STUDIA INFORMATICA 2013
Volume 34 Number 3 (113)

Mikhail MATALYTSKI
Politechnika Częstochowska, Instytut Matematyki

ANALIZA ASYMPTOTYCZNA WYKŁADNICZEJ SIECI KOLEJKOWEJ Z PARAMETRAMI ZALEŻNYMI OD CZASU

Streszczenie. W artykule przeanalizowano zamkniętą wykładniczą sieć kolejkową z dużą liczbą zgłoszeń i parametrami zależnymi od czasu. Otrzymano układ równań różnicowo-różniczkowych dla prawdopodobieństw stanów i układ równań różniczkowych do wyznaczenia średniej liczby zgłoszeń w systemach sieci. Obliczono przykład numeryczny.

Słowa kluczowe: zamknięnta sieć kolejkowa, aproksymacja

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF MARKOV QUEUEING NETWORK WITH TIME-DEPENDENT PARAMETERS

Summary. The closed exponentional queueing network with the large number of messages and the time-dependent parameters is investigated. We have received the system of difference-differential equations for the state probabilities and system of differential equations for the average number of messages of network systems. The modeling example for their calculation is presented.

Keywords: closed queueing network, approximation

1. Wprowadzenie

Sieci kolejkowe często są używane jako modele stochastyczne systemów i sieci komputerowych [1], [2], [3]. Aproksymacja dyfuzyjna jest często stosowaną, klasyczną metodą, opisaną m.in. w [1], [4], [5] dla modeli pojedynczych systemów komputerowych oraz ich sieci.

Rozpatrzymy wykładniczą sieć kolejkową, składającą się z $n+1$ systemów obsługi masowej (SOM) $S_0, S_1, ..., S_n$, w której obsługiwane jest K zgłoszeń jednego typu. Parametry obsługi zależą od czasu t, $t \in [0,T]$. Liczba kanałów obsługi w i-tym systemie S_i, w chwili czasu t, to funkcja całkowita czasu $m_i(t)$, $i=\overline{0,n}$. Czas obsługi zgłoszeń w każdym kanale systemu S_i ma rozkład wykładniczy z parametrem $\mu_i(t)$, $i=\overline{0,n}$. Przyjmujemy, że dyscypliną obsługi zgłoszeń we wszystkich systemach sieci jest FIFO. Po zakończeniu obsługi w systemie S_i, w chwili t, zgłoszenie natychmiast przenosi się do systemu S_j z prawdopodobieństwem $p_{ij}(t)$, $0\le p_{ij}(t)\le 1$, $\sum_{j=0}^{n} p_{ij}=1$, $i,j=\overline{0,n}$.

W artykule otrzymano układy równań różniczkowych dla prawdopodobieństw stanów i średniej liczby zgłoszeń w systemach sieci przy dużej wartości K. Technika wyprowadzenia tych równań różni się od zwykłej techniki aproksymacji dyfuzyjnej [1]. Rozwiązania wskazanych układów można zastosować w zagadnieniach optymalizacji modeli sieci komputerowych [2]. Zauważmy, że wspomniana technika była po raz pierwszy podana w pracy [6], a później w pracy [7].

2. Układ równań dla prawdopodobieństw stanów

Stan sieci w chwili czasu t można opisać wektorem losowym

$$k(t)=\left(k_1(t),k_2(t),\dots,k_n(t)\right), \tag{1}$$

gdzie: $k_i(t)$ są liczbami zgłoszeń w systemie S_i, w czasie t, $0\le k_i(t)\le K$, $i=\overline{1,n}$, $t\in[0,+\infty)$; $k_0(t)=K-\sum_{i=1}^{n}k_i(t)$ jest liczbą zgłoszeń w systemie S_0, w chwili t.

Wektor $k(t)$ tworzy $n-$wymiarowy łańcuch Markowa z czasem ciągłym i skończoną liczbą stanów. Oznaczmy przez

$$P(k,t)=P\left(k(t)=k\right)$$

prawdopodobieństwa stanów sieci, gdzie $k=(k_1,k_2,\dots,k_n)$, $0\le k_i\le K$, $i=\overline{1,n}$. Załóżmy, że I_i jest $n-$wektorem z zerowymi współrzędnymi oprócz i-tej, która jest równa 1. Możliwymi przejściami łańcucha Markowa $k(t)$ do stanu $k(t+\Delta t)=(k,t+\Delta t)$ w czasie Δt są:

- ze stanu $(k+I_i-I_j,t)$ z prawdopodobieństwem

$$\mu_i(t)\,p_{ij}(t)\min\left(m_i(t),k_i(t)+1\right)\Delta t+o(\Delta t),\ i,j=\overline{0,n};$$

- ze stanu (k,t) z prawdopodobieństwem

$$1-\sum_{i=0}^{n}\mu_i(t)\min\left(m_i(t),k_i(t)\right)\Delta t+o(\Delta t);$$

- ze wszystkich innych stanów z prawdopodobieństwem $o(\Delta t)$.

Korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite wypiszemy układ równań różnicowych dla prawdopodobieństw stanów:

$$P(k,t)=\sum_{i,j=0}^{n}\mu_i(t)\,p_{ij}(t)\min\big(m_i(t),k_i(t)+1\big)P\big(k+I_i+I_j,t\big)\Delta t+$$
$$+\left(1-\sum_{i,j=0}^{n}\mu_i(t)\,p_{ij}(t)\min\big(m_i(t),k_i(t)\big)\Delta t\right)P(k,t)+o(\Delta t), \qquad (2)$$

skąd po przejściu granicznym przy $\Delta t\to 0$ otrzymujemy układ równań różnicowo-różniczkowych Kołmogorowa dla prawdopodobieństw stanów:

$$\frac{dP(k,t)}{dt}=\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i(t)\,p_{ij}(t)\min\big(m_i(t),k_i\big)\Big[P\big(k+I_i-I_j,t\big)-P(k,t)\Big]+$$
$$+\sum_{i,j=0}^{n}\Big(\mu_i(t)\,p_{ij}(t)\Big(\min\big(m_i(t),k_i(t)+1\big)-\min\big(m_i(t),k_i(t)\big)\Big)\Big)P\big(k+I_i-I_j,t\big). \qquad (3)$$

3. Układy równań różniczkowych dla średnich charakterystyk

Rozwiązanie analityczne podanego układu (3) jest kłopotliwe. Dlatego przeanalizujemy ważny przypadek szczególny – dużej liczby zgłoszeń w sieci $K>>1$. Aby znaleźć rozkład wektora losowego $k(t)$, przejdziemy do zmiennych względnych biorąc pod uwagę wektor

$$\xi(t)=\left(\frac{k_1(t)}{K},\frac{k_2(t)}{K},\dots,\frac{k_n(t)}{K}\right).$$

Możliwe wartości tego wektora, przy ustalonym t, należą do ograniczonego zbioru domkniętego

$$G=\left\{(x)=(x_1,x_2,\dots,x_n):\ \ x_i\ge 0,\ \ \sum_{i=1}^{n}x_i\le 1\right\}, \qquad (4)$$

w którym znajdują się one w węzłach $n-$wymiarowej siatki w odległości $\varepsilon=1/K$ $\varepsilon=\frac{1}{K}$ jedna od drugiej. Ze wzrostem K „gęstość ładunku” zbioru G z możliwymi współrzędnymi wektora $\xi(t)$ rośnie oraz możemy zauważyć, że wektor ten ma rozkład ciągły o gęstości $p(x,t)$, przy czym $K^nP(k,t)\to p(x,t)$ $K^{2n}P(d,t,k)\to p(y,x,t)$ gdy $K\to\infty$ $K\to\infty$. Możemy więc aproksymować funkcje $P(k,t)$ korzystając z relacji $K^nP(k,t)=K^nP(xK,t)=p(x,t)$,
$x\in G$ $K^{2n}P(d,t,k,)=K^{2n}P(yK,xK,t,)=p(y,x,t,),\,(y,x,)\epsilon G.$

Zaznaczymy, że $e_i = \varepsilon I_i$, $i = \overline{1,n}$, $c(b) = \begin{cases} 1, b > 0 \\ 0, b \le 0 \end{cases}$ i zauważmy, że

$$\min(b, a+1) = \min(b, a) + c(b-a), \; c(b-a) = \frac{\partial \min(b, a)}{\partial a}, \tag{5}$$

ponieważ $\min(b,a) = \begin{cases} a, b \ge a \\ b, b < a \end{cases}$. Używając względnych zmiennych $x_i = \frac{k_i}{K}$, $l_i(t) = \frac{m_i(t)}{K}$, $i = \overline{1,n}$, z wyrażenia (5) i tego faktu, że $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon \to 0$gdy $K \to \infty$, układ (3) możemy zapisać
w postaci:

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} K\mu_i(t) p_{ij}(t) \min(l_i(t), x_i)\left[p(x+e_i-e_j,t) - p(x,t)\right] +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \mu_i(t) p_{ij}(t) \frac{\partial \min(l_i(t), x_i)}{\partial x_i} p(x+e_i-e_j,t). \tag{6}$$

Prawą stronę (6) zapiszemy z dokładnością do $o(\varepsilon^2)$. Załóżmy, że funkcja $p(x,t)$ jest dwukrotnie ciągle różniczkowalna względem x_i, $i = \overline{1,n}$, $\frac{\partial p(x,t)}{\partial x_0} = 0$. Wtedy zachodzi relacja:

$$p(x+e_i-e_j,t) = p(x,t) + \varepsilon\left(\frac{\partial p(x,t)}{\partial x_i} - \frac{\partial p(x,t)}{\partial x_j}\right) +$$
$$+ \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x_i^2} - 2\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x_j^2}\right) + o(\varepsilon^2), \; i, j = \overline{1,n}. \tag{7}$$

Po uwzględnieniu równań (6) i (7) przy założeniu $\varepsilon K = 1$ otrzymujemy, że gęstość $p(x,t)$ z dokładnością do $O(\varepsilon^2)$ spełnia równanie Kołmogorowa-Fokkera-Planka:

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_i(x,t) p(x,t)\right) + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(B(x,t) p(x,t)\right), \tag{8}$$

gdzie:

$$A_i(x_i,t) = \sum_{j=0}^{n} \mu_j(t) p_{ji}^* \min(l_j(t), x_j), \tag{9}$$

$$B_{ii}(x,t) = \sum_{j=0}^{n} \mu_j(t) p_{ji}(t) \min(l_j(t), x_j), \; i = j, \tag{10}$$

$$B_{ij}(x,t) = -\mu_i(t) p_{ij}(t) \min(l_i(t), x_i), \; i \ne j,$$

$$p_{ji}^*(t) = p_{ji}(t), \; i \ne j; \; p_{ii}^*(t) = -1 + p_{ii}(t), \; i = j.$$

Wynika z tego, że $A_i(x,t)$ i $B_{ij}(x,t)$ są funkcjami przedziałami liniowymi względem x, a więc (patrz [8]) z dokładnością do $O(\varepsilon^2)$ możemy wyznaczyć układy równań dla $n_i(t) = E\left\{\frac{k_i(t)}{K}\right\}$:

$$\frac{dn_i(t)}{dt} = A_i(n(t)) = \sum_{j=0}^{n} \mu_j(t) p_{ji}^*(t) \min(l_j(t), n_j(t)),\ i = \overline{1,n}. \tag{11}$$

Prawe strony układu (11) są funkcjami ciągłymi i przedziałami liniowymi. Taki układ możemy rozwiązać sposobem segmentacji przestrzeni fazowej i uzyskania rozwiązania układu (11) w obszarze liniowości prawej strony.

Niech $\Omega(t) = \{1, 2, ..., n\}$ będzie zbiorem wskaźników składowych wektota $n(t)$. Zbiór $\Omega(t)$ podzielimy na dwa zbiory rozłączne $\Omega_0(t)$ i $\Omega_1(t)$:

$$\Omega_0(t) = \{i : w_i(t) < n_i(t) \le 1\},\ \Omega_1(t) = \{j : 0 \le n_j(t) \le w_j(t)\}.$$

Każdy podział określa rozłączne obszary $G_\tau(t)$ zbioru

$$G(t) = \left\{n(t) : n_i(t) \ge 0, \sum_{i=1}^{n} n_i(t) \le 1\right\},$$

tak że

$$G_\tau(t) = \left\{n(t) : l_i(t) < n_i(t) \le 1, i \in \Omega_0(t); 0 \le n_j(t) \le l_j(t), j \in \Omega_1(t); \sum_{c=1}^{n} n_c(t) \le 1\right\},$$

$$\tau = 1, 2, \ldots, 2^n,\ \bigcup_{\tau=1}^{2^n} \qquad).$$

Wtedy układ równań (11) możemy zapisać dla każdego obszaru $G_\tau(t)$. Na przykład, w obszarze D: $\Omega_1(t) = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\Omega_0(t) = \{\varnothing\}$, który odpowiada przypadkowi, gdy średnio nie ma kolejek w SOM S_i, $i = \overline{1,n}$, układ równań (11) ma postać:

$$n_i'(t) = \mu_0 p_{0i}^* l_0(t) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j(t) p_{ji}^*(t) n_j(t),\ i = \overline{1,n}. \tag{12}$$

Rozwiązanie układów równań (11), (12) pozwala na uzyskanie średniej liczby zgłoszeń w każdym systemie kolejkowym sieci $Kn_i(t)$, $i = \overline{1,n}$.

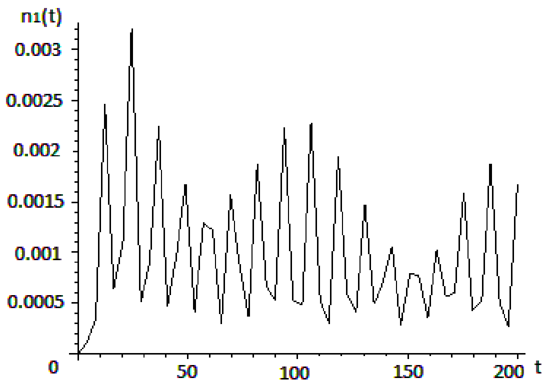
4. Przykład numeryczny

Rozpatrzymy sieć kolejkową z $n=3$, $K=20000$. Załóżmy, że $n_i(0)=0$, $i=\overline{1,n}$, $n_0(0)=1$, $p_{03}(t)=1-p_{01}(t)$, $p_{10}(t)=1-p_{12}(t)$, $p_{21}(t)=1-p_{23}(t)$, $p_{32}(t)=1-p_{30}(t)$, $p_{01}(t)=p_{12}(t)=p_{23}(t)=p_{30}(t)=0.4(\sin t+1)$, $p_{ij}(t)=0$ dla ostatnich i,j, i niech systemy sieci działają w taki sposób, że średnio nie ma w nich kolejek, tj. $\min(l_i(t),n_i(t))=n_i(t)$, $i=\overline{1,n}$. Wówczas układ równań (12) możemy zapisać w postaci:

$$\begin{cases} n_1'(t)=\mu_0(t)p_{01}(t)l_0(t)+\mu_2(t)p_{21}(t)n_2(t)-\mu_1(t)n_1(t), \\ n_2'(t)=\mu_1(t)p_{12}(t)n_1(t)+\mu_3(t)p_{32}(t)n_3(t)-\mu_2(t)n_2(t), \\ n_3'(t)=\mu_0(t)p_{03}(t)l_0(t)+\mu_2(t)p_{23}(t)n_2(t)-\mu_3(t)n_3(t). \end{cases} \tag{13}$$

Niech $\mu_i(t)=i+0.05t$, $i=\overline{0,n}$, $m_0(t)=[5\sin(5t)+10]$, gdzie $[.]-$ część całkowita liczby w nawiasie kwadratowym.

Uklad równań rożniczkowych (13) z zależnymi od czasu współczynikami możemy rozwiązać za pomocą pakietu programowego Maple. Na rys. 1 przedstawiono wykres funkcji $n_1(t)$ w zależności od czasu.



Rys. 1. Zmienność średniej względnej liczby komunikatów w systemie kolejkowym S_1

Fig. 1. Change of average relative number of messages in queueing system S_1

5. Wnioski

Dalsze badania z przedstawionego w artykule tematu należy rozwijać w kierunku otrzymania analogicznych wyników w przypadku, gdy liczba zgłoszeń w sieci $K(t)$ także zależy od czasu.

BIBLIOGRAFIA

1. Wiszniewski W.: Podstawy teoretyczne projektowania sieci komputerowych (Проектирование компьютерных сетей). Technosfera, Moskwa 2003.
2. Matałycki M., Tikhonenko O, Kołuzajewa K.: Systemy i sieci obsługi masowej: analiza i zastosowania (Системы и сети массового обслуживания: анализ и применения). Wyd. GrUP, Grodno 2011.
3. Tikhonenko O.: Metody probabilistyczne analizy systemów informacyjnych. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 2006.
4. Gelenbe E.: On approximate computer system models. Journal of ACM, Vol. 2, No. 2, 1975.
5. Nycz T., Czachórski T.: Badanie skalowalnośći modeli sieci komputerowych wykorzystujących aproksymację dyfuzyjną wraz ze zwiększeniem rozmiaru modelowanej sieci. Studia Informatica, Vol. 33, No. 3A (107), Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice 2012.
6. Medvedev G.A.: Zamknięte systemy kolejkowe i ich optymalizacja (Замкнутые системы массового обслуживания и их оптимизация). Proceedings of the USSR Academy of Sciences: Engineering Cybernetics, 1978, No. 6, s. 199÷203.
7. Matałycki M., Statkiewicz S.: Analiza asymptotyczna wykładniczej sieci zawodnych systemów kolejkowych. Studia Informatica, Vol. 33, No. 3A (107), Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice 2012.
8. Parajew Y.I.: Wprowadzenie do statystycznych procesów kontroli i filtracji (Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации). Sov. Radio, Moskwa 1976.

Wpłynęło do Redakcji 8 lutego 2013 r.

Abstract

The closed Markov network with the large number of one-type messages is investigated. Probabilities of transitions of messages between network systems, number of service channels in systems, intensity of service of messages in them depend on time. The systems of the difference-differential equations for the states probabilities, the partial differential equation for the density of distribution of a vector of relative variables are compiled. With their help the system of the ordinary differential equations with explosive right parts for an average number of messages in the network systems is deduced. With their help the system of the ordinary differential equations with explosive right parts for an average number of messages in the network systems is deduced. The modeling example for their calculation is presented.

Adres

Mikhail MATALYTSKI: Politechnika Częstochowska, Instytut Matematyki,
ul. Dąbrowskiego 73, 42-100 Częstochowa, Polska, m.matalytski@gmail.com