STUDIA INFORMATICA 2011
Volume 32 Number 3A (98)

Olga KITURKO, Katarzyna KOŁUZAJEWA
Grodzieński Uniwersytet Państwowy
Michał MATAŁYCKI
Politechnika Częstochowska, Instytut Matematyki

O NIEKTÓRYCH WYNIKACH ANALIZY I OPTYMALIZACJI HM-SIECI I ICH ZASTOSOWANIACH

Streszczenie. W artykule przeprowadzono badanie HM-sieci kolejkowych z dochodami, w przypadku gdy intensywność wchodzącego strumienia zgłoszeń i intensywności obsługiwania zgłoszeń w systemach obsługi zależą od ich ilości w systemach i od czasu. Rozpatrywane są zadania optymalizacji i optymalnej kontroli dla tych sieci. Przedstawione zostały przykłady zastosowań HM-sieci do prognozowania dochodów różnych obiektów komputerowych.

Słowa kluczowe: HM-sieci, dochody, zadania optymalizacji i optymalnej kontroli, sieci komputerowe

ON SOME RESULTS OF ANALYSIS AND OPTIMIZATION OF HM-NETWORKS AND THEIR APPLICATIONS

Summary. Investigation of HM queueing networks with incomes in case when arrival rate of messages and service rates of messages in queueing systems depend on their number and time is carried out. Optimization and optimal control problems for these networks are observed. Examples of HM-networks applications for income forecasting of different computer objects are presented.

Keywords: HM-networks, incomes, optimization problem, optimal control problem, computer network

1. Wprowadzenie

Zachowania każdej z sieci kolejkowych Markowa (SK) mogą być opisane za pomocą łańcuchów Markowa z czasem ciągłym. R. Howard [1] wprowadził pojęcie łańcuchów Markowa z dochodami, które były stałe i sugerował stosować przekształcenia Laplace'a i jednowymiarowe z-przekształcenie do analizy takich sieci z małą liczba stanów. Ta notacja została później zastosowana do definicji SK Markowa z dochodami (HM(Howard-Matalytski)-sieci) [2]. Początkowo zamknięte i otwarte sieci z centralnym systemem obsługi (SOM) badano w dwóch przypadkach: (a) dochody od przejść między stanami sieci zależą od stanów i czasu; (b) dochody są zmiennymi losowymi (ZL) z podanymi momentami pierwszym i drugim. W [3, 4] te wyniki rozszerzono na sieci dowolnej topologii. Założono, że SOM są jednoliniowe w przypadku (a) i wieloliniowe w przypadku (b).

Rozważmy otwartą wykładniczą SK ze zgłoszeniami jednego typu, która składa się z n systemów obsługi: $S_1, S_2, ..., S_n$. Stan sieci jest wektorem:

$$k(t) = (k,t) = \left(k_1(t), k_2(t), ..., k_n(t)\right), \tag{1}$$

gdzie $k_i(t)$ jest liczbą zgłoszeń w systemie S_i, w czasie t, $t \in [0, +\infty)$, $i = \overline{1,n}$. Wprowadzamy system S_0 (otoczenie), który wysyła pojedynczy strumień zgłoszeń z intensywnością $\lambda(t)$. Intensywność obsługi zgłoszeń w i-tym SOM $\mu_i(k_i(t))$ zależy od liczby zgłoszeń w tym systemie, $i = \overline{1,n}$. Niech p_{0j} będzie prawdopodobieństwem przejścia zgłoszeń z systemu S_0 do systemu S_j, $\sum_{j=1}^{n} p_{0j} = 1$, p_{ij} jest prawdopodobieństwem przesunięcia zgłoszenia do SOM S_j po obsługiwaniu go w S_i, $\sum_{j=0}^{n} p_{ij} = 1$, $i = \overline{1,n}$. Przy przejściu z S_i do S_j, zgłoszenie przynosi pewien dochód do S_j, zmniejszając w tym samym czasie dochód S_i o tę samą wartość, $i, j = \overline{1,n}$. Generalnie, wynik można rozszerzyć do przypadku, gdy zgłoszenie opuszczając SOM również przynosi mu pewien dochód. Konieczne jest znalezienie oczekiwanego (średniego) dochodu systemów sieci po czasie t zakładając, że jest znany początkowy stan sieci w początkowym czasie.

2. Analiza sieci w przypadku (a)

Oznaczmy przez $v_i(k,t)$ całkowity, oczekiwany dochód, jaki system S_i otrzyma po czasie t, jeśli w czasie początkowym sieć jest w stanie $(k,0)$. Przez $r_i(k)$ oznaczmy dochód S_i w jednostce czasu, gdy sieć jest w stanie k, przez I_i – n-wektor z zerowymi składnikami, z wyjątkiem i-tego, który jest równy 1, przez $r_{0i}(k + I_i, t)$ dochód S_i, gdy sieć przechodzi ze stanu (k,t) do stanu $\left(k + I_i, t + \Delta t\right)$ po czasie Δt, przez $R_{i0}\left(k - I_i, t\right)$ – dochód systemu S_i, gdy sieć przechodzi ze stanu (k,t) do stanu $\left(k - I_i, t + \Delta t\right)$ oraz przez $r_{ij}\left(k + I_i - I_j, t\right)$ – dochód S_i

(koszt lub strata z systemu S_i), gdy sieć zmienia stan z (k,t) do $\left(k+I_i-I_j,t+\Delta t\right)$, po czasie Δt, $i,j=\overline{1,n}$.

Przypuśćmy, że sieć jest w stanie (k,t). W przedziale czasu Δt sieć może pozostać w stanie k lub zmienić swój stan na: $\left(k-I_i\right)$, $\left(k+I_i\right)$, $\left(k+I_i-I_j\right)$, $i,j=\overline{1,n}$. Możliwe przejścia między stanami sieci, ich prawdopodobieństwa i dochody systemu S_i z tych przejść są pokazane w tabeli 1.

Tabela 1

Prawdopodobieństwa przejść między stanami i dochody systemu S_i

Przejścia między stanami	Prawdopodobieństwa przejścia	Dochody systemu S_i
$(k,t)\to(k,t+\Delta t)$	$1-\left(\lambda(t)+\sum_{j=1}^{n}\mu_j(k_j(t))u(k_j(t))\right)\Delta t+o(\Delta t)$	$r_i(k)\Delta t+v_i(k,t)$
$(k,t)\to(k+I_j,t+\Delta t)$ $j\neq i$	$\lambda(t)p_{0j}\Delta t+o(\Delta t)$	$r_i(k)\Delta t+v_i(k+I_j,t)$
$(k,t)\to(k-I_j,t+\Delta t)$ $j\neq i$	$\mu_j(k_j(t))u(k_j(t))p_{j0}\Delta t+o(\Delta t)$	$r_i(k)\Delta t+v_i(k-I_j,t)$
$(k,t)\to(k+I_c-I_s,t+\Delta t)$ $c,s\neq i$	$\mu_s(k_s(t))u(k_s(t))p_{sc}\Delta t+o(\Delta t)$	$r_i(k)\Delta t+v_i(k+I_c-I_s,t)$
$(k,t)\to(k+I_i,t+\Delta t)$	$\lambda(t)p_{0i}\Delta t+o(\Delta t)$	$r_{0i}(k+I_i,t)+v_i(k+I_i,t)$
$(k,t)\to(k-I_i,t+\Delta t)$	$\mu_i(k_i(t))u(k_i(t))p_{i0}\Delta t+o(\Delta t)$	$-R_{i0}\left(k-I_i,t\right)+v_i(k-I_i,t)$
$(k,t)\to(k+I_i-I_j,t+\Delta t)$ $j\neq i$	$\mu_j(k_j(t))u(k_j(t))p_{ji}\Delta t+o(\Delta t)$	$r_{ij}(k+I_i-I_j,t)+$ $+v_i(k+I_i-I_j,t)$
$(k,t)\to(k-I_i+I_j,t+\Delta t)$ $j\neq i$	$\mu_i(k_i(t))u(k_i(t))p_{ij}\Delta t+o(\Delta t)$	$-r_{ji}(k-I_i+I_j,t)+$ $+v_i(k-I_i+I_j,t)$

Stosując wzór na warunkowe oczekiwanie, możemy otrzymać układ równań różnicowych dla oczekiwanego dochodu S_i. Gdy $\Delta t\to 0$, układ ten redukuje się do układu równań różnicowo-różniczkowych (RRR):

$$\begin{aligned}\frac{dv_i(k,t)}{dt}=&-\left[\lambda(t)+\sum_{j=1}^{n}\mu_j(k_j(t))u(k_j(t))\right]v_i(k,t)+\sum_{j=1}^{n}\left[\lambda(t)p_{0j}v_i(k+I_j,t)+\mu_j(k_j)(t)u(k_j(t))p_{j0}v_i(k-I_j,t)\right]+\\&+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\left[\mu_j(k_j(t))u(k_j(t))p_{ji}v_i(k+I_i-I_j,t)-\mu_i(k_i(t))u(k_i(t))p_{ij}v_i(k-I_i+I_j,t)\right]+\\&+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\left[\mu_j(k_j(t))u(k_j(t))p_{ji}r_{ij}(k+I_i-I_j,t)-\mu_i(k_i(t))u(k_i(t))p_{ij}r_{ji}(k-I_i+I_j,t)\right]+\\&+\sum_{\substack{c,s=1\\c,s\neq i}}^{n}\mu_s(k_s(t))u(k_s(t))p_{sc}v_i(k+I_c-I_s,t)+\lambda(t)p_{0i}r_{0i}(k+I_i,t)-\\&-\mu_i(k_i(t))u(k_i(t))p_{i0}R_{i0}(k-I_i,t)+r_i(k).\end{aligned} \tag{2}$$

Niech $\lambda(t)=\lambda,\ \mu_i(k_i(t))=\mu_i(k_i),\ i=\overline{1,n}$. Liczba równań w układzie równa jest liczbie stanów sieci. Dla zamkniętych sieci w przypadku (a), układ równań (2) po kolei redukuje się do układu zwyczajnych równań różniczkowych (ZRR) liniowych niejednorodnych ze stałymi współczynnikami, które w postaci macierzowej mogą być zapisane jako:

$$\frac{dV_i(t)}{dt}=Q_i(t)+AV_i(t), \tag{3}$$

gdzie: $V_i^T(t)=(v_i(1,t),v_i(2,t),...,v_i(l,t))$ jest nieznanym wektorem dochodów systemu S_i, l jest liczbą stanów sieci. Układ (3) może być rozwiązany prostą metodą:

$$V_i(t)=e^{At}V_i(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Q_i(\tau)d\tau$$

lub za pomocą metody przekształceń Laplace'a, wtedy:

$$V_i(t)=W(t)*Q_i(t)+W(t)\,V_i(0),$$

gdzie: $W(t)$ są odwrotnym przekształceniam Laplace'a dla macierzy $(sI-A)^{-1}$ oraz * jest splotem: $W(t)*Q_i(t)=\int_0^t W(u)Q_i(t-u)du$. Pamiętajmy jednak, że całkowita liczba stanów sieci zamkniętych jest równa $l=C_{n+K-1}^{n-1}$, gdzie: K jest liczbą zgłoszeń w sieci; l jest dość duże nawet dla względnie małych n, K, innymi słowmi liczba równań będzie wystarczająco duża. Doświadczenia pokazują, że te metody są przydatne dla znajdowania oczekiwanego dochodu systemów sieci z relatywnie małą przestrzenią stanów ($l<100$). Prosta metoda uwzględnia obliczenie dochodów dla sieci z większym wymiarem niż za pomocą metody przekształceń Laplace'a.

3. Analiza oczekiwanych dochodów w przypadku (b)

Rozważmy dynamikę zmian dochodów systemu S_i sieci. Oznaczmy przez $V_i(t)$ dochód tego systemu w czasie t. Przypuśćmy, że w czasie początkowym dochód tego systemu wynosił v_{0i}, wtedy mamy:

$$V_i(t+\Delta t)=V_i(t)+\Delta V_i(t,\Delta t), \tag{4}$$

gdzie $\Delta V_i(t,\Delta t)$ – zmiana dochodu systemu S_i w przedziale czasu $[t,\ t+\Delta t)$. W celu wyznaczenia tej zmiennej zapiszemy prawdopodobieństwa warunkowe zdarzeń, które mogą zdarzyć w czasie Δt i zmiany dochodów systemu S_i, związane z tymi zdarzeniami. Mogą wystąpić następujące sytuacje: (a) z prawdopodobieństwem $\lambda(t)p_{0j}\Delta t+o(\Delta t)$ system S_i otrzyma zgłoszenie z systemu S_0, które przynosi dochód r_{0i}, gdzie r_{0i} jest ZL z wartością oczekiwaną a_{0i};

(b) z prawdopodobieństwem $\mu_i(k_i(t))u(k_i(t))p_{i0}\Delta t + o(\Delta t)$ system S_i wydaje zgłoszenie do otoczenia (tym samym redukuje dochód o R_{i0}, gdzie R_{i0} jest ZL z wartością oczekiwaną b_{i0}); (c) z prawdopodobieństwem $\mu_j(k_j(t))u(k_j(t))p_{ji}\Delta t + o(\Delta t)$ zgłoszenie przechodzi z systemu S_j do systemu S_i (w ten sposób wzrasta dochód S_i o r_{ji} i maleje dochód S_j o tę samą wartość, $j=\overline{1,n}, j \neq i$, gdzie r_{ji} jest ZL z wartością oczekiwaną a_{ji}); (d) z prawdopodobieństwem $\mu_i(k_i(t))u(k_i(t))p_{ij}\Delta t + o(\Delta t)$ zgłoszenie przechodzi z systemu S_i do systemu S_j, zmniejszając dochód S_i o R_{ij} i zwiększając dochód S_j o tę samą wartość, gdzie R_{ij} jest ZL z wartością oczekiwaną b_{ij}, $i,j=\overline{1,n}$; (e) z prawdopodobieństwem $1-\left(\lambda(t)p_{0i} + \mu_i(k_i(t))u(k_i(t)) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \mu_j(k_j(t))u(k_j(t))p_{ji}\right)\Delta t + o(\Delta t)$ system S_i nie stanowi zmiany w przedziale czasowym Δt. Oczywiście $r_{ji} = R_{ji}$ z prawdopodobieństwem 1, tzn. $a_{ji} = b_{ji}$, $i,j=\overline{1,n}$.

Poza tym, podczas każdego małego przedziału czasu Δt system S_i zwiększa dochód o $r_i\Delta t$, w związku z pobieraniem odsetek od pieniędzy, które już posiada; uważamy r_i za ZL z wartością oczekiwaną c_i, $i=\overline{1,n}$. Będziemy także zakładać, że ZL r_{ji}, R_{ij}, r_{0i}, R_{i0} są niezależne od ZL r_i, $i,j=\overline{1,n}$.

Wtedy z powyższej listy sytuacji mamy:

$$\Delta V_i(t,\Delta t) = \begin{cases} r_{0i} + r_i\Delta t & \text{z prawdopodobieństwem} \quad \lambda(t)p_{0i}\Delta t + o(\Delta t), \\ -R_{i0} + r_i\Delta t & \text{z prawdopodobieństwem} \quad \mu_i(k_i(t))u(k_i(t))p_{i0}\Delta t + o(\Delta t), \\ r_{ji} + r_i\Delta t & \text{z prawdopodobieństwem} \quad \mu_j(k_j(t))u(k_j(t))p_{ji}\Delta t + o(\Delta t), \\ -R_{ij} + r_i\Delta t & \text{z prawdopodobieństwem} \quad \mu_i(k_i(t))u(k_i(t))p_{ij}\Delta t + o(\Delta t), \\ r_i\Delta t & \text{z prawdopodobieństwem} \quad 1-\big(\lambda(t)p_{0i} + \mu_i(k_i(t))u(k_i(t)) + \\ & \qquad + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \mu_j(k_j(t))u(k_j(t))p_{ji}\big)\Delta t + o(\Delta t). \end{cases} \quad (5)$$

Przy ustalonej realizacji procesu $k(t)$, z powodu (5) możemy napisać warunkową wartość oczekiwaną jako:

$$E\{\Delta V_i(t,\Delta t)/k(t)\} = \Bigg[\lambda(t)a_{0i}p_{0i} + c_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \mu_j(k_j(t))u(k_j(t))p_{ji}a_{ji} -$$

$$-\left(b_{i0}p_{i0} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}p_{ij}\right)\mu_i(k_i(t))u(k_i(t))\Bigg]\Delta t + o(\Delta t),\ i=\overline{1,n},$$

wtedy:

$$E\{V_i(t,\Delta t)\} = \sum_k P\big(k(t)=k\big) E\{\Delta V_i(t,\Delta t)/k(t)\} =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=0}^{\infty} P\big(k(t)=(k_1(t),k_2(t),\ldots,k_n(t))\big)\times$$

$$\times E\{\Delta V_i(t,\Delta t)/k(t)=(k_1(t),k_2(t),\ldots,k_n(t))\} =$$

$$= \Bigg[\lambda(t)a_{0i}p_{0i} + c_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} P\big(k(t)=k\big) p_{ji}a_{ji} \sum_k \mu_j(k_j(t))u(k_j(t)) -$$

$$-\left(b_{i0}p_{i0} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}p_{ij}\right)\sum_k P\big(k(t)=t\big)\mu_i(k_i(t))u(k_i(t))\Bigg]\Delta t + o(\Delta t),\ i=\overline{1,n}.$$

Przypuśćmy, że S_i zawiera co najmniej m_i linii (urządzeń) i każda linia ma intensywność obsługi μ_i, $i=\overline{1,n}$. W tym przypadku:

$$\mu_i(k_i(s))u(k_i(s)) = \begin{cases} \mu_i k_i(s), & k_i(s)\le m_i, \\ \mu_i m_i, & k_i(s) > m_i, \end{cases} = \mu_i \min(k_i(s),m_i),\ i=\overline{1,n}.$$

Uśredniając po $k(t)$, biorąc pod uwagę warunek normalizacji $\sum_k P\big(k(t)=k\big)=1$ i założenie, że wartość oczekiwana $\min(k_i(s),m_i)$ daje $\min(N_i(s),m_i)$, tzn. $E\min(k_j(s),m_j)=\min(N_j(s),m_j)$, $j=\overline{1,n}$, gdzie $N_j(s)=E\{k_j(s)\}$ jest średnią liczbą zgłoszeń (zarówno oczekujących, jak i obsługiwanych) w S_i w przedziale czasu $[0,\ s]$, $i=\overline{1,n}$, otrzymamy następujące wyrażenie:

$$E\{\Delta V_i(t,\Delta t)\} = \Bigg[\lambda(t)a_{0i}p_{0i} + c_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \mu_j \min(N_j(t),m_j)p_{ji}a_{ji} -$$

$$-\mu_i \min(N_i(t),m_i)\left(b_{i0}p_{i0} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}p_{ij}\right)\Bigg]\Delta t + o(\Delta t),\ i=\overline{1,n}. \tag{6}$$

Aby znaleźć $N_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, użyjemy rekurencyjną względem chwil czasu metodę analizy średnich wartości. Idea polega na tym, że: dla SOM w sieci z małym współczynnikiem obciążenia $u_i = \dfrac{\lambda(t)e_i}{m_i\mu_i}$ (o czym świadczą wyniki obliczonych przykładów dla $u_i \le 0{,}4$), wartość $N_i(t)$ można znaleźć z następujących zależności rekurencyjnych:

$$\rho_i(t)=\min\big(N_i(t),m_i\big),\ \tau_i(t)=\frac{N_i(t)}{\mu_i\rho_i(t)},\ N_i(t+1)=\lambda_i\tau_i(t),\ i=\overline{1,n}, \tag{7}$$

gdzie e_j, $j=\overline{1,n}$, spełnia liniowy układ równań:

$$e_j = p_{0j} + \sum_{i=1}^{n} e_i p_{ij}, \quad j = \overline{1,n},$$

$\rho_i(t)$ i $\tau_i(t)$ są średnią liczbą zajętych linii i średnim czasem trwania zgłoszenia, pozostającego w i-tym SOM, w przedziale czasu $[0,t]$, $N_i(0) \neq 0$, $i = \overline{1,n}$. Dla systemów z większym współczynnikiem obciążenia ($u_i > 0.4$) mogą być wykorzystane następujące związki:

$$\rho_i(t) = \rho_i(N_i(t)) = \begin{cases} N_i(t) - \delta_i(N_i(t)), N_i(t) - \delta_i(N_i(t)) \leq m_i, \\ m_i, \quad N_i(t) - \delta_i(N_i(t)) > m_i, \end{cases}$$

gdzie

$$\delta_i(x) = \frac{(r_i + q_i)^{r_i + q_i} l_i^{q_i - 1}}{\sqrt{2}[m_i(l_i - 1)]^{r_i + q_i - 1}} \left(\frac{l_i x - m_i}{r_i}\right)^{r_i} \left(\frac{m_i - x}{q_i}\right)^{q_i}$$

i r_i, q_i, l_i są dodatnimi liczbami całkowitymi (doświadczenia pokazują, że mogą być z zakresu od 1 do 9).

4. Zadania optymalizacji i zarządzania

Dla otwartej sieci Markowa, rozważanej w poprzedniej części, możemy sformułować dwa problemy optymalizacji, których celem jest zmaksymalizowanie dochodów sieci, a w szczególności dochodu systemu S_j:

$$\begin{cases} W(T, m_1, \ldots, m_n) = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T \sum_{i=1}^{n} (v_i(t) - d_i N_i(t) - E_i m_i) dt \to \max_{m_1, m_2, \ldots, m_n}, \\ m_i \leq M_i, \; i = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} W_2(T, m_1, \ldots, m_n) = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T (v_j(t) - d_j N_j(t) - E_j m_j) dt \to \max_{m_1, m_2, \ldots, m_n}, \\ m_i \leq M_i, \; i = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{9}$$

gdzie: M_i są liczbami całkowitymi, d_i są kosztami obsługi jednego zgłoszenia w i-tym SOM (zarówno w kolejce, jak i w czasie obsługiwania), E_i są kosztami utrzymania jednej linii obsługi. Związek (6) oznacza, że z zadania (8) wynika następujące zadanie:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T \sum_{i=1}^{n} \left(\mu_i b_{i0} p_{i0} \int_0^t \min(N_i(s), m_i) ds + d_i N_i(t) + E_i m_i \right) dt \to \min_{m_1, m_2, \ldots, m_n}, \\ m_i \leq M_i, \; i = \overline{1,n}, \end{cases}$$

Przejdziemy teraz do problemu optymalnej kontroli sieci z dochodami. Rozważmy zamkniętą sieć z dochodami, obsługującą stałą liczbę jednorodnych zgłoszeń. Stan sieci jest wektorem (1). Oznaczmy macierz prawdopodobieństwa przejść między stanami sieci, jako

$Q = \left\| q_{ij} \right\|_{L \times L}$. Można połączyć tę macierz z macierzą prawdopodobieństw przejść zgłoszeń pomiędzy systemami w sieci $P = \left\| p_{ij} \right\|_{n \times n}$.

Nazwiemy sieć kontrolowaną, jeśli w każdym czasie t i każdym stanie $l = 1, 2, ..., L$, możemy wybrać wiersz macierzy Q:

$$q_l^{(n_l)} = \left(q_{l_1}^{(n_l)}, q_{l_2}^{(n_l)}, ..., q_{l_L}^{(n_l)} \right)$$

oraz wiersz jednokrokowych dochodów macierzy R:

$$r_l^{(n_l)} = \left(r_{l_1}^{(n_l)}, r_{l_2}^{(n_l)}, ..., r_{l_L}^{(n_l)} \right),$$

która określa dalsze zachowanie sieci.

Wartość n_l nazwiemy strategią kontroli w stanie l, a $N_l = \{n_l\}$ nazwiemy układem strategii kontroli. Wektor strategii $\bar{n} = (\bar{n}_1, \bar{n}_2, ..., \bar{n}_L) \in N_1 \times N_2 \times ... \times N_L$ nazwiemy polityką. Jeśli strategia n_l oraz polityka $\bar{n}$ są wybierane w czasie t, to zapiszemy $n_l(t)$ lub $\bar{n}(t) = (\bar{n}_1(t), \bar{n}_2(t), ..., \bar{n}_L(t))$. Ciąg polityki, wybierany w różnych chwilach, tworzy kontrolę $\bar{\bar{n}}(t) = (\bar{n}\ (t + \Delta t),\ ..., \bar{n}\ (T_{\max}))$, która określa rozwój sieci. Jeśli $T_{\max} < \infty$, mówimy o skończonym horyzoncie kontroli, w przeciwnym razie o nieskończonym.

Niech $E = E(\bar{\bar{n}})$ będzie efektywnością zachowania sieci na danym przedziale kontroli. Wtedy kontrolę $\bar{\bar{n}}^*$, która maksymalizuje efektywność nazwiemy optymalną. Zadaniem optymalnej kontroli jest: $E(\bar{\bar{n}}^*) = \max\limits_{\bar{\bar{n}}} E(\bar{\bar{n}})$. Jako $E(\bar{\bar{n}})$ można wziąć ogólny, oczekiwany dochód sieci, który może być znaleziony z oczekiwanego dochodu systemu sieci, który spełnia układ RRR (2). Zadanie może być rozwiązane za pomocą metody programowania dynamicznego Bellmana.

5. Niektóre zastosowania HM-sieci

W tej części opiszemy przykłady zastosowań sieci z dochodami do szacowania i przewidywania dochodu z rozmaitych obiektów.

Przykład 1 (analiza międzybankowego przepływu wpłat w sieci bankowej). System płatności rozmieszczony w państwie można krótko scharakteryzować w następujący sposób: na najwyższym poziomie w systemie bankowości znajduje się Narodowy (Centralny) Bank (CB), poniżej główne banki lokalne (LB) z oddziałami i filiami. Wszystkie transfery międzybankowe są przeprowadzane przez Centrum Rozrachunkowe (RC) Banku Centralnego, poprzez sieć komputerową za pośrednictwem rachunków korespondencyjnych (RK), które są otwierane w każdym bilansie banku. Każda wpłata jest udokumentowana w jednym dokumencie płatności elektronicznej (EPD). Są to regularne i ekspresowe płatności. Ekspresowe płatności są przeprowadzane w czasie rzeczywistym, tzn. RK banku są poprawiane bezpośrednio po procesie ekspresowej płatności. Regularne płatności są przetwarzane poprzez rozliczenia płatności. RC dostaje pewne wynagrodzenie za przetworzenie każdego EDP. Każdy bank określa ilość pieniędzy zarezerwowanych dla przetwarzania EDP, który zmniejsza przetworzone kwoty. Sumy te odliczane są z pieniędzy banku tak szybko, jak tylko bank określi kwoty rezerwy. Dlatego każdy bank dąży do optymalizacji rezerw. Przy użyciu sieci z dochodami i wieloma rodzajami zgłoszeń możemy znaleźć oczekiwany dochód z przejścia między stanami sieci bankowej, która odpowiada za przenoszenie płatności pomiędzy bankami i optymalne rezerwy każdego banku.

Przykład 2 (szacowanie oczekiwanego dochodu z sieci sklepów internetowych). Przypuśćmy, że firma posiada kilka sklepów internetowych, specjalizujących się w różnych grupach produktów. Klient, który zamierza zakupić produkt w jednym ze sklepów składa zamówienie i płaci za pomocą elektronicznego systemu płatności. Kiedy zamówienie internetowe jest przetwarzane, sklep internetowy przez zabezpieczony kanał łączy się z centralnym serwerem firmy, gdzie zebrana informacja jest zatwierdzana, a pieniędze przesyłane z konta klienta na konto firmy. Jeśli transakcja nie zostanie zatwierdzona (konto klienta nie zostanie zadowalająco zweryfikowane), serwer wysyła komunikat o błędzie do sklepu internetowego. Do oszacowania oczekiwanego dochodu firmy można użyć sieci z centralnym SOM i dochodami. Zgłoszeniami są zapytania od różnych klientów, a systemy obsługi to sklepy internetowe i serwer firmy.

6. Wnioski

Dalsze badania na tym polu powinny zajmować się rozwojem techniki analizy sieci dowolnych (nie Markowa) z dochodami oraz z różnymi szczególnymi przypadkami.

BIBLIOGRAFIA

1. Howard R.: Dynamic programming and Markovian processes. Sov. Radio 1964 (in Russian).
2. Matalytski M.: Incomes probabilistic model of the banking network. Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science of Czestochowa University of Technology, Vol. 1, No. 2, 2003, s. 99÷104.
3. Matalytski M., Koluzaeva E.: Finding of expected incomes in open exponencial networks of arbitrary architecture. Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science of Czestochowa University of Technology, Vol. 1, No. 6, 2007, s. 179÷190.
4. Matalytski M.: On some results in analysis and optimization of Markov networks with incomes and their application. Automation and Remote Control, Vol. 70 (10), 2009, s. 1683÷1697.

Recenzenci: Prof. dr hab. inż. Tadeusz Czachórski
Prof. dr hab. inż. Oleg Tikhonenko

Wpłynęło do Redakcji 13 marca 2011 r.

Abstract

In the paper HM (Howard-Matalytski)-queueing network is investigated. In such network message during its transition from one queueing system to another brings to the last one some income and income of the first system decrease on this value The case when arrival rate of messages and service rates of messages in systems depend on time is observed. For expected incomes of the network systems $v_i(k,t)$ the system of difference-differential equations (Formula 2) is constructed. The number of equations in such system is finite for closed network and countable for open network. Application of method of Laplace transformations (Formula 3) was observed for finding of expected incomes of closed network in case when incomes from message transitions between network states are functions depended on network states and time. In the paper technique of finding of expected incomes in systems of network of arbitrary architecture in case when incomes from message transitions between network states are random variable with known moments of the first and the second order is also described. For observed network optimization problems (Formulas 8, 9) connected with maximization of income of the whole network and income of some system separately are formulated. Problem of optimal control which maximizes efficiency of network functioning is observed for closed network. Examples of HM-networks applications for income forecasting of different computer objects are presented.

Adresy

Olga KITURKO: Grodzieński Uniwersytet Państwowy, Wydział Matematyki i Informatyki, ul. Orzeszko 22, 230023 Grodno, Białoruś, sytaya_om@mail.ru

Katarzyna KOŁUZAJEWA: Grodzieński Uniwersytet Państwowy, Wydział Matematyki i Informatyki, ul. Orzeszko 22, 230023 Grodno, Białoruś, koluzaeva@gmail.com

Michał MATAŁYCKI: Politechnika Częstochowska, Instytut Matematyki,
ul. Dąbrowskiego 73, 42-200 Częstochowa, Polska, m.matalytski@gmail.com