STUDIA INFORMATICA 2014
Volume 35 Number 3 (117)

Mikhail MATALYTSKI
Politechnika Częstochowska, Instytut Matematyki
Viktor NAUMENKO
Grodzieński Uniwersytet Państwowy

ZASTOSOWANIE HM-SIECI KOLEJKOWYCH DLA WYZNACZENIA OBJĘTOŚCI PAMIĘCI SYSTEMÓW INFORMACYJNYCH

Streszczenie. Dla rozwiązywania zagadnienia wyznaczenia objętości pamięci stochastycznych systemów informacyjnych (SI) proponowano nowy model matematyczny oparty na zastosowaniu HM (Howard-Matalytski) sieci kolejkowych z dochodami. Wskazany model pozwala na uwzględnienie zależności czasu opracowania komunikatu od jego objętości, a także możliwość zmiany objętości komunikatu z ciągiem czasu. Otrzymano wyrażenia dla wartości oczekiwanych objętości komunikatów w węzłach SI.

Słowa kluczowe: HM-sieci, sieci informacyjne, objętości zgłoszeń

HM-QUEUEING NETWORK APPLICATIONS TO DETERMINE THE MEMORY VOLUME OF INFORMATION SYSTEMS

Summary. To solve the problem of determining of memory volume of stochastic information (IS) systems of various configurations is proposed to use a new model based on the use of HM-queueing network, which takes into account the relationship between the volume of messages and the time of processing nodes in the system, the possibility of changing with time the volume of messages. It is obtained an expressions for the expected volumes of messages in the nodes IS.

Keywords: HM-networks, information networks, the volumes of messages

1. Wprowadzenie

Celem pracy jest pokazanie możliwości zastosowań HM-sieci do rozwiązywania zadań projektowania SI, tj. takich systemów, w których obiektem przekształceń jest informacja przybywająca porcjami w postaci komunikatów.

Zilustrowano wskazane możliwości na przykładzie problemu wyznaczenia objętości pamięci buforowej węzłów sieci telekomunikacyjnej, w której odbywa się przekształcenie i transmisja komunikatów.

Zauważono, że rozpatrywane zagadnienie jest jednym z podstawowych przy projektowaniu routerów lub centrów sieci telekomunikacyjnych [1]. Nieuwzglednienie zależności czasów opracowania komunikatów od ich objętości może doprowadzić do poważnych błędów przy wyznaczeniu objętości pamięci buforowej w SI.

Realizacja wskazanego celu w artykule w sytuacji ogólnej polega na użyciu HM-sieci kolejkowej z dochodami [2]. Zgłoszenie przy przejściu z jednego systemu obsługi masowej (SOM) do drugiego przynosi ostatniemu SOM pewien dochód (ktory równy jest objętości wskazanego zgłoszenia), a dochód (objętość) pierwszego SOM zmniejsza się o tę samą wartość.

Rozważono otwartą wykładniczą sieć kolejkową ze zgłoszeniami jednego typu, która składa się z n jednoliniowych systemów obsługi: $S_1, S_2, ..., S_n$.

Stan sieci określa się za pomocą wektora

$$k(t) = (k_1(t), k_2(t),..., k_n(t)),$$

gdzie $k_i(t)$ jest liczbą zgłoszeń w systemie S_i w chwili czasu t, $i = \overline{1,n}$. Zauważono, że objętość zgłoszeń obecnych w sieci nie jest parametrem charakteryzującym jej stan.

Wprowadzono system S_0 (otoczenie), który wysyła pojedynczy strumień zgłoszeń. Niech $p_{0i}(t)$ będzie prawdopodobieństwem przejścia zgłoszenia z systemu S_0 do systemu S_i w czasie t, $\sum_{i=1}^{n} p_{0i}(t) = 1$, $p_{ij}(t)$ jest prawdopodobieństwem przejścia zgłoszenia do SOM S_j w czasie t po obsługiwaniu go w SOM S_i, $\sum_{j=0}^{n} p_{ij}(t) = 1$, $i = \overline{1,n}$. Podstawowym naszym celem jest znalezienie wartości oczekiwanych sumarycznych objętości zgłoszeń w systemach sieci w chwili czasu t, jeżeli znane są objętości sumaryczne zgłoszeń w początkowej chwili $t = 0$.

2. Analiza oczekiwanych objętości zgłoszeń w systemach sieci

Objętość sumaryczną zgłoszeń w i-tym SOM w czasie $t+\Delta t$ można zapisać w postaci:

$$V_i(t+\Delta t) = V_i(t) + \Delta V_i(t,\Delta t), \tag{1}$$

gdzie $\Delta V_i(t,\Delta t)$ jest zmianą objętości zgłoszeń systemu S_i w przedziale czasu $[t, t+\Delta t)$. W celu wyznaczenia charakterystyk rozkładu tej zmiennej losowej (ZL) zapisano prawdopodobieństwa warunkowe zdarzeń, których zachodzenie jest możliwe w czasie Δt, i zmiany sumarycznych objętości zgłoszeń związane z tymi zdarzeniami:

- z prawdopodobieństwem $\lambda(r_{0i}(t))p_{0i}(t)\Delta t + o(\Delta t)$ system S_i w ciągu czasu Δt otrzyma zgłoszenie z systemu S_0 o objętości $r_{0i}(t)$, gdzie $\lambda(r_{0i}(t))$ – intensywność wchodzącego do SOM S_i strumienia zgłoszeń o objętości $r_{0i}(t)$, $r_{0i}(t)$ jest ZL o skończonej wartości oczekiwanej $a_{0i}(t)$, tj. $E\{r_{0i}(t)\} = a_{0i}(t)$, i skończonym drugim momencie $E\{r_{0i}^2(t)\} = a_{20i}(t)$, $i = \overline{1,n}$;
- jeżeli w czasie t w SOM S_i znajduje się zgłoszenie o objętości $R_{i0}(t)$, to z prawdopodobieństwem $\mu_i(R_{i0}(t))u(k_i(t))p_{i0}(t)\Delta t + o(\Delta t)$ ten system przesyła wskazane zgłoszenie do otoczenia, i tym samym redukuje objętość sumaryczną w S_i o wielkość $R_{i0}(t)$), gdzie $E\{R_{i0}(t)\} = b_{i0}(t)$, $E\{R_{i0}^2(t)\} = b_{2i0}(t)$, $i = \overline{1,n}$, $u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \le 0; \end{cases}$
- jeżeli w chwili czasu t w SOM S_i znajduje się zgłoszenie o objętości $r_{ij}(t)$, to z prawdopodobieństwem $\mu_i(r_{ij}(t))u(k_i(t))p_{ij}(t)\Delta t + o(\Delta t)$ zgłoszenie przechodzi z systemu S_i do systemu S_j (w ten sposób wzrasta objętość sumaryczna SOM S_j o wielkość $r_{ij}(t)$ i maleje objętość sumaryczna SOM S_j o tę samą wielkość), gdzie $E\{r_{ij}(t)\} = a_{ij}(t) < \infty$, $E\{r_{ij}^2(t)\} = a_{2ij}(t) < \infty$, $i, j = \overline{1,n}$, $i \ne j$;
- z prawdopodobieństwem

  $$1 - \left[\lambda(r_{0i}(t))p_{0i}(t) + \mu_i(R_{i0}(t))u(k_i(t)) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{n} \mu_j(r_{ji}(t))u(k_j(t))p_{ji}(t) \right] \Delta t + o(\Delta t)$$

  stan systemu S_i nie zmieni się w przedziale czasowym $[t, t+\Delta t)$, w tym przypadku objętość sumaryczna SOM S_i wzrasta (lub zmniejsza się) o $r_i(t)\Delta t$, gdzie $E\{r_i(t)\} = c_i(t)$, $i = \overline{1,n}$.

Założono także, że ZL $r_{0i}(t)$, $R_{i0}(t)$, $r_{ji}(t)$ są niezależne od ZL $r_i(t)$.

Założono, że intensywność wchodzącego strumienia zgłoszeń i intensywności obsługiwania zgłoszeń w systemach liniowo zależą od ich objętości, tj.

$$\lambda(r_{0i}(t))=\lambda(t)r_{0i}(t)\,,\ \mu_i(R_{i0}(t))=\mu_i R_{i0}(t)\,,\ \mu_j(r_{ji}(t))=\mu_j r_{ji}(t)\,,\ i,j=\overline{1,n}\,.$$

Oprócz tego założono, że wszystkie SOM funkcjonują w umowach dużego obciążenia, tj. w każdej chwili czasu mamy $k_i(t)>0$, w przypadku tym $u(k_i(t))=1$, $i=\overline{1,n}$. W monografji [3] zaznaczono, że w takich umowach często funkcjonują bezprzewodowe sieci lokalne, w których kolejki pakietów do wszystkich stacji zawsze są niepuste. W zaznaczonych warunkach otrzymujemy:

$$\Delta V_i(t,\Delta t)=\begin{cases} r_{0i}(t)+r_i(t)\Delta t & \text{z prawdopodob. } \lambda(t)p_{0i}(t)\Delta t+o(\Delta t),\\ -R_{i0}(t)+r_i(t)\Delta t & \text{z prawdopodob. } \mu_i R_{i0}(t)p_{i0}(t)\Delta t+o(\Delta t),\\ r_{ji}(t)+r_i(t)\Delta t & \text{z prawdopodob. } \mu_j r_{ji}(t)p_{ji}(t)\Delta t+o(\Delta t),\\ -r_{ij}(t)+r_i(t)\Delta t & \text{z prawdopodob. } \mu_i r_{ij}(t)p_{ij}(t)\Delta t+o(\Delta t),\\ r_i(t)\Delta t & \text{z prawdopodob. } 1-[\lambda(t)p_{0i}(t)+\mu_i r_{ij}(t)+\\ & \quad +\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\mu_j r_{ji}(t)p_{ji}(t)]\Delta t+o(\Delta t). \end{cases} \tag{2}$$

W praktyce zwykle zachodzi taka sytuacja, że wszystkie realizacje procesów $r_i(t)$, $r_{0i}(t)$, $R_{i0}(t)$, $r_{ji}(t)$ są ograniczone, $i,j=\overline{1,n}$, dlatego $E\{\Delta V_i(t,\Delta t)\}=f_i(t)\Delta t+o(\Delta t)$, gdzie

$$f_i(t)=\lambda(t)a_{20i}(t)p_{0i}(t)+c_i(t)-\mu_i a_{2i0}(t)p_{i0}(t)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\mu_j a_{2ji}(t)p_{ji}(t)-\mu_i\sum_{j=1}^{n}a_{2ij}(t)p_{ij}(t)\,.$$

Niech $v_i(t)=E\{V_i(t)\}$, $i=\overline{1,n}$. Wtedy ze wzoru (1) wynika, że $v_i(t+\Delta t)=v_i(t)+E\{\Delta V_i(t,\Delta t)\}$, z kolei $\dfrac{dv_i(t)}{dt}=f_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, skąd ostatecznie otrzymano:

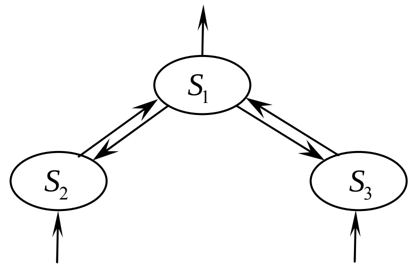
$$v_i(t)=v_{i0}(0)+\int_0^t f_i(\tau)d\tau\,. \tag{3}$$

Przyklad 1. Rozpatrzono system jednoliniowy ($n=1$), dla którego $\lambda(r_{01}(t))=\lambda$, $\mu_1(R_{10}(t))=\mu$, tj. parametry wchodzącego strumienia i parametry czasu obsługi, jak również i parametry objętości zgłoszeń nie zależą od czasu i $r_1(t)=0$. W tym przypadku otrzymano:

$$\Delta V_1(t,\Delta t)=\begin{cases} r_{01} & \text{z prawdopodob. } \lambda\Delta t+o(\Delta t),\\ \text{-}R_{10} & \text{z prawdopodob. } \mu\Delta t+o(\Delta t), \end{cases}$$

$$\frac{dv_1(t)}{dt}=(\lambda-\mu)r_{10}\ \text{ i }\ v_1(t)=v_1(0)+(\lambda-\mu)r_{10}t\,.$$

Przyklad 2. Przeanalizowano zachowanie sieci kolejkowej otwartej, składającej się z $n=3$ SMO (rys. 1) na odcinku czasu $[0,T]$, gdzie $T=10$.



Rys. 1. Struktura sieci
Fig. 1. The network structure

Niech proces stochastyczny $r_{0i}(t)$ będzie zbiorem, składającym się z trzech realizacji $\{\xi_{1i}(t),\xi_{2i}(t),\xi_{3i}(t)\}$ określonych w sposób następujący [4]:

$$\xi_{ki}(t)=k_i t\,,\ P\{r_{0i}(t)=\xi_{ki}(t)\}=\frac{k_i}{6}\,,\ k_i=\overline{1,3}\,.$$

Wtedy $E\{r_{0i}(t)\}=\frac{1}{6}t+\frac{2}{6}\cdot 2t+\frac{3}{6}\cdot 3t=\frac{7}{3}t$, $Var\, r_{0i}(t)=\frac{5}{9}t$, $i=\overline{1,3}$. Analogicznie wyznaczono procesy $R_{i0}(t)$, $r_{ji}(t)$, $i,j=\overline{1,3}$, i niech $b_{i0}(t)=\overline{b}_{i0}t$, $b_{2i0}(t)=\overline{b}_{2i0}t$, $a_{i0}(t)=\overline{a}_{i0}t$, $a_{2i0}(t)=\overline{a}_{2i0}t$, $a_{ji}(t)=\overline{a}_{ji}t$, $a_{2ji}(t)=\overline{a}_{2ji}t$, $i,j=\overline{1,3}$. Oprócz tego $c_i(t)=at+b$, gdzie a i b są pewne nieujemne liczby rzeczywiste, $\mu_1=3$, $\mu_2=\mu_3=1$, $\overline{b}_{i0}=\overline{a}_{ji}=\frac{7}{3}t$, $\overline{b}_{2i0}=\overline{a}_{2i0}=\overline{a}_{2ji}=\frac{5}{9}t$, $v_{i0}(0)=10$, $i,j=\overline{1,3}$. Wyznaczono prawdopodobieństwa przejść zgłoszeń w postaci

$$p_{02}(t)=p_{03}(t)=p_{21}(t)=p_{31}(t)=1,\ p_{12}(t)=p_{13}(t)=0{,}1(\sin t+1)\,,\ p_{10}(t)=1-p_{12}(t)-p_{13}(t)\,.$$

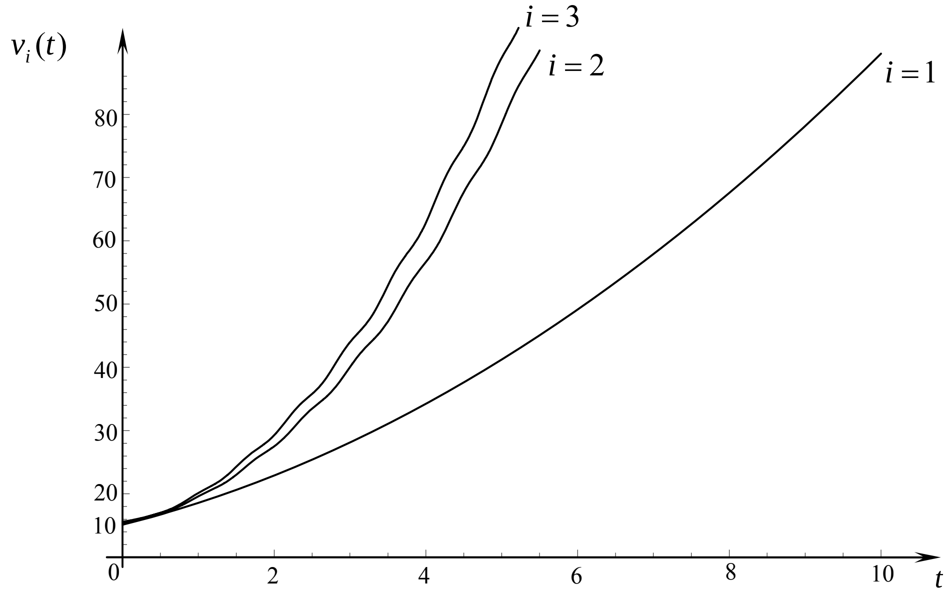
Niech $\lambda(t)=a(\sin\omega t+2)$, gdzie $a=2$, $b=3$, $\omega=5$. Otrzymano wówczas $c_i(t)=2t+3$, $i=\overline{1,3}$. W tym przypadku ze wzoru (3) otrzymano:

$$v_1(t)=10+3t+0{,}44t^2+5{,}55\cdot 10^{-17}(t\cos t-\sin t)\,,$$

$$v_2(t)=10+3t+1{,}91t^2-0{,}17(t\cos t-\sin t)-0{,}22t\cos 5t+0{,}04\sin 5t\,,$$

$$v_3(t)=10+3t+2{,}19t^2-0{,}17(t\cos t-\sin t)-0{,}22t\cos 5t+0{,}04\sin 5t\,.$$

Jako jednostkę wymiaru wybrano jedną godzinę. Wykresy objętości oczekiwanych SOM są przedstawione na rys. 2.



Rys. 2. Oczekiwane objętości systemów sieci
Fig. 2. The expected volumes of network systems

3. Wnioski

Dalsze badania w tym kierunku mogą być związane z analizą dowolnych (niemarkowowskich) sieci ze zgłoszeniami o losowej objętości i sieci z różnymi osobliwościami: z niepewnymi SOM, z ograniczonym czasem oczekiwania zgłoszeń w kolejkach itd.

BIBLIOGRAFIA

1. Tikhonenko O.: Metody probabilityczne analizy systemow informacyjnyh. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 2006.
2. Matalytski M.: On some results in analysis and optimization of Markov networks with incomes and their application. Automation and Remote Control, Vol. 70, №10, 2009, s. 1683 ÷ 1697.
3. Wiszniewski W.: Zagadnienia teoretyczne projektowania systemów komputerowych. Technosfera, Moskwa 2003 (w jęz. ros.).
4. Matalytski M., Khackevich G.: Rachunek prawdopodobieństwa, statystyka matematyczna i procesy stochastyczne. Wyższa Szkola, Minsk 2012 (w jęz. ros.).

Wpłynęło do Redakcji 5 kwietnia 2014 r.

Abstract

HM-queueing network applications to determine the memory volume of information systems. In this article proposed to solve the problem of determining of memory volume of stochastic information (IS) systems of various configurations is proposed to use a new model based on the use of HM-queueing network, which takes into account the relationship between the volume of messages and the time of processing nodes in the system, the possibility of changing with time the volume of messages. In work it is obtained an expressions for the expected volumes of messages in the nodes and volumes variances. It is calculated an example on the computer. Further researching in this area will involve the development of arbitrary networks with messages taking into account their volumes and many-line queueing networks, as well as with different features: with unreliable QS with limited time waiting in the queues, etc.

Adresy

Mikhail MATALYTSKI: Politechnika Częstochowska, Instytut Matematyki,
ul. Dąbrowskiego 73, 42-200 Częstochowa, Polska, m.matalytski@gmail.com
Viktor NAUMENKO: Grodzieński Uniwersytet Państwowy,
ul. E. Orzeszkowej 22, 230023 Grodno, Białoruś, victornn86@gmail.com