STUDIA INFORMATICA 2012
Volume 33 Number 3A (107)

Michał MATAŁYCKI
Politechnika Częstochowska, Instytut Matematyki
Swiatosław STATKIEWICZ
Grodzieński Uniwersytet Państwowy

ANALIZA ASYMPTOTYCZNA WYKŁADNICZEJ SIECI ZAWODNYCH SYSTEMÓW KOLEJKOWYCH

Streszczenie. W artykule przeanalizowano zamkniętą wykładniczą sieć kolejkową z zawodnymi systemami i dużą liczbą zgłoszeń, dla której otrzymano układy równań różniczkowych do wyznaczenia średniej liczby zgłoszeń i nieuszkodzonych kanałów obsługi w systemach sieci. Rozwiązania wskazanych układów stosuje się w zagadnieniach optymalizacji.

Słowa kluczowe: niepewne systemy obsługi, aproksymacja

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF MARKOV QUEUEING NETWORK WITH UNRELIABLE SYSTEMS

Summary. The closed exponentional queueing network with unreliable systems with the large number of messages is investigated. We have received the systems of differential equations for average number of messages and serviceable channels of network systems. For such systems it is possible to discover solution and to use in optimization problems.

Keywords: unreliable queueing systems, approximation

1. Wprowadzenie

Sieci kolejkowe często są używane jako modele probabilistyczne systemów i sieci komputerowych [1]. Ponieważ urządzenia sieci komputerowych czasem mogą zostać uszkodzone, ich modelowaniu służą sieci kolejkowe z systemami zawodnymi.

Rozpatrzmy wykładniczą sieć kolejkową składającą się z $n+1$ systemów obsługi masowej (SOM) $S_0, S_1, ..., S_n$, w której obsługiwanych jest K zgłoszeń jednego typu. System S_i zawiera m_i identycznych kanałów obsługi, $i = \overline{1,n}$, i $m_0 = K$.

Załóżmy, że kanały obsługi systemu S_0 są niezawodne, natomiast w innych systemach $S_0, S_1, ..., S_n$ kanały obsługi mogą zostać przypadkowo uszkodzone. Czas działania każdego nieuszkodzonego kanału systemu S_i ma rozkład wykładniczy z parametrem β_i, $i = \overline{1,n}$. Po uszkodzeniu kanału natychmiast rozpoczyna się jego naprawa. Czas naprawy ma także rozkład wykładniczy z parametrem γ_i, $i = \overline{1,n}$. Po zakończeniu obsługi w systemie S_i zgłoszenie natychmiast przenosi się do systemu S_j z prawdopodobieństwem p_{ij}, $i, j = \overline{0,n}$, $p_{00} = 0$, $\sum_{i=0}^{n} p_{ij} = 1$. Jeśli do systemu S_j przybywa zgłoszenie, podczas gdy w systemie tym jest obecny jeden nieuszkodzony wolny kanał, to jest ono natychmiast obsługiwane, czas jego obsługi ma rozkład wykładniczy z parametrem μ_i, $i = \overline{1,n}$. W przypadku przeciwnym zgłoszenie zostaje się oczekiwać w kolejce. Przyjmujemy, że dyscypliną obsługi zgłoszeń we wszystkich systemach sieci jest FIFO.

W artykule otrzymano układy równań różniczkowych dla średniej liczby zgłoszeń i nieuszkodzonych kanałów w systemach sieci przy dużej wartości K. Technika wyprowadzenia tych równań różni się od zwykłej techniki aproksymacji dyfuzyjnej [1]. Rozwiązania wskazanych układów są stosowane w zagadnieniach optymalizacji modeli sieci komputerowych [2]. Zauważmy, że wspomniana technika była po raz pierwszy podana w pracach [3, 4] dla sieci wykładniczych z niezawodnymi SOM.

2. Układ równań dla prawdopodobieństw stanów

Przyjmujemy, że czasy obsługi zgłoszeń, naprawy kanałów i czasy pracy nieuszkodzonych kanałów są niezależnymi zmiennymi losowymi. Wówczas stan sieci w chwili czasu t można opisać wektorem losowym

$$z(t) = \left(d(t),\ k(t)\right) = \left(d_1(t), d_2(t), ..., d_n(t), k_1(t), k_2(t), ..., k_n(t)\right), \tag{1}$$

gdzie $d_i(t)$ i $k_i(t)$ są liczbami nieuszkodzonych kanałów i zgłoszeń w systemie S_i w czasie t odpowiednio, $0 \le d_i(t) \le m_i$, $0 \le k_i(t) \le K$, $t \in [0, +\infty)$. Oczywiście $k_0(t) = K - \sum_{i=1}^{n} k_i(t)$ jest liczbą zgłoszeń w systemie S_0 w chwili t.

Wektor $z(t)$ tworzy $2n-$wymiarowy łańcuch Markowa z czasem ciągłym i skończoną liczbą stanów. Oznaczmy przez

$$P(d,k,t)=P\big(d(t)=d,k(t)=k\big),$$

gdzie $d=(d_1,d_2,...,d_n)$, $0\le d_i\le m_i$, i $k=(k_1,k_2,...,k_n)$, $0\le k_i\le K$, $i=\overline{1,n}$, prawdopodobieństwa stanów sieci. Załóżmy, że I_i-jest $n-$wektorem z zerowymi współrzędnymi oprócz $i-$tej, która jest równa 1. Możliwe przejścia łańcucha Markowa $z(t)$ do stanu $z(t+\Delta t)=(d,k,t+\Delta t)$ w czasie Δt są następujące:

- ze stanu $(d,k+I_i-I_j,t)$ z prawdopodobieństwem

  $$\mu_i p_{ij}\min\big(d_i(t),k_i(t)+1\big)\Delta t+o(\Delta t),\ i,j=\overline{1,n};$$

- ze stanu $(d,k-I_i,t)$ z prawdopodobieństwem

  $$\mu_0 p_{0i}\left(K-\sum_{i=1}^{n}k_i(t)+1\right)\Delta t+o(\Delta t),\ i=\overline{1,n};$$

- ze stanu $(d,k+I_i,t)$ z prawdopodobieństwem

  $$\mu_i p_{i0}\min\big(d_i(t),k_i(t)+1\big)\Delta t+o(\Delta t),\ i=\overline{1,n};$$

- ze stanu $(d-I_i,k,t)$ z prawdopodobieństwem

  $$\gamma_i(m_i-d_i(t)+1)\Delta t+o(\Delta t),\ i=\overline{1,n};$$

- ze stanu $(d+I_i,k,t)$ z prawdopodobieństwem

  $$\beta_i\big(d_i(t)+1\big)\Delta t+o(\Delta t),\ i=\overline{1,n};$$

- ze stanu (d,k,t) z prawdopodobieństwem

  $$1-\left[\mu_0\left(K-\sum_{i=1}^{n}k_i(t)\right)+\sum_{i=1}^{n}\mu_i\min\big(d_i,k_i(t)\big)+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\big(m_i-d_i(t)\big)+\right.$$
  $$\left.+\sum_{i=1}^{n}\beta_i\,d_i(t)\right]\Delta t+o(\Delta t);$$

- ze wszystkich innych stanów z prawdopodobieństwem $o(\Delta t)$.

Korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite, możemy wypisać układ równań różnicowych dla prawdopodobieństw stanów, z którego po przejściu granicznym przy $\Delta t\to 0$ otrzymujemy układ równań różnicowo-różniczkowych Kołmogorowa dla prawdopodobieństw stanów:

$$\frac{dP(d,k,t)}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mu_i p_{ij}\min\left(d_i(t),k_i\right)\left[P\left(d,k+I_i-I_j,t\right)-P\left(d,k,t\right)\right]+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mu_i p_{ij}\left[\min\left(d_i(t),k_i(t)+1\right)-\min\left(d_i(t),k_i(t)\right)\right]P\left(d,k+I_i-I_j,t\right)+$$
$$+\mu_0\left(K-\sum_{i=1}^{n}k_i(t)\right)\left[P\left(d,k-I_j,t\right)-P\left(d,k,t\right)\right]+\mu_0 P\left(d,k-I_j,t\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\mu_i p_{i0}\min\left(d_i(t),k_i(t)\right)\left[P\left(d,k+I_i,t\right)-P\left(d,k,t\right)\right]+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\mu_i p_{i0}\left[\min\left(d_i(t),k_i(t)+1\right)-\min\left(d_i(t),k_i(t)\right)\right]P\left(d,k+I_i,t\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\gamma_i\left(m_i-d_i(t)\right)\left[P\left(d-I_j,k,t\right)-P\left(d,k,t\right)\right]+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i P\left(d-I_i,k,t\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\beta_i\, d_i(t)\left[P\left(d+I_i,k,t\right)-P\left(d,k,t\right)\right]+\sum_{i=1}^{n}\beta_i P\left(d+I_i,k,t\right). \qquad (2)$$

3. Układy równań różniczkowych dla średnich charakterystyk

Rozwiązanie analityczne podanego układu jest kłopotliwe. Dlatego rozpatrzmy ważny przypadek dużej liczby zgłoszeń w sieci $K >> 1$. Aby znaleźć rozkład wektora losowego $z(t)$, przejdziemy do zmiennych względnych, biorąc pod uwagę wektor

$$\xi(t)=\left(\frac{d_1(t)}{K},\frac{d_2(t)}{K},...,\frac{d_n(t)}{K},\frac{k_1(t)}{K},\frac{k_2(t)}{K},...,\frac{k_n(t)}{K}\right).$$

Możliwe wartości tego wektora przy ustalonym t należą do zbioru ograniczonego domkniętego

$$G=\left\{(y,x)=\left(y_1,y_2,...,y_n,x_1,x_2,...,x_n\right):\; x_i\ge 0,\; \sum_{i=1}^{n}x_i\le 1,\; 0\le y_i\le\frac{m_i}{K}\right\}, \qquad (3)$$

w którym one leżą w węzłach $2n-$wymiarowej siatki na odległości $\varepsilon=1/K$ jedna od drugiej. Po wzrastaniu K „gęstość ładunku” zbioru G możliwymi współrzędnymi wektora $\xi(t)$ wzrasta i można zauważyć, że ma on rozkład ciągły o gęstości $p(y,x,t)$, przy tym $K^{2n}P(d,k,t)\xrightarrow[K\to\infty]{}p(y,x,t)$, gdy $K\to\infty$. Możemy więc stosować tu aproksymację funkcji $P(d,k,t)$, korzystając z relacji $K^{2n}P(d,k,t)=K^{2n}P(yK,xK,t)=p(y,x,t)$, $(y,x)\in G$.

Zaznaczmy, że $e_i = \varepsilon I_i$, $i = \overline{1,n}$, $c(b) = \begin{cases} 1, b > 0 \\ 0, b \le 0 \end{cases}$. Zauważmy, że

$$\min(b, a+1) = \min(b, a) + c(b-a),\ c(b-a) = \frac{\partial \min(b, a)}{\partial a}, \tag{4}$$

ponieważ $\min(b,a) = \begin{cases} a, b \ge a \\ b, b < a \end{cases}$. Używając względnych zmiennych $y_i = \dfrac{d_i}{K}$, $x_i = \dfrac{k_i}{K}$, $l_i = \dfrac{m_i}{K}$, $i = \overline{1,n}$, z wyrażenia (4) i tego faktu, że $\varepsilon \to 0$, gdy $K \to \infty$, możemy układ (2) zapisać w postaci:

$$\frac{\partial p(y,x,t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K\mu_i p_{ij} \min(y_i, x_i)\left[p(y, x+e_i-e_j, t) - p(y,x,t)\right] +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mu_i p_{ij} \frac{\partial \min(y_i, x_i)}{\partial x_i} p(y, x+e_i-e_j, t) +$$

$$+K\mu_0\left(1-\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left[p(y,x-e_j,t) - p(y,x,t)\right] + \mu_0\left(py, x-e_j, t\right) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} K\mu_i p_{i0} \min(y_i, x_i)\left[p(y, x+e_i, t) - (py, x, t)\right] +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} \mu_i p_{i0} \frac{\partial \min(y_i, x_i)}{\partial x_i} p(y, x+e_i, t) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} K\gamma_i (l_i - y_i)\left[p(y-e_i, x, t) - p(y,x,t)\right] + \sum_{j=1}^{n} \gamma_i p(y-e_i, x, t) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} K\beta_i y_i \left[p(y+e_i, x, t) - p(y,x,t)\right] + \sum_{i=1}^{n} \beta_i p(y+e_i, x, t). \tag{5}$$

Prawą stronę (5) zapiszemy z dokładnością do $o(\varepsilon^2)$. Jeżeli $p(y,x,t)$ jest dwukrotnie ciągła różniczkowalna względem y i x, to prawidłowe są relacje:

$$p(y, x \pm e_i, t) = p(y,x,t) \pm \varepsilon \frac{\partial p(y,x,t)}{\partial x_i} + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2 p(y,x,t)}{\partial x_i^2} + o(\varepsilon^2),$$

$$p(y, x+e_i-e_j, t) = p(y,x,t) + \varepsilon\left(\frac{\partial p(y,x,t)}{\partial x_i} - \frac{\partial p(y,x,t)}{\partial x_j}\right) +$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 p(y,x,t)}{\partial x_i^2} - 2\frac{\partial^2 p(y,x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 p(y,x,t)}{\partial x_j^2}\right) + o(\varepsilon^2),$$

$$p(y \pm e_i, x, t) = p(y,x,t) \pm \varepsilon \frac{\partial p(y,x,t)}{\partial y_i} + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2 p(y,x,t)}{\partial y_i^2} + o(\varepsilon^2),\ i = \overline{1,n}. \tag{6}$$

Po użyciu powyższych równań przy założeniu $\varepsilon K = 1$ otrzymano, że gęstość $p(y,x,t)$ z dokładnością do $o(\varepsilon^2)$ spełnia równanie Kołmogorowa-Fokkera-Plancka:

$$\frac{\partial p(y,x,t)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(A_i^{(1)}(y)\,p(y,x,t)\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_i^{(2)}(y,x)\,p(y,x,t)\right) +$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\left(B_{ij}^{(1)}(y)\,p(y,x,t)\right) + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(B_{ij}^{(2)}(y,x)\,p(y,x,t)\right), \tag{7}$$

gdzie:

$$A_i^{(1)}(y) = \gamma_i(l_i - y_i) - \beta_i y_i, \tag{8}$$

$$A_i^{(2)}(y,x) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j p_{ji}^* \min(y_j, x_j) + \mu_0 p_{0i}\left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right),\ i = \overline{1,n}; \tag{9}$$

$$p_{ji}^* = \begin{cases} p_{ji},\ j \neq i, \\ p_{ii} - 1,\ j = i, \end{cases} \quad B_{ii}^{(1)}(y) = \gamma_i(l_i - y_i) + \beta_i y_i,\ B_{ij}^{(1)}(y) = 0,\ \ i \neq j;$$

$$B_{ii}^{(2)}(y,x) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j p_{ji}^{**} \min(y_j, x_j) + \mu_0 p_{0i}\left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right),$$

$$p_{ji}^{**} = \begin{cases} p_{ji},\ j \neq i, \\ 1 - p_{ii},\ j = i, \end{cases} \quad B_{ij}^{(2)}(y,x) = -\mu_i p_{ij} \min(y_i, x_i),\ i \neq j.$$

Ponieważ gęstość $p(y,x,t)$ spełnia równanie Kołmogorowa-Fokkera-Plancka, $A_i^{(1)}(y)$ i $A_i^{(2)}(y,x)$ są funkcjami przedziałami liniowymi względem y, x, więc zgodnie z [5] z dokładnością do $O(\varepsilon^2)$ możemy wyznaczyć układy równań dla $w_i(t) = M\left\{\frac{d_i(t)}{K}\right\}$, $n_i(t) = M\left\{\frac{k_i(t)}{K}\right\}$:

$$\frac{dw_i(t)}{dt} = A_i^{(1)}(w(t)) = \gamma_i(l_i - w_i(t)) - \beta_i w_i(t),\ i = \overline{1,n}, \tag{10}$$

$$\frac{dn_i(t)}{dt} = A_i^{(2)}(w(t), n(t)) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \mu_j p_{ji}^* \min(w_j(t), n_j(t)) + \mu_0 p_{0i}\left(1 - \sum_{i=1}^{n} n_i(t)\right),\ i = \overline{1,n}. \tag{11}$$

Prawe strony układu (11) są funkcjami ciągłymi i przedziałami liniowymi. Taki układ możemy rozwiązać sposobem segmentacji przestrzeni fazowej i uzyskania rozwiązania układu (11) w obszarze liniowości prawej strony.

Niech $\Omega(t)=\{1, 2, ..., n\}$ będzie zbiorem wskaźników składowych wektota $n(t)$. Podzielimy zbiór $\Omega(t)$ na dwa zbiory rozłączne $\Omega_0(t)$ i $\Omega_1(t)$:

$$\Omega_0(t)=\{i: w_i(t)<n_i(t)\le 1\},\ \Omega_1(t)=\{j: 0\le n_j(t)\le w_j(t)\}.$$

Każdy podział określa rozłączne obszary $G_\tau(t)$ zbioru

$$G(t)=\left\{n(t): n_i(t)\ge 0, \sum_{i=1}^{n} n_i(t)\le 1\right\}$$

tak, że:

$$G_\tau(t)=\left\{n(t): w_i(t)<n_i(t)\le 1, i\in\Omega_0(t); 0\le n_j(t)\le w_j(t), j\in\Omega_1(t); \sum_{c=1}^{n} n_c(t)\le 1\right\},$$

Wtedy układ równań (11) przyjmuje postać

$$\frac{dn_i(t)}{dt}=\sum\nolimits_0 \mu_j p_{ji}^* w_j(t)+\sum\nolimits_1 \mu_j p_{ji}^* n_j(t)+\mu_0 p_{0i}\left(1-\sum_{i=1}^{n} n_i(t)\right),\ i=\overline{1,n}, \tag{12}$$

dla każdego obszaru $G_\tau(t)$, gdzie $\sum_0=\sum\limits_{j\in\Omega_0(t)}$, $\sum_1=\sum\limits_{j\in\Omega_1(t)}$.

Rozwiązanie układów równań (10), (12) pozwala na uzyskanie średniej liczby zgłoszeń i nieuszkodzonych kanałów obsługi w każdym systemie kolejkowym sieci. Na przykład, jeśli systemy sieci działają w taki sposób, że w nich w średnim nie ma kolejek, tj. $\min\left(w_i(t), n_i(t)\right)=n_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, to układ równań możemy zapisać w postaci

$$\frac{dn(t)}{dt}=An(t)+Q(t),$$

gdzie $n^T(t)=\left(n_1(t), n_2(t), \ldots, n_n(t)\right)$, a jego rozwiązaniem będzie:

$$n(t)=e^{At}n(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Q(\tau)d\tau.$$

4. Wnioski

Dalsze badania w tym kierunku mogą być związane z wykorzystaniem $n_i(t)$, $w_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, przy rozwiązaniu zadań optymalizacji. Jako kryterium optymalizacji można tu wziąć

$$W(T, m_1, m_2, \ldots, m_n)=\frac{1}{T}\int_0^T \sum_{i=1}^{n}\left(a_i n_i(t)+b_i w_i(t)\right)dt \to \min_{m_1, m_2, \ldots, m_n},$$

gdzie a_i, b_i są współczynnikami kosztowymi.

BIBLIOGRAFIA

1. Wiszniewski W.: Podstawy teoretyczne projektowania sieci komputerowych. Technosfera, Moskwa 2003 (w jęz. ros.).
2. Matałycki M., Tikhonenko O, Kołuzajewa K.: Systemy i sieci obsługi masowej: analiza i zastosowania. Wyd. GrUP, Grodno 2011 (w jęz. ros.).
3. Medvedev G. A.: Zamknięte systemy kolejkowe i ich optymalizacja. Proceedings of the USSR Academy of Sciences: Engineering Cybernetics, 1978, № 6, s. 199÷203 (w jęz. ros.).
4. Medvedev G. A.: O optymalizacji zamkniętych systemów kolejkowych. Proceedings of the USSR Academy of Sciences: Engineering Cybernetics, 1975, nr 6, s. 65÷73 (w jęz. ros.).
5. Parajew Y. I.: Wprowadzenie do statystycznych procesów kontroli i filtracji. Sov. Radio, Moskwa 1976 (w jęz. ros.).

Wpłynęło do Redakcji 6 marca 2012 r.

Abstract

The Markov network with unreliable queueing systems is investigated. The service channels of systems are exposed to random failure, besides the time of the proper functionality and the time of reconstruction of each channel of system has the exponential distribution with distinctive parameters. The system of difference-differential equations of Kolmogorov for the states probabilities is compiled. Asymptotic analysis of the given network at the large number of messages is realized. The partial differential equation for probability density function of the vector of states is deduced. The systems of ordinary differential equations for average number of messages and serviceable channels of network systems are received. For such systems it is possible to discover solution and to use in optimization problems.

Adresy

Michał MATAŁYCKI: Politechnika Częstochowska, Instytut Matematyki,
ul. Dąbrowskiego 73, 42-100 Częstochowa, Polska, m.matalytski@gmail.com

Swiatosław STATKIEWICZ: Grodzieński Uniwersytet Państwowy, ul. Ełizy Orzeszko 22,
230023 Grodno, Białoruś, sstat@grsu.by