

# WYZNACZANIE OPORÓW RUCHU SZYBKOOBROTOWYCH WRZECIONOWYCH ŁOŻYSK SKOŚNYCH

Jan KOSMOL

Andrzej SOKOŁOWSKI



GLIWICE 2023

**MONOGRAFIA**





**Jan KOSMOL    Andrzej SOKOŁOWSKI**

**WYZNACZANIE OPORÓW RUCHU  
SZYBKOOBROTOWYCH, WRZECIONOWYCH  
ŁOŻYSK SKOŚNYCH**

**WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ  
GLIWICE 2023  
UIW 48600**

***Opiniodawcy***

Prof. dr hab. inż. Adam RUSZAJ

Dr hab. inż. Paweł TWARDOWSKI, prof. Politechniki Poznańskiej

***Kolegium redakcyjne***

REDAKTOR NACZELNY – Dr hab. inż. Barbara KULESZ, prof. PŚ

REDAKTOR DZIAŁU – Dr hab. inż. Alicja PIASECKA-BELKHAYAT, prof. PŚ

SEKRETARZ REDAKCJI – Mgr Monika MOSZCZYŃSKA-GŁOWACKA

**Wydano za zgodą**

**Rektora Politechniki Śląskiej**

***Redakcja językowa***

Mgr Joanna BULSKA

***Redakcja techniczna***

Ewa TENEROWICZ

***Skład i przygotowanie do druku***

Mgr Joanna JENCZEWSKA-PAJKA

***Projekt okładki***

Mgr inż. arch. Agnieszka MĘDREK

ISBN 978-83-7880-921-0

© Copyright by

Wydawnictwo Politechniki Śląskiej

Gliwice 2023

## SPIS TREŚCI

<b>WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ .....</b>	<b>7</b>
<b>1. WPROWADZENIE .....</b>	<b>11</b>
<b>2. ANALIZA DONIESIEŃ LITERATUROWYCH .....</b>	<b>13</b>
<b>3. ŁOŻYSKO TOCZNE WRZECIONOWE JAKO ŹRÓDŁO CIEPŁA.....</b>	<b>33</b>
<b>4. GEOMETRIA ŁOŻYSKA KULKOWEGO SKOŚNEGO.....</b>	<b>36</b>
<b>5. KINEMATYKA ŁOŻYSKA KULKOWEGO SKOŚNEGO.....</b>	<b>39</b>
5.1. Zjawisko poślizgu w łożysku tocznym skośnym .....	39
5.2. Zjawisko spinu w łożysku tocznym skośnym .....	48
5.3. Efekt żyroskopowy w łożysku tocznym skośnym .....	51
<b>6. ANALIZA ZAKRESU ZMIENNOŚCI GŁÓWNYCH PARAMETRÓW KINEMATYCZNYCH ŁOŻYSKA TOCZNEGO SKOŚNEGO.....</b>	<b>52</b>
<b>7. OBCIĄŻENIA ŁOŻYSKA KULKOWEGO SKOŚNEGO .....</b>	<b>57</b>
7.1. Obciążenia od sił napięcia wstępnego.....	58
7.2. Obciążenie od sił dynamicznych odśrodkowych $F_c$ powstających w wyniku ruchu obiegowego kulek wokół osi łożyska.....	60
7.3. Obciążenie od sił dynamicznych odśrodkowych $F_{cr}$ powstających w wyniku ruchu obrotowego pierścienia wewnętrznego (lub zewnętrznego) wokół osi łożyska .....	60
7.4. Obciążenie od momentu dynamicznego żyroskopowego $M_g$ , powstającego w wyniku ruchu obiegowego (orbitalnego) kulek wokół osi łożyska i ruchu obrotowego kulek wokół własnej osi, odchylonej od osi łożyska o kąt $\beta$ .....	61
<b>8. METODA SZACOWANIA OPORÓW RUCHU W ŁOŻYSKU TOCZNYM SKOŚNYM .....</b>	<b>64</b>
<b>9. WYZNACZANIE OBCIĄŻEŃ KONTAKTOWYCH W OBSZARACH KONTAKTU KULKI Z BIEŻNIAMI.....</b>	<b>66</b>
9.1. Klasyczny model kontaktowy łożyska kulkowego skośnego .....	67
9.2. Rozszerzony model kontaktowy łożyska kulkowego skośnego.....	88

<b>10. MODELE OBLICZENIOWE OPORÓW RUCHU W ŁOŻYSKACH</b>	
<b>TOCZNYCH</b> .....	96
10.1. Moment oporów ruchu z tytułu tarcia wiskotycznego .....	96
10.2. Opory ruchu spowodowane efektem spinu.....	97
10.3. Opory ruchu z tytułu efektu poślizgu kulek po bieżni łożyska .....	102
10.4. Opory ruchu z tytułu toczenia się kulek po bieżniach.....	107
<b>11. WYZNACZANIE WSPÓŁCZYNNIKA TARCIA TOCZNEGO ŁOŻYSK</b>	
<b>TOCZNYCH</b> .....	112
<b>12. NUMERYCZNA WERYFIKACJA MODELI OBLICZENIOWYCH</b> .....	119
12.1. Model łożyska na potrzeby analizy MES .....	120
12.2. Wyniki badań symulacyjnych.....	124
<b>13. EKSPERYMENTALNA IDENTYFIKACJA OPORÓW RUCHU</b>	
<b>ŁOŻYSK SKOŚNYCH</b> .....	130
13.1. Schemat stanowiska badawczego .....	131
13.2. Wyniki badań eksperymentalnych.....	133
<b>14. WERYFIKACJA MODELI OBLICZENIOWYCH OPORÓW RUCHU</b>	
<b>ŁOŻYSK SKOŚNYCH</b> .....	136
<b>15. WPŁYW CIEPŁA POWSTAJĄCEGO W ŁOŻYSKU TOCZNYM</b>	
<b>NA JEGO OPORY RUCHU</b> .....	141
15.1. Modelowanie źródeł ciepła w łożysku tocznym skośnym .....	142
15.2. Badania symulacyjne wpływu modelu kontaktowego kulka – bieżnia na temperatury w łożysku .....	154
15.3. Badania symulacyjne wpływu konwekcji ciepła na temperatury w łożysku.....	157
15.4. Wpływ rozkładu temperatur w łożysku na odkształcenia cieplne elementów łożyska .....	159
15.5. Eksperymentalne badania weryfikacyjne temperatur w łożysku .....	160
15.6. Wnioski z badań cieplnych.....	163
15.7. Wpływ ciepła powstającego w łożysku tocznym na jego opory ruchu.....	163
<b>16. PODSUMOWANIE BADAŃ OPORÓW RUCHU ŁOŻYSK</b>	
<b>TOCZNYCH</b> .....	184
<b>BIBLIOGRAFIA</b> .....	186
<b>Streszczenie</b> .....	191

## CONTENTS

<b>LIST IMPORTANT INDICATION</b> .....	7
<b>1. INTRODUCTION</b> .....	11
<b>2. LITERATURE REVIEW</b> .....	13
<b>3. ANGULAR CONTACT SPINDLE BALL BEARING AS A HEAT SOURCE..</b>	33
<b>4. GEOMETRY OF ANGULAR CONTACT BALL BEARING</b> .....	36
<b>5. KINEMATICS OF ANGULAR CONTACT BALL BEARING</b> .....	39
5.1. Slip phenomenon in angular contact ball bearing .....	39
5.2. Spin phenomenon in angular contact ball bearing .....	48
5.3. Gyroscopic effect in angular contact ball bearing.....	51
<b>6. ANALYSIS OF VARIATION RANGE OF MAIN KINEMATIC     PARAMETERS OF ANGULAR CONTACT BALL BEARING</b> .....	52
<b>7. LOADING OF ANGULAR CONTACT BALL BEARING</b> .....	57
7.1. Loading caused by preload forces.....	58
7.2. Loading due to dynamic centrifugal forces $F_C$ generated by circular motion of balls around bearing axis.....	60
7.3. Loading due to dynamic centrifugal forces $F_{Cr}$ generated as a result of circular motion of inner bearing ring (or outer ring) around bearing axis .....	60
7.4. Loading due to dynamic gyroscopic torque $M_g$ , generated as a result of circular motion of balls around bearing axis and circular motion of balls around their axis deflected by angle $\beta$ .....	61
<b>8. METHOD OF MOTION RESISTANCE ESTIMATION IN ANGULAR     BALL BEARING</b> .....	64
<b>9. CALCULATION OF CONTACT LOADING IN CONTACT ZONE     BETWEEN BEARING BALL AND RACEWAYS</b> .....	66
9.1. Classic contact model of angular ball bearing.....	67
9.2. Extended contact model of angular ball bearing .....	88

<b>10. ANALYTICAL MODELS FOR MOTION RESISTANCE CALCULATION IN ANGULAR CONTACT BALL BEARING .....</b>	<b>96</b>
10.1. Motion resistance torque due to viscosity friction.....	96
10.2. Motion resistance due to spin effect.....	97
10.3. Motion resistance due to slip effect of balls over bearing raceway .....	102
10.4. Motion resistance due to ball rolling over raceway .....	107
<b>11. CALCULATION OF ROLING FRICTION COEFFICIENT IN ANGULAR BALL BEARING.....</b>	<b>112</b>
<b>12. NUMERIC VERIFICATION OF ANALYTICAL MODELS .....</b>	<b>119</b>
12.1. Bearing model for FEM analysis.....	120
12.2. Results of simulations .....	124
<b>13. EXPERIMENTAL IDENTIFICATION OF MOTION RESISTANCE IN ANGULAR BALL BEARINGS.....</b>	<b>130</b>
13.1. Test rig .....	131
13.2. Results of experimental tests .....	133
<b>14. VERIFICATION OF ANALYTICAL MODELS OF MOTION RESISTANCE IN ANGULAR BALL BEARING.....</b>	<b>136</b>
<b>15. INFLUENCE OF HEAT GENERATION IN BEARING ON ITS MOTION RESISTANCE.....</b>	<b>141</b>
15.1. Modelling of heat sources in angular ball bearing.....	142
15.2. Simulation research on influence of ball – raceway contact model on temperatures in bearing.....	154
15.3. Simulation research on influence of heat convection on temperature in bearing .....	157
15.4. Influence of temperature distribution in bearing on thermal deformations of bearing elements.....	159
15.5. Experimental verification tests of temperature in bearing .....	160
15.6. Thermal research conclusions .....	163
15.7. Influence of heat generated in bearing on motion resistance .....	163
<b>16. SUMMARY OF RESEARCH ON ROLLING BEARING MOTION RESISTANCE.....</b>	<b>184</b>
<b>BIBLIOGRAPHY .....</b>	<b>186</b>
<b>Abstract.....</b>	<b>193</b>



## WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

Oznaczenie	Opis oznaczenia
$a$	duża półość elipsy odkształcenia kontaktowego
$A$	rozstęp pomiędzy środkami krzywizn bieżni wewnętrznej i zewnętrznej
$b$	mała półość elipsy odkształcenia kontaktowego
$C_o$	nośność statyczna łożyska
$D$	średnica kulki
$d_i$	średnica bieżni wewnętrznej
$d_m$	średnica podziałowa łożyska (średnia średnica)
$d_o$	średnica bieżni zewnętrznej
$F_a$	siła osiowa, wstępne, osiowe napięcie łożyska
$F_c$	siła odśrodkowa od wirującej kulki łożyska
$F_g$	siła żyroskopowa od momentu żyroskopowego działającego na kulkę łożyskową
$f_k$	współczynnik tarcia tocznego
$F_r$	siła promieniowa, obciążenie zewnętrzne łożyska
$F_s$	obciążenie zastępcze (ekwiwalentne) łożyska
$K$	szttywność kontaktowa
$K_i$	szttywność kontaktowa pomiędzy kulką a bieżnią wewnętrzną
$K_o$	szttywność kontaktowa pomiędzy kulką a bieżnią zewnętrzną
$K_z$	szttywność kontaktowa zastępcza pomiędzy kulką a bieżniami łożyska
$k$	współczynnik przewodności cieplnej
$L$	luz łożyskowy
$M_{I(T)}$	moment oporów wynikających z tarcia
$M_k$	moment tarcia tocznego
$M_s$	moment spinu
$M_{S(red)}$	moment spinu zredukowany na wał napędowy
$M_v$	moment oporów wiskotycznych
$n$	prędkość obrotowa środka masy kulki łożyskowej
$Q_i$	siła normalna w strefie kontaktowej pomiędzy kulką i bieżnią wewnętrzną

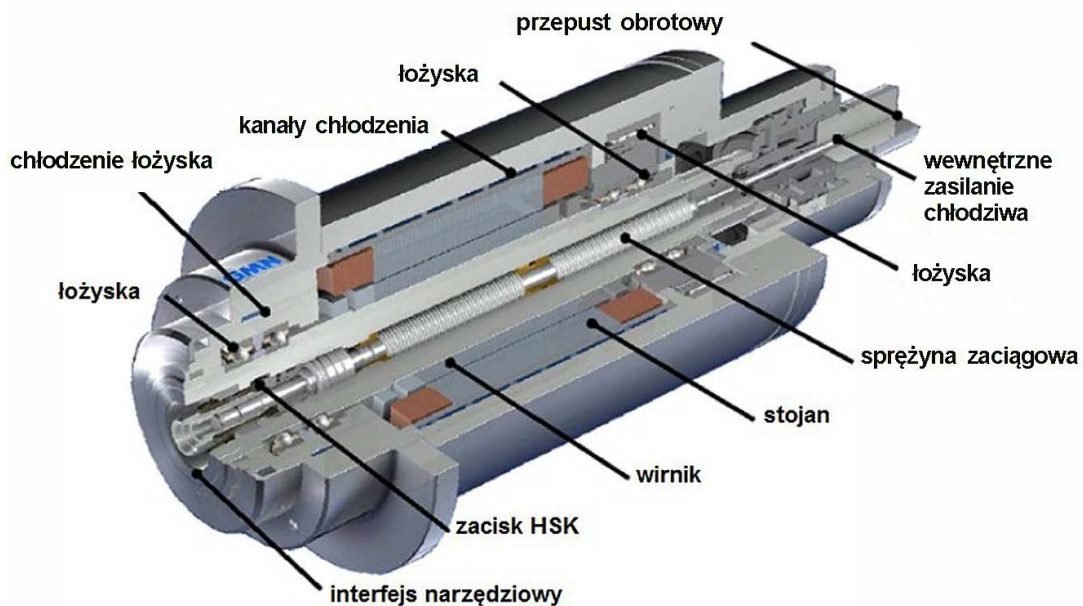
$Q_o$	siła normalna w strefie kontaktowej pomiędzy kulką i bieżnią zewnętrzną
$Q_j$	j-te obciążenie zastępcze w miejscu kontaktów kulki z bieżniami
$Q_{ji}$	j-ta siła normalna w strefie kontaktowej pomiędzy kulką i bieżnią wewnętrzną
$Q_{jo}$	j-ta siła normalna w strefie kontaktowej pomiędzy kulką i bieżnią zewnętrzną
$q_{TCC}$	jednostkowy strumień ciepła
$R_i$	promień krzywizny bieżni wewnętrznej
$R_o$	promień krzywizny bieżni zewnętrznej
$T$	temperatura
$T_k$	siła tarcia tocznego
$v$	prędkość liniowa
$v_c$	prędkość liniowa środka masy kulki
$Z$	liczba elementów tocznych w łożysku
$\Theta$	masowy moment bezwładności kulki
$\lambda$	współczynnik uwzględniający niesymetryczny rozkład sił żyroskopowych
$\Delta\alpha$	zmiana kąta działania łożyska
$\alpha$	kąt działania łożyska
$\alpha$	współczynnik konwekcji
$\alpha_i$	kąt działania łożyska w strefie kontaktu kulki z bieżnią wewnętrzną
$\alpha_o$	kąt działania łożyska w strefie kontaktu kulki z bieżnią zewnętrzną
$\beta$	kąt stożka podziałowego (kąt nachylenia osi ruchu obiegowego kulki)
$\delta$	odkształcenie kontaktowe
$\delta_a$	odkształcenie kontaktowe osiowe pomiędzy kulką a bieżniami spowodowane wstępnym napięciem łożyska, przemieszczenie osiowe względne pierścienia zewnętrznego i wewnętrznego spowodowane napięciem wstępnym $F_a$
$\delta_i$	odkształcenie kontaktowe pomiędzy kulką a bieżnią wewnętrzną
$\delta_n$	odkształcenie kontaktowe w kierunku normalnym
$\delta_o$	odkształcenie kontaktowe pomiędzy kulką a bieżnią zewnętrzną
$\mu$	współczynnik tarcia kinematycznego
$\nu$	lepkość kinematyczna
$\rho$	promień
$\omega$	prędkość kątowa
$\omega_B$	prędkość kątowa kulki wokół własnej osi w wyniku ruchu tocznego

$\omega_s$	prędkość kątowna kulki wokół własnej osi w wyniku spinu
$\omega_E$	prędkość kątowna środka masy kulki względem osi łożyska (prędkość kątowna koszyka łożyskowego)
$\zeta$	krzywizna
$\zeta_i$	krzywizna bieżni wewnętrznej łożyska
$\zeta_o$	krzywizna bieżni zewnętrznej łożyska
<b>Indeksy</b>	
$a$	dotyczy kierunku równoległego do osi łożyska
$c$	dotyczy efektów odśrodkowych (siły odśrodkowej)
$g$	dotyczy efektów żyroskopowych (momentu i sił żyroskopowych)
$i$	dotyczy pierścienia łożyskowego wewnętrznego
$m$	dotyczy średnicy podziałowej łożyska
$o$	dotyczy pierścienia łożyskowego zewnętrznego
$r$	dotyczy kierunku promieniowego



## 1. WPROWADZENIE

Rozwój obróbki szybkościowej HSC (High Speed Cutting) wymaga zarówno odpowiednich narzędzi skrawających, jak i obrabiarek. Obrabiarki HSC to maszyny technologiczne o znacząco wyższych prędkościach obrotowych wrzecion i prędkościach ruchów posuwowych, wyposażonych w serwonapędy o znacznie większych właściwościach dynamicznych, tzn. umożliwiającymi osiągnięcie wielokrotnie wyższych przyspieszeń ruchów interpolowanych, to wreszcie obiekty mechatroniczne o znacząco lepszej wibrostabilności.



Rys. 1.1. Widok typowego elektrowrzeciona  
Fig. 1.1. View of a typical electrospindle

Poważnym problemem konstrukcyjnym takich obrabiarek jest odporność cieplna, rozumiana jako przeciwstawianie się odkształceniom cieplnym zespołów i elementów w wyniku wzrastającej ilości ciepła w parach kinematycznych ruchowych (w łożyskach, prowadnicach, zintegrowanych silnikach). Wzrost parametrów kinematycznych przenosi się bezpośrednio na proporcjonalny wzrost ilości ciepła, a tym samym i na odkształcenia cieplne. Naturalne chłodzenie w wielu przypadkach jest już niewystarczające, dlatego konstruktor, np. wrzeciennika obrabiarki HSC, musi

przewidywać konieczność zastosowania wymuszonego odprowadzania ciepła, np. z wrzecionowych gniazd łożyskowych. Pierwsze pytanie, jakie się pojawi w kontekście zaprojektowania układu chłodzenia, będzie brzmiało: ile ciepła powstanie i w których miejscach? Zważywszy ponadto, że w obrabiarkach HSC nierzadko spotyka się tzw. elektrowrzeciona, czyli napędy główne zintegrowane, to oprócz łożysk, jako potencjalnych źródeł ciepła, należy wziąć pod uwagę same silniki, które zamknięte we wrzecienniku, stanowią znacznie większe źródło ciepła.

Na rys. 1.1. przedstawiono przykładowe elektrowrzeciono, w którym wymuszony układ chłodzenia jest niezbędny dla pracy z prędkościami kilkunastu tysięcy obr/min.

Konieczność projektowania obrabiarek HSC, z uwagi na kryterium cieplne, nie oznacza, że w obrabiarkach LSC (Low Speed Cutting) to kryterium nie obowiązywało. Zmieniła się natomiast skala tego zjawiska i wzmocnieniu uległy niektóre procesy, które dla małych prędkości można było pomijać, np. efekty żyroskopowe, towarzyszące ruchom obrotowym elementów tocznych łożyska.

## 2. ANALIZA DONIESIEŃ LITERATUROWYCH

Problematyce łożysk, ich modelowaniu, poświęconych jest bardzo wiele publikacji naukowych. Jest to zrozumiałe, ponieważ łożysko występuje w każdej maszynie czy urządzeniu z elementami obrotowymi. Znaczna część tych doniesień związana jest z trwałością zmęczeniową i ogólnie z nośnością. Jednakże od kilkunastu lat obserwuje się duży wzrost liczby publikacji związany z dynamiką układów wrzecionowych w związku z rozwojem tzw. elektrowrzecion, które umożliwiają rozwijanie prędkości obrotowych do kilkudziesięciu tysięcy obr/min. W takich warunkach w łożyskach tocznych wzmocnieniu ulegają zjawiska, które do tej pory można było zaniedbać. Dotyczy to zwłaszcza malejącej sztywności promieniowej łożysk wraz ze zwiększeniem prędkości. Jest to spowodowane wzrostem sił odśrodkowych wirujących elementów tocznych i zmianami w geometrii strefy kontaktowej. Dlatego wiele publikacji poświęconych jest ocenie zmian kątów działania w strefie kontaktu oraz zmian oddziaływań w tej strefie. Większość publikacji dotyczy analizy dynamicznej układów wrzecionowych i wpływu łożysk na charakterystyki dynamiczne takich układów w kontekście zmian jakości przedmiotu obrabianego. Duża liczba artykułów dotyczy metod zapobiegających pogarszaniu się sztywności łożysk w funkcji prędkości obrotowej, zwłaszcza roli napięcia wstępnego łożysk skośnych. Problematyka modelowania łożysk skośnych jest w dalszym ciągu tematyką aktualną, której poświęconych jest wiele prac badawczych.

W doniesieniach literaturowych dotyczących łożysk tocznych, podobnie jak i wielu innych elementów konstrukcyjnych, można wyróżnić pozycje książkowe, które stanowią elementarz rozpatrywanego zagadnienia, oraz publikacje o cechach artykułów naukowych. W przypadku łożysk tocznych takim podręcznikiem na rynku krajowym stała się wydana jeszcze 1951 r. książka „Łożyska toczne” autorstwa Arvida Palmgrena [50]. Jest to dzieło źródłowe, zawierające bogaty materiał teoretyczny i praktyczny, dotyczący konstrukcji i użytkowania łożysk tocznych, który był cenną pomocą dla konstruktorów maszyn i użytkowników łożysk tocznych. Z punktu widzenia celu niniejszej monografii najważniejszymi problemami poruszonymi w tej książce były:

- modele obliczeniowe odkształceń sprężystych w obszarze kontaktu kulek i wałeczków z bieżniami łożyska; modele te są do dzisiaj powszechnie użytkowane;
- modele obliczeniowe momentu sił tarcia w łożysku, które do dnia dzisiejszego są powszechnie użytkowane.

Na rynku krajowym pojawiły się następne pozycje książkowe, z których na wyróżnienie zasługuje książka Henryka Krzemińskiego-Fredy „Łożyska toczne” [38], oraz rozdziały poświęcone łożyskom tocznym w książkach z podstaw konstrukcji maszyn, np. w książce W. Moszyńskiego „Wykłady elementów maszyn”, cz. II, „Łożyskowanie”. Wszystkie te pozycje są podobne pod względem treści do książki Palmgrena [50], ponieważ są kierowane do praktyków przemysłowych lub do studentów.

Wielką skarbnicą praktycznej wiedzy o łożyskach tocznych są poradniki wydawane przez producentów łożysk tocznych. Przykładem mogą być materiały informacyjne firmy SKF [42], w których zamieszczono modele obliczeniowe oporów ruchu łożysk. Są to modele eksperymentalne, dotyczące konkretnych łożysk, ale można stwierdzić, że są bardzo wiarygodne. Można przyjąć, że są to najbardziej aktualne informacje o łożyskach tocznych i np. można je wykorzystać do weryfikacji analitycznych modeli, opracowanych klasycznymi, naukowymi metodami.

Podstawy naukowe łożysk tocznych opracował A.B. Jones [26] i [27], który jako pierwszy przedstawił podejście do opisu zjawisk w obszarach kontaktu kulki i bieżni łożyskowych. W artykułach omówił metodę opisu ruchu kulek i występujących sił tarcia z tytułu występowania obciążenia wzdłużnego (siły osiowej), sił bezwładności oraz oporów tarcia ślizgowego wynikających z poślizgu kulek i bieżni. Pominięto odkształcenia sprężyste wszystkich elementów z wyjątkiem kulek, zjawiska histerezy odkształceń kulek i dynamiczne skutki ruchu kulek. Rozwikłanie tego zagadnienia wymagało rozwiązania układu 8 równań z podwójnym całkowaniem, co w tym okresie nie było możliwe. Rozwiązanie uproszczone, łatwiejsze do praktycznej realizacji, wystąpi, jeżeli pominiemy efekty żyroskopowe.

W tym miejscu należy podkreślić rolę teorii Hertza, dotyczącej zjawisk kontaktowych. Hertz wykazał, że odkształcenia sprężyste, w obszarze kontaktu dwóch ciał sprężystych, mają postać elipsy, mianowicie:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad (2.1)$$

gdzie: a, b – większa i mniejsza półoś elipsy,  
x, y – współrzędne punktu elipsy.



Ponadto Hertz wykazał, że naprężenia normalne (naciski kontaktowe) w obszarze kontaktu dwóch ciał sprężystych można opisać zależnością:

$$\sigma(x,y) = \sigma_{\max} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad (2.2)$$
$$\sigma_{\max} = \frac{1,5Q}{\pi ab}$$

gdzie:  $\sigma$ ,  $\sigma_{\max}$  – naprężenia normalne i ich wartość maksymalna w obszarze elipsy kontaktowej,

$Q$  – siła normalna do dwóch stykających się powierzchni sprężystych (w dalszym ciągu będzie nazywana siłą lub obciążeniem kontaktowym).

Opracowany model rozkładu naprężeń normalnych jest do dzisiaj powszechnie używanym modelem w analizie zjawisk kontaktowych w łożyskach tocznych.

Hertz zauważył jeszcze jedną prawidłowość: w obszarze kontaktu dwóch sprężystych ciał występują naprężenia styczne  $\tau$ , które można utożsamiać z tarciem dwóch przemieszczających się względem siebie ciał. Naprężenia te są proporcjonalne do naprężeń normalnych i współczynnika tarcia.

Rozwinięciem teorii Jonesa była teoria Harrisa. W [18] przedstawił modele obliczeniowe obciążeń kontaktowych oraz prędkości poślizgu kulek wzdłuż bieżni. Co jest istotne w tej publikacji to wprowadzenie pojęć kontrolowanej bieżni zewnętrznej ORC i wewnętrznej IRC, które pozwalają na rozdział oporów ruchu wynikających z tarcia na bieżni wewnętrznej i zewnętrznej. To umożliwia m.in. analityczne rozwiązywanie zagadnień kontaktowych w łożyskach tocznych, a zwłaszcza zjawiska spinu.

Za najobszerniejszą publikację dotyczącą łożysk tocznych uważa się dwutomowe dzieło Harrisa i Kotzalasa, którego pierwsze wydanie nastąpiło w 1967 r., a 40 lat później – piąte wydanie [19, 20]. Głównym celem tego dzieła było dostarczenie informacji o użytkowaniu, projektowaniu i eksploatacji łożysk tocznych z punktu widzenia projektantów oraz użytkowników. Jednocześnie, książki te opisują zjawiska w łożyskach tocznych, co ma cechy publikacji naukowych. Autorzy zebrali informacje naukowe na podstawie dostępnych prac naukowych, dotyczących łożysk tocznych. W rezultacie powstało dzieło kompletne z bardzo dużą dozą praktycznych zastosowań. W dalszym ciągu będziemy wielokrotnie odnosić się do wybranych zagadnień. Zaskakujące jest natomiast ustosunkowanie się autorów do zagadnienia, które jest przedmiotem niniejszej monografii, tj. oporów ruchu w łożyskach tocznych. Autorzy w krótkim rozdziale przytaczają model obliczeniowy, który proponował Palmgren [50] kilkanaście lat wcześniej. Z inżynierskiego punktu widzenia taki model jest w dalszym

ciągu bardzo popularny, ale biorąc pod uwagę ogólną tendencję rozwojową do wzrostu prędkości obrotowej, wydaje się niewystarczający. To było jednym z powodów, dla którego autorzy niniejszej monografii zajęli się tematem oporów ruchu łożysk tocznych.

W dalszym ciągu analizy doniesień literaturowych przedstawione zostaną podsumowania dotyczące przede wszystkim publikacji naukowych, obejmujące zjawiska występujące w łożyskach tocznych.

W ogólnym przypadku można mówić o dwóch grupach takich publikacji: pierwszej, koncentrującej się na pojedynczym łożysku w aspekcie zjawisk występujących w trakcie współpracy kulek lub wałeczków z bieżniami łożysk, i drugiej, która koncentruje się na ułożyskowanych zespołach, np. na wrzecionach w obrabiarkach, w kontekście wpływu odkształceń w łożyskach na błędy geometryczne łożyskowanego zespołu, np. wrzeciona obrabiarki.

W przypadku pierwszej grupy publikacji można sformułować ogólne pytanie: jak warunki pracy łożyska, tj. jego prędkość obrotowa, napięcie wstępne, obciążenie zewnętrzne, własności smaru lub oleju, wpływają na kąty działania łożyska? Kąty działania łożyska, o których będzie mowa w dalszej części monografii, mają decydujący wpływ na wszystkie zjawiska występujące w łożysku tocznym. Znajomość tych kątów jest warunkiem precyzyjnego określenia parametrów kinematycznych łożyska, obciążeń wewnętrznych (kontaktowych) występujących pomiędzy kulkami (wałeczkami) a bieżniami, odkształceń występujących w obszarze kontaktu kulek (wałeczków) z bieżniami. Można więc sformułować pogląd, że z punktu widzenia głównego celu monografii, tj. oszacowania oporów ruchu łożysk tocznych, znajomość kątów działania łożysk jest niezbędna. Jak to będzie pokazane w dalszych częściach monografii, wyznaczenie tych kątów działania jest trudne i skomplikowane matematycznie.

Artykuł [39] jest poświęcony analizie działania łożysk skośnych pod kątem zdefiniowania warunków pracy, dla których w łożysku nie wystąpi poślizg (skidding). Autorzy analizują wpływ obciążenia osiowego i promieniowego na warunki pracy w strefach kontaktowych. Opierając się na analizie geometrycznej współdziałania elementu tocznego z bieżniami łożyska oraz na warunkach równowagi sił działających na element toczny, autorzy wyprowadzają zależności pozwalające wyznaczyć siły normalne w kontakcie, kąty działania w miejscu kontaktu, uwzględniając fakt, że zmieniają się one z kątem obrotu łożyska, sztywność osiową i promieniową, która zmienia się wraz z prędkością łożyska. Autorzy uwzględniają występowanie sił odśrodkowych od wirujących elementów tocznych. Na podstawie kryterium Hirano (doświadczalnie zdefiniowanego) wskazują wartości sumarycznego odkształcenia w kierunku osiowym i promieniowym, dla których można uniknąć poślizgu łożyska.

Analiza pokazuje, że bardziej efektywnym sposobem uniknięcia poślizgu dla dużych prędkości jest zwiększanie odkształcenia osiowego (od napięcia wstępnego łożyska) niż odkształcenia promieniowego (od obciążenia promieniowego).

W artykule przedstawiono również wpływ kąтового położenia elementu tocznego na kąty działania, siły kontaktowe, sztywność łożyska, siły osiowe i promieniowe. Jeżeli w łożysku występuje odkształcenie promieniowe, np. od obciążenia promieniowego, to jednym z efektów takiego stanu są zmieniające się z kątem obrotu łożyska kąty działania, obciążenia kontaktowe, sztywność łożyska, siły promieniowe i osiowe. W takich przypadkach może dojść do zjawiska poślizgu (skidding).

Jak już wspomniano, zagadnienie kontaktowe w łożysku tocznym trudno jest rozwiązać analitycznie, ponieważ liczba możliwych równań (równań równowagi sił działających na kulkę i bieżnię, równań geometrycznych wynikających z odkształceń kontaktowych) jest mniejsza niż liczba niewiadomych. Dlatego prawie wszystkie publikacje traktujące o zagadnieniach kontaktowych w łożysku przyjmują pewne założenia upraszczające. Autorzy [39] zaproponowali uproszczenie, które jest bardzo często spotykane w wielu publikacjach, a dotyczy kątów działania, mianowicie:

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \alpha - \Delta\alpha \\ \alpha_o &= \alpha + \Delta\alpha\end{aligned}\tag{2.3}$$

gdzie:  $\alpha_i$ ,  $\alpha_o$  – kąty działania na bieżni wewnętrznej i zewnętrznej,

$\alpha$  – nominalny kąt działania łożyska,

$\Delta\alpha$  – zmiana kąta działania.

Takie uproszczenie zmniejsza liczbę niewiadomych o jeden i pozwala w wielu wypadkach rozwiązać zagadnienie kontaktowe analitycznie. Jest rzeczą oczywistą, że takie założenie pociąga za sobą błędy w obliczaniu kątów działania, a pytanie jest następujące: w jakim zakresie zmian kątów działania można je stosować?

Autorzy [4] opracowali analityczne modele opisujące geometrię kontaktu elementu tocznego z bieżniami łożyskowymi. Podstawą do modelowania odkształceń kontaktowych były nieliniowe modele Hertza. Dla określenia wielkości odkształceń kontaktowych na bieżni pierścienia zewnętrznego i wewnętrznego wzięli pod uwagę obciążenia wynikające z sił napięcia wstępnego łożyska, z sił odśrodkowych działających na element toczny będący w ruchu oraz z oddziaływań żyroskopowych, biorących się z ruchu obrotowego elementu tocznego wokół własnej osi. Definiując dodatkowe równanie geometryczne, wynikające z położenia środków krzywizn obu bieżni, uzyskali możliwość rozwiązania układu równań wynikających z równowagi sił działających na element toczny. Dysponując takim modelem, zbadali wpływ napięcia

wstępnego łożyska na kąty działania na bieżni zewnętrznej i wewnętrznej dla szerokiego zakresu prędkości obrotowej. Przebadali również wpływ prędkości obrotowej łożyska na kąty działania na bieżni zewnętrznej i wewnętrznej. Artykuł umożliwia zidentyfikowanie kątów działania elementu tocznego na bieżni zewnętrznej i wewnętrznej dla zadanej prędkości łożyska i zadanego napięcia wstępnego.

W [4] przeanalizowano interesujący przypadek układu łożyskowego, w którym napięcie wstępne jest niezmiennie, m.in. nie zmienia się w funkcji prędkości (uzyskuje się to za pomocą albo elementu sprężystego, albo mechanizmu hydraulicznego). Dla takiego przypadku autorzy wykazali możliwość wyznaczenia kątów działania łożyska w sposób analityczny w funkcji prędkości łożyska. Przedstawiona została zależność analityczna pozwalająca wyznaczać kąt działania łożyska w funkcji napięcia wstępnego i statycznej wartości tego kąta (bez napięcia wstępnego). Umożliwia to dobór właściwej wartości tego napięcia wstępnego, m.in. w zależności od przewidywanej maksymalnej prędkości obrotowej łożyska. W artykule przedstawiono wyniki symulacji obrazujące zmienność kątów działania łożyska w funkcji napięcia wstępnego i prędkości obrotowej łożyska. Jedną z konkluzji jest taka, że w miarę wzrostu napięcia wstępnego, niezależnie od prędkości obrotowej, kąty działania zbliżają się do wartości statycznej, tj. odpowiadającej zerowej prędkości. Wyniki symulacji potwierdzają także inne wnioski, które znane są już z wcześniejszych doniesień literaturowych, że wzrost prędkości przyczynia się do zmniejszania kąta działania na bieżni zewnętrznej i zwiększenia kąta działania na bieżni wewnętrznej.

W [24] przedstawiono modelowanie przemieszczeń przesuwne pierścienia łożyska i końcówki wrzeciona w systemie wrzecionowym, wyposażonym w łożyska skośne. Jest opisana zależność pomiędzy osiową składową siły działającej na łożysko a siłami odśrodkowymi, momentem żyroskopowym, odkształceniami kontaktowymi i kątami działania. Wykazano, że siła odśrodkowa od wirujących elementów tocznych nie wywołuje powstania składowej osiowej, a tym samym nie wywołuje osiowego przemieszczenia przesuwne pierścienia łożyska. W ten sposób wykazano, że osiowe przesunięcie pierścienia łożyska jest wynikiem wyłącznie momentu żyroskopowego i zmian geometrycznych wrzeciona, spowodowanych siłą odśrodkową. Zaproponowany model został zweryfikowany doświadczalnie i może zostać wykorzystany do obliczenia kompensacyjnych przemieszczeń końcówki wrzeciona. W artykule zaproponowano interesujące ujęcie wektora siły odśrodkowej w postaci dwóch składowych, z których jedna wywołuje tylko zmiany siły normalnej, działającej na bieżni łożyska, a druga wywołuje przemieszczenie elementu tocznego (to przemieszczenie zmienia kąt działania łożyska).

W [49] przedstawiono kompletny, analityczny model do wyznaczania sztywności łożysk skośnych. Kąty działania łożysk są wstępnie przyjmowane jako decydujące o prawidłowym działaniu wysokoobrotowych wrzecion. Dla dokładnego modelowania łożysk trzeba uwzględnić efekty dynamiczne. W tym artykule zaprezentowano model łożyska uwzględniający dynamiczne zjawiska kontaktowe. Zaproponowano metodę obliczania macierzy sztywności, a także komplet równań analitycznych uwzględniających te efekty, tak aby osiągnąć oczekiwaną dokładność, zwłaszcza dla dużych prędkości łożysk. Metodę wykorzystano do oceny wpływu parametrów kinematycznych na sztywność łożysk. Modele łożysk zostały użyte do modelowania wrzeciona frezarskiego dla wysokich prędkości. Modelowanie przeprowadzono metodą elementów skończonych. Przy modelowaniu zjawisk kontaktowych uwzględniono oddziaływania od napięcia wstępnego, od sił odśrodkowych, działających na element toczny, oraz od sił żyroskopowych. W artykule przedstawiono wyniki wpływu prędkości obrotowej łożyska na składowe osiowe siły działające w miejscu kontaktu obu bieżni, a także związek momentu żyroskopowego z prędkością obrotową. Pokazano także wpływ prędkości obrotowej na współczynniki sztywności w miejscach kontaktu elementu tocznego z bieżniami. Generalnie sztywność maleje wraz ze wzrostem prędkości.

W [49] przytoczono za literaturą analityczne zależności pozwalające wyznaczyć prędkości kątowe łożyska i kulki wokół własnej osi w funkcji kątów działania  $\alpha_i$  i  $\alpha_o$  oraz w funkcji kąta zawartego pomiędzy osiami łożyska i osią kulki. Przytoczono także 3 hipotezy, które umożliwiają wyznaczenie tego kąta. Interesująca jest zwłaszcza hipoteza geometryczna, która wprawdzie wykorzystuje znaczne uproszczenia, ale pozwala na wyznaczenie prędkości kątowej spinu, tj. zjawiska obracania się kulki wokół własnej osi.

W [51] przedstawiono wpływ hipotez kinematycznych modelu łożyska na prognozy generowania ciepła łożyska. Omówiono model łożyska oparty na modelu Jonesa. Rozważane są dwie różne hipotezy kinematyczne określające kąt pochylenia osi obrotu kulki  $\beta$ , z którego wynika rozkład momentu żyroskopowego między pierścieniem wewnętrznym i zewnętrznym. Najpierw przedstawiona jest klasyczna teoria kontroli bieżni zewnętrznej OCR, a następnie rozważana jest hipoteza hybrydowa oparta na równowadze kulki. Jest prezentowany model momentu obrotowego łożyska używany do wyrażenia wyniku końcowego, tj. momentu oporu na wyjściu modeli kinematycznych łożyska i temperatur. W końcu szczegółowo opisano model symulacji termicznej wrzeciona w układzie zamkniętym. Eksperymentalne stanowisko do walidacji modeli wraz z wynikami prób jest efektem publikacji.

W [23] przedstawiono obliczenia numeryczne łożyskowanego wałka metodą elementów skończonych, używając własnego kodu MES, w celu zbadania wpływu obudowy, tj. drążonego wałka (tulei), a ogólnie macierzy sztywności. Pełne sprzężenie modelu uzyskano dzięki hipotezie kontrolowanej bieźni zewnętrznej. Opisano także analityczne modele obliczeniowe momentu oporów, w których uwzględniono położenie tzw. okręgu „czystego” toczenia się kulek. Nowością tego podejścia jest opracowanie narzędzia (modelu) analitycznego, który pozwala użytkownikowi na jego aplikację dla różnych rozwiązań konstrukcyjnych węzłów łożyskowych, a tym samym i na optymalizację. Położenie linii „czystego” toczenia uzyskano, wprowadzając warunek zerowej siły tarcia, co pozwala precyzyjniej definiować kinematykę łożyska, luzu pomiędzy kulką i koszykiem oraz momenty tarcia. Przedstawiono także zależności krzywoliniowe dla określenia wymiarów elipsy kontaktowej, rozkładu nacisków normalnych oraz macierz sztywności. Ta ostatnia pozwala na oszacowanie częstotliwości rezonansowych całego układu.

W [9] badane są różne warianty pasowania z wciskiem i generowane wstępne obciążenie łożyska w wyniku odkształceń od sił odśrodkowych, występujące przy dużych prędkościach. Odkształcenia sprężyste wirujących części z powodu siły odśrodkowej są obliczane na podstawie mechaniki sprężystości. Jest udowodnione, że odkształcenie z tytułu siły odśrodkowej pierścienia wewnętrznego łożyska jest znacznie większe niż odkształcenie wału, a tym samym wielkość luzu między wałem a łożyskiem zmniejsza się wraz z prędkością. Następnie przedstawiony jest dynamiczny model łożyska z uwzględnieniem odkształcenia pierścienia łożyskowego, poruszającego się z dużą prędkością. Model ten został poddany eksperymentalnej weryfikacji. Dzięki zaproponowanemu modelowi łożyska szczegółowo opisano wpływ odkształcenia odśrodkowego pierścienia na stan napięcia wstępnego łożyska. Wykazano, że kąt działania łożyska zmniejsza się, a obciążenie w obszarze kontaktu kulki i bieźni rośnie wraz ze wzrostem siły odśrodkowej, czyli ze wzrostem prędkości obrotowej pierścienia wewnętrznego. Wzrasta także sztywność promieniowa łożyska, a sztywność osiowa łożyska nieznacznie spada z uwagi na malejący kąt działania i zwiększone obciążenie w obszarze kontaktu. Stan napięcia wstępnego łożyska wrzeczona jest wzmocniony przez efekt rozszerzania odśrodkowego pierścienia wewnętrznego łożyska.

W [6] opracowano model odkształceń termicznych oparty na analizie wpływu temperatury na podstawowy rozmiar łożyska kulkowego skośnego. Przedstawiono efekt odkształceń termicznych na sztywność osiową łożyska. Na podstawie zmiany sztywności kontaktowej Hertza i zmian początkowego kąta działania łożyska kulkowego skośnego spowodowanego wzrostem temperatury przedstawiono

odpowiedni model termomechaniczny. Zgodnie z tym modelem, stosując odpowiednią procedurę obliczeniową zaprogramowaną w MATLAB-ie, badano wpływ temperatury łożyska na jego sztywność osiową. Poprawność tego modelu została zweryfikowana za pomocą eksperymentów. Zostało zaproponowanych kilka sugestii projektowych dotyczących napięcia wstępnego łożyska w celu uniknięcia uszkodzenia łożyska, spowodowanego jego przegrzaniem.

Autorzy [14] przedstawili analityczny model do obliczania strat mocy w łożysku tocznym skośnym. Oprócz sił dynamicznych działających na kulkę uwzględniono również siły dynamiczne z tytułu ruchu obrotowego koszyka łożyskowego. Autorzy deklarują dobrą zgodność wyników obliczeń z wynikami dostępnymi w literaturze.

W [29] przedstawiono metodę symulacyjną opartą na dynamice systemu w celu ustalenia kompleksowego modelu przewidywania zachowania termicznego i mechanicznego układu wrzeciono-łożysko z uwzględnieniem łożyska, biorąc pod uwagę tolerancję montażu, wymiar geometryczny, warunki chłodzenia, warunki pracy i odkształcenia termiczne. Nowa metoda może być zastosowana do projektowania chłodzenia wrzeciona oraz optymalnej konstrukcji termicznej i mechanicznej układu wrzeciono-łożyska dla różnych warunków otoczenia.

W [52] ustosunkowano się do spotykanych hipotez w analizie zjawisk kontaktowych łożysk tocznych. Niektóre hipotezy są nadal konieczne, aby sformułować i rozwiązać układ równań równowagi kulki łożyskowej metodą quasi-statyczną. Hipotezy te pozwalają m.in. na podział obciążeń występujących pomiędzy kulką a bieżniami. Dotyczy to zwłaszcza obciążeń z tytułu zjawiska żyroskopowego. W literaturze specjalistycznej niewiele jest informacji o rozdziale tego obciążenia. Dominują hipotezy kontrolowanej bieżni zewnętrznej lub wewnętrznej. W pracy opisano nową metodę rozdziału obciążeń z tytułu zjawiska żyroskopowego bez stosowania hipotez kontroli bieżni. Zaproponowano metodę, która opiera się na korelacji pomiędzy kinematyką łożyska kulkowego a obciążeniami na bieżniach z tytułu zjawiska żyroskopowego. Dzięki temu rozwiązanie tradycyjnych równań równowagi kulki, tj. równań Newtona, jest dokładniejsze i stosunkowo szybkie.

W [57] przedstawiono rozważania dotyczące wpływu napięcia wstępnego łożyska tocznego skośnego na jego prawidłowe działanie. Aby uzyskać dłuższy czas pracy, bardzo ważne jest zapewnienie optymalnego napięcia wstępnego łożysk pracujących w tandemie (X – ustawienie twarzą w twarz dla krótkich wrzecion i O – tył w tył w przypadku długich wrzecion i znacznych rozszerzeń termicznych). Właściwa konstrukcja łożysk obejmuje systemy adaptacyjne zdolne do utrzymania osiowego napięcia wstępnego w zależności od parametrów pracy (prędkości, obciążenia i rodzaju

smaru) oraz warunków środowiskowych (temperatura). W niniejszym artykule przedstawiono nowe urządzenie testujące oparte na systemie napięcia wstępnego sprężyn ze stopu z pamięcią kształtu oraz niektóre wstępne wyniki eksperymentów.

W drugiej grupie publikacji plasują się artykuły dotyczące układów łożyskowych, np. wrzecion obrabiarek. Jest ich zdecydowanie więcej i jakkolwiek są to opracowania naukowe, wydają się mieć większy potencjał aplikacyjny.

W [43] przedstawiono przegląd najnowszych działań badawczych i przegląd stanu techniki w zakresie rozumienia zmian w wydajności obrabiarek spowodowanych zmianami warunków termicznych (błędy termiczne obrabiarek). Tematy dotyczą głównie obrabiarek do obróbki skrawaniem metali, zwłaszcza tokarek i frezarek, a także centrów obróbczych. Tematyka publikacji zagadnień termicznych w obrabiarkach obejmuje pomiar temperatur i przemieszczeń, zwłaszcza przemieszczeń w punkcie środkowym narzędzia, obliczenia błędów termicznych obrabiarek oraz redukcję błędów termicznych. Obliczanie błędów termicznych obrabiarek obejmuje zarówno rozkład temperatury, jak i przemieszczenia. Krótko mówiąc, ma również na celu uniknięcie błędów termicznych przy kontroli temperatury, wpływie płynów i krótkim powiązaniu z efektywnością energetyczną obrabiarek. W pracy przedstawiono podsumowanie prac badawczych z przeszłości i aktualności. Omówiono wyzwania badawcze mające na celu uzyskanie obrabiarki stabilnej termicznie. Artykuł przedstawia się jako aktualizację, a nie zastąpienie dwóch opublikowanych głównych artykułów: Bryana i in. w 1990 r. oraz Weck i in. w 1995 r.

W [2] przedstawiono model matematyczny wrzeciona szlifierskiego, opierający się na układzie równań o 5 stopniach swobody. W modelu uwzględniono odkształcenia sprężyste kontaktowe, spowodowane napięciem wstępnym łożysk. Do modelowania łożysk użyto nieliniowego modelu Hertza. Warunki początkowe, tj. napięcie wstępne, kąt działania łożyska i odpowiadające mu odkształcenie kontaktowe, wyznaczono na podstawie warunków równowagi sił i warunku geometrycznego. W wyniku przeprowadzonych badań stwierdzono bardzo znaczący wpływ napięcia wstępnego na zmniejszenie poziomu drgań wrzeciona szlifierskiego, a tym samym na jakość powierzchni szlifowanej. Według autorów proponowana metoda pozwala na przewidywanie napięcia wstępnego stosownie do potrzeb jakości szlifowania.

Autorzy [3] opracowali zintegrowany, numeryczny model układu wrzecionowego wraz z uchwytem narzędziowym i narzędziem oraz model procesu skrawania. Do modelowania łożysk wrzecionowych zastosowali nieliniową teorię Hertza. Model został zweryfikowany doświadczalnie. Na podstawie takiego modelu możliwe jest szacowanie wpływu napięcia wstępnego, siły odśrodkowej i sił żyroskopowych na sztywność



łożyskowania, na postać i częstotliwość drgań własnych wrzeciona, na reakcje w miejscu kontaktu elementu tocznego z bieżniami oraz na odkształcenia kontaktowe. Model umożliwił optymalizację luzu łożyskowego z uwagi na maksimum sztywności dynamicznej lub maksimum głębokości skrawania ze względu na utratę stabilności (drgania samowzbudne).

W [11] przedstawiono wyniki modelowania elektrowrzeciona, w którym w łożyskach skośnych wykorzystano mechanizm do nastawiania napięcia wstępnego. Opracowany model analityczny umożliwia wyznaczanie obciążeń kontaktowych w funkcji prędkości obrotowej, kątów działania i sztywności promieniowej w funkcji prędkości obrotowej. W artykule sformułowano układ równań równowagi, który umożliwia określenie siły promieniowej, osiowej i momentu w funkcji sił odśrodkowych i momentu żyroskopowego. Otrzymane wyniki badań potwierdzają zmniejszanie się kąta działania na bieżni pierścienia zewnętrznego i zwiększania na bieżni pierścienia wewnętrznego i wynikające z tego zmiany sił kontaktowych (wzrastające na bieżni zewnętrznej i malejące na bieżni wewnętrznej).

W [10] przedstawiono kompleksowy, zintegrowany model łożyskowania wrzeciona, składający się z obracającego się wału, uchwytu narzędziowego, modelu kontaktowego łożysk, wrzeciennika. Model umożliwia wirtualne skrawanie wraz z numeryczną analizą dynamiki wrzeciona. Proponowany model pozwala na przewidywanie sztywności łożysk, postaci drgań, odpowiedzi impulsowej (funkcji przejścia) statycznych i dynamicznych odkształceń wzdłużnych (w osi wrzeciona), a także sił (oddziaływań) kontaktowych w łożyskach, symulowanych sił skrawania. Model został zweryfikowany doświadczalnie na stanowisku laboratoryjno-przemysłowym. Badania pokazują, że przewidywanie przebiegów dynamicznych wrzeciona wymaga zintegrowanego modelu wszystkich elementów wrzeciona zmontowanego na obrabiarce. Warunki pracy, takie jak napięcie wstępne łożysk, warunki skrawania, cechy materiałowe, wpływają na częstotliwość i amplitudę drgań w trakcie obróbki. W artykule przyjęto model łożyska w postaci modelu Jones'a, a siły i odkształcenia kontaktowe zgodnie z modelem Hertza. W modelu uwzględniono występowanie sił odśrodkowych i żyroskopowych wywołanych ruchem elementów tocznych łożyska.

W [28] przedstawiono metodę modelowania cieplnego elektrowrzeciona. Przyjęto założenie, że źródłem ciepła w łożyskach są: opory ruchu wynikające z własności smaru, które są zależne od prędkości łożyska, oraz opory ruchu wynikające z obciążenia łożyska, które są niezależne od prędkości. Przyjęto model Palmgrena dla określenia oporów ruchu zależnych od obciążenia, a dla oporów zależnych od prędkości przyjęto powszechnie stosowany model uwzględniający lepkość oleju i prędkość obrotową.

Opracowany model obliczeniowy, numeryczny, pozwala prognozować rozkład temperatur, a także odkształceń cieplnych. Słabszą stroną takiego podejścia jest zbyt prosty model oporów zależnych od obciążenia. Doświadczenie pokazuje bowiem, że prędkość łożyska także ma wpływ na opory ruchu zależne od obciążenia.

W [25] przedstawiono zagadnienia modelowania układu wrzecionowego z łożyskami skośnymi. Celem przeprowadzonych badań była analiza porównawcza dwóch sposobów wstępnego napinania łożysk, tj. ze stałym napięciem (ze sprężystym lub hydraulicznym urządzeniem napinającym) lub ze sztywnym napięciem. Do modelowania oporów ruchu, a w konsekwencji ilości ciepła, przyjęto uproszczone modele, powszechnie stosowane przy tego typu analizach. Model analityczny (numeryczny) został zweryfikowany eksperymentalnie. Doświadczenie potwierdziło, że dla mniejszych prędkości korzystniej jest stosować sztywne napięcia wstępne, ale wraz ze wzrostem prędkości, a tym samym i wzrostem oporów ruchu, temperatura rośnie. Dlatego wówczas korzystniejsze jest wstępne napięcie z elementem sprężystym lub hydraulicznym.

W [21] przedstawiono termomechaniczny model wrzeciona z łożyskami skośnymi w konwencji metody elementów skończonych. Ciepło wytwarzane w łożyskach i w silniku jest transmitowane do otoczenia, układu chłodzenia i układu mechanicznego, co wywołuje odkształcenia cieplne wrzeciona. Zweryfikowany doświadczalnie model wrzeciona pozwala przewidywać rozkład temperatur i ciepła, a także sztywność łożysk i obciążenia kontaktowe dla zdefiniowania warunków obróbki. Zmiany temperatury i odkształceń zostały uwzględnione w lepkości oleju i sztywności łożysk. Przewidywane właściwości łożysk zostały wykorzystane dla estymacji zmian w dynamicznych przebiegach wrzeciona. W artykule przedstawiono także wyniki badań eksperymentalnych w postaci modelu doświadczalnego, łączącego moment oporów na biegu jałowym w funkcji napięcia wstępnego łożyska, prędkości obrotowej łożyska i lepkości smaru stałego.

W artykule [1] opisano stan obecny wrzecion obrabiarkowych z naciskiem na elektrowrzeciona do obróbki HSC. Szczegółowe informacje obejmują główne elementy wrzeciona, uwzględniając rozwiązania historyczne, aktualne i trendy przyszłościowe. Przedstawiono przegląd prac badawczych dotyczących rozwoju wrzecion. Zaawansowane metody modelowania cieplnych i dynamicznych zjawisk jednostek wrzecionowych opisano z punktu widzenia osiągniętych rezultatów badań. Podkreślono, że w dalszym ciągu brakuje kompleksowych modeli, które uwzględniałyby szeroki zakres łożysk, smarowania, warunków pracy. W artykule

przytoczono także wykres obrazujący zależność momentu oporów łożyska na biegu jałowym w funkcji prędkości obrotowej łożyska i napięcia wstępnego.

W [59] przedstawiono model termomechaniczny wrzeciona z łożyskami kulkowymi skośnymi. W tym artykule głównym źródłem ciepła są opory tarcia w łożyskach skośnych. Prezentowany model oparty jest na mechanicznym modelu łożyska i numerycznym (MES) modelu wrzeciona. Proponowane rozwiązanie dotyczy niestacjonarnych zmian temperatury, odkształceń termicznych i sztywności łożyska dla różnych pozycji kątowych kulki. Przewidywane w wyniku modelowania charakterystyki łożyska wykorzystano do oszacowania zmian sztywności końcówki wrzeciona oraz odkształceń końcówki wrzeciona w wyniku rozszerzalności cieplnej i ich wpływu na dokładność obróbki. W celu walidacji opracowanego modelu przeprowadzono badania eksperymentalne dla różnych prędkości wrzeciona. W wyniku tych badań stwierdzono dużą zgodność badań modelowych i eksperymentalnych. Wyniki eksperymentu wykazały, że wzrostowi prędkości wrzeciona towarzyszy zwiększenie temperatury łożysk, które prowadzi do odkształceń cieplnych elementów łożysk. To z kolei wiedzie do wzrostu sztywności łożysk, a w konsekwencji i końcówki wrzeciona.

W [58] przedstawiono model termiczny 3D MES, który został oparty na termomechanicznym modelu łożyska i modelu numerycznym wrzeciona. Na podstawie analizy termomechanicznej łożysk tocznych skośnych określa się generowane ciepło i opór cieplny dla każdej pozycji kuli. Aby zapewnić jak najdokładniejszą analizę przy określaniu oporu cieplnego, łożyska zostały podzielone na kilka stref na podstawie geometrii ich przekroju. Powyższe założenia zostały zastosowane do modelu 3D MES, który pozwolił ustalić rozkład pola temperatury i bilans cieplny wrzeciona. Aby udowodnić skuteczność proponowanego modelu, przeprowadzono eksperymentalne pomiary temperatur wrzeciona i łożysk za pomocą termopar i kamery termowizyjnej.

W [55] przedstawiono dynamiczny model termiczno-mechaniczny do badania właściwości termicznych w układzie wrzeciona. W tym modelu analiza termiczna w stanie przejściowym, analiza strukturalna statyczna i obliczenia warunków brzegowych są prowadzone w pętli zamkniętej. Przejściowe warunki brzegowe, takie jak sztywność łożyska, wytwarzane ciepło w łożysku i przewodność cieplna kontaktu, obliczane są za pomocą odpowiednich wzorów i metodologii rozwiązania. Obliczane są sprzężenia termiczne, które rzadko są uwzględniane w dostępnej literaturze. Aby zweryfikować dokładność prognozowania, termiczny eksperyment został przeprowadzony na stanowisku testowym układu wrzeciono-łożysko. Prognozy proponowanego modelu, takie jak napięcie wstępne łożyska, temperatura i przesunięcia

termiczne, są zgodne z wynikami eksperymentu. Porównanie proponowanego modelu z dwiema tradycyjnymi symulacjami pokazuje, że sprzężenia cieplne w warunkach brzegowych i cieplna przewodność kontaktowa mają ogromne znaczenie dla oceny właściwości termicznych w czasie rzeczywistym. Proponowany model zapewnia praktyczną metodę poprawy dokładności prognozowania. Można go również uogólnić na inne układy mechaniczne do badania dynamicznych właściwości termicznych.

W [15] przewidywano cieplne efekty w łożysku tocznym skośnym dla wysokich prędkości, co wymagało bardzo precyzyjnego przetwarzania, ponieważ cieplne charakterystyki łożyska zmieniają się wraz ze zmianami cieplnymi. Większość badaczy uwzględnia jedynie efekty konwekcji, pomijając udział chłodzenia, smarowania w przepływie ciepła. W rozpatrywanym przypadku dla oszacowania obciążeń w łożysku uwzględniano równowagę kulki poddanej obciążeniom i odkształcenia cieplne w łożysku. Brano pod uwagę przepływy ciepła z tytułu smarowania, więzy z tytułu struktury mechanicznej oraz z tytułu montażu w celu oszacowania ilości ciepła, jego przepływu a w końcu zaproponowano wielowęzłowy cieplny model sieciowy. Uwzględniając ten model sieciowy oraz kompleksową siatkę MES wrzeczona, przewidywano temperaturę łożyska. Użyto metody Eulera do rozwiązania zagadnienia w Matlabie, w rezultacie obliczono temperatury w węzłach sieci. Ostatecznie dokonano porównania wyników badań modelowych w Matlabie z wynikami badań numerycznych, stwierdzając dużą ich zgodność. Tym samym zweryfikowano poprawność sieciowego modelu cieplnego.

W [16] przedstawiono metodę szacowania cieplnych przebiegów w wysoko-obrotowych łożyskach tocznych, co jest wymogiem precyzyjnej obróbki na obrabiarce, jakkolwiek poszukuje się możliwie prostych, ale dokładnych modeli cieplnych. Biorąc pod uwagę siły odśrodkowe, momenty żyroskopowe, odkształcenia cieplne łożyska, sformułowano warunki równowagi kulki łożyskowej dla oszacowania obciążeń kontaktowych. Uwzględniono osiowy i promieniowy przepływ ciepła, wpływ więzów strukturalnych na przebiegi cieplne, montaż łożyska, aby ostatecznie zaproponować sieciowy model cieplny. Biorąc pod uwagę warunki otoczenia, przedstawiono zoptymalizowany model sieciowy dla pary łożysk skośnych. Zaaplikowano metodę Newtona-Rapsona w celu rozwiązania zadania w Matlabie. Porównano wyniki badań modelu sieciowego z numerycznym, stwierdzając, że różnią się nie więcej niż o 9%. To pozwala przewidywać wzrost temperatury, a tym samym błędy geometryczne obróbki, spowodowane odkształceniami cieplnymi.

W [22] zaproponowano nowe podejście analityczne, jednolite dla łożysk kulkowych i rolkowych, które uwzględnia 5 względnych przemieszczeń bieżni (3 przesunięcia:  $dx$ ,

$dy$  i  $dz$  oraz 2 obroty:  $dqy$  i  $dqz$ ) w celu uzyskania prostej zależności do bezpośredniego obliczania 3 obciążeń łożyska:  $F_x$ ,  $F_y$  i  $F_z$  oraz 2 momentów obrotowych:  $M_y$  i  $M_z$ . Rozważane jest pełne sprzężenie wszystkich tych przemieszczeń i sił. Maksymalne obciążenie elementu tocznego  $Q_{max}$ , rozkład obciążenia  $Q(y)$  i rozkład obciążenia elementu tocznego 3D ( $dQ(y,x)$ ) na każdym wycinku kontaktowym rolki – bieżni są opisane analitycznie. Będzie zatem możliwe przeprowadzenie przez użytkowników łożysk statycznych, nieliniowych obliczeń układu zawierającego łożyska, wał, obudowę, pozwalających wyznaczyć wszystkie cechy jak siły kontaktowe, przemieszczenia. To podejście można również wdrożyć w dowolnej nieliniowej analizie elementów skończonych (MES) dla rozwiązania problemu łożyska wraz z wałkiem i obudową.

W [60] w celu ułatwienia rozwoju wrzecion szybkobieżnych opracowano model belkowy, algorytm i oprogramowanie komputerowe dla analizy właściwości termicznych wrzeciona. Model termiczny zawiera model wytwarzania ciepła w łożyskach tocznych, model wymiany ciepła z łożysk i modele dla oszacowania temperatury i deformacji temperaturowych elementów wrzeciona. Przeprowadzono test eksperymentalny i dokonano oceny ilościowej wpływu warunków eksploatacji na tarcie i właściwości termiczne wrzeciona szlifierek oraz tokarek. Stwierdzono, że warunki pracy silniej wpływają na temperaturę wrzeciona, gdy obroty wzrastają. Porównanie wyników analizy i eksperymentu dowodzi ich dużej zgodności i pozwala na sugerowanie zastosowania opracowanych modeli i oprogramowania do projektowania i badań wrzecion szybkobieżnych z łożyskami tocznymi.

W [5] badano skutki osiowego obciążenia wstępnego nieliniowego modelu dynamicznego elastycznego wirnika podpartego na łożyskach kulkowych skośnych. Zastosowano udoskonalony dynamiczny model łożysk kulkowych do modelowania wirnika o pięciu stopniach swobody. Prognozowane na podstawie tych badań wyniki są zgodne z wcześniejszymi danymi eksperymentalnymi, tym samym proponowany model jest adekwatny do układu rzeczywistego. Zastosowano teorie Floqueta do badania stabilności i bifurkacji systemu, biorąc pod uwagę, lub nie, niewyrównoważenie wirnika. Za pomocą map Poincare' oraz widm częstotliwościowych analizowany był niestabilny ruch systemu (wirnika). Otrzymane wyniki wskazują na bardzo silne oddziaływanie napięcia wstępnego łożyska na stabilność układu wirnika. Jeżeli jest ono odpowiednio duże, to można uniknąć ruchu niestabilnego wirnika. Margines bifurkacji dla niewyrównoważonego wirnika rośnie, jeżeli rośnie napięcie wstępne łożysk i ma wpływ na częstotliwości rezonansowe układu wirnika.

W [7] poruszono problem braku pełniejszego zrozumienia właściwości systemu wrzeciona obrabiarki, w szczególności wpływu efektów termicznych na zachowanie się szybkoobrotowych wrzecion, co poważnie ogranicza ich niezawodność. Wrzeciona o dużej prędkości są najczęściej odpowiedzialne za nagłe i katastroficzne awarie, szczególnie kiedy wcześniej nie ma sygnałów alarmujących o zbliżającej się awarii. W artykule przedstawiono model termiczny wrzeciona metodą różnic skończonych w celu oceny rozkładu mocy dla dużych prędkości wrzecion, a w szczególności charakterystyki przepływu ciepła oraz radiatorów ciepła. Z niewielkimi uproszczeniami opracowany model został zweryfikowany na specjalnie skonstruowanym stanowisku badawczym, w którym zastosowano profesjonalne, wysokowydajne elektrowrzeciono o mocy 32 kW i maksymalnej prędkości do 25 000 obr/min.

W [41] analizowano elektrowrzeciono obrabiarki CNC z punktu widzenia powstającego ciepła i jego wpływu na błędy obróbki. Opracowany został model sieciowy oporności cieplnej elektrowrzeciona, opierający się na teorii wymiany ciepła. Zdefiniowano równania równowagi cieplnej w krytycznych węzłach sieci, bazując na równaniach Kirchoffa. Równania rozwiązano metodą Newmarka-b, uzyskując temperatury wszystkich składników sieci, oraz przeprowadzono analizę statycznego i dynamicznego przepływu ciepła elektrowrzeciona. W celu uzyskania dokładnych charakterystyk termicznych układu wrzeciona przyjęto dokładne wartości przewodnictwa cieplnego każdego elementu i wartości współczynników konwekcji cieplnej pomiędzy układem chłodzenia a elementami systemu wrzeciona, biorąc pod uwagę m.in. wpływ wymiennika ciepła na temperaturę chłodziwa w układzie chłodzenia. Równocześnie precyzyjnymi magnetycznymi czujnikami temperatury zmierzono zmiany temperatury wrzeciona w centrum obróbczym CNC dla różnych prędkości obrotowych. Wyniki eksperymentalne pokazują, że termiczny model sieciowy pozwala przewidywać rozkład temperatury w układzie wrzeciona z rozsądną dokładnością. Ponadto oszacowano wpływ prędkości obrotowej i warunków chłodzenia na wzrost temperatury głównych elementów układu wrzeciona. Ostatecznie zasugerowano kilka zaleceń w celu poprawy cieplnego zachowania się wrzeciona dla różnych operacji technologicznych obrabiarki.

Badacze z polskiego podwórka także mają swój udział w rozwoju teorii i praktycznego użytkowania łożysk tocznych, zwłaszcza w odniesieniu do obrabiarek. Niewątpliwie największe osiągnięcia w badaniach wpływu ciepła na wrzeciona obrabiarkowe ma zespół prof. Jędrzejewskiego z Politechniki Wrocławskiej, np. [43, 24]. Publikacje tego zespołu są liczne i na wysokim poziomie.

Ważnymi pracami polskich naukowców są artykuły Stypa-Rekowskiego i Musiała z Akademii Techniczno-Rolniczej z Bydgoszczy. W [44, 53] oraz w [54] przedstawiono wyniki badania oporów ruchu łożysk tocznych skośnych. Głównym wynikiem tych badań z punktu widzenia celu niniejszej pracy jest model analityczny, który umożliwia obliczanie momentu oporów w łożysku tocznym na podstawie znajomości sił kontaktowych występujących pomiędzy kulkami a bieżniami. Należy podkreślić, że jest to jedna z niewielu publikacji, w której zamieszczono modele obliczeniowe oporów ruchu na podstawie sił kontaktowych. Do tej pory bowiem opory ruchu były szacowane na podstawie modelu Palmgren'a, który uzależnia wielkość tych oporów od obciążeń zewnętrznych, działających na łożysko.

Również autorzy niniejszej monografii publikują od lat artykuły dotyczące zjawisk występujących w obszarze kontaktu kulki z bieżniami. Wszystkie ich publikacje są skoncentrowane na zagadnieniu oporów ruchu występujących w łożyskach tocznych skośnych. Koresponduje to z ogólnym celem monografii, tj. szacowaniem wielkości tych oporów na podstawie prędkości obrotowej łożyska, jego napięcia wstępnego i obciążenia zewnętrznego.

W [31] przedstawiono metodę wyznaczania oporów ruchu szybkoobrotowych, wrzecionowych łożysk skośnych. Celem metody było określenie tych oporów, które przyczyniają się do wytworzenia ciepła w łożysku. Na podstawie analizy doniesień literaturowych przyjęto, że ogólnie dostępne wzory na obliczanie oporów w łożysku nie dają wystarczająco wiarygodnej informacji dla łożysk szybkobieżnych. Dlatego w proponowanej metodzie skupiono się na analitycznym wyznaczeniu sił w obszarach kontaktu elementu tocznego z bieżniami pierścieni łożyska, zwłaszcza dla wysokich prędkości obrotowych. Przyjęto, że te siły decydują o oporach wynikających z tarcia tocznego i ślizgowego w łożysku. Opisano analityczny model obliczeniowy do wyznaczania oporów ruchu w łożysku skośnym na podstawie znajomości sił normalnych w strefach kontaktu kulki z bieżniami. W artykule przedstawiono także propozycję analitycznego wyznaczania współczynnika tarcia tocznego. Omówiono też metodykę wyznaczania momentu spinu oraz jego wpływu na opory ruchu łożyska tocznego skośnego. Zamieszczono również wyniki badań eksperymentalnych na specjalnym stanowisku badawczym dla testowego łożyska skośnego typu B7013-E.

W [30] zaproponowany został tzw. model rozszerzony łożyska tocznego skośnego. Do tej pory w prawie wszystkich publikacjach uwzględniano siły odśrodkowe, wynikające z ruchu orbitalnego (obiegowego) kulek toczących się po bieżni. W modelu rozszerzonym autor zaproponował uwzględnienie także sił odśrodkowych od obracającego się pierścienia łożyskowego (w tym przypadku pierścienia

wewnętrzny). Autor wykazał, że zarówno siły kontaktowe, jak i kąty działania zasadniczo się różnią od wyznaczanych bez uwzględnienia sił odśrodkowych od pierścienia łożyskowego. Co więcej, siły kontaktowe są większe, co ma wpływ na opory ruchu łożyska. Autor również wykazał, że efekt od sił odśrodkowych od pierścienia wewnętrznego jest widoczny dopiero po przekroczeniu pewnej prędkości obrotowej łożyska. Innymi słowy, poniżej tej prędkości nie ma różnicy pomiędzy siłami obliczonymi dla modelu rozszerzonego i konwencjonalnego.

W [32] Autor przedstawił analityczną metodę wyznaczania współczynnika tarcia tocznego w łożyskach tocznych. Metoda ta opiera się na definicji tarcia tocznego, rozumianego jako moment obrotowy od siły kontaktowej. Autor przeprowadził wiele symulacji numerycznych i eksperymentalnych w celu porównania wyników oporów tarcia tocznego obliczanego wg dotychczasowej metodyki i według metodyki zaproponowanej przez Autora. W ostatecznym modelu współczynnika tarcia tocznego zaproponowanym przez Autora jest on funkcją siły kontaktowej pomiędzy kulką i bieżnią łożyskową.

W [34] przedstawiono wpływ pasowania wałka w otworze łożyska oraz tzw. sztywnego napięcia wstępnego, tj. wstępnego przemieszczenia pierścienia wewnętrznego względem zewnętrznego, na obciążenia kontaktowe pomiędzy kulkami a bieżniami łożyska. Wykazano bardzo silny wpływ tych parametrów montażowych łożyska na siły kontaktowe, a tym samym na opory ruchu. Projektant węzła łożyskowego musi dobrać oba parametry w taki sposób, aby nie spowodować przegrzania łożyska. Istotne przy tym jest, że przy tzw. sztywnym napięciu wstępnym, w zależności od prędkości obrotowej łożyska, składowa osiowa siły napinającej łożysko może istotnie się zmienić, tzn. wzrosnąć. W artykule pokazano także, jak te parametry zmieniają kąty działania łożyska. Przeprowadzone badania dotyczyły tzw. modelu rozszerzonego łożyska tocznego skośnego, w którym oprócz sił odśrodkowych z tytułu wirowania kulek uwzględniono siły odśrodkowe z tytułu ruchu obrotowego pierścienia wewnętrznego.

W [35] przedstawiono wyniki badań symulacyjnych MES wpływu prędkości obrotowej łożyska skośnego i napięcia wstępnego łożyska skośnego na siły kontaktowe i kąty działania. Celem tych badań było uzyskanie wyników, które mogłyby posłużyć do weryfikacji analitycznych modeli łożyska tocznego skośnego. Porównanie uzyskanych wyników badań symulacyjnych z wynikami badań jednego z autorów pokazały dużą ich zgodność, co potwierdziło adekwatność modeli analitycznych do wyznaczania sił kontaktowych w łożyskach tocznych skośnych.



W [36] przedstawiono wyniki badań symulacyjnych MES dotyczących sił kontaktowych i kątów działania w łożysku tocznym skośnym. Głównym celem tych badań była ocena wpływu tzw. współczynnika sztywności w modelu kontaktowym łożyska na siły kontaktowe. W modelowaniu MES zjawisk kontaktowych badacz musi arbitralnie dobrać wielkość tego współczynnika, nie mając żadnych wskazań, jak to zrobić. Ponadto w badaniach symulacyjnych wprowadzono tarcie pomiędzy kulką a bieżniami i porównano wyniki takich badań z doniesieniami literaturowymi, w których na ogół tarcia się nie uwzględnia. Uzyskane wyniki badań symulacyjnych różnią się znacząco od spotykanych w literaturze.

W [45] i w [12] przedstawiono wyniki badań eksperymentalnych w postaci wpływu prędkości obrotowej i napięcia wstępnego łożyska tocznego skośnego na moment oporów ruchu łożyska. Istotne jest, że badania dotyczyły tylko oporów ruchu z tytułu tarcia suchego, ponieważ badane łożysko było pozbawione smaru. Tak wyznaczone eksperymentalne opory ruchu posłużyły do weryfikacji modeli analitycznych oporów ruchu łożyska. Porównanie wyników badań eksperymentalnych i analitycznych pozwoliło na sformułowanie wniosku o konieczności udoskonalenia modelu analitycznego, jako że różnica ilościowa była zbyt duża.

W [47] opisano wyniki badań modelowych rozkładu temperatur w łożysku tocznym skośnym. Źródłem ciepła powstającego w łożysku były opory ruchu z tytułu obciążeń kontaktowych wynikających z sił odśrodkowych działających na kulki i pierścieni wewnętrzny, ze zjawiska spinu oraz z napięcia wstępnego łożysk skośnych.

Muszyński [46] w swojej pracy doktorskiej przedstawił modele analityczne oraz modele symulacyjne MES oporów ruchu w łożysku tocznym skośnym. Pierwsza część pracy dotyczy modelu z tytułu oporów mechanicznych i wiskotycznych przy założeniu pominięcia wpływu cieplnych odkształceń elementów łożyska. Z kolei w części drugiej przedstawił model cieplny łożyska oraz wpływ odkształceń cieplnych elementów łożyska na opory ruchu. Opracowane modele przedstawiono w takiej postaci, aby konstruktor gniazda łożyskowego mógł oszacować wielkość oporów ruchu na podstawie znajomości prędkości obrotowej łożyska, jego napięcia wstępnego, cech eksploatacyjnych smaru oraz cech geometrycznych łożyska. Zarówno model mechaniczny łożyska, jak i model cieplny zostały zweryfikowane eksperymentalnie.

W [12] przedstawiono wyniki badań eksperymentalnych w postaci wpływu prędkości obrotowej i napięcia wstępnego łożyska tocznego skośnego na moment oporów ruchu łożyska. Istotne jest, że badania dotyczyły tylko oporów ruchu z tytułu

tarcia suchego, ponieważ badane łożysko było pozbawione smaru. Tak wyznaczone eksperymentalne opory ruchu posłużyły do weryfikacji modeli analitycznych oporów ruchu łożyska. Porównanie wyników badań eksperymentalnych i analitycznych pozwoliło na sformułowanie wniosku o konieczności udoskonalenia modelu analitycznego, jako że różnica ilościowa była zbyt duża.

Przeprowadzona analiza doniesień literaturowych pokazuje, że problematyka modelowania łożysk tocznych skośnych w dalszym ciągu jest aktualnym problemem badawczym, który nie doczekał się całkowitego i zadowalającego rozwiązania. Znaczący wzrost prędkości obrotowych zespołów wrzecionowych uwydatnił zjawiska, których do tej pory nie uwzględniano w analizach, jako pomijalnie małe. Obecnie te zjawiska stają się dominujące, a to wymaga odpowiednich modeli dynamicznych.

Analiza doniesień literaturowych pokazuje, że jedną z podstawowych informacji, jaka jest niezbędna, zwłaszcza dla oceny wpływu ciepła na błędy obrabiarki, jest wiedza o oporach ruchu wewnątrz łożyska. 99% wszystkich doniesień literaturowych traktujących o sprawach cieplnych wrzecion obrabiarek HSC korzysta z opracowanego przed 70 laty modelu Palmgrena. Model ten z uwagi na swoją prostotę jest bardzo dobrym narzędziem inżynierskim. To, co jest jego wadą, to brak uwzględniania, w sposób jawny, wpływu obciążeń dynamicznych występujących w łożysku z tytułu takich zjawisk jak siły ośrodkowe, momenty żyroskopowe, zjawisko spinu na opory ruchu łożyska. W dobie obrabiarek HSC uwzględnianie tych zjawisk wydaje się nieodzowne. Stąd głównym celem niniejszej monografii staje się opracowanie odpowiednich modeli obliczeniowych, które pozwolą oszacować opory ruchu z uwzględnieniem zjawisk dynamicznych, występujących wewnątrz łożyska tocznego.

### 3. ŁOŻYSKO TOCZNE WRZECIONOWE JAKO ŹRÓDŁO CIEPŁA

We wrzecionach obrabiarek powszechne zastosowanie znalazły bezluzowe łożyska toczne oraz łożyska ze wstępnym napięciem. Bezluzowość i wstępne napięcie mogą być cechą konstrukcyjną (fabryczną) łożyska, np. w dwurzędowych łożyskach kulkowych skośnych, lub mogą się pojawiać w wyniku odpowiedniego montażu, np. łożyska kulowego skośnego jednorzędowego. Wówczas jednak łożyska trzeba montować parami. O wielkości napięcia wstępnego decyduje wtedy konstruktor. Nawet intuicyjnie można stwierdzić, że od wielkości tego napięcia wstępnego będzie zależała ilość ciepła powstającego w łożysku.

W łożyskach tocznych ciepło powstaje w wyniku:

- oporów tarcia elementów łożysk o siebie (kulek czy wałeczków o bieżnie pierścieni łożyskowych, o koszyk, a także o elementy uszczelnień),
- oporów tarcia elementów tocznych o smar lub olej, tzw. opory wiskotyczne.

Straty mocy  $\Delta N$  z tego tytułu prawie w całości przekształcają się w ciepło, które powoduje odkształcenia cieplne elementów łożysk, a tym samym i błędy geometryczne ułożyskowanych elementów, np. wrzecion obrabiarek.

Straty mocy  $\Delta N$  można wyrazić w postaci zależności:

$$\Delta N = \sum M_i \omega_i \quad (3.1)$$

gdzie:  $\Delta N$  – strata mocy z tytułu oporów ruchu w łożysku przekształcająca się w ciepło,

$M_i$  – składnik momentu oporu ruchu spowodowany i-tym zjawiskiem,

$\omega_i$  – prędkość kątowa elementu łożyska wynikająca z i-tego zjawiska.

Z zależności (3.1) wynika, że dla oszacowania strat mocy w łożysku trzeba:

- zdefiniować zjawiska fizyczne, które przyczyniają się do powstawania oporów ruchu,
- wyznaczyć momenty  $M_i$  z tytułu powstających oporów ruchu,
- wyznaczyć prędkości kątowe  $\omega_i$  elementów łożyska, przyczyniających się do powstawania oporów ruchu.

Na podstawie doniesień literaturowych o łożyskach kulkowych skośnych można wyspecyfikować następujące zjawiska, które przyczyniają się do powstawania oporów ruchu w łożysku:

- toczenie się kulek po bieżniach i wynikające z tego opory tarcia tocznego,
- ślizganie się kulek po bieżniach i wynikające z tego opory tarcia ślizgowego,
- ślizganie się kulek względem bieżni wokół osi normalnej do obszaru kontaktu kulki z bieżnią, tzw. zjawisko spinu,
- toczenie lub ślizganie się kulek po bieżniach w wyniku zjawiska żyroskopowego,
- ślizganie się kulek względem koszyka prowadzącego,
- brodzenie kulek w smarze lub w oleju, tzw. opory wiskotyczne,
- inne, jak np. tarcie pierścieni łożyskowych o uszczelnienia.

Wielkość oporów ruchu z tytułu wymienionych zjawisk jest funkcją następujących obciążeń łożyska:

- obciążeń zewnętrznych ułożyskowanego wałka lub osi, które przenoszą moc użyteczną do napędzanego zespołu maszyny,
- obciążenia wewnętrznego z tytułu wstępnego napinania łożysk tocznych skośnych,
- obciążeń wewnętrznych, dynamicznych, tj. od sił odśrodkowych od wirujących elementów łożyska,
- obciążeń wewnętrznych dynamicznych wynikających z momentu żyroskopowego.

Tak więc do wyznaczenia strat mocy spowodowanych oporami ruchu łożyska konieczna jest znajomość wszystkich wymienionych obciążeń łożyska oraz znajomość relacji pomiędzy tymi obciążeniami a wymienionymi zjawiskami fizycznymi w łożysku.

Sumaryczny moment oporów ruchu w łożysku tocznym skośnym można przedstawić następująco:

$$M = M_T + M_v \quad (3.2)$$

gdzie:  $M$  – sumaryczny moment oporów ruchu w łożysku, mierzony na wałku,

$M_T$  – sumaryczny moment oporów ruchu z tytułu tarcia mechanicznego (tocznego i ślizgowego),

$M_v$  – moment oporów ruchu z tytułu tarcia wiskotycznego.

Uwzględniając ww. zjawiska fizyczne, przyczyniające się do oporów ruchu z powodu tarcia mechanicznego, sumaryczny moment tarcia mechanicznego można przedstawić następująco:

$$M_T = M_{(T)z} + M_{(T)r} + M_{(T)s} + M_s^* + M_g + M_{in} \quad (3.3)$$

gdzie:  $M_{(T)z}$  – moment oporów z tytułu obciążenia zewnętrznego łożyska,

$M_{(T)r}$  – moment oporów z tytułu toczenia się kulek po bieżniach (z powodu tarcia tocznego),

$M_{(T)s}$  – moment oporów z tytułu ślizgania się kulek po bieżniach w trakcie ruchu tocznego (z powodu tarcia ślizgowego),

$M_s^*$  – moment oporów z tytułu zjawiska spinu, zredukowany na wał napędowy,

$M_g$  – moment oporów z tytułu zjawiska żyroskopowego,

$M_{in}$  – moment oporów z tytułu innych zjawisk, np. tarcia kulek o koszyk lub tarcia pierścieni o uszczelnienia.

Oszacowanie strat mocy  $\Delta N$  (3.1) wymaga, oprócz znajomości poszczególnych momentów oporu, znajomości prędkości i wielkości towarzyszących poszczególnym zjawiskom fizycznym, tj.

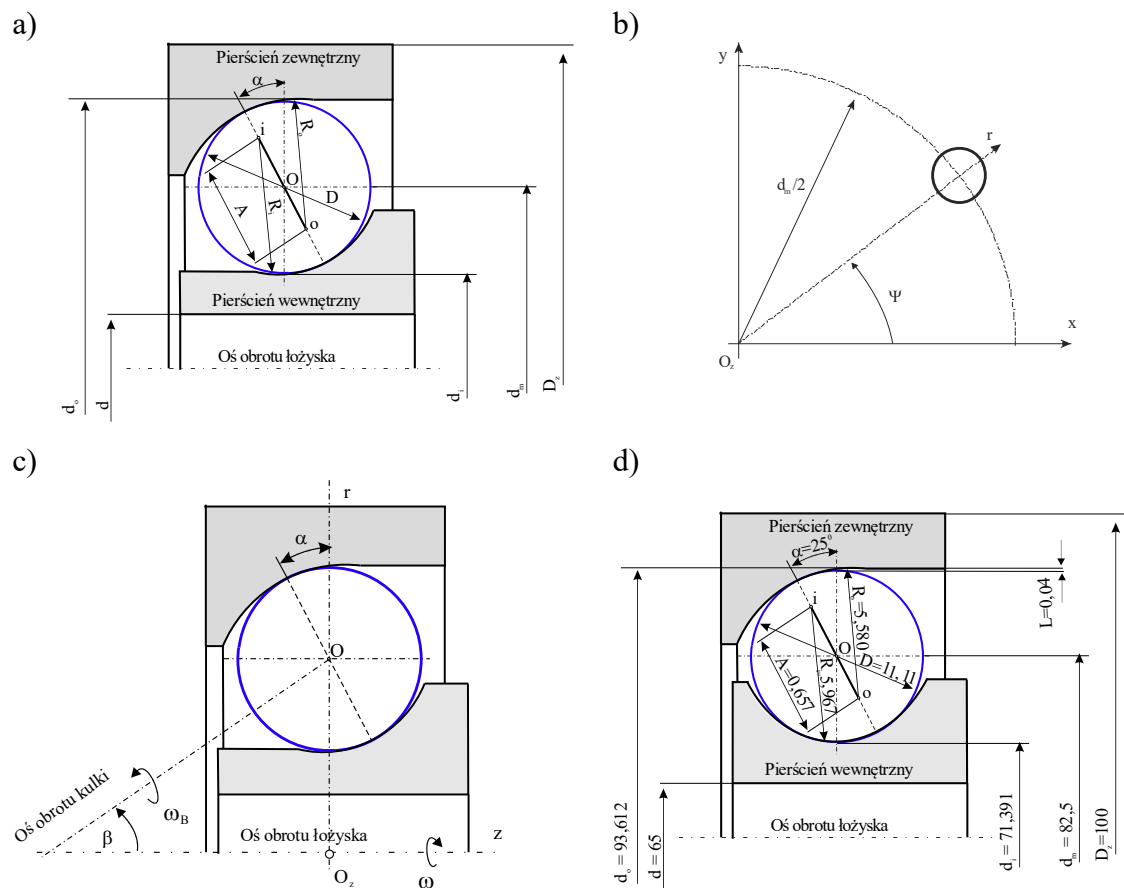
- prędkości kątowej  $\omega$  łożyska, w większości przypadków będzie to prędkość kątowa pierścienia wewnętrznego łożyska,
- prędkości kątowej  $\omega_m$  wirowania kulek wokół osi łożyska (jest to również prędkość kątowa koszyka łożyskowego),
- prędkości kątowej  $\omega_B$  ruchu obrotowego kulek wokół własnej osi (w łożysku tocznym skośnym oś obrotu kulek jest odchylona od osi łożyska o kąt  $\beta$ ),
- prędkości kątowej  $\omega_s$  ruchu obrotowego kulek wokół osi normalnej do powierzchni kontaktu kulki i bieżni, tzw. prędkości spinu,
- prędkości kątowej  $\omega_g$  ruchu obrotowego kulki wokół osi prostopadłej do osi łożyska i do osi ruchu obrotowego kulek, tzw. prędkości żyroskopowej.

Należy także zauważyć, że w zależności od tego, czy szacujemy opory ruchu w obszarze kontaktu kulki z bieżnią zewnętrzną lub wewnętrzną, będziemy mieli do czynienia z innymi wartościami prędkości, np. prędkości spinu  $\omega_{si}$  dla bieżni wewnętrznej i  $\omega_{so}$  dla bieżni zewnętrznej.

Zagadnieniu kinematyki łożyska tocznego skośnego będzie poświęcony oddzielny rozdział monografii.

## 4. GEOMETRIA ŁOŻYSKA KULKOWEGO SKOŚNEGO

Dla zidentyfikowania każdego z oporów ruchu konieczna jest także znajomość geometrii łożyska tocznego, a zwłaszcza niektórych kątów. Zostanie to przedstawione na przykładzie jednorzędowego kulkowego łożyska skośnego, które to łożysko będzie obiektem testowym. Oznacza to, że wszelkie ilościowe charakterystyki będą przedstawiane dla przykładowego, testowego łożyska firmy FAG, typu FAG B7013-E-T-P4.



Rys. 4.1. Parametry geometryczne łożyska kulkowego skośnego, jednorzędowego (a), (b), (c) oraz łożyska typu FAG B7013-E-T-P4 (d)

Fig. 4.1. Geometric parameters of a single row angular contact ball bearing (a), (b), (c) and bearings of the FAG type B7013-E-T-P4 (d)

Każde łożysko kulkowe skośne ma swój układ geometryczny, w skład którego wchodzi:

- a) parametry geometryczne katalogowe, niezbędne do usytuowania łożyska w gnieździe łożyskowym, jak:
  1. średnica wewnętrzna  $d$ , która jest wyróżnikiem łożyska (występuje w symbolu katalogowym łożyska),
  2. średnica zewnętrzna  $D_z$ , którą można znaleźć w danych katalogowych,
  3. szerokość łożyska  $B$ , która także jest dostępna w danych katalogowych,
  4. inne parametry geometryczne, charakterystyczne dla poszczególnych odmian łożysk,
- b) parametry geometryczne niedostępne bezpośrednio w katalogach łożysk. Dla ich zidentyfikowania posłużymy się rys. 4.1.

Do parametrów geometrycznych, niezbędnych do szacowania oporów ruchu, zaliczamy:

- średnicę bieżni wewnętrznej  $d_i$  i zewnętrznej  $d_o$  pierścieni łożyskowych,
- promień krzywizny bieżni wewnętrznej  $R_i$  i bieżni zewnętrznej  $R_o$ ,
- średnicę kulki  $D$ ,
- kąt działania łożyska  $\alpha$ ,
- kąt nachylenia osi ruchu obrotowego kulki  $\beta$ ,
- średnicę podziałową łożyska  $d_m = 0,5(d+D_z)$  (średnica okręgu, po którym porusza się środek elementu tocznego).

Na podstawie tych parametrów można wyznaczyć dwie ważne cechy łożyska skośnego:

- rozstaw  $A$  pomiędzy środkami krzywizn bieżni zewnętrznej i wewnętrznej,
- luz  $L$  pomiędzy bieżniami a kulką.

Pomocne są następujące zależności:

$$A = R_i + R_o - D \quad (4.1)$$

oraz

$$L = d_o - d_i - 2D \quad (4.2)$$

gdzie:  $R_i, R_o$  – promienie krzywizny bieżni wewnętrznej i zewnętrznej,

$d_i, d_o$  – średnice bieżni wewnętrznej i zewnętrznej,

$D$  – średnica kulki,

$A$  – rozstęp pomiędzy środkami krzywizn bieżni zewnętrznej i wewnętrznej,

$L$  – luz pomiędzy bieżniami i kulką.

Pomiędzy  $A$ ,  $L$  i  $\alpha$  zachodzi tożsamość:

$$\cos \alpha = 1 - \frac{L}{2A} \quad (4.3)$$

gdzie:  $\alpha$  – kąt działania łożyska.

W [4] przytoczono za literaturą formułę pozwalającą obliczyć kąt  $\beta$  w stanie spoczynku łożyska, mianowicie:

$$\tan \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \frac{D}{d_m}} \quad (4.4)$$

Parametry  $R_i$ ,  $R_o$ ,  $A$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $d_i$ ,  $d_o$  mają decydujący wpływ na oddziaływania w strefie kontaktu kulki i bieżni pierścieni łożyskowych.

Dla przykładowego łożyska typu FAG B7013-E-T-P4, które było przedmiotem badań, parametry geometryczne wyglądają następująco:  $d = 65$  mm,  $D_z = 100$  mm,  $B = 18$  mm,  $\alpha = 25^\circ$ ,  $\beta = 22^\circ 9'$ ,  $d_m = 82,500$  mm,  $D = 11,11$  mm,  $R_i = 5,56$  mm,  $R_o = 5,56$  mm,  $d_o = 93,612$  mm,  $d_i = 71,388$  mm,  $A = 0,01$  mm,  $L = 0,004$  mm.



## 5. KINEMATYKA ŁOŻYSKA KULKOWEGO SKOŚNEGO

Na rys. 5.1 pokazano w sposób schematyczny łożysko toczne skośne wraz z najważniejszymi ruchami kulki i pierścienia wewnętrznego oraz najważniejsze kąty. Przyjęto, że napędzany jest pierścień wewnętrzny, podczas gdy pierścień zewnętrzny jest unieruchomiony. Podstawowy ruch obrotowy łożyska (pierścienia wewnętrznego) z prędkością kątową  $\omega$  wywołuje ruch orbitalny kulek toczących się po bieżni pierścienia wewnętrznego (jest to także ruch obrotowy koszyka łożyskowego) z prędkością kątową  $\omega_m$  oraz ruch obrotowy kulek wokół własnych osi odchylonych od osi łożyska o kąt nachylenia  $\beta$  z prędkością kątową  $\omega_B$ . W wyniku zróżnicowanych prędkości liniowych w punktach kontaktu kulki z wewnętrzną i zewnętrzną bieżnią łożyska kulka obraca się także wokół osi normalnych do powierzchni kontaktowych z prędkością kątową tzw. spinu  $\omega_s$ .

Prędkości liniowe bieżni zewnętrznej  $V_{1o}$  i kulki  $V_{2o}$  w punkcie kontaktowym się różnią. Podobna sytuacja występuje w punkcie kontaktowym pierścienia wewnętrznego. Rezultatem tego jest poślizg pomiędzy pierścieniem zewnętrznym i kulką z prędkością  $V_{(T)so}$  (rys. 5.1b) oraz pomiędzy pierścieniem wewnętrznym i kulką z prędkością  $V_{(T)si}$ .

Prędkościątowe  $\omega_m$ ,  $\omega_B$ , i  $\omega_s$  są kinematycznie powiązane. Obrazuje to rys. 5.1c w postaci trójkąta kinematycznego, łączącego te trzy prędkości.

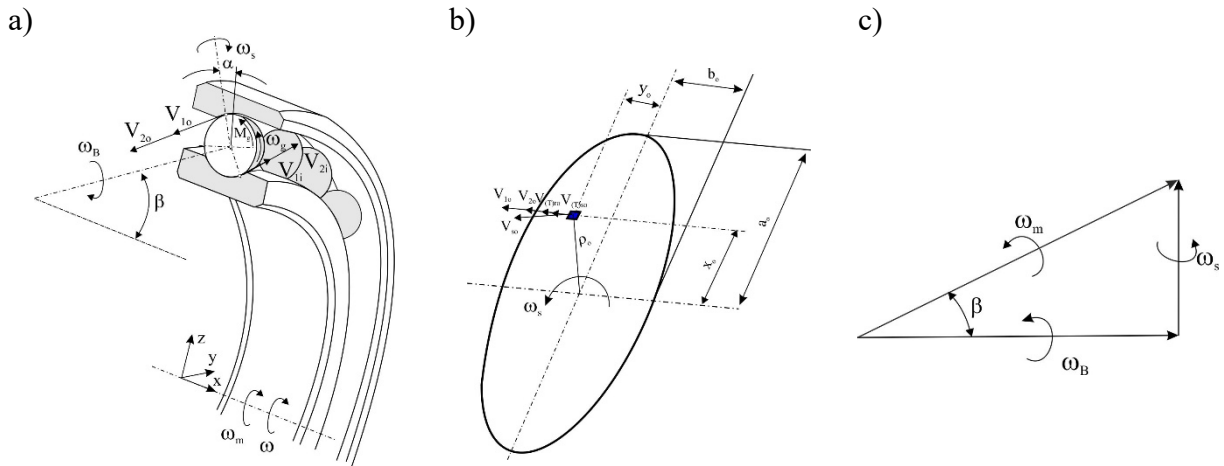
Prędkości poślizgu  $V_{(T)so}$  i  $V_{(T)si}$  oraz prędkości spinu  $V_{so}$  i  $V_{si}$  powodują powstanie tarcia poślizgowego w łożysku tocznym. Prędkość kątowna  $\omega_g$  z tytułu zjawiska żyroskopowego także wywołuje tarcie poślizgowe.

W dalszym ciągu przedstawione zostaną modele analityczne, które pozwalają na obliczanie poszczególnych prędkości liniowych i kątowych.

### 5.1. Zjawisko poślizgu w łożysku tocznym skośnym

Ten rozdział przedstawia analityczne modele obliczeniowe prędkości poślizgu w obszarze kontaktu kulki z bieżnią zewnętrzną  $V_{(T)so}$  i wewnętrzną  $V_{(T)si}$ . Wiedza o tych

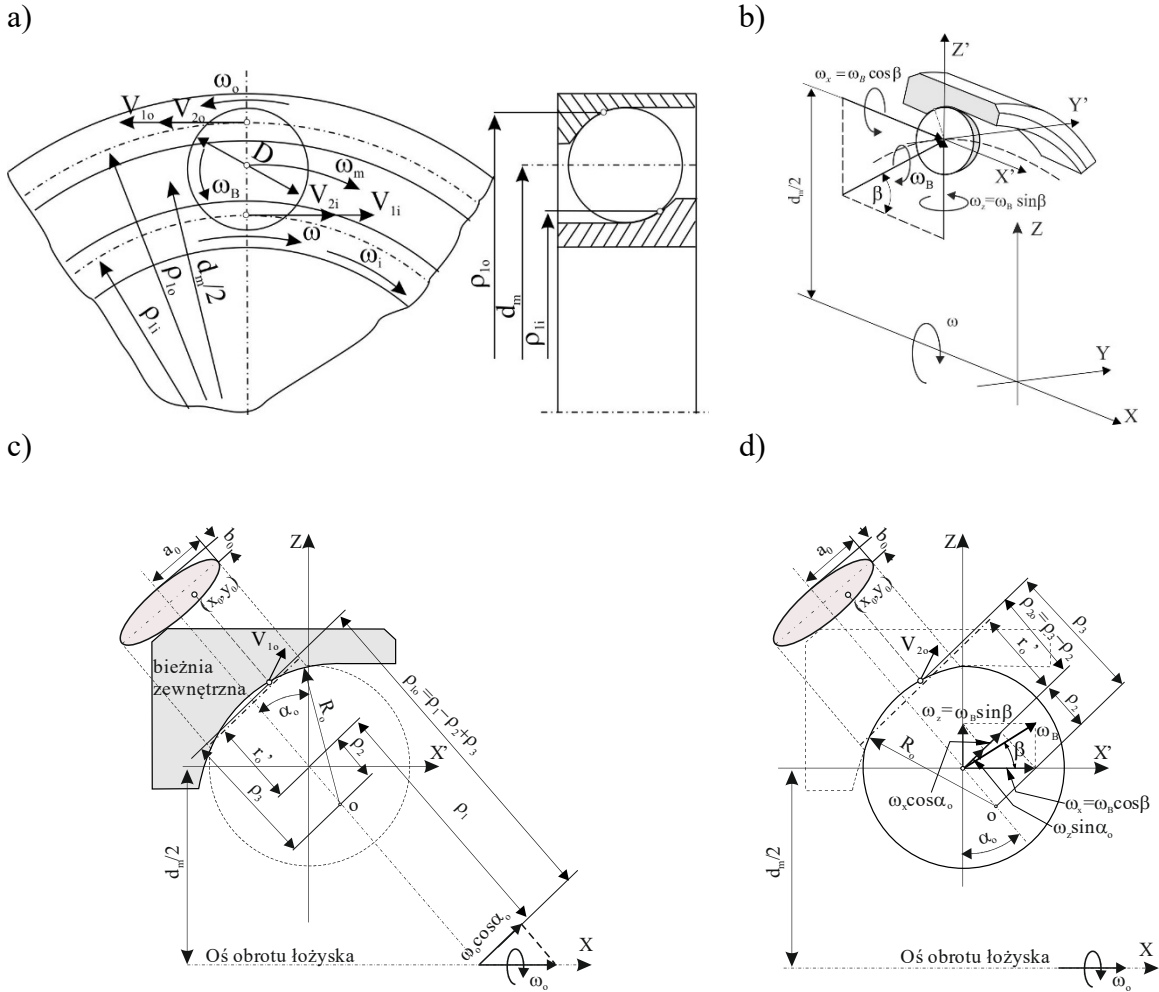
prędkościach jest niezbędna do oceny oporów ruchu w łożysku tocznym, spowodowanych tarcieniem ślizgowym w łożysku tocznym. Pomocny będzie rys. 5.2, na którym pokazano wektory prędkości  $\omega_o$  i  $\omega_B$  oraz ich składowe. Pokazano także wielkości geometryczne, które umożliwiają obliczanie prędkości liniowych  $V_{1o}$  i  $V_{2o}$ .



Rys. 5.1. Widok łożyska skośnego z najważniejszymi ruchami kulki i pierścieni (a), widok odkształcenia kontaktowego pomiędzy kulką i bieżnią zewnętrzną oraz rozkład prędkości poślizgu (b), trójkąt kinematyczny prędkości kątowych (c):  $\omega$  – prędkość kątowa pierścienia wewnętrznego,  $\omega_m$  – prędkość kątowa ruchu orbitalnego kulek,  $\omega_B$  – prędkość kątowa kulek wokół własnej osi,  $\omega_s$  – prędkość kątowa kulek w wyniku zjawiska spinu,  $\omega_g$  – prędkość kątowa kulek w wyniku zjawiska żyroskopowego,  $\alpha$  – kąt działania łożyska,  $\beta$  – kąt nachylenia płaszczyzny, w której występuje ruch orbitalny,  $V_{1o}$ ,  $V_{2o}$  – prędkości liniowe kulek i bieżni zewnętrznej,  $V_{(T)so}$  – prędkość liniowa poślizgu kulek względem bieżni zewnętrznej,  $V_{so}$  – prędkość liniowa kulek względem bieżni zewnętrznej w wyniku zjawiska spinu,  $V_{(T)ro}$  – prędkość liniowa kulek względem bieżni zewnętrznej w wyniku ruchu tocznego kulki,  $\rho_o$  – promień,  $M_g$  – moment żyroskopowy,  $a_o$ ,  $b_o$  – dłuższa i krótsza półoś elipsy kontaktowej

Fig. 5.1. View of the angular ball bearing with the indicated most important movements of the ball and the bearing ring (a), view of contact deformation between a ball and outer ring and velocity distribution of sliding (b), kinematic triangle of angular velocity (c):  $\omega$  – angular velocity of the inner ring,  $\omega_m$  – angular velocity in the orbital motion of the,  $\omega_B$  – angular velocity of the balls rolling motion relative to their axis,  $\omega_s$  – angular velocity of the balls as a result of the spin phenomenon,  $\omega_g$  – angular velocity of the balls as a result of gyroscopic phenomenon,  $\alpha$  – contact angle of the angular bearing,  $\beta$  – ball pitch angle of the plane in which the balls are circulating,  $V_{1o}$ ,  $V_{2o}$  – tangential velocity of the outer ring and ball,  $V_{(T)so}$  – tangential velocity of the outer ring and ball due to sliding,  $V_{so}$  – tangential velocity of the outer ring and ball due to spinning,  $V_{(T)ro}$  – tangential velocity of the outer ring and ball due to rolling,  $\rho_o$  – radius,  $M_g$  – gyroscope torque,  $a_o$ ,  $b_o$  – semi-major and semi-minor axis

Na rys. 5.2a przedstawiono metodę wyznaczania prędkości liniowej bieżni zewnętrznej  $V_{1o}$  w dowolnym punkcie elipsy kontaktowej  $(x_o, y_o)$  w wyniku ruchu obrotowego pierścienia zewnętrznego z prędkością  $\omega_o \cos \alpha_o$  na promieniu  $\rho_{1o}$ .



Rys. 5.2. Kinematyczne i geometryczne założenia dla oceny prędkości poślizgu  $V_{(T)so}$ :  $\omega_o$  – prędkość kątowna pierścienia zewnętrznego,  $\alpha_o$  – zewnętrzny kąt działania,  $d_m$  – średnica podziałowa łożyska,  $r_o'$  – promień „czystego” toczenia się kulki,  $R_o$  – promień krzywizny bieźni zewnętrznej,  $a_o, b_o$  – półosie elipsy kontaktowej

Fig. 5.2. Kinematic and geometric assumptions for determining the tangential velocity  $V_{(T)so}$ :  $\omega_o$  – angular velocity of the outer ring,  $\alpha_o$  – outer contact angle,  $d_m$  – pitch diameter,  $r_o'$  – pure radius of ball rolling,  $R_o$  – raceway curvate radius,  $a_o, b_o$  – semi-axis of contact ellipse

Zakładając, że:

$$\begin{aligned} \rho_{1o} &= \rho_1 - \rho_2 + \rho_3 \\ \rho_1 &= \frac{d_m}{2 \cos \alpha_o} \\ \rho_2 &= \sqrt{R_o^2 - a_o^2} - \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - a_o^2} \\ \rho_3 &= \sqrt{R_o^2 - x_o^2} \\ \rho_{1o} &= \frac{d_m}{2 \cos \alpha_o} + \sqrt{R_o^2 - x_o^2} - \sqrt{R_o^2 - a_o^2} + \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - a_o^2} \end{aligned}$$

prędkość liniowa  $V_{1o}$  wynosi:

$$V_{1o} = -\omega_o \rho_{1o} \cos \alpha_o = -\frac{d_m}{2} \omega_o - \left( \sqrt{R_o^2 - x_o^2} - \sqrt{R_o^2 - a_o^2} + \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - a_o^2} \right) \omega_o \cos \alpha_o \quad (5.2)$$

gdzie:  $\omega_o$  – względna prędkość kątowa kulki i bieżni zewnętrznej,

$D$  – średnica kulki.

Rysunek 5.2b i rys. 5.2c pokazują, jak wyznaczyć prędkość liniową kulki  $V_{2o}$  w dowolnym punkcie elipsy kontaktowej  $(x_o, y_o)$  w wyniku ruchu obrotowego kulki z prędkością kątową  $\omega_B$  na promieniu  $\rho_{2o}$ .

Przyjmując, że:

$$\rho_{2o} = \rho_3 - \rho_2 \quad (5.3)$$

prędkość liniowa  $V_{2o}$  wynosi:

$$V_{2o} = -\omega_B \rho_{2o} \cos(\alpha_o - \beta) = -\omega_B \left( \sqrt{R_o^2 - x_o^2} - \sqrt{R_o^2 - a_o^2} + \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - a_o^2} \right) \cos(\alpha_o - \beta) \quad (5.4)$$

Prędkość poślizgu  $V_{(T)so}$  w obszarze kontaktu kulki z bieżnią zewnętrzną można wyznaczyć następująco:

$$V_{(T)so} = V_{1o} - V_{2o} = -\frac{d_m}{2} \omega_o - (\omega_o \cos \alpha_o - \omega_B \cos(\alpha_o - \beta)) \left( \sqrt{R_o^2 - x_o^2} - \sqrt{R_o^2 - a_o^2} + \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - a_o^2} \right) \quad (5.5)$$

Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla wyznaczenia prędkości poślizgu  $V_{(T)si}$  w obszarze kontaktu kulki z bieżnią wewnętrzną, otrzymując

$$V_{(T)si} = \frac{d_m}{2} \omega_i - (\omega_i \cos \alpha_i + \omega_B \cos(\alpha_i - \beta)) \left( \sqrt{R_i^2 - x_i^2} - \sqrt{R_i^2 - a_i^2} + \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - a_i^2} \right) \quad (5.6)$$

gdzie  $\omega_i$  – względna prędkość kątowa kulki i bieżni wewnętrznej.

Należy zauważyć, że promienie  $\rho_{1i}$  i  $\rho_{2i}$  należy obliczyć wg nieco odmiennych wzorów:

$$\rho_{1i} = \rho_1 + \rho_2 - \rho_3 = \frac{d_m}{2 \cos \alpha_i} - \sqrt{R_i^2 - x_i^2} + \sqrt{R_i^2 - a_i^2} - \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - a_i^2} \quad (5.7)$$

$$\rho_{2i} = \rho_3 - \rho_2 = \sqrt{R_i^2 - x_i^2} - \sqrt{R_i^2 - a_i^2} + \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - a_i^2}$$

Założenia przedstawione do tej pory pokazują, że zjawisku toczenia się kulek po bieżniach towarzyszą zjawiska ich poślizgu. Dlatego, dla całościowego pokazania tego zjawiska jest celowe określenie prędkości liniowej „czystego” toczenia się kulek. Przyjęto, że toczenie się kulek występuje na promieniu oznaczonym na rys. 5.2 jako  $r_o'$  (dla pierścienia wewnętrznego będzie to  $r_i'$ ).

Prędkość liniowa „czystego” toczenia się kulek po bieżni zewnętrznej  $V_{(T)ro}$  wyniesie:

$$V_{(T)ro} = -\omega_o (\rho_1 + r_o') \cos \alpha_o = -\omega_o \left( \frac{d_m}{2 \cos \alpha_o} + r_o' \right) \cos \alpha_o \quad (5.8)$$

a po bieżni wewnętrznej  $V_{(T)ri}$ ,

$$V_{(T)ri} = -\omega_i (\rho_1 - r_i') \cos \alpha_i = -\omega_i \left( \frac{d_m}{2 \cos \alpha_i} - r_i' \right) \cos \alpha_i \quad (5.9)$$

gdzie:  $V_{(T)ro}$ ,  $V_{(T)ri}$  – prędkości liniowe „czystego” toczenia się kulek po bieżni zewnętrznej i wewnętrznej,

$r_o'$ ,  $r_i'$  – promienie „czystego” toczenia się kulek po bieżniach.

Promienie „czystego” toczenia się kulek po bieżniach  $r_o'$ ,  $r_i'$  można wyznaczyć z warunków:  $V_{(T)si} = 0$  lub  $V_{(T)so} = 0$ . Więc dla  $x_o = a_{o1}$  dla pierścienia zewnętrznego lub  $x_i = a_{i1}$  dla pierścienia wewnętrznego geometryczne warunki wyznaczenia promieni  $r_o'$  i  $r_i'$  (rys. 5.3c) można przedstawić następująco:

$$\begin{aligned} r_o' &= \rho_{1o} - \rho_1 = \sqrt{R_o^2 - a_{o1}^2} - \sqrt{R_o^2 - a_o^2} + \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - a_o^2} \\ r_i' &= \rho_{1i} - \rho_1 = \sqrt{R_i^2 - a_{i1}^2} - \sqrt{R_i^2 - a_i^2} + \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - a_i^2} \end{aligned} \quad (5.10)$$

gdzie  $a_{i1}$ ,  $a_{o1}$  – współrzędne osi x jednego z punktów „czystego” toczenia się kulek po bieżni wewnętrznej (rys. 5.3) i odpowiednio po bieżni zewnętrznej.

Współrzędne  $a_1$  i  $a_2$  (współrzędna drugiego możliwego punktu „czystego” toczenia się) można oszacować na podstawie teorii Houperta [23]. Odnosząc się do tej teorii, współrzędne  $a_1/a$  i  $a_2/a$  opisują położenie występowania punktów „czystego” toczenia się (rys. 5.3a). Dla hipotezy ORC (Outer Race Control) Houpert [22] pokazał, że zachodzi tożsamość:

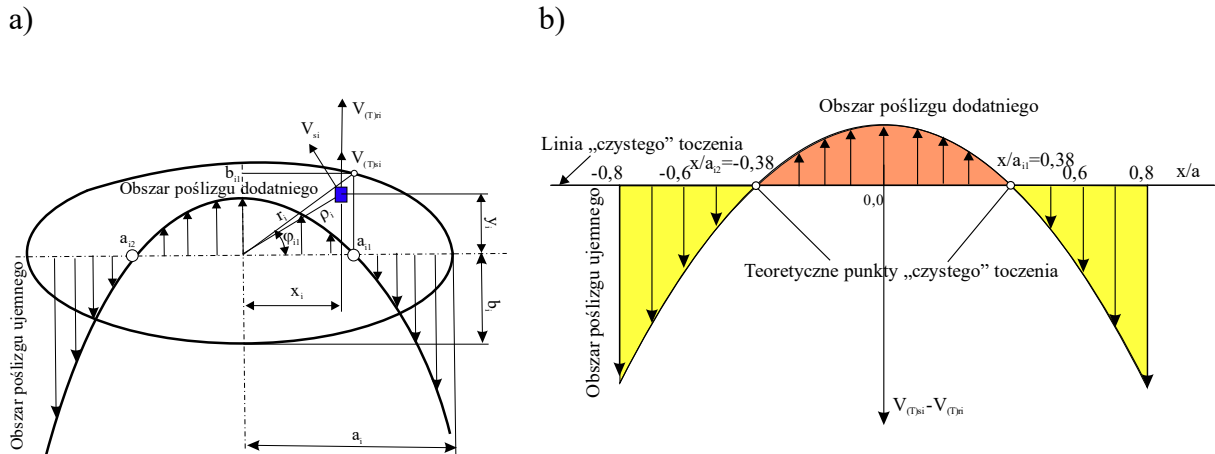
$$\frac{a_1}{a} = -\left( \frac{a_2}{a} + \frac{2R_a}{a} \frac{D \sin \alpha}{d_m} \right) \quad (5.11)$$

gdzie:  $R_a$  – zastępczy promień krzywizny w punkcie kontaktu kulki z bieżnią (dla łożyska tocznego skośnego ( $R_a \approx D/2$ ),

$a_1$ ,  $a_2$  – współrzędne punktów położonych na większej półosi elipsy kontaktowej (rys. 5.3a), w których następuje „czyste” toczenie się ( $a_{i1}$ ,  $a_{i2}$  dla bieżni wewnętrznej i  $a_{o1}$ ,  $a_{o2}$  dla bieżni zewnętrznej).

Dla układu symetrycznego ( $a_2 = \text{abs}(a_1)$ ), który występuje wówczas, kiedy można pominąć wpływ zjawiska żyroskopowego, można napisać

$$\left| \frac{a_1}{a} \right| + \frac{a_2}{a} = 2 \left| \frac{a_1}{a} \right| = \frac{2R_a}{a} \frac{D \sin \alpha}{d_m} \quad (5.12)$$



Rys. 5.3. Przykładowy rozkład różnicy prędkości poślizgu  $V(T)_{si}$  i prędkości toczenia się  $V(T)_{ri}$  dla testowego łożyska FAG B7013-E dla prędkości 12 000 obr/min w obszarze kontaktu kulki z bieżnią wewnętrzną

Fig. 5.3. Example of the distribution of the difference in sliding speed  $V(T)_{si}$  and rolling speed  $V(T)_{ri}$  for the test bearing FAG B7013-E (bearing speed  $n=12.000$  rpm) in the contact area of the inner raceway with the ball

Autorzy przeprowadzili testy symulacyjne dla testowego łożyska FAG B7013-E, dla którego dane geometryczne wynoszą:  $d_m = 84$  mm,  $D=11,11$  mm, natomiast pozostałe dane zostały wyznaczone dla prędkości obrotowej łożyska 12 000 obr/min i dla napięcia wstępnego 1000 N [31], mianowicie:  $\alpha_i = 27,0^0$ ,  $\alpha_o = 17,1^0$ ,  $\beta = 15,08^0$ ,  $a_i = 1,78$  mm,  $a_o = 1,80$  mm. Dla takich danych uzyskano: dla pierścienia wewnętrznego  $a_{i1}/a = 0,38$ ,  $a_{i1} = 0,68$  mm, promień „czystego” toczenia  $r_i' = 5,51$  mm, natomiast dla pierścienia zewnętrznego  $a_{o1}/a = 0,24$ , współrzędna  $a_{o1} = 0,44$  mm, a promień  $r_o' = 5,53$  mm.

Rysunek 5.3b pokazuje przykładowy przebieg różnicy prędkości poślizgu  $V(T)_{si}$  i toczenia się  $V(T)_{ri}$  dla testowego łożyska FAG B7013-E dla prędkości 12 000 obr/min.

W obszarze elipsy kontaktowej  $x/a < -0,38$  i  $x/a > 0,38$  występuje klasyczny poślizg, zwany ujemnym, który jest źródłem oporów tarcia ślizgowego toczonej kulki (nazwa „ujemny” wynika z faktu, że siła tarcia jest przeciwnie skierowana do prędkości ruchu, który ma kierunek dodatni). W obszarze  $-0,38 < x/a < 0,38$  występuje tzw. poślizg dodatni, który nie wywołuje oporów tarcia.

Wyznaczanie prędkości poślizgu  $V(T)_{si}$  i  $V(T)_{so}$  wymaga informacji o wymiarach geometrycznych łożyska, takich jak  $D$ ,  $R_i$ ,  $R_o$ , półosi  $a_i$  i  $a_o$  elips kontaktowych, kątów działania  $\alpha_i$  i  $\alpha_o$  oraz prędkości kątowych  $\omega_i$ ,  $\omega_o$ ,  $\omega_m$ ,  $\omega_B$ . Wszystkie niezbędne prędkości kątowe powinny być wyrażane w funkcji prędkości kątowej łożyska  $\omega$  (dla unieruchomionego pierścienia zewnętrznego będzie to prędkość pierścienia wewnętrznego). Informacji o półosiach elips kontaktowych i kątach działania należy poszukiwać w specjalistycznych publikacjach, np. [31]. Analityczne modele

obliczeniowe prędkości kątowych  $\omega_i$ ,  $\omega_o$ ,  $\omega_m$  zostaną przedstawione w dalszym ciągu, na podstawie znajomości prędkości kątowej  $\omega$ .

Prędkość kątowa  $\omega_B$  obrotu kulki względem własnej osi może zostać obliczona przy założeniu, że prędkości liniowe „czystego” toczenia się bieżni zewnętrznej i kulki  $V_{(T)ro}$  w obszarze kontaktu są takie same, tzn. dla promienia toczenia  $r_o'$ :

$$\begin{aligned} -\omega_o(\rho_1 + r_o') \cos \alpha_o &= -\omega_B r_o' \cos(\alpha_o - \beta) \\ \frac{\omega_B}{\omega_o} &= \frac{\rho_1 + r_o'}{r_o'} \frac{\cos \alpha_o}{\cos(\alpha_o - \beta)} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Przyjmując, że pierścień zewnętrzny jest unieruchomiony, prędkości kątowe pierścienia zewnętrznego i wewnętrznego względem ruchu orbitalnego kulek  $\omega_i$ ,  $\omega_o$  można obliczyć jako:

$$\omega_o = -\omega_m \quad \omega_i = \omega - \omega_m \quad (5.14)$$

gdzie:  $\omega_m$  – prędkość kątowa ruchu orbitalnego kulek (prędkość kątowa koszyka łożyskowego) względem osi łożyska.

Wówczas prędkość kątowa  $\omega_B$  wynosi:

$$\omega_B = -\frac{\rho_1 + r_o'}{r_o'} \frac{\cos \alpha_o}{\cos(\alpha_o - \beta)} \omega_m \quad (5.15)$$

Bardzo podobne rozumowanie można przeprowadzić dla pierścienia wewnętrznego, otrzymując ponownie prędkość  $\omega_B$ :

$$\omega_B = -\frac{\rho_1 - r_i'}{r_i'} \frac{\cos \alpha_i}{\cos(\alpha_i - \beta)} (\omega - \omega_m) \quad (5.16)$$

Porównując (5.15) i (5.16), możemy obliczyć prędkość kątową  $\omega_m$  w funkcji prędkości kątowej  $\omega$ :

$$\frac{\omega_m}{\omega} = \frac{1}{1 + \left( \frac{\rho_1 + r_o'}{\rho_1 - r_i'} \right) \frac{r_i' \cos \alpha_o \cos(\alpha_i - \beta)}{r_o' \cos \alpha_i \cos(\alpha_o - \beta)}} \quad (5.17)$$

Wstawiając (5.17) do (5.16) lub do (5.15), otrzymamy:

$$\frac{\omega_B}{\omega} = -\frac{1}{\frac{r_o' \cos(\alpha_o - \beta)}{\rho_1 + r_o'} + \frac{r_i' \cos(\alpha_i - \beta)}{\rho_1 - r_i'} \frac{\cos \alpha_o}{\cos \alpha_i}} \quad (5.18)$$

Przy uwzględnieniu:

$$r'_i \approx r'_o \approx \frac{D}{2} \quad (5.19)$$

prędkość kątowna  $\omega_B$  wynosi:

$$\omega_B \approx \frac{-\omega}{\frac{\cos(\alpha_o - \beta)}{\left(\frac{d_m}{D} + \cos \alpha_o\right)} + \frac{\cos(\alpha_i - \beta)}{\left(\frac{d_m}{D} - \cos \alpha_i\right)}} \quad (5.20)$$

a prędkość kątowna  $\omega_m$ :

$$\omega_m \approx \frac{\omega}{1 + \frac{\left(\frac{d_m}{D} + \cos \alpha_o\right) \cos(\alpha_i - \beta)}{\left(\frac{d_m}{D} - \cos \alpha_i\right) \cos(\alpha_o - \beta)}} \quad (5.21)$$

Bardzo podobne modele prędkości  $\omega_B$  i  $\omega_m$  można spotkać w literaturze, np. [1, 39, 19]. Wprowadzając oznaczenia:

$$\begin{aligned} L_o &= \frac{d_m}{2} + \frac{d_m}{2r'_o} \cos \alpha_o \left( \sqrt{R_o^2 - a_o^2} - \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - a_o^2} \right) \\ M_o &= 1 + \frac{\left(\frac{0,5d_m}{\cos \alpha_o} + r'_o\right)}{\left(\frac{0,5d_m}{\cos \alpha_i} - r'_i\right)} \frac{r'_i \cos \alpha_o \cos(\alpha_i - \beta)}{r'_o \cos \alpha_i \cos(\alpha_o - \beta)} \\ L_i &= \frac{d_m}{2} - \frac{d_m}{2r'_i} \cos \alpha_i \left( \sqrt{R_i^2 - a_i^2} - \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - a_i^2} \right) \\ M_i &= \frac{M_o}{M_o - 1} \\ M_B &= \frac{r'_o \cos(\alpha_o - \beta)}{\rho_1 + r'_o \cos \alpha_o} + \frac{r'_i \cos(\alpha_i - \beta)}{\rho_1 - r'_i \cos \alpha_i} \end{aligned} \quad (5.22)$$

które dla danego łożyska, zadanych warunków pracy, tj. prędkości obrotowej, obciążenia zewnętrznego i napięcia wstępnego, są stałe, tzn. niezależne od współrzędnej  $x_0$  ( $x_i$ ), która reprezentuje położenie punktu kontaktowego kulki z bieżniami, prędkości liniowe  $V_{(T)so}$ ,  $V_{(T)si}$  można przedstawić następująco:

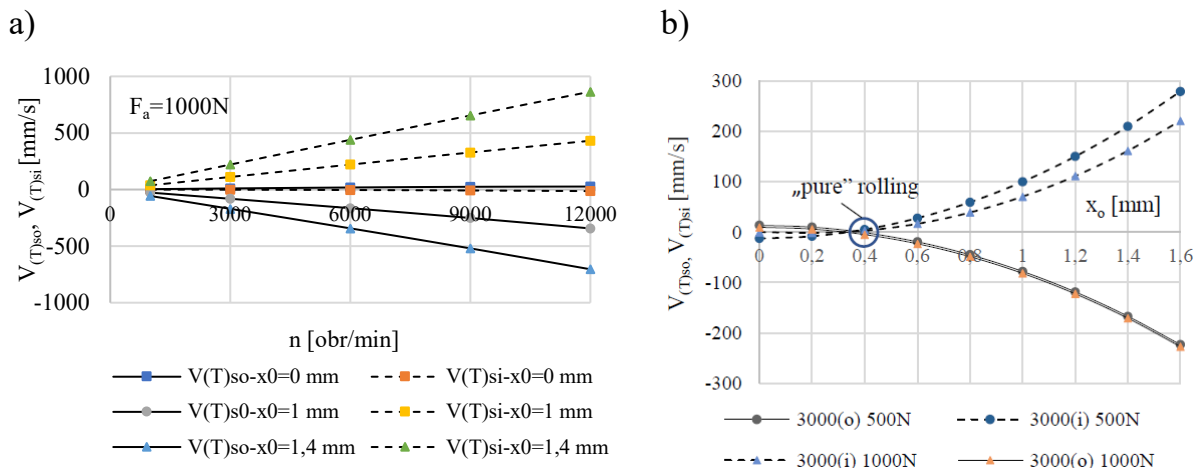
$$\begin{aligned} V_{(T)so} &= \left( \frac{L_o}{M_o} - \frac{\frac{d_m}{2r'_o} \cos \alpha_o \sqrt{R_o^2 - x_o^2}}{M_o} \right) \omega \\ V_{(T)si} &= \left( \frac{L_i}{M_i} - \frac{\frac{d_m}{2r'_i} \cos \alpha_i \sqrt{R_i^2 - x_o^2}}{M_i} \right) \omega \end{aligned} \quad (5.23)$$



Prędkości liniowe  $V_{(T)so}$ ,  $V_{(T)si}$  zależą od współrzędnej  $x_0$  ( $x_{0o}$  dla zewnętrznej i  $x_{0i}$  dla wewnętrznej bieżni), co oznacza, że zależą od położenia w obszarze elipsy kontaktowej.

Rysunek 5.4a pokazuje przykładowe przebiegi prędkości liniowych poślizgu  $V_{(T)so}$ ,  $V_{(T)si}$  w funkcji prędkości obrotowej łożyska dla wstępnego napięcia 1000 N i długości półosi 0-1,4 mm, a rys. 5.4b jako funkcję współrzędnej  $x_0$ .

Jak widać, prędkości poślizgu  $V_{(T)so}$ ,  $V_{(T)si}$  są funkcjami prędkości łożyska zbliżonymi do liniowych i silnie nieliniowymi funkcjami położenia punktu kontaktowego  $x_0$ . Są także funkcjami napięcia wstępnego łożyska. Prędkości poślizgu wzrastają, w miarę jak oddalamy się od środka elipsy kontaktowej  $x_0=0$  (rys. 5.4b), osiągając swoją wartość największą na brzegach elipsy kontaktowej ( $x_0=a_o$  lub  $a_i$ ). Wartości prędkości poślizgu na brzegach elipsy kontaktowej ( $x_0=a_o$  lub  $a_i$ ) są kilka razy większe od wartości w pobliżu środka elipsy kontaktowej ( $x_0=0$ ).



Rys. 5.4. Przykładowe przebiegi prędkości poślizgu  $V_{(T)so}$ ,  $V_{(T)si}$  w funkcji: a) prędkości obrotowej, b) współrzędnej  $x_0$ : (o) – dla pierścienia zewnętrznego, (i) – dla pierścienia wewnętrznego  
 Fig. 5.4. Examples of tangential velocities  $V_{(T)so}$ ,  $V_{(T)si}$  as a function of a) rotational speed, b)  $x_0$  co-ordinate: (o) – for the outer ring, (i) – for the inner ring

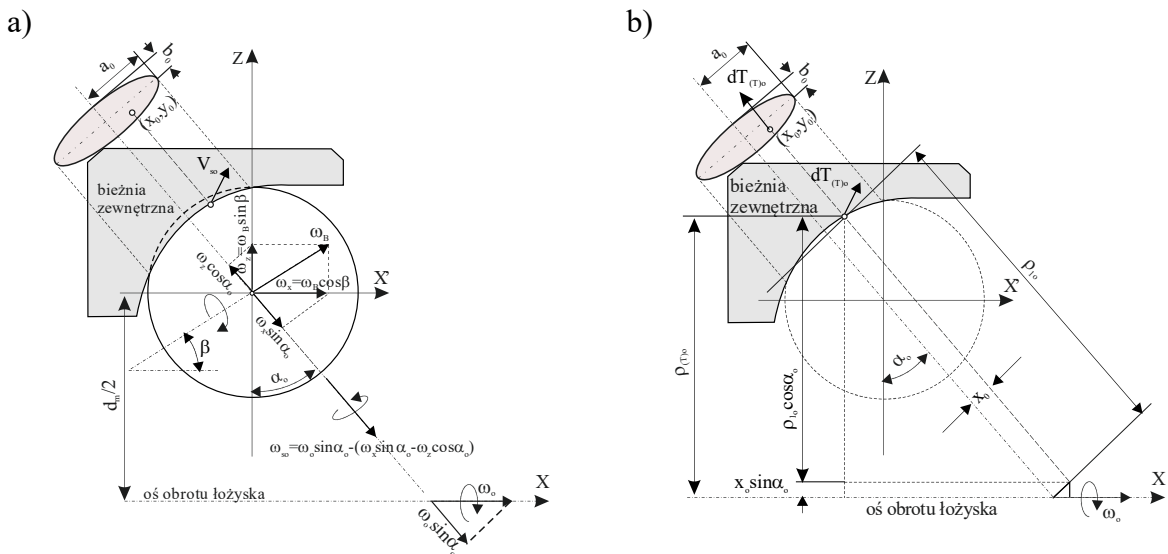
Należy podkreślić następujący fakt: obie prędkości poślizgu, tj.  $V_{(T)si}$  i  $V_{(T)so}$ , zmieniają swój znak (kierunek) na przeciwny w punkcie „pure” rolling (rys. 5.4b) podczas poślizgu kulki wzdłuż bieżni wewnętrznej i zewnętrznej<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> W artykule przyjęto taką notację dla prędkości poślizgu  $V_{(T)so}$  w obszarze kontaktu kulki z bieżnią zewnętrzną, że jest ona ujemna, natomiast w obszarze kontaktu z bieżnią wewnętrzną  $V_{(T)si}$  jest ona dodatnia. W obu tych przypadkach traktujemy poślizg zgodnie z notacją Houperta [22] jako ujemny, który jest źródłem oporów tarcia. Jeżeli któraś z prędkości poślizgu zmienia kierunek na przeciwny, traktujemy ten obszar jako występowanie poślizgu dodatniego, tzn. takiego, który nie jest źródłem oporów ruchu (rys. 5.3).

Prędkości „pure” rolling  $V_{(T)ro}$ ,  $V_{(T)ri}$  można wyznaczyć jak poniżej, uwzględniając zależności (5.8), (5.9), (5.17), (5.18):

$$V_{(T)ro} = -\omega_o (\rho_{lo} + r'_o) \cos \alpha_o \approx \frac{D}{2} \left( \frac{d_m}{D} + \cos \alpha_o \right) \omega$$

$$V_{(T)ri} = \omega_i (\rho_{li} - r'_i) \cos \alpha_i \approx \frac{D}{2} \left( \frac{d_m}{D} - \cos \alpha_i \right) \omega$$
(5.24)



Rys. 5.5. Założenia geometryczne i kinematyczne dla obliczania prędkości spinu  $V_{so}$  w obszarze kontaktu kulki z bieżnią zewnętrzną (a), definicja promienia  $\rho_{(T)so}$  (b)

Fig. 5.5. Kinematic and geometric assumptions for determining the spinning velocity  $V_{so}$  at the contact site of the ball and outer raceway (a) and the definition of radius  $\rho_{(T)so}$  (b)

## 5.2. Zjawisko spinu w łożysku tocznym skośnym

Jak już wcześniej pokazano na rys. 5.1a, w łożysku tocznym skośnym występuje zjawisko spinu z prędkością  $\omega_s$  ( $\omega_{so}$  i  $\omega_{si}$ ). Określenie prędkości spinu  $\omega_s$  jest trudne. Rysunek 5.5a przedstawia założenia kinematyczne, dla których możliwe jest wyznaczenie prędkości kątowej spinu  $\omega_{so}$  w obszarze kontaktu kulki z bieżnią zewnętrzną. Przyjęto, że prędkość względna bieżni zewnętrznej i będących w ruchu orbitalnym kulek z prędkością  $\omega_m$  wynosi  $\omega_o$  (jeżeli pierścień zewnętrzny jest unieruchomiony, to zachodzi tożsamość  $\omega_o = -\omega_m$ ).

Ruch orbitalny kulek z prędkością  $\omega_m$  wywołuje toczenie się kulek po bieżniach z prędkością kątową  $\omega_B$  (rys. 5.2a i rys. 5.2b). Prędkość toczenia się kulek  $\omega_B$  można rozłożyć na dwie składowe:  $\omega_x$  i  $\omega_z$ , współosiowe z kierunkami układu spólrzędnych. Składowe zostały następnie zrzutowane na osie spinu (rys. 5.5a) ( $\omega_x \sin \alpha_o$  i  $\omega_z \cos \alpha_o$ ).

Prędkość względna pierścienia zewnętrznego  $\omega_o$  także zawiera składowe, które wpływają na prędkość spinu ( $\omega_o \sin \alpha_o$ , rys. 5.5a). W rezultacie prędkość spinu w punkcie kontaktu kulki z bieżnią zewnętrzną  $\omega_{so}$  jest sumą trzech wyspecyfikowanych składowych.

Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla pierścienia wewnętrznego, którego prędkość względem ruchu orbitalnego kulek z prędkością  $\omega_m$  wynosi  $\omega_i$ . Prędkość toczenia się  $\omega_B$  można również rozłożyć na dwie składowe,  $\omega_x$  i  $\omega_z$ , zgodne z układem współrzędnych, a następnie zrzutować na kierunek osi spinu, otrzymując składowe:  $\omega_x \sin \alpha_i$  i  $\omega_z \cos \alpha_i$ . Prędkość względna pierścienia wewnętrznego  $\omega_i$  także zawiera składową, która wpływa na prędkość spinu,  $\omega_i \sin \alpha_i$ . W rezultacie prędkość spinu w obszarze kontaktu kulki z bieżnią wewnętrzną  $\omega_{si}$  jest sumą trzech wylistowanych składowych.

Uwzględniając oznaczenia na rys. 5.5a, prędkości spinu  $\omega_{si}$  i  $\omega_{so}$  można przedstawić następująco:

$$\begin{aligned}\omega_{so} &= \omega_B \sin(\alpha_o - \beta) - \omega_o \sin \alpha_o \\ \omega_{si} &= -\omega_B \sin(\alpha_i - \beta) + \omega_i \sin \alpha_i\end{aligned}\tag{5.25}$$

gdzie  $\omega_{si}$ ,  $\omega_{so}$  – prędkości względne spinu w obszarach kontaktu kulki z wewnętrznym i zewnętrznym pierścieniem.

Zależności (5.25) pozwalają m.in. na stwierdzenie, że prędkości spinu  $\omega_{si}$  lub  $\omega_{so}$  mogą osiągać wartości zero. Zależy to od kąta wychylenia  $\beta$  i prędkości  $\omega_B$ , co będzie pokazane w dalszej części monografii. Prędkości względne  $\omega_i$ ,  $\omega_o$  w pierwszym, bardzo dużym przybliżeniu można oszacować jako  $\omega_i \cong -\omega_o \cong \omega_m$ . Jednakże z uwagi na ich znaczący wpływ na kąty działania łożyska skośnego niezbędne są bardziej precyzyjne modele obliczeniowe. Wstawiając (5.17) do (5.14), otrzymamy zależności (5.26).

$$\begin{aligned}\omega_i &= \frac{\omega}{M_i} \\ \omega_o &= -\frac{\omega}{M_o} \\ \omega_B &= -\frac{\omega}{M_B}\end{aligned}\tag{5.26}$$

Do wyznaczania prędkości  $\omega_B$  (5.18) konieczna jest znajomość kątów działania łożyska  $\alpha_i$  i  $\alpha_o$ . Ponieważ wyznaczanie kątów działania  $\alpha_i$ ,  $\alpha_o$  wymaga znajomości prędkości kątowej  $\omega_B$ , a wyznaczanie tej prędkości wymaga z kolei znajomości kąta  $\beta$ , rozwiązanie problemu spinu jest możliwe tylko na drodze iteracyjnej.

Zjawisko spinu, podobnie jak efekt żyroskopowy, nie jest w pełni rozpoznane. Dlatego w literaturze spotyka się hipotezy upraszczające rozwiązywanie takich zagadnień, m.in. obliczania kąta  $\beta$  czy prędkości spinu  $\omega_s$ .

Przegląd relacji prędkości spinu i kąta  $\beta$  jest zawarty m.in w [48]. Omówiono tam trzy hipotezy: sterowania bieżnią zewnętrzną (OCR), hybrydową (opierającą się na zasadzie d'Alembert), relacji geometryczno-kontaktowej, z punktu widzenia wyznaczania kąta  $\beta$ . W zależności od przyjętej hipotezy osiąga się różne wartości kąta  $\beta$ , a tym samym i różne wartości prędkości spinu  $\omega_s$ . Przykładowo, dla hipotezy relacji geometryczno-kontaktowej prędkość spinu w obszarze kontaktu kulki z bieżniami można przedstawić jak poniżej:

$$\left(\frac{\omega_s}{\omega_i}\right)_i = \left(\frac{\omega_s}{\omega_o}\right)_o = -\frac{d_m}{D} \tan\left(\frac{\alpha_i - \alpha_o}{2}\right) \left[1 + \frac{D}{d_m} \sin\left(\frac{\alpha_i + \alpha_o}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha_i - \alpha_o}{2}\right)\right] \quad (5.27)$$

Rebreau [51] porównał trzy hipotezy: sterowania zewnętrzną bieżnią (OCR), opartą na zasadzie d'Alamberta, zwaną też hybrydową, oraz wersję modelu Jonesa, uwzględniającą moment żyroskopowy, pod kątem momentu tarcia w łożysku. Wniosek ogólny był następujący: wszystkie te modele przewidują podobny poziom momentu tarcia w łożysku.

Hipoteza sterowania bieżnią zewnętrzną (OCR) jest najczęściej spotykana w literaturze, zwłaszcza jej wersja, przedstawiona przez Jonesa [26]. Jones, opierając się na wynikach eksperymentu, sformułował pogląd o niewystępowaniu zjawiska spinu w obszarze bieżni zewnętrznej (występuje tam tylko „pure” rolling), a zarówno toczenie się, jak i spin zachodzą w obszarze bieżni wewnętrznej. Hipoteza zwana jest Sterowaniem bieżni zewnętrznej (OCR).

Dla takiej hipotezy można wyznaczyć kąt  $\beta$ , przyjmując następujące założenia:

1. w zależności (5.25) należy przyjąć  $\omega_{s0} = 0$ ,
2. wstawiając prędkość kątową  $\omega_B$  (5.26) i  $\omega_o$  (5.26) do (5.25), otrzymamy (5.28).

$$\operatorname{tg} \beta \approx \frac{\sin \alpha_o}{\cos \alpha_o + \frac{D}{d_m}} \quad (5.28)$$

Dla obliczenia kąta  $\beta$  wystarczy w takim przypadku znajomość kąta  $\alpha_o$  w obszarze kontaktu kulki z bieżnią zewnętrzną.

Houpert [23], w przeciwieństwie do symulacji numerycznej, opracował analityczny model, który pozwala użytkownikowi na precyzyjniejsze wyznaczenie parametrów kinematycznych łożyska. W szczególności umożliwia on zlokalizowanie linii „pure” rolling w obszarze elipsy kontaktowej, co z kolei umożliwia precyzyjniejsze obliczanie prędkości  $\omega_B$ .

### 5.3. Efekt żyroskopowy w łożysku tocznym skośnym

Toczeniu się kulek po bieżniach łożyska tocznego skośnego towarzyszy efekt żyroskopowy. Efekt ten występuje wówczas, kiedy płaszczyzna, w której zachodzi ruch obiegowy (orbitalny) kulek, nie pokrywa się z płaszczyzną, w której następuje ruch obrotowy łożyska, tj. najczęściej ruch obrotowy pierścienia wewnętrznego. Wówczas bowiem oś obrotu kulki zmienia swoje położenie w przestrzeni, ponieważ wiruje ruchem obiegowym (orbitalnym). Taka sytuacja kinematyczna przyczynia się do efektu żyroskopowego. W łożysku tocznym skośnym płaszczyzna ruchu obiegowego kulek jest odchylna od płaszczyzny łożyska o kąt  $\beta$  (rys. 5.2). Ruch obiegowy (orbitalny) kulek wokół osi łożyska odbywa się z prędkością kątową  $\omega_m$ , a ruch obrotowy (toczny) kulek wokół własnej osi z prędkością kątową  $\omega_B$ . Oznacza to, że oś obrotu kulek wiruje z prędkością kątową  $\omega_m$ .

Zgodnie z teorią zjawiska żyroskopowego na kulkę działa wówczas moment obrotowy zwany żyroskopowym  $M_g$ , który jest proporcjonalny do prędkości  $\omega_m$  i  $\omega_B$  oraz do  $\sin\beta$ , a także do masowego momentu bezwładności kulki. Moment ten może spowodować ruch obrotowy kulki z prędkością kątową  $\omega_g$  (rys. 5.2) wokół własnej osi, prostopadłej do płaszczyzny ruchu obiegowego (orbitalnego) kulek i do płaszczyzny łożyska. Ruch obrotowy z prędkością  $\omega_g$ , który ma charakter ruchu poślizgowego, wystąpi jednak tylko wówczas, kiedy siły tarcia pomiędzy kulkami a bieżniami będą mniejsze od momentu żyroskopowego. W przeciwnym wypadku ruchu żyroskopowego nie będzie. Efekty zjawiska żyroskopowego będą omawiane w dalszej części monografii, podczas szacowania sił kontaktowych w łożysku tocznym skośnym.

## 6. ANALIZA ZAKRESU ZMIENNOŚCI GŁÓWNYCH PARAMETRÓW KINEMATYCZNYCH ŁOŻYSKA TOCZNEGO SKOŚNEGO

Zależności (5.17)-(5.26) umożliwiają analityczne obliczanie parametrów kinematycznych łożyska takich jak:  $V_{(T)so}$ ,  $V_{(T)si}$ ,  $V_{(T)ro}$ ,  $V_{(T)ri}$ ,  $\omega_B$ ,  $\omega_m$ ,  $\omega_o$ ,  $\omega_i$ ,  $\omega_{so}$ ,  $\omega_{si}$ . Jednak ich postać matematyczna jest dosyć złożona, zwłaszcza dla inżynierskiego zastosowania. Stwarzają także trudności w badaniu wpływu takich parametrów geometrycznych jak kąty działania  $\alpha_i$ ,  $\alpha_o$  na wartości prędkości w łożysku. Z inżynierskiego punktu widzenia korzystniejsze są prostsze postaci wzorów obliczeniowych, które pozwalają na użycie zwykłego kalkulatora do ich obliczania. Dlatego w dalszym ciągu przedstawiono zmiany prędkości w nieco prostszych postaciach matematycznych.

Punktem wyjścia do takiej analizy jest założenie o znajomości kątów działania  $\alpha_i$ ,  $\alpha_o$  (wartości tych kątów można wyznaczyć, posilując się specjalistyczną literaturą, np. [31]), o znajomości zakresu prędkości danego łożyska, o znajomości parametrów geometrycznych takich jak  $d_m$ ,  $D$ , o znajomości montażowego kąta działania oraz zakresu napięcia wstępnego łożyska.

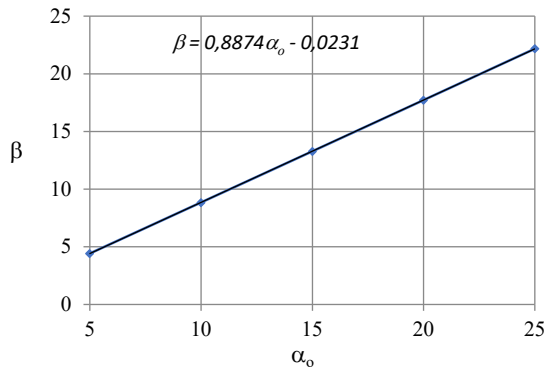
Wzmiankowaną analizę przeprowadzono dla testowego łożyska kulkowego skośnego typu FAG B7013-E (w dalszej części monografii przedstawiono wyniki symulacji i badań eksperymentalnych dla takiego łożyska). Dane wejściowe do analizy zaczerpnięto z [31]. Autor [30] opublikował wyniki badań dla tzw. modelu rozszerzonego łożyska skośnego. Wyniki te wskazują, że dla zakresu prędkości do 11 000 obr/min (jest to maksymalna prędkość dla testowego łożyska) i napięcia wstępnego do 1000 N kąty działania łożyska mieszczą się w przedziale:

- kąt działania  $\alpha_i = 39,1^\circ$  to  $5,2^\circ$ ,
- kąt działania  $\alpha_o = 37,8^\circ$  to  $2,4^\circ$ .

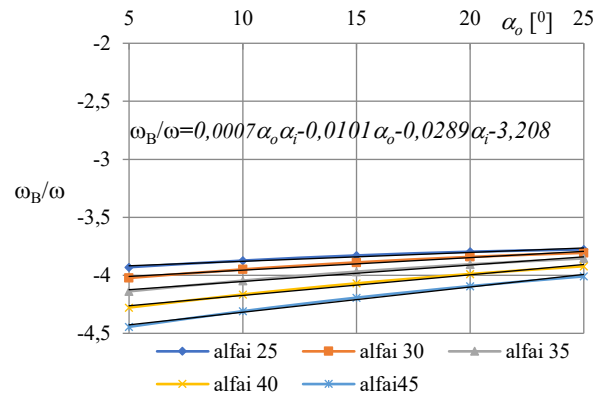
Dla powyższych zakresów kątów działania wyznaczono zakresy zmienności parametrów kinematycznych łożyska.

Rysunek 6.1 pokazuje wpływ kąta działania  $\alpha_o$  na kąt  $\beta$  (5.28) dla hipotezy kontrolowanej bieżni zewnętrznej (dla tej hipotezy prędkość spinu  $\omega_{so} = 0$ ).

Dla testowego łożyska kąt  $\beta$  można przedstawić jako liniową funkcję kąta działania, a współczynnik kierunkowy tej funkcji jest nieco mniejszy od jedności. Ponieważ kąt  $\alpha_o$  istotnie zależy od prędkości łożyska [31], więc i kąt  $\beta$  będzie istotnie zmieniał się ze zmianą prędkości łożyska.



Rys. 6.1. Wpływ kąta działania  $\alpha_o$  na kąt odchylenia  $\beta$  dla hipotezy kontrolowanej bieżni zewnętrznej  
Fig. 6.1. The effect of contact angle  $\alpha_o$  on pitch angle  $\beta$  for Outer raceway control hypothesis



Rys. 6.2. Wpływ kątów działania  $\alpha_o$  i  $\alpha_i$  na prędkość toczenia się kulek  $\omega_B$   
Fig. 6.2. The effect of the contact angle  $\alpha_o$  and  $\alpha_i$  on the rolling speed of the balls  $\omega_B$

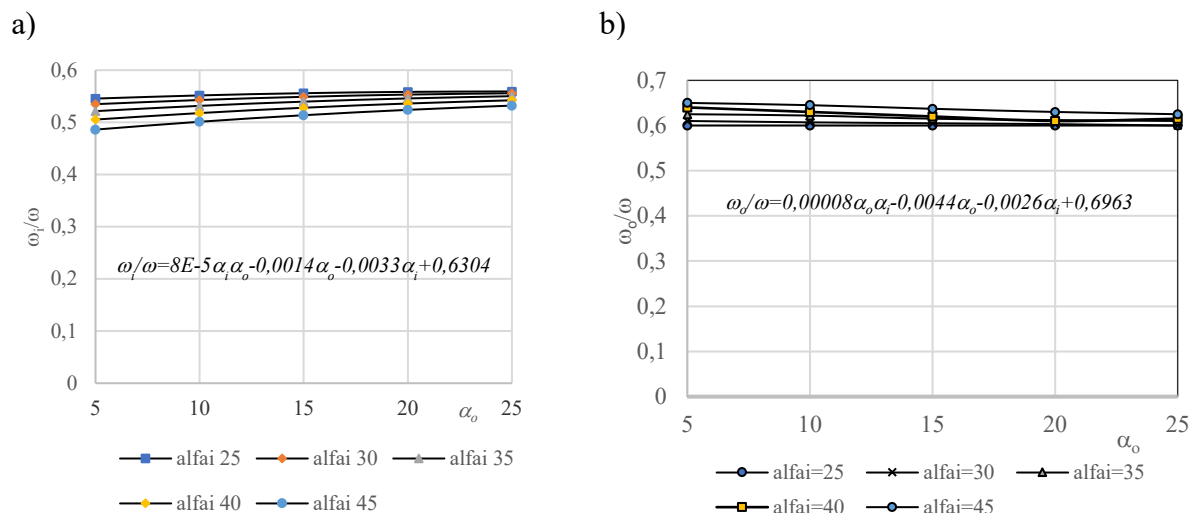
W świetle rys. 6.1 zależność (5.28) może być zastąpiona liniową regresją, która wydaje się znacznie prostsza.

Z kolei rys. 6.2 przedstawia wpływ kątów działania  $\alpha_o$  i  $\alpha_i$  na prędkość toczenia się kulek  $\omega_B$  (5.26) dla hipotezy kontrolowanej bieżni zewnętrznej. Można sformułować pogląd o stosunkowo małym wpływie kątów działania na prędkość toczenia się kulek  $\omega_B$ . Stosunek prędkości toczenia się kulek  $\omega_B$  do prędkości łożyska  $\omega$  mieści się w granicach 4,0-4,5, co z inżynierskiego punktu widzenia można uznać za stały.

Rysunek 6.3 pokazuje wpływ kątów działania  $\alpha_i$  i  $\alpha_o$  na prędkości względne pierścieni i wirujących kulek  $\omega_i/\omega$  i  $\omega_o/\omega$ .

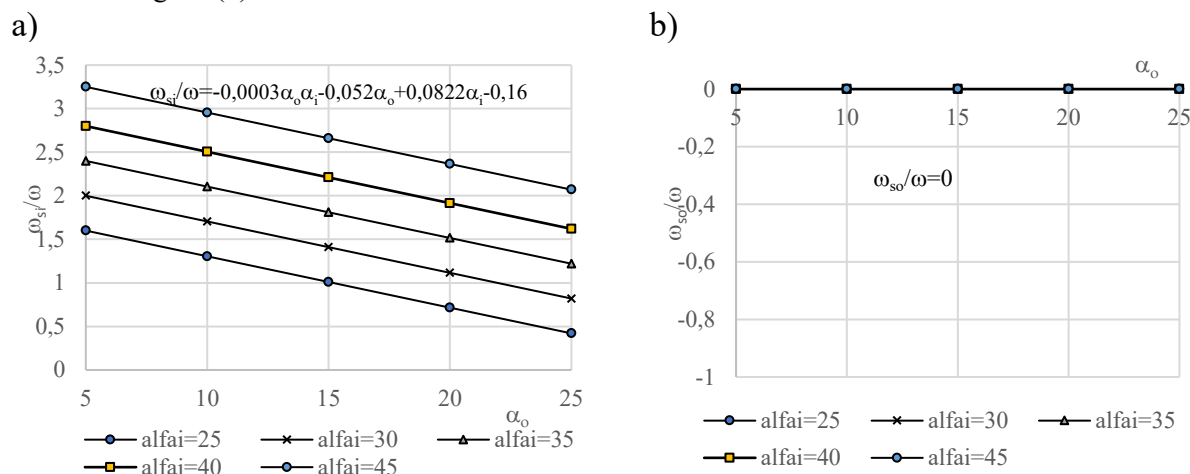
Prędkości względne  $\omega_o/\omega$  nieznacznie zmieniają się wraz ze zmianą kąta działania  $\alpha_o$  (0,45-0,52) i praktycznie nie zależą od kąta działania  $\alpha_i$ .

Z drugiej strony, prędkość względna  $\omega_i$  także nie zmienia się istotnie wraz ze zmianami kątów  $\alpha_i$  i  $\alpha_o$ . Są to zmiany rzędu 10%. Prędkość ta może być obliczana przy wykorzystaniu równania regresji pokazanego na rys. 6.1, które wydaje się prostsze niż zależność (5.26).



Rys. 6.3. Wpływ kątów działania na prędkości względne pierścienia wewnętrznego  $\omega_i$  (a) i pierścienia zewnętrznego  $\omega_o$  (b)

Fig. 6.3. The effect of bearing contact angles on the relative speeds of the inner ring  $\omega_i$  (a) and the outer ring  $\omega_o$  (b)



Rys. 6.4. Wpływ kątów działania na prędkości spinu  $\omega_{si}$  (a) i  $\omega_{so}$  (b)

Fig. 6.4. The effect of bearing contact angles on the spin speeds  $\omega_{si}$  (a) and  $\omega_{so}$  (b)

Ponieważ prędkości względne wpływają na prędkości spinu (zależność (5.25)), więc można sformułować pogląd o ilościowo podobnym, jakkolwiek przeciwnym wpływie prędkości względnej pierścienia wewnętrznego i zewnętrznego.

Rysunek 6.4 pokazuje wpływ kątów działania  $\alpha_i$  i  $\alpha_o$  na prędkości spinu  $\omega_{si}$  i  $\omega_{so}$  dla hipotezy kontrolowanej bieżni zewnętrznej.

Rysunek 6.4b potwierdza, że prędkość spinu  $\omega_{so}$  jest zerowa, co wynika z hipotezy kontrolowanej bieżni zewnętrznej. Oba kąty działania nie wykazują bowiem wpływu na prędkość  $\omega_{so}$ . Rysunek 6.4a pokazuje bardzo silny wpływ obu kątów działania,  $\alpha_o$  i  $\alpha_i$ , na prędkość spinu  $\omega_{si}$ , jakkolwiek jest on przeciwstawny. Wzrost prędkości obrotowej



łożyska generalnie wywołuje zmniejszanie kąta działania  $\alpha_o$  [31], co powoduje wzrost prędkości  $\omega_{si}$ .

Taki sam wzrost prędkości obrotowej łożyska powoduje równoczesne zwiększenie kąta działania  $\alpha_i$  [31], co pociąga za sobą zmniejszanie prędkości spinu  $\omega_{si}$ .

Równanie regresji na rys. 6.4a może umożliwić obliczenie prędkości spinu  $\omega_{si}$  w sposób prostszy niż użycie zależności (5.25).

Tabela 6.1

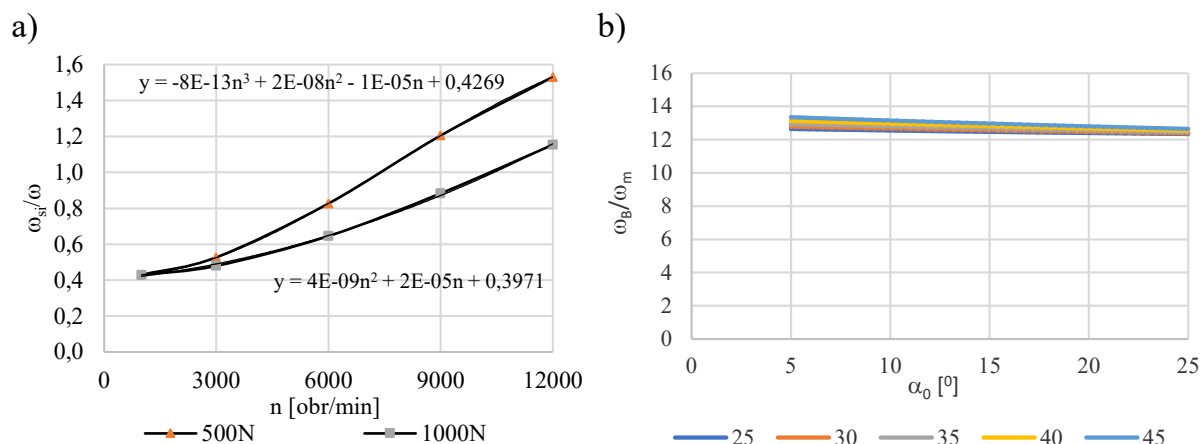
Wpływ prędkości obrotowej łożyska i napięcia wstępnego na kąty działania  $\alpha_o$  i  $\alpha_i$  oraz na prędkość spinu  $\omega_{si}/\omega$

Prędkość obrotowa [obr/min]	Napięcie wstępne 100 N			Napięcie wstępne 500 N			Napięcie wstępne 1000 N		
	$\alpha_o$	$\alpha_i$	$\omega_{si}/\omega$	$\alpha_o$	$\alpha_i$	$\omega_{si}/\omega$	$\alpha_o$	$\alpha_i$	$\omega_{si}/\omega$
1000	24,57	25,49	0,47	25,50	25,69	0,43	25,89	25,99	0,43
3000	20,21	27,69	0,90	24,49	26,19	0,53	25,41	26,29	0,48
6000	11,46	30,59	1,65	21,38	27,69	0,83	23,77	27,19	0,65
9000	6,39	31,39	2,03	17,15	29,29	1,21	21,07	28,19	0,88
12 000	3,92	31,39	2,18	13,08	30,29	1,53	17,99	29,29	1,15

Tabela 6.1 przedstawia wyniki analizy wpływu prędkości łożyska i jego napięcia wstępnego na kąty działania  $\alpha_o$  i  $\alpha_i$  [31]. Dla takich kątów działania prędkość spinu  $\omega_{si}$  była obliczana na podstawie równania regresji, przedstawionego na rys. 6.4a.

Rysunek 6.5a pokazuje wyniki zawarte w tabeli 6.1 w postaci wpływu prędkości obrotowej łożyska  $n$  na prędkość spinu  $\omega_{si}/\omega$ .

Wniosek płynący z rys. 6.5a jest następujący: prędkość obrotowa łożyska (pierścienia wewnętrznego) ma istotny wpływ na prędkość spinu  $\omega_{si}$ . Wpływ ten jest nieliniowy. Napięcie wstępne ma także znaczący wpływ na prędkość spinu  $\omega_{si}$ .



Rys. 6.5. Wpływ prędkości łożyska na prędkość spinu  $\omega_{si}/\omega$  dla dwóch wartości napięcia wstępnego: 500 N i 1000 N (a) oraz iloraz prędkości  $\omega_B/\omega_m$  w funkcji kątów działania (b)

Fig. 6.5. Influence of rotational speed of the bearing on spin speed  $\omega_{si}/\omega$  for two preloads: 500 N and 1000 N (a) and the quotient  $\omega_B/\omega_m$  as a function of the contact angles (b)

Ponieważ praktyczne obliczanie prędkości  $\omega_{si}$  za pomocą relacji (5.25) jest dosyć kłopotliwe, na rys. 6.5a przedstawiono model regresyjny, który znacząco upraszcza wyznaczanie tej prędkości, z wystarczającą dla praktyki dokładnością.

Fakt, że kulka obraca się wokół własnej osi z prędkością  $\omega_s$  oraz że powstaje obszar odkształcenia kontaktowego pomiędzy kulką a bieżniami, prowadzi do konkluzji, że pojawia się tarcie ślizgowe pomiędzy kulką i bieżniami, a tym samym, że powstaje moment tarcia  $M_s$ , który nazywany jest momentem spinu. Stosownie do informacji zawartej w [3] moment tarcia z tytułu spinu dla pojedynczej kulki można przedstawić następująco:

$$M_s = \frac{3\mu Q a \xi}{8} \quad (6.1)$$

gdzie:  $M_s$  – moment tarcia wywołany zjawiskiem spinu dla pojedynczej kulki,

$Q$  – normalne obciążenie w obszarze kontaktu (obciążenie  $Q_i$  lub  $Q_o$ ),

$\mu$  – współczynnik tarcia ślizgowego,

$a$  – długość większej półosi elipsy kontaktowej,

$\xi$  – całka eliptyczna po obszarze kontaktowym.

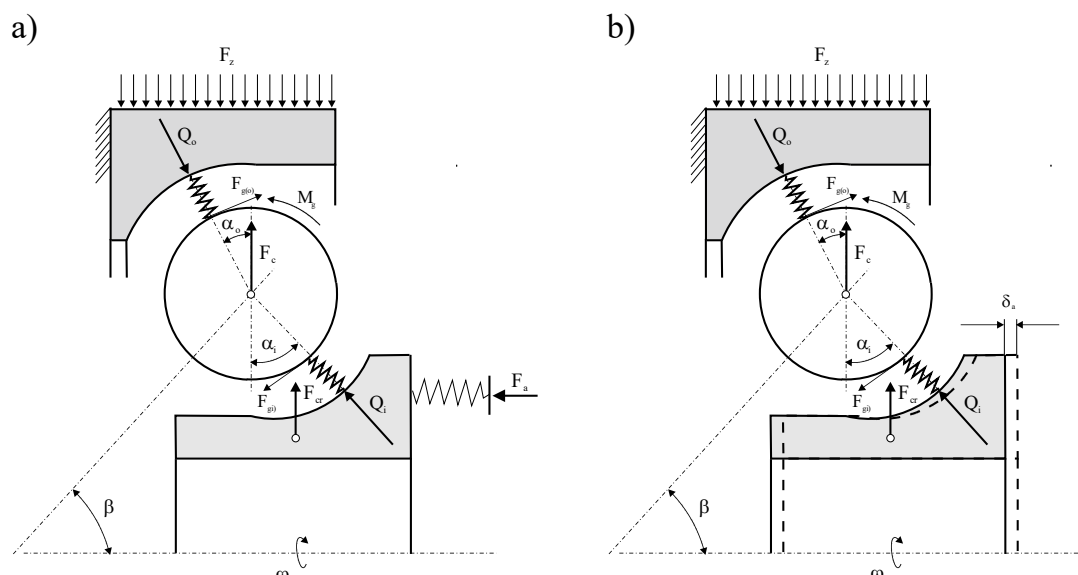
W [10] sformułowano pogląd, że wartość momentu  $M_s$  jest relatywnie mała i nie przekracza 2,5% sumarycznego momentu tarcia w łożysku.

Z uwagi na: siły tarcia pomiędzy kulkami i bieżniami, prędkości ślizgania się  $V_{(T)so}$  i  $V_{(T)si}$  (5.23), prędkości spinu  $\omega_{so}$  i  $\omega_{si}$  (5.25) oraz prędkości toczenia się  $V_{(T)ro}$  i  $V_{(T)ri}$  (5.24), w łożysku tocznym powstają opory ruchu. Zjawisko to zostanie wyjaśnione w następnym rozdziale.

## 7. OBCIĄŻENIA ŁOŻYSKA KULKOWEGO SKOŚNEGO

Na biegu jałowym (bez zewnętrznego obciążenia łożyska) występują następujące obciążenia łożyska skośnego (rys. 7.1):

- od sił napięcia wstępnego  $F_a$  lub wstępnego odkształcenia  $\delta_a$ , które jest efektem montażu łożysk w układzie wrzecionowym,
- od sił dynamicznych, odśrodkowych  $F_c$ , powstających w wyniku ruchu obiegowego kulek wokół osi łożyska,
- od sił dynamicznych, odśrodkowych  $F_{cr}$ , powstających w wyniku ruchu obrotowego pierścienia wewnętrznego (lub zewnętrznego) wokół osi łożyska,
- od momentu dynamicznego, żyroskopowego  $M_g$ , powstającego w wyniku ruchu obiegowego (orbitalnego) kulek wokół osi łożyska i ruchu obrotowego kulek wokół własnej osi, odchylonej od osi łożyska o kąt  $\beta$ .



Rys. 7.1. Model obciążenia łożyska tocznego skośnego: a) wstępne napięcie sprężyste, b) wstępne napięcie sztywne

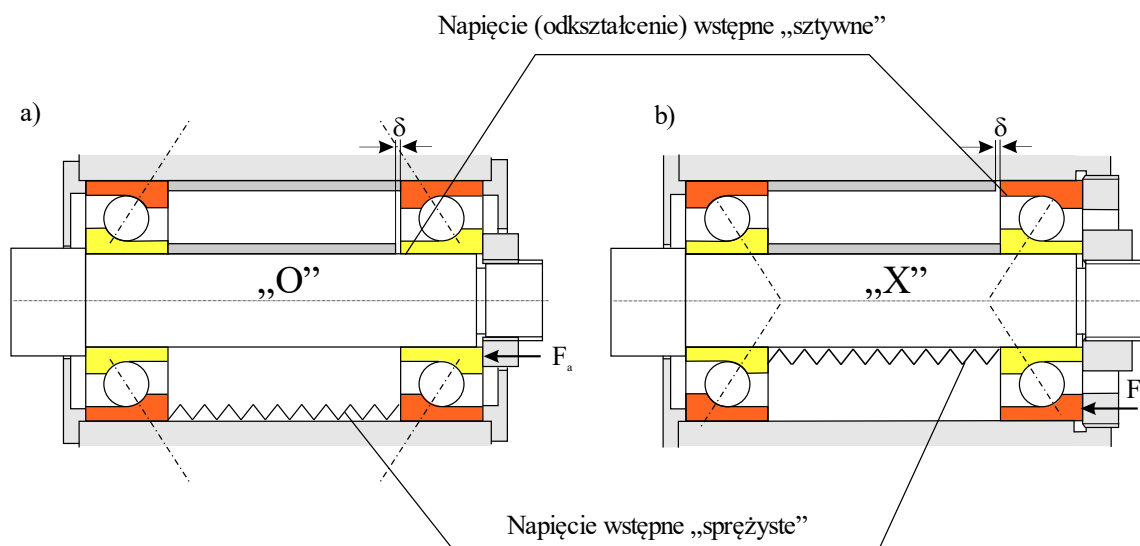
Fig. 7.1. Angular contact bearing load model: a) elastic preload, b) predeformation

Obciążenie od sił napięcia wstępnego  $F_a$  lub wstępnego odkształcenia  $\delta_a$ , które jest efektem montażu łożysk w układzie wrzecionowym, występuje zarówno dla nieruchomego łożyska, jak i dla łożyska wykonującego ruch obrotowy. Powoduje ono

powstanie sił kontaktowych  $Q_i$  i  $Q_o$  w obszarze kontaktu kulek z bieżniami, a zatem będzie jednym ze źródeł oporów ruchu w łożysku, a tym samym i start mocy. Z dotychczasowej wiedzy o wpływie tego obciążenia na opory ruchu można twierdzić, że jest on znaczny. Dlatego zachodzi potrzeba opracowania modeli obliczeniowych, pozwalających oszacować ten wpływ.

## 7.1. Obciążenia od sił napięcia wstępnego

Łożyska skośne jednorzędowe, które montuje się parami, mogą być montowane w układzie X lub O z napięciem wstępnym podatnym (od sprężyny lub układu hydraulicznego) lub sztywnym (w wyniku wstępnego przemieszczenia pierścienia wewnętrznego względem zewnętrznego). Obrazuje to rys. 7.2.



Rys. 7.2. Sposoby montażu łożysk skośnych jednorzędowych i ich wstępnego napinania: a) w układzie „O”, b) w układzie „X”;  $F_a$  – napięcie wstępne,  $\delta_a$  – odkształcenie wstępne

Fig. 7.2. Methods of mounting single row angular contact bearings and their preload: a) "O" system, b) "X" system;  $F_a$  – preload,  $\delta_a$  – predeformation

Producent łożysk zaleca wartości sprężystych napięć wstępnych  $F_a$  od  $(5 \div 10\%)C_o$  (gdzie  $C_o$  – nośność statyczna łożyska), w zależności od warunków pracy wrzeciona (lekkie, średnie, ciężkie).

W przypadku sztywnego napięcia wstępnego w katalogach podawana jest wartość luzu  $\delta_a$ , o jaką należy przemieścić w kierunku osiowym pierścień wewnętrzny względem pierścienia zewnętrznego. Nie jest wówczas znana wielkość siły osiowej  $F_a$ .

Dla zrealizowania napięcia sprężystego podczas montażu należy wywierać stosowną siłę  $F_a$ , np. za pomocą klucza dynamometrycznego, ściskając element sprężysty lub nastawiając odpowiednie ciśnienie w mechanizmie hydraulicznym.

Jedna i druga metoda wstępnego napinania łożysk tocznych skośnych ma swoje zalety i wady. Wstępne napięcie sprężyste wymaga mechanizmu napinania i elementu sprężystego, np. sprężyny talerzowej. Jest popularnym sposobem wstępnego napinania łożysk i przyjmuje się, że siła napięcia wstępnego nie zmienia się w trakcie pracy łożyska. W rzeczywistości zależy to od konstrukcji mechanizmu napinającego i elementu sprężystego. Dla powszechnie stosowanych sprężyn talerzowych warunek niezmienności napięcia wstępnego nie jest na ogół zachowany, natomiast dla układów hydraulicznego napinania łożysk warunek niezmienności napięcia wstępnego jest możliwy do osiągnięcia. Największą wadą sprężystego napięcia wstępnego jest przemieszczanie się pierścieni łożyskowych względem siebie w zależności od sił zewnętrznych i wewnętrznych, a wielkość przemieszczenia istotnie zależy od sztywności elementu sprężystego. Przykładowo, dla łożysk wrzecionowych w obrabiarkach taka sytuacja jest nie do zaakceptowania, ponieważ skutkuje błędami geometrycznymi wykonania przedmiotu.

Sztywne napięcie wstępne w wyniku wstępnego, osiowego przemieszczenia pierścieni łożyskowych o  $\delta_a$  jest technicznie prostsze, ponieważ nie wymaga żadnych mechanizmów napinających, a jedynie tulei, która przyczynia się do powstania luzu montażowego  $\delta_a$ . Montaż łożysk polega na zlikwidowaniu tego luzu. Zaletami takiego sposobu napięcia wstępnego są niezmiennosc osiowego położenia łożyska i duża sztywność statyczna osiowa. Jest to szczególnie ważne dla łożysk wrzecionowych obrabiarek. Do wad takiego sposobu wstępnego napinania należy zmienność siły osiowej  $F_a$  występującej pomiędzy bieżniami łożyska a kulkami w zależności od obciążenia zewnętrznego i prędkości obrotowej łożyska. W skrajnych przypadkach może to prowadzić do powstawania nadmiernej ilości ciepła, a w konsekwencji do zacierania się łożysk.

## 7.2. Obciążenie od sił dynamicznych odśrodkowych $F_c$ , powstających w wyniku ruchu obiegowego kulek wokół osi łożyska

$$F_c = \frac{I}{2} m d_m \omega^2 \left( \frac{\omega_m}{\omega} \right)^2 \quad (7.1)$$

gdzie:  $F_c$  – siła odśrodkowa, działająca na kulkę,

$m$  – masa kulki,

$\omega$  – prędkość kątowna łożyska (pierścienia wewnętrznego),

$\omega_m$  – prędkość kątowna środka masy kulki względem osi łożyska w ruchu obiegowym.

Wyznaczenie siły odśrodkowej  $F_c$  (7.1) działającej na jedną kulkę stanowi pewien problem, związany z określeniem prędkości kątowej środka kulki  $\omega_m$ . Można ją wyznaczyć dokładnie metodą analityczną albo w sposób przybliżony. Obie metody różnią się w sposobie wyznaczania prędkości kątowej środka masy kulki. W wielu publikacjach stosuje się metodę przybliżoną, a mianowicie:

$$\omega_m = \omega \frac{d_i}{(d_i + d_o)} \approx \frac{\omega}{2} \quad (7.2)$$

W rozdz. 5 wyprowadzono kompletną zależność (5.17), która pozwala na precyzyjne obliczenie tej prędkości. Rzecz w tym, że skorzystanie z tej zależności wymaga znajomości geometrii łożyska i kątów działania  $\alpha_i$ ,  $\alpha_o$  oraz kąta  $\beta$ . Z kolei aby te kąty wyznaczyć, trzeba znać prędkość  $\omega_m$ . Tak więc pełne rozwiązanie zagadnienia wymaga działania iteracyjnego, a w pierwszym podejściu trzeba skorzystać z zależności uproszczonych, np. (7.2). Można przyjąć, że w stanie spoczynku, bez obciążenia zewnętrznego,  $\alpha_i = \alpha_o = \alpha$  (gdzie  $\alpha$  jest montażowym kątem działania, zawartym w katalogach łożysk). Ponieważ  $D/d_m \ll 1$ , więc  $\frac{\omega_m}{\omega} \approx 0,5$ , czyli w pierwszej iteracji można przyjąć, że prędkość  $\omega_m \approx 0,5\omega$ .

## 7.3. Obciążenie od sił dynamicznych odśrodkowych $F_{cr}$ , powstających w wyniku ruchu obrotowego pierścienia wewnętrznego (lub zewnętrznego) wokół osi łożyska

Z przeglądu literaturowego problemu obciążeń dynamicznych wynika, że sił odśrodkowych  $F_{cr}$  w wyniku ruchu obrotowego pierścienia wewnętrznego lub

zewnątrznego prawie nikt nie uwzględnia, rozpatrując obciążenia w obszarze kontaktu kulek i bieżni. Autor [30] zaproponował tzw. model rozszerzony, w którym obciążenie z powodu ruchu obrotowego pierścienia łożyskowego zostało uwzględnione. Siła odśrodkowa  $F_{cr}$  z tego tytułu została wyznaczona następująco:

$$F_{cr} \approx \frac{1}{2} m_p d_p \omega^2 \quad (7.3)$$

gdzie:  $F_{cr}$  – siła odśrodkowa z tytułu ruchu obrotowego pierścienia łożyskowego,

$m_p$  – masa pierścienia łożyskowego,

$d_p$  – średnia średnica pierścienia łożyskowego.

Zależność (7.3) ma charakter przybliżony, ponieważ do obliczenia siły odśrodkowej  $F_{cr}$  pierścień łożyskowy został potraktowany jako „gładka” tuleja o średnicy  $d_p$ , podczas gdy w rzeczywistości jest to tuleja o bardziej skomplikowanym kształcie (rys. 4.1).

#### **7.4. Obciążenie od momentu dynamicznego żyroskopowego $M_g$ , powstającego w wyniku ruchu obiegowego (orbitalnego) kulek wokół osi łożyska i ruchu obrotowego kulek wokół własnej osi, odchylonej od osi łożyska o kąt $\beta$**

Jak już wspomniano w rozdz. 5, w łożysku tocznym skośnym powstaje efekt żyroskopowy, który skutkuje pojawieniem się momentu obrotowego, zwanego momentem żyroskopowym  $M_g$ , działającym na każdą z kulek (rys. 5.1). Z teorii efektu żyroskopowego wynika, że wektor momentu żyroskopowego jest prostopadły do wektorów prędkości  $\omega_m$  i  $\omega_B$ . W literaturze można znaleźć zależności matematyczne, pozwalające na obliczanie momentu żyroskopowego, np. w [49] przedstawiona jest zależność:

$$M_g = \Theta \omega^2 \left( \frac{\omega_m}{\omega} \right) \left( \frac{\omega_B}{\omega} \right) \sin \beta \quad (7.4)$$

gdzie  $\theta$  – masowy moment bezwładności kulki.

Prędkości  $\omega_m$ ,  $\omega_B$  można wyznaczyć z zależności (5.17) i (5.26), a kąt  $\beta$  z zależności (5.28). Wyznaczenie tych wielkości wymaga znajomości kątów działania łożyska skośnego, co z kolei wymaga procedur iteracyjnych. W odniesieniu do prędkości  $\omega_B$  w pierwszej iteracji można przyjąć, że wynosi ona:

$$\omega_B = \omega \frac{d_i}{2D} = \frac{d_m}{D} \quad (7.5)$$

Dla przykładowego łożyska FAG B7013-E-T-P4  $\omega_B/\omega = 4,15$ , tak więc prędkość kątowna kulki wokół własnej osi jest kilkakrotnie większa od prędkości kątowej łożyska.

Moment żyroskopowy oddziałujący na kulkę jest przyczyną powstania sił żyroskopowych  $F_g$  ( $F_{g(i)}$  i  $F_{g(o)}$ ), działających stycznie do kulki, w punktach kontaktu z bieżniami łożyska (rys. 7.1). W literaturze często spotykane jest założenie o równości obu sił ( $F_{g(i)}=F_{g(o)}=F_g$ ) i wówczas siła żyroskopowa  $F_g$  wynosi:

$$F_g = \frac{M_g}{D} \quad (7.6)$$

gdzie  $F_g$  – siła żyroskopowa działająca na kulkę.

Jednakże takie założenie może różnić się znacząco od rzeczywistości. W [49] analizowano hipotezy o rozkładzie momentu żyroskopowego, w myśl której siły żyroskopowe mogą rozkładać się niesymetrycznie w miejscu kontaktu kulki z bieżniami łożyska. W takim przypadku moment żyroskopowy jest sumą

$$M_g = F_{g(o)} \frac{D}{2} + F_{g(i)} \frac{D}{2} \quad (7.7)$$

gdzie  $F_{g(o)}$ ,  $F_{g(i)}$  – siły żyroskopowe działające na kulkę w obszarach kontaktu z bieżnią zewnętrzną i wewnętrzną, przy czym:

$$\begin{aligned} F_{g(o)} &= \lambda_o \frac{M_g}{D} \\ F_{g(i)} &= \lambda_i \frac{M_g}{D} \end{aligned} \quad (7.8)$$

gdzie  $\lambda_i$  i  $\lambda_o$  – współczynniki uwzględniające niesymetryczny rozkład sił żyroskopowych.

Zależność (7.8) pokazuje, że rozkład sił żyroskopowych nie musi być symetryczny.

W [49] zdefiniowano wartości współczynników  $\lambda_i$  i  $\lambda_o$  w zależności od zastosowanej hipotezy kinematycznej, której użyto do wyznaczenia kąta  $\beta$ . Dla hipotezy równomiernego rozkładu  $\lambda_i = \lambda_o = 1$ , dla hipotezy kontrolowanej bieżni zewnętrznej  $\lambda_i = 0$ , a  $\lambda_o = 2$ , dla hipotezy kontrolowanej bieżni wewnętrznej  $\lambda_i = 2$ , a  $\lambda_o = 0$ , a dla hipotezy hybrydowej wartości współczynników  $\lambda_i$  i  $\lambda_o$  są funkcjami sił kontaktowych  $Q_i$  oraz  $Q_o$ .

Najpopularniejsza jest hipoteza kontrolowanej bieżni zewnętrznej ( $\lambda_i = 0$  a  $\lambda_o = 2$ ), ponieważ w [19] wykazano dosyć dobrą zgodność z eksperymentem, a ponadto umożliwia ona obliczanie kąta  $\beta$  tylko na podstawie znajomości kąta działania  $\alpha_o$  (5.28).

Wszystkie wyszczególnione obciążenia, tj.  $F_a$ ,  $F_c$ ,  $F_{cri}$  i  $F_g$ , i odkształcenie wstępne  $\delta_a$  wpływają na siły normalne  $Q_i$  i  $Q_o$ , jakie powstają w miejscu kontaktu kulki z bieżniami, a tym samym na siły tarcia w tych punktach.



Reasumując, na opory ruchu w łożysku, wywołane tarciem tocznym i ślizgowym od sił kontaktowych  $Q_i$  i  $Q_o$ , składają się:

- oddziaływania kontaktowe  $Q_{i(F_a)}$ ,  $Q_{o(F_a)}$  od siły napięcia wstępnego  $F_a$ ,
- oddziaływania kontaktowe  $Q_{i(\delta_a)}$ ,  $Q_{o(\delta_a)}$  od odkształcenia wstępnego  $\delta_a$ ,
- oddziaływania kontaktowe  $Q_{i(F_c)}$ ,  $Q_{o(F_c)}$  od siły odśrodkowej  $F_c$ ,
- oddziaływania kontaktowe  $Q_{i(F_{cr})}$ ,  $Q_{o(F_{cr})}$  od siły odśrodkowej  $F_{cr}$ ,
- oddziaływania kontaktowe  $Q_{i(F_g)}$ ,  $Q_{o(F_g)}$  od momentu żyroskopowego  $M_g$ .

W celu określenia oporów ruchu w łożysku należy więc zidentyfikować związki pomiędzy siłami normalnymi  $Q_i$  i  $Q_o$  a obciążeniami  $F_a$ ,  $F_c$ ,  $F_{cr}$  i  $F_g$  i odkształcenie wstępne  $\delta_a$ .

## 8. METODA SZACOWANIA OPORÓW RUCHU W ŁOŻYSKU TOCZNYM SKOŚNYM

W powszechnym użyciu do obliczania oporów ruchu łożysk stosuje się modele eksperymentalne, które dają dobrą zgodność z rzeczywistością dla prędkości, dla których efekty wirowania elementów tocznych (siły odśrodkowe, efekty żyroskopowe) są pomijalnie małe. Jednym z takich modeli jest zależność podana przez Palmgrena [50], która dla łożysk skośnych wygląda następująco:

$$\begin{aligned}M_T &= f_1 F_\beta d_m \\f_1 &= Z \left( \frac{F_s}{C_0} \right)^y \\F_s &= X_s F_r + Y_s F_a \\F_\beta &= 0,9 F_a \operatorname{ctg} \alpha - 0,1 F_r\end{aligned}\tag{8.1}$$

gdzie:  $M_T$  – moment oporów z tytułu tarcia tocznego i ślizgowego w łożysku,

$F_a, F_r$  – osiowe i promieniowe obciążenie łożyska,

$F_s$  – obciążenie zastępcze (ekwiwalentne) łożyska,

$F_\beta$  – obciążenie obliczeniowe uwzględniające kierunek działania,

$C_0$  – nośność spoczynkowa łożyska.

Dla łożysk skośnych wartości współczynników wynoszą odpowiednio:

$Z = 0,001$  (dla  $\alpha = 30-40^\circ$ ),

$y = 0,33$  (dla  $\alpha = 30-40^\circ$ ),

$X_s = 0,5$  (dla  $\alpha = 25^\circ$ ) – dotyczy łożyska FAG B7013-E-T-P4,

$Y_s = 0,38$  (dla  $\alpha = 25^\circ$ ) – dotyczy łożyska FAG B7013-E-T-P4.

Proponowany model (8.1) nie uwzględnia w sposób jawny żadnego zjawiska przyczyniającego się do powstawania oporów ruchu. Jest to typowy model eksperymentalny, który w pewnych obszarach pracy łożysk dobrze odzwierciedla opory ruchu. Podstawowym zastrzeżeniem dotyczącym obszaru jego stosowania jest brak jawnego wpływu prędkości obrotowej łożyska. Z dokonanego w rozdz. 2 przeglądu literaturowego wynika bowiem, że prędkość obrotowa łożyska ma istotny wpływ na obciążenia w łożysku, a tym samym i na opory ruchu. Można sformułować pogląd, że ten model jest dostatecznie wiarygodny dla stosunkowo niskich prędkości obrotowych.

Z kolei w odniesieniu łożysk tocznych, stosowanych np. w obrabiarkach HSC (High Speed Cutting), kiedy prędkości obrotowe są wielokrotnie wyższe, ten model nie będzie adekwatny do szacowania oporów ruchu. Dlatego autorzy zaproponowali nowy model do szacowania oporów ruchu w łożyskach, w którym wpływ prędkości obrotowej będzie widoczny w sposób jawny. Model ten opracowano, uwzględniając wszystkie zjawiska występujące w łożysku, które przyczyniają się do obciążeń kontaktowych pomiędzy kulkami a bieżniami łożyska.

W celu obliczenia momentu oporów ruchu w łożysku  $M_{(T)r}$  od tarcia tocznego w [54] przytoczono formułę:

$$M_{(T)r} = \left( \frac{d_m}{D} + 0,5 \right) \sum_{j=0}^{j=Z-1} Q_j f_{kj} \quad (8.2)$$

gdzie:  $Z$  – liczba kulek w łożysku,

$Q_j$  –  $j$ -te obciążenie zastępcze w miejscu kontaktów kulki z bieżniami,

$f_{kj}$  –  $j$ -ty toczny współczynnik tarcia kulek o bieżnie.

Model (8.2) ujmuje w sposób jawny wpływ sił kontaktowych na opory ruchu. Z doniesień literaturowych wynika natomiast, że siły kontaktowe są funkcją m.in. prędkości obrotowej łożyska. Należy jednak zauważyć, że oddziaływania kontaktowe  $Q_j$ , spowodowane różnymi obciążeniami ( $F_a$ ,  $F_c$ ,  $F_g$ ), nie są zwykłą sumą algebraiczną obciążeń kontaktowych  $Q_{j(F_a)}$ ,  $Q_{j(F_c)}$  i  $Q_{j(F_g)}$ . Stąd istnieje konieczność opracowania odpowiedniej metody sumowania oporów ruchu spowodowanych różnymi zjawiskami, występującymi w łożysku tocznym skośnym.

Autorzy założyli, że opory ruchu  $M_T$  z tytułu tarcia mechanicznego (ślizgowego i tocznego) w łożysku są, zgodnie z powszechnie stosowanym modelem tarcia, proporcjonalne do sił kontaktowych i do współczynników tarcia, tj.:

$$M_T = f(Q_z, Q_{F_a}, Q_{\delta_a}, Q_{F_c}, Q_{F_r}, Q_g, \mu, f) \quad (8.3)$$

gdzie:  $Q_z, Q_{F_a}, Q_{\delta_a}, Q_{F_c}, Q_{F_r}, Q_g$  – siły kontaktowe wynikające z poszczególnych zjawisk występujących w łożysku tocznym skośnym,

$\mu, f$  – współczynniki tarcia ślizgowego i tocznego.

Ponieważ siły kontaktowe  $Q_z, Q_{F_a}, Q_{\delta_a}, Q_{F_c}, Q_{F_r}, Q_g$  są m.in. funkcją prędkości łożyska, więc docelowym modelem do obliczania oporów ruchu będzie zależność w postaci:

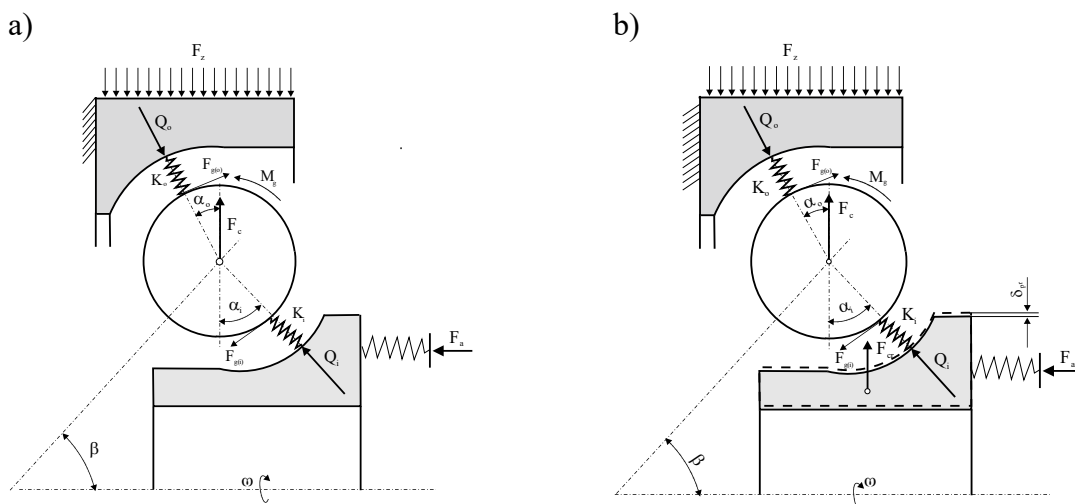
$$M_T = f(F_z, F_a, \delta_a, n, \mu, f) \quad (8.4)$$

Z zależności (8.4) wynika, że zmiennymi niezależnymi dla obliczania oporów ruchu są: obciążenie zewnętrzne  $F_z$ , napięcie wstępne  $F_a$  lub odkształcenie wstępne  $\delta_a$  i prędkość obrotowa łożyska  $n$ .

## 9. WYZNACZANIE OBCIĄŻEŃ KONTAKTOWYCH W OBSZARACH KONTAKTU KULKI Z BIEŻNIAMI

W literaturze przedmiotu (rozdz. 2) występuje głównie model kontaktowy łożyska tocznego, nazywany w niniejszej monografii klasycznym (rys. 9.1a).

Z kolei autor [30] opracował nowy model łożyska tocznego skośnego, który nazwał rozszerzonym. Jest on przedstawiony na rys. 9.1b. Oba modele na rys. 9.1 dotyczą sprężystego napięcia wstępnego od siły  $F_a$ .

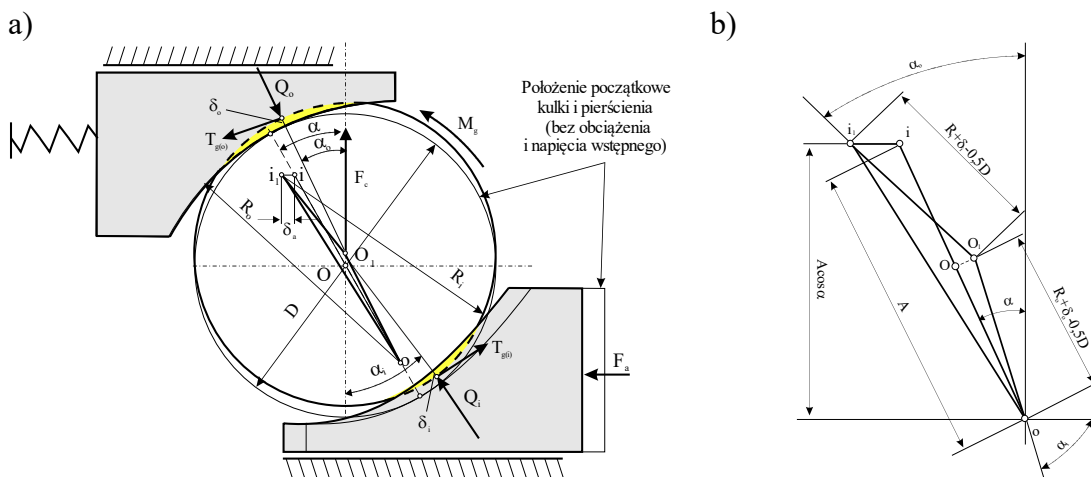


Rys. 9.1. Modele kontaktowe łożyska tocznego skośnego: a) klasyczny, b) rozszerzony [30];  $K_o, K_i$  – współczynniki sztywności kontaktowej,  $\delta_{pr}$  – przemieszczenie pierścienia  
 Fig. 9.1. Contact models of angular bearing: a) classic, b) extended [30];  $K_o, K_i$  – coefficients of contact stiffness,  $\delta_{pr}$  – displacement of the ring

Podstawowa różnica pomiędzy tymi modelami sprowadza się do tego, że w modelu klasycznym nie jest uwzględniony efekt dynamiczny z tytułu ruchu obrotowego pierścienia łożyskowego, a sam pierścień traktowany jest jako nieodkształcalny, natomiast w modelu rozszerzonym ten efekt jest widoczny w postaci siły odśrodkowej  $F_{cr}$ , wynikającej z ruchu obrotowego pierścienia łożyskowego, a pierścień łożyskowy traktowany jest jako element sprężysty, odkształcalny ( $\delta_{pr}$ ). W dalszym ciągu będą porównane efekty różnego modelowania, m.in. w postaci sił kontaktowych.

## 9.1. Klasyczny model kontaktowy łożyska kulkowego skośnego

Na rys. 9.2 przedstawiono stan obciążenia i odkształcenia w klasycznym modelu łożyska ze sprężystym napięciem wstępnym. W stanie nieobciążonym kąt działania łożyska wynosi  $\alpha$  i jest wielkością katalogową łożyska. Środek kulki znajduje się w punkcie  $O$ , a środki krzywizn  $\rho_i$  oraz  $\rho_o$  bieżni wewnętrznej i zewnętrznej znajdują się w punktach  $i$  oraz  $o$ . Siły kontaktowe równe są zero. Po napięciu wstępnym łożyska siłą osiową  $F_a$  pierścień wewnętrzny ulega osiowemu przemieszczeniu, w wyniku czego środek krzywizny bieżni wewnętrznej przemieszcza się z punktu  $i$  do punktu  $i_1$  o wartość  $\delta_a$ . W obszarach kontaktu kulki z bieżniami pojawiają się siły kontaktowe  $Q_i = Q_{i(Fa)}$  oraz  $Q_o = Q_{o(Fa)}$ , które wywołują odkształcenia kontaktowe  $\delta_{(Fa)i}$  oraz  $\delta_{(Fa)o}$ . Zmieniają się także kąty działania, tzn. przyjmują wartości:  $\alpha_{(Fa)i}$  oraz  $\alpha_{(Fa)o}$ . Z kolei gdy pierścień wewnętrzny obraca się z prędkością obrotową  $n$ , powstają: siła odśrodkowa  $F_c$  działająca na każdą z kulek i moment żyroskopowy  $M_g$  działający na każdą z kulek. Moment żyroskopowy  $M_g$  można zastąpić parą sił:  $F_{(g)i}$  oraz  $F_{(g)o}$ . W wyniku siły odśrodkowej i momentu żyroskopowego środek kulki  $O$  ulega przemieszczeniu do punktu  $O_1$ , a w obszarach kontaktu kulki z bieżniami powstają siły kontaktowe  $Q_i$  oraz  $Q_o$ . W wyniku pojawienia się sił kontaktowych w obszarach kontaktu kulek z bieżniami powstają odkształcenia kontaktowe  $\delta_i$  oraz  $\delta_o$ , a kąty działania przyjmują wartości  $\alpha_i$  oraz  $\alpha_o$ .



Rys. 9.2. Stan obciążenia i odkształcenia w klasycznym modelu kontaktowym łożyska (a), związki trygonometryczne w modelu łożyska skośnego (b)

Fig. 9.2. The state of load and deformation in the classical contact bearing model (a), trigonometric relationships in angular bearing model (b)

W celu wyznaczenia oddziaływań kontaktowych  $Q_i$  i  $Q_o$  w obszarach kontaktu kulki z bieżniami przyjęto następującą metodę:

- pomija się opory tarcia łożyska w gnieździe łożyskowym, co skutkuje m.in. tym, że podczas wstępnego napinania łożyska pierścien przesuwny (zewnątrzny lub wewnętrzny) przemieszcza się bez tarcia,
- odkształceniom kontaktowym podlega tylko kulka w miejscu kontaktu z bieżniami,
- za model oddziaływań kontaktowych przyjmuje się model Jonesa [27] w postaci:

$$\begin{aligned} Q_i &= K_i \cdot \delta_i^{3/2} \\ Q_o &= K_o \cdot \delta_o^{3/2} \end{aligned} \quad (9.1)$$

gdzie:  $K_i, K_o$  – współczynniki sztywności kontaktowej,

$\delta_i, \delta_o$  – odkształcenia kontaktowe kulki względem bieżni wewnętrznej i zewnętrznej.

- wstępne napięcie łożyska realizowane jest w układzie „O”, to znaczy, że przemieszcza się pierścien wewnętrzny podczas wstępnego napinania łożysk,
- wstępne napięcie realizowane jest w układzie sprężystym, co oznacza, że wraz ze zmianą prędkości obrotowej i sił kontaktowych pierścien wewnętrzny lub zewnętrzny będzie się przemieszczać tak, aby napięcie wstępne  $F_a$  nie ulegało zmianie.

Na podstawie stanu obciążenia (rys. 9.2a) można sformułować warunki równowagi kulki, mianowicie:

$$\begin{aligned} -Q_o \cos \alpha_o + Q_i \cos \alpha_i - F_{go} \sin \alpha_o + F_{(g)i} \sin \alpha_i + F_c &= 0 \\ Q_o \sin \alpha_o - Q_i \sin \alpha_i - F_{(g)o} \cos \alpha_o + F_{(g)i} \cos \alpha_i &= 0 \end{aligned} \quad (9.2)$$

W równaniu (9.2) występują 4 niewiadome:  $Q_i, Q_o, \alpha_i$ , oraz  $\alpha_o$ , a równania są tylko dwa. Dlatego sformułujemy warunki równowagi pierścieni łożyskowych, mianowicie:

$$\begin{aligned} Q_i \sin \alpha_i - F_{(g)i} \cos \alpha_i - F_a &= 0 \\ -Q_o \sin \alpha_o + F_{go} \cos \alpha_o + F_a &= 0 \end{aligned} \quad (9.3)$$

Ponieważ oba równania (9.3) są równorzędne, więc do wyznaczenia niewiadomych  $Q_i, Q_o, \alpha_i$ , oraz  $\alpha_o$  możemy wziąć, oprócz dwóch równań (9.2), tylko jedno z równań (9.3). Tak więc potrzebne jest jeszcze jedno równanie, wiążące niewiadome  $Q_i, Q_o, \alpha_i$  oraz  $\alpha_o$ , aby móc je wyznaczyć. Będzie to równanie geometryczne.

Na rys. 9.2a zaznaczono trójkąt  $i_1O_1o$ , który łączy środki krzywizn bieżni wewnętrznej  $i_1$  oraz zewnętrznej  $i_o$  ze środkiem kulki  $O_1$ . Trójkąt ten został bardziej szczegółowo narysowany na rys. 9.2b.

Dla łożyska nieobciążonego i bez napięcia wstępnego środki krzywizn obu bieżni łączy linia prosta  $io$ , która przechodzi przez środek kulki  $O$ . Linia ta definiuje także kąt

działania łożyska  $\alpha$ , który jest geometryczną cechą konstrukcyjną łożyska (4.3). Linia ta ma długość  $A$ , która jest cechą konstrukcyjną łożyska (4.1). Po wstępnym napięciu łożyska siłą  $F_a$  środek krzywizny bieżni wewnętrznej przemieszcza się do punktu  $i_1$ , natomiast po obciążeniu łożyska lub po nadaniu mu pewnej prędkości obrotowej, środek kulki przemieszcza się do punktu  $Q_1$ .

Długości boków trójkąta  $i_1O_1O$  są funkcją promieni krzywizny bieżni, odkształceń kontaktowych kulek i średnicy kulki, mianowicie:

$$\begin{aligned} i_1O_1 &= R_i + \delta_i - 0,5D \\ oO_1 &= R_o + \delta_o - 0,5D \end{aligned} \quad (9.4)$$

Rzutuując boki trójkąta  $i_1O_1O$  np. na oś pionową, można napisać:

$$A \cos \alpha = (R_i + \delta_i - 0,5D) \cos \alpha_o + (R_o + \delta_o - 0,5D) \cos \alpha_i \quad (9.5)$$

Zależność geometryczna może stanowić czwarte równanie potrzebne do obliczenia niewiadomych  $Q_i$ ,  $Q_o$ ,  $\alpha_i$ , oraz  $\alpha_o$ , pod warunkiem że odkształcenia kontaktowe  $\delta_i$  oraz  $\delta_o$  wyrazimy za pomocą sił kontaktowych i kątów działania. W tym celu należy skorzystać z modeli (9.1), które po przekształceniu przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \delta_i &= \left( \frac{Q_i}{K_i} \right)^{2/3} \\ \delta_o &= \left( \frac{Q_o}{K_o} \right)^{2/3} \end{aligned} \quad (9.6)$$

Po podstawieniu (9.6) do (9.5) otrzymamy:

$$A \cos \alpha = \left( R_i + \left( \frac{Q_i}{K_i} \right)^{2/3} - 0,5D \right) \cos \alpha_o + \left( R_o + \left( \frac{Q_o}{K_o} \right)^{2/3} - 0,5D \right) \cos \alpha_i \quad (9.7)$$

Równania (9.2), (9.3) i (9.6) tworzą układ 4 równań, pozwalających na wyznaczenie niewiadomych  $Q_i$ ,  $Q_o$ ,  $\alpha_i$  oraz  $\alpha_o$ . Jednak analityczne rozwiązanie tego układu równań jest trudne, ponieważ – jak już wcześniej zasygnalizowano – wyznaczanie kątów wymaga metod iteracyjnych.

Korzystanie z modelu geometrycznego (9.7) wymaga m.in. znajomości współczynników sztywności kontaktowych  $K_i$  i  $K_o$ . W literaturze dominują dwa podejścia do tego zagadnienia:

- dominujące, w myśl którego współczynniki sztywności kontaktowej są funkcją cech geometrycznych i materiałowych łożyska [20], [39], [4],
- współczynniki sztywności kontaktowej są, oprócz cech geometrycznych i materiałowych funkcją obciążeń kontaktowych [4].

W klasycznym podejściu współczynniki sztywności kontaktowej wyznacza się według następującego modelu [39]:

$$K_i = 1,084152 \cdot 10^6 \zeta_i^{-0,5} (\delta_i^*)^{-1,5} \quad (9.8)$$

$$K_o = 1,084152 \cdot 10^6 \zeta_o^{-0,5} (\delta_o^*)^{-1,5}$$

$$\zeta_i = \frac{4}{D} - \frac{1}{R_i} + \frac{2}{d_i} \quad (9.9)$$

$$\zeta_o = \frac{4}{D} - \frac{1}{R_o} - \frac{2}{d_o}$$

gdzie:  $\zeta_i, \zeta_o$  – krzywizny zastępcze w miejscu kontaktu kulki z bieżniami,

$\delta_i^*, \delta_o^*$  – parametry kontaktowe.

Parametr kontaktowy  $\delta^*$  wyznacza się jako funkcję zastępczej różnicy krzywizn  $F(\zeta)$ , gdzie:

$$F(\zeta_i) = \frac{\frac{2}{d_i} + \frac{1}{R_i}}{\zeta_i} \quad (9.10)$$

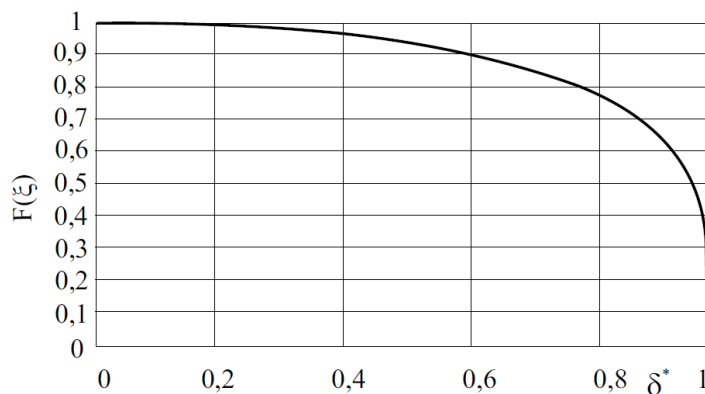
$$F(\zeta_o) = \frac{\frac{1}{R_o} - \frac{2}{d_o}}{\zeta_o}$$

Na rys. 9.3 przedstawiono graficzną postać funkcji  $\delta^* = f(F(\zeta))$  [20], która umożliwia wyznaczenie wartości  $\delta^*$ , a tym samym i sztywności kontaktowej  $K$ .

W [20] przedstawiono bardzo podobne podejście do modelu (9.1). Także stałe  $K_i$  i  $K_o$  wyznacza się podobnie jak w (9.8), z tą tylko różnicą, że:

$$K_i = 2,15 \cdot 10^5 \zeta_i^{-0,5} (\delta_i^*)^{-1,5} \quad (9.11)$$

$$K_o = 2,15 \cdot 10^5 \zeta_o^{-0,5} (\delta_o^*)^{-1,5}$$



Rys. 9.3. Graficzna postać zależności  $\delta^* = f(F(\zeta))$  [20]

Fig. 9.3. Graphical form of dependency  $\delta^* = f(F(\zeta))$  [20]



Zupełnie inne podejście do modelu kontaktowego zostało zaprezentowane w [4]. Zależność pomiędzy siłą i odkształceniem kontaktowym jest identyczna z (9.1), ale sztywności kontaktowe  $K_i$  i  $K_o$  obliczano wg innej relacji, mianowicie:

$$K_i = 1,3498 \cdot 10^{11} \zeta_{2i}^{-0,5} \left( \frac{\zeta_{2i}}{\zeta_{1i}} \right)^{0,345} \quad (9.12)$$

$$K_o = 1,3498 \cdot 10^{11} \zeta_{2o}^{-0,5} \left( \frac{\zeta_{2o}}{\zeta_{1o}} \right)^{0,345}$$

gdzie:

$$\zeta_{1i} = \frac{2}{D} - \frac{1}{R_i}$$

$$\zeta_{2i} = \frac{2}{D} + \frac{2 \cos \alpha_i}{d_m - D \cos \alpha_i} \quad (9.13)$$

$$\zeta_{1o} = \frac{2}{D} - \frac{1}{R_o}$$

$$\zeta_{2o} = \frac{2}{D} - \frac{2 \cos \alpha_o}{d_m + D \cos \alpha_o}$$

Oznacza to, że współczynniki sztywności kontaktowej  $K_i$  i  $K_o$  nie są wielkościami niezmiennymi dla danego łożyska, ale są funkcją kątów działania  $\alpha_i$  i  $\alpha_o$ , a tym samym funkcją obciążeń kontaktowych  $Q_i$  i  $Q_o$ .

Przykładowo, dla testowego łożyska FAG B7013-E-T-P4, które było przedmiotem badań, poszczególne parametry geometryczne, potrzebne do obliczania współczynników sztywności kontaktowej, wynoszą odpowiednio:  $\zeta_i = 0,2082 \text{ mm}^{-1}$ ,  $\zeta_o = 0,1588 \text{ mm}^{-1}$ ,  $F(\zeta_i) = 0,9984 \rightarrow \zeta_i^* = 0,2200$ ,  $F(\zeta_o) = 0,9980 \rightarrow \zeta_o^* = 0,2427$ ,  $\zeta_{1i} = 0,00016 \text{ mm}^{-1}$ ,  $\zeta_{2i} = 0,1150 \text{ mm}^{-1}$ ,  $\zeta_{1o} = 0,00016 \text{ mm}^{-1}$ ,  $\zeta_{2o} = 0,0705 \text{ mm}^{-1}$ ,  $d_{1i} = d_{1o} = 11,11 \text{ mm}$ ,  $d_{2i} = 71,388 \text{ mm}$ ,  $d_{2o} = 93,612 \text{ mm}$ , i w zależności od przyjętego modelu obliczania współczynników sztywności kontaktowej  $K_i$  i  $K_o$  otrzymamy następujące wartości tych współczynników:

Tabela 9.1

Współczynniki sztywności kontaktowej  $K_i, K_o$  [ $\text{Nmm}^{-1,5}$ ]

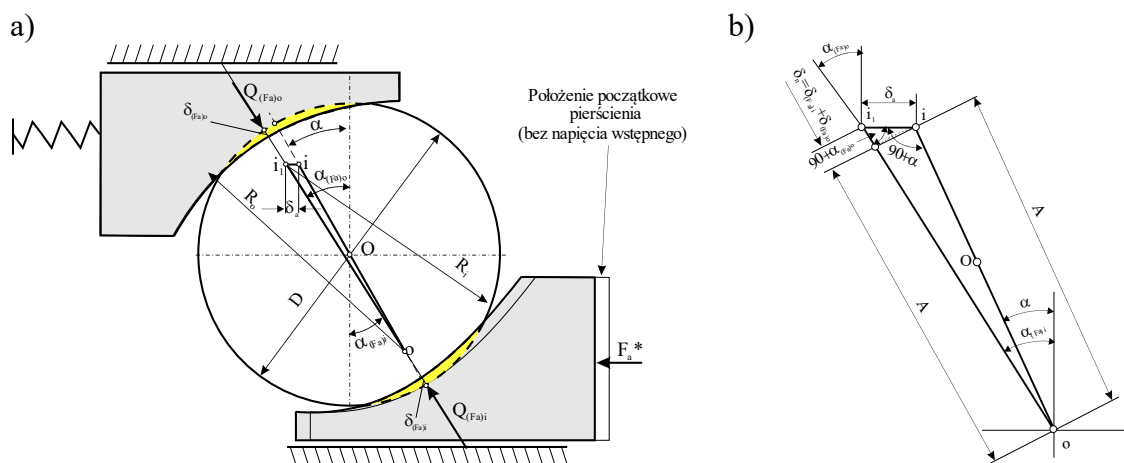
	Wg [39]	Wg [20]	Wg [4]
$10^{-5} K_i$	230	42	35
$10^{-5} K_o$	227	43	36

Z informacji zawartych w tabeli 9.1 wynika, że w zależności od przyjęto modelu obliczania współczynników sztywności kontaktowej  $K_i$  i  $K_o$ , sztywności kontaktowe w obszarze kulki i bieżni mogą różnić się nawet do 6,5 razy.

W dalszym ciągu będziemy używali modelu przedstawionego przez Harrisa [20]. Rozpatrzone zostaną przypadki szczególne, które można rozwiązać analitycznie.

### 9.1.1. Stan obciążenia i odkształcenia łożyska w warunkach działania napięcia wstępnego $F_a^*$

Łożyska toczne skośne podczas montażu w gnieździe łożyskowym muszą być napięte wstępnie. W przypadku sprężystego napięcia wstępnego wywierana jest osiowa siła montażowa  $F_a$  (rys. 7.2), która powoduje osiowe przemieszczenie się pierścienia wewnętrznego względem zewnętrznego i pojawienie się sił kontaktowych  $Q_{(Fa)i}$  i  $Q_{(Fa)o}$ . To z kolei powoduje powstanie odkształceń kontaktowych  $\delta_{(Fa)i}$  i  $\delta_{(Fa)o}$ , które przyczyniają się do zmiany kątów działania łożyska ( $\alpha_{(Fa)i}$  i  $\alpha_{(Fa)o}$ ).



Rys. 9.4. Stan łożyska tocznego skośnego po sprężystym napięciu wstępnym (a), związki trygonometryczne w modelu łożyska skośnego (b);  $F_a^*$  – napięcie wstępne przypadające na jedną kulkę

Fig. 9.4. Condition of an angular rolling bearing after elastic preload (a), trigonometric relationships in angular bearing model (b);  $F_a^*$  – preload per ball

Przesunięciu osiowemu pierścienia wewnętrznego towarzyszy zmiana położenia środka krzywizny bieżni wewnętrznej z położenia oznaczonego jako  $i$  do położenia  $i_l$ . Obrazuje to rys. 9.4.

Dla stanu obciążenia łożyska jak na rys. 9.4a możemy napisać równania równowagi sił działających na kulkę i na bieżnie pierścieni, posiłkując się równaniami (9.2) i (9.3), mianowicie:

$$\begin{aligned} -Q_{(Fa)o} \cos \alpha_{(Fa)o} + Q_{(Fa)i} \cos \alpha_{(Fa)i} &= 0 \\ Q_{(Fa)o} \sin \alpha_{(Fa)o} - Q_{(Fa)i} \sin \alpha_{(Fa)i} &= 0 \end{aligned} \quad (9.14)$$

$$\begin{aligned} Q_{(Fa)i} \sin \alpha_{ii} - F_a^* &= 0 \\ -Q_{(Fa)o} \sin \alpha_{(Fa)o} + F_a^* &= 0 \end{aligned} \quad (9.15)$$

Z równań tych można wywnioskować, że kulka pozostanie w równowadze, kiedy spełnione będą warunki:

$$\begin{aligned} \alpha_{(Fa)o} &= \alpha_{(Fa)i} = \alpha_{(Fa)} \\ Q_{(Fa)o} &= Q_{(Fa)i} = Q_{(Fa)} = \frac{F_a^*}{\sin \alpha_{(Fa)}} \end{aligned} \quad (9.16)$$

gdzie:  $F_a^*$  – siła napięcia wstępnego przypadająca na jedną kulkę ( $F_a^* = F_a/N$ , gdzie  $N$  – liczba kulek w łożysku).

Dla wyznaczenia kąta działania  $\alpha_{(Fa)}$  należy zdefiniować dodatkowe równanie, tzw. równanie trygonometryczne. Dla trójkąta  $oii_1$ , wykorzystując twierdzenie sinusów, możemy napisać: (rys. 9.4b):

$$\begin{aligned} \frac{A}{\sin(90 - \alpha_{(Fa)o})} &= \frac{A + \delta_n}{\sin(90 + \alpha)} \\ \delta_n &= \delta_{(Fa)o} + \delta_{(Fa)i} \end{aligned} \quad (9.17)$$

gdzie  $\delta_n$  – sumaryczne odkształcenie kontaktowe normalne.

Wprowadzając pojęcie sztywności kontaktowej zastępczej  $K_n$ , mianowicie:

$$K_n = \frac{1}{(K_i^{-2/3} + K_o^{-2/3})^{3/2}} \quad (9.18)$$

oraz uwzględniając w (9.17) zależności (9.16) i (9.6), otrzymamy:

$$\left( \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_{(Fa)}} - 1 \right) (\sin \alpha_{(Fa)})^{2/3} = \left( \frac{F_a^*}{K_n} \right)^{2/3} \frac{1}{A} \quad (9.19)$$

Zależność (9.19) pozwala metodą iteracyjną obliczyć kąt działania  $\alpha_{(Fa)}$  dla każdej wartości napięcia wstępnego  $F_a$  i dla każdej wartości fabrycznego kąta działania  $\alpha$ . Znając kąt działania  $\alpha_{(Fa)}$ , możemy wyznaczyć siłę kontaktową  $Q_{(Fa)}$ , posługując się równaniem (9.16).

Rozwiązanie tożsamości (9.19) wymaga znajomości współczynnika sztywności kontaktowej  $K_n$ , co w świetle tabeli 9.1 nie jest tak całkiem jednoznaczne. Jones za [20] wykazał, że zachodzi następująca tożsamość:

$$\begin{aligned} K_n &= \frac{KD^{0,5}}{B^{1,5}} \\ B &= f_i + f_o - 1 \end{aligned} \quad (9.20)$$

gdzie:  $K$  – stała osiowego odkształcenia [MPa],

$B$  – sumaryczna krzywizna łożyska,

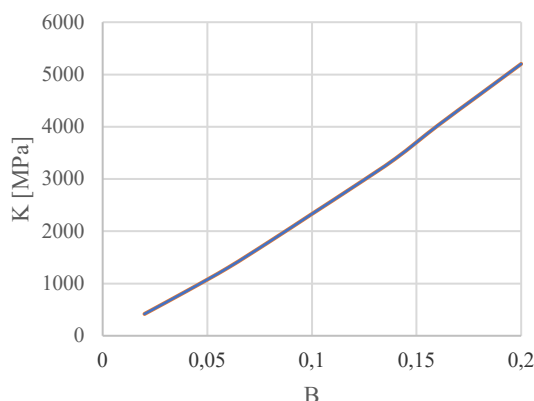
$f_i, f_o$  – względne krzywizny wewnętrzna i zewnętrzna ( $f_i = \rho_i/D, f_o = \rho_o/D$ ).

Ponadto Jones za [20] wykazał, że stała  $K$  jest funkcją sumarycznej krzywizny  $B$ , co demonstruje rys. 9.5. Oznacza to, że współczynnik sztywności kontaktowej  $K_n$  jest funkcją tylko cech konstrukcyjnych łożyska i dla danego łożyska jest niezmienny.

Jeżeli zależność (9.20) wstawić do tożsamości (9.19), to przyjmie ona postać:

$$\left( \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_{(F_a)}} - 1 \right)^{3/2} \sin \alpha_{(F_a)} = \frac{F_a^*}{KD^2} \quad (9.21)$$

Rozwiązanie tożsamości (9.21) jest łatwiejsze niż (9.19).



Rys. 9.5. Zależność osiowego współczynnika odkształcenia  $K$  od sumarycznej krzywizny  $B$  łożyska skośnego; ( $B = f_i + f_o - 1$ ) Jones za [20]

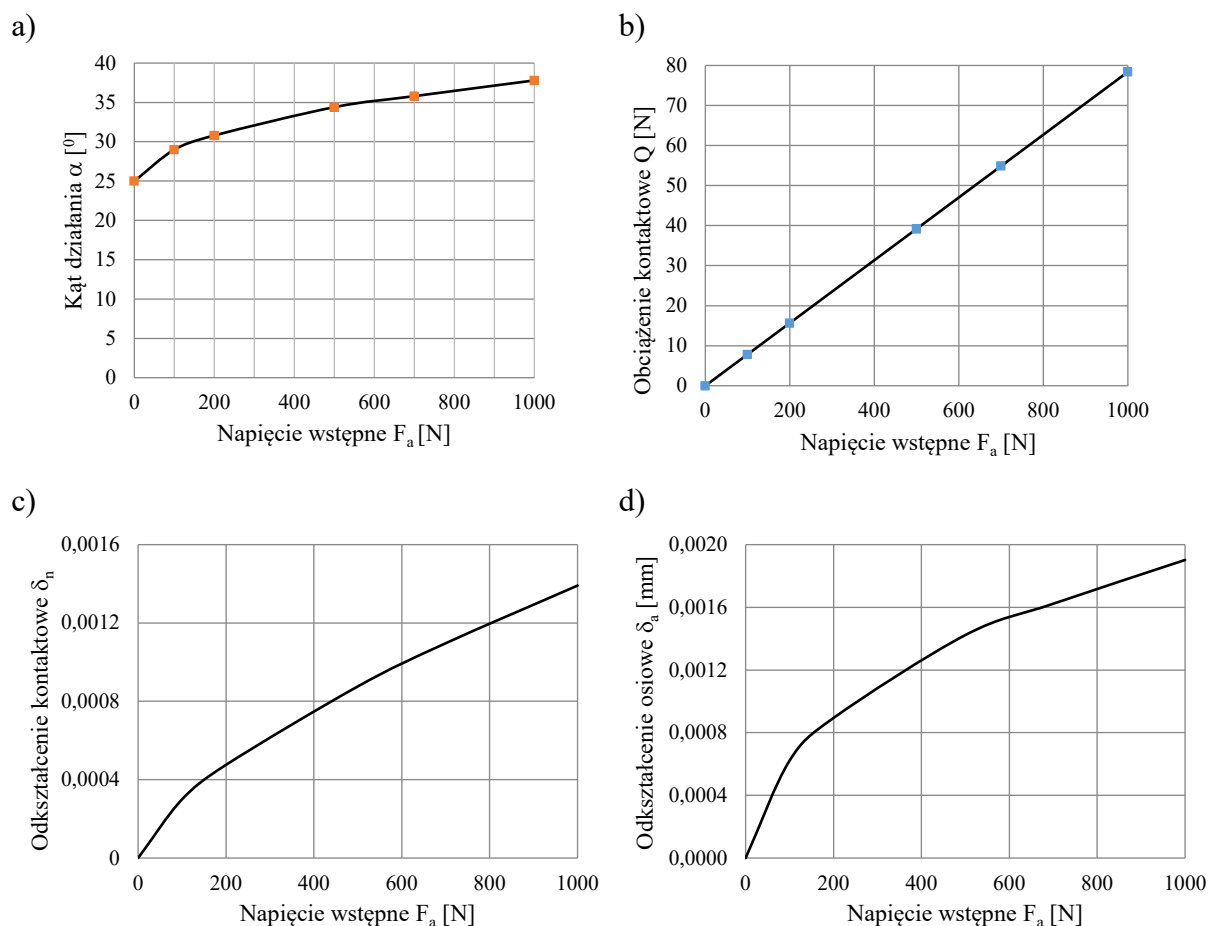
Fig. 9.5. Axial deflection constant  $K$  vs. total curvature for ball bearing; ( $B = f_i + f_o - 1$ ) Jones for [20]

W wyniku sprężystego napięcia wstępnego środek krzywizny bieżni wewnętrznej zostaje przemieszczony z punktu  $i$  do punktu  $i_1$  o wielkość  $\delta_a$  (rys. 9.4). O taką odległość należy przesunąć pierścień wewnętrzny względem zewnętrznego<sup>2</sup>. Można ją wyznaczyć z twierdzenia sinusów dla trójkąta  $ii_1O$ , mianowicie:

$$\delta_a = A \frac{\sin(\alpha_{(F_a)} - \alpha)}{\cos \alpha_{(F_a)}} \quad (9.22)$$

Na rys. 9.6 przedstawiono przykłady zastosowania zaproponowanej metody do obliczania kąta działania  $\alpha_{(F_a)}$ , siły kontaktowej  $Q_{(F_a)}$ , odkształcenia kontaktowego  $\delta_n$  i przemieszczenia osiowego  $\delta_a$  dla sprężystego napięcia wstępnego testowego łożyska FAG B7013-E-T-P4.

<sup>2</sup> W rzeczywistości pierścień wewnętrzny należy przesunąć osiowo o odległość większą niż  $\delta_a$ , ponieważ odkształceniu ulega również element sprężysty, który wytwarza napięcie wstępne. Odkształcenie tego elementu sprężystego zależy odżądanego napięcia wstępnego  $F_a$  i od sztywności osiowej samego elementu sprężystego. Ponieważ na ogół sztywność osiowa elementu sprężystego jest znacznie mniejsza od zastępczej sztywności kontaktowej  $K_n$ , więc przesunięcie osiowe pierścienia wewnętrznego będzie znacznie większe niż  $\delta_a$ .



Rys. 9.6. Wpływ napięcia wstępnego  $F_a$  na: kąt działania  $\alpha$  (a), siłę kontaktową  $Q$  (b), odkształcenie kontaktowe  $\delta_n$  (c), odkształcenie osiowe  $\delta_a$  (d)

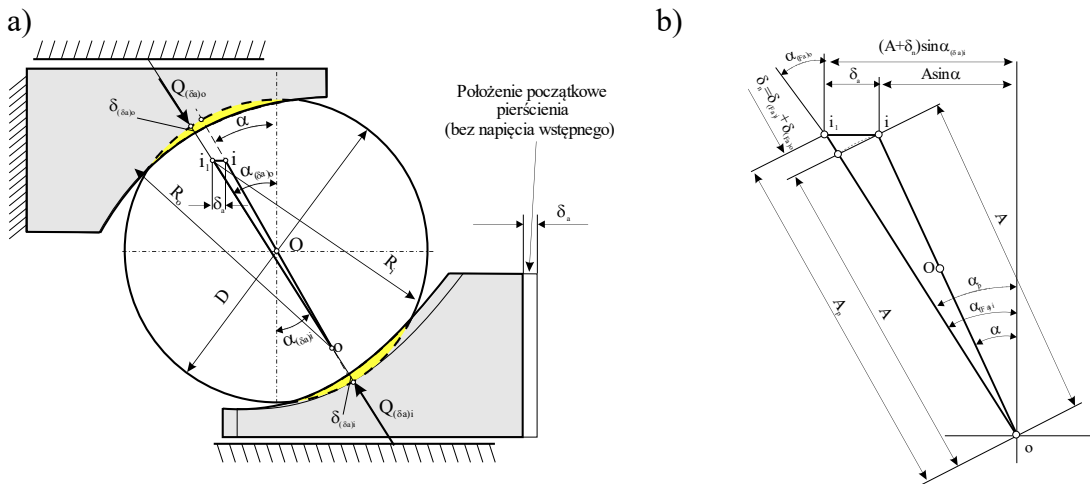
Fig. 9.6. Influence of pre-load  $F_a$  on: contact angle  $\alpha$  (a), contact load  $Q$  (b), contact deformation  $\delta_n$  (c), axial displacement  $\delta_a$  (d)

### 9.1.2. Stan obciążenia i odkształcenia łożyska w warunkach działania wstępnego przemieszczenia $\delta_a$

Drugim sposobem wstępnego napinania łożysk tocznych skośnych, oprócz sprężystego napięcia wstępnego, jest tzw. sztywne napięcie wstępne w postaci przemieszczenia pierścienia wewnętrznego względem zewnętrznego o wartość  $\delta_a$ .

Na rys. 9.7a przedstawiono stan obciążenia i odkształcenia łożyska ze wstępnie przemieszczonym pierścieniem wewnętrznym  $\delta_a$ . Pierścień zewnętrzny ma w tym wypadku ograniczone przemieszczanie się w kierunku osiowym. W rezultacie takiego działania środek krzywizny  $i$  bieżni wewnętrznej przemieszcza się do punktu  $i_1$  o taką samą odległość  $\delta_a$ .

W przeciwieństwie do metody sprężystego napinania łożyska w trakcie montażu nie jest znana siła osiowa, jaka występuje pomiędzy bieżniami a kulką.



Rys. 9.7. Stan obciążenia łożyska w warunkach wstępnego przemieszczenia pierścienia wewnętrznego  $\delta_a$  (a), trygonometryczne relacje w modelu łożyska skośnego (b);  $\delta_a$  – odkształcenie wstępne  
 Fig. 9.7. Condition of an angular rolling bearing after predeformation  $\delta_a$  (a), trigonometric relationships in angular bearing model (b);  $\delta_a$  – predeformation

Równania równowagi sił działających na kulę i bieżnię przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned} -Q_{(\delta a)o} \cos \alpha_{(\delta a)o} + Q_{(\delta a)i} \cos \alpha_{(\delta a)i} &= 0 \\ Q_{(\delta a)o} \sin \alpha_{(\delta a)o} - Q_{(\delta a)i} \sin \alpha_{(\delta a)i} &= 0 \end{aligned} \quad (9.23)$$

Z równań tych można wywnioskować, że kulka pozostanie w równowadze, kiedy spełnione będą warunki:

$$\begin{aligned} \alpha_{(\delta a)o} = \alpha_{(\delta a)i} = \alpha_{(\delta a)} \\ Q_{(\delta a)o} = Q_{(\delta a)i} = Q_{(\delta a)} \end{aligned} \quad (9.24)$$

gdzie  $\delta_a$  – odkształcenie wstępne.

Dla wyznaczenia kąta działania  $\alpha_{(\delta a)}$  należy zdefiniować dodatkowe równanie, tzw. równanie trygonometryczne. Dla trójkąta  $oii_1$  możemy napisać (rys. 9.7b):

$$\delta_a = (A + \delta_n) \sin \alpha_{(\delta a)} - A \sin \alpha \quad (9.25)$$

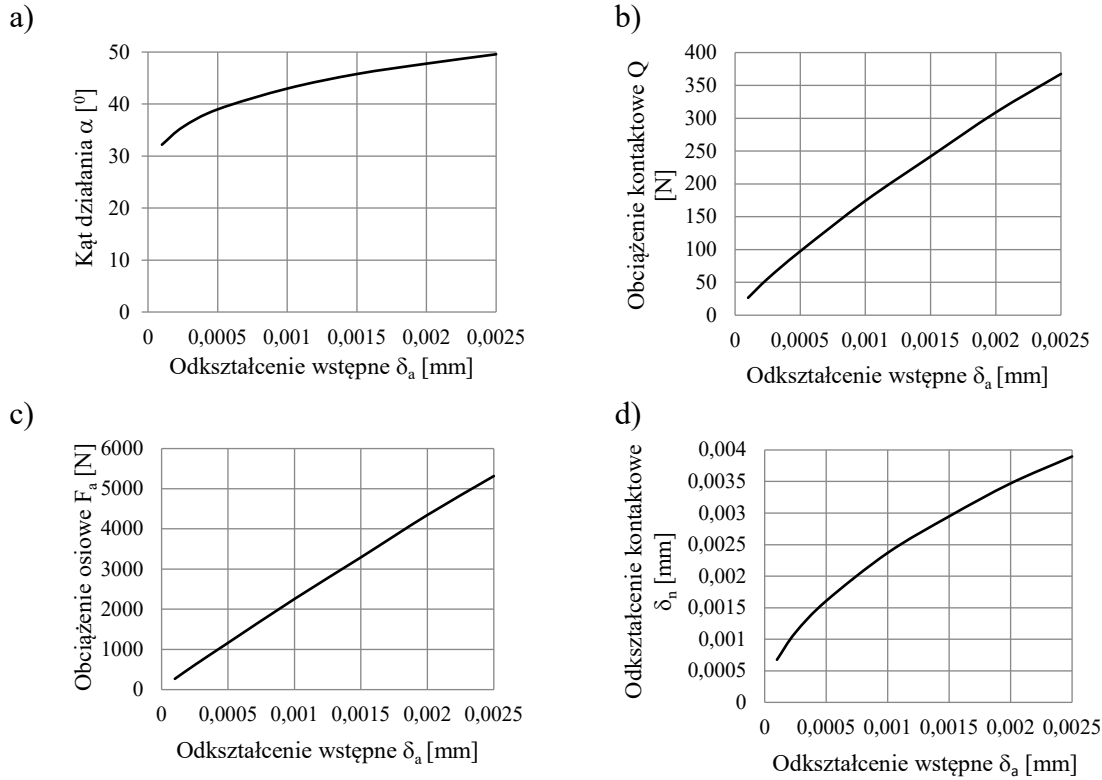
Ponadto z twierdzenia sinusów możemy napisać:

$$\delta_n = A \left( \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_{(\delta a)}} - 1 \right) \quad (9.26)$$

Wstawiając  $\delta_n$  z (9.26) do (9.25), otrzymamy:

$$\delta_a = A \frac{\sin(\alpha_{(\delta_a)} - \alpha)}{\cos \alpha_{(\delta_a)}} \quad (9.27)$$

Rozwiązując tożsamość (9.27), możemy wyznaczyć kąt działania  $\alpha_{(\delta_a)}$ .



Rys. 9.8. Przykładowy wpływ wstępnego odkształcenia  $\delta_a$  na: kąt działania  $\alpha$  (a), siłę kontaktową  $Q$  (b), siłę osiową  $F_a$  (c), odkształcenie kontaktowe  $\delta_n$  (d)

Fig. 9.8. An example of the influence of the initial deformation  $\delta_a$  on: contact angle  $\alpha$  (a), contact force  $Q$  (b), axial force  $F_a$  (c), contact deformation  $\delta_n$  (d)

Dla wyznaczenia siły kontaktowej  $Q_{(\delta_a)}$  na podstawie modeli Jonesa (9.6) można skorzystać z definicji sztywności zastępczej  $K_n$  (9.18), mianowicie:

$$Q_{(\delta_a)} = K_n \delta_n^{1.5} \quad (9.28)$$

Odształcenia kontaktowe  $\delta_{(\delta_a)i}$  oraz  $\delta_{(\delta_a)o}$  można wyznaczyć z modelu Jonesa (9.6):

$$\delta_{(\delta_a)i} = \frac{Q_{(\delta_a)}}{K_i^{2/3}} \quad (9.29)$$

$$\delta_{(\delta_a)o} = \frac{Q_{(\delta_a)}}{K_o^{2/3}}$$

Siła osiowa  $F_a^*$ , jaka działa na pojedynczą kulkę i bieżnię z tytułu wstępnego odkształcenia, można wyznaczyć z zależności (9.30).

$$F_a^* = Q_{(\delta_a)} \sin \alpha_{(\delta_a)} \quad (9.30)$$

Można także ocenić sztywność kontaktową osiową  $K_a$  z następującej zależności:

$$K_a = \frac{F_a^*}{\delta_a} \quad (9.31)$$

Na rys. 9.8 przedstawiono przykładowy wpływ wstępnego odkształcenia  $\delta_a$  na kąt działania  $\alpha$ , siłę kontaktową  $Q$ , siłę osiową  $F_a$  oraz odkształcenie kontaktowe  $\delta_n$  dla testowego łożyska tocznego skośnego typu FAG B7013-E-T-P4.

### 9.1.3. Stan obciążenia i odkształcenia kulki w warunkach występowania sił odśrodkowych i sprężystego napięcia wstępnego $F_a$

Model łożyska skośnego obciążonego siłami odśrodkowymi  $F_c$  od kulek wykonujących ruch obiegowy i siłą sprężystego napięcia wstępnego  $F_a$  należy do najczęściej spotykanych w literaturze. W modelu tym pominięto efekty żyroskopowe, co powoduje, że jest to tylko model uproszczony. Ponieważ efekty żyroskopowe są widoczne dopiero przy dużych i bardzo dużych prędkościach obrotowych łożysk, więc w wielu wypadkach taki uproszczony model daje zadowalające rezultaty. Jedną z jego znaczących zalet jest możliwość analitycznego rozwiązania zagadnienia, co istotnie ułatwia działania optymalizacyjne.

Stan obciążenia i odkształcenia w modelu łożyska obciążonego siłami odśrodkowymi  $F_c$  i siłami napięcia wstępnego  $F_a^*$  przedstawiono na rys. 9.9.

Warunki równowagi kulki i pierścieni pod działaniem sił  $F_c$  i  $F_a^*$  można zapisać następująco:

$$-Q_{(Fc)o} \cos \alpha_{(Fc)o} + Q_{(Fc)i} \cos \alpha_{(Fc)i} + F_c = 0 \quad (9.32)$$

$$Q_{(Fc)o} \sin \alpha_{(Fc)o} - Q_{(Fc)i} \sin \alpha_{(Fc)i} = 0$$

$$Q_{(Fc)i} \sin \alpha_{(Fc)i} - F_a^* = 0 \quad (9.33)$$

$$-Q_{(Fc)o} \sin \alpha_{(Fc)o} + F_a^* = 0$$

Z zależności (9.32) i (9.33) po przekształceniach można uzyskać następująca relację:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_{(Fc)o}} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_{(Fc)i}} = \frac{F_c}{F_a^*} \quad (9.34)$$

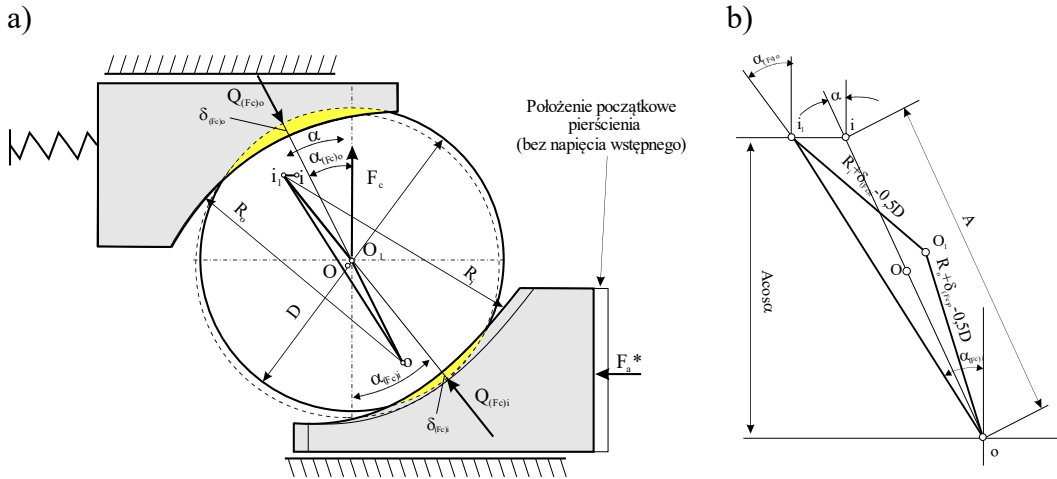
która wiąże ze sobą kąty działania  $\alpha_{(Fc)o}$  i  $\alpha_{(Fc)i}$ . Wówczas dla wyznaczenia kątów działania potrzebne jest jeszcze jedno równanie, w tym wypadku geometryczne. Posługując się rys. 9.9b, możemy dla trójkąta  $oO_1i_1$  sformułować zależność geometryczną (9.35).

$$A \cos \alpha = (R_i + \delta_{(Fc)i} - 0,5D) \cos \alpha_{(Fc)i} + (R_o + \delta_{(Fc)o} - 0,5D) \cos \alpha_{(Fc)o} \quad (9.35)$$



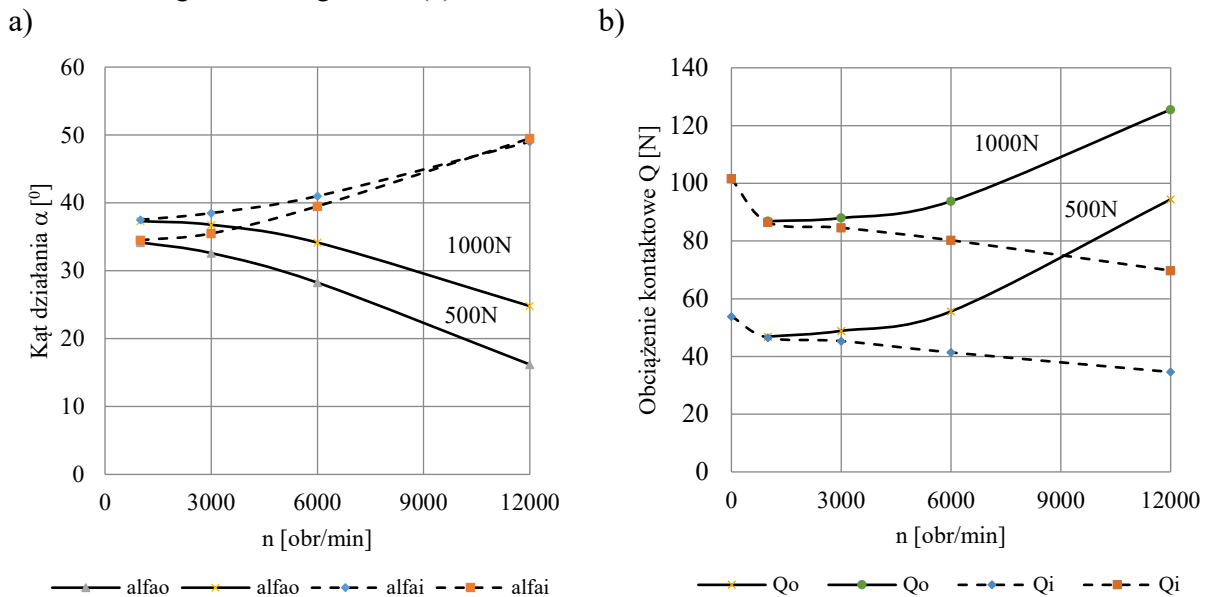
Wykorzystując model Jonesa (9.6) oraz równania (9.33), otrzymamy:

$$A \cos \alpha = \left( R_i + \left( \frac{F_a^*}{\sin \alpha_{(F_c)i} K_i} \right)^{2/3} - 0,5D \right) \cos \alpha_{(F_c)i} + \left( R_o + \left( \frac{F_a^*}{\sin \alpha_{(F_c)o} K_o} \right)^{2/3} - 0,5D \right) \cos \alpha_{(F_c)o} \quad (9.36)$$



Rys. 9.9 Stan obciążenia i odkształcenia łożyska skośnego w warunkach występowania siły odśrodkowej  $F_c$  i siły napięcia wstępnego  $F_a^*$  (a), geometryczne relacje w modelu (b)

Fig. 9.9. The state of load and deformation of an angular contact bearing under the conditions of the presence of the centrifugal force  $F_c$  and the preload force  $F_a^*$  (a), geometric relationships in angular bearing model (b)



Rys. 9.10. Przykładowy wpływ prędkości obrotowej na: kąty działania (a), siły kontaktowe (b) dla testowego łożyska typu FAG B7013-E; 1000 N, 500 N – napięcia wstępne

Fig. 9.10. An example of the influence of the rotational speed on: contact angles (a), contact forces (b), for a testing bearing type FAG B7013-E; 1000 N, 500 N – preloads

Zależności (9.36) i (9.34) pozwalają metodą iteracyjną wyznaczyć kąty działania  $\alpha_{(F_c)o}$  i  $\alpha_{(F_c)i}$ . Znając te kąty, możemy, korzystając z równań (9.33), obliczyć siły kontaktowe  $Q_{(F_c)i}$  oraz  $Q_{(F_c)o}$ .

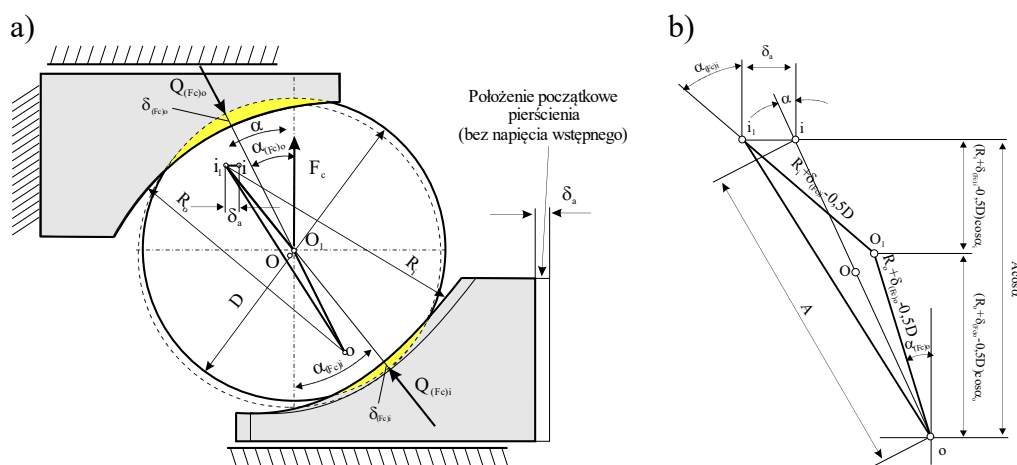
Na rys. 9.10 przedstawiono przykładowy wpływ prędkości obrotowej na kąty działania i siły kontaktowe dla testowego łożyska typu FAG B7013-E-T-P4 dla dwóch wartości napięcia wstępnego: 1000 N i 500 N.

Analiza przykładowych wyników badań wskazuje, że wraz ze wzrostem prędkości łożyska kąt działania  $\alpha_i$  rośnie, a kąt działania  $\alpha_o$  maleje, natomiast siła kontaktowa  $Q_i$  nieznacznie maleje, a siła kontaktowa  $Q_o$  znacząco rośnie. Istotny jest również wpływ napięcia wstępnego  $F_a$ , którego wzrost wywołuje wzrost kątów działania i sił kontaktowych.

#### 9.1.4. Stan obciążenia i odkształcenia kulki w warunkach występowania sił odśrodkowych $F_c$ i wstępnego odkształcenia $\delta_a$

Model łożyska skośnego obciążonego siłami odśrodkowymi  $F_c$  od kulek wykonujących ruch obiegowy i wstępnego odkształcenia  $\delta_a$  należy do rzadko spotykanych w literaturze. Do nielicznych doniesień literaturowych należy publikacja Liao [39].

Głównym powodem tego stanu rzeczy są trudności w analitycznym rozwiązaniu zagadnienia.



Rys. 9.11. Stan obciążenia i odkształcenia łożyska skośnego w warunkach występowania siły odśrodkowej  $F_c$  i wstępnego odkształcenia  $\delta_a$  (a), geometryczne relacje w modelu łożyska (b)  
 Fig. 9.11. The state of load and deformation of an angular bearing under the conditions of the presence of the centrifugal force  $F_c$  and the predeformation  $\delta_a$  (a), geometric relationships in angular bearing model (b)

Na rys. 9.11 przedstawiono stan obciążenia i odkształcenia łożyska skośnego w warunkach występowania siły odśrodkowej  $F_c$  i wstępnego odkształcenia  $\delta_a$ .

Warunki równowagi kulki pod działaniem sił  $F_c$  można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} -Q_{(Fc)o} \cos \alpha_{(Fc)o} + Q_{(Fc)i} \cos \alpha_{(Fc)i} + F_c &= 0 \\ Q_{(Fc)o} \sin \alpha_{(Fc)o} - Q_{(Fc)i} \sin \alpha_{(Fc)i} &= 0 \end{aligned} \quad (9.37)$$

Z równań (9.37) można wykazać następującą prawidłowość:

$$Q_{(Fc)i} = \frac{1}{\cos \alpha_{(Fc)i} \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha_{(Fc)i}}{\operatorname{tg} \alpha_{(Fc)o}} - 1 \right)} F_c \quad Q_{(Fc)o} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{(Fc)i}}{\sin \alpha_{(Fc)o} \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha_{(Fc)i}}{\operatorname{tg} \alpha_{(Fc)o}} - 1 \right)} F_c \quad (9.38)$$

Dla trójkąta  $oO_i i_l$  (rys. 9.11b) możemy sformułować następującą zależność geometryczną:

$$A \cos \alpha = (R_i + \delta_{(Fc)i} - 0,5D) \cos \alpha_{(Fc)i} + (R_o + \delta_{(Fc)o} - 0,5D) \cos \alpha_{(Fc)o} \quad (9.39)$$

Wykorzystując model Jonesa (9.6) oraz zależności (9.38), możemy wyrazić odkształcenia kontaktowe  $\delta_{(Fc)i}$  oraz  $\delta_{(Fc)o}$  w funkcji kątów działania  $\alpha_{(Fc)i}$  oraz  $\alpha_{(Fc)o}$ , a po wstawieniu do zależności (9.39) otrzymamy tożsamość o dwóch niewiadomych, tj.  $\alpha_{(Fc)i}$  oraz  $\alpha_{(Fc)o}$ . Stąd analityczne rozwiązanie tego zagadnienia nie jest możliwe.

W [39] przedstawiono interesującą propozycję przybliżonego, ale analitycznego rozwiązania tego zagadnienia. Propozycja ta sprowadza się do wyrażania kątów działania w następującej formie:

$$\begin{aligned} \alpha_{(Fc)i} &= \alpha_{(\delta_a)} + \Delta \alpha_i \\ \alpha_{(Fc)o} &= \alpha_{(\delta_a)} - \Delta \alpha_o \end{aligned} \quad (9.40)$$

gdzie:  $\alpha_{(\delta_a)}$  – kąt działania odpowiadający wstępnemu odkształceniu  $\delta_a$  (rys. 9.8a),  
 $\Delta \alpha_i, \Delta \alpha_o$  – przyrosty kątów działania.

Formuła (9.40) staje się przydatna wtedy, kiedy zachodzi tożsamość:

$$\Delta \alpha_i = \Delta \alpha_o = \Delta \alpha \quad (9.41)$$

co występuje, kiedy promienie krzywizny bieżni  $R_i$  oraz  $R_o$  są sobie równe. Wówczas niewiadomą w równaniu (9.39)) pozostaje tylko  $\Delta \alpha$

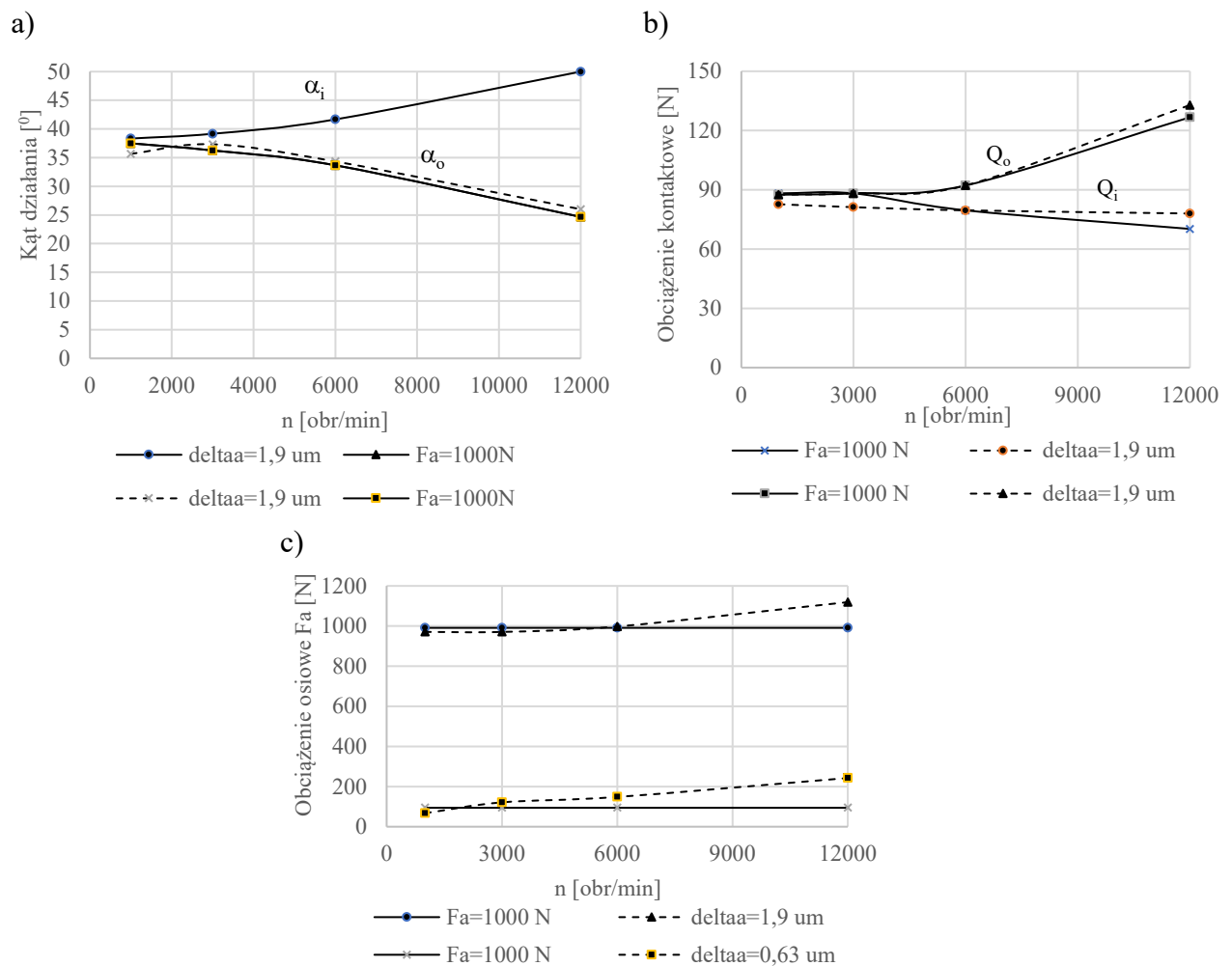
$$A \cos \alpha = (R_i + \delta_{(Fc)i} - 0,5D) \cos(\alpha + \Delta \alpha) + (R_o + \delta_{(Fc)o} - 0,5D) \cos(\alpha - \Delta \alpha) \quad (9.42)$$

i po rozwiązaniu równania (9.42) możemy wyznaczyć kąty  $\alpha_{(Fc)i}$  oraz  $\alpha_{(Fc)o}$ , a po wstawieniu ich do (9.38) – wyznaczyć obciążenia  $Q_{(Fc)o}$  i  $Q_{(Fc)i}$ .

Takie uproszczenie wprowadza jednak znaczne błędy, zwłaszcza kiedy kąty działania  $\alpha_{(Fc)i}$  oraz  $\alpha_{(Fc)o}$  znacznie różnią się od  $\alpha_{(\delta_a)}$ .

Na rys. 9.12 przedstawiono przykładowe rozwiązania zagadnienia kontaktowego w warunkach występowania sił odśrodkowych  $F_c$  i wstępnego odkształcenia  $\delta_a$  przez porównanie kątów działania i obciążeń kontaktowych z wynikami odpowiadającymi wstępnemu napięciu  $F_a$  (rys. 9.10). Przyjęto, że dla zerowej prędkości obrotowej

( $F_c = 0$ ) kąty działania i siły kontaktowe są takie jak dla stanu odpowiadającego odkształceniu wstępnemu  $\delta_a$  (rozdz. 9.1.2), natomiast odkształcenie kontaktowe  $\delta_a$  dobrano w taki sposób, aby napięcie wstępne wynosiło 1000 N ( $\delta_a = 1,9 \mu\text{m}$ ).



Rys. 9.12. Przykładowe porównanie rozwiązania zagadnienia kontaktowego w warunkach sił odśrodkowych  $F_c$ , wstępnego odkształcenia  $\delta_a$  i wstępnego napięcia  $F_a$ : a) kąty działania, b) obciążenia kontaktowe, c) obciążenie osiowe  $F_a$

Fig. 9.12. An example comparison of the solution of the contact problem under the conditions of centrifugal forces  $F_c$ , initial deformation  $\delta_a$  and the preload:  $F_a$ : a) contact angles, b) contact load, c) axial load  $F_a$

Z porównania wyników badań na rys. 9.12c można stwierdzić, że zarówno dla kątów działania, jak i obciążeń kontaktowych nie obserwuje się znaczących różnic, natomiast w przypadku obciążenia osiowego  $F_a$  następuje jego wzrost wraz ze wzrostem prędkości. To jest zasadnicza różnica w stosunku do sprężystego napięcia wstępnego, ponieważ wówczas obciążenie osiowe pozostaje niezmiennie.

### 9.1.5. Stan obciążenia i odkształcenia łożyska w warunkach występowania sił odśrodkowych $F_c$ , momentu żyroskopowego $M_g$ i napięcia wstępnego $F_a^*$

Jest to ogólny model łożyska tocznego skośnego, ponieważ uwzględnia obciążenia z tytułu sił odśrodkowych, momentu żyroskopowego i sprężystego napięcia wstępnego. Nie uwzględnia jedynie wpływu obciążeń zewnętrznych.

Stan obciążenia łożyska został przedstawiony na rys. 9.2a, natomiast równania równowagi sił działających na kulki i na pierścieniu łożyskowe ukazują zależności (9.43) i (9.44):

$$\begin{aligned} -Q_o \cos \alpha_o + Q_i \cos \alpha_i - F_{(g)o} \sin \alpha_o + F_{(g)i} \sin \alpha_i + F_c &= 0 \\ Q_o \sin \alpha_o - Q_i \sin \alpha_i - F_{(g)o} \cos \alpha_o + F_{(g)i} \cos \alpha_i &= 0 \end{aligned} \quad (9.43)$$

$$\begin{aligned} Q_i \sin \alpha_i - F_{(g)i} \cos \alpha_i - F_a^* &= 0 \\ -Q_o \sin \alpha_o + F_{(g)o} \cos \alpha_o + F_a^* &= 0 \end{aligned} \quad (9.44)$$

W równaniu (9.43) występują 4 niewiadome:  $Q_i$ ,  $Q_o$ ,  $\alpha_i$  oraz  $\alpha_o$ , a równania są tylko trzy (równania (9.44) są równoważne).

Ponieważ liczba niewiadomych jest o jeden większa od liczby równań, więc dla rozwiązania zagadnienia potrzebne jest jeszcze jedno równanie. Jest nim równanie geometryczne. Model geometryczny dla takiego łożyska przedstawia rys. 9.2b, natomiast równanie geometryczne dla takiego modelu pokazuje zależność (9.45).

$$A \cos \alpha = (R_i + \delta_i - 0,5D) \cos \alpha_o + (R_o + \delta_o - 0,5D) \cos \alpha_i \quad (9.45)$$

Rozwiązanie zagadnienia wymaga podjęcia decyzji odnośnie do podziału momentu żyroskopowego  $M_g$ . W (9.43) i (9.44) moment żyroskopowy został zastąpiony parą sił:  $F_{(g)i}$  i  $F_{(g)o}$ . W mechanice na ogół przyjmuje się, że są one sobie równe. W odniesieniu do zagadnienia kontaktowego na ogół tak nie jest. Na podstawie badań eksperymentalnych Jonesa i Harrisa przyjmuje się, że obie siły żyroskopowe się różnią, spełniając tożsamość:

$$\begin{aligned} M_g &= \lambda_i F_{(g)i} D + \lambda_o F_{(g)o} D \\ \lambda_i + \lambda_o &= 2 \end{aligned} \quad (9.46)$$

gdzie  $\lambda_i$ ,  $\lambda_o$  – współczynniki rozdziału momentu żyroskopowego.

W literaturze spotyka się tzw. hipotezy sterowania bieżniami, które różnią się współczynnikami  $\lambda_i$  i  $\lambda_o$ . Najpopularniejsza to hipoteza sterowania bieżnią zewnętrzną (OCR), dla której  $\lambda_i = 0$ , a  $\lambda_o = 2$ . Oznacza to, że cały moment żyroskopowy występuje w obszarze kontaktu kulki z bieżnią zewnętrzną. Tę hipotezę potwierdzają badania eksperymentalne Jonesa i Harrisa.

W dalszym ciągu ta hipoteza będzie podstawą rozwiązania równań (9.43), (9.44) i (9.45).

Dla hipotezy OCR z równań (9.44) uzyskujemy:

$$Q_o = \frac{F_{(g)o}}{\operatorname{tg}\alpha_o} + \frac{F_a^*}{\sin\alpha_o} = \frac{2M_g}{D\operatorname{tg}\alpha_o} + \frac{F_a^*}{\sin\alpha_o} \quad (9.47)$$

$$Q_i = \frac{F_a^*}{\sin\alpha_i}$$

Na podstawie zależności (7.1) i (7.4) możemy napisać:

$$\frac{M_g}{F_c} = \frac{1}{5} \frac{D^2}{d_m} \frac{\omega_B}{\omega_m} \sin\beta \quad (9.48)$$

Z kolei uwzględniając zależności (5.20) i (5.21) na prędkości  $\omega_B$  i  $\omega_m$  w równaniu (9.48) i biorąc pod uwagę fakt, że  $\omega_B/\omega_m = \text{const}$  (rys. 6.5b) oraz że kąt  $\beta$  jest liniową funkcją kąta działania  $\alpha_o$  (rys. 6.1), a także informacje zawarte w [4], zależność (9.48) można przedstawić następująco:

$$\frac{M_g}{F_c} = \frac{1}{5} D \sin\alpha_o \quad (9.49)$$

Wstawiając (9.49) do (9.47), otrzymamy:

$$Q_o = \frac{2F_c \cos\alpha_o}{5} + \frac{F_a^*}{\sin\alpha_o} \quad (9.50)$$

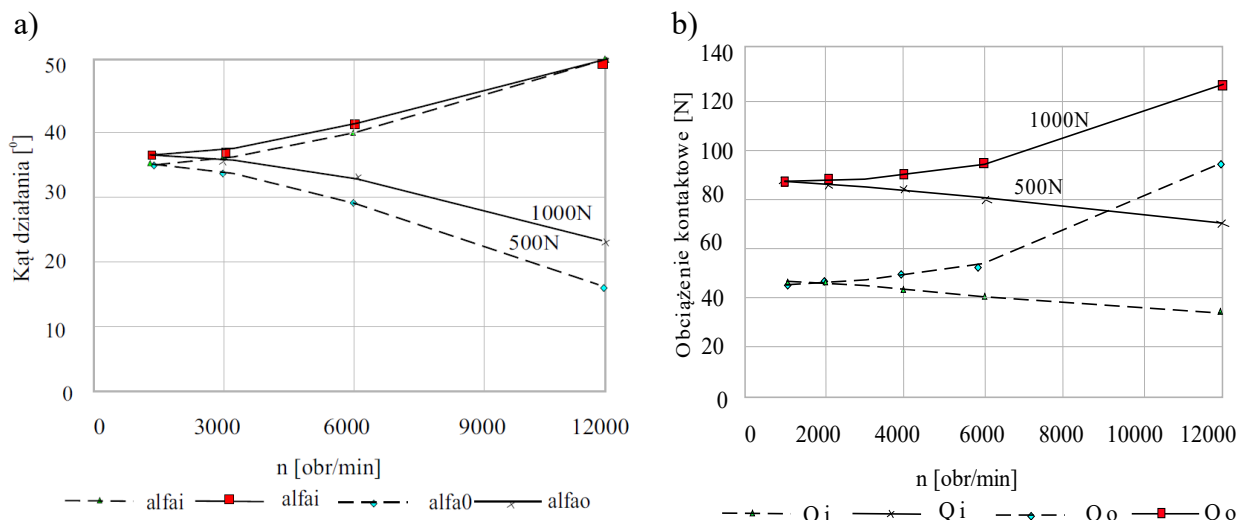
$$Q_i = \frac{F_a^*}{\sin\alpha_i}$$

Wstawiając (9.50) do pierwszego równania (9.43), po przekształceniach otrzymamy:

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_o} - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_i} = \frac{7}{5} \frac{F_c}{F_a^*} \quad (9.51)$$

Jeżeli do zależności (9.45) wstawić w miejsce  $\delta_i$  oraz  $\delta_o$  zależność Jonesa (9.6), to razem z zależnościami (9.43), (9.44), (9.50), (9.51) otrzymujemy układ równań, którego rozwiązanie pozwala wyznaczyć kąty działania  $\alpha_i$  oraz  $\alpha_o$  w trybie iteracyjnym.

Na rys. 9.13 przedstawiono przykładowe rozwiązanie zagadnienia kontaktowego w warunkach występowania sił odśrodkowych  $F_c$ , momentu żyroskopowego  $M_g$  i wstępnego napięcia wstępnego  $F_a$ , tj. kąty działania i siły kontaktowe dla testowego łożyska skośnego typu FAG B7013-E-T-P4.



Rys. 9.13. Przykładowe rozwiązania zagadnienia kontaktowego w warunkach sił odśrodkowych  $F_c$ , momentu żyroskopowego  $M_g$  i wstępnego napięcia  $F_a$ : a) kąty działania, b) siły kontaktowe

Fig. 9.13. Examples of solutions to the contact problem under the conditions of centrifugal forces  $F_c$ , gyroscopic moment  $M_g$  and pre-load  $F_a$ : a) contact angles, b) contact forces

Przykładowe wyniki dotyczą przypadku rozkładu sił żyroskopowych  $F_{(g)i}$  i  $F_{(g)o}$ , odpowiadającego hipotezie kontroli bieżni zewnętrznej (OCR). Przykładowe wyniki na rys. 9.13 są podobne do wyników na rys. 9.10, dla których nie uwzględniono efektów żyroskopowych. Oznacza to, że w badanym zakresie prędkości obrotowych efekty żyroskopowe są stosunkowo niewielkie.

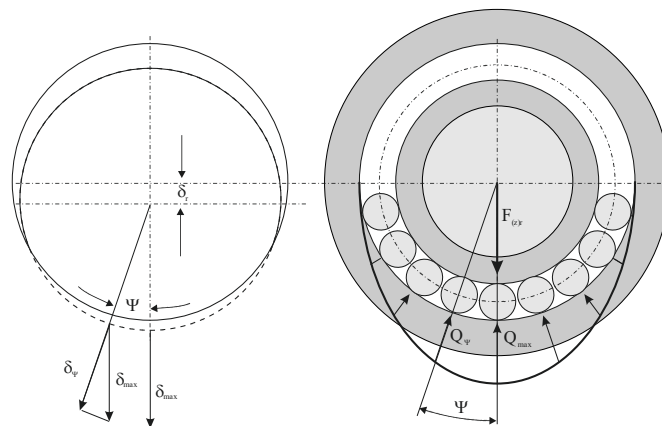
### 9.1.6. Stan obciążeń i odkształceń w łożysku tocznym skośnym w warunkach obciążenia zewnętrznego

Analiza oporów ruchu łożyska skośnego wymaga uwzględnienia oporów wynikających z obciążenia zewnętrznego. W najogólniejszym przypadku obciążenie zewnętrzne zawiera składową osiową i promieniową. W przypadku składowej osiowej obciążenia zewnętrznego do wyznaczenia oporów ruchu z tego tytułu można zastosować metodykę przedstawioną w p. 9.1, tj. dotyczącą wpływu sprężystego napięcia wstępnego  $F_a$ . Do obliczeń sił kontaktowych i kątów działania należy w miejsce napięcia wstępnego  $F_a$  wstawić sumę  $F_a + F_{(z)a}$ , gdzie  $F_{(z)a}$  jest składową osiową obciążenia zewnętrznego, działającą na łożysko. W świetle wniosków płynących z p. 9.1.1 składowa osiowa  $F_{(z)a}$  spowoduje zmianę kąta działania i siły kontaktowej, ale  $\alpha_{(Fa+F(z)a)i} = \alpha_{(Fa+F(z)a)o}$  oraz  $Q_{(Fa+F(z))i} = Q_{(Fa+F(z))o}$ , gdzie  $\alpha_{(Fa+F(z)a)i}$ ,  $\alpha_{(Fa+F(z)a)o}$  to kąty działania spowodowane obciążeniem  $F_a + F_{(z)a}$ , a  $Q_{(Fa+F(z))i}$ ,  $Q_{(Fa+F(z))o}$  to siły kontaktowe spowodowane obciążeniem  $F_a + F_{(z)a}$ . Na podstawie wniosków

płynących z p. 9.1.1 można spodziewać się wzrostu sił kontaktowych proporcjonalnie do składowej osiowej obciążenia zewnętrznego  $F_{(z)a}$ .

Z kolei uwzględnienie składowej promieniowej obciążenia zewnętrznego  $F_{(z)r}$  wymaga oddzielnej analizy, ponieważ w przeciwieństwie do wszystkich wcześniej przeprowadzonych analiz elementy toczne są obciążone niejednorodnie, tzn. każdy z nich jest obciążony inaczej. Dlatego pierwszym krokiem takiej analizy jest zidentyfikowanie tej części obciążenia promieniowego  $F_{(z)r}$ , która przypada na pojedynczy element toczny  $Q_{\psi}$  (rys. 9.14).

Punktem wyjścia identyfikacji obciążenia  $Q_{\psi}$  jest przyjęcie modelu rozkładu obciążenia promieniowego na poszczególne elementy toczne. Na ogół na tym etapie analizy przyjmuje się, że same pierścienie łożyskowe pozostają sztywne, nieodkształcone, a kulki i bieżnie podlegają odkształceniom kontaktowym. Przyjmuje się, że w wyniku obciążenia promieniowego  $F_{(z)r}$  nastąpiło promieniowe przemieszczenie  $\delta_r$  pierścienia wewnętrznego (przyjęto, że obciążenie zewnętrzne promieniowe  $F_{(z)r}$  działa na pierścień wewnętrzny) względem pierścienia zewnętrznego w wyniku odkształceń kontaktowych na styku kulki z bieżniami.



Rys. 9.14. Stan obciążenia elementów tocznych w warunkach zewnętrznego obciążenia promieniowego  $F_{(z)r}$   
 Fig. 9.14. The state of load of the rolling elements under conditions of external radial load  $F_{(z)r}$

Przyjmujemy, że element toczny najbardziej obciążony  $Q_{max}$  ( $\Psi=0$ ) odkształca się o wielkość  $\delta_{max}$ , a wszystkie pozostałe elementy toczne przemieszczą się o wielkość  $\delta_{\psi}$ , która spełnia warunek:

$$\delta_{max} \cos \Psi = \delta_{\psi} \quad (9.52)$$

gdzie:

$\delta_{max}$  – przemieszczenie promieniowe elementu tocznego najbardziej obciążonego,

$\delta_{\psi}$  – przemieszczenie promieniowe elementu przesuniętego o kąt  $\Psi$ .



Z modelu odkształceń kontaktowych Jonesa (9.6) możemy określić związek pomiędzy odkształceniem promieniowym dowolnego elementu tocznego  $\delta_\Psi$  i siłą kontaktową  $Q_\Psi$ :

$$Q_\Psi = K_n \delta_\Psi^{3/2} \quad (9.53)$$

gdzie  $Q_\Psi$  – siła kontaktowa działająca na element toczny przesunięty o kąt  $\Psi$ .

Jeżeli napisać takie samo równanie (9.53) dla elementu tocznego, dla którego  $\Psi = 0$ , to w rezultacie otrzymamy zależność wiążącą siły  $Q_\Psi$  z siłą  $Q_{max}$ ,

$$Q_\Psi = Q_{max} \left( \frac{\delta_\Psi}{\delta_{max}} \right)^{3/2} \quad (9.54)$$

Teraz można już napisać równanie równowagi dla łożyska obciążonego siłą promieniową  $F_{(z)r}$  i siłami kontaktowymi  $Q_\Psi$ , mianowicie:

$$F_{(z)r} = Q_{max} + \frac{Q_{max}}{\delta_{max}^{3/2}} \sum_{i=1}^{i=\frac{Z-1}{2}} (\delta_{\Psi_i}^{3/2} \cos \Psi_i) = Q_{max} \left( 1 + \frac{\sum_{i=1}^{i=\frac{Z-1}{2}} (\delta_{\Psi_i}^{3/2} \cos \Psi_i)}{\delta_{max}} \right) \quad (9.55)$$

gdzie  $Z$  – liczba elementów tocznych.

W [20] podano numeryczne wyniki symulacji obliczeń czynnika w (9.55) zawartego w nawiasie, w funkcji ilorazu  $P_d/\delta_r$ , gdzie  $P_d$  jest nominalnym luzem łożyska. Można więc metodą prób i błędów znaleźć na drodze numerycznej wartość odkształcenia promieniowego  $\delta_r$ , która odpowiada wartości  $\delta_{max}$ , a następnie wyznaczyć  $Q_{max}$ .

W [20] napisano, że dla nominalnego luzu typowego łożyska skośnego można przyjąć następującą przybliżoną zależność na  $Q_{max}$ :

$$Q_{max} = \frac{5F_r}{Z \cos \alpha} \quad (9.56)$$

Wówczas, wstawiając do (9.54) zależność (9.56), otrzymamy związek pozwalający obliczyć siły kontaktowe  $Q_\Psi$ , mianowicie:

$$Q_\Psi = \frac{5F_r (\cos \Psi)^{3/2}}{Z \cos \alpha} \quad (9.57)$$

Do zależności (9.57) należy wstawić wartość kąta działania  $\alpha$  odpowiadającą stanowi obciążenia, który – jak wykazano we wcześniejszych rozdziałach – zależy od aktualnej prędkości obrotowej łożyska, jego napięcia wstępnego, a także składowej osiowej obciążenia zewnętrznego  $F_{(z)a}$ .

W tabeli 9.2 przedstawiono przykład obliczeń sił normalnych działających na poszczególne elementy toczne badanego łożyska FAG B7013-E-T-P4 ( $Z=19$ ,  $\alpha=25^\circ$ ) w formie %  $F_r$ .

Tabela 9.2

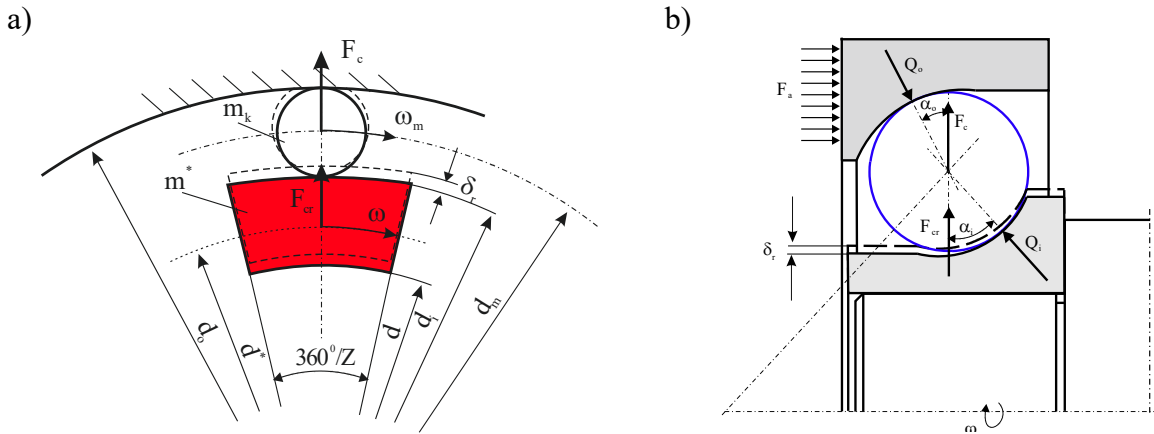
Przykładowy rozkład sił kontaktowych  $\Theta_\psi/F_r$  w łożysku testowym typu FAG B7013-E-T-P4 obciążonym siłą promieniową  $F_r$

$\Psi [^\circ]$	0	18,95	37,89	56,84	75,79
$\Theta_\psi/F_r [\%]$	29,0	26,7	20,4	11,76	3,54

## 9.2. Rozszerzony model kontaktowy łożyska kulkowego skośnego

Modele kontaktowe łożyska tocznego skośnego przedstawione w rozdz. 9.1 są podobne do większości modeli spotykanych w literaturze. Podobieństwo wynika z faktu, że obciążenia dynamiczne powstające wewnątrz łożyska biorą się ze zjawisk związanych z ruchem obrotowym i obiegowym kulek łożyskowych takich jak siły odśrodkowe i zjawiska żyroskopowe oraz ze wstępnego napięcia łożysk skośnych. Wspólną cechą wszystkich spotykanych w literaturze modeli kontaktowych łożyska skośnego jest przyjęcie założenia o nieodkształcalności wszystkich elementów łożyska z wyjątkiem kulki lub wałeczka. Tylko odkształcenia kontaktowe kulki lub wałeczka są brane pod uwagę przy obliczaniu kątów działania czy obciążeń kontaktowych. Autorzy stoją jednak na stanowisku, że modele te nie oddają dostatecznie wiernie tego, co się dzieje w łożysku, z punktu widzenia wewnętrznych oporów ruchu. W łożysku tocznym, oprócz kulek, ruch obrotowy wykonuje też pierścień łożyskowy, najczęściej wewnętrzny. W takim więc przypadku wystąpią oddziaływania dynamiczne w postaci siły odśrodkowej, generowane przez obracający się pierścień łożyskowy. Zdaniem autorów siła odśrodkowa od wirującego pierścienia będzie istotnie wpływała na oddziaływania kontaktowe pomiędzy kulkami a bieżniami, a tym samym i na opory ruchu.

Dla zobrazowania potencjalnych skutków pomijania wpływu siły odśrodkowej od obracającego się pierścienia wewnętrznego i jego odkształcenia na zjawiska kontaktowe przedstawiony zostanie prosty model wirującego pierścienia, którego wymiary geometryczne odpowiadają wymiarom testowego łożyska tocznego FAG B7013, będącego przedmiotem analizy (rys. 9.15).



Rys. 9.15. Model wirującego wewnętrznego pierścienia łożyskowego:  $F_c$ ,  $F_a$ ,  $F_{cr}$  – siły: odśrodkowa od wirującej kulki, napięcia wstępnego i od wirującego pierścienia łożyskowego,  $\delta_r$  – odkształcenie promieniowe wirującego pierścienia łożyskowego,  $m_k$ ,  $m^*$  – masa kulki i części pierścienia przypadającego na jedną kulkę,  $\omega$ ,  $\omega_m$  – prędkości kątowe łożyska (pierścienia wewnętrznego) i kulki w ruchu obiegowym,  $Z$  – liczba kulek

Fig. 9.15. Model of the rotating inner ring:  $F_c$ ,  $F_a$ ,  $F_{cr}$  – forces: centrifugal from the rotating ball, preload and from the rotating bearing ring,  $\delta_r$  – radial deformation of the rotating bearing ring,  $m_k$ ,  $m^*$  – mass of the ball and part of the ring per one ball,  $\omega$ ,  $\omega_m$  – angular velocities of the bearing (inner ring) and ball in circular motion,  $Z$  – number of balls

W wyniku występowania siły odśrodkowej  $F_{cr}$  działającej na obracający się pierścień łożyskowy ulegnie on rozszerzeniu, efektem czego będzie przemieszczenie promieniowe pierścienia o  $\delta_r$ . Wielkość siły odśrodkowej  $F_{cr}$  oraz odkształcenie  $\delta_r$  można wyznaczyć z elementarnych wzorów. W tabeli 9.3 przedstawiono porównanie sił odśrodkowych  $F_c$  i  $F_{cr}$  dla testowego łożyska FAG B7013 dla dwóch prędkości obrotowych: 6000 i 12 000 obr/min, oraz przemieszczenie promieniowe  $\delta_r$  dla samego pierścienia.

Tabela 9.3

Siły odśrodkowe  $F_c$  i  $F_{cr}$  oraz odkształcenie promieniowe  $\delta_r$  pierścienia łożyskowego dla dwóch wartości prędkości obrotowej

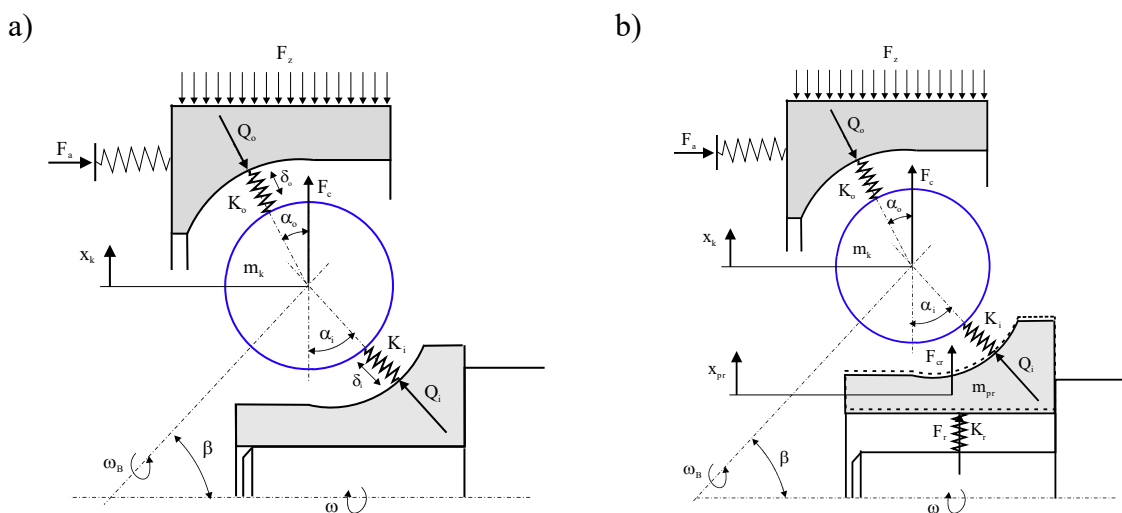
	n = 12000 obr/min	n = 6000 obr/min
$F_{cr}$	425,4 N	106,4 N
$\delta_r$	2,46 $\mu\text{m}$	0,615 $\mu\text{m}$
$F_c$	364,6 N	91,2 N

Nawet pobieżna analiza danych zawartych w tabeli 9.3 pokazuje, że wpływ siły odśrodkowej od wirującego pierścienia na zjawiska kontaktowe będzie znaczny, jako że ta siła jest rzędu siły odśrodkowej od wirującej kulki. Ponadto odkształcenia promieniowe samego pierścienia są rzędu odkształceń kontaktowych, jakie występują w strefach kontaktu kulki z bieżniami.

Wydaje się, że pominięcie wpływu siły odśrodkowej od wirującego pierścienia na zjawiska kontaktowe przyczyni się do błędu w oszacowaniu kątów działania i obciążeń kontaktowych.

W literaturze można spotkać niewielką liczbę publikacji, które to zagadnienie ujmują w analizach kontaktowych, ale sposób ujęcia budzi zastrzeżenia. Do tych nielicznych wyjątków należy [59], gdzie uwzględniono przemieszczenia promieniowe pierścienia wewnętrznego łożyska. Wątpliwości budzi sposób uwzględnienia tego przemieszczenia, ponieważ pierścień łożyskowy został zamodelowany jako swobodnie odkształcalny pod działaniem siły odśrodkowej.

Kosmol [30] wprowadził pojęcie modelu rozszerzonego dla opisu zjawisk kontaktowych w łożysku, w modelu którego uwzględniono występowanie sił dynamicznych od wirującego pierścienia wewnętrznego. Na rys. 9.16 przedstawiono modele fenomenologiczne łożyska tocznego skośnego: klasyczny i rozszerzony.



Rys. 9.16. Model fenomenologiczny łożyska tocznego skośnego: a) klasyczny, b) rozszerzony  
Fig. 9.16. Phenomenological model of an angular contact bearing: a) classic, b) extended

Model rozszerzony (rys. 9.16b) zawiera te same cechy, które ma model klasyczny (rys. 9.16a), tj. sprężyste elementy kontaktowe  $K_i$ ,  $K_o$ , odkształcenia kontaktowe  $\delta_i$ ,  $\delta_o$ , kąty działania  $\alpha_i$ ,  $\alpha_o$ , siły kontaktowe  $Q_i$ ,  $Q_o$ , prędkości kątowe  $\omega$ ,  $\omega_B$ , natomiast różni się od niego modelem wirującego pierścienia (w tym przykładzie wewnętrznego), który reprezentowany jest przez liniowy element sprężysty o sprężystości  $K_r$  i masie  $m_{pr}$ . Współczynnik  $K_r$  można wyznaczyć na podstawie elementarnych wzorów z teorii sprężystości, tzn. na podstawie cech geometrycznych pierścienia łożyskowego, modułu Younga  $E$  i współczynnika Poissona  $\nu$ . Element sprężysty umieszczony został pomiędzy pierścieniem wewnętrznym a powierzchnią czopa wałka. Wirujący pierścień generuje siłę odśrodkową  $F_{cr}$ .

Stan obciążenia i odkształcenia łożyska dla modelu rozszerzonego przedstawia rys. 9.17.

Równania równowagi sił działających na kulkę i bieżnię łożyska można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} -Q_o \cos \alpha_o + Q_i \cos \alpha_i + F_c &= 0 \\ Q_o \sin \alpha_o - Q_i \sin \alpha_i &= 0 \end{aligned} \quad (9.58)$$

$$\begin{aligned} Q_i \sin \alpha_i - F_a^* &= 0 \\ -Q_o \sin \alpha_o + F_a^* &= 0 \end{aligned} \quad (9.59)$$

W modelu rozszerzonym pojawia się jeszcze jedno równanie równowagi sił działających na pierścień wewnętrzny, mianowicie:

$$F_{cr} - F_r - Q_i \cos \alpha_i = 0 \quad (9.60)$$

Wiąże ono siłę odśrodkową od wirującego pierścienia łożyskowego  $F_{cr}$  z siłą sprężystości  $F_r$  i z siłą kontaktową  $Q_i$ .

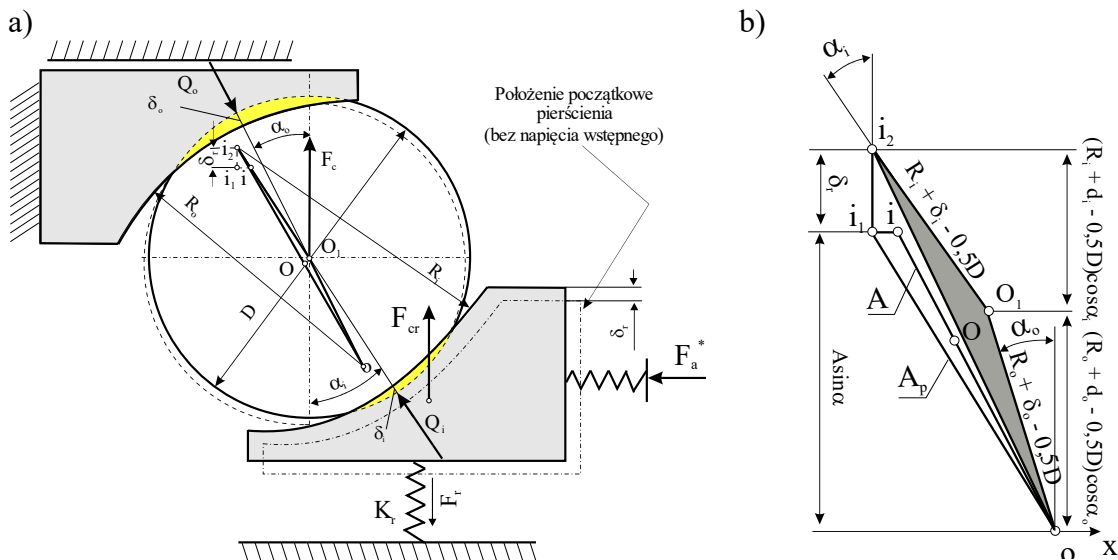
Przyjęto, że pierścień łożyskowy jest liniowym elementem sprężystym, który można opisać równaniem:

$$F_r = K_r \delta_r \quad (9.61)$$

gdzie:  $\delta_r$  – odkształcenie sprężyste pierścienia łożyskowego,

$F_r$  – siła sprężystości,

$K_r$  – stała sprężystości.



Rys. 9.17. Stan obciążenia i odkształcenia dla modelu rozszerzonego dla sprężystego napięcia wstępnego  $F_a^*$ [30]

Fig. 9.17. The state of load and deformation for extended bearing model for preload  $F_a^*$ [30]

Przed rozwiązaniem układu równań należy sprawdzić warunek  $\delta_r > 0$ :

$$\delta_r > 0$$

$$\delta_r = \frac{F_{cr} - Q_i \cos \alpha_i}{K_r} = \frac{F_{cr} - \frac{F_a^*}{\operatorname{tg} \alpha_i}}{K_r} > 0 \quad (9.62)$$

Z matematycznego punktu widzenia odkształcenie sprężyste w zależności (9.62) może być zarówno dodatnie, jak i ujemne, ale z fizykalnego punktu widzenia odkształcenie to może być tylko dodatnie. Jeżeli jest mniejsze od zera, to równania (9.60) nie możemy wziąć do rozwiązania problemu sił kontaktowych i kątów działania. Wówczas model rozszerzony przyjmuje postać identyczną z modelem konwencjonalnym.

Ponieważ odkształcenie sprężyste  $\delta_r$  zależy od siły odśrodkowej  $F_{cr}$ , która z kolei zależy od prędkości obrotowej łożyska, więc istnieje taka prędkość łożyska  $n_{cr}$ , poniżej której odkształcenie sprężyste  $\delta_r$  jest ujemne, czyli poniżej prędkości  $n_{cr}$  model konwencjonalny i rozszerzony dają takie same rozwiązania. Efekt modelu rozszerzonego widoczny staje się dopiero dla prędkości przewyższających  $n_{cr}$ . Dla omawianego testowego łożyska FAG B7013 prędkość  $n_{cr} = 6000$  obr/min.

Ponieważ liczba niewiadomych  $\alpha_i$ ,  $\alpha_o$ ,  $F_i$ ,  $F_o$  i  $\delta_r$  (odkształcenie  $\delta_r$  jest dodatkową niewiadomą) jest większa od liczby równań (dwa równania (9.58) jedno równanie (9.59) i równanie (9.60)), więc do rozwiązania problemu potrzebne jest jeszcze jedno równanie. Będzie to równanie geometryczne, łączące odkształcenia kontaktowe i sprężyste.

Na rys. 9.17b przedstawiony jest model geometryczny, na podstawie którego można sformułować równanie geometryczne, mianowicie:

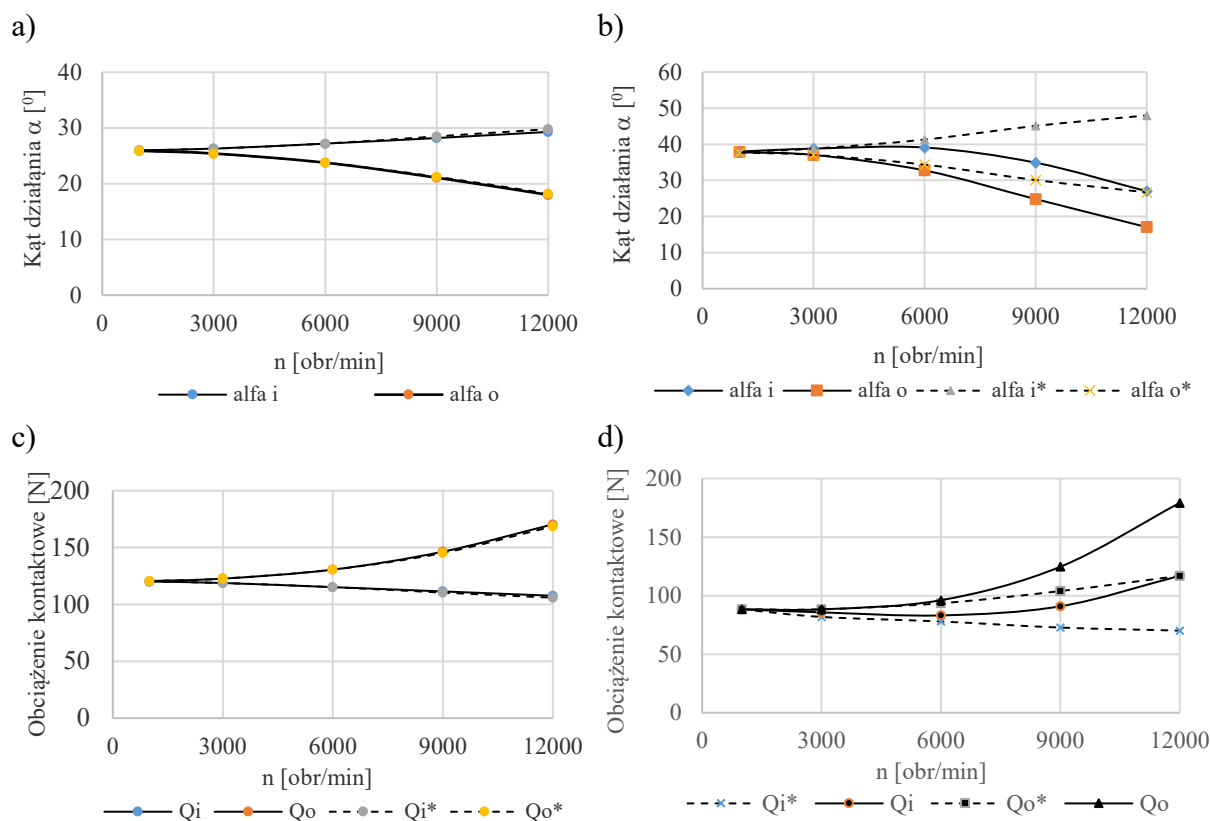
$$A \cos \alpha + \delta_r = (R_i + \delta_i - 0,5D) \cos \alpha_i + (R_o + \delta_o - 0,5D) \cos \alpha_o \quad (9.63)$$

Równania (9.58)-(9.63) wraz z równaniami Jones'a (9.6) pozwalają na drodze iteracyjnej rozwiązać zagadnienie, tj. obliczyć niewiadome  $\alpha_i$ ,  $\alpha_o$ ,  $F_i$ ,  $F_o$  i  $\delta_r$ .

Rysunek 9.18 zawiera wyniki badań łożyska testowego FAG B7013 dla dwóch jego odmian: rysunki (rys. 9.18a) i (rys. 9.18c) dotyczą łożyska o promieniach krzywizny bieżni:  $R_i = 5,967$  mm,  $R_o = 5,80$  mm, a wykresy (rys. 9.18b) i (rys. 9.18d) łożyska o promieniach krzywizny bieżni  $R_i = R_o = 5,560$  mm. Ponadto linie ciągłe na wszystkich wykresach dotyczą modelu rozszerzonego, a linie przerywane – konwencjonalnego.

Wnioski z przeprowadzonych badań istotnie zależą od promieni krzywizn bieżni łożyskowych. Dla większych wartości promieni krzywizn i wyraźnego ich zróżnicowania (rys. 9.18a i rys. 9.18c) wyniki badań dla obu modeli są bardzo zbliżone.

Oznacza to, że np. w celu obliczenia sił kontaktowych wystarczy skorzystać z modelu konwencjonalnego, który jest prostszy.



Rys. 9.18. Wpływ prędkości obrotowej na: kąty działania (a), (b) i siły kontaktowe (c), (d) dla napięcia wstępnego 1000 N; wykresy (a) i (c) dotyczą łożyska o promieniach krzywizny bieżni:  $R_i = 5,967$  mm,  $R_o = 5,80$  mm, a wykresy (b) i (d) łożyska o promieniach krzywizny bieżni  $R_i = R_o = 5,560$  mm; linie ciągłe – model rozszerzony, linie przerywane – model konwencjonalny

Fig. 9.18. The influence of rotational speed on: contact angles (a), (b) and contact forces (c), (d) for the pre-load of 1000N; graphs (a) and (c) concern the bearing with the radii of curvature of the raceway:  $R_i = 5,967$  mm,  $R_o = 5,80$  mm and the graphs (c) and (d) of the bearing with the radii of curvature of the raceway  $R_i = R_o = 5,560$  mm; solid lines refer to the extended model, dashed lines refers to the conventional model

Z kolei dla łożyska o zmniejszonych wartościach promieni krzywizn bieżni i o zbliżonych wartościach (rys. 9.18b i rys. 9.18d) wyniki badań istotnie zależą od przyjętego modelu. Przykładowo, wyniki sił kontaktowych uzyskane z modelu rozszerzonego są wyraźnie większe niż uzyskane z modelu konwencjonalnego nawet o 50%. Jeżeli więc do obliczeń nie weźmiemy modelu rozszerzonego, to obliczone obciążenia kontaktowe będą niedoszacowane.

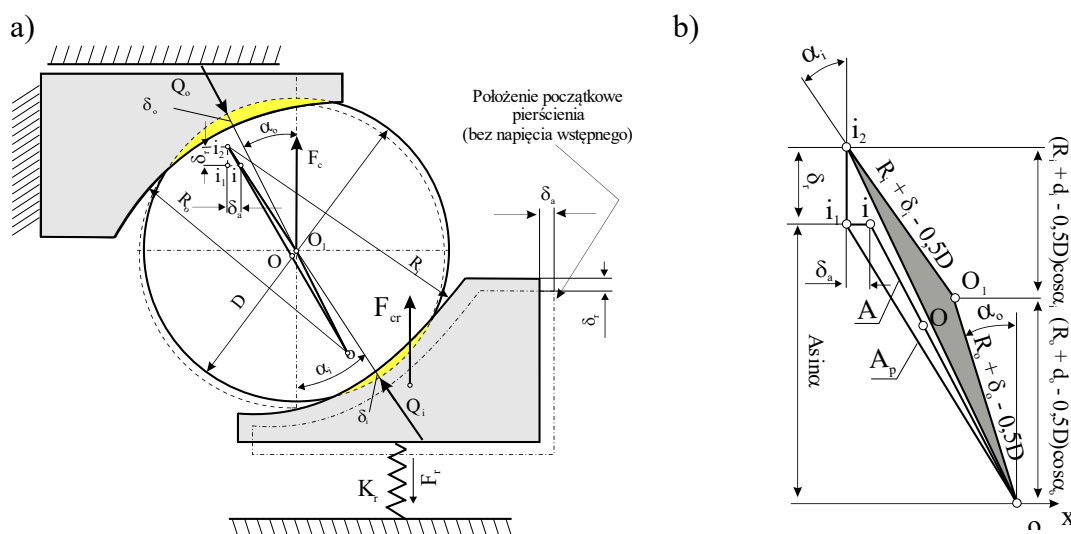
Należy także zwrócić uwagę na wartości kątów działania, obliczonych dla łożysk o stosunkowo dużych promieniach krzywizn bieżni (rys. 9.18a) i mniejszych promieniach krzywizn bieżni (rys. 9.18b). W tym drugim przypadku kąty działania są

wyraźnie większe, co wynika ze zmniejszonej sztywności kontaktowych  $K_i$ ,  $K_o$ , jako że im mniejsze są promienie krzywizn bieżni, tym sztywności kontaktowe  $K_i$ ,  $K_o$  są mniejsze (zależności (9.8), (9.9) i (9.10)).

Z przedstawionych przykładowych wyników badań dla łożyska ze sprężystym napięciem wstępnym wynika, że w pewnych przypadkach nie ma potrzeby stosowania modelu rozszerzonego, co znacząco upraszcza proces obliczeń. Jednakże dla tzw. sztywnego napięcia wstępnego, tj. ze wstępnym przemieszczeniem pierścienia wewnętrznego względem zewnętrznego  $\delta_a$ , tak już nie będzie. Poniżej przedstawiono wyniki badań potwierdzające to przypuszczenie.

Rysunek 9.19 ukazuje stan obciążenia i odkształcenia dla modelu rozszerzonego ze sztywnym napięciem wstępnym  $\delta_a$ .

Równania równowagi sił działających na kulki i na bieżnie łożyska są identyczne z równaniami (9.58) i (9.60). Podobnie sprawa wygląda z równaniem geometrycznym, tzn. jest ono identyczne z równaniem (9.63), natomiast nie obowiązuje równanie (9.59), ponieważ siła  $F_a^*$  nie jest znana.



Rys. 9.19. Stan obciążenia i odkształcenia dla modelu rozszerzonego ze wstępnym przemieszczeniem  $\delta_a$   
 Fig. 9.19. The state of load and deformation for extended bearing model with predeformation  $\delta_a$

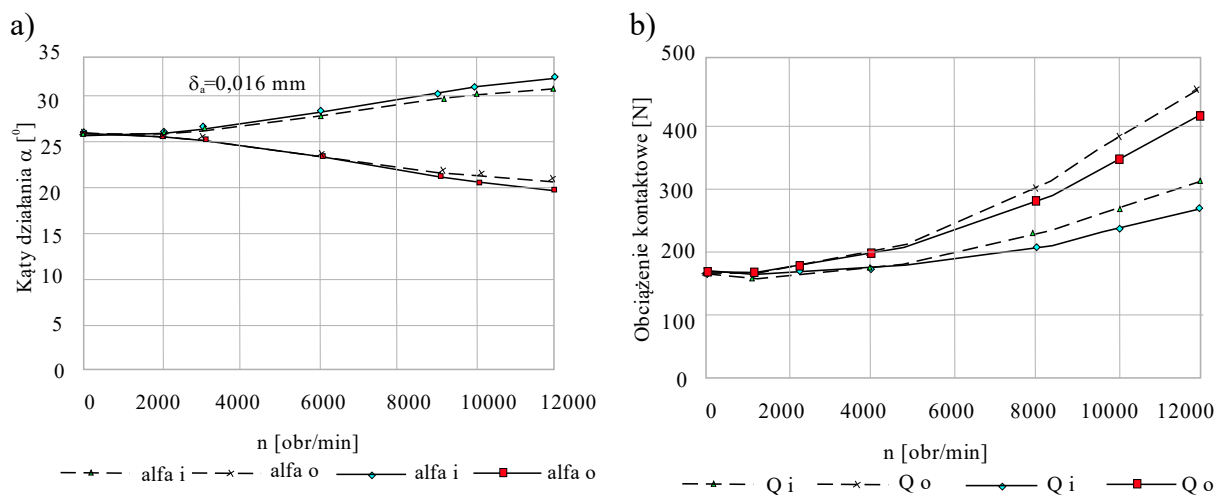
W rozdz. 9.1.4 przedstawiono przybliżoną metodę rozwiązania takiego zagadnienia. Można ją zaadaptować do modelu rozszerzonego ze wstępnym przemieszczeniem  $\delta_a$ .

Na rys. 9.20 przedstawiono przykładowe wyniki badań dla modelu rozszerzonego i konwencjonalnego dla testowego łożyska FAG B70-13 w warunkach występowania sił odśrodkowych od wirujących kulek i pierścienia wewnętrznego oraz dla wstępnego odkształcenia łożyska  $\delta_a$ .



Wyniki badań na rys. 9.20 należy analizować, porównując je z wynikami dla modelu rozszerzonego ze sprężystym napięciem wstępnym (rys. 9.18a i rys. 9.18c). Dotyczą one bowiem łożyska o dużych promieniach krzywizn bieżni,  $R_i = 5,967$  mm,  $R_o = 5,80$  mm. Z rys. 9.18 wynikało, że nie ma wielkiej różnicy w wynikach badań dla modelu konwencjonalnego i rozszerzonego.

Według rys. 9.20a kąty działania wyznaczone z obu modeli są bardzo podobne. Różnice są widoczne dopiero dla największych prędkości obrotowych, natomiast z rys. 9.20b wynika, że siły kontaktowe wyznaczone wg modelu rozszerzonego i konwencjonalnego wykazują znaczne różnice, sięgające 20%. Siły kontaktowe wyznaczone wg modelu rozszerzonego są większe. Tak więc w przypadku łożyska ze wstępnym odkształceniem  $\delta_a$  należy stosować model rozszerzony nawet wtedy, gdy promienie krzywizn bieżni są stosunkowo duże. W przeciwnym wypadku siły te będą niedoszacowane.



Rys. 9.20. Wpływ prędkości obrotowej na: a) kąty działania, b) siły kontaktowe, w warunkach występowania sił odśrodkowych od wirujących kulek i od pierścienia wewnętrznego oraz dla wstępnego odkształcenia łożyska  $\delta_a$ . Linia ciągła – model konwencjonalny, linia przerywana – model rozszerzony

Fig. 9.20. Influence of rotational speed on: a) contact angles, b) contact forces, in conditions of centrifugal forces from rotating balls and from the inner ring and for pre-deformation of the bearing  $\delta_a$ . Solid line – conventional model, dashed line – extended model

## 10. MODELE OBLICZENIOWE OPORÓW RUCHU W ŁOŻYSKACH TOCZNYCH

Głównym celem badań jest wykazanie prawdziwości tezy, że składniki wynikające ze zjawiska spinu, ślizgania i toczenia się kulek istotnie wpływają na opory ruchu łożyska, oraz przedstawienie analitycznych modeli obliczeniowych umożliwiających projektantom węzłów łożyskowych oszacowanie tych oporów z wykorzystaniem wiedzy o prędkości obrotowej łożyska, jego napięciu wstępnym i występującym obciążeniu zewnętrznym.

Zgodnie z przyjętymi założeniami, przedstawionymi w postaci modeli (3.1)-(3.3), do obliczenia oporów ruchu w łożysku, a w konsekwencji strat mocy w łożysku, należy wyznaczyć momenty oporów ruchu, generowane przez każde ze zjawisk występujących w łożysku, tj. toczenia i ślizgania się kulek po bieżniach. Ponadto należy wyznaczyć opory wiskotyczne, wynikające z brodzenia kulek w smarze lub oleju.

W modelu (8.3) zapisano najważniejsze założenie niniejszych badań, tj. że opory ruchu w łożysku są funkcją sił kontaktowych  $Q_i$  i  $Q_o$  występujących w obszarze kontaktu kulek z bieżniami i współczynników tarcia. Z kolei w rozdz. 9 wykazano, że siły kontaktowe  $Q_i$  i  $Q_o$  zależą od zjawisk, jakie powstają w łożysku w trakcie toczenia się kulek po bieżniach. Oznacza to, że moment oporów ruchu w łożysku będzie sumą momentów oporu, generowanych podczas każdego zjawiska. Należy więc wyznaczyć momenty  $M_{(T)z}$ ,  $M_{(T)r}$ ,  $M_{(T)s}$ ,  $M_s^*$ ,  $M_g$ ,  $M_{in}$ ,  $M_v$  zgodnie z modelem (3.3), a następnie je zsumować.

W dalszym ciągu przedstawione zostaną analityczne modele obliczeniowe poszczególnych oporów ruchu w łożysku tocznym skośnym.

### 10.1. Moment oporów ruchu z tytułu tarcia wiskotycznego

Opory ruchu wywołane tarcie wiskotycznym są powszechnie wyznaczane jako funkcja prędkości obrotowej i lepkości kinematycznej smaru lub oleju [20] (10.1).

$$\begin{aligned}
 M_v &= 10^{-10} k_o (vn)^{2/3} \cdot d_m^3 & \text{dla } vn > 2000 \\
 M_v &= 16010^{-7} k_o d_m^3 & \text{dla } vn < 2000
 \end{aligned}
 \tag{10.1}$$

gdzie:  $\nu$  – lepkość kinematyczna smaru w temperaturze pracy łożyska [ $\text{mm}^2/\text{s}$ ],

$n$  – prędkość obrotowa łożyska [obr/min],

$k_o$  – współczynnik zależny od typu łożyska i smarowania (dla łożyska skośnego jednorzędowego i smaru plastycznego  $k_o = 0,7^{-2}$ ).

W zależności (10.1) największą trudność stanowi określenie współczynnika lepkości  $\nu$  w temperaturze pracy łożyska. Oznacza to, że musimy znać temperaturę smaru, aby dobrać odpowiednią wartość współczynnika  $\nu$ . Rozwiązanie zagadnienia wymagać będzie trybu iteracyjnego. W pierwszym kroku trzeba będzie założyć jakąś temperaturę smaru (najlepiej oczekiwaną), następnie – wyznaczyć wszystkie opory ruchu, w kolejnym kroku trzeba będzie określić rozkład temperatur, a potem wrócić do wyznaczania oporów ruchu, ale już dla innej temperatury.

W dalszym ciągu zostanie przedstawiona procedura uzyskania analitycznego modelu, który pozwoli na obliczanie momentów oporu ruchu w wyniku zjawiska spinu, toczenia i ślizgania się kulek w funkcji prędkości obrotowej i napięcia wstępnego w sposób jawny. Ta procedura obliczeniowa zakłada, że opory ruchu łożyska wynikają z oporów tarcia toczenia i ślizgania się kulek w obszarze kontaktu kulki z bieżniami i z oporów tarcia, wynikających z obrotu kulki wokół własnej osi, normalnej do powierzchni kontaktowej, czyli tzw. spinu.

## 10.2. Opory ruchu spowodowane efektem spinu

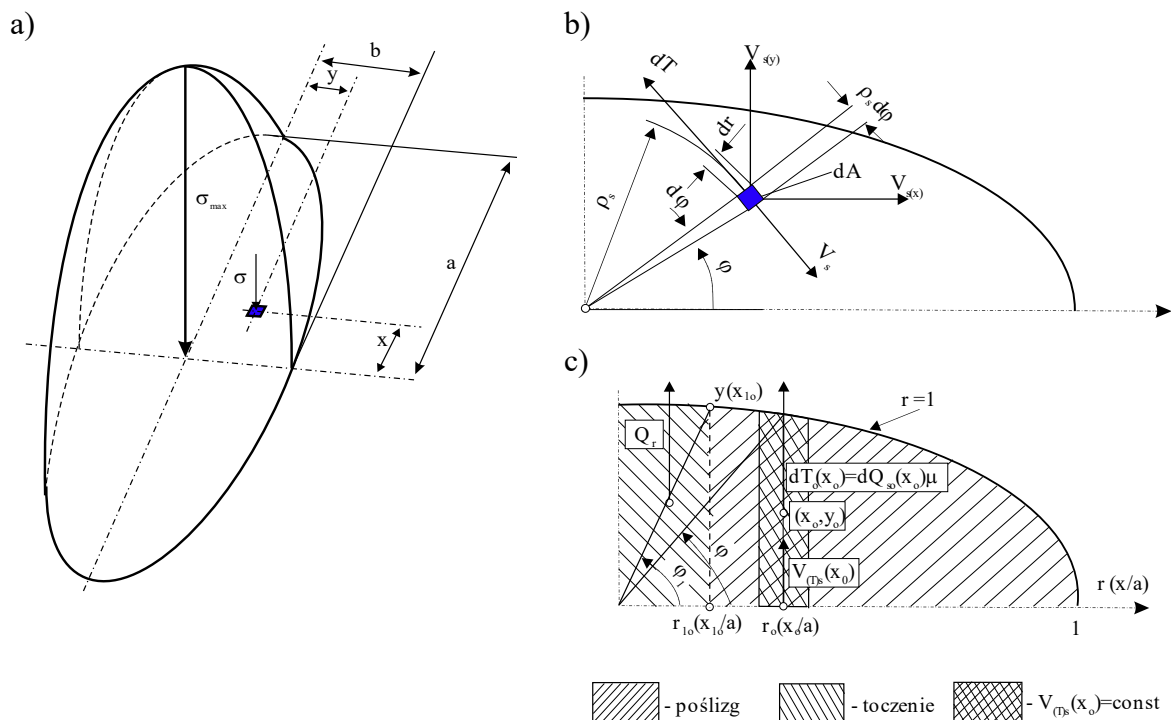
Rysunek 10.1 pokazuje hipotetyczny rozkład naprężeń normalnych w obszarze kontaktu dwóch powierzchni, który występuje także w obszarze kontaktu kulki z bieżniami łożyska. Jest to klasyczny rozkład wynikający z teorii Hertza, gdzie obszar kontaktowy przyjmuje kształt elipsy z półosiami  $a$  i  $b$  oraz z maksymalnym naprężeniem w środku elipsy. Taki rozkład naprężeń normalnych został opisany przez Hertza w postaci:

$$\sigma(x, y) = \sigma_{\max} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}
 \tag{10.2}$$

gdzie:  $\sigma(x, y)$  – naprężenia normalne w punkcie  $(x, y)$ ,

$\sigma_{\max}$  – maksymalne naprężenia normalne w środku elipsy,

$a, b$  – duża i mała półoś elipsy.



Rys. 10.1. Rozkład naprężeń normalnych w obszarze kontaktu dwóch powierzchni (a), definicja prędkości spinu  $V_s$  i poślizgu  $V_{s(x)}$ ,  $V_{s(y)}$  (b), definicja elementarnej siły tarcia poślizgowego  $dT(x_0)$ , prędkości poślizgu  $V_{(Ts)}(x_0)$ , elementarnej siły kontaktowej  $dQ_s(x_0)$  w punkcie  $(x_0, y_0)$  i obciążenia tocznego  $Q_r$  (c);  $a_1$ ,  $b_1$  – współrzędne (5.10) (rys. 5.3)

Fig. 10.1. Distribution of normal stresses in the area of contact of two surfaces (a), definition of spin velocity  $V_s$  and slip  $V_s(x)$ ,  $V_s(y)$  (b), definition of elementary sliding friction force  $dT(x_0)$ , sliding velocity  $V_{(Ts)}(x_0)$ , elemental contact force  $dQ_s(x_0)$  at point  $(x_0, y_0)$  and rolling load  $Q_r$  (c);  $a_1$ ,  $b_1$  – coordinates (5.10) (Fig. 5.3)

Maksymalne naprężenia  $\sigma_{max}$  w środku elipsy, stosownie do modelu Hertza, można przedstawić następująco:

$$\sigma_{max} = \frac{1,5Q}{\pi ab} \quad (10.3)$$

gdzie  $Q$  – obciążenie normalne w obszarze kontaktu dwóch powierzchni.

Naprężenia normalne  $\sigma$  w punkcie  $(x, y)$  są źródłem elementarnej siły tarcia poślizgowego  $dT$  w tym punkcie, odpowiednio do modelu Coulomba:

$$dT = \mu\sigma(x, y)dA = \mu\sigma(x, y)dxdy \quad (10.4)$$

gdzie:  $dA$  – elementarna powierzchnia kontaktowa dwóch powierzchni,

$\mu$  – współczynnik tarcia ślizgowego.

Siła tarcia  $T$  w obszarze kontaktu dwóch powierzchni jest całką powierzchniową, mianowicie:

$$T = \mu \iint_A \sigma(x, y)dA = \mu \iint_A \sigma(x, y)dxdy \quad (10.5)$$

Jest o wiele wygodniej rozwiązywać tzw. całki eliptyczne (10.5), wprowadzając współrzędne eliptyczne  $x = a \cos \varphi$ ,  $y = b \sin \varphi$  (rys. 10.1b). Przy uwzględnieniu w (10.5) zależności (10.2), (10.3), (10.4) oraz współrzędnych eliptycznych siła tarcia, wynikająca ze zjawiska spinu i poślizgu kulki, przyjmie postać:

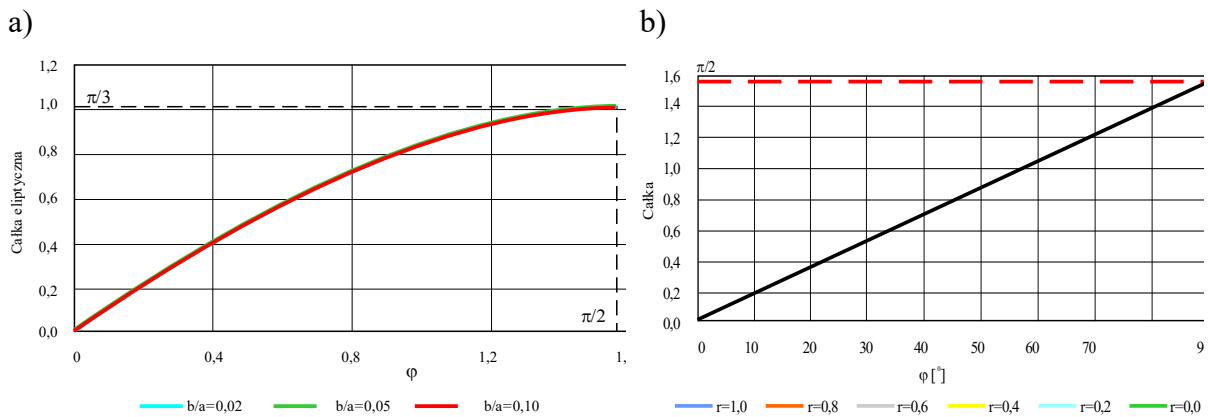
$$T = \frac{1,5Q\mu}{\pi ab} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1-r^2} ab r dr d\varphi = 3Q\mu \int_0^1 r \sqrt{1-r^2} dr = Q\mu \quad (10.6)$$

Elementarna siła tarcia  $dT$  na ramieniu  $\rho_s$  (rys. 10.1b) wytwarza elementarny moment tarcia  $dM_s$ , wynikający ze zjawiska spinu:

$$dM_s = \rho_s dT = \mu \rho_s \sigma(x, y) dA \quad (10.7)$$

gdzie:  $\rho_s$  – promień ramienia działania elementarnej siły tarcia  $dT$ , który można przedstawić jako:

$$\rho_s = \sqrt{x^2 + y^2} = r \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \quad (10.8)$$



Rys. 10.2. Graficzny obraz numerycznego rozwiązania całek  
Fig. 10.2. Graphic image of the numerical integral solution

Moment tarcia z tytułu zjawiska spinu jest całką po powierzchni elipsy kontaktowej. Całkując zależność (10.7) i uwzględniając zależności (10.3) i (10.8) oraz wprowadzając współrzędne eliptyczne, uzyskamy moment tarcia  $M_s$ , wynikający ze zjawiska spinu (10.9).

$$M_s = \frac{1,5Q\mu}{\pi ab} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho_s \sqrt{1-r^2} ab r dr d\varphi = \frac{1,5Qa\mu}{\pi} \int_0^1 r^2 \sqrt{1-r^2} dr \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 \varphi + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (10.9)$$

Ponieważ całka  $\int_0^1 r^2 \sqrt{1-r^2} dr = \frac{\pi}{16}$ , więc moment tarcia  $M_s$  z tytułu zjawiska spinu

wyniesie:

$$M_s = \frac{3Qa\mu}{8} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 \varphi + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (10.10)$$

Całkę  $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 \varphi + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \sin^2 \varphi}$  jest trudniej rozwiązać analitycznie. Można ją

np. rozwiązać numerycznie albo w sposób przybliżony, stosując szereg Riemanna. Autorzy rozwiązyli ją numerycznie. Wynik takiego rozwiązania pokazano na rys. 10.2a dla kilku wartości  $b/a$ .

W [31] Autor wykazał, że iloraz małej i dużej półosi elipsy kontaktowej dla łożysk toczyńskich skośnych spełnia warunek  $b/a \ll 1$ . Przykładowo, dla testowego łożyska typu FAG B7013-E iloraz ten mieści się w przedziale 1/62,8-1/77,5 (w zależności od tego, czy dotyczy on bieżni zewnętrznej, czy wewnętrznej). Dla takiego przypadku ilorazu półosi małej i dużej oraz biorąc pod uwagę rozwiązanie numeryczne (rys. 10.2a), można napisać:

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 \varphi + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \approx \frac{\pi}{3} \quad (10.11)$$

a zależność (10.10) z błędem nieprzekraczającym 2,5% można przedstawić następująco:

$$M_s \approx \frac{\pi Q a \mu}{8} \quad (10.12)$$

Zależność (10.12) pokazuje, że moment tarcia  $M_s$  z tytułu zjawiska spinu, występującego pomiędzy dwiema stykającymi się powierzchniami, jest funkcją normalnego obciążenia  $Q$  pomiędzy obiema powierzchniami, większej półosi  $a$  elipsy kontaktowej i współczynnika tarcia ślizgowego  $\mu$ . Taka relacja wystąpi tylko wtedy, kiedy rozkład naprężeń normalnych w obszarze kontaktu jest symetryczny i zgodny z modelem Hertza. Autor [31] wykazał w swoich badaniach symulacyjnych metodą elementów skończonych, że w odniesieniu do obszaru kontaktowego kulki z bieżnią łożyska rozkład naprężeń normalnych może różnić się od rozkładu Hertza i że może nie być symetryczny.

Moment tarcia z tytułu zjawiska spinu jako jeden ze składników oporów ruchu łożyska (3.3) występuje na wale napędowym w postaci zredukowanej  $M_s^*$ . Redukcję momentu tarcia z tytułu zjawiska spinu na wał napędowy można przeprowadzić,

wykorzystując np. zasadę równowartości pracy tarcia i pracy układu napędowego. Stąd można zapisać:

$$M_s^* \omega = M_s \omega_s \quad (10.13)$$

gdzie  $M_s^*$  – moment tarcia z tytułu zjawiska spinu zredukowany na wał napędowy.

Metodologia wyznaczania prędkości spinu  $\omega_s$  została przedstawiona w rozdz. 5 (zależność (5.25) lub model regresyjny pokazany na rys. 6.5).

Moment tarcia z tytułu zjawiska spinu  $M_s$  powstaje tylko wówczas, kiedy spełniony jest warunek  $\omega_s > 0$ .

Przykładowo, jeżeli zaproponowaną metodologię zastosować dla testowego łożyska tocznego skośnego z obrotowym pierścieniem wewnętrznym, napiętego wstępnie siłą 1000 N, do określania zredukowanego na wał napędowy momentu  $M_s^*$ , dla którego prędkość spinu  $\omega_{si}$  wynosi (10.14) (rys. 6.5):

$$\frac{\omega_{si}}{\omega} = 4 \cdot 10^{-9} n^2 + 2 \cdot 10^{-5} n + 0,3971 \quad (10.14)$$

to moment tarcia  $M_s^*$  można wyznaczyć następująco:

$$M_s^* = (4 \cdot 10^{-9} n^2 + 2 \cdot 10^{-5} n + 0,3971) M_s \quad (10.15)$$

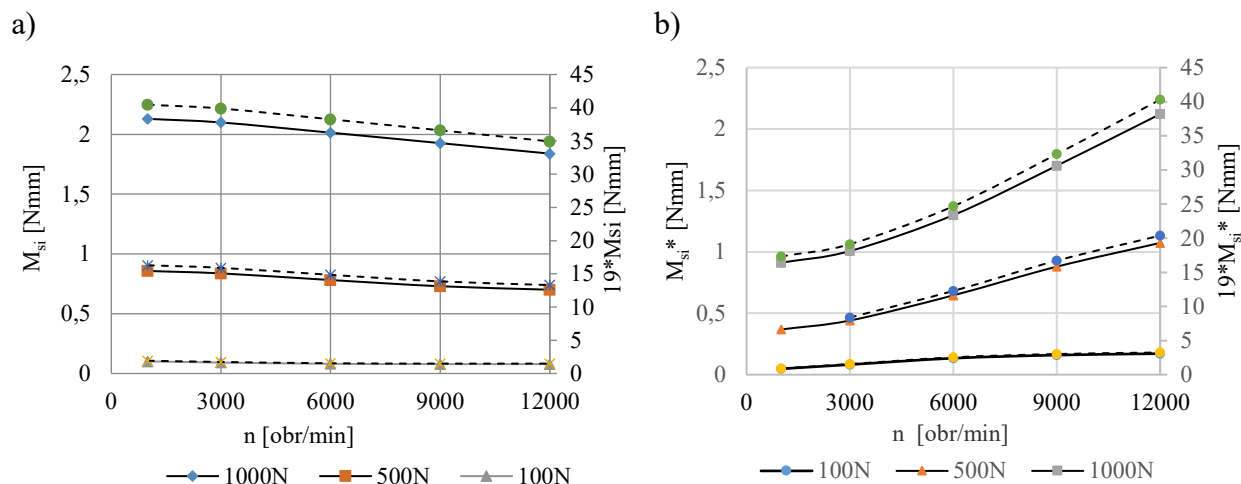
gdzie  $n$  – prędkość obrotowa wału napędowego (łożyska) [obr/min].

W zakresie prędkości 1000-12 000 obr/min i napięcia wstępnego łożyska testowego 100-1000 N moment tarcia  $M_{si}^*$  zredukowany na wał napędowy mieści się w zakresie (0,47-1,69)  $M_{si}$  (gdzie:  $M_{si}$  – moment spinu na bieżni wewnętrznej).

Jeżeli zastosować zaproponowaną metodologię dla pierścienia zewnętrznego, to  $M_{so}^* = 0$ . Wynika to z przyjętej w tych badaniach hipotezy kontrolowanej bieżni zewnętrznej, dla której prędkość spinu  $\omega_{so} = 0$ .

Rysunek 10.3 pokazuje wyniki badań w postaci zależności momentu spinu  $M_{si}$  od prędkości łożyska (rys. 10.3a), a rys.10.3b – po zredukowaniu na wał napędowy  $M_{si}^*$ . Należy zauważyć, że moment spinu  $M_{si}$  nieznacznie maleje ze wzrostem prędkości, ale moment spinu zredukowany na wał napędowy  $M_{si}^*$  silnie rośnie wraz ze wzrostem prędkości łożyska. Wynika to ze związku pomiędzy prędkością spinu  $\omega_{si}$  a prędkością łożyska  $\omega$  (rys. 6.5).

Rysunek 10.3 nie pokazuje żadnego oporu ruchu z tytułu zjawiska spinu na bieżni zewnętrznej  $M_{so}^*$ , jako że przyjęto do rozważań hipotezę kontrolowanej bieżni zewnętrznej.



Rys. 10.3. Wpływ prędkości obrotowej łożyska na moment tarcia  $M_{si}$  z tytułu zjawiska spinu (a) i po redukcji  $M^*_{si}$  na wał napędowy (b); 19 – liczba kulek; linie ciągłe –  $M^*_{si}$ , linie przerywane –  $19 \cdot M^*_{si}$

Fig. 10.3. Effect of rotational speed on the friction torque  $M_{si}$  due to the spinning effect on inner ring (a), after reduction to the drive shaft  $M^*_{si}$  (b); 19 – number of balls, solid line –  $M^*_{si}$ , dotted line –  $19 \cdot M^*_{si}$

### 10.3. Opory ruchu z tytułu efektu poślizgu kulek po bieżni łożyska

Elementarna siła tarcia  $dT$  z tytułu ślizgania się kulek po bieżniach wytwarza także moment tarcia  $dM_{(T)s}$ , ponieważ działa na ramieniu  $\rho_{(T)s}$  (rys. 5.5b), mianowicie:

$$dM_{(T)s} = \rho_{(T)s} dT = \mu \rho_{(T)s} \sigma(x, y) dA \quad (10.16)$$

Obliczanie elementarnego momentu  $dM_{(T)s}$  staje się łatwiejsze, jeżeli rozważyć równowagę mocy z tytułu tarcia kulek o bieżnię i mocy napędowej na wale, mianowicie:

$$V_{(T)s} dT = \omega dM_{(T)s} \quad (10.17)$$

gdzie:  $V_{(T)s}$  – prędkości poślizgu kulek względem bieżni ( $V_{(T)so}$  and  $V_{(T)si}$  (zależność (5.23)),

$dM_{(T)s}$  – elementarny moment ( $dM_{(T)so}$  dla bieżni zewnętrznej i  $dM_{(T)si}$  dla wewnętrznej).

Wstawiając (5.23) na  $V_{(T)so}$  oraz zależności (10.2), (10.3) i (10.4) na elementarną siłę tarcia  $dT$  do (10.17), otrzymamy wyrażenie na elementarny moment  $dM_{(T)so}$  dla bieżni zewnętrznej:

$$dM_{(T)so} = \frac{1,5Q_o\mu}{\pi a_o b_o} \sqrt{1 - \left(\frac{x_o}{a_o}\right)^2 - \left(\frac{y_o}{b_o}\right)^2} \left( \frac{L_o}{M_o} + \frac{\frac{d_m}{2r_o} \cos \alpha_o \sqrt{R_o^2 - x_o^2}}{M_o} \right) dx dy \quad (10.18)$$



Tak samo można postąpić dla bieżni wewnętrznej, otrzymując elementarny moment  $dM_{(T)si}$ , mianowicie:

$$dM_{(T)si} = \frac{1,5Q_i\mu}{\pi a_i b_i} \sqrt{1 - \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 - \left(\frac{y_i}{b_i}\right)^2} \left( \frac{L_i}{M_i} - \frac{\frac{d_m}{2r_i} \cos \alpha_i \sqrt{R_i^2 - x_i^2}}{M_i} \right) dx dy \quad (10.19)$$

Całkowity moment  $M_{(T)s}$  z tytułu ślizgania się kulek po bieżniach jest całką powierzchniową po obszarach elips kontaktowych.

Całkowanie zależności (10.18) i (10.19) powinno się odbywać po tych częściach elips kontaktowych, gdzie występuje poślizg ujemny (rys. 10.1c, rys. 5.3a). Z tytułu symetrii elipsy kontaktowej całkowanie można przeprowadzić tylko dla pierwszej ćwiartki układu współrzędnych w następujących granicach całkowania:

$$\begin{aligned} x &\in (x_1, a) \\ y &\in (0, y_1) \\ r &\in (r_1, 1) \\ \varphi &\in (\varphi_1, \pi/2) \end{aligned} \quad (10.20)$$

gdzie  $r_1, x_1$  i  $\varphi_1$  są objaśnione na przykładzie bieżni wewnętrznej na rys. 10.1c i rys. 5.3a.

Wówczas moment  $M_{(T)so}$  dla bieżni zewnętrznej wynosi:

$$M_{(T)so} = 4 \frac{1,5Q_o\mu}{\pi a_o b_o} \int_{x_{1o}}^{a_o} \int_0^{y_{1o}} \sqrt{1 - \left(\frac{x_o}{a_o}\right)^2 - \left(\frac{y_o}{b_o}\right)^2} \left( \frac{L_o}{M_o} + \frac{\frac{d_m}{2r_o} \cos \alpha_o \sqrt{R_o^2 - x_o^2}}{M_o} \right) dx dy \quad (10.21)$$

Dla bieżni wewnętrznej moment  $M_{(T)si}$  to:

$$M_{(T)si} = 4 \frac{1,5Q_i\mu}{\pi a_i b_i} \int_{x_{1i}}^{a_i} \int_0^{y_{1i}} \sqrt{1 - \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 - \left(\frac{y_i}{b_i}\right)^2} \left( \frac{L_i}{M_i} - \frac{\frac{d_m}{2r_i} \cos \alpha_i \sqrt{R_i^2 - x_i^2}}{M_i} \right) dx dy \quad (10.22)$$

Zależności (10.21) i (10.22) można przedstawić jako sumy dwóch całek, mianowicie:

$$\begin{aligned} M_{(T)so} &= \frac{6Q_o\mu}{\pi a_o b_o} \left[ \frac{L_o}{M_o} \int_{x_{1o}}^{a_o} \int_0^{y_{1o}} \sqrt{1 - \left(\frac{x_o}{a_o}\right)^2 - \left(\frac{y_o}{b_o}\right)^2} dx dy + \frac{\frac{d_m}{2r_o} \cos \alpha_o}{M_o} \int_{x_{1o}}^{a_o} \int_0^{y_{1o}} \sqrt{R_o^2 - x_o^2} \sqrt{1 - \left(\frac{x_o}{a_o}\right)^2 - \left(\frac{y_o}{b_o}\right)^2} dx dy \right] \\ M_{(T)si} &= \frac{6Q_i\mu}{\pi a_i b_i} \left[ \frac{L_i}{M_i} \int_{x_{1i}}^{a_i} \int_0^{y_{1i}} \sqrt{1 - \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 - \left(\frac{y_i}{b_i}\right)^2} dx dy + \frac{\frac{d_m}{2r_i} \cos \alpha_i}{M_i} \int_{x_{1i}}^{a_i} \int_0^{y_{1i}} \sqrt{R_i^2 - x_i^2} \sqrt{1 - \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 - \left(\frac{y_i}{b_i}\right)^2} dx dy \right] \end{aligned} \quad (10.23)$$

Oba składniki całek (10.23) łatwiej rozwiązać, wprowadzając współrzędne eliptyczne  $x = ar \cos \varphi$ ,  $y = br \sin \varphi$ , mianowicie:

$$M_{(T)so} = \frac{6Q_o \mu}{\pi a_o b_o} \int_{r_{1o}}^1 \int_0^{\varphi_1} a_o b_o r \sqrt{1-r^2} \left( \frac{L_o}{M_o} - \frac{\frac{d_m}{2r_o} \cos \alpha_o \sqrt{R_o^2 - (ar)^2 \cos^2 \varphi}}{M_o} \right) dr d\varphi \quad (10.24)$$

$$M_{(T)si} = \frac{6Q_i \mu}{\pi a_i b_i} \int_{r_{1i}}^1 \int_0^{\varphi_1} a_i b_i r \sqrt{1-r^2} \left( \frac{L_i}{M_i} - \frac{\frac{d_m}{2r_i} \cos \alpha_i \sqrt{R_i^2 - (ar)^2 \cos^2 \varphi}}{M_i} \right) dr d\varphi$$

Dla wyjaśnienia całkowania zależności (10.24) posłużymy się rys. 10.1c. W analizie prędkości poślizgu  $V_{(T)so}$  i  $V_{(T)si}$  w rozdziale 5 założono, że prędkości poślizgu są tylko funkcją współrzędnych  $x_o$  i  $x_i$ . Oznacza to, że prędkości poślizgu nie ulegają zmianie wzdłuż osi  $y$ , tj. równoległej do małej osi elipsy kontaktowej. Ponieważ przyjęto rozkład normalny nacisków powierzchniowych w obszarze elipsy kontaktowej (wg modelu Hertza (10.2)), więc będą się one zmieniały zarówno w kierunku osi  $x$ , jak i osi  $y$ . Dlatego dla wyznaczenia elementarnej siły kontaktowej,  $dQ_{so}(x_o)$  lub  $dQ_{si}(x_o)$ , a tym samym elementarnej siły tarcia  $dT_o(x_o)$  lub  $dT_i(x_o)$  w punkcie  $(x_o, y_o)$  całkowanie nacisków powierzchniowych należy przeprowadzić w granicach  $y = 0$  do  $y = y_{1o}$  ( $dQ_s(x_o) = \left( \int_0^{y_{1o}} \sigma(x_o, y_o) dy \right) dx$ ), a stosując współrzędne eliptyczne – w granicach  $r = r_{1o}$  do 1. Wówczas w zależności (10.24) granice całkowania po współrzędnej  $r$  wynoszą  $r_{1o}$  do 1.

Pierwszy składnik całki (10.23)  $\int_{x_{1o}}^{a_o} \int_0^{y_{1o}} \sqrt{1 - \left(\frac{x_o}{a_o}\right)^2 - \left(\frac{y_o}{b_o}\right)^2} dx dy = \int_{r_{1o}}^1 abr \sqrt{1-r^2} dr \int_0^{\varphi_1} d\varphi$  jest

funkcją tylko zmiennej  $r$ . Całkowanie można przeprowadzić analitycznie, mianowicie:

$$\int_{r_{1o}}^1 abr \sqrt{1-r^2} dr \int_0^{\varphi_1} d\varphi = \frac{\varphi_1}{3} ab \left( \sqrt{1-r_{1o}^2} \right)^3 \quad (10.25)$$

Z kolei drugi składnik całki (10.23)  $\int_{x_{1o}}^{a_o} \int_0^{y_{1o}} \sqrt{R_o^2 - x_o^2} \sqrt{1 - \left(\frac{x_o}{a_o}\right)^2 - \left(\frac{y_o}{b_o}\right)^2} dx dy$  jest funkcją

obu zmiennych, tzn.  $r$  i  $\varphi$ ,

$$\int_{x_{1o}}^{a_o} \int_0^{y_{1o}} \sqrt{R_o^2 - x_o^2} \sqrt{1 - \left(\frac{x_o}{a_o}\right)^2 - \left(\frac{y_o}{b_o}\right)^2} dx dy = \int_{r_{1o}}^1 \int_0^{\varphi_1} abr \sqrt{1-r^2} \sqrt{R_o^2 - (ar)^2 \cos^2 \varphi} dr d\varphi \quad (10.26)$$

Numeryczne rozwiązanie całki  $\int_0^{\varphi_1} \sqrt{1 - \left(\frac{ar}{R_o}\right)^2} \cos^2 \varphi d\varphi$  (rys. 10.2b) wskazuje, że jest ono niezależne od zmiennej  $r$ , a jej wartość jest jedynie funkcją granic całkowania po zmiennej  $\varphi$ :

$$R_o \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \left(\frac{ar}{R_o}\right)^2} \cos^2 \varphi = \frac{\pi}{2} R_o$$

Jeżeli granice całkowania po zmiennej  $\varphi$  i  $r$  mieszczą się w zakresie  $\varphi_1 \leq \varphi \leq 0$  i  $r_{1o} \leq r \leq 1$ , to całka (10.26) jest liczbą, której wartość zależy od granic całkowania:

$$\int_{r_{1o}}^1 r \sqrt{1-r^2} dr \int_0^{\varphi_1} \sqrt{R_o^2 - (ar)^2} \cos^2 \varphi d\varphi = 2\varphi_1 ab \left(\sqrt{1-r_{1o}^2}\right)^3 \quad (10.27)$$

Jeżeli natomiast granice całkowania mieszczą się w przedziale  $r=r_{1o}=0$  i  $\varphi_1=\pi/2$ , to całka (10.27) przyjmuje wartość  $\pi ab$ .

Jeśli całkowanie odbywa się po całym obszarze elipsy ( $a_{1o} = a_{1i} = 0$ ,  $y_{1o} = y_o$ ,  $y_{1i} = y_i$ ,  $\varphi_1 = \pi/2$ ), to zależność (10.24) na momenty oporów ruchu  $M_{T(s)o}$  i  $M_{T(s)}$  przyjmuje postać:

$$M_{(T)so} = Q_o \mu \left( \frac{L_o}{M_o} - \frac{6 \frac{d_m}{2r_o} \cos \alpha_o}{M_o} \right) \approx Q_o \mu \left( \frac{L_o}{M_o} - \frac{6 \frac{d_m}{D} \cos \alpha_o}{M_o} \right) \quad (10.28)$$

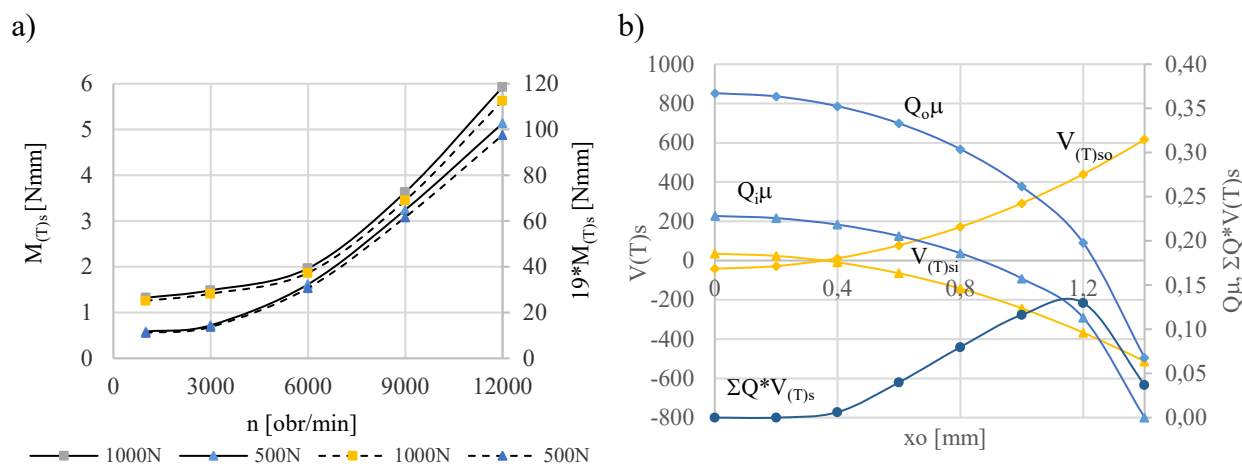
$$M_{(T)si} = Q_i \mu \left( \frac{L_i}{M_i} - \frac{6 \frac{d_m}{2r_i} \cos \alpha_i}{M_i} \right) \approx Q_i \mu \left( \frac{L_i}{M_i} - \frac{6 \frac{d_m}{D} \cos \alpha_i}{M_i} \right)$$

Jeżeli natomiast całkowanie odbywa się po części obszaru elipsy w granicach  $\varphi = \varphi_1$  do  $\pi/2$  i  $r = r_{1o}$  ( $r_{1i}$ ) do 1, momenty oporów ruchu  $M_{T(s)o}$  i  $M_{T(s)}$  przyjmują postać

$$M_{(T)so} = \frac{2Q_o \mu \varphi_1 \left(\sqrt{1-r_{1o}^2}\right)^3}{\pi} \left( \frac{L_o}{M_o} - \frac{6 \frac{d_m}{2r_o} \cos \alpha_o}{M_o} \right) \approx \frac{2Q_o \mu \varphi_1 \left(\sqrt{1-r_{1o}^2}\right)^3}{\pi} \left( \frac{L_o}{M_o} - \frac{6 \frac{d_m}{D} \cos \alpha_o}{M_o} \right) \quad (10.29)$$

$$M_{(T)si} = \frac{2Q_i \mu \varphi_1 \left(\sqrt{1-r_{1i}^2}\right)^3}{\pi} \left( \frac{L_i}{M_i} - \frac{6 \frac{d_m}{2r_i} \cos \alpha_i}{M_i} \right) \approx \frac{2Q_i \mu \varphi_1 \left(\sqrt{1-r_{1i}^2}\right)^3}{\pi} \left( \frac{L_i}{M_i} - \frac{6 \frac{d_m}{D} \cos \alpha_i}{M_i} \right)$$

Ostatecznie moment oporów ruchu z tytułu poślizgu kulek po bieżniach: wewnętrznej i zewnętrznej  $M_{(T)s}$  jest sumą obu zależności: (10.28) lub (10.29).



Rys. 10.4. Wpływ prędkości obrotowej na sumę momentów oporu z tytułu poślizgu kulek po bieżni wewnętrznej i zewnętrznej  $M_{T(s)}$  dla dwóch wartości napięcia wstępnego (a) oraz wpływ współrzędnych  $x_o$  i  $x_i$  na prędkości poślizgu  $V_{(T)so}$ ,  $V_{(T)si}$ , siły tarcia  $Q_o \mu$ ,  $Q_i \mu$  i moc tarcia  $\Sigma Q^* V_{(T)s} = Q_o \mu^* V_{(T)so} + Q_o \mu^* V_{(T)si}$  (b); 19 – liczba kulek w łożysku, linie ciągłe –  $M_{T(s)}$ , linie przerywane –  $19 \cdot M^*_{T(s)}$

Fig. 10.4. Effect of the rotational speed on the sum of friction torques due to sliding effect on inner and outer races  $M_{T(s)}$  for two value of preload (a) and effect of  $x_o$  and  $x_i$  co-ordinate on the sliding speed  $V_{(T)so}$ ,  $V_{(T)si}$ , friction load  $Q_o \mu$ ,  $Q_i \mu$  and power of friction  $\Sigma Q^* V_{(T)s} = Q_o \mu^* V_{(T)so} + Q_o \mu^* V_{(T)si}$  (b): 19 – number of balls, solid line –  $M_{T(s)}$ , dotted line –  $19 \cdot M^*_{T(s)}$

Rysunek 10.4a przedstawia przykładowe wyniki analizy w postaci zależności sumy momentów oporów z tytułu poślizgu kulek o bieżni  $M_{T(s)} = M_{(T)so} + M_{(T)si}$  w funkcji prędkości obrotowej i napięcia wstępnego łożyska. Analiza rys. 10.4 prowadzi do następujących wniosków:

- Wzrost prędkości obrotowej oraz wzrost napięcia wstępnego łożyska powodują zwiększenie momentu oporów z tytułu poślizgu kulek po bieżniach łożyska.
- W przebiegu mocy tarcia  $\Sigma Q^* V_{(T)s}$  występuje maksimum jej wartości, w tym przykładzie w okolicach  $x_o = x_i = 1,2$  mm.
- Prędkości poślizgu  $V_{(T)so}$ ,  $V_{(T)si}$ , siły tarcia  $Q_o \mu$ ,  $Q_i \mu$  oraz moc tarcia  $\Sigma Q^* V_{(T)s}$  istotnie zależą od współrzędnej  $x_o$  (rys. 10.4b), reprezentującej punkt kontaktu kulki z bieżnią.

Najmniejsze wartości prędkości poślizgu występują w okolicach środka elipsy kontaktowej, natomiast największe wartości – na brzegach elipsy. Największe wartości sił tarcia  $Q_o \mu$ ,  $Q_i \mu$  występują w okolicach środka elipsy, a na brzegach elipsy osiągają wartość zero. Moc tarcia  $Q^* V_{(T)s} = Q_o \mu^* V_{(T)so} + Q_o \mu^* V_{(T)si}$  zmienia się niemonotonicznie wraz ze zmianą współrzędnej  $x_o$ . Należy zauważyć, że w okolicach współrzędnych  $x_o = x_i = 1,2$  mm obserwujemy występowanie maksimum mocy tarcia.

Pojawienie się maksimum mocy tarcia ma następujące uzasadnienie: z teorii Herta wynika, że naciski powierzchniowe osiągają największą wartość w okolicy środka

elipsy i mają wartość zero na jej brzegach, co obrazuje na rys. 10.4b – przebieg sił tarcia  $Q_o\mu$ ,  $Q_i\mu$ . Z drugiej strony, prędkości poślizgu kulek po bieżniach osiągają swoje minimum w okolicach środka elipsy i swoje maksimum na brzegach elipsy, co obrazuje na rys. 10.4b – przebieg  $V_{(T)so}$ ,  $V_{(T)si}$ . Ponieważ moc tarcia jest iloczynem siły tarcia i prędkości poślizgu (na rys. 10.4b jest reprezentowana przez przebieg  $\Sigma Q^*V_{(T)s}$ ), a moment oporów ruchu w świetle zależności (10.17) jest proporcjonalny do mocy tarcia, więc pojawienie się maksimum momentu oporów ma swoje uzasadnienie.

#### 10.4. Opory ruchu z tytułu toczenia się kulek po bieżniach

Opory ruchu z tytułu toczenia się kulek uważa się powszechnie za drugie pod względem wielkości po oporach z tytułu obecności smaru (opory wiskotyczne, które determinują straty mocy w łożysku tocznym). Wnioski wynikające z rozdziałów 10.2 i 10.3 wydają się temu przeczyć.

Problem szacowania oporów ruchu z tytułu toczenia się kulek po bieżniach wynika z faktu, że opory te biorą się z nacisków normalnych pomiędzy kulką i bieżniami. Podobnie jest z oporami ruchu z tytułu poślizgów kulki po bieżniach, natomiast niewiadomą jest, jaka część całkowitych nacisków powierzchniowych odpowiada za opory toczne, a jaka za ślizgowe.

W rozdziale 10.2, w ślad za [23], została przytoczona teoria, w myśl której w obszarze kontaktu kulki z bieżnią występuje koło toczne, na którym następuje tzw. „czyste” (pure rolling) toczenie się kulek. Teoretycznie oznacza to, że kontakt pomiędzy kulką a bieżnią jest obszarem o bardzo małej powierzchni. W takim przypadku opory ruchu z tytułu toczenia się kulek byłyby niewielkie, ponieważ suma nacisków na tej niewielkiej powierzchni byłaby mała.

Autorzy zaproponowali obliczanie oporów ruchu z tytułu toczenia się kulek w tym obszarze, gdzie wg [23] powstaje poślizg dodatni, który nie wywołuje oporów tarcia ślizgowego. Taki obszar kontaktowy ma konkretną powierzchnię i możliwe jest oszacowanie nacisków powierzchniowych, a tym samym obciążeń kontaktowych, które łącznie ze współczynnikiem tarcia tocznego odpowiadają za opory ruchu tocznego. Rysunek 10.1c pokazuje taki obszar z poślizgiem dodatnim.

W literaturze generalnie spotyka się dwa podejścia do obliczania oporów ruchu z tytułu tarcia tocznego: pierwsze, zaproponowane przez [50], i drugie, opierające się na znajomości sił wewnętrznych pomiędzy kulkami a bieżniami.

Pierwsze podejście to klasyczne, inżynierskie szacowanie oporów ruchu w łożysku tocznym, przedstawiane w postaci:

$$M_{(T)} = f_l F d_m \quad (10.30)$$

gdzie:  $f_l$  – współczynnik zależny od konstrukcji łożyska,

$F$  – zastępcze obciążenie łożyska,

$d_m$  – średnia średnica łożyska.

Największą zaletą tego podejścia jest jego prostota, natomiast największą wadą, że nie uwzględnia w sposób jawny dynamicznych, wewnętrznych obciążeń wynikających np. z sił odśrodkowych, zjawiska spinu, sił żyroskopowych i innych. W dobie, kiedy dynamiczny rozwój maszyn zmierza do coraz większych prędkości liniowych i obrotowych (np. w obrabiarkach mówi się o technologii HSC), możliwość np. szacowania oporów ruchu w łożyskach z tytułu rosnących prędkości obrotowych wydaje się konieczna.

Drugie podejście opiera się na związkach pomiędzy oporami ruchu a wewnętrznymi obciążeniami w obszarze kontaktu kulek z bieżniami. To podejście jest bardziej skomplikowane, ponieważ wymaga znajomości tych obciążeń, ale wydaje się bliższe rzeczywistym warunkom pracy łożyska. Ono będzie przedmiotem dalszych badań.

Oporo ruchu  $M_{T(r)}$  z tytułu toczenia się kulek po bieżniach muszą być wyznaczone wg nieco innych reguł niż przy oporach z tytułu ślizgania się kulek. Wynika to z definicji współczynnika tarcia tocznego  $f$ , który ma wymiar długości. Autor [32] przedstawił propozycję analitycznego wyznaczenia współczynnika tarcia tocznego  $f$  w funkcji obciążenia kontaktowego  $Q$  (rozd. 11).

Oporo tarcia tocznego, tradycyjnie obliczane jako iloczyn siły normalnej  $Q$  do powierzchni kontaktowej i współczynnika tarcia tocznego  $f$ , mają wymiar momentu  $M_{T(r)}$ . Kulka, która jest w kontakcie z bieżnią wewnętrzną i zewnętrzną, jest poddana działaniu dwóch momentów tarcia tocznego, mianowicie:

$$\begin{aligned} M_{(T)ri} &= Q_{ri} f_i \\ M_{(T)ro} &= Q_{ro} f_o \end{aligned} \quad (10.31)$$

gdzie:  $Q_{ri}$ ,  $Q_{ro}$  – ta część obciążeń kontaktowych  $Q_i$ ,  $Q_o$ , które występują w obszarze „czystego” toczenia się kulki ( $Q_r$  na rys. 10.1c),

$f_i$ ,  $f_o$  – współczynniki tarcia tocznego.

Oporo ruchu kulki mierzone na wale napędowym (w tym przypadku traktowany jako pierścień wewnętrzny) muszą zostać zredukowane na ten wał.

W [44] zaproponowano następującą formę redukcji:

$$M_{(T)r} = \left( \frac{d_m}{D} + 0,5 \right) \sum_{k=1}^N (Q_i f_{ki} + Q_o f_{ko}) \quad (10.32)$$

gdzie:  $f_{ki}, f_{ko}$  – współczynniki tarcia tocznego kulki o bieżnię,

$N$  – liczba kulek.

Przyjęcie do obliczeń całkowitej wartości obciążeń kontaktowych  $Q_i, Q_o$  wydaje się być dyskusyjne. Autorzy publikacji [44] i [38] założyli, że w łożysku występuje tylko tarcie toczne.

Abstrahując od faktu, że sama formuła jest bardzo prosta, należy zauważyć, że pomija ona fakt, iż kulki są w kontakcie z bieżniami w obszarze elipsy kontaktowej na kołach o średnicach odbiegających od nominalnej średnicy łożyska  $d_m$ . Niemniej autorzy tych publikacji założyli, że kontakt kulki z bieżniami następuje na kole nominalnym.

Obliczając opory ruchu tocznego, autorzy założyli, że „czyste” toczenie występuje w obszarze, w którym prędkość poślizgu jest dodatnia dla bieżni zewnętrznej i ujemna dla bieżni wewnętrznej (rys. 5.4b)<sup>3</sup>. W takim przypadku obciążenia kontaktowe  $Q_{ri}, Q_{ro}$  ( $Q_r$  na rys. 10.1c) muszą być wzięte do obliczeń oporów ruchu z tytułu tarcia tocznego, a nie obciążenia  $Q_i, Q_o$ .

Dla wyznaczenia obciążeń kontaktowych  $Q_{ri}$  i  $Q_{ro}$  posłużymy się rys. 10.1c. Tę część obciążenia kontaktowego  $Q_{ri}, Q_{ro}$ , która jest odpowiedzialna za opory ruchu z tytułu tarcia tocznego, uzyskamy, całkując naprężenia kontaktowe (10.2) po obszarze, w którym występuje poślizg dodatni dla bieżni zewnętrznej i ujemny dla bieżni wewnętrznej, mianowicie:

$$Q_{ri} = 4 \frac{1,5Q_i}{\pi a_i b_i} \int_0^1 \int_{\phi_i}^{\pi/2} a_i b_i r \sqrt{1-r^2} dr d\phi = Q_i \left( 1 - \frac{2\phi_{1i}}{\pi} \right) \quad (10.33)$$

$$Q_{ro} = 4 \frac{1,5Q_o}{\pi a_o b_o} \int_0^1 \int_{\phi_o}^{\pi/2} a_o b_o r \sqrt{1-r^2} dr d\phi = Q_o \left( 1 - \frac{2\phi_{1o}}{\pi} \right)$$

Redukcję momentów oporu z tytułu tarcia tocznego  $M_{(T)ri}$  i  $M_{(T)ro}$  na wał napędowy (w tym wypadku na pierścień wewnętrzny łożyska) uzyskamy z warunku

<sup>3</sup> W artykule przyjęto taką notację dla prędkości poślizgu  $V_{(T)so}$  w obszarze kontaktu kulki z bieżnią zewnętrzną, że jest ona ujemna, natomiast w obszarze kontaktu z bieżnią wewnętrzną  $V_{(T)si}$  jest ona dodatnia. W obu takich przypadkach traktujemy poślizg zgodnie z notacją 23 (Houpert, 1999) jako ujemny, który jest źródłem oporów tarcia. Jeżeli któraś z prędkości poślizgu zmienia kierunek na przeciwny, traktujemy ten obszar jako występowanie poślizgu dodatniego, tzn. takiego, który nie jest źródłem oporów ruchu.

równoważności mocy tarcia tocznego i mocy napędowej na wale napędowym, mianowicie:

$$\left(M_{(T)ri} + M_{(T)ro}\right)\omega_B = M_{(T)r}\omega \quad (10.34)$$

gdzie  $M_{(T)r}$  – moment napędowy mierzony na wale napędowym łożyska.

Prędkość kątową kulki  $\omega_B$  można otrzymać z zależności (5.18) i wówczas moment napędowy  $M_{(T)r}$  można wyznaczyć następująco:

$$M_{(T)r} = \frac{Q_i f_i \left(1 - \frac{2\varphi_{li}}{\pi}\right) + Q_o f_o \left(1 - \frac{2\varphi_{lo}}{\pi}\right)}{M_B} \quad (10.35)$$

gdzie  $M_B$  – przyjęte oznaczenie (5.22).

Ostatecznie, opory ruchu z tytułu zjawiska spinu, poślizgu kulek po bieżniach i toczenia się kulek po bieżniach  $M_T$  w łożysku tocznym dla pojedynczej kulki, mierzone na wale napędowym (na pierścieniu wewnętrznym), są sumą składników, tj.:  $M_{si}^*$  i  $M_{so}^*$  (10.12) i (10.13),  $M_{(T)so}$  i  $M_{(T)si}$  (10.29) i  $M_{(T)r}$  (10.35), mianowicie:

$$M_T = M_{si}^* + M_{so}^* + M_{(T)so} + M_{(T)si} + M_{(T)r} \quad (10.36)$$

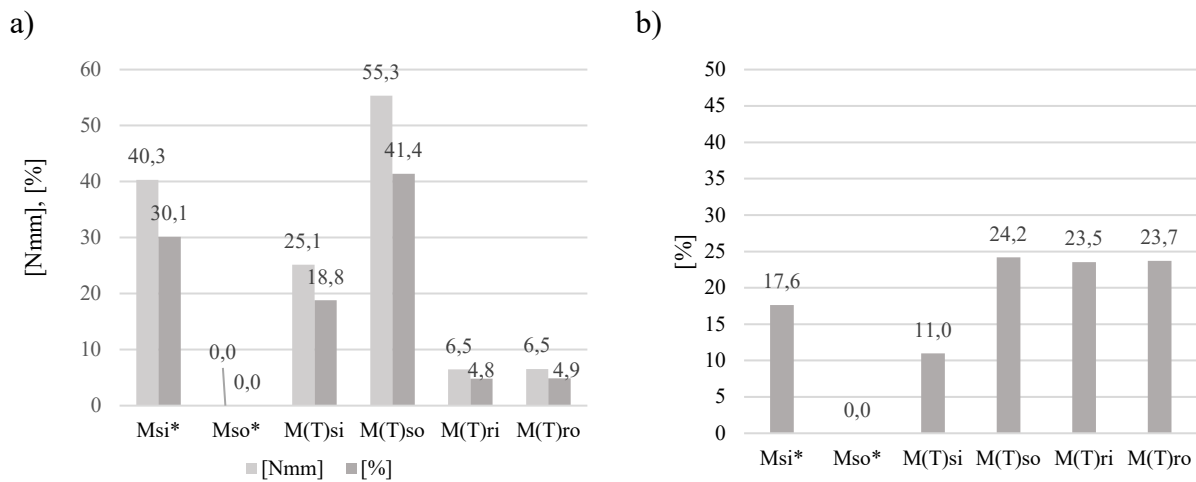
gdzie  $M_T$  – całkowity moment oporu w łożysku tocznym z tytułu zjawiska spinu, tarcia ślizgowego i tocznego, mierzony na wale napędowym (na pierścieniu wewnętrznym).

Dla zilustrowania udziału każdego ze składników w całkowitym oporze ruchu w łożysku z tytułu zjawiska spinu, tarcia ślizgowego i tocznego na rys. 10.5 przedstawiono ich porównanie dla testowego łożyska typu FAG B7013-E, dla prędkości 12 000 obr/min, napięcia wstępnego 1000 N, współczynnika tarcia ślizgowego  $\mu = 0,025$ , współczynnika tarcia tocznego  $f = 0,003$ , liczby kulek  $N = 19$ , obciążenia kontaktowego pojedynczej kulki  $Q_o = 174,0$  N,  $Q_i = 107,6$  N, długości większej półosi elipsy  $a_o = 1,77$  mm i  $a_i = 1,74$  mm, kątów działania  $\alpha_o = 18,0^\circ$ ,  $\alpha_i = 29,3^\circ$ , promieni:  $\rho_{lo} = 49,7$  mm,  $\rho_{li} = 42,6$  mm,  $\rho_{2o} = 0,0035$  mm,  $\rho_{2i} = 0,0036$  mm. Wszystkie te dane liczbowe zaczerpnięto z [31]. Rysunek 10.5a przedstawia procentowy udział i liczbowe wartości momentów oporu z zależności (10.36) dla arbitralnie przyjętych współczynników tarcia  $\mu$  i  $f$ , natomiast rys. 10.5b pokazuje procentowy udział poszczególnych składników zależności (10.36), ale bez uwzględnienia współczynników tarcia.

Wnioski z przeprowadzonej analizy są dosyć oczywiste: największy udział w oporach ruchu łożyska mają opory tarcia ślizgowego kulki o bieżnię zewnętrzną



$M_{(T)so}$ , – ponad 41%. Stosunkowo duży jest udział oporów ruchu z tytułu zjawiska spinu  $M_{si}^*$ , ponieważ sięga 30%. Względnie mały jest udział oporów ruchu z tytułu tarcia ślizgowego kulki o bieżnię wewnętrzną  $M_{(T)si}$ , ok. 19%, natomiast opory ruchu z tytułu toczenia się kulek po bieżniach  $M_{(T)ri}$  i  $M_{(T)ro}$  są stosunkowo małe, tj. ok. 5%. Wpływ współczynników tarcia na opory ruchu przedstawia rys. 10.5b. Widać to przede wszystkim w radykalnym wzroście oporów z tytułu tarcia tocznego. Jest on zbliżony do wpływu oporów z tytułu tarcia ślizgowego.



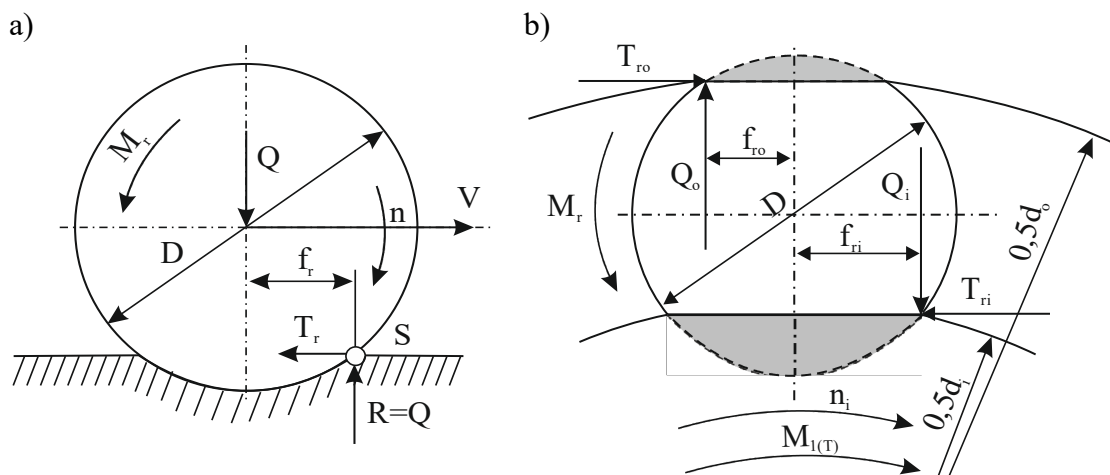
Rys. 10.5. Porównanie oporów ruchu w łożysku z tytułu zjawiska spinu, tarcia ślizgowego i tocznego dla arbitralnie przyjętych współczynników tarcia  $\mu$  i  $f$  (a) i bez udziału współczynników tarcia (b)

Fig. 10.5. Comparison of movement resistance in a rolling bearing due to sliding, spinning and rolling friction for arbitrarily accepted coefficients of friction  $\mu$  and  $f$  (a) and without taking into account the coefficients of friction (b)

Wpływ oporów ruchu z tytułu zjawiska spinu jest stosunkowo duży, pomimo że uwzględnione zostały tylko opory na bieżni wewnętrznej  $M_{si}^*$  ( $M_{so}^* = 0$  z uwagi na przyjętą hipotezę kontrolowanej bieżni zewnętrznej). W przypadku innej hipotezy opory  $M_{so}^* > 0$  i wtedy łączny udział zjawiska spinu w oporach ruchu może istotnie wzrosnąć.

## 11. WYZNACZANIE WSPÓLCZYNNIKA TARCIA TOCZNEGO ŁOŻYSK TOCZNYCH

Skuteczność analitycznego wyznaczenia oporów ruchu łożyska tocznego zależy zasadniczo od współczynników tarcia tocznego. Zwykle konstruktor węzła łożyskowego przyjmuje wartość współczynnika tarcia podaną w literaturze. Typowe wartości współczynników tarcia tocznego dla łożysk tocznych to wartości z przedziału 0,001-0,005.



Rys. 11.1. Tradycyjny model tarcia tocznego (a) i jego zastosowanie do łożyska tocznego (b);  $f_r$  – współczynnik tarcia tocznego,  $T_r$  – siła tarcia tocznego,  $M_r$  – moment tarcia tocznego,  $M_{l(T)}$  – moment tarcia spowodowany ruchem tocznym na bieżniach; i – bieżnia wewnętrzna, o – bieżnia zewnętrzna [32]

Fig. 11.1. Traditional model of rolling friction (a) and its application to a rolling bearing (b);  $f_r$  – rolling friction coefficient,  $T_r$  – rolling friction force,  $M_r$  – rolling friction moment,  $M_{l(T)}$  – friction moment caused by rolling motion on raceways; i – inner raceway, o – outer raceway [32]

Założono, że opory ruchu (opory tarcia tocznego)  $M_r$  wynikające z ruchu tocznego na bieżniach należy wyznaczać wg tradycyjnego, idealnego modelu tarcia tocznego (rys. 11.1), tj. jako iloczyn obciążenia normalnego (reakcji)  $R$  i konwencjonalnego współczynnika tarcia tocznego  $f_r$  (11.1).

$$M_r = Rf_r \quad (11.1)$$

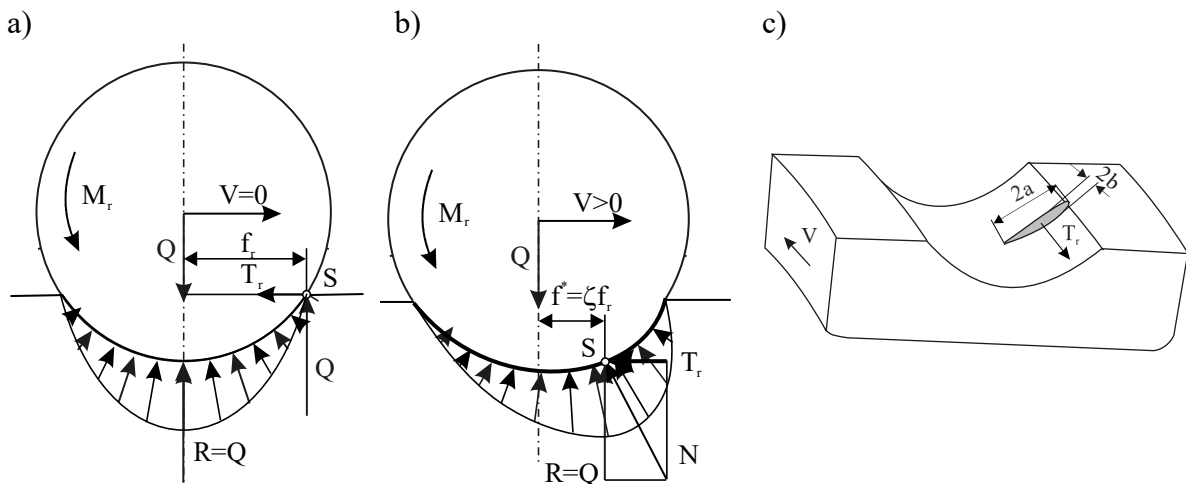
gdzie:  $M_r$  – moment tarcia tocznego,  
 $R$  – reakcja podłoża,  
 $f_r$  – współczynnik tarcia tocznego.

Stąd siła tarcia tocznego  $T_r$  przedstawia się następująco:

$$T_r \approx \frac{2M_r}{D} = \frac{2Rf_r}{D} = \frac{2Qf_r}{D} \quad (11.2)$$

gdzie:  $T_r$  – siła tarcia tocznego,  
 $Q$  – obciążenie normalne,  
 $D$  – średnica kulki.

Konwencjonalny współczynnik tarcia tocznego  $f_r$  to ramię, na którym działa reakcja  $R$ , generująca moment tarcia tocznego  $M_r$ , stąd wyrażony jest w jednostkach długości. Siły tarcia tocznego  $T_{ri}$ ,  $T_{ro}$  w strefach kontaktu kulki i bieżni (rys. 11.1b) są źródłem momentów tarcia tocznego na ramieniu  $D/2$ .



Rys. 11.2. Hipotetyczny rozkład obciążeń i odkształceń kontaktowych w obszarze kulki i bieżni: a) dla kulki w spoczynku, b) dla kulki w ruchu, c) hipotetyczna elipsa kontaktowa:  $V$  – prędkość,  $N$  – obciążenie wypadkowe,  $a$  – duża półoś,  $b$  – mała półoś

Fig. 11.2. Hypothetical distribution of loads and contact deformations in the area of the ball and raceway: a) for a resting ball, (b), for a ball in motion, (c) hypothetical contact ellipse:  $V$  – speed,  $N$  – resultant load,  $a$  – large semi-axes,  $b$  – small semi-axis

Rysunek 11.1 i zależność (11.1) określają tzw. konwencjonalny współczynnik tarcia tocznego. Zgodnie z tym modelem tarcia tocznego środek chwilowego obrotu kulki znajduje się w punkcie S, podobnie jak reakcja  $R$ , równoważąca obciążenie  $Q$ . W rzeczywistości na skutek odkształceń kontaktowych (na wlocie wybrzuszenie, a na wylocie może wystąpić niedostatek materiału – rys. 11.2b) naciski kontaktowe nie są

rozłożone symetrycznie [32], zewnętrzne obciążenie  $Q$  jest równoważone przez obciążenie kontaktowe o określonym rozkładzie (rys. 11.2b). Środek chwilowego obrotu  $S$  ma wówczas inne położenie (rys. 11.2b) niż na rys. 11.2a. Przy przyjęciu nadal tej samej definicji współczynnika tarcia tocznego jako ramienia, na którym działa reakcja  $R$ , dla przypadku jak na rys. 11.2b, będzie on inny niż wartość  $f_r$ , tj.:

$$f_r^* = \xi f_r \quad (11.3)$$

gdzie:  $f_r^*$  – zmodyfikowana wartość współczynnika tarcia tocznego,

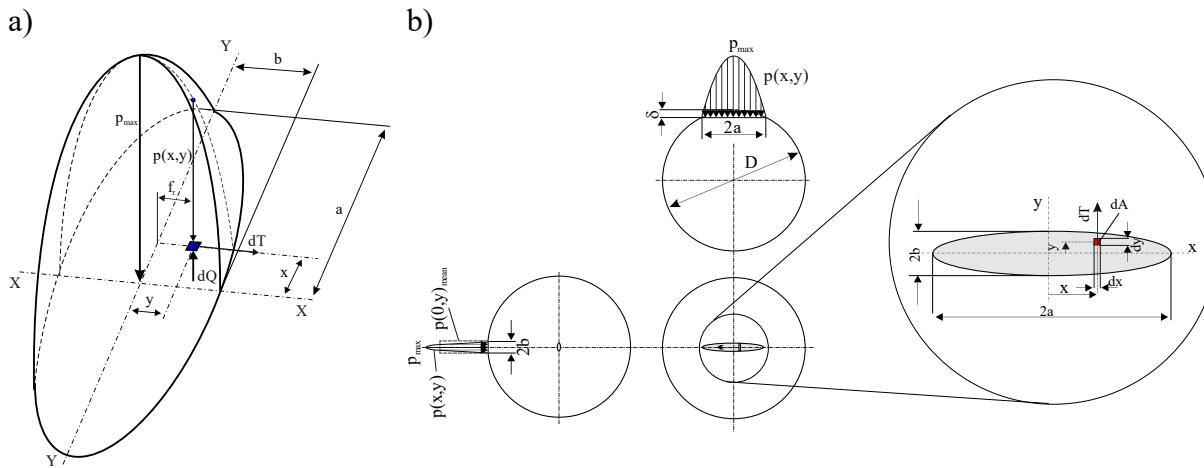
$\xi$  – stała.

Na rys. 11.3 przedstawiono typowy model Hertza strefy kontaktu.

Podstawowe założenie dla analitycznego wyznaczenia współczynnika tarcia tocznego jest następujące: współczynnik tarcia tocznego  $f_r$  jest równy małej półosi  $b$  elipsy kontaktowej (rys. 11.2c i rys. 11.3b), ponieważ półoś  $b$  jest skierowana zgodnie z wektorem prędkości  $V$  (rys. 11.2c). W takim przypadku możemy założyć, że mamy do czynienia z tożsamością (11.4):

$$f_r = b \quad (11.4)$$

czyli, że konwencjonalny współczynnik tarcia tocznego jest równy połowie małej osi elipsy kontaktowej.



Rys. 11.3. Typowy model Hertza strefy kontaktu  $p(x,y)$ ;  $p_{max}$  – nacisk powierzchniowy w geometrycznym środku elipsy;  $\delta$  – przemieszczenie kontaktowe,  $dT$  – elementarna siła tarcia

Fig. 11.3. Typical Hertz model of the contact zone  $p(x, y)$ ;  $p_{max}$  – surface pressure in the geometric center of the ellipse;  $\delta$  – contact displacement,  $dT$  – elementary friction force

Zmodyfikowany współczynnik tarcia tocznego  $f_r^*$  będzie zatem funkcją długości mniejszej półosi elipsy (11.5).

$$f_r^* = \xi b \quad (11.5)$$

Ze względu na asymetryczny rozkład nacisków (rys. 11.2b) nie można wykluczyć, że współczynnik  $\xi$  może być większy niż 1, co oznacza, że współczynnik tarcia tocznego  $f_r^*$  będzie większy niż mała półoś  $b$ .

Obciążenie kontaktowe  $Q$  występuje w postaci nacisków powierzchniowych  $p(x,y)$ . Elementarny nacisk powierzchniowy  $p(x,y)$  powoduje wystąpienie obciążenia elementarnego  $dQ$  i momentu tarcia  $dM_r(x,y)$  wg następującej relacji:

$$dM_r(x,y) = dQf_r = p(x,y)f_r dA \quad (11.6)$$

gdzie:  $dM_r(x,y)$  – elementarny moment tarcia w strefie kontaktu kulka-bieżnia,

$dQ$  – elementarne obciążenie normalne,

$p(x,y)$  – nacisk powierzchniowy w miejscu o współrzędnych  $(x,y)$ ,

$f_r$  – współczynnik tarcia tocznego,

$dA$  – elementarna powierzchnia kontaktu.

Zgodnie z rys. 11.3b całkowity moment tarcia tocznego można wyrazić jako:

$$M_r(x,y) = \iint_A p(x,y)f_r dA \quad (11.7)$$

Całkowity moment tarcia tocznego zależy od rozkładu nacisków powierzchniowych  $p(x,y)$ , współczynnika tarcia tocznego  $f_r$  oraz od powierzchni strefy kontaktu  $A$ .

Rozkład nacisków powierzchniowych zwykle nie jest znany. Dla symetrycznego kształtu rozkładu (rys. 11.3a) możemy wykorzystać typowy model Hertza strefy kontaktu  $p(x,y)$ .

Nacisk powierzchniowy w strefie kontaktu wg Hertza można zilustrować w następujący sposób:

$$p(x,y) = p_{\max} \sqrt{\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right)} \quad (11.8)$$

gdzie:  $p_{\max}$  – nacisk powierzchniowy w geometrycznym środku elipsy,

$a, b$  – duża i mała półoś elipsy,

a w geometrycznym środku elipsy  $p_{\max}$  dla elementu tocznego w postaci kuli wynosi:

$$p_{\max} = \frac{3Q}{2\pi ab} \quad (11.9)$$

Zgodnie z rys. 11.3b i równaniem (11.7) moment tarcia tocznego można przedstawić następująco:

$$M_r(x,y) = \iint_A yp(x,y)dA \quad (11.10)$$

Ponieważ elementarna powierzchnia  $dA$ , zgodnie z równaniem (11.7) i rys. 11.3b, wynosi:

$$dA = dx dy \quad (11.11)$$

i wykorzystując współrzędne eliptyczne ( $x = a \cos \phi$ ,  $y = b r \sin \phi$ ), ostatecznie całkowity moment tarcia tocznego można wyrazić w następujący sposób:

$$M_r(x, y) = \iiint_A br \sin \phi p(r, \phi) a b r d r d \phi = \frac{3 Q b}{2 \pi} \int_0^1 \int_0^\pi r^2 \sqrt{1-r^2} \sin \phi d \phi d r \quad (11.12)$$

Rozwiązanie całki wydaje się trudne. Z tego powodu autorzy wykorzystali metodę numeryczną do obliczenia momentu tarcia tocznego.

Po numerycznym całkowaniu (11.12) moment tarcia  $M_r$  będzie równy:

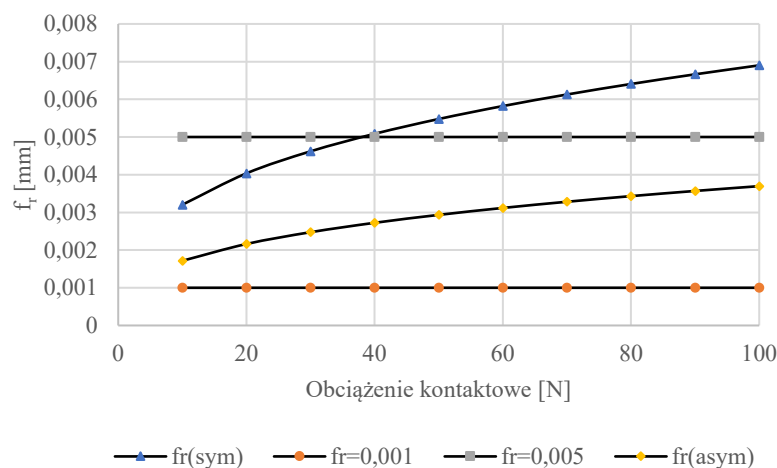
$$M_r(x, y) \approx 0,1867 Q b \quad (11.13)$$

Z porównania równań (11.13) i (11.2) można wnioskować, że współczynnik tarcia tocznego  $f_r$  jest funkcją półosi  $b$  w następujący sposób:

$$f_r = 0,1867 b \quad (11.14)$$

i zgodnie z równaniem (11.5) stała  $\xi = 0,1867$ .

Zgodnie z rys. 11.2b i rys. 11.2c można stwierdzić, że symetryczny rozkład naprężeń normalnych w strefie kontaktu łożyska skośnego występuje rzadko. Rzeczywista postać strefy kontaktu (rys. 11.2c) różni się od modelu Hertza (rys. 11.3a). Oznacza to, że stała  $\xi$  w rzeczywistym łożysku skośnym również może się różnić od (11.4).



Rys. 11.4. Zależność współczynnika tarcia tocznego  $f_r$  w funkcji obciążenia kontaktowego  $Q$ ; fr(sym) – wg (11.4), fr(asym) – wg (11.5)

Fig. 11.4. Dependence of the rolling friction coefficient  $f_r$  as a function of the contact load  $Q$ ; fr(sym) – acc. to (11.4), fr(asym) – acc. (11.5)

Obliczenie pól  $a$  i  $b$  wymaga modelu kontaktowego, np. modelu wg [31].

Na rys. 11.4 przedstawiono w sposób orientacyjny zmiany konwencjonalnego współczynnika tarcia tocznego  $f_r$  w funkcji obciążenia dla badanego łożyska FAG B7013-E, równania (11.5) i (11.4).

Pokazaną na rys. 11.4 charakterystykę współczynnika tarcia tocznego uzyskano dla symetrycznego (11.8) i asymetrycznego (11.15) rozkładu nacisków powierzchniowych,

$$p_{asyn}(x,y) = p_{max} \sqrt{\left(1 - \left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2\right)} \quad (11.15)$$

gdzie:  $p_{asyn}(x,y)$  – asymetryczny rozkład nacisku powierzchniowego,  
 $x_0$  i  $y_0$  – współrzędne środka elipsy.

Na rysunku tym przedstawiono również granice  $f_r = 0,001$  i  $f_r = 0,005$ , w których mieści się podawany w literaturze współczynnik tarcia tocznego. Jak można zauważyć, współczynnik tarcia obliczony na podstawie zależności (11.4) dla symetrycznego rozkładu nacisku powierzchniowego nie mieści się w tych granicach w pełnym zakresie obciążeń kontaktowych 0-100 N.

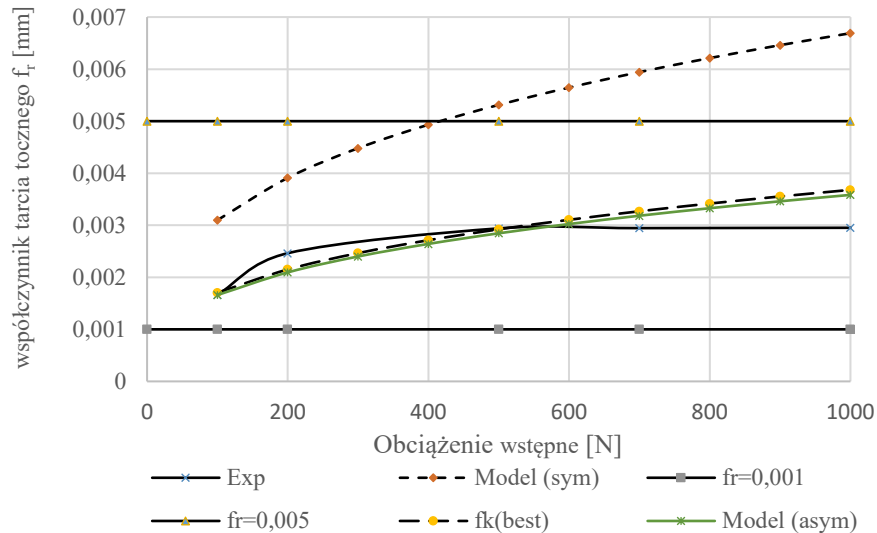
Rysunek 11.4 pokazuje również współczynnik tarcia na podstawie zależności (11.15) dla rozkładu asymetrycznego ( $x_0 = 0,2a$ ,  $y_0 = 0,0$ ). W takim przypadku współczynnik tarcia mieści się w tych granicach w pełnym zakresie obciążeń kontaktowych. Potwierdza to, że rozkład nacisków powierzchniowych ma istotny wpływ na współczynnik  $\xi$  (11.5), a więc również na współczynnik tarcia  $f_r^*$ .

W [32] przedstawione zostały wyniki eksperymentalnej weryfikacji analitycznej metody wyznaczania współczynnika tarcia tocznego. Rezultatem weryfikacji jest rys. 11.5, na którym przedstawiono zależność współczynnika tarcia tocznego wyznaczonego wg zaproponowanej metody oraz określonego eksperymentalnie.

Na rys. 11.5 pokazano przebieg współczynnika tarcia tocznego wyznaczonego analitycznie z wykorzystaniem modelu (11.4) i (11.15). Przebieg Model (sym) odnosi się do symetrycznego rozkładu nacisków powierzchniowych, a Model (asym) do asymetrycznego rozkładu nacisków powierzchniowych.

Na rys. 11.5 pokazano ponadto przebieg współczynnika tarcia tocznego  $f_k(\text{best})$ , dla którego współczynnik  $\xi$  (11.5) został dostrojony do zmierzonego doświadczalnie momentu obrotowego Exp. Dostrojony współczynnik  $\xi$  był mniejszy niż obliczono za pomocą równania (11.5), co oznacza, że rzeczywisty rozkład nacisku powierzchniowego nie był symetryczny.

Różnica pomiędzy współczynnikami tarcia tocznego wyznaczonymi analitycznie i eksperymentalnie nie przekracza 20%, co wydaje się dopuszczalne z inżynierskiego punktu widzenia.



Rys. 11.5. Zależność współczynnika tarcia tocznego  $f_r$  od napięcia wstępnego badanego łożyska skośnego typu FAG B7013-E;  $f_k(\text{best})$  – zależność współczynnika tarcia dla najlepszego dostrojenia współczynnika  $\xi$  (11.5), Exp – współczynnik tarcia uzyskany z badań doświadczalnych, Model (sym) i Model (asym) – współczynniki tarcia obliczone za pomocą modeli (11.4) i (11.5)

Fig. 11.5. Dependence of the rolling friction coefficient  $f_r$  on the pre-load of the tested FAG B7013-E angular contact bearing;  $f_k(\text{best})$  – friction coefficient for the best tuning of the coefficient  $\xi$  (11.5), Exp – friction coefficient obtained from experimental tests, Model (sym) and Model (asym) – friction coefficients calculated using the models (11.4) and (11.15)



## 12. NUMERYCZNA WERYFIKACJA MODELI OBLICZENIOWYCH

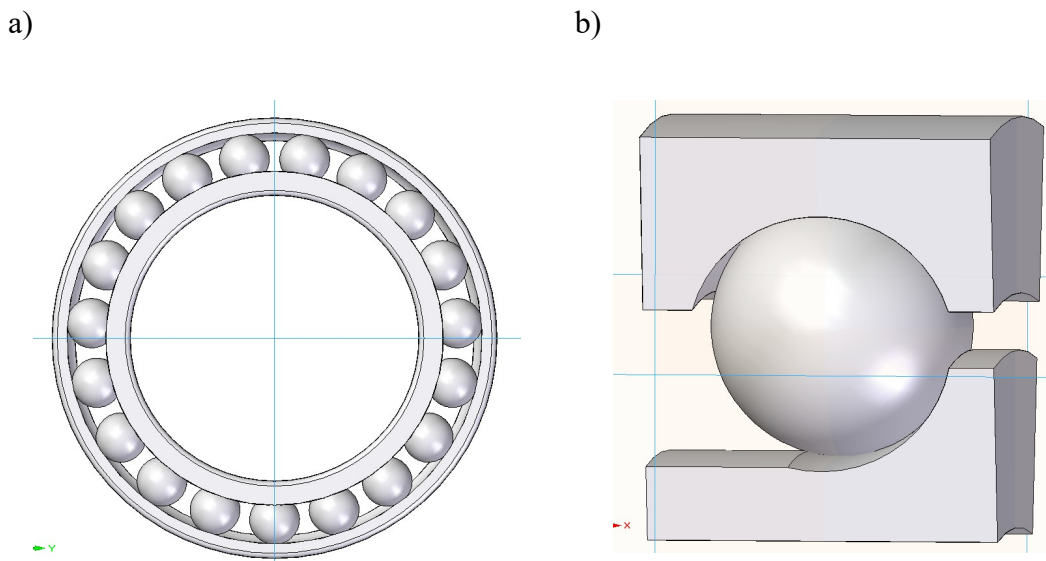
Omówione do tej pory modele obliczeniowe opierają się na modelu kontaktowym (teorii) Hertza. W myśl tej koncepcji w teoretycznym obszarze kontaktu dwóch ciał powstaje powierzchnia, której kształt i wymiary geometryczne zależą od krzywizn obu ciał oraz sił normalnych występujących w tym obszarze. Przykładowo, w obszarze kontaktu ciała kulistego i ciała płaskiego powstaje powierzchnia o kształcie elipsy, której duża i mała oś zależą od promienia kuli i sił normalnych.

W układach rzeczywistych taka wyidealizowana sytuacja jest niemożliwa. Wynika to m.in. z tego, że skończona dokładność geometryczna elementów mechanicznych (dokładność kształtu i wymiarów oraz chropowatość powierzchni wierzchniej), np. kulek czy pierścieni łożyskowych, powoduje występowanie wielu obszarów kontaktowych. Kulka łożyska styka się z bieżnią łożyska w wielu miejscach (wiele rozdzielnych obszarów kontaktowych), pomimo że krzywizny obu elementów są różne (teoretycznie powinien to być jeden obszar kontaktowy). Wówczas zastosowanie modeli obliczeniowych przedstawionych w poprzednich rozdziałach jest mocno ograniczone.

Pewną możliwością uwzględnienia zbliżonych do rzeczywistych wielkości geometrycznych elementów w kontakcie jest aplikacja metod numerycznych, tj. metody elementów skończonych. W metodzie tej użytkownik może zamodelować geometrie elementów będących w kontakcie wg swojego uznania (nie można zamodelować geometrycznych cech warstwy wierzchniej, czyli chropowatości powierzchni). W dalszym ciągu przedstawiono próbę modelowania zjawisk kontaktowych w łożysku skośnym, które było do tej pory przedmiotem rozważań analitycznych. Porównanie wyników modelowania numerycznego z wynikami badań analitycznych może przynajmniej częściowo odpowiedzieć na pytanie o przydatność metod analitycznych do wyznaczania oporów ruchu łożysk skośnych.

## 12.1. Model łożyska na potrzeby analizy MES

Analizy z użyciem MES, z uwagi na dużą czasochłonność obliczeń, prowadzi się na możliwie najprostszycy modelach geometrycznych. W praktyce oznacza to wykorzystanie wszystkich możliwych płaszczyzn, linii, punktów symetrii, które pozwalają podzielić obiekt i wziąć do analizy tylko jego fragment. Na rys. 12.1 pokazano fragment łożyska, którego postać geometryczna wynika z istniejących płaszczyzn symetrii.



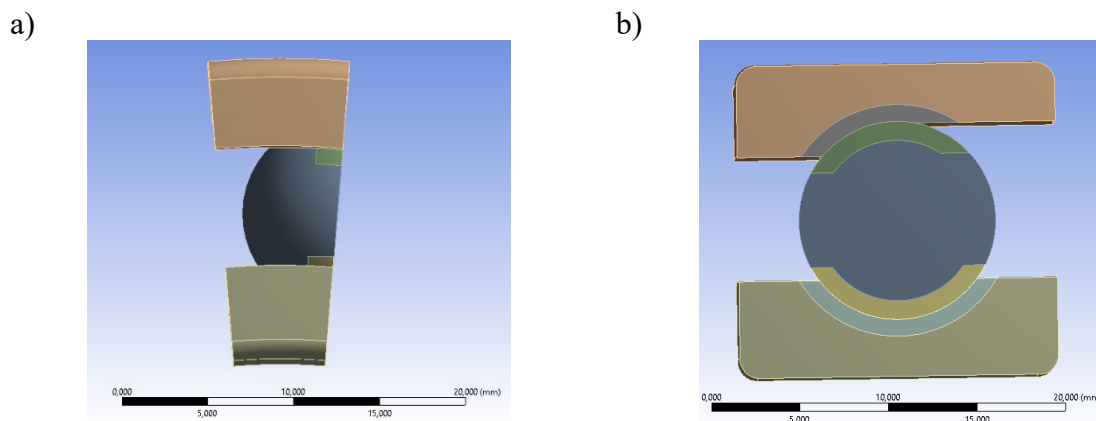
Rys. 12.1. Widok całego łożyska (a) oraz jego fragmentu (b), którego postać wynika z wykorzystania istniejących płaszczyzn symetrii

Fig. 12.1. View of the entire bearing (a) and its fragment (b), the form of which follows from the use of existing planes of symmetry

Do badań symulacyjnych wzięto model łożyska jeszcze bardziej uproszczony niż pokazany na rys. 12.1 [40]. Pokazano go na rys. 12.2. Wykorzystano ponadto płaszczyznę symetrii kulki łożyskowej i do dalszej analizy wzięto tylko połowę pojedynczej kulki.

Drugim, niezwykle istotnym problemem w odniesieniu do modelowania łożyska tocznego są zagadnienia kontaktowe. Geometryczny model kontaktu ma decydujący wpływ na analizę stanu obciążenia i odkształcenia metodą elementów skończonych.

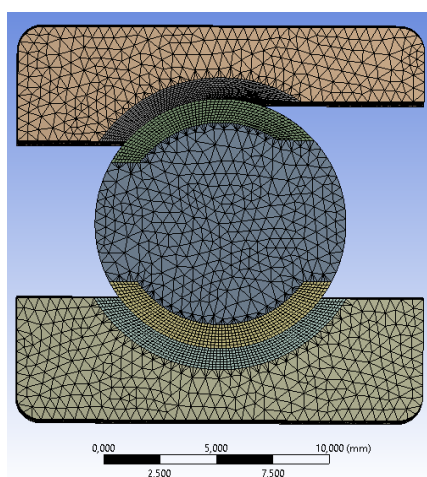
Dla ułatwienia tworzenia siatki elementów skończonych (ES) w modelu geometrycznym łożyska wyodrębniono obszary, w których siatka ES-ów będzie zagęszczana. Zobrazowano to na rys. 12.2.



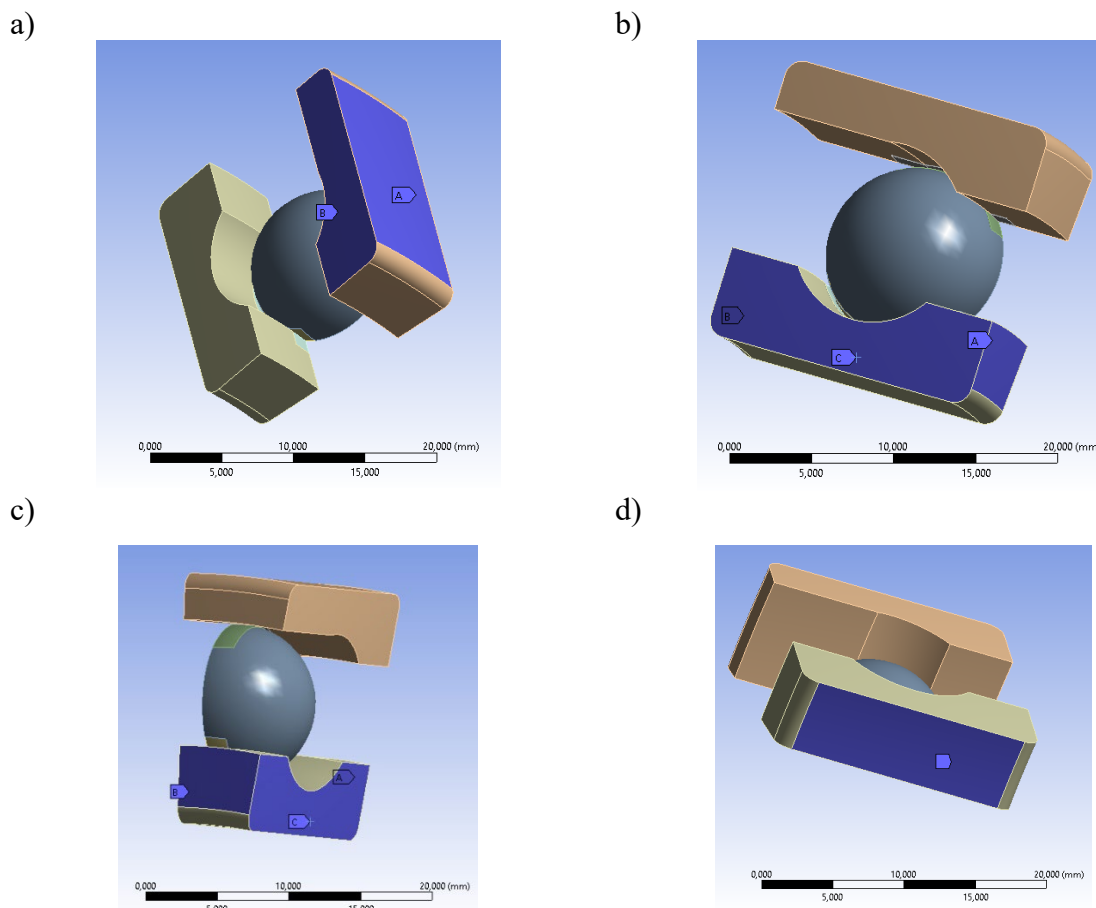
Rys. 12.2. Uproszczony model łożyska przyjęty do badań numerycznych (a) oraz wyodrębnione obszary do modelowania stref kontaktowych (b)  
 Fig. 12.2. A simplified bearing model adopted for numerical tests (a) and separate areas for modeling contact zones (b)

W kolejnym kroku metody elementów skończonych definiuje się właściwości materiałowe. W przypadku łożyska zagadnienie o tyle jest proste, że elementy łożyska wykonywane są ze stali łożyskowej, której właściwości są na ogół zapisane w bibliotece materiałowej, w tym przypadku, w bibliotece systemu Ansys. Pod uwagę wzięto stal łożyskową ŁH15, zarówno dla kulki jak i pierścieni łożyskowych.

Siatkę ES-ów generuje się na ogół automatycznie, z tym, że dla elementów nie będących w kontakcie wymiar siatki może być stosunkowo duży, rzędu 0,5 mm, natomiast w strefach kontaktowych siatkę na ogół się zagęszcza do wielkości rzędu 0,1-0,15 mm. Tym niemniej, liczba elementów skończonych jest na ogół znaczna, 100 tys. i więcej. Na rys. 12.3 pokazano przykładowy model łożyska po meszowaniu.



Rys. 12.3. Widok modelu łożyska po meszowaniu (wygenerowaniu siatki ES-ów)  
 Fig. 12.3. View of the bearing model after meshing (generating the ES mesh)



Rys. 12.4. Graficzna prezentacja stopni swobody modelu łożyska  
 Fig. 12.4. Graphical presentation of the degrees of freedom of the bearing model

Istotny dla wyników symulacji jest sposób definiowania stopni swobody modelu. Przyjęto za zasadę, że odbierane zostają stopnie swobody pierścienia wewnętrznego i zewnętrznego w kierunkach normalnych do powierzchni gniazda łożyskowego i powierzchni wałka, i to z pominięciem oporów tarcia. Jest to duże uproszczenie, ale dla celów badań kontaktowych w obszarze kulka – bieżnie pierścieni wydaje się dopuszczalne. Na rys. 12.4 przedstawiono, w sposób symboliczny, odebrane stopnie swobody.

Dla zdefiniowania stanu obciążenia modelu łożyska skośnego przyjęto następujące założenia:

- Obciążenie łożyska wynika tylko z sił napięcia wstępnego.
- Obciążenie łożyska wynika z sił odśrodkowych, jakie powstają podczas ruchu obrotowego kulki i pierścienia wewnętrznego oraz z sił napięcia wstępnego.
- Obciążenie łożyska wynika z sił żyroskopowych, jakie powstają podczas ruchu obrotowego kulki wokół własnej osi oraz z sił napięcia wstępnego.

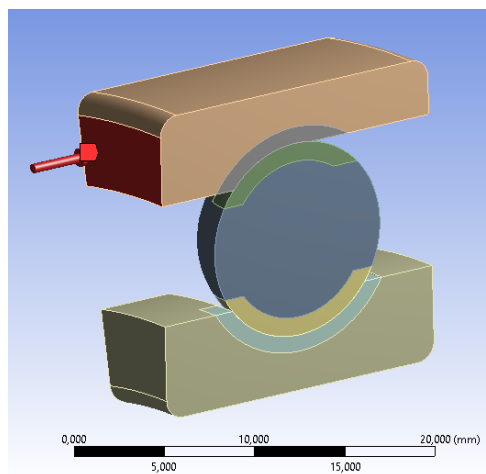
Taka definicja stanu obciążenia modelu łożyska wynika z możliwości systemu Ansys, który nie ma wariantu równoczesnego zamodelowania sił odśrodkowych i żyroskopowych. Można zamodelować albo siły odśrodkowe i siły napięcia wstępnego, albo siły żyroskopowe i siły napięcia wstępnego.

Obciążenie z tytułu napięcia wstępnego najwygodniej zamodelować w postaci ciśnienia działającego na powierzchnię czołową pierścienia łożyskowego (rys. 12.5). Na tym rysunku przedstawiono sposób modelowania napięcia wstępnego w postaci ciśnienia. Wartość ciśnienia wynika z wielkości siły napięcia wstępnego i powierzchni czołowej pierścienia łożyskowego. Modelowanie sił odśrodkowych lub żyroskopowych polega na zadaniu prędkości obrotowej, w tym przypadku kulce łożyskowej, i wskazaniu osi obrotu. Dla zamodelowania siły odśrodkowej oś obrotu pokrywa się z osią łożyska, a w przypadku sił żyroskopowych oś obrotu pokrywa się z osią kulki, wokół której kulka toczy się po bieżni. Oś ta przecina się z osią łożyska i jest odchylona o kąt  $\beta$  (rys. 4.1).

Najważniejszym etapem tworzenia modelu MES jest definicja kontaktu kulki z bieżniami pierścieni łożyskowych, celem badań była bowiem analiza naprężeń, odkształceń, przemieszczeń i reakcji w obszarze kontaktu.

W systemie Ansys istnieje kilka modeli numerycznych kontaktu. Do dalszej analizy przyjęto najbardziej ogólny model kontaktu, typu *Frictional*, który pozwala na modelowanie poślizgu w tej strefie oraz zjawiska tarcia. Użytkownik musi zdefiniować współczynnik tarcia pomiędzy elementami będącymi w kontakcie, współczynnik sztywności kontaktowej i algorytm obliczeniowy.

Wybór współczynnika tarcia jest sprawą arbitralną.



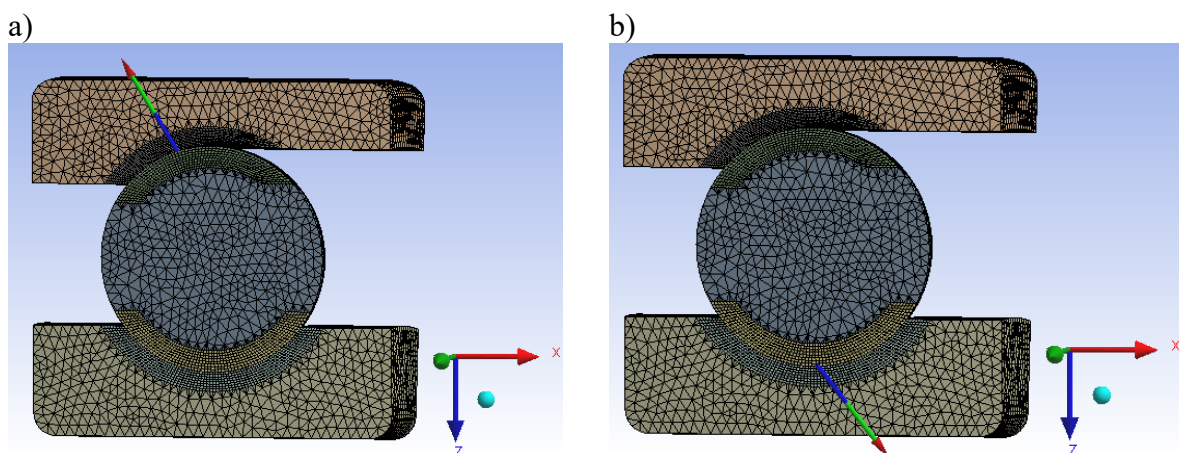
Rys. 12.5. Modelowanie stanu obciążenia od sił napięcia wstępnego  
Fig. 12.5. Modeling of the load state due to preload forces

O ile współczynnik tarcia nie ma tak zasadniczego wpływu na zjawiska kontaktowe, o tyle współczynnik sztywności  $k$  jest parametrem bardzo znaczącym. W Ansysie nie definiuje się bezwzględnej wartości sztywności kontaktowej, definiuje się tylko współczynnik korekcyjny, zwany współczynnikiem sztywności. Wartość  $k = 1$  takiego współczynnika oznacza, że sztywność kontaktowa będzie równa wartości domyślnej. Użytkownik może zadeklarować sztywność kontaktową mniejszą ( $0 < k < 1$ ) lub większą ( $k > 1$ ). W praktyce trzeba dostroić, metodą prób i błędów, wartość współczynnika sztywności, np. do wyników uzyskanych z eksperymentu. Należy zauważyć, że w trakcie obliczeń sztywność ulega aktualizacji, o co dba sam program (Solver).

W celu poprawnego opisu zjawisk kontaktowych należy zdefiniować (wybrać z kilku dostępnych) algorytm obliczeniowy. Kierując się sugestiami literaturowymi (instrukcją Ansysa), dla celów tej analizy przyjęto algorytm Augmented Lagrange'a. Algorytm ten wydłuża czas obliczeń, ale wyniki wydają się bliższe rzeczywistości.

## 12.2. Wyniki badań symulacyjnych

Badania symulacyjne przeprowadzono każdorazowo tylko dla napięcia wstępnego łożyska oraz łącznie, dla napięcia wstępnego i występowania siły odśrodkowej lub żyroskopowej.

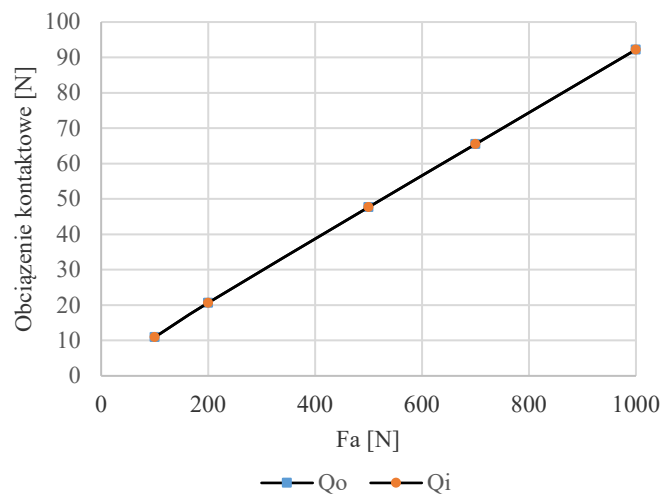


Rys. 12.6. Wizualizacja sił reakcji w obszarze kontaktu: a) na pierścieniu zewnętrznym, b) na pierścieniu wewnętrznym

Fig. 12.6. Visualization of reaction forces in the contact area: a) on the outer ring, b) on the inner ring

Jak już wspomniano, dla oceny oporów ruchu łożysk istotne są siły reakcji w strefie kontaktu. System Ansys umożliwia wyznaczanie takich sił. Rysunek 12.6 przedstawia wizualizację sił reakcji w obszarze kontaktu, które to reakcje utożsamiano z siłami kontaktowymi.

Wizualizacja na rys. 12.6 pozwala na zorientowanie się w przestrzennym usytuowaniu wektorów siły reakcji i ich punktów zaczepienia. Na rys. 12.7 przedstawiono ilościowe relacje pomiędzy siłami reakcji w strefie kontaktu kulki z pierścieniem zewnętrznym i pierścieniem wewnętrznym w funkcji napięcia wstępnego.



Rys. 12.7. Graficzna prezentacja obciążenia kontaktowego w funkcji napięcia wstępnego w strefie kontaktu kulki z pierścieniem zewnętrznym  $Q_o$  i wewnętrznym  $Q_i$

Fig. 12.7. Graphical presentation of contact loads as a function of preload in the contact zone of the ball with the outer  $Q_o$  and inner  $Q_i$  rings

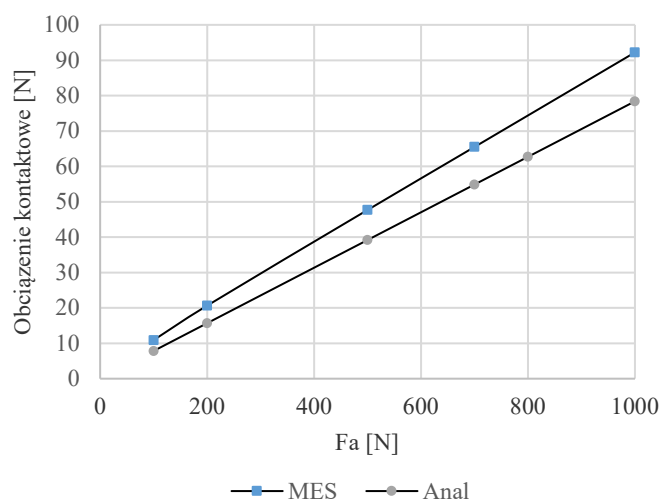
Z analizy rys. 12.7 można wysnuć wniosek, że na każdy 1 N przyrostu siły napięcia wstępnego siła reakcji całkowitej w strefie kontaktu wzrasta o ok. 0,049 N. Ponieważ wektor reakcji całkowitej przyjmuje jakieś położenie w przestrzeni, więc nie można jego wartości przyjmować do obliczeń oporów ruchu. Należy zrzutować go na kierunek normalny do bieżni pierścienia lub powierzchni kulki i tę składową dopiero wziąć do obliczeń oporów ruchu. Niemniej jednak wyniki badań symulacyjnych pozwalają oszacować wielkość siły reakcji w strefie kontaktu, a tym samym i porównać np. z wynikami obliczeń analitycznych.

Na rys. 12.8 dokonano porównania wpływu napięcia wstępnego na siły reakcji w strefie kontaktu, uzyskane z badań numerycznych i analitycznych. Wniosek z tego porównania jest dosyć oczywisty: jakościowo wpływ ten jest podobny, ale ilościowo różni się o ok. 12%. Siły reakcji kontaktowych wyznaczone metodą numeryczną są większe.



Jedną z możliwych przyczyn rozbieżności wyników jest nieznaną, domyślną wartość sztywności kontaktowej, przyjęta w systemie Ansys. W modelu analitycznym ta sztywność jest ściśle zdefiniowana zależnościami (9.8), (9.10) lub (9.12).

Ważną wielkością mechaniczną łożyska są przemieszczenia w strefie kontaktu. Te przemieszczenia decydują o sztywności mechanicznej łożyska, a tym samym i o sztywności wrzeciona. Sztywność wrzeciona wpływa na dokładność geometryczną obrabiarki.



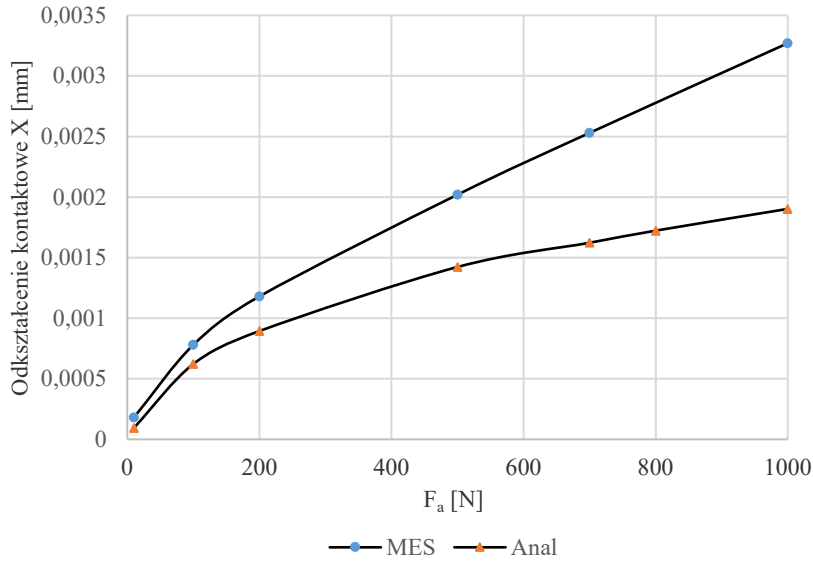
Rys. 12.8. Porównanie wyników badań wpływu napięcia wstępnego na obciążenia kontaktowe: MES – symulacje numeryczne, Anal – badania analityczne

Fig. 12.8. Results comparison of the influence of preload on contact loads: MES – computer simulation, Anal – analytical computation

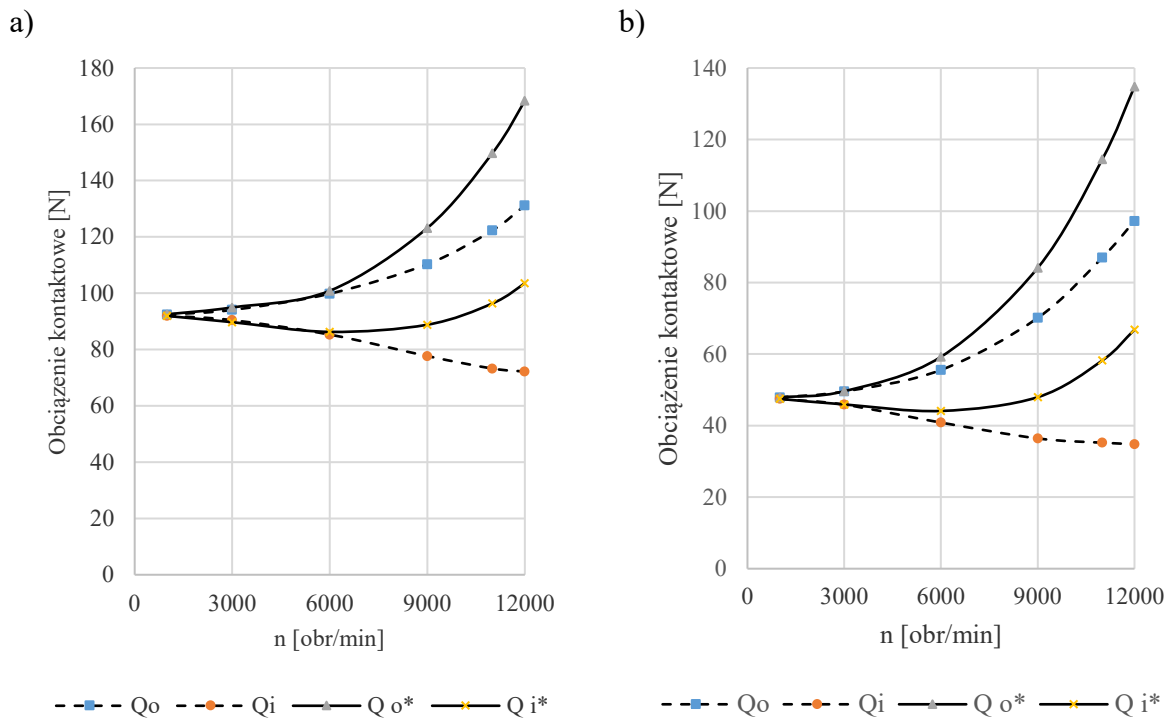
Ponadto przemieszczenia są taką wielkością mechaniczną, którą jest stosunkowo łatwo mierzyć. Stanowi więc parametr, który może być wykorzystany do weryfikacji eksperymentalnej modeli obliczeniowych, np. wyników symulacji komputerowej. Na rys. 12.9 przedstawiono wyniki symulacji MES w postaci przemieszczeń osiowych w strefie kontaktu w kierunku X (kierunek zgodny z wektorem napięcia wstępnego).

Dla porównania, na rys. 12.9 przedstawiono także wyniki uzyskane z badań analitycznych. Oba wyniki różnią się ilościowo, jakkolwiek można mówić o zgodności jakościowej. Przemieszczenia uzyskane z badań numerycznych są większe niż z badań analitycznych. Ponadto zależności na rys. 12.9 są nieliniowe, co jest zgodne z modelem Hertza.

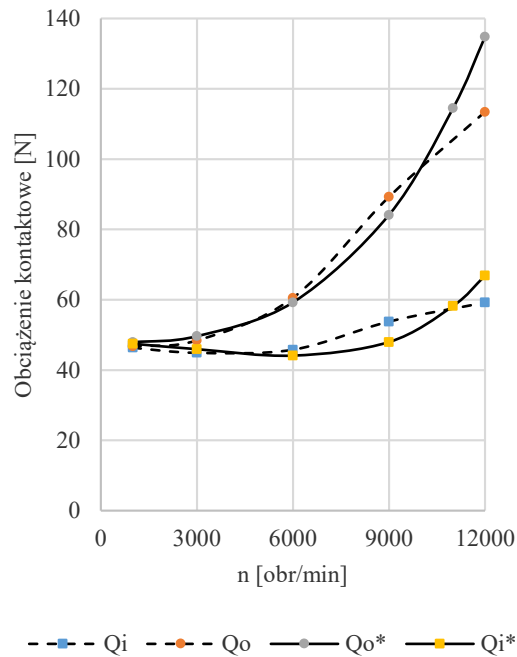




Rys. 12.9. Przesunięcia osiowe uzyskane z badań MES i z badań analitycznych (Anal)  
 Fig. 12.9. Total bearing displacements obtained from FEM tests and analytical tests (Anal)



Rys. 12.10. Wpływ prędkości obrotowej na wartości sił kontaktowych: a) napięcie wstępne 1000 N, b) napięcie wstępne 500 N;  $Q_o$  – dla bieżni zewnętrznej,  $Q_i$  – dla bieżni wewnętrznej, linia ciągła – model rozszerzony, linia przerywana – model konwencjonalny  
 Fig. 12.10. Influence of rotational speed on the values of contact forces: a) 1000 N preload, b) 500 N preload;  $Q_o$  – in the area of contact with the outer race,  $Q_i$  – in the area of contact with the inner race, solid line – extended model, dashed line – conventional model



Rys. 12.11. Porównanie wyników badań analitycznych i symulacyjnych MES wpływu prędkości obrotowej na obciążenia kontaktowe;  $Q_o^*$ ,  $Q_i^*$  – badania symulacyjne MES,  $Q_o$ ,  $Q_i$  – badania analityczne, linia ciągła – badania symulacyjne MES, linia przerywana – badania analityczne, napięcie wstępne 500 N

Fig. 12.11. Comparison of the results of analytical and FEM simulation tests of the influence of rotational speed on contact loads;  $Q_o^*$ ,  $Q_i^*$  – FEM simulation tests,  $Q_o$ ,  $Q_i$  – analytical tests, solid line – FEM simulation tests, dashed line – analytical tests, preload 500 N

Biorąc pod uwagę wyniki symulacji numerycznej przedstawionych na rys. 12.9, można szacować wielkość sztywności kontaktowej na ok.  $3 \cdot 10^5$  N/mm, tj. ok. 15 razy mniejszą niż wziętą do obliczeń analitycznych, wg zależności (9.8). To tłumaczy w jakimś stopniu różnice w wynikach badań symulacyjnych MES i analitycznych.

Badanie wpływu prędkości obrotowej na zjawiska kontaktowe metodą numeryczną polega na zdefiniowaniu i przypisaniu określonej prędkości (wartości i osi obrotu) elementowi wykonującemu ruch obrotowy (kulce i pierścieniowi wewnętrznemu). Oddzielnie przeprowadzono symulacje dla siły odśrodkowej i dla sił żyroskopowych, ponieważ osie obrotu się różnią, a w Ansysie nie ma możliwości modelowania takiego przypadku.

Na rys. 12.10 pokazano wpływ prędkości obrotowej na wartości sił kontaktowych w strefach kontaktu z pierścieniem zewnętrznym i wewnętrznym. Rysunek 12.10a dotyczy napięcia wstępnego 1000 N, a rys. 12.10b napięcia wstępnego 500 N.

Wyniki badań przedstawione na rys. 12.10 potwierdzają wnioski, jakie uzyskano z badań analitycznych, że wzrost prędkości powoduje wzrost obciążeń kontaktowych

(dotyczy tylko  $Q_o$ ) oraz że efekty dynamiczne z tytułu ruchu obrotowego pierścienia wewnętrznego przyczyniają się do znacząco większego wzrostu obciążeń kontaktowych (model rozszerzony) w porównaniu z modelem konwencjonalnym.

Badania symulacyjne MES przeprowadzono w celu weryfikacji modeli analitycznych. Na rys. 12.11 przedstawiono porównanie wyników badań analitycznych i symulacyjnych MES w postaci wpływu prędkości obrotowej na obciążenia kontaktowe dla napięcia wstępnego łożysk 500 N.

Można mówić o dobrej zgodności wyników badań symulacyjnych MES i analitycznych, jakkolwiek dostrzegalne są różnice ilościowe o wielkości do 15%. Wynikają one z uproszczeń modelu analitycznego oraz z różnicy sztywności kontaktowych przyjętych w badaniach analitycznych i w modelu MES.

Na podstawie wyników badań porównawczych przedstawionych na rys. 12.11 można sformułować wniosek o dobrym opisie zjawisk kontaktowych w łożyskach tocznych skośnych za pomocą modeli analitycznych i o możliwości ich wykorzystywania do obliczania obciążeń kontaktowych, a w konsekwencji do obliczania oporów ruchu w łożyskach.

Wadą metod numerycznych MES jest niemożność równoczesnego zamodelowania różnych prędkości obrotowych i osi obrotu dwóch różnych elementów łożyska (dotyczy systemu Ansys). To ogranicza analizę porównawczą metod numerycznych i analitycznych.

### **13. EKSPERYMENTALNA IDENTYFIKACJA OPORÓW RUCHU ŁOŻYSK SKOŚNYCH**

W poprzednich rozdziałach przedstawione zostały modele obliczeniowe, które pozwalają na drodze analitycznej oszacować opory ruchu łożyska tocznego skośnego w zależności od jego napięcia wstępnego i od aktualnej prędkości obrotowej. Założono, że modele te powinny mieć możliwie prostą postać analityczną, aby projektant układu wrzecionowego obrabiarki mógł, bez stosowania złożonych symulacji numerycznych, oszacować straty w łożysku, które zamieniają się w ciepło. Ten fakt spowodował, że w wielu przypadkach trzeba było stosować uproszczenia, które skutkują niedokładnym wyznaczeniem tych oporów ruchu. Ponadto, ponieważ opory ruchu wynikają z tarcia tocznego i kinematycznego kulek o bieżnię, problemem samym w sobie jest przyjęcie wartości współczynników tarcia. W p. 10.2 wykazano znaczący wpływ oporów wynikających ze zjawiska spinu na ogólne opory ruchu łożyska. Wielkość tych oporów istotnie zależy od współczynnika tarcia kinematycznego (poślizgowego), którego dobór jest sprawą arbitralną. Wszystko to powoduje, że wyprowadzone modele analityczne powinny być poddane weryfikacji eksperymentalnej.

Ponieważ ogólnym celem przeprowadzonych badań analitycznych było stworzenie narzędzia, które umożliwiłoby ocenę stanu cieplnego łożyska, zwłaszcza w warunkach dużych zmian prędkości, eksperymentalną identyfikację oporów ruchu łożysk skośnych można przeprowadzić na dwa sposoby:

1. metodą bezpośrednią, tzn. przez bezpośredni pomiar momentu napędowego na wale napędowym, zakładając, że znane są warunki działania łożyska, tj. jego prędkość obrotowa, napięcie wstępne, smarowanie (dane odnośnie do środka smarnego), w tym aktualna temperatura smaru, warunki otoczenia i inne;
2. metodą pośrednią, tzn. przez pomiar efektów cieplnych, np. temperatur w wybranych miejscach. Ta metoda wprawdzie nie pozwala na bezpośrednią ocenę oporów ruchu, ale umożliwia ocenę wpływu warunków pracy łożyska (napięcie wstępne, prędkość obrotowa, smarowanie itp.) na temperatury w krytycznych miejscach konstrukcji.

Pierwsza z metod jest bardziej uniwersalna i – co ważne – pozwala na oszacowanie efektów cieplnych również na drodze badań symulacyjnych. W dalszym ciągu omówiona zostanie metoda bezpośrednia.

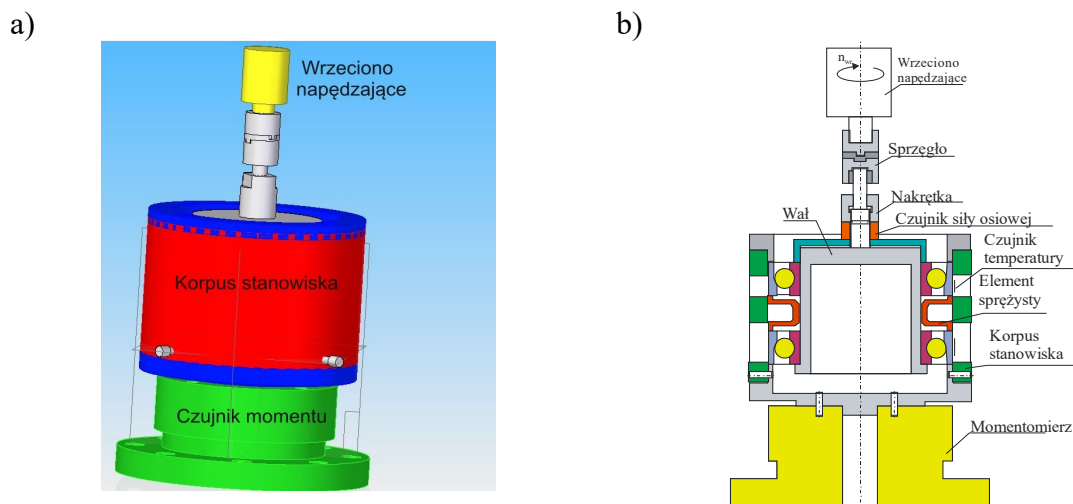
### 13.1. Schemat stanowiska badawczego

Budując stanowisko badawcze dla metody bezpośredniej, przyjęto następujące założenia:

- powinno umożliwiać bezstopniową zmianę prędkości obrotowej do 18 000 obr/min,
- powinno umożliwiać wstępne, sprężyste napięcie łożysk do 1000 N w sposób ciągły (nastawialny) i kontrolowalny,
- powinno umożliwiać precyzyjny pomiar prędkości obrotowej, napięcia wstępnego i momentu na wale napędowym oraz kontrolę temperatury smaru lub łożysk,
- stanowisko ma dwa łożyska skośne typu FAG B7013-E-T-P4 (są to łożyska o podwyższonej klasie dokładności P4) pracujące w układzie „O”,
- stanowisko powinno w miarę możliwości umożliwiać zminimalizowanie oporów tarcia pomiędzy pierścieniem zewnętrznym i korpusem obudowy oraz pomiędzy pierścieniem wewnętrznym a wałem napędowym (odpowiedni dobór pasowania łożysk w korpusie i na wałku),
- stanowisko powinno umożliwiać przeprowadzenie testów w warunkach „bez obecności smaru” i „w obecności smaru” o ściśle zdefiniowanych właściwościach eksploatacyjnych (znana musi być zależność lepkości kinematycznej od temperatury).

Dobrane do badań weryfikacyjnych dwa łożyska skośne FAG B7013-E-T-P4 zostały opisane w rozdziale 4. Dopuszczalna prędkość obrotowa dla tych łożysk w warunkach użycia smaru stałego wynosi 11 000 obr/min, a w wypadku użycia oleju 18 000 obr/min. Zalecane wartości napięcia wstępnego do 1118 N.

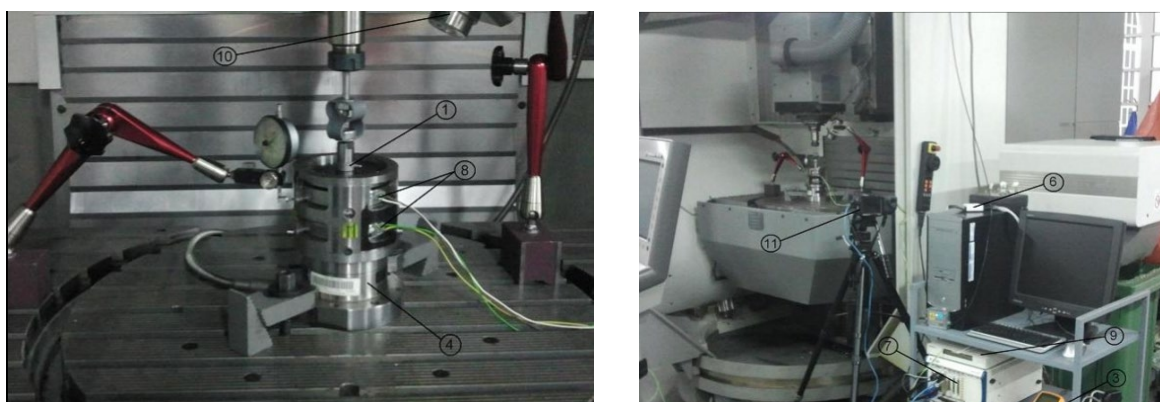
Na rys. 13.1a przedstawiono ogólną koncepcję stanowiska badawczego. Opiera się ona na bezpośrednim zainstalowaniu wrzeciennika (korpusu stanowiska) na korpusie czujnika do pomiaru momentu obrotowego. Jest to czujnik piezoelektryczny firmy Kistler 7292, który umożliwia precyzyjny pomiar momentu obrotowego i trzech składowych siły. W korpusie stanowiska zainstalowano dwa łożyska skośne w układzie „O”. Wał napędowy stanowiska, na którym zamontowano pierścienie wewnętrzne obu łożysk, jest sprzęgnięty, przez sprzęgło, z wrzecionem głównym centrum frezarskiego DMU 60MB. Prędkość wrzeciona może być sterowana do 18 000 obr/min.



Rys. 13.1. Koncepcja pomiaru momentu oporów ruchu łożysk skośnych (a) i schemat stanowiska badawczego (b)

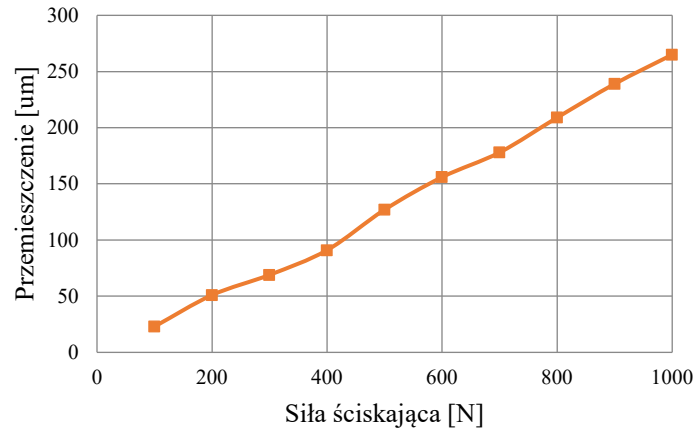
Fig. 13.1. Concept of a test stand of resistance to motion of angular contact bearings (a) and scheme of the test stand (b)

Na rys. 13.1b przedstawiono stanowisko badawcze w przekroju osiowym. Pomędzy dwoma pierścieniami zewnętrznymi łożysk skośnych umieszczono elementy sprężyste (sprężyny talerzowe), które symulują sprężyste napięcie wstępne. Wielkość tego napięcia nastawia się za pomocą nakrętki i pokrywy, która naciskając na pierścień wewnętrzny łożyska, powoduje osiowe zbliżanie się obu łożysk i ściskanie sprężyn talerzowych. Wielkość tego napięcia wstępnego jest początkowo kontrolowana za pomocą czujnika siły osiowej Kistler 9102A, znajdującego się pomiędzy nakrętką i pokrywą. W trakcie pracy stanowiska czujnik ten obraca się razem z wałem napędowym, dlatego przewód łączący czujnik ze wzmacniaczem musi być odłączony.



Rys. 13.2. Widok stanowiska do pomiaru oporów ruchu łożysk tocznych skośnych, usytuowanego na centrum obróbkowym DMU 60MB

Fig. 13.2. View of the test stand for measuring the resistance to motion of angular contact rolling bearings, situated on the DMU 60MB machining center



Rys. 13.3. Wyniki wzorcowania elementu sprężystego  
 Fig. 13.3. Results of calibration of the elastic element

Na rys. 13.2 widoczny jest czujnik zegarowy, za pomocą którego można kontrolować rzeczywiste napięcie wstępne. Wymaga to jednak znajomości charakterystyk sprężyn talerzowych (zob. rys. 13.3).

Charakterystyka na rys. 13.3 cechuje się stosunkowo dobrą liniowością, zatem mierząc przemieszczenia sprężyn talerzowych, można wnioskować o rzeczywistym napięciu wstępnym łożysk z błędem nieprzekraczającym 0,5%.

Jak już wspomniano, badanie oporów ruchu wymaga kontrolowania temperatury smaru. Wprawdzie bezpośredni pomiar temperatury smaru jest utrudniony, tym niemniej jednak pomiar temperatury pierścieni łożyskowych może być jakimś substytutem. Na rys. 13.1a zaznaczono symbolicznie czujniki do pomiaru temperatury pierścieni zewnętrznych. Są to czujniki rezystancyjne typu PT 100. Naklejone bezpośrednio na pierścieniu zewnętrznym, pozwalają kontrolować jego temperaturę. Ponieważ taki pomiar temperatury dla pierścieni wewnętrznych nie jest możliwy, użyto pirometru typu Optris Ctlaser (patrz 10 na rys. 13.2a) oraz kamery termowizyjnej typu VIGOCAM V50 (patrz 11 na rys. 13.2b). Dla udokładnienia pomiarów pirometrycznych powierzchnie mierzone pokryto specjalną farbą o wysokim współczynniku emisyjności.

## 13.2. Wyniki badań eksperymentalnych

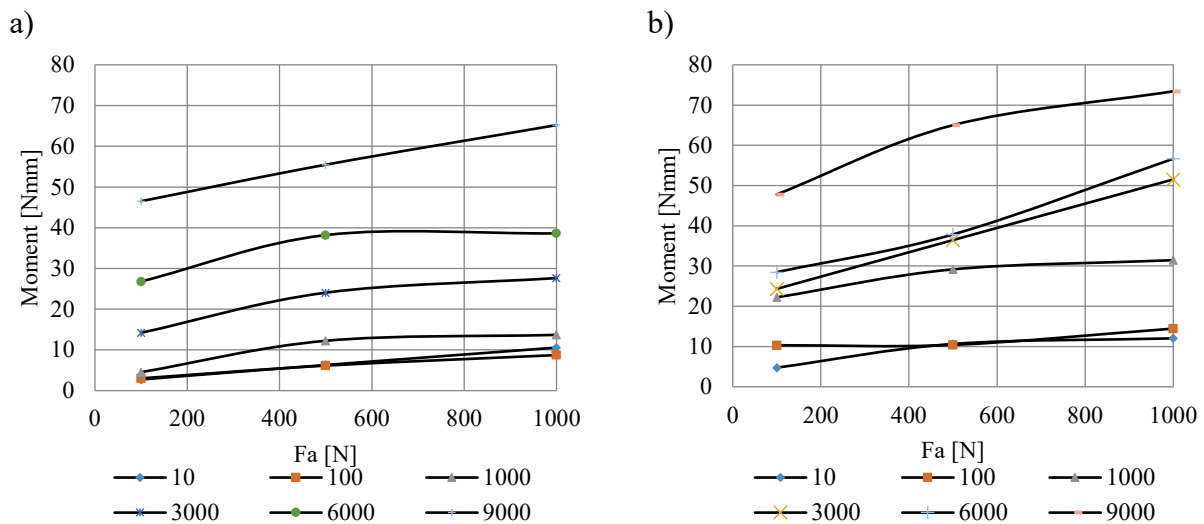
Zasadniczym celem przeprowadzonych badań eksperymentalnych były pomiary momentu na wale napędowym stanowiska w zróżnicowanych warunkach pracy.

Przyjęto, że tak zmierzony moment na wale napędowym jest równoważny sumarycznym oporom ruchu dwóch łożysk skośnych. Pomiary momentu przeprowadzono w następujących warunkach:

1. bez obecności środka smarnego,
2. w obecności środka smarnego,
3. w warunkach nastawianego napięcia wstępnego od 100 N do 1000 N,
4. w warunkach zmienianej (nastawianej) prędkości obrotowej od 10 obr/min do 11 000 obr/min (prędkościom powyżej 11 000 obr/min towarzyszył zbyt wysoki poziom drgań).

Pomiary momentu starano się przeprowadzać w ustabilizowanych warunkach otoczenia, tzn. głównie w niezmiennej temperaturze panującej wewnątrz stanowiska. W związku z tym czas pojedynczego pomiaru, począwszy od włączenia wrzeciona napędzającego do jego zatrzymania, nie przekraczał kilku sekund. Obserwacja czujników temperatury pierścieni łożyskowych potwierdziła, że zmiany temperatury w tak krótkich okresach pomiarowych różniły się od temperatury otoczenia nie więcej niż o  $0,5^{\circ}\text{C}$ . Uznano, że właściwości smarne (lepkość) smaru stałego były niezmiennie i odpowiadające temperaturze otoczenia ( $20^{\circ}\text{C}$ ).

Pomiary z najmniejszą prędkością obrotową, tj. ok. 10 obr/min, uznano za statyczne, tzn. przyjęto, że nie towarzyszą im żadne skutki prędkości obrotowej, jak np. siły odśrodkowe.

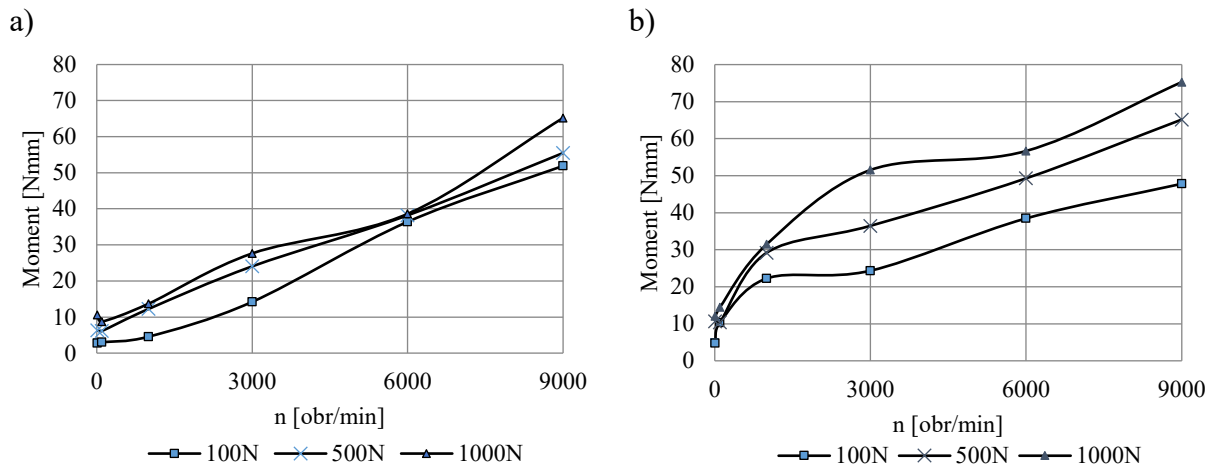


Rys. 13.4. Wpływ napięcia wstępnego  $F_a$  na momenty na wale napędowym: a) bez obecności środka smarnego, b) z obecnością środka smarnego

Fig. 13.4. Influence of the preload  $F_a$  on the torque on the drive shaft: a) without the grease, b) with grease



Na rys. 13.4 przedstawiono wyniki pomiarów momentu obrotowego na wale napędowym w zakresie prędkości obrotowych do 9000 obr/min w funkcji napięcia wstępnego  $F_a$ . Wykresy na rys. 13.4 pokazują, że obecność środka smarnego nie tylko zwiększa opory ruchu, lecz zmienia także charakter zmian tych oporów w zależności od prędkości obrotowej łożyska, natomiast na rys. 13.5 przedstawiono wyniki pomiarów momentu na wale napędowym w funkcji prędkości obrotowej łożyska bez obecności środka smarnego (rys. 13.5a) i w obecności środka smarnego (rys. 13.5b).



Rys. 13.5. Wyniki pomiarów momentu na wale napędowym w funkcji prędkości obrotowej: a) bez obecności środka smarnego, b) w obecności środka smarnego; 100 N, 500 N, 1000 N – napięcie wstępne

Fig. 13.5. Results of torque measurements on the drive shaft as a function of rotational speed: a) without the presence of a grease, b) in the presence of a grease; 100 N, 500 N, 1000 N – preload

Otrzymane wyniki pomiarów momentu na wale napędowym pokazują silny wpływ prędkości obrotowej na jego wielkość, a także wpływ środka smarnego na opory ruchu łożyska na poziomie o ok. 20% wyższym niż bez obecności smaru. Ponieważ temperatura środka smarnego w trakcie pomiarów nie ulegała istotnym zmianom, możemy przyjąć, że lepkość smaru także się nie zmieniała. Wobec tego zmiana momentu napędowego jest efektem tylko zmiany prędkości i wynikających z tego oporów tarcia wiskotycznego (zgodnie zależnością (10.1), proporcjonalnie do  $n^{2/3}$ ), tarcia toczonego i kinematycznego.

Przeprowadzone badania eksperymentalne ogólnie potwierdzają duży wpływ napięcia wstępnego, prędkości obrotowej i środka smarnego na opory ruchu łożysk skośnych. Należy teraz ocenić korelację zmierzonych na drodze eksperymentalnej zmian oporów ruchu ze zmianami wynikającymi z opracowanych modeli obliczeniowych, czyli przeprowadzić klasyczną weryfikację modeli na podstawie wyników badań eksperymentalnych.

## **14. WERYFIKACJA MODELI OBLICZENIOWYCH OPORÓW RUCHU ŁOŻYSK SKOŚNYCH**

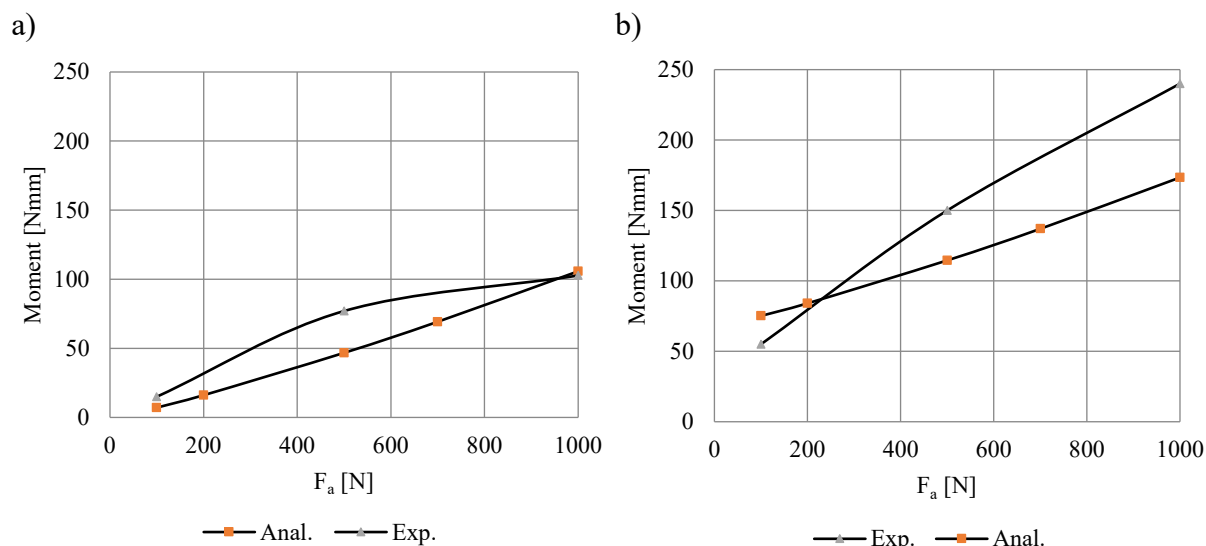
Dysponując wynikami badań eksperymentalnych oraz modelami obliczeniowymi oporów ruchu łożysk skośnych, można pokusić się o mniej lub bardziej dokładną ich weryfikację. Opracowując modele obliczeniowe w wersji analitycznej, kierowano się przesłanką ich praktycznego wykorzystywania przez konstruktorów obrabiarek HSC. Z tego tytułu muszą one być stosunkowo proste i takie, żeby można było z nich korzystać, dysponując kalkulatorem naukowym. Konsekwencją takiego założenia są duże uproszczenia, które mogą prowadzić do rozwiązań odległych od rzeczywistości. Dlatego niezbędna jest nawet prosta weryfikacja, która pozwoli na sformułowanie wniosku o stopniu adekwatności analitycznego modelu obliczeniowego. Należy przy tym sobie uświadomić fakt, że błędy z tytułu uproszczeń mogą sięgać od kilkunastu do kilkudziesięciu procent. Jedną z możliwych przyczyn tak znacznych błędów jest tarcie, a w zasadzie współczynnik tarcia. Wszystkie opory ruchu w łożyskach, które zamieniają się w ciepło, wynikają z tarcia tocznego, kinematycznego i wiskotycznego. Precyzyjne określenie współczynników tarcia w każdym z tych zjawisk jest po prostu niemożliwe. Dlatego konfrontacja wyników obliczeń analitycznych z wynikami eksperymentów może przynajmniej pozwolić na oszacowanie ich wartości.

Weryfikacja modeli obliczeniowych będzie prowadzona metodą porównawczą, tzn. porównywane będą momenty oporów ruchu obliczone i zmierzone w przyjętym zakresie zmian napięcia wstępnego, prędkości obrotowej bez środka smarnego i w jego obecności.

Do weryfikacji zostaną wzięte modele obliczeniowe przedstawione w p. 10. Momenty oporu ruchu obliczane będą wg przedstawionych tam zależności, przy czym brane będzie pod uwagę jedynie sprężyste napięcie wstępne łożyska.

W pierwszym kroku zweryfikowane zostaną modele obliczeniowe oporów ruchu wynikających z tarcia tocznego i tarcia kinematycznego, z pominięciem oporów ruchu wynikających z tarcia wiskotycznego. W rozdziale 13, gdzie zamieszczono wyniki eksperymentu, część tych wyników dotyczy działania łożysk pozbawionych środka

smarnego. Opory ruchu w takim przypadku wynikają wyłącznie z tarcia toczonego kulek toczących się po bieżniach i z tarcia kinematycznego kulek obracających się wokół własnych osi.



Rys. 14.1. Porównanie momentu oporów w funkcji napięcia wstępnego, uzyskanych z badań symulacyjnych i eksperymentalnych: a) bez udziału środka smarnego, b) z udziałem środka smarnego; Anal. – z badań analitycznych, Exp. – z badań eksperymentalnych

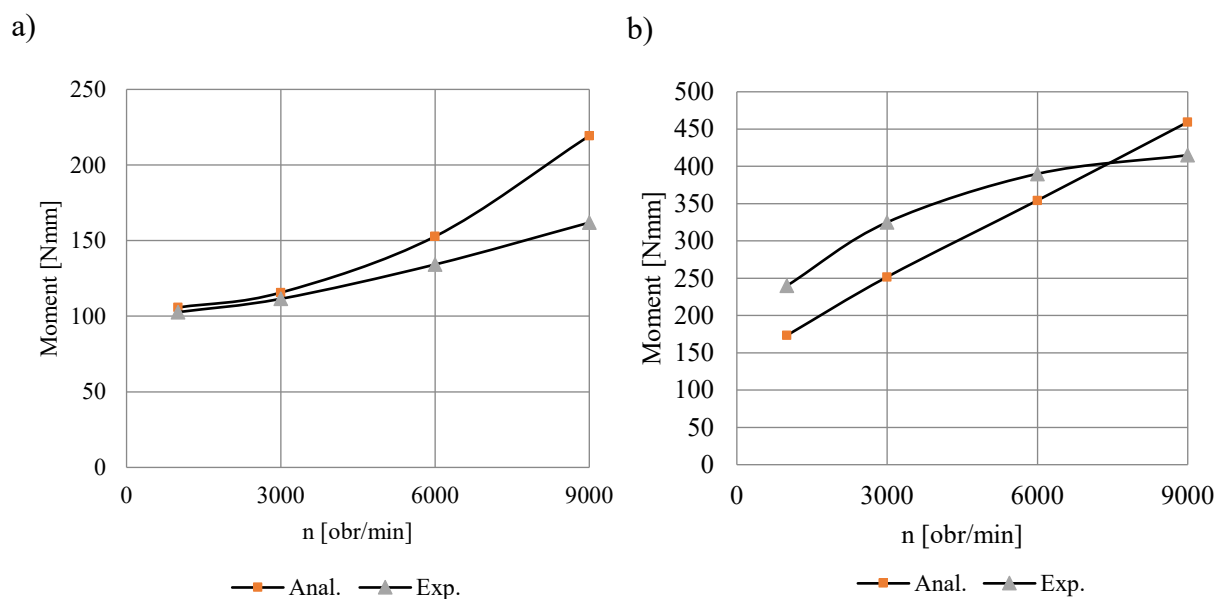
Fig. 14.1. Comparison of the moment of resistance as a function of preload, obtained from simulation and experimental tests: a) without grease, b) with grease; Anal. – from analytical research, Exp. – from experimental research

Na rys. 14.1a dokonano porównania momentu oporów ruchu układu dwóch łożysk skośnych w funkcji napięcia wstępnego, uzyskanych z badań symulacyjnych i eksperymentalnych bez udziału środka smarnego. Każdy z wykresów zawiera moment Anal. z badań analitycznych oraz Exp., odpowiadający wynikom eksperymentu.

Można mówić o zgodności jakościowej wyników badań analitycznych i eksperymentalnych, ponieważ wzrostowi napięcia wstępnego  $F_a$  towarzyszy wzrost momentu oporów ruchu, natomiast charakterystyki ilościowe się różnią, ponieważ przebiegi analityczne zbliżone są do liniowych, a eksperymentalne są nieliniowe.

Porównanie wpływu prędkości obrotowej na moment oporów ruchu uzyskany z badań symulacyjnych i eksperymentalnych w warunkach braku środka smarnego przedstawiono na rys. 14.2a. Na rysunku tym pokazano przypadek dla wstępnego napięcia  $F_a = 1000$  N.

Można mówić o dobrej zgodności wyników obliczeń analitycznych i otrzymanych z eksperymentu, jakkolwiek widoczne są różnice ilościowe. Obie charakterystyki są nieliniowe, zgodnie z modelem analitycznym.



Rys. 14.2. Porównanie wpływu prędkości obrotowej na opory ruchu pary łożysk skośnych w warunkach braku środka smarnego; Anal. – na podstawie modelu analitycznego, Exp. – moment zmierzony eksperymentalnie

Fig. 14.2. Comparison of the influence of rotational speed on the resistance to motion of a pair of angular contact bearings in the conditions of a lack of grease; Anal. – based on the analytical model, Exp. – the moment measured experimentally

W drugim kroku zweryfikowane zostaną modele obliczeniowe oporów ruchu wynikających z tarcia tocznego i tarcia kinematycznego z uwzględnieniem oporów ruchu wynikających z tarcia wiskotycznego. Ponieważ w pracy nie analizowano szczegółowo modeli obliczeniowych dla oporów wiskotycznych, wynikających z obecności środka smarnego, do analizy porównawczej z wynikami badań eksperymentalnych przyjęto powszechnie używaną w literaturze zależność (10.1). W myśl tej zależności opory wiskotyczne nie zależą od prędkości, jeżeli  $vn < 2000$ , natomiast dla  $vn > 2000$  opory zmieniają się z prędkością i z lepkością smaru. Ponieważ badania eksperymentalne prowadzono w takich warunkach, w których temperatura smaru nie ulegała zmianie, do analizy porównawczej przyjęto, że lepkość smaru w trakcie pomiaru była stała i równa lepkości w temperaturze  $20^{\circ}\text{C}$ . Do badań eksperymentalnych używano smaru stałego Kluber Isoflex NBU 15, którego lepkość kinematyczna w temperaturze  $40^{\circ}\text{C}$  wynosi  $21 \text{ mm}^2/\text{s}$ , a w temperaturze  $100^{\circ}\text{C}$  jest  $4,7 \text{ mm}^2/\text{s}$ . Przyjęto, że dla temperatury  $20^{\circ}\text{C}$  lepkość kinematyczna tego smaru wynosi  $75 \text{ mm}^2/\text{s}$ . Do obliczeń oporów wiskotycznych przyjęto stałą  $k_0=2$  (patrz (10.1), ponieważ dla takiej wartości uzyskano najlepsze dopasowanie wyników obliczeń analitycznych i eksperymentalnych.

Dla wartości  $v=75 \text{ mm}^2/\text{s}$  warunek  $m<2000$  wystąpi, gdy  $n<27 \text{ obr}/\text{min}$ . We wszystkich badanych przypadkach, kiedy  $n>27 \text{ obr}/\text{min}$ , zachodził warunek  $m>2000$  i wówczas obliczano opory viskozyczne wg rozszerzonej postaci wzoru (10.1).

Ponieważ w warunkach smarowania współczynnik tarcia kinematycznego jest mniejszy niż w warunkach tarcia suchego, do obliczeń oporów ruchu z tytułu zjawiska spinu przyjęto arbitralnie współczynnik tarcia  $\mu=0,15$  (poprzednio, w warunkach bez obecności smaru, przyjęto  $\mu=0,30$ ). Dla takiej wartości współczynnika tarcia kinematycznego uzyskano najlepsze dopasowanie wyników obliczeń analitycznych i eksperymentalnych.

Współczynnik tarcia tocznego był wyznaczany wg metody opisanej w p. 11, przy czym współczynnik  $\zeta=1$  (oznacza to, że współczynnik tarcia tocznego był równy mniejszej półosi elipsy).

Na rys. 14.1b dokonano porównania momentu oporów ruchu układu dwóch łożysk skośnych w funkcji napięcia wstępnego uzyskanych z badań symulacyjnych i eksperymentalnych z udziałem środka smarnego. Każdy z wykresów zawiera moment Anal. odpowiadający wynikom uzyskanym z modeli analitycznych oraz Exp., odpowiadający wynikom eksperymentu.

Analiza wyników porównania wpływu napięcia wstępnego na opory ruchu w warunkach występowania środka smarnego pozwala na następujące wnioski:

1. Obecność środka smarnego znacząco zwiększa opory ruchu łożysk. Jeżeli porównać rys. 14.1a i rys. 14.1b, to moment oporów ruchu w obecności środka smarnego jest o ok. 60% i więcej wyższy.
2. Opory ruchu wyznaczone analitycznie i uzyskane z eksperymentu są podobne, tzn. zbliżone do liniowych. Można więc mówić o zgodności jakościowej, natomiast ilościowo dostrzegalne są stosunkowo duże różnice, co wskazuje na konieczność dalszego udoskonalania modeli analitycznych. Będzie o tym mowa w rozdziale 15. Jednak można je stosować do analitycznego oszacowania momentu oporów ruchu w warunkach występowania środka smarnego.

Na rys. 14.2 przedstawiono porównanie oporów ruchu z badań analitycznych i eksperymentalnych w funkcji prędkości obrotowej łożysk. Na rysunku pokazano dwa przypadki: bez udziału środka smarnego (rys. 14.2a) i z udziałem środka smarnego (rys. 14.2b).

Z porównania wyników badań analitycznych i eksperymentalnych można sformułować wniosek o podobieństwie takiego porównania. Na rys. 14.2a i rys. 14.2b można bowiem mówić o dobrej zgodności jakościowej, natomiast ocena ilościowa

wskazuje na niewystarczającą zgodność modelu analitycznego z oporami rzeczywistymi. Zwiększenie prędkości generalnie powoduje znaczny wzrost oporów ruchu (w badanym zakresie prędkości nawet do 50%), ale postaci funkcyjne się różnią.

Wnioski, jakie nasuwają się z przeprowadzonych badań porównawczych, są następujące:

1. Rola składnika wiskotycznego jest dominująca w całkowitym momencie oporów ruchu.
2. Występuje stosunkowo niezła zgodność wyników obliczeń analitycznych i eksperymentalnych, co pozwala na szacowanie oporów ruchu łożysk skośnych w obecności środka smarnego na podstawie opracowanych modeli analitycznych.
3. Występujące różnice ilościowe w przebiegach wyznaczonych analitycznie i eksperymentalnie wskazują na występowanie czynników nieuwzględnionych w modelach analitycznych. Takim czynnikiem jest ciepło powstające w łożysku, którego skutki nie zostały uwzględnione w modelach analitycznych. To zagadnienie będzie rozpatrywane w rozdziale 15.

Wobec stosunkowo dobrej zgodności modeli analitycznych i eksperymentalnych można pokusić się o sformułowanie zależności regresyjnej pomiędzy momentem oporów ruchu  $M_T$  a napięciem wstępnym  $F_a$  i prędkością obrotową  $n$ . Przykładowo, dla pary łożysk FAG B7013-E-T-P4, dla których opory ruchu przedstawiono na rys. 14.1 i rys. 14.2, taka zależność regresyjna przedstawia się następująco:

$$M_T = 0,0303n + 0,0763F_a + 3 \cdot 10^{-6} nF_a + 10,8 \quad (14.1)$$

gdzie  $M_{(T)}$  – sumaryczny moment oporów ruchu mierzony na wale napędowym.

Zależność regresyjną (14.1) wyznaczono dla: lepkości smaru  $\nu=75$ , współczynnika tarcia kinematycznego  $\mu=0,15$  i współczynnika  $k_o=2$ .

Jeżeli porównać wyniki momentu oporów ruchu wyznaczone wg (14.1) i wg (10.36), to błąd z tytułu zastosowania regresyjnej zależności (14.1) nie przekracza 20%.

## **15. WPLYW CIEPŁA POWSTAJĄCEGO W ŁOŻYSKU TOCZNYM NA JEGO OPORY RUCHU**

W rozdz. 3 stwierdzono, że w łożysku tocznym powstaje pewna ilość ciepła, która jest wprost proporcjonalna do oporów ruchu łożyska i do jego prędkości. Opory ruchu wynikają z tarcia mechanicznego poruszających się kulek po bieżniach oraz z tarcia wiskotycznego, tj. brodzenia kulek w smarze. Ilość powstającego ciepła rośnie wraz z prędkością łożyska, zatem w łożyskach obrabiarek HSC będzie go zdecydowanie więcej niż w dotychczas stosowanych obrabiarkach. W wyniku tego ciepła elementy gniazda łożyskowego ulegają odkształceniom cieplnym, co skutkuje co najmniej dwoma niekorzystnymi efektami:

- odkształcenia cieplne elementów gniazda łożyskowego powodują przemieszczenia końcówki wrzeciona, co rzutuje na błędy wykonania przedmiotu,
- odkształcenia cieplne elementów gniazda łożyskowego powodują zmianę luzu pomiędzy kulkami a bieżniami łożyskowymi, co rzutuje na zmianę oporów ruchu łożyska.

Ponadto większa ilość ciepła wpływa na temperaturę w łożysku, a tym samym na lepkość smaru, która ma bardzo duży wpływ na opory ruchu łożyska.

Reasumując, konstruktor węzła łożyskowego powinien mieć wiedzę o wpływie ciepła na warunki pracy łożyska, aby mógł podjąć działania konstrukcyjne, które ograniczą niekorzystne skutki na prace łożyska, np. przez zaprojektowanie odpowiedniego układu chłodzenia łożyska.

W poprzednich rozdziałach pokazano, jak szacować opory ruchu w łożysku i straty mocy, natomiast w niniejszym rozdziale zaprezentowane zostaną wpływy strat mocy w łożysku na rozkład temperatur, odkształcenia cieplne i na zmianę oporów ruchu z tytułu ciepła. Niniejszy rozdział powstał na podstawie artykułu autora [37].

Punktem wyjścia do analiz cieplnych w łożysku tocznym jest zdefiniowanie źródeł ciepła, ich mocy i rozmieszczenia w łożysku.

## 15.1. Modelowanie źródeł ciepła w łożysku tocznym skośnym

Modelowanie zjawisk cieplnych w łożysku tocznym wymaga podjęcia co najmniej dwóch trudnych decyzji, które istotnie wpływają na przepływy ciepła i na rozkład temperatur. Należą do nich:

- wybór powierzchni, którym przypisuje się źródła ciepła,
- wybór modelu kontaktu cieplnego kulek z bieżniami.

Ponadto ważnym zagadnieniem, które również wymaga precyzyjnego zdefiniowania, jest właściwa identyfikacja procesów konwekcji ciepła i przewodzenia ciepła, które w przypadku łożysk tocznych dominują nad pozostałymi mechanizmami przepływu ciepła.

### 15.1.1. Wybór powierzchni, którym przypisuje się źródła ciepła

Źródłem ciepła w łożyskach są:

- opory tarcia mechanicznego tocznego i ślizgowego podczas ruchu kulek po bieżniach,
- opory wiskotyczne, jakie powstają podczas brodzenia kulek w smarze.

Wyznaczanie wielkości tych oporów w sposób analityczny jest zadaniem trudnym i nie do końca rozwiązany. Niezależnie od oszacowania wartości tych oporów zagadnieniem samym w sobie jest zdefiniowanie obszarów, w których one występują.

Opory z tytułu tarcia mechanicznego wynikają z toczenia się kulek po bieżniach, więc można sądzić, że należy je przypisywać bieżniom i kulkom. Dostępne w literaturze modele obliczeniowe ([37, 31, 20]) pozwalają oszacować, jaka część tych oporów wynika ze współdziałaniu bieżni zewnętrznej z kulką, a jaka bieżni wewnętrznej z kulką. Można więc sądzić, że powstające z tytułu oporów tarcia mechanicznego ciepło powinno być przypisywane zarówno bieżniom, jak i kulkom. W literaturze nie zawsze taka reguła jest spotykana.

Opory wiskotyczne wynikające z brodzenia kulek w smarze utrudniają ruch kulkom, czyli stanowią one źródło ciepła przypisane bardziej do kulek niż do bieżni.

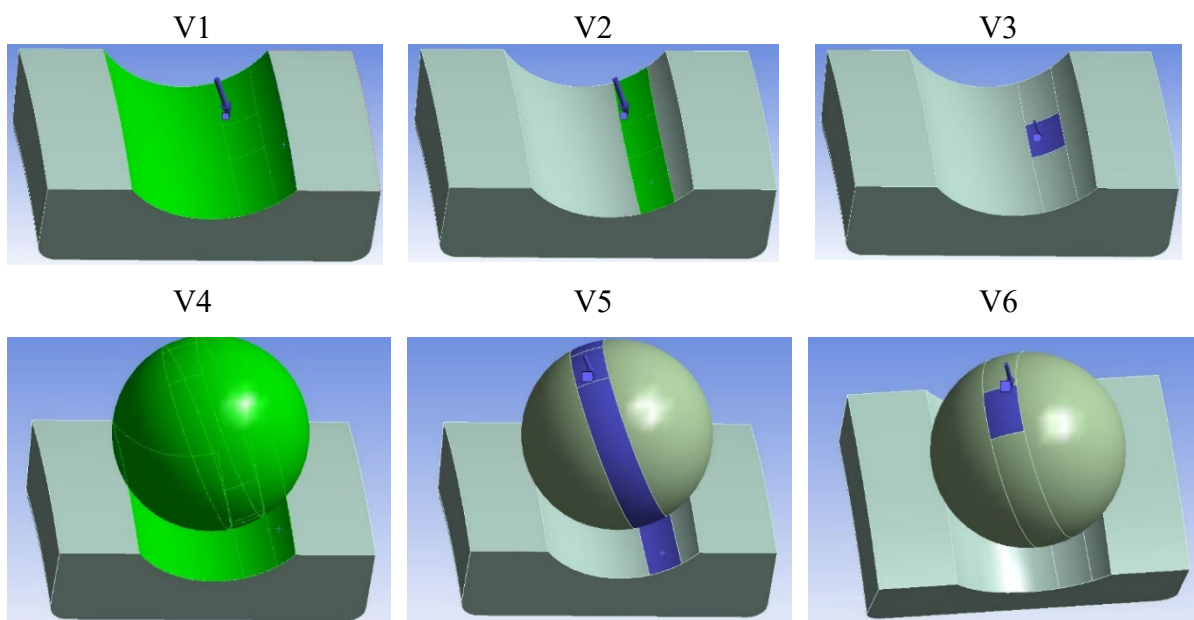
Z doniesień literaturowych wynika, że częściej stosowany jest najprostszy (z punktu widzenia modelowania) sposób modelowania źródeł ciepła, tj. przypisywanie ich tylko do obu bieżni.



W najogólniejszym przypadku możemy mówić o następujących sposobach modelowania źródeł ciepła:

- przypisywanie źródeł ciepła powierzchniom bieżni zewnętrznej i bieżni wewnętrznej bez przypisywania źródeł ciepła kulkom (rys. 15.1, V1). Jest to najprostszy sposób modelowania źródeł ciepła, stąd jest najczęściej spotykany;
- przypisywanie źródeł ciepła fragmentom powierzchni bieżni zewnętrznej i wewnętrznej, których wielkość (powierzchni) wynika z obszaru kontaktu kulki z bieżniami (rys. 15.1, V2). Ten sposób wydaje się bardziej zbliżony do rzeczywistości, jako że kulki nie stykają się z bieżniami na całej ich szerokości, ale tylko na części, wynikającej z odkształcenia kontaktowego;
- przypisywanie źródeł ciepła tzw. elipsom kontaktowym, tj. obszarom rzeczywistego kontaktu kulki z bieżniami (rys. 15.1, V3).
- wyżej wymienione 3 sposoby przypisywania źródeł ciepła można powielić, uwzględniając, że źródła ciepła przypisane są bieżniom i kulkom (rys. 15.1, V4, V5, V6).

W rezultacie można mówić o 6 sposobach modelowania źródeł ciepła w łożysku tocznym. Na rys. 15.1 przedstawiono w sposób symboliczny wszystkie 6 sposobów modelowania źródeł ciepła w łożysku i przypisane im symbole: V1, V2, V3, V4, V5, V6.



Rys. 15.1. Warianty modelowania źródeł ciepła w łożysku tocznym: V1, V2, V3 – źródła ciepła przypisane tylko bieżniom łożyska, V4, V5, V6 – źródła ciepła przypisane bieżniom i kulkom

Fig. 15.1. Variants of modeling heat sources in a rolling bearing: V1, V2, V3 – heat sources assigned only to bearing raceways, V4, V5, V6 – heat sources assigned to raceways and balls

Jest rzeczą zrozumiałą, że poszczególnym wariantom źródeł ciepła będą przypisane różne intensywności mocy, wyrażane w  $W/m^2$ .

Zagadnieniem, które musi zostać logicznie uzasadnione, a które dotyczy wariantów V2, V3, V5 i V6, jest zdefiniowanie pola obszarów, którym przypisane zostaną źródła ciepła. Z tego też powodu uznano, że zasadne jest przeprowadzenie badań cieplnych pod kątem rozkładu temperatur w zależności od przyjętego modelowania źródeł ciepła. Zdecydowano się na symulacyjną metodę badawczą z zastosowaniem metody elementów skończonych, ponieważ jest ona łatwiejsza do technicznej realizacji w porównaniu z metodami analitycznymi. Model MES obejmujący składniki geometryczne oraz warunki początkowe i brzegowe, ale bez uwzględnienia zjawisk cieplnych, został przedstawiony w rozdz. 12. W dalszym ciągu opisane zostaną warunki początkowe i brzegowe dla modelu MES, w którym uwzględniono przepływy cieplne.

### **15.1.2. Wybór modelu kontaktu kulek z bieżniami – wpływ warunków przewodzenia ciepła na temperatury w łożysku**

W przypadku stosowania modelowania metodą elementów skończonych (MES) zagadnieniem nie mniej istotnym, ale i trudnym jest przyjęcie modelu kontaktu kulki z bieżnią. Ten model ma bowiem znaczący wpływ na przepływ ciepła w postaci przewodzenia pomiędzy elementami łożyska, tj. kulkami i bieżniami.

Intensywność przewodzenia ciepła w ciałach stałych jest funkcją różnicy temperatur pomiędzy punktami, odległości pomiędzy nimi i cech materiałowych, które reprezentuje współczynnik przewodzenia ciepła.

Nieco bardziej złożony jest mechanizm przewodzenia ciepła pomiędzy dwoma ciałami będącymi w kontakcie. W literaturze [55] to zagadnienie spotykane jest pod nazwą Thermal Contact Conductance (TCC). Intensywność przewodzenia ciepła przez obszar kontaktowy można przedstawić następująco:

$$q_{TCC} = TCC(T_t - T_c) \quad (15.1)$$

gdzie:  $q_{TCC}$  – jednostkowy strumień ciepła [ $Wm^{-2}$ ],

$T_t, T_c$  – temperatury w punktach kontaktu: docelowym (t) i początkowym (c),

$TCC$  – współczynnik przewodności cieplnej kontaktu [ $Ws^{-1}m^{-2}K^{-1}$ ].

Przewodność cieplna kontaktu (TCC) służy do oceny oporu strumienia cieplnego powodowanego przez powierzchnię złącza. Czynniki wpływające na TCC obejmują chropowatość powierzchni, nacisk kontaktowy, przewodność cieplną i twardość materiału. Wartość TCC jest reprezentowana przez rzeczywistą stałą, która może być

funkcją temperatury  $0,5(T_t + T_c)$ , ciśnienia, penetracji geometrycznej, czasu i początkowego położenia punktu detekcji kontaktu (na początku procesu rozwiązywania zagadnienia) [56].

Autor [30] przeprowadził badania symulacyjne MES wpływu pasowania połączenia wałek – pierścień wewnętrzny na siły kontaktowe i geometryczną penetrację w obszarze kontaktu kulka – bieżnie łożyskowe, pokazując, jak istotnie wpływają one na wymienione parametry mechaniczne.

Dla dwóch ciał będących w kontakcie wyznaczenie współczynnika  $TCC$  jest zagadnieniem złożonym, przy czym w literaturze [55] można znaleźć zależności pozwalające je oszacować.  $TCC$  są funkcją odpowiednio efektywnej chropowatości RMS i efektywnego bezwzględnego średniego nachylenia chropowatości, odpowiednio efektywnego przewodnictwa cieplnego  $k$  materiału, nacisku kontaktowego, mikrotwardości, odkształcenia kontaktowego, efektywnego modułu sprężystości i naprężenia płynięcia materiału.

Nakajima [48] przedstawił analityczną postać zależności, pozwalającej obliczyć wartość  $TCC$  dla łożysk tocznych. Zależność ta po przekształceniach dokonanych przez autorów przyjmuje postać:

$$TCC = \frac{4\pi a k_1 k_2}{(k_1 + k_2) \int_0^{\pi/2} \frac{d\Theta}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \sin^2 \Theta}}} \quad (15.2)$$

gdzie:  $k_1, k_2$  – współczynniki przewodności obu stykających się ciał,

$a, b$  – duża i mała pół osi elipsy kontaktowej.

Autorzy wykazali na drodze symulacji numerycznych, że dla łożysk tocznych skośnych, dla których iloraz  $b/a$  mieści się w granicach 0,0-0,20, całka w równaniu (15.2) wynosi:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\Theta}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \sin^2 \Theta}} = \pi^2$$

Przyjmując, że dla pierścieni łożyskowych i kulek  $k_1 = k_2 = k$ , ponieważ te elementy łożyska wykonane są z tego samego materiału,  $TCC$  może być wyznaczone wg uproszczonej zależności:

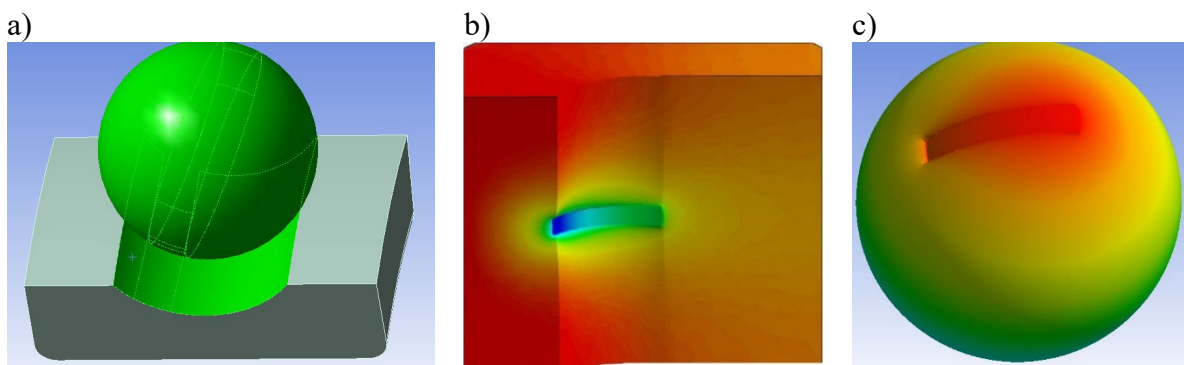
$$TCC \approx \frac{2ak}{\pi} \quad (15.3)$$

Intensywność przewodzenia ciepła dla ciał będących w kontakcie istotnie zależy od przyjętego początkowego modelu kontaktowego [56]. Dlatego celem niniejszych badań jest zweryfikowanie tego założenia.

Komercyjne systemy MES, takie jak np. ANSYS, oferują dwa warianty definiowania współczynnika przewodności cieplnej kontaktu  $TCC$ :

- domyślny, pod nazwą *Program Controlled*, kiedy system automatycznie wylicza bieżącą wartość  $TCC$  wg bliżej niezdefiniowanego algorytmu,
- ręczny, kiedy użytkownik wpisuje wartość liczbową  $TCC$ .

Na rys. 15.2a pokazano przykład domyślnego obszaru kontaktowego dla badanego łożyska testowego FAG B7013-E. Kontakt Bonded obejmuje w tym przykładzie całą powierzchnię bieżni wewnętrznej i kulki.



Rys. 15.2. Przykładowa wizualizacja obszarów kontaktowych łożyska tocznego: a) Bonded, dla nieobciążonego kontaktu kulki z bieżnią wewnętrzną, b), c) Bonded, dla obciążonego siłą napięcia wstępnego kontaktu bieżni zewnętrznej z kulką

Fig. 15.2. Sample visualization of the contact areas of a rolling bearing: a) Bonded, for the unloaded contact of the ball with the inner race, b), c) Bonded, for the contact of the outer race with the ball, loaded with the initial stress force

Z kolei na rys. 15.2b i rys. 15.2c zobrazowano obszary kontaktu kulki z bieżnią zewnętrzną w wyniku działania napięcia wstępnego łożyska. Można sformułować pogląd, że w łożysku poddanym działaniu obciążeń zewnętrznych, ale i wewnętrznych, obszar odkształcenia kontaktowego istotnie różni się od domyślnego (rys. 15a) i – co istotne – będzie ulegał zmianom wraz ze zmianą obciążeń. Zatem obszar przewodzenia ciepła pomiędzy kulkami a bieżniami będzie zależał od rzeczywistego obszaru kontaktowego. Z tego też powodu uznano, że zasadne jest przeprowadzenie badań cieplnych pod kątem rozkładu temperatur dla najczęściej spotykanego, domyślnego modelu kontaktowego Bonded, ale dla różnych obszarów kontaktu.

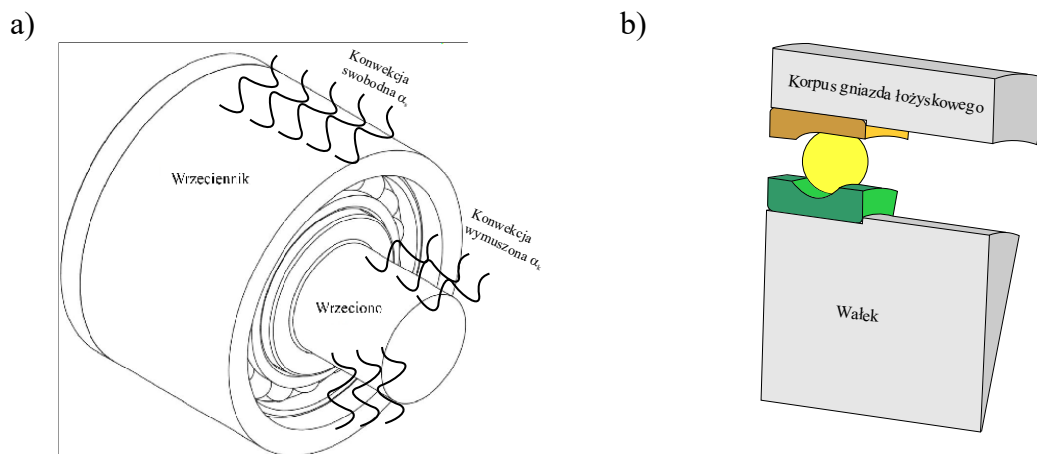
Przyjęto, że rozpatrzone zostaną obszary kontaktowe odpowiednio do modeli źródeł ciepła (rys. 15.1), tzn. dla modeli V1 – V6.

### 15.1.3. Wpływ warunków konwekcji na temperaturę łożyska

Dominującym mechanizmem przepływu ciepła z elementów łożyska do otoczenia jest konwekcja. Pozostałe mechanizmy przepływu ciepła, jak np. promieniowanie, mają mniejszy wpływ na stan cieplny łożyska, dlatego nie będą brane pod uwagę.

Konwekcja, oprócz modelowania źródeł ciepła i przyjętego modelu kontaktu kulek z bieżniami, ma decydujący wpływ na rozkład temperatur w łożysku.

Łożysko, z punktu widzenia wymiany ciepła z otoczeniem, jest specyficznym zespołem, ponieważ część jego elementów jest nieruchoma (np. bardzo często pierścień zewnętrzny i korpus gniazda, w którym łożysko spoczywa), a druga część jest ruchoma (często pierścień wewnętrzny i wałek, na którym łożysko spoczywa). Ma to istotne znaczenie z punktu widzenia mechanizmu konwekcji (rys. 15.3a).



Rys. 15.3. Rysunek poglądowy wrzeciennika z łożyskami tocznymi skośnymi (a) i model geometryczny łożyska na potrzeby modelowania metodą elementów skończonych (b)

Fig. 15.3. Illustrative drawing of a headstock with angular contact rolling bearings (a) and geometric model of the bearing for modeling with the finite element method (b)

Generalnie spotyka się dwa rodzaje konwekcji, tzw. swobodną oraz wymuszoną. Pierwsza dotyczy elementów nieruchomych lub poruszających się z mniejszymi prędkościami, kiedy przepływ ciepła wynika głównie z różnicy temperatur, natomiast druga jest charakterystyczna dla elementów ruchomych.

Ilość ciepła w wyniku konwekcji swobodnej jest proporcjonalna do wielkości powierzchni i tzw. współczynnika konwekcji  $\alpha_s$ , zależność (15.4) [8].

$$\alpha_s = c(T - T_{out})^n = 1,7(T - T_{out})^{0,33} \quad (15.4)$$

gdzie:  $T$ ,  $T_{out}$  – temperatury powierzchni i otoczenia,

$C$ ,  $n$  – stałe zależne od iloczynu liczby Grashofa  $Gr$  i Prandtla  $Pr$ .

Dla rozpatrywanego, testowego łożyska  $C = 1,7$  a  $n = 0,33$ .

Jeżeli założyć, że temperatury w łożysku mieszczą się w granicach 25-100°C, to współczynnik konwekcji  $\alpha_s = (2,44 - 7,31) \text{ W/m}^2\text{K}^{-1}$ .

Ilość ciepła w wyniku konwekcji wymuszonej jest proporcjonalna do wielkości powierzchni i tzw. współczynnika konwekcji  $\alpha_k$ , zależność (15.5) [8].

$$\alpha_k = 5,9 \cdot d^{0,05} \cdot \left( \frac{0,5 \cdot V^2}{d} + \frac{9,81}{\frac{T_{out}}{T - T_{out}} + 0,5} \right)^{0,35} \approx 0,612 d^{0,35} n^{0,68} \quad (15.5)$$

gdzie:  $V$  – prędkość liniowa ruchomego elementu [ $\text{ms}^{-1}$ ],

$n$  – prędkość obrotowa ruchomego elementu [obr/min],

$d$  – średnica ruchomego elementu obrotowo-symetrycznego [m].

Autorzy wykazali, że wpływ różnicy temperatur ruchomego elementu i otoczenia jest niewielki, stąd ostatecznie współczynnik  $\alpha_k$  może być przedstawiony jako funkcja prędkości obrotowej i średnicy ruchomego elementu (dotyczy to tylko elementów obrotowo-symetrycznych wykonujących ruch obrotowy, jak np. pierścienia wewnętrznego łożyska czy wałka, na którym ten pierścień spoczywa). W rozpatrywanym przykładzie łożyska testowego współczynnik  $\alpha_k$  dla ruchomego pierścienia wewnętrznego i wałka, na którym spoczywa, w zakresie prędkości 1000-9000 obr/min (zakres prędkości roboczej testowego łożyska) mieści się w granicach od 26,7  $\text{W/m}^2\text{K}^{-1}$  do 119  $\text{W/m}^2\text{K}^{-1}$ , czyli jest znacznie większy od współczynnika  $\alpha_s$ . Oznacza to, że przy porównywalnych powierzchniach konwekcji ciepła przez pierścień wewnętrzny i wałek będzie przepływać do otoczenia znacznie więcej ciepła niż przez pierścień zewnętrzny i korpus gniazda, w którym łożysko spoczywa. Może to istotnie różnicować temperatury pierścienia zewnętrznego i wewnętrznego łożyska.

Zidentyfikowanie prawidłowych wartości współczynników konwekcji oraz powierzchni, przez które ciepło przepływa do otoczenia, będzie miało istotny wpływ na rozkład temperatur w łożysku.

#### 15.1.4. Przedmiot badań

Prowadzenie badań metodą elementów skończonych wymaga zdefiniowania konkretnego obiektu badań. W tym przypadku będzie nim łożysko testowe kulkowe skośne typu FAG B7013-E klasy P4. Łożysko to było przedmiotem badań

analitycznych, symulacyjnych i eksperymentalnych autora [37, 30, 32, 31], co skutkuje m.in. dużą ilością informacji, które mogą być wykorzystane do symulacyjnych badań cieplnych.

Głównym celem badań symulacyjnych jest znalezienie odpowiedzi na pytanie: czy sposób modelowania źródeł ciepła i czy sposób modelowania zjawiska kontaktu kulek z bieżniami ma istotny wpływ na przepływy ciepła, a zwłaszcza na rozkład temperatur w łożysku?

Z analizy doniesień literaturowych dotyczących przepływów ciepła i rozkładu temperatur w łożysku tocznym wynika, że nie zawierają one na ten temat żadnych wzmianek, natomiast autorzy na podstawie własnych badań symulacyjnych i eksperymentalnych testowego łożyska mają podstawy sądzić, że wpływ wymienionych czynników może być istotny.

Dalekosiężnym celem niniejszych badań jest odpowiedź na pytanie: czy temperatura łożyska ma istotny wpływ na opory ruchu w łożysku? Autorzy prowadzili od lat badania nad stworzeniem modeli analitycznych, pozwalających projektantowi gniazda łożyskowego na stosunkowo proste i szybkie oszacowanie oporów ruchu wynikających tylko z oporów tarcia mechanicznego i wiskotycznego [33, 31]. Z kolei niektóre doniesienia literaturowe pozwalają na sformułowanie poglądu o istnieniu wpływu ciepła na mechaniczne opory ruchu. Ten wpływ miałby wynikać z odkształceń cieplnych elementów łożyska, dlatego w ramach niniejszych badań poszukiwana będzie relacja pomiędzy wielkością tych odkształceń a temperaturą.

Łożysko toczne jest zespołem mechanicznym o dużej liczbie osi i płaszczyzn symetrii. Dlatego do modelowania tego łożyska metodą elementów skończonych można posługiwać się uproszczonym modelem geometrycznym, wynikającym z tych symetrii (rys. 12.1).

Model geometryczny MES łożyska został ograniczony do obiektu przedstawiającego jedynie  $1/N$  ( $N$  – liczba kulek w łożysku) całego łożyska. Ponadto dla uwzględnienia efektów konwekcji ciepła wzięto pod uwagę modele geometryczne korpusu gniazda łożyskowego i wałka. Wymiary geometryczne tych elementów przyjęto odpowiednio do stanowiska badawczego, jakie istnieje w Politechnice Śląskiej [13] i na którym przeprowadzono badania eksperymentalne. Tym elementom przypisano w pierwszym rzędzie właściwości konwekcyjne związane z przepływem ciepła do otoczenia.

Podstawowe badania symulacyjne rozptyłu ciepła przeprowadzono dla prędkości obrotowej 6000 obr/min, ponieważ dla tej prędkości można było przeprowadzić badania eksperymentalne do osiągnięcia stanu ustalonego. Dla prędkości wyższych stanu ustalonego nie osiągnano z uwagi na zbyt wysokie temperatury w łożysku.

### 15.1.5. Model MES łożyska dla badań cieplnych

Badania symulacyjne przeprowadzono w systemie ANSY 2020R2 Transient Thermal. Uproszczony model geometryczny (rys. 15.3b) przygotowano w taki sposób, aby można było rozmieszczać źródła ciepła odpowiednio do przedstawionych na rys. 15.1. W tych obszarach definiowano źródła ciepła Heat Flux.

Straty mocy z tytułu wiskotycznych oporów ruchu [20] wyznaczano następująco:

$$\Delta N_v = M_v \omega = 10^{-7} k_0 (vn)^{2/3} d_m^3 \omega \quad (15.6)$$

gdzie:  $\Delta N_v$  – straty mocy z tytułu oporów wiskotycznych,

$\omega$ ,  $n$  – prędkość kątowna i obrotowa łożyska,

$\nu$  – lepkość kinematyczna smaru,

$d_m$  – średnia średnica łożyska,

$k_0$  – stała (dla łożysk kulkowych skośnych jednorzędowych 0,6-2,0).

Straty mocy z tytułu tarcia mechanicznego kulek i bieżni wyznaczano na podstawie opracowanych przez autora [33] modeli analitycznych, w których uwzględniano opory tarcia tocznego, ślizgowego i z powodu zjawiska spinu w łożysku tocznym skośnym, zarówno na bieżni zewnętrznej, jak i wewnętrznej, wg relacji:

$$\begin{aligned} \Delta N_{(T)o} &= M_{(T)o} \omega \\ \Delta N_{(T)i} &= M_{(T)i} \omega \end{aligned} \quad (15.7)$$

gdzie:  $\Delta N_{(T)o}$ ,  $\Delta N_{(T)i}$  – straty mocy z tytułu tarcia mechanicznego kulek z bieżnią zewnętrzną i wewnętrzną,

$M_{(T)o}$ ,  $M_{(T)i}$  – sumaryczne momenty tarcia pomiędzy kulkami a bieżnią zewnętrzną i wewnętrzną.

Wyznaczone straty mocy z powodu oporów ruchu w całości traktowane są jako moc źródeł ciepła.

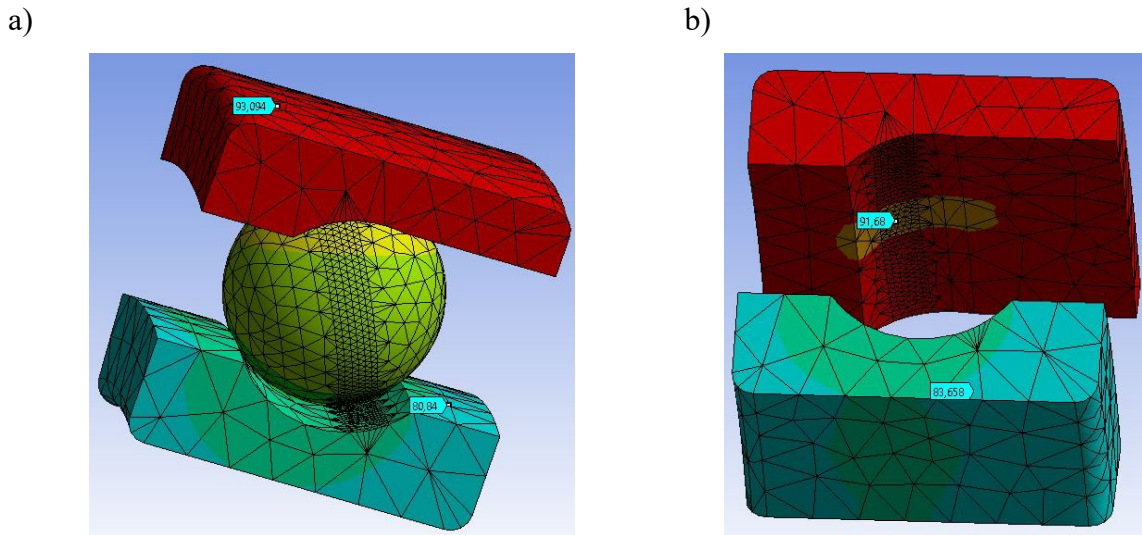
Powierzchniom zewnętrznym korpusu gniazda łożyskowego i wałka przypisano przekazywanie ciepła do otoczenia, przy czym korpusowi gniazda łożyskowego przypisano cechy konwekcji swobodnej, a wałkowi cechy konwekcji wymuszonej. Cechy konwekcji ciepła przypisano także odpowiednio elementom łożyska. Wartości liczbowe współczynników konwekcji wyznaczono wg zależności (15.4) i (15.5).

Wszystkie modele kontaktowe, zarówno pomiędzy kulką a bieżniami łożyska, jak i pomiędzy korpusem gniazda łożyskowego a pierścieniem zewnętrznym oraz pomiędzy wałkiem a pierścieniem wewnętrznym były klasy Bonded. Przy tym, w zależności od rozpatrywanego wariantu modelu kontaktu pomiędzy kulką i bieżniami, obszar kontaktu był albo domyślny (warianty V1 i V4), albo odpowiedni do wariantów V2, V3, V5 i V6.



### 15.1.6. Wyniki badań symulacyjnych wpływu modelowania źródła ciepła na temperatury w łożysku

Badania symulacyjne polegały na zarejestrowaniu przebiegu temperatur w wybranych punktach łożyska w funkcji czasu aż do osiągnięcia stanu ustalonego. Na rys. 15.4 pokazano punkty, w których rejestrowano przebieg temperatury.



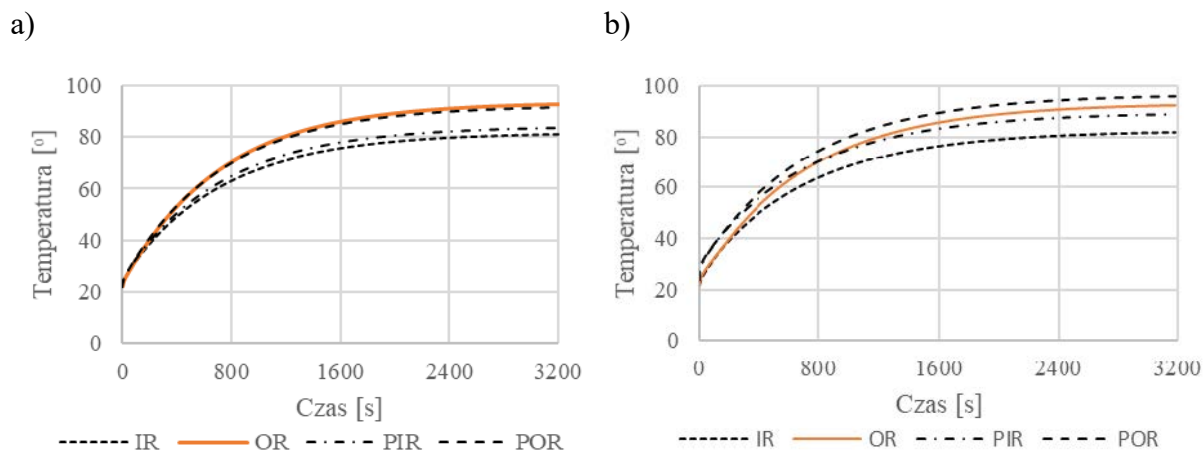
Rys. 15.4. Miejsca pomiaru temperatur: a) na pierścieniu zewnętrznym i wewnętrznym, b) w miejscach kontaktu kulki z bieżniami  
Fig. 15.4. Temperature measurement locations: a) on the outer and inner rings, b) at the points of contact of the ball with the raceways

W dalszym ciągu przedstawione wyniki badań symulacyjnych będą się odnosiły do punktów przedstawionych na rys. 15.4.

Na rys. 15.5 przedstawiono dwa przykłady przebiegu temperatur dla wariantów źródła ciepła V1 i V6, dla prędkości obrotowej łożyska 6000 obr/min i napięcia wstępnego 500 N.

Najważniejsze wnioski wynikające z tych przebiegów są następujące:

- temperatury na bieżniach zewnętrznej i wewnętrznej osiągają wartości 80-92°C i różnią się o ok. 11°C,
- temperatury w miejscach kontaktu kulek z bieżniami różnią się od temperatur na pierścieniach zewnętrznym i wewnętrznym o 1-2°C,
- czas osiągnięcia stanu ustalonego sięga ok. 1 godziny.



Rys. 15.5. Przykładowe przebiegi czasowe temperatur dla wariantu źródła ciepła: a) V1 i b) V6: IR – wewnętrzny i OR – zewnętrzny pierścień, PIR, POR – punkty kontaktu kulki z bieżnią wewnętrzną i zewnętrzną;  $n = 6000$  obr/min

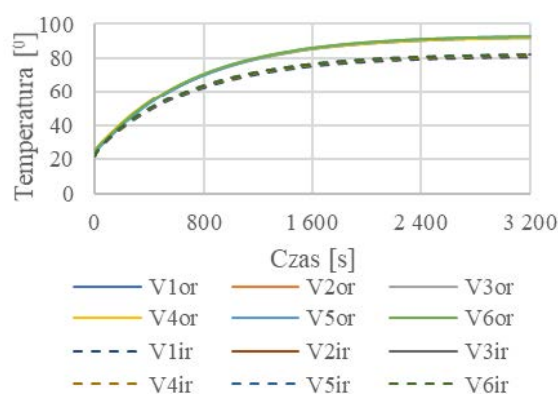
Fig. 15.5. Exemplary time courses of temperatures for the variant of the heat source: a) V1 and b) V6: IR – inner ring, OR – outer ring, PIR, POR – points of contact of the ball with the inner and outer raceways;  $n = 6,000$  rpm

Dla oceny sposobu modelowania (rozmieszczenia) źródeł ciepła dla wariantów V1 – V6 przeprowadzono podobne symulacje. Zbiorcze zestawienie uzyskanych wyników przedstawiono na rys. 15.6. Dotyczą one prędkości obrotowej łożyska 6000 obr/min i napięcia wstępnego 500 N.

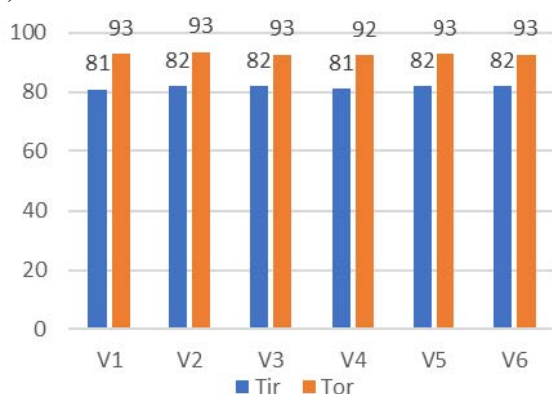
Wyniki na rys. 15.6 pozwalają na następujące wnioski:

- temperatura na pierścieniu zewnętrznym nie zależy istotnie od sposobu modelowania źródeł ciepła, reprezentowanego przez warianty V1 – V6; podobny wniosek można sformułować dla pierścienia wewnętrznego,
- różnica temperatur na pierścieniu zewnętrznym i wewnętrznym także nie zależy istotnie od wariantu rozmieszczenia źródeł ciepła i wynosi ok.  $11^{\circ}\text{C}$ ,
- dla temperatur w miejscu kontaktu kulek z bieżniami obserwuje się wzrost temperatur na pierścieniu zewnętrznym i wewnętrznym, w miarę jak maleje powierzchnia, do której przypisano źródła ciepła (powierzchnie, do których przypisano źródła ciepła, spełniają warunek  $V1 > V2 > V3$ , podobnie jak  $V4 > V5 > V6$ ), natomiast różnice temperatur w punktach kontaktu kulek z bieżniami mieszczą się w przedziale  $7\text{-}8^{\circ}\text{C}$ ,
- na podstawie rys. 15.6a można sformułować pogląd, że stan przejściowy w przebiegach temperatur także nie zmienia się istotnie w zależności od wariantu rozmieszczenia źródeł ciepła.

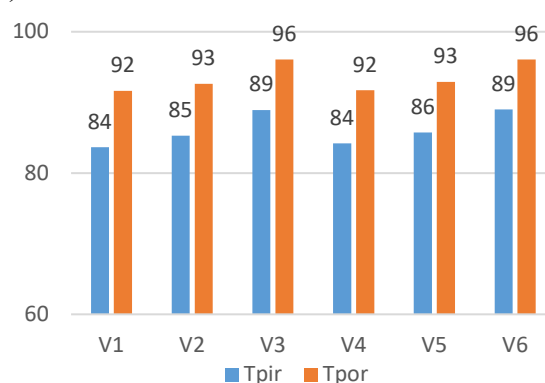
a)



b)



c)



Rys. 15.6. Zbiorcze przedstawienie wyników badań symulacyjnych: a), b) temperatury na pierścieniach zewnętrznym (Tor) i wewnętrznym (Tir), c) temperatury w punkcie kontaktu kulki z bieżniami Tpir, Tpor; V<sub>iiir</sub>, V<sub>ioor</sub> – temperatury na pierścieniach wewnętrznym i zewnętrznym dla wariantów V1 – V6

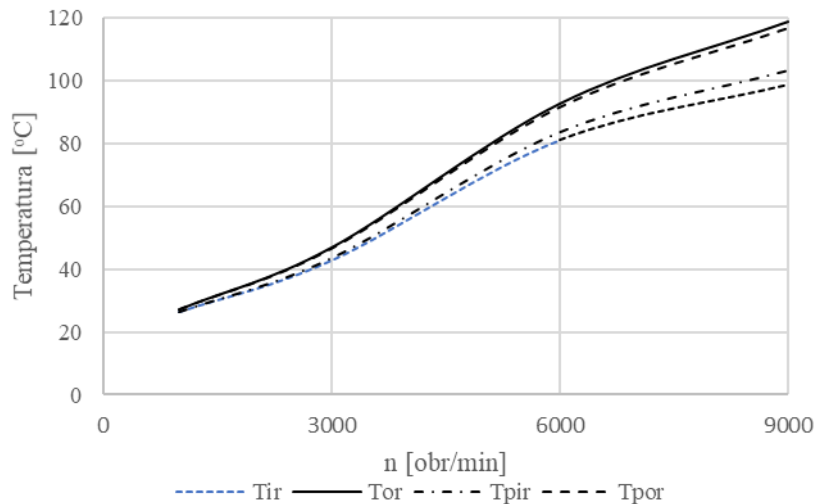
Fig. 15.6. Collective presentation of the results of simulation tests: a), b) temperature on the outer (Tor) and inner (Tir) rings, c) temperature at the point of contact of the ball with raceways Tpir, Tpor; V<sub>iiir</sub>, V<sub>ioor</sub> – temperatures on the inner and outer rings for variants V1 – V6

Na podstawie przeprowadzonych badań symulacyjnych można zaryzykować zalecenie o modelowaniu źródeł ciepła w łożysku w wariantcie najprostszy, tj. przypisując źródła ciepła tylko do całkowitych powierzchni bieżni, bez przypisywania źródeł ciepła do powierzchni kulek.

Dla oszacowania wpływu prędkości obrotowej łożyska na jego temperatury przeprowadzono badania symulacyjne dla wariantu V1. Wyniki tych badań są niezwykle istotne dla modelowania źródeł ciepła w łożysku, jako że opory wiskotyczne istotnie zależą od temperatury (opory wiskotyczne zależą od lepkości smaru, która istotnie zmienia się z temperaturą). Badania przeprowadzono w zakresie prędkości 1000-9000 obr/min, przy czym w ramach badań wstępnych oszacowano temperatury w łożysku, dla których następnie wyznaczono opory wiskotyczne, a potem, w ramach badań zasadniczych, oszacowano wpływ prędkości na temperatury. W trakcie badań

korygowano także współczynniki konwekcji wymuszonej, które zależą od prędkości obrotowej elementów ruchomych (15.5).

Na rys.15.7 przedstawiono wyniki badań w postaci zależności temperatur na bieżniach od prędkości obrotowej łożyska.



Rys. 15.7. Wpływ prędkości obrotowej łożyska na temperatury na bieżni zewnętrznej (Tor) i wewnętrznej (Tir) oraz w punktach kontaktu kulki z bieżniami Tpir, Tpor

Fig. 15.7. Influence of the bearing rotational speed on the temperatures on the outer (Tor) and inner (Tir) raceways and at the points of contact of the ball with raceways Tpir, Tpor

Wnioski z przeprowadzonych badań symulacyjnych są dosyć oczywiste: wzrost prędkości znacząco wpływa na wzrost temperatur na obu pierścieniach oraz w punktach kontaktu kulki z bieżniami. Jest to zależność nieliniowa, przy czym w zakresie prędkości 1000-9000 obr/min temperatury wzrastają z ok. 27°C do ok. 120°C. Różnica temperatur pierścienia zewnętrznego i wewnętrznego dla 9000 obr/min sięga ponad 20°C.

Wyniki te tłumaczą także, dlaczego w badaniach eksperymentalnych (p. 15.5) ograniczono zakres badań do 6000 obr/min. Przyrost temperatury dla prędkości wyższych groził zatarciem łożyska.

## 15.2. Badania symulacyjne wpływu modelu kontaktowego kulka – bieżnia na temperatury w łożysku

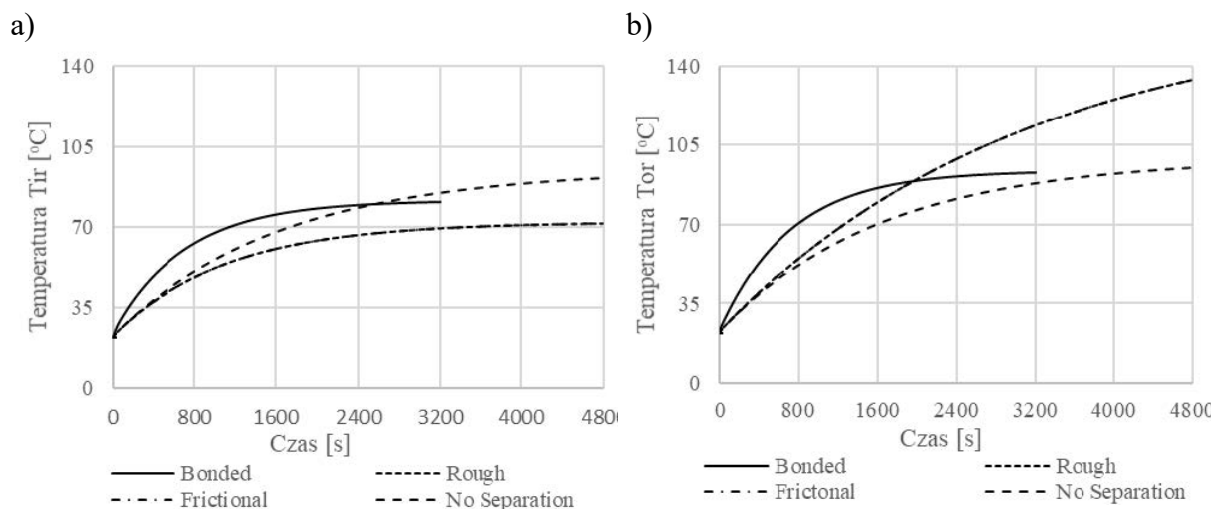
Komercyjne systemy MES, takie jak np. ANSYS, standardowo mają zdefiniowane tzw. domyślne modele kontaktu. Przykładowo, dla kontaktu kulki z powierzchnią wklęsłą (bieżnią zewnętrzną) lub wypukłą (bieżnią wewnętrzną) dla łożysk

o podwyższonej klasie dokładności P4, P5 są to modele klasy Bonded, dla których obszar kontaktu wynika z odległości pomiędzy dwoma ciałami (Pinball Region). Do dyspozycji są również inne modele kontaktu, jak: Rough, Frictional, No Separation, Frictionless. Zważywszy na to, że parametr  $TCC$  istotnie zależy od chropowatości powierzchni, wybór innego modelu niż domyślny może być zasadny.

Z badań własnych autora [32] wynika, że obszary kontaktu wynikające głównie z odkształceń kontaktowych kulki i bieżni mogą przyjmować inne postaci i wymiary (rys. 15.2). Postaci te są takie same jak obszary zakodowane symbolami V1 – V6.

Wszystkie badania symulacyjne przeprowadzono, zakładając:

- straty mocy w łożysku odpowiadają prędkości łożyska 6000 obr/min i napięciu wstępnemu 500 N i są przypisane tylko do obszarów bieżni wewnętrznej i zewnętrznej (wariant V1),
- w modelu geometrycznym łożyska definiowano obszary kontaktu kulki z bieżniami tak samo jak obszary, którym przypisywano źródła ciepła (obszary V1 – V6),
- pozostałe warunki badań symulacyjnych były takie same jak w badaniach przedstawionych w p. 15.1.4.



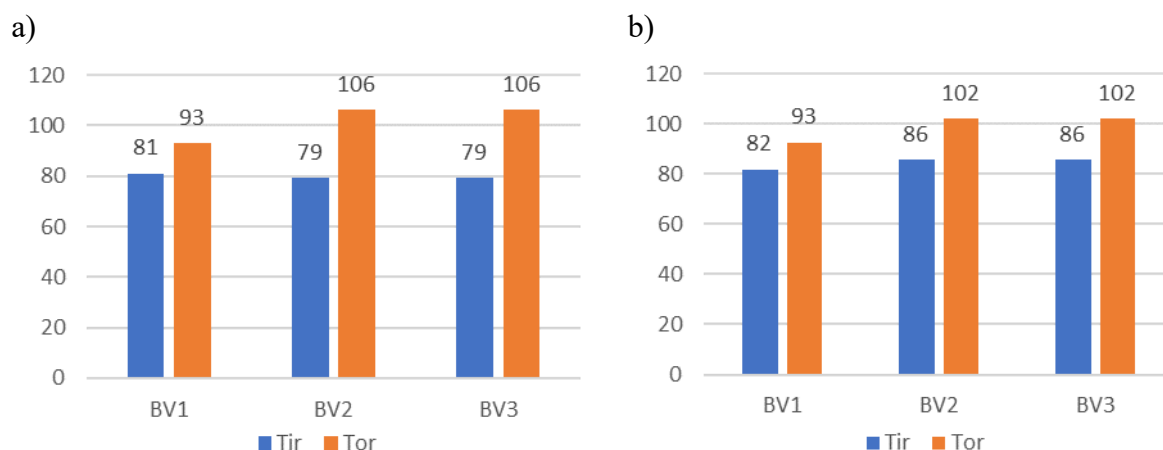
Rys. 15.8. Przykładowe przebiegi temperatur dla kilku modeli kontaktowych: a) dla pierścienia wewnętrznego, b) dla pierścienia zewnętrznego

Fig. 15.8. Exemplary temperature curves for several contact models: a) for the inner ring, b) for the outer ring

Na rys. 15.8 przedstawiono przykładowe przebiegi temperatur pierścienia wewnętrznego i zewnętrznego dla kilku modeli kontaktowych. Na podstawie wyników badań pokazanych na rys. 15.8 można stwierdzić, że:

- temperatury pierścieni łożyskowych, zarówno w stanie ustalonym, jak i w stanach przejściowych, różnią się istotnie w zależności od przyjętego modelu kontaktowego,
- czas osiągnięcia stanu ustalonego w przebiegach temperatur zależy istotnie od przyjętego modelu kontaktowego.

Z kolei na rys. 15.9 przedstawiono zbiorcze porównanie wyników badań symulacyjnych wpływu modelu kontaktowego na temperatury w stanie ustalonym.



Rys. 15.9. Zbiorcze porównanie temperatur na pierścieniach wewnętrznym (Tir) i zewnętrznym (Tor) w stanie ustalonym dla 3 różnych obszarów kontaktowych BV1, BV2, BV3: a) dla źródeł ciepła V1, b) dla źródeł ciepła V3; BV1, BV2, BV3 – oznaczenie modeli kontaktowych Bonded dla obszarów kontaktowych odpowiadających wariantom V1, V2, V3

Fig. 15.9. Collective comparison of temperatures on the inner rings (Tir) and external (Tor) in steady state for 3 different contact areas BV1, BV2, BV3: a) for heat sources V1, b) for heat sources V3; BV1, BV2, BV3 – designation of Bonded contact models for contact areas corresponding to variants V1, V2, V3

Sposób modelowania obszarów kontaktowych skutkuje następującymi konsekwencjami:

- obszary kontaktowe istotnie wpływają zwłaszcza na temperatury pierścienia zewnętrznego w stanie ustalonym. W zależności od obszaru kontaktowego (BV1, BV2, BV3) temperatury Tor różnią się nawet o 13<sup>0</sup>C, przy czym dla obszaru BV1, który powierzchniowo jest największy, są one najniższe. Tak dużych różnic nie obserwuje się dla pierścienia wewnętrznego. Oznacza to, że przepływ ciepła przez obszary o mniejszej powierzchni jest mniej intensywny;
- obszary kontaktowe istotnie wpływają na różnice temperatur Tir i Tor. Sięgają one od 11<sup>0</sup>C dla wariantu BV1 do 27<sup>0</sup>C dla wariantów BV2 i BV3, przy czym najniższa różnica dotyczy obszaru o największej powierzchni BV1;

- dla pierścienia zewnętrznego, dla modeli obszarów kontaktowych o powierzchniach mniejszych (BV2 i BV3) od modelu domyślnego (BV1), temperatura jest wyższa od temperatury dla modelu domyślnego (BV1) nawet o kilka stopni.

Oznacza to, że wybór modelu obszaru kontaktowego będzie istotnie wpływał na rozkład temperatur w łożysku.

Należy zauważyć, że wszystkie badania przeprowadzono dla domyślnego wariantu *TCC*, tj. dla opcji *Program Controlled*.

O tym, który z modeli obszarów kontaktowych jest bliższy rzeczywistości, zadecydują weryfikacyjne badania eksperymentalne.

### **15.3. Badania symulacyjne wpływu konwekcji ciepła na temperatury w łożysku**

Jak już wspomniano w p. 15.1.3, konwekcja jest podstawowym mechanizmem wymiany ciepła pomiędzy łożyskiem a otoczeniem. Co więcej, konwekcja swobodna, głównie na elementach gniazda łożyskowego, istotnie zależy od temperatury elementów gniazda i pierścienia zewnętrznego, natomiast konwekcja wymuszona, występująca głównie na wałku i pierścieniu wewnętrznym, jest stała dla określonej prędkości obrotowej łożyska.

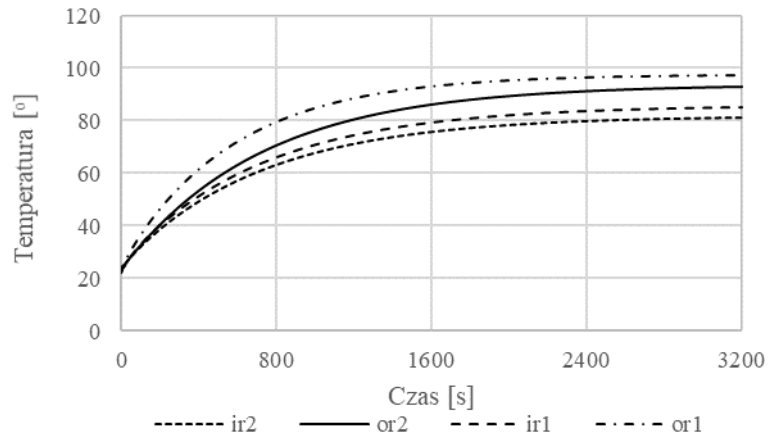
Przez konwekcję projektant gniazda łożyskowego ma możliwość wpływania na stan cieplny łożyska, ponieważ ilość ciepła, jaka przepływa do otoczenia, jest proporcjonalna do powierzchni elementów, z których ciepło wypływa. Dobierając wielkość wszystkich powierzchni gniazda łożyskowego, może osiągnąć pożądany stan cieplny.

Wszystkie badania opisane w p. 15.1.5 i 15.1.6 były przeprowadzane dla wirtualnego gniazda łożyskowego, w którym stosunek powierzchni z konwekcją swobodną do powierzchni z konwekcją wymuszoną wynosił 2. Zadecydowały o tym konstrukcje korpusu gniazda łożyskowego, i wałka (rys. 15.3b).

Dla oceny wpływu konwekcji na temperatury w łożysku przeprowadzono również badania symulacyjne dla wariantu źródeł ciepła V1, ale dla innego ilorazu powierzchni z konwekcją swobodną i wymuszoną, równą 1 (uzyskano to w wyniku zmian konstrukcyjnych korpusu gniazda łożyskowego). Na rys. 15.10a przedstawiono przebiegi temperatur na pierścieniu wewnętrznym i zewnętrznym dla obu wariantów konwekcji, tj. dla ilorazu 2 i 1.

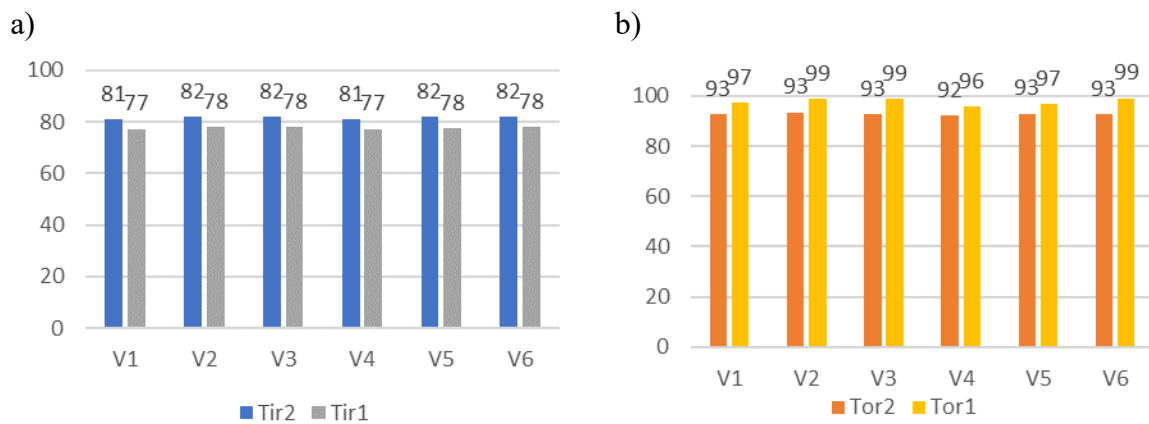
Wniosek z tych badań jest dosyć oczywisty: z uwagi na to, że współczynnik konwekcji swobodnej jest mniejszy od współczynnika konwekcji wymuszonej, zmiana

proporcji wielkości powierzchni emitujących ciepło do otoczenia wpływa na rozkład temperatur. W przykładzie z rys. 15.10 temperatura w stanie ustalonym zmieniła się o ok. 5°C.



Rys. 15.10. Przykładowe przebiegi temperatur na pierścieniu wewnętrznym i zewnętrznym dla dwóch wariantów konwekcji, tj. dla ilorazu powierzchni z konwekcją swobodną i wymuszoną 2 i 1; ir2, or2 – pierścień wewnętrzny i zewnętrzny dla ilorazu powierzchni 2, ir1, or1 – dla ilorazu powierzchni 1

Fig. 15.10. Examples of temperature courses on the inner and outer rings for two variants of convection, i.e. for the area quotient with free and forced convection 2 and 1; ir2, or2 – inner and outer ring for the area quotient 2, ir1, or1 – for the area quotient 1



Rys. 15.11. Temperatury w stanie ustalonym dla dwóch wartości ilorazu powierzchni z konwekcją swobodną i wymuszoną: a) dla pierścienia wewnętrznego, b) dla pierścienia zewnętrznego, dla sześciu wariantów źródeł ciepła V1 – V6; Tir2, Tor2 – temperatury dla ilorazu powierzchni 2, Tir1, Tor1 – temperatury dla ilorazu powierzchni 1

Fig. 15.11. Steady-state temperatures for two area quotient values with free and forced convection: a) for the inner ring, b) for the outer ring, for six variants of heat sources V1 – V6; Tir2, Tor2 – temperatures for the area quotient 2, Tir1, Tor1 – temperatures for the area quotient 1

Na rys. 5.11 przedstawiono zbiorcze zestawienie temperatur dla dwóch wartości ilorazów powierzchni, 2 i 1, dla wszystkich wariantów źródeł ciepła V1 – V6. Dla tych



wariantów źródeł ciepła występuje podobna różnica temperatur na poziomie 4°C dla pierścienia wewnętrznego i 4-6°C dla pierścienia zewnętrznego, tyle tylko że dla pierścienia wewnętrznego zachodzi  $T_{i2} > T_{i1}$ , a dla zewnętrznego  $T_{o2} < T_{o1}$ .

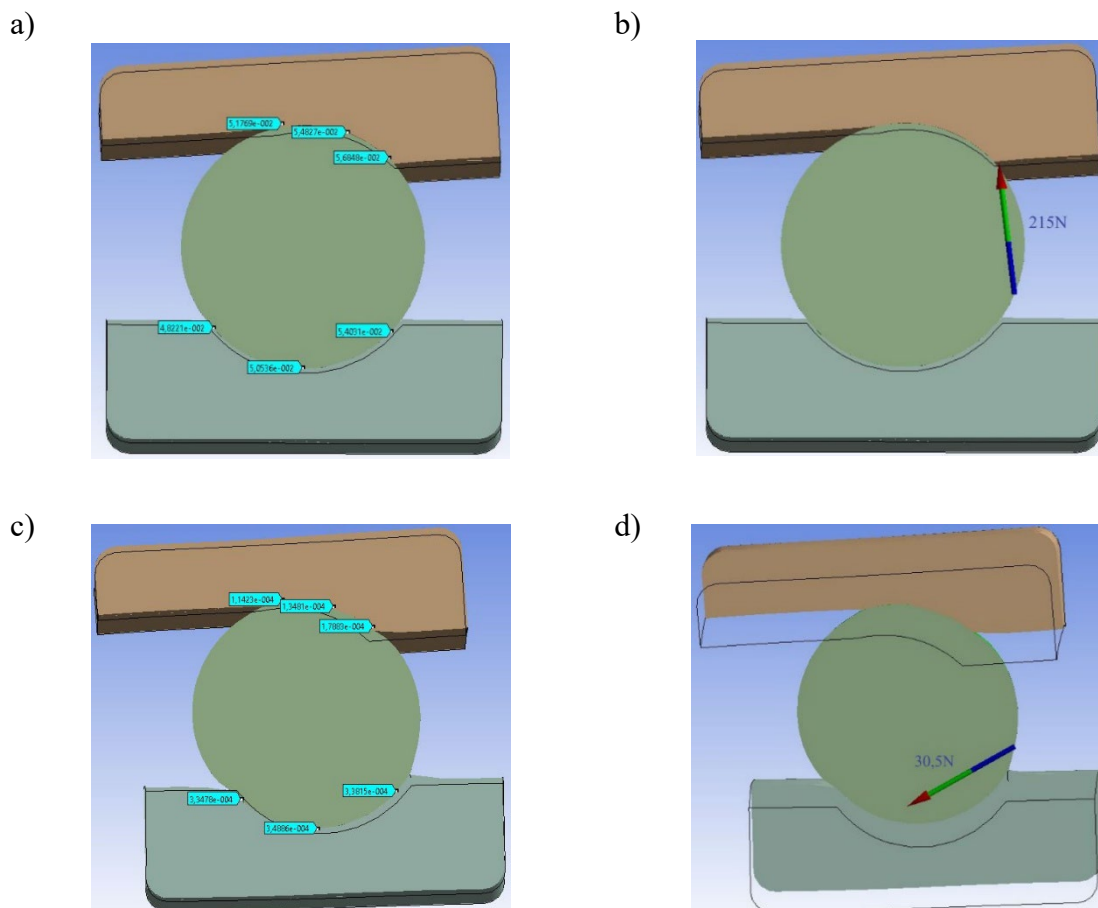
#### **15.4. Wpływ rozkładu temperatur w łożysku na odkształcenia cieplne elementów łożyska**

Jak już wspomniano, celem badań jest zweryfikowanie nielicznych doniesień literaturowych o wpływie temperatury w łożysku na jego opory ruchu. Teza o zmianie oporów ruchu z tytułu zmiany temperatury wynika z faktu, że odkształcenia cieplne elementów łożyska mogą spowodować zmianę luzu pomiędzy kulkami a bieżniami. Jeżeli taki luz ulegnie zmniejszeniu, to konsekwencją będzie wzrost oporów, natomiast jeżeli ulegnie zwiększeniu, to opory zmniejszą, a w krańcowym przypadku może wystąpić ślizganie się kulek zamiast toczenia.

Badania symulacyjne sprowadziły się do oszacowania odkształceń cieplnych  $\delta_{i(T)}$  i  $\delta_{o(T)}$  w punktach kontaktu kulki z bieżniami [17]. Na rys. 15.12a i b pokazano przykładowy efekt w postaci odkształceń cieplnych w łożysku i powstałej z tego tytułu siły kontaktowej pomiędzy kulką i bieżnią zewnętrzną oraz dla porównania efekt w postaci odkształceń mechanicznych od sił napięcia wstępnego i sił odśrodkowych wirujących kulek i powstałej z tego powodu siły kontaktowej (rys. 15.12c i d).

Jeżeli w stanie nieobciążonym i przy unieruchomionym łożysku odległość pomiędzy punktami kontaktowymi kulki a bieżniami była równa średnicy kulki, to w przykładowym przypadku jak na rys. 15.12a odległość ta się zmieniła o 2-4  $\mu\text{m}$  dla odkształceń cieplnych i 0,1-0,2  $\mu\text{m}$  dla odkształceń mechanicznych (spowodowanych siłami odśrodkowymi od wirujących kulek i pierścienia wewnętrznego oraz napięcia wstępnego, rys. 15.12c). Te odkształcenia są źródłem sił kontaktowych, które dla efektów cieplnych wyniosły ok. 215 N (rys. 15.12b), a dla efektów mechanicznych (rys. 15.12d) ok. 30,5 N. Te siły będą źródłem dodatkowych oporów ruchu w łożysku.

Przykłady na rys. 15.12 pokazują, jak istotne jest zaprojektowanie węzła łożyskowego z uwagi na konwekcję ciepła do otoczenia. Konstruktor węzła łożyskowego dysponuje narzędziami kształtującymi przepływy ciepła przez dobór powierzchni gniazda łożyskowego i wałka, ale musi mieć wiedzę o stanie cieplnym łożyska.



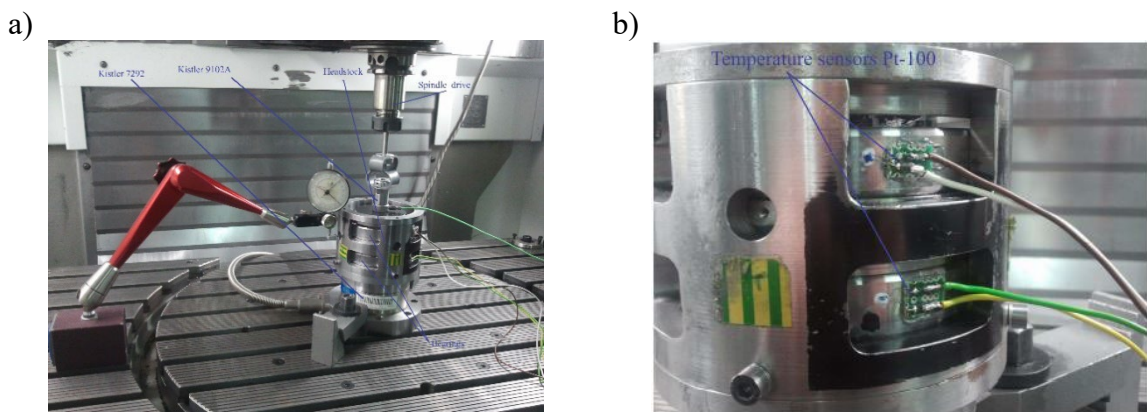
Rys. 15.12. Przykład odkształceń cieplnych (a), mechanicznych (c) i sił kontaktowych spowodowanych odkształceniem cieplnym (b) i mechanicznym (d)

Fig. 15.11. Example of thermal (a), mechanical (c) and contact forces due to thermal (b) and mechanical (d) deformation

## 15.5. Eksperymentalne badania weryfikacyjne temperatur w łożysku

Jak już wspomniano, niezbędna jest weryfikacja eksperymentalna temperatur, ponieważ wyniki badań symulacyjnych różniły się m.in. z powodu modelowania obszarów kontaktowych i rozkładu źródeł ciepła. Badania eksperymentalne powinny pozwolić na wskazanie najlepszego, tj. najbardziej zbliżonego do rzeczywistości, sposobu modelowania symulacyjnego MES.

W Katedrze Budowy Maszyn Politechniki Śląskiej istnieje stanowisko badawcze do badania oporów ruchu i temperatur w łożyskach [13], przedstawione na rys. 15.13.

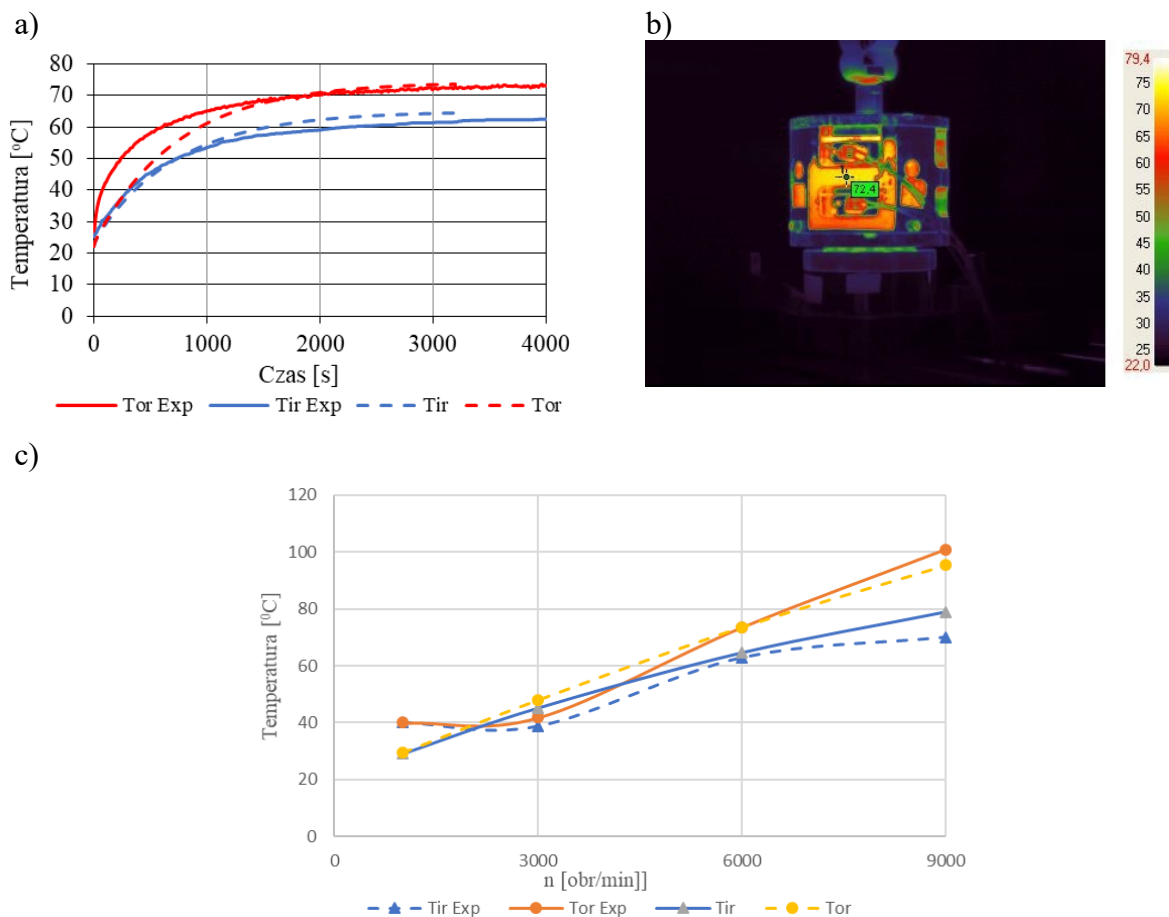


Rys. 15.13. Widok stanowiska do badań oporów ruchu w łożysku (a) i temperatur (b)  
 Fig. 15.13. View of the stand for testing resistance to motion in the bearing (a) and temperature (b)

Stanowisko ma postać wrzeciennika, w którym wrzeciono jest ułożyskowane na dwóch łożyskach kulkowych skośnych. Wrzeciennik spoczywa na czujniku momentu obrotowego Kistler 7292, który służy do pomiaru oporów ruchu. Napięcie wstępne łożysk realizują nakrętka i czujnik siły osiowej Kistler 9102A, natomiast ruch obrotowy wrzeciona realizuje wrzeciono frezarki, na stole którego spoczywa całe stanowisko.

Pomiar temperatur zrealizowano z wykorzystaniem czujników stykowych Pt-100, naklejonych na pierścieniach zewnętrznych łożysk (rys. 15.13b), za pomocą pirometru OptisCtLaser (pomiar temperatury na pierścieniu wewnętrznym) niepokazanego na rys. 15.13b i za pomocą kamery termowizyjnej VigoCam V50, niepokazanej na rys. 15.13b [13]. Badania polegały na rejestrowaniu temperatur na pierścieniach zewnętrznych, na pierścieniu wewnętrznym i całego wrzeciennika (za pomocą kamery) aż do osiągnięcia stanu ustalonego. Na rys. 15.14a przedstawiono przykładowy przebieg temperatur na pierścieniu zewnętrznym i wewnętrznym, a na rys. 15.14b przykładowy obraz cieplny z kamery termowizyjnej dla podobnych warunków, w jakich przeprowadzono badania symulacyjne [13].

Porównując przebiegi temperatur z badań symulacyjnych z przebiegiem z badań eksperymentalnych na rys. 15.14a, można sformułować pogląd o ich zgodności przede wszystkim jakościowej. Temperatury na pierścieniu zewnętrznym i wewnętrznym różnią się w stanie ustalonym o ok. 10°C, a czas do osiągnięcia stanu ustalonego wynosi ok. 1 godziny. Dostrzegalne są natomiast różnice ilościowe, tzn. temperatury z badań eksperymentalnych w stanie ustalonym są nieco niższe niż z badań symulacyjnych, z kolei w stanie przejściowym, zwłaszcza dla pierścienia zewnętrznego, znacząco różne w pierwszym 1000 sekund.



Rys. 15.14. Przykładowe przebiegi eksperymentalne i symulacyjne temperatury pierścienia zewnętrznego i wewnętrznego: a) przebieg czasowy, b) obraz z kamery termowizyjnej, c) wpływ prędkości łożyska; TirExp, TorExp – wyniki eksperymentalne, Tir, Tor – wyniki badań symulacyjnych

Fig. 15.14. Examples of experimental and simulation waveforms of the temperature of the outer and inner rings: a) time waveform, b) image from a thermal imaging camera, c) the effect of bearing speed; TirExp, TorExp – experimental results, Tir, Tor – simulation results

Na rys. 15.14c przedstawiono także symulacyjne i eksperymentalne wyniki badań w postaci wpływu prędkości obrotowej łożyska na temperatury pierścienia wewnętrznego i zewnętrznego. Porównując te wyniki badań, także w tym przypadku można mówić o zgodności jakościowej, tzn. wzrostowi prędkości towarzyszy wzrost temperatur na pierścieniach, a temperatura pierścienia zewnętrznego jest wyższa od wewnętrznego. Ilościowe porównanie tych wyników wskazuje natomiast na większe różnice, które sięgają 5-10<sup>0</sup>C. Spowodowane to jest głównie problemami technicznymi w pomiarze temperatury pierścienia wewnętrznego, do którego dostęp był utrudniony.

## 15.6. Wnioski z badań cieplnych

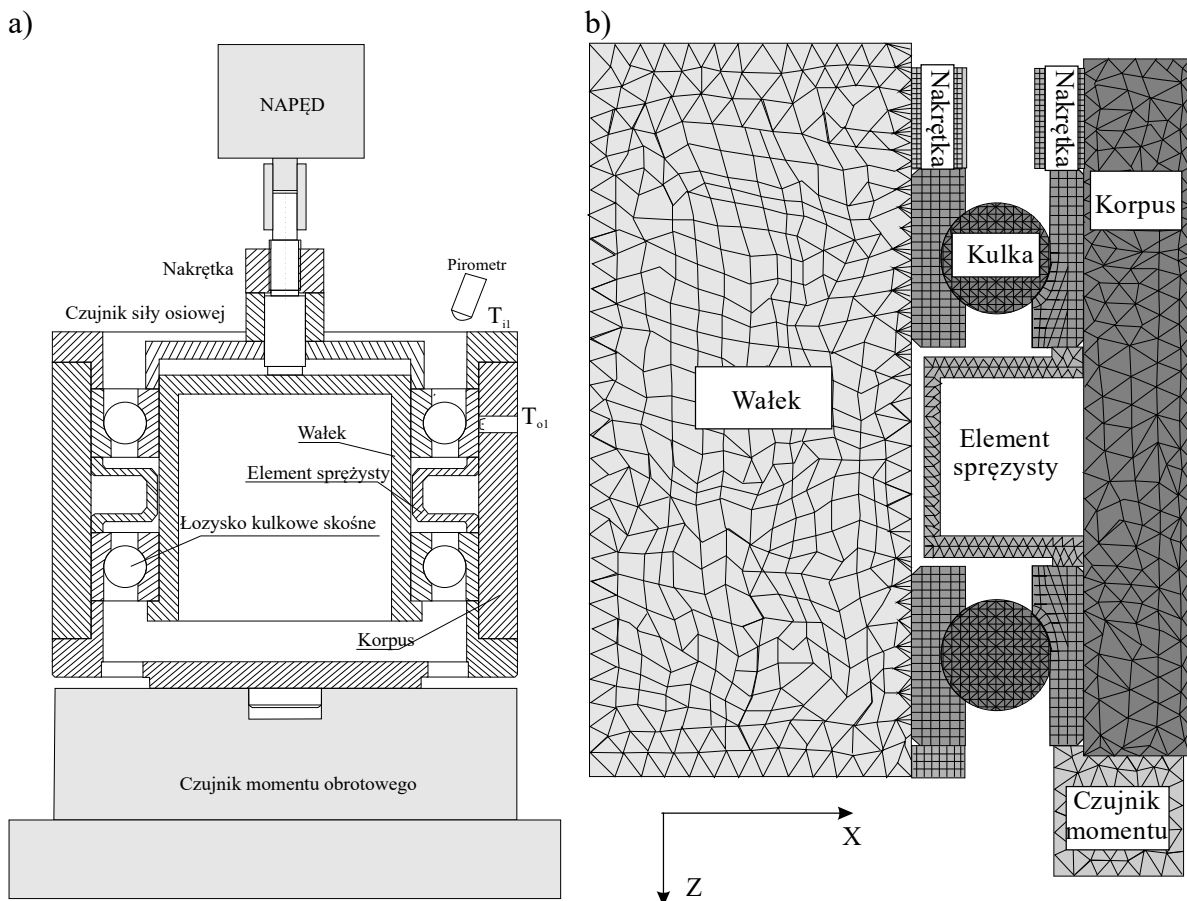
W łożyskach tocznych, zwłaszcza szybkobieżnych, można spodziewać się wyższych temperatur niż w przypadku niższych prędkości obrotowych. We wrzecionach obrabiarek HSC taka sytuacja często występuje. Wysoka temperatura ma wpływ nie tylko na odkształcenia cieplne wrzeciona, lecz także na opory ruchu w łożysku. Tego ostatniego zagadnienia w dostępnej literaturze się nie znajduje. Dlatego w ramach niniejszej monografii przedstawiono wyniki badań symulacyjnych temperatur w łożysku i wynikających z nich odkształceń cieplnych elementów łożyska. Pozwalają one na sformułowanie następujących wniosków:

1. Sposób modelowania źródeł ciepła w łożysku nie ma istotnego wpływu na rozkład temperatur, dlatego sugeruje się rozmieszczanie źródeł ciepła tylko na bieżniach obu pierścieni, proporcjonalnie do oporów ruchu na tych bieżniach. Jest to technicznie najprostszy sposób modelowania źródeł ciepła, który nie wprowadza jakiegoś istotnego błędu do wyników końcowych.
2. Znaczący wpływ na rozkład temperatur w łożysku ma model kontaktowy dla kulek i bieżni. Domyślnie w systemach MES takich jak np. Ansys dominuje model Bonded, a domyślny obszar kontaktu obejmuje powierzchnie bieżni i powierzchnie kulki. Ten sposób modelowania kontaktów daje najlepszą zgodność z wynikami badań eksperymentalnych. Modelowanie obszaru kontaktu np. w postaci elipsy kontaktowej prowadzi do zawyżania temperatur na elementach łożyska.
3. Znaczący wpływ na rozkład temperatur w łożysku ma konwekcja ciepła do otoczenia. Konstruktor może tak ukształtować powierzchnie gniazda łożyskowego, które emitują ciepło do otoczenia, aby zminimalizować różnice temperatur pomiędzy pierścieniem zewnętrznym i wewnętrznym. Wówczas można oczekiwać mniejszych różnic odkształceń cieplnych pomiędzy tymi elementami, a w konsekwencji mniejszych sił kontaktowych.

## 15.7. Wpływ ciepła powstającego w łożysku tocznym na jego opory ruchu

W poprzednich rozdziałach przedstawiono wyniki badań symulacyjnych wpływu ciepła wytwarzanego w łożysku na rozkład temperatur oraz na odkształcenia cieplne w łożysku. Dotychczas w literaturze nie spotyka się informacji o tym, w jaki sposób straty mocy, a tym samym odkształcenia cieplne w łożysku, wpływają na opory samego

łożyska. Można przypuszczać, że straty mocy w łożysku powodują odkształcenia cieplne elementów łożyska, co z kolei może powodować zmianę luzu pomiędzy kulkami a bieżniami, a w konsekwencji oporów ruchu. W wyniku przeprowadzonych badań stwierdzono, że odkształcenia cieplne elementów łożyska są wielokrotnie większe niż odkształcenia spowodowane obciążeniami mechanicznymi, np. siłą odśrodkową od wirujących kulek czy napięciem wstępnym łożysk. Ponadto stwierdzono, że obciążenia kontaktowe pomiędzy kulkami a bieżniami w cieplnym stanie przejściowym łożyska mogą być wielokrotnie większe niż w stanie ustalonym, co oznacza, że i opory ruchu w łożysku w stanie przejściowym mogą być znacznie większe niż w stanie ustalonym. Wykazano, że uzyskanie symulacyjnych czasowych przebiegów temperatur w łożysku wymaga wielokrotnego, iteracyjnego powtórzenia analiz. Przeprowadzone badania eksperymentalne pokazują stosunkowo dobrą zgodność jakościową z wynikami badań symulacyjnych, natomiast wyniki ilościowe nie zawsze dają wystarczającą zgodność.



Rys. 15.15. Przekrój stanowiska badawczego do pomiaru oporów ruchu łożysk tocznych (a) i jego model geometryczny MES (b):  $T_{o1}$ ,  $T_{i1}$  – temperatury na pierścieniu zewnętrznym i wewnętrznym

Fig. 15.15. Cross-section of the test stand for resistance measurement, the movement of rolling bearings (a) and its geometric model FEM (b):  $T_{o1}$ ,  $T_{i1}$  – temperatures on the outer and inner rings of the bearing

### 15.7.1. Model MES obiektu badań

Z uwagi na złożoność zagadnienia posłużono się metodą symulacyjną elementów skończonych. Obiektem badań symulacyjnych jest stanowisko badawcze do pomiaru oporów ruchu łożysk tocznych, które powstało w Katedrze Budowy Maszyn Politechniki Śląskiej [13]. Ze strukturalnego punktu widzenia stanowisko to jest podobne do klasycznego wrzeciennika obrabiarki, tj. składa się z wałka (wrzeciona) ułożyskowanego na dwóch łożyskach skośnych, wstępnie napiętych, oraz korpusu wrzeciennika (rys. 15.15a). Na rys. 15.15b przedstawiono natomiast model geometryczny obiektu na potrzeby badań MES. Model MES jest uproszczony w stosunku do obiektu rzeczywistego (rys. 15.15a), ponieważ wykorzystano osie symetrii łożyska. W rezultacie model MES stanowi tylko  $1/N$  całego łożyska, gdzie  $N$  – liczba kulek w łożysku.

W modelu MES z punktu widzenia celu badań najistotniejsze są modele kontaktu kulek z bieżniami. Przyjęto, że w zależności od celu badań będą to modele *Frictional* [56], które umożliwiają modelowanie przemieszczeń i tarcia, lub modele *Bonded*. W p. 15.7.2. wyjaśniono, kiedy które modele były stosowane.

W modelu MES występuje ponadto kilkanaście innych modeli kontaktowych, jak np. kontakty pierścieni łożyskowych z wałkiem i z korpusem, kontakty elementu sprężystego z pierścieniami zewnętrznymi łożysk, kontakty nakrętek z pierścieniami łożysk i z wałkiem oraz korpusem czy wreszcie kontakt korpusu z czujnikiem momentu obrotowego. W tych przypadkach przyjęto nieco prostszy model kontaktowy w postaci *Frictionless* [56], który pozwala modelować przemieszczenia, ale bez udziału tarcia, natomiast dla modelowania rozkładu temperatur stosowano model *Bonded*. Takie podejście wynikało z chęci zmniejszenia wielkości modelu i czasu rozwiązania zadania (pomimo tego w przypadku analiz typu *Transient Structural* czas pojedynczej analizy nierzadko sięgał 20 i więcej godzin). Utworzony w ten sposób model MES całego obiektu zawierał ok. 250 tys. elementów i ponad 500 tys. węzłów.

Na podstawie wyników badań eksperymentalnych (p. 15.5) przyjęto, że pojedyncza analiza obejmować będzie czas pracy łożyska ok. 1 godziny. Dopiero bowiem po takim czasie rzeczywisty obiekt osiągał cieplny stan ustalony.

Przyjęto, że tylko dla prędkości obrotowej łożyska 6000 obr/min zrealizowane zostaną pełne analizy typu *Transient Thermal* i *Transient Structural*. Dla pozostałych prędkości obrotowych łożyska przeprowadzono analizy typu *Steady-State Thermal* i *Static Structure*, czyli analizy statyczne. Tak wykonane analizy statyczne dostarczały

wyników badań tylko dla jednego punktu czasowego, odpowiadającego czasowi 3200 sekund, dzięki temu ogólny czas całych badań symulacyjnych uległ znaczącemu skróceniu.

Badania przeprowadzono dla testowych łożysk tocznych skośnych typu FAG B7013-E w zakresie prędkości obrotowej 1000-9000 obr/min i dla napięć wstępnych 100 N – 1000 N, ponieważ badania eksperymentalne przeprowadzono także w takim zakresie prędkości i napięć wstępnych. Dla testowego łożyska maksymalna prędkość obrotowa wynosi 11 000 obr/min.

Badania symulacyjne i eksperymentalne zrealizowano dla dwóch warunków pracy łożysk:

- bez obecności smaru,
- w obecności smaru.

Powodem takiego postępowania była chęć rozróżnienia wpływu oporów tarcia mechanicznego i oporów tarcia wiskotycznego na opory ruchu łożysk, a tym samym na stan cieplny łożysk.

### **15.7.2. Szacowanie strat mocy w łożysku**

Przed rozpoczęciem badań symulacyjnych konieczne jest oszacowanie strat mocy w łożysku na podstawie modeli analitycznych. Straty te będą odzwierciedlać moc źródeł ciepła w łożysku. Ponieważ w pierwszym kroku badań symulacyjnych nie jest jeszcze znany rozkład temperatur, więc do oszacowania tych strat należy przyjąć temperatury prognozowane, np. na podstawie wytycznych producentów łożysk. W następnych krokach będzie można wykorzystywać wyniki cieplnych badań symulacyjnych z poprzednich kroków do dokładniejszego oszacowania tych strat. Tak więc na drodze iteracyjnej będzie można oszacować straty mocy, które lepiej odzwierciedlą rzeczywiste straty mocy.

Straty mocy w łożysku są funkcją jego oporów ruchu i prędkości. Na opory ruchu w łożysku składają się:

- opory z tytułu tarcia mechanicznego ruchomych kulek o bieżnię łożyska,
- opory ruchu z tytułu brodzenia kulek w ośrodku smarnym, zwane oporami wiskotycznymi.

W rzeczywistym łożysku występują jeszcze inne źródła oporów ruchu, np. od tarcia kulek o koszyk. W niniejszej pracy tych oporów nie uwzględniano.



Opory wiskotyczne są dobrze rozpoznane i w literaturze można znaleźć zależności analityczne, pozwalające obliczać moment oporów wiskotycznych  $M_v$  (10.1) oraz straty mocy (15.6). Z zależności (10.1) wynika, że opory wiskotyczne zależą bezpośrednio od prędkości obrotowej i od lepkości smaru, która to lepkość jest funkcją temperatury. Znajomość temperatury smaru jest więc niezbędna dla oszacowania oporów wiskotycznych.

W literaturze [60] spotyka się następujący model lepkości smaru:

$$v(T) = v_{40} \left( \frac{40}{T} \right)^m \quad (15.8)$$

gdzie:  $v(T)$  – lepkość smaru w temperaturze  $T$ ,

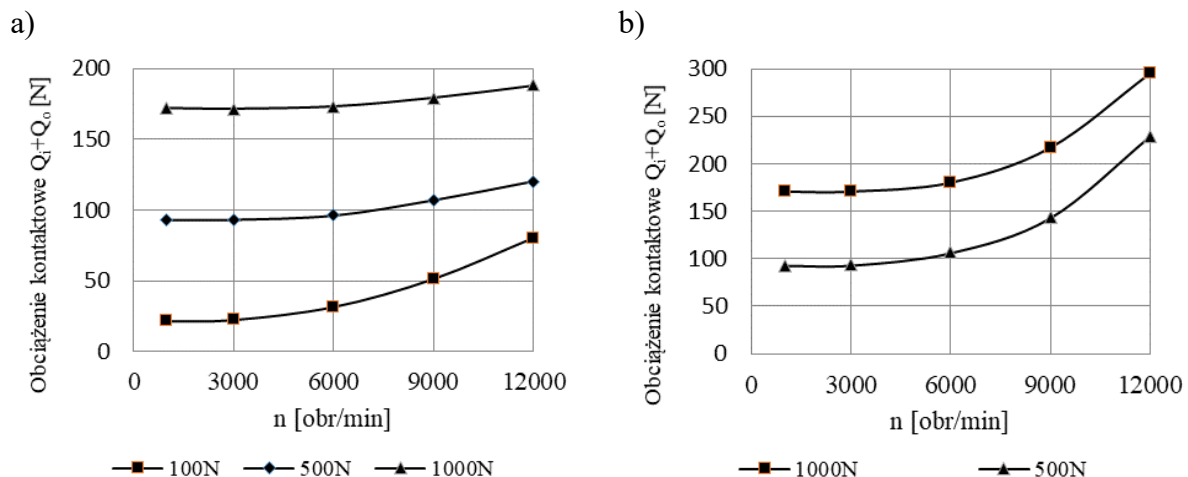
$v_{40}$  – lepkość smaru w temperaturze  $40^\circ\text{C}$ ,

$m$  – stała.

Stałą (wykładnik)  $m$  można wyznaczyć z zależności:

$$m = \frac{\ln\left(\frac{v_{100}}{v_{40}}\right)}{\ln\left(\frac{100}{40}\right)} \quad (15.9)$$

gdzie:  $v_{100}$  – lepkość smaru w temperaturze  $100^\circ\text{C}$  (producenci smaru często podają w swoich katalogach wartości lepkości smaru w temperaturach  $40^\circ\text{C}$  i  $100^\circ\text{C}$ ).



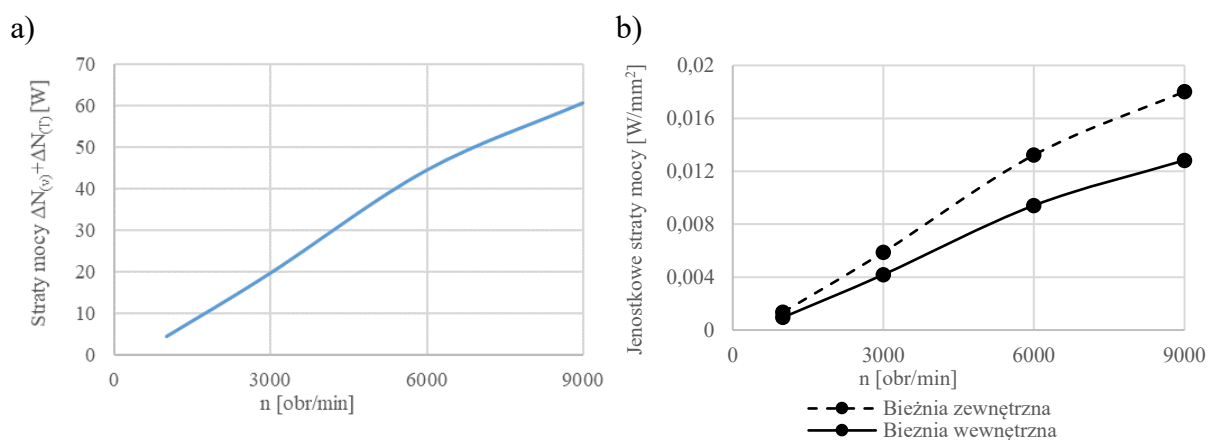
Rys. 15.16. Wpływ prędkości obrotowej kulki (a) oraz wpływ prędkości obrotowej kulki i pierścienia łożyskowego wewnętrznego (b) na sumę obciążeń  $Q_i + Q_o$  w obszarze kontaktu kulki z bieżnią zewnętrzną  $Q_o$  i wewnętrzną  $Q_i$ : 100 N, 500 N, 1000 N – napięcie wstępne łożyska

Fig. 15.16. Influence of the ball rotational speed (a) and the effect of the rotational speed of the ball and the inner bearing ring (b) on the sum of the loads  $Q_i + Q_o$  in the area of contact of the ball with the outer race  $Q_o$  and the inner race  $Q_i$ : 100 N, 500 N, 1000 N – bearing preload

Nieco trudniejsze jest oszacowanie oporów ruchu łożysk z tytułu tarcia mechanicznego kulek o bieżnię  $Q_i$  i  $Q_o$ , (15.7). Na rys. 15.16a przedstawiono wyniki badań własnych w postaci wpływu prędkości obrotowej i napięcia wstępnego łożyska na sumę obciążeń kontaktowych  $Q_i + Q_o$  w obszarze kontaktu z bieżnią zewnętrzną  $Q_o$  i wewnętrzną  $Q_i$  dla testowego łożyska skośnego typu FAG B7013-E. Obciążenia te wpływają bezpośrednio na opory ruchu z tytułu tarcia mechanicznego. Wzrost prędkości obrotowej oraz napięcia wstępnego znacząco wpływa na wzrost sił kontaktowych (rys. 15.16a), a co za tym idzie – sił tarcia ( $Q_i + Q_o$ ) oraz wynikających z tego oporów ruchu. W myśl modelu Palmgren'a (8.1) opory z tytułu zmiany prędkości nie ulegają zmianie.

Na podstawie momentów oporów można wyznaczyć straty mocy w łożysku, które są źródłem ciepła. Zależności (15.6) i (15.7) pozwalają obliczyć te straty mocy w łożysku.

Na rys. 15.17a przedstawiono przykładowy przebieg strat mocy  $\Sigma N_{(T)} + \Sigma N_{(v)}$  w testowym łożysku skośnym dla prognozowanej temperatury i dla napięcia wstępnego łożyska 100 N.



Rys. 15.17. Przykładowy przebieg strat mocy  $\Sigma N_{(T)} + \Sigma N_{(v)}$  w funkcji prędkości obrotowej łożyska (a), jednostkowe straty mocy na bieżni zewnętrznej i wewnętrznej (b)  
 Fig. 15.17. Exemplary wave of power losses  $\Sigma N_{(T)} + \Sigma N_{(v)}$  as a function of rotational speed of the bearing (a), unit power losses on the outer and inner raceways (b)

Z rys. 15.17a wynika, że prognozowane straty mocy w testowym łożysku skośnym w zależności od prędkości obrotowej zawierają się w granicach od 5 W do 60 W. Przyjęto, że cała ta moc zostanie zamieniona w ciepło, które powstaje z tytułu oporów ruchu w łożysku.

Problematyka ilościowego oszacowania strat mocy w łożysku nie jest jedynym zagadnieniem, które trzeba rozwiązać przed przystąpieniem do cieplnych badań symulacyjnych.

Nie mniej złożonym zagadnieniem jest rozmieszczenie źródeł ciepła w łożysku. W p. 15.1 szczegółowo omówiono to zagadnienie.

Ostatecznie dla celów niniejszej pracy przyjęto, że ilościowo straty mocy (źródła ciepła) przypisane bieżniom zewnętrznej  $\Sigma N_o$  i wewnętrznej  $\Sigma N_i$  wyznaczono następująco:

$$\begin{aligned}\Delta N_o &= \Delta N_{(T)o} + 0,5\Delta N_{(v)} \\ \Delta N_i &= \Delta N_{(T)i} + 0,5\Delta N_{(v)}\end{aligned}\quad (15.10)$$

gdzie:  $\Sigma N_o$ ,  $\Sigma N_i$  – straty mocy przypisane bieżni zewnętrznej i wewnętrznej,

$\Sigma N_{(T)o}$ ,  $\Sigma N_{(T)i}$  – straty mocy z tytułu tarcia mechanicznego przypisane bieżni zewnętrznej i wewnętrznej.

Zależność (15.10) pokazuje, że straty mocy z tytułu oporów wiskotycznych  $\Sigma N_{(v)}$  przydzielono w 50% bieżni zewnętrznej i w 50% wewnętrznej, natomiast straty mocy z powodu tarcia mechanicznego – proporcjonalnie do oporów mechanicznych występujących na tych bieżniach.

W p. 15.1.2 przeanalizowano wpływ modelu kontaktu cieplnego na rozkład temperatur. Ponieważ najlepszą zgodność wyników badań symulacyjnych rozkładu temperatur (*Transient Thermal* i *Steady-State Thermal*) i badań eksperymentalnych uzyskano dla modelu *Bonded*, w dalszym ciągu tego modelu kontaktu użyto w badaniach oporów ruchu.

Z kolei w badaniach wpływu odkształceń cieplnych używano modelu kontaktowego *Frictional*, ponieważ dla tego modelu uzyskano najlepszą zgodność wyników badań symulacyjnych dotyczących m.in. cieplnych odkształceń i obciążeń kontaktowych (*Transient Structural* i *Static Structure*) z eksperymentem. W p. 15.1.3 Autorzy pokazali, jak definiować warunki konwekcji ciepła do otoczenia i przewodzenia ciepła wewnątrz.

Ostatecznie dla celów symulacyjnych obliczono jednostkowe straty mocy  $\Delta N_u$  na bieżni zewnętrznej  $\Delta N_{uo}$  ( $\Delta N_o/A_o$ ) i wewnętrznej  $\Delta N_{ui}$  ( $\Delta N_i/A_i$ ) (rys. 15.17b) na podstawie zależności (15.10) i geometrycznej powierzchni bieżni zewnętrznej ( $A_o$ ) i wewnętrznej ( $A_i$ ) w funkcji prędkości obrotowej.

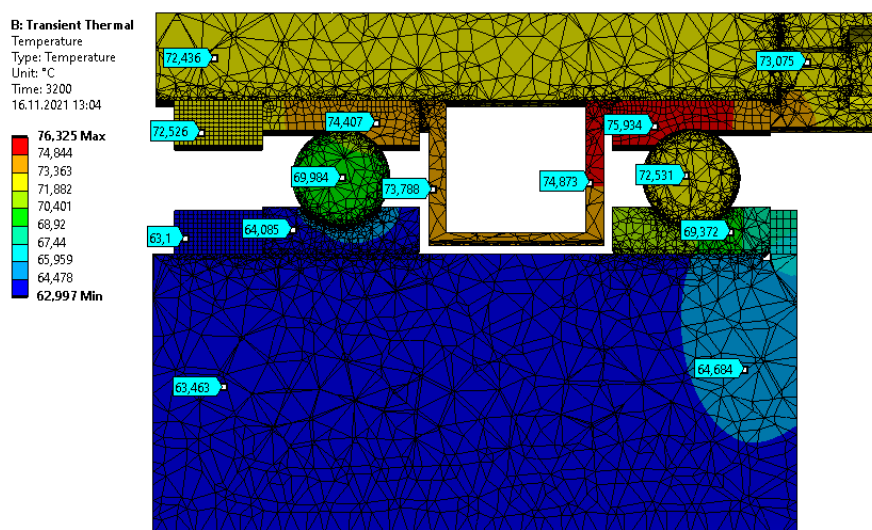
### 15.7.3. Metodyka badań

Jak już wspomniano, rozwiązanie zagadnienia wymaga metod iteracyjnych. Dlatego w planie badań wyróżniono dwa etapy: pierwszy to identyfikacja rozkładu temperatur w łożysku, a drugi to identyfikacja odkształceń cieplnych i obciążeń kontaktowych w łożysku.

Aby móc zrealizować etap drugi, musi zostać przeprowadzony etap pierwszy. Ale rozwiązanie etapu pierwszego możliwe było tylko wówczas, kiedy zidentyfikowano obciążenia kontaktowe, czyli kiedy rozwiązano etap drugi.

Zgodnie z przyjętym planem badań w pierwszym kroku oszacowano wpływ prędkości obrotowej łożysk i wynikających z tego oporów ruchu na rozkład temperatur w łożyskach i w całym stanowisku. Badania te przeprowadzono w kilku krokach. W pierwszym z nich straty mocy oszacowano na podstawie rozważań analitycznych, przedstawionych w rozdz. 10. Przyjęto przy tym, że w pierwszym kroku lepkość w stanie przejściowym w łożysku jest niezmienna i obliczona (15.8) dla temperatury prognozowanej (za temperaturę prognozowaną przyjęto temperaturę sugerowaną przez producenta łożysk). Dla takiej lepkości obliczono opory wiskotyczne (15.6), które w stanie przejściowym pozostawały niezmiennie. Opory z tytułu tarcia mechanicznego wyznaczono na podstawie metodyki opisanej w rozdziale 10, bez uwzględniania wpływu temperatur. Zależność tak oszacowanych jednostkowych strat mocy przypisanych do bieżni zewnętrznej i wewnętrznej przedstawiono na rys. 15.17b.

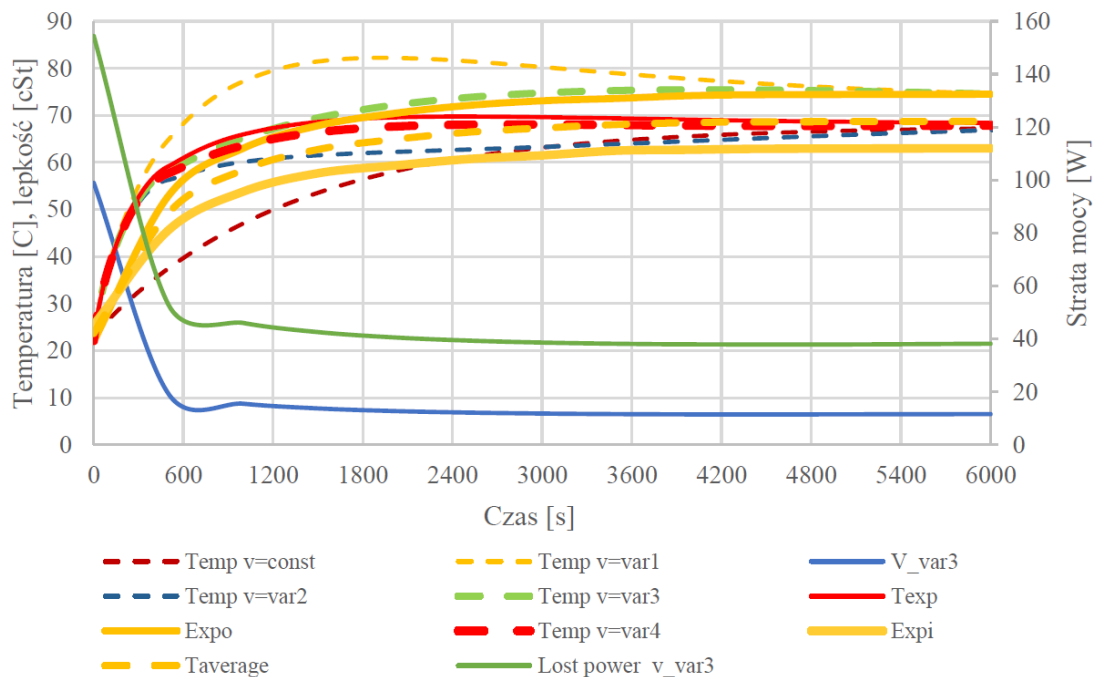
Na rys. 15.18 pokazano przykładowy rozkład temperatur w stanowisku badawczym, uzyskany z badań symulacyjnych *Transient Thermal* dla prędkości 6000 obr/min.



Rys. 15.18. Przykładowy rozkład temperatur w stanowisku badawczym uzyskany z badań symulacyjnych *Transient Thermal* dla prędkości 6000 obr/min

Fig. 15.18. An example of the temperature distribution in the test stand obtained from the *Transient Thermal* simulation tests for the speed of 6000 rpm

Rysunek 15.19 przedstawia przebiegi temperatur w stanie przejściowym w łożysku dla prędkości 6000 obr/min uzyskane z analizy *Transient Thermal*. Przebieg oznakowany jako „Temp\_v=const” dotyczy pierwszego kroku symulacji. Na podstawie przebiegu temperatur w pierwszym kroku „Temp\_v=const” wyznaczono przebieg lepkości  $v\_var$  (zależność (15.8)) oraz przebieg strat mocy z tytułu zmiany lepkości *Lost power* (zależność (15.6)). W drugim kroku, na podstawie tak obliczonych strat mocy, zmodyfikowano źródła ciepła w taki sposób, że ich moc zmieniała się w trakcie symulacji odpowiednio do zmian temperatur. Wyniki badań symulacyjnych dla tak obliczonej lepkości i oporów wiskotycznych przedstawia przebieg oznaczony jako *Temp\_var1*. W kroku trzecim powtórzono procedurę z kroku drugiego z tą tylko różnicą, że do obliczeń lepkości i oporów wiskotycznych wzięto przebieg temperatury z kroku drugiego. Wynik symulacji w kroku trzecim przedstawia przebieg *Temp\_v=var2*.



Rys. 15.19. Przebiegi temperatur w łożysku uzyskane z analizy *Transient Thermal*; *Temp\_v=const* – dla niezmienniej lepkości smaru, *Temp\_v=var1*, *Temp\_v=var2*, *Temp\_v=var3*, *Temp\_v=var4* – dla zmiennej lepkości smaru, *v\_var3* – przebieg lepkości smaru, *Lost power v\_var3* – przebieg strat mocy, *Expo*, *Expi* – przebiegi temperatur na pierścieniu zewnętrznym i wewnętrznym z badań eksperymentalnych, *Taverage* – średnia temperatura z *Expo* i *Expi*, *Temp* – przebieg temperatury z badań symulacyjnych dla lepkości obliczonej na podstawie przebiegu średniej temperatury z badań eksperymentalnych

Fig. 15.19. Bearing temperature waveforms obtained from *Transient Thermal* analysis; *Temp\_v = const* – for the constant viscosity of the grease, *Temp\_v = var1*, *Temp\_v = var2*, *Temp\_v = var3*, *Temp\_v = var4* – for the variable viscosity of the grease, *v\_var3* – course of the grease viscosity, *Lost power v\_var3* – the course of power losses, *Expo*, *Expi* – temperature courses on the outer and inner rings from experimental tests, *Taverage* – average temperature from *Expo* and *Expi*, *Temp* – temperature course from simulation tests for viscosity calculated on the basis of the average temperature course from experimental tests

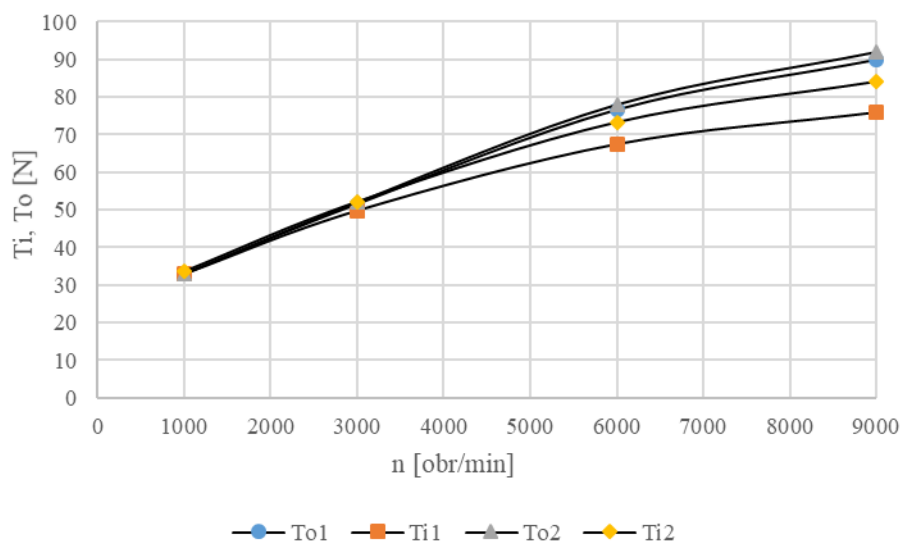
W kroku czwartym powtórzono procedurę z kroku trzeciego, ale do obliczenia lepkości i oporów wiskotycznych wzięto przebieg temperatury w kroku trzecim. Wynik symulacji w kroku czwartym przedstawia przebieg oznaczony jako  $Temp_v=var3$ . W kroku piątym powtórzono procedurę z kroku czwartego, ale do obliczenia lepkości i oporów wiskotycznych wzięto przebieg temperatury w kroku czwartym. Wynik symulacji w kroku czwartym przedstawia przebieg oznaczony jako  $Temp_v=var4$ .

Na rys. 15.19 przedstawiono również przebiegi temperatur uzyskanych z badań eksperymentalnych (patrz rozdz. 15.5) i oznaczonych jako  $Expo$  (mierzonej na pierścieniu zewnętrznym) i  $Expi$  (mierzonej na pierścieniu wewnętrznym).

Analiza porównawcza przebiegów symulowanych i eksperymentalnych pozwala na stwierdzenie, że po piątym kroku przebieg symulowany  $Temp_v=var4$  i uśredniony przebieg eksperymentalny  $Taverage$  mieszczący się pomiędzy  $Expo$  i  $Expi$  są podobne i że przebieg temperatury po tym kroku można wziąć do dalszych badań symulacyjnych.

Na rys. 15.19 przedstawiono jeszcze jeden przebieg temperatury symulowanej, oznakowany jako  $Texp$ . Dotyczy on przypadku, dla którego lepkość smaru obliczano na podstawie przebiegu średniej temperatury  $Taverage$ , uzyskanego z badań eksperymentalnych. Jest on również zbliżony do przebiegu symulowanego, oznaczonego jako  $Temp_v=var4$ .

Podobne badania symulacyjne przeprowadzono dla prędkości obrotowych łożyska 1000 – 3000 – 9000 obr/min, a uzyskane rezultaty przedstawiono na rys. 15.20.



Rys. 15.20. Wpływ prędkości obrotowej na temperatury łożyska;  $To1$ ,  $Ti1$  – temperatury na pierścieniu zewnętrznym i wewnętrznym łożyska nr 1 oraz  $To2$ ,  $Ti2$  łożyska nr 2

Fig. 15.20. The influence of rotational speed on bearing temperatures;  $To1$ ,  $Ti1$  – temperatures on the outer and inner rings of bearing 1,  $To2$ ,  $Ti2$  – temperatures on the outer and inner rings of bearing 2

Temperatury  $T_{o1}$ ,  $T_{i1}$  i  $T_{o2}$ ,  $T_{i2}$  wyznaczano w takich samych punktach stanowiska badawczego jak w badaniach eksperymentalnych. Jak można się było spodziewać, temperatury rosną wraz ze wzrostem prędkości obrotowej. Z uwagi na różne warunki odprowadzania ciepła w stanowisku badawczym temperatury w łożysku nr 1 i nr 2 nieco się różniły.

Podsumowując pierwszy etap badań symulacyjnych, można stwierdzić, że uzyskane wyniki badań  $Temp_{v=var4}$  (rys. 15.19) oraz przedstawione na rys. 15.20 mogą stanowić dane wejściowe do drugiego etapu badań, czyli do badań symulacyjnych odkształceń cieplnych i obciążeń kontaktowych.

Do wyznaczania odkształceń mechanicznych i cieplnych oraz obciążeń kontaktowych użyto analiz: dynamicznej *Transient Structural* i statycznej *Static Structure*. Analiza *Transient Structural* pozwala na śledzenie przebiegów odkształceń i obciążeń kontaktowych w funkcji czasu, a analiza *Static Structure* na wyznaczenie odkształceń i obciążeń kontaktowych w końcowym punkcie symulacji, tj. po 3200 sekundach. Z uwagi na bardzo długi czas pojedynczej analizy dynamicznej zastosowano ją tylko dla jednej prędkości obrotowej, tj. 6000 obr/min, natomiast dla pozostałych prędkości obrotowych wykorzystano analizę statyczną.

Najważniejszą zaletą tych analiz jest możliwość zaimportowania z analiz termicznych *Transient Thermal* i *Steady-State Thermal* rozkładu temperatur (*Imported Temperature*) i na ich podstawie obliczanie odkształceń cieplnych i obciążeń kontaktowych wywołanych odkształceniami cieplnymi.

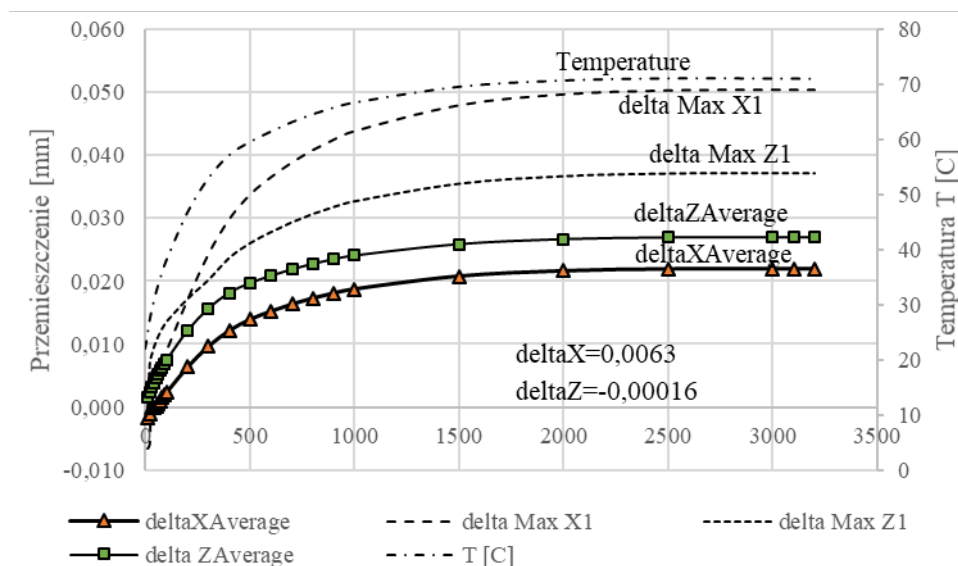
Badania odkształceń i obciążeń kontaktowych przeprowadzono zarówno bez uwzględniania efektów cieplnych, jak i z efektami cieplnymi. W literaturze przedstawiane są wyłącznie wyniki badań, analityczne lub symulacyjne, bez uwzględniania efektów cieplnych. Dlatego uzyskane w ramach niniejszej pracy wyniki badań bez uwzględniania efektów cieplnych można porównywać do wyników dostępnych w literaturze, natomiast wyników badań z uwzględnieniem efektów cieplnych autorzy w literaturze nie znaleźli.

Przeprowadzenie badań bez uwzględniania efektów cieplnych i z ich udziałem pozwala na ilościową ocenę wpływu temperatury na odkształcenia i obciążenia kontaktowe w łożysku tocznym.

W analizach *Transient Structural* i *Static Structure* przyjęto, że obciążenia w łożysku pochodzą od sił dynamicznych wywołanych efektem wirowania kulek wokół osi łożyska oraz ruchu obrotowego pierścienia wewnętrznego (siły odśrodkowe), od sił statycznych wywołanych osiowym napięciem wstępnym łożysk skośnych, od sił spowodowanych odkształceniami cieplnymi elementów łożysk oraz od sił oporów



wiskotycznych (te ostatnie nie są brane pod uwagę w żadnej dostępnej literaturze). Siły odśrodkowe modelowano przez nadanie kulkom prędkości obrotowej *Rotational velocity*  $\omega_m$  (gdzie  $\omega_m$  jest prędkością wirowania koszyka łożyskowego), a pierścieniowi wewnętrznemu prędkości obrotowej *Rotational velocity*  $\omega$  (gdzie  $\omega$  jest prędkością łożyska). Napięcie wstępne dwóch łożysk skośnych modelowano przez nadanie wałkowi wstępnego odkształcenia *Bolt Pretension*, którego wielkość wynikała z oczekiwanej siły osiowej ściskającej oba łożyska oraz ze sztywności postaciowej elementu sprężystego umieszczonego pomiędzy dwoma łożyskami. Siły oporów wiskotycznych modelowano obciążeniem *Moment*, przykładając do kulek obciążenie momentem siły, obliczonym wg (10.1). Połączenia kontaktowe kulek z bieżniami modelowano jako *Frictional*, natomiast pozostałe połączenia kontaktowe, występujące w konstrukcji stanowiska badawczego, jako *Frictionless* lub *Bonded*. Łącznie w modelu MES stanowiska badawczego było zamodelowanych 19 połączeń kontaktowych.



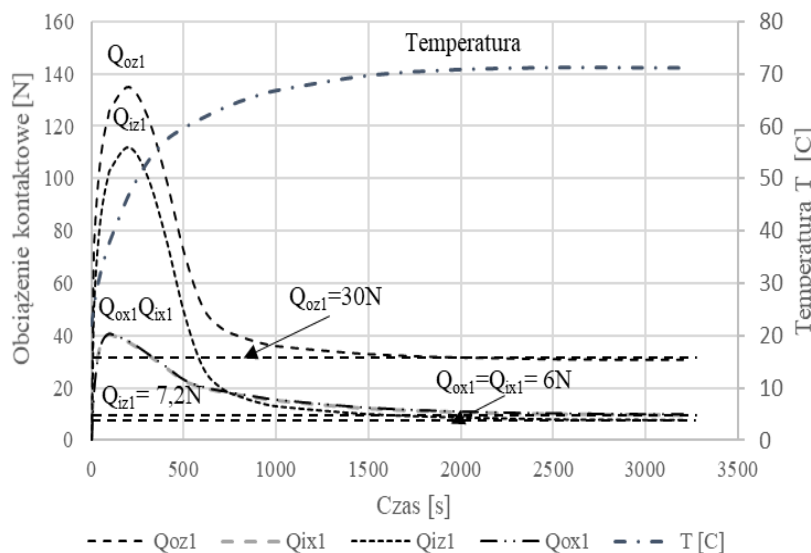
Rys. 15.21. Przykładowy przebieg odkształceń, tj. wartości średnich i maksymalnych w osiach X i Z w warunkach występowania obciążeń mechanicznych i cieplnych uzyskany z analizy *Transient Structural* dla prędkości obrotowej 6000 obr/min; delta XAverage, delta ZAverage – średnie odkształcenia w łożysku w osiach X i Z, delta MaxX1, delta MaxZ1 – maksymalne odkształcenia w łożysku nr 1 w osiach X i Z, deltaX, deltaZ – maksymalne odkształcenia bez uwzględnienia odkształceń cieplnych, Temperature – średnia temperatura w łożysku

Fig. 15.21. An example of the course of deformations, i.e. average and maximum values in the X and Z axes under the conditions of mechanical and thermal loads, obtained from the *Transient Structural* analysis for the rotational speed of 6000 rpm; delta XAverage, delta ZAverage – average deformations in the bearing in the X and Z axes, delta MaxX1, delta MaxZ1 – maximum deformations in the bearing No. 1 in the X and Z axes, deltaX, deltaZ – maximum deformations without taking into account thermal deformations, Temperature - average temperature in bearing



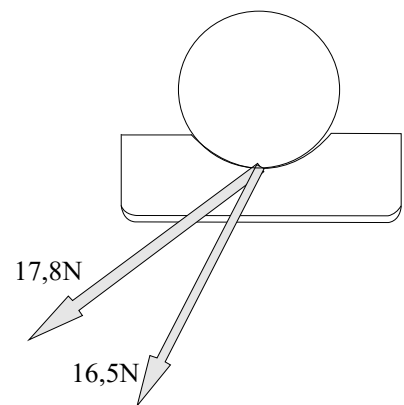
Analizy *Transient Structural* i *Static Structure* umożliwiają obliczanie m.in. odkształceń postaciowych i kontaktowych wypadkowych (*Total Deformation*) oraz ich składowych (*Directional Deformation*) w osiach XYZ, obciążeń kontaktowych w postaci reakcji (*Force Reaction*) występujących pomiędzy dwoma stykającymi się elementami, np. pomiędzy kulkami a bieżniami, w postaci reakcji wypadkowej i jej składowych (XYZ) oraz reakcji w postaci momentów siły (*Moment Reaction*) występujących pomiędzy dwoma stykającymi się elementami, zarówno wypadkowej, jak i poszczególnych składowych. Na rys. 15.21 przedstawiono przykładowy przebieg odkształceń, tj. wartości średnich i maksymalnych w osiach X i Z w warunkach występowania obciążeń mechanicznych i cieplnych, uzyskany z analizy *Transient Structural* dla prędkości obrotowej 6000 obr/min.

Na rys. 15.21 pokazano także maksymalne odkształcenia w osiach X i Z ( $\Delta X$ ,  $\Delta Z$ ) bez uwzględniania odkształceń cieplnych.



Rys. 15.22. Przykładowy przebieg składowych obciążeń kontaktowych w warunkach występowania obciążeń mechanicznych i cieplnych w obszarach kontaktu kulki z bieżnią zewnętrzną ( $Q_o$ ) i wewnętrzną ( $Q_i$ ) w osiach X i Z;  $Q_{oz1}$ ,  $Q_{ox1}$ ,  $Q_{iz1}$ ,  $Q_{ix1}$  – składowe obciążeń kontaktowych dla łożyska nr 1

Fig. 15.22. An example of the course of the components of contact loads under the conditions of mechanical and thermal loads in the areas of contact of the ball with the outer ( $Q_o$ ) and inner ( $Q_i$ ) raceways in the X and Z axes;  $Q_{oz1}$ ,  $Q_{ox1}$ ,  $Q_{iz1}$ ,  $Q_{ix1}$  – contact load components for bearing No. 1



Rys. 15.23. Symboliczna prezentacja wektorów sił kontaktowych  $Q_i$ : „17,8” – z uwzględnieniem efektów cieplnych, „16,5N” – bez efektów cieplnych

Fig. 15.23. Symbolic representation of the contact force vectors  $Q_i$ : "17.8" – including and "16.5N" – without thermal effects

Pierwszy wniosek płynący z tych badań jest oczywisty: wzrost temperatury przyczynia się do wzrostu odkształceń, i to zarówno w osiach X, jak i Z. Wniosek ten dotyczy i średnich, i maksymalnych odkształceń. Drugi wniosek jest następujący: cieplny stan przejściowy w badanym stanowisku trwa ok. 3200 sekund. Po tym czasie zarówno temperatura, jak i odkształcenia nie ulegają już zmianie.

Trzeci i najważniejszy wniosek brzmi: odkształcenia spowodowane występowaniem obciążeń mechanicznych i cieplnych są wielokrotnie większe (nawet ośmiokrotnie) od odkształceń spowodowanych występowaniem tylko obciążeń mechanicznych (porównaj  $\Delta \text{MaxX1}$  i  $\Delta \text{X}$  oraz  $\Delta \text{MaxZ1}$  i  $\Delta \text{Z}$ ).

Z kolei na rys. 15.22 przedstawiono przykładowy przebieg składowych obciążeń kontaktowych w warunkach występowania obciążeń mechanicznych i cieplnych w obszarach kontaktu kulki z bieżnią zewnętrzną ( $Q_o$ ) i wewnętrzną ( $Q_i$ ) w osiach X i Z.

Przebiegi oznaczone linią przerywaną dotyczą analizy *Transient Structural* w obecności obciążeń mechanicznych (siły odśrodkowe, napięcie wstępne) oraz obciążeń cieplnych *Imported Temperature*, natomiast liniami ciągłymi oznakowano obciążenia kontaktowe odpowiadające występowaniu tylko obciążeń mechanicznych (bez udziału obciążeń cieplnych).

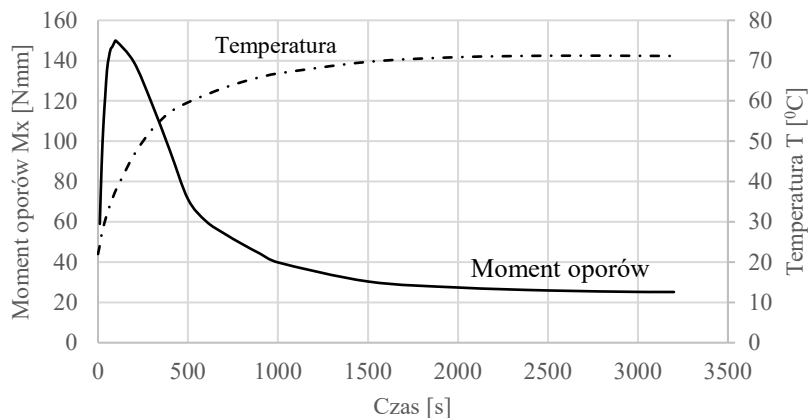
Przebiegi uzyskane z analizy *Transient Structural* są niemonotoniczne. W pierwszych 100 sekundach obserwujemy dynamiczny wzrost obciążeń kontaktowych, a następnie ich spadek. Wynika to przede wszystkim ze zmian lepkości smaru, a w konsekwencji z oporów wiskotycznych, spowodowanych zmianami temperatur w łożyskach. Po ok. 3200 sekundach obciążenia kontaktowe spadają do poziomu, na jakim znajdują się one, ale bez udziału obciążeń cieplnych, tj.  $Q_{oz1}=30\text{ N}$ ,  $Q_{iz1}=7,2\text{ N}$ ,  $Q_{ox1}=6\text{ N}$ ,  $Q_{ix1}=6\text{ N}$ .

Należy także zauważyć, że w stanie przejściowym maksymalne wartości składowych obciążeń kontaktowych są 4-5 razy większe niż w stanie ustalonym. Oznacza to, że również opory ruchu w łożyskach w stanie przejściowym mogą zmieniać się znacząco.

Sam fakt większych wartości obciążeń kontaktowych niekoniecznie pociąga za sobą proporcjonalny wzrost oporów ruchu. Na rys. 15.23 przedstawiono w sposób porównawczy wektory obciążeń kontaktowych występujące na bieżni wewnętrznej  $Q_i$ :  $16,5\text{ N}$  (bez efektów cieplnych) i  $17,8$  (z uwzględnieniem efektów cieplnych). Wartości liczbowe tych sił nie różnią się znacząco, za to ich kierunki działań się różnią. Ponieważ o sile tarcia decyduje rzut siły kontaktowej na kierunek normalny do powierzchni kontaktowej, więc opory ruchu z tytułu tych sił kontaktowych będą zróżnicowane.

Do ważnych wniosków płynących z takiej analizy należy również spostrzeżenie o wyraźnie większych wartościach składowych obciążeń kontaktowych w osi Z ( $Q_{oz1}$ ,  $Q_{iz1}$ ) niż w osi X ( $Q_{ox1}$ ,  $Q_{ix1}$ ), nawet 3-4 razy.

W systemie Ansys R2020 w analizie *Transient Structural* można także obliczać moment w postaci reakcji pomiędzy dwiema powierzchniami będącymi w kontakcie. W ramach przeprowadzonych badań zasymulowano czasowy przebieg momentu w obszarze kontaktu korpusu stanowiska z czujnikiem momentu obrotowego (rys. 15.15a). Przykładowy przebieg momentu, który jest równoznaczny z momentem oporów dwóch łożysk znajdujących się na stanowisku badawczym, przedstawiono na rys. 15.24.



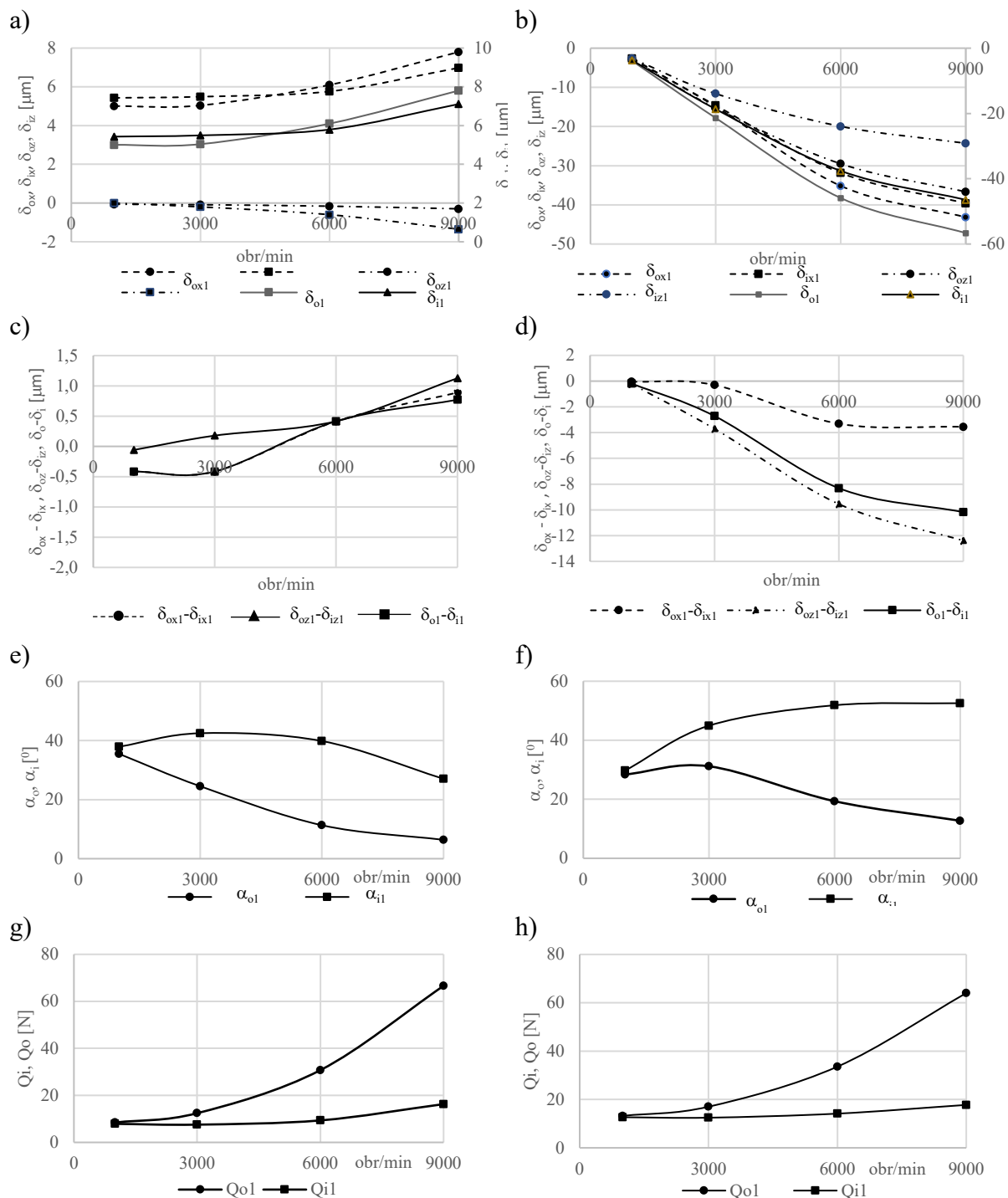
Rys. 15.24. Przykładowy przebieg momentu uzyskany w analizie *Transient Structural* z udziałem obciążeń mechanicznych i cieplnych

Fig. 15.24. An example of a torque curve obtained in the *Transient Structural* analysis with the participation of mechanical and thermal loads

Przebieg tego momentu jest podobny do przebiegów obciążeń kontaktowych (rys. 15.22), tzn. w pierwszym okresie (do ok. 100 sekund) następuje dynamiczny wzrost momentu, a następnie stosunkowo szybki spadek do wartości ustalonej. Maksymalna wartość tego momentu w stanie przejściowym jest ok. 6 razy większa od wartości w stanie ustalonym.

#### 15.7.4. Wyniki badań symulacyjnych

Metodykę badań przedstawioną w rozdz. 15.7.3 zastosowano dla prędkości obrotowych 1000-3000 i 9000 obr/min.



Rys. 15.25. Wpływ prędkości obrotowej na: a) odkształcenia kontaktowe, b) różnice odkształceń kontaktowych, c) kąty działania, d) obciążenia kontaktowe w stanie ustalonym, po upływie 3200 sekund;  $\delta_{ox}$ ,  $\delta_{ix}$  – odkształcenia kontaktowe w osi X,  $\delta_{oz}$ ,  $\delta_{iz}$  – odkształcenia kontaktowe w osi Z,  $\delta_o$ ,  $\delta_i$  – odkształcenia kontaktowe całkowite,  $Q_o$ ,  $Q_i$  – obciążenia kontaktowe,  $\alpha_o$ ,  $\alpha_i$  – kąty działania, (o) – obszar kontaktu kulka – bieżnia zewnętrzna, (i) – obszar kontaktu kulka – bieżnia wewnętrzna

Fig. 15.25. The impact of rotational speed on: a) contact deformations, b) differences in contact deformations, c) contact angles, d) contact loads in the steady state, after 3200 seconds;  $\delta_{ox}$ ,  $\delta_{ix}$  – contact deformations in the X axis,  $\delta_{oz}$ ,  $\delta_{iz}$  – contact deformations in the Z axis,  $\delta_o$ ,  $\delta_i$  – total contact deformations,  $Q_o$ ,  $Q_i$  – contact loads,  $\alpha_o$ ,  $\alpha_i$  – contact angles, (o) – ball – outer race contact area, (i) – ball – inner race contact area

Należy podkreślić, że zamiast analiz *Transient Thermal* i *Transient Structural* użyto *Steady-State Thermal* i *Static Structural*. Uzyskane wyniki badań odnośnie do odkształceń kontaktowych, kątów działania i obciążeń kontaktowych przedstawiono na rys. 15.25. Dotyczą one stanu ustalonego po upływie 3200 sekund. Wyniki badań przedstawione na rys. 15.25a, c, e, g dotyczą wpływu obciążeń mechanicznych (od sił odśrodkowych i napięcia wstępnego, bez skutków odkształceń cieplnych), natomiast przedstawione na rys. 15.25b, d, f, h dotyczą obciążeń mechanicznych i skutków odkształceń cieplnych.

Przy formułowaniu wniosków należy zwrócić uwagę na przyjęty układ współrzędnych (rys. 15.15b). Wyniki na rys. 15.25a i rys. 15.25b dotyczą odkształceń kontaktowych w obszarze kontaktu kulki z bieżniami. Porównanie obu wyników pokazuje, jak znaczący jest wpływ zjawisk cieplnych w łożysku na odkształcenia kontaktowe. Odkształcenia na rys. 15.25b na kierunku Z są ponad 10 razy większe niż na rys. 15.25a, a na kierunku X 4-5 razy większe. Ponadto kierunki odkształceń kontaktowych są przeciwne, tzn. na rys. 15.25a możemy mówić o dodatnim przyroście odkształceń, a na rys. 15.25b o ujemnym. Na rys. 15.25a i rys. 15.25b przedstawiono także odkształcenia kontaktowe całkowite  $\delta_o$ ,  $\delta_i$ . Generalnie rosną one nieliniowo wraz ze wzrostem prędkości. Na rys. 15.25b są one 5-6 razy większe niż na rys. 15.25a. Te odkształcenia w myśl teorii Hertza są funkcjonalnie związane z obciążeniami kontaktowymi.

Sam fakt większych odkształceń kontaktowych nie świadczy jeszcze o większych oporach ruchu, ponieważ opory ruchu zależą od luzu pomiędzy kulką a bieżniami. Po wstępnym napięciu łożysk luz jest ujemny, a od jego wielkości zależy obciążenie montażowe łożysk. Pojawienie się np. sił odśrodkowych albo odkształceń cieplnych elementów łożysk zmienia wartość luzu, przy czym zmiana ta może spowodować powiększenie lub zmniejszenie dotychczasowego luzu ujemnego, a w skrajnych przypadkach nawet powstanie luzu dodatniego. Dlatego na rys. 15.25c i rys. 15.25d przedstawiono różnice odkształceń kontaktowych pomiędzy bieżnią zewnętrzną i wewnętrzną na kierunku Z i X,  $\delta_{ox} - \delta_{ix}$  i  $\delta_{oz} - \delta_{iz}$ . Te różnice lepiej odzwierciedlają wpływ odkształceń kontaktowych na zmianę luzu pomiędzy kulką a bieżniami.

Można mówić o monotonicznym narastaniu różnic odkształceń kontaktowych wraz ze wzrostem prędkości. Ponadto różnice odkształceń kontaktowych spowodowane efektami cieplnymi (rys. 15.25d), zwłaszcza na kierunku Z, są znacznie większe niż na rys. 15.25c (bez uwzględnienia efektów cieplnych), ok. 10 razy.

Należy również zauważyć, że różnice odkształceń na kierunku Z  $\delta_{oz} - \delta_{iz}$  są przeciwnych znaków, tzn. na rys. 15.25c są dodatnie, a na rys. 15.25d są ujemne.

Dodatnia różnica odkształceń na kierunku Z świadczy o zbliżaniu się do siebie bieżni zewnętrznej i wewnętrznej, natomiast dodatnia różnica odkształceń na kierunku X świadczy o oddalaniu się od siebie bieżni zewnętrznej i wewnętrznej.

Na tych rysunkach pokazano również różnice odkształceń całkowitych  $\delta_o - \delta_i$ . One lepiej odzwierciedlają stan luzu pomiędzy kulką a bieżniami. Wprawdzie nie są one ( $\delta_o, \delta_i$ ) kolinearne, ale mówią o zbliżaniu się lub oddalaniu bieżni zewnętrznej i wewnętrznej.

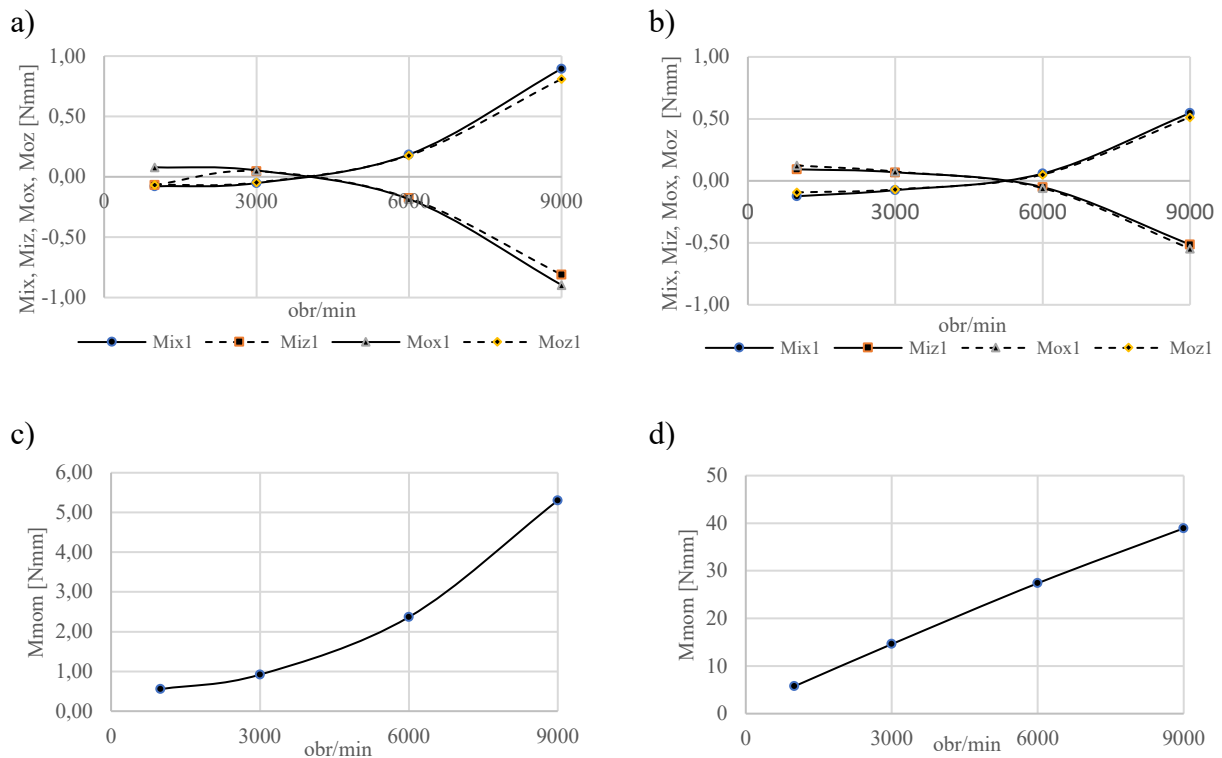
W analizie obciążeń kontaktowych  $Q_o, Q_i$  ważną rolę odgrywają kąty działania  $\alpha_o, \alpha_i$ . Na ogół w analitycznych metodach rozwiązywania problemów kontaktowych najpierw należy wyznaczyć kąty działania, a następnie obciążenia kontaktowe. Na rys. 15.25e i rys. 15.25f przedstawiono zależność kątów działania od prędkości. Charakterystyki na rys. 15.25e są zgodne ze spotykanymi w literaturze, ponieważ w literaturze nie spotyka się rozwiązań, które uwzględniałyby wpływ efektów cieplnych. Charakterystyki na rys. 15.25f mają natomiast cechy oryginalności, ponieważ pokazują wpływ efektów cieplnych. Najistotniejsze różnice pomiędzy charakterystykami na rys. 15.25e i rys. 15.25f dotyczą kąta działania  $\alpha_i$ . Na rys. 15.25e kąt ten maleje wraz ze wzrostem prędkości, a na rys. 15.25f narasta. Kąty działania  $\alpha_o$  na obu rysunkach wykazują tendencję malejącą wraz ze wzrostem prędkości, jakkolwiek charakterystyki te są nieco odmienne.

Na rys. 15.25g i rys. 15.25h przedstawiono wpływ prędkości na obciążenia kontaktowe  $Q_o, Q_i$ . Wniosek płynący z porównania obu rysunków wydaje się nieco zaskakujący: efekty cieplne w łożysku nie wpływają znacząco na obciążenia kontaktowe, przebiegi sił kontaktowych na obu z nich są bowiem bardzo podobne. Różnice nie przekraczają 10%. Należy zauważyć, że wniosek ten dotyczy stanu ustalonego, w tym przykładzie po upływie 3200 sekund, natomiast z przykładów na rys. 10 można wnioskować, że jeżeli czas działania łożyska jest krótszy od 1000 sekund, to obciążenia kontaktowe będą znacznie większe niż w stanie ustalonym.

Jak już wspomniano, analiza numeryczna MES umożliwia wyznaczanie momentów sił występujących pomiędzy dwiema powierzchniami jako reakcji. Można wyznaczać momenty kierunkowe, tzn. względem kierunków osi współrzędnych, i moment całkowity. Na rys. 15.26 przedstawiono wyniki takich analiz, i to zarówno bez uwzględniania efektów cieplnych (rys. 15.26a i rys. 15.26c), jak i z ich uwzględnieniem (rys. 15.26b i rys. 15.26d).

Rysunek 15.26a i rys. 15.26b dotyczą momentów sił występujących pomiędzy kulką a bieżniami łożyska na kierunkach X i Z, natomiast rys. 15.26c i rys. 15.26d dotyczą

momentu sił występujących pomiędzy korpusem stanowiska badawczego a czujnikiem momentu. Wyniki na rys. 15.26c i rys. 15.26d mogą być wykorzystane do weryfikacji przeprowadzonych analiz, ponieważ w badaniach eksperymentalnych (patrz rozdz. 15.7.5) czujnik momentu był połączony z korpusem stanowiska badawczego.



Rys. 15.26. Wpływ prędkości obrotowej na: a), b) momenty siły pomiędzy kulką a bieżniami na kierunkach X i Z, b) moment siły pomiędzy korpusem stanowiska a czujnikiem momentu: a), c) bez uwzględnienia efektów cieplnych, b), d) z uwzględnieniem efektów cieplnych  
 Fig. 15.26. Impact of rotational speed on: a), b) moments of force between the ball and raceways in the X and Z directions, b) moment of force between the body of the station and the torque sensor: a), c) without taking into account the thermal effects, b), d) taking into account the thermal effects

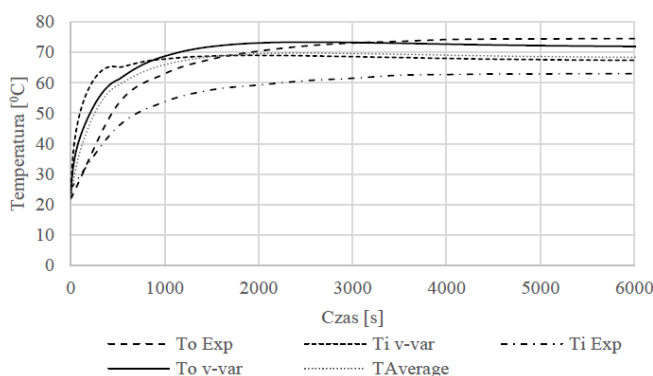
### 15.7.5. Badania eksperymentalne

Jak już wspomniano, obiektem badań symulacyjnych było stanowisko badawcze do pomiaru oporów ruchu łożysk tocznych, które powstało w Katedrze Budowy Maszyn Politechniki Śląskiej (rys. 13.2, rys. 15.13). Umożliwia ono bezstopniową regulację prędkości obrotowej do 18 000 obr/min oraz bezstopniową regulację napięcia wstępnego łożysk do 1000 N. Czujnik momentu Kistler type 7292 pozwala na pomiar momentu oporów ruchu łożysk, a osiowy czujnik siły Kistler type 9102A na pomiar siły napięcia wstępnego łożysk. Na pierścieniach zewnętrznych łożysk naklejono czujniki temperatur typu Pt-100, natomiast do pomiaru temperatur na pierścieniu wewnętrznym

wykorzystano pirometr typu OptisCtLaser. Ponadto do pomiaru temperatur korpusu stanowiska użyto kamery termowizyjnej typu Vigo-Cam V50.

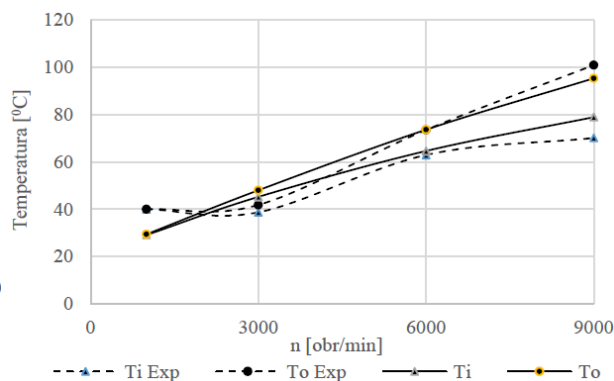
Na rys. 15.27 przedstawiono przykładowe porównanie przebiegów temperatur uzyskanych z badań symulacyjnych ( $T_i$  i  $T_o$ ) i z badań eksperymentalnych ( $T_{oExp}$  i  $T_{iExp}$ ) dla prędkości 6000 obr/min.

Przebiegi czasowe temperatur z badań eksperymentalnych i symulacyjnych mierzonych na pierścieniu zewnętrznym  $T_{oExp}$  i  $T_o$  wydają się dosyć zgodne. Nie można tego powiedzieć o temperaturach  $T_{iExp}$  i  $T_i$ . W tym wypadku można mówić tylko o podobieństwie jakościowym. Prawdopodobną przyczyną dużych różnic pomiędzy  $T_{iExp}$  i  $T_i$  jest metoda pomiaru temperatury za pomocą pirometru. Pirometryczne metody pomiaru temperatur wymagają precyzyjnego dostrojenia tzw. współczynnika emisyjności, a w przeprowadzonych badaniach przyjęto domyślną jego wartość.



Rys. 15.27. Przykładowe porównanie przebiegów czasowych temperatur uzyskanych z badań symulacyjnych ( $T_i$  i  $T_o$ ) i z eksperymentalnych ( $T_{oExp}$  i  $T_{iExp}$ ) dla prędkości 6000 obr/min

Fig. 15.27. An example comparison of the time courses of temperatures obtained from simulation tests ( $T_i$  and  $T_o$ ) and experimental tests ( $T_{oExp}$  and  $T_{iExp}$ ) for a speed of 6000 rpm



Rys. 15.28. Porównanie wpływu prędkości obrotowej łożyska na temperatury uzyskane z badań symulacyjnych ( $T_i$  i  $T_o$ ) i eksperymentalnych ( $T_{oExp}$  i  $T_{iExp}$ )

Fig. 15.28. Comparison of the impact of bearing rotational speed on temperatures obtained from simulation tests ( $T_i$  and  $T_o$ ) and experimental ( $T_{oExp}$  and  $T_{iExp}$ )

Na rys. 15.28 przedstawiono natomiast wpływ prędkości obrotowej łożyska na temperatury uzyskane z badań symulacyjnych ( $T_i$  i  $T_o$ ) i eksperymentalnych ( $T_{oExp}$  i  $T_{iExp}$ ). Porównanie tych temperatur pozwala na sformułowanie wniosku o podobieństwie jakościowym, tzn. wraz ze wzrostem prędkości obserwuje się wyższą temperaturę zarówno na pierścieniu zewnętrznym, jak i wewnętrznym. Z kolei zgodność ilościowa budzi pewne wątpliwości.



### 15.7.6. Wnioski z badań wpływu ciepła na opory ruchu łożyska

W rozdz. 15.7 przedstawiono wyniki badań symulacyjnych wpływu ciepła wytwarzanego w łożysku na jego opory ruchu. Dotychczas w literaturze spotyka się wyniki badań analitycznych i symulacyjnych wpływu obciążeń dynamicznych z tytułu takich zjawisk jak siły odśrodkowe od wirujących kulek, momentu z tytułu zjawisk żyroskopowych czy momentu z tytułu zjawiska spinu na opory ruchu. W literaturze przedstawiane są także efekty cieplne w postaci strat mocy z powodu tarcia kulek o bieżnię i tarcia wiskotycznego i ich wpływu na odkształcenia cieplne elementów obrabiarek, np. wrzecion obrabiarek, natomiast nie spotyka się doniesień o tym, w jaki sposób te straty mocy wpływają na opory samego łożyska. Można przypuszczać, że straty mocy w łożysku powodują odkształcenia cieplne elementów łożyska, co z kolei może powodować zmianę luzu pomiędzy kulkami a bieżniami, a w konsekwencji oporów ruchu.

Z uwagi na złożoność zjawisk kinematyczno-dynamicznych w łożysku autorzy zastosowali metodę symulacyjną MES do badania oporów ruchu. Metody analityczne prowadzą do złożonych modeli matematycznych, wymagających numerycznego, iteracyjnego ich rozwiązania.

W wyniku przeprowadzonych badań autorzy wykazali:

- Uzyskanie czasowych przebiegów temperatur w łożysku wymaga wielokrotnego, iteracyjnego powtórzenia analiz (rys. 15.19).
- Czas do osiągnięcia stanu ustalonego cieplnie łożyska może sięgać nawet 1 godziny (rys. 15.19).
- Odkształcenia cieplne elementów łożyska są wielokrotnie większe niż odkształcenia spowodowane obciążeniami mechanicznymi, np. siłą odśrodkową od wirujących kulek czy napięciem wstępnym łożysk (rys. 15.21 i rys. 15.25).
- Obciążenia kontaktowe pomiędzy kulkami a bieżniami w stanie przejściowym mogą być wielokrotnie większe niż w stanie ustalonym (rys. 15.22). Oznacza to m.in., że opory ruchu w łożysku w stanie przejściowym mogą być znacznie większe niż w stanie ustalonym.
- Moduł obciążeń kontaktowych w stanie ustalonym z uwzględnieniem efektów cieplnych niekoniecznie musi być większy od modułu obciążeń kontaktowych bez uwzględniania efektów cieplnych (rys. 15.25g i rys. 15.25h), natomiast wektory tych obciążeń niekoniecznie mają te same kierunki działania (rys. 15.23).
- Momenty od sił kontaktowych w stanie przejściowym mogą być wielokrotnie większe niż w stanie ustalonym (rys. 15.24). Oznacza to m.in., że opory ruchu w łożysku w stanie przejściowym mogą być znacznie większe niż w stanie ustalonym.

## 16. PODSUMOWANIE BADAŃ OPORÓW RUCHU ŁOŻYSK TOCZNYCH

1. W monografii przedstawiono pewną teorię dotyczącą nowego podejścia do projektowania gniazd łożyskowych w obrabiarkach HSC (High Speed Cutting). Ta teoria, w przeciwieństwie do obecnie stosowanej, opiera się na założeniu, że opory ruchu w łożysku i straty mocy w łożysku są funkcją obciążeń kontaktowych i cech eksploatacyjnych środka smarnego. Obowiązująca obecnie teoria zakłada natomiast, że opory ruchu i straty mocy w łożysku są funkcją obciążenia zewnętrznego działającego na łożysko i cech eksploatacyjnych środka smarnego.
2. Proponowana teoria wydaje się bardziej adekwatna do rzeczywistych warunków pracy łożysk w obrabiarkach HSC, ponieważ w tych obrabiarkach prędkości obrotowe np. wrzecion są od kilku do kilkunastu razy większe niż w obrabiarkach konwencjonalnych. W rezultacie obciążenia pomiędzy np. kulkami a bieżniami są efektem zarówno obciążeń zewnętrznych (tak jak wynika to z obecnie stosowanej teorii), jak i obciążeń dynamicznych, np. z tytułu sił odśrodkowych, zjawiska spinu czy zjawiska żyroskopowego.
3. Proponowana teoria składa się z dwóch zasadniczych części, tj.:
  - a) z części pierwszej, w której opory ruchu i straty mocy w łożysku są szacowane tylko na podstawie efektów mechanicznych, wynikających z ruchów obrotowych elementów łożyska (siły odśrodkowe, momenty żyroskopowe, momenty spinu) i napięcia wstępnego łożysk. Ta część teorii ma swoje odzwierciedlenie w literaturze, ponieważ jest wiele doniesień np. o szacowaniu obciążeń kontaktowych w łożyskach tocznych. Z kolei w stosunku do doniesień literaturowych w monografii rozbudowano efekty wynikające z ruchu obrotowego pierścienia wewnętrznego, tzw. model rozszerzony łożyska, ze sztywnego napięcia wstępnego łożyska oraz ze zjawiska spinu, pokazując, że pomijanie tych efektów prowadzi do niedoszacowania oporów ruchu i strat mocy w łożysku;
  - b) z części drugiej, w której opory ruchu i straty mocy w łożysku wynikają zarówno z efektów opisanych w p. 3a, jak i z efektów cieplnych, tj. odkształceń cieplnych elementów łożysk. Autorzy postawili tezę, że zmiana temperatur w łożysku

z tytułu strat mocy wywołuje odkształcenia cieplne elementów łożyska, które przyczyniają się do zmiany luzu pomiędzy np. kulką i bieżniami, co wpływa na opory ruchu. Ta część teorii ma cechy oryginalności, ponieważ w literaturze nie ma zbyt wielu doniesień na ten temat.

4. Proponowana teoria to w większości zestaw analitycznych modeli, pozwalających obliczać obciążenia kontaktowe, momenty oporów ruchu łożyska zredukowane na wał napędowy (domyślnie na obrotowy wał, na którym spoczywa pierścień wewnętrzny) i straty mocy w łożysku na podstawie znajomości prędkości obrotowej łożyska, wielkości napięcia wstępnego (w postaci siły osiowej dla napięcia sprężystego lub odkształcenia wstępnego dla napięcia sztywnego) i właściwości eksploatacyjnych środka smarnego. Wpływ efektów cieplnych na opory ruchu wymaga natomiast prowadzenia modelowania symulacyjnego, np. MES, w celu wyznaczenia rozkładu temperatur i odkształceń cieplnych.
5. Opracowane analityczne modele obliczeniowe zostały zweryfikowane na drodze symulacji MES i badań doświadczalnych. Stwierdzono, że obliczane na podstawie tych modeli opory ruchu różnią się od wyznaczonych doświadczalnie nie więcej niż 20%. Zdaniem autorów taka różnica dla celów inżynierskich jest dopuszczalna.

## BIBLIOGRAFIA

1. Abele E., Altintas Y., Brecher C.: Machine Tool Spindle Units. CIRP Annals. Manufacturing Technology, Vol. 59, 2010.
2. Alfares M.A., Elsharkawy A.: Effects of axial preloading of angular contact ball bearings on the dynamics of a grinding machine spindle system. Journal of Materials Processing Technology, Vol. 136, 2003.
3. Altintas Y., Cao Y.: Virtual Design and Optimization on Machine Tool Spindles. Annals of the CIRP, Vol. 54, No. 1, 2005.
4. Antoine F., Abba G., Molinari A.: A new Proposal for Explicit Angle Calculation in Angular Contact Ball Bearing. Journal of Mechanical Design., Vol. 128, No. 2, 2005
5. Bai C., Zhang H., Xu G.: Effects of axial preload of ball bearing on the nonlinear dynamic characteristics of a rotor-bearing systems. Nonlinear Dyn., Vol. 53, 2008.
6. Bian W., et al. : Thermo-mechanical analysis of angular contact ball bearing. Journal of Mechanical Science and Technology, Vol. 30, No. 1, 2016
7. Bossmanns B., Tu J.F.: A thermal model for high speed motorized spindles. International Journal of Machine Tools&Manufacture, Vol. 39, 1999.
8. Buchman K., Jungnickel G.: Przekazywanie ciepła w urządzeniach wytwórczych. Wrocław: Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, 1978.
9. Cao H., et al. : Study of characteristic variations of high-speed spindles induced by centrifugal expansion deformations. Journal of Vibroengineering, Vol. 14, No. 3, 2012.
10. Cao Y., Altintas Y.: Modeling of spindle-bearing and machine tool systems for virtual simulation of milling operations. International Journal of Machine Tools & Manufacture, Vol. 47, 2007.
11. Chen J-S., Hwang Y-W.: Centrifugal force induced dynamics of motorized high-speed spindle. Int. J. Ad. Manuf. Technol., Vol. 30, 2006.
12. Chojnacki M.: Badania oporów ruchu łożysk tocznych skośnych na nowym stanowisku badawczym. Praca dyplomowa, Politechnika Śląska, Gliwice 2016.

13. Chwieduk P.: Badania cieplne na stanowisku do badań łożysk tocznych. Praca dyplomowa, Politechnika Śląska, Gliwice 2013.
14. Damian I., Paleu V.: Power loss computation in angular contact ball bearings. *Mechanical Testing and Diagnosis*, Vol. 3, No. III, 2013.
15. De-Xing Z., Weifang C.: Thermal performances on angular contact ball bearing of high-speed spindle considering structural constraints under oil-air lubrication. *Tribology International*, 2017.
16. De-Xing Z., Weifang C., Miao L.: An optimized thermal network model to estimate thermal performances on a pair of angular contact ball bearings under oil-air lubrication. *Applied Thermal Engineering*, Vol. 131, 2018.
17. Feliks P.: Badania symulacyjne metodą elementów skończonych wpływu prędkości obrotowej oraz napięcia wstępnego łożysk tocznych na odkształcenia cieplne w stanowisku do badań oporów ruchu łożysk tocznych. Praca dyplomowa, Politechnika Śląska, Gliwice 2015.
18. Harris T.A.: Ball Motion in Thrust-Loaded Angular Contact Bearings With Coulomb Friction. *Journal of Lubrication Technology*, Transaction of the ASME, 1971.
19. Harris T., Kotzalas M.: *Rolling Bearing Analysis Fifth Edition, Essential Concepts of Bearing Technology*. Taylor&Francis Group, London 2013.
20. Harris T., Kotzlas M.: *Rolling Bearing Analysis Fifth Edition, Advanced Concepts of Bearing Technology*. Taylor&Francis Group, London 2013.
21. Holkup T., et al.: Thermo-mechanical model of spindles. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, Vol. 59, 2010.
22. Houpert L.A.: *Uniform Analytical Approach for Ball and Roller Bearings Calculation*. Colmar, Cedex, France.
23. Houpert L.: *Numerical and Analytical Calculations in Ball Bearings*. Timken Research Europe, 1999.
24. Jędrzejewski J., Kwaśny W.: Modelling of angular contact ball bearings and axial displacements for high-speed spindles. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, Vol. 59, 2010.
25. Jiang S., Mao H.: Investigation of variable optimum preload for machine tool spindle. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, Vol. 50, 2010.
26. Jones A.B.: Ball motion and sliding friction in ball bearings. *Journal of Basic Engineering*. Transaction of the ASME, Vol. 1, 1959.

27. Jones A.B.: A general theory for elastically constrained ball and roller bearings under arbitrary load and speed conditions. *Journal of Basic Engineering. Transaction of the ASME*, 1960.
28. Kim J-D., Lee K-B., Zverev I.: *Thermal Model of High Speed Spindle Unit. Intelligent Information Management*, 2010.
29. Kim S., Lee S.: Prediction of thermo-elastic behavior on a spindle-bearing system considering bearing surroundings. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, Vol. 41, 2001.
30. Kosmol J.: Extended contact model of angular bearing. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 1, No. 57, 2019.
31. Kosmol J.: *Determination of Motion Resistances in High-Speed Spindle Angular Bearings. Politechnika Śląska, Gliwice* 2016.
32. Kosmol J.: Analytical determination of rolling friction coefficient of angular bearing. *Journal of manufacturing Science and Engineering*, No. 140, 2018.
33. Kosmol J.: An analytical and FEM simulation studies on friction resistances in angular ball bearing. *International Journal of Modern Manufacturing Technologies*, Vol. XIII, No. 1, 2021.
34. Kosmol J.: An extended model of angular bearing - influence of fitting and pre-deformation. *Eksplatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability*, tom 21, 3, 2019.
35. Kosmol J., Gatys R.: Simulation research of influence the rotational speed on contact loads in angular bearing. *Inżynieria Maszyn*, Vol. 1, No. 21, 2016.
36. Kosmol J., Stawik K.: Wpływ współczynnika sztywności kontaktowej i współczynnik tarcia na obciążenia kontaktowe w łożysku tocznym. *Modelowanie Inżynierskie*, tom 58, nr 27, 2016.
37. Kosmol J.: Modeling of heat phenomenon in rolling kinematic pairs using the Finite Element Methods. *Appl. Sci.*, Vol. 6447, 11(14), 2021.
38. Krzeźmiński-Freada H.: *Łożyska toczne. PWN, Warszawa* 1985.
39. Liao N.T., Lin J.F.: Ball bearing skidding under radial and axial loads. *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 37, 2002.
40. Lis P.: *Badania modelowe łożyska skośnego metodą elementów skończonych. Praca dyplomowa magisterska, Politechnika Śląska, Gliwice* 2014.
41. Liu T., et al.: Improved thermal resistance network model of motorized spindle system considering temperature variation of cooling system. *Adv. Manufacturing*, Vol. 6, 2018.
42. *Łożyska toczne SKF Proof\_6000\_PL\_00\_04\_Tarcie.pdf*.

43. Mayr J., et al.: Thermal issues in machine tools. CIRP Annals – Manufacturing Technology, Vol. 61, 2012.
44. Musiał J., Styp-Rekowski M.: Analityczno-eksperymentalny sposób określania współczynnika oporów ruchu przy tarcu tocznym. Problemy niekonwencjonalnych układów łożyskowych, 1999.
45. Muszyński M.: Badania eksperymentalne oporów ruchu w łożysku tocznym skośnym. Praca dyplomowa magisterska, Politechnika Śląska, Gliwice 2017.
46. Muszyński M.: Straty mocy w łożyskach tocznych obrabiarek High Speed Cuting. Praca doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice 2022.
47. Muszyński M., Kosmol, J., Sokołowski, A.: Modeling of heat distribution at the spindle bearing test rig. International Journal of Modern Manufacturing, Vol. XII-2, 2020.
48. Nakajima K.: Thermal contact resistance between balls and rings of a bearing under axial, radial and combined loads. J. Thermophys. Heat Tr., Vol. 9, 1995.
49. Noel D., et al.: Complete Analytical Expression of the Stiffness Matrix of Angular Contact Ball Bearing. Journal of Tribology, Vol. 4, No. 135, 2013.
50. Palmgren A.: Łożyska toczne. PWT, Warszawa 1951.
51. Rabreau C., et al.: Influence of bearing kinematics hypotheses on ball bearing heat generation. Procedia CIRP, Vol. 77, 2018.
52. Servais C., Bozet J.: New computational method of the ball/race contact transverse loads of high speed ball bearings without race control hypothesis. Tribology International, Vol. 113, 2017.
53. Styp-Rekowski M.: Opory ruchu w łożyskach tocznych. Zagadnienia Eksploatacji Maszyn, Akademia Techniczno-Rolnicza, Vol. 1, No. 129, 2002.
54. Styp-Rekowski M.: Analityczno-eksperymentalny sposób określania współczynnika oporów ruchu przy tarcu tocznym. Akademia Techniczno-Rolnicza, Łódź 1999.
55. Wang H., Cai Y., Wang He: A dynamic thermal-mechanical model of the spindle-bearing system. Mech. Sci., Vol. 8, 2017.
56. Workbench user's guide Ansys 2021R1.
57. Zamal A., et al.: Advances in Angular Contact Ball Bearings Testing Machine Design. International Journal of Modern Manufacturing Technologies, Vol. XI-3, 2019.
58. Zivkovic A., et al.: A study of thermal behaviour of the machine tool spindle. Thermal Science, Vol. 16, 2018.

59. Zivkovic A., et al.: Mathematical modelling and experimental testing of high-speed spindle behavior. *Int J. Adv. Manuf. Technol.*, Vol. 77, 2015.
60. Zverev I., et al.: Thermal model of High-Speed Spindle Unit. *KSME International Journal*, Vol. 17, No. 5, 2003.



## **WYZNACZANIE OPORÓW RUCHU SZYBKOOBROTOWYCH, WRZECIONOWYCH ŁOŻYSK SKOŚNYCH**

### **Streszczenie**

W monografii przedstawiono pewną teorię wyznaczania oporów ruchu szybkoobrotowych, wrzecionowych łożysk skośnych. Celem teorii było określenie tych oporów, które przyczyniają się do wytworzenia ciepła w łożysku. Przyjęto, na podstawie analizy doniesień literaturowych, że ogólnie dostępne wzory na obliczanie łożysk nie dają wystarczająco wiarygodnej informacji o oporach zamienianych w łożysku na ciepło. Dlatego w proponowanej teorii skupiono się na analitycznym wyznaczeniu oddziaływań (sił) w obszarach kontaktu elementu tocznego z bieżniami pierścieni łożyska. W pierwszym kroku przyjęto model odkształceń kontaktowych i wyznaczono kąty działania łożyska oraz obciążenia kontaktowe pod działaniem sił napięcia wstępnego, sił odśrodkowych i żyroskopowych. Na podstawie wyznaczonych sił kontaktowych, momentu spinu i oporów wiskotycznych opracowano formułę pozwalającą obliczyć moment oporów, jaki występuje na wale napędowym. Na podstawie przeprowadzonych badań eksperymentalnych oporów ruchu mierzonych na wale napędowym dokonano weryfikacji opracowanych modeli obliczeniowych. Weryfikacja ta potwierdziła zadowalającą zgodność wyników obliczeń analitycznych i eksperymentalnych. W drugim kroku rozszerzono badania o wpływ odkształceń cieplnych elementów łożyska na opory ruchu. Postawiono bowiem tezę, że odkształcenia cieplne elementów łożyska zmieniają luz pomiędzy kulkami i bieżniami. W tym celu opracowano model cieplny łożyska w systemie Ansys, a następnie w ramach badań symulacyjnych MES (w module Transient Thermal) zidentyfikowano rozkład temperatur w łożysku. Dla tak uzyskanego rozkładu temperatur w module Transient Structural zidentyfikowano rozkład odkształceń i obciążenia kontaktowe. Na podstawie porównania wyników cieplnych badań symulacyjnych MES i analitycznych badań

oporów ruchu (uzyskanych w pierwszym kroku) stwierdzono, że ciepło powstałe w łożysku znacząco wpływa na opory ruchu w łożysku. Przeprowadzone ciepłe badania eksperymentalne potwierdziły wnioski z cieplnych badań symulacyjnych z błędami nieprzekraczającymi 20%. Można zatem sformułować wniosek końcowy o niezłej zgodności oporów ruchu w łożysku, obliczonych na podstawie zaproponowanej nowej teorii projektowania gniazd łożyskowych w obrabiarkach HSC.

## **DETERMINATION OF RESISTANCES OF ANGULAR HIGH SPEED SPINDLE BEARINGS**

### **Abstract**

The monograph presents a certain theory of determining the resistance to motion of high-speed angular contact spindle bearings. The purpose of the theory was to determine the resistances that contribute to the heat generated in the bearing. It was assumed, based on the analysis of literature reports, that the generally available formulas for calculating bearings do not provide sufficiently reliable information about the resistances converted into heat in the bearing. Therefore, the proposed theory focuses on the analytical determination of the interactions (forces) in the areas of contact of the rolling element with the raceways of the bearing rings. In the first step, a model of contact deformations was adopted and the bearing contact angles and contact loads under the action of preload forces, centrifugal and gyroscopic forces were determined. Based on the determined contact forces, spin moment and viscous resistances, a formula was developed that allows to calculate the moment of resistance that occurs on the drive shaft. Based on the experimental studies of the resistance to motion measured on the drive shaft, the developed calculation models were verified. This verification confirmed the satisfactory agreement of the results of the analytical and experimental calculations. In the second step, the research was extended to include the influence of thermal deformation of bearing elements on the resistance to motion. A thesis has been put forward that thermal deformations of the bearing elements change the clearance between the balls and raceways. For this purpose, a thermal model of the bearing was developed in the Ansys system, and then as part of FEM simulation tests (in module Transient Thermal), the temperature distribution in the bearing was identified. For the temperature distribution obtained in this way, the deformation distribution and contact loads were identified in the Transient Structural module. Based on the comparison of the results of thermal FEM simulation tests and analytical tests of resistance to motion (obtained in the first step), it was found that the heat generated in the bearing significantly influences the resistance to motion in the bearing. The conducted thermal experimental studies confirmed the conclusions from the thermal simulation tests with errors not exceeding

20%. Therefore, it is possible to formulate a final conclusion that the resistance to motion in the bearing is quite compatible, calculated on the basis of the proposed new theory of designing bearing seats in HSC machine tools.



**WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ**  
**ul. Akademicka 5, 44-100 Gliwice**  
**tel. (32) 237-13-81, faks (32) 237-15-02**  
**www.wydawnictwopolitechniki.pl**

**UIW 48600**

**Sprzedaż i Marketing**  
**tel. (32) 237-18-48**  
**wydawnictwo\_mark@polsl.pl**

**Sprawy wydawnicze**  
**tel. (32) 237-13-81**  
**wydawnictwo@polsl.pl**

---

Nakł. 100 + 44

Ark. wyd. 14

Ark. druk. 12,25

Papier 80 g

---

Zam. 88/23  
Monografia 1002



**ISBN 978-83-7880-921-0**

**Wydawnictwo Politechniki Śląskiej**

44-100 Gliwice, ul. Akademicka 5

tel. (32) 237-13-81, faks (32) 237-15-02

[www.wydawnictwopolitechniki.pl](http://www.wydawnictwopolitechniki.pl)

**Dział Sprzedaży i Reklamy**

tel. (32) 237-18-48

e-mail: [wydawnictwo\\_mark@polsl.pl](mailto:wydawnictwo_mark@polsl.pl)

<http://www.polsl.pl/Jednostki/RJO2-WPS>