STUDIA INFORMATICA 2012
Volume 33 Number 3A (107)

Oleg TIKHONENKO
Instytut Informatyki Teoretycznej i Stosowanej Polskiej Akademii Nauk
Magdalena KAWECKA
Politechnika Częstochowska, Instytut Matematyki

SYSTEMY OBSŁUGI ZGŁOSZEŃ O LOSOWEJ OBJĘTOŚCI Z OGRANICZONĄ POJEMNOŚCIĄ PAMIĘCI

Streszczenie. W artykule są analizowane wieloliniowe systemy obsługi zgłoszeń o losowej objętości z najprostszym strumieniem wejściowym, w których czas obsługi nie zależy od objętości zgłoszenia, a objętość sumaryczna jest ograniczona. Dowodzi się twierdzenie, pozwalające na wyznaczenie charakterystyk takich systemów przy warunku, że wyznaczone są charakterystyki odpowiedniego systemu klasycznego.

Słowa kluczowe: objętość sumaryczna, pojemność pamięci, prawdopodobieństwo straty, splot według Stieltjesa

QUEUEING SYSTEMS WITH CUSTOMERS OF RANDOM SPACE REQUIREMENTS AND BOUNDED CAPACITY

Summary. Multi-server queueing systems with Poisson entry and customers having some random space requirement are considered for the case of service time independent of the space requirement and limited buffer space. It's shown that all characteristics of such systems can be obtained, if characteristics of proper classical systems are known.

Keywords: total calls capacity, memory space, loss probability, Stieltjes convolution

1. Wprowadzenie

Systemy obsługi zgłoszeń o losowej objętości [1, 2] są pewnym uogólnieniem klasycznych modeli teorii kolejek [3, 4] przeznaczonym przede wszystkim dla wyznaczenia potrzebnej pojemności pamięci węzłów sieci komunikacyjnych. Zasadniczym założeniem teorii wskazanych systemów [5] jest niejednorodność obsługiwanych zgłoszeń ze względu na potrzebną dla przechowywania zgłoszenia pojemność pamięci podczas jego pobytu w systemie.

Istnieją dwie klasy modeli systemów obsługi zgłoszeń o losowej objętości [1]:

1) modele, w których czas obsługi zgłoszenia nie zależy od jego objętości (patrz np. [6]),
2) modele z zależnym od objętości zgłoszenia czasem obsługi (patrz np. [7]).

Przedmiotem badań tego artykułu są modele należące do pierwszej klasy.

Niżej podamy twierdzenie, z którego wynika, że w pewnych warunkach znajomość stacjonarnego rozkładu liczby zgłoszeń obecnych w odpowiednim klasycznym systemie obsługi pozwala na obliczanie takiego rozkładu dla systemu z ograniczoną pojemnością pamięci.

2. Procesy stochastyczne opisujące zachowanie badanych systemów

Rozważmy najpierw system klasyczny $M/G/n/m$, gdzie n jest liczbą identycznych urządzeń obsługi ($1 \le n \le \infty$), m jest liczbą miejsc oczekiwania w kolejce ($0 \le m \le \infty$). Oznaczmy przez $B(t) = P\{\xi < t\}$ dystrybuantę czasu obsługi ξ. Załóżmy, że istnieje skończony pierwszy moment $\beta_1 = E\xi$ zmiennej losowej ξ. Oznaczmy przez a parametr strumienia wejściowego, niech $\rho = a\beta_1/n$. Jako $\eta(t)$ oznaczmy liczbę zgłoszeń obecnych w analizowanym systemie w chwili czasu t. Wówczas liczbę zgłoszeń obsługiwanych w chwili t możemy określić jako $\nu(t) = \min(\eta(t), n)$.

W ciągu dalszym będziemy zakładać, że zgłoszenia są obsługiwane w kolejności ich przybycia do systemu, natomiast jeżeli w pewnej ustalonej chwili czasu w systemie znajduje się k obsługiwanych zgłoszeń ($k = \overline{1, n}$), to zgłoszenia te są ponumerowane liczbami 1, 2, …, k w sposób losowy, co oznacza, że dowolny z możliwych k! sposobów numeracji może być wybrany z takim samym prawdopodobieństwem $1/k!$ Jest oczywiste, że sposób numeracji obsługiwanych zgłoszeń nie wpływa na charakterystyki liczby zgłoszeń obecnych w systemie. Oznaczmy przez $\xi_j^*(t)$ resztę czasu obsługi j-go zgłoszenia obsługiwanego w chwili t, $j = \overline{1, \nu(t)}$.

Wówczas zachowanie analizowanego systemu opisuje się procesem markowowskim

$$(\eta(t); \xi_l^*(t), l = \overline{1, \nu(t)}). \tag{1}$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia dla wektorów:

$$Y_k = (y_1, ..., y_k),\ Y_k^j = (y_1, ..., y_{j-1}, y_{j+1}, ..., y_k),\ (Y_k, z) = (y_1, ..., y_k, z).$$

Załóżmy teraz, że każde zgłoszenie jest charakteryzowane pewną niezależną od innych zgłoszeń losową objętością ζ, której dystrybuanta $L(x) = P\{\zeta < x\}$ jest określona. Załóżmy, że czas obsługi zgłoszenia ξ nie zależy od jego objętości. Oznaczmy przez $\sigma(t)$ objętość sumaryczną zgłoszeń obecnych w systemie w chwili t. Będziemy zakładać, że objętość sumaryczna zgłoszeń w systemie jest ograniczona wielkością stałą $V > 0$, którą będziemy nazywali pojemnością pamięci systemu.

Ograniczenie objętości sumarycznej prowadzi do dodatkowych strat przybywających zgłoszeń. Niech, na przykład, w chwili czasu τ, w której w systemie są wolne urządzenia lub wolne miejsca oczekiwania, do systemu przybywa zgłoszenie o objętości x. Zgłoszenie to zostanie przyjęte, jeżeli $\sigma(\tau^-) + x \le V$. W przypadku przeciwnym zgłoszenie zostanie stracone. Otrzymany przez nas system obsługi zgłoszeń o losowej objętości i ograniczonej pojemności pamięci będziemy oznaczać $M/G/n/(m,V)$. Proces markowowski opisujący zachowanie tego systemu ma postać

$$(\eta(t); \zeta_i(t), i = \overline{1, \eta(t)}; \xi_l^*(t), l = \overline{1, \nu(t)}), \tag{2}$$

gdzie $\zeta_i(t)$ jest objętością zgłoszenia z numerem i w systemie w chwili t. Jest oczywiste, że

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^{\eta(t)} \zeta_i(t).$$

Składowe $\zeta_i(t)$ i $\xi_l^*(t)$ nie są obecne we wzorze (2), gdy $\eta(t) = 0$.

Załóżmy, że dla analizowanych systemów kolejkowych istnieje tryb stacjonarny, tj. istnieją rozumiane w sensie słabej zbieżności granice $\eta(t) \Rightarrow \eta$, $\sigma(t) \Rightarrow \sigma$, $\xi_l^*(t) \Rightarrow \xi_l^*$, $\zeta_i(t) \Rightarrow \zeta_i$.

Proces (1) opisujący zachowanie klasycznego systemu $M/G/n/m$ w trybie stacjonarnym będziemy charakteryzować funkcjami o następującym sensie probabilistycznym:

$$w_k(Y_l) = P\{\eta = k, \xi_j^* < y_j, j = \overline{1, l}\}, l = \min(k, n), \ k = \overline{1, n+m}.$$

Jest oczywiste, że dla prawdopodobieństw stacjonarnych $p_k = P\{\eta = k\}$, $k = \overline{1, n+m}$, mamy $p_k = w_k(\infty_l)$, gdzie $\infty_l = (\infty, ..., \infty)$ jest wektorem o l składowych. Niech $p_0 = P\{\eta = 0\}$.

Proces (2) opisujący zachowanie systemu $M/G/n/(m,V)$ w trybie stacjonarnym będziemy charakteryzować funkcjami

$$g_k(x, Y_l) = P\{\eta = k, \sigma < x, \xi_j^* < y_j, j = \overline{1, l}\},$$

gdzie $l = \min(k, n)$, $k = \overline{1, n+m}$. Dla tego procesu także możemy wprowadzić funkcje $w_k(Y_l)$ o tym samym sensie probabilistycznym. Jest oczywiste, że

$$w_k(Y_l) = g_k(V, Y_l).$$

Zauważmy, że funkcje $g_k(x, Y_l)$ i $w_k(Y_l)$ są symetryczne względem permutacji składowych wektora Y_l dzięki wprowadzonej przez nas losowej numeracji obsługiwanych zgłoszeń.

3. Wyznaczenie charakterystyk systemu *M*/*G*/*n*/(*m*,*V*)

Z uwzględnieniem losowej numeracji obsługiwanych zgłoszeń możemy za pomocą metody zmiennej dodatkowej [8] wypisać równania dla funkcji $w_k(Y_l)$ charakteryzujących proces (1) w trybie stacjonarnym:

$$0 = -ap_0 + \left.\frac{\partial w_1(y)}{\partial y}\right|_{y=0}; \tag{3}$$

$$-\frac{\partial w_1(y)}{\partial y} + \left.\frac{\partial w_1(y)}{\partial y}\right|_{y=0} = ap_0 B(y) - aw_1(y) + 2\left.\frac{\partial w_2(y,u)}{\partial u}\right|_{u=0}; \tag{4}$$

$$-\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{\partial w_k(Y_k)}{\partial y_i} - \left.\frac{\partial w_k(Y_k)}{\partial y_i}\right|_{y_i=0}\right] = \frac{a}{k}\sum_{i=1}^{k} w_{k-1}(Y_k^i)B(y_i) - aw_k(Y_k) +$$

$$+(k+1)\left.\frac{\partial w_{k+1}(Y_k,u)}{\partial u}\right|_{u=0}, \ k = \overline{2, n-1}; \tag{5}$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial w_n(Y_n)}{\partial y_i} - \left.\frac{\partial w_n(Y_n)}{\partial y_i}\right|_{y_i=0}\right] = \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n} w_{n-1}(Y_n^i)B(y_i) - aw_n(Y_n) +$$

$$+n\left.\frac{\partial w_{n+1}(Y_{n-1},u)}{\partial u}\right|_{u=0} B(y_n); \tag{6}$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial w_k(Y_n)}{\partial y_i} - \left.\frac{\partial w_k(Y_n)}{\partial y_i}\right|_{y_i=0}\right] = aw_{k-1}(Y_n) - aw_k(Y_n) + n\left.\frac{\partial w_{k+1}(Y_{n-1},u)}{\partial u}\right|_{u=0} B(y_n),$$

$$k = \overline{n+1, n+m-1}; \tag{7}$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial w_{n+m}(Y_n)}{\partial y_i} - \left.\frac{\partial w_{n+m}(Y_n)}{\partial y_i}\right|_{y_i=0}\right] = aw_{n+m-1}(Y_n). \tag{8}$$

W trybie stacjonarnym są spełnione następujące warunki graniczne:

$$aw_k(Y_k) = (k+1)\left.\frac{\partial w_{k+1}(Y_k,u)}{\partial u}\right|_{u=0}, \ k = \overline{1, n-1}; \tag{9}$$

$$aw_k(Y_k) = n\left.\frac{\partial w_{k+1}(Y_{n-1},u)}{\partial u}\right|_{u=0} B(y_n), \ k = \overline{n, n+m-1}. \tag{10}$$

Analogiczne równania dla procesu (2) opisującego system $M/G/n/(m,V)$ mają postać:

$$0=-ap_0L(V)+\left.\frac{\partial w_1(y)}{\partial y}\right|_{y=0}; \tag{11}$$

$$-\frac{\partial w_1(y)}{\partial y}+\left.\frac{\partial w_1(y)}{\partial y}\right|_{y=0}=ap_0B(y)L(V)-a\int_0^V g_1(V-x,\,y)\,dL(x)+2\left.\frac{\partial w_2(y,u)}{\partial u}\right|_{u=0}; \tag{12}$$

$$-\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{\partial w_k(Y_k)}{\partial y_i}-\left.\frac{\partial w_k(Y_k)}{\partial y_i}\right|_{y_i=0}\right]=\frac{a}{k}\sum_{i=1}^{k}B(y_i)\int_0^V g_{k-1}(V-x,\,Y_k^i)\,dL(x)-$$

$$-a\int_0^V g_k(V-x,\,Y_k)dL(x)+(k+1)\left.\frac{\partial w_{k+1}(Y_k,u)}{\partial u}\right|_{u=0},\ k=\overline{2,\,n-1}; \tag{13}$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial w_n(Y_n)}{\partial y_i}-\left.\frac{\partial w_n(Y_n)}{\partial y_i}\right|_{y_i=0}\right]=\frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}B(y_i)\int_0^V g_{n-1}(V-x,\,Y_n^i)\,dL(x)-$$

$$-a\int_0^V g_n(V-x,\,Y_n)\,dL(x)+n\left.\frac{\partial w_{n+1}(Y_{n-1},u)}{\partial u}\right|_{u=0}B(y_n); \tag{14}$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial w_k(Y_n)}{\partial y_i}-\left.\frac{\partial w_k(Y_n)}{\partial y_i}\right|_{y_i=0}\right]=a\int_0^V g_{k-1}(V-x,\,Y_n)\,dL(x)-a\int_0^V g_k(V-x,\,Y_n)\,dL(x)+$$

$$+n\left.\frac{\partial w_{k+1}(Y_{n-1},u)}{\partial u}\right|_{u=0}B(y_n),\ \ k=\overline{n+1,\,n+m-1}; \tag{15}$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial w_{n+m}(Y_n)}{\partial y_i}-\left.\frac{\partial w_{n+m}(Y_n)}{\partial y_i}\right|_{y_i=0}\right]=a\int_0^V g_{n+m-1}(V-x,\,Y_n)\,dL(x). \tag{16}$$

Warunki graniczne w tym przypadku mają postać:

$$a\int_0^V g_k(V-x,\,Y_k)\,dL(x)=(k+1)\left.\frac{\partial w_{k+1}(Y_k,u)}{\partial u}\right|_{u=0},\ k=\overline{1,\,n-1}; \tag{17}$$

$$a\int_0^V g_k(V-x,\,Y_k)\,dL(x)=n\left.\frac{\partial w_{k+1}(Y_{n-1},u)}{\partial u}\right|_{u=0}B(y_n),\ k=\overline{n,\,n+m-1}. \tag{18}$$

Niech C będzie pewną stałą. Przez $L_*^{(k)}(x)$ oznaczmy splot według Stieltjesa rzędu k dystrybuanty $L(x)$:

$$L_*^{(0)}(x)\equiv 1,\ \ L_*^{(k)}(x)=\int_0^x L_*^{(k-1)}(x-u)\,dL(u),\ \ k=1,2,\ldots.$$

Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie. *Niech liczba* $\tilde{p}_0$ *i funkcje* $\tilde{w}_k(Y_l)$, $k=\overline{1, n+m}$, *spełniają równania* (3)-(10) *i warunek normalizacyjny* $\tilde{p}_0 + \sum_{k=1}^{n} \tilde{w}_k(\infty_k) + \sum_{k=n+1}^{n+m} \tilde{w}_k(\infty_n) = 1$. *Wówczas liczba* $p_0 = C\tilde{p}_0$ *i funkcje* $g_k(x, Y_l) = C\tilde{w}_k(Y_l)L_*^{(k)}(x)$, $k=\overline{1, n+m}$, *spełniają równania* (11)-(18).

Twierdzenia dowodzi się przez bezpośrednie podstawienie przedstawionych w powyższej postaci p_0 i $g_k(x, Y_l)$ do równań (11)-(18), czego wynikiem są równania (3)-(10) dla $\tilde{p}_0$ i $\tilde{w}_k(Y_l)$.

Wniosek. *Jeżeli* $\tilde{p}_k$ *jest stacjonarnym prawdopodobieństwem obecności w systemie M/G/n/m k zgłoszeń, to liczba* $p_k = C\tilde{p}_k L_*^{(k)}(V)$, $k=\overline{0, n+m}$, *jest stacjonarnym prawdopodobieństwem obecności k zgłoszeń w systemie M/G/n/(m,V).*

Stałą C wyznacza się z warunku normalizacyjnego:

$$C = \left[\sum_{k=0}^{n+m} \tilde{p}_k L_*^{(k)}(V) \right]^{-1}.$$

Prawdopodobieństwo P straty zgłoszenia w systemie *M/G/n/(m,V)* możemy teraz wyznaczyć z następującego równania równowagi:

$$a(1-P) = \sum_{i=1}^{n} i \left.\frac{\partial w_i(\infty_{i-1}, u)}{\partial u}\right|_{u=0} + n \sum_{i=n+1}^{n+m} \left.\frac{\partial w_i(\infty_{n-1}, u)}{\partial u}\right|_{u=0},$$

skąd otrzymujemy:

$$P = 1 - \frac{1}{a}\left[\sum_{i=1}^{n} i \left.\frac{\partial w_i(\infty_{i-1}, u)}{\partial u}\right|_{u=0} + n \sum_{i=n+1}^{n+m} \left.\frac{\partial w_i(\infty_{n-1}, u)}{\partial u}\right|_{u=0} \right].$$

Jest oczywiste, że udowodnione twierdzenie pozostaje w mocy w przypadku nieograniczonej kolejki ($m=\infty$). Zauważmy również, że klasyczne systemy kolejkowe z ograniczoną kolejką stanowią przypadek szczególny systemów z ograniczoną pojemnością pamięci, w których objętość każdego zgłoszenia jest równa 1.

Otrzymane relacje niestety nie są wygodne dla obliczeń numerycznych, ponieważ zawierają sploty dystrybuanty $L(x)$, których obliczanie w przypadku ogólnym stanowi pewne problemy.

Istnieją algorytmy pozwalające na rozwiązanie niektórych takich problemów na drodze odwrócenia numerycznego transformat Laplace'a [9, 10]. Drugim istotnym powodem utrudniającym obliczenia jest ten fakt, że dla większości systemów klasycznych *M/G/n/m* nie jest znana postać jawna prawdopodobieństw $\tilde{p}_k$.

Dokładne obliczenia charakterystyk systemów *M/G/n/(m,V)* są więc możliwe w przypadku, gdy

1) znane są wzory dla prawdopodobieństw $\tilde{p}_k$ odpowiedniego systemu klasycznego $M/G/n/m$,
2) dystrybuanta $L(x)$ ma postać pozwalającą na obliczanie jej splotów według Stieltjesa.

Poniżej podamy przykłady takich systemów.

4. Przykłady obliczeń charakterystyk systemów *M*/*G*/*n*/(*m*,*V*)

Najprostszym przypadkiem zezwalającym na dokładne obliczenia charakterystyk jest znany [1] system $M/M/n/(m,V)$ z wykładniczym rozkładem czasu obsługi (analiza przypadku $m=\infty$ również jest możliwa). Jak wynika z udowodnionego wyżej twierdzenia, w przypadku tym mamy:

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(n\rho)^k}{k!} L_*^{(k)}(V) + \frac{n^n}{n!} \sum_{k=n+1}^{n+m} \rho^k L_*^{(k)}(V) \right]^{-1},$$

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{(n\rho)^k}{k!} p_0 L_*^{(k)}(V),\ k = \overline{1, n}; \\ \dfrac{n^n \rho^k}{n!} p_0 L_*^{(k)}(V),\ k = \overline{n+1, n+m}. \end{cases}$$

Prawdopodobieństwo straty zgłoszenia ma postać:

$$P = 1 - (n\rho)^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} k p_k - \rho^{-1} \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} p_k \right).$$

Dokładne obliczenia w tym przypadku są możliwe, jeżeli np. objętość zgłoszeń ma rozkład wykładniczy z parametrem f: $L(x) = 1 - e^{-fx}$, $x > 0$. Wówczas mamy:

$$L_*^{(k)}(V) = 1 - e^{-fV} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(fV)^j}{j!}.$$

Uogólnieniem rozkładu wykładniczego jest rozkład gamma z parametrami $\alpha > 0$, $f > 0$, którego dystrybuantę wyznacza się wzorem

$$L(x) = L(\alpha, f, x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x f^\alpha u^{\alpha-1} e^{-fu} du,\ x > 0.$$

Splot według Stieltjesa takiej dystrybuanty także jest dystrybuantą funkcji gamma. Mamy wówczas $L_*^{(k)}(V) = L(k\alpha, f, V)$.

Drugą możliwość stanowi rozkład jednostajny na odcinku [a; b], gdzie $a \geq 0$. W takim przypadku otrzymujemy [11]:

$$L_*^{(k)}(V) = \left(\frac{-1}{b-a}\right)^k \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j [(b-a)j - bk + V]^k H((b-a)j - bk + V)}{j!(k-j)!},$$

gdzie $H(x)$ jest funkcją jednostkową Heaviside'a:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1/2, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Bardziej ciekawy jest przykład systemu $M/D/1/(\infty,V)$ ze stałym czasem obsługi $\xi \equiv t_0$. Wtedy $\rho = at_0$ oraz $p_k = C\tilde{p}_k L_*^{(k)}(V)$, $k = 0, 1, \ldots$, gdzie

$$\tilde{p}_0 = 1 - \rho; \; \tilde{p}_1 = (1-\rho)(e^{\rho} - 1);$$

$$\tilde{p}_k = (1-\rho)\left\{ e^{k\rho} + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{k-i} e^{i\rho} \left[\frac{(i\rho)^{k-i}}{(k-i)!} + \frac{(i\rho)^{k-i-1}}{(k-i-1)!} \right] \right\}, \; k \geq 2.$$

Zauważmy, że tryb stacjonarny istnieje dla systemu klasycznego $M/D/1/\infty$, gdy $\rho < 1$.

Stałą C obliczamy z warunku normalizacyjnego $C\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{p}_k L_*^{(k)}(V) = 1$, skąd wynika, że

$$C = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{p}_k L_*^{(k)}(V) \right)^{-1}.$$

Prawdopodobieństwo straty P obliczamy z warunku $\rho(1-P) = 1 - p_0$, skąd wynika, że

$$P = 1 - \rho^{-1}(1 - p_0).$$

Dokładne obliczenia w tym przypadku są możliwe np. dla podanych wyżej rozkładów objętości zgłoszeń (gamma, wykładniczego i jednostajnego).

5. Podsumowanie

W artykule przeanalizowano model kolejkowy $M/G/n/(m,V)$, w którym każde zgłoszenie jest charakteryzowane losową objętością ζ niezależną od objętości innych zgłoszeń o znanej dystrybuancie $L(x)$ przy założeniu, że czas obsługi nie zależy od objętości zgłoszenia, a objętość sumaryczna obecnych w systemie zgłoszeń jest ograniczona stałą wielkością (pojemnością pamięci) V.

Jak się okazało, w analizowanym przypadku rozkład stacjonarny liczby zgłoszeń w systemie oraz prawdopodobieństwo straty zgłoszenia można łatwo wyznaczyć, jeżeli znane są charakterystyki liczby zgłoszeń obecnych w odpowiednim systemie klasycznym $M/G/n/m$.

Otrzymane wyniki stanowią rozwiązanie teoretyczne problemu analizy systemu $M/G/n/(m,V)$. Udowodnione w artykule twierdzenie sprawia, iż problem ten staje się w pewnym sensie problemem trywialnym.

Należy jednak zauważyć, że:

1) istotne jest założenie o charakterze strumienia wejściowego badanego systemu: podane twierdzenie nie jest prawdziwe, gdy strumień wejściowy nie jest strumieniem najprostszym,
2) wskazane twierdzenie także nie jest prawdziwe, gdy czas obsługi zgłoszenia zależy od jego objętości,
3) rozwiązanie teoretyczne wskazanego problemu nie oznacza, że zawsze możliwe jest obliczenie liczbowe charakterystyk systemu $M/G/n/(m,V)$, co jest związane z:
   a) nieobecnością w przypadku ogólnym wyrażeń analitycznych dla charakterystyk systemu $M/G/n/m$,
   b) koniecznością obliczenia obecnych w otrzymanych wzorach splotów według Stieltjesa.

W artykule pokazano, że w pewnych przypadkach szczególnych otrzymane wyniki pozwalają na dokładne obliczenie charakterystyk systemu $M/G/n/(m,V)$.

Możliwe jest także stosowanie metod numerycznych realizowanych w różnych pakietach programowych, przede wszystkim do numerycznego obliczenia splotów dystrybuant.

BIBLIOGRAFIA

1. Tikhonenko O.: Metody probabilistyczne analizy systemów informacyjnych. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 2006.
2. Tikhonenko O. M.: Modeli massovogo obsluzhivanya v sistemah obrabotki informacji (Модели массового обслуживания в системах обработки информации). Universitetskoe, Minsk 1990.
3. Bocharov P.P., D'Apice C., Pechinkin A.V., Salerno S.: Queueing Theory. VSP, Utrecht–Boston 2004.
4. Gniedenko B. W., Kowalenko I. N.: Wstęp do teorii obsługi masowej. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1971.
5. Tikhonenko O.: Jednoliniowe systemy obsługi zgłoszeń o losowej objętości, [w:] Kwiecień A., Gaj P., Jestratjew A. (red.): Współczesna Problematyka Sieci Komputerowych. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 2010, s. 11÷18.

6. Tikhonenko O.: Queueing systems with common buffer: a theoretical treatment. Computer Networks. Communications in Computer ana Information Science. V. 160. Springer, 2011, s. 61÷69.
7. Tikhonenko O. M.: Queueing systems with processor sharing and limited resources. Automation and Remote Control. V. 71 (5), 2010, s. 803÷815.
8. Matveev V. F., Ushakov V. G.: Sistemy massovogo obsluzhivanya (Системы массового обслуживания). Izdatelstvo Moskovskogo Universiteta, Moskva 1984.
9. Gaver D.P.: Observing stochastic process, and approximate transform inversion. Operation Research. V. 14 (1), 1966, s. 444÷459.
10. Stehfest H.: Algorithm 368: Numeric inversion of Laplace transform. Communications of ACM. V. 13 (1), 1970, s. 47÷49.
11. Feller W.: An introduction to probability theory and its applications. V. 2. Wiley, New York 1971.

Wpłynęło do Redakcji 14 lutego 2012 r.

Abstract

In the paper multi-server $M/G/n/(m,V)$ queueing systems with Poisson entry and customers having random space requirements are analyzed under assumption that service time is independent of customer space requirement and the total customers volume is limited by the constant value V. The theorem for the system characteristics determination is proved under condition that the characteristics of appropriate classical $M/G/n/m$ system are known. Examples of concrete systems with customers of random space requirements and limited total volume, for which the precise calculation of stationary customers number distribution is possible, are presented.

Adresy

Oleg TIKHONENKO: Instytut Informatyki Teoretycznej i Stosowanej Polskiej Akademii Nauk, ul. Bałtycka 5, 44-100 Gliwice, Polska, oleg.tikhonenko@gmail.com
Magdalena KAWECKA: Politechnika Częstochowska, Instytut Matematyki, ul. Dąbrowskiego 69, 42-201 Częstochowa, Polska, kawecka_magdalena@wp.pl