)

Fig. 2.14. Example of the analysis for the circuit with multiterminal nullator (a) and its physical implementation (b)

Macierz admitancyjna układu z pominięciem elementów osobliwych ma postać:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & -y_1 & 0 & 0 \\ -y_1 & y_1 + y_2 & 0 & -y_2 \\ 0 & 0 & y_3 + y_4 & -y_4 \\ 0 & -y_2 & -y_4 & y_2 + y_3 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Po skreśleniu czwartego wiersza i dodaniu czwartej kolumny do trzech pierwszych, z uwzględnieniem współczynników macierzy (2.28), otrzymuje się na podstawie (2.17) i (2.18) macierz admitancyjną zredukowaną:

$$\tilde{Y} = \begin{bmatrix} y_1 & -y_1 & 0 \\ -y_1 + y_2 & y_1 & -y_2 \\ y_4 & -y_4 & y_3 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Na jej podstawie oraz z relacji (2.23) do (2.27) otrzymuje się zależności:

$$Z_{wei,1} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{\tilde{Y}_{11}}{|\tilde{Y}|} = \frac{y_1 y_3 - y_2 y_4}{y_1 y_2 y_3} \quad (2.31)$$

$$Z_{wei,2} = \frac{U_3}{I_3} = \frac{\tilde{Y}_{33}}{|\tilde{Y}|} = \frac{2y_1 + y_2}{y_2 y_3} \quad (2.32)$$

$$H_U = \frac{U_3}{U_1} = \frac{\tilde{Y}_{13}}{\tilde{Y}_{11}} = \frac{-y_2 y_4}{y_1 y_3 - y_2 y_4} \quad (2.33)$$

$$H_I = \frac{-I_3}{I_1} = \frac{\tilde{Y}_{13}}{\tilde{Y}_{33}} = \frac{-y_4}{y_1} \quad (2.34)$$

$$H_{U1} = \frac{U_3}{I_1} = \frac{\tilde{Y}_{13}}{|\tilde{Y}|} = \frac{-y_4}{y_1 y_3} \quad (2.35)$$

$$H_{U1} = \frac{-I_3}{U_1} = \frac{\tilde{Y}_{13}}{Y_{11,33}} = \frac{y_2 y_4}{y_1} \quad (2.36)$$

Reprezentacja fizyczna analizowanego układu z zastosowaniem różnicowo-różnicowego wzmacniacza operacyjnego przedstawiona jest na rys. 2.14b.

2.3. RÓWNOWAŻNE OBWODY ZASTĘPCZE UOGÓLNIONYCH ELEMENTÓW OSOBLIWYCH

Jak wynika z przykładów przytoczonych w rozdziale I oraz pokazanych na rysunkach 2.2 i 2.8, elementy osobliwe posiadają równoważne im obwody zastępcze zbudowane z nullatorów jednowyjściowych i noratorów jednowyjściowych, a te natomiast wymagają elementów osobliwych dwuzaciskowych oraz rezystancji.

Niechaj będzie dany n-wrotnik rezystancyjny zawierający α uogólnionych nullatorów wielozaciskowych o sumarycznej liczbie wyjść δ oraz β uogólnionych noratorów wielozaciskowych o sumarycznej liczbie wejść γ .

Definicja 2.3

Rzędem osobliwości sieci rezystancyjno-nullatorowo-noratorowej (RNN) nazywana będzie liczba równa różnicy ilości wejść γ wszystkich U.Nor.WZ w niej zawartych i ilości wyjść δ wszystkich U.Nul.WZ w niej zawartych i oznacza:

$$\text{ord}(\text{RNN}) = \gamma - \delta \quad (2.37)$$

Stąd oczywiste jest twierdzenie:

Twierdzenie 2.1

Połączenie w dowolny sposób dwóch sieci rezystancyjno-nullatorowo-noratorowych RNN1 i RNN2 rzędów ρ_1 i ρ_2 daje w konsekwencji nową sieć RNN rzędu ρ_3 , przy czym:

$$\rho_3 = \rho_1 + \rho_2 \quad (2.38)$$

Można zatem na podstawie definicji 2.1 i 2.2 stwierdzić:

Twierdzenie 2.2

Każdy wielowrotnik typu RNN o wyróżnionych n wrotach wejściowych i m wyjściowych spełniający relacje (2.1), (2.2) i (2.3), dla którego zachodzi:

$$\text{ord}(\text{RNN}) = m, \quad (2.39)$$

jest równoważnym obwodem zastępczym U.Nul.WZ określonego def. 2.1.

Twierdzenie 2.3

Każdy wielowrotnik typu RNN o wyróżnionych n wrotach wejściowych i m wyjściowych spełniający relacje (2.7), (2.8) i (2.9), dla którego zachodzi:

$$\text{ord}(\text{RNN}) = -n, \quad (2.40)$$

jest równoważnym obwodem zastępczym U.Nor.WZ określonego def. 2.2.

Z praktycznego punktu widzenia równoważne obwody zastępcze należałoby modelować z takich zestawów elementów osobliwych, aby możliwe było zastąpienie ich reprezentacjami fizycznymi przedstawionymi w punkcie 1.2. Najbardziej uniwersalne wydaje się przedstawienie sieci zastępczych za pomocą rezystancji i zbioru elementów osobliwych dwuzaciskowych, gdyż każdy układ praktyczny posiada swój model w tej klasie elementów. Umożliwia to ponadto realizację fizyczną uogólnionej sieci nullatorowo-noratorowej na wiele różnych sposobów w zależności od zastosowanych rzeczywistych układów elektronicznych.

W sieciach RNN oprócz pojedynczych elementów, takich jak rezystancje, nullatory i noratory, można wyróżnić pewne elementarne układy dwuelementowe, istotne ze względu na modyfikowanie własności tych sieci. Przedstawione są one w tablicy 2.1.

Tablica 2.1

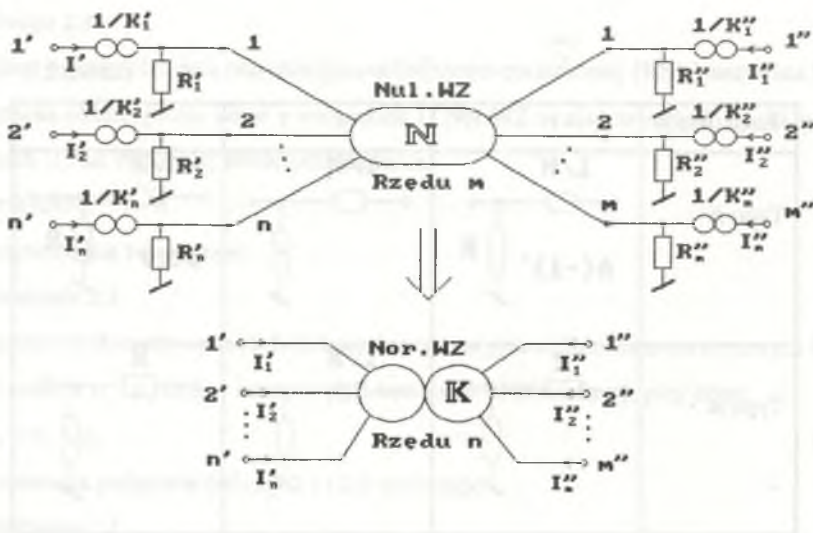
Rząd układu	-1	0	1
Typu A	<p>$1/N$ $A(-1)$</p>	<p>$1/N$</p>	<p>$1/K$ $A(1)$</p>
Typu B	<p>R</p>	<p>$1/K$</p>	<p>R</p>

Układy z kolumny środkowej tej tablicy są źródłami: napięciowym sterowanym napięciem oraz prądowym sterowanym prądem o wzmocnieniach N i K . Dołączenie ich do sieci RNN nie zmienia wartości jej rzędu osobliwości. Elementy z kolumn 1 i 3 są układami o rzędzie osobliwości -1 i 1 , lecz nie są nullatorami ani noratorami, gdyż nie spełniają wszystkich warunków ich definicji. Dołączone do dowolnej sieci RNN zmieniają jednak jej rząd osobliwości pozwalając tworzyć modele uogólnionych elementów osobliwych.

I tak niechaj dany będzie U.Nul.WZ o n wejściach i m wyjściach (rzędu $-m$) i macierzy przenoszenia napięć N . Do wszystkich jego zacisków przyłączono układy elementarne typu A rzędu 1 jak na rys. 2.15.

Twierdzenie 2.4

Dołączenie do wszystkich zacisków U.Nul.WZ rzędu m o n wejściach i macierzy przenoszenia napięć N , $(n+m)$ elementarnych układów osobliwych typu $A(1)$ w sposób pokazany na rys. 2.15 przekształca go w U.Nor.WZ rzędu n i macierzy przenoszenia prądów K o postaci:



Rys. 2.15. U.Nul.WZ rzędu m z dołączonymi elementarnymi układami typu A(1) jako U.Nor.WZ rzędu n

Fig. 2.15. Order m generalized multiterminal nullator with elementary A(1)-type circuits as a n -order generalized multiterminal norator

$$K = \begin{bmatrix} N_{11}K'_1K''_1 \frac{R_1}{R'_1} & N_{12}K'_2K''_1 \frac{R_2}{R'_1} & \dots & N_{1n}K'_nK''_1 \frac{R_n}{R'_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ N_{m1}K'_1K''_m \frac{R_1}{R'_m} & N_{m2}K'_2K''_m \frac{R_2}{R'_m} & \dots & N_{mn}K'_nK''_m \frac{R_n}{R'_m} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Dowód prawdziwości powyższego twierdzenia otrzymuje się natychmiast po wyrażeniu napięć wejściowych u_k i wyjściowych u'_k przez prądy wejściowe oraz wartości rezystancji R'_k , R''_k i współczynników przenoszenia N'_k , N''_k .

Podobnie można wykazać prawdziwość twierdzenia umożliwiającego przekształcenie U.Nor.WZ w U.Nul.WZ (rys. 2.16).

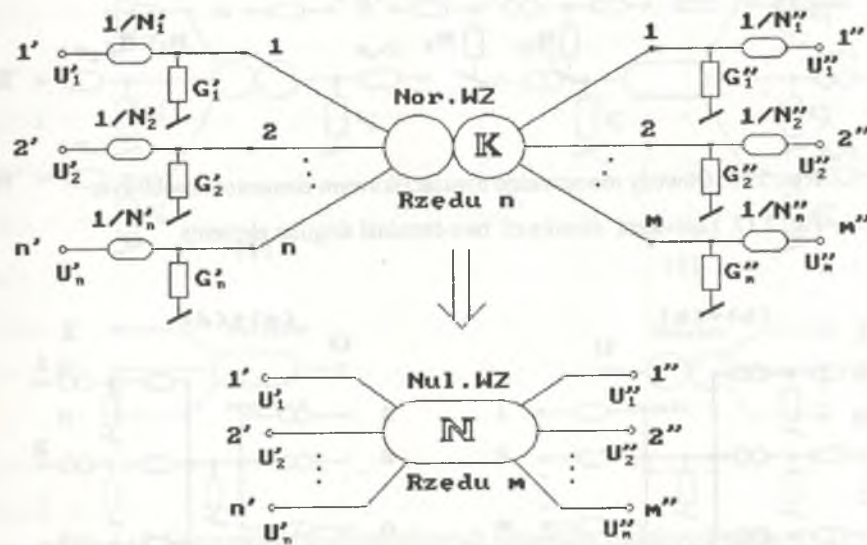
Twierdzenie 2.5

Dołączenie do wszystkich zacisków U.Nor.WZ rzędu n o m wyjściach i macierzy współczynników przenoszenia prądów K , $n+m$ elementarnych układów osobiwych typu A(-1) w sposób pokazany na rys. 2.16 przekształca go w U.Nul.WZ rzędu m i macierzy przenoszenia napięć N o postaci:

$$N = \begin{bmatrix} K_{11}N'_1N''_1 \frac{G_1}{G'_1} & K_{12}N'_2N''_1 \frac{G_2}{G'_1} & \dots & K_{1n}N'_nN''_1 \frac{G_n}{G'_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{m1}N'_1N''_m \frac{G_1}{G'_m} & K_{m2}N'_2N''_m \frac{G_2}{G'_m} & \dots & K_{mn}N'_nN''_m \frac{G_n}{G'_m} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

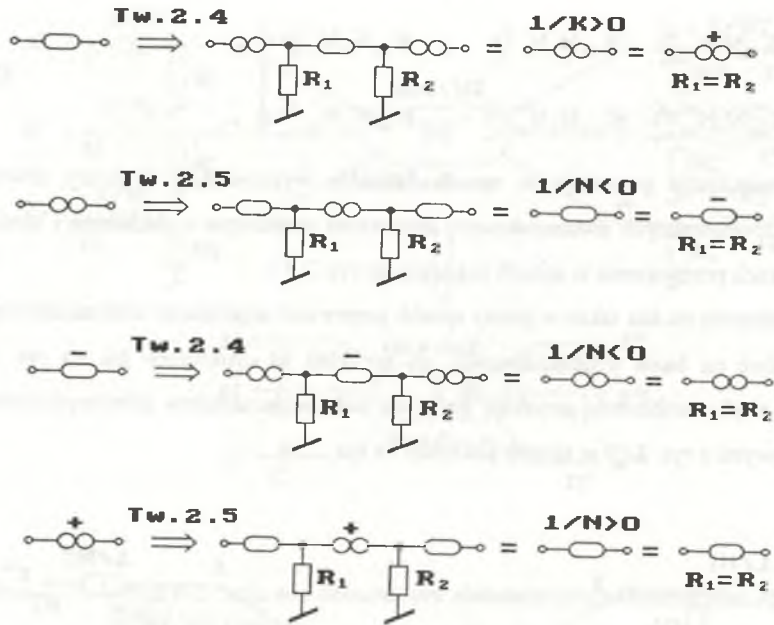
Podane twierdzenia pozwalają w sposób formalny wyprowadzić struktury obwodów zastępczych równoważnych dwuzaciskowym elementom osobiwym o dodatnich i ujemnych współczynnikach przenoszenia w sposób pokazany na rys. 2.17.

Na ich podstawie można także w prosty sposób generować uogólnione wielozaciskowe elementy osobiwe na bazie dwuzaciskowych, na przykład w strukturach jak na rys. 2.19. Zwiększenie rzędu osobiwości uzyskuje się przez połączenie układów jednowyjściowych z jednowyjściowymi z rys. 2.19 w sposób pokazany na rys. 2.18.

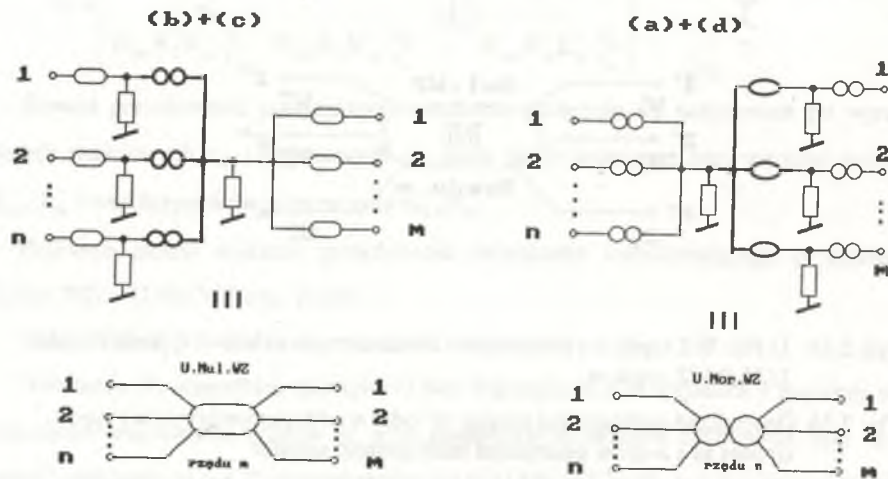


Rys. 2.16. U.Nor.WZ rzędu n z dołączonymi elementarnymi układami typu A(-1) jako U.Nul.WZ rzędu m

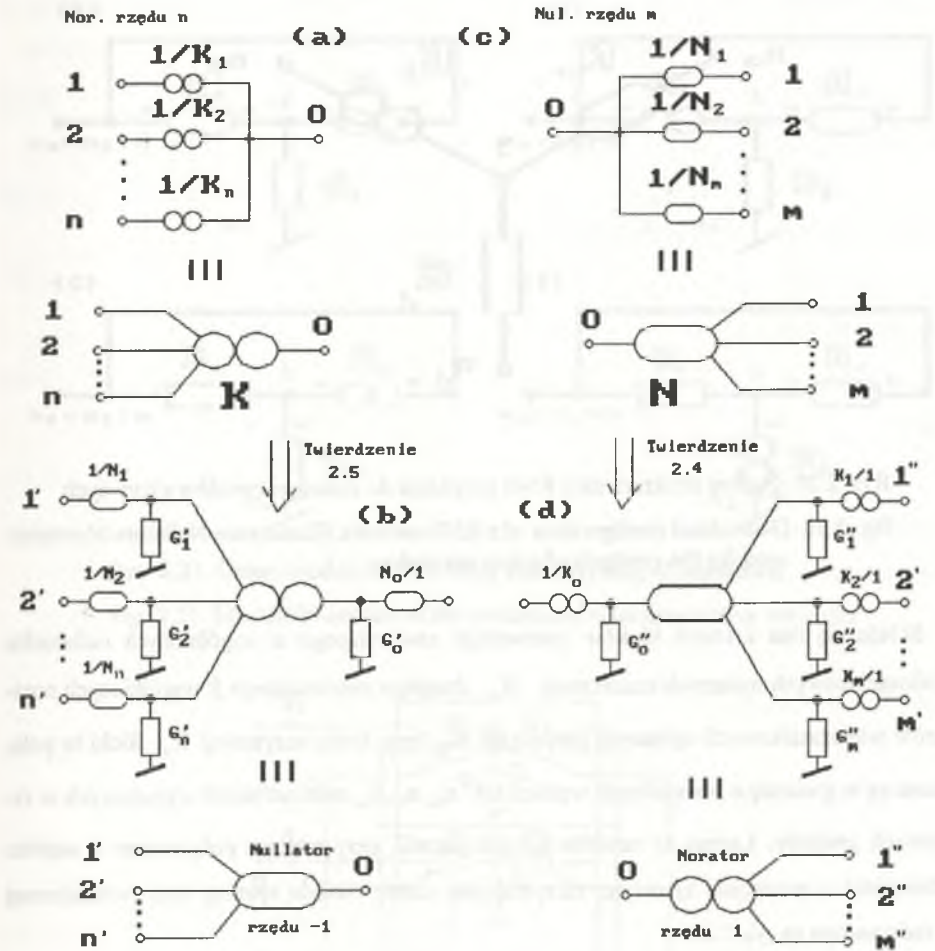
Fig. 2.16. Generalized multiterminal norator of order n with elementary A(-1)-type circuits as a n -order generalized multiterminal nullator



Rys. 2.17. Obwody równoważne dwuzaciskowym elementom osobliwym
 Fig. 2.17. Equivalent circuits of two-terminal singular elements



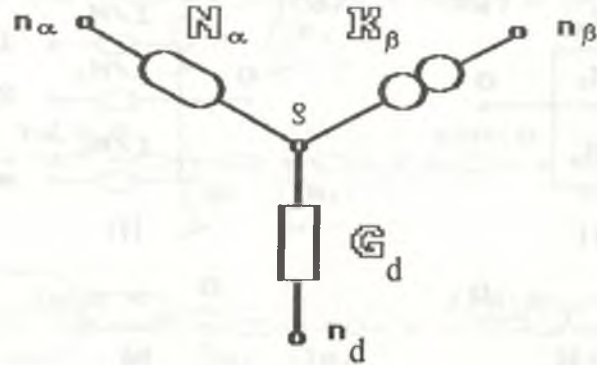
Rys. 2.18. Generowanie wielozaciskowych elementów osobliwych dowolnych rzędów
 Fig. 2.18. Generation of multiterminal singular elements of any order



Rys. 2.19. Generowanie wielozaciskowych elementów osobliwych rzędu -1 i 1
 Fig. 2.19. Generation of multiterminal singular elements of order -1 and 1

2.4. MODELE SYNTAZY OBWODÓW AKTYWNYCH NA BAZIE UOGÓLNI- NYCH WIELOZACISKOWYCH ELEMENTÓW OSOBLIWYCH

Najbardziej ogólną strukturą sieci RNN przydatną do syntezy układów aktywnych wydaje się być układ przedstawiony na rys. 2.20.

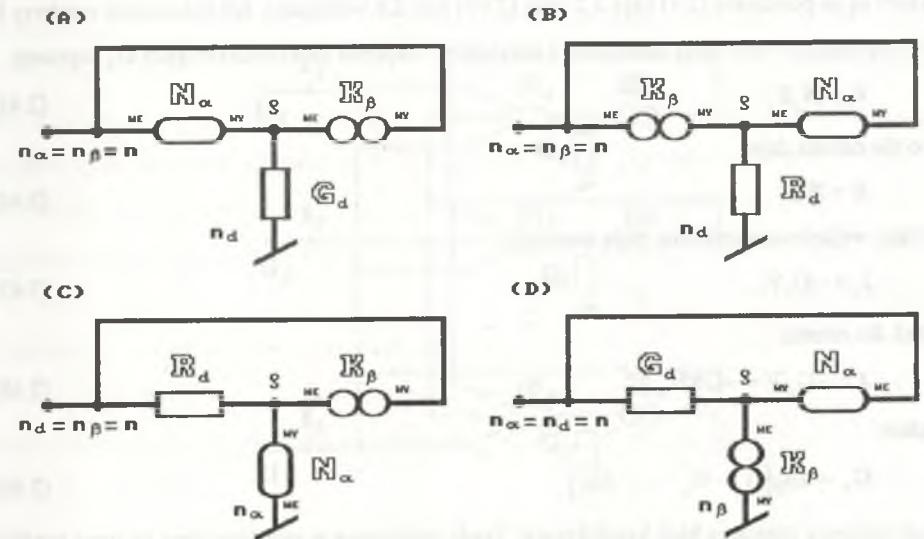


Rys. 2.20. Ogólna struktura sieci RNN przydatna do syntezy obwodów aktywnych

Fig. 2.20. Generalized configuration of a RNN-network (Resistance-Nullators-Norators) used for the synthesis of active networks

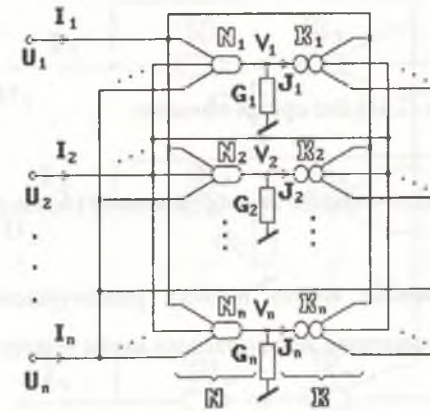
Składa się ona z trzech bloków: pierwszego zawierającego α uogólnionych nullatorów wielozaciskowych opisanych macierzami N_α , drugiego zawierającego β uogólnionych noratorów wielozaciskowych opisanych macierzami K_β oraz bloku rezystancji R_d . Bloki te połączone są w gwiazdę o ρ wspólnych węzłach i o n_α, n_β, n_d multizaciskach wyjściowych w ramionach gwiazdy. Łącząc te ramiona kolejno parami, przy trzecim połączonym z węzłem odniesienia o potencjale zerowym, otrzymuje się cztery modele syntezy sieci n -zaciskowej przedstawione na rys. 2.21.

Kosztym zmniejszenia ogólności przyjętych modeli można założyć, że wszystkie elementy osobliwe są rzędu 1 lub -1, co nie zmienia ich praktycznego znaczenia, upraszczając jednak opis teoretyczny. Przy takich założeniach ilość zacisków w każdym węzle gwiazdy jest jednakowa, czyli $\alpha = \beta = \rho = n$. Dla modelu syntezy (A) otrzymuje się wtedy strukturę jak na rys. 2.22.



Rys. 2.21. Cztery modele RNN syntezy sieci aktywnej n -zaciskowej

Fig. 2.21. Four RNN-models of the synthesis of n -terminal active networks



Rys. 2.22. Struktura dla modelu syntezy (A) przy założeniu $\alpha = \beta = \rho = n$

Fig. 2.22. A configuration for the synthesis model (A) on the assumption $\alpha = \beta = \rho = n$

Elementy osobliwe opisują macierze jednokolumnowe i jednowierszowe typu:

$$N_j = [N_{j1} \quad N_{j2} \quad \dots \quad N_{jn}], \quad (2.43)$$

$$K_j = [K_{1j} \quad K_{2j} \quad \dots \quad K_{nj}]^T, \quad (2.44)$$

które są na podstawie (2.3) i rys.2.2 oraz (2.9) i rys. 2.8 wierszami, lub kolumnami macierzy N i K opisujących całe bloki nullatorów i noratorów. Napięcia na konduktancjach G_d wynoszą:

$$V_j = N_j U, \quad (2.45)$$

co dla całości daje:

$$V = NU. \quad (2.46)$$

Prądy wejściowe noratorów mają wartości:

$$J_j = -G_j V_j, \quad (2.47)$$

stąd dla całości:

$$J = -G_d V = -GNU, \quad (2.48)$$

gdzie:

$$G_d = \text{diag}[G_1 \quad G_2 \quad \dots \quad G_n] \quad (2.49)$$

jest macierzą opisującą blok konduktancji. Prądy wejściowe n zacisków sieci są sumą prądów wyjściowych poszczególnych noratorów, czyli:

$$I_j = \sum_{i=1}^n K_{ji} J_i. \quad (2.50)$$

Stąd dla całego układu:

$$I = KJ \quad (2.51)$$

Ostatecznie po uwzględnieniu (2.48) sieć opisuje równanie:

$$I = -KG_d NU \quad (2.52)$$

Macierz konduktancyjna układu n -wrotnika dla modelu syntezy (A) ma zatem postać:

$$G = -KG_d N \quad (2.53)$$

Wprowadzając w tym modelu syntezy noratory jednowyjściowe, czyli o macierzy $K = \text{diag}[K_1 \quad K_2 \quad \dots \quad K_n]$, otrzymuje się uproszczony model syntezy (A1) o strukturze jak na rys. 2.23.

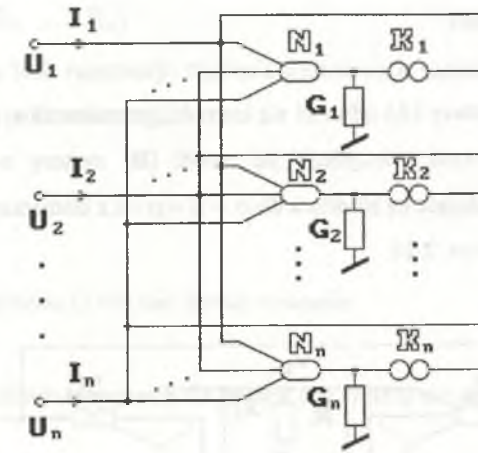
Dalszym uproszczeniem może być założenie $K=-1$, co oznacza, że noratory są klasycznymi noratorami dwuzaciskowymi i wtedy układ n -wrotnika opisuje macierz konduktancyjna:

$$G = G_d N \quad (2.54)$$

Podobnie wprowadzając nullatory jednowyjściowe, czyli o macierzy:

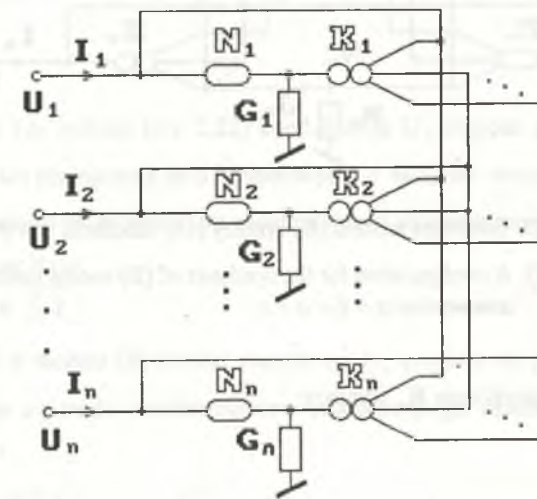
$$N = \text{diag}[N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_n] \quad (2.55)$$

otrzymuje się uproszczony model syntezy (A2), o strukturze jak na rys. 2.24.



Rys. 2.23. Uproszczony model (A1) syntezy n -wrotnika

Fig. 2.23. Simplified (A1)-model of n -port synthesis



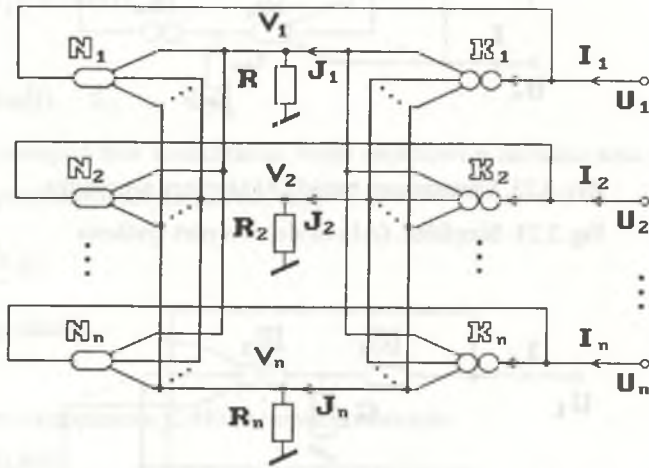
Rys. 2.24. Uproszczony model syntezy (A2) n -wrotnika

Fig. 2.24. Simplified (A2)-model of n -port synthesis

Wprowadzając nullatory klasyczne, dla których $N=1$, układ n -wrotnika opisuje macierz konduktancyjna w postaci:

$$\mathbf{G} = -\mathbf{K}\mathbf{G}_d \quad (2.56)$$

Jeżeli w modelu syntezy (A) odwróci się kierunki przenoszenia sygnałów prądu i napięcia w elementach osobliwych, otrzymuje się model (B) syntezy n -wrotników aktywnych (rys. 2.21B). Odpowiadająca jej struktura dla $\alpha = \beta = \rho = n$ z elementami osobliwymi rzędu ± 1 przedstawiona jest na rys. 2.25.



Rys. 2.25. Struktura modelu (B) syntezy przy założeniu $\alpha = \beta = \rho = n$

Fig. 2.25. A configuration for the synthesis of (B)-model on the assumption $\alpha = \beta = \rho = n$

Prądy płynące przez rezystancje \mathbf{R}_d wynoszą:

$$\mathbf{J}_j = \mathbf{K}_j \mathbf{I}. \quad (2.57)$$

Co dla całości daje:

$$\mathbf{J} = \mathbf{K}\mathbf{I}. \quad (2.58)$$

Napięcia na zaciskach wejściowych nullatorów mają wartości:

$$\mathbf{V}_j = -\mathbf{R}_j \mathbf{J}_j. \quad (2.59)$$

Stąd dla całości:

$$\mathbf{V} = -\mathbf{R}_d \mathbf{J} = -\mathbf{R}_d \mathbf{K}\mathbf{I}, \quad (2.60)$$

gdzie:

$$\mathbf{R}_d = \text{diag}[\mathbf{R}_1 \ \mathbf{R}_2 \ \dots \ \mathbf{R}_n] \quad (2.61)$$

jest macierzą opisującą blok rezystancji. Napięcia wejściowe n zacisków sieci są napięciami wyjściowymi kolejnych nullatorów, czyli:

$$\mathbf{U}_j = \mathbf{N}_j \mathbf{V}. \quad (2.62)$$

Stąd dla całego układu:

$$\mathbf{U} = \mathbf{N}\mathbf{V}. \quad (2.63)$$

Ostatecznie po uwzględnieniu (2.60) sieć opisuje równanie:

$$\mathbf{U} = -\mathbf{N}\mathbf{R}_d \mathbf{K}\mathbf{I}. \quad (2.64)$$

Macierz rezystancyjna układu n -wrotnika dla modelu (B) syntezy ma zatem postać:

$$\mathbf{R} = -\mathbf{N}\mathbf{R}_d \mathbf{K}. \quad (2.65)$$

Wprowadzając w modelu (b) syntezy nullatory klasyczne jednowejściowe o $\mathbf{K}=-1$ otrzymuje się strukturę, dla której:

$$\mathbf{R} = -\mathbf{N}\mathbf{R}_d. \quad (2.66)$$

Natomiast dla nullatorów klasycznych jednowejściowych $N=1$, stąd macierz rezystancyjna ma postać:

$$\mathbf{R} = -\mathbf{R}_d \mathbf{K}. \quad (2.67)$$

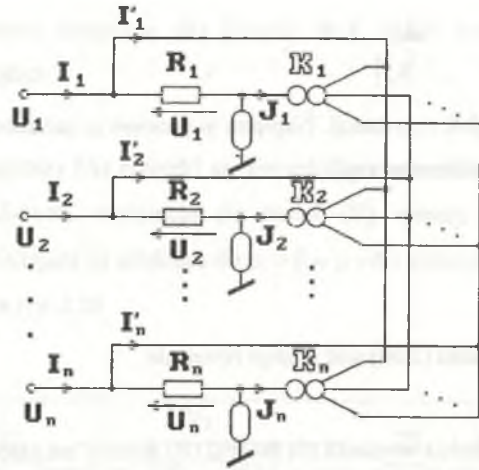
Jeżeli w modelu (A) syntezy (rys. 2.22) konduktancje \mathbf{G}_d przyjmie się jako elementy zewnętrzne, a węzły ich przyłączenia jako dodatkowych n zacisków zewnętrznych sieci osobliwej, otrzymuje się model multikonwertera admitancyjnego określony macierzą hybrydową:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{K} \\ \mathbf{N} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

Podobnie, jeżeli w modelu (B) syntezy rezystancje \mathbf{R}_d przyjmie się jako elementy zewnętrzne, to otrzymuje się model multikonwertera impedancyjnego określony macierzą hybrydową:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{N} \\ -\mathbf{K} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

W przypadku modelu syntezy (C) struktura dla $\alpha = \beta = \rho = n$ ma postać jak na rys. 2.26.



Rys. 2.26. Struktura modelu (C) syntezy n-wrotnika
 Fig. 2.26. A configuration for the (C)-model synthesis of n-port

W układzie tym napięcia na rezystancjach R_d są równe napięciom $V_j = -R_j J_j U_j$ zacisków modelowanego n-wrotnika, stąd prądy wejściowe noratorów wynoszą:

$$\mathbf{J} = \mathbf{R}_d \mathbf{U}. \quad (2.70)$$

Prądy wyjściowe noratorów mają wartości:

$$\mathbf{I}' = \mathbf{KJ}. \quad (2.71)$$

Stąd prądy zacisków całej sieci wynoszą:

$$\mathbf{I} = \mathbf{J} + \mathbf{I}', \quad (2.72)$$

co po uwzględnieniu (2.70) i (2.71) daje ostatecznie równanie:

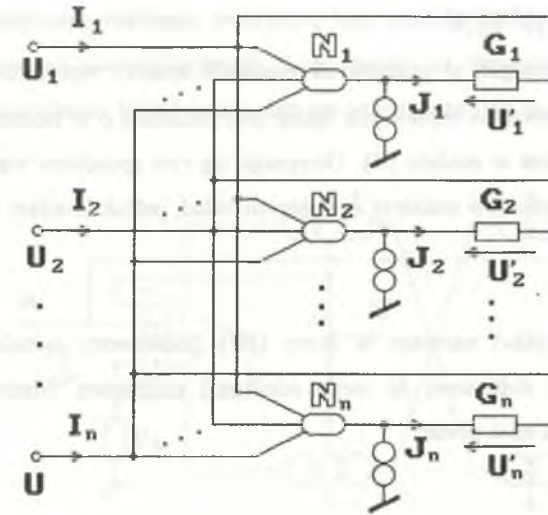
$$\mathbf{I} = (\mathbf{1} + \mathbf{K})\mathbf{R}_d \mathbf{U}. \quad (2.73)$$

Macierz rezystancyjna układu n-wrotnika dla modelu (c) syntezy ma zatem postać:

$$\mathbf{R} = (\mathbf{1} + \mathbf{K})\mathbf{R}_d. \quad (2.74)$$

W przypadku modelu (D) syntezy jego struktura dla $\alpha = \beta = \rho = n$ przedstawiona jest na rys. 2.27. Jest to nullatorowo-noratorowa wersja modelu syntezy przedstawionego w pracy [O2]. W modelu tym n-wrotnik opisuje macierz konduktancyjna:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_d (\mathbf{1} - \mathbf{N}). \quad (2.75)$$



Rys. 2.27. Struktura modelu (D) syntezy n-wrotnika
 Fig. 2.27. A configuration for (D)-model synthesis of n-port

Wprowadzając dodatkowych n wejść w każdym z nullatorów i łącząc je z punktami przyłączenia noratorów, otrzymuje się nullatorowo-noratorowy model syntezy przedstawiony w pracy [C10]. Macierz współczynników przenoszenia nullatora \mathbf{N} ma wtedy wymiar $n \times 2n$ i składa się z dwu części \mathbf{N}_U dotyczącej napięć \mathbf{U} na wejściach n-wrotnika oraz części \mathbf{N}_V dotyczącej napięć \mathbf{V} na zaciskach noratorów, czyli:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_U & \mathbf{N}_V \end{bmatrix}. \quad (2.76)$$

Stąd:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_U & \mathbf{N}_V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}^T. \quad (2.77)$$

Po przekształceniu otrzymuje się:

$$\mathbf{V} = (\mathbf{1} - \mathbf{N}_V)^{-1} \mathbf{N}_U \mathbf{U}. \quad (2.78)$$

Prądy płynące przez konduktancję \mathbf{G}_d wynoszą:

$$\mathbf{J} = \mathbf{G}_d (\mathbf{V} - \mathbf{U}), \quad (2.79)$$

stąd po uwzględnieniu (2.78) otrzymuje się:

$$\mathbf{J} = \mathbf{G}_d [(\mathbf{1} - \mathbf{N}_V)^{-1} \mathbf{N}_U - \mathbf{1}] \mathbf{U} \quad (2.80)$$

i wobec tego, że $\mathbf{I} = -\mathbf{J}$, otrzymuje się zależność wiążącą prądy i napięcia n-wrotnika macierzą konduktancyjną:

$$I = G_d [1 - (1 - N_v)^{-1} N_U] U. \quad (2.81)$$

Podobnie można postąpić w pozostałych modelach syntezy wprowadzając dodatkowe wejścia lub wyjścia elementów osobliwych, łącząc je z zaciskami ρ w modelach (A) i (C) lub z zaciskami wejściowymi w modelu (B). Otrzymuje się tym sposobem większe możliwości kształtowania współczynników macierzy opisujących układ, jednak kosztem większej komplikacji samego układu.

Przykład 2.2

Należy zbudować układ nazwany w pracy [H1] floatatorem, symulujący admitancję nieziemioną na bazie dołączonej do niego admitancji uziemionej. Macierz admitancyjna takiego układu powinna mieć postać:

$$Y = Y_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.82a)$$

Jeżeli w modelu (A) syntezy założy się $n_\alpha = n_\beta = 2$, czyli:

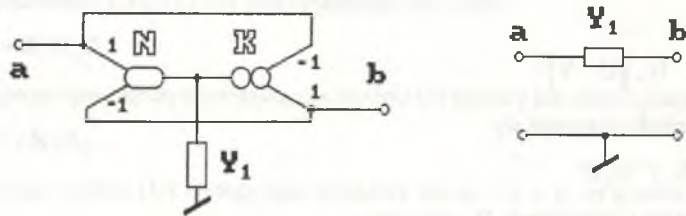
$$N = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ K_2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad G = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_1 \end{bmatrix}.$$

wtedy macierz konduktancyjna całego układu będzie miała postać:

$$Y = \begin{bmatrix} K_1 Y_1 N_1 & K_1 Y_1 N_2 \\ K_2 Y_1 N_1 & K_2 Y_1 N_2 \end{bmatrix} \quad (2.82b)$$

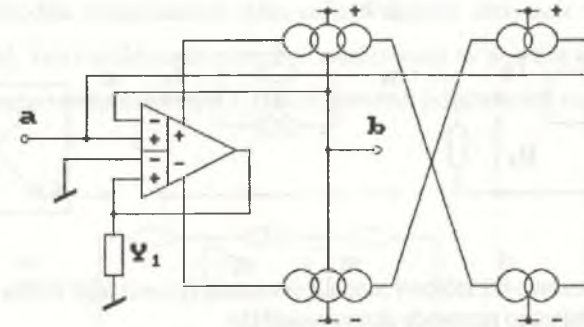
Stąd po założeniu $K_1 = -1, K_2 = 1, N_1 = 1, N_2 = -1$ otrzymuje się macierz (2.82a)

Nullatorowo-noratorowy model układu ma wtedy postać jak na rys. 2.28.



Rys. 2.28. Nullatorowo-noratorowy model układu symulującego admitancję nieziemioną
Fig. 2.28. Nullator-norator model simulating floating admittance

Najbardziej optymalną realizacją praktyczną tego modelu wydaje się być zastosowanie konwejera prądowego dwuwejściowego zbudowanego na bazie różnicowo-różnicowego wzmacniacza operacyjnego. Układ rzeczywisty ma wtedy postać jak na rys. 2.29.

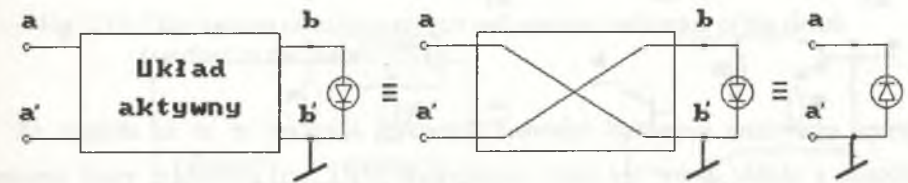


Rys. 2.29. Układ praktyczny symulujący admitancję nieziemioną

Fig. 2.29. Practical circuit simulating floating admittance

Przykład 2.3

W układach aktywnych może zachodzić potrzeba odwrócenia zacisków dwójnika na stałe połączonego jednym końcem z masą. Zjawisko to można zasymulować budując czwórnik aktywny równoważny trywialnemu czwórnikowi zawierającemu tylko skrzyżowane przewody, co pokazano na rys. 2.30.



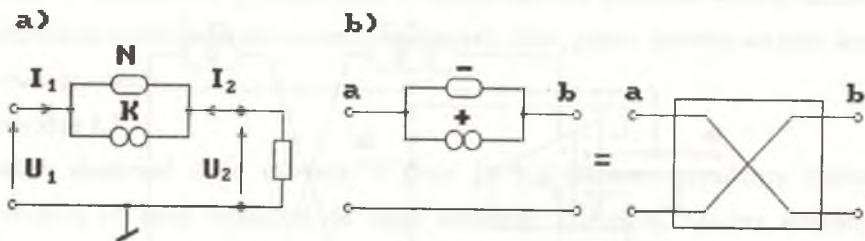
Rys. 2.30. Czwórnik odwracający zaciski dwójnika

Fig. 2.30. Two-port interchanging of one-port terminals

Czwórnik taki opisuje macierz hybrydowa o postaci:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

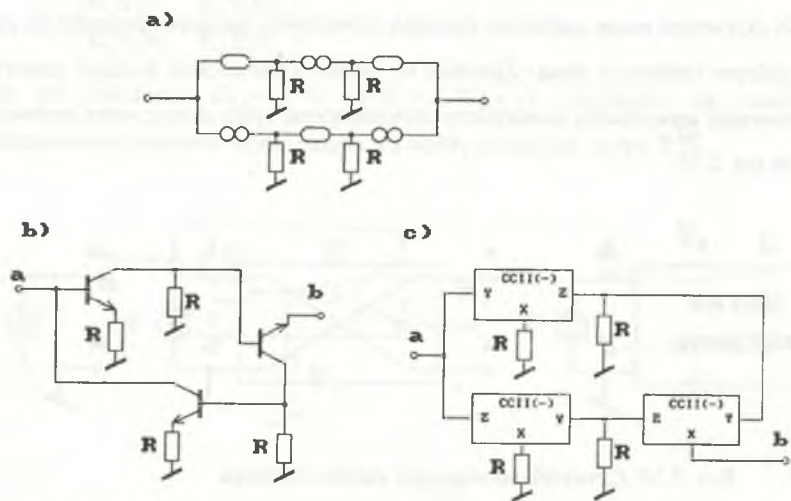
Jest on konwerterem zmieniającym znak zarówno napięcia, jak i prądu, lub rotatorem o kącie rotacji 180 stopni [C8, C9, T21]. Przyjmując w modelu (A) syntezy zaciski ρ jako wyjściowe i zakładając $n_\alpha = n_\beta = \rho = 1$ otrzymuje się układ jak na rys. 2.31a.



Rys. 2.31. Nullatorowo-noratorowy model konwertera (a) oraz jego wersja dla czwornika symulującego przewody skrzyżowane (b)

Fig. 2.31. Nullator -norator model of a coverter (a) and its version for a two-port simulating a crossed-conductor (b)

Aby był on modelem czwornika o skrzyżowanych przewodach, to na podstawie (2.83) musi zachodzić $K=1$ i $K=-1$, co oznacza, że układ jest równoważny równoległemu połączeniu nullatora ujemnego i noratora dodatniego (rys. 2.31b). Jeżeli wprowadzi się równoważne

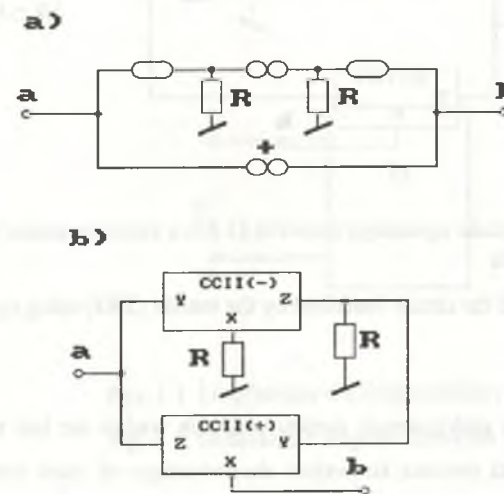


Rys. 2.32. Druga wersja nullatorowo-noratorowa oraz praktyczne realizacje układu opisanego macierzą (2.83)

Fig. 2.32. Second version of nullator-norator and practical realizations of the circuit described by the matrix (2.83)

obwody zastępcze z rys. 2.17, wtedy układ będzie zawierał trzy nullatory i trzy noratory oraz trzy rezystancje jak na rys. 2.32a. W tej postaci może być zrealizowany praktycznie za pomocą trzech bipolarnych tranzystorów złączowych (rys. 2.32b), lub trzech konwejerów prądowych ujemnych (rys. 2.32c), oraz czterech identycznych rezystancji.

Zastępując obwodem równoważnym tylko nullator ujemny otrzymuje się układ w wersji trzeciej (rys. 2.33a), który praktycznie może być zrealizowany za pomocą dwóch konwejerów prądowych ujemnego i dodatniego (rys. 2.33b) oraz dwóch jednakowych rezystancji.

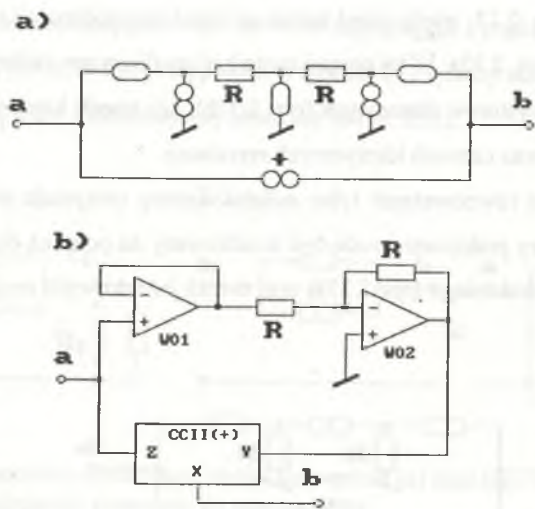


Rys. 2.33. Trzecia wersja nullatorowo-noratorowa oraz praktyczna realizacja układu opisanego macierzą (2.83)

Fig. 2.33. Third version of nullator-norator and practical realization of the circuit described by the matrix (2.83)

Ze względu na to, że realizacja praktyczna ujemnego konwejera prądowego wymaga czterech luster prądowych (rys. 1.44), wygodniejsza może być wersja układu z obwodem równoważnym nullatora ujemnego w wersji jak na rys. 2.34a. W wersji tej konwejer prądowy ujemny można zastąpić dwoma wzmacniaczami operacyjnymi jak na rys. 2.34b.

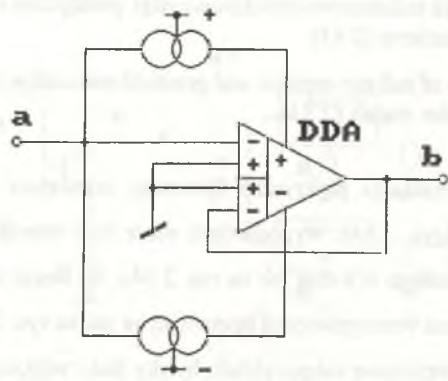
W przypadku gdy prądy wejściowe całego układu byłyby dużo większe od prądu płynącego przez rezystancje R , wtedy wzmacniacz operacyjny WO1 można pominąć.



Rys. 2.34. Realizacja układu opisanego macierzą (2.83) z zastosowaniem wzmacniaczy operacyjnych

Fig. 2.34. Realization of the circuit described by the matrix (2.83) using operational amplifiers

Najbardziej optymalna z praktycznego punktu widzenia wydaje się być realizacja modelu z rys.2.31b bezpośrednio za pomocą konwejera zbudowanego na bazie różnicowo-różnicowego wzmacniacza operacyjnego przedstawiona na rys. 2.35.



Rys. 2.35. Bezpośrednia realizacja modelu z rys. 2.31b

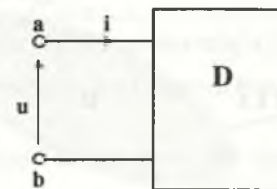
Fig. 2.35. Immediate realization of model from Fig. 2.31b

3. UOGÓLNIONY BEZINERCYJNY DWÓJNIK OSOBLIWIY

3.1. DWÓJNIKI OSOBLIWE W UJĘCIU ZBIOROWYM

Dany jest bezinercyjny układ "D", w którym między zaciskami *ab* występują wartości chwilowe prądu *i* oraz napięcia *u*, przy czym $i, u \in \mathbb{R}$. Niechaj w każdej chwili *t* układ "D" opisuje para liczb (i, u) , której wartości przebiegają zbiór *D* będący podzbiorem \mathbb{R}^2 , czyli:

$$\bigwedge_t (i, u) \in D \subset \mathbb{R}^2 \quad (3.1)$$



Rys. 3.1. Uogólniony dwójnik osobliwy

Fig. 3.1. Generalized singular one-port

Definicja 3.1

Uogólnionym dwójnikiem osobliwym nazywany będzie układ opisany relacją (3.1), przy czym zbiór *D* nazywany będzie wtedy obszarem jego pracy, czyli zbiorem wszystkich możliwych punktów pracy.

Zbiór *D* może być przedstawiony jako obszar na płaszczyźnie prądowo-napięciowej *i*-*u*, a jego kształt całkowicie określa opisywany dwójnik osobliwy (rys. 3.2).

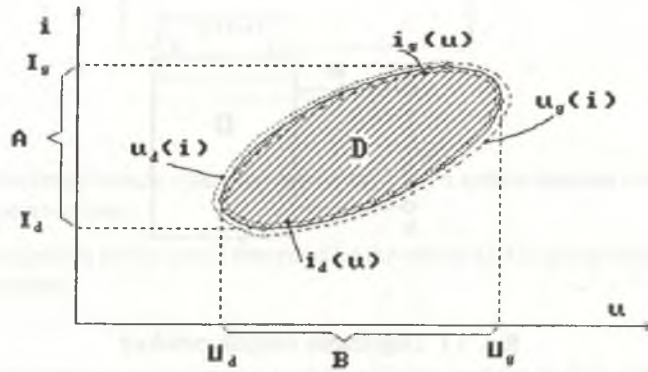
Dla dwójnika osobliwego opisanego spójnym i wypukłym obszarem pracy *D* przedstawionym na rys.3.2 można napisać bliżej określające go relacje-prądową przy zadanych wartościach prądu:

$$\bigwedge_{i_d \leq i \leq I_d} \bigvee_{u_d(i) \leq u \leq u_d(i)} (i, u) \in D, \quad (3.2)$$

oraz napięciową przy zadanych wartościach napięcia:

$$\bigwedge_{U_d \leq u \leq U_g} \bigvee_{i_d(u) \leq i \leq i_g(u)} (i, u) \in D, \quad (3.3)$$

przy czym I_d, U_d są minimalnymi, a I_g, U_g maksymalnymi wartościami, jakie mogą przyjąć prąd i napięcie na zaciskach tego dwójnika, natomiast krzywe $u_d(i)$ (kropkowana zewnętrzna) i $u_g(i)$ (kreskowana zewnętrzna) są liniami, dolną i górną ograniczającymi obszar pracy D dwójnika osobliwego dla relacji (3.2), a krzywe $i_d(u)$ (kropkowana wewnętrzna) i $i_g(u)$ (kreskowana wewnętrzna) są analogicznie dolną i górną linią graniczną obszaru D dla relacji napięciowej (3.3).



Rys. 3.2. Zbiór D jako obszar pracy uogólnionego dwójnika osobliwego
Fig. 3.2. A set D as a operating-region of a generalized singular one-port

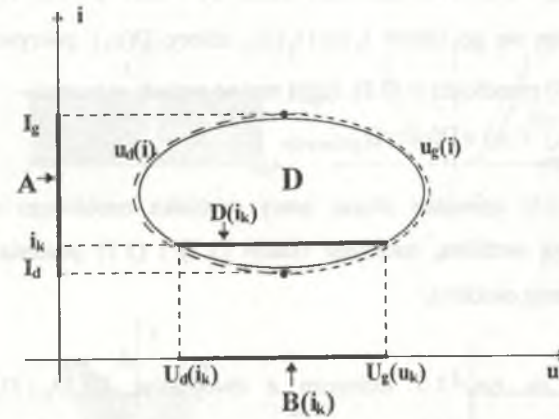
Dla pojedynczej wartości prądu $i = i_k \in A$ napięcie może przyjmować wartości $U_d(i_k) \leq u \leq U_g(i_k)$ tworzące zbiór $B(i_k)$, wtedy dwójnik opisuje relacja:

$$\bigwedge_{i=i_k \in A} \bigvee_{u \in B(i_k)} (i, u) \in D(i_k) \subset D, \quad (3.4)$$

co przedstawiono na rys. 3.3.

Jeżeli wartości i_k będą przebiegać cały zbiór A , wtedy punkty płaszczyzny o współrzędnych $(U_d(i_k), i_k)$ i $(U_g(i_k), i_k)$ przesuwają się po liniach $u_d(i)$ i $u_g(i)$, zbiory $D(i_k)$ pokrywają cały obszar pracy D , a relacja (3.4) przechodzi w (3.2), przy czym można ją zapisać jako:

$$\bigwedge_{i \in A} \bigvee_{u \in B(i)} (i, u) \in D(i) \subset D. \quad (3.5)$$



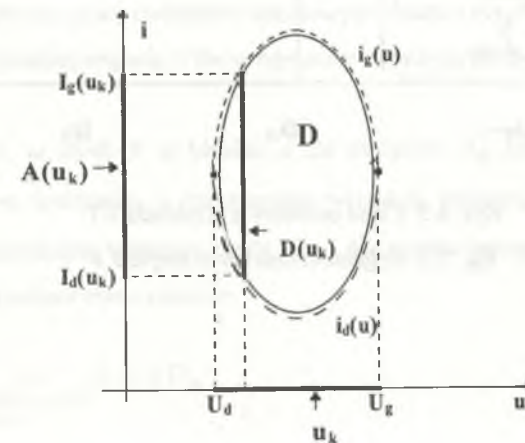
Rys. 3.3. Obszar pracy D opisany relacją (3.4)

Fig. 3.3. Operating-region D derived from equation (3.4)

Analogicznie dla pojedynczej wartości $u = u_k \in B$ prąd może przyjmować wartości $I_d(u_k) \leq i \leq I_g(u_k)$ tworzące zbiór $A(u_k)$, wtedy dwójnik opisuje relacja:

$$\bigwedge_{u=u_k \in B} \bigvee_{i \in A(u_k)} (i, u) \in D(u_k) \subset D, \quad (3.6)$$

co przedstawiono na rys. 3.4.



Rys. 3.4. Obszar pracy D opisany relacją (3.6)

Fig. 3.4. Operating-region D derived from equation (3.6)

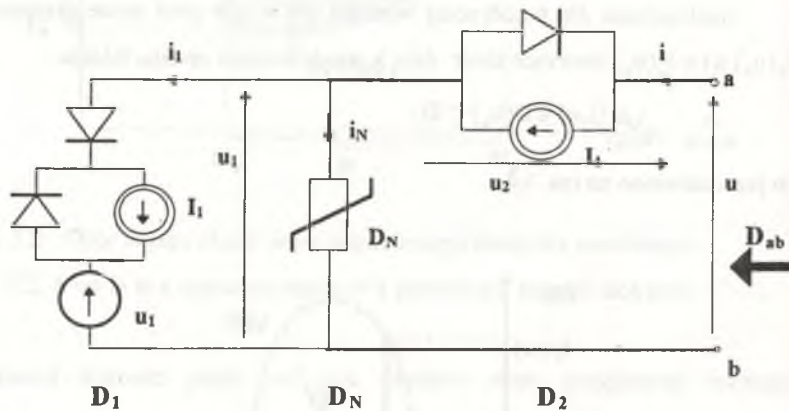
Jeżeli wartości u_k będą przebiegać cały zbiór B, wtedy punkty $(I_d(u_k), u_k)$ oraz $(I_g(u_k), u_k)$ przesuwać się po liniach $i_d(u)$ i $i_g(u)$, zbiory $D(u_k)$ pokrywają cały obszar pracy D, a relacja (3.5) przechodzi w (3.3), którą można zapisać w postaci:

$$\bigwedge_{u \in A} \bigvee_{i \in B(u)} (i, u) \in D(u) \subset D. \quad (3.7)$$

Relacje (3.2) i (3.5) opisujące obszar pracy dwójnika osobliwego można nazwać uogólnioną rezystancją osobliwą, natomiast relacje (3.3) i (3.7) postaciami opisującymi uogólnioną konduktancję osobliwą.

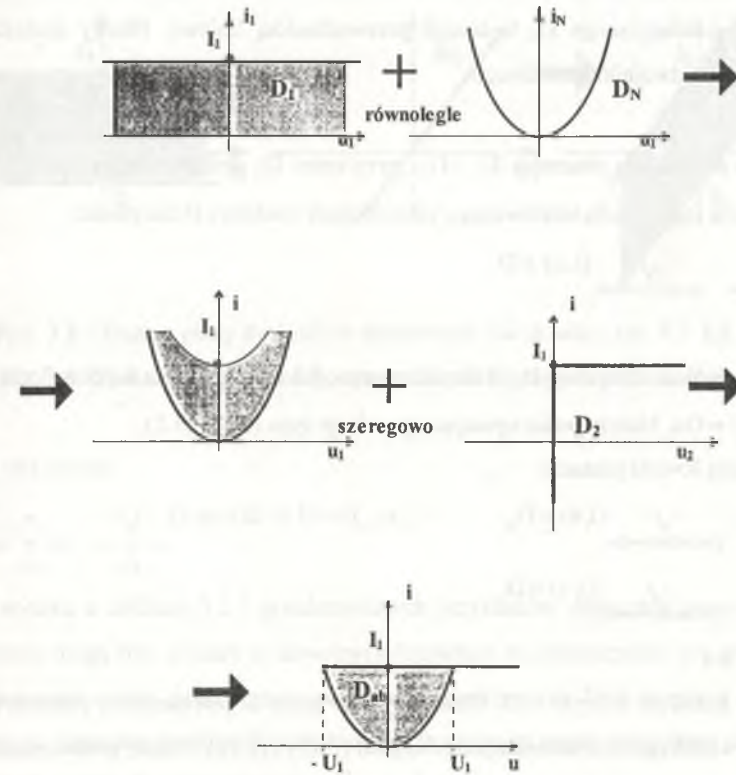
Przykład 3.1

W układzie jak na rys. 3.5 złożonym z dwójników D_1, D_N i D_2 o zadanych charakterystykach należy znaleźć jego obszar pracy jako dwójnika osobliwego widzianego na zaciskach a-b. Powstaje on ze złożenia charakterystyk dwójników składowych, tak jak to pokazano na rys. 3.6.



Rys. 3.5. Układ osobliwy z przykładu 3.1

Fig. 3.5. Singular circuit for example 3.1



Rys. 3.6. Obszary pracy dwójników składowych układu z rys. 3.5

Fig. 3.6. Operating-regions of the composition of one-ports for circuits in Fig. 3.5

Jeżeli założyć, że diody P są idealne, a dla dwójnika D_N zachodzi $i_N = ku^2$, wtedy $\pm U_1 = \pm \sqrt{I_1/k}$ są minimalną i maksymalną wartością napięcia, natomiast 0 i I_1 są minimalną i maksymalną wartością prądu. Stąd dla przykładowego dwójnika D_{ab} relacje (3.2) i (3.3) mają odpowiednio postacie:

$$\bigwedge_{\substack{0 \leq i \leq I_1 \\ \text{lub } i = I_1}} \bigvee_{\substack{-\sqrt{i/k} \leq u \leq +\sqrt{i/k} \\ -U_1 \leq u}} (i, u) \in D_{ab} \quad (3.8)$$

$$\bigwedge_{\substack{-U_1 \leq u \leq U_1 \\ \text{lub } u \geq U_1}} \bigvee_{\substack{ku^2 \leq i \leq I_1 \\ i = I_1}} (i, u) \in D_{ab}. \quad (3.9)$$

Przykład 3.2

Dany jest układ jak na rys. 3.7 złożony z dwójników: osobliwego D_1 o charakterystyce „pasowej” oraz klasycznego D_2 będącego przewodnością liniową. Należy znaleźć jego obszar pracy jako dwójnika osobliwego.

Powstaje on ze złożenia obszarów D_1 i D_G , przy czym D_G opisuje zależność $i = Gu$. Stąd relacja (3.3) dla tego układu traktowanego jako dwójnik osobliwy D ma postać:

$$\bigwedge_{-\infty \leq u \leq +\infty} \bigvee_{Gu+I_1 \leq i \leq Gu+I_2} (i, u) \in D. \tag{3.10}$$

Przykład 3.3

Dany jest dwójnik klasyczny D_G o charakterystyce jak w przykładzie 3.2 określonej zależnością $i = Gu$. Należy podać opisujące go relacje typu (3.3) i (3.2).

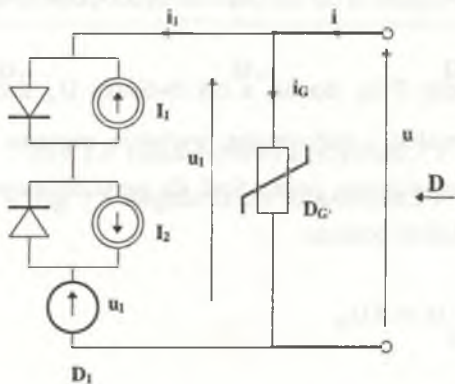
Mają one dla $R=1/G$ postacie:

$$\bigwedge_{-\infty \leq u \leq +\infty} \bigvee_{[Gu \leq i \leq Gu] \Rightarrow i=Gu} (i, u) \in D_G \tag{3.11}$$

$$\bigwedge_{-\infty \leq i \leq +\infty} \bigvee_{[Ri \leq u \leq Ri] \Rightarrow u=Ri} (i, u) \in D_G \tag{3.12}$$

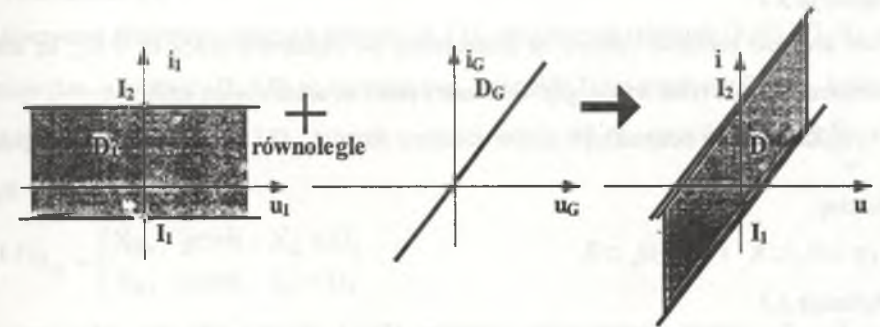
Przykład 3.4

Dany jest układ jak na rys. 1.10. Obszarem jego pracy D jest punkt na płaszczyźnie ui (rys. 1.9c) o współrzędnych określonych relacjami (1.11) i (1.12). Należy podać relację typu (3.3) opisującą ten obszar pracy.



Rys. 3.7. Układ dwójnika osobliwego z przykładu 3.2

Fig. 3.7. Singular one-port for example 3.2



Rys. 3.8. Obszary pracy dwójników składowych dla układu z rys. 3.7

Fig. 3.8. Operating-regions of the composition of one-ports for circuits in Fig. 3.7

Ma ona postać:

$$\bigwedge_{\substack{u_0 \leq u \leq u_0 \\ u=u_0}} \bigvee_{\substack{i_0 \leq i \leq i_0 \\ i=i_0}} (i, u) \in D \Rightarrow D = (i_0, u_0) \tag{3.13}$$

Jak wynika z definicji 3.1 i przedstawionych przykładów, obszarami pracy dwójników osobliwych mogą być obszary o dowolnych kształtach na płaszczyźnie $u-i$, w tym także: nieograniczone części płaszczyzny, pojedyncze punkty oraz linie proste i krzywe. Ze względu na pokazaną możliwość jednakowego formalnego opisu dwójników klasycznych i osobliwych można sformułować następujący wniosek:

Wniosek 3.1

Rezystancyjne dwójniki liniowe i nieliniowe stanowią podzbiór szerszej klasy dwójników bezinercyjnych, jakimi są uogólnione dwójniki osobliwe.

3.2. ANALIZA SIECI Z BEZINERCYJNYMI DWÓJNIKAMI OSOBLIWYMI.

POSZUKIWANIE DWÓJNIKÓW ZASTĘPCZYCH

Przez łączenie elementów osobliwych rozumiane będzie poszukiwanie elementu osobliwego o dwu zaciskach równoważnego n dwójnikom osobliwym połączonym w określony sposób względem tych zacisków. Aby móc to wykonać, należy wprowadzić pewne określenia i twierdzenia.

Definicja 3.2

Dwa dwójniki osobliwe opisane na płaszczyźnie u-i obszarami pracy D_1 i D_2 , są sobie równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy ich obszary pracy są sobie równe, czyli:

$$\bigwedge_{i,u} [(i, u) \in D_1 \Leftrightarrow (i, u) \in D_2] \quad (3.14)$$

Niechaj:

$$x \in D_x \subset R \quad i \quad y \in D_y \subset R \quad (3.15)$$

Definicja 3.3

Sumą algebraiczną zbiorów $D_x + D_y$ nazywany będzie zbiór D_o , dla którego jest spełnione:

$$D_x + D_y = D_o \Leftrightarrow \bigwedge_{\substack{x \in D_x \subset R \\ y \in D_y \subset R}} x + y \in D_o, \quad (3.16)$$

przy czym $x+y$ jest sumą algebraiczną liczb rzeczywistych x oraz y .

Niechaj spójne zbiory D_x i D_y są określone przez swoje wartości graniczne X_d, X_g oraz Y_d, Y_g , co opisują relacje:

$$\bigwedge_x (x \in D_x) \Leftrightarrow X_d \leq x \leq X_g, \quad (3.17)$$

$$\bigwedge_y (y \in D_y) \Leftrightarrow Y_d \leq y \leq Y_g. \quad (3.18)$$

Praktyczną realizację algebraicznej sumy zbiorów spójnych określonych w zbiorze liczb rzeczywistych przez swoje wartości graniczne umożliwia następująca definicja:

Definicja 3.4

Sumą algebraiczną zbiorów D_x i D_y jest zbiór D_z określony relacją:

$$\bigwedge_{z=x+y} z \in (D_x + D_y) = D_z \Leftrightarrow (X_d + Y_d = Z_d) \leq z \leq (X_g + Y_g = Z_g). \quad (3.19)$$

Relację (3.19) można otrzymać z (3.17) i (3.18) przez obustronne dodanie równoważności i występujących w nich nierówności, z czego wynika definicja:

Definicja 3.5

Różnicą algebraiczną zbiorów D_x i D_y jest zbiór D_z określony relacją:

$$\bigwedge_{z=x-y} z \in (D_x - D_y) = D_z \Leftrightarrow (X_d - Y_g = Z_d) \leq z \leq (X_g - Y_d = Z_g) \quad (3.20)$$

Wynika ona z relacji (3.18), gdyż po pomnożeniu przez -1 otrzymuje się: $\bigwedge_y (y \in -D_y) \Leftrightarrow -Y_d \geq y \geq -Y_g \Rightarrow Y_g^* \geq y \geq Y_d^*$. Po obustronnym dodaniu z równoważnością (3.17) oraz występujących w nich nierówności otrzymuje się (3.20).

Twierdzenie 3.1

Iloczynem zbiorowym spójnych zbiorów D_x i D_y , określonych relacjami (3.17) i (3.18), o ile istnieje (tzn. gdy zbiory D_x i D_y są nierozłączne), jest zbiór D_z o granicach Z_d i Z_g , będących tymi granicami zbiorów D_x i D_y , których wartości należą jednocześnie do obu tych zbiorów, czyli:

$$Z_d = \begin{cases} X_d, & \text{jeżeli } X_d \in D_y \\ Y_d, & \text{jeżeli } Y_d \in D_x \end{cases} \quad (3.21)$$

W przypadku gdy oba warunki (3.21) zachodzą jednocześnie, wtedy $X_d = Y_d = Z_d$. Analogicznie określić można granicę górną zbioru D_z .

Prawdziwość twierdzenia 3.1 wynika z własności liczb rzeczywistych i określonych w nich zbiorów. Praktyczne wyliczenie granic iloczynu dwóch zbiorów umożliwia reguła 1 lub 2.

Reguła 1

Jeżeli:

$$W_1(x) = -(x - X_d)(x - X_g) \quad (3.22)$$

jest trójmianem kwadratowym, którego miejsca zerowe są granicami zbioru D_x , wtedy granice zbioru D_z wynoszą:

$$Z_d = \begin{cases} X_d, & \text{jeżeli } W_1(Y_d) < 0 \\ Y_d, & \text{jeżeli } W_1(Y_d) \geq 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

$$Z_g = \begin{cases} X_g, & \text{jeżeli } W_1(Y_g) < 0 \\ Y_g, & \text{jeżeli } W_1(Y_g) \geq 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

Dowód reguły 1. Trójmian (3.22) przyjmuje wartości dodatnie dla wszystkich liczb rzeczywistych z zakresu odpowiadającemu zbiorowi D_x , stąd na podstawie twierdzenia 3.3 wynika zasadność stosowania reguły 1 w postaci warunków (3.23) i (3.24).

Analogiczną regułę można sformułować na bazie zbioru D_y .

Reguła 2

Jeżeli:

$$W_2(y) = -(y - Y_d)(y - Y_g) \quad (3.25)$$

jest trójmianem kwadratowym utworzonym na bazie zbioru D_y , wtedy granice zbioru D_z wynoszą:

$$Z_d = \begin{cases} X_d, & \text{jeżeli } W_2(X_d) \geq 0 \\ Y_d, & \text{jeżeli } W_2(X_d) < 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

$$Z_g = \begin{cases} X_g, & \text{jeżeli } W_2(X_g) \geq 0 \\ Y_g, & \text{jeżeli } W_2(X_g) < 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

Twierdzenie 3.2

Sumą zbiorową spójnych i nierozłącznych zbiorów D_x i D_y określonych relacjami (3.17) i (3.18) jest zbiór D_z o granicach Z_d i Z_g będących tymi granicami zbiorów D_x i D_y , których wartości nie należą jednocześnie do obu tych zbiorów, czyli:

$$Z_d = \begin{cases} X_d, & \text{jeżeli } X_d \notin D_y \\ Y_d, & \text{jeżeli } Y_d \notin D_x \end{cases} \quad (3.28)$$

W przypadku gdy nie zachodzi żaden z warunków (3.28), wtedy $X_d = Y_d = Z_d$. Analogicznie określić można granicę górną zbioru D_z .

Prawdziwość twierdzenia 3.2 wynika z własności liczb rzeczywistych i określonych w nich zbiorów. Dla zbiorów rozłącznych ich suma zbiorowa jest równa im samym, czyli jest zbiorem niespójnym. Praktyczne wyliczenie granic sumy zbiorowej umożliwiają reguły 1 i 2 dla iloczynu zbiorowego po zmianie kierunku występujących w nich nierówności.

Niechaj zbiory D_x i D_y są spójne i łączne, czyli:

$$D_x \cap D_y \neq \emptyset, \quad (3.29)$$

co oznacza, że zachodzi:

$$X_d \leq Y_d \leq X_g \quad (3.30a)$$

lub

$$X_d \leq Y_g \leq X_g \quad (3.30b)$$

oraz dany jest zbiór D_z o granicach:

$$z \in D_z \Leftrightarrow Z_d \leq z \leq Z_g \quad (3.31)$$

Dla zbiorów tych zachodzi prawo rozdzielności dodawania zbiorowego względem dodawania algebraicznego, formułowane przez twierdzenie:

Twierdzenie 3.3

$$(D_x \cup D_y) + D_z = (D_x + D_z) \cup (D_y + D_z) \quad (3.32)$$

Dowód. Niechaj dla dowodu dla zbiorów D_x i D_y zachodzi na przykład (3.30a), czyli:

$$r \in (D_x \cup D_y) \Leftrightarrow X_d \leq r \leq Y_g, \quad (3.33)$$

stąd na podstawie definicji 3.1 o sumie algebraicznej zachodzi:

$$r \in [(D_x \cup D_y) + D_z] \Leftrightarrow X_d + Z_d \leq r \leq Y_g + Z_g = L \quad (3.34)$$

Dla strony prawej zachodzi:

$$r \in (D_x + D_z) \Leftrightarrow X_d + Z_d \leq r \leq X_g + Z_g, \quad (3.35)$$

$$r \in (D_y + D_z) \Leftrightarrow Y_d + Z_d \leq r \leq Y_g + Z_g. \quad (3.36)$$

Stąd na podstawie definicji sumy zbiorowej można zapisać:

$$r \in (D_x + D_z) \vee r \in (D_y + D_z) = r \in [(D_x + D_z) \cup (D_y + D_z)] \Leftrightarrow X_d + Z_d \leq r \leq Y_g + Z_g = P = L.$$

Zatem równość (3.32) jest prawdziwa, gdyż lewa strona równa się prawej. Twierdzenie to można w oczywisty sposób rozszerzyć na zbiory rozłączne, lecz wtedy wynikiem działania (3.32) mogą być także zbiory rozłączne.

Podane zależności można rozszerzyć na większą liczbę zbiorów przez wielokrotne zastosowanie.

Dla podstawowych połączeń dwójników osobliwych szeregowego i równoległego można sformułować następujące wnioski:

Wniosek 3.2

Przy połączeniu szeregowym dwójników osobliwych o obszarach pracy D_1 i $D_2 \subset R^2$ opisanych relacjami:

$$\bigwedge_{i_1 \in A_1} \bigvee_{u_1 \in B_1(i_1)} (i_1, u_1) \in D_1(i_1) \subset D_1 \quad (3.37)$$

$$\bigwedge_{i_2 \in A_2} \bigvee_{u_2 \in B_2(i_2)} (i_2, u_2) \in D_2(i_2) \subset D_2 \quad (3.38)$$

dwójnik osobliwy równoważny posiada obszar pracy D_{os} opisany relacją:

$$\bigwedge_{i_0 \in (A_1 \cap A_2)} \bigvee_{u_0 \in B_1(i_0) + B_2(i_0)} (i_0, u_0) \in [D_1(i_0) + D_2(i_0)] = D_o(i_0) \subset D_{os}, \quad (3.39)$$

w której: $A_1 \cap A_2 = A_o$, $B_1(i_0) + B_2(i_0) = B_o(i_0)$.

Dowód. Aby było spełnione $i_0 = i_1 = i_2$, musi zachodzić:

$$(i_0 \in A_1 \wedge i_0 \in A_2) \Rightarrow i_0 \in (A_1 \cap A_2) = A_o.$$

Natomiast dla spełnienia $u_0 = u_1 + u_2$ przy $i_0 \in A_o$ musi być $u_1 + u_2 \in B_o(i_0)$, co na podstawie definicji 3.3 daje: $B_o(i_0) = B_1(i_0) + B_2(i_0)$.

Wniosek 3.3

Przy połączeniu równoległym dwójników osobliwych o obszarach pracy D_1 i $D_2 \subset R^2$ opisanych relacjami:

$$\bigwedge_{u_1 \in B_1} \bigvee_{i_1 \in A_1(u_1)} (i_1, u_1) \in D_1(i_1) \subset D_1 \quad (3.40)$$

$$\bigwedge_{u_2 \in B_2} \bigvee_{i_2 \in A_2(u_2)} (i_2, u_2) \in D_2(i_2) \subset D_2 \quad (3.41)$$

dwójnik osobliwy równoważny posiada obszar pracy D_{0R} opisany relacją:

$$\bigwedge_{u_0 \in (B_1 \cap B_2)} \bigvee_{i_0 \in (A_1(u_0) + A_2(u_0))} (i_0, u_0) \in [D_1(u_0) + D_2(u_0)] = D_0(u_0) \subset D_{0R}, \quad (3.42)$$

w której: $B_1 \cap B_2 = B_0$, $A_1(u_0) + A_2(u_0) = A_0(u_0)$.

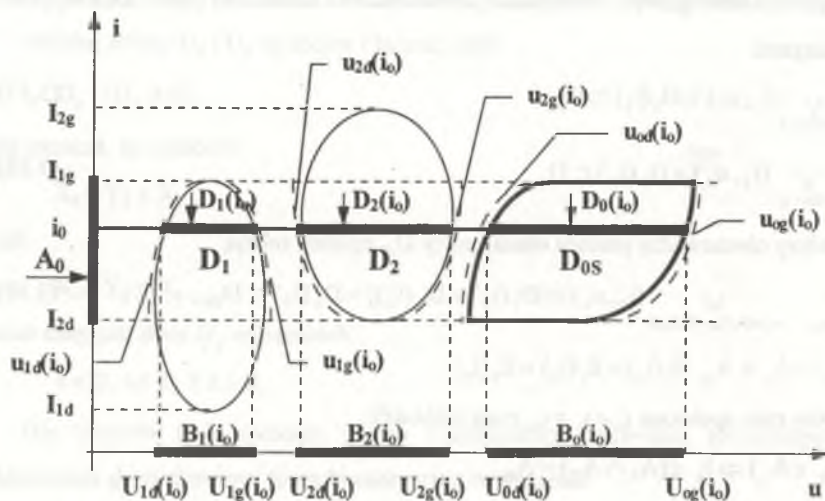
Dowód. Aby było spełnione $u_0 = u_1 = u_2$, musi zachodzić:

$$(u_0 \in B_1 \wedge u_0 \in B_2) \Rightarrow u_0 \in (B_1 \cap B_2) = B_0. \quad (3.43)$$

Natomiast dla spełnienia $i_0 = i_1 + i_2$ przy $u_0 \in B_0$, musi być $i_1 + i_2 \in A_0(u_0)$, co na podstawie definicji 3.3 daje:

$$A_0(u_0) = A_1(u_0) + A_2(u_0) \quad (3.44)$$

Praktyczne zastosowanie wniosków 3.2 i 3.3 do obliczania dwójników zastępczych wymaga posiłkowania się definicjami 3.1 do 3.3 oraz jedną z reguł 1 lub 2. Na rys. 3.9 przedstawiono graficzną ilustrację wniosku 3.2, a na rys. 3.10 wniosku 3.3.



Rys. 3.9. Graficzna ilustracja poszukiwania obszaru pracy dwójników osobliwych połączonych szeregowo

Fig. 3.9. Graphical derivation of the operating-region of a series singular one-ports

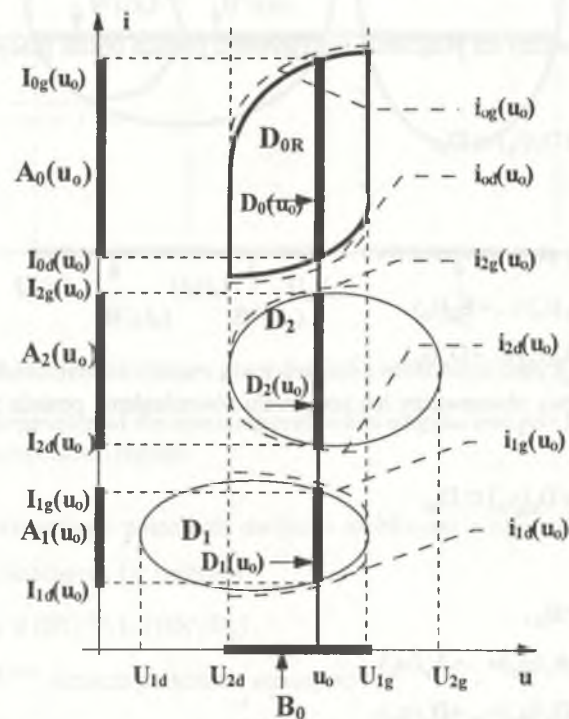
Jeżeli dla połączenia szeregowego wartości prądu i_0 przebiegać będą cały zbiór $D_0(i_0)$, wtedy wartości graniczne zbiorów $D_1(i_0)$ i $D_2(i_0)$ przemieszczają się po liniach $u_{1d}(i_0), u_{1g}(i_0)$ oraz $u_{2d}(i_0), u_{2g}(i_0)$, natomiast punkty graniczne zbiorów $D_0(i_0)$ przemieszczają się po liniach $u_{0d}(i_0), u_{0g}(i_0)$ (rys. 3.9), dla których prawdziwe są zależności:

$$u_{0d}(i_0) = u_{1d}(i_0) + u_{2d}(i_0), \quad (3.45)$$

$$u_{0g}(i_0) = u_{1g}(i_0) + u_{2g}(i_0). \quad (3.46)$$

Analogicznie dla połączenia równoległego punkty graniczne zbiorów $D_0(u_0)$ przemieszczają się po liniach $i_{0d}(u_0), i_{0g}(u_0)$ (rys. 3.10), dla których zachodzi:

$$i_{0d}(u_0) = i_{1d}(u_0) + i_{2d}(u_0), \quad (3.47)$$



Rys. 3.10. Graficzna ilustracja poszukiwania obszaru pracy dwójników osobliwych połączonych równolegle

Fig. 3.10. Graphical derivation of the operating-region of a parallel singular one-ports

$$i_{0g}(u_0) = i_{1g}(u_0) + i_{2g}(u_0). \quad (3.48)$$

Zależności (3.45) do (3.48) pozwalają w praktyce w łatwy sposób określać granice obszaru pracy dwójnika osobliwego zastępczego przy połączeniach szeregowych i równoległych jako sumy krzywych granicznych obszarów pracy dwójników składowych, przy czym krzywe te dodawane są jako funkcje zmiennych zaciskowych i lub u . Wnioskami 3.2 i 3.3 można uogólnić na przypadki n dwójników osobliwych połączonych szeregowo lub równoległe, stąd:

Twierdzenie 3.4

Dla n dwójników osobliwych D_k dla $k = 1, 2, \dots, n$ opisanych relacjami typu:

$$\bigwedge_{i_k \in A_k} \bigvee_{u_k \in B_k(i_k)} (i_k, u_k) \in D_k(i_k) \subset D_k \quad (3.49)$$

lub:

$$\bigwedge_{u_k \in B_k} \bigvee_{i_k \in A_k(u_k)} (i_k, u_k) \in D_k(u_k) \subset D_k \quad (3.50)$$

dwójnik osobliwy równoważny ich połączeniu szeregowemu posiada obszar pracy D_{0s} opisany relacją:

$$\bigwedge_{i_0 \in A_0} \bigvee_{u_0 \in B_0(i_0)} (i_0, u_0) \in D_0(i_0) \subset D_{0s} \quad (3.51)$$

przy czym:

$$A_0 = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n, \quad (3.52)$$

$$B_0(i_0) = B_1(i_0) + B_2(i_0) + \dots + B_n(i_0), \quad (3.53)$$

$$D_0(i_0) = D_1(i_0) + D_2(i_0) + \dots + D_n(i_0), \quad (3.54)$$

natomiast dwójnik osobliwy równoważny ich połączeniu równoległemu posiada obszar pracy D_{0R} opisany relacją:

$$\bigwedge_{u_0 \in B_0} \bigvee_{i_0 \in A_0(u_0)} (i_0, u_0) \in D_0(u_0) \subset D_{0R} \quad (3.55)$$

przy czym:

$$B_0 = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n, \quad (3.56)$$

$$A_0(u_0) = A_1(u_0) + A_2(u_0) + \dots + A_n(u_0), \quad (3.57)$$

$$D_0(u_0) = D_1(u_0) + D_2(u_0) + \dots + D_n(u_0). \quad (3.58)$$

Prawdziwość twierdzenia 3.4 wynika z n -krotnego stosowania wniosków 3.2 i 3.3.

Niech obszar pracy D_1 pewnego dwójnika osobliwego rozdziela linia podziału $u_p(i)$ na dwa spójne podzbiory D'_1 i D''_1 , tak że spełnione jest $D_1 = D'_1 \cup D''_1$ oraz $u_p(i) = D'_1 \cap D''_1$, która jest wspólną linią graniczną dla podobszarów D'_1 i D''_1 (rys. 3.11).

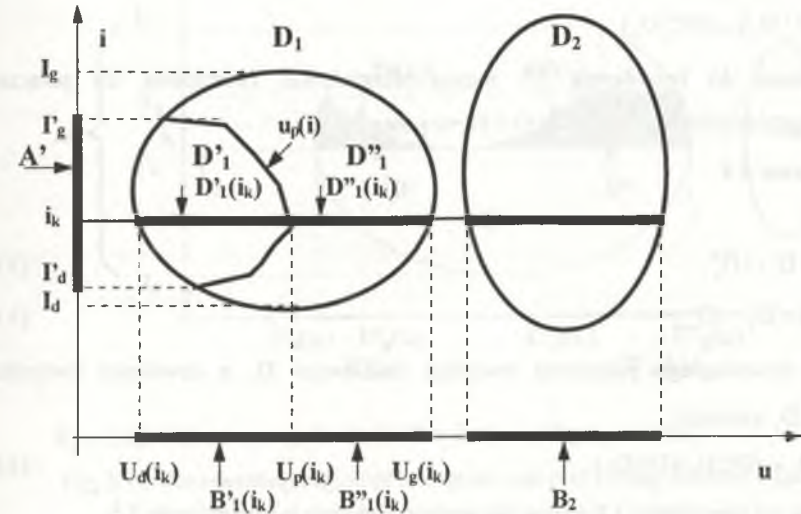
Dla szeregowego połączenia dwójnika osobliwego D_1 z dowolnym dwójnikiem osobliwym D_2 , mającym z nim wspólny zakres wartości prądu A , można sformułować twierdzenie:

Twierdzenie 3.5

Jeżeli:

$$D_1 = D'_1 \cup D''_1, \quad (3.59)$$

$$u_p(i) = D'_1 \cap D''_1, \quad (3.60)$$



Rys. 3.11. Rozdzielenie obszaru pracy dwójnika osobliwego linią $u_p(i)$ na dwa podobszary

Fig. 3.11. Separation of the operating-region of a singular one-port by line $u_p(i)$ for two composition regions

wtedy dla szeregowego połączenia dwójnika osobliwego o obszarze pracy D_1 z dowolnym dwójnikiem osobliwym D_2 zachodzi:

$$D_1 | D_2 \equiv (D'_1 | D_2) \cup (D''_1 | D_2), \quad (3.61)$$

gdzie symbol " $|$ " oznacza połączenie szeregowe.

Dowód. Na podstawie twierdzeń 3.2, 3.3, i wniosku 3.2 dla relacji (3.61) zachodzi:

$$\begin{aligned} D_1 | D_2 &\equiv \bigwedge_{i_k \in (A_1 \cap A_2)} \bigvee_{u \in (B_1(i_k) + B_2(i_k))} (i_k, u) \in [D_1(i_k) + D_2(i_k)] = D_0(i_k) \subset D_0 \equiv \\ &\equiv \bigwedge_{i_k \in (A_1 \cap A_2)} \bigvee_{u \in ((B'_1(i_k) \cup B''_1(i_k)) + B_2(i_k))} (i_k, u) \in [(D'_1(i_k) \cup D''_1(i_k)) + D_2(i_k)] \subset D_0 \equiv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \bigwedge_{i_k \in (A_1 \cap A_2)} \bigvee_{u \in (B'_1(i_k) + B_2(i_k)) \cup (B''_1(i_k) + B_2(i_k))} (i_k, u) \in [(D'_1(i_k) + D_2(i_k)) \cup (D''_1(i_k) + D_2(i_k))] \subset \\ &\subset D'_0(i_k) \cup D''_0(i_k) \subset D_0(i_k) \subset D_0 \equiv \\ &\equiv \left(\bigwedge_{i_k \in (A_1 \cap A_2)} \bigvee_{u \in (B'_1(i_k) + B_2(i_k))} (i_k, u) \in [D'_1(i_k) + D_2(i_k)] \subset D'_0(i_k) \subset D_0 \right) \cup \\ &\equiv \left(\bigwedge_{i_k \in (A_1 \cap A_2)} \bigvee_{u \in (B''_1(i_k) + B_2(i_k))} (i_k, u) \in [D''_1(i_k) + D_2(i_k)] \subset D''_0(i_k) \subset D_0 \right) \equiv \\ &\equiv (D'_1 \parallel D_2) \cup (D''_1 \parallel D_2) \end{aligned}$$

Analogicznie do twierdzenia 3.5 można sformułować twierdzenie dla połączenia równoległego dwójników osobliwych D_1 i D_2 w postaci:

Twierdzenie 3.6

Jeżeli:

$$D_1 = D'_1 \cup D''_1, \tag{3.62}$$

$$i_p(u) = D'_1 \cap D''_1, \tag{3.63}$$

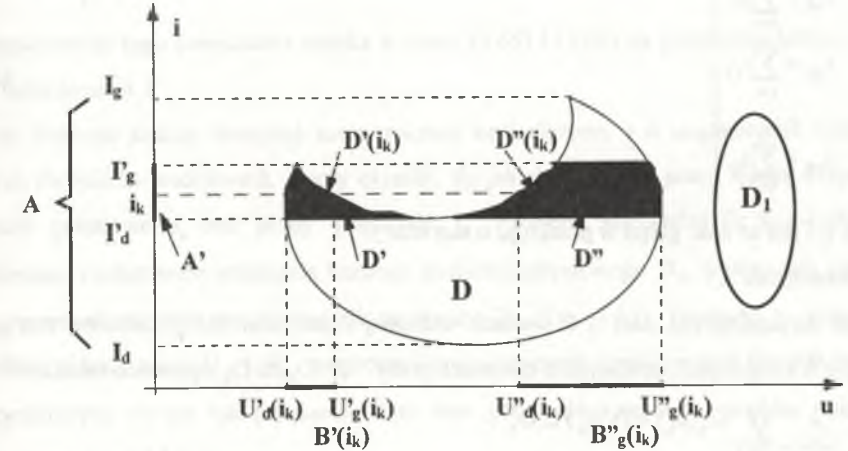
wtedy dla równoległego połączenia dwójnika osobliwego D_1 a dowolnym dwójnikiem osobliwym D_2 zachodzi:

$$D_1 \parallel D_2 \equiv (D'_1 \parallel D_2) \cup (D''_1 \parallel D_2). \tag{3.64}$$

Prawdziwość twierdzenia 3.6 można udowodnić podobnie jak twierdzenie 3.5.

Na rys. 3.12 przedstawiony jest obszar pracy dwójnika osobliwego D w kształcie figury geometrycznej wklęsłej. Dla tego typu obszarów pracy niektóre krzywe graniczne nie są jednoznacznie funkcjami zmiennych zaciskowych. I tak, krzywa $u_d(i)$, zawarta między punktami ekstremalnymi o współrzędnych I_d i I_g , posiada dwa ekstrema lokalne o współrzędnych prądowych I'_d i I''_d , rozdzielających ją na trzy części $u_d^{(1)}(i), u_d^{(2)}(i), u_d^{(3)}(i)$, które są już jednoznacznie funkcjami napięcia względem prądu. Dla przedstawionego obszaru pracy można wyróżnić podzbiór wartości prądu $A' \subset A$, o granicach $I'_d < i_k \leq I''_d$, dla których zbiór $D(i_k)$ rozpada się na dwa podzbiory rozłączne $D'(i_k)$ i $D''(i_k)$, a tym samym cały obszar $D(A')$ w tym zakresie prądu rozpada się na dwa podzbiory rozłączne D' i D'' zakreskowane na rys. 3.12, które można uważać za sumę zbiorową, czyli $D(A') = D' + D''$. W przypadku szeregowego połączenia z innym dwójnikiem osobliwym D_1 , który posiada wspólny prądowy zakres pracy z podzbiorem A' , szukania dwójnika równoważnego należy dokonać na podstawie twierdzenia 3.5 rozszerzonego (zgodnie z twierdzeniem 3.3) na sumę zbiorową

o liniach granicznych będących niejednoznacznie funkcjami napięcia względem prądu. Wtedy przy połączeniu równoległym dla pewnego zakresu napięć może nastąpić rozpad obszaru pracy na dwa podobszary rozłączne, a szukanie dwójnika równoważnego może być dokonane na podstawie twierdzenia 3.6 rozszerzonego na obszary rozłączne.



Rys. 3.12. Obszar pracy dwójnika D w kształcie figury wklęsłej

Fig. 3.12. An operating-region of a singular one-port having concave figure shape

Niech dana jest w -węzłowa sieć, w ogólności nieszerogowo-równoległa, zbudowana z n gałęzi będących dwójnikami osobliwymi. Dla wybranych dwóch węzłów α i β jako zacisków wejściowych można wyróżnić między nimi p niezależnych dróg przejścia, przy czym $p = n - w + 2$. Odpowiada im p równań (odpowiedniki II prawa Kirchhoffa) wiążących napięcie na zaciskach α i β z napięciami na poszczególnych gałęziach składowych każdej drogi. Mają one postać:

$$\left. \begin{aligned} u_{\alpha\beta} &= \sum_{k=1}^{h_1} u_{k1} \\ u_{\alpha\beta} &= \sum_{k=1}^{h_2} u_{k2} \\ &\dots \\ u_{\alpha\beta} &= \sum_{k=1}^{h_p} u_{kp} \end{aligned} \right\} \tag{3.65}$$

gdzie h_j jest ilością gałęzi w drodze o numerze j .

Dla tych samych węzłów α i β można wyróżnić r rozdzielających je przekrojów, przy czym $r = 2^{(w-2)}$. Odpowiada im r równań (odpowiedników II prawa Kirchhoffa), wiążących prąd między zaciskami α i β z prądami w poszczególnych gałęziach występujących w danym przekroju. Mają one postać:

$$\left. \begin{aligned} i_{\alpha\beta} &= \sum_{k=1}^{\gamma_1} i_{k,1} \\ i_{\alpha\beta} &= \sum_{k=1}^{\gamma_2} i_{k,2} \\ &\dots \\ i_{\alpha\beta} &= \sum_{k=1}^{\gamma_r} i_{k,r} \end{aligned} \right\} \quad (3.66)$$

gdzie γ_j - jest to ilość gałęzi w przekroju o numerze j .

Twierdzenie 3.7

Dla dwuzaciskowej sieci o w węzłach widzianej z zacisków α i β , złożonej z n gałęzi będących dwójnikami osobliwymi o obszarach pracy D_1, D_2 do D_n opisanych relacjami:

$$\bigwedge_{i_k \in A_k} \bigvee_{u_k \in B_k(i_k)} (i_k, u_k) \in D_k(i_k) \subset D_k \quad (3.67)$$

lub

$$\bigwedge_{u_k \in B_k} \bigvee_{i_k \in A_k(u_k)} (i_k, u_k) \in D_k(u_k) \subset D_k \quad (3.68)$$

przy czym $k = 1, 2, \dots, n$,

obszar pracy odpowiadającego jej dwójnika zastępczego D_0 znajduje się wewnątrz prostokątnego obszaru $D_{\alpha\beta}$ określonego relacjami zbiorowymi:

$$\bigwedge_{u \in B_{\alpha\beta}} \bigvee_{i \in A_{\alpha\beta}} (i, u) \in D_{\alpha\beta}(u) \subset D_{\alpha\beta} \quad (3.69)$$

lub

$$\bigwedge_{i \in A_{\alpha\beta}} \bigvee_{u \in B_{\alpha\beta}} (i, u) \in D_{\alpha\beta}(i) \subset D_{\alpha\beta} \quad (3.70)$$

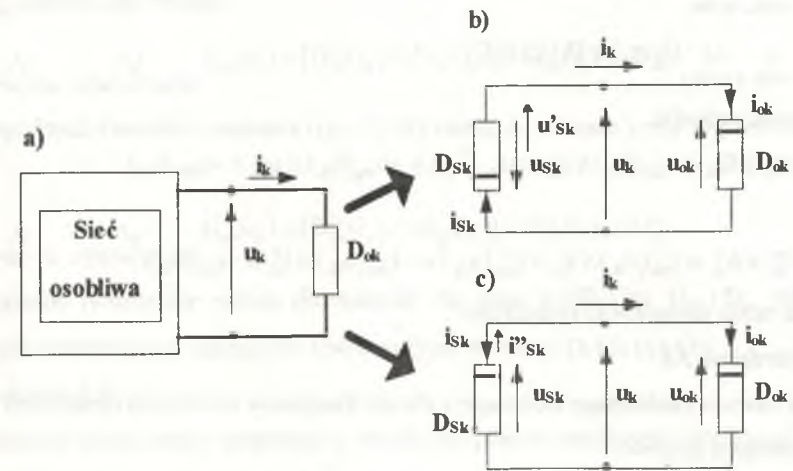
dla którego prąd i i napięcie u należą do zbiorów $A_{\alpha\beta}$ i $B_{\alpha\beta}$ spełniających zależności:

$$\left. \begin{aligned} A_{\alpha\beta} &= \sum_{k=1}^{\gamma_1} A_{k,1} \\ A_{\alpha\beta} &= \sum_{k=1}^{\gamma_2} A_{k,2} \\ &\dots \\ A_{\alpha\beta} &= \sum_{k=1}^{\gamma_r} A_{k,r} \end{aligned} \right\} \quad (3.71)$$

$$\left. \begin{aligned} B_{\alpha\beta} &= \sum_{k=1}^{\beta_1} B_{k,1} \\ B_{\alpha\beta} &= \sum_{k=1}^{\beta_2} B_{k,2} \\ &\dots \\ B_{\alpha\beta} &= \sum_{k=1}^{\beta_r} B_{k,p} \end{aligned} \right\} \quad (3.72)$$

Prawdziwość tego twierdzenia wynika z relacji (3.65) i (3.66) na podstawie definicji 3.4, 3.5 i twierdzenia 3.1.

Aby dokonać analizy dowolnej autonomicznej sieci złożonej z n uogólnionych bezinercyjnych dwójników osobliwych, należy określić, do jakich obszarów pracy należą wszystkie napięcia gałęziowe u_k oraz prądy gałęziowe i_k . Problem sprowadza się do n -krotnego oddzielnego rozpatrzenia połączenia każdego dwójnika gałęziowego D_{ok} z pozostałą częścią sieci reprezentowanej przez jej dwójnik zastępczy D_{sk} (rys. 3.13). Dwójniki te posiadają określone obszary pracy D_{ok} i D_{sk} względem ich wyróżnionych zacisków przy ostrzałkowaniu odbiornikowym, co po ich połączeniu daje dwa przypadki kierunków prądów i i napięć pokazane na rys. 3.13 b i c.



Rys. 3.13. Połączenie wybranego dwójnika osobliwego z siecią w zależności od kierunku ich ostrzałkowania

Fig. 3.13. Direction indicator dependence of connection for a singular one-port and network

W połączeniu tym, zgodnie z prawami Kirchhoffa, muszą być spełnione zależności:

$$i_k = i_{sk} = i_{ok} \quad \text{oraz} \quad u_k = u_{sk} = u_{ok} \quad (3.73)$$

Aby one zachodziły, jeden z dwójników (np. D_{sk}) musi pełnić rolę dwójnika źródłowego, zatem należy zmienić na jego zaciskach dodatni kierunek napięcia na u'_{sk} (rys. 3.13a), lub prądu na i''_{sk} (rys. 3.13b), tak aby przejść do ostrzałkowania źródłowego. Otrzymuje się wtedy dla dwójnika D_{sk} , w zależności od sposobu jego włączenia (kierunku zacisków), dwa obszary pracy: D'_{sk} lub D''_{sk} . Jest to równoznaczne z odbiciem jego obszaru pracy symetrycznie względem osi napięcia lub prądu. Tak przekształcone obszary pracy D'_{sk} lub D''_{sk} po nałożeniu na D_{ok} wyznaczają wspólny obszar pracy D'_{pk} lub D''_{pk} obu dwójników (rys. 3.14), a tym samym obszar współpracy dwójnika D_{ok} z pozostałą częścią sieci jako iloczyn zbiorowy:

$$D'_{pk} = D'_{sk} \cap D_{ok} \quad (3.74)$$

lub

$$D''_{pk} = D''_{sk} \cap D_{ok} \quad (3.75)$$

Obszary D'_{sk} i D''_{sk} określają relacje:

$$\bigwedge_{i_{sk} \in A_{sk}} \bigvee_{u'_{sk} \in B'_{sk}} (i_{sk}, u'_{sk}) \in D'_{sk}(i_{sk}) \subset D'_{sk} \quad (3.76)$$

$$\bigwedge_{u_k \in B_k} \bigvee_{i_k \in A_k(u_k)} (i_k, u_k) \in D_k(i_k) \subset D_k \quad (3.77)$$

przy czym zachodzi:

$$u'_{sk} \in B'_{sk} \equiv u'_{skd}(i_{sk}) \leq u'_{sk} \leq u'_{skg}(i_{sk}) \equiv -u_{skg}(i_{sk}) \leq u'_{sk} \leq -u_{skd}(i_{sk}) \quad (3.78)$$

oraz:

$$i''_{sk} \in A''_{sk} \equiv i''_{skd}(u_{sk}) \leq i''_{sk} \leq i''_{skg}(u_{sk}) \equiv -i_{skg}(u_{sk}) \leq i''_{sk} \leq -i_{skd}(u_{sk}). \quad (3.79)$$

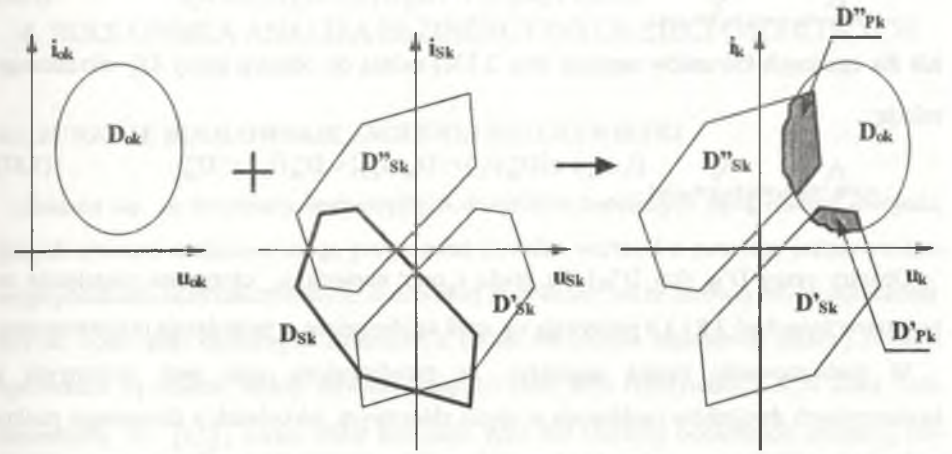
Można zatem sformułować twierdzenie:

Twierdzenie 3.8

Dla obwodu zamkniętego złożonego z dwóch dwójników osobliwych określonych relacjami uzależnionymi prądowo:

$$\bigwedge_{i_{sk} \in A_{sk}} \bigvee_{u_{sk} \in B_{sk}(i_{sk})} (i_{sk}, u_{sk}) \in D_{sk}(i_{sk}) \subset D_{sk} \quad (3.80)$$

$$\bigwedge_{i_{ok} \in A_{ok}} \bigvee_{u_{ok} \in B_{ok}(i_{ok})} (i_{ok}, u_{ok}) \in D_{ok}(i_{ok}) \subset D_{ok} \quad (3.81)$$



Rys. 3.14. Wspólne obszary pracy dwójnika osobliwego z siecią

Fig. 3.14. Common operating-regions for a singular one-port and network

o zgodnych kierunkach dodatnich prądu (rys. 3.13b), napięcie oraz prąd należą do obszaru pracy D'_{pk} określonego relacją:

$$\bigwedge_{i_k \in A'_{sk} \cap A_{ok}} \bigvee_{u_k \in B_{sk}(i_k) \cap B_{ok}(i_k)} (i_k, u_k) \in [D'_{sk}(i_k) \cap D_{ok}(i_k)] = D'_{pk}(i_k) \subset D'_{pk} \quad (3.82)$$

lub dla zgodnych kierunków napięcia (rys. 3.13c) należą do obszaru pracy D''_{pk} określonego relacją:

$$\bigwedge_{i_k \in A_{sk} \cap A_{ok}} \bigvee_{u_k \in B''_{sk}(i_k) \cap B_{ok}(i_k)} (i_k, u_k) \in [D''_{sk}(i_k) \cap D_{ok}(i_k)] = D''_{pk}(i_k) \subset D''_{pk}. \quad (3.83)$$

Analogiczne twierdzenie można sformułować dla opisu dwójników D_{sk} i D_{ok} relacjami zbiorowymi uzależnionymi napięciowo równoważnymi do relacji (3.80) i (3.81).

Twierdzenie 3.9

Dla obwodu zamkniętego złożonego z dwóch dwójników osobliwych określonych relacjami uzależnionymi napięciowo:

$$\bigwedge_{u_{sk} \in B_{sk}} \bigvee_{i_{sk} \in A_{sk}(u_{sk})} (i_{sk}, u_{sk}) \in D_{sk}(u_{sk}) \subset D_{sk} \quad (3.84)$$

$$\bigwedge_{u_{ok} \in B_{ok}} \bigvee_{i_{ok} \in A_{ok}(u_{ok})} (i_{ok}, u_{ok}) \in D_{ok}(u_{ok}) \subset D_{ok} \quad (3.85)$$

dla zgodnych kierunków dodatnich prądu (rys. 3.13b), prąd i napięcie należą do obszaru pracy D'_{pk} określonego relacją:

$$\bigwedge_{u_k \in B_{sk} \cap B_{ok}} \bigvee_{i_k \in A_{sk}(u_k) \cap A_{ok}(u_k)} (i_k, u_k) \in [D'_{sk}(i_k) \cap D_{ok}(i_k)] = D'_{pk}(i_k) \subset D'_{pk} \quad (3.86)$$

lub dla zgodnych kierunków napięcia (rys. 3.13c) należą do obszaru pracy D''_{pk} określonego relacją:

$$\bigwedge_{u_k \in B_{sk} \cap B_{ok}} \bigvee_{i_k \in A_{sk}(u_k) \cap A_{ok}(u_k)} (i_k, u_k) \in [D''_{sk}(i_k) \cap D_{ok}(i_k)] = D''_{pk}(i_k) \subset D''_{pk} \quad (3.87)$$

Obszary pracy D'_{sk} (lub D''_{sk}) dla prądu i_k oraz napięcia u_k otrzymane niezależnie na podstawie twierdzeń 3.8 i 3.9 pokrywają się, czyli są identyczne, a twierdzenia te równoważne.

W podsumowaniu można zauważyć, że przedstawiony opis sieci złożonych z bezinercyjnych dwójników osobliwych w ujęciu zbiorowym, jakkolwiek z formalnego punktu widzenia jest ścisły i precyzyjny, to okazuje się mniej przydatny jako praktyczne narzędzie do analizy tych sieci.

4. BOOLOWSKA ANALIZA BEZINERCYJNYCH SIECI OSOBLIWYCH

4.1. FUNKCJE BOOLOWSKIE ZMIENNEJ RZECZYWISTEJ

Zakłada się, że do zbioru bezinercyjnych dwójników osobliwych będą należeć dwójniki, których zmienne zaciskowe mogą przyjmować dowolne wartości z pewnego jednowymiarowego podzbioru liczb rzeczywistych, o dowolnej szerokości, także zerowej lub nieskończonej. Aby do opisu sieci osobliwych złożonych z takich dwójników zastosować algebrę Boole'a, wprowadza się pojęcie funkcji odwzorowujących zbiór liczb rzeczywistych R w zbiór dwuelementowy $B = \{0,1\}$, zwane dalej funkcjami typu RB (funkcje boolowskie zmiennej rzeczywistej).

Niechaj $f(x) = z$ będzie funkcją typu RB, przy czym $x \in R$, a $z \in B$, i jednocześnie zachodzi:

Definicja 4.1

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in X_k, \quad k = 1 \dots m, \\ 0 & \text{dla } x \in X_l, \quad l = 1 \dots n. \end{cases} \quad (4.1)$$

gdzie X_k i X_l są podzbiórami liczb rzeczywistych spełniającymi jednocześnie zależności:

$$\bigcup_{k=1}^m X_k \cup \bigcup_{l=1}^n X_l = R, \quad (4.2)$$

$$\bigcup_{k=1}^m X_k \cap \bigcup_{l=1}^n X_l = \emptyset. \quad (4.3)$$

Podzbiory X_k określone są przez pary liczb rzeczywistych $[a_{lk}, a_{uk}]$ będących ich granicami (dolną i górną) i nazywane obszarami działania funkcji $f(x)$.

Definicja 4.2

Parametrami funkcji typu RB nazywane będą wartości graniczne podzbiorów X_k , co można zapisać:

$$\langle \text{Par } f(x) \rangle = \langle a_k \rangle \quad \text{dla } k=1 \dots m \quad (4.4)$$

Tworzą one zbiór parametrów funkcji BB, zawierający k elementów.

Niektóre z podzbiorów X_k argumentu funkcji $f(x)$ mogą być nieograniczone.

Definicja 4.3

Funkcja $f(x)$ typu RB jest przestępna, jeżeli przynajmniej jeden ze zbiorów X_k nie posiada obu granic o skończonych wartościach, co oznacza, że:

$$\bigvee_{x_k} \text{Par } f(x) \rightarrow \infty \quad (4.5)$$

Parametry funkcji $f(x)$ o wartościach skończonych mogą być zależne od innej zmiennej rzeczywistej $y \in \mathbb{R}$.

Definicja 4.4

Funkcja $f(x)$ typu RB nazywana jest uzależnioną względem wielkości rzeczywistej $y \in \mathbb{R}$, jeżeli przynajmniej jeden z jej parametrów jest funkcją zmiennej y , czyli:

$$\bigvee_{x_k} \text{Par } f(x) = a_k(y) \quad (4.6)$$

W przeciwnym przypadku funkcję $f(x)$ nazywa się stałą względem zmiennej y . Dla każdej funkcji $f(x)$ typu RB można określić jej wartość własną zależną od liczby parametrów k .

Definicja 4.5

Wartością własną funkcji $f(x)$ nazywana będzie liczba:

$$\text{Val } f(x) = \begin{cases} k/2 & \text{dla } k = 2n \text{ i } f(x) \text{ - nieprzestępnej} \\ \frac{k}{2} + \frac{1}{2} & \text{dla } k = 2n + 1 \text{ i } f(x) \text{ - przestępnej} \\ \frac{k}{2} + 1 & \text{dla } k = 2n \text{ i } f(x) \text{ - przestępnej} \end{cases}$$

Ze względu na to, że funkcje typu RB określone są w dwuelementowym zbiorze B , wykonywać można na nich operacje boolowskie typu: negacja, alternatywa i koniunkcja. Niechaj $f(x)$ będzie funkcją określoną relacją (4.1).

Definicja 4.6

Negacją boolowską funkcji $f(x)$ jest funkcja:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in \bigcup_{k=1}^m X_k \\ 1 & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k=1}^m X_k \end{cases} \quad (4.7)$$

Podobnie, niechaj funkcje $f_1(x)$ i $f_2(x)$ będą funkcjami typu RB o obszarach działania X_{1k} i X_{2k} .

Definicja 4.7

Alternatywą boolowską funkcji $f_1(x)$ i $f_2(x)$ jest funkcja:

$$f_3(x) = f_1(x) \vee f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \bigcup_{k=1}^{m_3} X_{3k} = \bigcup_{k=1}^{m_1} X_{1k} \cup \bigcup_{k=1}^{m_2} X_{2k} \\ 0 & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k=1}^{m_3} X_{3k} \end{cases} \quad (4.8)$$

Definicja 4.8

Koniunkcją boolowską funkcji $f_1(x)$ i $f_2(x)$ jest funkcja:

$$f_3(x) = f_1(x) \wedge f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \bigcup_{k=1}^{m_3} X_3 = \bigcup_{k=1}^{m_1} X_{1k} \cap \bigcup_{k=1}^{m_2} X_{2k} \\ 0 & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k=1}^{m_3} X_{3k} \end{cases} \quad (4.9)$$

Operacje boolowskie (4.7), (4.8) i (4.9) pozwalają tworzyć nowe funkcje $f_F(x)$ typu RB z danych wyjściowych $f_z(x)$, co można zapisać jako:

$$f_F(x) = F\{f_z(x)\} \quad (4.10)$$

Do porównywania funkcji RB niezbędne jest twierdzenie dotyczące ich identyczności.

Twierdzenie 4.1

Dwie funkcje $f_1(x)$ i $f_2(x)$ typu RB, o obszarach działania X_{1k} i X_{2k} są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy ich obszary działania są identyczne, czyli:

$$f_1(x) = f_2(x) \text{ dla } X_{1k} = X_{2k} \quad (4.11)$$

dla $k=1, 2, \dots, m$.

Prawdziwość twierdzenia 4.1 wynika bezpośrednio z definicji 4.1 funkcji typu RB.

Dla funkcji typu RB nieprzestępnej jej parametry uporządkowane w kolejności rosnącej tworzą granice dolne i górne kolejnych obszarów działania, stąd wynika wniosek:

Wniosek 4.2

Funkcja $f(x)$ nieprzestępna jest jednoznacznie określona przez zbiór swoich parametrów $\langle \text{Par } f(x) \rangle$.

Operacje boolowskie na funkcjach $f_z(x)$ są równoważne operacjom zbiorowym na ich obszarach działania, zatem ich granice mogą być jedynie granicami obszarów funkcji składowych, co oznacza, że:

Twierdzenie 4.3

Jeżeli funkcja $f_F(x)$ jest wynikiem działania operacji boolowskich na funkcje składowe $f_z(x)$ typu RB, o parametrach $\langle \text{Par } f_z(x) \rangle$ wtedy zachodzi:

$$\langle \text{Par } f_F(x) \rangle \leq \bigcup_z \langle \text{Par } f_z(x) \rangle \quad (4.12a)$$

Z twierdzenia tego w oczywisty sposób wynika zależność:

$$\text{Val } f_F(x) \leq \sum_z \text{Val } f_z(x) \quad (4.12b)$$

gdzie Z jest liczbą funkcji składowych.

W tablicy 4.1 przedstawione są elementarne ($\text{Val} \leq 1$) funkcje boolowskie jednej zmiennej rzeczywistej oraz ich interpretacje geometryczne. Pokazana w niej funkcja $\text{Sg}(x)$ może być nazwana skokiem górnym, a funkcja $\text{Sd}(x)$ skokiem dolnym.

Twierdzenie 4.4

Dowolną funkcję boolowską jednej zmiennej rzeczywistej $f(x)$ posiadającą skończoną i przeliczalną liczbę obszarów działania X_k można przedstawić jako „kombinację” operacji boolowskich na funkcjach elementarnych $\text{Sg}(x)$ i $\text{Sd}(x)$, lub tylko jednej z nich.

Prawdziwość tego twierdzenia wynika z tablicy 4.1 i zależności:

$$f(x) = \text{Sd}(x - a_1) \vee \prod_x (a_{2L}, a_{2U}) \vee \dots \vee \prod_x (a_{k-1,L}, a_{k-1,U}) \vee \text{Sg}(x - a_k), \quad (4.13)$$

gdzie k jest liczbą obszarów działania.

Dla funkcji spełniających twierdzenie 4.4 można sformułować twierdzenie 4.5.

Twierdzenie 4.5

Zbiór funkcji $\{f(x)\}$ typu RB jest zbiorem algebry Boole'a określonej jako system:

$\{\{f(x)\}, \vee, \wedge, 1(x), 0(x)\}$, gdyż dla dowolnych $f_1(x), f_2(x), f_3(x) \in \{f(x)\}$ spełnione są aksjomaty:

Tablica 4.1

Nazwa i definicja	Wykres	Podstawowe zależności	Uwagi
$\text{Sg}(x - a) = \begin{cases} 1 \text{ dla } x \geq a \\ 0 \text{ dla } x < a \end{cases}$		$\text{Sd}(-x - a)$ $\text{Par} = a, k = 1$	Przestępna $\text{Val} = 1$
$\text{Sd}(x - a) = \begin{cases} 0 \text{ dla } x > a \\ 1 \text{ dla } x \leq a \end{cases}$		$\text{Sg}(-x - a)$ $\text{Par} = a, k = 1$	Przestępna $\text{Val} = 1$
$1(x) = 1 \text{ dla } x \in \mathbb{R}$		$\text{Sg}(x - a_1) \vee \text{Sd}(x - a_2), a_1 \leq a_2$ $\text{Sg}(x - a_1) \wedge \text{Sd}(x - a_2), a_1 > a_2$ $\text{Par. brak}, k = 0$	Przestępna $\text{Val} = 1$
$0(x) = 0 \text{ dla } x \in \mathbb{R}$		$\text{Sg}(x - a_1) \wedge \text{Sd}(x - a_2)$ dla $a_1 > a_2$ $\text{Par. brak}, k = 0$	Nieprzestępna $\text{Val} = 0$
$\delta(x - a) = \begin{cases} 1 \text{ dla } x = a \\ 0 \text{ dla } x \neq a \end{cases}$		$\text{Sg}(x - a) \wedge \text{Sd}(x - a)$ $\prod_x (a, a)$ $\text{Par} = a; a, k = 2$	Nieprzestępna $\text{Val} = 1$
$\prod_x (a_1, a_2) = \begin{cases} 0 \text{ dla } x < a_1 \\ 1 \text{ dla } a_1 \leq x \leq a_2 \\ 0 \text{ dla } 0 \text{ dla } x > a_2 \end{cases}$		$\text{Sg}(x - a_1) \wedge \text{Sd}(x - a_2)$ dla $a_1 < a_2$ $\text{Par.} = a_1; a_2, k = 2$	Nieprzestępna $\text{Val} = 1$

- $1^* f_1(x) \vee f_2(x) \in \{f(x)\}, \quad 1^{**} f_1(x) \wedge f_2(x) \in \{f(x)\},$
 - $2^* f_1(x) \vee f_2(x) = f_2(x) \vee f_1(x), \quad 2^{**} f_1(x) \wedge f_2(x) = f_2(x) \wedge f_1(x),$
 - $3^* f_1(x) \wedge [f_2(x) \vee f_3(x)] = [f_1(x) \wedge f_2(x)] \vee [f_1(x) \wedge f_3(x)],$
 - $3^{**} f_1(x) \vee [f_2(x) \wedge f_3(x)] = [f_1(x) \vee f_2(x)] \wedge [f_1(x) \vee f_3(x)],$
 - $4^* f_1(x) \vee 0(x) = f_1(x), \quad 4^{**} f_1(x) \wedge 1(x) = f_1(x)$
- oraz dla każdego $f_1(x) \in \{f(x)\}$ istnieje $\bar{f}_1(x) \in \{f(x)\}$ takie, że:
- $5^* f_1(x) \vee \bar{f}_1(x) = 1(x), \quad 5^{**} f_1(x) \wedge \bar{f}_1(x) = 0(x).$

Zgodnie z definicją funkcji typu RB oraz definicjami dotyczącymi ich operacji boolowskich, operacje te są równoważne operacjom zbiorowym na obszarach działania tych funkcji, a zatem aksjomaty 1 do 5 są spełnione, a twierdzenie 4.5 prawdziwe.

Jeżeli funkcje składowe f_z w zależności (4.10) będą oddzielnie funkcjami dwu zmiennych rzeczywistych $f_z(x)$ i $f_z(y)$, wtedy powstała na skutek operacji boolowskich funkcja f_F będzie nazywana funkcją dwu zmiennych typu RB, czyli:

Definicja 4.9

$$f_F(x, y) = F\{f_z(x), f_z(y)\} \quad (4.14)$$

Zbiór parametrów takiej funkcji składa się z dwóch podzbiorów parametrów określonych dla każdej zmiennej oddzielnie, co można zapisać jako:

$$\langle \text{Par } f(x, y) \rangle = \langle \text{Par}_x f(x, y), \text{Par}_y f(x, y) \rangle = \langle a_1, a_2, \dots, a_k; b_1, b_2, \dots, b_l \rangle \quad (4.15)$$

Jeżeli wartości parametrów funkcji dwu zmiennych zależne są wzajemnie od tych zmiennych, czyli:

$$\langle \text{Par}_x f(x, y) \rangle = \langle a_1(y), \dots, a_k(y) \rangle, \quad (4.16)$$

$$\langle \text{Par}_y f(x, y) \rangle = \langle b_1(x), \dots, b_l(x) \rangle, \quad (4.17)$$

wtedy funkcja $f(x, y)$ nazywana będzie zgodnie z definicją 4.4 funkcją wewnętrznio uzależnioną dwu zmiennych.

Wartość własna funkcji dwóch zmiennych zależy od wartości własnych funkcji składowych każdej zmiennej według relacji:

Definicja 4.10

$$\text{Val } f(x, y) = \text{Val } f_z(x) \cdot \text{Val } f_z(y) \quad (4.18)$$

Jako elementarna rozpatrywana będzie funkcja typu RB dwóch zmiennych o postaci iloczynowej.

Definicja 4.11

$$F(x, y) = f(x) \wedge f(y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \begin{cases} x \in X_k \text{ i } y \in Y_k \\ x \in X_k \text{ i } y \notin Y_k, \text{ lub} \\ x \notin X_k \text{ i } y \in Y_k, \text{ lub} \\ x \notin X_k \text{ i } y \notin Y_k. \end{cases} \\ 0 & \text{dla } \begin{cases} x \in X_k \text{ i } y \notin Y_k, \text{ lub} \\ x \notin X_k \text{ i } y \in Y_k. \end{cases} \end{cases} \quad (4.19)$$

gdzie X_k i Y_k są „obszarami” działania funkcji $F(x, y)$ w zbiorach liczb rzeczywistych, przy czym:

$$\langle \text{Par } F(x, y) \rangle = \langle \text{Par } f(x) \cap \text{Par } f(y) \rangle = \langle a_k, b_l \rangle \quad (4.20)$$

Jeżeli $F(x, y)$ jest uzależniona wewnętrznio, to mogą zachodzić dwa przypadki.

(i) Gdy przynajmniej jeden z parametrów a_k jest zależny od zmiennej y , czyli:

$$\langle \text{Par } F(x, y) \rangle = \langle a_k(y), b_l \rangle, \quad (4.21)$$

natomiast parametry b_l są stałe. Wtedy:

Definicja 4.11a

$F(x, y) = F[a(y), y]$ jest funkcją uzależnioną wewnętrznio od zmiennej y .

(ii) Gdy przynajmniej jeden z parametrów b_l jest uzależniony od zmiennej x , czyli:

$$\langle \text{Par } F(x, y) \rangle = \langle a_k, b_l(x) \rangle \quad (4.22)$$

Wtedy:

Definicja 4.11b

$F(x, y) = F[x, b(y)]$ jest funkcją uzależnioną wewnętrznio od zmiennej x .

Operacje boolowskie na funkcjach dwu zmiennych $F(x, y)$ opisanych relacją (4.19) można przedstawić za pomocą operacji na jej składowych $f(x)$ i $f(y)$. Stąd negacją boolowską funkcji $F(x, y)$ jest funkcja:

$$\overline{F(x, y)} = \overline{f(x) \wedge f(y)} = \overline{f(x)} \vee \overline{f(y)} \quad (4.23)$$

Alternatywą dwu funkcji F_1 i F_2 jest funkcja:

$$\begin{aligned} F_3(x, y) &= F_1(x, y) \vee F_2(x, y) = \\ &= [f_1(x) \vee f_2(x)] \wedge [f_1(x) \vee f_2(y)] \wedge [f_1(y) \vee f_2(x)] \wedge [f_1(y) \vee f_2(y)] \end{aligned} \quad (4.24)$$

Oraz koniunkcją:

$$F_3(x, y) = F_1(x, y) \wedge F_2(x, y) = [f_1(x) \wedge f_2(x)] \wedge [f_1(y) \wedge f_2(y)] = f_3(x) \wedge f_4(y), \quad (4.25)$$

która ma także postać iloczynową dwóch funkcji, każda jednej zmiennej.

Niechaj funkcje składowe funkcji dwu zmiennych o postaci iloczynowej $F(x, y)$ dadzą się przedstawić jako sumy n i m składników boolowskich. Wtedy można zapisać:

$$F(x, y) = \bigcup_{k=1}^n f_k(x) \wedge \bigcup_{l=1}^m f_l(y) = \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{l=1}^m [f_k(x) \wedge f_l(y)] = \bigcup_{i=1}^{n \times m} F_i(x, y), \quad (4.26)$$

co oznacza, że $F(x, y)$ jest sumą $n \times m$ składników $F_i(x, y)$, także o postaci iloczynowej.

4.2. FORMUŁY BOOLOWSKIE ZMIENNEJ RZECZYWISTEJ

Jeżeli funkcji boolowskiej $f(x)$ zmiennej rzeczywistej x przyporządkuje się określoną wartość ze zbioru $B = \{0, 1\}$, wtedy staje się ona formułą boolowską zmiennej rzeczywistej.

Niechaj dana będzie formuła:

$$f(x) = 1 \quad (4.27)$$

Na podstawie definicji 4.1 jest ona spełniona dla wartości zmiennej rzeczywistej x należących do podzbiorów X_k , a zatem opisuje ona te podzbiory w sposób jednoznaczny.

Niech zbiory $X_1 \subset R$ oraz $X_2 \subset R$ będą opisywane przez formuły boolowskie:

$$f_1(x) = 1 \quad \text{oraz} \quad f_2(x) = 1 \quad (4.28)$$

Definicja 4.12

Dwie formuły boolowskie (4.28) są sobie równoważne, jeżeli występujące w nich funkcje boolowskie są równoważne. Zachodzi to wtedy, gdy funkcje te spełniają twierdzenie 4.1.

Wszystkie operacje wykonywane na zbiorach X_1 i X_2 mają swoje odpowiedniki w operacjach dokonywanych na opisujących je formułach.

Twierdzenie 4.6

Jeżeli $x \in X_1$, który opisuje formuła $f_1(x) = 1$, wtedy dla $x \in X_2 = R \setminus X_1$ opisuje go formuła:

$$\overline{f_1(x)} = 1 \quad (4.29)$$

Prawdziwość tego twierdzenia wynika z definicji 4.1 i 4.6, gdyż dla X_2 obowiązuje $f_1(x) = 0$, stąd po obustronnym zanegowaniu otrzymuje się (4.29). Z definicji 4.7 i 4.8 otrzymuje się natychmiast wnioski, które można sformułować w postaci twierdzeń:

Twierdzenie 4.7

Jeżeli $x \in X_1$ lub $x \in X_2$, czyli x należy do zbioru $X_3 = X_1 \cup X_2$, wtedy opisująca go formuła boolowska ma postać:

$$f_1(x) \vee f_2(x) = 1 \quad (4.30)$$

Twierdzenie 4.8

Jeżeli $x \in X_1$ i $x \in X_2$, czyli x należy do zbioru $X_3 = X_1 \cap X_2$, wtedy opisująca go formuła boolowska ma postać:

$$f_1(x) \wedge f_2(x) = 1 \quad (4.31)$$

Niechaj parametrami funkcji $f_1(x)$ i $f_2(x)$ opisujących poprzez formuły (4.28) zbiory X_1 i X_2 będą wartości:

$$\langle \text{Par } f_1(x) \rangle = \langle a_{1L}, a_{1U} \rangle \quad (4.32)$$

$$\langle \text{Par } f_2(x) \rangle = \langle a_{2L}, a_{2U} \rangle, \quad (4.33)$$

które są jednocześnie granicami zbiorów X_1 i X_2 , czyli

$$a_{1U} \geq a_{1L}, \quad (4.34)$$

$$a_{2U} \geq a_{2L}. \quad (4.35)$$

Twierdzenie 4.9

Jeżeli $x_1 \in X_1$ oraz $x_2 \in X_2$, wtedy zbiór X_3 , do którego należą wszystkie x_3 będące sumą algebraiczną zmiennych x_1 i x_2 , czyli spełniających zależność:

$$x_3 = x_1 + x_2 \quad (4.36)$$

opisuje formuła boolowska:

$$f_3(x) = 1, \quad (4.37)$$

w której $f_3(x)$ ma parametry o wartościach:

$$\langle \text{Par } f_3(x) \rangle = \langle a_{3L}, a_{3U} \rangle = \langle a_{1L} + a_{2L}, a_{1U} + a_{2U} \rangle. \quad (4.38)$$

Prawdziwość tego twierdzenia jest oczywista, gdyż najmniejszy element zbioru X_3 musi być sumą najmniejszych elementów zbiorów X_1 i X_2 , które są ich dolnymi granicami. To samo rozumowanie dotyczy elementów największych, zatem ich sumy muszą być granicami zbioru X_3 . Operację, w wyniku której otrzymuje się formułę $f_3(x) = 1$, można oznaczyć symbolem \oplus i zapisać jako:

$$f_3(x) = f_1(x) \oplus f_2(x) = 1 \quad (4.39)$$

Twierdzenie 4.10

Jeżeli $x_2 \in X_2$, wtedy zbiór X_4 , do którego należą wszystkie x_4 spełniające zależność:

$$x_4 = kx_2, \quad (4.40)$$

przy czym k jest stałą rzeczywistą, opisuje formuła boolowska: $f_4(x) = 1$, której parametry mają wartości:

$$\langle \text{Par } f_4(x) \rangle = \langle a_{4L}, a_{4U} \rangle, \quad (4.41)$$

przy czym:

$$a_{4L} = ka_{2L}, \quad a_{4U} = ka_{2U} \quad \text{dla } k \geq 0, \quad (4.42)$$

$$a_{4L} = ka_{2U}, \quad a_{4U} = ka_{2L} \quad \text{dla } k < 0. \quad (4.43)$$

Prawdziwość tego twierdzenia wynika natychmiast z nierówności (4.35) po pomnożeniu jej obustronnie przez stałą k . Kładąc $k = -1$, oraz uwzględniając to w twierdzeniu 4.9, można sformułować co następuje:

Twierdzenie 4.11

Jeżeli $x_1 \in X_1$, oraz $x_2 \in X_2$, wtedy zbiór X_3 , do którego należą wszystkie x_3 spełniające zależność algebraiczną:

$$x_3 = x_1 - x_2 \tag{4.44}$$

opisuje formuła $f_3(x) = 1$, której parametry mają wartości:

$$\left. \begin{aligned} a_{3L} &= a_{1L} - a_{2U} \\ a_{3U} &= a_{1U} - a_{2L} \end{aligned} \right\} \tag{4.45}$$

Operację tę można oznaczyć symbolem \ominus i zapisać jako:

$$f_3(x) = f_1(x) \ominus f_2(x) = 1 \tag{4.46}$$

Łącznie operacje (4.39) i (4.46) można oznaczyć symbolem \oplus . Z przedstawionych twierdzeń wynikają następujące własności operacji \wedge i \oplus :

$$f_1(x) \oplus [f_2(x) \wedge f_3(x)] = [f_1(x) \oplus f_2(x)] \wedge [f_1(x) \oplus f_3(x)] \tag{4.47}$$

$$f_1(x) \wedge [f_2(x) \oplus f_3(x)] = [f_1(x) \wedge f_2(x)] \oplus [f_1(x) \wedge f_3(x)] \tag{4.48}$$

Jeżeli funkcji boolowskiej dwóch zmiennych $F(x,y)$ o postaci iloczynowej przyporządkuje się wartość ze zbioru $B=\{0,1\}$, wtedy staje się ona formułą boolowską dwu zmiennych rzeczywistych. Niech będzie dana formuła:

$$F(x,y) = 1 \tag{4.49}$$

Na podstawie definicji 4.11 jest ona spełniona tylko dla wartości zmiennych rzeczywistych x i y należących do zbiorów X_k i Y_k , a zatem opisuje ona te zbiory w sposób jednoznaczny. Dla pary zmiennych zaciskowych (x,y) , należących do dwuwymiarowej przestrzeni kartezjańskiej $X \times Y = R^2$, formuła typu (4.49) opisuje pewien podzbiór D (obszar) tej przestrzeni, którego wszystkie punkty o współrzędnych $(x,y) \in D$ spełniają tę formułę. W tablicy 4.2 przedstawiono przykłady elementarnych ($Val=1$) formuł boolowskich dwóch zmiennych oraz kształty opisanych przez nie obszarów w przestrzeni R^2 .

Niechaj zbiory $D_1 \in R^2$ oraz $D_2 \in R^2$ będą opisane przez formuły boolowskie dwu zmiennych:

$$F_1(x,y) = 1 \quad \text{oraz} \quad F_2(x,y) = 1 \tag{4.50}$$

Tablica 4.2

Rodzaje formuł $F(x,y)=1$	Nieprzystępne	Przystępne
Uzależnione od zmiennej x	$\prod_x (a_L, a_U) \wedge \prod_y [b_L(x), b_U(x)] = 1$ 	$Sg(x-a) \wedge \prod_y [b_L(x), b_U(x)] = 1$
Uzależnione od zmiennej y	$\prod_x [a_L(y), a_U(y)] \wedge \prod_y (b_L, b_U) = 1$ 	$\prod_x [a_L(y), a_U(y)] \wedge 1(y) = 1$
Niezależne	$\prod_x (a_L, a_U) \wedge \prod_y (b_L, b_U) = 1$ 	$Sg(x-a) \wedge Sd(y-b) =$

Definicja 4.13

Dwie formuły boolowskie dwu zmiennych są sobie równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy opisane przez nie obszary są identyczne, czyli:

$$F_1(x,y) = 1 \equiv F_2(x,y) = 1 \tag{4.51}$$

dla $D_1 = D_2$.

Niechaj para (x,y) będzie punktem jednego z obszarów D_1 lub D_2 , lub D_n należących do R^2 , co oznacza:

$$(x,y) \in D_1 \text{ lub } (x,y) \in D_2 \dots \text{ lub } (x,y) \in D_n \tag{4.52}$$

Jest to równoważne relacji:

$$(x,y) \in \{D_1 \vee D_2 \vee \dots \vee D_n\} = D_0 \tag{4.53}$$

oznaczającej przynależność pary (x,y) do sumy zbiorowej obszarów D_1 do D_n . Każdą z zależności (4.52) opisuje na podstawie (4.49) formuła boolowska dwu zmiennych, dając w konsekwencji ich alternatywny zestaw o postaci:

$$\left. \begin{array}{l} F_1(x, y) = 1 \\ F_2(x, y) = 1 \\ \dots \\ F_n(x, y) = 1 \end{array} \right\} (\vee) \quad (4.54)$$

Można zatem sformułować wniosek w postaci twierdzenia:

Twierdzenie 4.12

Alternatywny zestaw n formuł boolowskich dwu zmiennych opisuje obszar $D_0 \subset R^2$ będący sumą zbiorową obszarów D_1 do D_n opisywanych przez każdą z nich oddzielnie.

Każdy dany obszar $D \subset R^2$ można przedstawić na nieskończenie wiele sposobów w postaci sumy obszarów składowych, a tym samym opisać przez nieskończenie wiele alternatywnych zestawów formuł boolowskich, przy czym niektóre z formuł składowych mogą być sobie równoważne. Dla każdego obszaru istnieje zatem opisujący go zestaw o najmniejszej liczbie formuł boolowskich, zwanej jego rzędem, przy czym pojedynczą formułę boolowską można uważać za zestaw rzędu jeden, zatem definicję 4.12 można rozszerzyć na alternatywne zestawy formuł boolowskich. W ogólnym przypadku dla formuł boolowskich zawierających funkcje uzależnione wewnętrznie rząd zestawu formuł opisujących dany obszar D zależy zarówno od zmiennej uzależniającej, jak i kształtu funkcji opisujących uzależniony parametr. Ilustruje to przykład 4.1.

Przykład 4.1

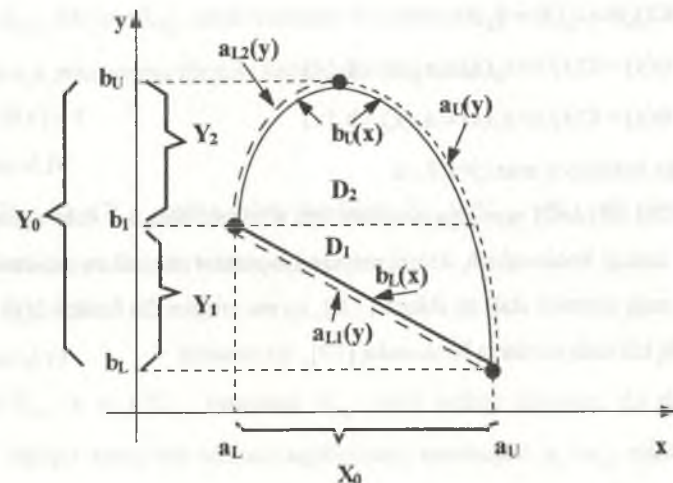
Niechaj będzie dany obszar $D_0 \subset R^2$ jak na rys. 4.1, przy czym $x \in X_0 = \langle a_L, a_U \rangle$, $y \in Y_0 = \langle b_L, b_U \rangle$.

Opisuje go formuła boolowska uzależniona wewnętrznie od zmiennej x , typu:

$$\prod_x [a_L, a_U] \wedge \prod_y [b_L(x), b_U(x)] = 1 \quad (4.55)$$

Dla uzależnienia parametrów od zmiennej y opisuje go alternatywny zestaw dwóch formuł boolowskich o postaci:

$$\left. \begin{array}{l} \prod_x [a_{L1}(y), a_U(y)] \wedge \prod_y [b_L, b_U] = 1 \\ \prod_x [a_{L2}(y), a_U(y)] \wedge \prod_y [b_1, b_U] = 1 \end{array} \right\} (\vee) \quad (4.56)$$



Rys. 4.1. Obszar pracy z przykładu 4.1

Fig. 4.1. Operating-region from the example 4.1

4.3. MACIERZE FUNKCJI BOOLOWSKICH I MACIERZOWE FORMUŁY BOOLOWSKIE

Definicja 4.14

Macierzą funkcji boolowskich $A(x)$ nazywana będzie macierz kwadratowa o wymiarze $n \times n$, której elementy należą do zbioru funkcji boolowskich $f(x)$ jednej zmiennej rzeczywistej x (funkcje typu RB), co oznacza:

$$A(x) = [a_{ij}(x)], \quad (4.57)$$

gdzie $a_{ij}(x) = f_{ij}(x)$ są funkcjami RB o wartościach własnych nie większych od jedności, czyli:

$$\forall a_{ij}(x) \leq 1 \quad (4.58)$$

Na macierzach funkcji boolowskich można wykonywać operacje boolowskie zdefiniowane przez operacje na ich elementach.

Definicja 4.15

Jeżeli $A(x) = [a_{ij}]$ i $B(x) = [b_{ij}]$ są macierzami funkcji boolowskich o wymiarach $n \times n$, to operacje boolowskie na tych macierzach są zdefiniowane następująco:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow a_{ij}(\mathbf{x}) = b_{ij}(\mathbf{x}) \quad (4.59)$$

$$\overline{\mathbf{A}(\mathbf{x})} = \mathbf{C}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow c_{ij}(\mathbf{x}) = \bar{a}_{ij}(\mathbf{x}) \quad (4.60)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow c_{ij}(\mathbf{x}) = a_{ij}(\mathbf{x}) \vee b_{ij}(\mathbf{x}) \quad (4.61)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow c_{ij}(\mathbf{x}) = a_{ij}(\mathbf{x}) \wedge b_{ij}(\mathbf{x}) \quad (4.62)$$

co zachodzi dla każdego x oraz $i, j=1, 2, \dots, n$.

Własności (4.59) do (4.62) wynikają bezpośrednio z twierdzenia 4.1 oraz definicji 4.6, 4.7 i 4.8. Macierz funkcji boolowskich, której wartości wyrazów nie zależą od zmiennej rzeczywistej x , lecz mają wartości stałe ze zbioru $\{1, 0\}$, co ma miejsce dla funkcji $1(x)$ i $0(x)$, można nazwać zwykłą lub stałą macierzą boolowską [T9], co oznacza:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}], \quad (4.63)$$

gdzie: $a_{ij} \in \{0, 1\}$.

Macierz boolowska stała o wymiarach $n \times n$ i wszystkich wyrazach równych 1 uważana będzie za macierz boolowską jednostkową

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \mathbf{1} \quad (4.64)$$

dla $a_{ij} = 1$, przy $i, j=1, 2, \dots, n$.

Jeżeli macierzy funkcji boolowskich $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ zmiennej rzeczywistej x przyporządkuje się określoną stałą macierz boolowską \mathbf{C} , wtedy staje się ona macierzową formułą boolowską zmiennej rzeczywistej x , co można zapisać:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{C} \quad (4.65)$$

Dla $\mathbf{C} = \mathbf{1}$ formuła (4.65) na podstawie definicji 4.14 jest spełniona tylko dla wartości zmiennej rzeczywistej x należących do podzbiorów $X_{ij} \subset R$, będących obszarami pracy funkcji boolowskich $f_{ij}(x)$, a zatem opisuje je ona w sposób jednoznaczny. Obszary pracy X_{ij} można ułożyć w tablicę będącą macierzą obszarów pracy poszczególnych wyrazów macierzy $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, co można zapisać:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{1} \quad \text{dla} \quad x \in X_A = [X_{ij}] \equiv x \in X_{ij} \quad (4.66)$$

Niechaj $X_a = [X_{a,ij}]$ i $X_b = [X_{b,ij}]$ będą macierzami podzbiorów funkcji boolowskich określonych formułami macierzowymi:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{1} \quad \text{i} \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{1} \quad (4.67)$$

Wszystkie operacje dokonywane na zbiorach X_a oraz X_b mają swoje odpowiedniki w operacjach dokonywanych na opisujących je formułach (4.67).

Twierdzenie 4.13

Jeżeli $x \in X_{a,ij}$, lub $x \in X_{b,ij}$, czyli x należy do zbioru $X_{c,ij} = X_{a,ij} \cup X_{b,ij}$ dla $i, j=1, 2, \dots, n$, wtedy opisująca je macierzowa formuła boolowska ma postać:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{1} \quad (4.68)$$

Twierdzenie 4.14

Jeżeli $x \in X_{a,ij}$, i $x \in X_{b,ij}$, czyli x należy do zbioru $X_{c,ij} = X_{a,ij} \cap X_{b,ij}$ dla $i, j=1, 2, \dots, n$, wtedy opisująca je macierzowa formuła boolowska ma postać:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{1} \quad (4.69)$$

Twierdzenie 4.15

Jeżeli $x_a \in X_{a,ij}$, a $x_b \in X_{b,ij}$, natomiast $X_{c,ij}$ niech będzie zbiorem, do którego należą wszystkie x_c będące sumą lub różnicą algebraiczną zmiennych x_a i x_b , czyli $x_c = x_a \pm x_b$, wtedy zbiór $X_{c,ij}$ dla $i, j=1, 2, \dots, n$ opisuje macierzowa formuła boolowska:

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \oplus \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{1} \quad (4.70)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \underline{\oplus} \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{1} \quad (4.71)$$

Działania \oplus i $\underline{\oplus}$ dla macierzy funkcji boolowskich oznaczają:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \oplus \mathbf{B}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow a_{ij}(\mathbf{x}) \oplus b_{ij}(\mathbf{x}) \quad (4.72)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \underline{\oplus} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow a_{ij}(\mathbf{x}) \underline{\oplus} b_{ij}(\mathbf{x}) \quad (4.73)$$

Prawdziwość twierdzeń 4.13, 4.14, i 4.15 wynika z twierdzeń 4.6 do 4.11. Dla macierzy funkcji boolowskich występujących w macierzowych formułach boolowskich można także zdefiniować operacje nazwane macierzową sumą i macierzowym iloczynem.

Definicja 4.16

Sumą macierzową macierzy funkcji boolowskich $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ i $\mathbf{B}(\mathbf{x})$, o wymiarach $n \times n$, nazywana będzie macierz $\mathbf{C}(\mathbf{x})$, dla której zachodzi:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \# \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow c_{ij}(\mathbf{x}) = \bigwedge_{k=1}^n [a_{ik}(\mathbf{x}) \oplus b_{kj}(\mathbf{x})] \quad (4.74)$$

dla $i, j=1, 2, \dots, n$.

Definicja 4.17

Iloczynem macierzowym macierzy funkcji boolowskich $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ i $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ nazywana będzie macierz $\mathbf{C}(\mathbf{x})$, dla której, dla $i, j=1, 2, \dots, n$, zachodzi:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) * \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow c_{ij}(\mathbf{x}) = \bigcirc_{k=1}^n [a_{ik}(\mathbf{x}) \wedge b_{kj}(\mathbf{x})] \quad (4.75)$$

Na podstawie definicji 4.16 i 4.17 w oczywisty sposób można zdefiniować potęgowanie sumacyjne macierzy funkcji boolowskich oraz potęgowanie iloczynowe macierzy funkcji boolowskich za pomocą relacji:

$$A^{*n}(x) = A(x) \# A(x) \# \dots \# A(x) \quad (4.76)$$

$$B^{*n}(x) = B(x) * B(x) * \dots * B(x) \quad (4.77)$$

Jeżeli dwie macierze funkcji boolowskich dwóch różnych zmiennych rzeczywistych $A(x)$ i $B(y)$ zwiąże się operacją boolowską (np. iloczynu) i przyporządkuje macierzy boolowskiej stałej (np. jednostkowej), otrzyma się macierzową formułę boolowską dwóch zmiennych rzeczywistych:

$$A(x) \wedge B(y) = 1 \quad (4.78)$$

Jest ona spełniona tylko dla wartości zmiennych rzeczywistych x i y należących jednocześnie do zbiorów X_{ij} i Y_{ij} , dla $ij=1\dots n$, a zatem opisuje je ona w sposób jednoznaczny. Wobec tego, że para zmiennych rzeczywistych (x,y) należy do dwuwymiarowej przestrzeni kartezjańskiej R^2 , macierzowa formuła boolowska typu (4.78) opisuje zbiór n^2 obszarów D_{ij} tej przestrzeni, których wszystkie punkty o współrzędnych $(x,y) \in D_{ij}$ spełniają tę formułę. Dodatkowo wobec założenia (4.57), granicami tych obszarów są linie proste prostopadłe do osi układu współrzędnych, czyli tak zwane obszary ortogonalne.

4.4. DOWOLNE BEZINERCYJNE DWÓJNIKI OSOBLIWE W UJĘCIU ALGEBRY FUNKCJI BOOLOWSKICH

Niechaj dany dwójnik osobliwy posiada spójny obszar pracy D na płaszczyźnie prądowo-napięciowej (i, u) , którego granice określone są relacjami:

$$u_d(i) \leq u \leq u_g(i) \quad \text{dla} \quad I_d \leq i \leq I_g \quad (4.79)$$

lub:

$$i_d(u) \leq i \leq i_g(u) \quad \text{dla} \quad U_d \leq u \leq U_g \quad (4.80)$$

Odpowiadające tym relacjom formuły boolowskie typu (4.49) mają postać:

$$\prod_u [u_d(i), u_g(i)] \wedge \prod_i [I_d, I_g] = 1 \quad (4.81)$$

$$\prod_u (U_d, U_g) \wedge \prod_i [i_d(u), i_g(u)] = 1 \quad (4.82)$$

Formuła (4.81) zawiera funkcję boolowską napięcia Π_u uzależnioną prądowo, zatem można ją nazwać postacią rezystancyjną dwójnika osobliwego. Formuła (4.82) zawiera funkcję boolowską prądu Π_i uzależnioną napięciowo, zatem można ją nazwać postacią konduktancyjną dwójnika osobliwego. Ogólnie można je zapisać jako:

$$f_u(u, i) \wedge f_i(i) = 1 \quad (4.83)$$

$$f_u(u) \wedge f_i(i, u) = 1 \quad (4.84)$$

Przykład 4.2

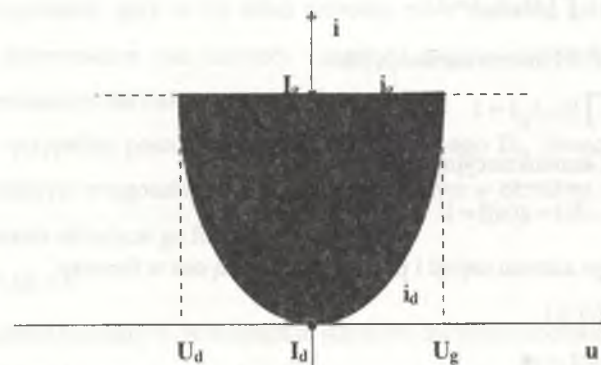
Dla dwójnika osobliwego z przykładu 3.1 obszar jego pracy D ograniczony jest liniami $i_g(u)=I_g$ oraz $i_d(u)=au^2$, co pokazano na rys. 4.2. Zakładając, że maksymalne granice obszaru napięcia nie przekroczą wartości: $U_g = \pm\sqrt{I_g/a}$ oraz $U_d = -\sqrt{I_g/a}$, wtedy opisujące ten obszar formuły boolowskie rezystancyjna i konduktancyjna wynoszą:

$$\prod_u (-\sqrt{i/a}, +\sqrt{i/a}) \wedge \prod_i (0, I_g) = 1 \quad (4.85)$$

$$\prod_u (-\sqrt{I_g/a}, +\sqrt{I_g/a}) \wedge \prod_i (au^2, I_g) = 1 \quad (4.86)$$

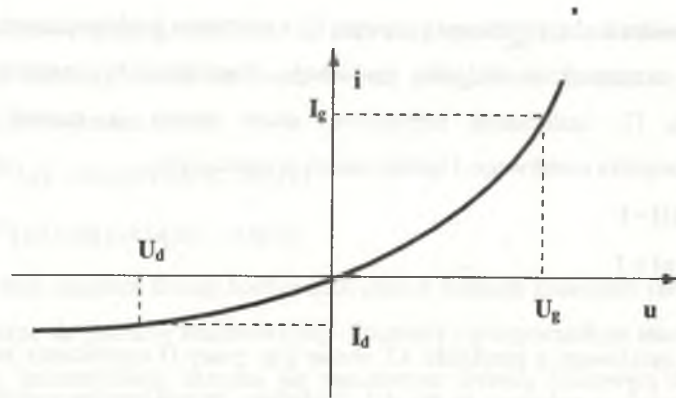
Przykład 4.3

Dany jest klasyczny element rezystancyjny w ogólnym przypadku nieliniowy o charakterystyce jak na rysunku 4.3 określonej relacjami $u = f(i)$ lub $i = g(u)$.



Rys. 4.2. Obszar pracy dwójnika osobliwego z przykładu 4.2

Fig. 4.2. Operating-region of a singular one-port from the example 4.2



Rys. 4.3. Charakterystyka klasycznego rezystancyjnego elementu nieliniowego z przykładu 4.3

Fig. 4.3. Characteristic of the classic nonlinear resistance element from the example 4.3

Dla ograniczonego zakresu napięć i prądów do wartości $U_d \leq u \leq U_g$ oraz $I_d \leq i \leq I_g$ opisująca go postać rezystancyjna formuły boolowskiej wynosi:

$$\prod_u [f(i), f(i)] \wedge \prod_i (I_d, I_g) = 1 \quad (4.87)$$

Na podstawie tablicy 4.1 można zapisać ją jako:

$$\delta[u - f(i)] \wedge \prod_i (I_d, I_g) = 1 \quad (4.88)$$

Analogicznie postać konduktancyjna wynosi:

$$\prod_u (U_d, U_g) \wedge \delta[i - g(u)] = 1 \quad (4.89)$$

Dla nieograniczonego zakresu napięć i prądów przechodzą one w formuły:

$$\delta[u - f(i)] \wedge 1(i) = 1 \quad (4.90)$$

$$1(u) \wedge \delta[i - g(u)] = 1 \quad (4.91)$$

Jeżeli przyjąć rezystancję liniową jako szczególny przypadek nieliniowej, czyli $u=Ri$ lub $i=Gu$, wtedy opisujące ją formuły boolowskie mają postać:

$$\delta(u - Ri) \wedge 1(i) = 1 \quad (4.92)$$

$$1(u) \wedge \delta(i - gu) = 1 \quad (4.93)$$

Jeżeli dwójnik osobliwy posiada obszar pracy ograniczony liniami prostymi równoległymi do osi układu u - i o kształcie uogólnionego prostokąta (linie te mogą się pokrywać lub leżeć w nieskończoności) zwanym dalej obszarem ortogonalnym, wtedy napiecia i prądy na jego zaciskach należą do zakresów:

$$\mathcal{E}_d \leq u \leq \mathcal{E}_g \quad \text{oraz} \quad \mathcal{I}_d \leq i \leq \mathcal{I}_g \quad (4.94)$$

Opisujące go rezystancyjna i konduktancyjna formuły boolowskie są identyczne, gdyż nie zawierają elementarnych funkcji boolowskich uzależnionych od dwóch zmiennych rzeczywistych i oraz u . Dwójnik osobliwy ortogonalny opisuje zatem jedna formuła boolowska o postaci:

$$\prod_u (\mathcal{E}_d, \mathcal{E}_g) \wedge \prod_i (\mathcal{I}_d, \mathcal{I}_g) = 1 \quad (4.95)$$

lub ogólnie:

$$g(u) \wedge f(i) = 1, \quad (4.96)$$

gdzie: $g(u)$ i $f(i)$ są funkcje boolowskie zmiennych rzeczywistych i oraz u .

4.5. ORTOGONALNE DWÓJNIKI OSOBLIWE W UJĘCIU ALGEBRY FUNKCJI I MACIERZY BOOLOWSKICH

Jak zaznaczono w rozdziale 1, ortogonalne dwójniki osobliwe pełnią ważną rolę w teorii obwodów elektrycznych, gdyż w ich skład wchodzi takie elementy, jak przerwa, zwarcie, idealne źródła autonomiczne oraz nullatory i noratory, a także idealne diody oraz elementy aktywne o ograniczonym zakresie wartości napięć i prądów.

W ogólnym przypadku poszukiwanie dwójnika osobliwego D_o , równoważnego n danym dwójnikom osobliwym ortogonalnym D_1, D_2, \dots, D_n połączonym w określony sposób, sprowadza się do poszukiwania opisującej go formuły boolowskiej:

$$g_o(u) \wedge f_o(i) = 1 \quad (4.97)$$

na podstawie formuł opisujących poszczególne składowe dwójniki osobliwe ortogonalne:

$$\left. \begin{aligned} g_1(u) \wedge f_1(i) &= 1 \\ \dots \dots \dots \\ g_k(u) \wedge f_k(i) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (4.98)$$

Niechaj dana będzie sieć w -węzłowa w ogólności nieszerogowo-równoległa, zbudowana z n gałęzi będących dwójnikami osobliwymi. Dla wybranych dwóch węzłów α i β jako zacisków wejściowych odpowiada jej $p=n-w+2$ równań typu (3.65) wiążących napięcie na zaciskach α i β z napięciami na poszczególnych gałęziach oraz $r=2^{w-2}$ równań typu (3.66) wiążących prąd wyróżnionych zacisków α i β z prądami wszystkich gałęzi.

Twierdzenie 4.16

Sieć tę widzianą jako dwójnik na zaciskach α i β opisuje formuła boolowska:

$$g_{\alpha\beta}(u) \wedge f_{\alpha\beta}(i) = 1, \tag{4.99}$$

przy czym:

$$g_{\alpha\beta}(u) = \bigwedge_{j=1}^p \bigoplus_{k=1}^{b_j} g_{kj}(u), \tag{4.100}$$

gdzie: b_j jest ilością gałęzi w j -tej drodze łączącej zaciski α i β , natomiast:

$$f_{\alpha\beta}(i) = \bigwedge_{j=1}^r \bigoplus_{k=1}^{\gamma_j} f_{kj}(i), \tag{4.101}$$

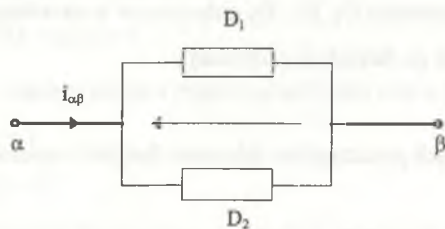
gdzie: γ_j jest ilością gałęzi w i -tym przekroju rozdzielającym węzły α i β .

Przykład 4.4

Należy znaleźć równoważny dwójnik zastępczy dla dwóch dwójników osobliwych ortogonalnych D_1 i D_2 połączonych równolegle jak na rys. 4.4 i opisanych formułami:

$$D_1: g_1(u) \wedge f_1(i) = 1 \tag{4.102}$$

$$D_2: g_2(u) \wedge f_2(i) = 1 \tag{4.103}$$



Rys. 4.4. Ortogonalne dwójniki osobliwe połączone równolegle z przykładu 4.4

Fig. 4.4. Parallel orthogonal singular one-ports from the example 4.4

W układzie tym występują dwie jednogałęziowe drogi przejścia, łączące węzły α i β , stąd na podstawie (4.100) otrzymuje się:

$$g_{\alpha\beta}(u) = \bigwedge_{j=1}^2 \bigoplus_{k=1}^1 g_{kj}(u), \tag{4.104}$$

czyli:

$$g_{\alpha\beta}(u) = g_1(u) \wedge g_2(u). \tag{4.105}$$

Występuje także jeden dwugałęziowy przekrój rozdzielający węzły α i β , stąd na podstawie (4.101) otrzymuje się:

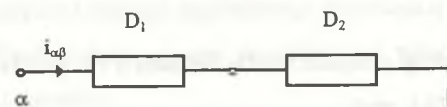
$$f_{\alpha\beta}(i) = \bigwedge_{j=1}^1 \bigoplus_{k=1}^2 f_{kj}(i), \tag{4.106}$$

czyli:

$$f_{\alpha\beta}(i) = f_1(i) \oplus f_2(i). \tag{4.107}$$

Przykład 4.5

Należy znaleźć równoważny dwójnik zastępczy dla dwóch dwójników osobliwych ortogonalnych połączonych szeregowo jak na rys. 4.5.



Rys. 4.5. Dwójniki połączone szeregowo z przykładu 4.5

Fig. 4.5. One-ports series connection from the example 4.5

W układzie tym występuje jedna dwugałęziowa droga przejścia oraz dwa przekroje jednogałęziowe, więc:

$$g_{\alpha\beta}(u) = \bigwedge_{j=1}^1 \bigoplus_{k=1}^2 g_{kj}(u), \tag{4.108}$$

czyli:

$$g_{\alpha\beta}(u) = g_1(u) \oplus g_2(u) \tag{4.109}$$

Oraz:

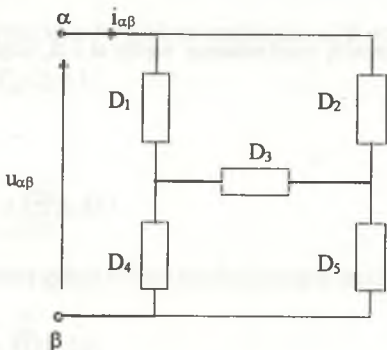
$$f_{\alpha\beta}(i) = \bigwedge_{j=1}^2 \bigoplus_{k=1}^1 f_{kj}(i), \tag{4.110}$$

czyli:

$$f_{\alpha\beta}(i) = f_1(i) \wedge f_2(i) \quad (4.111)$$

Przykład 4.6

Określić równoważny dwójnik zastępczy dla danych pięciu ortogonalnych dwójników osobliwych połączonych w układ mostkowy i opisanych jak na rys. 4.6.



Rys. 4.6. Układ mostkowy pięciu dwójników osobliwych z przykładu 4.6

Fig. 4.6. Bridge network containing five singular one-ports from the example 4.6

W układzie tym istnieją cztery drogi przejścia między węzłami α i β : $p_1=\{D_1, D_4\}$, $p_2=\{D_1, D_3, D_5\}$, $p_3=\{D_2, D_3, D_4\}$, $p_4=\{D_2, D_5\}$, stąd:

$$g_{\alpha\beta}(u) = \bigwedge_{j=1}^4 \bigoplus_{k=1}^{h_j} g_{kj}(u), \quad (4.112)$$

czyli:

$$g_{\alpha\beta}(u) = [g_1(u) \oplus g_4(u)] \wedge [g_1(u) \oplus g_3(u) \oplus g_5(u)] \wedge [g_2(u) \oplus g_3(u) \oplus g_4(u)] \wedge [g_2(u) \oplus g_5(u)]. \quad (4.113)$$

Można także wyróżnić cztery przekroje: $r_1=\{D_1, D_2\}$, $r_2=\{D_2, D_3, D_4\}$, $r_3=\{D_1, D_3, D_5\}$, $r_4=\{D_4, D_5\}$, stąd:

$$f_{\alpha\beta}(i) = \bigwedge_{j=1}^4 \bigoplus_{k=1}^{r_j} f_{kj}(i), \quad (4.114)$$

czyli:

$$f_{\alpha\beta}(i) = [f_1(i) \oplus f_2(i)] \wedge [f_2(i) \oplus f_3(i) \oplus f_4(i)] \wedge [f_1(i) \oplus f_3(i) \oplus f_5(i)] \wedge [f_4(i) \oplus f_5(i)]. \quad (4.115)$$

Tablica 4.3

$f(i)\backslash f(u)$	$\delta(u)$	$Sd(u)$	$Sg(u)$	$1(u)$
$\delta(i)$				
$Sd(i)$				
$Sg(i)$				
$1(i)$				

Najbardziej podstawową grupę ortogonalnych dwójników osobliwych stanowią te, których obszary pracy składają się z jednego uogólnionego prostokąta o granicach tylko w zerze lub w nieskończoności. Przedstawione są one w tabelcy 4.3 wraz z opisującymi je funkcjami boolowskimi prądu i napięcia.

Dwójniki narożne tej tabelcy opisane tylko funkcjami $\delta(x)$ i $1(x)$ stanowią najbardziej elementarny zbiór dwójników osobliwych nazwany Θ , zawierający przerwę, zwarcie, nullator i norator. Operacje \wedge oraz \oplus wykonywane na tych funkcjach nie dają w wyniku innych rodzajów funkcji boolowskich zgodnie z tabelcami 4.4 i 4.5.

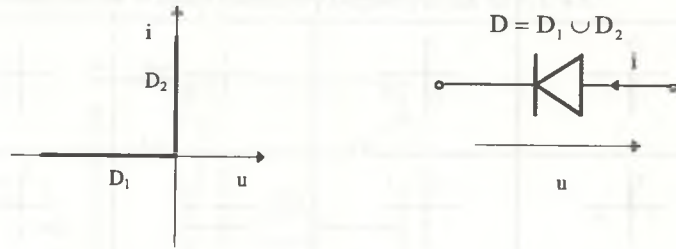
Tablica 4.4

\wedge	$\delta(x)$	$1(x)$
$\delta(x)$	$\delta(x)$	$\delta(x)$
$1(x)$	$\delta(x)$	$1(x)$

Tablica 4.5

\oplus	$\delta(x)$	$1(x)$
$\delta(x)$	$\delta(x)$	$1(x)$
$1(x)$	$1(x)$	$1(x)$

Własność ta pozwala odwzorować zbiór tych funkcji w jednowymiarową przestrzeń boolowską $\{0,1\}$, przy czym operacji \oplus odpowiada operacja sumy boolowskiej. Aby otrzymać pozostałe dwójniki osobliwe przedstawione w tabelicy 4.3, należy wprowadzić idealną diodę o obszarze pracy złożonym z dwóch elementarnych obszarów ortogonalnych D_1 i D_2 (rys. 4.7).



Rys. 4.7. Idealna dioda jako dwuobszarowy osobliwy dwójnik ortogonalny
Fig. 4.7. Ideal diode as a singular orthogonal one-port with a two-operating-regions

Opisuje ją wtedy alternatywny zestaw dwóch formuł boolowskich o postaci:

$$\left. \begin{aligned} D_1: & Sd(u) \wedge \delta(i) = 1 \\ D_2: & \delta(u) \wedge Sg(i) = 1 \end{aligned} \right\} D \quad (4.116)$$

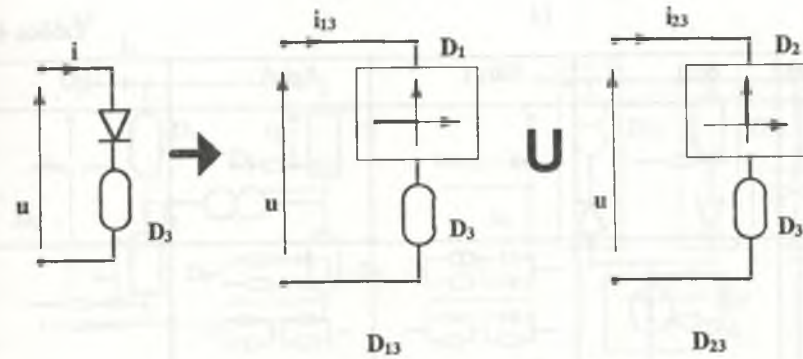
W zestawie tym każda formuła boolowska opisuje oddzielnie elementarny ortogonalny obszar pracy.

Jak pokazano w rozdziale 3 (twierdzenie 3.9) oraz w pracy [T12], dla dwójników osobliwych o obszarze pracy D_0 złożonym z sumy zbiorowej $D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k$ kilku obszarów pracy operacje wykonywane na każdym z obszarów składowych dają w konsekwencji k nowych obszarów pracy, których suma zbiorowa $D'_1 \cup D'_2 \cup \dots \cup D'_k$ opisuje nowy obszar pracy dwójnika D_0' . Stąd połączenie idealnej diody z innym dwójnikiem osobliwym D_3 można traktować jako oddzielne połączenie D_1 z D_3 plus zbiorowo D_2 z D_3 .

Dla przykładu rozpatrzone będzie połączenie szeregowe diody z nullatorem (rys. 4.8).

Równoważne jest ono połączeniu szeregowemu dwójników D_1 i D_3 lub D_2 i D_3 . Na podstawie twierdzenia 4.16 i tabelicy 4.3 otrzymuje się:

$$\left. \begin{aligned} D_{13}: & [\delta(u) \oplus Sd(u)] \wedge [\delta(i_{13}) \wedge \delta(i_{13})] = 1 \\ D_{23}: & [\delta(u) \oplus \delta(u)] \wedge [Sg(i_{23}) \wedge \delta(i_{23})] = 1 \end{aligned} \right\} \quad (4.117) \text{ i } (4.118)$$



Rys. 4.8. Połączenie szeregowe nullatora i idealnej diody
Fig. 4.8. Nullator and ideal diode connected in series

Stąd na podstawie własności operacji \oplus i \wedge otrzymuje się:

$$\left. \begin{aligned} D_{13}: & Sd(u) \wedge \delta(i_{13}) = 1 \\ D_{23}: & \delta(u) \wedge \delta(i_{23}) = 1 \end{aligned} \right\} \quad (4.119) \text{ i } (4.120)$$

Obszar D_{23} jako punkt w środku układu współrzędnych mieści się w obszarze D_{13} , zatem ich suma zbiorowa równa jest obszarowi D_{13} . Stąd połączenie szeregowe nullatora z idealną diodą daje dwójnik osobliwy o obszarze pracy przedstawionym w pierwszym wierszu i drugiej kolumnie tabelicy 4.3. Podobnie postępując można wykazać, że pozostałe dwójniki z tabelicy 4.3 są także kombinacją połączeń szeregowych lub równoległych idealnej diody z nullatorem i noratorem, co pokazano w tabelicy 4.6.

Operacje \oplus i \wedge na funkcjach $\delta(x)$, $Sd(x)$, $Sg(x)$ i $l(x)$ opisujących diodowe dwójniki osobliwe z tabelic 4.3 i 4.6 dają w wyniku tylko te funkcje zgodnie z zależnościami pokazanymi w tabelicach 4.7 i 4.8.

Własność ta pozwala odwzorować zbiór tych funkcji w dwuwymiarową przestrzeń boolowską $\{0,1\}^2$ [T8, T12], przy czym operacji \oplus odpowiada operacja sumy logicznej. Zbiór dwójników osobliwych o tej własności można nazwać zbiorem dwójników ortogonalnych klasy Θ_2 . Dalszym rozszerzeniem zbioru dwójników osobliwych ortogonalnych są źródła autonomiczne, napięciowe E opisane formułą:

$$\delta(u - E) \wedge l(i) = 1 \quad (4.121)$$

Tablica 4.6

$f(i) \setminus f(u)$	$\delta(u)$	$Sd(u)$	$Sg(u)$	$1(u)$
$\delta(i)$				
$Sd(i)$				
$Sg(i)$				
$1(i)$				

oraz prądowe J, opisane formułą:

$$1(u) \wedge \delta(i - J) = 1 \quad (4.122)$$

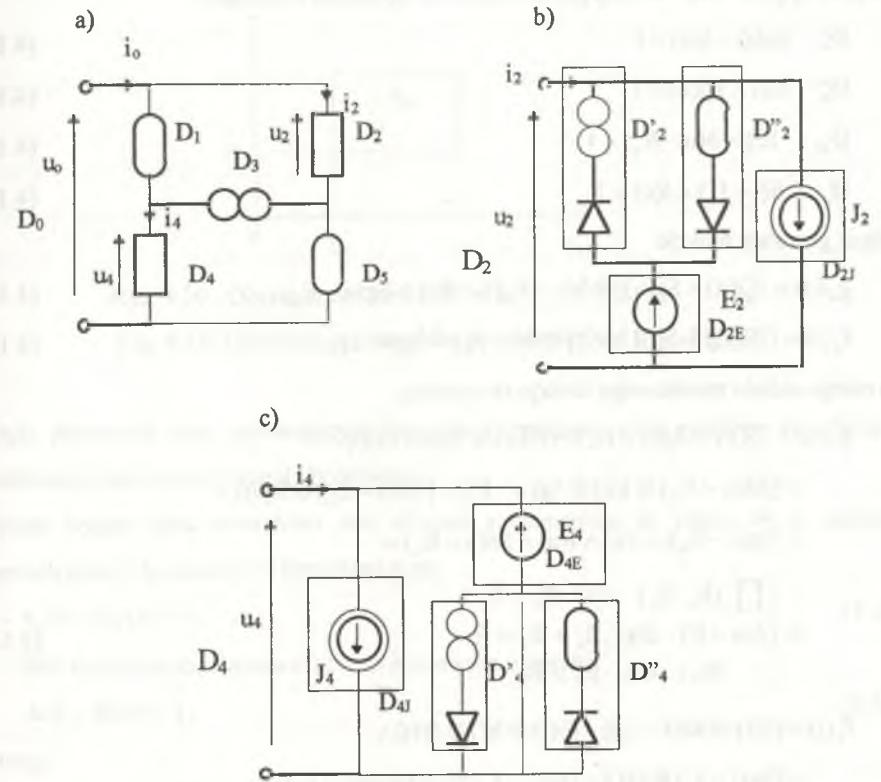
Tablica 4.7

\wedge	$\delta(x)$	$Sd(x)$	$Sg(x)$	$1(x)$
$\delta(x)$	$\delta(x)$	$\delta(x)$	$\delta(x)$	$\delta(x)$
$Sd(x)$	$\delta(x)$	$Sd(x)$	$\delta(x)$	$Sd(x)$
$Sg(x)$	$\delta(x)$	$\delta(x)$	$Sg(x)$	$Sg(x)$
$1(x)$	$\delta(x)$	$Sd(x)$	$Sg(x)$	$1(x)$

Tablica 4.8

\wedge	$\delta(x)$	$Sd(x)$	$Sg(x)$	$1(x)$
$\delta(x)$	$\delta(x)$	$Sd(x)$	$Sg(x)$	$1(x)$
$Sd(x)$	$Sd(x)$	$Sd(x)$	$1(x)$	$1(x)$
$Sg(x)$	$Sg(x)$	$1(x)$	$Sg(x)$	$1(x)$
$1(x)$	$1(x)$	$1(x)$	$1(x)$	$1(x)$

Połączenia ich z dwójkami zbioru Θ_2 pozwalają uzyskać wszystkie możliwe jednoobszarowe ortogonalne dwójniki osobliwe oznaczone jako zbiór Θ . Jedną z możliwych postaci kanonicznych dwójnika ze zbioru Θ jest obwód pokazany na rys. 1.12 w rozdziale 1. Można go przedstawić w postaci połączenia mostkowego pięciu dwójków osobliwych jak na rys. 4.9a. Układ ten umożliwi poprzez dobór zarówno samych dwójków D_2 i D_4 , jak i wartości wydajności źródeł dowolnie kształtować położenie granic obszaru działania D_0 zastępczego dwójnika osobliwego.



Rys. 4.9. Układ z rys. 1.12 jako połączenie mostkowe pięciu dwójków osobliwych
Fig. 4.9. Circuit of Fig. 1.12 as a five singular one-ports bridge connection

Dwójnik D_2 (rys. 4.9b) utworzony jest z połączenia czterech dwójków opisanych formułami:

$$D'_2: Sd(i) \wedge 1(u) = 1 \quad (4.123)$$

$$D''_2: \delta(i) \wedge Sd(u) = 1 \quad (4.124)$$

$$D_{2J}: \delta(i - J_2) \wedge 1(u) = 1 \quad (4.125)$$

$$D_{2E}: 1(i) \wedge \delta(u - E_2) = 1 \quad (4.126)$$

Opisują go zatem funkcje:

$$g_2(u) = \{[1(u) \wedge Sd(u)] \oplus \delta(u - E_2)\} \wedge 1(u) = Sd(u - E_2) \quad (4.127)$$

$$f_2(i) = \{[Sd(i) \oplus \delta(i)] \wedge 1(i)\} \oplus \delta(i - J_2) = Sd(i - J_2) \quad (4.128)$$

Dwójnik D_4 (rys. 4.9c) złożony jest z dwójników opisanych formułami:

$$D'_4: \text{Sg}(i) \wedge l(u) = 1 \quad (4.129)$$

$$D''_4: \delta(i) \wedge \text{Sg}(u) = 1 \quad (4.130)$$

$$D_{4E}: l(i) \wedge \delta(u - E_4) = 1 \quad (4.131)$$

$$D_{4J}: \delta(i - J_4) \wedge l(u) = 1 \quad (4.132)$$

Opisują go zatem funkcje:

$$g_4(u) = \{[l(u) \wedge \text{Sg}(u)] \oplus \delta(u - E_4)\} \wedge l(u) = \text{Sg}(u - E_4) \quad (4.133)$$

$$f_4(i) = \{[\text{Sg}(i) \oplus \delta(i)] \wedge l(i)\} \oplus \delta(i - J_4) = \text{Sg}(i - J_4) \quad (4.134)$$

Dla całego układu mostkowego funkcje te wynoszą:

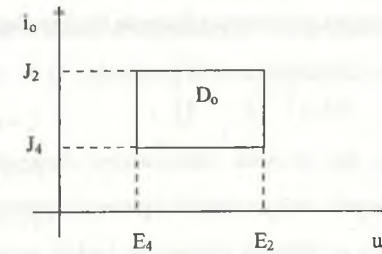
$$\begin{aligned} g_o(u) &= [\delta(u) \oplus \text{Sg}(u - E_4)] \wedge [\delta(u) \oplus l(u) \oplus \delta(u)] \wedge \\ &\wedge [\text{Sd}(u - E_2) \oplus l(u) \oplus \text{Sg}(u - E)] \wedge [\text{Sd}(u - E_2) \oplus \delta(u)] = \\ &= \text{Sg}(u - E_4) \wedge l(u) \wedge l(u) \wedge \text{Sd}(u - E_2) = \\ &= \begin{cases} \prod_u(E_4, E_2) & \text{dla } E_4 < E_2 \\ \delta(u - E) & \text{dla } E_4 = E_2 = E \\ 0(u) & \text{dla } E_4 > E_2 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.135)$$

$$\begin{aligned} f_o(i) &= [\delta(i) \oplus \text{Sd}(i - J_2)] \wedge [\delta(i) \oplus l(i) \oplus \delta(i)] \wedge \\ &\wedge [\text{Sg}(i - J_4) \oplus \delta(i)] \wedge [\text{Sd}(i - J_2) \oplus l(i) \oplus \text{Sg}(i - J_4)] = \\ &= \text{Sd}(i - J_2) \wedge l(i) \wedge \text{Sg}(i - J_4) \wedge l(i) = \\ &= \begin{cases} \prod_i(J_4, J_2) & \text{dla } J_4 < J_2 \\ \delta(i - J) & \text{dla } J_4 = J_2 = J \\ 0(i) & \text{dla } J_4 > J_2 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.136)$$

Formuła boolowska opisująca całą sieć ma postać:

$$D_o: \prod_u(E_4, E_2) \wedge \prod_i(J_4, J_2) = 1 \quad (4.137)$$

a odpowiadający jej obszar pracy przedstawia rys. 4.10.



Rys. 4.10. Obszar pracy sieci z rys. 4.9

Fig. 4.10. Operating region of the network derived from Fig. 4.9

Opis złożonych sieci zawierających dowolne ortogonalne sieci osobliwe ze zbioru Θ umożliwiają macierzowe formuły boolowskie.

Niech będzie dana n -węzłowa sieć złożona z elementów ze zbioru Θ , o zadanych obszarach pracy D_k , opisanych formułami typu:

$$a_k(i) \wedge b_k(u) = 1. \quad (4.138)$$

Sieć tę opisuje macierzowa formuła boolowska o postaci:

$$\mathbf{A}(i) \wedge \mathbf{B}(u) = 1, \quad (4.139)$$

w której:

$\mathbf{A}(i) = [a_{ij}(i)]$ - macierz prądowych funkcji boolowskich opisujących przez formułę (4.138) gałęziowe dwójniki osobliwe, przy czym $a_{ij}(i)$ jest funkcją boolowską dwójnika osobliwego w gałęzi łączącej węzeł i -ty z j -tym, zwana inaczej *macierzą prądowych połączeń bezpośrednich*, w której $a_{ij}(i) = 1(i)$ dla $i=j$ oraz $a_{ji}(i) = a_{ij}(-i)$ dla $i \neq j$,

$\mathbf{B}(u) = [b_{ij}(u)]$ - macierz napięciowych funkcji boolowskich opisujących przez formułę (4.138) gałęziowe dwójniki osobliwe, przy czym $b_{ij}(u)$ jest funkcją boolowską dwójnika osobliwego w gałęzi łączącej węzeł i -ty z j -tym, zwana inaczej *macierzą napięciowych połączeń bezpośrednich*, w której $b_{ij}(u) = \delta(u)$ dla $i=j$ oraz $b_{ji}(u) = b_{ij}(-u)$ dla $i \neq j$.

Macierze $\mathbf{A}(i)$, $\mathbf{B}(u)$ połączeń bezpośrednich, jak wynika z ich definicji, można otrzymać natychmiast ze znajomości par funkcji boolowskich występujących w formułach (4.138) opisujących dwójniki osobliwe poszczególnych gałęzi. Wyrazy macierzy $\mathbf{A}(i)$, $\mathbf{B}(u)$ znajdujące się na głównej przekątnej opisują połączenie każdego węzła z "samym sobą" jako uogólniony przypadek zwarcia, który zgodnie z tabelicą 4.3 opisuje formuła $\delta(u) \wedge l(i) = 1$.

Dla najprostszej sieci osobliwej o dwóch węzłach, jaką stanowi dwójnik opisany funkcjami $f(u)$ i $f(i)$, można określić opisującą go macierzową formułę boolowską o postaci:

$$\begin{bmatrix} 1(i) & f(i) \\ f(-i) & 1(i) \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \delta(u) & f(u) \\ f(-u) & \delta(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.140)$$

Jeżeli dwójnikiem osobliwym jest dwójnik równoważny dwuzaciskowej sieci osobliwej złożonej z n dwójników osobliwych ortogonalnych opisanych poprzez formuły boolowskie funkcjami $a_k(i)$, $b_k(u)$, to opisująca go formuła boolowska będzie zawierać funkcje $\alpha(i)$ i $\beta(u)$ powstałe z a_k i b_k przez działanie operacji \oplus i \wedge , co można zapisać jako:

$$\alpha(i) = \alpha[a_k(i)] = \left(\bigoplus \bigwedge \right) a_k(i) \quad (4.141)$$

$$\beta(u) = \beta[b_k(u)] = \left(\bigoplus \bigwedge \right) b_k(u) \quad (4.142)$$

gdzie $k=1,2,\dots,n$.

Odpowiadająca jej macierzowa formuła boolowska ma wtedy postać:

$$\begin{bmatrix} 1(i) & \alpha[a_k(i)] \\ \alpha[a_k(-i)] & 1(i) \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \delta(u) & \beta[b_k(u)] \\ \beta[b_k(-u)] & \delta(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.143)$$

Sieć osobliwą ortogonalną złożoną z n węzłów można zastąpić dwójnikami równoważnymi na p sposobów, przy czym:

$$p = \frac{n^2 - n}{2} \quad (4.144)$$

Opisuje ją zatem p par funkcji boolowskich, które są poprzez operacje \oplus i \wedge zależne od wszystkich funkcji boolowskich opisujących dwójniki gałęziowe. Na podstawie ich znajomości można utworzyć macierzową formułę boolowską pełnych połączeń opisującą daną sieć o postaci:

$$\mathbf{K}(i) \wedge \mathbf{N}(u) = \mathbf{1}, \quad (4.145)$$

w której:

$\mathbf{K}(i)=[\alpha_{ij}(i)]$ - macierz prądowych funkcji boolowskich opisujących dwójnik równoważny n -węzłowej sieci osobliwej widziany na zaciskach i, j , zwana *macierzą prądową pełnych połączeń* sieci,

$\mathbf{N}(u)=[\beta_{ij}(u)]$ - macierz napięciowych funkcji boolowskich opisujących dwójnik równoważny n -węzłowej sieci osobliwej widziany na zaciskach i, j , zwana *macierzą napięciową pełnych połączeń* sieci.

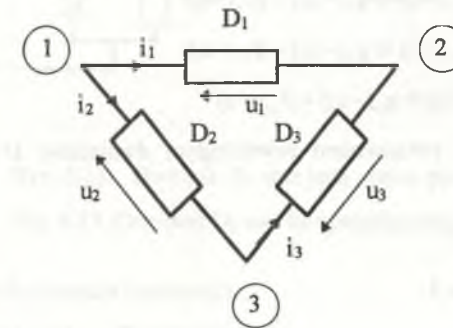
Przykład 4.7

Dana jest sieć złożona z trzech ortogonalnych dwójników osobliwych połączonych w trójkąt i opisanych jak na rys. 4.11, określonych formułami boolowskimi:

$$D_1: g_1(u) \wedge f_1(i) = 1 \quad (4.146)$$

$$D_2: g_2(u) \wedge f_2(i) = 1 \quad (4.147)$$

$$D_3: g_3(u) \wedge f_3(i) = 1 \quad (4.148)$$



Rys. 4.11. Układ dwójników z przykładu 4.7

Fig. 4.11. One-ports connection from the example 4.7

Odpowiadające jej macierze prądowa i napięciowa połączeń bezpośrednich mają postać:

$$\mathbf{A}(i) = \begin{bmatrix} 1(i) & f_1(i) & f_3(i) \\ f_1(-i) & 1(i) & f_2(-i) \\ f_3(-i) & f_2(i) & 1(i) \end{bmatrix} \quad (4.149)$$

$$\mathbf{B}(u) = \begin{bmatrix} \delta(u) & g_1(u) & g_3(u) \\ g_1(-u) & \delta(u) & g_2(-u) \\ g_3(-u) & g_2(u) & \delta(u) \end{bmatrix} \quad (4.150)$$

Na podstawie reguł szeregowego i równoległego łączenia elementów osobliwych, wyprowadzonych w przykładach 4.4 i 4.5, wyrazy prądowej macierzy pełnych połączeń $\mathbf{K}(i)$ danej sieci otrzymuje się z relacji:

$$\alpha_{12}(i) = f_1(i) \oplus [f_2(i) \wedge f_3(i)] \quad (4.151)$$

$$\alpha_{13}(i) = f_3(i) \oplus [f_1(i) \wedge f_2(-i)] \quad (4.152)$$

$$\alpha_{23}(i) = f_2(-i) \oplus [f_1(-i) \wedge f_3(i)] \quad (4.153)$$

$$\alpha_{21}(i) = f_1(-i) \oplus [f_2(-i) \wedge f_3(-i)] = \alpha_{12}(-i) \quad (4.154)$$

$$\alpha_{32}(i) = f_2(i) \oplus [f_1(i) \wedge f_2(-i)] = \alpha_{23}(-i) \quad (4.155)$$

$$\alpha_{31}(i) = f_3(-i) \oplus [f_2(i) \wedge f_1(-i)] = \alpha_{13}(-i) \quad (4.156)$$

Wyraży napięciowej macierzy pełnych połączeń $N(u)$ mają wartości:

$$\beta_{12}(u) = g_1(u) \wedge [g_2(u) \oplus g_3(u)]$$

$$\beta_{13}(u) = g_3(u) \wedge [g_1(u) \oplus g_2(-u)]$$

$$\beta_{23}(u) = g_2(-u) \wedge [g_1(-u) \oplus g_3(u)]$$

$$\beta_{21}(u) = g_1(-u) \wedge [g_2(-u) \oplus g_3(-u)] = \beta_{12}(-u) \quad (4.157)$$

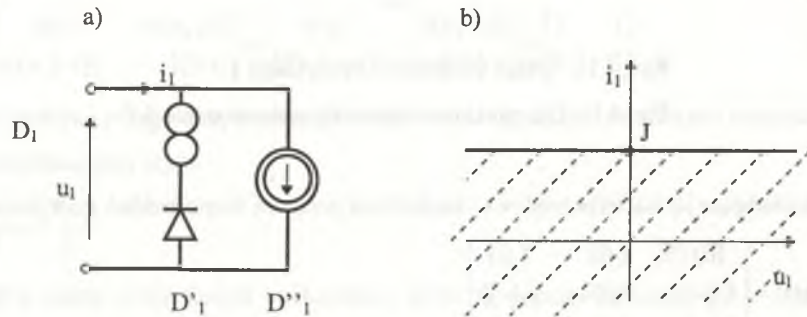
$$\beta_{31}(u) = g_3(-u) \wedge [g_1(-u) \oplus g_2(-u)] = \beta_{13}(-u) \quad (4.158)$$

$$\beta_{32}(u) = g_2(u) \wedge [g_1(u) \oplus g_3(-u)] = \beta_{23}(-u) \quad (4.159)$$

Niechaj dwójnik D_1 jest połączeniem równoległym dwójników D'_1 i D''_1 (rys. 4.12), opisanych formułami:

$$D'_1: Sd(i) \wedge l(u) = 1 \quad (4.160)$$

$$D''_1: \delta(i - J) \wedge l(u) = 1 \quad (4.161)$$



Rys. 4.12. Dwójnik D_1 oraz jego obszar pracy
Fig. 4.12. One-port D_1 and its operating-region

Obszar jego pracy, pokazany na rys. 4.12b określa formuła boolowska:

$$D_1 = D'_1 // D''_1: [Sd(i) \oplus \delta(i - J)] \wedge [l(u) \wedge l(u)] = 1,$$

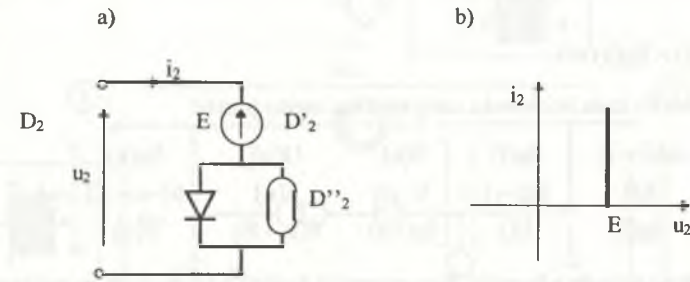
czyli:

$$D_1: Sd(i - J) \wedge l(u) = 1. \quad (4.162)$$

Niechaj dwójnik D_2 jest połączeniem szeregowym dwóch dwójników D'_2 i D''_2 (rys. 4.13) opisanych formułami boolowskimi:

$$D'_2: l(i) \wedge \delta(u - E) = 1 \quad (4.163)$$

$$D''_2: Sg(i) \wedge \delta(u) = 1 \quad (4.164)$$



Rys. 4.13. Dwójnik D_2 oraz jego obszar pracy
Fig. 4.13. One-port D_2 and its operating-region

Obszar jego pracy określa formuła boolowska:

$$D_2: [l(i) \wedge Sg(i)] \wedge [\delta(u - E) \oplus \delta(u)] = 1,$$

czyli:

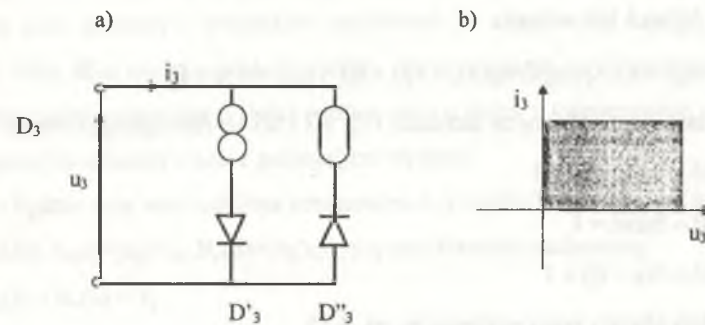
$$D_2: Sg(i) \wedge \delta(u - E) = 1, \quad (4.165)$$

który pokazano na rys. 4.13b.

Dwójnik D_3 niechaj będzie połączeniem równoległym dwóch dwójników D'_3 i D''_3 (rys. 4.14a), opisanych formułami:

$$D'_3: Sg(i) \wedge l(u) = 1 \quad (4.166)$$

$$D''_3: \delta(i) \wedge Sg(u) = 1 \quad (4.167)$$



Rys. 4.14. Dwójnik D_3 oraz jego obszar pracy
Fig. 4.14. One-port D_3 and its operating-region

Obszar jego pracy określa formuła:

$$D_3: [\text{Sg}(i) \oplus \delta(i)] \wedge [1(u) \wedge \text{Sg}(u)] = 1,$$

czyli:

$$D_3: \text{Sg}(i) \wedge \text{Sg}(u) = 1. \quad (4.168)$$

Macierzowa formuła boolowska całej sieci ma zatem postać:

$$\begin{bmatrix} 1(i) & \text{Sd}(i - J) & \text{Sg}(i) \\ \text{Sd}(-i - J) & 1(i) & \text{Sg}(-i) \\ \text{Sg}(-i) & \text{Sg}(i) & 1(i) \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \delta(u) & 1(u) & \text{Sg}(u) \\ 1(-u) & \delta(u) & \delta(-u - E) \\ \text{Sg}(-u) & \delta(u - E) & \delta(u) \end{bmatrix} = 1 \quad (4.169)$$

Z formuły tej na podstawie własności elementarnych funkcji boolowskich przedstawionych w dodatku 4.6 otrzymuje się postać uproszczoną macierzowej formuły połączeń bezpośrednich przykładowej sieci:

$$\begin{bmatrix} 1(i) & \text{Sd}(i - J) & \text{Sg}(i) \\ \text{Sd}(i + J) & 1(i) & \text{Sd}(i) \\ \text{Sd}(i) & \text{Sg}(i) & 1(i) \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \delta(u) & 1(u) & \text{Sg}(u) \\ 1(u) & \delta(u) & \delta(u + E) \\ \text{Sd}(u) & \delta(u - E) & \delta(u) \end{bmatrix} = 1 \quad (4.170)$$

Wyrazy macierzy $\mathbf{K}(i)$ i $\mathbf{N}(u)$ połączeń pełnych dla tej sieci mają wartości:

$$\alpha_{12}(i) = \text{Sd}(i - J) \oplus [\text{Sg}(i) \wedge \text{Sg}(i)] = \text{Sd}(i - J) \oplus \text{Sg}(i) = 1(i)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{13}(i) &= \text{Sg}(i) \oplus [\text{Sd}(i - J) \wedge \text{Sg}(-i)] = \text{Sg}(i) \oplus [\text{Sd}(i - J) \wedge \text{Sd}(i)] = \\ &= \text{Sg}(i) \oplus \text{Sd}(i) = 1(i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{23}(i) &= \text{Sg}(-i) \oplus [\text{Sd}(-i - J) \wedge \text{Sg}(i)] = \text{Sd}(i) \oplus [\text{Sg}(i + J) \wedge \text{Sg}(i)] = \\ &= \text{Sd}(i) \oplus \text{Sg}(i) = 1(i) \end{aligned}$$

$$\beta_{12}(u) = 1(u) \wedge [\text{Sg}(u) \oplus \delta(u - E)] = 1(u) \wedge \text{Sg}(u - E) = \text{Sg}(u - E)$$

$$\begin{aligned} \beta_{13}(u) &= \text{Sg}(u) \wedge [1(u) \oplus \delta(-u - E)] = \text{Sg}(u) \wedge [1(u) \oplus \delta(u + E)] = \\ &= \text{Sg}(u) \wedge 1(u) = \text{Sg}(u) \end{aligned}$$

$$\beta_{23}(u) = \delta(u + E) \wedge [1(u) \oplus \text{Sg}(u)] = \delta(u + E) \wedge 1(u) = \delta(u + E)$$

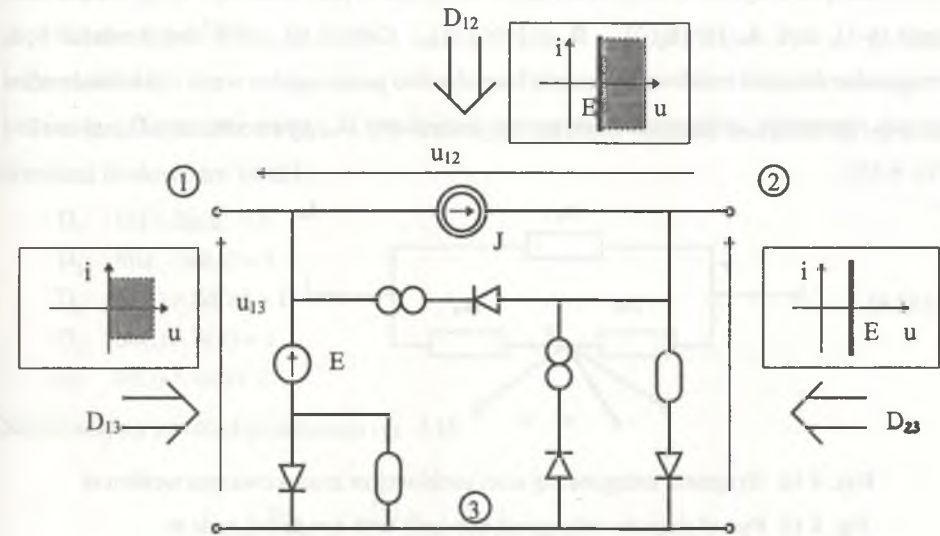
Stąd dwójniki zastępcze widziane na zaciskach 1-2, 1-3 i 3-2 tej sieci opisują formuły:

$$D_{12}: 1(i) \wedge \text{Sg}(u - E) = 1 \quad (4.171)$$

$$D_{13}: 1(i) \wedge \text{Sg}(u) = 1 \quad (4.172)$$

$$D_{23}: 1(i) \wedge \delta(u - E) = 1 \quad (4.173)$$

które reprezentują obszary pracy pokazane na rys. 4.15.



Rys. 4.15. Sieć osobliwa z przykładu 4.7 złożona z dwójników D_1 , D_2 i D_3 oraz jej dwójniki zastępcze D_{12} , D_{13} i D_{23}

Fig. 4.15. Singular network containing one-ports D_1 , D_2 , D_3 from the example 4.7 and its equivalent one-ports D_{12} , D_{13} , D_{23}

Macierzowa formuła połączeń pełnych rozpatrywanej sieci ma ostatecznie postać:

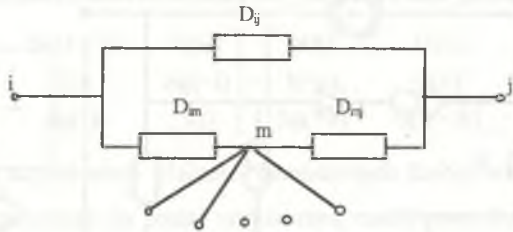
$$\begin{bmatrix} 1(i) & 1(i) & 1(i) \\ 1(i) & 1(i) & 1(i) \\ 1(i) & 1(i) & 1(i) \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \delta(u) & \text{Sg}(u - E) & \text{Sg}(u) \\ \text{Sd}(u + E) & \delta(u) & \delta(u) \\ \text{Sd}(u) & \delta(u) & \delta(u) \end{bmatrix} = 1 \quad (4.174)$$

Funkcje boolowskie dwuzaciskowe jako wyrazy macierzy $\mathbf{K}(i)$ i $\mathbf{N}(u)$ można znajdować dla danej sieci złożonej z dwójników osobliwych ze zbiorów Θ_1 lub Θ_2 , ze znajomości macierzy $\mathbf{A}(i)$, $\mathbf{B}(u)$ metodą redukcji węzłów. Przez redukcję, czyli usunięcie węzła z sieci będzie rozumiane zmniejszenie ilości węzłów sieci o jeden z jednoczesnym pozostawieniem gałęzi łączących usunięty węzeł z pozostałymi węzłami.

Niech będzie dana sieć osobliwa ortogonalna o n węzłach opisana parą macierzy funkcji boolowskich $\mathbf{A}_n(i)=[a_{ij}(i)]_n$, $\mathbf{B}_n(u)=[b_{ij}(u)]_n$ poprzez formułę macierzową:

$$\mathbf{A}_n(i) \wedge \mathbf{B}_n(u) = \mathbf{1}_n \quad (4.175)$$

Po usunięciu z tej sieci m -tego węzła opisywać ją będzie para macierzy funkcji boolowskich rzędu $(n-1)$, czyli $\mathbf{A}_{n-1}(\mathbf{i})=[h_{ij}(\mathbf{i})]_{n-1}$, $\mathbf{B}_{n-1}(\mathbf{u})=[d_{ij}(\mathbf{u})]_{n-1}$. Gałęzie tej nowej sieci zawierać będą ortogonalne dwójniki osobliwe D_{ij} łączące bezpośrednio poszczególne węzły i - j , z dołączonymi do nich równolegle, połączonymi szeregowo dwójnikami D_{im} gałęzi i - m oraz D_{mj} gałęzi m - j (rys. 4.16).



Rys. 4.16. Fragment ortogonalnej sieci osobliwej ze zredukowanym węzłem m
 Fig. 4.16. Part of singular orthogonal network with a reduced node m

Stąd na podstawie reguł łączenia ortogonalnych dwójników osobliwych poszczególne gałęzie sieci zredukowanej o jeden węzeł opisują funkcje boolowskie:

$$h_{ij}(\mathbf{i}) = a_{ij}(\mathbf{i}) \oplus [a_{im}(\mathbf{i}) \wedge a_{mj}(\mathbf{i})] \quad (4.176)$$

$$d_{ij}(\mathbf{u}) = b_{ij}(\mathbf{u}) \wedge [b_{im}(\mathbf{u}) \oplus b_{mj}(\mathbf{u})] \quad (4.177)$$

które są elementami macierzy $\mathbf{A}_{n-1}(\mathbf{i})$ i $\mathbf{B}_{n-1}(\mathbf{u})$. Stosując $(n-2)$ -krotnie usuwanie kolejnych węzłów oprócz dwóch wybranych i - j otrzyma się dla danej sieci parę funkcji boolowskich prądu $\alpha_{ij}(\mathbf{i})$ i napięcia $\beta_{ij}(\mathbf{u})$ opisujących przez formułę macierzową typu (4.140) sieć n -węzłową zredukowaną do dwójnika widzianego z zacisków i - j . Powtarzając tę procedurę dla wszystkich p par węzłów, wzór (4.144), otrzyma się wszystkie pary funkcji boolowskich α i β opisujących tę sieć widzianą z każdej pary jej zacisków.

Porównując funkcje $\alpha_{ij}(\mathbf{i})$ i $\beta_{ij}(\mathbf{u})$ otrzymane metodą redukcji węzłów z wyrazami macierzy otrzymanej przez $(n-1)$ -krotne potęgowanie macierzy funkcji boolowskich $\mathbf{A}_{n-1}(\mathbf{i})$ i $\mathbf{B}_{n-1}(\mathbf{u})$, można sformułować twierdzenie:

Twierdzenie 4.17

- Dla dowolnej ortogonalnej sieci osobliwej złożonej z elementów ze zbiorów Θ_1 i Θ_2 o k węzłach opisanej macierzami funkcji boolowskich połączeń bezpośrednich poprzez formułę:

$$\mathbf{A}_n(\mathbf{i}) \wedge \mathbf{B}_n(\mathbf{u}) = \mathbf{1}_n \quad (4.178)$$

jej macierze funkcji boolowskich połączeń pełnych opisują zależności:

$$\mathbf{K}_n(\mathbf{i}) = \mathbf{A}_n(\mathbf{i})^{*(n-1)} \quad (4.179)$$

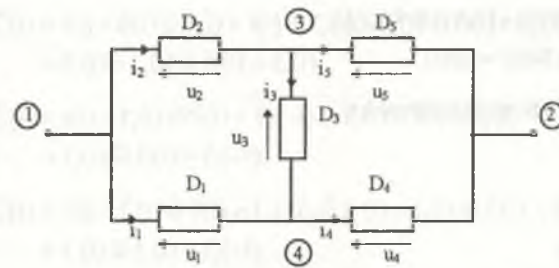
$$\mathbf{N}_n(\mathbf{u}) = \mathbf{B}_n(\mathbf{u})^{\#(n-1)} \quad (4.180)$$

Przykład 4.8

Dana jest sieć mostkowa (rys. 4.17) zawierająca dwójniki osobliwe ze zbioru Θ_2 opisane formułami boolowskimi (4.181).

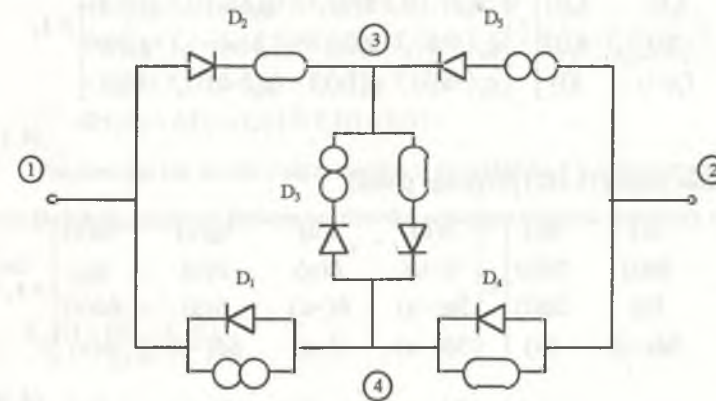
$$\begin{aligned} D_1: & 1(\mathbf{i}) \wedge Sg(\mathbf{u}) = 1 \\ D_2: & \delta(\mathbf{i}) \wedge Sd(\mathbf{u}) = 1 \\ D_3: & Sd(\mathbf{i}) \wedge Sd(\mathbf{u}) = 1 \\ D_4: & Sd(\mathbf{i}) \wedge \delta(\mathbf{u}) = 1 \\ D_5: & Sd(\mathbf{i}) \wedge 1(\mathbf{u}) = 1 \end{aligned} \quad (4.181)$$

Odpowiadający jej układ przedstawia rys. 4.18.



Rys. 4.17. Sieć mostkowa z przykładu 4.8

Fig. 4.17. Bridge network from the example 4.8



Rys. 4.18. Obwód odpowiadający sieci z rys. 4.17

Fig. 4.18. Circuits equivalent of the network derived from Fig. 4.17

Należy określić podanymi uprzednio metodami dwójnik zastępczy D_{12} równoważny tej sieci, widziany na zaciskach 1-2.

Metoda 1

Obliczenia na podstawie twierdzenia 4.16.

$$g_{12}(u) = (g_1 \oplus g_4) \wedge (g_1 \oplus g_3 \oplus g_5) \wedge (g_2 \oplus g_3 \oplus g_5) \wedge (g_2 \oplus g_5) \quad (4.182)$$

$$f_{12}(i) = (f_1 \oplus f_2) \wedge (f_1 \oplus f_3 \oplus f_5) \wedge (f_2 \oplus f_3 \oplus f_4) \wedge (f_4 \oplus f_5) \quad (4.183)$$

Po uwzględnieniu (4.181) otrzymuje się:

$$g_{12}(u) = [Sg(u) \oplus \delta(u)] \wedge [Sg(u) \oplus Sd(u) \oplus 1(u)] \wedge [Sd(u) \oplus Sd(u) \oplus \delta(u)] \wedge [Sd(u) \oplus 1(u)] = Sg(u) \wedge 1(u) \wedge Sd(u) \wedge 1(u) = \delta(u) \quad (4.184)$$

$$f_{12}(i) = [1(i) \oplus \delta(i)] \wedge [1(i) \oplus Sd(i) \oplus Sd(i)] \wedge [\delta(i) \oplus Sd(i) \oplus Sd(i)] \wedge [Sd(i) \oplus Sd(i)] = 1(i) \wedge 1(i) \wedge 1(i) \wedge Sd(i) = Sd(i) \quad (4.185)$$

Ostatecznie dwójnik D_{12} opisuje formuła boolowska:

$$D_{12}: Sd(i) \wedge \delta(u) = 1 \quad (4.186)$$

Metoda 2

Metoda macierzy boolowskich.

Układ opisuje macierzowa formuła boolowska połączeń bezpośrednich o postaci ogólnej dla obwodu z rys. 4.17:

$$\begin{bmatrix} 1(i) & \delta(i) & f_2(i) & f_1(i) \\ \delta(i) & 1(i) & f_3(i) & f_4(i) \\ f_2(-i) & f_5(i) & 1(i) & f_3(i) \\ f_1(-i) & f_4(i) & f_3(-i) & 1(i) \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \delta(u) & 1(u) & g_2(u) & g_1(u) \\ 1(u) & \delta(u) & g_5(-u) & g_4(-u) \\ g_2(-u) & g_5(u) & \delta(u) & g_3(u) \\ g_1(-u) & g_4(u) & g_3(-u) & \delta(u) \end{bmatrix} = \mathbf{1}_4 \quad (4.187)$$

którą po uwzględnieniu formuł (4.181) przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} 1(i) & \delta(i) & 1(i) & \delta(i) \\ \delta(-i) & 1(i) & Sd(i) & Sd(i) \\ 1(-i) & Sd(-i) & 1(i) & Sd(i) \\ \delta(-i) & Sd(-i) & Sd(-i) & 1(i) \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \delta(u) & 1(u) & Sg(u) & Sd(u) \\ 1(-u) & \delta(u) & \delta(u) & 1(u) \\ Sg(-u) & \delta(-u) & \delta(u) & Sd(u) \\ Sd(-u) & 1(-u) & Sd(-u) & \delta(u) \end{bmatrix} = \mathbf{1}_4 \quad (4.188)$$

Po zmianie znaków prądów i napięć otrzymuje się na podstawie zależności z dodatku 4.6 formułę (4.188) w postaci:

$$\begin{bmatrix} 1(i) & \delta(i) & 1(i) & \delta(i) \\ \delta(i) & 1(i) & Sd(i) & Sd(i) \\ 1(i) & Sg(i) & 1(i) & Sd(i) \\ \delta(i) & Sg(i) & Sg(i) & 1(i) \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \delta(u) & 1(u) & Sg(u) & Sd(u) \\ 1(u) & \delta(u) & \delta(u) & 1(u) \\ Sd(u) & \delta(u) & \delta(u) & Sd(u) \\ Sg(u) & 1(u) & Sg(u) & \delta(u) \end{bmatrix} = \mathbf{1}_4 \quad (4.189)$$

co zwięźle można zapisać jako:

$$\mathbf{A}_4(i) \wedge \mathbf{B}_4(u) = \mathbf{1}_4 \quad (4.190)$$

Zastępczy dwójnik osobliwy widziany z zacisków 1-2 opisuje formuła boolowska:

$$a_{12}^{*3}(i) \wedge b_{12}^{*3} = 1 \quad (4.191)$$

w której $a_{12}^{*3}(i)$ i b_{12}^{*3} są wyrazami o numerach "1,2" trzeciej potęgi macierzy $\mathbf{A}_4(i)$, $\mathbf{B}_4(u)$.

Pierwszy wiersz drugiej potęgi iloczynowej macierzy $\mathbf{A}_4(i)$ ma wyrazy o wartościach:

$$a_{11}^{*2}(i) = 1(i) \wedge 1(i) \oplus \delta(i) \wedge \delta(i) \oplus f_2(i) \wedge f_2(-i) \oplus f_1(i) \wedge f_1(-i) = 1(i) \quad (4.192)$$

$$a_{12}^{*2}(i) = 1(i) \wedge \delta(i) \oplus \delta(i) \wedge 1(i) \oplus f_2(i) \wedge f_5(i) \oplus f_1(i) \wedge f_4(i) = f_2(i) \wedge f_5(i) \oplus f_1(i) \wedge f_4(i) \quad (4.193)$$

$$a_{13}^{*2}(i) = 1(i) \wedge f_2(i) \oplus \delta(i) \wedge f_5(-i) \oplus f_2(i) \wedge 1(i) \oplus f_1(i) \wedge f_3(-i) = f_2(i) \oplus f_1(i) \wedge f_3(-i) \quad (4.194)$$

$$a_{14}^{*2}(i) = 1(i) \wedge f_1(i) \oplus \delta(i) \wedge f_4(-i) \oplus f_2(i) \wedge f_3(i) \oplus f_1(i) \wedge 1(i) = f_1(i) \oplus f_2(i) \wedge f_3(-i) \quad (4.195)$$

Stąd wyraz $a_{12}(i)$ trzeciej potęgi iloczynowej macierzy $\mathbf{A}_4(i)$ ma wartość:

$$a_{12}^{*3}(i) = 1(i) \wedge \delta(i) \oplus [f_2(i) \wedge f_3(i) \oplus f_1(i) \wedge f_4(i)] \wedge 1(i) \oplus \oplus [f_2(i) \oplus f_1(i) \wedge f_3(-i)] \wedge f_5(i) \oplus [f_1(i) \oplus f_2(i) \wedge f_3(i)] \wedge f_4(i) = f_2(i) \wedge f_5(i) \oplus f_1(i) \wedge f_4(i) \oplus f_2(i) \wedge f_5(i) \oplus f_1(i) \wedge f_3(-i) \wedge f_5(i) \oplus f_1(i) \wedge f_4(i) \oplus f_2(i) \wedge f_3(i) \wedge f_4(i) = f_1(i) \wedge f_4(i) \oplus f_1(i) \wedge f_3(-i) \wedge f_5(i) \oplus f_2(i) \wedge f_3(i) \wedge f_4(i) \oplus f_2(i) \wedge f_5(i) \quad (4.196)$$

Porównując ten wynik z otrzymanym w przykładzie 4.6 można stwierdzić, że dla zbioru Θ_1 lub Θ_2 prądowa funkcja boolowska opisująca dwójnik zastępczy ma w ogólności postać:

$$f_{\alpha\beta}(i) = \bigoplus_{j=1}^p \bigwedge_{k=1}^{h_j} f_{k,j}(i) \quad (4.197)$$

gdzie: p - ilość dróg przejścia między węzłem α i β ,

h_j - ilość gałęzi w j-tej drodze przejścia.

Uwzględniając w relacji (4.196) wartości z macierzy (4.189) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} a_{12}^{*3}(i) &= 1(i) \wedge Sd(i) \oplus 1(i) \wedge Sd(-i) \wedge Sd(i) \oplus \\ &\oplus \delta(i) \wedge Sd(i) \wedge Sd(i) \oplus \delta(i) \wedge Sd(i) = \\ &= Sd(i) \oplus Sg(i) \wedge Sd(i) \oplus \delta(i) \oplus \delta(i) = \\ &= Sd(i) \oplus \delta(i) \oplus \delta(i) \oplus \delta(i) = Sd(i) \end{aligned} \quad (4.198)$$

Podobnie pierwszy wiersz drugiej potęgi sumacyjnej macierzy $B_4(u)$ ma wyrazy o wartościach:

$$\begin{aligned} b_{11}^{*2}(u) &= [\delta(u) \oplus \delta(u)] \wedge [1(u) \oplus 1(u)] \wedge [g_2(u) \oplus g_1(-u)] \wedge \\ &\wedge [g_1(u) \oplus g_2(-u)] = \delta(u) \end{aligned} \quad (4.199)$$

$$\begin{aligned} b_{12}^{*2}(u) &= [\delta(u) \oplus 1(u)] \wedge [1(u) \oplus \delta(u)] \wedge [g_2(u) \oplus g_5(u)] \wedge [g_1(u) \oplus g_4(u)] = \\ &= [g_2(u) \oplus g_5(u)] \wedge [g_1(u) \oplus g_4(u)] \end{aligned} \quad (4.200)$$

$$\begin{aligned} b_{13}^{*2}(u) &= [\delta(u) \oplus g_2(u)] \wedge [1(u) \oplus g_5(-u)] \wedge [g_2(u) \oplus \delta(u)] \wedge [g_1(u) \oplus g_3(-u)] = \\ &= g_2(u) \wedge [g_1(u) \oplus g_3(-u)] \end{aligned} \quad (4.201)$$

$$\begin{aligned} b_{13}^{*2}(u) &= [\delta(u) \oplus g_1(u)] \wedge [1(u) \oplus g_4(-u)] \wedge [g_2(u) \oplus g_3(u)] \wedge [g_1(u) \oplus \delta(u)] = \\ &= g_1(u) \wedge [g_2(u) \oplus g_3(u)] \end{aligned} \quad (4.202)$$

Stąd wyraz $b_{12}(u)$ trzeciej potęgi sumacyjnej macierzy $B_4(u)$ ma wartość:

$$\begin{aligned} b_{12}^{*3}(u) &= [\delta(u) \oplus 1(u)] \wedge \{ [g_2(u) \oplus g_5(u)] \wedge [g_1(u) \wedge g_4(u)] \oplus \delta(u) \} \wedge \\ &\wedge \{ g_2(u) \wedge [g_1(u) \oplus g_3(-u)] \oplus g_5(u) \} \wedge \\ &\wedge \{ g_1(u) \wedge [g_2(u) \oplus g_3(u)] \oplus g_4(u) \} = \\ &= [g_1(u) \oplus g_4(u)] \wedge [g_2(u) \oplus g_5(u)] \wedge [g_2(u) \oplus g_5(u)] \wedge \\ &\wedge [g_1(u) \oplus g_3(-u) \oplus g_5(u)] \wedge [g_1(u) \oplus g_4(u)] \wedge [g_2(u) \oplus g_3(u) \oplus g_4(u)] = \\ &= [g_1(u) \oplus g_4(u)] \wedge [g_1(u) \oplus g_3(-u) \oplus g_5(u)] \wedge \\ &\wedge [g_2(u) \oplus g_5(u)] \wedge [g_2(u) \oplus g_3(u) \oplus g_4(u)] \end{aligned} \quad (4.203)$$

Wynik ten jest równoważny postaci (4.182) otrzymanej z twierdzenia 4.16. Po uwzględnieniu (4.189) otrzymuje się taki sam rezultat jak w metodzie 1 relacja (4.183).

Metoda 3

Zastosowanie redukcji węzłów. Po usunięciu węzła 4 otrzymuje się macierz $A_3(i)$, której wyrazy potrzebne w dalszych obliczeniach mają, na podstawie relacji (4.176), wartości:

$$h_{12}(i) = \delta(i) \oplus f_1(i) \wedge f_4(i) = f_1(i) \wedge f_4(i) \quad (4.204)$$

$$h_{13}(i) = f_2(i) \oplus [f_1(i) \wedge f_3(-i)] \quad (4.205)$$

$$h_{32}(i) = f_5(i) \oplus [f_4(i) \wedge f_3(i)] \quad (4.206)$$

Stąd po usunięciu węzła 3 otrzymuje się:

$$\begin{aligned} f_{12}(i) &= h_{12}(i) \oplus h_{13}(i) \wedge h_{32}(i) = f_1(i) \wedge f_4(i) \oplus \\ &\oplus \{ [f_2(i) \oplus f_1(i) \wedge f_3(-i)] \wedge [f_5(i) \oplus [f_4(i) \wedge f_3(i)]] \} = \\ &= f_1(i) \wedge f_4(i) \oplus f_2(i) \wedge f_5(i) \oplus f_2(i) \wedge f_4(i) \wedge f_3(i) \oplus \\ &\oplus f_1(i) \wedge f_3(-i) \wedge f_5(i) \oplus f_1(i) \wedge f_4(i) \wedge f_3(i) \wedge f_3(-i) \end{aligned} \quad (4.207)$$

Ogólnie wyraz ten można zapisać jako sumę pięciu składników:

$$f_{12}(i) = S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \oplus S_4 \oplus S_5$$

Wyłączając ze składników pierwszego i ostatniego czynnik $f_1 \wedge f_4$ otrzymuje się:

$$S_1 \oplus S_5 = [f_1(i) \wedge f_4(i)] \wedge [1(i) \oplus f_3(i) \wedge f_3(-i)]. \quad (4.208)$$

co wobec relacji (4c.1) z dodatku 4.6 daje:

$$S_1 \oplus S_5 = f_1(i) \wedge f_4(i) \quad (4.209)$$

Stąd $f_{12}(i)$ przyjmuje wartość równoważną do (4.196) otrzymanej za pomocą metody macierzowej.

Podobnie dla macierzy $B_3(u)$ na podstawie relacji (4.177) otrzymuje się:

$$d_{12}(u) = 1(u) \wedge [g_1(u) \oplus g_4(u)] = g_1(u) \oplus g_4(u) \quad (4.210)$$

$$d_{13}(u) = g_2(u) \wedge [g_1(u) \oplus g_3(-u)] \quad (4.211)$$

$$d_{32}(u) = g_5(u) \wedge [g_4(u) \oplus g_3(u)] \quad (4.212)$$

Po usunięciu węzła 3 wyraz $g_{12}(u)$ ma wartość:

$$\begin{aligned} g_{12}(u) &= d_{12}(u) \wedge [d_{13}(u) \oplus d_{32}(u)] = [g_1(u)g_4(u)] \wedge \\ &\wedge \{ [g_2(u) \wedge [g_1(u) \oplus g_3(u)]] \oplus [g_5(u) \wedge [g_4(u) \oplus g_3(u)]] \} = \\ &= [g_1(u) \oplus g_4(u)] \wedge [g_2(u) \oplus g_5(u) \wedge [g_4(u) \oplus g_3(u)]] \wedge \\ &\wedge \{ [g_1(u) \oplus g_3(-u)] \oplus g_5(u) \wedge [g_5(u) \oplus g_3(u)] \} = \\ &= [g_1(u) \oplus g_4(u)] \wedge [g_2(u) \oplus g_5(u)] \wedge [g_2(u) \oplus g_3(u) \oplus g_4(u)] \wedge \\ &\wedge [g_1(u) \oplus g_3(-u) \oplus g_5(u)] \wedge [g_1(u) \oplus g_3(u) \oplus g_3(-u) \oplus g_4(u)] \end{aligned} \quad (4.213)$$

Ogólnie można go zapisać jako iloczyn pięciu czynników:

$$g_{12}(u) = C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge C_4 \wedge C_5$$

Wyłączając z czynników pierwszego i ostatniego składnik $g_1 \oplus g_4$ otrzymuje się:

$$\begin{aligned} C_1 \wedge C_5 &= [g_1(u) \oplus g_4(u)] \oplus \{ \delta(u) \wedge [g_3(u) \oplus g_3(-u)] \} = \\ &= g_1(u) \oplus g_4(u) \oplus \delta(u) = g_1(u) \oplus g_4(u) \end{aligned} \quad (4.214)$$

Po uwzględnieniu (4.214) w relacji (4.213) otrzymuje się wyrażenie na wartość $g_{12}(u)$ takie samo jak metodą pierwszą i drugą.

4.6. DODATEK

PRZYKŁADY WYKONANIA PODSTAWOWYCH OPERACJI BOOLOWSKICH NA FUNKCJACH BOOLOWSKICH ELEMENTARNYCH

4.6.A Operacja zmiany znaku argumentu.

$$1(-x) = 1(x) \quad (4a.1)$$

$$0(-x) = 0(x) \quad (4a.2)$$

$$\text{Sg}(-x - a_1) = \text{Sd}(x - a_2) \quad \text{gdzie } a_2 = -a_1 \quad (4a.3)$$

$$\text{Sd}(-x - a_1) = \text{Sg}(x - a_2) \quad \text{gdzie } a_2 = -a_1 \quad (4a.4)$$

$$\delta(-x - a_1) = \delta(x - a_2) \quad \text{gdzie } a_2 = -a_1 \quad (4a.5)$$

$$\prod_x(a, b) = \prod_x(-a, -b) \quad (4a.6)$$

Dla parametru $a=0$ zachodzi:

$$\text{Sg}(-x) = \text{Sd}(x) \quad (4a.7)$$

$$\text{Sd}(-x) = \text{Sg}(x) \quad (4a.8)$$

$$\delta(-x) = \delta(x) \quad (4a.9)$$

4.6.B Operacja "∧"

$$1(x) \wedge f(x) = f(x) \quad (4b.1)$$

$$0(x) \wedge f(x) = 0(x) \quad (4b.2)$$

$$\delta(x - a) \wedge \delta(x - b) = 0(x) \quad (4b.3)$$

$$\delta(x - a) \wedge \text{Sg}(x - b) = \begin{cases} 0(x) & \text{dla } a < b \\ \delta(x - a) & \text{dla } a \geq b \end{cases} \quad (4b.4)$$

$$\delta(x - a) \wedge \text{Sd}(x - b) = \begin{cases} 0(x) & \text{dla } a > b \\ \delta(x - a) & \text{dla } a \leq b \end{cases} \quad (4b.5)$$

$$\delta(x - a) \wedge \prod_x(b, c) = \begin{cases} \delta(x - a) & \text{dla } b \leq a \leq c \\ 0(x) & \text{dla } b > a \text{ lub } a > c \end{cases} \quad (4b.6)$$

$$\text{Sg}(x - a) \wedge \text{Sg}(x - b) = \text{Sg}(x - c), \quad c = \max(a, b) \quad (4b.7)$$

$$\text{Sd}(x - a) \wedge \text{Sd}(x - b) = \text{Sd}(x - c), \quad c = \min(a, b) \quad (4b.8)$$

$$\text{Sg}(x - a) \wedge \text{Sd}(x - b) = \begin{cases} \prod_x(a, b) & \text{dla } a < b \\ \delta(x - c) & \text{dla } c = a = b \\ 0(x) & \text{dla } a > b \end{cases} \quad (4b.9)$$

$$\prod_x(a, b) \wedge \prod_x(c, d) = \begin{cases} 0(x) & \text{dla } \{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset \\ \prod_x(a, b) & \text{dla } \{a, b\} \subset \{c, d\} \\ \prod_x(c, d) & \text{dla } \{a, b\} \supset \{c, d\} \\ \prod_x(c, d) & \text{dla } a < c < b, b < d \\ \prod_x(a, d) & \text{dla } c < a < d, b > d \\ \delta(x - e) & \text{dla } e = b = c \text{ lub } e = a = d \end{cases} \quad (4b.10)$$

$$\prod_x(a, b) \wedge \text{Sg}(x - c) = \begin{cases} 0(x) & \text{dla } c > b \\ \delta(x - b) & \text{dla } c = b \\ \prod_x(c, b) & \text{dla } a < c < b \\ \prod_x(a, b) & \text{dla } c \leq a \end{cases} \quad (4b.11)$$

$$\prod_x(a, b) \wedge \text{Sd}(x - c) = \begin{cases} 0(x) & \text{dla } c < b \\ \delta(x - a) & \text{dla } c = b \\ \prod_x(a, c) & \text{dla } a < c < b \\ \prod_x(a, b) & \text{dla } c \geq a \end{cases} \quad (4b.12)$$

4.6.C Operacja "⊕"

$$1(x) \oplus f(x) = 1(x) \quad (4c.1)$$

$$0(x) \oplus f(x) = f(x) \quad (4c.2)$$

$$\delta(x - a) \oplus \delta(x - b) = \delta(x - c) \quad \text{gdzie } c = a + b \quad (4c.3)$$

$$\text{Sg}(x - a) \oplus \text{Sg}(x - b) = \text{Sg}(x - c) \quad \text{gdzie } c = a + b \quad (4c.4)$$

$$\text{Sd}(x - a) \oplus \text{Sd}(x - b) = \text{Sd}(x - c) \quad \text{gdzie } c = a + b \quad (4c.5)$$

$$\prod_x(a, b) \oplus \prod_x(c, d) = \prod_x(a + c, b + d) \quad (4c.6)$$

$$\text{Sd}(x - a) \oplus \delta(x - b) = \delta(x - c) \quad \text{gdzie } c = a + b \quad (4c.7)$$

$$\text{Sg}(x - a) \oplus \delta(x - b) = \delta(x - c) \quad \text{gdzie } c = a + b \quad (4c.8)$$

$$\prod_x(a, b) \oplus \delta(x - c) = \prod_x(a + c, b + c) \quad (4c.9)$$

$$\text{Sd}(x - a) \oplus \text{Sg}(x - b) = 1(x) \quad (4c.10)$$

$$\prod_x(a, b) \oplus \text{Sg}(x - c) = \text{Sg}(x - d) \quad \text{gdzie } d = a + c \quad (4c.11)$$

$$\prod_x(a, b) \oplus \text{Sd}(x - c) = \text{Sd}(x - d) \quad \text{gdzie } d = b + c \quad (4c.12)$$

$$\delta(x) \oplus f(x) = f(x) \quad \text{dla } f(x) \neq 0(x) \quad (4c.13)$$

5. ORTOGONALNE DWÓJNIKI OSOBLIWE JAKO MODELE RZECZYWISTYCH ELEMENTÓW AKTYWNYCH

Dwójniki osobliwe ortogonalne o skończonych granicach obszarów pracy mogą być modelami rzeczywistych elementów elektronicznych o ograniczonych wielkościach wyjściowych parametrów technicznych, takich jak maksymalny dopuszczalny prąd wyjściowy i maksymalne napięcie wyjściowe. Przyrządy elektroniczne, takie jak WO, OTA i CCII, gdy są stosowane w układach o podwyższonej mocy, mają punkty pracy zbliżone do granicznych wartości prądów i napięć. W tych przypadkach zbudowane z ich zastosowaniem np. filtry aktywne nie realizują założonych idealnie charakterystyk, lecz silnie ograniczone w zależności od częstotliwości oraz zmian parametrów dołączonych elementów biernych.

Wydaje się, że dobrą formalizacją opisu sieci modelujących układy złożone z elementów osobliwych ortogonalnych o ograniczonych obszarach pracy i elementów klasycznych biernych RLC jest zastosowanie algebry interwałów [M5, S6, N1, T11]. Umożliwia ona wyznaczenie dopuszczalnych zakresów zmian prądów, napięć oraz mocy pozornej lub czynnej w tych sieciach w funkcji zmian rezystancji, częstotliwości lub obu tych wielkości jednocześnie. Zależności te są charakterystykami tych sieci dla ograniczonych parametrów zastosowanych elementów aktywnych [T10]. Charakterystyki takie mogą mieć zastosowanie przy badaniu własności mocowych aktywnych układów filtracyjnych pod względem możliwości ich zastosowań do celów energetycznych [T28].

5.1. ORTOGONALNE DWÓJNIKI OSOBLIWE O OGRANICZONYCH OBSZARACH PRACY W UJĘCIU ARYTMETYKI INTERWAŁÓW

Rozpatrywane będą sieci złożone z bezinercyjnych ortogonalnych dwójników osobliwych, dla których granice obszarów pracy mają wartości skończone. W tym przypadku zbiory, do których należy prąd i napięcie każdego dwójnika, mogą być określone interwałami [M5, S6, N1]:

$$i \in A = [\underline{i}, \bar{i}] \quad (5.1)$$

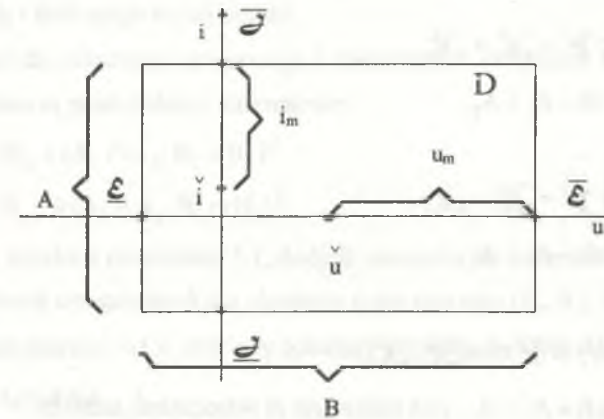
$$u \in B = [\underline{u}, \bar{u}] \quad (5.2)$$

Obszarem pracy dwójnika jest zatem obszar określony iloczynem kartezjańskim:

$$([\underline{i}, \bar{i}] \cap I) \times ([\underline{u}, \bar{u}] \cap U) = D \quad (5.3)$$

lub inaczej wektorem interwałowym w postaci dwuwymiarowej [N1]:

$$D = (A, B)^T = ([\underline{i}, \bar{i}], [\underline{u}, \bar{u}])^T, \quad (5.4)$$



Rys. 5.1. Obszar pracy ortogonalnego dwójnika osobliwego określony interwałowo

Fig. 5.1. Operating region of a singular orthogonal one-port with an interval description

w których \underline{i}, \bar{i} są dolną i górną granicą prądową obszaru działania D, a \underline{u}, \bar{u} są dolną i górną granicą napięciową obszaru działania D, co pokazano na rys. 5.1.

Średnia wartość napięcia \check{u} , jakie może się pojawić na zaciskach dwójnika, jest równa punktowi środkowemu interwału B i wynosi:

$$\check{u} = \text{mid}(B) = (\bar{u} + \underline{u})/2. \quad (5.5a)$$

Odpowiednio dla prądu średnia jego wartość wynosi:

$$\check{i} = \text{mid}(A) = (\bar{i} + \underline{i})/2. \quad (5.5b)$$

Maksymalna amplituda zmian napięcia lub prądu jest równa promieniowi ich interwałów, czyli:

$$u_m = \text{rad}(B) = (\bar{u} - \underline{u})/2 \quad (5.6)$$

$$i_m = \text{rad}(A) = (\bar{i} - \underline{i})/2 \quad (5.7)$$

Niechaj x_1, x_2 będą zmiennymi zaciskowymi o wartościach należących do interwałów zbioru liczb rzeczywistych, dla których zachodzi:

$$\underline{x}_1 \leq x_1 \leq \overline{x}_1 \quad \text{oraz} \quad \underline{x}_2 \leq x_2 \leq \overline{x}_2, \quad (5.8)$$

co interwałowo oznacza: $x_1 \in A_1 = [\underline{x}_1, \overline{x}_1]$ oraz $x_2 \in A_2 = [\underline{x}_2, \overline{x}_2]$. Wtedy dla nowej zmiennej zaciskowej $y \in B = [\underline{y}, \overline{y}]$ można podać reguły:

(ia)* jeżeli $y=x_1+x_2$, wtedy:

$$\underline{y} = \underline{x}_1 + \underline{x}_2 \leq y \leq \overline{y} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2,$$

co interwałowo oznacza: $y \in B = A_1 + A_2$,

(ib)* jeżeli $y=x_1-x_2$, wtedy:

$$\underline{y} = \underline{x}_1 - \overline{x}_2 \leq y \leq \overline{y} = \overline{x}_1 - \underline{x}_2,$$

co interwałowo oznacza: $y \in B = A_1 - A_2$,

(ii)* jeżeli $y=x_1=x_2$, wtedy:

$$\underline{y} = \max(\underline{x}_1, \underline{x}_2) \leq y \leq \overline{y} = \min(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$$

co interwałowo oznacza: $y \in B = A_1 \cap A_2$, pod warunkiem że jednocześnie zachodzi:

$$\left| \begin{matrix} \underline{x}_1 & \underline{x}_2 \\ \overline{x}_1 & \overline{x}_2 \end{matrix} \right| \leq \text{rad}(A_1) + \text{rad}(A_2). \quad (5.9)$$

Niechaj dana będzie w -węzłowa sieć S_0 , w ogólności nies szeregowo-równoległa, zbudowana z n gałęzi będących dwójnikami osobliwymi ortogonalnymi o ograniczonych obszarach pracy. Dwójniki gałęziowe tej sieci opisuje n wektorów interwałowych:

$$\begin{aligned} D_1 &= (A_1, B_1)^T = ([\underline{\mathcal{J}}_1, \overline{\mathcal{J}}_1], [\underline{\mathcal{E}}_1, \overline{\mathcal{E}}_1])^T \\ D_2 &= (A_2, B_2)^T = ([\underline{\mathcal{J}}_2, \overline{\mathcal{J}}_2], [\underline{\mathcal{E}}_2, \overline{\mathcal{E}}_2])^T \\ &\dots\dots\dots \\ D_n &= (A_n, B_n)^T = ([\underline{\mathcal{J}}_n, \overline{\mathcal{J}}_n], [\underline{\mathcal{E}}_n, \overline{\mathcal{E}}_n])^T \end{aligned} \quad (5.10)$$

Twierdzenie 5.1

Sieć S_0 widziana jako dwójnik na wybranych dwóch węzłach α i β jako zaciskach wejściowych opisuje wektor interwałowy:

$$D_{\alpha\beta} = (A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta})^T = ([\underline{\mathcal{J}}_{\alpha\beta}, \overline{\mathcal{J}}_{\alpha\beta}], [\underline{\mathcal{E}}_{\alpha\beta}, \overline{\mathcal{E}}_{\alpha\beta}])^T, \quad (5.11)$$

przy czym:

$$A_{\alpha\beta} = \bigcap_{j=1}^r \pm A_{kj}, \quad (5.12)$$

$$B_{\alpha\beta} = \bigcap_{j=1}^p \pm B_{kj}, \quad (5.13)$$

w których:

- r - ilość przekrojów sieci rozdzielających węzły α i β ,
- γ_j - ilość gałęzi w j -tym przekroju,
- p - ilość dróg przejścia łączących węzły α i β ,
- h_j - ilość gałęzi w j -tej drodze.

Stąd dla połączenia szeregowego i równoległego dwójników D_1 i D_2 , dwójniki zastępcze określone są przez wektory interwałowe:

$$D_{sz} = (A_1 \cap A_2, B_1 + B_2)^T \quad (5.14)$$

$$D_{row} = (A_1 + A_2, B_1 \cap B_2)^T \quad (5.15)$$

Jak wynika z twierdzenia 5.1, dwójnik zastępczy dla danej sieci zawierającej n dwójników osobliwych ortogonalnych jest określony przez interwały (A_0, B_0) , będące funkcjami wiązującymi poprzez operacje \cap i \pm interwały opisujące wszystkie dwójniki składowe tej sieci, co oznacza:

$$\begin{aligned} A_0 &= f(A_k) \\ B_0 &= g(B_k), \end{aligned}$$

dla $k = 1, 2, \dots, n$.

Definicja 5.1

Interwały A_0 i B_0 nazywane będą *sprzężonymi*, jeżeli A_0 można przeprowadzić w B_0 przez podstawienia:

- operacji "+" lub "-" w miejsce " \cap ",
- operacji " \cap " w miejsce "+" lub "-",
- interwału B_k w miejsce A_k i na odwrót.

Stąd przez wielokrotne zastosowanie wzorów (5.14) i (5.15) można wykazać prawdziwość twierdzenia:

Twierdzenie 5.2

Każdej parze interwałów (A, B) sprzężonych można przyporządkować dwuzaciskową szeregowo-równoległą sieć złożoną z dwójników osobliwych ortogonalnych o ograniczonych obszarach pracy i na odwrót.

Ortogonalne dwójniki osobliwe o skończonych obszarach pracy można podzielić na pięć grup w zależności od położenia ich obszarów pracy D w stosunku do osi układu współrzędnych płaszczyzny u-i.

Grupa I: Dwójniki niewyłączalne, dla których zachodzi jednocześnie:

$$\left| \overset{\vee}{u} \right| > u_m \quad \text{oraz} \quad \left| \overset{\vee}{i} \right| > i_m \quad (5.16)$$

Ich obszar pracy nie zawiera żadnego punktu leżącego na osiach współrzędnych u-i, co pokazano na rys. 5.2 jako obszar „a”.

Grupa II: Dwójniki wyłączalne napięciowo, dla których zachodzi jednocześnie:

$$\left| \overset{\vee}{u} \right| \leq u_m \quad \text{oraz} \quad \left| \overset{\vee}{i} \right| > i_m \quad (5.17)$$

Ich obszar pracy zawiera punkty leżące na osi prądowej, co pokazano na rys. 5.2b.

Grupa III: Dwójniki wyłączalne prądowo, dla których zachodzi jednocześnie:

$$\left| \overset{\vee}{u} \right| > u_m \quad \text{oraz} \quad \left| \overset{\vee}{i} \right| \leq i_m \quad (5.18)$$

Ich obszar pracy zawiera punkty leżące na osi napięciowej, co pokazano na rys. 5.2c.

Grupa IV: Dwójniki wyłączalne prądowo i napięciowo, dla których zachodzi:

$$\left| \overset{\vee}{u} \right| < u_m \quad \text{i} \quad \left| \overset{\vee}{i} \right| < i_m \quad (5.19)$$

Ich obszar pracy D zawiera punkt o współrzędnych: $u = 0, i = 0$, co pokazano na rys. 5.2d.

Grupa V: Dwójniki wyłączalne symetryczne, dla których zachodzi:

$$\left| \overset{\vee}{u} \right| = 0 \quad \text{oraz} \quad \left| \overset{\vee}{i} \right| = 0 \quad (5.20)$$

Ich obszar pracy D zawiera punkt $(0, 0)$ położony w środku symetrii tego obszaru (rys. 5.2e).

Na podstawie definicji $\overset{\vee}{u}$, $\overset{\vee}{i}$ oraz zależności (5.20) dla dwójnika osobliwego symetrycznego zachodzi:

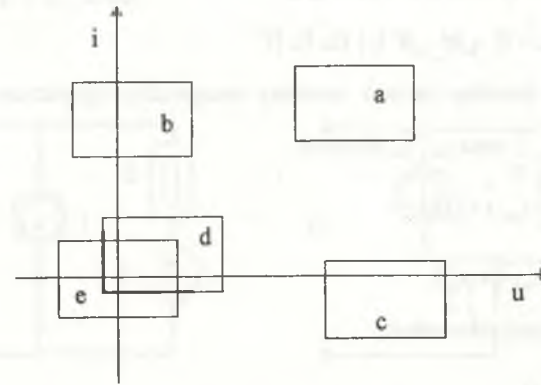
$$-\underline{\mathcal{E}} = \overline{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \quad \text{oraz} \quad -\underline{\mathcal{J}} = \overline{\mathcal{J}} = \mathcal{J} \quad (5.21)$$

Określa go zatem wektor interwałowy o postaci:

$$\mathbf{S} = (A_s, B_s) = ([-\underline{\mathcal{J}}, \overline{\mathcal{J}}], [-\underline{\mathcal{E}}, \overline{\mathcal{E}}]), \quad (5.22)$$

co skrótowo można zapisać jako:

$$\mathbf{S} = (\mathcal{E}, \mathcal{J}). \quad (5.23)$$



Rys. 5.2. Położenie obszarów pracy dwójników osobliwych ortogonalnych o ograniczonych obszarach pracy względem osi układu współrzędnych u-i

Fig. 5.2. Location of bounde operating-regions of a singular orthogonal one-ports in u-i plane

Zakłada się, że obszary pracy wszystkich rozpatrywanych ortogonalnych dwójników osobliwych zawsze zawierają się w pewnej ograniczonej symetrycznej części P płaszczyzny u-i.

Część ta określona jest granicami:

$$-\mathcal{N} < i < \mathcal{N}, \quad -\mathcal{M} < u < \mathcal{M} \quad (5.24)$$

co można zapisać jako:

$$\mathbf{P} = ([-\mathcal{N}, \mathcal{N}] \cap I) \times ([-\mathcal{M}, \mathcal{M}] \cap U) \quad (5.25)$$

Zakłada się jednocześnie, że granice \mathcal{N} , \mathcal{M} są dużo większe od granic $\underline{\mathcal{J}}$, $\underline{\mathcal{E}}$ obszaru pracy dowolnego dwójnika osobliwego, co implikuje:

$$\underline{\mathcal{E}} + \mathcal{M} = \mathcal{M}, \quad \underline{\mathcal{J}} + \mathcal{N} = \mathcal{N} \quad (5.26)$$

oraz:

$$\underline{\mathcal{E}} \cap \mathcal{M} = \underline{\mathcal{E}}, \quad \underline{\mathcal{J}} \cap \mathcal{N} = \underline{\mathcal{J}} \quad (5.27)$$

W tak określonej części P płaszczyzny u-i podstawowe dwójniki osobliwe opisują wektory interwałowe:

norator: $\mathbf{N}_o = ([-\mathcal{N}, \mathcal{N}], [-\mathcal{M}, \mathcal{M}])^T \quad (5.28)$

nullator: $\mathbf{N}_u = ([0, 0], [0, 0])^T \quad (5.29)$

przerwa: $\mathbf{P}_n = ([0, 0], [-\mathcal{M}, \mathcal{M}])^T \quad (5.30)$

zwarcie: $\mathbf{Z}_w = ([-\mathcal{N}, \mathcal{N}], [0, 0])^T \quad (5.31)$

źródło prądowe: $I_o = ([I_o, I_o], [-\mathcal{N}, \mathcal{N}])^T$ (5.32)

źródło napięciowe: $E_o = ([-\mathcal{M}, \mathcal{M}], [E_o, E_o])^T$ (5.33)

Niechaj będzie dany dowolny dwójnik osobliwy ortogonalny ograniczony $D = (A, B)$.

Na podstawie definicji \check{u}, \check{i} oraz u_m, i_m zachodzi:

$A = [\check{\mathcal{E}}, \check{\mathcal{I}}] = [\check{i} - i_m, \check{i} + i_m]$ (5.34)

$B = [\check{\mathcal{U}}, \check{\mathcal{E}}] = [\check{u} - u_m, \check{u} + u_m]$ (5.35)

Co można zapisać jako sumy interwałów:

$A = [-i_m, i_m] + [\check{i}, \check{i}]$ (5.36)

$B = [-u_m, u_m] + [\check{u}, \check{u}]$ (5.37)

Interwały A i B można doprowadzić do postaci pary sprzężonej (definicja 5.1) bez zmiany ich wartości przez wykonanie na nich operacji (5.27) w dwojaki sposób:

$A_a = ([-i_m, i_m] \cap [-\mathcal{M}, \mathcal{M}]) + [\check{i}, \check{i}]$ (5.38)

$B_a = ([-u_m, u_m] + [\check{u}, \check{u}]) \cap [-\mathcal{M}, \mathcal{M}]$ (5.39)

lub:

$A_b = ([-i_m, i_m] + [\check{i}, \check{i}]) \cap [-\mathcal{M}, \mathcal{M}]$ (5.40)

$B_b = ([-u_m, u_m] \cap [-\mathcal{M}, \mathcal{M}]) + [\check{u}, \check{u}]$ (5.41)

Wektory interwałowe złożone z par interwałów sprzężonych $D_a = (A_a, B_a)$ oraz $D_b = (A_b, B_b)$ opisują sieci szeregowo-równoległe o postaci jak na rys. 5.3, zawierające źródła autonomiczne $I = \check{i}, E = \check{u}$ oraz dwójnik osobliwy symetryczny $S = (i_m, u_m)$. Są one obwodami zastępczymi dowolnego dwójnika ortogonalnego o skończonym obszarze pracy.

Dla zmiennych zaciskowych x_1, x_2 należących do interwału o granicach symetrycznie położonych względem zera:

$|x_1| \leq \mathcal{X}_1, \quad |x_2| \leq \mathcal{X}_2$ (5.42)

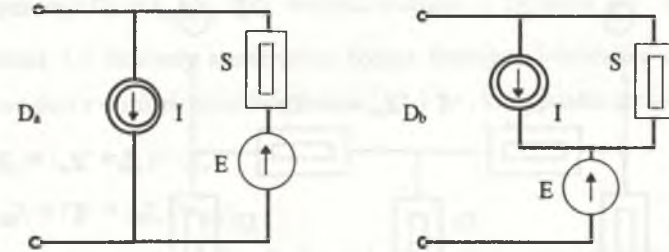
czyli interwałowo:

$x_1 \in A_1 = [-\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_1]$ (5.43)

$x_2 \in A_2 = [-\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_2]$ (5.44)

Reguły (i)*, (ii)* przyjmują wtedy postać:

(i) jeżeli $y = x_1 \pm x_2$, wtedy:



Rys. 5.3. Obwody równoważne dowolnego dwójnika osobliwego ortogonalnego zawierające dwójnik ortogonalny symetryczny

Fig. 5.3. Equivalent circuits of any singular orthogonal one-port containing a symmetrical orthogonal one-port

$|y| \leq \mathcal{Y} = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2$ (5.45)

co interwałowo oznacza: $y \in B = A_1 + A_2$,

(ii) jeżeli $y = x_1 \cap x_2$, wtedy:

$|y| \leq \mathcal{Y} = \min(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$, (5.46)

co interwałowo oznacza: $y = A_1 \cap A_2$.

Na podstawie reguł (i), (ii) oraz zapisu (5.25) dla sieci w-węzłowej złożonej tylko z dwójników osobliwych symetrycznych można sformułować twierdzenie 5.3 analogiczne do twierdzenia 5.1.

Twierdzenie 5.3

Sieć osobliwą symetryczną widzianą jako dwójnik na zaciskach α i β opisuje wektor interwałów symetrycznych:

$S_{\alpha\beta} = (\mathcal{E}_{\alpha\beta}, \mathcal{I}_{\alpha\beta})^T = ([-\mathcal{E}_{\alpha\beta}, \mathcal{E}_{\alpha\beta}], [-\mathcal{I}_{\alpha\beta}, \mathcal{I}_{\alpha\beta}])^T$, (5.47)

przy czym:

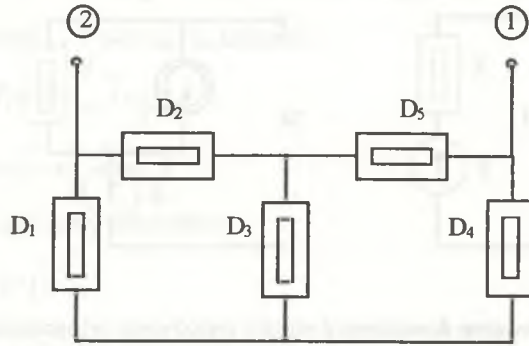
$\mathcal{E}_{\alpha\beta} = \bigcap_{j=1}^r + \mathcal{E}_{k,j}$ (5.48)

$\mathcal{I}_{\alpha\beta} = \bigcap_{j=1}^p + \mathcal{I}_{k,j}$ (5.49)

w których r, γ_j, p, h_j są takie same jak w twierdzeniu 5.1.

Przykład 5.1

Dana jest sieć mostkowa złożona z pięciu dwójników osobliwych ortogonalnych symetrycznych, oznaczonych jak na rys. 5.4.



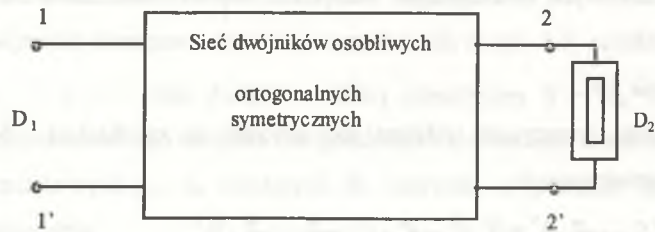
Rys. 5.4. Sieć mostkowa złożona z dwójników osobliwych symetrycznych

Fig. 5.4. A bridge network containing symmetrical orthogonal one-ports

Dwójniki D_1 do D_5 opisują wektory interwałów symetrycznych od $D_1 = (\mathcal{E}_1, \mathcal{J}_1)$ do $D_5 = (\mathcal{E}_5, \mathcal{J}_5)$. Dwójnik osobliwy zastępczy widziany z zacisków 1-2 opisują na podstawie twierdzenia 5.3 interwały symetryczne:

$$\mathcal{E}_{12} = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) \cap (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3) \cap (\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4) \cap (\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_5) \quad (5.50)$$

$$\mathcal{J}_{12} = (\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2) \cap (\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3) \cap (\mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3 + \mathcal{J}_4) \cap (\mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_5) \quad (5.51)$$



Rys. 5.5. Sieć dwójników osobliwych ortogonalnych symetrycznych z wyróżnionymi dwoma parami zacisków jako czwórnik

Fig. 5.5. A network of symmetrical orthogonal singular one-ports with indicated two-terminal-pair as a two-port

Jeżeli w sieci złożonej z dwójników osobliwych symetrycznych (rys.5.5) wyróżni się dwie pary zacisków, wejściowe 1-1' oraz wyjściowe 2-2', wtedy sieć ta będzie reprezentować czwórnik osobliwy. Po przyłączeniu do jego zacisków wyjściowych dwójnika osobliwego symetrycznego $D_2 = (\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, dwójnik widziany z zacisków 1-1' opisują na podstawie twierdzenia 5.3 interwały symetryczne będące funkcjami interwałów opisujących dwójniki składowe sieci z wyróżnionymi interwałami \mathcal{X} i \mathcal{Y} , które można sprowadzić do postaci:

$$\mathcal{E}_\Pi = (\mathcal{X} + \mathcal{E}_a) \cap \mathcal{E}_b \quad (5.52)$$

$$\mathcal{J}_\Pi = (\mathcal{Y} + \mathcal{J}_a) \cap \mathcal{J}_b \quad (5.53)$$

Interwały symetryczne $[-\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_i]$ oraz $[-\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_i]$ można doprowadzić do postaci pary sprzężonej bez zmiany ich wartości w dwojaki sposób:

$$\mathcal{E}_\Pi = [(\mathcal{X} \cap \mathcal{M}) + \mathcal{E}_a] \cap \mathcal{E}_b \quad (5.54)$$

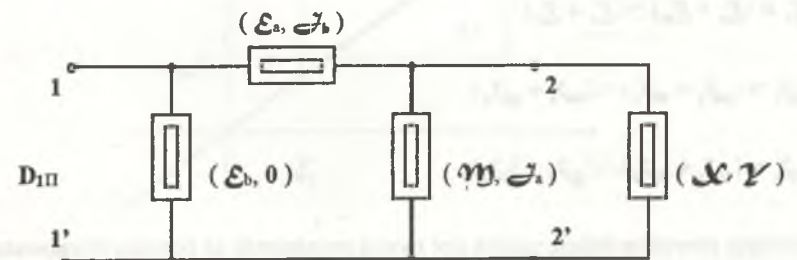
$$\mathcal{J}_\Pi = [(\mathcal{Y} + \mathcal{J}_a) \cap \mathcal{J}_b] + 0 \quad (5.55)$$

lub

$$\mathcal{E}_\Pi = [(\mathcal{X} + \mathcal{E}_a) \cap \mathcal{E}_b] + 0 \quad (5.56)$$

$$\mathcal{J}_\Pi = [(\mathcal{Y} \cap \mathcal{M}) + \mathcal{J}_a] \cap \mathcal{J}_b \quad (5.57)$$

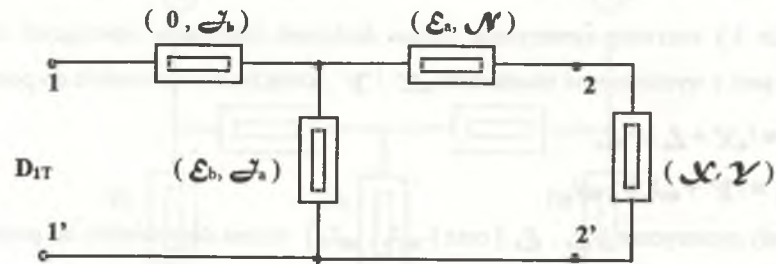
W pierwszym przypadku wektor $D_{II\Pi} = (\mathcal{E}_{II\Pi}, \mathcal{J}_{II\Pi})$ opisuje dwójnik osobliwy widziany na zaciskach 1-1', gdy sieć 11'-22' zastąpi się równoważnym czwornikiem osobliwym typu II, co pokazano na rys. 5.6.



Rys. 5.6. Czwórnik typu II równoważny sieci dwójników osobliwych symetrycznych

Fig. 5.6. A Π -type two-port equivalent to a network containing symmetrical singular one-ports

W przypadku drugim wektor $D_{IT} = (\mathcal{E}_T, \mathcal{J}_T)$ opisuje dwójnik osobliwy widziany na zaciskach 1-1', gdy sieć zastąpi się czwornikiem równoważnym typu T jak na rys. 5.7.



Rys. 5.7. Czwornik typu T równoważny sieci dwójników osobliwych symetrycznych
Fig. 5.7. A T-type two-port equivalent to a network containing symmetrical singular one-ports

Przykład 5.2

Dla sieci mostkowej z przykładu 5.1 znaleźć równoważne jej czworniki zastępcze. Przy założeniu że $D_3 = (X, Y)$, po przekształceniu wzorów (5.50) i (5.51) otrzymuje się wartości interwałów pomocniczych:

$$\mathcal{E}_1 = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) \cap (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3) \quad (5.58)$$

$$\mathcal{E}_2 = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3) \cap (\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3) \quad (5.59)$$

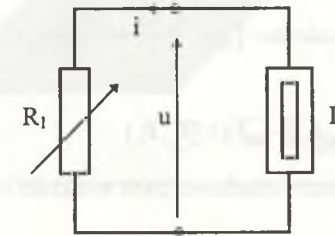
$$\mathcal{J}_1 = (\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2) \cap (\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_3) \quad (5.60)$$

$$\mathcal{J}_2 = (\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_3) \cap (\mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3) \quad (5.61)$$

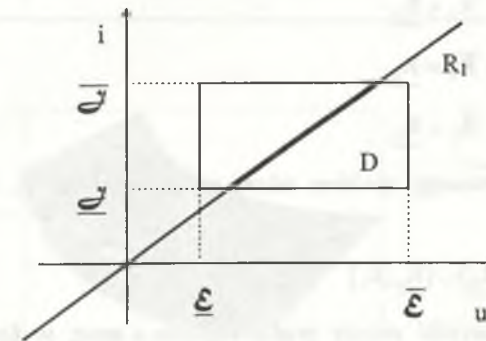
Uwzględniając powyższe relacje zadaną sieć można przedstawić za pomocą równoważnych jej czworników osobliwych niemostkowych, takich jak przedstawione na rys. 5.6 lub rys. 5.7.

5.2. POŁĄCZENIA DWÓJNIKÓW OSOBLIWYCH ORTOGONALNYCH Z DWÓJNIKAMI REZYSTANCYJNYMI

Dołączenie do ortogonalnego dwójnika osobliwego o ograniczonym obszarze pracy klasycznej rezystancji liniowej tworzy obwód (rys. 5.8), w którym w każdej chwili prąd i napięcie muszą leżeć w obszarze D i jednocześnie na prostej R_1 , tak jak to pokazano linią pogrubioną na rys. 5.9.



Rys. 5.8. Obwód zawierający dwójnik osobliwy ortogonalny i rezystancję liniową
Fig. 5.8. A circuit with orthogonal singular one-port and linear resistance



Rys. 5.9. Zbiór punktów pracy obwodu z rys. 5.8
Fig. 5.9. Operating region of the circuit derived from Fig. 5.8

Jeżeli przykładowo założy się :

$$\underline{\mathcal{E}} \geq 0, \quad \bar{\mathcal{E}} \geq 0, \quad \underline{\mathcal{J}} \geq 0, \quad \bar{\mathcal{J}} \geq 0, \quad (5.62)$$

wtedy na podstawie definicji ilorazu interwałów [N1] otrzymuje się możliwy zakres zmian rezystancji R_1 jako iterwał:

$$R_1 = [\underline{\mathcal{E}}, \overline{\mathcal{E}}] / [\underline{\mathcal{J}}, \overline{\mathcal{J}}] = [\underline{\mathcal{E}} / \overline{\mathcal{J}}, \overline{\mathcal{E}} / \underline{\mathcal{J}}] = [R_1, \overline{R}_1] \quad (5.63)$$

Wewnątrz tego interwału można dodatkowo określić rezystancje charakterystyczne dolną \underline{R}_0 i górną \overline{R}_0 :

$$\overline{R}_0 = \overline{\mathcal{E}} / \overline{\mathcal{J}} \quad (5.64)$$

$$\underline{R}_0 = \underline{\mathcal{E}} / \underline{\mathcal{J}} \quad (5.65)$$

Przy zmianach rezystancji w zakresie $[R_0, \overline{R}_0]$ moc chwilowa zmienia się w zakresie interwału:

$$p = [\underline{\mathcal{E}}, \overline{\mathcal{E}}] \cdot [\underline{\mathcal{J}}, \overline{\mathcal{J}}] = [\underline{\mathcal{E}} \cdot \underline{\mathcal{J}}, \overline{\mathcal{E}} \cdot \overline{\mathcal{J}}] = [P_0, \overline{P}_0] \quad (5.66)$$

Obszar pracy D charakteryzują jeszcze dodatkowo dwie wielkości - rezystancja własna:

$$R_w = u_m / i_m \quad (5.67)$$

oraz rezystancja średnia:

$$R_s = \overline{u} / \overline{i} \quad (5.68)$$

Przy spełnieniu przykładowych założeń (5.62) mogą wystąpić trzy przypadki odnośnie do wartości R_w i R_s :

$$R_s > R_w, \quad \text{wtedy} \quad \overline{R}_0 < R_0 \quad (5.69)$$

$$R_s = R_w, \quad \text{wtedy} \quad \overline{R}_0 = R_0 \quad (5.70)$$

$$R_s < R_w, \quad \text{wtedy} \quad \overline{R}_0 > R_0 \quad (5.71)$$

I tak dla przypadku pierwszego możliwy zakres zmian rezystancji R_1 dzieli się na trzy interwały:

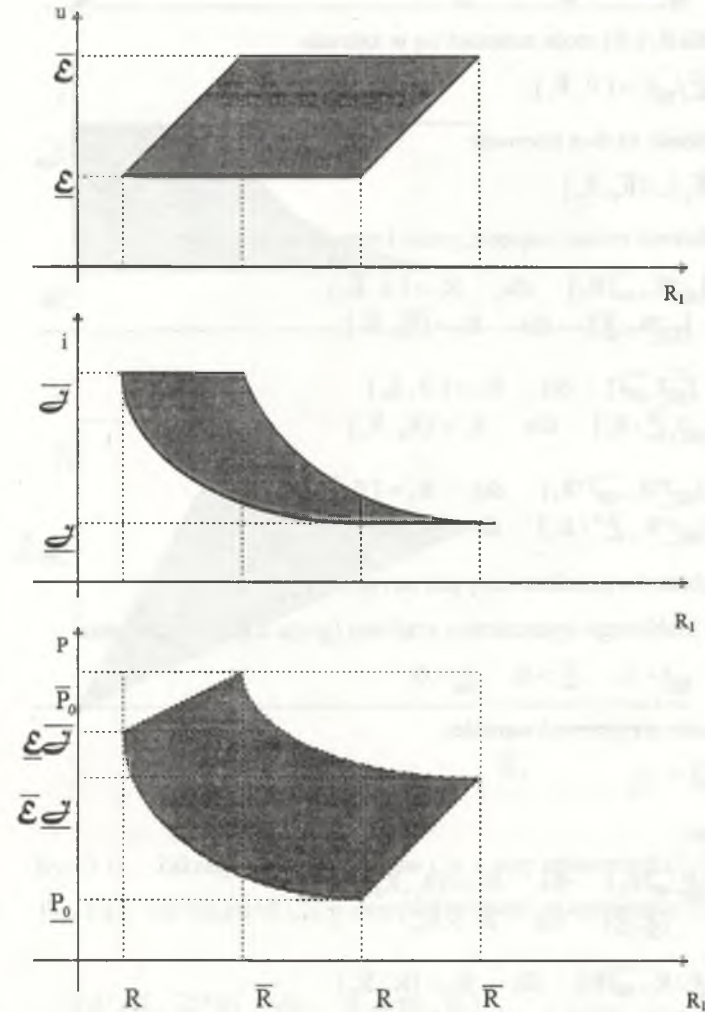
$$R_1 = [R_1, \overline{R}_0] \cup [\overline{R}_0, R_0] \cup [R_0, \overline{R}_1] \quad (5.72)$$

na ich podstawie można określić zmiany prądu, napięcia i mocy w funkcji zmian R_1 i przedstawić w postaci wykresów interwałów o zmiennych granicach.

$$u(R_1) = \begin{cases} [\underline{\mathcal{E}}, \overline{\mathcal{J}}R_1] & \text{dla } R_1 = [R_1, \overline{R}_0] \\ [\underline{\mathcal{E}}, \overline{\mathcal{E}}] & \text{dla } R_1 = [\overline{R}_0, R_0] \\ [\overline{\mathcal{J}}R_1, \underline{\mathcal{E}}] & \text{dla } R_1 = [R_0, \overline{R}_1] \end{cases} \quad (5.73)$$

$$i(R_1) = \begin{cases} [\underline{\mathcal{E}}/R_1, \overline{\mathcal{J}}] & \text{dla } R_1 = [R_1, \overline{R}_0] \\ [\underline{\mathcal{E}}/R_1, \overline{\mathcal{E}}/R_1] & \text{dla } R_1 = [\overline{R}_0, R_0] \\ [\underline{\mathcal{E}}/R_1, \underline{\mathcal{J}}] & \text{dla } R_1 = [R_0, \overline{R}_1] \end{cases} \quad (5.74)$$

$$p(R_1) = \begin{cases} [\underline{\mathcal{E}}^2/R_1, \overline{\mathcal{J}}^2 R_1] & \text{dla } R_1 = [R_1, \overline{R}_0] \\ [\underline{\mathcal{E}}^2/R_1, \overline{\mathcal{E}}^2/R_1] & \text{dla } R_1 = [\overline{R}_0, R_0] \\ [\overline{\mathcal{J}}^2 R_1, \underline{\mathcal{E}}^2/R_1] & \text{dla } R_1 = [R_0, \overline{R}_1] \end{cases} \quad (5.75)$$



Rys. 5.10. Zakresy zmian wartości napięcia, prądu i mocy w funkcji zmian R_1 w układzie z rys. 5.8, przy założeniach (5.62)

Fig. 5.10. The ranges of voltage, current and power of the circuit from Fig. 5.8, as a function of resistance R_1 on the assumption (5.62)

Kształt tych obszarów przedstawiony jest na rysunkach 5.10 a, b, c, przy czym dla:

$$\bar{R}_0 = \underline{\mathcal{E}} / \bar{\mathcal{J}} < \underline{\mathcal{E}} / \underline{\mathcal{J}} = \underline{R}_0 \quad (5.76)$$

zachodzi:

$$\bar{\mathcal{E}} \underline{\mathcal{J}} < \underline{\mathcal{E}} \bar{\mathcal{J}} \quad (5.77)$$

Dla dwójnika osobliwego wyłączalnego napięciowo (grupa II) przy założeniu:

$$\bar{\mathcal{J}} > 0, \quad \underline{\mathcal{J}} > 0, \quad \bar{\mathcal{E}} > 0, \quad \underline{\mathcal{E}} < 0 \quad (5.78)$$

rezystancja R_1 (dla $R_1 \geq 0$) może zmieniać się w zakresie:

$$R_1 = [0, \bar{\mathcal{E}} / \underline{\mathcal{J}}] = [0, \bar{R}_1], \quad (5.79)$$

który można podzielić na dwa interwały:

$$R_1 = [0, \bar{R}_0] \cup [\bar{R}_0, \bar{R}_1] \quad (5.80)$$

Na ich podstawie zmiany napięcia, prądu i mocy mają przebieg:

$$u(R_1) = \begin{cases} [\underline{\mathcal{J}}R_1, \bar{\mathcal{J}}R_1] & \text{dla } R_1 = [0, \bar{R}_0] \\ [\underline{\mathcal{J}}R_1, \underline{\mathcal{E}}] & \text{dla } R_1 = [\bar{R}_0, \bar{R}_1] \end{cases} \quad (5.81)$$

$$i(R_1) = \begin{cases} [\underline{\mathcal{J}}, \bar{\mathcal{J}}] & \text{dla } R_1 = [0, \bar{R}_0] \\ [\underline{\mathcal{J}}, \underline{\mathcal{E}} / R_1] & \text{dla } R_1 = [\bar{R}_0, \bar{R}_1] \end{cases} \quad (5.82)$$

$$p(R_1) = \begin{cases} [\underline{\mathcal{J}}^2 R_1, \bar{\mathcal{J}}^2 R_1] & \text{dla } R_1 = [0, \bar{R}_0] \\ [\underline{\mathcal{J}}^2 R_1, \underline{\mathcal{E}}^2 / R_1] & \text{dla } R_1 = [\bar{R}_0, \bar{R}_1] \end{cases} \quad (5.83)$$

Kształt tych obszarów przedstawiony jest na rys. 5.11.

Dla dwójnika osobliwego wyłączalnego prądowo (grupa III) przy założeniu:

$$\bar{\mathcal{J}} > 0, \quad \underline{\mathcal{J}} < 0, \quad \bar{\mathcal{E}} > 0, \quad \underline{\mathcal{E}} > 0 \quad (5.84)$$

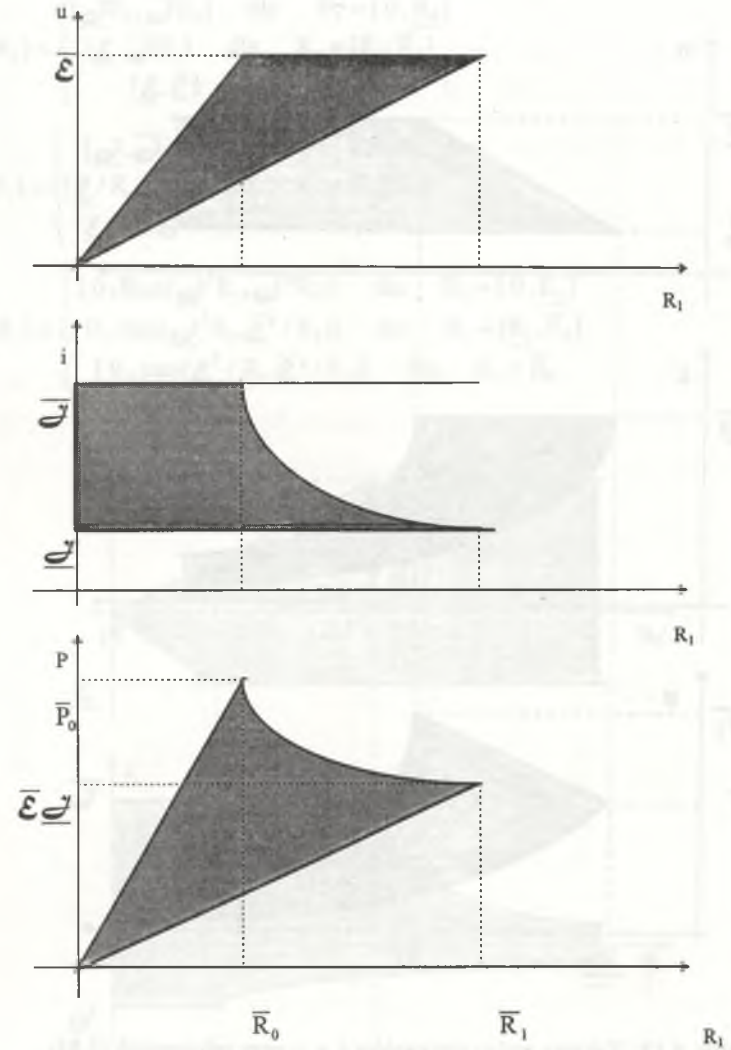
rezystancja R_1 może przyjmować wartości:

$$R_1 \geq \underline{\mathcal{E}} / \bar{\mathcal{J}} = \underline{R}_1 \quad (5.85)$$

Stąd otrzymuje się:

$$u(R_1) = \begin{cases} [\underline{\mathcal{E}}, \bar{\mathcal{J}}R_1] & \text{dla } R_1 = [\underline{R}_1, \bar{R}_0] \\ [\underline{\mathcal{E}}, \underline{\mathcal{E}}] & \text{dla } R_1 > \bar{R}_0, \end{cases} \quad (5.86)$$

$$i(R_1) = \begin{cases} [\underline{\mathcal{E}} / R_1, \bar{\mathcal{J}}R_1] & \text{dla } R_1 = [\underline{R}_1, \bar{R}_0] \\ [\underline{\mathcal{E}} / R_1, \underline{\mathcal{E}} / R_1] & \text{dla } R_1 > \bar{R}_0, \end{cases} \quad (5.87)$$

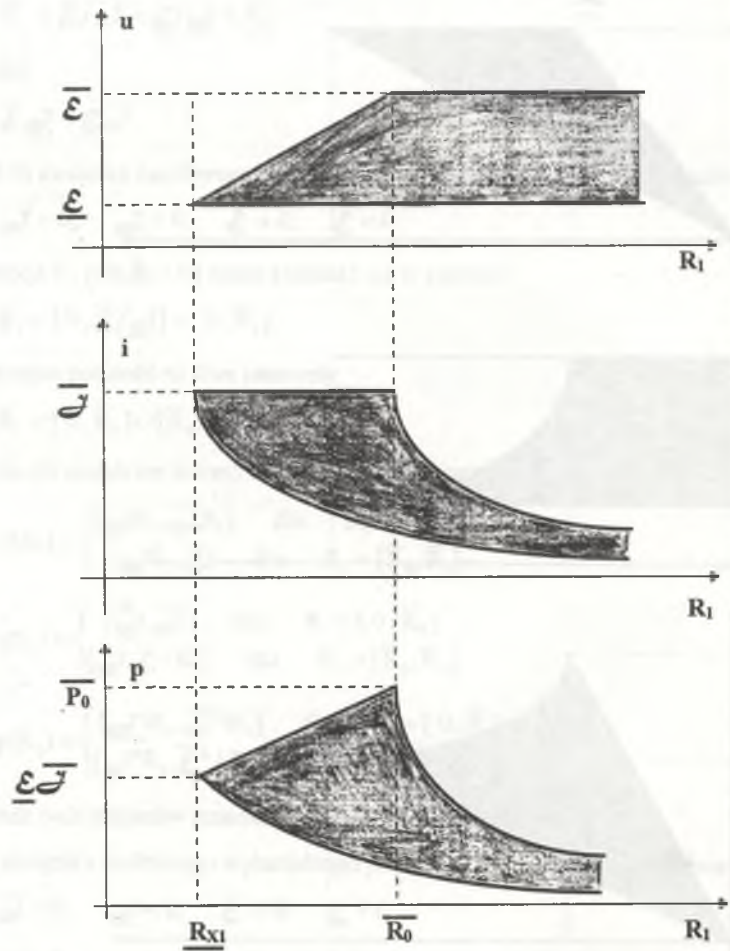


Rys. 5.11. Zakresy zmian interwałów i , u , p przy założeniach (5.78)

Fig. 5.11. The ranges of i , u , p interval variations on assumption (5.78)

$$p(R_1) = \begin{cases} [\underline{\mathcal{E}}^2 / R_1, \bar{\mathcal{J}}^2 R_1] & \text{dla } R_1 = [\underline{R}_1, \bar{R}_0] \\ [\underline{\mathcal{E}}^2 / R_1, \underline{\mathcal{E}}^2 / R_1] & \text{dla } R_1 > \bar{R}_0, \end{cases} \quad (5.88)$$

Kształty tych obszarów przedstawione są na rys. 5.12.



Rys. 5.12. Zakresy zmian interwałów i, u, p przy założeniach (5.84)

Fig. 5.12. The ranges of i, u, p interval variations on assumption(5.84)

Dla dwójników osobliwych wyłączalnych (grupa IV i V) przy założeniach:

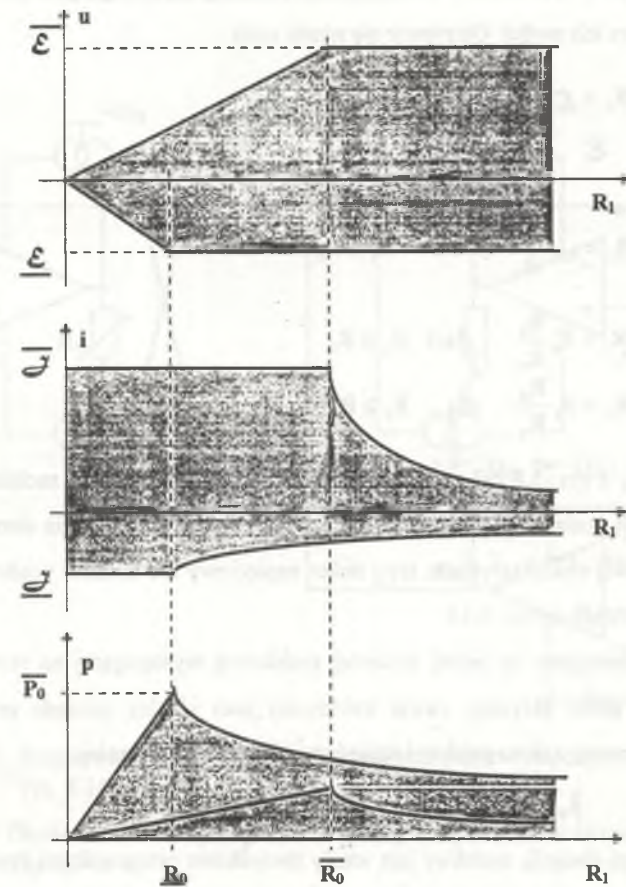
$$|\mathcal{J}| > |\underline{\mathcal{J}}|, \quad |\mathcal{E}| > |\underline{\mathcal{E}}| \quad R_w > R_s \quad (5.89)$$

rezystancja R_1 może przyjmować dowolne wartości większe od zera. Wielkości rezystancji charakterystycznych R_0 i \bar{R}_0 wyznaczają trzy zakresy zmian rezystancji R_1 , dla których zachodzi:

$$u(R_1) = \begin{cases} [\underline{\mathcal{J}}R_1, \bar{\mathcal{J}}R_1] & \text{dla } R_1 = [0, \bar{R}_0] \\ [\underline{\mathcal{E}}, \bar{\mathcal{J}}R_1] & \text{dla } R_1 = [\bar{R}_0, \bar{R}_0] \\ [\underline{\mathcal{E}}, \underline{\mathcal{E}}] & \text{dla } R_1 > \bar{R}_0 \end{cases} \quad (5.90)$$

$$i(R_1) = \begin{cases} [\underline{\mathcal{J}}, \bar{\mathcal{J}}] & \text{dla } R_1 = [0, \bar{R}_0] \\ [\underline{\mathcal{E}}/R_1, \bar{\mathcal{J}}] & \text{dla } R_1 = [\bar{R}_0, \bar{R}_0] \\ [\underline{\mathcal{E}}/R_1, \underline{\mathcal{E}}/R_1] & \text{dla } R_1 > \bar{R}_0 \end{cases} \quad (5.91)$$

$$p(R_1) = \begin{cases} [0, \max(\underline{\mathcal{J}}^2 R_1, \bar{\mathcal{J}}^2 R_1)] & \text{dla } R_1 = [0, \bar{R}_0] \\ [0, \max(\underline{\mathcal{J}}^2 R_1, \underline{\mathcal{E}}^2 / R_1)] & \text{dla } R_1 = [\bar{R}_0, \bar{R}_0] \\ [0, \max(\underline{\mathcal{E}}^2 / R_1, \underline{\mathcal{E}}^2 / R_1)] & \text{dla } R_1 > \bar{R}_0 \end{cases} \quad (5.92)$$



Rys. 5.13. Zakresy zmian interwałów i, u, p przy założeniach (5.89)

Fig. 5.13. The ranges of i, u, p interval variations on assumption(5.89)

co dla założeń (5.82) daje wyrażenie:

$$p(R_1) = \begin{cases} [0, \mathcal{J}^2 R_1] & \text{dla } R_1 = [0, \bar{R}_0] \\ [0, \mathcal{E}^2 / R_1] & \text{dla } R_1 > \bar{R}_0 \end{cases} \quad (5.93)$$

Kształt tych obszarów przedstawiono na rys. 5.13.

W przypadku gdy dwójnik osobliwy jest wyłączalny i jednocześnie symetryczny, wtedy na podstawie (5.21) zachodzi:

$$\underline{R}_0 = \bar{R}_0 = \mathcal{E} / \mathcal{J} = R_0 \quad (5.94)$$

$$\underline{P}_0 = \bar{P}_0 = \mathcal{J} \mathcal{E} = P_0 \quad (5.95)$$

Granice dolne i górne przedziałów zmian napięcia i prądu mają taki sam kształt i mogą być reprezentowane przez ich moduł. Otrzymuje się wtedy zapis:

$$|u(R_1)| \leq \begin{cases} \mathcal{J} R_1 = \mathcal{E} \frac{R_1}{R_0} & \text{dla } R_1 \leq R_0 \\ \mathcal{E} & \text{dla } R_1 \geq R_0 \end{cases} \quad (5.96)$$

$$|i(R_1)| \leq \begin{cases} \mathcal{J} & \text{dla } R_1 \leq R_0 \\ \mathcal{E} / R_1 = \mathcal{J} \frac{R_0}{R_1} & \text{dla } R_1 \geq R_0 \end{cases} \quad (5.97)$$

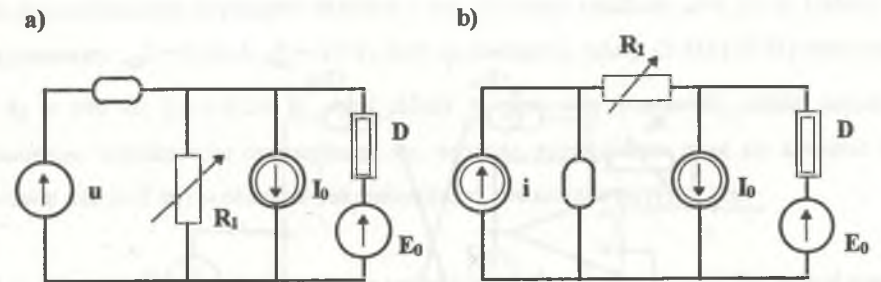
$$p(R_1) \leq \begin{cases} \mathcal{J}^2 R_1 = P_0 \frac{R_1}{R_0} & \text{dla } R_1 \leq R_0 \\ \mathcal{E}^2 / R_1 = P_0 \frac{R_0}{R_1} & \text{dla } R_1 \geq R_0 \end{cases} \quad (5.98)$$

Aby obwód D-R₁ z rys. 5.8 był realizowalny fizycznie, para zmiennych zaciskowych (u,i) musi w każdej chwili posiadać jednoznaczne wartości, co wymaga dołączenia elementu nullatorowego o punktowej charakterystyce, typu nullor napięciowy lub nullator prądowy, tak jak to pokazano w obwodach na rys. 5.14.

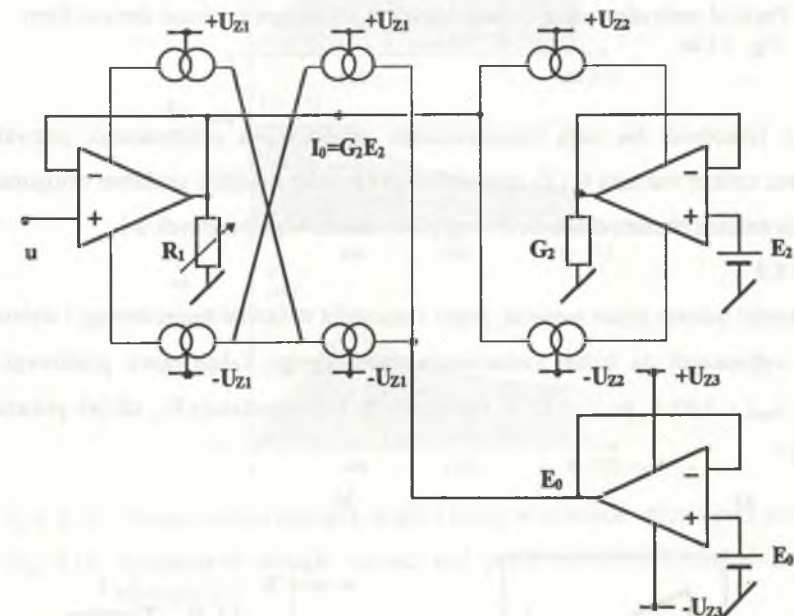
Są to układy z dostępem do jednej zmiennej zaciskowej występującej na rezystancji R₁. Każdy rzeczywisty układ aktywny, nawet traktowany jako idealny, posiada ze względów technicznych ograniczony zakres prądów i napięć wyjściowych do wartości:

$$|u_{wyj \max}| = \mathcal{E}, \quad |i_{wyj \max}| = \mathcal{E} \mathcal{J}$$

Reprezentujący go dwójnik osobliwy jest wtedy dwójnikiem ortogonalnym symetrycznym. Na tej podstawie modelem fizycznym układu z rys. 5.14a może być układ z konwejerem prądowym ujemnym przedstawiony na rys. 5.15.



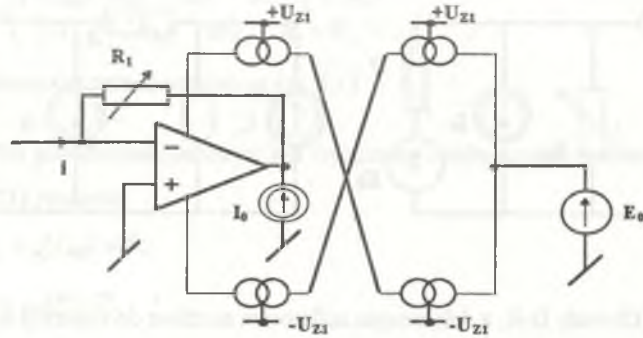
Rys. 5.14. Obwody D-R₁ z dołączonym nullatorem możliwe do realizacji fizycznej
Fig. 5.14. Realisable D-R₁ circuits with nullator



Rys. 5.15. Rzeczywisty układ fizyczny z konwejerem prądowym, odpowiednik obwodu z rys. 5.14a

Fig. 5.15. Physical realization using current conveyor equivalent to circuit derived from Fig. 5.14a

Jego wersja dla zasilania prądowego (rys. 5.14b) przedstawiona jest na rys. 5.16.



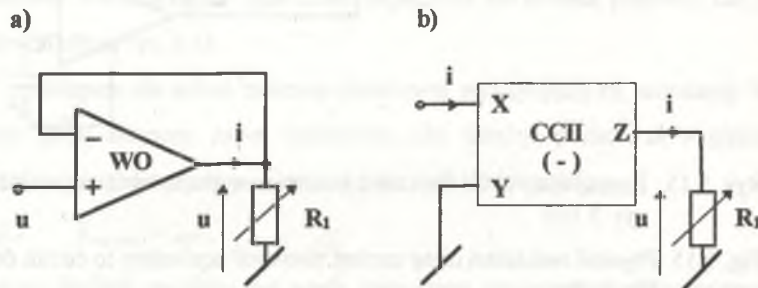
Rys. 5.16. Rzeczywisty układ fizyczny z konwejerem prądowym; odpowiednik obwodu z rys.5.14b

Fig. 5.16. Physical realization using current conveyor equivalent to circuit derived from Fig. 5.14b

Układy te, jakkolwiek nie mają bezpośredniego zastosowania praktycznego, pozwalają jednak poprzez zmianę wartości I_0 i E_0 zamodelować fizycznie dwójniki osobliwe ortogonalne o różnych położeniach obszaru działania D względem układu współrzędnych u-i.

Przykład 5.3

Należy określić zakresy zmian napięcia, prądu i mocy dla wtórnika napięciowego i wtórnika prądowego wykonanych na bazie wzmacniacza operacyjnego i konwejera prądowego o parametrach $|i_{max}| < 0,02$ A, $|u_{max}| < 12$ V. Obciążone są one rezystancją R_1 , tak jak pokazano to na rys. 5.17.

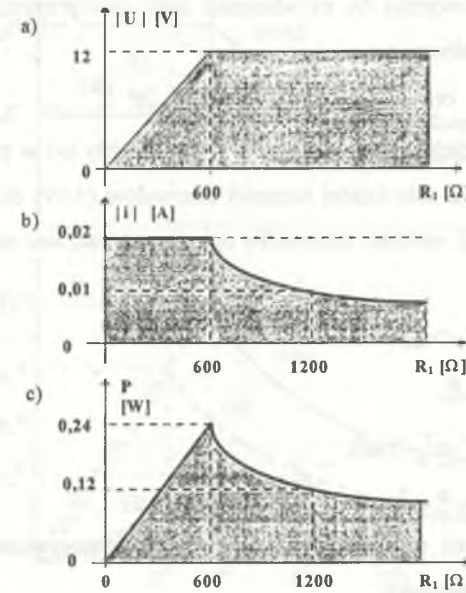


Rys. 5.17. Układy wtórników napięciowego i prądowego z przykładu 5.3

Fig. 5.17. Circuits of current follower and voltage follower from the example 5.3

Są one realizacjami fizycznymi układów z rys. 5.14 przy założeniu $I_0=0$, $E_0=0$. Układy te mają parametry: $\mathcal{J} = 0,02$ A, $\mathcal{E} = 12$ V. Stąd na podstawie relacji (5.94) i (5.95) otrzymuje się: $R_0 = 600$ Ω , $P_0 = 0,24$ W. Aby układy te pracowały poprawnie, moduł napięcia wejściowego wzmacniacza operacyjnego we wtórniku napięciowym musi się zawierać na podstawie relacji (5.96) w obszarze zakreskowanym, pokazanym na rys. 5.18a.

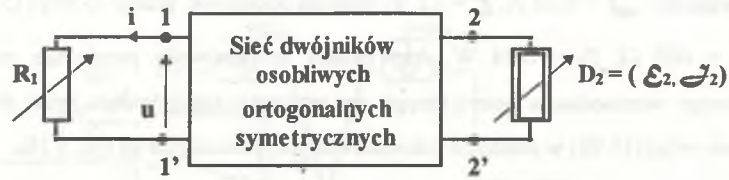
Prąd wejściowy konwejera prądowego we wtórniku prądowym musi mieścić się, na podstawie relacji (5.97), w obszarze zakreskowanym pokazanym na rys. 5.18b. W obu przypadkach wartość mocy wydzielanej na rezystancji R_1 mieścić się będzie w obszarze jak na rys. 5.18c.



Rys. 5.18. Obszary zmian napięcia, prądu i mocy w układach wtórników z przykładu 5.3

Fig. 5.18. A regions of voltage, current and power variations for followers from the example 5.3

W przypadku gdy dwójnik osobliwy D w obwodzie D- R_1 (rys. 5.8) jest dwójnikiem zastępczym sieci osobliwej wieloelementowej (ortogonalnej i symetrycznej), można określić wpływ każdego jej elementu na przebiegi zmiennych zaciskowych na rezystancji R_1 w funkcji zmian jej wartości. Dokonać tego można przez przedstawienie jej w postaci czwórnikowej względem jednego wyróżnionego dwójnika D_2 (rys. 5.19).



Rys. 5.19. Obwód R+sieć osobliwa z wyróżnionym dwójnikiem osobliwym D₂
 Fig. 5.19. R circuit + singular network with clearly indicated singular one-ports D₂

W celu zbadania wpływu dwójnika D₂ na własności całej sieci przyjmuje się graniczne wartości opisujących go interwałów:

$$\mathcal{E}_2 = 0, \text{ lub } \mathcal{E}_2 = \mathcal{M} \text{ oraz } \mathcal{J}_2 = 0, \text{ lub } \mathcal{J}_2 = \mathcal{N} \quad (5.99)$$

Otrzymuje się wtedy cztery jego wersje dla części P płaszczyzny u-i w postaci nullatora, noratora oraz przerwy i zwarcia. Dla każdej wartości interwałów (5.99) da się określić, na podstawie relacji (5.52) i (5.53), wartości interwałów opisujących całą sieć na zaciskach 1-1'.

Wynoszą one:

$$\mathcal{E}_1^0 = (0 + \mathcal{E}_a) \cap \mathcal{E}_b = \mathcal{E}_a \cap \mathcal{E}_b \quad (5.100)$$

$$\mathcal{E}_1^\infty = (\mathcal{M} + \mathcal{E}_a) \cap \mathcal{E}_b = \mathcal{E}_b \quad (5.101)$$

$$\mathcal{J}_1^0 = (0 + \mathcal{J}_a) \cap \mathcal{J}_b = \mathcal{J}_a \cap \mathcal{J}_b \quad (5.102)$$

$$\mathcal{J}_1^\infty = (\mathcal{N} + \mathcal{J}_a) \cap \mathcal{J}_b = \mathcal{J}_b \quad (5.103)$$

Dla każdej z czterech postaci dwójnika D₀ rezystancje charakterystyczne całej sieci na zaciskach 1-1' określają zatem wartości:

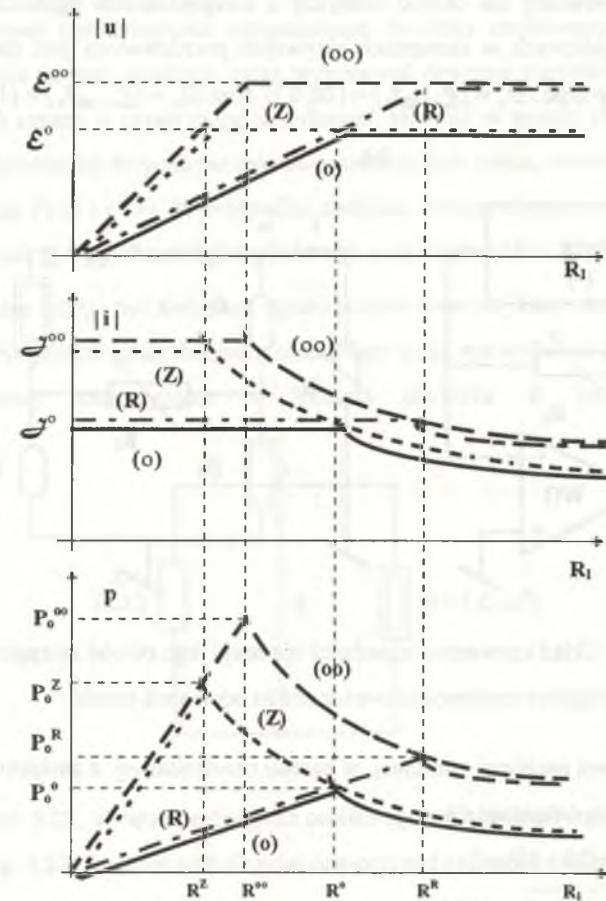
$$R_0^\infty = \frac{\mathcal{E}^\infty}{\mathcal{J}^\infty} = \frac{\mathcal{E}_b}{\mathcal{J}_b} \quad (5.104)$$

$$R_0^0 = \frac{\mathcal{E}^0}{\mathcal{J}^0} = \frac{\mathcal{E}_a \cap \mathcal{E}_b}{\mathcal{J}_a \cap \mathcal{J}_b} \quad (5.105)$$

$$R_0^Z = \frac{\mathcal{E}^0}{\mathcal{J}^\infty} = \frac{\mathcal{E}_a \cap \mathcal{E}_b}{\mathcal{J}_b} \quad (5.106)$$

$$R_0^R = \frac{\mathcal{E}^\infty}{\mathcal{J}^0} = \frac{\mathcal{E}_b}{\mathcal{J}_a} \quad (5.107)$$

Jeżeli granice zakresów zmian napięcia, prądu i mocy naniesie się na wspólne wykresy, wtedy w ogólnym przypadku otrzyma się przebiegi jak na rys. 5.20.

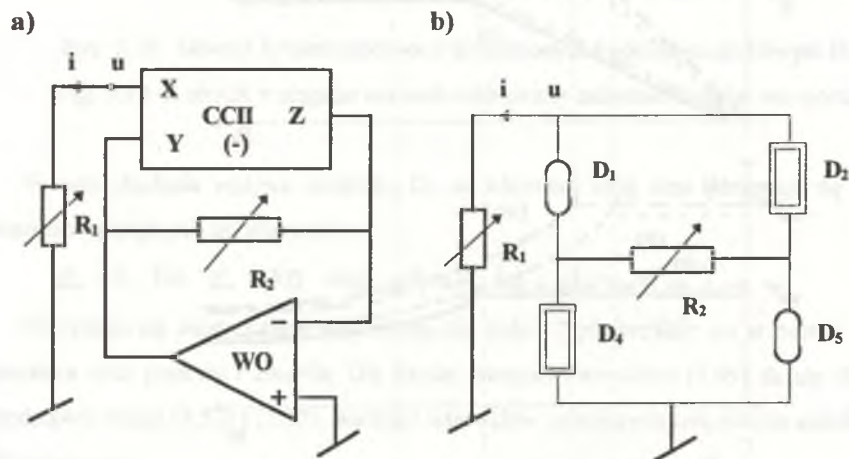


Rys. 5.20. Zakresy zmian napięcia, prądu i mocy dla układu z rys. 5.19
 Fig. 5.20. The variations of the voltage, current and power ranger for circuit derived from Fig. 5.19

Z przedstawionych wykresów wynika, że najmniejszy zakres zmienne zaciskowe mają dla D₂ jako nullatora (linia ciągła „0”), największy dla D₂ jako noratora (linia przerywana „∞”). Natomiast dla zwarcia i przerwy (linia kropkowana „Z” i linia osiowa „R”) granice zakresów częściowo się pokrywają z poprzednimi, a częściowo się mieszczą między nimi. Można na tej podstawie wysnuć wniosek, że dla D=R₂ granice obszarów dla różnych wartości rezystancji R₂ także będą się mieścić między granicami dla nullatora i noratora, a zatem będą to skrajne przypadki dla każdego dowolnego obciążenia rezystancyjnego na zaciskach 2-2'.

Przykład 5.4

Dany jest układ konwertera impedancji ujemnej jak na rys. 5.21a, obciążony na wejściu rezystancją R_1 . Równoważny mu obwód zastępczy z uwzględnieniem ograniczeń wartości napięć i prądów wyjściowych w elementach aktywnych przedstawiony jest na rys. 5.21b. Ograniczenia te mają postać: $D_2 = (\mathcal{E}_2, \mathcal{J}_2) = (20; 0,1)$ oraz $D_4 = (\mathcal{E}_4, \mathcal{J}_4) = (12; 0,02)$.



Rys. 5.21. Układ konwertera impedancji ujemnej i jego obwód zastępczy
Fig. 5.21. Negative resistance converter and its equivalent circuit

Obliczyć parametry sieci osobliwej widzianej w postaci czwórnikowej z zacisków rezystancji R_1 i R_2 . W układzie tym otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_a &= (0+0) \cap (20+12) = 0 \\ \mathcal{E}_b &= (0+12) \cap (20+0) = 12 \text{ V} \\ \mathcal{J}_a &= (0+0) \cap (0,1+0,02) = 0 \\ \mathcal{J}_b &= (0+0,1) \cap (0,02+0) = 0,02 \text{ A} \end{aligned}$$

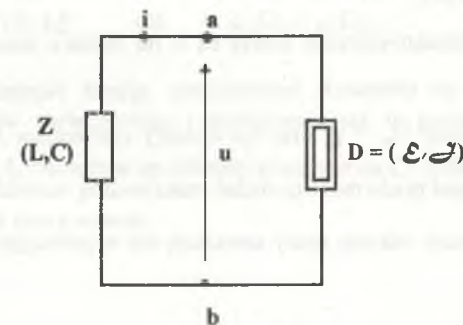
Stąd rezystancje charakterystyczne mają wartości:

$$R_0^\infty = 600 \Omega, \quad R_0^Z = 0, \quad R_0^R \rightarrow \infty,$$

natomiast R_0^0 jest nieokreślona. Ze względu na istnienie w układzie nullatorów, graniczne linie „Z”, „R” i „O” pokrywają się z osią R_1 , co oznacza, że zmiany zakresów prądu, napięcia i mocy będą się zawierały wewnątrz obszaru ograniczonego linią „ ∞ ” (takie same jak na rys. 5.18). W skrajnych przypadkach szerokości tych interwałów mogą być dowolnie małe, zmierzając do zera w zależności od wartości rezystancji R_1 i R_2 .

5.3. CZĘSTOTLIWOŚCIOWE WŁASNOŚCI POŁĄCZEŃ ORTOGONALNYCH DWÓJNIKÓW OSOBLIWYCH Z DWÓJNIKAMI REAKTANCYJNYMI

Przy założeniu bezinercyjności ortogonalnego dwójnika osobliwego wartości chwilowe prądu i napięcia na jego zaciskach mogą przyjmować dowolne wartości z obszaru pracy D , przy czym ich zmiany w czasie mogą się odbywać zarówno w sposób ciągły, jak i skokowy, jedynie z ograniczeniem dotyczącym zakresu amplitudy tych zmian, określonej wartościami u_m , i_m przez relacje (5.6) i (5.7). W przypadku dwójnika ortogonalnego symetrycznego będą to wprost wartości \mathcal{E} i \mathcal{J} . Przebiegi napięcia $u(t)$ oraz prądu $i(t)$ w funkcji czasu są więc od siebie niezależne i mogą być funkcjami ograniczonymi dowolnej klasy abstrakcji. Ograniczenie dynamiki zmian punktu pracy dwójnika osobliwego mogą spowodować jedynie dołączone do niego elementy zachowawcze w postaci dwójnika Z jak na rys. 5.22.



Rys. 5.22. Połączenie dwójnika osobliwego z dwójnikiem reaktancyjnym
Fig. 5.22. A circuit with singular one-port and reactance one-port

Niechaj dwójnik ten opisuje równanie różniczkowe typu:

$$\sum_{l=0}^n a_l i^{(l)} = \sum_{k=0}^m b_k u^{(k)} \tag{5.108}$$

Przebiegami czasowymi prądu i napięcia w układzie z rys. 5.22 mogą być zatem wszystkie pary $\{u(t), i(t)\}$ spełniające jednocześnie zależności:

$$|u(t)| \leq \mathcal{E}, \quad |i(t)| \leq \mathcal{J} \tag{5.109}$$

oraz równanie (5.108). Funkcje czasowe prądu i napięcia wyznaczają wtedy na płaszczyźnie u - i trajektorie punktów pracy, których tory muszą się całkowicie zawierać wewnątrz obszaru D .

W celu przebadania częstotliwościowych własności układu D-LC przyjmuje się parę funkcji $\{u(t), i(t)\}$ jako przebiegi harmoniczne o postaci $\{Ie^{j\omega t}, Ue^{j\omega t}\}$. Jednocześnie dwójnik Z jako reaktancyjny posiada impedancję określoną wzorem:

$$Z(j\omega) = jH \frac{\prod_{k=1}^p (\omega^2 - \omega_{0k}^2)}{\prod_{l=1}^p (\omega^2 - \omega_{Bl}^2)} \quad (5.110)$$

Maksymalny zakres mocy pozornej, jaką mogą osiągnąć sygnały prądu i napięcia, określa relacja:

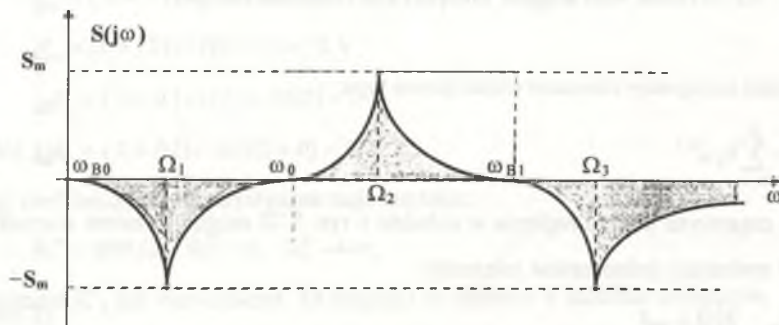
$$S_m = \pm j \mathcal{E} \mathcal{J} \quad (5.111)$$

Częstotliwości, dla których moc tę mogą osiągać, nazwać można pulsacjami charakterystycznymi Ω_k układu D-LC, a ich wartości określić z zależności:

$$Z(j\Omega_k) = \pm j \mathcal{E} / \mathcal{J} = \pm j R_0 \quad (5.112)$$

Poszczególne pulsacje charakterystyczne dzielą oś ω na obszary zawierające zera impedancji $Z(j\omega)$, w których to obszarach harmoniczny sygnał napięcia może osiągnąć maksymalną wartość amplitudy $U_m = \mathcal{E}$ oraz na obszary zawierające bieguny impedancji $Z(j\omega)$, w których jedynie sygnał prądu może posiadać maksymalną wartość amplitudy $I_m = \mathcal{J}$. Dla obszarów tych maksymalne zakresy mocy zawierają się w przedziale określonym przez przebiegi:

$$S(j\omega) = \begin{cases} Z(j\omega) \mathcal{J}^2 / 2 & \text{dla } \omega \in \langle \Omega_k, \omega_{0k}, \Omega_{k+1} \rangle \\ -Y(j\omega) \mathcal{E}^2 / 2 & \text{dla } \omega \in \langle \Omega_l, \omega_{Bl}, \Omega_{l+1} \rangle \end{cases} \quad (5.113)$$



Rys. 5.23. Mocowa interwałowa charakterystyka częstotliwościowa układu D-LC
Fig. 5.23. Interval power characteristic as a function of frequency for D-LC circuit

Wartości mocy pozornej układu mogą się zawierać w przedziałach zakreskowanych przedstawionych na rys. 5.23. Wykres ten może być nazwany mocową interwałową charakterystyką częstotliwościową układu D-LC.

Wartości maksymalnego zakresu modułów mocy pozornej określa relacja:

$$|S(j\omega)| = \begin{cases} |Z(j\omega)| \mathcal{J}^2 / 2 & \text{dla } \omega \in \langle \Omega_k, \omega_{0k}, \Omega_{k+1} \rangle \\ |Y(j\omega)| \mathcal{E}^2 / 2 & \text{dla } \omega \in \langle \Omega_l, \omega_{Bl}, \Omega_{l+1} \rangle \end{cases} \quad (5.114)$$

Stąd przez rozdzielanie zmiennych otrzymuje się zakresy (interwały) maksymalnych zmian amplitudy napięcia i prądu w funkcji częstotliwości:

$$|U_m(j\omega)| = \begin{cases} |Z(j\omega)| \mathcal{J} & \text{dla } \omega \in \langle \Omega_k, \omega_{0k}, \Omega_{k+1} \rangle \\ \mathcal{E} & \text{dla } \omega \in \langle \Omega_l, \omega_{Bl}, \Omega_{l+1} \rangle \end{cases} \quad (5.115)$$

$$|I_m(j\omega)| = \begin{cases} \mathcal{J} & \text{dla } \omega \in \langle \Omega_k, \omega_{0k}, \Omega_{k+1} \rangle \\ |Y(j\omega)| \mathcal{E} & \text{dla } \omega \in \langle \Omega_l, \omega_{Bl}, \Omega_{l+1} \rangle \end{cases} \quad (5.116)$$

Przykład 5.5

Układy wtórników napięciowego i prądowego, jak w przykładzie 5.3, o parametrach $\mathcal{E} = 10 \text{ V}$, $\mathcal{J} = 0,1 \text{ A}$, obciążone są układem szeregowym CL o danych $L = 10 \text{ hm}$, $C = 1 \mu\text{F}$.

Maksymalna wartość mocy wynosi:

$$S_m = \pm 1 \text{ VA} \quad (5.117)$$

Częstotliwość zera:

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 10^4 \text{ rad/s} \quad (5.118)$$

Częstotliwości charakterystyczne są rozwiązaniami równania (5.112), które w tym przypadku ma postać:

$$Z(j\omega) = j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = j \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{J}} \quad (5.119)$$

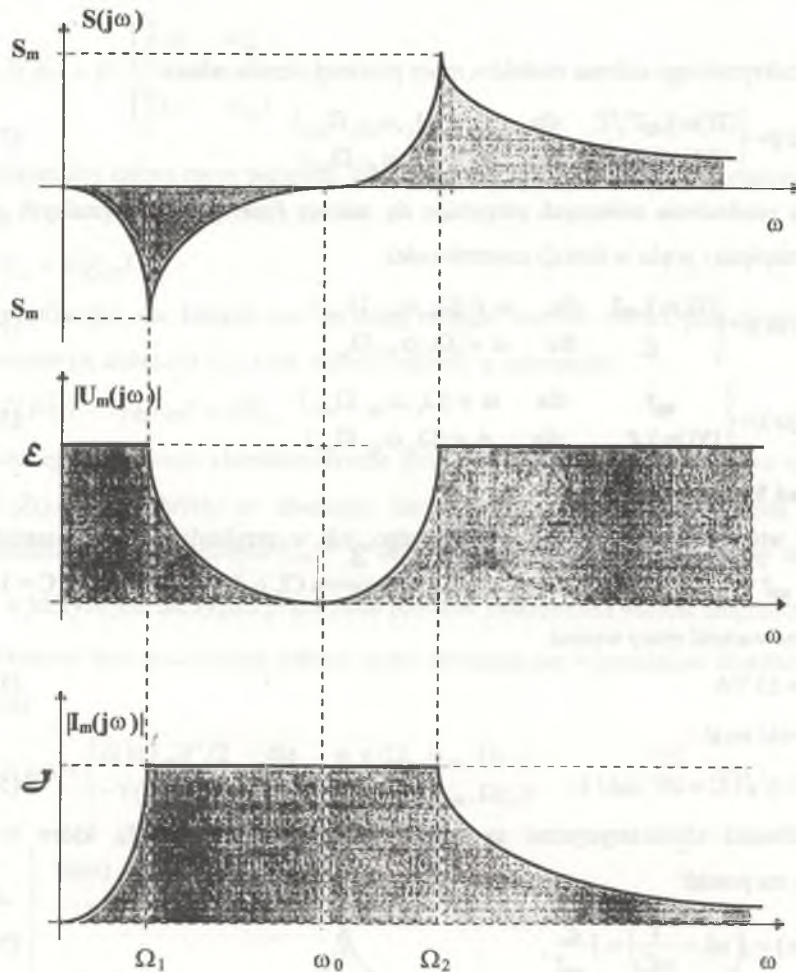
stąd w wyniku otrzymuje się relację:

$$\Omega_{1,2} = \frac{\pm \mathcal{E} C + \sqrt{\mathcal{E}^2 C^2 + 4LC \mathcal{J}^2}}{2LC \mathcal{J}} \quad (5.120)$$

Po podstawieniu danych otrzymuje się:

$$\Omega_{1,2} = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2} 10^4 \text{ rad/s} = 1,118 \pm 1 \cdot 10^4 \text{ rad/s} \quad (5.121)$$

Maksymalne zakresy zmian mocy S , U_m i I_m w przykładowych wtórnikach przedstawione są na rys. 5.24.



Rys. 5.24. Przedziały zmian S , U_m i I_m w przykładowych układach wtórników
Fig. 5. 24. A range S , U_m and I_m variations in the examples of followers

5.4. WŁASNOŚCI POŁĄCZEŃ ORTOGONALNYCH DWÓJNIKÓW OSOBLIWYCH Z OBWODAMI RLC

Niechaj dwójnik Z w układzie na rys. 5.22 będzie dwójnikiem biernym złożonym z elementów RLC o impedancji $Z(j\omega)$. Ekstremum modułu maksymalnej mocy pozornej, jaką mogą osiągać sygnały prądu i napięcia na zaciskach a-b, określa wartość:

$$|S_m| = \mathcal{E} / 2 \quad (5.122)$$

Osiąga ona tę wartość dla pulsacji charakterystycznych Ω_k , dla których moduł impedancji dołączonej Z jest równy rezystancji charakterystycznej dwójnika osobliwego. Oznacza to:

$$|Z(j\omega)| = \mathcal{E} / \mathcal{I} = R_0 \quad (5.123)$$

Zmiany zakresu modułu mocy pozornej w funkcji pulsacji określa relacja:

$$|S(j\omega)| = \begin{cases} |Z(j\omega)| \mathcal{I}^2 / 2 & \text{dla } |Z(j\omega)| \leq R_0 \\ |Y(j\omega)| \mathcal{E}^2 / 2 & \text{dla } |Z(j\omega)| > R_0 \end{cases} \quad (5.124a)$$

$$(5.124b)$$

Stąd przez rozdzielenie zmiennych zaciskowych maksymalne zakresy wartości ich amplitud wynoszą:

$$|U_m(j\omega)| = \begin{cases} |Z(j\omega)| \mathcal{I} & \text{dla } |Z(j\omega)| \leq R_0 \\ \mathcal{E} & \text{dla } |Z(j\omega)| > R_0 \end{cases} \quad (5.125a)$$

$$(5.125b)$$

$$|I_m(j\omega)| = \begin{cases} \mathcal{I} & \text{dla } |Z(j\omega)| \leq R_0 \\ |Y(j\omega)| \mathcal{E} & \text{dla } |Z(j\omega)| > R_0 \end{cases} \quad (5.126a)$$

$$(5.126b)$$

Jeżeli impedancję $Z(j\omega)$ wyrazi się przez jej część rzeczywistą i urojoną, to częstotliwości charakterystyczne spełniają równanie:

$$[\text{Im}\{Z(j\omega)\}]^2 = R_0^2 - [\text{Re}\{Z(j\omega)\}]^2 \quad (5.127)$$

W przypadku gdy równanie to nie posiada rozwiązań, występuje jedna z dwu możliwości:

$$(A) |Z(j\omega)| \leq R_0 \quad (5.128)$$

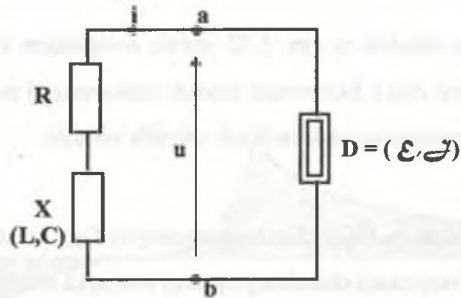
Wtedy moduły mocy pozornej, napięcia i prądu określone są przez zależności (5.124a), (5.125a) i (5.126a).

$$(B) |Z(j\omega)| > R_0 \quad (5.129)$$

Wtedy zastosowanie mają tylko zależności (b) w tych wzorach.

W przypadku gdy impedancja $Z(j\omega)$ dołączona do dwójnika osobliwego D jest połączeniem szeregowym rezystancji R z dowolną impedancją o charakterze czysto reaktancyjnym (rys. 5.25), wtedy równanie (5.127) przyjmuje postać:

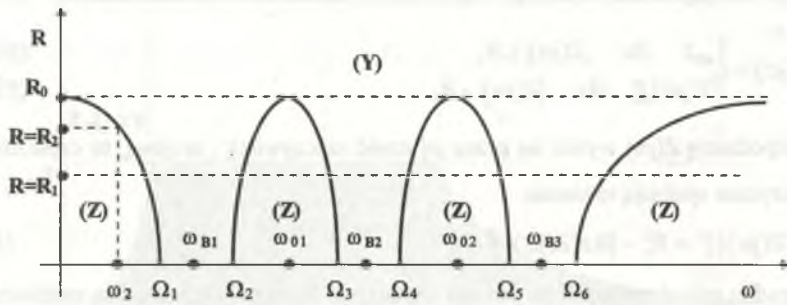
$$X^2(\omega) = R_0^2 - R^2 \quad (5.130)$$



Rys. 5.25. Obciążenie dwójnika osobliwego D impedancją z wyodrębnioną szeregową rezystancją R

Fig. 5.25. A impedance with series resistance R indicated as a load of a singular one-port D

Ma ono charakter funkcji dwu zmiennych typu $f(\omega, R) = 0$. Można na jej podstawie określić wartości częstotliwości charakterystycznych w zależności od wielkości rezystancji szeregowej R. Tworzą one na płaszczyźnie R- ω linie o kształcie jak na rys. 5.26, dla których moduł mocy pozornej na zaciskach a-b może osiągnąć wartość maksymalną S_m .

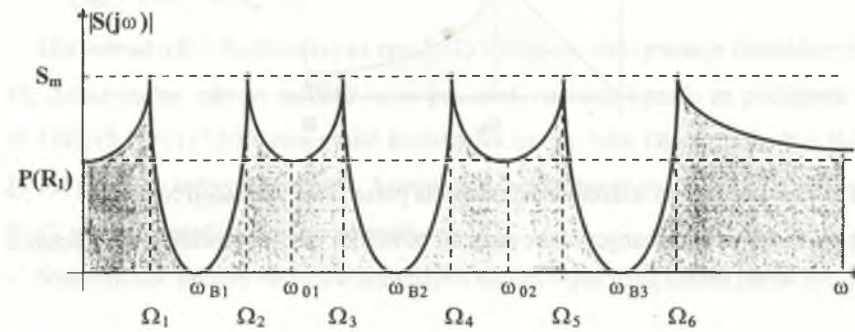


Rys. 5.26. Linie wyznaczone przez wartości częstotliwości charakterystycznych w zależności od wartości rezystancji szeregowej R i częstotliwości ω

Fig. 5.26. The lines obtained from characteristic frequency values as a function of series resistance R an pulsation ω

Linie te rozgraniczają obszary, dla których maksymalny zakres mocy pozornej jest funkcją albo impedancji Z, albo admitancji Y obwodu dołączonego. W obszarach tych tylko jedna zmienna zaciskowa może osiągnąć wartość maksymalną \mathcal{E} lub \mathcal{J} .

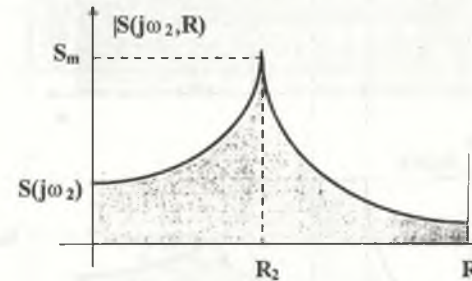
Przykładowy kształt maksymalnego zakresu modułu mocy pozornej w funkcji pulsacji dla pewnej wartości rezystancji $R = R_1 < R_0$ (linia przerywana na rys. 5.26) może mieć wygląd jak na rys. 5.27.



Rys. 5.27. Maksymalne zakresy zmian mocy pozornej dla pewnej wartości rezystancji szeregowej $R = R_1$

Fig. 5.27. Maximum changes the range of apperent power of some values of series resistance $R = R_1$

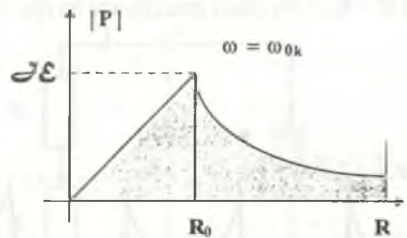
Natomiast dla pewnej określonej pulsacji $\omega_2 < \Omega_1$ przy zmieniającej się wartości rezystancji R moduł mocy S ma zakres jak na rys. 5.28.



Rys. 5.28. Zakres zmian mocy pozornej w funkcji R dla $\omega = \omega_2$

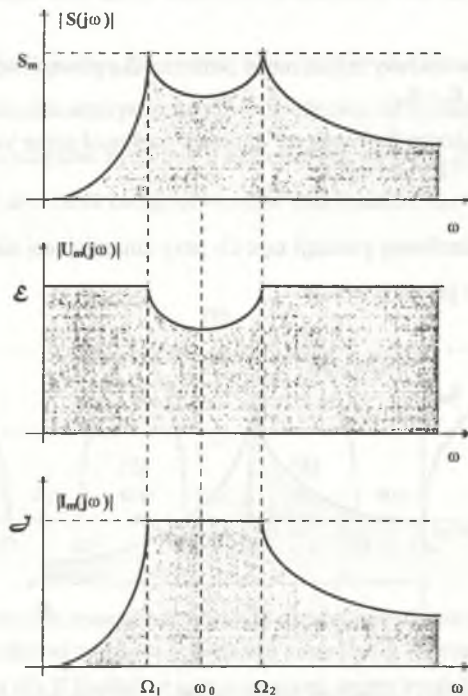
Fig. 5.28. Dependence of the range of apperent power changes on resistance R of $\omega = \omega_2$

Dla pulsacji, dla których występują zera reaktancji $X(\omega)$, kształt maksymalnego zakresu mocy pozornej jest równoważny mocy czynnej P wydzielanej na rezystancji R w funkcji zmian jej wartości (rys. 5.29).



Rys. 5.29. Maksymalny zakres zmian mocy dla pulsacji zer reaktancji $X(\omega)$

Fig. 5.29. Maximum changes of the range of power for the frequencies of the reactance $X(\omega)$ zeros



Rys. 5.30. Maksymalne zakresy zmian S , U_m , I_m w układzie D-RLC szeregowo

Fig. 5.30. Maximum changes range of the S , U_m , I_m in series D-RLC circuit

Dla pulsacji ω_{Bk} odpowiadających biegunom reaktancji $X(\omega)$ moc jest oczywiście równa zero niezależnie od wartości rezystancji R .

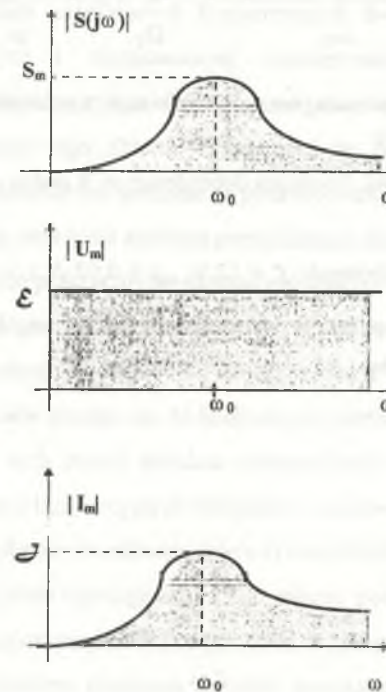
Przykład 5.6

Niechaj impedancja Z w układzie z rys. 5.25 będzie szeregowym połączeniem elementów RLC. Równania (5.127) i (5.130) przyjmują wtedy postać:

$$(\omega L - 1/\omega C)^2 = R_0^2 - R^2 \tag{5.131}$$

Dla warunku $R < R_0$ (linia (a) na rys. 5.32) występują dwie pulsacje charakterystyczne Ω_1 i Ω_2 . Maksymalne zakresy modułu mocy pozornej, napięcia i prądu na podstawie zależności (5.124), (5.125) i (5.126) mogą mieć kształty jak na rys. 5.30. Dla warunku $R = R_0$, równanie (5.131) posiada jedno rozwiązanie, którym jest częstotliwość rezonansowa (zera) ω_0 obwodu RLC, równa częstotliwości charakterystycznej Ω .

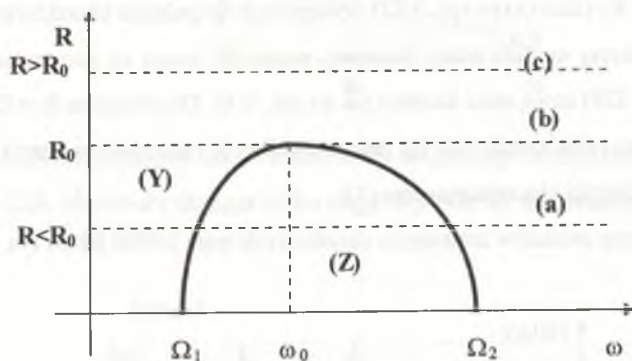
Maksymalne zakresy modułów zmiennych zaciskowych mają kształt jak na rys. 5.31.



Rys. 5.31. Zakresy zmian S , U_m , I_m w układzie D-RLC szeregowo, dla $R = R_0$

Fig. 5.31. Changes range of the S , U_m , I_m in series D-RLC circuit for $R = R_0$

W przypadku gdy $R < R_0$ (linia (c) na rys. 5.32) równanie nie ma rozwiązań, a zakresy zmian $|S|$, $|U_m|$, $|I_m|$ mają kształt taki sam jak w przypadku poprzednim, nie osiągając jednak wartości maksymalnej S_m i \mathcal{J} . Wraz ze zmianą R częstotliwości charakterystyczne Ω_1 i Ω_2 wyznaczają na płaszczyźnie R - ω linie o kształcie jak na rys. 5.32.



Rys. 5.32. Krzywa wyznaczona przez częstotliwości charakterystyczne przy zmianach R i ω

Fig. 5.32. The characteristic frequency dependence on R and ω

Dla przykładowych wartości liczbowych: $\mathcal{E} = 12$ V, $\mathcal{J} = 0,02$ A, $L = 10^{-2}$ H, $C = 10^{-6}$ F, częstotliwości charakterystyczne na osi ω wynoszą: $\Omega_1 = 1630$ r/s, $\Omega_2 = 61630$ r/s, a częstotliwość rezonansowa $\omega_0 = 10^4$ r/s.

6. PODSUMOWANIE I WNIOSKI KOŃCOWE

Wprowadzenie do elektrotechniki pojęcia elementów osobliwych ma dwa aspekty: teoretyczny i praktyczny. W aspekcie teoretycznym są one konsekwencją przyjęcia idealnych modeli układów aktywnych o parametrach skupionych zawierających źródła sterowane, a także idealne rezystancje nieliniowe. Przyjęcie istnienia elementów osobliwych o dowolnych kształtach obszarów pracy pozwala na teoretyczne połączenia dowolnych rezystancyjnych dwójników aktywnych znosząc istniejące dotychczas w tym względzie zakazy. W ogólnym przypadku w wyniku takiego połączenia otrzyma się zawsze dwójnik, którego charakterystyką będzie pewien zbiór punktów (obszar) na płaszczyźnie u - i lub jego całkowity brak. W konsekwencji zbiór uogólnionych bezinercyjnych dwójników rezystancyjnych staje się zbiorem kompletnym i niesprzecznym wewnątrz, gdyż teoretyczne utworzenie jakiegokolwiek sieci złożonej z jego elementów nie powoduje powstania dwójnika zastępczego o własnościach spoza tego zbioru. Przedstawione podejście do teorii bezinercyjnych obwodów aktywnych może być uważane za podsumowanie wieloletniego rozwoju tego działu elektrotechniki mając znaczenie zarówno porządkujące, jak i dydaktyczne.

W zastosowaniach praktycznych elementy osobliwe pozwalają uniezależnić analizę i syntezę obwodów aktywnych od konkretnych realizacji praktycznych źródeł sterowanych w postaci różnego rodzaju układów elektronicznych. Pozwala to w elastyczny sposób przystosowywać modele teoretyczne do konkretnych potrzeb praktycznych.

Zadanie łącznika tych dwóch dziedzin elektrotechniki spełniają kryteria realizowalności fizycznej uogólnionych bezinercyjnych dwójników osobliwych.

Charakterystyki (obszary na płaszczyźnie u - i) wszystkich tych elementów można podzielić, ze względu na ich kształt topologiczny, a tym samym podstawowe własności na trzy grupy: linie, obszary oraz izolowane punkty, co pokazano w tablicy 6.1.

Grupa pierwsza zawiera klasyczne dwójniki rezystancyjne liniowe i nieliniowe, w tym także aktywne. Ich cechą topologiczną jest to, że najbliższe otoczenie dowolnego punktu charakterystyki zawiera co najwyżej dwa punkty tej samej charakterystyki.

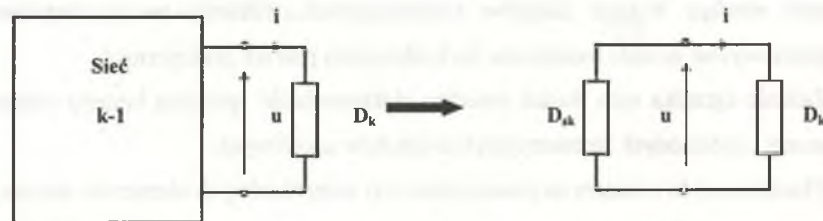
Druga grupa obejmuje dwójniki o charakterystykach będących pewnym ciągłym obszarem na płaszczyźnie u - i . Najbliższe otoczenie dowolnego punktu ich charakterystyki zawiera co najmniej dwa punkty tej charakterystyki aż do nieskończenie wielu (np. norator).

Grupa trzecia - to dwójniki o charakterystykach będących izolowanymi punktami na płaszczyźnie u - i , a co zatem idzie ich najbliższe otoczenie nie zawiera żadnego punktu tej samej charakterystyki (np. nullator).

Tablica 6.1

Nr grupy	Nazwa	Kształt	Najbliższe otoczenie dowolnego punktu zawiera:
1	Linie		co najwyżej dwa punkty tej samej charakterystyki,
2	Obszary		co najmniej dwa punkty tej samej charakterystyki,
3	Punkty		zero punktów tej samej charakterystyki.

Aby określić możliwość fizycznej realizacji sieci zawierającej k uogólnionych bezinercyjnych dwójników osobliwych, należy rozpatrzyć zachowanie się zmiennych zaciskowych każdego dwójnika D_k tej sieci w obwodzie utworzonym przez połączenie go z dwójnikiem zastępczym pozostałej części sieci, nazwanym D_{sk} (rys. 6.1).



Rys. 6.1. Połączenie k -tego uogólnionego bezinercyjnego dwójnika osobliwego z pozostałą częścią sieci

Fig. 6.1. Connections of k -th generalized inertialess singular one-port with remaining part of a network

Problem sprowadza się do k -krotnego przeanalizowania prostego obwodu złożonego z dwu uogólnionych dwójników osobliwych D_{sk} i D_k o określonych charakterystykach (obszarach pracy) względem wyróżnionych ich zacisków. Obszary te po nałożeniu na siebie wyznaczają

wspólny obszar pracy D_p , a tym samym obszar współpracy dwójnika D_{pk} z pozostałą częścią sieci. Jeżeli założy się, że charakterystyki dwójników D_{sk} i D_k mogą posiadać wszystkie możliwe kształty obszarów pracy z trzech grup dwójników osobliwych, to otrzymane wspólne obszary pracy będą także miały kształty linii, obszarów lub izolowanych punktów. Aby obwód D_{sk} - D_k mógł być realizowalny fizycznie, musi spełniać następujące warunki konieczne:

Warunek 6.1 (Istnienia)

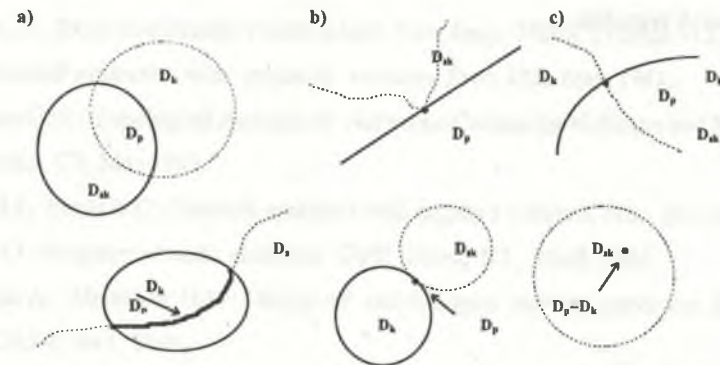
Dwójniki D_{sk} i D_k posiadają wspólny obszar pracy.

Warunek 6.2 (Jednoznaczności)

Para zmiennych zaciskowych (u , i) posiada jednoznaczne wartości, zatem wspólny obszar pracy D_{pk} musi być pojedynczym punktem.

Warunek 6.3 (Wrażliwości)

Nieskończenie małe zmiany charakterystyk obu dwójników nie mogą zmienić jednoznaczności wartości pary zmiennych zaciskowych (u , i).



Rys. 6.2. Przykłady wspólnych obszarów pracy dwójników D_{sk} i D_k

Fig. 6.2. Examples of common operating-regions for one-ports D_{sk} and D_k

Na rys. 6.2a przedstawione są przykłady wspólnych obszarów pracy dwójników D_{sk} i D_k , które spełniają tylko warunek 1, na rys. 6.2b spełniające warunki 1 i 2 oraz na rys. 6.2c spełniające wszystkie trzy warunki realizowalności fizycznej. Przykłady z rys. 6.2c wyczerpują wszystkie możliwe przypadki spełniające podane warunki, zatem na ich podstawie można sformułować twierdzenie:

Twierdzenie 6.1

Aby obwód złożony z dwóch uogólnionych bezinercyjnych dwójników osobliwych mógł być realizowalny fizycznie, musi zawierać albo dwa dwójniki z grupy 1, albo jeden z grupy 2, a drugi z grupy 3 i tylko takie zestawy.

Jakkolwiek pewne pojedyncze dwójniki osobliwe jak i całe ich sieci mogą same nie być realizowalne fizycznie (w sensie podanym poprzednio), to jednak ich połączenia z odpowiednio dobranymi innymi uogólnionymi bezinercyjnymi dwójnikami osobliwymi są realizowalne i mogą być stosowane praktycznie, co uzasadnia budowanie teoretycznych modeli ich analizy i syntezy.

Dalsze rozwijanie teorii elektrycznych elementów osobliwych może być ukierunkowane na układy nieliniowe [C10], [S9], szczególnie z zastosowaniem najbardziej podstawowych, jakimi są analogowe układy mnożące [T15, T16, T22]. Korzystne mogłoby być także wprowadzenie pojęcia inercyjnych elementów osobliwych odzwierciedlających oczywisty fakt, że wszystkie rzeczywiste układy aktywne posiadają własności zależne od częstotliwości przetwarzanych sygnałów.

LITERATURA

- A1. Abuelmalatti M.T.: Grounded capacitor current-mode oscillator using single current follower. IEEE Trans. CAS-I, No 12, 1992.
- A2. AD 830, Analog Devices, Karta katalogowa.
- A3. AD 844, Analog Devices, Karta katalogowa.
- B1. Biało M., Newcomb R.W.: Generation of all finite linear circuits using the integrated DVCCS. IEEE Trans. CT-18, No 3, 1971.
- B2. Biało M.: Elementy syntezy liniowych układów scalonych. WKŁ, Warszawa, 1973.
- B3. Bruun E.: Constant-bandwidth current mode operational amplifier. Electr. Lett., No 18, 1991.
- B4. Burton L.T.: RC-active circuits. Prentice-Hall, New Jersey, 1980. C1. Carlin H.J., Youla D.C.: Network synthesis with negative resistors. Proc. IRE, May, 1961.
- B5. Brayshaw G. S.: Topological Analysis of Networks Containing Nullators and Norators. IEEE Trans. CT, May 1969.
- C1. Carlin H.J., Youla D.C.: Network synthesis with negative resistors. Proc. IRE, May, 1961.
- C2. Carlin H.J.: Singular network elements. IEEE Trans. CT, Mrch. 1964.
- C3. Carlosena A., Moschytz G.S.: Design of variable-gain current conveyors. IEEE Trans. CAS-I, No 1, 1994.
- C4. Cel J.: Bounds on solutions of non-linear resistive networks. Int. Journal of CTAS, Vol 18, 1990.
- C5. Chen J-J., Tsao H-W., Chen C-C.: Operational transresistance amplifier using CMOS technology. Electr. Lett. No 22, 1992.
- C6. Chen J-J., Chen C-C., Tsao H-W., Liu S-I.: Current-mode oscillators using single current follower. Electr. Letters, No 22, 1991.
- C7. Cheng M.C.H., Toumazou C.: General linear composite - MOSFET theory and applications. Electr. Letters, No 10, 1992.
- C8. Chua L.O.: The rotator - a new network component. Proc. IEEE, Sept. 1967.
- C9. Cichocki A., Filipowicz S., Osowski S.: Realizacja rotatora i reflektora przy użyciu wzmacniaczy operacyjnych. PAK, Nr 2, 1978.

- C10. Cichocki A.: Synteza układów nieliniowych przy użyciu wzmacniaczy operacyjnych i elementów sterowanych. Politechnika Warszawska, Zeszyty Naukowe Elektryka, z. 67, 1982.
- C11. Czarnul Z., Takai S., Fuji N.: Common-mode feedback circuit with differential-difference amplifier. IEEE Trans. on CAS-I, No 3, 1994.
- C12. Cel J.: Adjoint nullator-norator networks. Int. Jour. CTA, Vol. 22, 1994.
- C13. Chua L.O.: Analysis and synthesis of multivalued memoryless nonlinear networks. IEEE Trans. CT, June 1967.
- D1. Davies A.C.: The significance of nullators, norators and nullors in active-network theory. The Radio and Electr. Engin. Nov. 1967.
- D2. Dugue-Carrilio J.F., Varverole J.M., Perez-Aloe R.: Accurate and robust $\pm nV$ extractor. Electr. Letters, No 4, 1993.
- E1. Etienne-Cummings R., Hathaway R., Van der Spigel J.: Accurate and simple CMOS "one-over" circuit. Electr. Letters, No 18, 1993.
- F1. Fabre A., Saaid O.: Novel translinear impedance convertor and bandpass filter applications. Electr. Lett. No 9, 1993.
- G1. Guzelis C., Gokuar I.C.: A canonical representation for piecewise-affine maps and its applications to circuit analysis. IEEE Trans. CAS, No 11, 1991.
- H1. Higashimura M., Fukui Y.: Realization of immittance floatator using nullors. IEICE Trans. Fundamentals, No 6, 1992.
- H2. Higashimura M.: Current-mode allpass filter using FTFN with grounded capacitor. Electr. Letters, No 13, 1991.
- H3. Higashimura M.: Realization of current-mode transfer function using four-terminal floating nullor. Electr. Letters, No 2, 1991.
- H4. Higashimura M.: Electronically tunable OTA-C mutually coupled circuit. Electr. Letters, No 14, 1991.
- H5. Huijsing J.H., De Korte J.: Monolithic Nullor - a universal active network element. IEEE Jour. of Solid-State Circuit, No 1, 1977.
- H6. Huang S-C., Ismail M.: Novel fully-integrated active filters using the CMOS differential difference amplifier. Proc. 32nd Midwest Symp. CAS, 1989.
- H7. Huijsing J.H.: Operational floating amplifier. IEE Proc. Pt.G. No 2, 1990.

- K1. Kim D.Y., Ahn J.C., Kius H.Y.: Design of CMOS OTA-C integrator and its application to continuous-time second-order active C filter. IEEE 32nd Midwest Symp. on CAS, 1989.
- L1. Lasek L., Witkowski J.J.: Uogólniona metoda analizy układów elektronicznych. Politechnika Śląska, Skrypt nr 691, 1977.
- L2. LM 13700, National Semiconductor, Karta katalogowa.
- M1. Mayers B.R.: Nullor model of the transistor. Proc. IEEE, No 7, 1965.
- M2. Martinelli G.: Physical characterization of the nullor-model of the transistor. Int. Symp. on Network Theory, Belgrado, 1968.
- M3. Martinelli G.: On the nullor. Proc. IEEE, No 3, 1965.
- M4. Mitra S.K.: Analysis and synthesis of linear active networks. J. Wiley. N.Y. 1968.
- M5. Moore R.E.: Interval analysis. Prentice-Hall, 1966.
- M6. Moos P.: Nulorové modely kwazilineárních a nelineárních elektronických prvků. Ceskoslovenska Akademie VED, Praha, 1983.
- M7. Moos P., Pospisil J.: Nonconventional two-port matrix decompositions and their realization. Int. Jour. CTA, Vol 8, 1980.
- N1. Neumaier A.: Interval methods for systems of equations. Cambridge University Press, 1990.
- O1. Osowski S.: Nieliniowe elementy dynamiczne w aspekcie realizacji praktycznej. Kwart. Elektron. i Telekom. PAN. PWN, Warszawa, zeszyt 1, 1990.
- O2. Osowski S.: Zagadnienia minimalizacji liczby wzmacniaczy operacyjnych w syntezie układów wielowejściowych. Politechnika Warszawska, Zeszyty Naukowe Elektryka, z. 58, 1979.
- P1. Pal R.R., Acharya H.A., Kai S., Chakrabati N.B.: Voltage controlled oscillators using complementary current mirror inverter. Electr. Letters, No 18, 1992.
- R1. Riewruja V., Surakampontorn W., Surawatpunya C.: Integrable voltage-controlled and current controlled nonlinear resistance. IEE Proc. Pt.G, No 4, 1990.
- S1. Senani R.: A novel application of four-terminal floating nullors. Proc. IEEE, No 11, 1987.
- S2. Senani R.: Novel application of generalized current conveyer. Electron. Letters, No 4, 1984.
- S3. Senani R.: Floating immittance realisation nullor approach. Electr. Letters, No 7, 1988.

- S4. Smith K.C., Sedra A.: The current conveyor - a new circuit building block. IEEE Proc. Vol. 54, 1968.
- S5. Smith K.C., Sedra A.: A second generation current conveyor and its applications. IEEE Trans. CT-17, 1970.
- S6. Skelboe S.: True worst-case analysis of linear electrical circuits by interval arithmetic. IEEE Trans. CAS, No 10, 1979.
- S7. Surakampontrorn W.: CMOS floating voltage controlled negative resistor. Electr. Letters, No 15, 1992.
- S8. Someda C. G.: The bigenerator - an active pathological network. IEEE Trans. CT, Febr. 1969.
- S9. Singer S., Erickson R.W.: Power-source element and its properties. IEE Proc. CDS, No. 3, 1994.
- T1. Tellegen B.D.H.: La recherche pour une serie complete d'elements de circuit ideaux non-lineaires. R. C. Seminario Matematico e Fisico, Milano, Nr 25, 1954.
- T2. Toumazou C., Payne A., Lidgley F.J.: Operational floating conveyor. Electr. Letters, No 8, 1991.
- T3. Toumazou C., Lidgley F.J., Markis C.a.: Extending voltage-mode op amps to current-mode performance. IEE Proc. Pt.G. No 2, 1990.
- T4. Topór-Kamiński L., Pasko M.: Laboratorium z wybranych zagadnień elektrotechniki teoretycznej. Cz. II. Skrypt Politechniki Śląskiej, 1994.
- T5. Topór-Kamiński L.: Wprowadzenie idealnych źródeł autonomicznych i źródłatora do zbioru elementów osobliwych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Automatyka, z.71, 1983.
- T6. Topór-Kamiński L.: Rozszerzenie pojęcia dwójnika rezystancyjnego na uogólnione dwójniki osobliwe. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Elektryka, z. 126, 1992.
- T7. Topór-Kamiński L.: Diodowe elementy osobliwe. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Elektryka, z. 88, 1984.
- T8. Topór-Kamiński L.: Zastosowanie dwuwymiarowej algebry Boole'a w analizie diodowych sieci osobliwych. XVI-SPETO, 1993.
- T9. Topór-Kamiński L.: Analysis of diode singular networks by boolean matrix formulas. XII Symp. Electromag. Phenomena in Nonlinear Circuits. Poznań 1994.

- T10. Topór-Kamiński L.: Częstotliwościowe własności ortogonalnych dwójników osobliwych w układach reaktancyjnych. XVII-SPETO, 1994.
- T11. Topór-Kamiński L.: Interval analysis of resistiv orthogonal singular network. International INPT-AMSE Conference on Communications Signals and Systems, Rabat, Marocco, 1995.
- T12. Topór-Kamiński L.: Zastosowanie wielowymiarowej algebry Boole'a i teorii krat w analizie dowolnych diodowych sieci osobliwych. Zesz. Nauk. Polit. Śl. Elektryka, z. 141, 1994.
- T13. Topór-Kamiński L.: Analiza bezinercyjnych sieci osobliwych metodą formuł boolowskich. Zesz. Nauk. Polit. Śl. Elektryka, z. 115, 1991.
- T14. Topór-Kamiński L.: Synteza bezinercyjnych sieci osobliwych metodą formuł boolowskich. Zesz. Nauk. Polit. Śl. Elektryka, z. 115, 1991.
- T15. Topór-Kamiński L.: Analogowy układ mnożący jako element teorii obwodów. Zesz. Nauk. Polit. Śląskiej Elektryka, z. 54, 1976.
- T16. Topór-Kamiński L.: Mnożniki impedancji. Zesz. Nauk. Polit. Śląskiej Elektryka, z. 54, 1976.
- T17. Topór-Kamiński L., Holajn P.: Podwójny prądowy konwejer różnicowy. XVII-SPETO, 1994.
- T18. Topór-Kamiński L., Holajn P.: Dual differential current conveyor as an element of active circuits. XVII KKTOiUE Wrocław, 1994.
- T19. Topór-Kamiński L.: Negative nullators as a supplement to singular elements set. International INPT-AMSE Conference on Communications Signals and Systems, Rabat, Marocco, 1995.
- T20. Topór-Kamiński L., Holajn P.: Multiterminal singular elements as a analog electronic devices models. 8th International Symposium on Theoretical Electrical Engineering, Thessaloniki, Greece, 1995.
- T21. Topór-Kamiński L.: Uogólniony rotator sterowany. Zesz. Nauk. Polit. Śląskiej Elektryka, z. 54, 1976.
- T22. Topór-Kamiński L., Frycz S.: Analogowe i cyfrowe układy mnożące. VII SPETO, 1984.
- T23. Topór-Kamiński L.: Elementy osobliwe i rozszerzenie pojęcia komutacji w obwodach elektrycznych. V SPETO, 1981, Zesz. Nauk. Pol. Śl. Elektryka, z. 71, 1982.

- T24. Topór-Kamiński L.: Analiza obwodów osobliwych metodą macierzowych formuł boolowskich. Zesz. Nauk. Pol. Śląskiej Automatyka, z.81, 1987.
- T25. Topór-Kamiński L.: Diodowe elementy osobliwe. VI SPETO, 1983.
- T26. Topór-Kamiński L.: Połączenia elementów osobliwych z dwójnikami klasycznymi. Zesz. Nauk. Polit. Śląskiej Elektryka, z. 95, 1985.
- T27. Topór-Kamiński L.: Pojawianie się elementów osobliwych w idealnych układach aktywnych. Zesz. Nauk. Polit. Śląskiej Elektryka, z. 113, 1991.
- T28. Topór-Kamiński L., Pasko M.: Active filter for minimalisation of currents effective value in polyphase systems with nonsinusoidal waves. International Conference on Electrical Drives and Power Electronics, Slovakia, 1994.
- T29. Topór-Kamiński L., Holajn P.: Modeling of floating active circuits by means of multiterminal current conveyors. XVII-th National Conference Circuit Theory and Electronic Networks, Polana Zgorzelisko, Polan, 1995.
- T30. Topór-Kamiński L., Holajn P.: Różnicowo-różnicowy wzmacniacz operacyjny jako element obwodów aktywnych. XVIII SPETO, 1995.
- T31. Topór-Kamiński L., Pasko M.: Power-source as an element of non-linear active circuit theory. 8th International Symposium on Theoretical Electrical Engineering, Thessaloniki, Greece, 1995.
- T32. Topór-Kamiński L., Pasko M.: Application of multiterminal current conveyors in perceptronic models of A/D converters of electric values. XVII-th National Conference Circuit Theory and Electronic Networks, Polana Zgorzelisko, Poland, 1995.
- T33. Topór-Kamiński L., Holajn P.: Modeling of floating active circuits by means of multiterminal current conveyors. XVII-th National Conference Circuit Theory and Electronic Networks, Polana Zgorzelisko, Poland, 1995.
- T34. Topór-Kamiński L., Pasko M.: Nullator/norator models of active circuits with controlled parameters. First IEEE International Caracas Conference on Devices, Circuits and systems. Wenezuela, 1995.
- V1. Vandenberghe L., De Moor B.L., Vandewalle J.: The generalized linear complementarity problem applied to the complete analysis of resistive piecewise-linear circuits. IEEE Trans. CAS, No 11, 1989.
- W1. Wilson B.: Recent developments in current conveyors and current-mode circuits. IEE Proc. Pt.G, No 2, 1990.

- W2. Wilson B.: High - performance current conveyor implementation. Electronics Letters, No 24, 1984.
- W3. Wilson B.: A low - distortion bipolar feedback current amplifier technique. Proc. IEEE, Vol. 69, 1981.
- W4. Wszyński A., Schaumann R.: Using multiple-input transconductors to reduce number of components in OTA-C filter design. Electronics Letters, No 3, 1992.
- Z1. Zarabadi S.R., Larsen F., Ismail M.: A reconfigurable Op-Amp/DDA CMOS amplifier architecture. IEEE Trans. on CAS-I, No 6, 1992.

BEZINERCYJNE ELEMENTY OSOBLIWE JAKO MODELE ELEKTRYCZNYCH UKŁADÓW AKTYWNYCH

Streszczenie

Przedstawiona monografia zawiera rozwinięcie problemów związanych z zastosowaniem bezinercyjnych elementów osobliwych w teorii obwodów aktywnych. Pokazano także ich zastosowanie jako dogodnych narzędzi do syntezy i budowy modeli rzeczywistych układów aktywnych. Pozwalają one uniezależnić się we wstępnym etapie projektowania od ciągle powstających nowych konstrukcji podstawowych przyrządów elektronicznych, takich jak: tranzystory nowych technologii, wzmacniacze operacyjne i transkonduktancyjne, wielowejściowe oraz konweyery prądowe różnego typu. W rozdziale 1 przedstawiono przegląd różnego rodzaju osobliwości występujących w idealnych układach aktywnych. Pokazano także rzeczywiste układy elektroniczne, których mogą być one modelami. W rozdziale 2 wprowadzono pojęcia nullatorów i noratorów wielozaciskowych oraz analizę i syntezę układów liniowych zawierających te elementy osobliwe. Podano proste przykłady zastosowań do analizy i syntezy układów z aplikacją nowych rodzajów analogowych układów elektronicznych. W rozdziale 3 wprowadzono pojęcie dwójnika osobliwego o dowolnym obszarze pracy na płaszczyźnie prądowo-napięciowej, będącego uogólnionym dwójnikiem rezystancyjnym. Pokazano także analizę sieci złożonych z takich dwójników w ujęciu teorii zbiorów. W rozdziale 4 pokazano zastosowanie do praktycznych obliczeń sieci osobliwych analizy boolowskiej. Ma ona szczególnie zastosowanie do sieci zawierających dwójniki osobliwe ortogonalne o dowolnych granicach obszarów pracy, w tym także położonych w nieskończoności. Zastosowano ją opierając się na wprowadzonej przez autora teorii funkcji i formuł boolowskich zmiennej rzeczywistej. W rozdziale 5 pokazano zastosowanie dwójników osobliwych ortogonalnych o skończonych granicach obszarów pracy jako modeli rzeczywistych układów elektronicznych o ograniczonych wielkościach wyjściowych parametrów technicznych. Do formalizacji opisu sieci z nich złożonych zastosowano algebrę interwałów. Pokazano także własności prostych połączeń takich dwójników osobliwych z klasycznymi dwójnikami RLC. W rozdziale 6 przedstawiono ogólne kryteria fizycznej realizowalności sieci osobliwych. Dokonano tego na podstawie własności topologicznych kształtów obszarów pracy składowych dwójników osobliwych tych sieci.

INERTIALESS SINGULAR ELEMENTS AS MODELS OF ELECTRIC ACTIVE NETWORKS

Summary

The presented monograph deals with problems connected with the use of inertialess singular elements in active circuit theory. The way of their usage as the useful tools in the synthesis and design of active electronic devices has been also presented. They give a designer a sort of independence from non-stop emerging new elementary electronic devices such as new technology transistors, operational and transconductance multiterminal amplifiers or all types of conveyors. Chapter 1 is the review of different types of singularities met in ideal active circuits. The electronic devices that can be represented by models with such singular elements also have been shown. The ideas of multiterminal nullators and norators have been introduced in the chapter 2. The methods of analysis and synthesis of the circuits with such elements have been described. The simple examples of the use of the new electronic devices applications have been given. The idea of two-terminal singular network with arbitrary operating region in $u-i$ plane has been introduced in chapter 3. Such a singular network has been treated as generalised resistance two-terminal network. The analysis of the circuits consisting of such elements by means of set theory has been presented. In the chapter 4 the use of Boolean analysis for the analysis of singular networks has been shown. It is especially useful in the case of the networks with orthogonal singular elements with arbitrary limits of operating regions. Boundaries in infinity have been also taken into account. The Boolean analysis has been used by means of author's own function and Boolean formulas theory of real variable. Chapter 5 deals with the use of orthogonal two-terminal singular networks with finite operating region bounds as the models of electronic devices with bounded output technical parameters. The interval algebra has been used to formalisation of the network consisting of such elements. The properties of simple connection of such singular two terminal network with classic RLC networks have been shown. In chapter 6 the general realizability criteria for singular networks have been presented. It has been done at the basis of topological properties of the singular network operating regions shapes.

БЕЗЫНЕРЦИОННЫЕ АНОМАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ КАК МОДЕЛИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ АКТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

Резюме

Даная монография содержит развитие проблем связанных с применением безынерционных аномальных элементов в теории активных цепей. Представлено тоже применение их как подходящих орудий к синтезу и построению моделей действительных активных цепей. На вступительном этапе проектирования, делают они возможным стать независимым от постоянно создаваемых новых конструкций основных электронных устройств, таких как : транзисторы новых технологий, операционные, транскондуктивные и многоходовые усилители, а также конвееры разного типа. В первой главе представлен обзор разного типа аномалией которые выступают в идеальных активных цепях. Показано тоже действительные электронные устройства, которых моделями они могут быть. Во второй главе введено понятие многозажимных нуляторов и нораторов, а также анализ и синтез линейных цепей содержащих эти аномальные элементы. Приведено прямые примеры применения их к анализу и синтезу цепей с электронными устройствами новых типов. В третьей главе введено понятие аномальново двухполюсника имеющего произвольные области работы на токово-напряженной плоскости, а который будет обобщенным резистивным двухполюсником. Представлено тоже анализ цепей составленных с этих двухполюсников при помощи теории множеств. В четвертой главе представлено применение булевого анализа к практическому решению аномальных цепей. Имеет она особенное применение к цепям содержащим ортогональные аномальные двухполюсники о произвольных пределах области работы, в том также находящиеся в бесконечности. Применено ее опираясь на теори булевых функций и формул действительной переменной, введенных автором. В пятой главе показано применение ортогональных аномальных двухполюсников о конечных пределах области работы, как моделей действительных электронных устройств с ограниченными стоимостями выходных технических параметров. К описанию составленных с них цепей применено алгебру интервалов. Показано также свойства прямых аномальных двухполюсников с классическими двухполюсниками RLC. В шестой главе представлено общие критерии физыкального осуществления аномальных цепей. Совершено это опираясь на топологических свойствах рабочих областей составных двухполюсников этих цепей.

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
Politechniki Śląskiej

P. 3347/96/145