



**Politechnika
Śląska**

Synteza i analiza złożonych układów piezoelektrycznych
z uwzględnieniem metod klasycznych i nieklasycznych

Jacek Harazin

Wydział Mechaniczny Technologiczny
Politechnika Śląska

Promotorzy:

Dr hab. inż. Andrzej Wróbel, prof. PŚ. – promotor

Dr hab. inż. Marek Płaczek, prof. PŚ. – promotor pomocniczy

Abstrakt

Utylitarnym celem pracy było opracowanie metody syntezy modeli matematycznych układów piezoelektrycznych. Ponadto weryfikowana jest także możliwość zastosowania metody nieklasycznej, bazującej na grafach oraz algebrze liczb strukturalnych, do analizy układów piezoelektrycznych. Syntezowane modele mechatronicznych układów kaskadowych są odwzorowaniem stosów piezoelektrycznych złożonych z płytek o różnych parametrach geometrycznych lub właściwościach materiałowych. Podstawą syntezy jest metoda Cauera, polegająca na rozbiciu funkcji transmitancji układu na ułamek łańcuchowy. Wielomiany transmitancji utworzono na podstawie przyjmowanych w pracy częstotliwości rezonansowych oraz antyrezonansowych. Współczynniki wyznaczonego metodą Cauera ułamka łańcuchowego odpowiadają parametrom (sztywności oraz masy) elementów wstępnie syntezowanego, mechanicznego układu kaskadowego. Parametry elementów tłumiących określono stosując wzory Rayleigha. Oddziaływania elektrycznej części układu piezoelektrycznego zamodelowano jako siły elektromotoryczne, przyłożone do członów układu mechanicznego. Częstotliwości rezonansowe utworzonych modeli porównano z założonymi w pracy docelowymi częstotliwościami przy pomocy metody macierzowej oraz metody grafów i liczb strukturalnych. Odpowiedzi amplitudowe wyznaczono metodą macierzową, rozwiązując różniczkowe równania ruchu. Analogiczne odpowiedzi obliczono stosując także metodę grafów oraz algebrę liczb strukturalnych. Wyniki analizy odpowiedzi zamodelowanych układów porównano pod kątem wyznaczonych amplitud przemieszczenia poszczególnych stopni swobody. Przygotowane w pracy algorytmy komputerowe przeanalizowano również w kontekście mocy obliczeniowej oraz pamięci RAM potrzebnej do przeprowadzenia obliczeń. Poprzez zastosowanie równań konstytutywnych, przekształcono syntezowane układy mechaniczne do postaci układów mechatronicznych, modelując zachowanie rzeczywistych układów piezoelektrycznych. Stosując zależności fizyczne określające właściwości materiałów piezoelektrycznych, wyznaczono wzory umożliwiające obliczenie charakterystycznych parametrów płytek piezoelektrycznych na bazie utworzonych układów mechatronicznych. Przygotowane modele matematyczne wykorzystano do sporządzenia aplikacji komputerowej przeznaczonej do automatycznej syntezy układów piezoelektrycznych w programie Matlab R2019b. Utworzono także moduł do analizy syntezowanych układów na podstawie metody macierzowej. W ramach weryfikacji dokładności syntezowanych układów utworzono stanowisko laboratoryjne mające na celu zbadanie zachowania płytek piezoelektrycznych oraz

stosów wzbudzanych napięciem elektrycznym o stałej amplitudzie oraz zmiennej częstotliwości. Badaniu poddano zbiór elementów piezoelektrycznych o różnych parametrach geometrycznych. W ramach badania przeprowadzono analizę odpowiedzi amplitudowej w dziedzinie częstotliwości układów pod postacią pojedynczych płytek oraz stosów. Wyniki uzyskane metodami analitycznymi oraz empirycznymi porównano ze sobą i sformułowano na tej podstawie wnioski dotyczące skuteczności zaproponowanej metody syntezy. Na podstawie otrzymanych wyników przedstawiono również propozycje dalszego kierunku pracy naukowej.

Opracowana autorska metoda syntezy układów piezoelektrycznych jest oparta na ciągle rozwijanych przez Pracowników naukowych Politechniki Śląskiej metodach analizy oraz syntezy złożonych układów mechanicznych oraz elektrycznych. W swojej pracy autor uwzględnia również prowadzone międzynarodowe badania dotyczące metod modelowania układów piezoelektrycznych przy użyciu analogii mechanicznych oraz elektrycznych. Niniejsza praca dotyczy zastosowania przedstawionych metod w syntezie i analizie układów piezoelektrycznych złożonych z modułów o różnych parametrach geometrycznych i właściwościach materiałowych. Badania w tym obszarze nie są jeszcze dostatecznie rozwinięte i nadzieją autora jest utworzenie fundamentów nowych metod syntezy złożonych układów piezoelektrycznych przy użyciu płytek o różnych parametrach technicznych.

Prowadzone badania mogą przyczynić się do rozwoju technologii aktywnego tłumienia drgań środków technicznych oraz poszerzenia zastosowań istniejących już technologii w nowych gałęziach przemysłu. Opracowywana metoda syntezy może pozwolić na utworzenie bardziej złożonych układów piezoelektrycznych, zdolnych do działania w szerszym zakresie częstotliwości. Nowe rozwiązania mogą poszerzyć zakres zastosowań układów piezoelektrycznych w przemyśle motoryzacyjnym, automatyce przemysłowej oraz precyzyjnych układach pozycjonowania.

Spis treści

Abstrakt	2
Wykaz oznaczeń stosowanych w pracy	6
1. Wstęp	8
1.1 Wprowadzenie	9
1.2 Analiza stanu wiedzy	15
1.3 Omówienie treści pracy	21
2. Charakterystyka badanych obiektów.....	25
2.1 Zjawisko piezoelektryczne	26
2.2 Rodzaje elementów piezoelektrycznych	27
2.3 Równania konstytutywne układów piezoelektrycznych.....	31
3. Metoda grafów i liczb strukturalnych	38
3.1 Graficzna reprezentacja oddziaływań w układach	39
3.2 Algebra liczb strukturalnych	48
4. Metody syntezy i analizy modeli matematycznych	53
4.1 Synteza podukładu mechanicznego przy użyciu metody Cauera.....	54
4.2 Weryfikacja modelu mechanicznego.....	60
4.3 Synteza elementów tłumiących przy zastosowaniu metody Rayleigh'a	68
4.4 Weryfikacja tłumionego podukładu mechanicznego	72
4.5 Model mechatroniczny przetwornika piezoelektrycznego	96
4.6 Przykłady syntezy parametrów układu elektromechanicznego.....	102
5. Program komputerowy do syntezy i analizy układów piezoelektrycznych	109
5.1 Struktura programu	109
5.2 Synteza właściwości materiałowych	113
5.3 Synteza parametrów geometrycznych	118
5.4 Weryfikacja przeprowadzonej syntezy.....	122
5.5 Funkcja powrotu do początku programu	127

6. Badania doświadczalne	129
6.1 Badanie drgań układu piezoelektrycznego	129
6.2 Analiza rzeczywistych układów piezoelektrycznych	148
6.3 Porównanie wyników syntezy z badaniami empirycznymi	164
7. Wnioski oraz uwagi końcowe	177

Wykaz oznaczeń stosowanych w pracy

T_{ij} – tensor naprężeń [N/m²],

c_{ijkl}^E – tensor sztywności mechanicznej [N/m²],

S_{ijkl}^E – tensor podatności mechanicznej [N/m²],

S_{ij} – skalarny tensor odkształceń,

$e_{ikl} = [e]$ – tensor sztywności piezoelektrycznej [C/m²],

$d_{ikl} = [d]$ – tensor podatności piezoelektrycznej [C/m²],

E_k – wektor natężenia pola elektrycznego [V/m],

D_i – wektor indukcji elektrycznej [C/m²],

ε_{ij}^S – tensor przenikalności elektrycznej [F/m],

K – współczynnik względnej przenikalności elektrycznej (względem próżni),

ρ – gęstość [kg/m³],

m_i – masa elementu dyskretnego [kg],

c_i – sprężystość elementu dyskretnego [N/m],

b_i – tłumienie wiskotyczne elementu dyskretnego [Ns/m],

x_i – przemieszczenie elementu dyskretnego [m],

ω – częstość drgań [rad/s],

f – częstotliwość drgań [Hz],

φ – kąt przesunięcia fazowego [rad],

h – grubość płytki piezoelektrycznej [m],

Δh – odkształcenie płytki piezoelektrycznej [m],

Q – ładunek elektryczny zgromadzony w płytce piezoelektrycznej [C],

C_p – pojemność elektryczna płytki piezoelektrycznej [F],

F_i – siły wzbudzenia dynamicznego układu [N],

Y_i – siły wzbudzenia kinematycznego układu [N],

G_i – siły wzbudzenia aktywnego [N],

W_i – siła wzbudzenia układu piezoelektrycznego [N],

U_c – napięcie zgromadzone wewnątrz płytki piezoelektrycznej [V],

k_{ij} – współczynnik sprzężenia elektromechanicznego układu piezoelektrycznego,

Q_m – współczynnik jakości mechanicznej,

C_m – analogiczna pojemność elektryczna układu mechanicznego [F],

R_m – analogiczna rezystancja układu mechanicznego [Ω],

L_m – analogiczna indukcyjność układu mechanicznego [T],

${}^i X_k$ – oznaczenie wierzchołka grafu,

s_i – oznaczenie krawędzi grafu,

$\frac{Sim}{z}$ – funkcja jednoczesności liczby strukturalnej,

$\frac{det}{z}$ – wyznacznik funkcji jednoczesności,

$\frac{\partial D}{\partial [a]}$ – pochodna liczby strukturalnej „D” po krawędzi „a”,

Λ_i – przebieg amplitudy drgań i-tego stopnia układu [m],

Ω – zbiór częstości charakterystycznych układu,

Ω_o – zbiór częstości rezonansowych,

Ω_e – zbiór częstości antyrezonansowych,

$W(s)$ – odpowiedź układu,

I_p^i – ułamek współczynników stojących przy największych potęgach,

R_p^i – reszta funkcji wymiernej po redukcji ułamka,

$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i}$ – pochodna energii kinetycznej po uogólnionym wektorze prędkości,

$\frac{\partial E_p}{\partial q_i}$ – pochodna energii potencjalnej po uogólnionym wektorze drogi,

$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}$ – pochodna energii rozproszonej po uogólnionym wektorze prędkości,

Q_i – uogólniona siła [N],

α – współczynnik proporcjonalności tłumienia do inercji,

β – współczynnik proporcjonalności tłumienia do sprężystości,

b_{kr} – tłumienie krytyczne układu [Ns/m],

γ – współczynnik tłumienia krytycznego.

1. Wstęp

Drgania występujące podczas pracy urządzeń technicznych są częstym i zazwyczaj nieuniknionym wynikiem różnych zjawisk, takich jak zbyt duże luzy w wytwarzanych podzespołach, czy nieodpowiednio spasowane lub przeszywnione konstrukcje [1-3]. Wibracje mogą pochodzić także od turbulencji powstających przy kontakcie ruchomych części maszyn z różnymi mediami roboczymi [4]. Po dłuższym okresie eksploatacji maszyny, oscylacje mogą się nasilić z powodu zużycia trybologicznego bardziej podatnych części oraz nagromadzenia uszkodzeń zmęczeniowych. Pogarszająca się stabilność pracy może w końcu prowadzić do awarii i generować dodatkowe koszty naprawy. Niepożądane wibracje mają również negatywny wpływ na inne urządzenia lub ludzi, którzy pracują w ich pobliżu. Drgania są propagowane poprzez sztywne elementy nośne konstrukcji oraz fundamenty [5-7]. Urządzenia takie jak sterowniki czy czujniki optyczne lub mechaniczne mogą być wrażliwe na tego typu zakłócenia i zwykle wymagają pewnej formy wibroizolacji. Wibracje mogą być również bardzo szkodliwe w przypadku ergonomii pracowników przy ciągłej lub częstej ekspozycji [8].

Niwelowanie lub eliminacja negatywnych skutków drgań w ośrodkach technicznych jest niezwykle istotnym zagadnieniem inżynierii mechanicznej i tematem podejmowanym w licznych publikacjach naukowych oraz zgłoszonych patentach. W celu zapobiegania niepożądanym wibracjom, opracowano różne rodzaje pasywnych i aktywnych metod tłumienia [1, 4, 6, 8-13]. Pasywne metody tłumienia polegają na ograniczaniu wibracji poprzez zastosowanie trzech podstawowych zasad:

- eliminacja źródeł drgań na etapie konstrukcyjnym,
- niwelowanie skutków niedoskonałości poprzez regulację parametrów pracy maszyn,
- rozpraszanie energii pozostałych drgań materiałami o właściwościach tłumiących.

Pierwszą i drugą zasadę można uznać za dobrą praktykę inżynierską w trakcie projektowania maszyn. Zasada trzecia obejmuje metody, w których stosuje się różnego rodzaju materiały, których zadaniem jest absorbowanie lub rozpraszanie energii kinetycznej pochodzącej z wibrujących ośrodków. Tworzywa sztuczne są często stosowanymi warstwami izolującymi o dobrych właściwościach tłumiących. Metody pasywne mają jednak swoje praktyczne ograniczenia. W przypadku dużej intensywności wibracji, zastosowanie warstwy tłumiącej o wystarczającej grubości może być niemożliwe do osiągnięcia z uwagi na ograniczenia konstrukcyjne lub zbyt wysokie koszty materiałowe.

W celu rozwiązania problemów związanych z kosztem oraz ograniczonymi możliwościami aplikacji metod pasywnego tłumienia maszyn powstała koncepcja aktywnych układów tłumiących. Aktywne układy tłumiące czerpią energię pochodzącą spoza układu do tłumienia ośrodków technicznych [14]. Przykładem takich układów są podzespoły z możliwością regulacji tłumienia poprzez stymulację cieczy magneto lub elektro-reologicznych, których lepkość można dostosowywać do warunków poprzez sterowanie natężeniem pola magnetycznego lub elektrycznego [15]. Dużą zaletą układów aktywnych jest mniejsza przestrzeń jaką zajmują podzespoły oraz możliwość dynamicznego dopasowywania charakterystyki tłumienia do panujących warunków.

Nie wszystkie rodzaje oscylacji można jednak skategoryzować jako czynniki niepożądane. Bardzo powszechnym zastosowaniem układów drgających jest generacja fal akustycznych. Przykładami są urządzenia do komunikacji głosowej, echolokacji, czy prowadzenia badań strukturalnych. Wibracje stosowane są również w przemyśle jako jedna z form transportu, sortowania oraz pozycjonowania. Przykładem są szeroko stosowane w przemyśle spożywczym podajniki wibracyjne oraz maszyny sortujące w wielu różnych gałęziach przemysłu, takich jak przemysł spożywczy, przemysł ciężki lub górnictwo. Wysokoenergetyczne oscylacje o dużej częstotliwości można również stosować do tworzenia trwałych, kontaktowych spoin pomiędzy łączonymi elementami struktury oraz mieszania zawiesin cieczy o różnych gęstościach tworząc układy koloidalne.

Zarówno w przypadkach, kiedy konieczne jest ograniczenie negatywnego wpływu drgań na działanie urządzeń technicznych oraz ich otoczenie, jak i w przypadkach, kiedy drgania pełnią rolę nośnika informacji czy energii, zagadnienie wibracji w dziedzinie inżynierii mechanicznej jest bardzo istotne, gdyż obejmuje technologie umożliwiające wydajniejsze i bardziej precyzyjne zastosowanie energii w środkach technicznych, a także zwiększających ich żywotność.

1.1 Wprowadzenie

Materiały inteligentne, w tym również te o właściwościach piezoelektrycznych, ze względu na swoje cechy znalazły szerokie zastosowanie w dziedzinie inżynierii mechanicznej. Mechanika zjawiska piezoelektrycznego pozwala na znaczną redukcję gabarytów układów ze względu na zamianę pomiędzy energią mechaniczną oraz elektryczną, która zachodzi bezpośrednio wewnątrz struktury materiału. Zjawisko piezoelektryczne charakteryzuje się poprzez prosty oraz odwrotny efekt piezoelektryczny. W przypadku prostego efektu

piezoelektrycznego dochodzi do powstania różnic w potencjale elektrycznym na powierzchniach materiału poddawanego naprężeniu. Odwrotnym efektem piezoelektrycznym określa się natomiast zjawisko odkształcania materiału pod wpływem przyłożonego pola elektrycznego [16].

Modelowanie układów, których zasada działania polega na zastosowaniu efektu piezoelektrycznego, ze względu na złożone relacje zachodzące wewnątrz struktury materiału, jest zadaniem trudnym i wymagającym dobrej znajomości zagadnień fizycznych opisujących zarówno układy mechaniczne, jak i elektryczne. Analiza matematyczna układów piezoelektrycznych jest tematem podejmowanym w wielu pracach naukowych [17-20]. Część publikacji dotyczy również prób syntezy matematycznych modeli układów bazujących na zjawisku piezoelektrycznym [21, 22]. Wszystkie spośród przeanalizowanych przez autora prac badawczych, które podejmują temat analizy oraz syntezy układów piezoelektrycznych sprowadzają się głównie do rozwiązań przygotowanych na podstawie konkretnych przykładów zastosowania materiałów piezoelektrycznych w technice. Autorzy jako punkt wejściowy do procesu syntezy stosują również gotowe przetworniki piezoelektryczne oraz wyniki z przeprowadzonych badań empirycznych. Istnieją natomiast zadania, gdzie nieznane są na wstępie przybliżone optymalne parametry płytek piezoelektrycznych, z których utworzone ma być nowe rozwiązanie techniczne. Najczęstszą procedurą postępowania w takich przypadkach jest eksperymentalna droga dojścia do parametrów przetworników piezoelektrycznych niezbędnych do optymalnej pracy projektowanego urządzenia. Tezą pracy jest więc możliwość utworzenia metody syntezy, umożliwiającej modelowanie dowolnych układów piezoelektrycznych o strukturze kaskadowej na bazie danych wejściowych w postaci zbioru częstotliwości rezonansowych, posiadając ograniczoną liczbę informacji na temat właściwości materiałowych lub geometrycznych dobieranych przetworników piezoelektrycznych. Opracowana metoda może znaleźć praktyczne zastosowanie w przypadku projektowanych wzbudników wibracyjnych, gdzie konieczny jest wstępny dobór odpowiednich płytek piezoelektrycznych do poprawnej pracy urządzenia. Przedmiotem niniejszej pracy są układy prętowe odkształcające się jednowymiarowo w osi prostopadłej do powierzchni przekroju. W pracy nie uwzględniono odkształceń zachodzących w innych osiach przetwornika piezoelektrycznego. Układy określono jako płytki oraz stosy, zgodnie z przyjętym w przemyśle, uproszczonym nazewnictwem przetworników piezoelektrycznych. Zadanie syntezy układów piezoelektrycznych realizowano z uwzględnieniem istniejących metod syntezy modeli mechanicznych oraz elektrycznych podejmowanych już w ośrodku Gliwickim.

Układy piezoelektryczne cechują się mniejszymi rozmiarami przez redukcję elementów niezbędnych do zamiany energii. Posiadają właściwości pożądane w przypadku konstrukcji środków technicznych skupionych na generowaniu oraz tłumieniu wibracji [8, 9, 12, 17, 23-25]. Przykładami zastosowania materiałów piezoelektrycznych w przemyśle są powszechnie stosowane głośniki oraz mikrofony, których membrany wykonano np. z folii o właściwościach piezoelektrycznych. Tak wytworzone elementy stosuje się zarówno w urządzeniach elektrycznych, w formie sygnalizatorów oraz odbiorników o prostej budowie, jak i w formie elementów odpowiedzialnych za wysyłanie i odbiór fal akustycznych w sonarach podwodnych. Kolejnym, powszechnym zastosowaniem materiałów piezoelektrycznych są akcelerometry. Rolą piezoelektryków w tym przypadku jest przekształcanie niewielkich naprężeń w sygnały elektryczne odpowiadające przeciążaniom generowanym przez przyspieszenia.

Najczęściej spotykanymi rodzajami elementów wykonanych z materiałów piezoelektrycznych są folie, płytki lub stosy. W przypadku technologii odbioru oraz transmisji sygnałów dźwiękowych, folie oraz cienkie płytki piezoelektryczne znajdują największe zastosowanie z powodu ich dużej powierzchni oddziaływania na medium robocze. W przypadkach, gdzie istotniejsze są większe przemieszczenia lub siły, używane są płytki o zwiększonej grubości lub stosy piezoelektryczne. W zależności od struktury wewnętrznej oraz sposobu cięcia kryształu, płytki piezoelektryczne dzielą się na elementy o większym stopniu oddziaływania w różnych osiach roboczych. Stopień odkształcenia przetwornika, zależy od współczynnika piezoelektrycznego, będącego właściwością danego materiału oraz od grubości zastosowanej płytki. Stosy piezoelektryczne składają się z wielu płytek o takich samych wymiarach oraz właściwościach materiałowych. Główną zaletą stosów jest zwielokrotnione wypadkowe odkształcenie w osi roboczej, będące sumą odkształceń poszczególnych płytek wchodzących w skład stosu. Pozwala to na stosowanie tańszych materiałów piezoelektrycznych o gorszym stosunku odkształcenia do przyłożonego napięcia, kosztem zwiększonego rozmiaru modułu. Opracowana w niniejszej pracy metoda syntezy umożliwia proces modelowania układów piezoelektrycznych w postaci stosu, w skład których wchodzi płytki o różnych wymiarach, bądź właściwościach materiałowych. Zmiana tych parametrów wpływa na zakres częstotliwości, przy których dana płytka wibruje ze zwiększoną amplitudą będąc w pobliżu własnej częstotliwości rezonansowej. Układ złożony z wielu różnych płytek może być zastosowany do generowania większych odkształceń w zakresie kilku różnych przedziałów częstotliwości.

Analiza matematyczna pozwala na teoretyczną weryfikację funkcjonalności utworzonego modelu matematycznego. Możliwe jest uzyskanie wartości określających pożądane cechy oraz zachowania badanego układu z różnym stopniem dokładności poprzez zastosowanie aproksymacji matematycznej. Istnieje wiele metod analizy przebiegu odpowiedzi badanego układu w dziedzinie częstotliwości sygnału wymuszającego. Jedną z podstawowych metod jest analiza równań różniczkowych drugiego rzędu zwanych w mechanice równaniami ruchu. Równania Lagrange'a II rodzaju są jednym ze sposobów zapisu funkcji określających relacje energetyczne pomiędzy elementami układu w przestrzeni współrzędnych uogólnionych. Metoda polega na zapisie algebraicznym relacji wewnątrz analizowanego układu, przez co określono ją w pracy jako klasyczną metodę analizy układów. Postać macierzowa umożliwia algorytmizację metody i zastosowanie jednostek obliczeniowych do uzyskania wyników. W przypadku badań układów o większej liczbie stopni swobody, przy zastosowaniu metody klasycznej liczba równań w bardzo szybkim tempie wzrasta, co wiąże się z równoległe narastającym nakładem mocy obliczeniowej potrzebnej do wyznaczenia wyników. W ramach niniejszej pracy zastosowano oraz omówiono również metodę nieklasyczną, bazującą na algebrze liczb strukturalnych autorstwa profesora Stanisława Bellerta [26]. Metodę opracowano w celu analizy układów elektrycznych przy zastosowaniu graficznego zapisu relacji pomiędzy poszczególnymi elementami badanego układu, określonego pod nazwą grafu. Metody tej nie należy mylić z podobnie nazwanymi w literaturze metodami, które również oparte są o graficzny zapis relacji układu [19]. Analiza polega na utworzeniu numerycznej reprezentacji relacji opisanych w graficznym odwzorowaniu analizowanego układu, stosując do tego liczby strukturalne. Algebra liczb strukturalnych umożliwia wyznaczenie równania odpowiedzi poszczególnych stopni swobody układu. Metodę cechuje większa intuicyjność oraz przejrzystość względem metody macierzowej. Przystosowano ją również do analizy układów mechanicznych i jest dalej rozwijana dzięki pracy badawczej na Politechnice Śląskiej [18, 20, 27-41]. Jednym z celów niniejszej pracy jest przeprowadzenie analizy porównawczej wydajności algorytmów opartych na bazie równań macierzowych oraz algebry liczb strukturalnych. W ramach porównania podjęto próbę analizy dokładności oraz czasu obliczeniowego algorytmu metody nieklasycznej względem algorytmu opartego na metodzie klasycznej. Przedmiotem badania są kaskadowe układy mechaniczne o dwóch i większej liczbie stopni swobody, utwierdzone z jednej strony, posiadające elementy inercyjne, sprężyste oraz tłumiące, a także wymuszane siłą harmoniczną. Układy te utworzono na etapie syntezy modeli mechanicznych. Do analizy oscylujących układów z tłumieniem metodą nieklasyczną użyto autorskiego rozwiązania łączącego cechy

obu porównywanych metod. Celem rozwiązania było uproszczenie wynikowej postaci równania odpowiedzi układu uzyskiwanej metodą liczb strukturalnych.

Za podstawę syntezy piezoelektrycznych układów kaskadowych w niniejszej pracy posłużyła metoda syntezy układów elektrycznych autorstwa Wilhelma Cauera [42, 43]. Metodę przystosowano również do syntezy układów mechanicznych i była podejmowana w ramach pracy badawczej na Politechnice Śląskiej [18, 20, 27-36], co skłoniło autora do jej zastosowania. Podstawą syntezy jest funkcja transmitancji układu w postaci wymiernej. W zależności od dobranego sposobu, funkcja zostaje rozbita do postaci ułamka łańcuchowego przez dzielenie czynników stojących przy najwyższych potęgach licznika oraz mianownika funkcji wymiernej w kolejnych iteracjach. Uzyskany tym sposobem ułamek łańcuchowy stanowi podstawę syntezy modelu mechanicznego bądź elektrycznego. Kolejne współczynniki ułamka łańcuchowego odpowiadają wartościom opisującym charakterystyczne parametry kolejnych elementów modelu. Otrzymany tym sposobem model posiada jednak wyłącznie elementy inercyjne i sprężyste, przez co nie jest wystarczająco dobrym odzwierciedleniem układów rzeczywistych, w których występuje tłumienie. Układ składa się wyłącznie z elementów mechanicznych, więc konieczne jest także rozwinięcie jego struktury o dodatkowe elementy elektryczne by dokładniej odzwierciedlić zachowanie rzeczywistych elementów piezoelektrycznych.

W celu rozbudowy modelu o dodatkowe elementy tłumiące zastosowano metodę Rayleigh'a. Określone w niej dwa współczynniki proporcjonalności pozwalają na obliczenie przybliżonej wartości tłumienia na podstawie wartości elementów inercyjnych oraz sprężystych. Otrzymany układ mechaniczny wymaga uwzględnienia części elektrycznej by lepiej odzwierciedlać zachowanie układu piezoelektrycznego. Do zamodelowania elektrycznej części układu piezoelektrycznego przyjęto na każdym stopniu swobody pewną siłę elektromotoryczną będącą wypadkową przyłożonego napięcia na obwodzie elektrycznym. Wartość przyjętej siły elektromotorycznej można obliczyć korzystając z przytoczonych metod analizy, gdy znana jest amplituda drgań układu w rozważanym przedziale częstotliwości. Model złożony z tak zamodelowanych części mechanicznych oraz elektrycznych jest wzorowany na modelach stosowanych przez innych autorów w przypadkach analizy układów piezoelektrycznych w kontekście różnych zastosowań technicznych [17, 19, 24, 44, 45].

Metody aproksymacji parametrów, takie jak metoda Rayleigh'a, wiążą się nierozdzielnie z powstawaniem rozbieżności pomiędzy teoretycznymi i rzeczywistymi parametrami modelowanego układu. W pracy podjęto decyzję o ograniczeniu rozpatrywanych układów do takich, w których na każdym stopniu swobody występuje tłumienie podkrytyczne.

Dodatkowym założeniem było przyjęcie stałego współczynnika proporcjonalności każdego stopnia swobody. Uwzględniając informacje pozyskane ze źródeł literaturowych [46, 47], o tematyce dotyczącej układów piezoelektrycznych, które pracują przy dużych częstotliwościach, można założyć, że współczynnik proporcjonalności elementów inercyjnych jest pomijalnie mały. Nałożone warunki brzegowe w przypadku metody Rayleigh'a powodują, że otrzymane wartości tłumienia są zaniżone w stosunku do możliwych do otrzymania wartości w rzeczywistym układzie, szczególnie w przypadku elementów drgających z niższymi częstotliwościami w analizowanym zakresie częstotliwości.

Weryfikację dokładności opracowywanych modeli oraz poprawności przyjętych założeń przeprowadzono w kilku badaniach doświadczalnych przy użyciu dostępnej aparatury badawczej oraz płytek piezoelektrycznych w laboratoriach Wydziału Mechanicznego Technologicznego Politechniki Śląskiej. Wstępne badanie poznawcze miało na celu sprawdzenie zachowania stosu piezoelektrycznego złożonego z dwóch płytek piezoelektrycznych o różnych wymiarach oraz generujących wibracje przy różnych częstotliwościach. W badaniu zastosowano elementy piezoelektryczne dostępne w ramach wyposażenia laboratoryjnego. Pierwszym celem badania było poznanie metod łączenia oraz sposobu sterowania płytek piezoelektrycznych, a także aparatury niezbędnej do kontroli i badania układów piezoelektrycznych. Drugim celem badania było utworzenie oraz weryfikacja metody badawczej pozwalającej na wykonanie powtarzalnych pomiarów wibracji płytek piezoelektrycznych. Trzecim celem było zbadanie zdolności utworzonego stosu do przenoszenia wibracji poszczególnych płytek poprzez warstwy łączące płytki na mierzoną powierzchnię. Celem kolejnego badania była weryfikacja dokładności modelu otrzymanego metodą syntezy, porównując go do zachowania rzeczywistych układów piezoelektrycznych złożonych z płytek o znanych właściwościach materiałowych i parametrach geometrycznych. Wyniki uzyskane z badań porównano z wynikami analizy utworzonych modeli teoretycznych. Porównano zbieżność amplitud oraz częstotliwości generowanych przez rzeczywisty układ z wynikami analizy utworzonego modelu matematycznego. Na podstawie badania wykonano walidację utworzonych modeli i wysunięto propozycje dalszych usprawnień w procesie modelowania układów piezoelektrycznych.

Utylitarnym celem pracy było udowodnienie poprawności postawionej tezy twierdzącej, że możliwe jest utworzenie metody syntezy piezoelektrycznych układów kaskadowych, reprezentujących rzeczywiste układy piezoelektryczne określone jako stosy, na bazie wejściowych danych w postaci zbioru częstotliwości rezonansowych, posiadając ograniczone informacje o parametrach dobieranych płytek piezoelektrycznych. Metoda pozwala dodatkowo

na utworzenie dowolnego modelu układu piezoelektrycznego złożonego z płytek o różnych wymiarach bądź różnych właściwościach materiałowych. W ramach przeprowadzonej syntezy oraz analizy układów piezoelektrycznych, kolejnym efektem było utworzenie autorskiej metody analizy układów mechanicznych lub elektrycznych w oparciu o nieklasyczną metodę liczb strukturalnych. Dokładność syntezy zweryfikowano badaniami doświadczalnymi, natomiast dokładność analizy przeprowadzonej nową metodą zestawiono z wynikami analizy uzyskanymi klasyczną metodą, bazującą na macierzowej reprezentacji równań ruchu układu.

1.2 Analiza stanu wiedzy

Pierwszą demonstrację bezpośredniego działania zjawiska piezoelektrycznego udokumentowano przez Pierra i Jacquesa Curie w 1880 roku [48]. Zaobserwowali oni proste zjawisko piezoelektryczne, polegające na gromadzeniu ładunku elektrycznego na powierzchni badanych kryształów kwarcu, winianu potasu sodu, turmaliny oraz topazu, które poddano mechanicznemu odkształceniu. Rok później, Gabriel Lippmann dowiódł teoretycznie istnienia odwrotnego zjawiska piezoelektrycznego, na bazie podstawowych zasad termodynamiki [49]. Jeszcze w tym samym roku, po ukazaniu się publikacji Lippmanna, Pierre oraz Jacques Curie eksperymentalnie potwierdzili istnienie odwrotnego zjawiska piezoelektrycznego, polegającego na odkształcaniu materiału przez umieszczenie go w polu elektrycznym. Przez długi czas od momentu odkrycia oraz zdefiniowania zjawiska piezoelektrycznego materiały wykazujące właściwości piezoelektryczne były głównie przedmiotem badań laboratoryjnych. W 1910 roku Waldemar Voigt po przeprowadzeniu analizy z zastosowaniem równań tensorowych opisał 20 rodzajów sieci krystalicznych wykazujących właściwości piezoelektryczne oraz zdefiniował zbiór stałych piezoelektrycznych. Pierwszym praktycznym zastosowaniem układów piezoelektrycznych był sonar wysokiej częstotliwości opracowany w roku 1917 przez Paula Langevina, składający się z piezoelektrycznego przetwornika oraz hydrofonu. Układ przeznaczono na potrzeby marynarki wojennej w celu wykrywania wczesnych okrętów podwodnych [50]. Nowatorskie zastosowanie układu piezoelektrycznego pobudziło środowisko naukowe do zwiększenia intensywności badań nad potencjalnymi aplikacjami materiałów piezoelektrycznych w przemyśle oraz życiu codziennym. Na przełomie XIX i XX wieku znacznie poszerzono wiedzę na temat zjawiska piezoelektrycznego, jak również opracowano wiele nowych zastosowań układów piezoelektrycznych w środkach technicznych [9, 17, 22-25, 47, 51-57]. Grupę materiałów piezoelektrycznych poszerzono o stopy takie jak np. cyrkonian i tytanian

ołowiu (PZT) o znacznie poprawionej wydajności zamiany energii. W ostatnich latach zwrócono również uwagę na nowe materiały w postaci kompozytów ceramiczno-polimerowych. Jednym z celów proponowanych alternatyw jest redukcja szkodliwego udziału stopów ołowiu w obecnie stosowanych materiałach. W pracach autorstwa między innymi Huige Weia i Hui Wang [58], Kuntal Maity i Dipanakara Mandala [59], a także Thomasa Shrouta i Shujuna Zhanga [60], podkreślony jest szkodliwy wpływ stopów ołowiu i przedstawione są długoterminowe skutki ich eksploatacji. Autorzy dokonują również przeglądu dostępnych obecnie alternatyw w postaci kompozytów ceramicznych oraz biopolimerów i porównują właściwości tych materiałów do używanych powszechnie stopów o właściwościach piezoelektrycznych.

Dokonując szerszego przeglądu literatury w kontekście publikacji skupionych na opisie właściwości materiałów piezoelektrycznych oraz analizie parametrów pracy układów piezoelektrycznych, których główną rolą jest generowanie bądź tłumienie wibracji, można odnaleźć bardzo dużą liczbę publikacji oferującą obszerny zakres wiedzy [8, 16, 17, 19-21, 24, 46, 47, 52, 56, 57, 61-65]. W zbiorze analizowanych źródeł literaturowych można wyróżnić kilka grup opracowań ze względu na podejmowaną tematykę, a w szczególności:

- matematyczny opis zjawiska piezoelektrycznego,
- zastosowanie materiałów piezoelektrycznych w kontekście aplikacji skupionych na tłumieniu wibracji,
- modelowanie układów piezoelektrycznych przy zastosowaniu mechanicznych i elektrycznych modeli matematycznych, a także metody elementów skończonych i uczenia maszynowego.

Jednym z głównych źródeł wiedzy na temat zjawiska piezoelektrycznego jakie autor uwzględnił w ramach przeglądu literaturowego jest praca zbiorowa pod redakcją Waldemara Solucha [16], w której opisano istotę zjawiska piezoelektrycznego, a także strukturę oraz właściwości sieci krystalicznych tworzących materiały piezoelektryczne. Niezbędne przy modelowaniu zachowania układów piezoelektrycznych jest również poznanie parametrów materiałowych charakteryzujących tworzywa piezoelektryczne oraz równań konstytutywnych opisujących relacje pomiędzy mechanicznymi oraz elektrycznymi właściwościami elementów piezoelektrycznych. Zbiór informacji na temat parametrów materiałowych oraz równań konstytutywnych prezentowany jest szeroko w pozycjach [16, 17, 20, 52, 62, 63]. W przeglądzie zamieszczono również pozycje literaturowe na temat szczegółowej analizy precyzyjnego pozycjonowania oraz kontroli układów piezoelektrycznych [19, 24, 46, 56, 57]. Podejmują one tematykę dotyczącą zjawisk histerezy oraz poślizgu, a także metod

modelowania tych zjawisk w przypadku układów wymagających dokładnego pozycjonowania lub pracujących z bardzo dużymi prędkościami oraz przyspieszeniami.

Zastosowania materiałów piezoelektrycznych związane z podejmowaną w pracy tematyką analizy i syntezy układów piezoelektrycznych opisane są w licznych publikacjach naukowych. W przeglądzie literaturowym odszukano publikacje dotyczące procesów modelowania układów zawierających materiały piezoelektryczne [8, 9, 17, 19-21, 24, 44, 46, 47, 57, 61, 64, 65], jak również prace skupione na analizie zjawiska piezoelektrycznego w kontekście istniejących oraz nowych rozwiązań technicznych [12, 14, 22, 23, 25, 45, 54-56, 63, 66-70]. Wymienione prace obejmują zagadnienia związane z modelowaniem układów piezoelektrycznych, które można dodatkowo podzielić ze względu na docelowe przeznaczenie modelowanych układów. W zbiorze prac naukowych wyróżniono publikacje podejmujące tematykę:

- pasywnych oraz aktywnych metod redukcji drgań pochodzących z układów oraz współpracujących ośrodków,
- precyzyjnej kontroli oraz mikro pozycjonowania,
- odzyskiwania energii z układów drgających.

Pod względem analizy matematycznej układów piezoelektrycznych, najbardziej związanymi z tematem pracy są publikacje [17, 18, 19, 24, 44-46, 56, 64]. Prace autorstwa Michaela Goldfarba i Nikola Celanovica [24, 56] opisują proces modelowania zjawiska piezoelektrycznego przy zastosowaniu modelu o elementach skupionych (eng. lumped model). Stosując układ mechatroniczny złożony z dwóch osobnych członów (mechanicznego i elektrycznego) połączonych ze sobą wspólnym oddziaływaniem pod postacią siły elektromotorycznej, naukowcy próbują zasymulować działanie układu piezoelektrycznego. Szczególną uwagę zwrócono na zjawisko poślizgu oraz histerezy występujące w aplikacjach wymagających szybkiego oraz precyzyjnego pozycjonowania. Podejmowane są próby symulacji tego zjawiska przy użyciu kondensatora rezystancyjnego Maxwella (MRC). Weryfikację modelu teoretycznego przeprowadzono, porównując wyniki symulacji komputerowych na bazie utworzonego modelu matematycznego oraz danych pomiarowych otrzymanych z przeprowadzonych badań empirycznych na analogicznym układzie piezoelektrycznym. Parametry wejściowe modelu otrzymano na podstawie pomiarów badanego, rzeczywistego układu piezoelektrycznego. Jak wykazali autorzy wymienionych prac, zaprojektowany model dobrze reprezentuje zachowanie rzeczywistych układów piezoelektrycznych i może być stosowany w teoretycznej analizie układów złożonych z elementów piezoelektrycznych. Wspomniane zjawisko poślizgu oraz histerezy można

niwelować przy użyciu odpowiednich pętli sprzężenia zwrotnego zawierających nieliniowe komponenty sterujące napięciem wejściowym lub liniowe komponenty sterujące natężeniem prądu.

Podobne podejście do problemu modelowania układów piezoelektrycznych zaprezentowano w publikacji autorów Hana Adriaensa, Willema de Koninga oraz Reindera Banninga [17]. Autorzy publikacji rozwinęli koncepcję zaprezentowaną przez Goldfarba i Celanovica, uwzględniając dodatkowe oddziaływanie tłumienia strukturalnego i wyznaczając równania ruchu na bazie analizowanego modelu.

Koncepcja była dalej rozwijana w pracy autorstwa Shinnosuke Yamaoki oraz Kouheia Ohnishiego [45]. Badanie przeprowadzono na rzeczywistym układzie w postaci stosu piezoelektrycznego o jednym stopniu swobody z czujnikiem naprężenia. Zjawisko histerezy przeanalizowano z uwzględnieniem napięcia oraz natężenia prądu sterującego układem oraz zaproponowano schemat blokowy układu sterującego na podstawie otrzymanych wyników.

Autorzy Benedikt Haus, Paolo Mercorelli oraz Nils Werner w swojej publikacji [70] zaproponowali praktyczne zastosowanie modelu o parametrach skupionych do sterowania układem piezoelektrycznym odpowiedzialnym za mechanizm wtryskowy układu spalania w silniku spalinowym. Analogicznie, autorzy Sheng-He Wang i Mi-Ching Tsai w swojej pracy [44] przeanalizowali działanie modelu na podstawie przetwornika ultradźwiękowego Lagevina działającego z częstotliwością rezonansową 28.15 kHz. Parametry układu sprzężenia zwrotnego ustalone przy użyciu modelowania matematycznego pozwoliły na bardziej dokładne odzwierciedlenie zachowania rzeczywistego układu.

W pracy Rodrigueza-Fortuna, Orusa, Builego oraz Castellanos [19] przedstawiono nieco inne podejście do analizy układów piezoelektrycznych, stosując w tym celu zapis relacji wewnątrz układu przy pomocy „grafu więzów” (eng. bond graph model). Otrzymane modele oraz układy sterujące były w tym przypadku weryfikowane na rzeczywistym układzie piezoelektrycznym o oznaczeniu APA-120ML firmy Cedrat Technologies.

Odmienne podejście do problemu modelowania układów piezoelektrycznych, polegające na modelach realizowanych przy użyciu elementów sieci elektrycznych zaprezentowano między innymi w pracy Gua-Quing Li, Chen Chuan-Yao i Hu Yuan-Tai [64]. Prezentowane modele elektryczne działają na zasadzie czarnej skrzynki, posiadającej zbiór sygnałów wejściowych oraz wyjściowych. Działanie układu analizowane jest poprzez obliczanie macierzy impedancji nieznanego układu będącego wewnątrz czarnej skrzynki na podstawie relacji pomiędzy wartościami sygnału wejściowego oraz wyjściowego. Proponowany model zweryfikowano w pracy na przykładzie czterech różnych konfiguracji

plytek piezoelektrycznych drgających wzdłużnie. Wykazano, że w przypadku badanych układów, wyniki analizy teoretycznej nie odbiegały w znacznym stopniu od wyników badań doświadczalnych.

W pracy Andrzeja Buchacza oraz Andrzeja Wróbla [18], a także w pracy indywidualnej Andrzeja Wróbla [20] zastosowano metodę hybrydową analizy układów piezoelektrycznych, opierająca się na macierzowej postaci równań konstytutywnych układów piezoelektrycznych, połączonej z reprezentacją relacji wewnątrz układu przy zastosowaniu metody grafów oraz algebry liczb strukturalnych [26], rozwijanych na Politechnice Śląskiej. Postać macierzowa układu równań konstytutywnych posłużyła za podstawę metody liczb strukturalnych. Celem publikacji było przedstawienie prostej alternatywy analizy układów piezoelektrycznych metodą macierzową, która pozwalała na określenie odpowiedzi układu w dziedzinie częstotliwości z porównywalną precyzją. W ramach publikacji zaprezentowano możliwości tej metody w przypadku układów o większej liczbie płytek piezoelektrycznych oraz jej praktyczne zastosowania.

W ramach niniejszej pracy dokonano również przeglądu literaturowego prac naukowych skupionych na zagadnieniu syntezy układów. Proces syntezy polega na projektowaniu układów bądź sieci, których odpowiedź na sygnał wejściowy jest znana, nie posiadając przy tym żadnych informacji na temat elementów, z których są złożone. Głównym kryterium poszukiwań były metody pozwalające na uzyskanie wstępnej postaci układu mechanicznego lub elektrycznego na bazie informacji wejściowej w postaci zbioru częstotliwości rezonansowych. Bardzo duży udział w obszernej liczbie źródeł literaturowych pod zadanym kryterium stanowiły prace oparte na metodzie syntezy opracowanej przez Wilhelma Cauera w latach trzydziestych XX wieku [42, 43]. Metoda Cauera jest bardziej uogólnioną wersją metody opracowanej przez Ronalda Fostera [71], w której możliwa jest realizacja pełnych sieci elektrycznych RLC. Warunkiem koniecznym i wystarczającym do przeprowadzenia syntezy jest funkcja transmitancji będąca funkcją rzeczywistą dodatnią. Oznacza to, że wszystkie zera i bieguny danej funkcji muszą być dodatnie i nie mogą zawierać składowej urojonej. Sam proces syntezy polega na rozbiciu funkcji transmitancji do postaci ułamka łańcuchowego, którego wyznaczone części całkowite stanowią parametry kolejnych elementów projektowanej sieci. Metoda Cauera przyczyniła się do utworzenia szerokiej gamy filtrów sygnałowych. Znalazła również zastosowania w układach mechanicznych wraz ze wzrostem znaczenia pojęcia minimalizacji obciążeń i naddatków materiałowych. Malcolm Smith w swojej pracy nad synteza układów mechanicznych zaproponował nowy mechaniczny komponent – inerter, który stanowił bezpośrednią analogię do elektrycznego kondensatora [72].

Metoda syntezy opracowana przez Wilhelma Cauera była przedmiotem obszernych badań prowadzonych przez pracowników Politechniki Śląskiej w obszarze różnych zagadnień inżynierii mechanicznej [27-33, 39, 73, 74]. W pracy naukowej pod redakcją profesora Andrzeja Buchacza zastosowano metodę syntezy Cauera przy tworzeniu mechanicznych układów skrętnych pod postacią wałów stopniowanych. Wyszczególniono cztery postacie transmitancji nazwane odpowiednio powolnościami oraz ruchliwościami w zależności od docelowej struktury projektowanego układu. W ramach pracy utworzono również oprogramowanie komputerowe pozwalające na projektowanie układów mechanicznych przy zastosowaniu algorytmów opartych o syntezę Cauera, a także metodę analizy przy użyciu grafów i liczb strukturalnych.

W swoich licznych publikacjach [32, 75-77] Andrzej Dymarek oraz Tomasz Dzitkowski znacznie poszerzyli zastosowania opracowanej metody syntezy m.in. o układy belkowe. Rozwinęli również syntezywane układy kaskadowe o dodatkowe człony rozgałęzione, tworząc układy mieszane. Jednym z proponowanych przez autorów zastosowań jest optymalizacja konstrukcji budowlanych z uwzględnieniem pasywnej redukcji tłumienia drgań.

Z kolei w pracach naukowych autorstwa Katarzyny Białas [29-31] do syntezy układów mechanicznych dołączono aktywne elementy tłumiące, których parametry obliczane były na podstawie analizy matematycznej przy zastosowaniu grafów oraz liczb strukturalnych.

Pracą najbardziej zbliżoną tematycznie jest publikacja autorstwa Damiana Gałęziowskiego [33], w której podejmowany jest temat syntezy Cauera w kontekście projektowania układów piezoelektrycznych. Autor w swojej pracy zastosował transformacje do układów bezwymiarowych w celu wyliczenia wartości amplitud układów drgających, a następnie wprowadzał do modelowanych układów mechanicznych elementy piezoelektryczne. Układy regulowano dołączonymi sieciami elektrycznymi o różnych kombinacjach elementów RLC w celu wprowadzenia tłumienia pasywnego.

Jedną z metod alternatywnych do metody Cauera była opisana przez Stanisława Bellerta i Henryka Woźniackiego metoda bazująca na algebrze liczb strukturalnych [26]. Autorzy w ramach swojej publikacji szeroko opisali logikę oraz przekształcenia matematyczne w ramach algebry liczb strukturalnych i zaproponowali hipotetyczną metodę bazującą na komputerowym algorytmie, który w rekurencyjny sposób poszukiwał możliwych do zrealizowania sieci spełniających zadane kryteria początkowe. Kolejne sieci były analizowane oraz filtrowane na podstawie przyjętych w metodzie liczb strukturalnych warunków koniecznych do spełnienia by dana sieć była fizycznie realizowalna.

W pracy Chih-yi Lina [23] do problemu projektowania i analizy układów piezoelektrycznych zastosowano układy Masona. Układy te stosowane są w celu aproksymacji zachowania elementu projektowanego systemu przy użyciu komponentów RLC. Możliwe jest również łączenie ich w bardziej złożone systemy, stosując tak zwane sprzęgło elektryczno-mechaniczne (eng. electromechanical coupling). Zarówno w [23] jak i w pracach Andrzeja Wróbla [18, 20] układy Masona zastosowano w modelach układów piezoelektrycznych.

Pomimo szczegółowej analizy literaturowej dotyczącej poruszanej tematyki nie występują publikacje, w których układy otrzymane metodą Cauera przedstawiono przy użyciu opracowanych przez Goldfarba oraz Celanovica modeli o elementach skupionych. Problem badany przez autora tej pracy skupia się więc na połączeniu przytoczonych metod syntezy i analizy w celu utworzenia modelu matematycznego aproksymującego parametry projektowanego, rzeczywistego układu piezoelektrycznego. Podejmowane zagadnienie jest zatem kontynuacją i rozwinięciem dotychczasowych badań. Efektem końcowym pracy jest opracowanie modeli matematycznych pozwalających na utworzenie dowolnego układu piezoelektrycznego złożonego z płytek o różnych wymiarach bądź różnych właściwościach materiałowych, przy jednoczesnym zachowaniu prostoty obliczeń związanych z synteza tych układów dzięki zastosowaniu przytoczonych metod.

13 Omówienie treści pracy

Pracę podzielono na siedem rozdziałów, w których przedstawiono proces modelowania kaskadowych układów piezoelektrycznych. Na wstępie przeanalizowano równania konstytutywne opisujące zjawisko piezoelektryczne oraz charakterystyczne parametry materiałów piezoelektrycznych. Przystąpiono do procesu syntezy na przykładzie układu o dwóch stopniach swobody oraz przeprowadzono analizę odpowiedzi otrzymanego układu dwiema metodami. Porównano zastosowane w pracy metody analizy układów kaskadowych w kontekście dokładności otrzymanych wyników oraz czasu obliczeniowego opracowanych na ich bazie algorytmów komputerowych. Podsumowaniem teoretycznej części pracy jest wyznaczenie parametrów rzeczywistego układu piezoelektrycznego na podstawie otrzymanego modelu matematycznego. W części empirycznej opisano proces weryfikacji doświadczalnej otrzymanych wyników.

W rozdziale pierwszym określono cel i tezę pracy oraz przedstawiono zakres dotychczasowej wiedzy na podstawie przeprowadzonego przeglądu literaturowego.

Omówiono metody analizy oraz syntezy układów piezoelektrycznych a także wskazano tak zwaną lukę badawczą i propozycje przyszłych badań.

Teoretyczny opis zjawiska piezoelektrycznego oraz wzory matematyczne zależności fizycznych przedstawiono w rozdziale drugim. Omówiono także najistotniejsze parametry oraz wzory użyte do opisu właściwości materiałów piezoelektrycznych stosowanych w przemyśle. Wyszczególniono także różne struktury układów piezoelektrycznych i opisano ich zasadę działania. Przytoczone w rozdziale zależności fizyczne oraz parametry techniczne związane z materiałami piezoelektrycznymi stanowią podstawę prowadzonej syntezy modeli matematycznych.

W rozdziale trzecim zawarto wstęp do metody liczb strukturalnych oraz przedstawiono sposób zapisu graficznej reprezentacji relacji zachodzących wewnątrz układów oraz oddziaływań zewnętrznych. W podrozdziale 3.1 omówiono podstawowe elementy tworzące grafy oraz sposób w jaki łączą się one w większe struktury demonstrujące zachowania złożonych układów. Podrozdział 3.2 zawiera wstęp do algebry liczb strukturalnych, w którym omówiono metodologię sporządzania liczb strukturalnych na podstawie przytoczonych grafów. Poruszono także zagadnienia związane z wykonywaniem operacji matematycznych na liczbach strukturalnych i przekształcaniem równań zapisanych przy pomocy algebry liczb strukturalnych na klasyczne równania matematyczne.

W rozdziale czwartym omówiono proces syntezy kaskadowego układu piezoelektrycznego oraz proces analizy otrzymanych modeli przy użyciu metody macierzowej oraz metody na bazie algebry liczb strukturalnych. W podrozdziale 4.1 przedstawiono metodę syntezy Cauera, polegającą na użyciu ułamka łańcuchowego do wyznaczenia parametrów układu mechanicznego. Parametrami wejściowymi w procesie syntezy są docelowe częstotliwości rezonansowe oraz antyrezonansowe modelowanego układu. Metodę przedstawiono w zapisie ogólnym przypadku układu o nieskończonej liczbie stopni swobody oraz na konkretnym przykładzie syntezy układu o dwóch stopniach swobody. Wynikiem przeprowadzonej syntezy jest układ składający się z dwóch mas oraz sprężyn, których parametry wyznaczono na podstawie całkowitych części otrzymanego ułamka łańcuchowego. W podrozdziale 4.2 zawarto opis procesu weryfikacji parametrów otrzymanego podukładu mechanicznego metodą macierzową oraz metodą grafów i liczb strukturalnych. Weryfikację przeprowadzono ponownie na przykładzie układu o dwóch stopniach swobody oraz porównano wyniki uzyskane obiema metodami. W kolejnym podrozdziale do modelu uzyskanego na podstawie syntezy Cauera dodano elementy tłumiące. Do wyznaczenia parametrów tłumienia zastosowano metodę Rayleigha bazującą na współczynnikach proporcjonalności tłumienia do elementów

inercyjnych oraz sprężystych. W ramach metody przedstawiono również założenia ograniczające liczbę rozpatrywanych układów do układów tłumionych podkrytycznie. Wynikiem przeprowadzonych obliczeń były wartości tłumienia elementów tłumiących zastosowanych w przykładowym układzie o dwóch stopniach swobody. W podrozdziale 4.4 przeprowadzono analizę układu klasyczną metodą macierzową oraz nieklasyczną metodą liczb strukturalnych. W tym przypadku, w obliczeniach uwzględniono również dołączone wcześniej elementy tłumiące. W celu uzyskania przebiegu odpowiedzi układu w dziedzinie częstotliwości rozbito postać ogólną całki przemieszczenia w ruchu oscylacyjnym na funkcje sinusowe oraz cosinusowe. Do obliczenia odpowiedzi układu przy zastosowaniu liczb strukturalnych opracowano autorską metodę, łączącą ze sobą metodę opartą na grafach oddziaływań oraz podział funkcji trygonometrycznych zastosowany przy metodzie macierzowej. W ramach analizy wyników otrzymanych obiema metodami porównano dokładność otrzymanego przebiegu odpowiedzi metodą liczb strukturalnych względem metody macierzowej, uznawanej za wzorzec. Dodatkowo porównano czas operacji oraz użytą pamięć RAM przez przygotowane algorytmy komputerowe na bazie zastosowanych metod. Porównanie przeprowadzono w celu aproksymacji potrzebnej mocy obliczeniowej potrzebnej do wykonania obliczeń obiema metodami. W podrozdziale 4.5 przedstawiono kompletny model układu piezoelektrycznego. Model uzyskano poprzez połączenie otrzymanego w procesie syntezy dyskretnego podukładu mechanicznego z układem elektrycznym w postaci kondensatorów odpowiadających wartościom skupionym pojemności elektrycznej elementów piezoelektrycznych. Sprzężenie elektromechaniczne zrealizowano poprzez zastosowanie transformatora energii mechanicznej oraz elektrycznej zdefiniowanego relacją wyznaczoną na podstawie równań konstytutywnych piezoelektryki. Równania opisujące działanie tak zamodelowanego układu mechatronicznego przedstawiono w formie macierzowej. W podrozdziale 4.6 przedstawiono przykład syntezy układu elektromechanicznego odzwierciedlającego układ piezoelektryczny. Na podstawie równań konstytutywnych oraz równań fizycznych, definiujących podstawowe właściwości materiałowe wyznaczono wzory przejściowe, pozwalające na wyznaczenie parametrów materiałowych lub geometrycznych syntezowanego układu piezoelektrycznego w zależności od parametrów wejściowych układu w postaci przyjętych częstotliwości rezonansowych.

W rozdziale piątym zawarto szczegółowy opis aplikacji przygotowanej na podstawie opracowanych wzorów analizy układów mechatronicznych. W podrozdziale 5.1 przedstawiono szczegółowo strukturę programu oraz zamieszczono diagramy opisujące krok po kroku działanie aplikacji ze wszystkimi dostępnymi oknami interfejsu użytkownika oraz polami do

wprowadzania danych. Podrozdziały 5.2 oraz 5.3 zawierają opis przebiegu syntezy w zależności od przyjętych warunków początkowych. Korzystając z aplikacji możliwa jest synteza układów piezoelektrycznych, na podstawie których wyznaczane są następnie właściwości materiałowe każdego stopnia swobody lub jego parametry geometryczne. W podrozdziale 5.4 przedstawiono moduł analizy utworzonych w procesie syntezy modeli matematycznych. W ostatnim podrozdziale zawarto informacje pomocnicze dotyczące nawigacji po aplikacji w przypadku konieczności cofnięcia dokonanych zmian w jej ustawieniach.

W rozdziale szóstym omówiono część doświadczalną prowadzonych badań. W ramach pracy przeprowadzono badania empiryczne w celu pozyskania praktycznej wiedzy na temat kontroli oraz pomiaru drgań płytek piezoelektrycznych. W podrozdziale 6.1, w ramach badania poznawczego opracowano stanowisko badawcze i metody pomiarowe potrzebne do przeprowadzenia precyzyjnych pomiarów układów piezoelektrycznych. Dodatkowym celem badania było zmierzenie odpowiedzi układów piezoelektrycznych złożonych z płytek o różnych wymiarach bądź właściwościach materiałowych. W podrozdziale 6.2 opisano przebieg badania przeprowadzonego w celu pozyskania odpowiedzi rzeczywistych układów złożonych z przemysłowych elementów piezoelektrycznych o znanych parametrach geometrycznych i właściwościach materiałowych. Wyniki badania empirycznego zastosowano do walidacji odpowiedzi układów zamodelowanych przy zastosowaniu autorskiej metody syntezy.

Pracę zakończono wnioskami oraz podsumowaniem, zawartymi w rozdziale siódmym, w którym rozstrzygnięto poprawność założonej tezy badawczej oraz przedstawiono obszary dalszego rozwoju w ramach poruszanej tematyki badawczej.

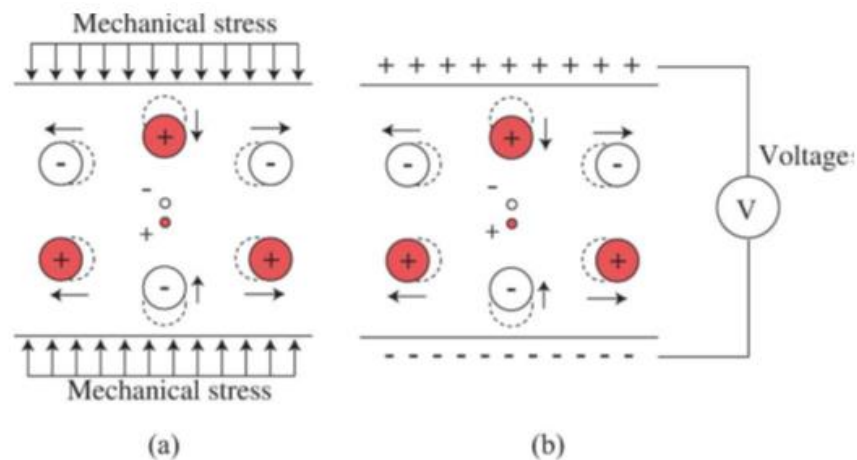
2. Charakterystyka badanych obiektów

Materiały piezoelektryczne należą do grupy materiałów inteligentnych. Unikalną właściwością tych materiałów jest możliwość zmiany wybranych, charakterystycznych parametrów danego materiału pod wpływem stymulacji. W zależności od typu materiału inteligentnego, czynnikami stymulującymi mogą być zmiany o charakterze elektrostatycznym lub elektromagnetycznym, zmiany temperatury, wymuszenia mechaniczne bądź reakcje chemiczne. Właściwością piezoelektryków w kontekście wspomnianej charakterystyki jest stosunek skumulowanego na powierzchni ładunku elektrycznego względem naprężeń wewnątrz struktury materiału. Pierwszymi odkrytymi materiałami wykazującymi właściwości piezoelektryczne były bryłki kwarcu oraz winianu potasu sodu. Nie posiadały one jednak cech pozwalających na innowacyjne zastosowania przemysłowe i przez następne lata były jedynie przedmiotem badań. Materiały inteligentne zyskały znaczenie w przemyśle wraz z postępem technologicznym na przestrzeni XX wieku. Opracowano składy chemiczne wielu nowych stopów metali takich jak tytanian baru i cyrkonian ołowiu, które charakteryzowały się znacznie silniejszymi właściwościami piezoelektrycznymi od swoich poprzedników, co umożliwiło projektowanie innowacyjnych rozwiązań technicznych. Dalszy rozwój piezoelektryki w następnych dekadach XX wieku poszerzył asortyment dostępnych materiałów piezoelektrycznych oraz powiększył zakres ich zastosowań. Postęp w dziedzinie konstrukcji mikroukładów przyczynił się do dalszej propagacji zastosowań materiałów piezoelektrycznych. Specjalne właściwości piezoelektryków umożliwiły projektowanie zminiaturyzowanych układów, w których zamiana energii mechanicznej i elektrycznej zachodzi bez konieczności stosowania dodatkowych mechanizmów. Współcześnie opracowywane są również nowe materiały piezoelektryczne na bazie polimerów oraz kompozytów ceramicznych [58-61]. Badania nad układami piezoelektrycznymi skupione są obecnie w dużej mierze na poszukiwaniu możliwości ich zastosowania w urządzeniach wtórnego pozyskiwania energii z układów oscylujących w trakcie swojej pracy [23, 54, 55, 63, 66, 69]. Aktywne tłumienie wibracji jest kolejnym zagadnieniem badań, w których duże znaczenie mają materiały piezoelektryczne [6, 12, 14, 25]. Praktycznym przykładem istniejących już rozwiązań technologicznych na bazie prowadzonych badań są folie piezoelektryczne stosowane między innymi w urządzeniach audio do wygłuszania szumu otoczenia [51]. Rozwój teorii sterowania umożliwił natomiast bardziej precyzyjną kontrolę układów piezoelektrycznych przez liczne próby matematycznego modelowania efektu piezoelektrycznego. Stosowane są w tym celu

metody elementów skończonych oraz człony dyskretne, a także metody bazujące na uczeniu maszynowym [8, 9, 17, 18, 24, 37, 44-46, 56, 62, 67, 68].

2.1 Zjawisko piezoelektryczne

Materiały piezoelektryczne posiadają specjalne właściwości przez charakterystyczną strukturę krystaliczną. Spiralna postać cząsteczkowa kryształu piezoelektrycznego w swoim przekroju poprzecznym złożona jest z naprzemiennie ułożonych cząstek o różnym potencjale elektrycznym. Widok struktury pokazano na rysunku 2.1.



Rys. 2.1. Przekrój kryształu piezoelektrycznego przedstawiający zasadę działania prostego (a) oraz odwrotnego (b) efektu piezoelektrycznego [78]

Nacisk wywierany na kryształ powoduje odkształcenie tej struktury, co prowadzi do zmiany w dystrybucji ładunku elektrycznego wewnątrz jej przekroju. Uwzględniając nagromadzenie różnic w potencjale elektrycznym wewnątrz przetwornika, wygenerowane napięcie jest na tyle duże by wywołać przepływ prądu elektrycznego. Zjawisko określono jako prosty efekt piezoelektryczny. Efekt można również odwrócić przykładając do przetwornika napięcie elektryczne. W tym przypadku, różnica napięć wymusza odkształcenie kryształu. Obecnie udokumentowano 32 klasy symetrii układów krystalograficznych, z których 20 spełnia warunek potrzebny do występowania efektu piezoelektrycznego. W zależności od orientacji osi krystalograficznych zjawisko piezoelektryczne może zachodzić w różnych kierunkach wewnątrz przetwornika piezoelektrycznego. Różne metody cięcia kryształu mogą zostać użyte do produkcji elementów piezoelektrycznych odkształcających się w różnych płaszczyznach. Technika ma bezpośrednie zastosowanie np. przy produkcji układów bimorficznych, gdzie stosowane są połączone przetworniki o różnej konfiguracji krystalograficznej do generowania sił zginających. Od rodzaju cięcia zależą również właściwości temperaturowe otrzymanego

elementu, ma więc ono duże znaczenie praktyczne. Kierunek i wielkość ładunku elektrycznego powstałego w elemencie piezoelektrycznym jest wypadkową zarówno kierunku i wartości naprężenia, jak i kierunku osi krystalograficznej w zastosowanym materiale. Jeżeli przetwornik piezoelektryczny podda się ścisnaniu lub rozciąganiu wzdłuż osi zgodnej z krystaliczną strukturą materiału to na powierzchniach prostopadłych do kierunku naprężenia pojawi się ładunek elektryczny. Jeżeli natomiast siły działają w osi prostopadłej, to ładunki pojawiają się na płaszczyznach równoległych do naprężenia.

2.2 Rodzaje elementów piezoelektrycznych

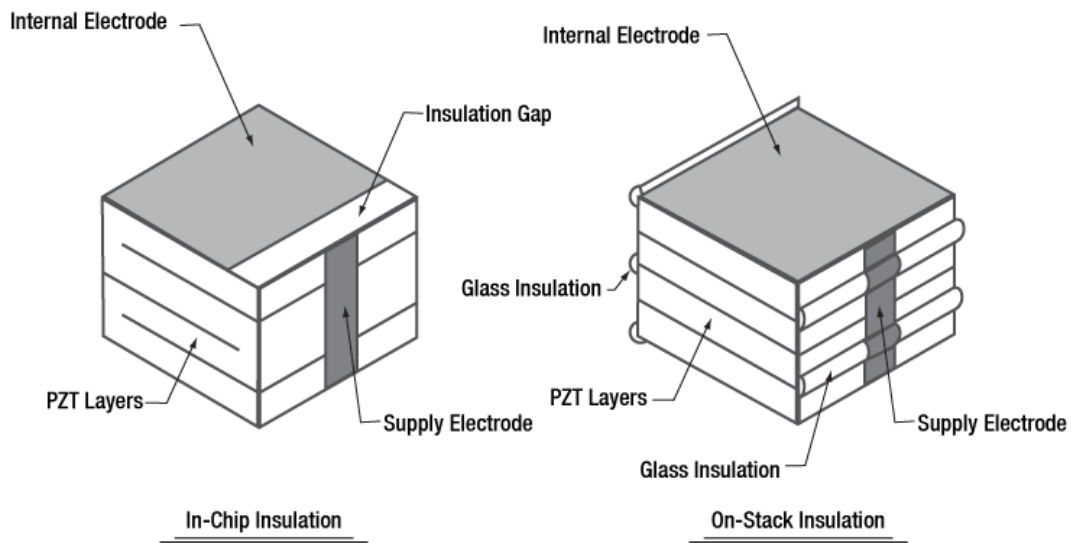
Podzespoły zawierające elementy piezoelektryczne mogą znacząco różnić się kształtem oraz wymiarami w zależności od danego przeznaczenia. Najczęściej stosowanymi współcześnie elementami piezoelektrycznymi są folie, bimorfy, a także elementy o przekroju cylindrycznym lub prostokątnym. W zależności od doboru struktury krystalicznej danego materiału piezoelektrycznego oraz kształtu wykonanego przetwornika, piezoelektryki mogą być bardziej wrażliwe na zginanie lub na ścisnienie. W przypadku elementów, których zadaniem jest wykrywanie bądź generowanie naprężeń zginających, wyspecjalizowane w tym celu układy piezoelektryczne skonstruowano z połączonych ze sobą, cienkich i podłużnych elementów piezoelektrycznych o różnym ułożeniu osi krystalograficznych. Przetworniki przystosowane do generowania bądź badania naprężeń będących pochodną ścisnienia materiału przyjmują najczęściej postać prostych, cylindrycznych lub prostokątnych płytek. Wspominane już wcześniej folie piezoelektryczne to bardzo cienkie warstwy materiału piezoelektrycznego, niekiedy wzmocnione dodatkowo warstwami np. polimerów. Płytki mogą być dodatkowo łączone ze sobą na linii ich najmocniejszego oddziaływania, tworząc tzw. stosy piezoelektryczne. Stosy piezoelektryczne pozwalają na liniowe zwielokrotnienie generowanego przemieszczenia zależne od liczby elementów piezoelektrycznych w stosie. Tworzy się je głównie w przypadku zastosowań, w których piezoelektryki używane są w formie aktuatorów. Bardzo duża część elementów piezoelektrycznych występuje w postaci płytek piezoelektrycznych o przekroju okrągłym lub prostokątnym. Przykłady elementów piezoelektrycznych o różnych kształtach i wymiarach zilustrowano na rysunku 2.2.



Rys. 2.2. Widok przetworników piezoelektrycznych o różnych parametrach geometrycznych [79]

Pojedyncze płytki piezoelektryczne są kompaktowym rozwiązaniem w przypadku urządzeń, których docelowym zadaniem jest generowanie wibracji o wysokiej częstotliwości takich jak np. ultrasonografów. Elementy wykonane ze standardowych materiałów piezoelektrycznych o średnich wartościach współczynnika piezoelektrycznego cechują się jednak niewielką odkształcalnością stymulowaną napięciem. Badania nad rozwojem wydajności pracy materiałów piezoelektrycznych doprowadziły do rozwoju technologii pozwalających na tworzenie elementów piezoelektrycznych o monokrystalicznej postaci, charakteryzujących się wyższymi współczynnikami piezoelektrycznymi. Materiały monokrystaliczne mogą generować proporcjonalnie większe odkształcenia w porównaniu do materiałów o standardowej strukturze ziaren. Obecnie technologie pozwalające na uzyskiwanie ziaren monokrystalicznych są drogie i wymagają zaawansowanej aparatury przez co dostępność tych materiałów jest ograniczona, co wiąże się ze znacznie wyższymi kosztami produkcji. Prosta alternatywą pozwalającą na zwiększenie generowanego przemieszczenia przy zastosowaniu standardowych materiałów piezoelektrycznych jest łączenie płytek w szereg, tworząc tzw. stosy piezoelektryczne. Można tym sposobem łączyć dowolną liczbę płytek piezoelektrycznych, liniowo zwiększając generowane przemieszczenie kosztem całkowitej długości podzespołu. W celu oddzielenia biegunów polaryzacji łączonych płytek wkomponowane w skład stosu są również płytki z materiału dielektrycznego. Istnieje kilka metod łączenia płytek piezoelektrycznych w stosy. W zależności od sposobu ułożenia piezoelektryków oraz warstw izolujących wewnątrz stosu, jednoczesna aktywacja wszystkich płytek zostaje zapewniona przez elektrodę rozciągniętą wzdłuż jednej

z powierzchni stosu. Na rysunku 2.3 przedstawiono dwa przykłady stosowanych w przemyśle stosów płytek piezoelektrycznych.



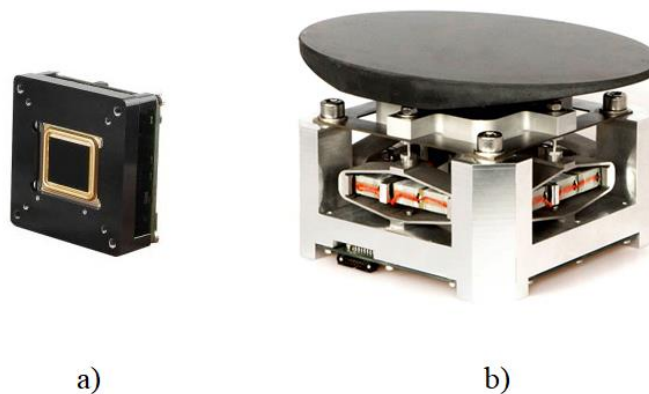
Rys. 2.3. Stosy piezoelektryczne z wewnętrzną (po lewej) oraz zewnętrzną (po prawej) metodą mocowania warstw izolujących oraz elektrod [80]

Przemieszczenia generowane przez stosy piezoelektryczne mogą zostać dodatkowo wzmocnione mechanizmami dźwigniowymi. Odkształcenia powstające wskutek działania odwrotnego efektu piezoelektrycznego charakteryzują się dużą generowaną siłą. Oznacza to, że przetwornik piezoelektryczny można znacznie obciążyć zanim zacznie tracić swoją zdolność do odkształcania się. Zależność zastosowano w mechanizmach dźwigniowych, które kosztem siły odkształcenia z wielokrotnością przemieszczenie generowane przez stos. Układy korzystające z tej prostej zasady nazwano wzmocnionymi aktuatorami piezoelektrycznymi. Kilka przykładów takich układów pokazano na rysunku 2.4. Mechanizmy dźwigniowe zastosowane w układach wzmocnionych mogą się znacząco od siebie różnić w zależności od docelowego przeznaczenia lub nawet konkretnych, pojedynczych aplikacji.

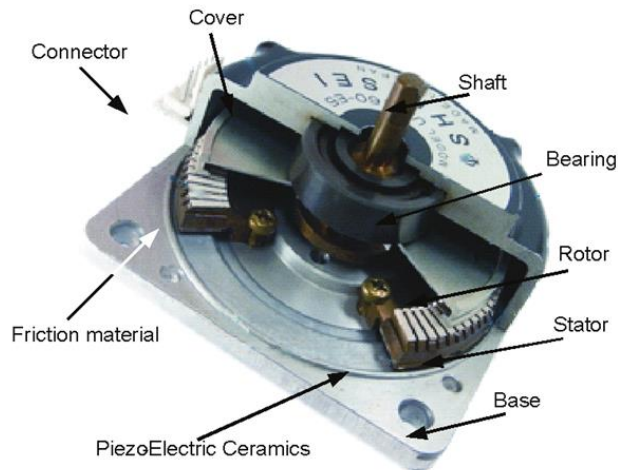


Rys. 2.4. Różnego rodzaju mechanizmy dźwigniowe stosowane we wzmocnionych aktuatorach piezoelektrycznych [38]

Piezoelektryczne układy wzmocnione są bardzo powszechnie stosowane w aplikacjach wymagających precyzyjnego oraz bardzo szybkiego mikro pozycjonowania i sterowania. Wśród przykładów zastosowań przemysłowych można wymienić wieloosiowe mechanizmy pozycjonujące, mechanizmy migawkowe obiektywów do specjalistycznej fotografii, a także migawki sensorów podczerwieni oraz noktowizyjnych. Na rysunku 2.5 zamieszczono przykłady piezoelektrycznego układu migawkowego, stosowanego w sensorach podczerwieni i stołu pozycjonowanego w dwóch osiach przy pomocy piezoelektrycznych aktuatorów wzmocnionych.



Rys. 2.5. Piezoelektryczny mechanizm zapadkowy (a) oraz stół pozycjonowany dwuosiowo (b) [81]



Rys. 2.6. Obrotowy silnik piezoelektryczny [82]

Poprzez odpowiednie ułożenie kolejnych warstw płytek piezoelektrycznych oraz w sprzężeniu z szybkim układem sterującym napięciem możliwe jest także konstruowanie silników obrotowych, działających w oparciu o efekt piezoelektryczny. Istotą działania takiego silnika jest odpowiednie opóźnienie napięcia podawanego na kolejne warstwy pierścienia piezoelektrycznego w celu utworzenia swoistej fali elektromagnetycznej przechodzącej przez całość układu piezoelektrycznego. Fala ta jest w stanie poruszać elementami znajdującymi się przy powierzchni układu przez co możliwe jest generowanie w ten sposób ciągłego przemieszczenia elementu napędzanego. Obecne silniki piezoelektryczne nie posiadają dużego momentu obrotowego, ale są ciągle rozwijane. Przykład tak skonstruowanego silnika piezoelektrycznego pokazano na rysunku 2.6.

2.3 Równania konstytutywne układów piezoelektrycznych

Modelowanie relacji zachodzących wewnątrz przetworników wykonanych z materiałów piezoelektrycznych jest procesem bardziej złożonym od opisu układów wykonanych ze standardowych materiałów. Przyczyniają się do tego silne powiązania odkształceń i naprężeń mechanicznych struktury wewnętrznej z potencjałem elektrycznym gromadzącym się na powierzchni materiału. Dokładne modelowanie zależności zachodzących wewnątrz piezoelektryków wymaga odwołania się do modeli matematycznych opisujących zjawiska zarówno natury czysto mechanicznej, jak i elektrycznej. W drodze analizy i modelowania matematycznego przyjęto układ równań wiążący cechy mechaniczne oraz elektryczne zwany układem równań konstytutywnych piezoelektryki [16, 52, 62].

Dwie ustandaryzowane postaci układu równań konstytutywnych przedstawiają ogólny, matematyczny zapis oddziaływań wewnątrz kryształu piezoelektrycznego:

$$\begin{cases} S_{ij} = S_{ijkl}^E \cdot T_{kl} - d_{kij} \cdot E_k \\ D_i = d_{ikl} \cdot T_{kl} + \varepsilon_{ij}^T \cdot E_k \end{cases}, \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} T_{ij} = c_{ijkl}^E \cdot S_{kl} - e_{kij} \cdot E_k \\ D_i = e_{ikl} \cdot S_{kl} + \varepsilon_{ij}^S \cdot E_k \end{cases}, \quad (2.2)$$

gdzie:

T_{ij} – tensor naprężeń [N/m²],

T_{kl} – tensor naprężeń [N/m²],

c_{ijkl}^E – tensor sztywności mechanicznej [N/m²],

S_{ijkl}^E – tensor podatności mechanicznej [N/m²],

S_{ij} – skalarny tensor odkształceń,

S_{kl} – skalarny tensor odkształceń,

$e_{kij} = [e]^T$ – transponowany tensor sztywności piezoelektrycznej [C/m²],

$e_{ikl} = [e]$ – tensor sztywności piezoelektrycznej [C/m²],

$d_{kij} = [d]^T$ – transponowany tensor podatności piezoelektrycznej [C/m²],

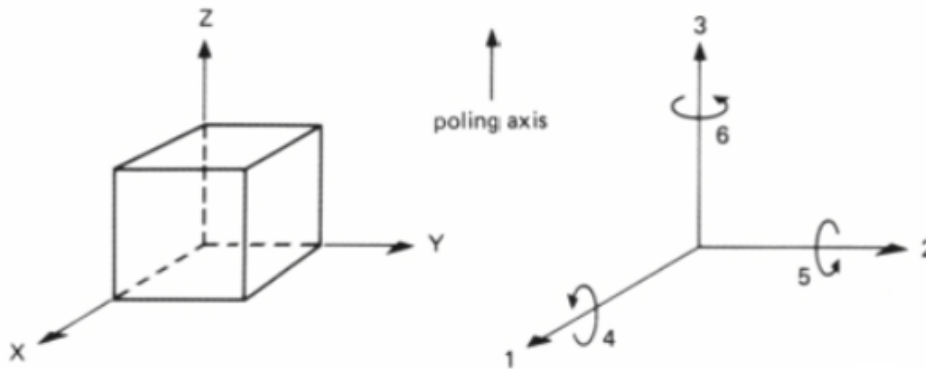
$d_{ikl} = [d]$ – tensor podatności piezoelektrycznej [C/m²],

E_k – wektor natężenia pola elektrycznego [V/m],

D_i – wektor indukcji elektrycznej [C/m²],

ε_{ij}^S – tensor przenikalności elektrycznej [F/m].

Każdy z czynników wchodzących w skład równań konstytutywnych występuje w postaci tensora lub wektora. Układy tensorowe używane są do określania właściwości względem rozpatrywanej kombinacji osi danego przetwornika piezoelektrycznego. W celu uproszczenia zapisu relacji pomiędzy poszczególnymi osiami, przyjęto zasadę, według której właściwości materiału względem poszczególnych osi oznaczono cyframi 1-3, natomiast relacje odnoszące się do momentów względem tych osi oznaczono cyframi 4-6. Na rysunku 2.7 przedstawiono graficznie przyjęty sposób oznaczania poszczególnych zmiennych.



Rys. 2.7. Graficzna reprezentacja przyjętej konwencji oznaczania oddziaływań w poszczególnych osiach wewnątrz przetwornika piezoelektrycznego [42]

Na podstawie przyjętej konwencji oznaczeń powstała uproszczona oraz rozszerzona notacja Voigta, dzięki której możliwe jest ograniczenie liczby indeksów stosowanych do opisu oddziaływań wewnątrz materiału piezoelektrycznego. Zamiana pomiędzy rozszerzoną oraz uproszczoną notacją Voigta przedstawiono na przykładzie tensora naprężeń:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{13} \\ T_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Uproszczona notacja ma szczególne znaczenie w przypadku własności, gdzie relacje mogą zachodzić pomiędzy kombinacją różnych konfiguracji osi. Zapis takich relacji przy zastosowaniu rozszerzonej notacji może sprawiać problemy i być trudny w interpretacji. Dobrym przykładem zalet stosowania uproszczonej notacji Voigta jest tensor sztywności mechanicznej:

$$\begin{bmatrix} c_{11}^E \\ c_{12}^E \\ c_{13}^E \\ c_{44}^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1111}^E \\ c_{1122}^E \\ c_{1133}^E \\ c_{2323}^E \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Stosując uproszczoną notację możliwe jest przedstawienie układu równań konstytutywnych (2.2) jako układu równań macierzowych:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^E & c_{22}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}^E - c_{12}^E}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{k_1} \\ E_{k_2} \\ E_{k_3} \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{11}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{k_1} \\ E_{k_2} \\ E_{k_3} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Tensorowa postać równań konstytutywnych jest uogólnionym zapisem relacji zachodzących wewnątrz materiałów piezoelektrycznych względem dowolnego układu osi. Rozwiązanie pełnego układu równań jest jednak bardzo złożonym zadaniem z uwagi na duży stopień skomplikowania obliczeń i zależność rozwiązania od dużego zbioru zmiennych wartości. Praktyczne zastosowania układu równań konstytutywnych ograniczają się do poszczególnych przypadków konfiguracji osi. Najczęściej rozpatrywanymi przypadkami w praktyce są opisane w sposób symboliczny „tryby 33 oraz 31”. Skrót „33” oznacza przypadek, w którym na płytkę piezoelektryczną oddziałują tylko naprężenia ściskające w osi odpowiadającej parametrowi grubości rozpatrywanej płytki. Drugie oznaczenie „31” używane jest w odniesieniu do przypadku, w którym poszczególne warstwy materiału piezoelektrycznego są rozciągane lub ściskane, zwykle poprzez naprężenia zginające. Obie konfiguracje są bardzo często stosowane w aplikacjach skupionych na odzyskiwaniu energii oraz generowaniu wymuszeń mechanicznych [54, 55, 66, 67]. W omawianych przypadkach, równania konstytutywne przyjmują postać uproszczoną w odniesieniu do konkretnego, rozpatrywanego trybu działania płytki. Równanie (2.1) w przypadku oddziaływania „33” zwanego „trybem poprzecznym” przyjmuje postać równania (2.7). W przypadku trybu „31” charakteryzującego się oddziaływaniem wzdłużnym równanie (2.1) przyjmuje natomiast postać równania (2.8). Omówione równania przedstawiono w następującej postaci:

$$\begin{cases} S_1 = s_{11}^E \cdot T_1 + d_{31} \cdot E_{k_3} \\ D_3 = d_{31} \cdot T_1 + \varepsilon_{33}^T \cdot E_{k_3} \end{cases}, \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} S_3 = s_{33}^E \cdot T_3 + d_{33} \cdot E_{k_3} \\ D_3 = d_{33} \cdot T_3 + \varepsilon_{33}^T \cdot E_{k_3} \end{cases}, \quad (2.8)$$

gdzie:

S_1 – odkształcenie poprzeczne przetwornika piezoelektrycznego [m/m],

S_3 – odkształcenie wzdłużne przetwornika piezoelektrycznego [m/m],

T_1 – naprężenie poprzeczne przetwornika piezoelektrycznego [N/m²],

T_3 – naprężenie wzdłużne przetwornika piezoelektrycznego [N/m²],

D_3 – wektor indukcji elektrycznej [C/m²],

E_{k_3} – wektor natężenia pola elektrycznego [V/m],

d_{ijk} – stała piezoelektryczna dla relacji odkształcenie – ładunek elektryczny [C/N],

d_{31} – stała piezoelektryczna dla przypadku odkształcenia w osi 1 i oddziaływania pola elektrycznego w osi 3,

d_{33} – stała piezoelektryczna dla przypadku odkształcenia w osi 3 oraz oddziaływania pola elektrycznego w osi 3,

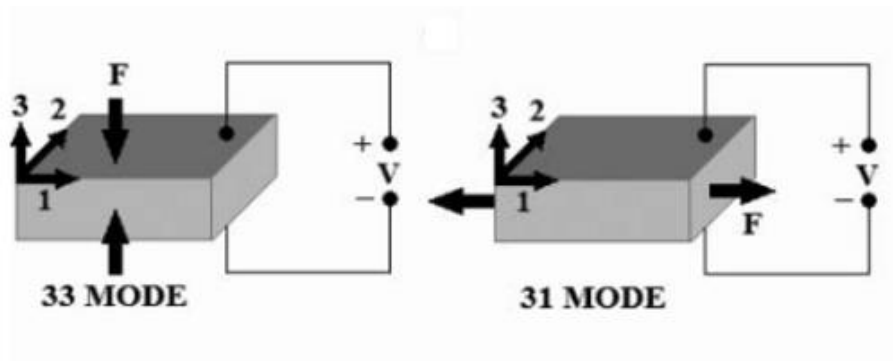
s_{ijkl}^E – tensor podatności mechanicznej [m²/N],

ε_{33}^T – przenikalność elektryczna w przypadku stałego naprężenia [F/m].

Z uwagi na to, że oba przytoczone równania konstytutywne stosują wariant (2.1) układu równań konstytutywnych, matematyczny zapis tensora podatności mechanicznej przyjmuje postać:

$$s^E = \begin{bmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ s_{12}^E & s_{22}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ s_{13}^E & s_{13}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(s_{11}^E - s_{12}^E) \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Zasada działania płytki piezoelektrycznej przy drganiach wzdłużnych oraz poprzecznych przedstawiono graficznie na rysunku 2.8.



Rys. 2.8. Tryb poprzeczny „33” oraz wzdłużny „31” [55]

Często przywoływanym parametrem w specyfikacji przetworników wykonanych z materiałów piezoelektrycznych jest współczynnik sprzężenia elektromechanicznego (electromechanical coupling factor), oznaczany symbolem „ k_{ij} ”. Współczynnik charakteryzuje zależność pomiędzy stałą piezoelektryczną, podatnością mechaniczną oraz przenikalnością elektryczną. Indeksy współczynnika sprzężenia elektromechanicznego przyjmowane są w sposób analogiczny do uproszczonej notacji Voigta (2.4). Wzory opisujące współczynnik sprzężenia trybu wzdłużnego oraz poprzecznego przyjmują postać:

$$k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \cdot \epsilon_{33}^T}, \quad (2.10)$$

$$k_{33}^2 = \frac{d_{33}^2}{s_{33}^E \cdot \epsilon_{33}^T}. \quad (2.11)$$

Współczynnik sprzężenia stosowany jest w celu oszacowania przybliżonej wydajności pracy płytki piezoelektrycznej przy częstotliwościach dużo niższych niż częstotliwość rezonansowa danego przetwornika piezoelektrycznego. Przy założeniu braku strat energetycznych w rozpatrywanym układzie piezoelektrycznym, współczynnik sprzężenia odpowiada wydajności wymiany energii kinetycznej oraz elektrycznej wewnątrz struktury krystalicznej [53]. Kolejnym istotnym parametrem wymienianym w specyfikacji technicznej piezoelektryków jest współczynnik jakości mechanicznej (mechanical quality factor) oznaczany symbolem „ Q_m ”. Określa wydajność energetyczną przetwornika piezoelektrycznego w przypadku ruchu oscylacyjnego. Wartość współczynnika jest odwrotnie proporcjonalna do strat energii w przypadku układu oscylującego, na który przestał oddziaływać sygnał wymuszający.

PROPERTY	UNIT	SYMBOL	SM111	SM112	SM118	SM121	SM211	SM311	SM410	SM411
EQUIVALENCE		Modif. PZT-4	N/A	PZT-8	PZT-4	N/A	PZT-5H	PZT-5J	PZT-5J	
		Modif. Navy Type I	N/A	Navy Type III	Navy Type I	N/A	Navy Type VI	Navy Type V	Navy Type V	
Electromechanical coupling coefficient		K_p	0.58	0.59	0.51	0.54	0.67	0.65	0.64	0.64
		K_t	0.45	0.46	0.40	0.43	0.35	0.37	0.45	0.45
		K_{31}	0.34	0.35	0.30	0.32	0.41	0.38	0.36	0.37
Frequency constant	Hz • m	N_p	2200	2150	2340	2290	1940	1980	2030	2060
		N_t	2070	2050	2090	2080	1920	1950	2050	2000
		N_{31}	1680	1600	1700	1690	1410	1450	1460	1500
Piezoelectric constant	$\times 10^{-12} \text{m/v}$	d_{33}	320	360	250	300	650	600	500	500
		d_{31}	-140	-155	-100	-130	-320	-270	-210	-210
	$\times 10^{-3} \text{Vm/N}$	g_{33}	25	24.7	25.6	26.4	13.6	19.4	23.3	24.2
		g_{31}	-11.0	-10.6	-12.5	-12.9	-6.7	-9.2	-10.3	-10.4
Elastic Constant	$\times 10^{10} \text{N/m}^2$	Y_{33}	7.3	7.2	7.4	7.3	5.1	5.3	5.6	5.4
		Y_{11}	8.6	8.4	8.7	8.6	6.2	7.2	6.5	7.4
Mechanical Quality Factor	-----	Q_m	1800	1600	1200	1000	60	80	60	85
Dielectric Constant	@1KHz	$\epsilon_{T33/\epsilon 0}$	1400	1600	1100	1300	5400	3500	2000	2100
Dissipation Factor	%@1KHz	$\tan \delta$	0.4	0.6	0.2	0.4	3.0	2.5	2.0	2.0
Curie Temperature	°C	T_c	320	320	300	320	165	220	320	320
Density	g/cm^3	ρ	7.9	7.9	7.6	7.8	7.8	7.8	7.7	7.8

Rys. 2.9. Specyfikacja techniczna materiałów piezoelektrycznych oferowanych przez firmę *STEMiNC* [83]

Materiały o wysokim współczynniku jakości mechanicznej wolniej wytracają energię oscylacji od materiałów o niższych współczynnikach. Współczynnik określa więc straty energetyczne wewnątrz przetwornika piezoelektrycznego i wyznaczany jest metodami empirycznymi, polegającymi na porównaniu wielkości napięcia sterującego z amplitudą wibracji przy częstotliwościach rezonansowych badanego elementu piezoelektrycznego. Istnieją również metody bazujące na wskazaniach temperaturowych służące do wyznaczania jakości mechanicznej poprzez zliczanie strat energetycznych w postaci wydzielanego ciepła [68]. Trzecim istotnym parametrem specyfikacji elementu piezoelektrycznego jest moduł Younga. W niektórych przypadkach podawana jest także temperatura Curie, przy której dany materiał piezoelektryczny traci swoją polaryzację. Dodatkowe elementy specyfikacji danego układu piezoelektrycznego zależą już od jego konkretnych zastosowań. Przykładowa specyfikacja elementu piezoelektrycznego z często spotykanym zbiorem parametrów określających ten typ materiału pokazano na rysunku 2.9.

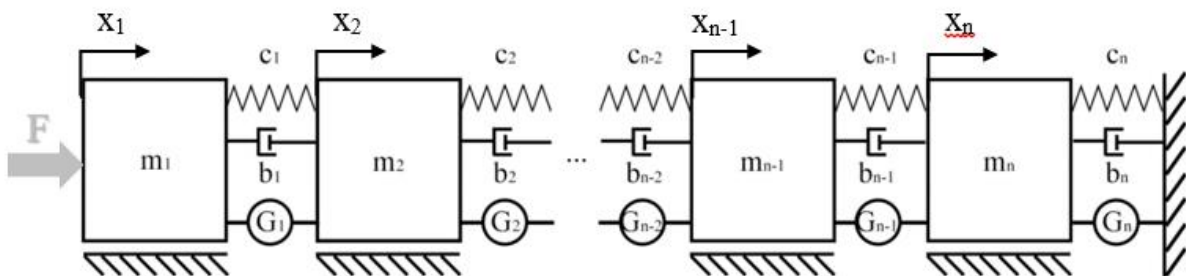
3. Metoda grafów i liczb strukturalnych

Modelowanie układów mechanicznych metodą grafów pozwala na czytelną graficzną reprezentację zjawisk zachodzących wewnątrz badanego układu. Wszystkie zależności pomiędzy członami opisywanego układu oraz siły zewnętrzne opisane są w tej metodzie przy pomocy krawędzi. Przemieszczenia liniowe lub kątowe w układach mechanicznych, a także napięcia lub prądy w układach elektrycznych są natomiast odwzorowane w wierzchołkach grafu. Metoda grafów jest wydajną obliczeniowo metodą modelowania układów ze względu na bardziej przejrzystą i intuicyjną reprezentację oddziaływań [26]. Można ją również stosować zamiennie z innymi metodami otrzymując złożone modele matematyczne.

Profesor Stanisław Bellert w swojej pracy naukowej podjął się zagadnienia analizy grafów tworząc dedykowaną algebrę liczb strukturalnych [26]. Liczby strukturalne stanowią numeryczny zapis zależności wewnątrz układu odzwierciedlonych pod postacią krawędzi w metodzie graficznej. Metodę grafów oraz liczb strukturalnych wstępnie opracowano do analizy dwójników elektrycznych typu „czarnej skrzynki” tzn. takich sieci elektrycznych, w których nieznanym jest rozkład oraz liczba elementów roboczych, a znana jest jedynie ich zależność wejściowo - wyjściowa. Algebra liczb strukturalnych oferuje prostą metodę analizy poprzez zastosowanie znormalizowanych algorytmów [26, 35, 36]. Główną zaletą metody jest większa przejrzystość, zwłaszcza w przypadku złożonych układów o dużej liczbie stopni swobody. Metodę można również poddać algorytmizacji i wspomagać obliczenia komputerowo. Grafy oraz liczby strukturalne zaadaptowano z czasem do analizy przypadków układów mechanicznych [35, 36]. Od lat 70-tych na Politechnice Śląskiej trwają prace nad zastosowaniem grafów oraz liczb strukturalnych do analizy drgań układów mechanicznych [18, 20, 27-30, 31, 32, 35, 36, 73]. Wymienione prace były podstawą do podjęcia próby analizy przydatności tej metody do modelowania układów piezoelektrycznych.

3.1 Graficzna reprezentacja oddziaływań w układach

W celu utworzenia grafu relacji badanego układu mechanicznego bądź elektrycznego, konieczne jest wstępne zidentyfikowanie wszystkich stopni swobody (możliwych przemieszczeń bądź różnic potencjału) oraz oddziaływań. Przykładem jest mechaniczny układ kaskadowy o nieskończonej liczbie połączonych ze sobą szeregowo zespołów elementów inercyjnych, sprężystych oraz tłumiących, posiadający także wzbudzenia aktywne, co pokazano na rysunku 3.1.



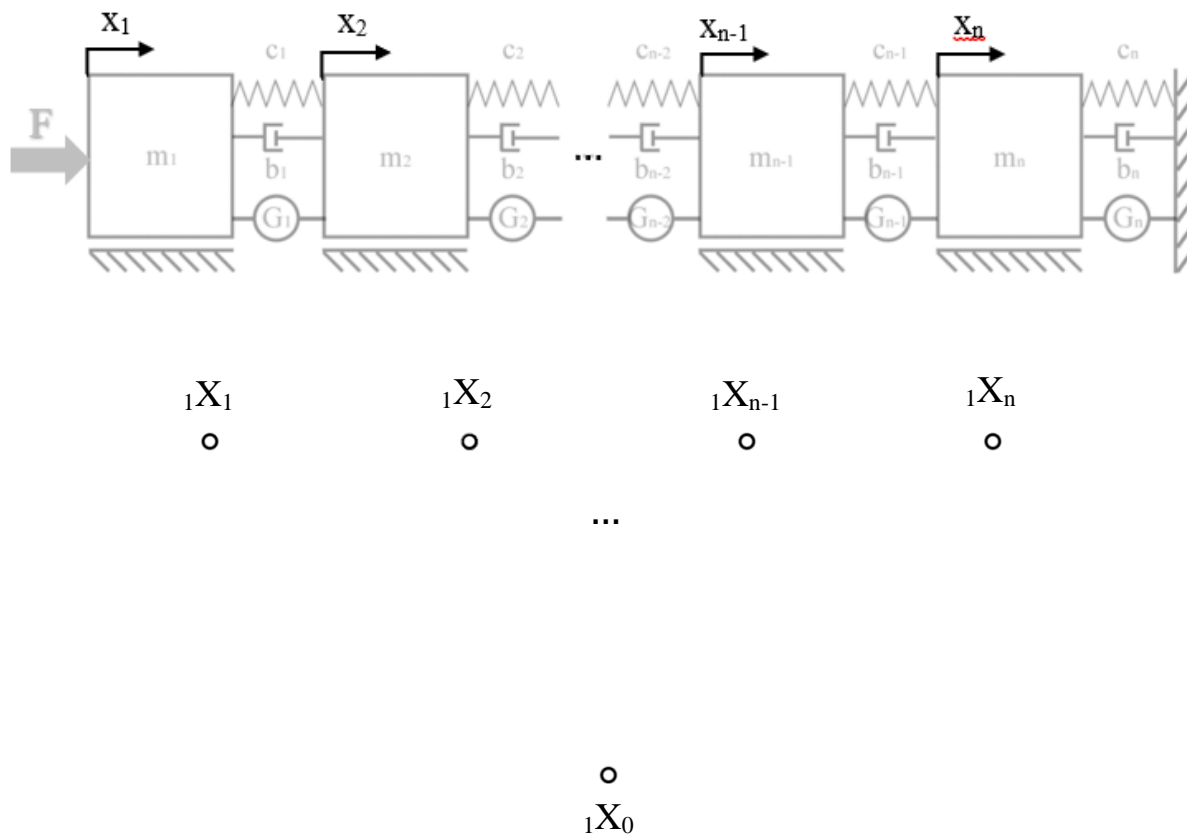
Rys. 3.1. Kaskadowy układ mechaniczny o nieskończonej liczbie stopni swobody w jednej osi, utwierdzony z jednej strony, posiadający elementy inercyjne, sprężyste i tłumiące oraz wzbudzenia aktywne

Kolejne elementy inercyjne poruszające się swobodnie w jednej osi oznaczono literami „m” z indeksami od 1 do n. Analogicznie, elementy sprężyste oznaczono indeksowanymi literami „c”. Elementy tłumiące oznaczono indeksowanymi literami „b”, a wzbudzenia aktywne oznaczono przy użyciu indeksowanych liter „G”.

Pierwszym etapem w procesie tworzenia grafu jest identyfikacja wszystkich stopni swobody badanego układu. W rozpatrywanym przypadku ogólnym ruchome elementy poruszają się w jednej osi. Nieskończona liczba elementów inercyjnych oznacza jednak, że liczba przemieszczeń będzie nieskończona. Do oznaczenia poszczególnych przemieszczeń przyjęto symboliczne oznaczenie wierzchołków ${}_1X_y$ gdzie „1” jest indeksem wskazującym na zbiór wierzchołków grafu, natomiast „y” wskazuje kolejne wierzchołki. Do oznaczenia oddziaływań pochodzących spoza układu oraz oznaczenia utwierdzeń przeznaczony jest wierzchołek oznaczony jako ${}_1X_0$, będący tzw. wierzchołkiem bazowym, używanym do oznaczania utwierdzenia sztywnego układu. Na rysunku 3.2 zamieszczono graficzną reprezentację symbolicznego zapisu wierzchołków. Przemieszczenia poszczególnych elementów inercyjnych, do których odnoszą się wierzchołki zaznaczono kolorem czarnym. Pozostałe elementy układu oznaczono kolorem szarym.

Przemieszczenia układu odzwierciedlone w wierzchołkach grafu umieszczono w zbiorze:

$$\{X_0; X_1; X_2; \dots; X_{n-1}; X_n\} \in {}_1X. \quad (3.1)$$



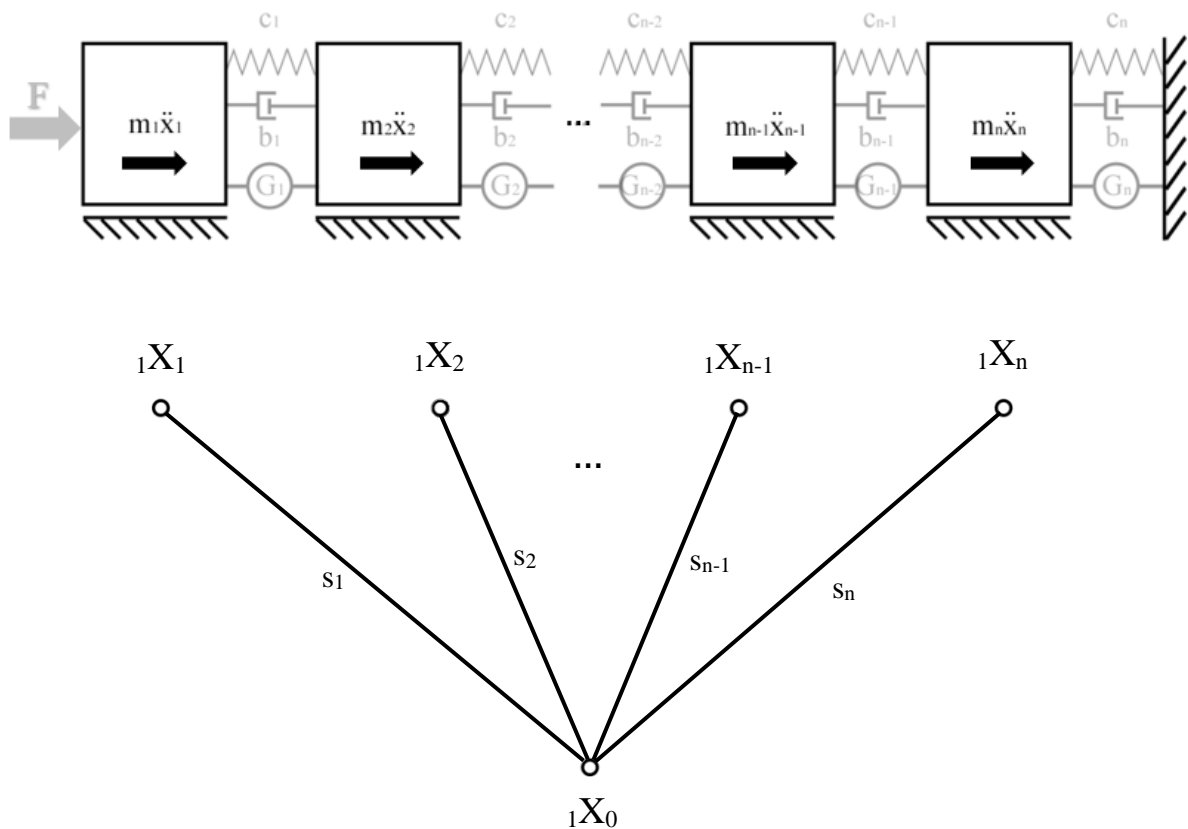
Rys. 3.2. Reprezentacja stopni swobody układu przy pomocy wierzchołków grafu

Po określeniu zbioru wierzchołków odpowiadającego zbiorowi przemieszczeń omawianego układu kolejnym krokiem jest zdefiniowanie zbiorów krawędzi opisujących oddziaływania układu mające wpływ na poszczególne przemieszczenia. Zbiór wszystkich krawędzi grafu użytych w tym celu oznaczany jest symbolicznie jako ${}_2X_y$, gdzie y znów użyto w formie indeksu do oznaczania kolejnych oddziaływań w modelu. Siły wchodzące w skład zbioru ${}_2X$ oznaczane są symbolicznie przy użyciu litery „s”. W celu usystematyzowania procesu tworzenia zbioru ${}_2X$, rozbito go dodatkowo na mniejsze zbiory dedykowane poszczególnym oddziaływaniom o wspólnym pochodzeniu. Całość zbioru ${}_2X$ będzie zatem sumą podzbiorów:

$${}_1X \cup {}_2X \cup {}_3X \cup {}_4X \cup {}_5X \cup {}_6X = {}_2X. \quad (3.2)$$

Podzbiór oddziaływań ${}_2X$ oznaczonych jako ${}_1X$ zawiera krawędzie opisujące wszystkie siły bezwładności elementów inercyjnych będących częścią rozważanego układu. Krawędzie odpowiadające siłom bezwładności łączą wierzchołki reprezentujące poszczególne przemieszczenia inercyjnych elementów układu z wierzchołkiem bazowym ${}_1X_0$. Na rysunku 3.3 zaznaczono krawędzie grafu rozpatrywanego układu wskazujące omawiane siły bezwładności. Matematyczny zapis tego podzbioru krawędzi opisano jako:

$$\{s_1; s_2; \dots; s_{n-1}; s_n\} \in {}_1X. \quad (3.3)$$

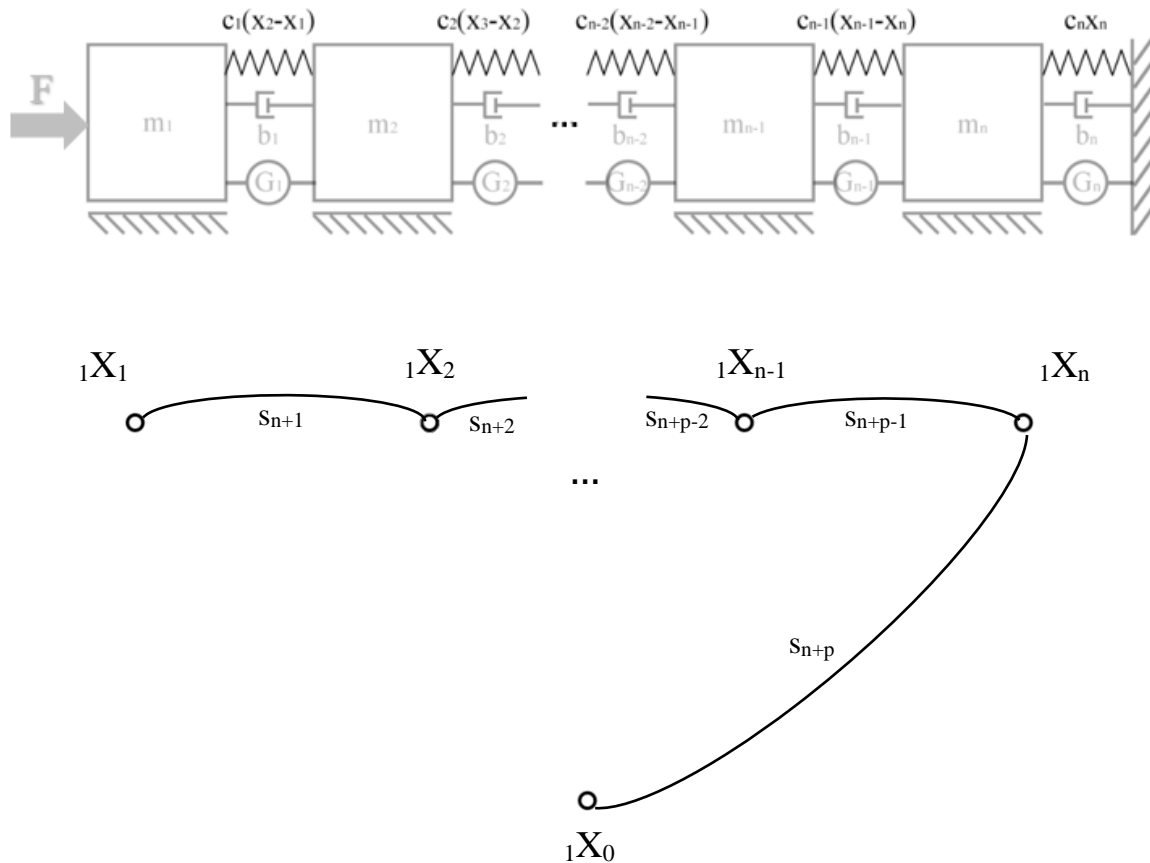


Rys. 3.3. Zbiór krawędzi grafu odpowiadający siłom bezwładności

Odwierciedlenie graficzne wartości naprężenia elementów sprężystych łączących poszczególne elementy inercyjne rozpatrywanego układu tworzy podzbiór krawędzi grafu oznaczony jako ${}_2X$. Krawędzie odpowiadające wartościom naprężenia łączą pary kolejnych wierzchołków odpowiadających kolejnym przemieszczeniom elementów inercyjnych układu. Ostatnia (lub pierwsza) krawędź, odpowiadająca połączeniu sprężystemu z utwierdzeniem sztywnym układu, łączy ostatni (lub pierwszy) wierzchołek z wierzchołkiem bazowym grafu.

Krawędzie grafu z podzbioru 2X pokazano na rysunku 3.4. Matematyczna reprezentacja podzbioru przyjmuje postać:

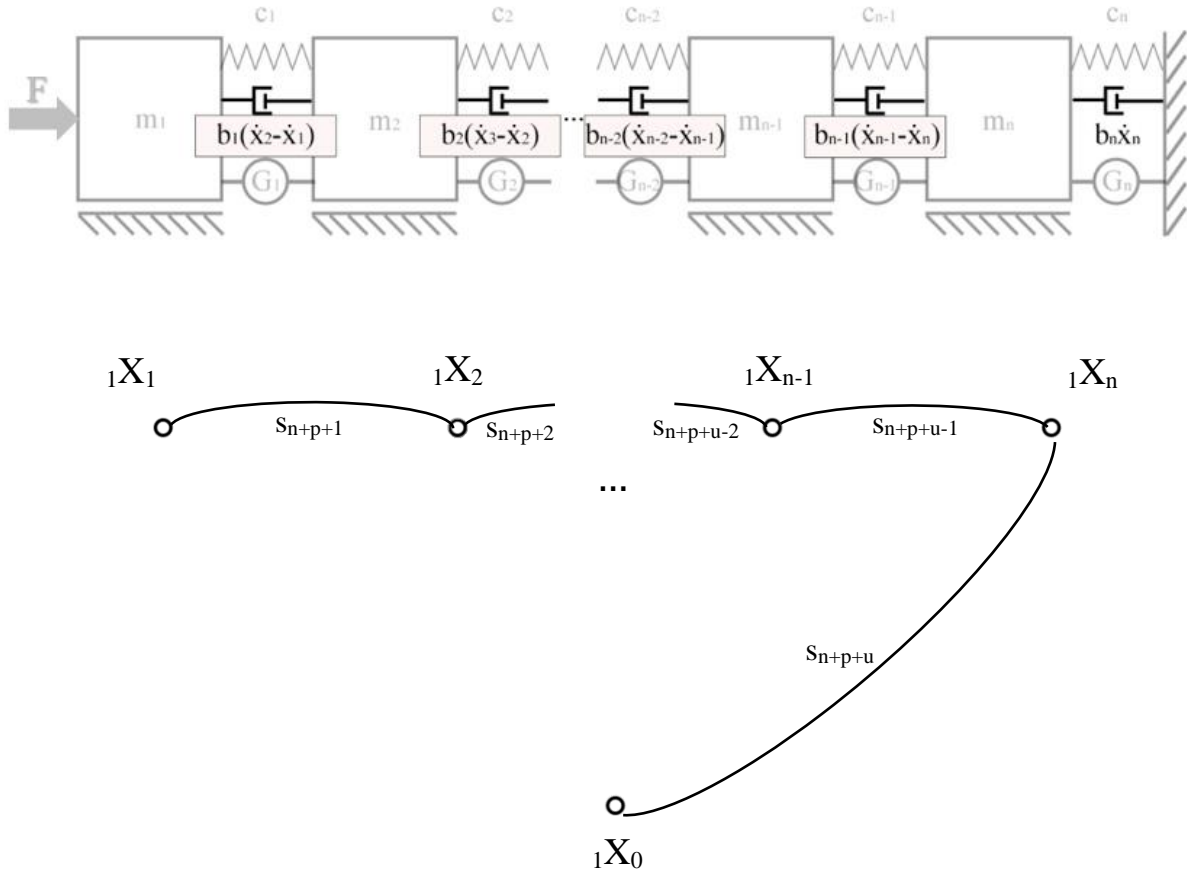
$$\{s_{n+1}; s_{n+2}; \dots; s_{n+p-1}; s_{n+p}\} \in {}^2X. \quad (3.4)$$



Rys. 3.4. Zbiór krawędzi grafu odpowiadający naprężeniom

Krawędzie odzwierciedlające wartości tłumienia pomiędzy elementami inercyjnymi w układzie ujęto w zbiorze oddziaływań 3X . Krawędzie łączą pary wierzchołków odwzorowujących przemieszczenia elementów inercyjnych w rozpatrywanym układzie kaskadowym. Łączą one zatem równoległe te same pary wierzchołków, co krawędzie opisujące naprężenia wewnątrz układu. Na rysunku 3.5 zaprezentowano graficznie podzbiór krawędzi 3X opisany matematycznie jako:

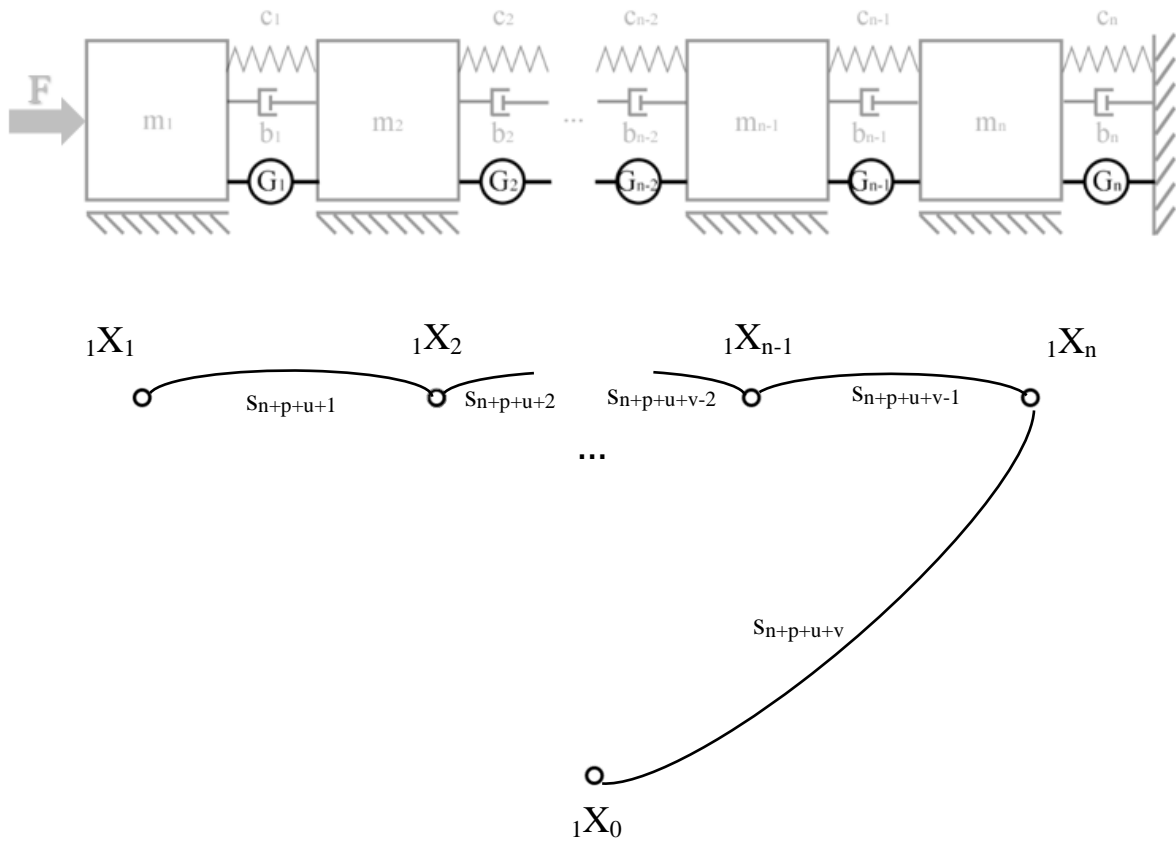
$$\{s_{n+p+1}; s_{n+p+2}; \dots; s_{n+p+u-1}; s_{n+p+u}\} \in {}^3X. \quad (3.5)$$



Rys. 3.5. Zbiór krawędzi grafu odpowiadający tłumieniu pasywnemu wewnątrz układu

Następny podzbiór krawędzi 4_2X dedykowany jest reprezentacji graficznej wzbudzeń aktywnych w rozpatrywanym układzie. Tak samo jak w przypadku podzbiorów odpowiadających naprężeniom oraz tłumieniu, krawędzie wzbudzeń aktywnych łączą kolejne pary wierzchołków grafu równoległe z pozostałymi krawędziami należącymi do omawianych już zbiorów. Na rysunku 3.6 przedstawiono graficzny zapis podzbioru 4_2X wyrażony jako:

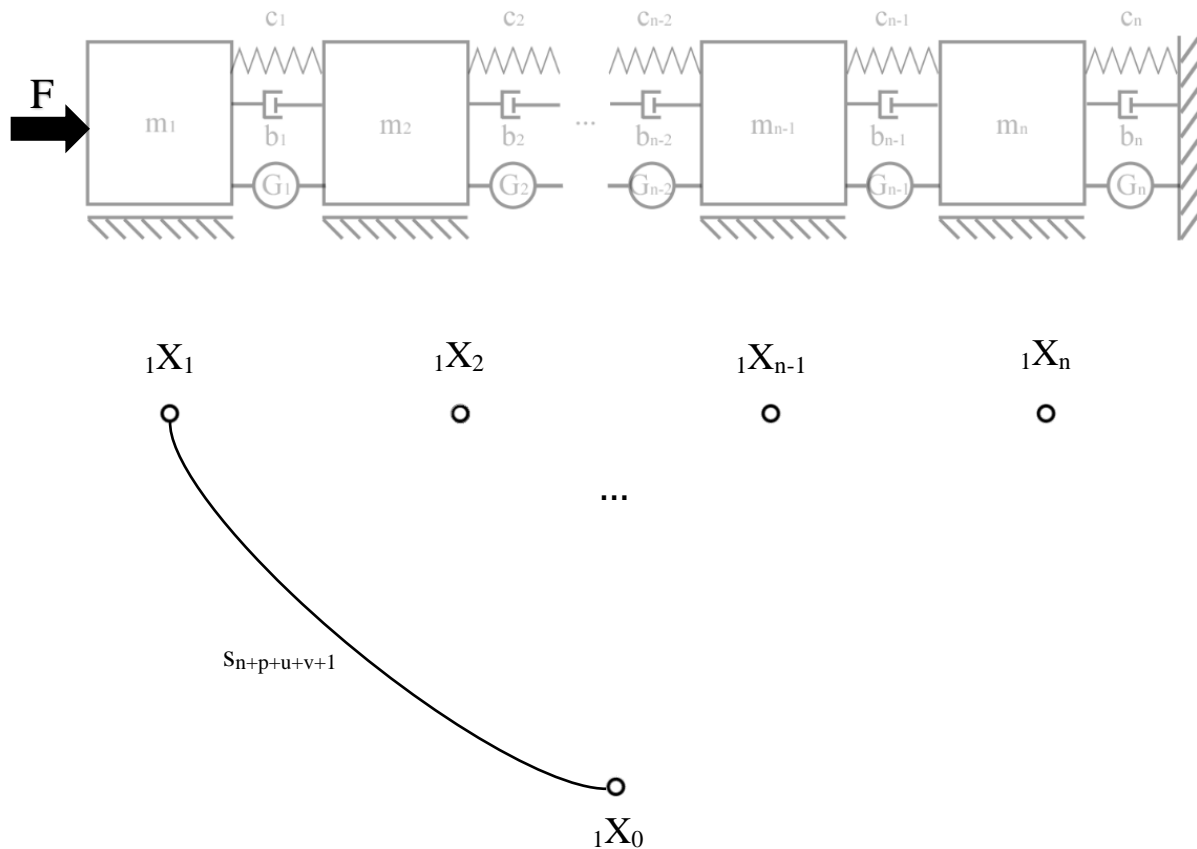
$$\{s_{n+p+u+1}; s_{n+p+u+2}; \dots; s_{n+p+u+v-1}; s_{n+p+u+v}\} \in {}^4_2X. \quad (3.6)$$



Rys. 3.6. Zbiór krawędzi grafu odpowiadający wzbudzeniom aktywnym

Poza wymienionymi dotychczas zbiorami naprężeń, wartościami tłumienia, czy wzbudzeniami aktywnymi, w rozpatrywanych układach mogą też występować dodatkowe siły zewnętrzne. W celu rozdzielania sił pochodzących z różnych źródeł przeznaczono osobny podzbiór krawędzi grafu oznaczony jako 5_2X . Siły zewnętrzne, ze względu na ich źródło, które znajduje się poza rozpatrywanym układem, opisywane są analogicznie do momentów bezwładności, tzn. dane przemieszczenie opisane wierzchołkiem grafu, na które działa siła zewnętrzna, tworzy parę z wierzchołkiem bazowym, połączoną krawędzią odpowiadającą danej sile. Zapis krawędzi grafu zbioru 5_2X przedstawiono na rysunku 3.7. Matematyczną reprezentację zbioru wyrażono jako:

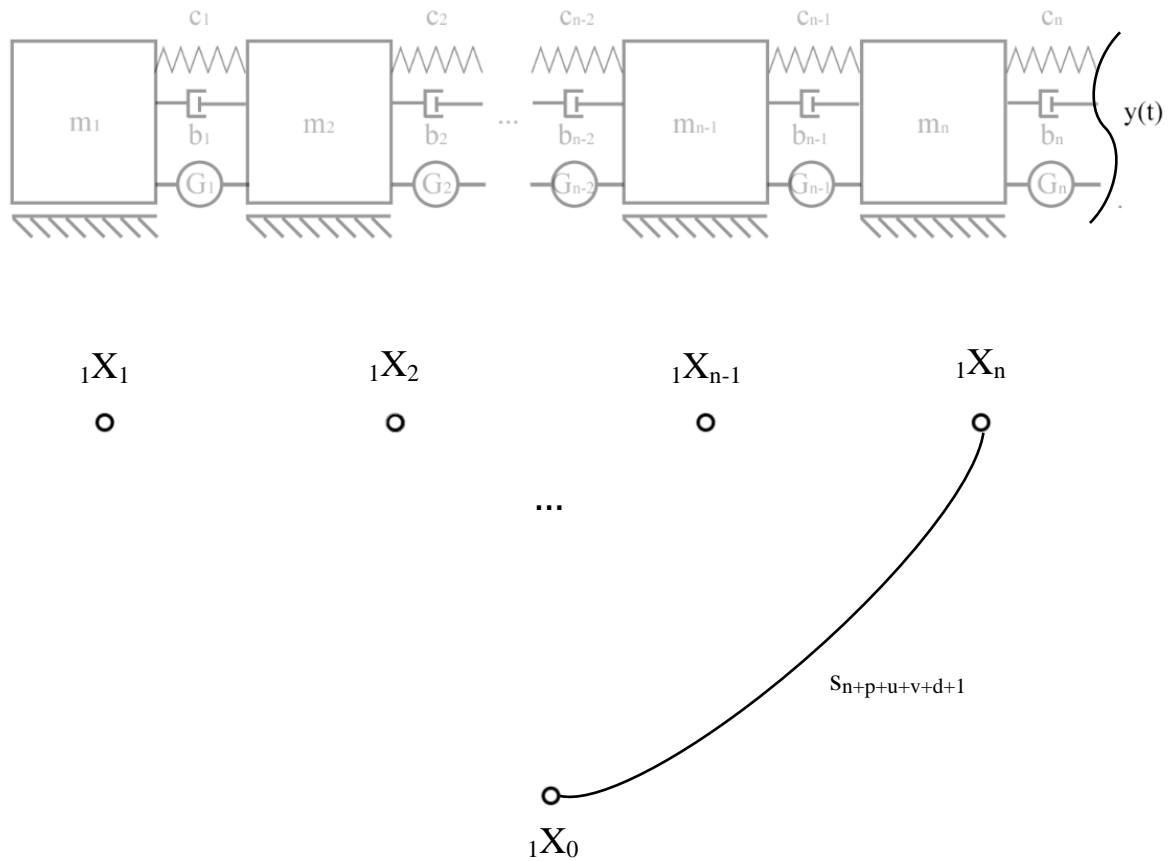
$$\{s_{n+p+u+v+1}; s_{n+p+u+v+2}; \dots; s_{n+p+u+v+d-1}; s_{n+p+u+v+d}\} \in {}^5_2X. \quad (3.7)$$



Rys. 3.7. Zbiór krawędzi odpowiadających wzbudzeniom dynamicznym pochodzącym z zewnątrz układu

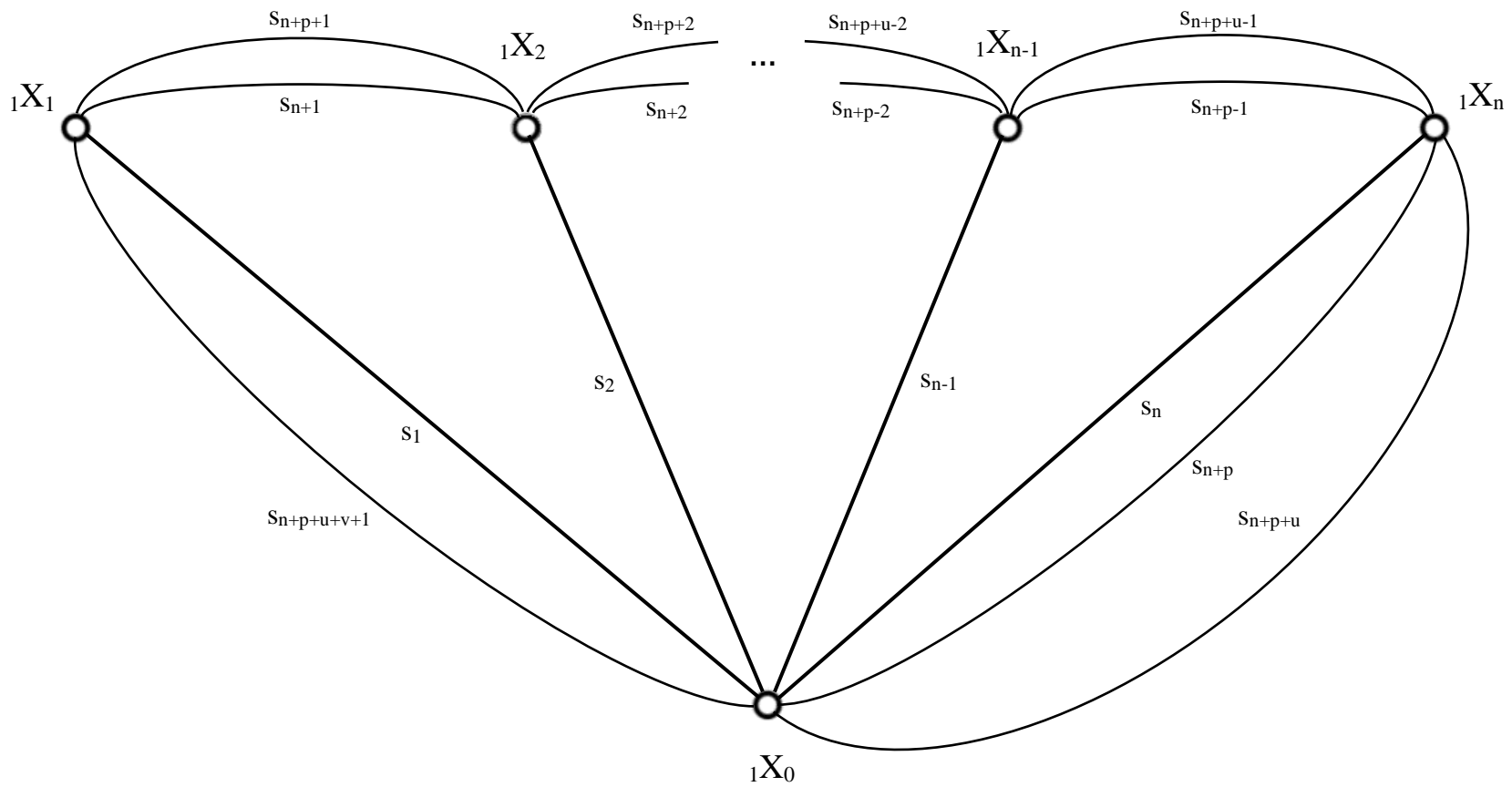
Kolejnym możliwym przypadkiem wzbudzenia pochodzącego spoza układu może być wzbudzenie kinematyczne. Wzbudzenie takie jest efektem przytwierdzenia rozpatrywanego układu do powierzchni drgającej z określoną częstotliwością oraz amplitudą. Oddziaływania pomiędzy elementami łączącymi układ z daną powierzchnią są kolejnym zestawem sił opisanych dodatkowymi krawędziami. W przypadku, gdy układ wzbudzany jest kinematycznie poprzez utwierdzenie do przemieszczającego się ośrodka, generowane siły opisywane są przez krawędzie należące do podzbioru 6_2X . Rysunek 3.8 zawiera graficzny zapis krawędzi ujętych w podzbiore:

$$\{s_{n+p+u+v+d+1}; s_{n+p+u+v+d+2}; \dots; s_{n+p+u+v+d+k-1}; s_{n+p+u+v+d+k}\} \in {}^6_2X. \quad (3.8)$$



Rys. 3.8. Zbiór krawędzi odpowiadających wzbudzeniom kinematycznym pochodzącym z zewnątrz układu

Łącząc ze sobą dowolną liczbę oddziaływań z każdego z wymienionych podzbiorów możliwe jest uzyskanie pełnego obrazu oddziaływań zachodzących wewnątrz rozpatrywanego układu. Na rysunku 3.9 przedstawiono kompletny graf układu będącego przykładem o nieskończonej liczbie przemieszczających się w jednej osi elementów inercyjnych, w którym uwzględniono wszystkie z wymienionych podzbiorów krawędzi opisujących oddziaływania (3.2).



Rys. 3.9. Kompletna postać grafu opisującego układ kaskadowy o nieskończonej liczbie stopni swobody, posiadający elementy inercyjne, sprężyste oraz tłumiące, a także wzbudzenia aktywne oraz siły zewnętrzne

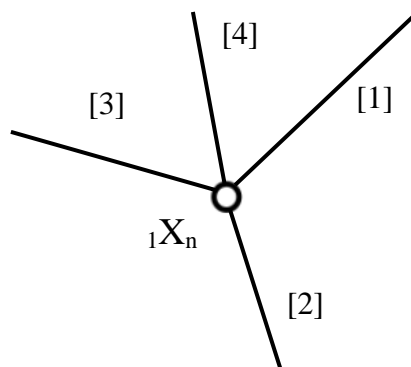
Jest to pełna postać grafu opisującego ogólny, mechaniczny układ kaskadowy. Graf przedstawiony na rysunku 3.9 może być stosowany do odzwierciedlenia oddziaływań zachodzących w analogicznych układach elektrycznych przez zastosowanie analogii elektrycznej lub prądowej pomiędzy układami mechanicznymi oraz elektrycznymi.

3.2 Algebra liczb strukturalnych

Liczby strukturalne są numerycznym zapisem struktury rozpatrywanego grafu. Przedstawiony proces numerowania krawędzi należących do poszczególnych zbiorów pozwala na utworzenie zapisu algebraicznego definiującego oddziaływanie systemu opisanego grafem. Zapis struktury grafu przy użyciu liczb strukturalnych przypomina wizualnie konstruowanie macierzy. Każdy układ sił opisany pojedynczą krawędzią posiada własne oznaczenie. Zbiory krawędzi tworzą natomiast węzły, przypominające strukturę wektory w zapisie macierzowym. W literaturze [20, 27, 31, 34-36] istnieją dwa sposoby definiowania węzłów strukturalnych. Pierwszą metodą jest definiowanie węzłów jako zbioru krawędzi połączonych tym samym wierzchołkiem grafu. Przykład węzła zdefiniowanego w taki sposób liczbą strukturalną:

$$N = [1234], \quad (3.9)$$

przedstawiono na rysunku 3.10.

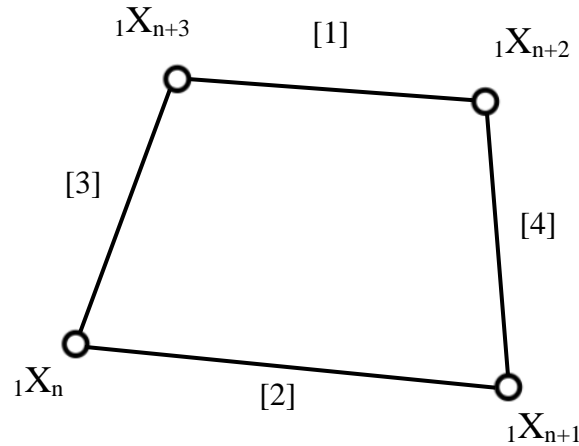


Rys. 3.10. Węzeł strukturalny utworzony ze zbioru krawędzi posiadających wspólny wierzchołek

Drugą metodą definicji węzłów strukturalnych jest dobór zbiorów krawędzi tworzących zamknięte pętle wewnątrz struktury grafu. Warunkiem koniecznym jest obecność co najmniej trzech wierzchołków i krawędzi tworzących zamkniętą pętlę. Wewnątrz pętli nie mogą znajdować się dodatkowe krawędzie tworzące przecięcia lub łączące się z wierzchołkami oddzielonymi od struktury pętli. Przykładem tak zdefiniowanego węzła jest:

$$M = [1234]. \quad (3.10)$$

Graficzny zapis pętli tworzącej węzeł zgodnie z przytoczoną definicją przedstawiono na rysunku 3.11.



Rys. 3.11. Węzeł strukturalny będący zamkniętą pętlą utworzoną z krawędzi łączących sąsiednie wierzchołki

Liczba strukturalna będąca zapisem algebraicznym definiującym całość oddziaływań zachodzących wewnątrz układu opisanego grafem uzyskiwana jest poprzez przemnożenie ze sobą $n-1$ liczby węzłów wchodzących w strukturę grafu. Operacja mnożenia strukturalnego polega na utworzeniu wszystkich możliwych kombinacji krawędzi wchodzących w skład każdego węzła. Z kombinacji wykluczone są pary powtarzających się kombinacji oraz takie kombinacje, w których ta sama krawędź występuje więcej niż raz. Wynikowa liczba strukturalna przypomina wyglądem macierz. Liczba jej wierszy zależy od przemnożonych węzłów. Liczba możliwych kombinacji krawędzi definiuje natomiast ile kolumn zostanie użytych do jej opisu, uwzględniając przy tym wspomniane wcześniej wykluczenia. Przykładowa liczba strukturalna D będąca wynikiem mnożenia trzech węzłów, do których należą krawędzie oznaczone symboliczne literami $a - e$ przyjmuje zatem postać:

$$D = [abc][ad][be] = \begin{bmatrix} a & a & b & b & c & c & c & c \\ d & d & a & d & a & a & d & d \\ b & e & e & e & b & e & b & e \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

gdzie:

a, b, c, d, e – oznaczenia krawędzi grafu opisującego badany układ,

D – liczba strukturalna grafu.

Liczba strukturalna grafu stosowana jest w kolejnych operacjach algebry strukturalnej oraz przy przekształceniach badanego układu i jego analizie.

Istotnym elementem algebry liczb strukturalnych z uwzględnieniem tematyki pracy jest możliwość analizowania odpowiedzi układu w formie przebiegu amplitudy w dziedzinie częstotliwości. Stosowana jest w tym celu tzw. funkcja jednoczesności, którą wyznacza się poprzez obliczenie sumy determinantów z części wspólnych pochodnych liczby strukturalnej grafu po każdej z par krawędzi wchodzących w skład grafu. Algebraiczny zapis funkcji jednoczesności na przykładzie przytoczonej wcześniej liczby strukturalnej (3.11) przyjmuje postać:

$$\underset{z}{Sim} \left(\frac{\partial D}{\partial [a]}, \frac{\partial D}{\partial [d]} \right) = \underset{z}{det} \begin{bmatrix} b & c & c \\ e & b & e \end{bmatrix} = be \pm cb \pm ce, \quad (3.12)$$

gdzie:

$\underset{z}{Sim}$ – funkcja jednoczesności danej pary pochodnych liczby strukturalnej,

$\underset{z}{det}$ – wyznacznik funkcji jednoczesności,

$\frac{\partial D}{\partial [a]}, \frac{\partial D}{\partial [d]}$ – pochodne liczby strukturalnej „D” po krawędziach „a” oraz „d”.

Zgodnie ze wzorem (3.12) wyznaczono funkcję jednoczesności części wspólnej pochodnych liczby strukturalnej po krawędzi oznaczonej symbolicznie literami a oraz d. Pochodne liczby strukturalnej po danej krawędzi grafu wyznacza się poprzez wykluczenie z liczby strukturalnej kombinacji krawędzi, w których nie występuje krawędź będąca pochodną. Z pozostałych kombinacji, po odrzuceniu kolumn niespełniających powyższego warunku, wyklucza się również wiersz, w którym znajduje się dana krawędź będąca pochodną. Zapis algebraiczny pochodnej liczby strukturalnej (3.11) względem krawędzi „a” przyjmuje zatem postać:

$$\frac{\partial D}{\partial [a]} = \begin{bmatrix} d & d & b & c & c \\ b & e & e & b & e \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Zastosowane w procesie analizy przekształcenia algebraiczne opisano skrótowo w celu przybliżenia zasady działania obliczeń na podstawie liczb strukturalnych. Obliczenia polegają głównie na tworzeniu kombinacji oraz wykluczaniu powtórzeń, co podkreśla prostotę obliczeń będącą zaletą w odniesieniu do obliczeń macierzowych. Szczegółowy opis zastosowanych funkcji oraz pozostałych przekształceń algebraicznych na liczbach strukturalnych można znaleźć w pracy Profesora Stanisława Bellerta [26].

Analiza teoretyczna układu o nieskończonej liczbie elementów, przytoczonego w ramach procesu tworzenia grafu przedstawionego na rysunku 3.9 polega na wyznaczeniu wartości bezwzględnych z funkcji jednoczesności odpowiadających kolejno za każdy stopień swobody analizowanego układu. W celu uwzględnienia sił pochodzących spoza układu, takich jak wzbudzenia dynamiczne, kinematyczne lub źródła tłumienia aktywnego, funkcje jednoczesności każdego stopnia swobody są dodatkowo przemnażane przez krawędzie odpowiadające tym siłom. W celu uproszczenia zapisu funkcji jednoczesności, krawędzie wchodzące w skład zbiorów służących do oznaczenia sił zewnętrznych (3.6, 6.7, 3.8), oznaczono symbolicznie literami „G”, „F” oraz „Y”:

$${}^4_2X = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}, \quad (3.14)$$

$${}^5_2X = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}, \quad (3.15)$$

$${}^6_2X = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}. \quad (3.16)$$

Zapis funkcji jednoczesności tworzących wzór na wyznaczenie przebiegu amplitudy drgań każdego kolejnego stopnia swobody w dziedzinie częstotliwości pokazano na przykładzie wzorów pierwszego, drugiego oraz n-tego stopnia swobody układu:

$$A_1 = \left| \frac{\left(\text{Sim} \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]} \right) (G_1 + F_1 + Y_1) \right)}{\partial D(\omega)} + \frac{\left(\text{Sim} \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [2]}, \frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]} \right) (G_2 + F_2 + Y_2) \right)}{\partial D(\omega)} + \dots + \frac{\left(\text{Sim} \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [n]}, \frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]} \right) (G_n + F_n + Y_n) \right)}{\partial D(\omega)} \right|, \quad (3.17)$$

$$A_2 = \left| \frac{\left(\text{Sim} \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]}, \frac{\partial D(\omega)}{\partial [n]} \right) (G_1 + F_1 + Y_1) \right)}{\partial D(\omega)} + \frac{\left(\text{Sim} \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [2]} \right) (G_2 + F_2 + Y_2) \right)}{\partial D(\omega)} + \dots + \frac{\left(\text{Sim} \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [n]}, \frac{\partial D(\omega)}{\partial [2]} \right) (G_n + F_n + Y_n) \right)}{\partial D(\omega)} \right|, \quad (3.18)$$

⋮

$$A_n = \left| \frac{\left(\text{Sim} \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]}, \frac{\partial D(\omega)}{\partial [n]} \right) (G_1 + F_1 + Y_1) \right)}{\partial D(\omega)} + \frac{\left(\text{Sim} \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [2]}, \frac{\partial D(\omega)}{\partial [n]} \right) (G_2 + F_2 + Y_2) \right)}{\partial D(\omega)} + \dots + \frac{\left(\text{Sim} \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [n]} \right) (G_n + F_n + Y_n) \right)}{\partial D(\omega)} \right|, \quad (3.19)$$

gdzie:

A_n – przebieg amplitudy drgań n-tego stopnia układu,

$\text{Sim} \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]}, \frac{\partial D(\omega)}{\partial [n]} \right)$ – funkcja jednoczesności danej pary pochodnych liczby strukturalnej,

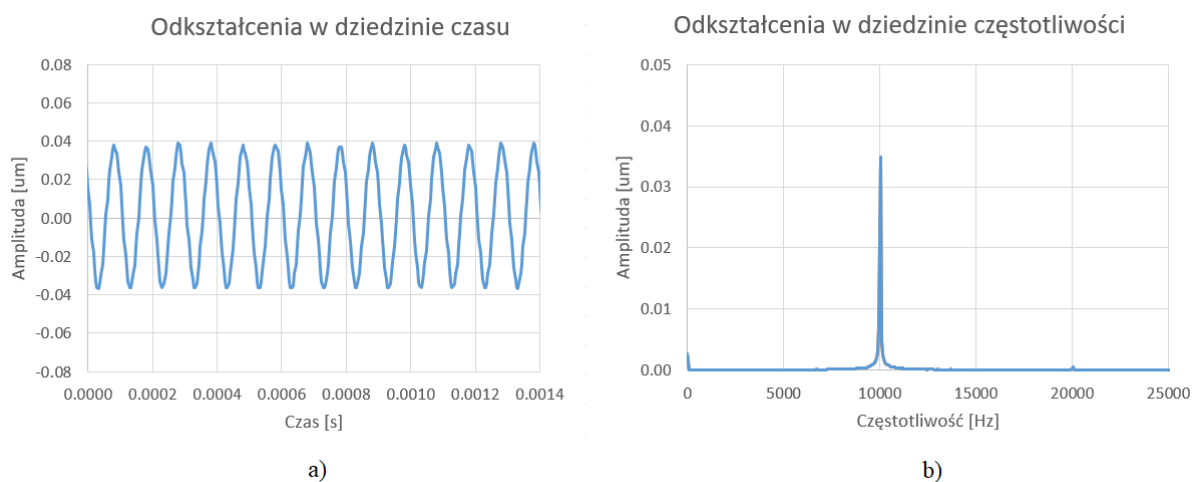
$(G_1 + F_1 + Y_1)$ – suma oddziaływań zewnętrznych,

$\partial D(\omega)$ – symboliczne oznaczenie wyznacznika całej liczby strukturalnej badanego układu.

Wyznaczone wzory pozwalają na obliczenie odpowiedzi układu w dziedzinie częstotliwości pod postacią wykresów przemieszczeń odnoszących się do każdego ruchomego elementu układu, analogicznie do metody macierzowej. Metoda liczb strukturalnych polega na graficznym zapisie oddziaływań układu dając większą przejrzystość, zwłaszcza w przypadku skomplikowanych układów. Możliwe jest również jej algorytmizacja, co pozwala na zastosowanie jednostek obliczeniowych do przyspieszenia obliczeń.

4. Metody syntezy i analizy modeli matematycznych

Pierwszym założeniem w procesie syntezy jest możliwość doboru zbioru częstotliwości rezonansowych i antyrezonansowych na podstawie pomiarów drgań badanych urządzeń technicznych. Układy znajdują się w stanie rezonansu, gdy generowane przez nie oscylacje nakładają się w sposób addytywny maksymalizując odpowiedź układu na dane wymuszenie. Skutkiem rezonansu jest znaczne zwiększenie amplitudy drgań w przypadku układów mechanicznych oraz zwiększenie oscylacji napięciowych lub prądowych w układach elektrycznych. Zjawisko antyrezonansu oznacza natomiast destruktywną interferencję oscylacji wewnątrz układu z sygnałem wymuszającym co prowadzi do zmniejszenia odpowiedzi układu. Częstotliwości charakterystyczne układu można otrzymać na podstawie przetworzonego odczytu widma wibracji w dziedzinie czasu (np. korzystając z transformacji Fouriera). Im dłuższy czas rejestracji sygnału oraz większa częstotliwość próbkowania tym większy jest zakres rejestrowanych częstotliwości. Prosty przykład pomiaru oscylacji układu pokazano na rysunku 4.1. Pomiar przeprowadzono na pojedynczej płytce piezoelektrycznej wibrującej z częstotliwością 10 kHz. Płytkę unieruchomiono w uchwycie oraz podłączono do układu wzmacniającego napięcie przekazywane z generatora sygnałów o wysokiej częstotliwości. Pomiaru dokonano przy użyciu interferometru laserowego, którego sygnał rejestrowano za pomocą oscyloskopu, a następnie zapisywano na nośniku wymiennym. Na rysunku 4.1, poza główną odpowiedzią układu przy częstotliwości 10 kHz, zarejestrowano również amplitudę o niskiej wartości przy częstotliwości 20 kHz.



Rys. 4.1. Przykładowy pomiar drgań pojedynczej płytki piezoelektrycznej w dziedzinie czasu (a) oraz jego transformacja Fouriera przedstawiająca zarejestrowane drgania w dziedzinie częstotliwości (b)

Fale rozchodzące się wewnątrz materiału piezoelektrycznego odbijają się od ścianek płytki generując dodatkowe częstotliwości wewnątrz wibrującego ośrodka. Kolejne częstotliwości modalne układu mogą zostać błędnie zinterpretowane jako częstotliwości główne pozostałych stopni swobody układu. Dokładne pomiary częstotliwości wymagają zatem przeprowadzenia odpowiedniej liczby pomiarów w stosownym oknie czasowym oraz użycia aparatury zdolnej do rejestrowania częstotliwości wyższych od docelowo mierzonego zakresu. Analogicznie do metody wyznaczania częstotliwości rezonansowych można również wyznaczyć częstotliwości antyrezonansowe. Należy w tym przypadku obserwować obszary transformaty sygnału, w których amplitudy drgań są najmniejsze. Przyjęty zbiór częstotliwości rezonansowych oraz antyrezonansowych zapisano w postaci:

$$\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_{n-2}; \omega_{n-1}; \omega_n\}, \quad (4.1)$$

$$\Omega_o = \{\omega_1; \omega_3; \dots; \omega_{n-2}; \omega_n\}, \quad (4.2)$$

$$\Omega_e = \{\omega_2; \omega_4; \dots; \omega_{n-1}\}, \quad (4.3)$$

gdzie:

Ω – pełen zbiór częstotliwości charakterystycznych układu,

Ω_o – zbiór częstotliwości rezonansowych,

Ω_e – zbiór częstotliwości antyrezonansowych.

4.1 Synteza podukładu mechanicznego przy użyciu metody Cauera

Otrzymany zbiór częstotliwości stanowi podstawę w procesie wyznaczania transmitancji operatorowej syntezywanego modelu matematycznego, czyli wielomianu będącego stosunkiem transformaty Laplace'a sygnału wyjściowego do transformaty Laplace'a sygnału wejściowego przy zerowych warunkach początkowych. Posiadając na wejściu zbiór częstotliwości rezonansowych oraz antyrezonansowych możliwe jest utworzenie różnych postaci transmitancji. Proporcje częstotliwości rezonansowych do antyrezonansowych w wejściowym zbiorze częstotliwości syntezywanego układu [27, 31] umożliwiają utworzenie dwóch wariantów wielomianu transmitancji:

$$W(s) = H \frac{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_3^2) \dots (s^2 + \omega_{n-1}^2)}{s(s^2 + \omega_2^2)(s^2 + \omega_4^2) \dots (s^2 + \omega_{n-2}^2)(s^2 + \omega_n^2)}, \quad (4.4)$$

$$W(s) = H \frac{s(s^2 + \omega_2^2)(s^2 + \omega_4^2) \dots (s^2 + \omega_{n-2}^2)(s^2 + \omega_n^2)}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_3^2) \dots (s^2 + \omega_{n-1}^2)}, \quad (4.5)$$

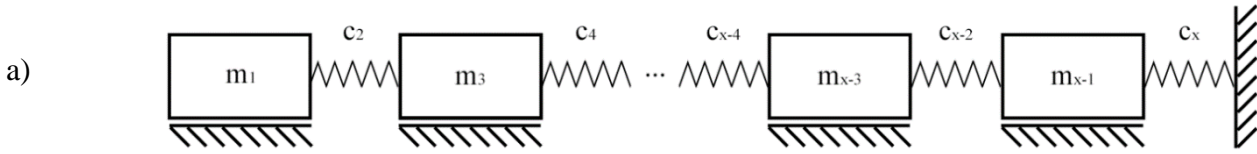
gdzie:

$W(s)$ – odpowiedź systemu,

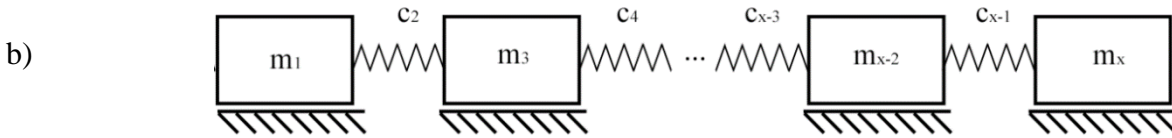
H – współczynnik będący mnożnikiem odpowiedzi.

Wielomian transmitancji operatorowej rozbito do postaci ułamka łańcuchowego. Kolejne współczynniki tego ułamka stosowane są w celu zdefiniowania parametrów podstawowych elementów syntezowanego układu. Omawiana metoda polegająca na rozbiściu wielomianu na ułamki łańcuchowe zwana jest metodą Cauera [42, 43]. Zastosowana początkowo przez Wilhelma Cauera w procesie syntezy liniowych układów elektrycznych, razem z metodą Fostera oraz metodami Brune'go, przyczyniła się do powstania całej gałęzi układów elektrycznych pełniących rolę filtrów sygnałów różnych częstotliwości. Metodę zaadaptowano w późniejszych latach do syntezy mechanicznych układów kaskadowych dzięki zastosowaniu analogii układów elektrycznych i mechanicznych [34-36]. Metoda Cauera przystosowana do układów mechanicznych znalazła szczególne zastosowanie np. przy projektowaniu wyspecjalizowanych układów mechanicznych w pojazdach formuły jeden. Adaptacja tej metody w układach mechanicznych doprowadziła do utworzenia koncepcji mechanicznego kondensatora, nazwanego inerterem. Metodę Cauera przeanalizowano również z uwzględnieniem syntezy drgających, kaskadowych układów giętych oraz skrętnych na Politechnice Śląskiej [18, 27-30, 31, 32, 33]. Niniejsza praca podejmuje tematykę przeprowadzonych badań w kontekście metody syntezy Cauera. Na podstawie wielomianu transmitancji możliwe jest utworzenie czterech wariantów charakterystyk dynamicznych układów kaskadowych (dwa warianty powolności układów utwierdzonych oraz dwa warianty ruchliwości układów swobodnych). Na rysunku 4.2 przedstawiono każdy z możliwych wariantów transmitancji operatorowej oraz odpowiadające im modele układów mechanicznych. Powolności oznaczono symbolem $P(s)$ natomiast ruchliwości $T(s)$, zgodnie ze wzorami (4.6 – 4.9):

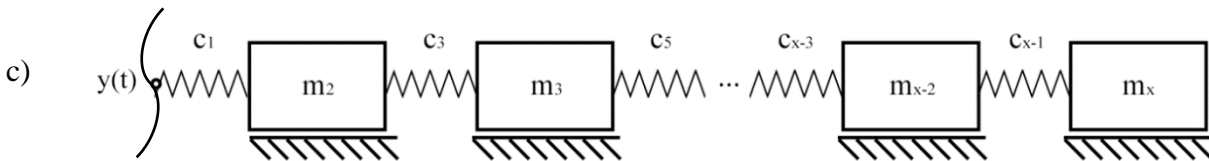
$$P(s) = H \frac{a_i s^n + a_{i-1} s^{n-2} + \dots + a_1 s^2 + a_0}{b_i s^{n-1} + b_{i-1} s^{n-3} + \dots + b_1 s} \quad (4.6)$$



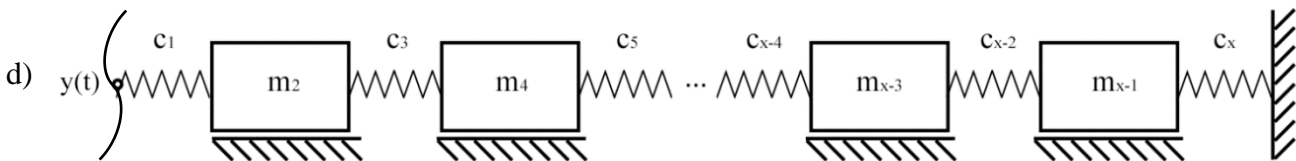
$$P(s) = H \frac{a_i s^{n-1} + a_{i-1} s^{n-3} + \dots + a_1 s}{b_i s^n + b_{i-1} s^{n-2} + \dots + b_1 s^2 + b_0} \quad (4.7)$$



$$T(s) = H \frac{b_i s^n + b_{i-1} s^{n-2} + \dots + b_1 s^2 + b_0}{a_i s^{n-1} + a_{i-1} s^{n-3} + \dots + a_1 s} \quad (4.8)$$



$$T(s) = H \frac{b_i s^{n-1} + b_{i-1} s^{n-3} + \dots + b_1 s}{a_i s^n + a_{i-1} s^{n-2} + \dots + a_1 s^2 + a_0} \quad (4.9)$$



Rys. 4.2. Cztery warianty transmitancji operatorowych możliwych do utworzenia na bazie wejściowego zbioru częstotliwości oraz przyjętej konstrukcji modelu matematycznego: a) układ utwierdzony jednostronnie b) układ swobodny c) układ swobodny ze wzbudzeniem kinematycznym d) układ utwierdzony ze zbudzeniem kinematycznym

Przedstawione warianty układów złożone są z elementów sprężystych oraz inercyjnych. Wartości kolejnych elementów układu kaskadowego są naprzemiennie wyznaczane z kolejnych wartości ułamka łańcuchowego. Proces zamiany postaci wymiernej równania (4.6 – 4.9) na ułamek łańcuchowy polega na rekurencyjnym wyodrębnianiu ułamka współczynników stojących przy najwyższych bądź najniższych potęgach transmitancji oraz odwrotności otrzymanej reszty. Proces ten nazywa się redukcją biegunów w nieskończoności lub w zerach. Wynikiem operacji matematycznej jest postać ułamka łańcuchowego, gdzie całość funkcji wymiernej jest zapisana w postaci kolejnych ułamków reprezentujących wartości opisujące kolejne elementy modelu matematycznego. Metoda redukcji jest dowolna, lecz warunkiem koniecznym są nieujemne wartości otrzymywanych ułamków oraz możliwość ich reprezentacji przy użyciu standardowych elementów układów elektrycznych bądź mechanicznych. Proces zamiany postaci wymiernej transmitancji w postać ułamka łańcuchowego, w przypadku redukcji współczynników stojących przy największych potęgach licznika oraz mianownika funkcji ujęto w równaniach:

$$I_p^1 = \frac{a_i s^n}{b_i s^{n-1}} = \frac{a_i}{b_i} S, \quad (4.10)$$

$$R_p^1 = \frac{a_i s^n + a_{i-1} s^{n-2} + \dots + a_1 s^2 + a_0}{b_i s^{n-1} + b_{i-1} s^{n-3} + \dots + b_1 s} - I_p^1, \quad (4.11)$$

$$R_p^1 = \frac{(a_i s^n + a_{i-1} s^{n-2} + \dots + a_1 s^2 + a_0) - \left[\frac{a_i}{b_i} \cdot (b_i s^{n-1} + b_{i-1} s^{n-3} + \dots + b_1 s) \right]}{b_i s^{n-1} + b_{i-1} s^{n-3} + \dots + b_1 s}, \quad (4.12)$$

gdzie:

I_p^1 – ułamek współczynników stojących przy największych potęgach,

R_p^1 – reszta funkcji wymiernej po redukcji ułamka.

Kolejne reszty ułamka łańcuchowego otrzymano poprzez odjęcie ułamka współczynników stojących przy największych potęgach od odwrotności reszty pozostałej po dzieleniu. Proces opisany równaniami (4.10 – 4.12) jest rekurencyjny, a kolejne reszty wyznaczone są w następnych krokach, aż do momentu redukcji potęg funkcji wymiernej. Ogólną postać procesu uogólniono we wzorze:

$$R_p^{j+1} = \frac{1}{R_p^j} - I_p^{j+1} \quad j = 1, \quad (4.13)$$

gdzie:

R_p^j – reszta z odejmowania w poprzednim kroku,

I_p^{j+1} – ułamek wyciągnięty ze współczynników stojących przy najwyższych potęgach,

R_p^{j+1} – kolejna reszta w procesie redukcji.

Na początku postaci łańcuchowej równania umieszczono również dodatkowy współczynnik wzmocnienia H , który jest stałą służącą do skalowania odpowiedzi układu w celu jej lepszego dostrojenia do rzeczywistych modeli. Ostateczna postać ułamka łańcuchowego przyjmuje zatem formę przedstawioną w równaniu:

$$\frac{G(s)}{H} = I_p^1 \cdot s + \frac{1}{I_p^2 \cdot s + \dots + \frac{1}{I_p^{n-1} \cdot s + I_p^n}}, \quad (4.14)$$

gdzie:

I_p^1 – masa pierwszego elementu inercyjnego,

I_p^2 – sztywność pierwszego elementu sprężystego,

...

I_p^{n-1} – masa n-tego elementu inercyjnego,

I_p^n – sztywność n-tego elementu sprężystego.

Stosując metodę Cauera, możliwe jest utworzenie modelu kaskadowego złożonego z naprzemiennie występujących elementów sprężystych oraz inercyjnych przy użyciu funkcji wymiernej charakterystyki dynamicznej układu. Praktycznym przykładem syntezy układu kaskadowego przedstawionym na potrzeby tej pracy jest układ mechaniczny o dwóch stopniach swobody otrzymany na podstawie zbioru dobranych częstości rezonansowych oraz antyrezonansowych (4.15 – 4.17). Przytoczony układ mechaniczny stanowi podstawę syntezy układu piezoelektrycznego i odzwierciedla jego mechaniczną część. W kolejnych krokach syntezy do przytoczonego układu dodane zostaną elementy tłumiące oraz część elektryczna. Utworzony zbiór częstotliwości dobrano do układu piezoelektrycznego drgającego przy stosunkowo niskich częstotliwościach rezonansowych 22 kHz oraz 27 kHz.

Częstotliwości zamieniono na częstości w celu uproszczenia równań ruchu i umieszczono w zbiorach:

$$\Omega = \left\{ 138230 \frac{rad}{s}; 144513 \frac{rad}{s}; 169646 \frac{rad}{s} \right\}, \quad (4.15)$$

$$\Omega_o = \left\{ 138230 \frac{rad}{s}; 169646 \frac{rad}{s} \right\}, \quad (4.16)$$

$$\Omega_e = \left\{ 144513 \frac{rad}{s} \right\}. \quad (4.17)$$

Zbiór częstości rezonansowych i antyrezonansowych zastosowano w następnym kroku do utworzenia charakterystyki dynamicznej nowego układu. Funkcja charakterystyki w postaci iloczynowej przyjmuje zatem postać:

$$G(s) = H \frac{(s^2+138230^2)(s^2+169646^2)}{s(s^2+144513^2)}. \quad (4.18)$$

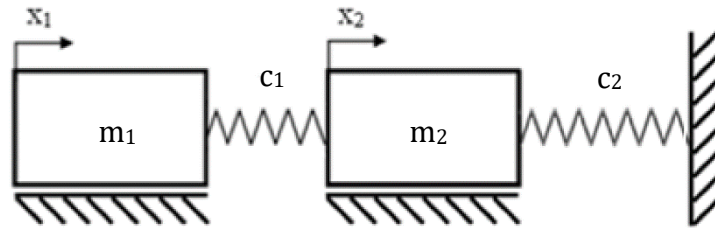
Następnie postać iloczynową przekształcono do postaci wymiernej wielomianu charakterystyki. Współczynnik wzmocnienia przeniesiono na stronę lewą. Stosując metodę Cauera, postać wymierna równania charakterystycznego rozbito na ułamek łańcuchowy zgodnie ze wzorem:

$$\frac{G(s)}{H} = S + \frac{1}{\frac{s}{2,7 \cdot 10^{10}} + \frac{1}{51,984s + \frac{1,0586 \cdot 10^{12}}{s}}}. \quad (4.19)$$

Na podstawie współczynników ułamka łańcuchowego możliwy jest dobór parametrów kolejnych elementów inercyjnych i sprężystych, co pokazano na zbiorach (4.20, 4.21). Funkcję dodatkowo przeskalowano współczynnikiem H równym 0,01 w celu lepszego dopasowania parametrów mechanicznych syntezowanego układu do rzeczywistych parametrów piezoelektrycznego układu. Otrzymany układ kaskadowy, utwierdzony jednostronnie pokazano na rysunku 4.3. Parametry uzyskane w procesie syntezy przedstawiono w następujących zbiorach:

$$m_i = \{0,01kg ; 0,5198kg\}, \quad (4.20)$$

$$c_i = \left\{ 2,7 \cdot 10^8 \frac{N}{m}; 1,0586 \cdot 10^{10} \frac{N}{m} \right\}. \quad (4.21)$$



Rys. 4.3. Model kaskadowy utworzony na podstawie zbioru częstości rezonansowych i antyrezonansowych

W celu sprawdzenia poprawności utworzonego modelu i zgodności jego częstotliwości rezonansowych z przyjętym zbiorem, wykonano weryfikację dwiema metodami. Pierwszą metodą weryfikacji modelu jest klasyczna metoda oparta na macierzowej postaci zapisu równań ruchu. Jako drugą metodę zastosowano zapis graficzny modelu pod postacią grafu oddziaływań wewnętrznych. Do zapisu oddziaływań zastosowano algebrę liczb strukturalnych, którą omówiono w rozdziale trzecim.

4.2 Weryfikacja modelu mechanicznego

Do zweryfikowania poprawności syntezy podstawowego modelu podukładu mechanicznego syntezerowanego układu piezoelektrycznego zastosowano w pierwszej kolejności metodę macierzowego zapisu równań ruchu. Każdy stopień swobody rozpatrywanego układu opisano przy pomocy równania ruchu z zastosowaniem równania Lagrange'a II rodzaju. Na obecnym etapie nie występują w rozważanych modelach elementy tłumiące więc równanie przyjmuje postać

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = Q_i, \quad (4.22)$$

gdzie:

$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i}$ – pochodna energii kinetycznej po uogólnionym wektorze prędkości,

$\frac{\partial E_p}{\partial q_i}$ – pochodna energii potencjalnej po uogólnionym wektorze drogi,

Q_i – uogólniona siła.

Układ równań ruchu w przypadku podanego wcześniej przykładu układu o dwóch stopniach swobody zapisano zatem w postaci:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_1(x_1 - x_2) = F_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 - c_1(x_1 - x_2) + c_2 x_2 = F_2 \end{cases} \quad (4.23)$$

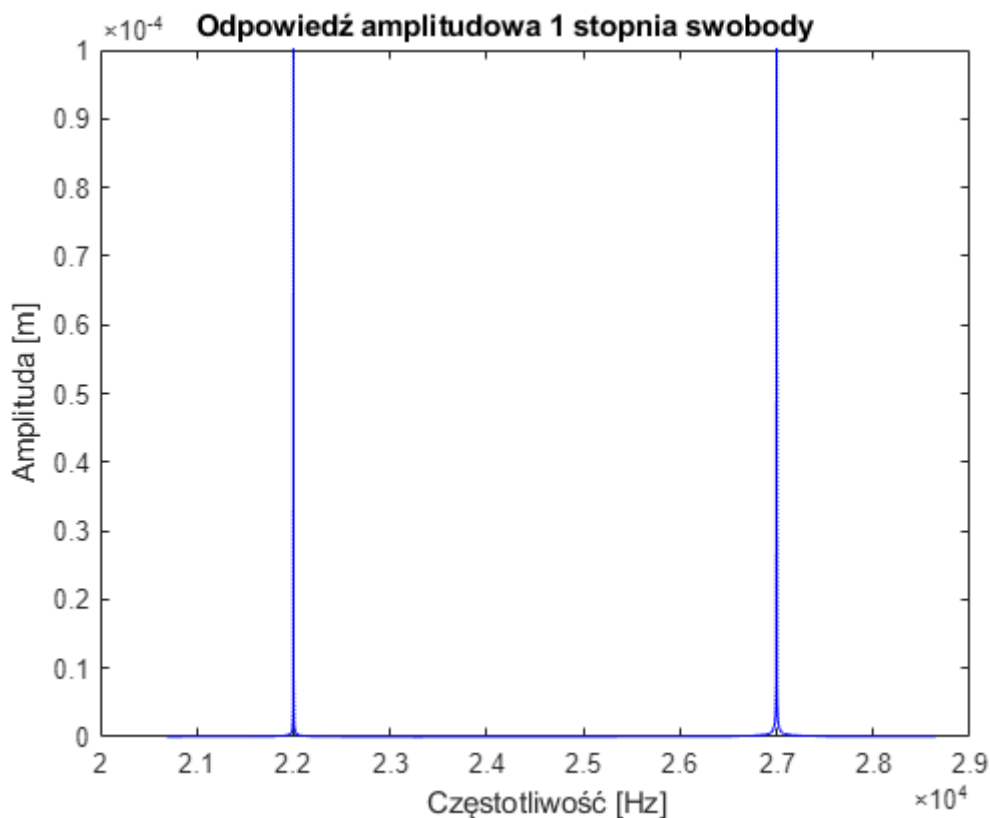
Układ posiada dwa równania różniczkowe II rzędu. Z uwagi na brak elementów tłumiących, w równaniu nie występuje pierwsza pochodna po przemieszczeniu, co znacznie upraszcza podstawianie funkcji trygonometrycznych ruchu oscylacyjnego. Przyjęto, że układ porusza się ruchem oscylacyjnym opisanym funkcją $A \sin(\omega t)$ i jest wzbudzany harmonicznym wymuszeniem sinusoidalnym o maksymalnej sile 1 N. Po podstawieniu funkcji sinusoidalnej przemieszczenia, równanie (4.23) przyjmuje postać:

$$\begin{cases} -\omega^2 \Lambda_1 m_1 \sin \omega t + c_1 \sin \omega t (\Lambda_1 - \Lambda_2) = \sin \omega t \\ -\omega^2 \Lambda_2 m_2 \sin \omega t - c_1 \sin \omega t (\Lambda_1 - \Lambda_2) + \Lambda_2 c_2 \sin \omega t = \sin \omega t \end{cases} \quad (4.24)$$

Następnie równanie (4.24) sprowadzono do postaci macierzowej poprzez zgrupowanie czynników stojących przy amplitudach oraz obustronną redukcję funkcji sinusa. Postać macierzową równania (4.25) po przekształceniach zapisano w postaci:

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 m_1 + c_1 & -c_1 \\ -c_1 & -\omega^2 m_2 + c_1 + c_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Rozwiązanie macierzowego równania ruchu daje możliwość wyznaczenia funkcji przebiegu amplitudy drgań układu w dziedzinie częstotliwości oraz wyznaczenie częstotliwości rezonansowych. Wykres wyznaczony na podstawie otrzymanego rozwiązania w przypadku pierwszego stopnia swobody pokazano na rysunku 4.4. Na wykresie zidentyfikowano obszary, gdzie amplituda drgań znacznie wzrasta, czyli takie obszary, gdzie występują częstotliwości rezonansowe. Przedziały, w których amplituda drgań zmierza do zera są natomiast wskaźnikami częstotliwości antyrezonansowych. Metoda macierzowa pozwala na wyznaczenie dokładnego przebiegu amplitud drgań badanego układu w dziedzinie częstotliwości. Jej zaletą jest duża dokładność oraz możliwość rozwiązywania równań poprzez zastosowanie algorytmów komputerowych. Wadą tej metody jest jednak bardzo szybki wzrost liczby obliczeń i stopnia ich skomplikowania razem ze wzrostem liczby stopni swobody badanego układu.

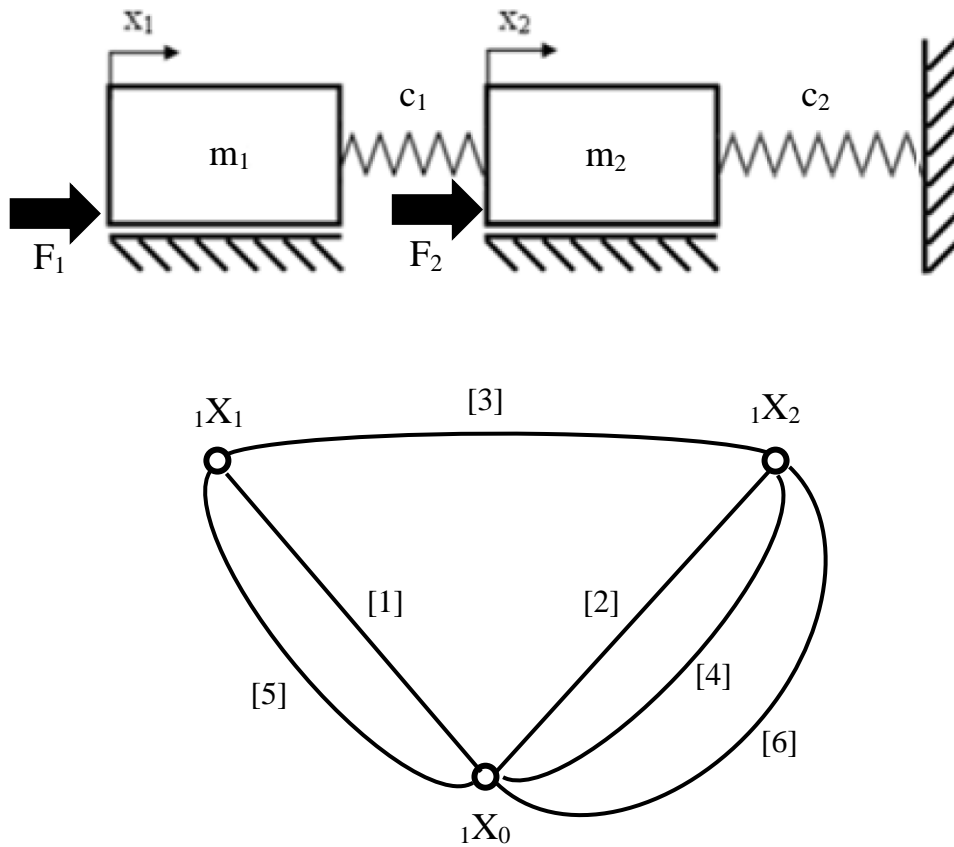


Rys. 4.4. Odpowiedź amplitudowa pierwszego stopnia swobody układu bez tłumienia, wyznaczona przy użyciu metody macierzowej

Jako że zastosowanie metody macierzowej w przypadku obliczeń układów o dużej liczbie stopni swobody może okazać się problematyczne, podjęto decyzję o równoległym zastosowaniu alternatywnej metody bazującej na graficznym zapisie wewnętrznych relacji pomiędzy poszczególnymi elementami układu.

Przypadek układu o dwóch stopniach swobody z elementami inercyjnymi i sprężystymi, pokazany na rysunku 4.3 przeanalizowano również metodą grafów i liczb strukturalnych. W pierwszym kroku utworzono graf analizowanego układu. Graf układu o dwóch stopniach swobody, utwierdzony z jednej strony posiada łącznie trzy wierzchołki. Pierwszym wierzchołkiem jest wierzchołek bazowy, reprezentujący oddziaływania układu z otoczeniem oraz utwierdzeniem. Pozostałe dwa wierzchołki odpowiadają przemieszczeniom elementów inercyjnych. Następnie wyznaczono krawędzie łączące poszczególne wierzchołki grafu. W analizowanym przypadku występują dwa elementy inercyjne. Krawędzie odpowiadające siłom bezwładności poszczególnych elementów inercyjnych kolejno ponumerowano od 1 do 2. Elementy sprężyste łączą w układzie pierwszy element inercyjny z drugim oraz drugi element inercyjny z utwierdzeniem. Krawędzie odpowiadające siłom sprężystości tych elementów

oznaczono numerami od 3 do 4. Utworzony tym sposobem graf oddziaływań z oznaczonymi krawędziami przedstawiono na rysunku 4.5.



Rys. 4.5. Graf układu kaskadowego o dwóch stopniach swobody, posiadającego elementy inercyjne i sprężyste oraz utwierdzonego z jednej strony

Wypadkowe oddziaływania odzwierciedlone przez krawędzie grafu są pochodnymi ruchu oscylacyjnego. Tak jak poprzednio, do opisu ruchu oscylacyjnego przyjęto funkcję sinusa. Funkcje oddziaływań reprezentowanych przez poszczególne krawędzie zapisano następująco:

$$\begin{aligned}
 [1] &= -\omega^2 m_1, \\
 [2] &= -\omega^2 m_2, \\
 [3] &= c_1, \\
 [4] &= c_2, \\
 [5] &= F_1, \\
 [6] &= F_2.
 \end{aligned}
 \tag{4.26}$$

Krawędzie opisują jedynie elementy równań, które można porównać do macierzy współczynników. Wyrażenia pozbawione są członów odpowiedzialnych za definicję funkcji oscylacji oraz jej amplitudy.

Wyliczenie liczby strukturalnej układu wymagało wyznaczenia $n-1$ węzłów w analizowanym grafie. W obliczeniach użyto metody, w której węzeł definiowany jest jako zbiór krawędzi o wspólnym wierzchołku (rysunek 3.10). W przypadku rozpatrywanego układu będą to dwa węzły z wierzchołkami o oznaczeniu ${}_1X_1$ oraz ${}_1X_2$. Z iloczynu liczb strukturalnych odpowiadających wybranym węzłom wyliczono liczbę strukturalną całego grafu układu w postaci:

$$D = [1 \ 3][2 \ 3 \ 4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Następnie wyznaczono pochodne liczby strukturalnej po pierwszej oraz drugiej krawędzi grafu. Pierwsza oraz druga pochodna liczby strukturalnej D wyznaczono zgodnie z przytoczoną w poprzednim rozdziale metodą (3.13) jako:

$$\frac{\partial D}{\partial [1]} = [234], \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial D}{\partial [2]} = [13]. \quad (4.29)$$

Wyznaczenie wzoru na przebieg amplitudy w dziedzinie częstotliwości wymaga zdefiniowania funkcji jednoczesności poszczególnych kombinacji pochodnych. W rozważanym przypadku istnieje tylko jedna kombinacja pochodnych określona wzorem:

$$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial D}{\partial [1]}; \frac{\partial D}{\partial [2]} \right) = [3]. \quad (4.30)$$

Obliczenie pochodnych oraz funkcji jednoczesności pozwala ostatecznie na wyznaczenie funkcji odpowiedzi amplitudowej każdego stopnia swobody układu:

$$\Lambda_1 = \left| \frac{\left(\text{Sim}_z \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]} \right) [5] \right)}{\partial D(\omega)} + \frac{\left(\text{Sim}_z \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]}, \frac{\partial D(\omega)}{\partial [2]} \right) [6] \right)}{\partial D(\omega)} \right|, \quad (4.31)$$

$$\Lambda_2 = \left| \frac{\left(\text{Sim}_z \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]}, \frac{\partial D(\omega)}{\partial [2]} \right) [5] \right)}{\partial D(\omega)} + \frac{\left(\text{Sim}_z \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [2]} \right) [6] \right)}{\partial D(\omega)} \right|. \quad (4.32)$$

Przekształcenie wzorów z postaci algebraicznej liczb strukturalnych na klasyczne równanie ułamkowe wymaga wyznaczenia determinanty wszystkich współczynników

równania, zaczynając od liczby strukturalnej całego grafu. Mianownik klasycznego równania wyznaczono na podstawie liczby strukturalnej całego grafu:

$$\partial D(\omega) = \det_z \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \omega^4 m_1 m_2 - \omega^2 (m_1 c_1 + m_1 c_2 + m_2 c_1) + c_1 c_2. \quad (4.33)$$

Wyrażenia funkcji jednoczesności stanowiące elementy licznika klasycznego równania obliczono według następujących wzorów:

$$\left(\text{sim}_z \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]} \right) [5] \right) = (-\omega^2 m_2 + c_1 + c_2) * F_1, \quad (4.34)$$

$$\left(\text{sim}_z \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]}; \frac{\partial D(\omega)}{\partial [2]} \right) [5] \right) = c_2 F_1, \quad (4.35)$$

$$\left(\text{sim}_z \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [1]}; \frac{\partial D(\omega)}{\partial [2]} \right) [6] \right) = c_2 F_2, \quad (4.36)$$

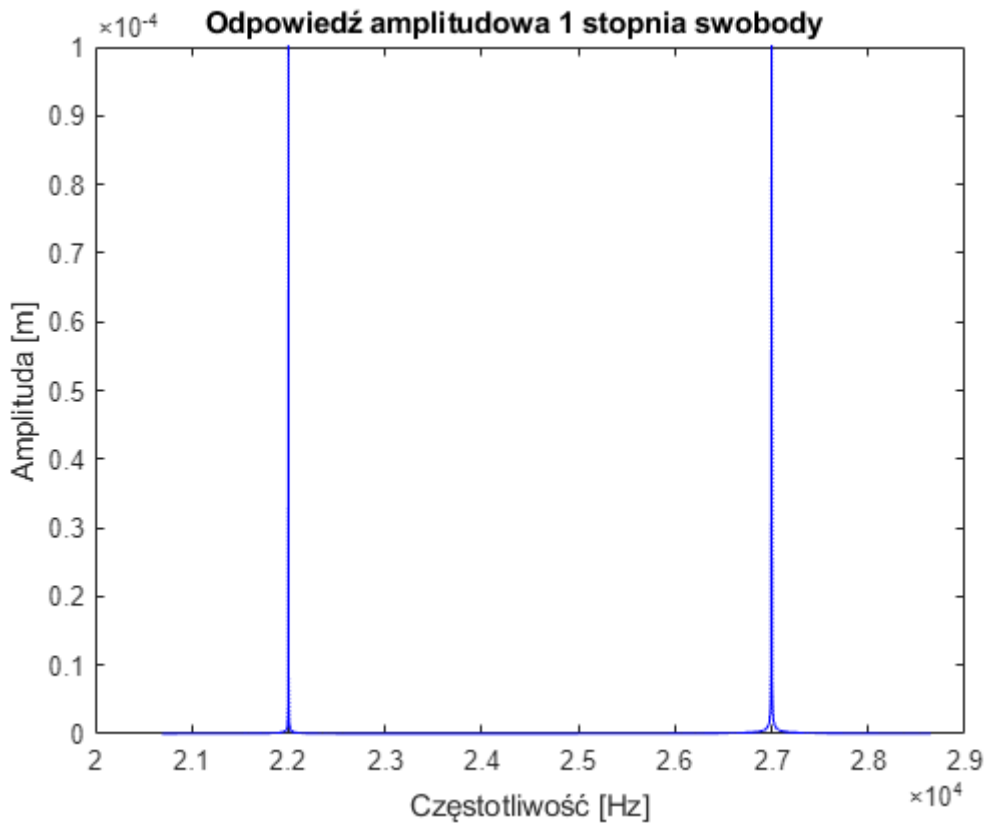
$$\left(\text{sim}_z \left(\frac{\partial D(\omega)}{\partial [2]} \right) [6] \right) = (-\omega^2 m_1 + c_1) * F_2. \quad (4.37)$$

Przez dodanie przekształconych funkcji jednoczesności (4.34 – 4.37) oraz skrócenie wyrażeń otrzymano równania amplitudy odpowiedzi układu w dziedzinie częstotliwości, w postaci:

$$A_1 = \left| \frac{(-\omega^2 m_2 + c_1 + c_2) * F_1 + c_2 F_2}{\omega^4 m_1 m_2 - \omega^2 (m_1 c_1 + m_1 c_2 + m_2 c_1) + c_1 c_2} \right| \quad (4.38)$$

$$A_2 = \left| \frac{c_1 F_1 + (-\omega^2 m_1 + c_1) * F_2}{\omega^4 m_1 m_2 - \omega^2 (m_1 c_1 + m_1 c_2 + m_2 c_1) + c_1 c_2} \right| \quad (4.39)$$

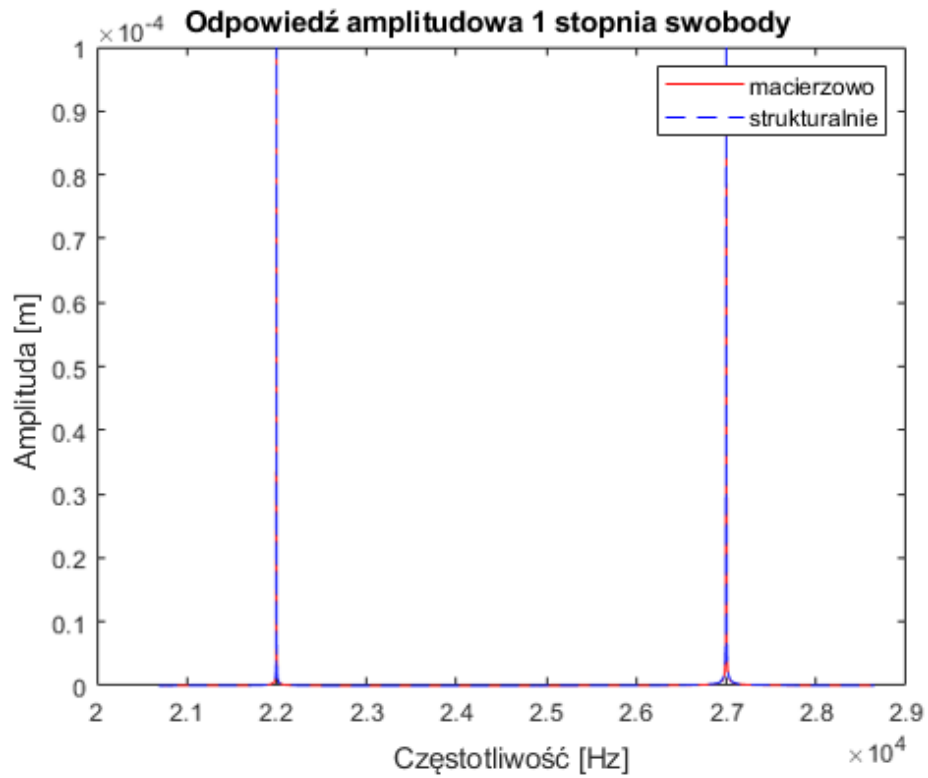
Wykres amplitudy drgań pierwszego stopnia swobody układu wyznaczony przy zastosowaniu wzoru (4.38) przedstawiono na rysunku 4.6.



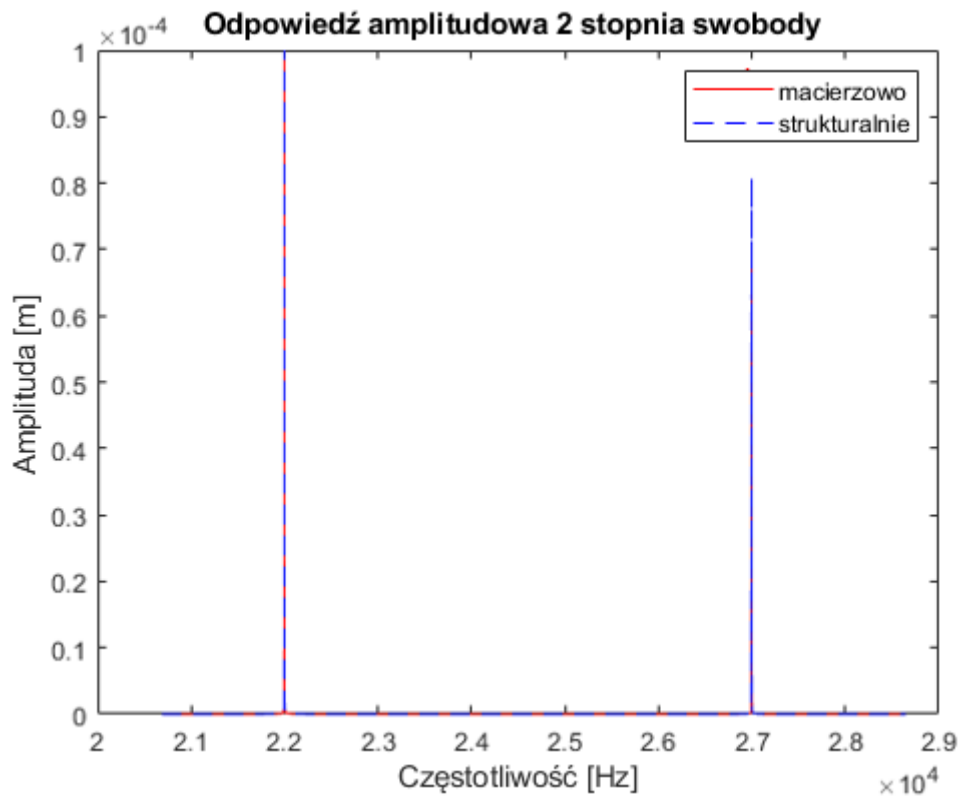
Rys. 4.6. Odpowiedź amplitudowa pierwszego stopnia swobody układu bez tłumienia, wyznaczona przy użyciu metody grafów i liczb strukturalnych

Obliczenia wykonano z uwzględnieniem tych samych parametrów układu kaskadowego, które przyjęto w przypadku metody macierzowej (4.20, 4.21). Dodatkowo, analogicznie przyjęto wartości sił zewnętrznych. Metoda grafów i liczb strukturalnych stanowi alternatywę do metody macierzowej, która w większym stopniu opiera się na graficznym zapisie oddziaływań zachodzących wewnątrz analizowanego układu. Grafy zapewniają przejrzysty obraz relacji wewnątrz układu, zwłaszcza w przypadku układów złożonych z wielu stopni swobody. Metodę można również zalgorytmizować w celu wykorzystania mocy obliczeniowej do przyspieszenia operacji matematycznych.

Porównanie wyników analizy drgań pierwszego i drugiego stopnia swobody badanego układu przedstawiono graficznie na rysunku 4.7. Ciągłą linią zaznaczono przebieg amplitudy wyznaczony metodą macierzową, a linią kreskowaną przebieg wyznaczony metodą liczb strukturalnych. W obu przypadkach przebieg amplitudy drgań pierwszego stopnia swobody otrzymany przy użyciu metody macierzowej pokrywa się w pełni z wynikami otrzymanymi przy użyciu metody liczb strukturalnych.



Rys. 4.7. Odpowiedź amplitudowa pierwszego stopnia swobody układu bez tłumienia, wyznaczona przy użyciu dwóch metod analizy



Rys. 4.8. Odpowiedź amplitudowa drugiego stopnia swobody układu bez tłumienia, wyznaczona przy użyciu dwóch metod analizy

Wykresy amplitudy przemieszczenia wyznaczono z uwzględnieniem układów bez tłumienia. Celem porównania była weryfikacja zbieżności częstotliwości rezonansowych układu wyznaczonych obiema metodami. W tabeli 4.2 i 4.3 zamieszczono wartości wyznaczonych częstotliwości rezonansowych obu zastosowanych metod.

Tabela 4.2. Wartości częstotliwości rezonansowych oraz antyrezonansowych uzyskane dwiema metodami analizy drgań w przypadku pierwszego stopnia swobody

	Algorytm macierzowy [rad/s]	Algorytm liczb strukturalnych [rad/s]
1 rezonans	138230,00000	138229,99992
1 antyrezonans	146299,17283	144512,99999
2 rezonans	169646,00000	169645,99998

Tabela 4.3. Wartości częstotliwości rezonansowych oraz antyrezonansowych uzyskane dwiema metodami analizy drgań w przypadku drugiego stopnia swobody [rad/s]

	Algorytm macierzowy [rad/s]	Algorytm liczb strukturalnych [rad/s]
1 rezonans	138230,00000	138229,99992
1 antyrezonans	155997,38162	155997,38156
2 rezonans	169646,00000	169645,99998

Częstotliwości rezonansowe uzyskane obiema metodami analizy są ze sobą zgodne do czwartego miejsca po przecinku. W przypadku częstotliwości antyrezonansowej pierwszego stopnia swobody zaobserwowano niewielki błąd bezwzględny o wartości 1786 rad/s (284 Hz).

4.3 Synteza elementów tłumiących przy zastosowaniu metody Rayleigh'a

Omawiane w poprzednich podrozdziałach układy nie posiadały elementów tłumiących. Celem wstępnie założonego układu kaskadowego była zdolność do wykonywania oscylacji zgodnie z założonymi początkowo częstotliwościami rezonansowymi. Następnym etapem w procesie syntezy mechanicznej części modelu odzwierciedlającego zachowanie rzeczywistego układu piezoelektrycznego jest dodanie elementów rozpraszających energię mechaniczną wewnątrz układu. Podjęto decyzję o doborze elementów tłumiących na podstawie metody Rayleigh'a. Wzór ogólny metody składa się z dwóch członów proporcjonalnych do elementu inercyjnego oraz sprężystego i zapisano go w postaci:

$$b_x = \alpha m_x + \beta c_x, \quad (4.40)$$

gdzie:

b_x – współczynnik tłumienia wyznaczanego elementu tłumiącego,

m_x – masa elementu inercyjnego,

c_x – sztywność elementu sprężystego,

α – współczynnik proporcjonalności tłumienia do inercji,

β – współczynnik proporcjonalności tłumienia do sprężystości.

Układy piezoelektryczne są układami elektromechanicznymi, w których zachodzi zjawisko rezonansu zarówno mechanicznego, jak i elektrycznego. W niniejszej pracy analizie poddano jedynie układy, w których występuje tłumienie podkrytyczne. Pominięto zatem układy z tłumieniem krytycznym oraz nadkrytycznym, z uwagi na to, że nie dotyczą one rozważanego przypadku oscylujących układów piezoelektrycznych. Korzystając z podstawowego równania różniczkowego układu oscylującego z tłumieniem, zapisano równanie na tłumienie krytyczne układu jako:

$$b_{kr} = 2\omega m = \frac{2k}{\omega}. \quad (4.41)$$

Wprowadzono również zależność tłumienia układu od wartości tłumienia krytycznego w postaci:

$$\gamma = \frac{b}{b_{kr}} = \frac{b}{2\omega m} = \frac{b\omega}{2k}. \quad (4.42)$$

Na podstawie przyjętej zależności pomiędzy tłumieniem oraz tłumieniem krytycznym (4.41) przekształcono równanie (4.42) do postaci:

$$\gamma = \frac{\alpha}{2\omega} + \frac{\beta\omega}{2}. \quad (4.43)$$

Według źródeł literaturowych [46, 84] tłumienie α proporcjonalne do elementu inercyjnego jest pomijalnie małe w przypadku elementów piezoelektrycznych oscylujących przy wysokich częstotliwościach. Z tego względu przyjęto, że tłumienie to może zostać pominięte. Decyzję podjęto ze świadomością, że może to w późniejszych etapach przyczynić się do zwiększenia błędów w wyliczonych parametrach piezoelektrycznych. W przypadku dużych odchyień otrzymanych wyników w odniesieniu do rzeczywistych parametrów układu piezoelektrycznego konieczne będzie ponowne rozpatrzenie wpływu

współczynnika proporcjonalności α w przyszłości jako jednej ze ścieżek dalszego rozwoju i doskonalenia opracowywanej metody.

Ustalenie współczynnika tłumienia proporcjonalnego do sprężystości β wymaga przyjęcia granic rozpatrywanych częstotliwości oscylacji badanego układu. Przyjęto w tym celu minimalną oraz maksymalną częstotliwość z rozpatrywanego przedziału częstotliwości rezonansowych. Podstawiając dobrane częstotliwości graniczne do wzoru (4.43) oraz mnożąc wartości w mianownikach, otrzymano układ równań:

$$\begin{cases} 2\gamma_{min} = \beta\omega_{min} \\ 2\gamma_{max} = \beta\omega_{max} \end{cases} \quad (4.44)$$

Wyznaczając z układu wzór na współczynnik β , otrzymano:

$$\beta = \frac{2(\gamma_{min} + \gamma_{max})}{\omega_{min} + \omega_{max}}. \quad (4.45)$$

Uwzględniając uprzednio przytoczone założenie, że rozpatrywane są jedynie układy, w których występuje tłumienie podkrytyczne, wartości współczynnika γ w obu przypadkach muszą być mniejsze od jedności. Dodatkowo założono, że wartość współczynnika γ jest jednakowa w przypadku częstotliwości minimalnej oraz maksymalnej w przedziale. Równanie (4.45) po uwzględnieniu przyjętych założeń i warunków brzegowych, przyjmuje postać:

$$\beta < \frac{2}{\omega_{min} + \omega_{max}}. \quad (4.46)$$

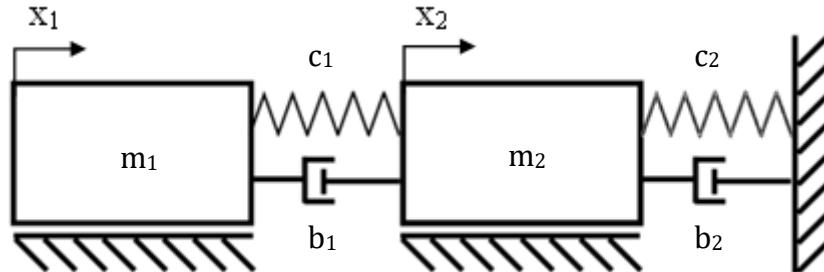
Zastosowanie współczynnika tłumienia proporcjonalnego do wyznaczenia parametrów elementów tłumiących w układzie skutkuje zaniżonymi wartościami tłumienia. Jest to spowodowane koniecznością zachowania warunku, w którym rozważany układ pozostaje w granicach tłumienia podkrytycznego w całym przedziale częstotliwości. Człony drgające z mniejszymi częstotliwościami od maksymalnej częstotliwości w tym przedziale będą tłumione w mniejszym stopniu z uwagi na sztywne ramy współczynnika β . Jest to wada powodująca odchylenia wartości tłumienia względem rzeczywistych układów, ale metoda Rayleigh'a pozwala na łatwe wyznaczenie wartości tłumienia na każdym stopniu swobody układu przy zachowaniu przyjętych warunków brzegowych.

W kolejnym badaniu do układu o dwóch stopniach swobody dodano elementy tłumiące zgodnie z metodą Rayleigh'a. Układ posiada dwie częstotliwości rezonansowe o wartościach 138230 rad/s oraz 169646 rad/s. Podany zbiór częstotliwości rezonansowych jest jednocześnie granicą przyjętego zbioru częstotliwości. Podstawiając do wzoru (4.46) wartości graniczne, otrzymano wartość współczynnika tłumienia proporcjonalnego do elementu sprężystego. Następnie, wartość wyliczonego współczynnika wstawiono do wzoru (4.40), a tłumienie proporcjonalne do elementów inercyjnych pominięto. Wyliczone tym sposobem wartości tłumienia każdego stopnia swobody zamieszczono w tabeli 4.1.

Tabela 4.1. Wartości graniczne tłumienia podkrytycznego wyznaczone metodą Rayleigh'a

Człon	Wartość tłumienia [Ns/m]
1	0,898
2	1,102

Schemat układu kaskadowego z parametrami elementów inercyjnych, sprężystych i tłumiących pokazano na rysunku 4.9.



Rys. 4.9. Przykład układu kaskadowego o dwóch stopniach swobody z ustalonymi parametrami elementów inercyjnych, sprężystych oraz tłumiących

Otrzymane wartości tłumienia elementów tłumiących zastosowano w dalszym procesie syntezy układu piezoelektrycznego. Z uwagi na sposób wyznaczania elementów tłumiących w metodzie Rayleigh'a, wyznaczono wartości przybliżone, co może powodować odchylenia pomiędzy zachowaniem modelu i rzeczywistego układu. W następnym rozdziale przeprowadzono ponowną analizę odpowiedzi układu z uwzględnieniem tłumienia.

4.4 Weryfikacja tłumionego podukładu mechanicznego

Wprowadzone do układu elementy tłumiące powodują zmianę równania różniczkowego drugiego rzędu. Do wyznaczenia równań ruchu konieczne jest rozszerzenie uprzednio przytoczonej formy równania Lagrange'a II rodzaju o człon odpowiadający za rozpraszanie energii układu. Wzór (4.22) po uwzględnieniu tłumienia przyjmuje następującą postać:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i, \quad (4.47)$$

gdzie:

$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}$ – pochodna energii rozproszonej po uogólnionym wektorze prędkości.

Analizie po raz kolejny poddano układ o dwóch stopniach swobody, stanowiący przykład w poprzednich etapach omawianej syntezy. Równania ruchu wyznaczone przy użyciu wzoru (4.47) w przypadku układu o dwóch stopniach swobody z elementami sprężystymi i tłumiącymi (rysunek 4.11), przyjmują postać:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + c_1(x_1 - x_2) = F_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 - b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - c_1(x_1 - x_2) + b_2 \dot{x}_2 + c_2 x_2 = F_2 \end{cases} \quad (4.48)$$

Wyznaczone równania ruchu pierwszego i drugiego stopnia swobody układu zawierają w tym przypadku pierwszą oraz drugą pochodną przemieszczenia, co uniemożliwia przyjęcie prostej funkcji trygonometrycznej do zdefiniowania ruchu oscylacyjnego, jak miało to miejsce w przypadku układu bez tłumienia. Przyjęcie funkcji sinusa lub cosinusa spowoduje w obu przypadkach wystąpienie przeciwnych funkcji trygonometrycznych w pierwszej pochodnej przemieszczenia. Redukcja tych funkcji w dalszym etapie wyznaczania postaci macierzowej równań stałaby się zadaniem nietrywialnym. W celu rozwiązania układu równań (4.48) przyjęto warunki brzegowe ruchu oscylacyjnego z tłumieniem wiskotycznym postępując zgodnie z przyjętymi w literaturze metodami na rozwiązanie równań różniczkowych drugiego rzędu [85]. W zależności od rodzaju tłumienia występującego w rozpatrywanym układzie (nadkrytyczne, krytyczne oraz podkrytyczne), ogólnym rozwiązaniem różniczkowego równania ruchu są trzy funkcje przemieszczenia odpowiadające danemu rodzajowi tłumienia.

W przypadku tłumienia nadkrytycznego rozwiązanie ogólne równania przyjmuje postać:

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \quad (4.49)$$

$$r_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad (4.50)$$

gdzie:

$C_{1,2}$ – stałe całkowania równania różniczkowego,

$r_{1,2}$ – pierwiastki równania charakterystycznego,

ω_0^2 – kwadrat częstości drgań własnych układu,

γ – współczynnik tłumienia krytycznego.

Tłumienie nadkrytyczne wewnątrz układu całkowicie niweluje ruch oscylacyjny, dlatego w ramach założeń pracy przypadek ten nie będzie rozpatrywany. Kolejnym przypadkiem jest tłumienie krytyczne, w efekcie którego układ w nieskończonym czasie dąży bez oscylacji do położenia równowagi w momencie ustania wszelkich wymuszeń pochodzących z poza układu. W przypadku tłumienia krytycznego delta równania charakterystycznego jest równa zero, a rozwiązanie ogólne równania przyjmuje postać:

$$x = e^{-nt} (C_1 + C_2 t). \quad (4.51)$$

Praca podejmuje temat układów, w których występuje tłumienie podkrytyczne. Ograniczenie nałożono w celu zawężenia rozpatrywanej grupy układów jedynie do takich, w których występuje zjawisko rezonansu, czyli konstruktywnej interferencji sygnału wymuszającego oraz częstości własnej układu. W przypadku układów z tłumieniem podkrytycznym delta równania charakterystycznego jest mniejsza od zera, a układ po ustaniu wymuszeń zewnętrznych powraca do położenia równowagi ruchem oscylacyjnym względem tego położenia w czasie zależnym od siły tłumienia. Rozwiązanie ogólne równania w przypadku tłumienia podkrytycznego przyjmuje formę:

$$x = e^{-nt} (C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t), \quad (4.52)$$

gdzie:

ω – częstość drgań swobodnych tłumionych.

Do przyjętego układu wprowadzono również wymuszenie harmoniczne odpowiadające za sygnał elektryczny stymulujący rzeczywisty układ piezoelektryczny. Rozwiązanie trzeciego przypadku ogólnego drgań tłumionych wykonano z pominięciem członu równania odpowiadającego za drgania swobodne układu w momencie przyłożenia siły wymuszającej do układu bez inercji. Jest to równoznaczne z założeniem, że pomijany jest czas, w którym układ dochodzi do stanu ustalonego po zadanym wymuszeniu. Rozpatrywany jest jedynie moment, w którym wszelkie drgania swobodne ustają, a układ oscyluje jedynie z częstotliwością zadanego sygnału wymuszającego. Rzeczywiste układy piezoelektryczne oscylują głównie przy wysokich częstotliwościach więc czas, w którym osiągają one stan ustalony jest porównywalnie niewielki do czasu pracy. Układ tłumiony i oscylujący z częstością sygnału wymuszającego cechuje się również opóźnieniem w fazie oscylacji układu względem fazy sygnału wymuszającego. Alternatywny zapis postaci równania (4.52), w którym występują wspomniane przesunięcia fazowe przedstawiono następująco:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) , \quad (4.53)$$

gdzie:

φ – przesunięcie fazowe oscylacji układu względem sygnału wymuszającego.

Przesunięcie fazowe można interpretować jako opóźnienie reakcji układu na zadany sygnał wymuszający, wynikające z charakteru pracy układów tłumionych. Opóźnienie ma szczególne znaczenie w urządzeniach stosowanych do aktywnego tłumienia, gdzie drgania zewnętrzne tłumione są poprzez destruktywną interferencję obu sygnałów. Destruktywna interferencja sygnałów zachodzi w przypadku, w którym sygnały o zgodnej częstotliwości są przesunięte względem siebie w fazie o kąt 180 stopni.

Wyznaczenie amplitudy drgań danego stopnia swobody układu tłumionego w przypadku, gdzie występuje tłumienie podkrytyczne jest równoznaczne z obliczeniem stałych całkowania C_1 oraz C_2 , a następnie pierwiastka sumy ich kwadratów jak w:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} . \quad (4.54)$$

Przesunięcie fazowe wynikające z opóźnienia oscylacji układu tłumionego względem sygnału wymuszającego można obliczyć stosując funkcję arcusa tangensa ilorazu wyznaczonych stałych całkowania [85]:

$$\varphi = \arctg \frac{C_1}{C_2} . \quad (4.55)$$

Przy założeniu, że rozważane są tylko układy tłumione podkrytycznie, można zatem zapisać równania ruchu podstawiając rozwiązanie ogólne równania różniczkowego drugiego rzędu (4.52) do zmiennych x_1 i x_2 :

$$\begin{cases} x_1 = A_{11} \sin \omega t + A_{12} \cos \omega t \\ x_2 = A_{21} \sin \omega t + A_{22} \cos \omega t \end{cases} \quad (4.56)$$

Dodatkowo przyjęto, że na każdy stopień swobody układu działa siła zewnętrzna zdefiniowana funkcją harmoniczną cosinusa. Aby odseparować czynniki z funkcją sinusa oraz cosinusa, układ dwóch równań ruchu dodatkowo rozbito na układ czterech równań harmonicznym. Czynniki pogrupowano w zależności od występujących przy nich składowych amplitudy. Równanie (4.56) po przekształceniach przyjmuje ostatecznie formę:

$$\begin{cases} [A_{11}(-\omega^2 m_1 + k_1) + A_{12}(\omega b_1) + A_{21}(-k_1) + A_{22}(\omega b_1)] \sin \omega t = 0 \\ [A_{11}(\omega b_1) + A_{12}(k_1 - \omega^2 m_1) + A_{21}(-\omega b_1) + A_{22}(-k_1)] \cos \omega t = F_1 \cos \omega t \\ [A_{11}(-k_1) + A_{12}(\omega b_1) + A_{21}(-\omega^2 m_2 + k_1 + k_2) + A_{22}(-\omega b_1 - \omega b_2)] \sin \omega t = 0 \\ [A_{11}(\omega b_1) + A_{12}(-k_1) + A_{21}(\omega b_1 + \omega b_2) + A_{22}(-\omega^2 m_2 + k_1 + k_2)] \cos \omega t = F_2 \cos \omega t \end{cases} \quad (4.57)$$

Przez odpowiednie zgrupowanie czynników równanie sprowadzono do postaci macierzowej:

$$V \times B = P, \quad (4.58)$$

gdzie:

V – macierz czynników transformaty odpowiedzi układu,

B – macierz odpowiedzi układu,

P – macierz wymuszeń.

Macierze wchodzące w skład równania przyjmują formę:

$$V = \begin{bmatrix} -\omega^2 m_1 + k_1 & \omega b_1 & -k_1 & \omega b_1 \\ \omega b_1 & k_1 - \omega^2 m_1 & -\omega b_1 & -k_1 \\ -k_1 & \omega b_1 & -\omega^2 m_2 + k_1 + k_2 & -\omega b_1 - \omega b_2 \\ \omega b_1 & -k_1 & \omega b_1 + \omega b_2 & -\omega^2 m_2 + k_1 + k_2 \end{bmatrix}, \quad (4.59)$$

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{21} \\ A_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.60)$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 \\ F_1 \\ 0 \\ F_2 \end{bmatrix}. \quad (4.61)$$

Składniki macierzy odpowiedzi wyliczono odwracając i przenosząc na prawą stronę macierz czynników transformaty:

$$B = P \times V^{-1}. \quad (4.62)$$

Alternatywą jest zastosowanie do wyliczenia poszczególnych składników wzorów Cramera. Wyznacznik główny oraz wyznaczniki poszczególnych zmiennych są następujące:

$$W_g = \det \begin{vmatrix} -\omega^2 m_1 + k_1 & \omega b_1 & -k_1 & \omega b_1 \\ \omega b_1 & k_1 - \omega^2 m_1 & -\omega b_1 & -k_1 \\ -k_1 & \omega b_1 & -\omega^2 m_2 + k_1 + k_2 & -\omega b_1 - \omega b_2 \\ \omega b_1 & -k_1 & \omega b_1 + \omega b_2 & -\omega^2 m_2 + k_1 + k_2 \end{vmatrix}, \quad (4.63)$$

$$W_{\Lambda_{11}} = \det \begin{vmatrix} 0 & \omega b_1 & -k_1 & \omega b_1 \\ F_1 & k_1 - \omega^2 m_1 & -\omega b_1 & -k_1 \\ 0 & \omega b_1 & -\omega^2 m_2 + k_1 + k_2 & -\omega b_1 - \omega b_2 \\ F_2 & -k_1 & \omega b_1 + \omega b_2 & -\omega^2 m_2 + k_1 + k_2 \end{vmatrix}, \quad (4.64)$$

$$W_{\Lambda_{12}} = \det \begin{vmatrix} -\omega^2 m_1 + k_1 & 0 & -k_1 & \omega b_1 \\ \omega b_1 & F_1 & -\omega b_1 & -k_1 \\ -k_1 & 0 & -\omega^2 m_2 + k_1 + k_2 & -\omega b_1 - \omega b_2 \\ \omega b_1 & F_2 & \omega b_1 + \omega b_2 & -\omega^2 m_2 + k_1 + k_2 \end{vmatrix}, \quad (4.65)$$

$$W_{\Lambda_{21}} = \det \begin{vmatrix} -\omega^2 m_1 + k_1 & \omega b_1 & 0 & \omega b_1 \\ \omega b_1 & k_1 - \omega^2 m_1 & F_1 & -k_1 \\ -k_1 & \omega b_1 & 0 & -\omega b_1 - \omega b_2 \\ \omega b_1 & -k_1 & F_2 & -\omega^2 m_2 + k_1 + k_2 \end{vmatrix}, \quad (4.66)$$

$$W_{\Lambda_{22}} = \det \begin{vmatrix} -\omega^2 m_1 + k_1 & \omega b_1 & -k_1 & 0 \\ \omega b_1 & k_1 - \omega^2 m_1 & -\omega b_1 & F_1 \\ -k_1 & \omega b_1 & -\omega^2 m_2 + k_1 + k_2 & 0 \\ \omega b_1 & -k_1 & \omega b_1 + \omega b_2 & F_2 \end{vmatrix}, \quad (4.67)$$

$$\Lambda_{11} = \frac{W_{\Lambda_{11}}}{W_g}, \quad \Lambda_{12} = \frac{W_{\Lambda_{12}}}{W_g}, \quad \Lambda_{21} = \frac{W_{\Lambda_{21}}}{W_g}, \quad \Lambda_{22} = \frac{W_{\Lambda_{22}}}{W_g}. \quad (4.68)$$

Uwzględniając wzór (4.54) w celu wyliczenia całkowitej amplitudy odpowiedzi każdego stopnia swobody rozważanego układu, konieczne jest zsumowanie kwadratów czynników odpowiadających składowej sinusowej oraz cosinusowej:

$$\Lambda_1 = \sqrt{\Lambda_{11}^2 + \Lambda_{12}^2}, \quad (4.69)$$

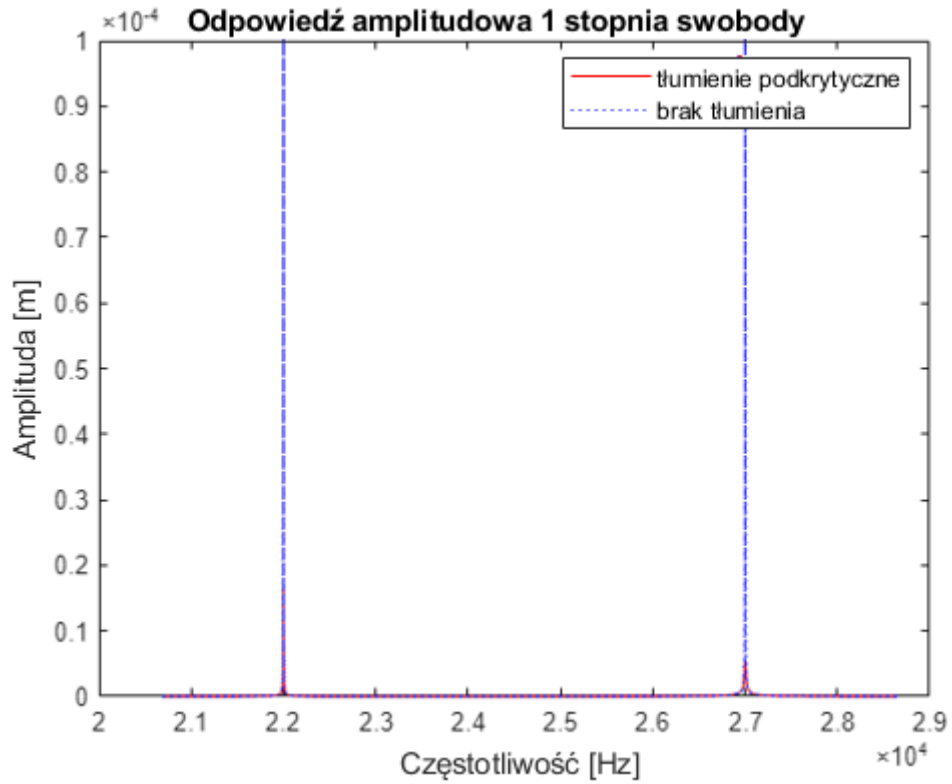
$$\Lambda_2 = \sqrt{\Lambda_{21}^2 + \Lambda_{22}^2}. \quad (4.70)$$

Przesunięcie fazowe odpowiedzi układu względem sygnału wymuszającego wyliczono korzystając ze wzoru (4.55). Wzory na przesunięcie fazowe odpowiedzi na każdym ze stopni swobody będą zatem następujące:

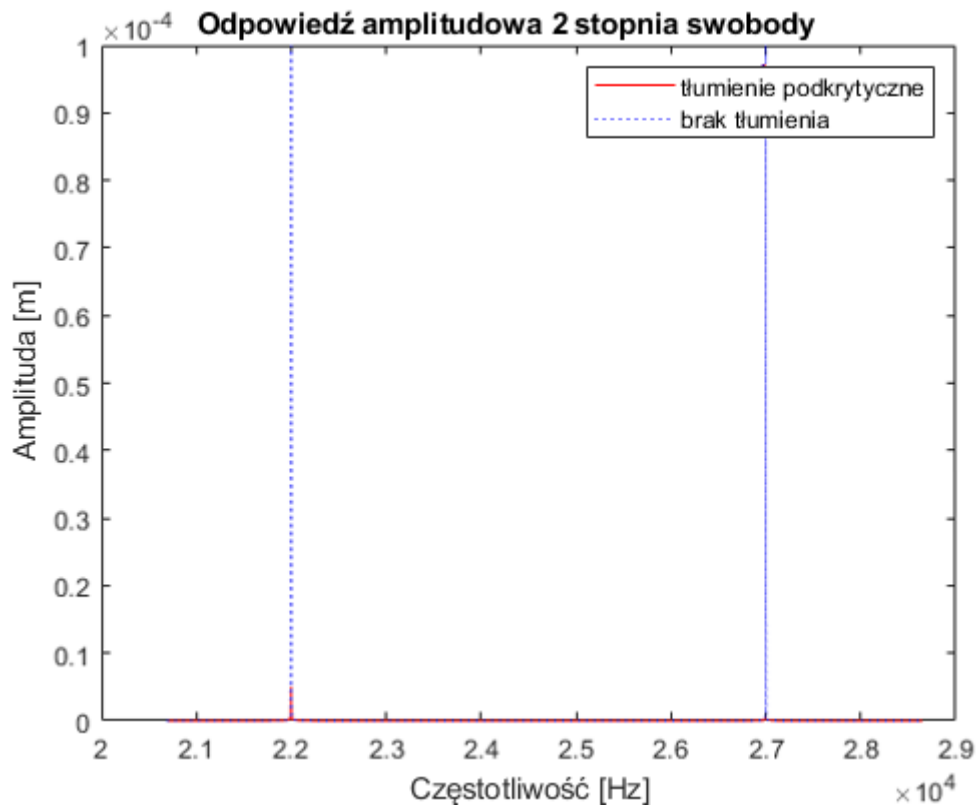
$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{\Lambda_{11}}{\Lambda_{12}}, \quad (4.71)$$

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{\Lambda_{21}}{\Lambda_{22}}. \quad (4.72)$$

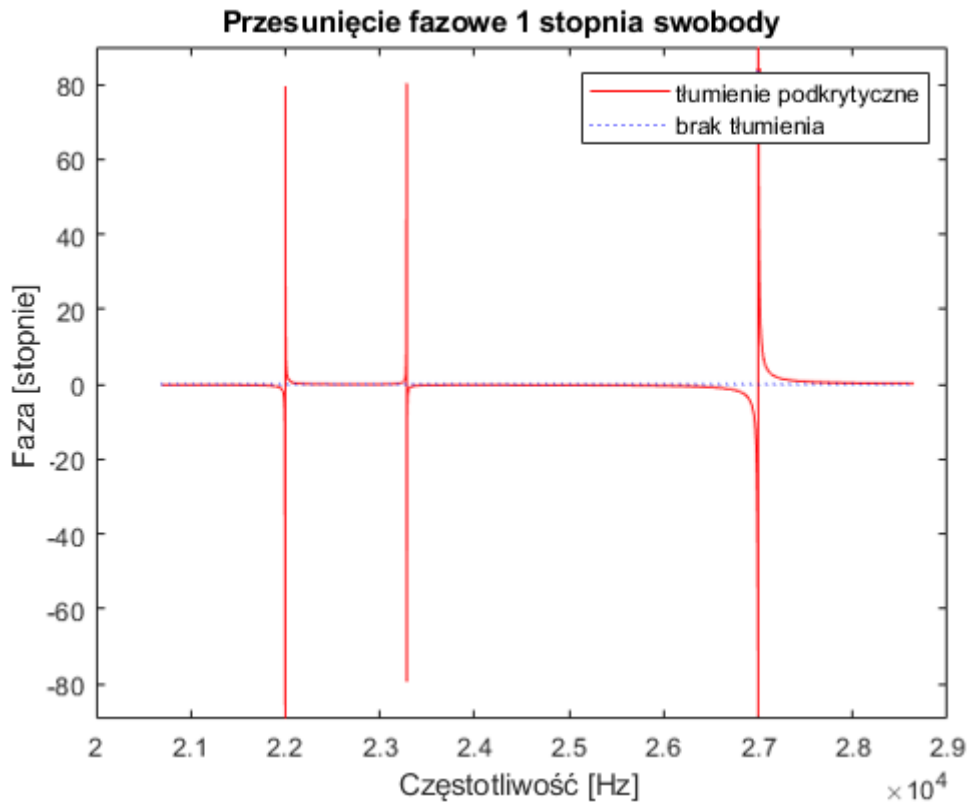
Wyniki otrzymane metodą macierzową w odniesieniu do przyjętego układu o dwóch stopniach swobody przy uwzględnieniu elementów tłumiących przedstawiono na rysunku 4.10 oraz rysunku 4.11.



Rys. 4.10. Odpowiedź pierwszego stopnia swobody układu bez tłumienia (kreskowana linia) oraz układu z tłumieniem (ciągła linia)



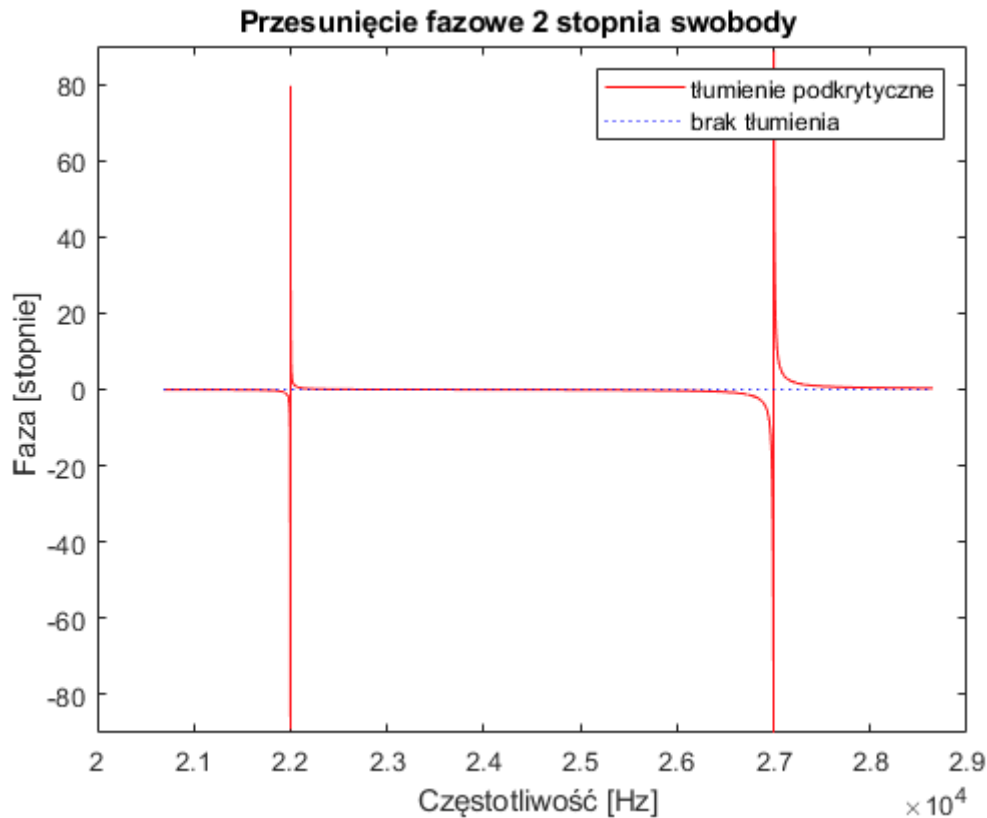
Rys. 4.11. Odpowiedź drugiego stopnia swobody układu bez tłumienia (kreskowana linia) oraz układu z tłumieniem (ciągła linia)



Rys. 4.12. Przesunięcie fazowe odpowiedzi układu względem sygnału wymuszającego w przypadku pierwszego stopnia swobody

Kreskowaną linią oznaczono przebiegi odpowiedzi układu bez tłumienia, natomiast ciągłą linią oznaczono przebieg odpowiedzi układu tłumionego o przyjętych metodą Rayleigh'a granicznych parametrach tłumienia podkrytycznego. Zredukowano amplitudy w miejscach występowania częstotliwości rezonansowych układu, co pozwala na lepsze dopasowanie ich do amplitudy wibracji układów rzeczywistych manipulując wartościami parametrów równania.

Na rysunkach 4.12 i 4.13 przedstawiono przebiegi przesunięcia fazowego w przypadku obu stopni swobody układu. Zaobserwowano opóźnienie lub „obrócenie” fazy względem sygnału wymuszającego o 180 stopni w miejscach występowania częstotliwości rezonansowych. Jest to istotna właściwość układów tłumionych w kontekście zastosowania do aktywnego tłumienia drgań. Konieczne jest uwzględnienie opóźnienia fazowego w miejscach występowania częstotliwości rezonansowych przy sterowaniu układami w ich zakresie.

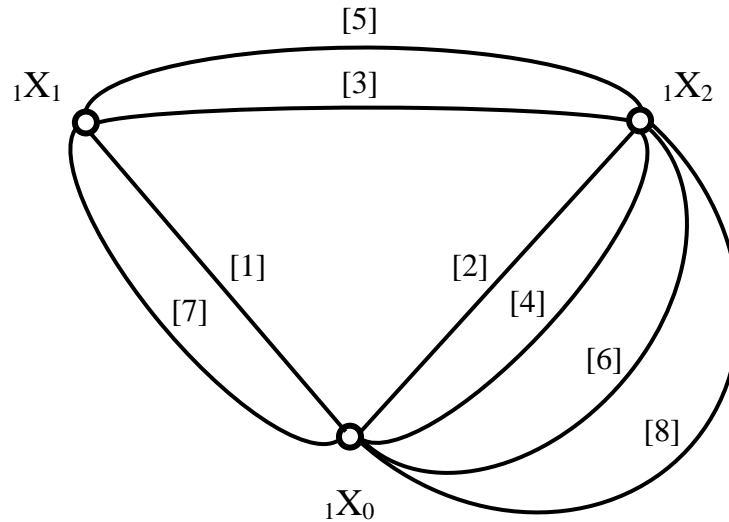


Rys. 4.13. Przesunięcie fazowe odpowiedzi układu względem sygnału wymuszającego w przypadku drugiego stopnia swobody

Metoda macierzowa jest precyzyjną metodą obliczeniową do wyznaczania przebiegu funkcji w dziedzinie częstotliwości. Wprowadzenie elementów tłumiących do rozważanych układów zwiększa znacznie potrzebną liczbę równań do przeprowadzenia pełnej analizy. Liczbę równań podwojono, co zwiększa również w istotnym stopniu niezbędną moc obliczeniową potrzebną do obliczenia wyników w przypadku zastosowania algorytmów komputerowych. Większa moc obliczeniowa była motywacją do przeanalizowania alternatywy w postaci algorytmu opartego na metodzie liczb strukturalnych. Celem dodatkowej analizy metodą nieklasyczną było sprawdzenie potencjalnych opcji na zwiększenie wydajności obliczeń poprzez ich uproszczenie.

Umożliwienie analizy wybranej metody względem obliczeń macierzowych wymagało opracowania metody bazującej na liczbach strukturalnych, pozwalającej na obliczenie odpowiedzi układu tłumionego w sposób analogiczny do metody macierzowej. Rozpoznane w przeglądzie źródła literaturowe dotyczyły przypadków ogólnych, w których do opisu funkcji przemieszczenia użyto uogólniony parametr s [31, 34]. Rozwiązanie otrzymanych funkcji amplitudy po podstawieniu funkcji przemieszczenia tłumionego ruchu oscylacyjnego jest zadaniem złożonym i wymagającym skomplikowanych przekształceń matematycznych.

Podjęto decyzję o opracowaniu autorskiej metody bazującej na poznanych sposobach rozwiązywania układów bez tłumienia w połączeniu z metodami stosowanymi w przypadku rozwiązania macierzowego układów z tłumieniem. Metodę analizy układu tłumionego w [85] zaadaptowano do metody liczb strukturalnych poprzez podzielenie grafu układu tłumionego na dwa identyczne grafy odpowiadające oddziaływaniom o składowych sinusowych oraz cosinusowych. Oddziaływania ze składową sinusową opisano grafem przedstawionym na rysunku 4.14.



Rys. 4.14. Graf obrazu części oddziaływań układu o dwóch stopniach swobody z elementami tłumiącymi odpowiadający za oddziaływania ze współczynnikiem sinusowym

Graf utworzono numerując krawędzie analogicznie do grafu bez tłumienia. Poszczególne krawędzie grafu odpowiadają oddziaływaniom pomiędzy kolejnymi elementami układu. W tym przypadku różnicą pomiędzy grafem układu z tłumieniem oraz grafem układu bez tłumienia są krawędzie opisujące elementy tłumiące, które posiadają dodatkową pochodną przemieszczenia. W przypadku obrazu grafu (rysunek 4.14) uwzględniono wyłącznie pochodne posiadające funkcję sinusa. Do opisu poszczególnych krawędzi podzielono wszystkie funkcje definiujące oddziaływania w systemie przez wspomnianą funkcję sinusa. Wyłączając z równań funkcję trygonometryczną, poszczególne krawędzie grafu odpowiadają zależnościom fizycznym wewnątrz rozpatrywanego układu:

$$\begin{aligned}
[1] &= -\omega^2 m_1, \\
[2] &= -\omega^2 m_2, \\
[3] &= c_1, \\
[4] &= c_2, \\
[5] &= \omega b_1, \\
[6] &= \omega b_2, \\
[7] &= 0, \\
[8] &= 0.
\end{aligned}
\tag{4.73}$$

Krawędzie 7 i 8 odpowiadają oddziaływaniom zewnętrznym ze składową sinusową. W rozważanym przykładzie przyjęto, że na oba stopnie swobody oddziałuje siła wymuszająca o składowej cosinusowej, dlatego siły reprezentowane przez krawędzie w przypadku obrazu definiującego oddziaływania ze składową sinusową są zerowe. Z uwagi na przykładowy charakter rozwiązania zdecydowano o pozostawieniu tych krawędzi w grafie. Analogicznie do grafu przedstawionego na rysunku 4.14 utworzono graf reprezentujący krawędzie ze składowymi cosinusowymi. W tym przypadku poszczególne krawędzie będą odpowiadały siłom zdefiniowanym przez funkcje:

$$\begin{aligned}
[1] &= -\omega^2 m_1, \\
[2] &= -\omega^2 m_2, \\
[3] &= c_1, \\
[4] &= c_2, \\
[5] &= -\omega b_1, \\
[6] &= -\omega b_2, \\
[7] &= F_1, \\
[8] &= F_2.
\end{aligned}
\tag{4.74}$$

Różnice pomiędzy krawędziami grafów odpowiadających za składowe sinusowe oraz cosinusowe występują jedynie w przypadku elementów tłumiących oraz sił wymuszających. Wynikają one z zapisu pierwszej pochodnej funkcji sinusowej oraz cosinusowej tłumienia oraz przyjętej formy oscylacji sił wymuszających. Analogicznie do przypadku układu bez tłumienia, na podstawie otrzymanych grafów obliczane są ich liczby strukturalne. W rozważanym przypadku liczby strukturalne uzyskane na podstawie obu grafów będą takie same. W celu odróżnienia ich w późniejszych etapach obliczeń, oznaczono je symbolami D_s i D_c . Liczba strukturalna grafu przedstawionego na rysunku 4.16 ma postać:

$$D_s = D_c = [1 \ 3 \ 5][2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6], \quad (4.75)$$

$$D_s = D_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 4 & 6 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}. \quad (4.76)$$

Postępując zgodnie z zasadą wyznaczania odpowiedzi układu metodą liczb strukturalnych, obliczono pochodne liczby strukturalnej względem krawędzi określających oddziaływania inercyjne. W rozważanym przypadku będą to krawędzie 1 i 2. W dalszym ciągu pochodne te są takie same w przypadku obu grafów, dlatego w celu rozróżnienia oznaczone są indeksami p_s oraz p_c :

$$p_{1s,c} = \frac{\partial D_{s,c}}{\partial [1]} = [2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6], \quad (4.77)$$

$$p_{2s,c} = \frac{\partial D_{s,c}}{\partial [2]} = [1 \ 3 \ 5]. \quad (4.78)$$

W kolejnym kroku obliczono część wspólną pochodnych względem krawędzi 1 i 2:

$$s_{1s,c} = \text{Sim}\left(\frac{\partial D_{s,c}}{\partial [1]}; \frac{\partial D_{s,c}}{\partial [2]}\right) = [3 \ 5]. \quad (4.79)$$

Przed przejściem do obliczeń amplitud drgań dwóch stopni swobody układu konieczne jest zsumowanie wyznaczonych składowych sinusowych oraz cosinusowych w sposób analogiczny do metody macierzowej. Pierwiastek sumy kwadratów, determinant poszczególnych składowych liczb strukturalnych obliczono w celu otrzymania ostatecznych postaci składników równania:

$$D(\omega) = \sqrt{\left[\det_z(D_s)\right]^2 + \left[\det_z(D_c)\right]^2}, \quad (4.80)$$

$$p_1 = \sqrt{\left[\det_z(p_{1s})\right]^2 + \left[\det_z(p_{1c})\right]^2}, \quad (4.81)$$

$$p_2 = \sqrt{\left[\det_z(p_{2s})\right]^2 + \left[\det_z(p_{2c})\right]^2}, \quad (4.82)$$

$$s_1 = \sqrt{\left[\det_z(s_{1s})\right]^2 + \left[\det_z(s_{1c})\right]^2}. \quad (4.83)$$

Pierwiastki sumy sił cząstkowych oznaczonych w obu grafach wyznaczono następująco:

$$F_1 = \sqrt{F_{1s}^2 + F_{1c}^2} \quad (4.84)$$

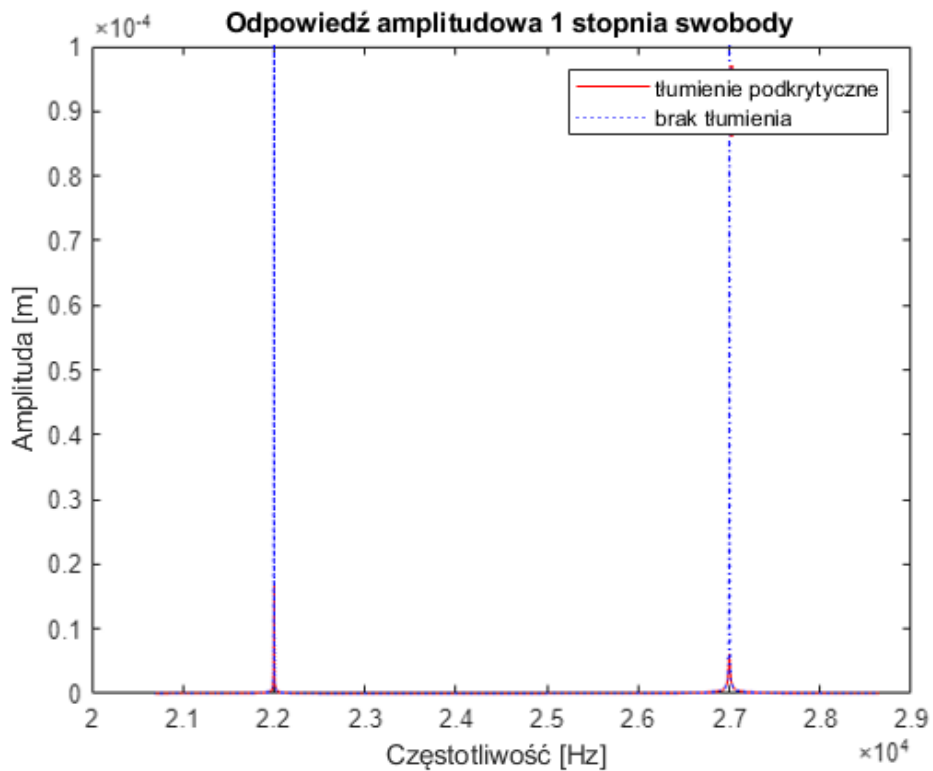
$$F_2 = \sqrt{F_{2s}^2 + F_{2c}^2} \quad (4.85)$$

Następnie wyznaczono przebiegi odpowiedzi układu o dwóch stopniach swobody przy zastosowaniu funkcji jednoczesności, analogicznie jak w przypadku bez tłumienia (4.31, 4.32). Przedstawiony proces obliczeniowy pozwala na uzyskanie odpowiedzi układu stosując alternatywną metodę grafów i liczb strukturalnych. Odpowiedzi obliczono na podstawie cząstkowych wzorów otrzymanych z grafów zależności zachodzących w rozpatrywanym układzie, w przypadku składowej sinusowej oraz cosinusowej (4.75 – 4.85). Wzory opisujące odpowiedzi układu określone na podstawie równań cząstkowych przyjmują postać:

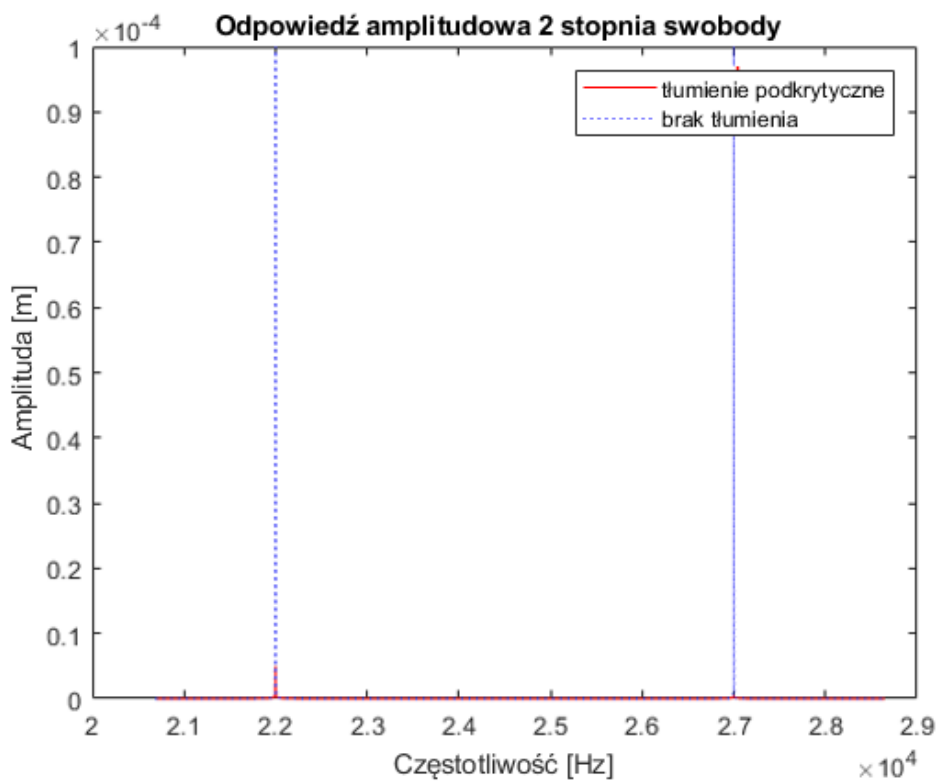
$$A_1 = \frac{p_1 F_1 + s_1 F_2}{D(\omega)}, \quad (4.86)$$

$$A_2 = \frac{s_1 F_1 + p_2 F_2}{D(\omega)}. \quad (4.87)$$

Uzyskane na podstawie wyznaczonych wzorów wykresy amplitudy w dziedzinie częstotliwości pokazano na rysunku 4.15 i 4.16. Niemożliwe było jednak uzyskanie przesunięć fazowych metodą liczb strukturalnych z uwagi na złożoną postać determinanty pełnej liczby strukturalnej $D(\omega)$, której nie można było podzielić na składowe sinusowe oraz cosinusowe bez utraty części zależności odpowiadających za poprawną postać funkcji.

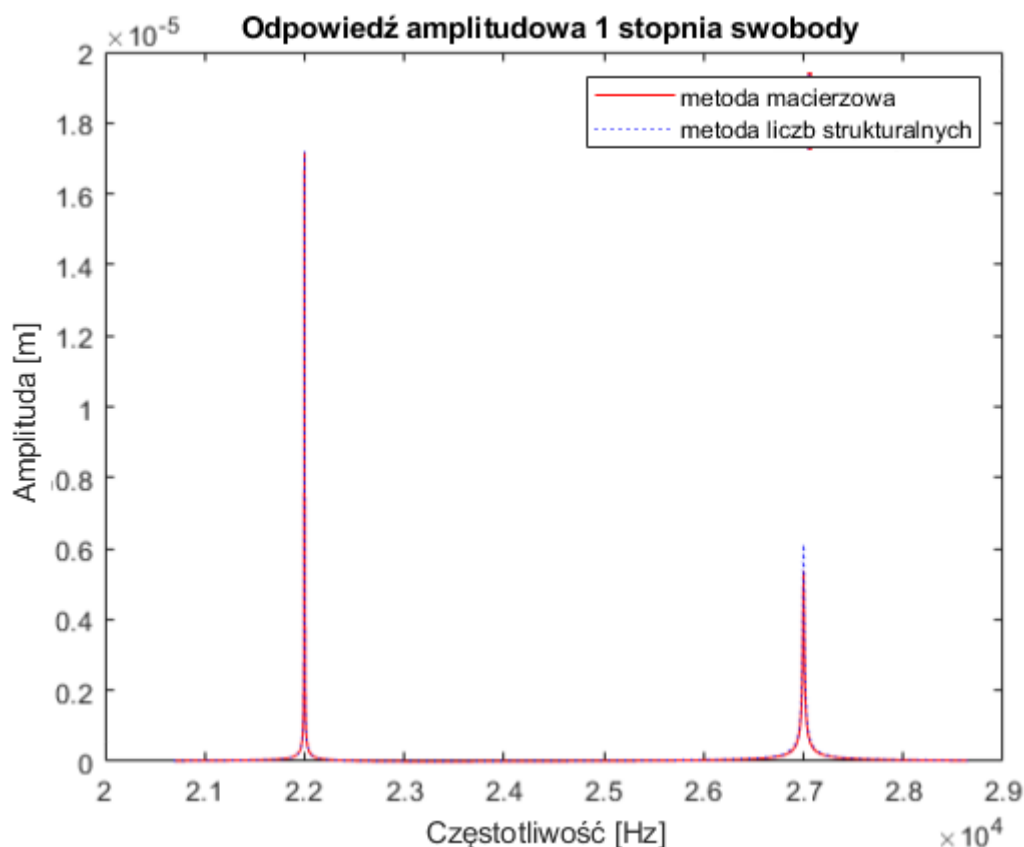


Rys 4.15. Odpowiedź układu bez tłumienia (kreskowana linia) oraz układu z tłumieniem (ciągła linia) pierwszego stopnia swobody wyznaczona metodą liczb strukturalnych

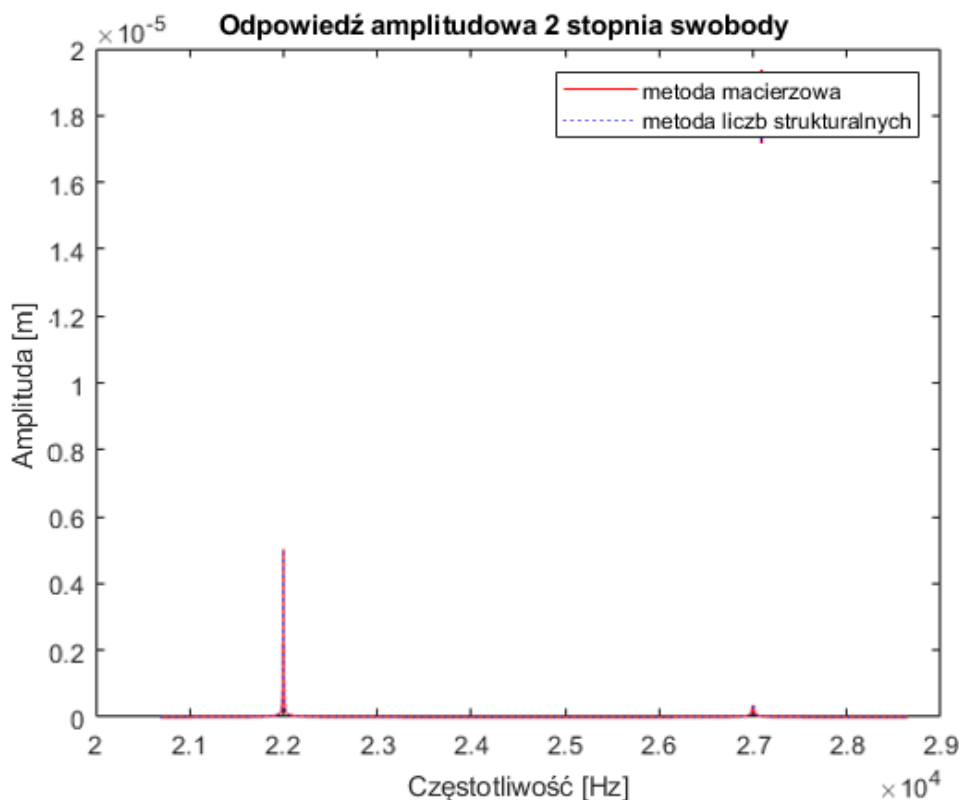


Rys 4.16. Odpowiedź układu bez tłumienia (kreskowana linia) oraz układu z tłumieniem (ciągła linia) pierwszego stopnia swobody wyznaczona metodą liczb strukturalnych

Przeprowadzono analizę wyników otrzymanych na podstawie metody macierzowej oraz metody liczb strukturalnych. W obu przypadkach przyjęto układ składający się z dwóch stopni swobody oraz o ustalonych wcześniej parametrach elementów inercyjnych i sprężystych. Przyjęto również identyczne wartości tłumienia na każdym stopniu swobody, które wyznaczono metodą Rayleigh'a w rozdziale 4.3. Analogicznie do analizy układu bez tłumienia, ciągłą linią oznaczono na wykresie wyniki otrzymane przy użyciu metody macierzowej natomiast kreskowaną linią oznaczono wyniki otrzymane na podstawie metody grafów i liczb strukturalnych. Ze względu na brak możliwości uzyskania wyników analizy przesunięcia fazowego metodą liczb strukturalnych, porównaniu podlegały jedynie wyniki analizy amplitudowej odpowiedzi układu w dziedzinie częstotliwości. Na rysunku 4.17 przedstawiono porównanie wyników analizy pierwszego stopnia swobody układu natomiast na rysunku 4.18 pokazano porównanie w przypadku drugiego stopnia swobody.

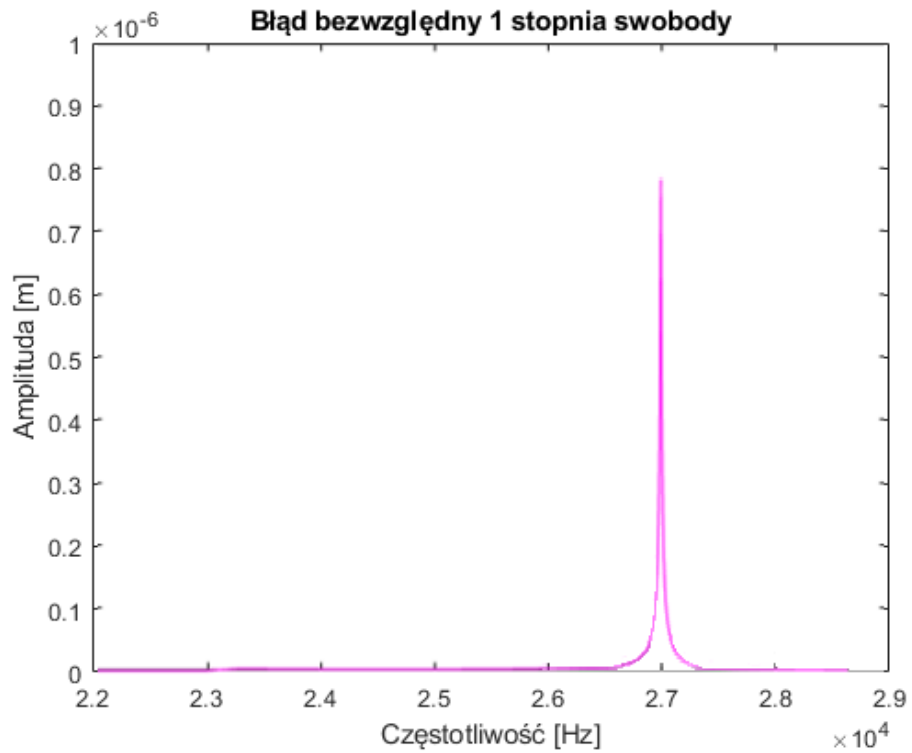


Rys. 4.17. Porównanie wyników analizy odpowiedzi pierwszego stopnia swobody analizowanego układu metodą macierzową (ciągła linia) oraz metodą liczb strukturalnych (kreskowana linia)

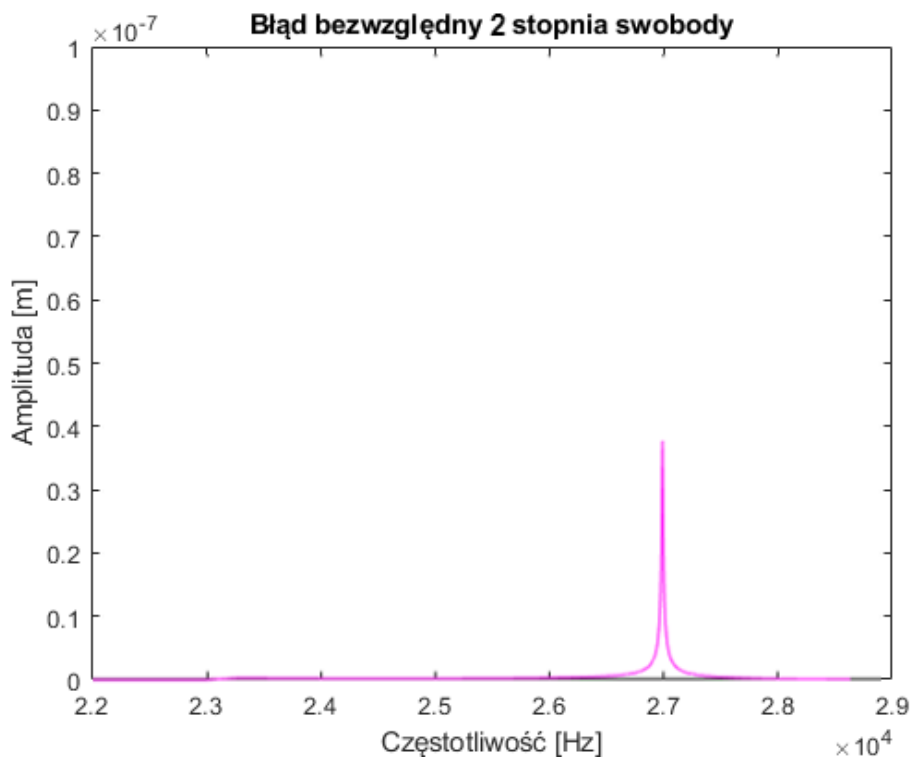


Rys. 4.18. Porównanie wyników analizy odpowiedzi drugiego stopnia swobody analizowanego układu metodą macierzową (ciągła linia) oraz metodą liczb strukturalnych (kreskowana linia)

Porównując ze sobą wartości amplitudy obliczone dwiema metodami otrzymano wykresy przedstawiające bezwzględną różnicę pomiędzy wynikami uzyskanymi metodą liczb strukturalnych oraz metodą macierzową. Na rysunku 4.19 przedstawiono wykres błędu bezwzględnego wyników analizy pierwszego stopnia swobody natomiast na rysunku 4.20 przedstawiono wykres błędu pomiędzy wynikami analizy drugiego stopnia swobody. Największy odnotowany błąd wyniósł wartość $0,8 \mu\text{m}$ i wystąpił przy częstotliwości rezonansowej 27 kHz . W przypadku porównania przebiegów amplitudy drugiego stopnia swobody układu, największy błąd występował również przy częstotliwości 27 kHz , lecz był znacznie mniejszy i wynosił $0,04 \mu\text{m}$.



Rys 4.19. Wykres bezwzględnej różnicy w odpowiedzi układu otrzymanej metodą liczb strukturalnych względem metody macierzowej przy analizie pierwszego stopnia swobody



Rys. 4.20. Wykres bezwzględnej różnicy w odpowiedzi układu otrzymanej metodą liczb strukturalnych względem metody macierzowej przy analizie drugiego stopnia swobody

W ramach porównania dwóch metod analizy wyznaczono również wykresy błędu względnego w odniesieniu do odpowiedzi stopni swobody analizowanego układu. Błąd względny obliczono w odniesieniu do odpowiedzi układu wyznaczonej metodą macierzową. Na rysunku 4.21 oraz 4.22 zamieszczono wskazane błędy. W trakcie analizy uzyskanych wyników dużą uwagę zwraca błąd względny uzyskany w obszarze częstotliwości 23 kHz będącej częstotliwością antyrezonansową układu. Amplituda odpowiedzi uzyskana metodą liczb strukturalnych jest w tym miejscu większa o kilka rzędów wielkości. W odniesieniu do skali przemieszczenia układu przy tej częstotliwości błąd jest jednak niewielki czemu dowodzi wykres przedstawiony na rysunku 4.19. Błąd względny w przypadku częstotliwości rezonansowej 27 kHz wynosi 14%. Wykres błędu względnego odpowiedzi układu w przypadku drugiego stopnia swobody wskazuje na znaczny wzrost błędu po przekroczeniu częstotliwości 27 kHz. Błąd osiąga wartość 50% przy częstotliwości 28,5 kHz. W tabelach 4.4 i 4.5 zamieszczono wartości charakterystyczne odpowiedzi układu wyznaczonych dwiema metodami analizy.

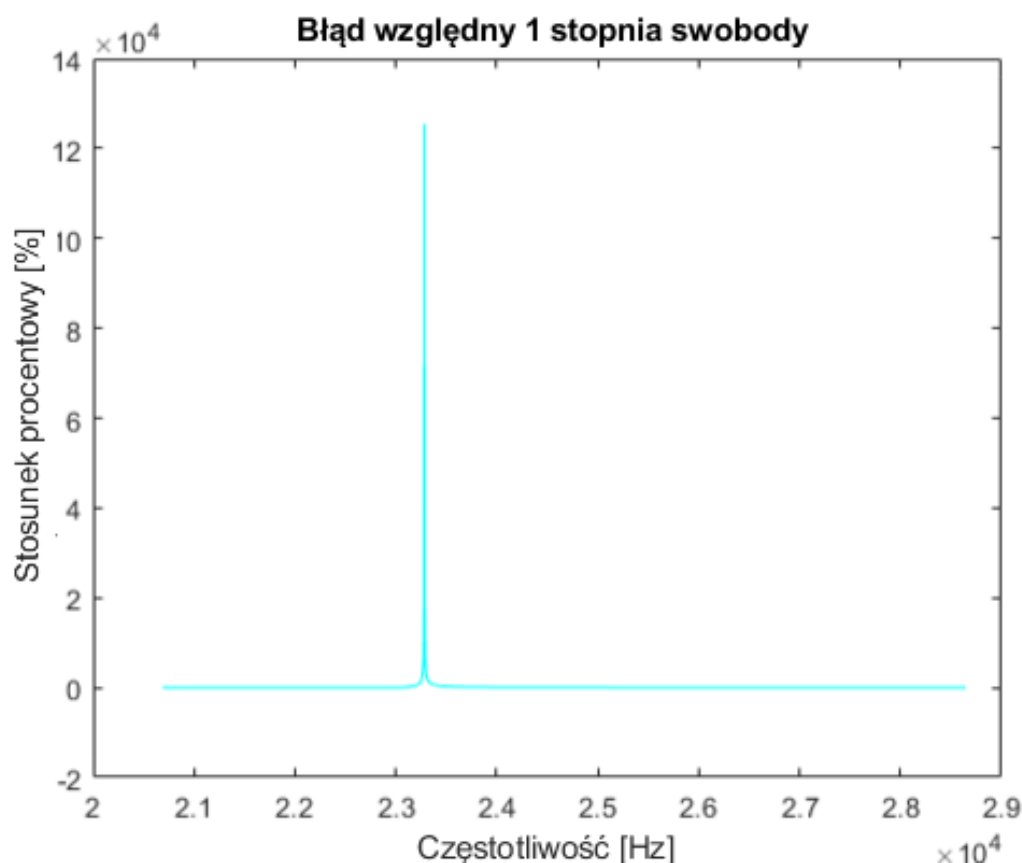
Tabela 4.4. Wartości częstości oraz odpowiadające im odpowiedzi amplitudowe pierwszego stopnia swobody układu

Częstotliwość [rad/s]		Wartość amplitudy [mm]	
Macierzowo	Strukturalnie	Macierzowo	Strukturalnie
138230,00	138230,01	0,017192	0,017192
146299,17	144513,45	0,000000	0,000004
169646,00	169645,99	0,005373	0,006131

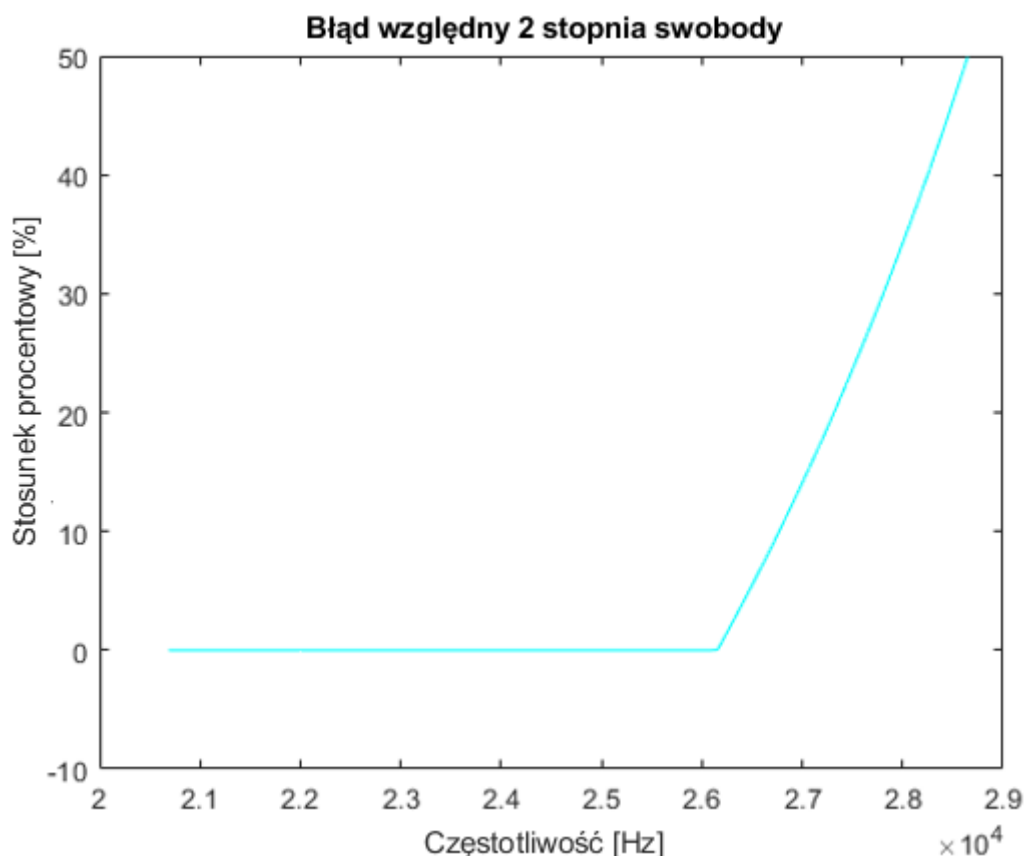
Tabela 4.5. Wartości częstości oraz odpowiadające im odpowiedzi amplitudowe drugiego stopnia swobody układu

Częstotliwość [rad/s]		Wartość amplitudy [mm]	
Macierzowo	Strukturalnie	Macierzowo	Strukturalnie
138230,00	138230,00	0,005027	0,005027
155997,46	155997,44	0,000003	0,000003
169645,90	169645,94	0,000354	0,000403

Porównanie wyników analizy dokonanej klasyczną metodą macierzową oraz przy użyciu grafów i algebry liczb strukturalnych wykazało dobrą zgodność wyników w przypadku częstotliwości rezonansowych, a także antyrezonansowych układu tłumionego podkrytycznie. W przypadku uzyskanych wyników amplitudy przemieszczenia poszczególnych stopni swobody rozpatrywanego układu zaobserwowano jednak dość duże rozbieżności.



Rys. 4.21. Wykres błędów względnego w odpowiedzi układu otrzymanej metodą liczb strukturalnych względem metody macierzowej przy analizie pierwszego stopnia swobody



Rys. 4.22. Wykres błędu względnego w odpowiedzi układu otrzymanej metodą liczb strukturalnych względem metody macierzowej przy analizie drugiego stopnia swobody

Kolejnym czynnikiem mającym istotny wpływ z punktu widzenia optymalizacji obliczeń matematycznych jest potrzebna do wykonania operacji matematycznych moc obliczeniowa. Celem pierwszego badania było określenie czasu potrzebnego na wykonanie obliczeń komputerowych algorytmami przygotowanymi na bazie dwie rozważanych w pracy metod analizy układów. Dwie realizowane metody analizy przeprowadzono na jednakowych przykładach o takich samych zestawach parametrów. Algorytmy obliczeniowe w obu przypadkach napisano i przetestowano przy użyciu oprogramowania obliczeniowego Matlab R2019b. Obliczenia wykonano na tym samym komputerze wyposażonym w procesor Ryzen 7 2700X oraz 32 GB pamięci RAM o prędkości taktowania 3000 MHz by uniknąć rozbieżności w mocy obliczeniowej stosowanych urządzeń. Zastosowano prostą metodę analizy polegającą na odmierzaniu czasu potrzebnego na realizację algorytmu, w tym celu użyto wewnętrznej komendy programu Matlab liczącej czas operacji począwszy od wywołania polecenia funkcją *Tic* kończąc odliczanie na poleceniu *Toc*. Mierzono czas pracy algorytmu w trakcie obliczania zbioru wartości odpowiedzi układu w dziedzinie częstotliwości. W pierwszej kolejności badaniu poddano układ o dwóch stopniach swobody. Celem programu

była analiza układów złożonych z uwzględnieniem elementów tłumiących. W celu uśrednienia wyników pomiar przeprowadzono 10 razy w przypadku obu zastosowanych metod, a wyniki zawarto w tabeli 4.6.

Tabela 4.6. Pomiary czasu operacji algorytmów na bazie dwóch zastosowanych metod w przypadku analizy układu o dwóch stopniach swobody

Pomiar	Algorytm macierzowy [s]	Algorytm liczb strukturalnych [s]
1	13,885	8,668
2	13,889	8,652
3	13,986	8,694
4	14,146	8,650
5	13,958	8,620
6	14,022	8,645
7	13,943	8,630
8	13,902	8,656
9	13,999	8,547
10	13,987	8,610
Średnia	13,972	8,637

Średni czas pracy algorytmu na bazie metody macierzowej wynosi 13,97 s natomiast algorytm bazujący na metodzie liczb strukturalnych pracował średnio przez 8,64 s. W kontekście pierwszego badania czasu operacji dwóch algorytmów można zatem stwierdzić, że metoda liczb strukturalnych generowała wyniki średnio o 5,33 sekundy szybciej w przypadku układu o dwóch stopniach swobody.

Przeprowadzone badanie dotyczyło algorytmów, w których nie zastosowano jeszcze pełnej parametryzacji zależności matematycznych. Algorytmizacja funkcji matematycznych jest niezbędna do utworzenia programu do obliczeń modeli o dowolnie przyjętych parametrach oraz liczbie stopni swobody. Konieczne jest jednak zwiększenie potrzebnej mocy obliczeniowej. Dodatkowa algorytmizacja funkcji miała na celu zwiększenie uniwersalności programu. Badanie czasu operacji napisanego programu przeprowadzono na przykładach układów o różnej liczbie stopni swobody. Mierzono czas potrzebny na obliczenie funkcji odpowiedzi układu. Dodatkowo zmierzono czas potrzebny na wyznaczenie przebiegu odpowiedzi przy zastosowaniu utworzonej funkcji. Z uwagi na długi czas operacji w przypadku układów o większej liczbie stopni swobody przyjęto średnią czasu operacji wyznaczaną

na podstawie dwóch prób. Wykaz zmierzonego czasu operacji porównywanych algorytmów w zależności od liczby stopni swobody układów zamieszczono w tabeli 4.7.

Tabela 4.7. Pomiary czasu operacji zmodyfikowanych algorytmów w przypadku czasu potrzebnego na wyznaczenie wzoru na odpowiedź układu oraz czasu obliczania wartości odpowiedzi przy użyciu wyznaczonych wzorów

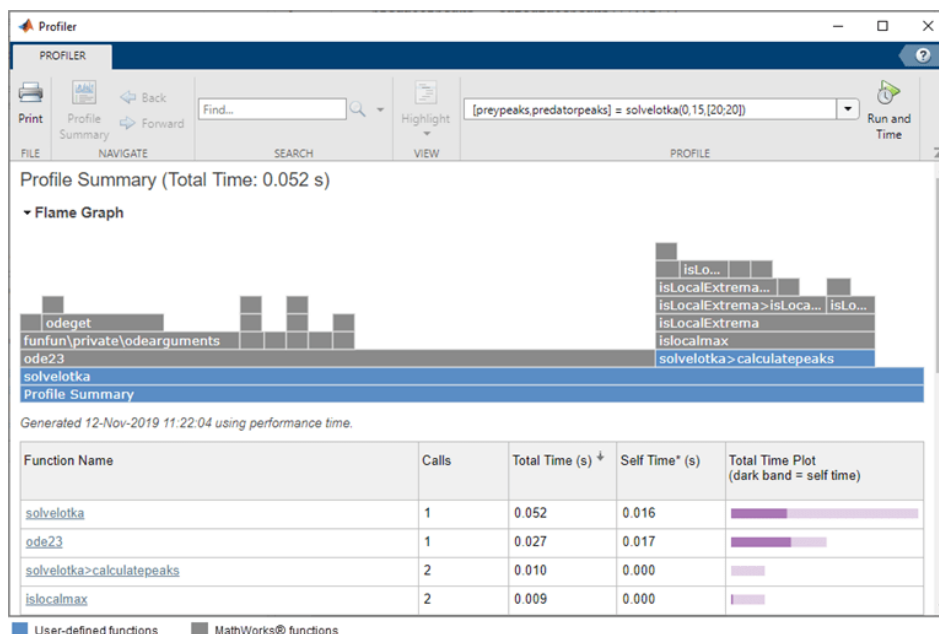
Liczba stopni swobody	Algorytm macierzowy		Algorytm liczb strukturalnych	
	Czas obliczania wzoru [s]	Czas obliczania wartości [s]	Czas obliczania wzoru [s]	Czas obliczania wartości [s]
2	0,273	1,454	0,467	1,808
3	0,354	4,994	2,538	5,603
4	0,445	11,717	16,043	13,307
5	1,109	23,653	109,892	23,499
6	2,358	45,278	1006,657	36,674

Wyniki drugiego badania wskazały istotny wzrost czasu operacji matematycznych wykonywanych metodą liczb strukturalnych względem klasycznej metody macierzowej. Różnica w czasie obliczeń przy zastosowaniu zmodyfikowanych algorytmów zwiększała się znacząco wraz ze wzrostem liczby stopni swobody analizowanych układów. Na podstawie wyników stwierdzono mniej wydajną optymalizację algorytmu bazującego na metodzie grafów i liczb strukturalnych względem metody macierzowej. Znaczący wpływ na czas działania algorytmu ma sposób w jaki wyznaczano ostateczne postaci wzorów pozwalających na analizę odpowiedzi badanych układów. W przypadku metody macierzowej, więcej czasu zajmował etap wyznaczania macierzy współczynników i wektora odpowiedzi. Wymiary macierzy współczynników wzrastają dwukrotnie w stosunku do liczby stopni swobody układu. Metoda liczb strukturalnych polega na operacjach matematycznych, w których końcowa postać równania wyznaczana jest poprzez podstawienie zależności odzwierciedlonych w krawędzie grafu. W przypadku algorytmu stosującego metodę liczb strukturalnych, najwięcej czasu trwała operacja zamiany wzoru z postaci strukturalnej w postać algebraiczną. Kalkulacja odpowiedzi układu na podstawie wyznaczonej postaci algebraicznej była jednak szybsza przy analizie układów o pięciu i sześciu stopniach swobody metodą liczb strukturalnych.

W celu dokładniejszego zbadania kryterium niezbędnej mocy obliczeniowej w kontekście zastosowanych algorytmów przeprowadzono dodatkowe badanie, którego celem było jednoczesne określenie czasu potrzebnego na wykonanie algorytmu oraz pamięci użytej przez program w trakcie wykonywania obliczeń. Ponownie użyto w tym celu oprogramowania Matlab R2019b. Do zbierania danych o czasie realizacji algorytmów oraz zarezerwowanej pamięci RAM zastosowano wewnętrzny moduł diagnostyczny programu określany nazwą „profiler”. Oprogramowanie aktywowane jest funkcją „profile on” umieszczoną wewnątrz kodu algorytmu. Działanie profilera należy zakończyć po wykonaniu programu funkcją „profile off”. Dodatkowym argumentem funkcji „-memory” aktywowano moduł pozwalający na zbieranie danych o użytej przez algorytm pamięci RAM. Wszystkie informacje dotyczące pracy algorytmu przedstawiono za pomocą okna ze szczegółowym zestawieniem odwołań do funkcji realizowanych w trakcie wykonywania badanego algorytmu. Okno profilera przedstawiono na rysunku 4.24.

Korzystając z przytoczonego modułu przeprowadzono badanie, którego celem był jednoczesny pomiar czasu realizacji poszczególnych algorytmów, jak również pamięci rezerwowanej w trakcie ich realizacji. Pomiary wykonano ponownie w przypadku obu algorytmów przy analizie układów o różnej liczbie stopni swobody (od 2 do 6). Algorytm w każdym przypadku realizowano 5 razy. Po każdym wykonaniu obliczeń notowano czas realizacji oraz wielkość pamięci RAM zarezerwowanej przez algorytm, a następnie czyszczono zapisane dane. Wartości pamięci RAM oraz czasu pracy algorytmu uśredniono z 5 przeprowadzonych prób. Należy zaznaczyć, że działanie profilera w tle wykonywanego algorytmu znacząco spowalniało jego pracę z uwagi na konieczność dodatkowej rejestracji danych. Wszystkie wyniki otrzymane w przeprowadzonym badaniu zamieszczono w tabeli 4.8.

Algorytmy realizujące obliczenia na podstawie metody macierzowej oraz metody liczb strukturalnych przygotowane w ramach przeprowadzonego badania umieszczono w załączniku 1 do pracy.



Rys. 4.24. Widok okna profilera oprogramowania Matlab R2019b użytego do zebrania informacji o czasie pracy algorytmów oraz zarezerwowanej pamięci RAM.

Tabela 4.8. Pomiary uzyskane na podstawie badania przeprowadzonego na opracowanych algorytmach matematycznych z użyciem profilera do analizy czasu oraz pamięci RAM

Liczba stopni swobody	Algorytm macierzowy		Algorytm liczb strukturalnych	
	Czas [s]	Pamięć [kb]	Czas [s]	Pamięć [kb]
2	2,545	35,2	3,073	28,8
3	6,200	434,4	9,504	26,4
4	13,218	1887,2	34,759	6374,4
5	25,314	3028,0	167,755	26083,2
6	47,817	4747,2	1294,209	747960,8

Wyniki badania uniwersalnych algorytmów wskazały na większe zużycie pamięci RAM oraz dłuższy czas pracy algorytmu opracowanego na podstawie metody liczb strukturalnych. Wyznaczone tą metodą wzory umożliwiają jednak szybsze obliczenie odpowiedzi układu w odniesieniu do wzorów wyznaczonych na podstawie metody macierzowej. Pierwszą i najbardziej prawdopodobną przyczyną jest zła optymalizacja algorytmu bazującego na metodzie liczb strukturalnych spowodowana niedostateczną znajomością funkcji optymalizujących proces obliczeniowy w programie Matlab. Kolejnym powodem jest lepsza optymalizacja metody macierzowej wynikająca z samej architektury stosowanego programu. Wiele powszechnie stosowanych rozwiązań matematycznych polega na metodzie macierzowej,

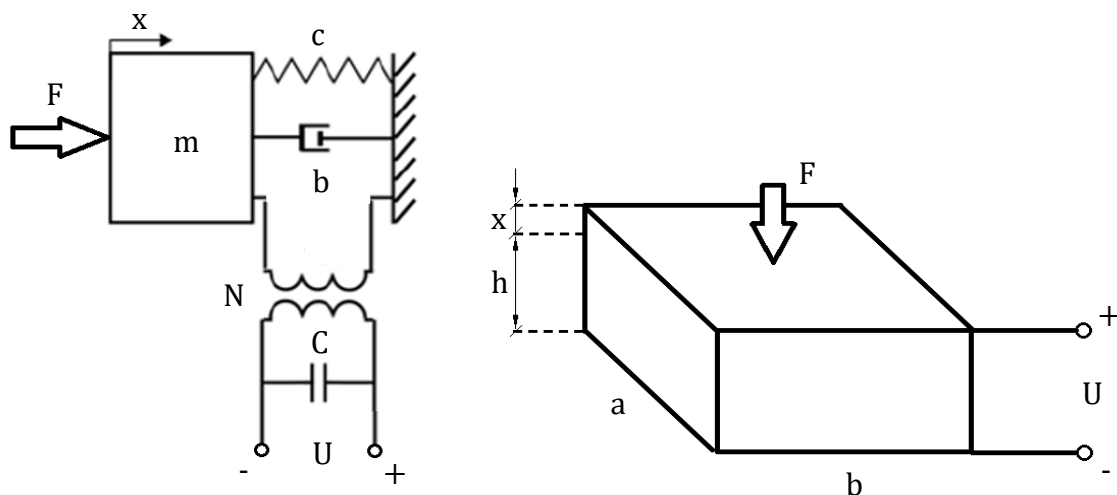
więc występuje duże prawdopodobieństwo, że użyta w tym przypadku alternatywna metoda liczb strukturalnych jest mniej przystosowana do pracy z oprogramowaniem Matlab niż metoda macierzowa. Nie da się jednak jednoznacznie stwierdzić przyczyny zaobserwowanego trendu bez przeprowadzenia wyczerpującej analizy zaawansowanych algorytmów optymalizacji obliczeniowej oraz architektury samego programu. Wnioskując na podstawie otrzymanych wyników, konieczne będzie przeprowadzenie w przyszłości specjalistycznych badań mających na celu zidentyfikowanie przyczyn zaobserwowanych różnic w optymalizacji zastosowanych algorytmów. Konieczne jest również ponowne przeprowadzenie analizy wydajności algorytmów przy użyciu innych programów komputerowych w celu wyeliminowania czynników związanych z ich wewnętrzną architekturą obliczeniową.

Na podstawie otrzymanych wyników stwierdzono, że autorski algorytm na bazie metody liczb strukturalnych jest niedostatecznie zoptymalizowany na obecnym etapie pracy badawczej, w wyniku czego podjęto decyzję o użyciu metody macierzowej do analizy układów mechatronicznych. Algebra liczb strukturalnych stanowi jednak potencjalną alternatywę do obliczeń kaskadowych układów z elementami tłumiącymi, co udowodniono w pracy. Potrzebne są dodatkowe badania mające na celu dalszą weryfikację i doskonalenie tej metody pod względem optymalizacji. Rozwój algorytmów komputerowych na podstawie grafów i liczb strukturalnych jest jedną z potencjalnych ścieżek rozwoju naukowego w przyszłości.

4.5 Model mechatroniczny przetwornika piezoelektrycznego

Synteżowanym układem elektromechanicznym jest dyskretny układ prętowy odzwierciedlający stos piezoelektryczny złożony z kilku połączonych ze sobą przetworników piezoelektrycznych. Model jest utwierdzony z jednej strony, natomiast jego drugi koniec drga swobodnie. Układ ten jest rozwinięciem synteżowanego w poprzednich etapach dyskretnego podukładu mechanicznego, w którym występują elementy inercyjne, sprężyste oraz tłumiące. Poszczególne płytki piezoelektryczne wchodzące w skład rzeczywistego układu piezoelektrycznego zamodelowane są w synteżowanym układzie mechatronicznym pod postacią dyskretnego podukładu mechanicznego połączonego z dyskretnym układem elektrycznym za pomocą członu transformacyjnego, który odpowiada za wymianę energii mechanicznej i elektrycznej pomiędzy podukładami. Mechaniczny układ składa się z pojedynczego elementu inercyjnego wraz z dołączonym do niego elementem sprężystym i tłumiącym. Elementy podukładu mechanicznego są odzwierciedleniem mechanicznych parametrów rzeczywistego układu piezoelektrycznego. Dołączony do układu transformator

oznaczony symbolem N spełnia w modelu rolę sprzężenia elektromechanicznego pomiędzy mechanicznym oraz elektrycznym podukładem. Parametry elektryczne rzeczywistego układu piezoelektrycznego zamodelowano przy użyciu elektrycznego podukładu połączonego przy pomocy transformatora z podukładem mechanicznym. Układ elektryczny składa się z kondensatora odpowiadającego za pojemność elektryczną elementu piezoelektrycznego oraz zewnętrznego źródła napięcia. Utworzona koncepcja modelu dyskretnego jest wzorowana na istniejących w literaturze dyskretnych modelach piezoelektrycznych [44, 45, 86]. Przesunięcie oznaczone symbolem x w modelu dyskretnym odpowiada odkształceniu płytki generowanemu w rzeczywistym układzie piezoelektrycznym. Dodatkowe siły pochodzące spoza rozpatrywanego układu i działające w głównej osi pracy elementu piezoelektrycznego przedstawiono za pomocą siły uogólnionej oznaczonej symbolem F . Modelowany układ jest układem prętowym, gdyż pominięto wszelkie siły oraz odkształcenia nie leżące na głównej osi roboczej badanych przetworników piezoelektrycznych. Stosowane zamiennie w pracy określenie przetworników piezoelektrycznych jako płytek wynika z ich potocznego nazewnictwa w przemyśle. W rozpatrywanym przypadku nie uwzględniono również rezystancji przewodów łączących źródło zasilania z układem piezoelektrycznym. Oporność przewodów wstępnie pominięto, gdyż założono, że będzie ona pomijalnie mała w stosunku do pozostałych wartości w układzie. Syntezowany model elektromechaniczny oraz jego odzwierciedlenie w postaci rzeczywistej płytki piezoelektrycznej przedstawiono na rysunku 4.25.



Rys. 4.25. Dyskretny model elektromechaniczny przedstawiający działanie pojedynczej płytki piezoelektrycznej z zaznaczeniem sił, przemieszczeń oraz głównych parametrów układu piezoelektrycznego

Do opisu syntezywanego układu elektromechanicznego opracowano dyskretny model matematyczny, który polega na wzajemnej wymianie energii pomiędzy częścią mechaniczną i elektryczną układu piezoelektrycznego. Równania ruchu układu elektromechanicznego wyprowadzono na podstawie równań konstytutywnych piezoelektryki (2.8). Indeksy użyte w równaniu konstytutywnym odpowiadają oddziaływaniom zachodzącym w osi prostopadłej do płaszczyzny rozpatrywanego układu piezoelektrycznego (płytki odkształcają się w osi odpowiadającej ich grubości). Pierwszy człon układu równań konstytutywnych odpowiadający zależności pomiędzy odkształceniem płytki piezoelektrycznej, a siłami pochodzącymi od mechanicznej oraz elektrycznej części układu piezoelektrycznego przekształcono do postaci przedstawiającej zależność naprężenia od pozostałych czynników w następujący sposób:

$$T_3 = \frac{S_3}{s_{33}^E} - \frac{d_{33}E_3}{s_{33}^E}. \quad (4.88)$$

Korzystając z prawa Hooke'a, rozwinięto zależność odkształcenia od naprężenia materiału piezoelektrycznego do postaci uwzględniającej parametry geometryczne materiału. Podatność materiałową w (2.8) zastąpiono sztywnością, będącą odwrotnością podatności. Wyznaczono tym sposobem wzór na wzbudzenie aktywne (4.89),

$$G = c_{33}^E A \frac{\Delta h}{h}, \quad (4.89)$$

które przekształcono w dalszym kroku stosując zależność pomiędzy prawem Hooke'a, a sprężystością elementów dyskretnego modelu mechanicznego następująco:

$$c = c_{33}^E \frac{A}{h}. \quad (4.90)$$

Po podstawieniu wzoru (4.90) do (4.89) oraz powiązaniu odkształcenia płytki piezoelektrycznej Δh z przemieszczeniem uzyskiwanym w modelu dyskretnym x , otrzymano ostateczną postać zależności opisującej wzbudzenie aktywne w przypadku mechanicznej części układu piezoelektrycznego:

$$G = cx. \quad (4.91)$$

Zależność natężenia pola elektrycznego przedstawiono jako relację pomiędzy napięciem zgromadzonym w płytce piezoelektrycznej U_c , a jej grubością początkową h :

$$E_3 = \frac{U_c}{h}. \quad (4.92)$$

Wiążąc zależność (4.92) z członem wzoru (4.88) odpowiadającym za siły pochodzące od części elektrycznej układu oraz korzystając ponownie z zależności (4.90), zapisano równanie na siły pochodzące od elektrycznej części układu piezoelektrycznego:

$$W = -cd_{33}U_c . \quad (4.93)$$

Korzystając z zależności (4.91, 4.93) oraz uwzględniając w równaniu wpływ elementów inercyjnych oraz tłumiących, zapisano zależność na siły występujące w mechanicznej części modelu elektromechanicznego płytki piezoelektrycznej:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx + U_c cd_{33} = F . \quad (4.94)$$

Analogicznie do przykładów przedstawionych w [87], przyjęto napięcie generowane wewnątrz materiału piezoelektrycznego jako zależność zgromadzonego na jego powierzchni ładunku elektrycznego Q oraz pojemności elektrycznej całego elementu C_p jako:

$$U_c = \frac{Q}{C_p} . \quad (4.95)$$

Indukcję elektryczną D występującą w równaniu konstytutywnym (2.8) przedstawiono jako zależność ładunku elektrycznego indukowanego na powierzchni elementu piezoelektrycznego do jego pola przekroju powierzchni i zapisano w postaci:

$$D = \frac{Q}{A} . \quad (4.96)$$

Do przekształceń matematycznych użyto również zależności pomiędzy współczynnikiem sprzężenia elektromechanicznego k_{33} oraz modułu piezoelektrycznego d_{33} :

$$k_{33}^2 = \frac{d_{33}^2}{s_{33}^E \varepsilon_{33}^T} . \quad (4.97)$$

Korzystając z zależności (4.95), (4.96), (4.97), przekształcono równanie konstytutywne (2.8) przedstawiające zależność indukcji elektrycznej od naprężenia i pola elektrycznego w równanie na zależność napięcia dostarczanego przez źródło zasilania U_0 od napięcia na elemencie piezoelektrycznym U_c oraz generowanego odkształcenia x jako:

$$\frac{Ad_{33}}{C_p s_{33}^E} \cdot \frac{x}{h} + U_c \frac{\varepsilon_{33}^T A}{C_p h} (1 - k_{33}^2) = U_0 . \quad (4.98)$$

Po uwzględnieniu zależności (4.90) i uporządkowaniu współczynników, a także wyciągnięciu i przeniesieniu na prawą stronę równania pojemności elektrycznej piezoelektryka, równanie przyjmuje postać:

$$xcd_{33} + U_c \frac{\varepsilon_{33}^T A}{h} (1 - k_{33}^2) = U_0 C_p . \quad (4.99)$$

Przekształcenia matematyczne doprowadziły do utworzenia układu równań ruchu elektromechanicznego modelu układu piezoelektrycznego na podstawie równań konstytutywnych. Układ równań ruchu modelu o jednym stopniu swobody, posiadającego element inercyjny, sprężysty i tłumiący oraz połączonego z układem elektrycznym za pomocą członu odpowiadającego za transformację energii mechanicznej i elektrycznej przyjmuje zatem postać:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + b\dot{x} + cx + U_c cd_{33} = F \\ xcd_{33} + U_c \frac{\varepsilon_{33}^T A}{h} (1 - k_{33}^2) = U_0 C_p \end{cases} \quad (4.100)$$

W celu przekształcenia układu równań do postaci macierzowej, przyjęto funkcję przemieszczenia x oraz funkcję napięcia zgromadzonego na powierzchni elementu piezoelektrycznego U_c jako funkcje w dziedzinie liczby zespolonej s w postaci:

$$\begin{cases} x(t) = X(s) \\ U_c(t) = U_c(s) \end{cases} \quad (4.101)$$

Podstawiając (4.101) w równaniu (4.100) i porządkując wyrażenia przy poszczególnych funkcjach przemieszczenia oraz napięcia, zależności sprowadzono do układu równań:

$$\begin{cases} X(s) \cdot (ms^2 + bs + c) + U_c(s) \cdot (cd_{33}) = F \\ X(s) \cdot (cd_{33}) + U_c(s) \cdot \left(\frac{\varepsilon_{33}^T A}{h}\right)(1 - k_{33}^2) = U_0 C_p \end{cases} \quad (4.102)$$

Postać równania (4.102) przekształcono do postaci macierzowej tworząc wektory funkcji przemieszczenia oraz napięcia J , a także wektor sił zewnętrznych i napięcia na źródle zasilania K . Pozostała macierz współczynników D jest opisem relacji zachodzących pomiędzy oddziaływaniami mechanicznymi oraz elektrycznymi w systemie:

$$\begin{bmatrix} X(s) \\ U_c(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ms^2 + bs + c & cd_{33} \\ cd_{33} & \left(\frac{\varepsilon_{33}^T A}{h}\right)(1 - k_{33}^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ U_0 C_p \end{bmatrix}, \quad (4.103)$$

$$J = \begin{bmatrix} X(s) \\ U_c(s) \end{bmatrix}, \quad (4.104)$$

$$K = \begin{bmatrix} F \\ U_0 C_p \end{bmatrix}, \quad (4.105)$$

$$D = \begin{bmatrix} ms^2 + bs + c & cd_{33} \\ cd_{33} & (\frac{\varepsilon_{33}^T A}{h})(1 - k_{33}^2) \end{bmatrix}. \quad (4.106)$$

Analizując macierz współczynników równania modelu elektromechanicznego wyszczególniono trzy człony odpowiedzialne za poszczególne relacje zachodzące pomiędzy elementami układu. Współczynniki D_m opisują relacje zachodzące w mechanicznej części modelu piezoelektrycznego. Współczynniki określone w macierzy D_e odpowiadają za oddziaływania zachodzące w elektrycznej części układu. Współczynniki określone w macierzy D_t przedstawiają natomiast sprzężenie elektromechaniczne pomiędzy członami modelu układu piezoelektrycznego:

$$D_m = \begin{bmatrix} ms^2 + bs + c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.107)$$

$$D_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\frac{\varepsilon_{33}^T A}{h})(1 - k_{33}^2) \end{bmatrix}, \quad (4.108)$$

$$D_t = \begin{bmatrix} 0 & cd_{33} \\ cd_{33} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.109)$$

Zauważono, że wskazany na rysunku 4.26 człon odpowiedzialny za transformację energii mechanicznej i elektrycznej, oznaczony symbolem N , można opisać stosując równanie występujące w członie transformacyjnym w (4.109) jako:

$$N = cd_{33}. \quad (4.110)$$

Omówione w rozdziale równania matematyczne umożliwiły utworzenie zestawu wzorów umożliwiających przekształcenie parametrów otrzymanych w syntezie na rzeczywiste parametry układów piezoelektrycznych.

4.6 Przykłady syntezy parametrów układu elektromechanicznego

Na podstawie opracowanego modelu matematycznego oraz stosując wyznaczone metodą syntezy Cauera parametry układu mechanicznego, a także współczynnik tłumienia podkrytycznego, wyznaczony metodą Rayleigh'a, opracowano dwie alternatywne ścieżki aproksymacji parametrów syntezowanego układu piezoelektrycznego. W zależności od pożądanych parametrów projektowanego układu piezoelektrycznego, warunki brzegowe procesu syntezy można wyznaczyć na podstawie przyjętych początkowo parametrów geometrycznych poszczególnych elementów piezoelektrycznych lub na podstawie założonych uprzednio parametrów materiałowych dobranych elementów piezoelektrycznych np. na podstawie danych katalogowych producenta.

W przypadku założonych wstępnie parametrów geometrycznych elementów piezoelektrycznych składających się na projektowany układ, w procesie syntezy dobierane są parametry materiałowe poszczególnych płytek wchodzących w skład stosu. Analogicznie do syntezy układu mechanicznego, w zbiorze wstępnie przyjętych parametrów znajdują się również wartości częstotliwości rezonansowych oraz antyrezonansowych projektowanego układu. Na ich podstawie, metodą syntezy Cauera wyznaczono parametry układu mechanicznego, który następnie uzupełniono o elementy tłumiące przy użyciu metody Rayleigh'a oraz o elementy układu elektrycznego na podstawie zależności wyznaczonych z równań konstytutywnych. Dodatkowym parametrem materiału piezoelektrycznego możliwym do wyznaczenia na podstawie zależności pomiędzy częstotliwościami rezonansowymi oraz antyrezonansowymi projektowanego układu jest współczynnik sprzężenia elektromechanicznego k_{33} . W zależności od pożądanej dokładności wyznaczanego współczynnika oraz od rozpatrywanego przypadku pracy układu piezoelektrycznego, wzór na wartość współczynnika uwzględniającego pracę w osi prostopadłej do płaszczyzny płytki piezoelektrycznej jest wyrażony jako [88]:

$$k_{33}^2 = \frac{\frac{\pi}{2}}{1 + \frac{\Delta f}{f_r}} \tan \frac{\frac{\pi}{2} \frac{\Delta f}{f_r}}{1 + \frac{\Delta f}{f_r}}, \quad (4.111)$$

gdzie:

Δf – różnica częstotliwości rezonansowej i antyrezonansowej,

f_r – częstotliwość rezonansowa danego stopnia swobody układu.

Alternatywą do zależności sprzężenia mechanicznego k_{33} jest wzór na uogólnioną przemianę energii mechanicznej i elektrycznej w materiale piezoelektrycznym określaną symbolem k_{eff} . Współczynnik stosuje się w przypadkach, gdy zachodzi obustronna przemiana energii mechanicznej i elektrycznej, a element piezoelektryczny pełni funkcję zarówno aktuatora, jak i przetwornika energii mechanicznej w elektryczną. Współczynnik ten jest również uśrednionym współczynnikiem sprzężeń elektromechanicznych w różnych osiach pracy materiału piezoelektrycznego. W tym przypadku wzór na efektywny współczynnik sprzężenia przyjmuje uproszczoną postać:

$$\frac{k_{eff}^2}{1-k_{eff}^2} = \frac{f_a^2 - f_r^2}{f_r^2}, \quad (4.112)$$

gdzie:

f_a – częstotliwość antyrezonansowa danego stopnia swobody układu.

Korzystając z wyznaczonej zależności (4.90), przyjętych wymiarów geometrycznych płytki piezoelektrycznej oraz wyznaczonej w procesie syntezy podukładu mechanicznego wartości sprężystości elementu sprężystego, możliwe jest wyznaczenie przybliżonej wartości sztywności materiału piezoelektrycznego w projektowanym układzie przy założeniu, że układ jest układem prętowym, a odkształcenia zachodzą jedynie na głównej osi prostopadłej do płaszczyzny powierzchni płytki piezoelektrycznej. Wówczas, wzór przyjmie postać:

$$c_{33}^E = c \frac{h}{A}. \quad (4.113)$$

Kolejnym, istotnym parametrem opisującym pracę materiałów piezoelektrycznych jest współczynnik jakości mechanicznej (*ang. mechanical quality factor*), oznaczany symbolem Q_m . Współczynnik wyznacza się doświadczalnie [89] poprzez pomiar częstotliwości granicznych, przy których uzyskiwana odpowiedź badanego układu jest mniejsza od jego odpowiedzi przy maksymalnej admitancji o wartość 3 dB. Wzór na współczynnik przyjmuje wtedy postać:

$$Q_m = \frac{f_r}{f_1 - f_2}. \quad (4.114)$$

Istnieje również alternatywna metoda aproksymacji wartości współczynnika jakości mechanicznej stosująca w obliczeniach współczynnik tłumienia β [46]. Korzystając zatem z otrzymanego na etapie syntezy podukładu mechanicznego współczynnika

tłumienia możliwe jest wyznaczenie wartości współczynnika jakości mechanicznej kolejnych płytek piezoelektrycznych projektowanego układu elektromechanicznego. Dodatkową zaletą tej metody jest możliwość indywidualnego dostosowania współczynnika tłumienia na każdym ze stopni swobody poprzez przemnożenie wyznaczonej w odniesieniu do całego układu wartości maksymalnej tłumienia krytycznego przez dowolny ułamek graniczący pomiędzy 0, a 1. Wzór na współczynnik jakości mechanicznej uzależniony jest od wartości współczynnika tłumienia oraz częstotliwości rezonansowej danego członu projektowanego układu i przedstawiony zależnością:

$$Q_m = \frac{1}{\beta\omega_i}, \quad (4.115)$$

gdzie:

β – współczynnik tłumienia wyznaczony metodą Rayleigh’a,
 ω_i – częstość rezonansowa danego stopnia swobody układu.

W celu wyznaczenia pojemności elektrycznej płytki piezoelektrycznej odwołano się do wzorów określających układ piezoelektryczny w postaci modelu elektrycznego Van Dyke’a – Butterworth’a, gdzie mechaniczna część układu zamodelowana jest jako układ RLC połączony równolegle z pojemnością układu elektrycznego [90]. W celu uzyskania parametrów części modelu odpowiadającej układowi mechanicznemu skorzystano z analogii napięciowej pomiędzy elementami układów mechanicznych oraz elektrycznych. Wyznaczone parametry mechaniczne przekształcono w analogiczne parametry elektryczne przy pomocy następujących wzorów transformacyjnych:

$$C_m = \frac{1}{C}, \quad (4.116)$$

$$R_m = b, \quad (4.117)$$

$$L_m = m. \quad (4.118)$$

gdzie:

C_m – analogiczna pojemność elektryczna układu mechanicznego,
 R_m – analogiczna rezystancja układu mechanicznego,
 L_m – analogiczna indukcyjność układu mechanicznego.

Korzystając ze wzorów zastosowanych w modelu Van Dyke'a – Butterworth'a [91] oraz zależności (4.112), wyprowadzono wzór na przybliżoną pojemność elektryczną elementu wykonanego z materiału piezoelektrycznego jako:

$$C_p = \frac{k_{eff} C_m}{1 - k_{eff}}. \quad (4.119)$$

Aproksymacja wartości pojemności elektrycznej syntezywanego układu piezoelektrycznego pozwala również na wyznaczenie przybliżonej wartości przenikalności elektrycznej materiału, z którego wykonana jest rozpatrywana płytka. W celu uproszczenia przyjęto, że wyznaczana wartość przenikalności elektrycznej pokrywa się z wartością przenikalności materiału piezoelektrycznego nie poddanego naprężeniu w rozpatrywanej osi oddziaływania sił, a więc zapisano:

$$\varepsilon \approx \varepsilon_{33}^T. \quad (4.120)$$

Do wyznaczenia bezpośredniej wartości przenikalności elektrycznej użyto wzoru:

$$\varepsilon = C_p \frac{A}{h}. \quad (4.121)$$

W przypadku produkcji oraz dystrybucji modułów wykonanych z materiałów piezoelektrycznych bezpośrednio wyznaczony parametr przenikalności elektrycznej jest często zastępowany wartością względną w odniesieniu do współczynnika przenikalności próżni. Wyznaczona wartość względna jest stosowana do bardziej przejrzystej reprezentacji właściwości materiału piezoelektrycznego, bez użycia wartości zmiennoprzecinkowej o dużym wykładniku potęgowym. Współczynnik przenikalności względnej oznaczany jest najczęściej symbolem K oraz określony jest wzorem:

$$K = C_p \frac{A}{\varepsilon_0 h}, \quad (4.122)$$

gdzie:

$$\varepsilon_0 \approx 8.854188 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} - \text{przenikalność elektryczna próżni.}$$

Ostatnim parametrem materiału piezoelektrycznego wyznaczanym zastosowaną metodą jest gęstość, która aproksymowana jest przy użyciu prostego wzoru na zależność masy oraz objętości projektowanego elementu piezoelektrycznego jako:

$$\rho = \frac{m}{hA}. \quad (4.123)$$

Zaproponowana metoda syntezy może znaleźć zastosowanie w przypadku projektowania całkowicie nowych rozwiązań bez nałożonych ograniczeń budżetowych oraz czasowych, gdzie uwzględniona jest możliwość utworzenia nowego materiału piezoelektrycznego o parametrach materiałowych ściśle dostosowanych do zaplanowanego zastosowania lub w przypadku dużych ograniczeń w zakresie dostępnej przestrzeni, na której wdrożone ma być nowe rozwiązanie.

Alternatywną metodą syntezy parametrów układu elektromechanicznego stanowiącego model rzeczywistego układu piezoelektrycznego jest synteza jego wymiarów geometrycznych na podstawie założonych w trakcie syntezy parametrów materiałowych. W tym przypadku, parametry materiałowe dobierane są z istniejących katalogów producentów przetworników piezoelektrycznych. Takie podejście może mieć znacznie szersze zastosowanie w przypadkach, gdy zdecydowanie lepszym rozwiązaniem jest dostosowanie istniejących materiałów do wymagań stawianych w ramach projektu. Sposób ten jest obciążony dużo mniejszymi kosztami, gdyż nie jest konieczne opracowanie nowych materiałów piezoelektrycznych, a jedynie utworzenie odpowiednio dopasowanych geometrycznie modułów z już istniejących materiałów.

W przypadku tej metody syntezy konieczny jest jedynie wstępny dobór częstotliwości rezonansowych, gdyż częstotliwości antyrezonansowe dobierane są na podstawie zależności pomiędzy współczynnikiem sprzężenia elektromechanicznego, przyjętym na wstępie do procesu syntezy, a stosunkiem częstotliwości projektowanego układu piezoelektrycznego. Z uwagi na złożoną postać wzoru (4.111) podjęto decyzję o przyjęciu efektywnego współczynnika sprzężenia elektromechanicznego jako podstawy do wyznaczenia wzoru określającego częstotliwość antyrezonansową poszczególnych stopni swobody projektowanego układu. Częstotliwości antyrezonansowe obliczono na podstawie wzoru:

$$f_a = \sqrt{\frac{k_{eff}^2 f_r^2}{1 - k_{eff}^2} + f_r^2}. \quad (4.125)$$

Spśród otrzymanych rozwiązań uwzględniono jedynie pierwiastki dodatnie, gdyż wchodzą one do zbioru praktycznie realizowanych rozwiązań przytoczonej zależności.

Wyznaczone w pierwszym kroku alternatywnej metody syntezy częstotliwości antyrezonansowe posłużyły do utworzenia wielomianu transmitancji mechanicznego podukładu kaskadowego, analogicznie jak w poprzednim przypadku. Do utworzenia mechanicznej części modelu elektromechanicznego użyto uzyskane metodą Cauera współczynniki ułamka łańcuchowego. Odwrotnie do przypadku syntezy parametrów

materiałowych projektowanego układu piezoelektrycznego, do wyznaczenia współczynników tłumienia zastosowano współczynniki jakości mechanicznej materiałów piezoelektrycznych przypisanych do poszczególnych stopni swobody syntezowanego układu. W celu obliczenia współczynników tłumienia każdego ze stopni swobody zastosowano odwróconą postać wzoru (4.115) oraz podstawowy wzór Rayleigh'a (4.40) z wykluczeniem proporcjonalności do elementów inercyjnych:

$$\beta = \frac{1}{Q_m \omega_i}, \quad (4.126)$$

$$b_x = \beta c_x, \quad (4.127)$$

Dobór geometrycznych parametrów projektowanego układu piezoelektrycznego jest uwarunkowany wstępnym przyjęciem jednego z wymiarów płytek oraz ich kształtu. W przypadku płytek cylindrycznych lub sześciennych, parametrem możliwym do przyjęcia jest długość boku kwadratu, długość promienia stanowiącego przekrój lub grubość projektowanej płytki piezoelektrycznej. W przypadku płytek o przekroju prostokątnym, w celu zdefiniowania powierzchni dobierane są długości dwóch przyległych boków. Pozostałe parametry geometryczne dobrać można na podstawie dwóch zależności pomiędzy syntezowanymi parametrami układu. Pierwszą z zależności jest odwrócona zależność pomiędzy masą elementu, a jego objętością (4.123). W przypadku ustalonej grubości płytki, pole powierzchni wyznacza się ze wzoru:

$$A = \frac{m}{\rho h}, \quad (4.128)$$

natomiast w przypadku ustalonej długości boku lub promienia, grubość płytki można wyznaczyć stosując zależność:

$$h = \frac{m}{\rho A}. \quad (4.129)$$

Drugą zależnością jest prawo Hooke'a, przy użyciu którego można wyznaczyć parametry geometryczne płytki na podstawie dobranej sztywności materiału piezoelektrycznego oraz syntezowanej sprężystości podukładu mechanicznego. Analogicznie do poprzedniej metody, w przypadku ustalonej grubości płytki, pole powierzchni wyznacza się z przekształconego wzoru (4.113) do postaci:

$$A = c \frac{h}{c_{33}^E}. \quad (4.130)$$

W przypadku przyjętych na wstępie do projektowania wymiarów podstawy płytki piezoelektrycznej, grubość obliczana za pomocą wzoru:

$$h = c_{33}^E \frac{A}{c}. \quad (4.131)$$

Pojemność projektowanych tym sposobem płytek piezoelektrycznych wyznaczona jest przy zastosowaniu przenikalności elektrycznej będącej dobranym parametrem materiałowym. Do obliczenia pojemności każdej płytki stosowany jest wzór:

$$C_p = \varepsilon_{33}^T \frac{A}{h}, \quad (4.132)$$

lub

$$C_p = K\varepsilon_0 \frac{A}{h}, \quad (4.133)$$

w przypadkach, gdy w specyfikacji materiału piezoelektrycznego użyty jest współczynnik względnej przenikalności elektrycznej.

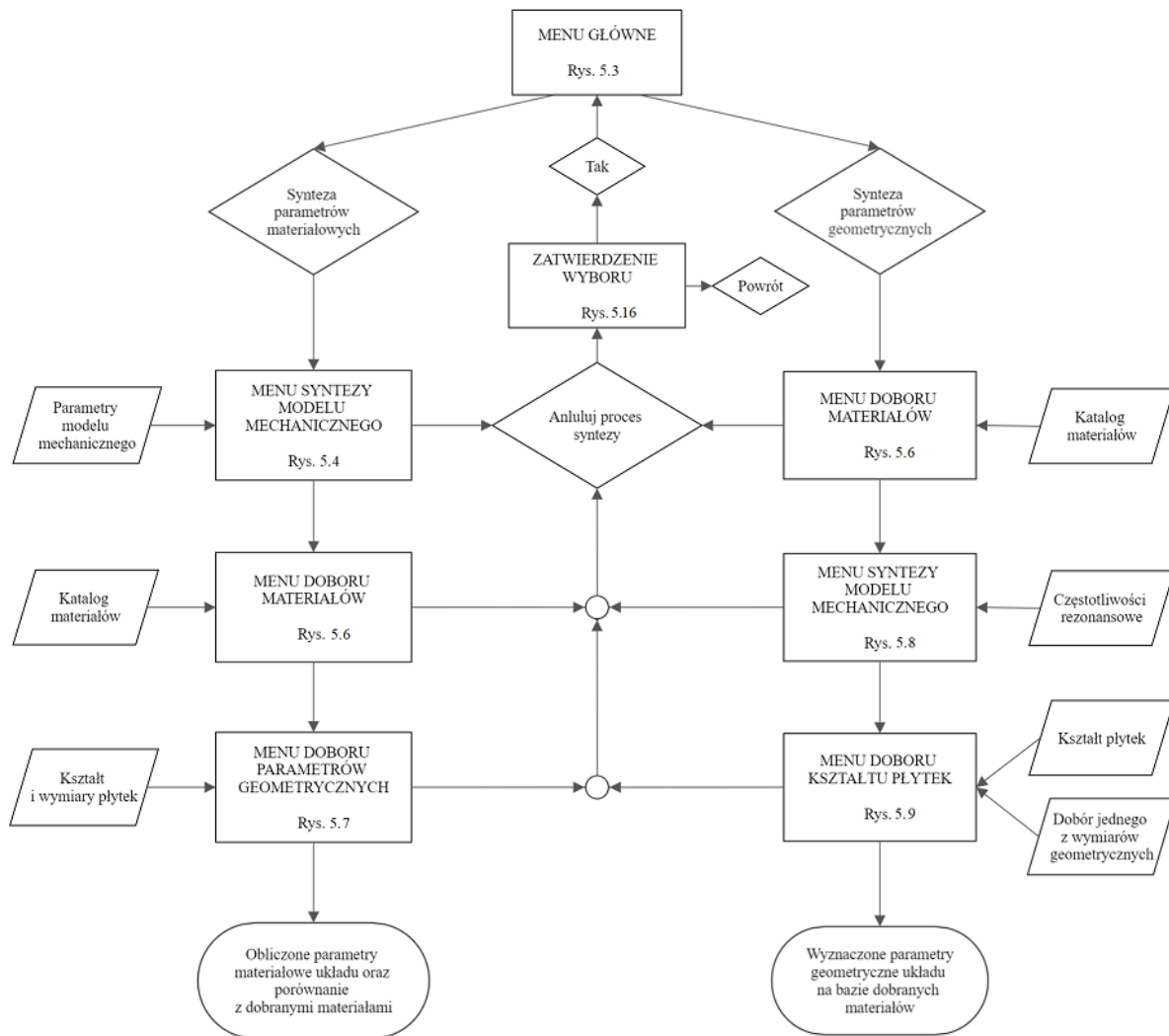
5. Program komputerowy do syntezy i analizy układów piezoelektrycznych

Utworzono aplikację komputerową, której celem jest obliczanie parametrów materiałowych bądź geometrycznych projektowanego układu piezoelektrycznego oraz teoretyczna analiza odpowiedzi projektowanych układów na podstawie przyjętych w rozdziale piątym metod syntezy oraz analizy układów elektromechanicznych. Program umożliwia projektowanie elektromechanicznych układów kaskadowych odpowiadających strukturą piezoelektrycznym stosom zbudowanym z dowolnie przyjętej liczby elementów w postaci płytek. Dobierane w procesie syntezy płytki piezoelektryczne mogą występować pod postacią cylindryczną, o przekroju kwadratu lub prostokąta. Wewnątrz aplikacji zawarto dwie metody syntezy układów piezoelektrycznych odróżniające się synteżowanymi parametrami układów. Pierwsza zaprogramowana metoda umożliwia dobór parametrów geometrycznych projektowanych w ramach układu płytek piezoelektrycznych, które otrzymywane są przy początkowym założeniu parametrów materiałowych każdego z elementów stosu oraz ich częstotliwości rezonansowych. Druga z dostępnych metod pozwala na opracowanie parametrów materiałowych synteżowanych elementów piezoelektrycznych na podstawie dobranych uprzednio parametrów geometrycznych oraz częstotliwości rezonansowych i antyrezonansowych układu. Algorytmy obliczeniowe zastosowane w omawianej aplikacji przygotowano na podstawie autorskiej metody syntezy. Przy zastosowaniu aplikacji możliwe jest projektowanie dowolnego układu posiadającego utwierdzenie na jednym z jego końców oraz wymuszanej siłą na drugim. Rozwinięcie metody o możliwość synteżowania układów o dowolnej konfiguracji usztywnienia oraz przyłożonych sił zewnętrznych będzie zagadnieniem poruszonym w przyszłości. Aplikację utworzono w środowisku numerycznym Matlab. Aplikację oraz jej kod źródłowy zamieszczono w załączniku 2 do pracy.

5.1 Struktura programu

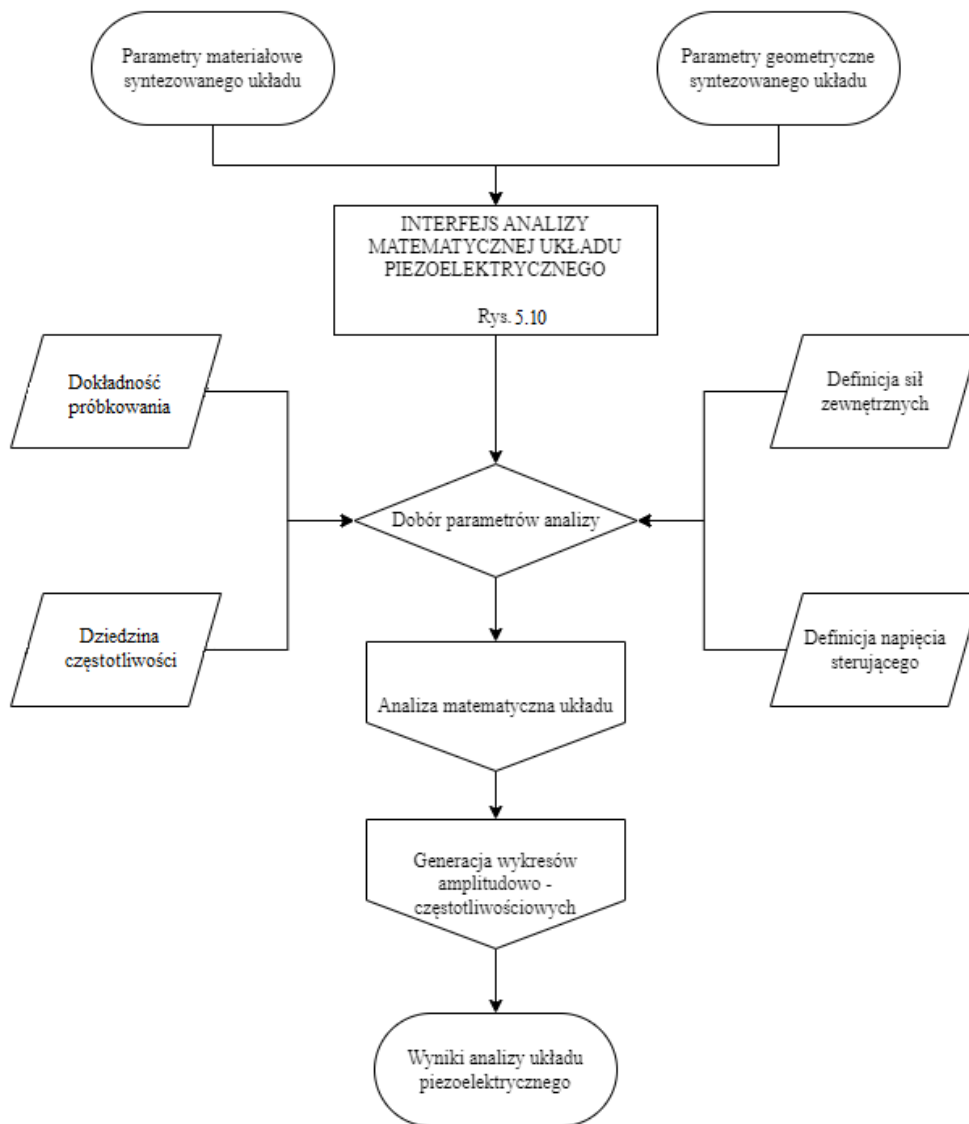
Program podzielono na dwie części. W pierwszej części programu przeprowadzono syntezę układu elektromechanicznego w zależności od wybranego zestawu przyjętych na początku syntezy parametrów układu. Druga część programu umożliwia analizę uzyskanych układów elektromechanicznych. Program do analizy korzysta ze zsynteżowanych w poprzednim kroku układów jako elementów wejściowych do procesu analizy odpowiedzi układu w dziedzinie częstotliwości. Odpowiedzią układu jest charakterystyka amplitudy drgań

oraz napięcia na poszczególnych płytkach analizowanego modelu. Program przygotowano w języku angielskim, w celu umożliwienia jego obsługi przez osoby obcojęzyczne. Strukturę logiczną programu do syntezy układów elektromechanicznych przedstawiono na rysunku 5.1 natomiast diagram struktury programu pokazano na rysunku 5.2.



Rys. 5.1. Diagram przedstawiający strukturę programu wykonującego syntezę układu piezoelektrycznego

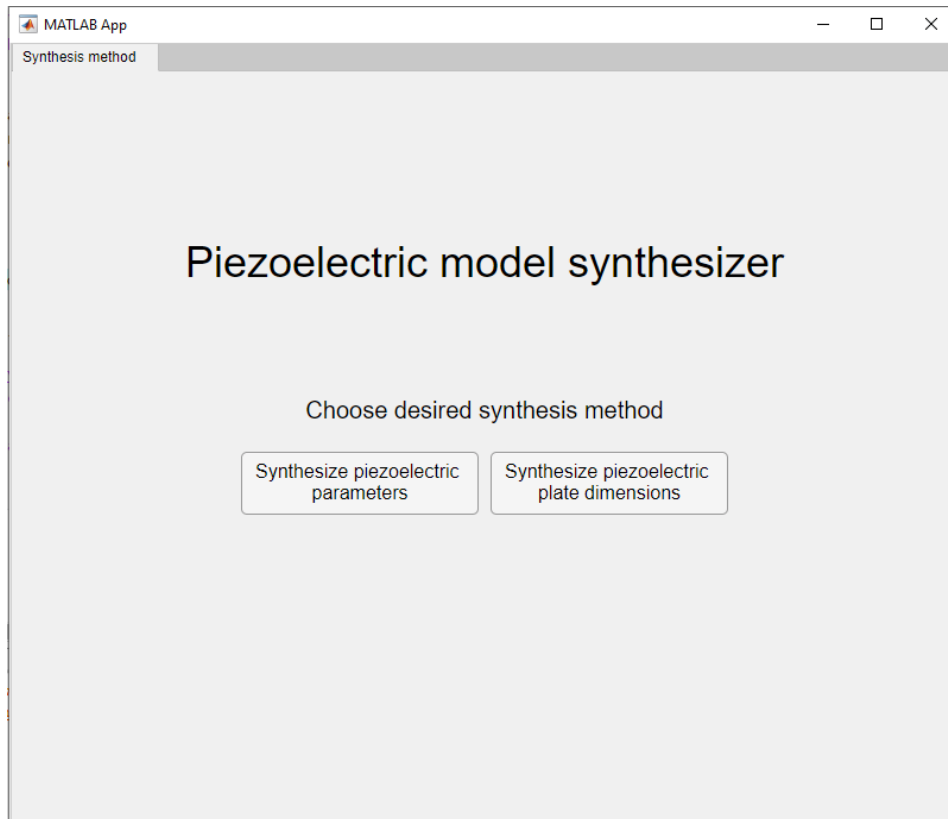
Zamieszczone na diagramie obiekty symbolizujące poszczególne okna dialogowe powiązane ze sobą przy pomocy strzałek obrazujących kolejność dostępu do poszczególnych okien. Do każdego z symboli reprezentujących poszczególne okna programu przypisano numery rysunków, na których zamieszczono widok każdego z okien interfejsu.



Rys. 5.2. Diagram przedstawiający strukturę programu wykonującego analizę utworzonego układu

Pierwszym, a zarazem głównym oknem, jakie wyświetlane jest po uruchomieniu programu jest okno zawierające interfejs wyboru metody syntezy. Opcja „Synthesize piezoelectric parameters” uruchamia interfejs pierwszej metody syntezy układu piezoelektrycznego polegającej na obliczeniu parametrów materiałowych każdego z wyznaczanych stopni swobody układu na podstawie przyjętych częstotliwości rezonansowych i antyrezonansowych, a także wymiarów geometrycznych płytek piezoelektrycznych. Drugi przycisk z opisem „Synthesize piezoelectric plate dimensions” generuje interfejs obsługi drugiej metody, polegającej na wyznaczeniu wymiarów geometrycznych na podstawie dobranych w procesie syntezy materiałów piezoelektrycznych z istniejących pozycji katalogowych producentów oraz dobranych na wstępie częstotliwości rezonansowych projektowanego układu

piezoelektrycznego. Widok głównego okna programu do syntezy parametrów piezoelektrycznych przedstawiono na rysunku 5.3.

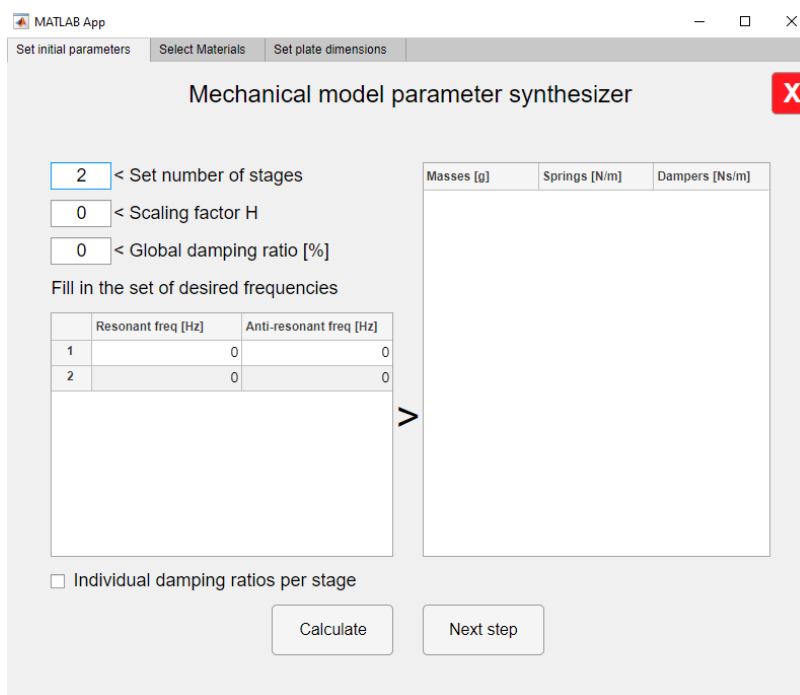


Rys. 5.3. Główne okno programu syntezy parametrów układu piezoelektrycznego

Pierwszym, a zarazem głównym oknem, jakie pojawia się po uruchomieniu programu jest okno zawierające interfejs wyboru metody syntezy. Opcja „Synthesize piezoelectric parameters” uruchamia interfejs pierwszej metody syntezy układu piezoelektrycznego polegającej na obliczeniu parametrów materiałowych każdego z wyznaczanych stopni swobody układu na podstawie przyjętych częstotliwości rezonansowych i antyrezonansowych, a także wymiarów geometrycznych płytek piezoelektrycznych. Drugi przycisk z opisem „Synthesize piezoelectric plate dimensions” generuje interfejs obsługi drugiej metody, polegającej na wyznaczeniu wymiarów geometrycznych na podstawie dobranych w procesie syntezy materiałów piezoelektrycznych z istniejących pozycji katalogowych producentów oraz dobranych na wstępie częstotliwości rezonansowych projektowanego układu piezoelektrycznego. Widok głównego okna programu do syntezy parametrów piezoelektrycznych przedstawiono na rysunku 5.3.

5.2 Synteza właściwości materiałowych

Wybór metody wyznaczenia właściwości materiałowych uruchamia okno wstępnych ustawień syntezy mechanicznego układu kaskadowego, który jest podstawą do dalszych etapów projektowania. Interfejs ten pokazano na rysunku 5.4.



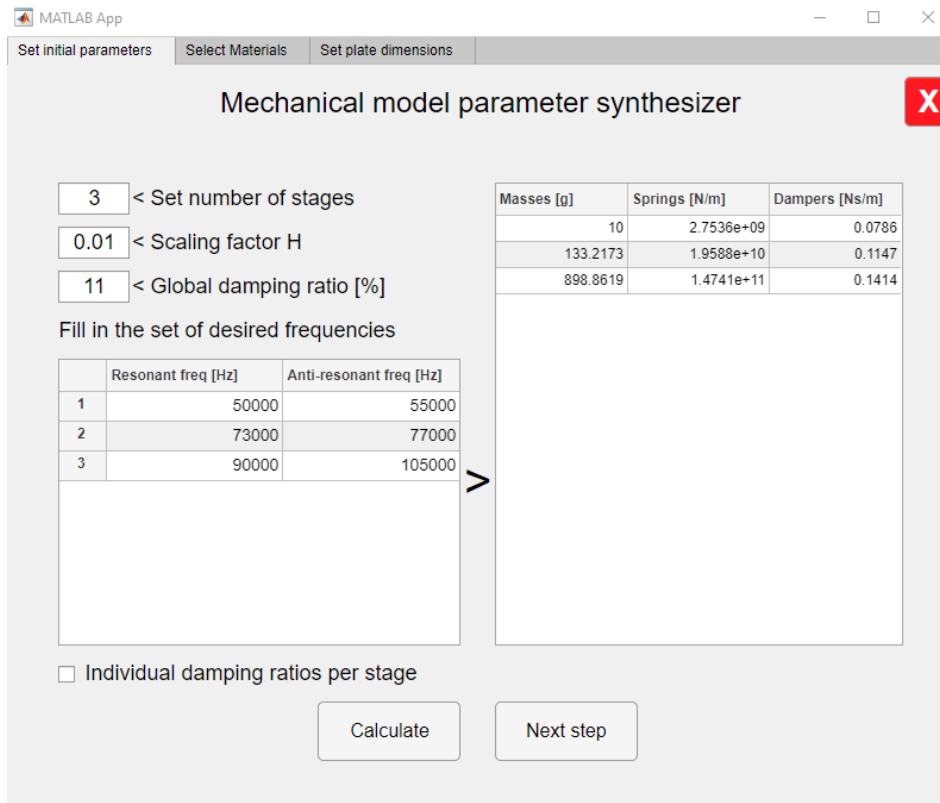
Rys. 5.4. Okno ustawień syntezy podukładu mechanicznego

W lewym górnym rogu interfejsu umieszczono trzy pola liczbowe, w których możliwe jest wprowadzenie wartości numerycznych. Pierwsze pole zatytułowane „Set number of stages” pozwala na określenie wybranej liczby elementów w syntezywanym podukładzie mechanicznym. Możliwe jest wprowadzenie dowolnej, całkowitej liczby stanowiącej liczbę syntezywanego stopni swobody układu kaskadowego. Kolejne pole zatytułowane „Scaling factor H”, które pozwala na określenie współczynnika skalowania generowanego w programie wielomianu transmitancji syntezywanego układu na podstawie częstotliwości rezonansowych oraz antyrezonansowych. W polu możliwe jest wprowadzenie dowolnej wartości zmiennoprzecinkowej. Szczegółowy opis działania współczynnika skalowania H przedstawiono w podrozdziale 4.1. Kolejne pole zawiera wartości globalnego współczynnika tłumienia. W polu tym umożliwiono wprowadzenie dowolnej wartości zmiennoprzecinkowej mieszczącej się w zakresie od 0 do 100. Liczba odpowiada procentowej wartości wyznaczanego w procesie syntezy metodą Rayleigh’a współczynnika granicznego tłumienia podkrytycznego. Wpisywana w polu wartość pozwala na globalne dopasowanie tego współczynnika na każdym

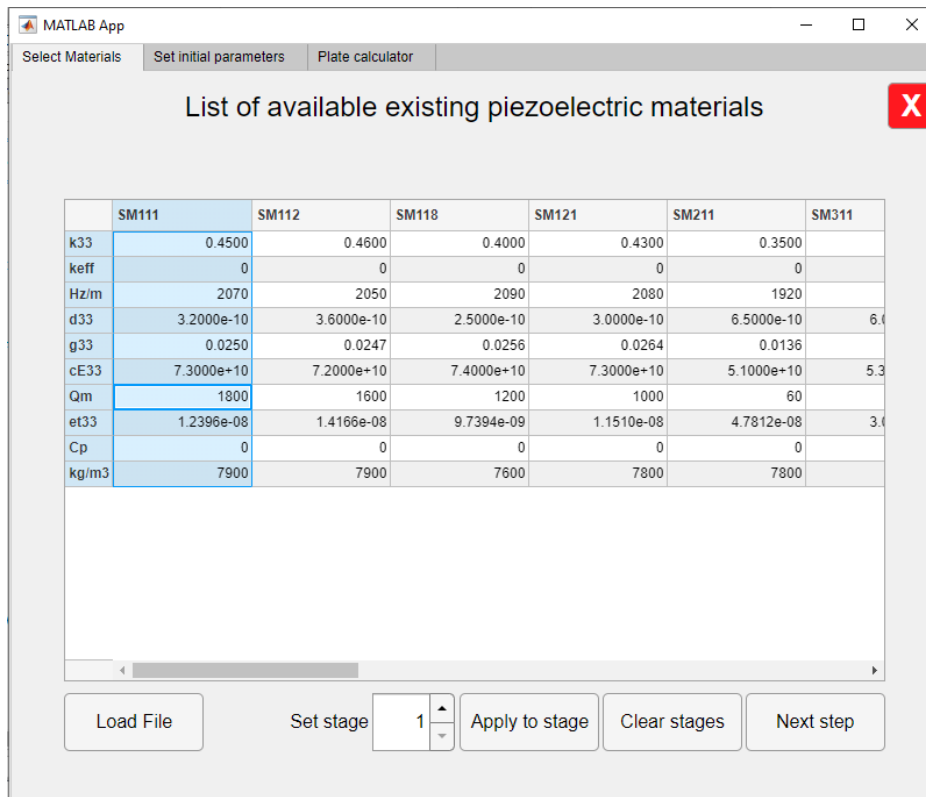
z syntezy stopni swobody układu. W prawym dolnym rogu ekranu umieszczono pole wyboru opisane jako „Individual damping ratio per stage”, za pomocą którego możliwe jest dopasowanie współczynnika tłumienia przy każdym stopniu swobody syntezy układu. Zaznaczenie pola powoduje wyszarzenie wartości globalnego współczynnika tłumienia oraz dodanie w tabeli kolumny z możliwością wprowadzenia wartości tłumienia.

Po uzupełnieniu pola liczbą stopni swobody, w tabeli wygenerowane zostaną pola przeznaczone na wprowadzenie przyjętych częstotliwości układu. Liczba wygenerowanych pól w tabeli odpowiada wprowadzonej liczbie stopni swobody. Wartości częstotliwości należy wprowadzić w wygenerowanych polach tabeli odpowiadających każdemu z syntezy stopni swobody układu. Dodatkowo, w przypadku zaznaczenia opcji indywidualnego doboru współczynników tłumienia każdego ze stopni swobody, należy w tabeli wypełnić również pola odpowiadające wartościom procentowym granicznego współczynnika tłumienia krytycznego. Po wypełnieniu wszystkich wymaganych pól, należy uruchomić proces syntezy wybierając „Calculate”, a następnie wyliczone zostaną parametry mechanicznego podukładu w postaci wartości mas, sprężystości oraz współczynników tłumienia kolejnych stopni swobody. Wyniki otrzymane daną metodą zostaną wyświetlone w tabeli po prawej stronie interfejsu. Kolejne wiersze odpowiadają parametrom kolejnych stopni swobody projektowanego układu. Przykład operacji wykonanej przy użyciu danej metody zaprezentowano na rysunku 5.5. Przycisk „Next step” umożliwi przejście do kolejnego etapu syntezy.

W drugim kroku opisywanej metody syntezy umożliwiono dobór parametrów materiałowych projektowanego układu z katalogu istniejących materiałów piezoelektrycznych. Celem doboru istniejących materiałów na tym etapie jest utworzenie zbioru materiałów pozwalających na porównanie otrzymanych w wyniku syntezy parametrów z rzeczywistymi właściwościami materiałów piezoelektrycznych spotykanych w zastosowaniach przemysłowych. Opcję utworzono w celu wprowadzenia korekt do parametrów wejściowych w przypadku, gdy otrzymane metodą syntezy właściwości znacznie różnią się od charakterystyki rzeczywistych materiałów. Interfejs omawianego kroku przedstawiono na rysunku 5.6.



Rys. 5.5. Widok interfejsu syntezy podukładu mechanicznego na przykładzie projektowanego układu o trzech stopniach swobody



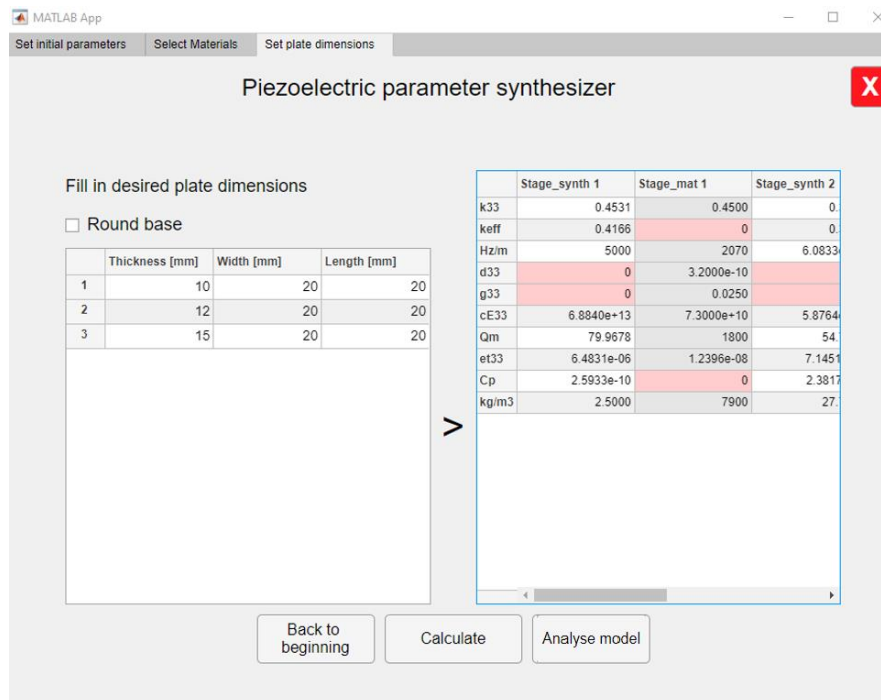
Rys. 5.6. Okno interfejsu umożliwiające dobór rzeczywistych materiałów piezoelektrycznych

W prawym dolnym rogu okna znajduje się przycisk oznaczony „Load File”, który umożliwia wgranie parametrów rzeczywistych materiałów do programu. Po wciśnięciu przycisku należy podać ścieżkę pliku zawierającego katalog istniejących materiałów piezoelektrycznych. Katalogi materiałów piezoelektrycznych uprzednio przygotowano w celu utworzenia kompatybilności z kodowaniem programu komputerowego. Wgranie nowego katalogu materiałów piezoelektrycznych wymaga przygotowania arkusza kalkulacyjnego korzystając z dostępnego oprogramowania (Microsoft Excel lub Libre Office). Struktura katalogu zawiera wiersze z poszczególnymi właściwościami fizycznymi materiałów piezoelektrycznych (k_{33} , k_{eff} , H/m , d_{33} , g_{33} , c^E_{33} , Q_m , ε^T_{33} , C_p , kg/m^3). Opis przytoczonych właściwości fizycznych zamieszczono w rozdziale 2 oraz w źródłach literaturowych [52, 53, 83]. Materiały piezoelektryczne w wybranym katalogu materiałów podzielono na kolumny tabeli. W przypadku braku informacji o danej właściwości w katalogu producenta materiałów piezoelektrycznych, w odpowiadające jej polu arkusza wprowadzono zero.

Do nawigacji po poszczególnych stopniach swobody syntezowanego układu piezoelektrycznego zastosowano zestaw przycisków oznaczonych strzałkami oraz pole z wartością numeryczną wskazującą wybrany obecnie stopień swobody. W celu wybrania materiału z katalogu i przypisania go do wybranego członu układu należy zaznaczyć w tabeli kolumnę odpowiadającą materiałowi piezoelektrycznemu, a następnie wybrać przycisk „Apply to stage”. Utworzone w ten sposób przypisanie wiąże dobrany materiał ze stopniem swobody układu. Do danego stopnia swobody można przypisać tylko jeden materiał, natomiast ten sam materiał może zostać przypisany do dowolnej liczby stopni swobody. W przypadku wybrania innego materiału i ponownego naciśnięcia przycisku, przypisany wcześniej materiał zostanie nadpisany nowym. W celu zresetowania wybranego materiału należy nacisnąć przycisk oznaczony „Clear stages”, co zeruje zbiór przypisanych materiałów do poszczególnych stopni swobody. Przycisk „Next step” przenosi do kolejnego kroku syntezy.

Ostatni etap syntezy parametrów projektowanego układu piezoelektrycznego umożliwia skonfigurowanie kształtu oraz wymiarów geometrycznych poszczególnych płytek piezoelektrycznych wchodzących w skład syntezowanego stosu. Okno programu zawiera pola, w których zamieszczono tabele z danymi określającymi parametry układu. Po lewej stronie interfejsu zamieszczono tabelę z wymiarami geometrycznymi poszczególnych przetworników. W zależności od zaznaczonej opcji określonej jako „Round base” wybierany jest kształt przekroju płytek. Przekrój prostokątny wymaga podania wymiarów długości, szerokości oraz grubości. Przekrój cylindryczny redukuje pola tabeli i wymaga podania jedynie grubości oraz promienia poszczególnych płytek w stosie. Liczba wierszy w tabeli zależna jest

od początkowo ustalonej liczby stopni swobody syntezowanego układu piezoelektrycznego. Pierwsza kolumna tabeli służy za numerację poszczególnych płytek wchodzących w skład stosu. Po wprowadzeniu wymiarów geometrycznych każdego z elementów w stosie należy rozpocząć proces obliczeniowy przez wciśnięcie przycisku oznaczonego „Calculate”. Pomyślne zakończenie obliczeń powoduje wyświetlenie w prawym polu interfejsu tabeli z wyznaczonymi parametrami materiałowymi każdej z płytek syntezowanego układu piezoelektrycznego, co pokazano na rysunku 5.7.



Rys. 5.7. Okno interfejsu przy ostatnim etapie wyznaczania parametrów materiałowych syntezowanego układu piezoelektrycznego

Tabelę z właściwościami materiałowymi utworzono poprzez połączenie syntezowanych wartości z dobranymi w poprzednim kroku wartościami określającymi właściwościami istniejących materiałów piezoelektrycznych. Naprzemiennie ułożono kolumny z wartościami uzyskanymi poprzez obliczenia w ramach programu syntezującego oraz kolumny pobrane z danych katalogowych. Kolumny oznaczone „Stage_synth...” zawierają parametry uzyskane w procesie syntezy. Kolumny oznaczone „Stage_mat...” zawierają wartości zaimportowane z danych katalogowych. W przypadku dużej liczby stopni swobody tabelę można przewijać w celu uzyskania dostępu do informacji na temat pozostałych elementów układu. Kolumny z wartościami uzyskanymi w wyniku syntezy oraz wartościami pobranymi z katalogu ułożono naprzemiennie w celu zwiększenia przejrzystości. Na górze okna zamieszczono zakładki, których wybór pozwala dowolnie i bezpośrednio nawigować pomiędzy poszczególnymi zakładkami programu. Każdorazowe wprowadzenie zmian na dowolnym

etapie syntezy wymaga ponownego wykonania wszystkich następujących po danym etapie kroków. Aby przejść do początkowego etapu syntezy można również skorzystać z przycisku „Back to beginning”. Korzystając natomiast z przycisku „Analyse model” użytkownik ma możliwość przejścia do następnego kroku, w którym wyznaczone parametry układu poddawane zostają analizie.

5.3 Synteza parametrów geometrycznych

Autorski program umożliwia także syntezę parametrów geometrycznych układu piezoelektrycznego na podstawie wstępnie dobranych częstotliwości rezonansowych oraz właściwości materiałowych poszczególnych elementów piezoelektrycznych wchodzących w skład projektowanego stosu. Aby skorzystać z tej metody należy w oknie głównym, pokazanym na rysunku 5.3 wybrać opcję „Synthesize piezoelectric plate dimensions”.

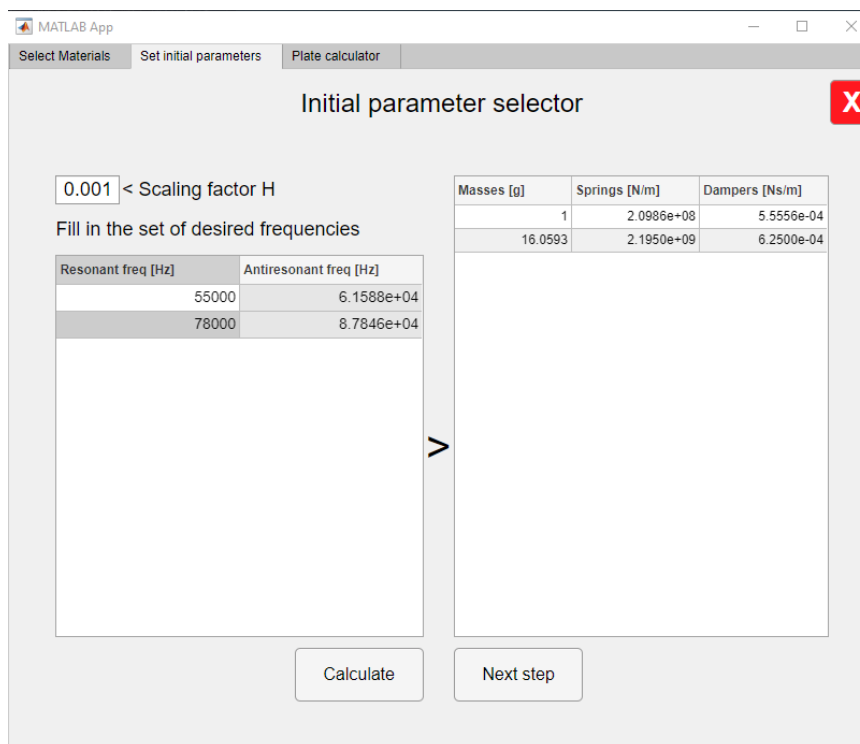
W przypadku tej metody obliczeniowej pierwszym krokiem jest dobór materiałów, z których wykonane mają być dobierane płytki. Wyświetlony jest identyczny interfejs doboru materiałów z katalogu, przedstawiony na rysunku 5.6. Działanie interfejsu różni się w niewielkim stopniu w przypadku drugiej metody. Wybór materiału piezoelektrycznego z katalogu i jego przypisanie do konkretnego stopnia swobody przyciskiem „Apply to stage” jest równocześnie powiązane z deklaracją liczby stopni swobody w projektowanym układzie. Jeżeli użytkownik przypisze materiały do trzech kolejnych stopni swobody układu, program otrzyma informację, że syntezowany układ ma posiadać taką właśnie liczbę stopni swobody. W przypadku, gdy użytkownik przypisze materiał jedynie do ostatniego stopnia swobody układu, pozostałe stopnie nie będą posiadały żadnych przypisanych materiałów (wszystkie wartości parametrów materiałowych będą posiadały zerową wartość). Należy zatem pamiętać, by nie pozostawiać nieprzypisanych materiałów, gdyż może to wygenerować błędną interpretację układu. Resetowanie przyciskiem „Clear stages” kasuje przypisane materiały oraz zadeklarowaną liczbę stopni swobody układu. Analogicznie do pierwszej metody, po zatwierdzeniu wyboru materiałów można przejść do następnego kroku syntezy.

Drugi etap składa się z interfejsu syntezy podukładów mechanicznych, w którym użytkownik ustala zbiór pożądanych częstotliwości układu oraz wielkość współczynnika skalowania H . Również w tym przypadku występują duże podobieństwa pomiędzy omawianymi opcjami w przypadku syntezy właściwości materiałowych. Różnice pomiędzy

interfejsem zamieszczonym na rysunku 5.5 oraz interfejsem w przypadku syntezy parametrów geometrycznych są następujące:

- omawiany interfejs nie posiada pól umożliwiających ustalenie liczby stopni swobody układu, gdyż informację tę zawarto w poprzednim kroku syntezy,
- interfejs nie posiada również pól przeznaczonych na wprowadzenie wartości współczynnika tłumienia, ponieważ wartość ta jest w tym przypadku ustalana na podstawie współczynnika jakości mechanicznej Q_m wybranego w pierwszym kroku materiału piezoelektrycznego,
- w tabeli po lewej stronie okna można wprowadzić jedynie częstotliwości rezonansowe natomiast zbiór częstotliwości antyrezonansowych jest obliczany przez algorytm na podstawie zależności na współczynnik sprzężenia elektromechanicznego k_{33} .

Wprowadzenie wartości współczynnika skalowania oraz uzupełnienie tabeli o częstotliwości rezonansowe pozwala na przeprowadzenie kolejnego etapu syntezy. Obliczenia inicjowane są przez wciśnięcie przycisku „Calculate”. Analogicznie do etapu opisywanego w kontekście do poprzedniej metody syntezy, wyznaczone są na podstawie algorytmu parametry podukładu mechanicznego, które zostają wyświetlone w tabeli po prawej stronie interfejsu. Dodatkowo, w ramach obliczeń uzupełnione zostają również pola odpowiadające częstotliwościom antyrezonansowym poszczególnych stopni swobody układu. Interfejs programu syntezy uwzględniający model o dwóch stopniach swobody, po przeprowadzeniu obliczeń przedstawiono na rysunku 5.8.

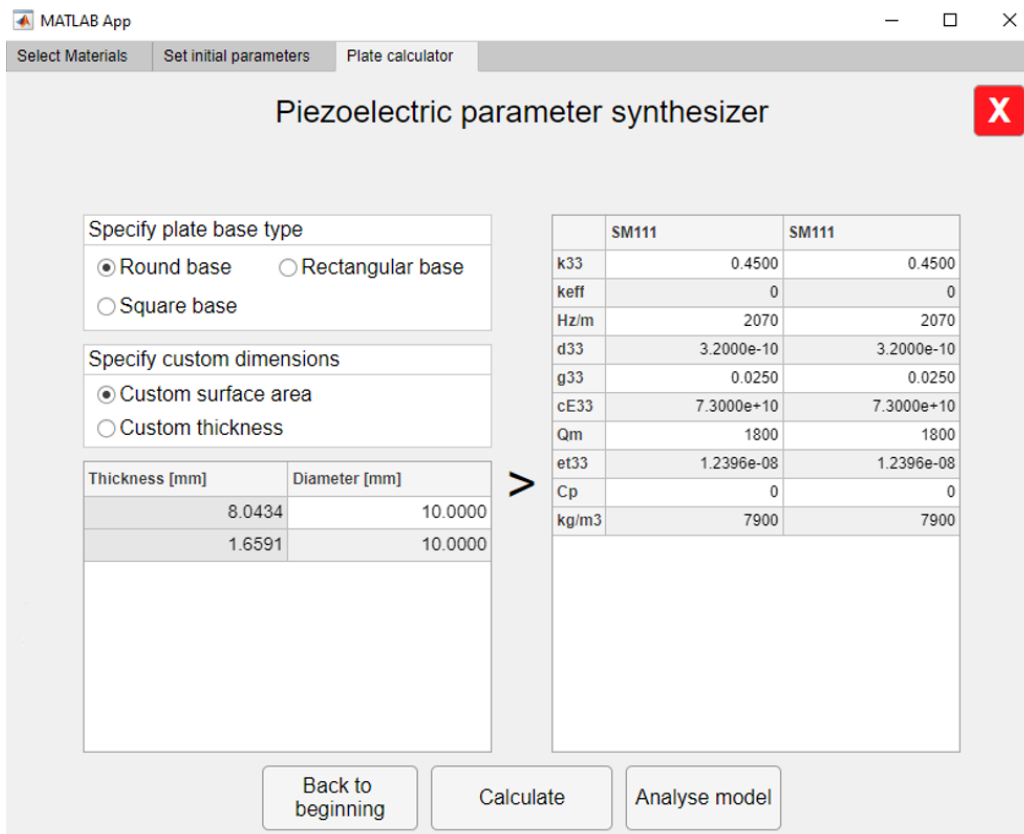


Rys. 5.8. Okno interfejsu syntezy parametrów układu mechanicznego przy metodzie syntezy wymiarów geometrycznych

W przypadku, gdy wyniki syntezy podukładu mechanicznego nie spełniają w satysfakcjonującym stopniu założeń projektowanego układu, możliwe jest wprowadzenie korekt poprzez nadpisanie wartości częstotliwości rezonansowych oraz zmianę współczynnika skalowania. Po wprowadzeniu odpowiednich korekt należy ponownie przeprowadzić obliczenia używając przycisku „Calculate”. Jeżeli wszystkie parametry spełniają założenia w satysfakcjonującym stopniu, można przejść do następnego kroku syntezy wciskając przycisk „Next step”.

W ostatnim kroku algorytmu syntezy wymiary geometryczne następuje wybór kształtu przekroju płytek tworzących projektowany układ piezoelektryczny. W prawym górnym rogu okna znajdują się trzy pola wyboru pozwalające na przyjęcie kształtu przekroju w formie koła, kwadratu lub prostokąta. Dodatkowo, konieczne jest zdefiniowanie, który wymiar geometryczny układu ma być syntezerowany. W tym celu, na interfejsie znajdują się również opcje wyboru przyjętego w procesie syntezy wymiaru definiującego grubość płytek lub ich pole powierzchni. W zależności od wybranych opcji, w prawym dolnym rogu okna wyświetlona zostanie tabela, w której znajdują się dwie lub trzy kolumny. Jeżeli wybrana zostanie podstawa o kształcie kwadratu lub koła, w kolumnach zdefiniować należy jedną z dwóch wartości (grubość płytki oraz promień lub długość jednego boku). W przypadku wyboru przekroju prostokątnego, dodatkowa kolumna będzie zawierać wartość

długości drugiego boku podstawy. W zależności od wyboru przyjętego wstępnie wymiaru geometrycznego, kolumny odpowiadające za wymiar obliczany w procesie syntezy będą wyszarzone. W tabeli należy uzupełnić wymiary podawane na wejściu do algorytmu obliczeniowego każdego zdefiniowanego uprzednio stopnia swobody projektowanego układu. Obliczenia inicjowane są poprzez wciśnięcie przycisku „Calculate”. Po pomyślnym procesie obliczeniowym, szare pola w tabeli wymiarów zostaną uzupełnione obliczonymi wartościami wymiarów geometrycznych syntezowanego układu natomiast w oknie znajdującym się po prawej stronie interfejsu wyświetlona zostanie tabela z dobranymi wcześniej materiałami piezoelektrycznymi. Tabelę dodatkowo uzupełniono o wartości obliczone na podstawie znanych wymiarów geometrycznych płytek wykonanych z dobranych materiałów (np. pojemność elektryczna płytki). Po weryfikacji otrzymanych wyników możliwe jest ponowne przeprowadzenie dowolnego kroku syntezy poprzez wybór „Back to beginning” lub jednej z zakładek w lewym górnym rogu okna programu. Jeżeli wyniki syntezy w satysfakcjonującym stopniu spełniają założenia projektu, można przejść do weryfikacji utworzonego układu poprzez wciśnięcie przycisku „Analyse model”.

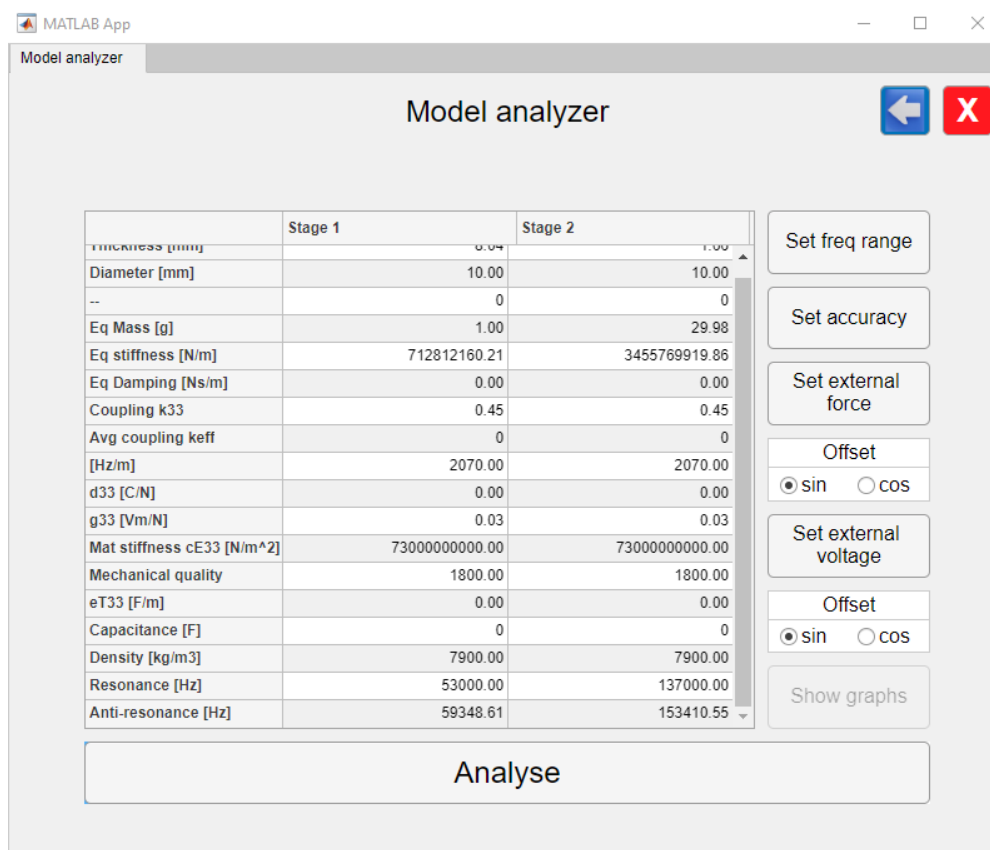


Rys. 5.9. Okno interfejsu syntezy parametrów geometrycznych projektowanego układu

Okno interfejsu ze wszystkimi omawianymi elementami oraz wyświetlonym zestawem wprowadzonych oraz obliczonych danych na przykładzie układu o dwóch stopniach swobody przedstawiono na rysunku 5.9.

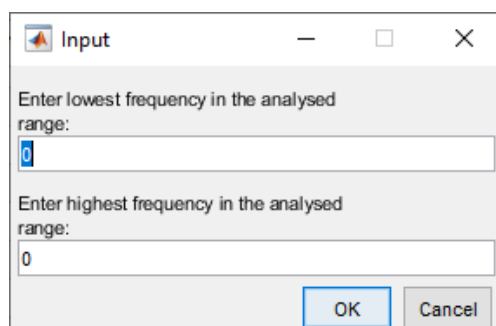
5.4 Weryfikacja przeprowadzonej syntezy

Wybór przycisku „Analyse model” w obu przypadkach syntezy spowoduje przeniesienie użytkownika do modułu analizy synteżowanego układu piezoelektrycznego. Moduł składa się z jednego okna interfejsu, w którym zamieszczono opcje umożliwiające konfigurację kalkulatora przebiegu amplitudy przemieszczenia oraz napięcia na każdej płytce piezoelektrycznej w dziedzinie częstotliwości. Główna część interfejsu analizatora zawiera okno, w którym zamieszczono tabelę ze wszystkimi zaimportowanymi bądź wyznaczonymi parametrami każdego ze stopni swobody synteżowanego układu piezoelektrycznego. Kolejne kolumny tabeli odpowiadają poszczególnym stopniom swobody układu. W wierszach przedstawiono natomiast następujące właściwości płytek piezoelektrycznych. W pierwszych trzech wierszach zawarto wymiary płytek. W zależności od przyjętego kształtu, w pierwszym wierszu zamieszczono parametr grubości płytki, drugi wiersz zawiera szerokość lub średnicę płytki natomiast trzeci wiersz zawiera długość płytki, jeżeli wybrano przekrój prostokątny. W pozostałych przypadkach wiersz pozostaje pusty. Kolejne trzy kolumny zawierają dane synteżowanego modelu części mechanicznej układu piezoelektrycznego w postaci skupionej masy, sprężystości oraz tłumienia. W kolejnych dziesięciu wierszach tabeli zamieszczono wyznaczone parametry materiału piezoelektrycznego. Ostatnie dwa wiersze zawierają przyjęte w modelu częstotliwości rezonansowe oraz antyrezonansowe. Każda komórka tabeli posiada możliwość edycji przez użytkownika aplikacji. Interfejs analizy utworzonych modeli układów piezoelektrycznych przedstawiono na rysunku 5.10.



Rys. 5.10. Główny interfejs modułu do analizy syntezy modeli układów piezoelektrycznych

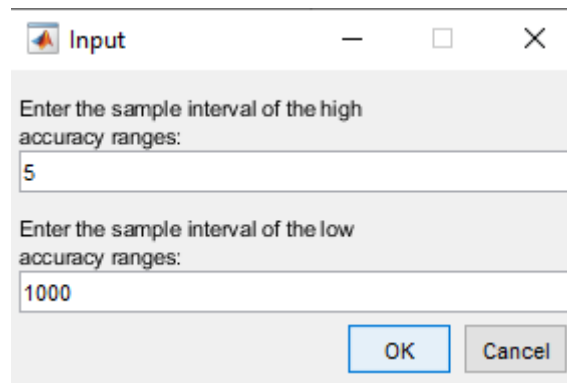
Po prawej stronie okna z tabelą właściwości syntezy układu piezoelektrycznego znajdują się przyciski umożliwiające ustawienie parametrów niezbędnych do przeprowadzenia procesu analizy utworzonego modelu. Przycisk „Set freq range”, odpowiada za wybór przedziału częstotliwości, w którym przeprowadzona zostanie analiza odpowiedzi układu piezoelektrycznego. Wybór przycisku spowoduje otwarcie dodatkowego okna, w którym należy wprowadzić wartości graniczne rozpatrywanego przedziału częstotliwości, co pokazano na rysunku 5.11.



Rys. 5.11. Okno wprowadzania częstotliwości granicznych rozpatrywanego przedziału

Domyślnymi wartościami przedziału są wartości zerowe. W celu zdefiniowania przedziału częstotliwości należy w pierwszym polu wprowadzić początkową częstotliwość graniczną, a następnie należy podać częstotliwość końcową, zamykając przedział. Zdefiniowanie przedziału częstotliwości jest koniecznym krokiem na etapie analizy. Wartości graniczne przedziału częstotliwości można wyznaczyć na podstawie danych częstotliwości rezonansowych oraz antyrezonansowych zawartych w tabeli zbiorczej właściwości analizowanego układu piezoelektrycznego. Przedział można ustawić dowolnie, tak by obejmował wszystkie częstotliwości rezonansowe układu lub tylko kilka wybranych.

Następnym przyciskiem jest przycisk oznaczony jako „Set accuracy”, który pozwala na ustawienie dokładności generowanego przebiegu amplitud odpowiedzi układu w dziedzinie częstotliwości. Wybór przycisku ponownie spowoduje otwarcie dodatkowego okna do wprowadzenia wartości liczbowych, pokazano na rysunku 5.12.

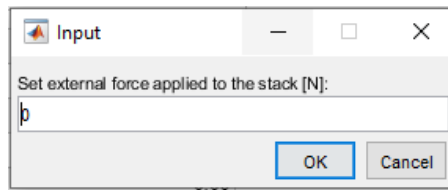


Rys. 5.12. Okno służące do zdefiniowania dokładności wyznaczanej odpowiedzi układu

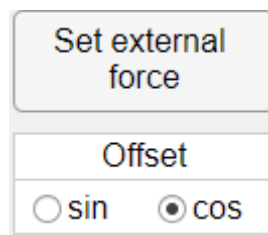
Domyślnie założono jeden pomiar co 5Hz w pobliżu mierzonej częstotliwości rezonansowej, natomiast pomiary w przedziałach pośrednich prowadzone są co 1 kHz. Wielkości przedziałów można dowolnie definiować, ale nie jest zalecane ustawianie bardzo dużej dokładności przedziałów pośrednich w przypadku dużego zakresu badanych częstotliwości, gdyż może to znacznie wydłużyć czas obliczeń. Przedziały dokładne wycentrowane są na przyjętych w tabeli wartościach częstotliwości rezonansowych. Szerokość przedziału o dużej dokładności pomiarów jest równa dwukrotności precyzji przedziałów pośrednich z wartością częstotliwości rezonansowej w jego centrum.

Kolejny przycisk pozwala użytkownikowi na zdefiniowanie wymuszenia mechanicznego oddziałującego na badany układ, na swobodnym końcu układu. W momencie przygotowywania pracy możliwe jest zdefiniowanie wymuszenia harmonicznego z przesunięciem sinusowym lub cosinusowym. Wciśnięcie przycisku spowoduje otwarcie okna, które przedstawiono na rysunku

5.13. Przesunięcie definiowane jest natomiast w polu wyboru znajdującym się bezpośrednio pod przyciskiem definicji siły harmoniczej, co pokazano na rysunku 5.14.



Rys. 5.13. Okno wprowadzania wartości mechanicznego wymuszenia harmonicznego działającego na układ.



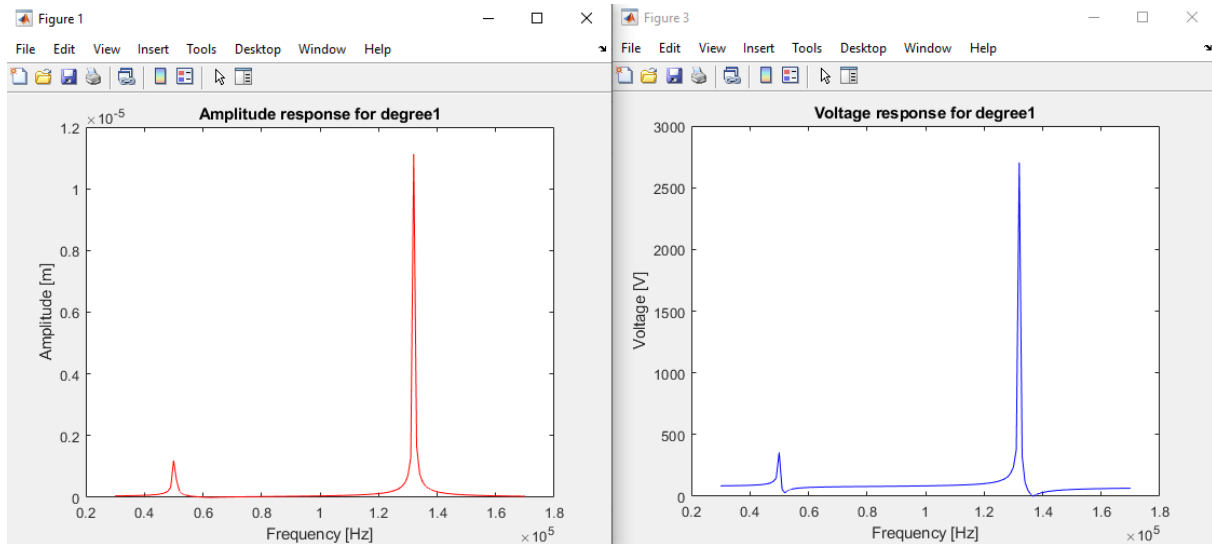
Rys. 5.14. Przycisk definicji wymuszenia oraz jego przesunięcia

Analogicznie do definicji wymuszenia mechanicznego definiowane jest także wymuszenie napięciowe pochodzące ze źródła podpiętego do układu piezoelektrycznego. Schemat podpięcia przedstawiono na rysunku 4.25 w rozdziale czwartym. Należy założyć, że w przypadku układu o większej liczbie stopni swobody, źródło zasilania jest podpięte równoległe do każdej płytki piezoelektrycznej wchodzącej w strukturę syntezywanego układu.

Wprowadzenie wszystkich wartości umożliwia wygenerowanie równań niezbędnych do przeprowadzenia analizy układu. Równania są wygenerowane przy użyciu metody macierzowej, omawianej w rozdziale czwartym. Aby wygenerować równania należy wcisnąć przycisk znajdujący się w dolnej części interfejsu, opisany jako „Analyse”. Po upływie czasu niezbędnego na wyznaczenie równań, program zasygnalizuje ukończenie operacji poprzez odblokowanie przycisku „Show graphs”. Przycisk jest wyszarzony do momentu wyznaczenia równań niezbędnych do analizy odpowiedzi układu. W przypadku, w którym użytkownik nie uzupełnił wszystkich danych niezbędnych do przeprowadzenia analizy, program wyświetli powiadomienie, w którym zawarte będzie przypomnienie o konieczności wprowadzenia wszystkich danych.

W celu wygenerowania wykresów odpowiedzi amplitudowej w dziedzinie częstotliwości należy po przeprowadzeniu analizy wcisnąć przycisk „Show graphs”. Proces może potrwać nawet do kilkunastu minut w zależności od stopnia skomplikowania analizowanego układu lub

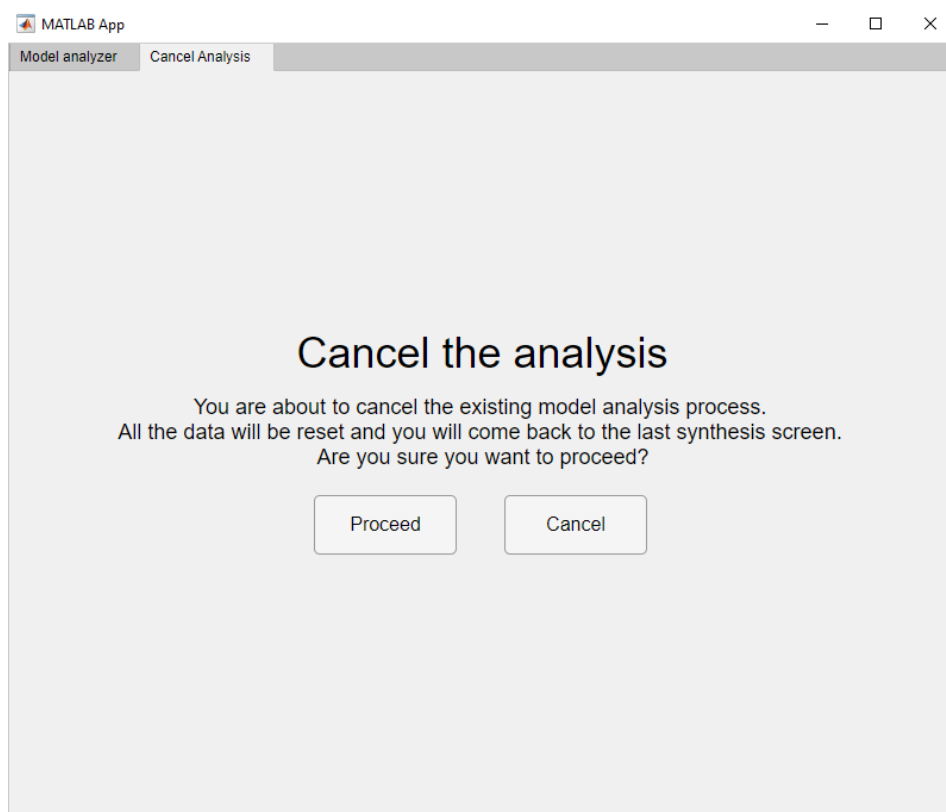
wielkości przedziału częstotliwości. Po upływie czasu potrzebnego na obliczenia wartości, na ekranie wyświetlą się dodatkowe okna zawierające wykresy przebiegów amplitudy przemieszczenia oraz napięcia w dziedzinie częstotliwości każdego z rozpatrywanych stopni swobody układu. Przykład otrzymanych wyników zamieszczono na rysunku 5.15.



Rys. 5.15. Wyznaczone wykresy przebiegu amplitudy przemieszczenia i napięcia w przypadku pierwszego stopnia swobody badanego układu piezoelektrycznego

Każde okno zawiera osobny wykres przedstawiający odpowiedź amplitudową przemieszczenia lub napięcia w dziedzinie częstotliwości wyznaczone przy poszczególnych stopni swobody układu. Nazwy wykresów nadano automatycznie w zależności od opisywanego stopnia swobody bądź określonego rodzaju odpowiedzi amplitudowej. Pozioma oś wykresu zawiera przedział rozpatrywanych częstotliwości natomiast osie pionowe przedstawiają przebieg amplitudy sygnału w zależności od opisywanego rodzaju przemieszczenia lub napięcia. Kolorem czerwonym oznaczone są odpowiedzi w postaci mechanicznego przemieszczenia końca płytki natomiast kolorem niebieskim zaznaczono wykresy napięcia na poszczególnych płytkach.

W przypadku konieczności powrotu do modułu syntezy, w prawym górnym rogu interfejsu modułu analizy znajduje się przycisk w postaci białej strzałki na niebieskim tle. Przycisk ten usytuowany jest obok przycisku powrotu do początku programu. Wciśnięcie przycisku spowoduje otwarcie okna z zapytaniem o potwierdzenie powrotu do modułu syntezy, co pokazano na rysunku 5.16.

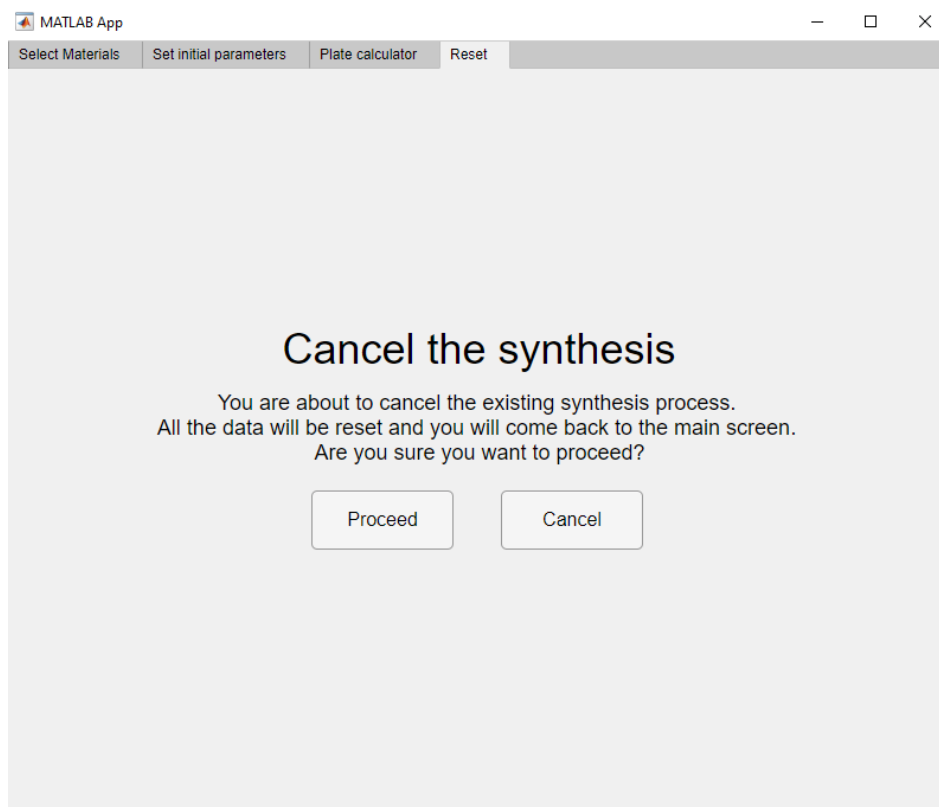


Rys. 5.16. Okno zatwierdzenia powrotu do modułu syntezy układów piezoelektrycznych.

Potwierdzenie wyboru przyciskiem „Proceed” spowoduje powrót do ostatniego otwartego okna modułu syntezy układów piezoelektrycznych oraz wymazanie wszelkich danych, które wprowadzono w module analizy. Anulowanie wyboru przyciskiem „Cancel” spowoduje powrót do okna analizy układów.

5.5 Funkcja powrotu do początku programu

W dowolnym kroku użytkownik ma możliwość anulowania procesu syntezy wciskając czerwony przycisk znajdujący się w prawym górnym rogu interfejsu, co spowoduje wygenerowanie zapytania potwierdzającego chęć anulowania procesu syntezy (rysunek 5.17).



Rys. 5.17. Okno zapytania potwierdzającego anulowanie procesu syntezy.

Wciśnięcie przycisku „Proceed” spowoduje wykasowanie wszelkich informacji wprowadzonych do tej pory przez użytkownika oraz obliczonych przez algorytm syntetyzujący. Następnie uruchomiony zostanie widok głównego okna programu (Rys. 5.3). Wybór przycisku „Cancel” spowoduje natomiast powrót do bieżącego etapu syntezy lub analizy z możliwością jej kontynuowania.

6. Badania doświadczalne

Rozwijane w ramach pracy metody syntezy oraz analizy układów piezoelektrycznych należało zweryfikować z doświadczalnie wyznaczonymi odpowiedziami układów utworzonych z elementów o różnych wymiarach geometrycznych bądź właściwościach materiałowych. W celu poznania metod kontroli układów piezoelektrycznych oraz możliwości ich mocowania i klejenia przeprowadzono badanie prostych układów piezoelektrycznych. Celem pierwszego etapu było przygotowanie stanowiska wyposażonego w aparaturę laboratoryjną do prowadzenia pomiarów przy wymaganym do sterowania układami piezoelektrycznymi napięciu oraz częstotliwości sygnału elektrycznego. W ramach badania przeanalizowano zachowanie układów piezoelektrycznych, w których poszczególne przetworniki w stosie wzbudzano osobnymi sygnałami sterującymi.

Kolejne badanie miało na celu pozyskanie danych empirycznych w celu porównania odpowiedzi rzeczywistego stosu piezoelektrycznego złożonego z różnych płytek piezoelektrycznych, z wynikami otrzymanymi w oparciu o analizę utworzonych w procesie syntezy modeli matematycznych. W ramach badania przeprowadzono trzy testy, których celem było zweryfikowanie odpowiedzi rzeczywistych układów piezoelektrycznych na wzbudzenia elektryczne w wybranym przedziale częstotliwości. Wyniki badań empirycznych zastosowano do identyfikacji odchyleń w modelach matematycznych uzyskanych metodami syntezy. Porównanie wyników otrzymanych drogą analizy matematycznej oraz badań empirycznych posłużyło do zdefiniowania możliwych do wdrożenia współczynników korekcyjnych oraz wskazania obszarów syntezy wymagających dalszego rozwoju w ramach przyszłej pracy naukowej.

6.1 Badanie drgań układu piezoelektrycznego

Stosy piezoelektryczne stosowane w przemyśle złożone są głównie z płytek o jednakowych wymiarach oraz właściwościach materiałowych. Nie można zatem pozyskać wystarczająco szczegółowych informacji na temat zachowania stosów piezoelektrycznych w warunkach pracy przyjętych w kontekście prowadzonej tematyki badawczej wyłącznie na podstawie informacji katalogowych i danych technicznych produktów oferowanych na rynku. Koncepcja zastosowania układów piezoelektrycznych złożonych z różnych płytek do generowania drgań w szerszym zakresie częstotliwości jest potencjalnie nowym zagadnieniem, gdyż nie zidentyfikowano również podejmowanej tematyki badawczej w trakcie przeglądu

literaturowego. Konieczne zatem było opracowanie pozyskanie wiedzy na temat zachowania układów złożonych z przetworników piezoelektrycznych o różnych parametrach geometrycznych.

Koncepcja badania zakładała analizę zachowania układu piezoelektrycznego w postaci stosu połączonych ze sobą płytek piezoelektrycznych o różnych wymiarach geometrycznych. Płytki wzbudzano oddzielnymi sygnałami harmonicznymi w celu sprawdzenia zdolności przenoszenia wibracji o różnych częstotliwościach w obrębie poszczególnych warstw stosu piezoelektrycznego połączonych warstwami kleju oraz materiału izolującego. Wyniki umożliwiły pozyskanie nowej wiedzy na temat zachowania układów piezoelektrycznych w różnych konfiguracjach płytek oraz sygnału wymuszającego.

Niestandardowe podejście do kontroli układów piezoelektrycznych wiązało się z mniejszym dostępem do informacji na temat zachowania układów złożonych z różnych płytek piezoelektrycznych. Jednym z założeń badania było rozpoznanie wymogów oraz potencjalnych problemów związanych z ręcznym klejeniem układów piezoelektrycznych oraz ich odpowiednim mocowaniem. Kolejnym problemem podjętym w pracy była kwestia odpowiedniego sterowania każdą płytką piezoelektryczną sygnałem elektrycznym oraz doprowadzenia przewodów zasilających. Istotne było również zastosowanie odpowiedniej metody rejestracji oraz próbkowania drgań mechanicznych generowanych przez wzbudzone układy piezoelektryczne.

Podjęto decyzję o samodzielnym przygotowaniu próbných stosów piezoelektrycznych stosując dostępne płytki piezoelektryczne. Układy testowe utworzono z par przetworników o takich samych oraz różnych powierzchniach przekroju i grubościach. Użyte do badań płytki wyprodukowane przez firmę Ferroperm Piezoceramics wykonane były ze stopu ceramicznego o oznaczeniu Pz26 (Navy I). Stop ceramiczny charakteryzuje się dobrym współczynnikiem jakości mechanicznej oraz współczynnikiem przemiany energii mechanicznej oraz elektrycznej (*coupling factor*). Płytki wykonane ze stopu „Pz26” stosowane są w przemyśle do produkcji aparatury medycznej, urządzeń pomiarowych oraz hydrofonów. Szczegółową specyfikację materiałową udostępnioną przez producenta pokazano na rysunku 6.1, a informacje na temat właściwości zastosowanego materiału zawarto w [92]. Na podstawie kalkulatora dostępnego na stronie internetowej sprzedawcy, obliczono przybliżone częstotliwości rezonansowe badanych elementów piezoelektrycznych. Przetworniki o wymiarach 30x30x10 mm posiadały częstotliwość rezonansową 196 kHz natomiast te o wymiarach 18x18x8 mm częstotliwość rezonansową 240 kHz. W obu przypadkach zastosowano przetworniki o przekroju w kształcie kwadratu.

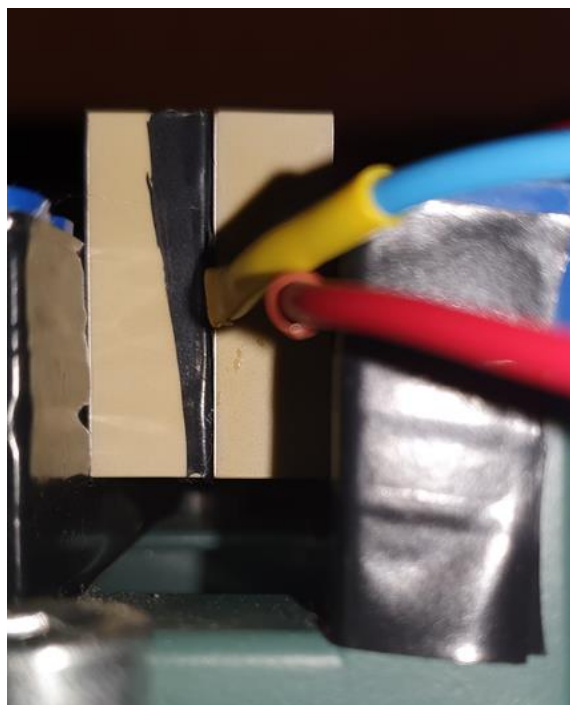
05 Material properties

Electrical	Symbol	Pz26
Relative dielectric permittivity at 1 kHz	K_{33T}	1300
Dielectric dissipation factor at 1 kHz	$\tan\delta$	3×10^{-3}
Curie temperature	$T_C >$	330 °C
Recommended working range	$<$	230 °C
Electromechanical		
Coupling factors	k_p	0.56
	k_t	0.47
Piezoelectric charge coefficient	d_{33}	300 pC/N
Mechanical		
Mechanical Quality Factor	$Q_{m,t}^E$	>1000
Density	ρ	7.70 g/cm ³

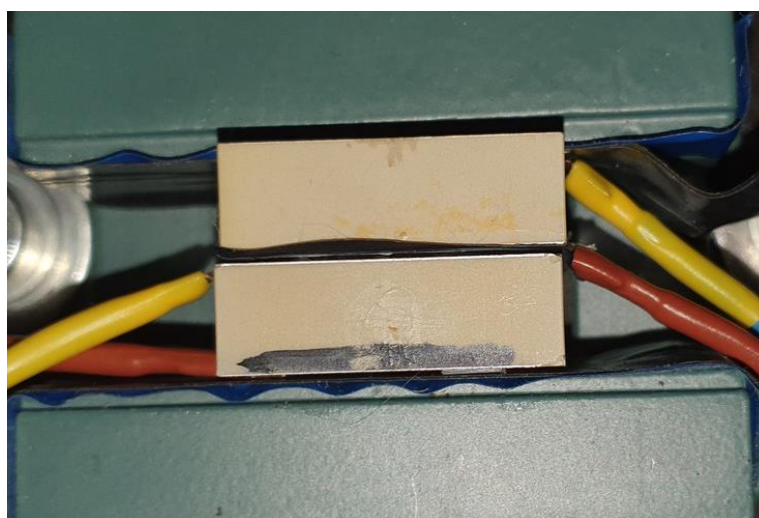
Rys. 6.1. Specyfikacja materiału piezoelektrycznego *Pz26 Navy I*, z którego wykonano przetworniki piezoelektryczne przeznaczone do pierwszego badania [93]

Testom poddano dwa stosy piezoelektryczne wykonane z różnych zestawów płytek. Pierwszy stos utworzono z dwóch płytek piezoelektrycznych o identycznych wymiarach 30x30x10 mm, a drugi stos utworzono łącząc płytkę o wymiarach 30x30x10mm z płytką o wymiarach 18x18x8 mm. Elektrody wykonane z cienkiej warstwy srebra znajdowały się na powierzchniach roboczych stosowanych elementów piezoelektrycznych. W celu wzbudzenia przetworników oddzielnymi sygnałami elektrycznymi, powierzchnie kontaktowe odseparowano od siebie warstwami materiału elektroizolacyjnego. Na podstawie przeprowadzonej analizy konstrukcji stosów piezoelektrycznych produkowanych przemysłowo podjęto decyzję o zastosowaniu kilku warstw szkła laboratoryjnego w postaci szkieł mikroskopowych o grubości 1 mm. Do utworzenia wystarczająco mocnego i sztywnego połączenia pomiędzy płytkami i warstwami szkła zastosowano klej cyjanoakrylowy. Przygotowane w taki sposób piezoelektryczne stosy umieszczano wewnątrz uchwytu zaciskowego w celu zapewnienia mocnego połączenia pomiędzy klejonymi warstwami szkła oraz materiału piezoelektrycznego. Użyte w procesie łączenia szkła mikroskopowe posiadały nieznacznie mniejszy przekrój od płytek piezoelektrycznych. Utworzone w ten sposób połączenia posiadały szczelinę o niewielkich wymiarach występującą pomiędzy płytkami piezoelektrycznymi. Do odsłoniętych wewnątrz szczeliny przeciwnych biegunów płytek piezoelektrycznych przylutowano cienkie elektrody aluminiowe. Elektrody przymocowano w taki sposób, aby nie naruszyć utworzonej spoiny oraz uniknąć zwarć i łuków elektrycznych podczas pracy układu. Pozostałe fragmenty spoiny zaklejono taśmą elektroizolacyjną w celu

zapewnienia dodatkowej izolacji pomiędzy niezabezpieczonymi powierzchniami przewodzącymi. Utworzony w ten sposób stos piezoelektryczny złożony z dwóch płytek o takich samych wymiarach pokazano na rysunku 6.2 oraz rysunku 6.3.



Rys. 6.2. Układ utworzony z dwóch płytek o wymiarach 30x30x10 mm pokazany w rzucie z góry. Stos umieszczono w izolowanych elektrycznie szczękach.



Rys. 6.3. Stos utworzony z dwóch płytek o wymiarach 30x30x10mm pokazany w rzucie z lewego boku. Na rysunku widoczna jest niewielka szczelina w spoinie pomiędzy połączonymi ze sobą płytkami, w której umieszczono elektrody.

Do generowania sygnałów sterujących użyto generatora fal elektrycznych firmy Tabor Electronics o oznaczeniu „WW5064”. Ustawienia generatora pozwalają na kontrolę kształtu, amplitudy oraz częstotliwości sygnału. Maksymalnie generowane przez urządzenie

napięcie osiąga amplitudę 10 Vpp. Najwyższa częstotliwość generowanego sygnału to 80 MHz w przypadku fali sinusoidalnej oraz 50 MHz w przypadku fali prostokątnej. Na rysunku 6.4 pokazano zastosowany do badań generator oraz najważniejsze dane z załączonej specyfikacji technicznej [94].



WW5064/1074/2074

50MS/s, 100MS/s or 200MS/s Four Channel Arbitrary Waveform Generators

- Four Channel waveform generators
- Sine waves to 80MHz and square to 50MHz
- 16 Bit amplitude resolution
- Up to 4M waveform memory
- 10Vp-p into 50 Ω standard, double into high impedance
- Multiple run modes: trigger, timer and trigger delay
- Four separate SYNC outputs
- Powerful sequence generator links and loops segments in user-defined fashion. Stores up to 10 different sequence tables
- High resolution 3.8" LCD, color display
- LAN, USB and GPIB interfaces
- Multi-Instrument synchronization
- ArbConnection software for easy waveform creation

Rys. 6.4. Generator sygnałów elektrycznych WW5064 firmy Tabor Electronics stosowany do generowania sygnałów podawanych na obie płytki piezoelektryczne w ramach badania [94]

Maksymalne napięcie generatora o wartości 10 V pozwala na generowanie bardzo małych odkształceń mechanicznych przetworników piezoelektrycznych. W celu wzmocnienia generowanego napięcia oraz odkształceń badanych układów zastosowano jednokanałowy wzmacniacz napięcia o oznaczeniu HVA 1500/50. Wzmacniacz umożliwi 200-krotne wzmocnienie generowanego sygnału, co pozwalało na osiągnięcie maksymalnej wartości napięcia 400 V. Wadą przyrządu jest mały zakres częstotliwości wzmacnianego sygnału, który osiąga 10 kHz. Szczegółową specyfikację techniczną urządzenia zamieszczono na stronie internetowej producenta [95]. W badaniu użyto dwóch sygnałów elektrycznych, wzbudzając osobno przetworniki piezoelektryczne wewnątrz badanych stosów.



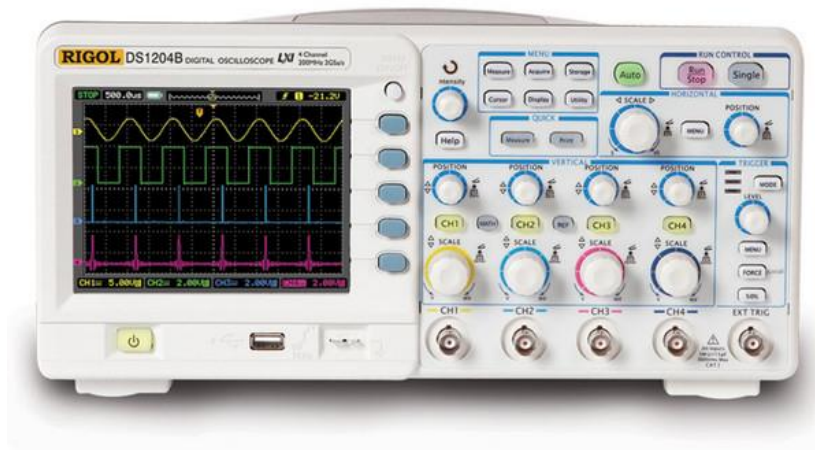
Rys. 6.5. Wzmacniacz HVA1500/50 firmy Smart Material użyty w badaniu układu piezoelektrycznego

Pomiar odkształcenia stosów piezoelektrycznych przeprowadzono przy użyciu interferometru laserowego firmy Polytec, złożonego z emitera wiązki laserowej o oznaczeniu OFV-574 oraz kontrolera wiązki o oznaczeniu OFV-2570. Interferometr realizuje pomiar przemieszczenia porównując przesunięcie odbitej wiązki lasera w fazie oraz powstały po odbiciu efekt dopplera w widmie częstotliwościowym. Pomiar drgań można prowadzić w zakresie częstotliwości do 10 MHz, co jest wystarczające do prowadzenia badań układów piezoelektrycznych. Pomiar wykonywane przy użyciu wiązki lasera wymagają starannie przygotowanej powierzchni odblaskowej. W przypadku badanych układów piezoelektrycznych powierzchnia przetworników nie posiadała wystarczających właściwości refleksyjnych. Do poprawienia jakości sygnału użyto załączonej w zestawie taśmy odblaskowej, którą naklejono na powierzchnię badanych układów piezoelektrycznych. Interferometr posiada dwa wyjścia napięciowe, których zadaniem jest przesyłanie sygnału odpowiadającego przemieszczeniu oraz prędkości wibracji rejestrowanych przez odbitą wiązkę lasera. Tryb pomiaru bezpośredniego pozwala na pomiar niewielkich przemieszczeń badanego ośrodka, które następnie skalowane są z wartością napięcia sygnału wysyłanego przez kontroler. Zaletą tego trybu jest wysoka dokładność rejestrowanych wibracji oraz brak konieczności całkowania otrzymanego sygnału. Wadą natomiast jest bardzo ograniczony zakres pomiarowy o wartości 75 nm. Skala napięcia sygnału wyjściowego odpowiadała 50 nm/V w przypadku impedancji rejestratora o wartości 50 Ω oraz 25 nm/V w przypadku impedancji 1 M Ω . Drugi tryb pomiarowy umożliwia rejestrowanie większych przemieszczeń poprzez obliczanie całki z zarejestrowanej przez wibrometr prędkości odkształceń. Wadą tego rozwiązania jest jednak mniejsza precyzja pomiaru. Użyty do badań interferometr pokazano na rysunku 6.6, a szczegółową specyfikację techniczną w [96].



Rys. 6.6. Kontroler OFV-2570 oraz emiter OFV-574 wibrometru laserowego zastosowanego w badaniu

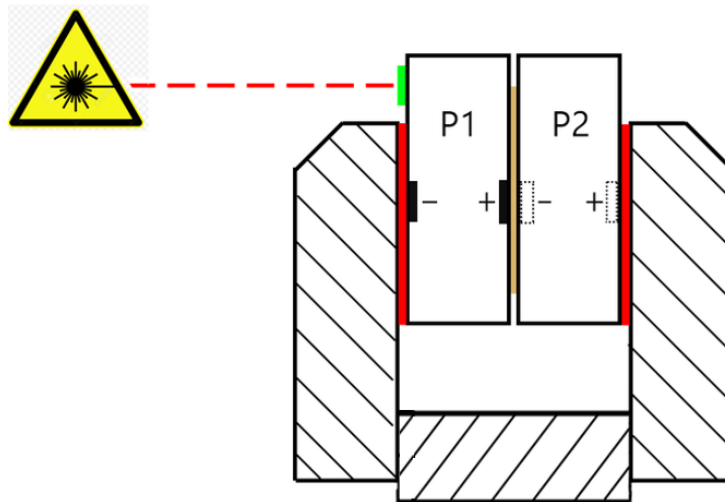
Sygnal napięciowy przesyłany przez kontroler wibrometru laserowego rejestrowano przy użyciu oscyloskopu firmy Rigol o oznaczeniu „DS1064B”. Zastosowany w badaniu oscyloskop posiada cztery wejścia pomiarowe o impedancji 1 MΩ. Maksymalna częstotliwość sygnału rejestrowanego przez oscyloskop to 60 MHz, natomiast maksymalna liczba próbek to 2 miliardy/s. Każdy pomiar to 8192 próbki mierzonego sygnału w odstępach czasowych zależnych od ustawionego zakresu próbkowania. Oscyloskop posiada możliwość archiwizacji pamięci poprzez ethernet oraz wejście USB. Szczegółowe dane techniczne oscyloskopu zamieszczono w [97], a poglądowe zdjęcie na rysunku 6.7.



Rys. 6.7. Oscyloskop DS1064B firmy Rigol użyty w badaniu [97]

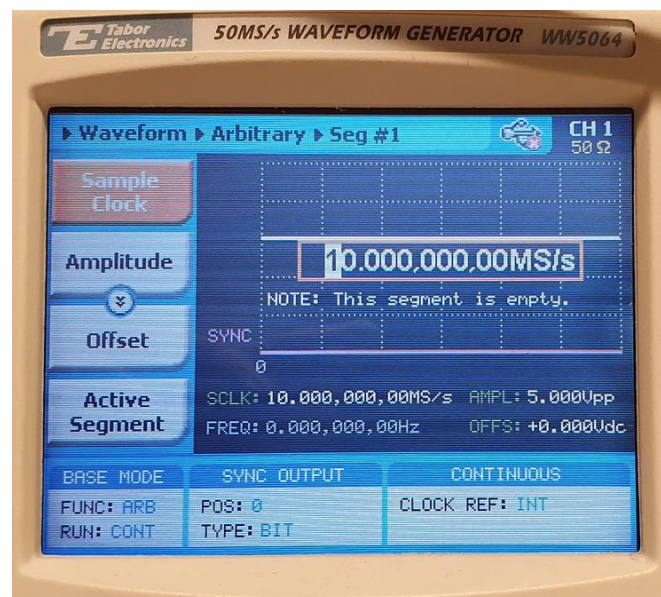
Stanowisko badawcze przygotowano do poziomego pomiaru wibracji powierzchni badanych przetworników piezoelektrycznych. Do utwierdzenia badanych układów zastosowano metalową płytę, do której przymocowano mały uchwyt. Badane stopy umieszczano w uchwycie bez wywierania dużego nacisku, który może wpłynąć na charakterystykę pracy układu, a w szczególności na wartość częstotliwości rezonansowej. Niewielką część stosu pozostawiono ponad obrysem uchwytu oraz oklejono warstwą odblaskową w celu przygotowania dobrej powierzchni odblaskowej do odbijania wiązki lasera interferometru. Szczęki uchwytu wchodzące w bezpośredni kontakt z przewodzącymi powierzchniami stosu piezoelektrycznego oklejono dwiema warstwami gumowej taśmy izolacyjnej w celu zapewnienia elektrycznej oraz wibracyjnej izolacji. Uchwyt przymocowano do metalowej płyty przy użyciu czterech śrub. Emiter wiązki laserowej wibrometru umieszczono w ustalonej na podstawie specyfikacji technicznej odległości od badanego układu piezoelektrycznego. W następnym kroku wiązkę lasera skierowano na powierzchnię płytki piezoelektrycznej starając się zachować przy tym możliwie jak najmniejszy kąt odbicia oraz ogniskując ją na powierzchni badanego stosu piezoelektrycznego. Do precyzyjnego ustawienia

wiązki lasera zastosowano wbudowaną w emiter soczewkę odpowiedzialną za rejestrację odbitego promienia oraz wskaźnik LED, sygnalizujący siłę rejestrowanego sygnału. Wiązkę lasera regulowano do momentu, aż jakość sygnału wskazywana na wyświetlaczu była maksymalna. Poglądowy schemat przedstawiający konfigurację stanowiska badawczego przygotowanego do pomiarów wibrometrem laserowym zamieszczono na rysunku 6.8.

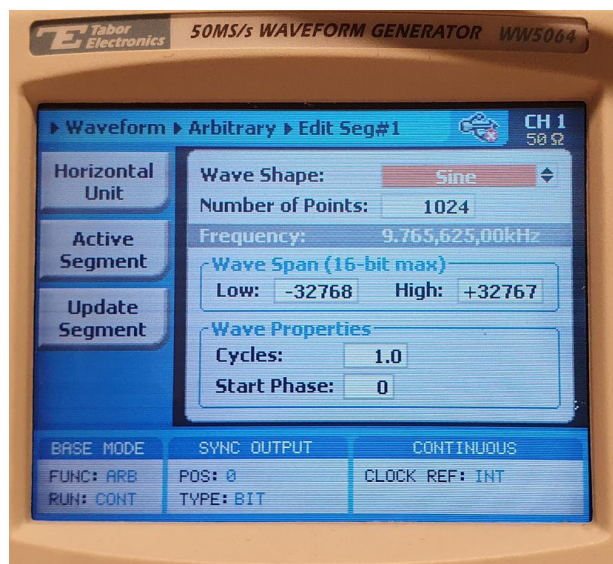


Rys. 6.8. Schemat utwierdzenia badanego stosu piezoelektrycznego z zaznaczonymi warstwami materiału izolującego oraz punktami przymocowania elektrod

Następnie przygotowywano sygnały sterujące. Ustawiono dwa sygnały sinusoidalne o odrębnych częstotliwościach i amplitudzie o wartości 2 Vpp. Na rysunku 6.9 oraz 6.10 przedstawiono okna konfiguracyjne generatora, w których zmieniano częstotliwości sygnałów.

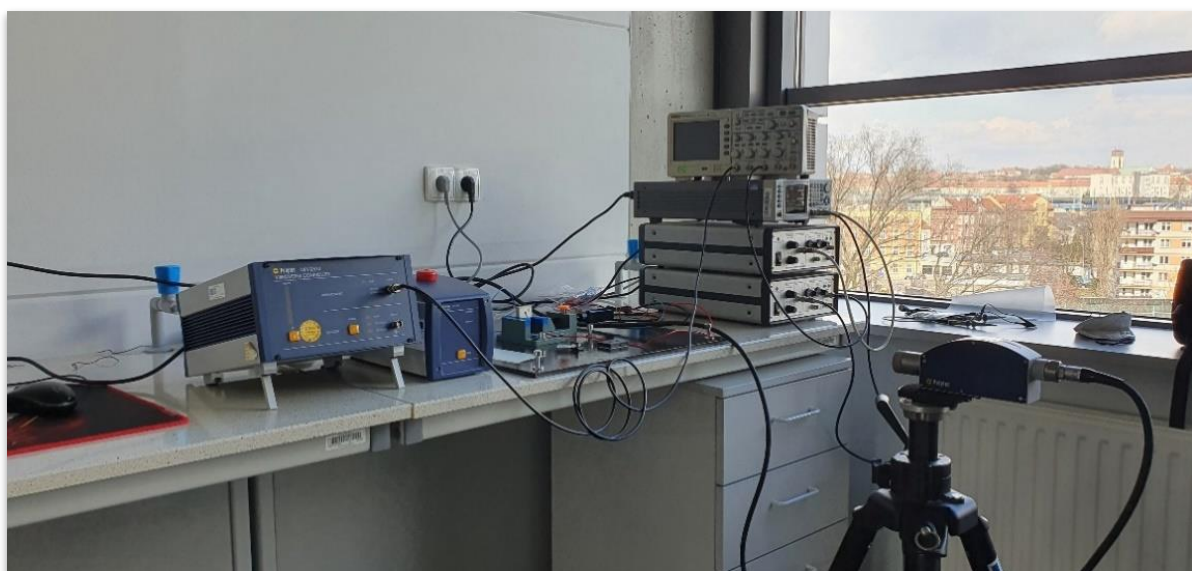


Rys. 6.9. Okno konfiguracji zegara taktującego generatora



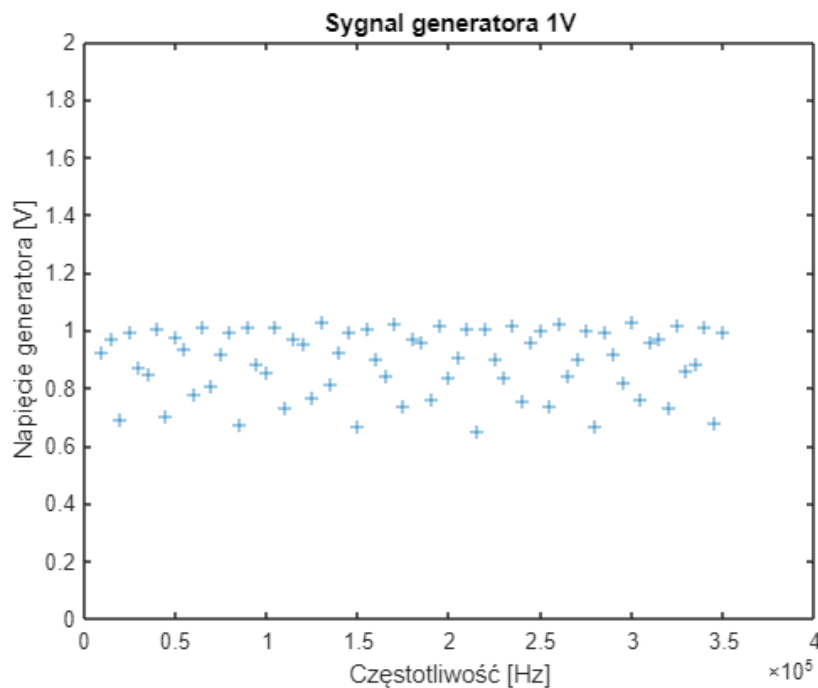
Rys. 6.10. Okno ustawień zaawansowanych generowanego sygnału napięciowego

Sygnal sterujący podawano następnie na wzmacniacze napięciowe. Wzmocniony sygnał przekazywano na przetworniki piezoelektryczne poprzez przyłutowane elektrody. Na pierwsze wejście oscyloskopu podawano sygnał z kontrolera wibrometru laserowego. Zakres pomiarowy ustawiono na 5 V uwzględniając impedancję oscyloskopu. Drugie oraz trzecie wejście oscyloskopu stosowano do monitorowania sygnałów wzmacnianych przez użyte w badaniu wzmacniacze napięciowe. Widok stanowiska badawczego gotowego do pomiarów zamieszczono na rysunku 6.11.



Rys. 6.11. Zdjęcie przygotowanego do badania stanowiska pomiarowego

Próbkowany sygnał był podatny na silne zakłócenia z uwagi na bardzo małe mierzone przemieszczenia. Kolejnym problemem była również duża rozbieżność pomiędzy rejestrowanymi próbkami sygnału przy kolejnych odczytach oscyloskopu. W celu wyznaczenia przybliżonego zakresu błędu pomiarowego przeprowadzono badanie pomocnicze w postaci pomiarów czystego sygnału sinusoidalnego z generatora o wartości 1 V_{pp} na przestrzeni częstotliwości od 10 kHz do 350 kHz oraz odstępach 5 kHz pomiędzy kolejnymi próbkami. Badanie miało na celu stwierdzenie, czy możliwe jest generowanie sygnału o stałej amplitudzie w pełnym zakresie częstotliwości przyjętym do analizy badanych układów. Pomiar przeprowadzono przy bezpośrednim połączeniu wyjścia generatora z wejściem oscyloskopu. Do agregacji zarejestrowanych wartości sygnału użyto oprogramowania Matlab R2021b. Wykres z naniesionymi wartościami zmierzonej amplitudy sygnału w dziedzinie częstotliwości zamieszczono na rysunku 6.12.



Rys. 6.12. Zarejestrowane wartości amplitudy maksymalnej sygnału z generatora przy różnych częstotliwościach

Minimalną zarejestrowaną wartością napięcia było 0,6689 V natomiast maksymalną zarejestrowaną wartością było 1,028 V. Maksymalne zarejestrowane odchylenie bezwzględne w stosunku do przyjętego sygnału o wartości napięcia 1 V wyniosło 0,3311 V co stanowiło błąd względny o wielkości 33%. Zaobserwowane odchylenia w generowanym sygnale mogły powstać na skutek niedokładności odczytu użytego w badaniu oscyloskopu lub odchyień w generowanym przez generator sygnale. Zaobserwowany błąd w amplitudzie przekłada się

bezpośrednio na wartości mierzonego odkształcenia przetworników piezoelektrycznych w kolejnych badaniach, co uwzględniono w trakcie analizy pomiarów przeprowadzonych na rzeczywistych układach.

Badanie układów piezoelektrycznych rozpoczęto umieszczając wewnątrz uchwytu badany stos oraz naklejając na jego powierzchnię warstwę materiału odblaskowego. Uchwyt zaciskano w celu zapewnienia tarcia niezbędnego do utrzymania stosu w jednej pozycji podczas testów. Wibrometr pozycjonowano prostopadle do powierzchni odblaskowej w odległości pomiarowej wskazanej przez producenta w instrukcji, w celu zapewnienia maksymalnej jakości odbitej wiązki. W kolejnym kroku włączano generator sygnałów elektrycznych i ustawiano ich napięcie wyjściowe oraz częstotliwości. Weryfikowano zgodność sygnałów emitowanych przez generator z sygnałem zwrotnym otrzymywanym poprzez złącza monitorujące. Dostrajano skalę pomiarową na oscyloskopie do sygnału otrzymywanego z wibrometru laserowego. Do podglądu mierzonego sygnału w dziedzinie częstotliwości zastosowano wbudowaną w oscyloskop funkcję kalkulatora szybkiej transformacji Fouriera. Sygnał poddawany transformacji próbkowano oknem prostokątnym. Stosując funkcję nagrywania pomiarów, rejestrowano krótki fragment odczytywanego z wibrometru sygnału w pamięci oscyloskopu, a następnie zapisywano próbkę na mobilny nośnik danych. Nagrane próbki archiwizowano na komputerze. Do późniejszej analizy wyników przeprowadzano transformację Fouriera uśrednionych wartości zarejestrowanych wibracji z każdej serii pomiarowej. Do obliczeń oraz prezentacji wyników zastosowano arkusze kalkulacyjne Excel.

Każdy poddany transformacji sygnał rejestrowano z maksymalną możliwą do uzyskania na oscyloskopie liczbą 8192 próbek. Odstęp pomiędzy poszczególnymi próbkami w trakcie wykonywania pomiarów wynosił $4 \mu\text{s}$ co dawało częstotliwość próbkowania 250 kHz w trakcie 0,3277 s. Próbki sygnały o częstotliwości 5 kHz, 8 kHz oraz 10 kHz, a więc częstotliwość próbkowania znacząco przewyższała częstotliwość Nyquista. Okno czasowe rejestrowanego sygnału obejmowało również całość rejestrowanych fal harmoniczych, gdyż było większe niż okno czasowe pełnej fali przy częstotliwości 10 kHz (0,1 ms), 8 kHz (0,125 ms) oraz 5 kHz (0,2 ms).

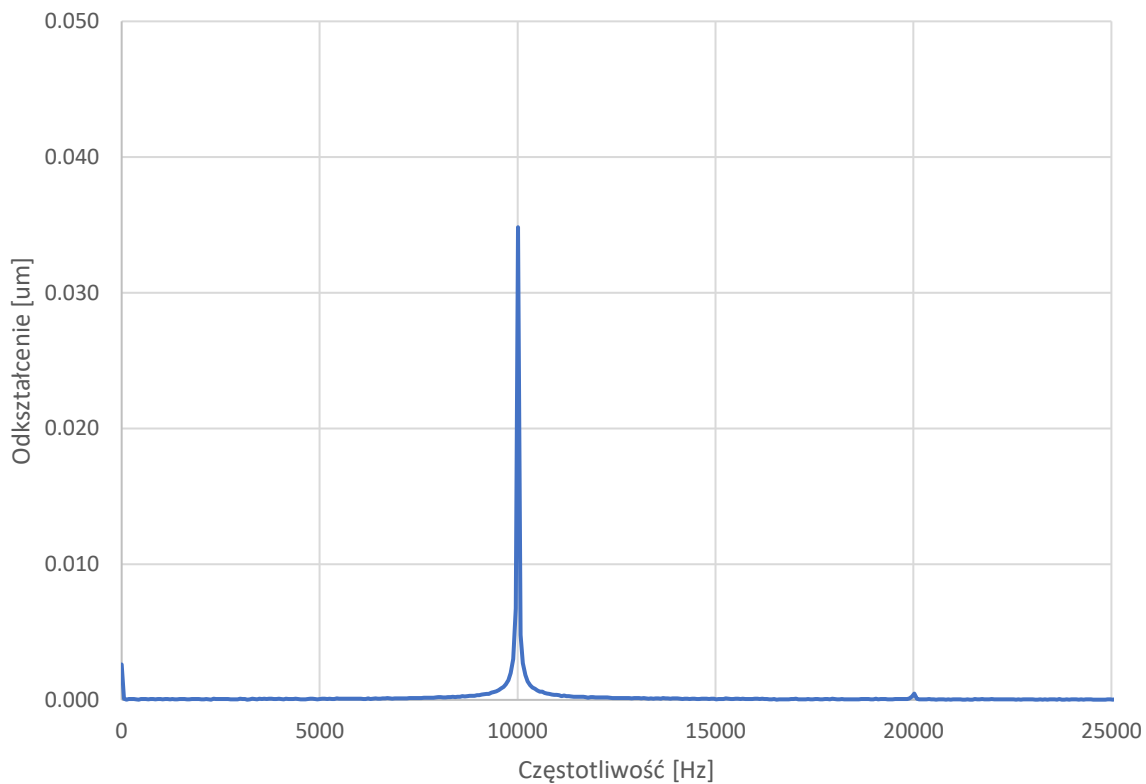
Z uwagi na ograniczenia sprzętowe podjęto decyzję o przeprowadzeniu pomiarów układów piezoelektrycznych w przedziale częstotliwości obsługiwanych przez dostępną aparaturę badawczą. Badanie podzielono na pięć serii pomiarowych, w których analizie poddano dwa stosy piezoelektryczne przy różnych kombinacjach częstotliwości sygnałów sterujących.

Dobrano trzy częstotliwości sinusoidalnego sygnału sterującego o wartościach 5 kHz ,8 kHz oraz 10 kHz w następujących konfiguracjach:

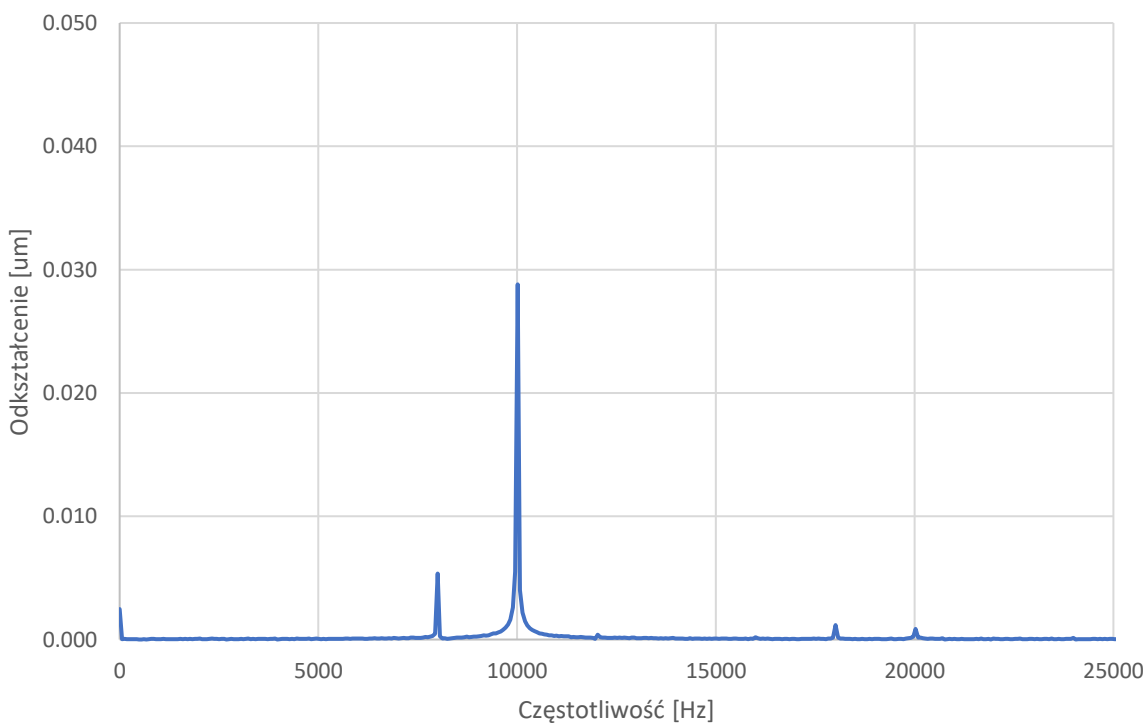
- 10 kHz podawane na obie płytki w stosie,
- 10 kHz na płytce mierzonej bezpośrednio – 8 kHz na płytce w drugiej warstwie,
- 10 kHz na płytce mierzonej bezpośrednio – 5 kHz na płytce w drugiej warstwie,
- 8 kHz na płytce mierzonej bezpośrednio – 10 kHz na płytce w drugiej warstwie,
- 5 kHz na płytce mierzonej bezpośrednio – 10 kHz na płytce w drugiej warstwie.

Celem postawionym w badaniu była analiza charakterystyki dynamicznej badanych stosów piezoelektrycznych, w których przetworniki wzbudzano sygnałami o różnych częstotliwościach. Kolejnym celem było zbadanie wpływu spoiny łączącej badane przetworniki na mierzone wartości amplitudy wibracji. Czynnikiem istotnym w przeprowadzonym badaniu było obserwacja zjawisk takich jak występowanie częstotliwości harmonicznnych lub interferencja drgań generowanych przez poszczególne elementy piezoelektryczne w badanych stosach.

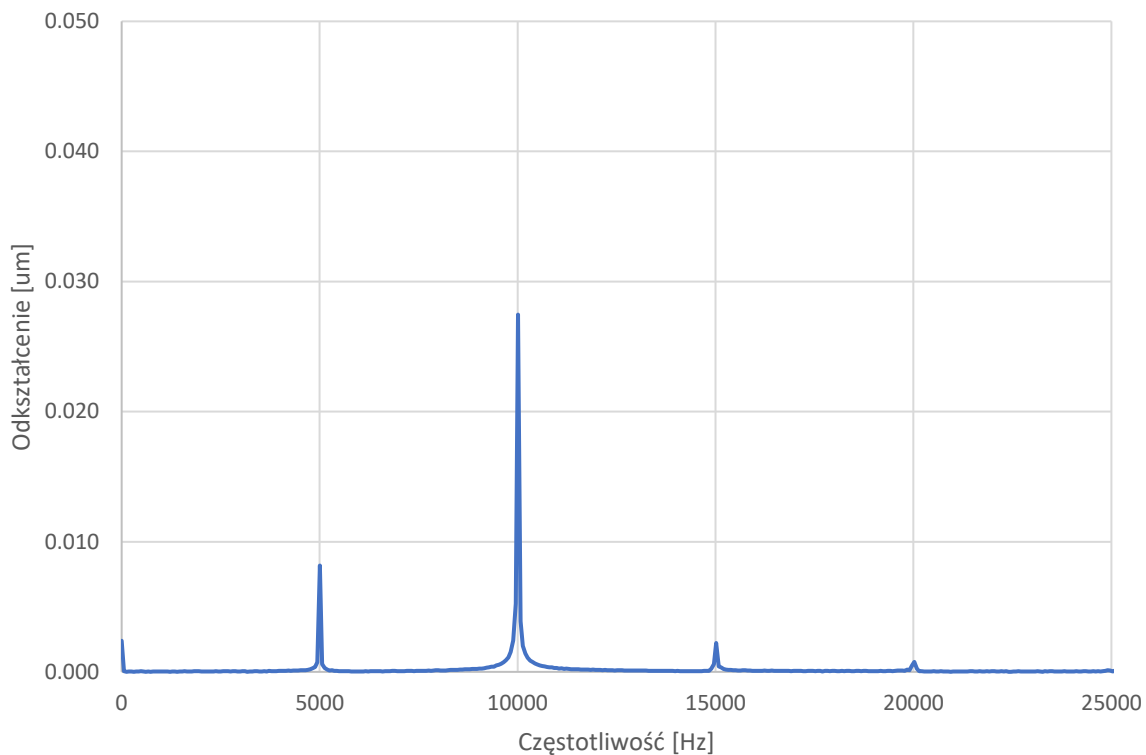
Na podstawie uzyskanych pomiarów wyznaczono wykresy odpowiedzi amplitudowej w dziedzinie częstotliwości. Wykresy wygenerowane na podstawie uzyskanych danych pomiarowych pokazano na rysunkach 6.13 – 6.22. Na rysunkach 6.13 – 6.17 przedstawiono odpowiedzi amplitudowe układu piezoelektrycznego złożonego z dwóch jednakowych płytek o wymiarach 30x30x10 mm wzbudzanych falami sinusoidalnymi o różnych częstotliwościach. Pierwsza płytka w stosie piezoelektrycznym traktowana jest jako płytka przednia, na której naklejona była warstwa odblaskowa.



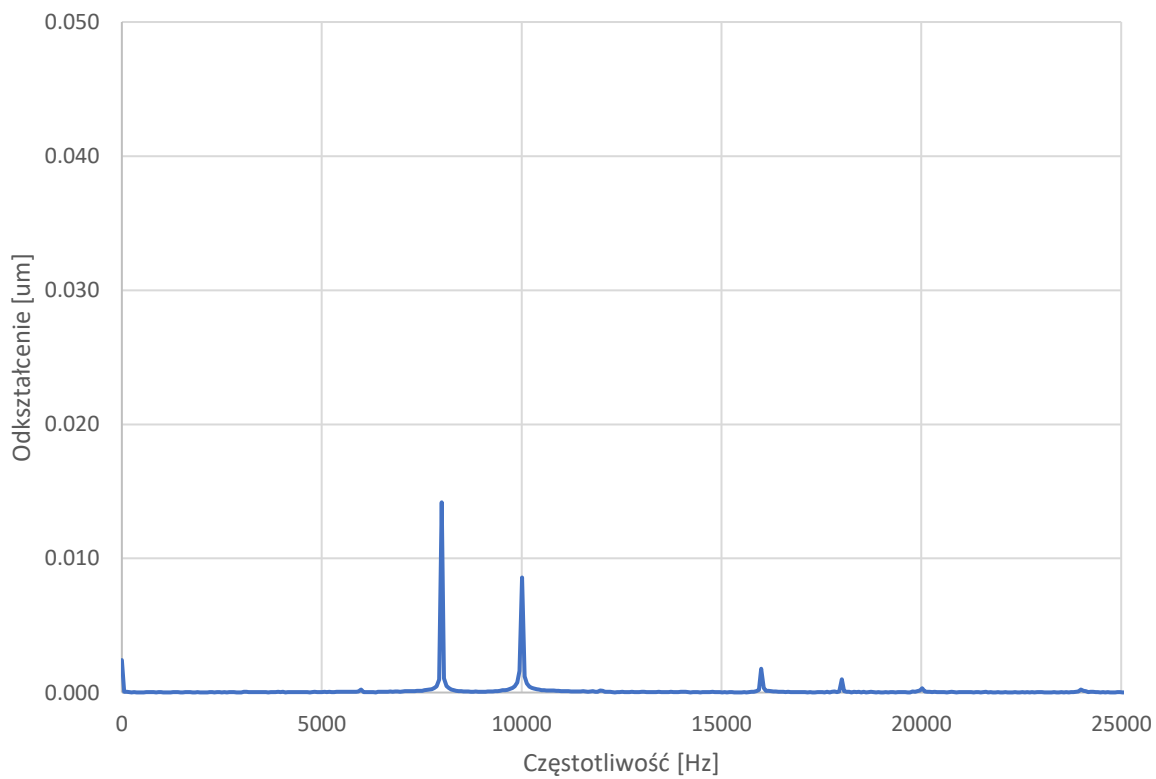
Rys. 6.13. Przebieg amplitudowo-częstotliwościowy układu złożonego z dwóch takich samych płytek wzbudzanych jednakowymi częstotliwościami



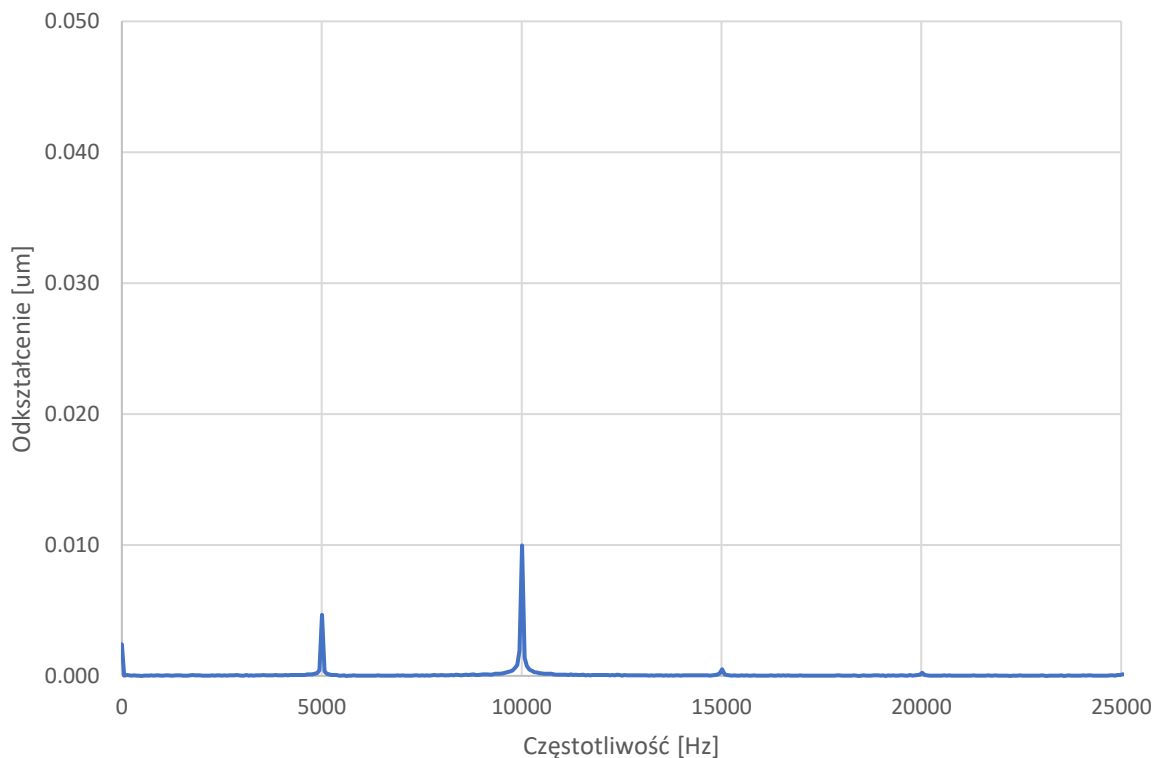
Rys. 6.14. Przebieg amplitudowo-częstotliwościowy układu złożonego z dwóch takich samych płytek wzbudzanych różnymi częstotliwościami (10 kHz na przedniej płytce i 8 kHz na tylnej płytce)



Rys. 6.15. Przebieg amplitudowo-częstotliwościowy układu złożonego z dwóch takich samych płytek wzbudzanych różnymi częstotliwościami (10 kHz na przedniej płytce i 5 kHz na tylnej płytce)

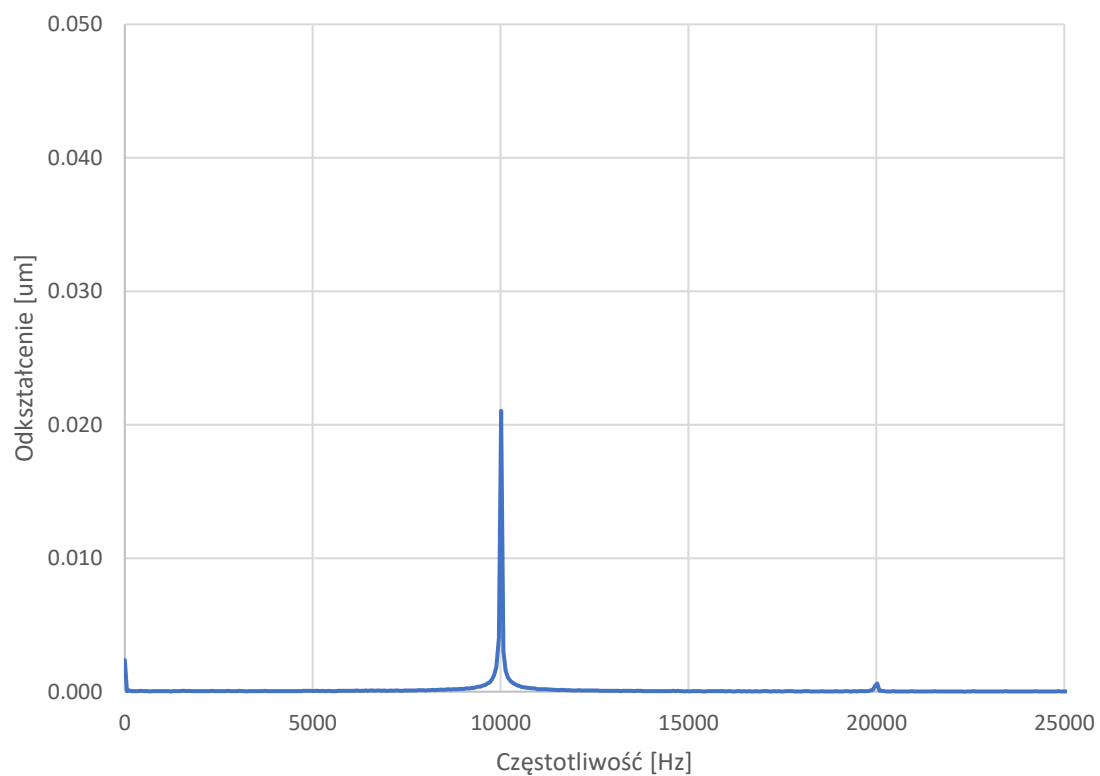


Rys. 6.16. Przebieg amplitudowo-częstotliwościowy układu złożonego z dwóch takich samych płytek wzbudzanych różnymi częstotliwościami (8 kHz na przedniej płytce i 10 kHz na tylnej płytce)

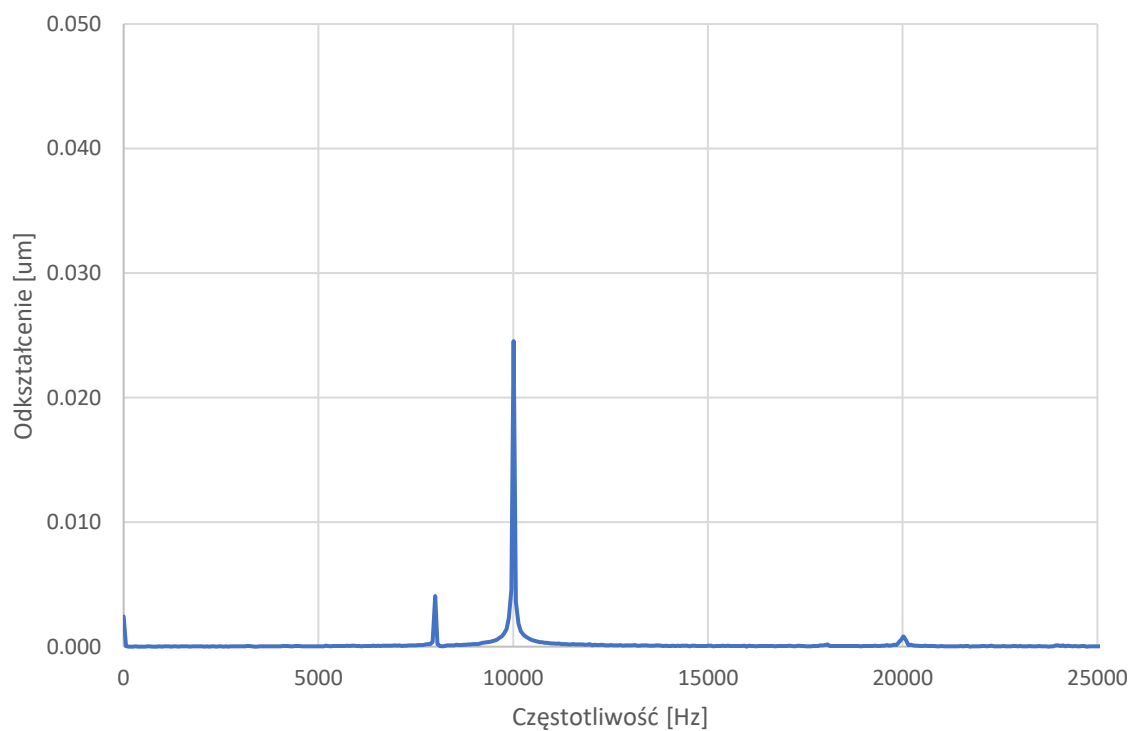


Rys. 6.17. Przebieg amplitudowo-częstotliwościowy układu złożonego z dwóch takich samych płytek wzbudzanych różnymi częstotliwościami (5 kHz na przedniej płytce i 10 kHz na tylnej płytce)

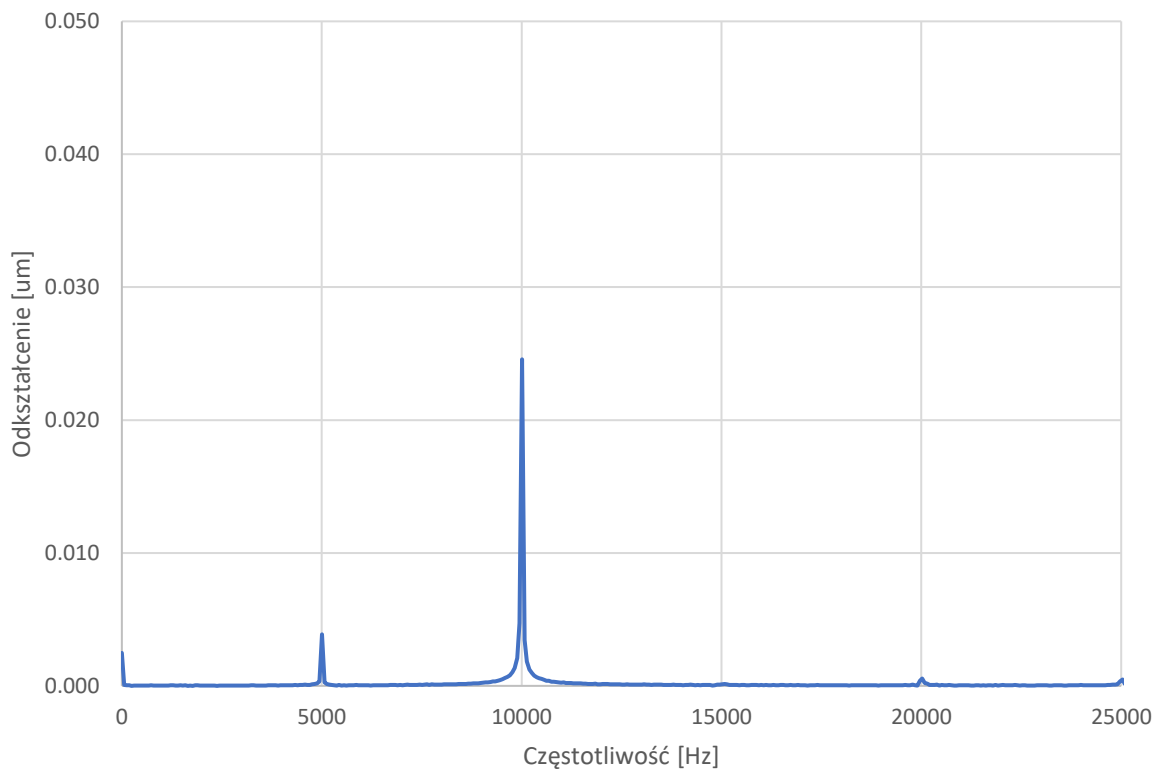
Na rysunkach 6.18 – 6.22 zamieszczono wykresy odpowiedzi amplitudowej układu piezoelektrycznego złożonego z różnych płytek piezoelektrycznych. Na pierwszej płytce o wymiarach 18x18x8 mm naklejono warstwę odblaskową. Druga płytka w stosie piezoelektrycznym miała wymiary 30x30x10 mm. Układ utworzony z połączonych ze sobą płytek wzbudzano sygnałami sinusoidalnymi o różnych częstotliwościach, analogicznie do układu złożonego z płytek o tych samych wymiarach.



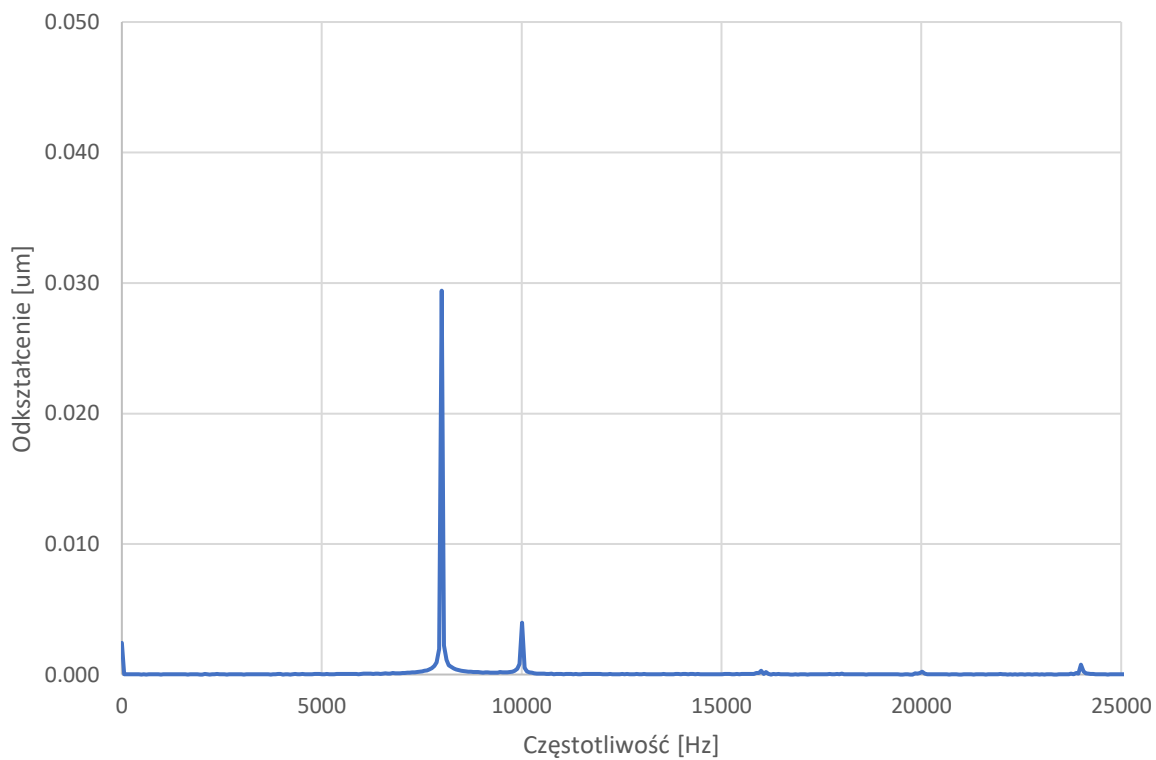
Rys. 6.18. Przebieg amplitudowo-częstotliwościowy układu złożonego z różnych płytek wzbudzanych różnymi częstotliwościami (10 kHz na przedniej płytce i 10 kHz na tylnej płytce)



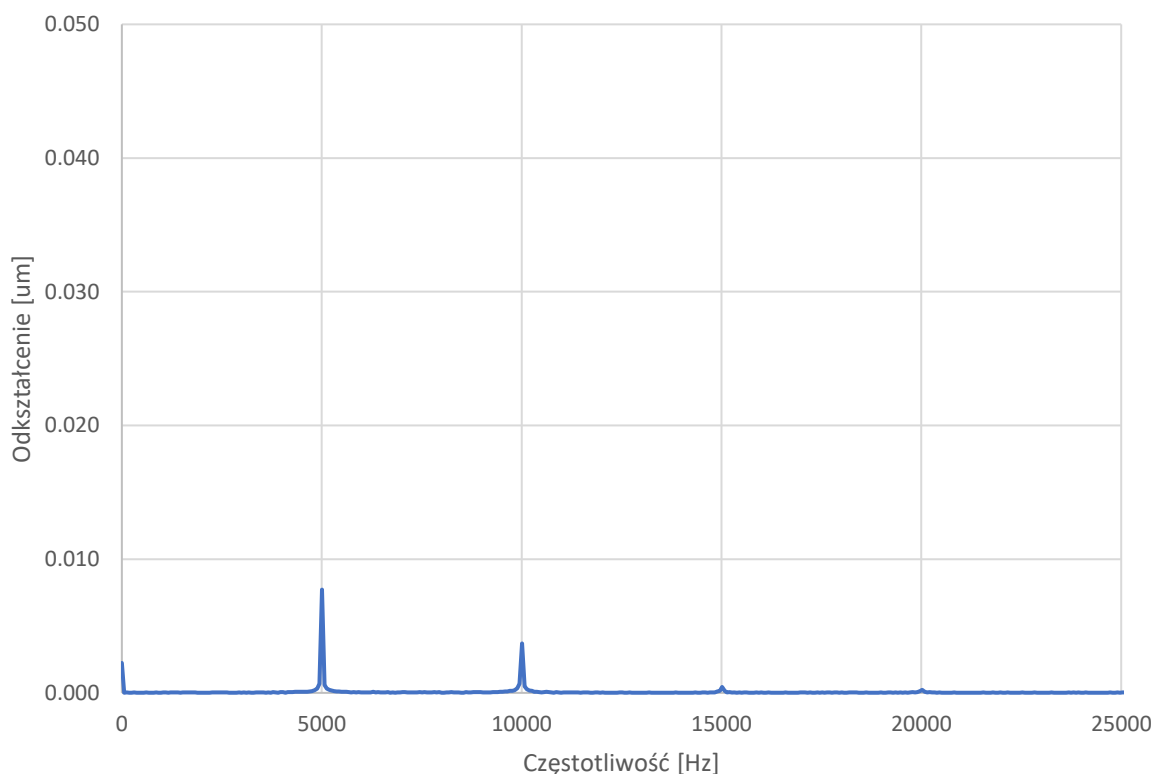
Rys. 6.19. Przebieg amplitudowo-częstotliwościowy układu złożonego z różnych płytek wzbudzanych różnymi częstotliwościami (10 kHz na przedniej płytce i 8 kHz na tylnej płytce)



Rys. 6.20. Przebieg amplitudowo-częstotliwościowy układu złożonego z różnych płytek wzbudzanych różnymi częstotliwościami (10 kHz na przedniej płytce i 5 kHz na tylnej płytce)



Rys. 6.21. Przebieg amplitudowo-częstotliwościowy układu złożonego z różnych płytek wzbudzanych różnymi częstotliwościami (8 kHz na przedniej płytce i 10 kHz na tylnej płytce)



Rys. 6.22. Przebieg amplitudowo-częstotliwościowy układu złożonego z różnych płytek wzbudzanych różnymi częstotliwościami (5 kHz na przedniej płytce i 10 kHz na tylnej płytce)

Największą wartość amplitudy drgań zarejestrowano w przypadku układu złożonego z dwóch płytek piezoelektrycznych o wymiarach 30x30x10 mm. Maksymalne przemieszczenie wyniosło 0,035 μm i mieściło się w zakresie możliwych do zarejestrowania przez wibrometr laserowy odkształceń. Zarejestrowana wartość odkształcenia odbiegała jednak od teoretycznej wartości obliczonej na podstawie kalkulatora piezoelektrycznego [92]. Teoretyczna wartość odkształcenia jednej płytki powinna wynosić w rozpatrywanym przypadku 0,131 μm , a więc cały stos powinien drgać z maksymalną wartością amplitudy wynoszącą 0,262 μm . Przyczyną zaobserwowanej różnicy pomiędzy zarejestrowaną wartością amplitudy drgań oraz teoretyczną wartością obliczoną w kalkulatorze mógł być niewystarczający prąd dostarczany przez wzmacniacze napięciowe, które przystosowane są do zasilania folii piezoelektrycznych. Kolejnym czynnikiem mającym wpływ na ograniczone drgania układu mógł być sposób zamocowania badanego układu piezoelektrycznego. Naklejone na szczęki uchwytu warstwy taśmy elektroizolacyjnej mogły wpłynąć na tłumienie wibracji generowanych przez badane układy. Utworzona spoina była niedoskonała i mogła również w dużym stopniu tłumić przenoszone pomiędzy płytkami wibracje mechaniczne. Z uwagi na konstrukcję płytek piezoelektrycznych (posrebrzane warstwy kontaktowe umieszczono na powierzchniach

roboczych płytki) niemożliwe było jednak wyeliminowanie warstwy izolującej, gdyż uniemożliwiłoby to wzbudzenie układu przy użyciu dwóch sygnałów sterujących.

Analizując otrzymane wyniki, nie zaobserwowano żadnych odchyłań w widmie częstotliwości wibracji generowanych przez badane stosy piezoelektryczne poza występowaniem składowych harmonicznymi częstotliwości sygnałów sterujących. Przykłady występowania częstotliwości harmonicznymi są dobrze widoczne na wykresach odpowiedzi badanych układów, pokazanych na rysunkach 6.15 oraz 6.16.

Podczas dalszej analizy wyników badania zaobserwowano duże straty w drganiach emitowanych przez przetworniki znajdujące się w niższej warstwie stosu, nie mierzonej w bezpośredni sposób przez interferometr laserowy. Na podstawie uzyskanych danych pomiarowych wyznaczono bezwzględną różnicę pomiędzy wartościami amplitudy drgań płytek mierzonych w sposób bezpośredni oraz wartościami amplitudy drgań płytek mierzonych pośrednio. Porównanie przeprowadzono w odniesieniu do trzech zadanych w badaniu częstotliwości 5 kHz, 8 kHz oraz 10 kHz. Wyznaczono także różnicę względną mierzonych wartości amplitudy sygnału, w odniesieniu do drgań mierzonych bezpośrednio. Wyniki przeprowadzonej analizy umieszczono w tabeli 6.1.

Tabela 6.1. Różnice w zarejestrowanych wartościach amplitud generowanych wibracji pomiędzy pierwszą oraz drugą płytką w badanym stosie

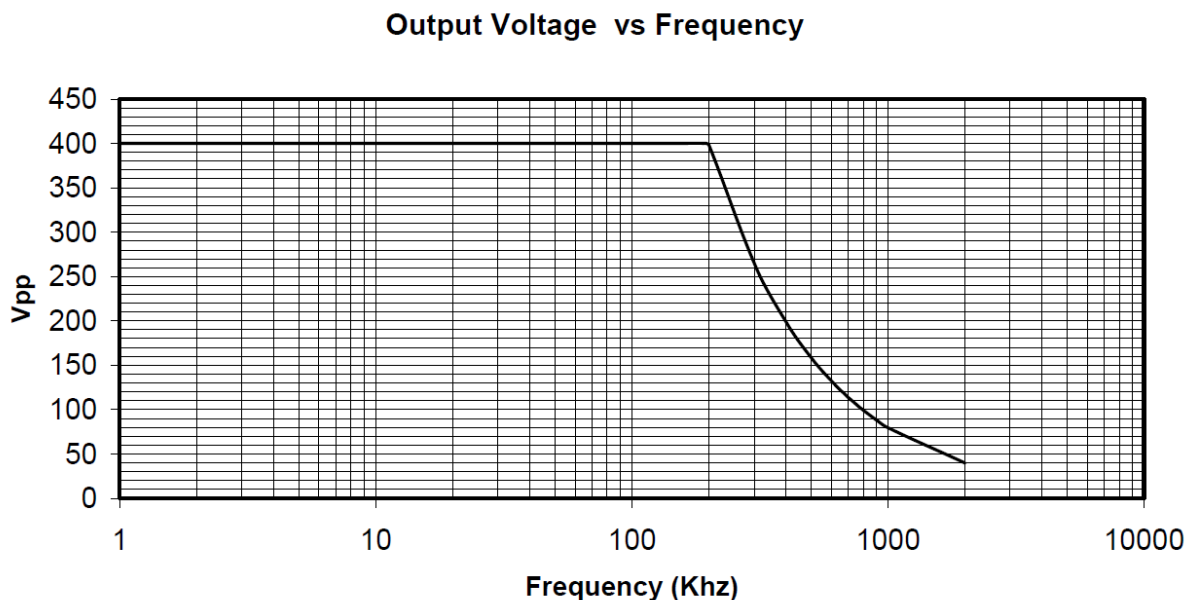
	Dwie płytki 30x30x10 mm			Płytki 18x18x8 + płytki 30x30x10 mm		
	5 kHz	8 kHz	10 kHz	5 kHz	8 kHz	10 kHz
Błąd [μm]	-0,003	0,009	0,019	0,004	0,025	0,021
Błąd [%]	-74,972	62,237	66,943	49,964	86,227	84,401

Na podstawie otrzymanych wyników stwierdzono, że utworzona z kilku warstw szkła laboratoryjnego oraz kleju cyjanoakrylowego spoina w dużym stopniu tłumiała wibracje płytki znajdującej się po wewnętrznej stronie stosu. Niezbędnym do podjęcia krokiem w realizacji następnych badań była redukcja grubości spoiny lub jej całkowite wyeliminowanie poprzez zastosowanie przetworników piezoelektrycznych o innym rozmieszczeniu powierzchni kontaktowych, co umożliwiłoby ich bezpośrednie łączenie.

6.2 Analiza rzeczywistych układów piezoelektrycznych

Głównym celem badania była analiza odpowiedzi amplitudowej rzeczywistych układów piezoelektrycznych w zakresie częstotliwości rezonansowych zastosowanych przetworników piezoelektrycznych. Na podstawie uzyskanych wyników badań przeprowadzono weryfikację modeli matematycznych utworzonych w pracy. Syntezę oraz analizę modeli wykonano przy zastosowaniu autorskiego programu komputerowego, szczegółowo opisanego w rozdziale 5.

Obserwacje przeprowadzone w ramach badania poznawczego umożliwiły zdefiniowanie kroków niezbędnych do podjęcia w celu usprawnienia procedury badawczej. Zastosowane w badaniu poznawczym wzmacniacze napięciowe nie posiadały wystarczającego zakresu częstotliwości do przeprowadzenia badań układów piezoelektrycznych w obrębie ich częstotliwości rezonansowych. W ramach grantu naukowego o numerze 32/014/SDU/10-21-06 pozyskano jednokanałowy wzmacniacz firmy TEGAM o oznaczeniu 2340. Zastosowany wzmacniacz charakteryzuje się 50-krotnym wzmocnieniem napięcia sygnału wejściowego. Prąd wzmocnionego sygnału wynosi 40 mA, a maksymalne napięcie osiąga wartość 400 Vpp. Maksymalna częstotliwość sygnału wzmacnianego to 2 MHz. Charakterystykę napięciową wzmocnionego sygnału w dziedzinie częstotliwości pokazano na rysunku 6.23. Rysunek poglądowy wzmacniacza zamieszczono natomiast na rysunku 6.24. Szczegółową specyfikację techniczną urządzenia zawarto na stronie producenta [98].

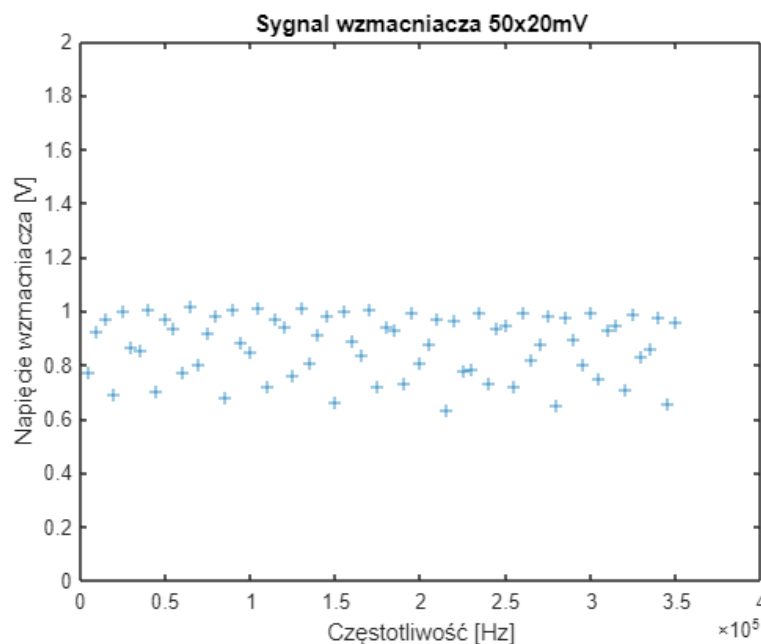


Rys. 6.23. Charakterystyka napięciowa wzmacniacza TEGAM 2340 w dziedzinie częstotliwości [98]



Rys. 6.24. Wzmacniacz TEGAM 2340 zastosowany w badaniu układów piezoelektrycznych

Przeprowadzono analizę sygnału generowanego przez wzmacniacz w dziedzinie częstotliwości. Celem badania było uzyskanie stabilnego napięcia o wartości 1 Vpp w zakresie częstotliwości od 10 kHz do 350 kHz. Do uzyskania sygnału o określonej wartości użyto generatora Tabor Electronics WW5604, na którym ustawiono napięcie 20 mVpp. Sygnał po 50-krotnym wzmocnieniu uzyskiwał przyjętą wartość 1 Vpp. Napięcie mierzono oscyloskopem Rigol DS1064B. Sygnał próbkowano w odstępach 5 kHz. Zarejestrowane oscyloskopem pomiary poddano transformacji FFT i wyznaczono maksymalne wartości amplitudy sygnału. Do obróbki pomiarów ponownie zastosowano uprzednio przygotowany w programie Matlab R2019b algorytm komputerowy. Wyniki badania pokazano na rysunku 6.25.



Rys. 6.25. Analiza wartości napięcia sygnału wzmacnionego przez wzmacniacz TEGAM 2340 w dziedzinie częstotliwości

Przy analizie sygnału wzmocnionego wykryto odchylenia napięcia analogiczne do odchyleń uzyskanych w badaniu sygnału z generatora. Maksymalna zarejestrowana wartość amplitudy sygnału wynosiła 1,0173 V natomiast minimalna zarejestrowana wartość amplitudy wyniosła 0,6318 V. Maksymalny błąd bezwzględny w stosunku do przyjętego sygnału wyniósł 0,3682 V. Maksymalny błąd względem przyjętej wartości sygnału 1 V_{pp} wyniósł 37%. Na podstawie przeprowadzonej analizy stwierdzono, że wzmacniacz napięciowy nie wpływa na wartość błędu pomiarowego uzyskiwanego przy użyciu dotychczasowej aparatury badawczej.

Do badania pozyskano także nowe układy piezoelektryczne o znanych parametrach pracy oraz właściwościach materiałowych. Szczegółowa specyfikacja techniczna była niezbędna do precyzyjnego odwzorowania badanego stosu w postaci modeli matematycznych przy opracowanej metodzie syntezy. Do celów badawczych przeznaczono trzy przetworniki piezoelektryczne o wymiarach 10x10x2 mm oznaczone kodem PA4HEW oraz trzy przetworniki o wymiarach 5x5x2 mm oznaczone kodem PA4FEW. Producentem układów jest firma THORLABS, która zajmuje się specjalistycznym oprzyrządowaniem badawczym oraz przemysłowym, konstruowanym na potrzeby badań oraz automatycznej regulacji układów. Karty katalogowe ze specyfikacją techniczną elementów piezoelektrycznych pokazano na rysunku 6.26 oraz 6.27.

Piezoelectric Chip with Wires, 150 V, 2.1 μm Travel

PA4HEW



Description

The PA4HEW piezoelectric chip consists of a series of stacked piezoelectric ceramic layers, each possessing screen-printed electrodes. The printed layers are isostatically pressed to form the chip. The electrodes are electrically in parallel, and the PA4HEW offers a maximum displacement of $2.1 \mu\text{m} \pm 15\%$. A red wire is located next to the electrode that should receive positive bias; the other electrode should be grounded.

Specifications

PA4HEW ^a	
Drive Voltage Range	0 to 150 V
Displacement (Free Stroke) at 150 V	$2.1 \mu\text{m} \pm 15\%$
Hysteresis	<15% (See Graph on Next Page)
Load (Recommended) ^b	1600 N (360 lbs)
Blocking Force at 150 V	4000 N (900 lbs)
Resonant Frequency	165 kHz (No Load)
Impedance at Resonant Frequency	100 m Ω
Anti-Resonant Frequency	200 kHz
Dissipation Factor	<2.0%
Capacitance	800 nF $\pm 15\%$
Operating Temperature	-25 to 130 °C
Curie Temperature	230 °C
External Electrodes	Screen-Printed Silver
Dimensions	Width 1: 10.0 mm ± 0.1 mm
	Width 2: 10.0 mm ± 0.1 mm
	Length: 2.0 mm $\pm 5 \mu\text{m}$



- a. All specifications are quoted at 25 °C, unless otherwise stated.
 b. Displacement may vary slightly with load. Maximum displacement occurs with the recommended load.

Rys. 6.26. Specyfikacja techniczna przetwornika piezoelektrycznego firmy THORLABS o oznaczeniu PA4HEW i wymiarach 10x10x2 mm [99]

Przetworniki posiadały gotowe elektrody umieszczone na ściankach bocznych, co umożliwiło ich bezpośrednie połączenie przy użyciu kleju cyjanoakrylowego z pominięciem warstw izolujących. Zakres napięcia sterującego mieści się w przedziale wartości 0 – 150 V. Nominalne przemieszczenie generowane przez przetworniki przy maksymalnym napięciu sterującym wynosi odpowiednio 2,1 μm , w przypadku płytki o wymiarach 10x10x2 mm oraz 2,5 μm , w przypadku płytki o wymiarach 5x5x2 mm.

Piezoelectric Chip with Wires, 150 V, 2.5 μm Travel

PA4FEW



Description

The PA4FEW piezoelectric chip consists of stacked piezoelectric ceramic layers (which are mechanically in series) that are sandwiched between interdigitated electrodes (which are electrically in parallel). It offers a maximum displacement of $2.5 \mu\text{m} \pm 15\%$. A red wire is attached to the electrode that should receive positive bias, and a black wire is attached to the electrode that should be grounded.

Specifications

PA4FEW ^a	
Drive Voltage Range	0 - 150 V
Displacement (Free Stroke) at 150 V	$2.5 \mu\text{m} \pm 15\%$
Hysteresis	<15% (See Graph on Next Page)
Load (Recommended)	400 N (90 lbs)
Blocking Force at 150 V	1000 N (225 lbs)
Resonant Frequency ^b	310 kHz (No Load)
Impedance at Resonant Frequency ^b	170 m Ω
Anti-Resonant Frequency ^b	395 kHz
Dissipation Factor	<2.0%
Capacitance	$225 \text{ nF} \pm 15\%$
Operating Temperature	-25 to 130 °C
Curie Temperature	230 °C
External Electrodes	Screen-Printed Silver
Dimensions	Width 1: $5.0 \text{ mm} \pm 0.1 \text{ mm}$
	Width 2: $5.0 \text{ mm} \pm 0.1 \text{ mm}$
	Length: $2.0 \text{ mm} \pm 5 \mu\text{m}$



- a. All specifications are quoted at 25 °C, unless otherwise stated
 b. These specifications are for the unwired chip

Rys. 6.27. Specyfikacja techniczna przetwornika piezoelektrycznego firmy THORLABS o oznaczeniu PA4FEW i wymiarach 5x5x2 mm [100]

Szczegółowe dane techniczne użytych przetworników piezoelektrycznych zamieszczono w [92, 93]. Elementy wykonano z materiału piezoelektrycznego o oznaczeniu THP51 stanowiącego stop tytanu i cyrkonu. Katalog materiałów piezoelektrycznych ofertowanych przez THORLABS z dokładną listą właściwości materiałów [80] pokazano na rysunku 6.28.

Thorlabs' PZT Material Specifications

Property	Symbol & Unit	THP42	THP44	THP46	THP8	THP5A	THP51	THP5H	
Type		"Hard"				"Soft"			
Dielectric Properties (Tolerances $\pm 10\%$)									
Relative Dielectric Constant	$\epsilon'_{33}/\epsilon_0$	1200	1380	1350	1030	2300	3300	4500	
Dielectric Loss Factor	$\tan\delta$ (%)	0.5	0.5	0.8	0.4	2	2.2	2.2	
Electromechanical Properties (Tolerances $\pm 5\%$)									
Coupling Factors	K_p	0.65	0.68	0.59	0.59	0.7	0.68	0.72	
	K_{s1}	0.36	0.33	0.33	0.34	0.39	0.37	0.42	
	K_{s2}	0.7	0.68	0.65	0.6	0.7	0.63	0.78	
	K_t	0.47	0.48	0.47	0.47	0.51	0.5	0.5	
Piezoelectric Charge Constants	d_{31} (10^{-12} C/N)	-130	-145	-140	-150	-220	-320	-300	
	d_{33} (10^{-12} C/N)	280	315	310	320	450	710	680	
	g_{31} (10^{-3} V/N)	-13	-13	-13	-10	-10	-11	-9	
	g_{33} (10^{-3} V/N)	24	26	27	28	23	25	20	
Frequency Constants	N^{f0} (m/s)	2200	2250	2230	2300	2000	2010	2000	
	N^{f2} (m/s)	2000	2050	2050	2050	2040	1950	2030	
	N^{f1} (m/s)	1500	1600	1500	1630	1400	1400	—	
	N^{f3} (m/s)	1350	1500	1800	1500	1350	1500	—	
Physical Properties (Tolerances $\pm 5\%$)									
Mechanical Quality	Q_m	800	1600	1300	1000	90	60	60	
Density	ρ (10^3 kg/m ³)	7.6	7.75	7.7	7.7	7.85	7.7	7.85	
Elastic Compliances	S^{E11} (10^{-12} m ² /N)	13	13	13	16	16	17	17	
	S^{E33} (10^{-12} m ² /N)	17	16	20	17	19	23	21	
Curie Temperature	T_c (°C)	320	305	315	300	260	230	200	
Process Properties									
Sintering Temperature	T_s (°C)	1260	1260	1050	1260	1260	985	1260	

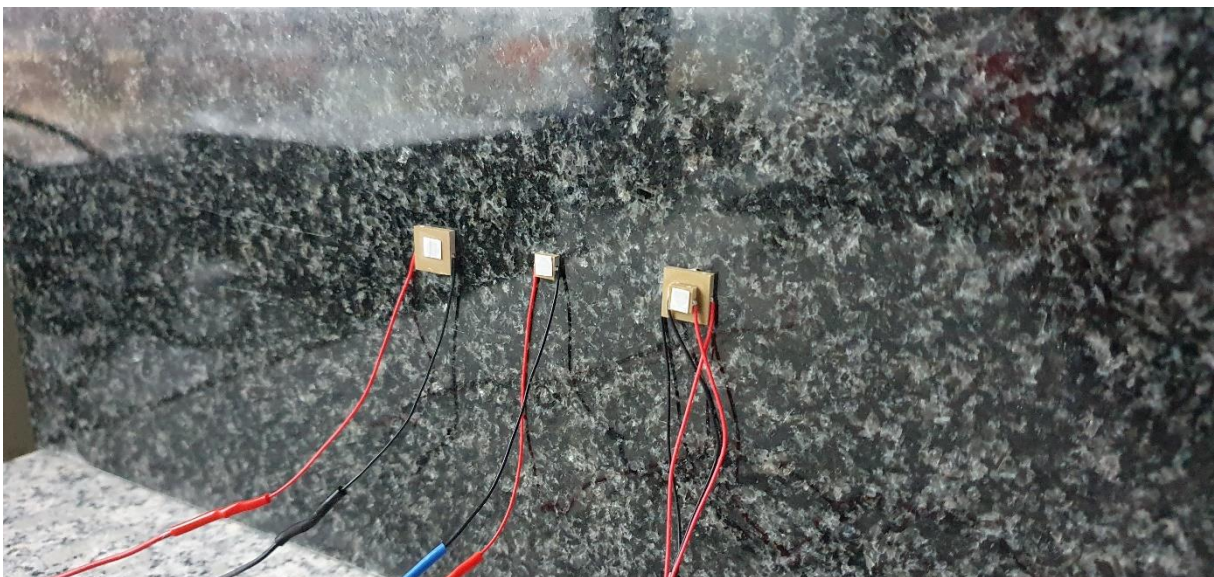
Rys. 6.28. Specyfikacja materiałów piezoelektrycznych, z których wykonane są płytki piezoelektryczne firmy THORLABS [80]

Przetworniki piezoelektryczne wykonano metodą spiekania cienkich warstw kryształu piezoelektrycznego w jeden ceramiczny blok. Główną zaletą tego rozwiązania jest większe przemieszczenie uzyskiwane na przetworniku w stosunku do przyłożonego napięcia. Pozostałe zalety przytoczono we wstępie do pracy doktorskiej. Przyjęto, że przetworniki piezoelektryczne są traktowane jako materiały izotropowe, gdyż zastosowana w pracy metoda syntezy odnosi się wyłącznie do układów złożonych z przetworników monokrystalicznych. Przyjęte założenie wiązało się jednak z dopuszczeniem rozbieżności pomiędzy rzeczywistym zachowaniem układu, a teoretycznie przyjętym charakterem pracy układów monokrystalicznych. Zastosowane w badaniu spieki ceramiczne mogą pracować w sposób zbliżony do

miniaturowych stosów piezoelektrycznych przez co zależności pomiędzy ich stosunkiem powierzchni do grubości oraz częstotliwościami rezonansowymi mogą różnić się od zależności obserwowanych w przypadku układów izotropowych.

W celu odzwierciedlenia usztywnienia stosowanego w modelu matematycznym użyto bloku wykonanego z granitu, który ustawiono na stanowisku badawczym w sposób umożliwiający interakcję z przymocowanymi płytkami piezoelektrycznymi oraz mierzenie przytwierdzonych układów. Badane elementy piezoelektryczne przymocowano bezpośrednio do bloku klejem cyjanoakrylowym, z uwagi na brak konieczności stosowania dodatkowych warstw izolacji, przetworniki piezoelektryczne połączono w stosy klejąc je bezpośrednio do siebie.

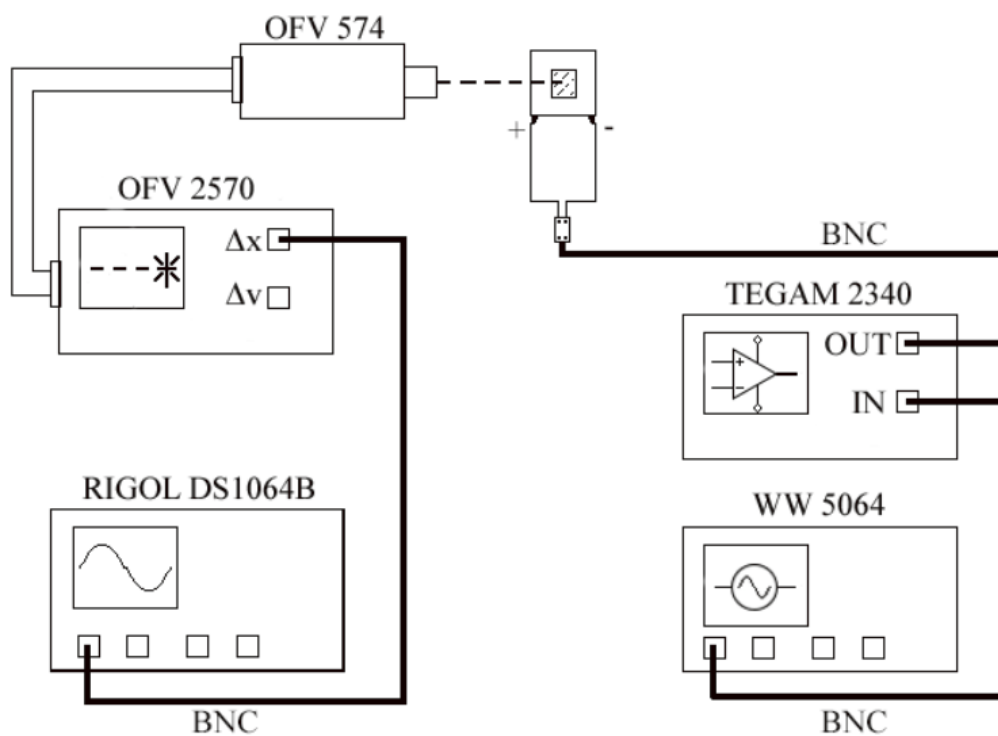
Do badania przygotowano trzy układy piezoelektryczne; dwa układy stanowiły pojedyncze przetworniki piezoelektryczne o wymiarach geometrycznych 5x5x2 mm oraz 10x10x2 mm, a trzeci układ pomiarowy utworzono łącząc ze sobą dwa przetworniki o różnych parametrach geometrycznych. Utworzone stosy piezoelektryczne zasilano łącząc poszczególne płytki równoległe do wzmacniacza. Zdjęcie obrazujące stanowisko pomiarowe umieszczono na rysunku 6.29.



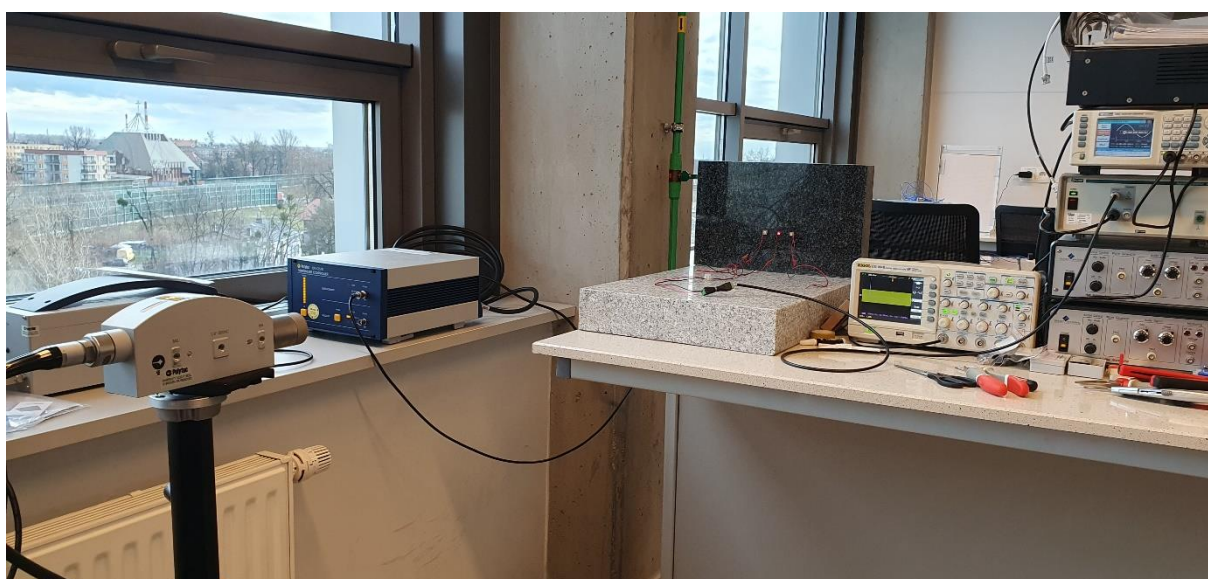
Rys. 6.29. Układy piezoelektryczne przymocowane pionowo do płyty granitowej klejem cyjanoakrylowym. Na powierzchni przymocowano cienką warstwę materiału odbłaskowego

Pomiar drgań układów piezoelektrycznych przeprowadzono interferometrem laserowym Polytec OFV-574. Układy przymocowano do pionowej ściany płyty granitowej, przez co możliwy był ich pomiar interferometrem laserowym przy wymaganej w specyfikacji technicznej odległości skupienia wiązki. Sterowanie układami zrealizowano przy zastosowaniu generatora fal firmy Tabor Electronics o oznaczeniu WW5064. W badaniu zastosowano jeden

sygnał harmoniczny do wzbudzania każdego przetwornika w stosie. Niezbędną wartość napięcia sygnału sterującego uzyskiwano przy użyciu wzmacniacza TEGAM 2340. W ramach pracy przeprowadzono pomiar odkształcenia układu przy napięciu sygnału wartości 1 Vpp. Napięcie sygnału ustawiono na niską wartość w celu umożliwienia pomiaru odkształceń układów przy ograniczonym zakresie pomiarowym wibrometru laserowego. Na podstawie specyfikacji technicznej elementów piezoelektrycznych [98, 99] przyjęto, że zależność amplitudy wibracji przetworników od podanego napięcia jest liniowa. Obliczono amplitudę przemieszczenia mierzonych płytek na podstawie przyjętej zależności oraz maksymalnych wartości odkształcenia użytych przetworników piezoelektrycznych. Przyjęto, że układ złożony z jednej płytki o wymiarach 10x10x2 mm powinien odkształcać się o 14 nm, natomiast układ o wymiarach 5x5x2 mm o 16,7 nm. Wyznaczone na podstawie przyjętych zależności odkształcenie mierzonego stosu złożonego z dwóch przetworników powinno wynosić 30,7 nm. Wszystkie wyznaczone wartości odkształcenia mieściły się w maksymalnym zakresie pomiarowym wibrometru o wartości 75 nm. Schemat ideowy stanowiska pomiarowego z zaznaczonym przepływem sygnału sterującego oraz przepływem sygnału pomiarowego pokazano na rysunku 6.30. Rejestrowano pomiary w formie krótkich przebiegów sygnału harmonicznego próbkowanego przez oscyloskop. Częstotliwość próbkowania ustawiono tak, aby umożliwić zarejestrowanie sygnału o możliwie jak największej rozdzielczości przy zachowaniu maksymalnej liczby 8192 próbek pomiarowych. Próbkę rejestrowano co 0,8 μ s otrzymując rozdzielczość pomiarową o wartości 1,25 MHz oraz długość pomiaru wynoszącą 6,5536 ms. Próbkowano sygnały o maksymalnej częstotliwości 350 kHz, a więc nie przekroczono częstotliwości Nyquista. W badaniu możliwe było ustawienie wyższej rozdzielczości pomiarowej, ale z uwagi na ograniczoną czytelność wyświetlacza oscyloskopu przy większych rozdzielczościach pomiarowych podjęto decyzję o pozostaniu przy częstotliwości próbkowania 1,25 MHz. Widok stanowiska badawczego zamieszczono na rysunku 6.31.



Rys. 6.30. Schemat ideowy układu pomiarowego



Rys. 6.31. Zdjęcie stanowiska badawczego

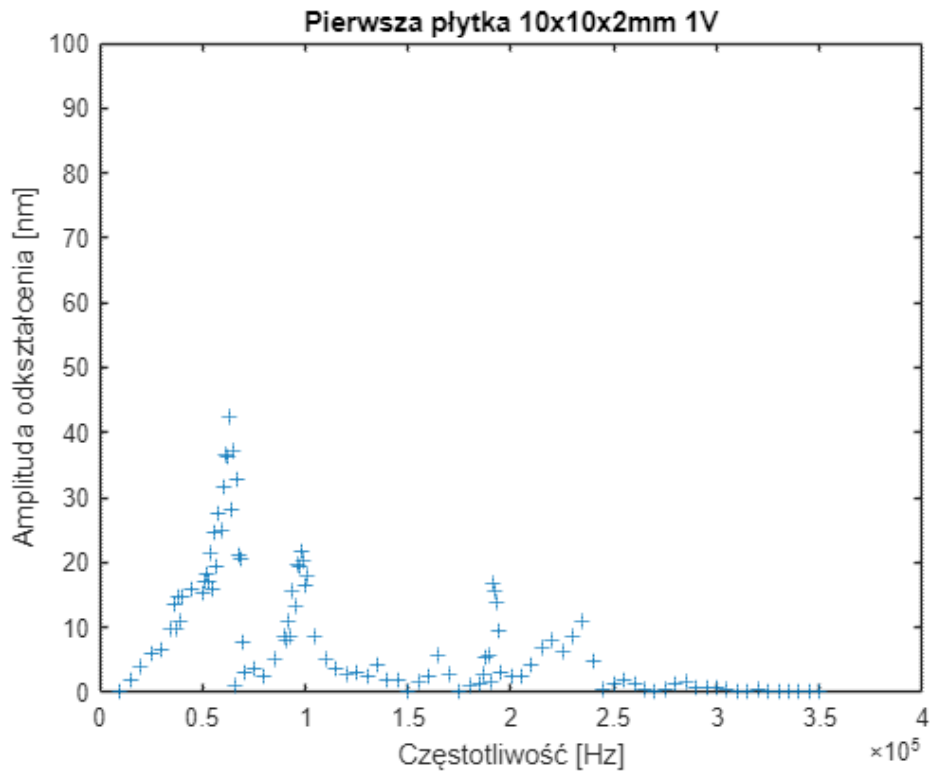
Procedura pomiarowa realizowana w ramach badania składała się z następujących kroków:

- ustawienie emitera wiązki laserowej w osi prostopadłej do płaszczyzny badanego układu piezoelektrycznego i uruchomienie emitera,
- ustawienie odległości emitera od mierzonej powierzchni zgodnie z zaleceniami zamieszczonymi w instrukcji urządzenia,

- wycelowanie wiązki lasera w środek powierzchni odblaskowej,
- ogniskowanie wiązki lasera na wycelowanym punkcie przy pomocy kalibratora soczewki znajdującego się na zakończeniu dyszy emitera,
- korekty ustawienia emitera oraz skupienia wiązki do momentu aż na wyświetlaczu kontrolera rejestrowany sygnał osiągał wartość maksymalną,
- ustawienie mnożnika sygnału próbkowanego przez oscyloskop na „1X”,
- ustawienie częstotliwości próbkowania sygnału na 1,25 MHz,
- ustawienie podziałki mierzonego sygnału na wyświetlaczu oscyloskopu na 1 V,
- uruchomienie dodatkowej funkcji kalkulatora FFT do monitorowania częstotliwości oraz amplitudy rejestrowanego sygnału,
- ustawienie podziałki kalkulatora FFT na 200 mV w osi Y oraz 62,5 kHz w osi X,
- ustawienie rejestratora pomiarów w tryb zapisywania próbek pod postacią plików z rozszerzeniem „.xls”,
- ustawienie liczby punktów próbkowania sygnału na 8192,
- ustawienie na generatorze parametrów oraz kanału, z którego emitowany będzie sygnał sterujący (kanał pierwszy, fala harmoniczna w postaci sinusoidy, wstępna częstotliwość 10 kHz, napięcie 20 mVpp),
- aktywacja emitera sygnału na kanale pierwszym generatora,
- sprawdzenie połączenia przewodów sygnałowych,
- przełączenie wzmacniacza napięciowego w stan aktywny,
- ponowna kontrola jakości sygnału rejestrowanego przez wibrometr laserowy oraz oscyloskop,
- przeprowadzenie testu wstępnego polegającego na wizualnej kontroli odpowiedzi badanego układu na wyświetlaczu oscyloskopu w trakcie regulacji częstotliwości sygnału sterującego na generatorze,
- ponowne ustawienie częstotliwości sygnału na wartość początkową 10 kHz,
- podpięcie nośnika USB do oscyloskopu,
- rozpoczęcie rejestracji pomiarów w odstępach 5 kHz zapisując kolejne pomiary na nośniku USB (w przypadku dynamicznych zmian w odpowiedzi układu pomiary rejestrowano w odstępach 1 kHz),
- kopiowanie zapisanych wyników na dysk sieciowy,
- wyłączenie zasilania aparatury badawczej,

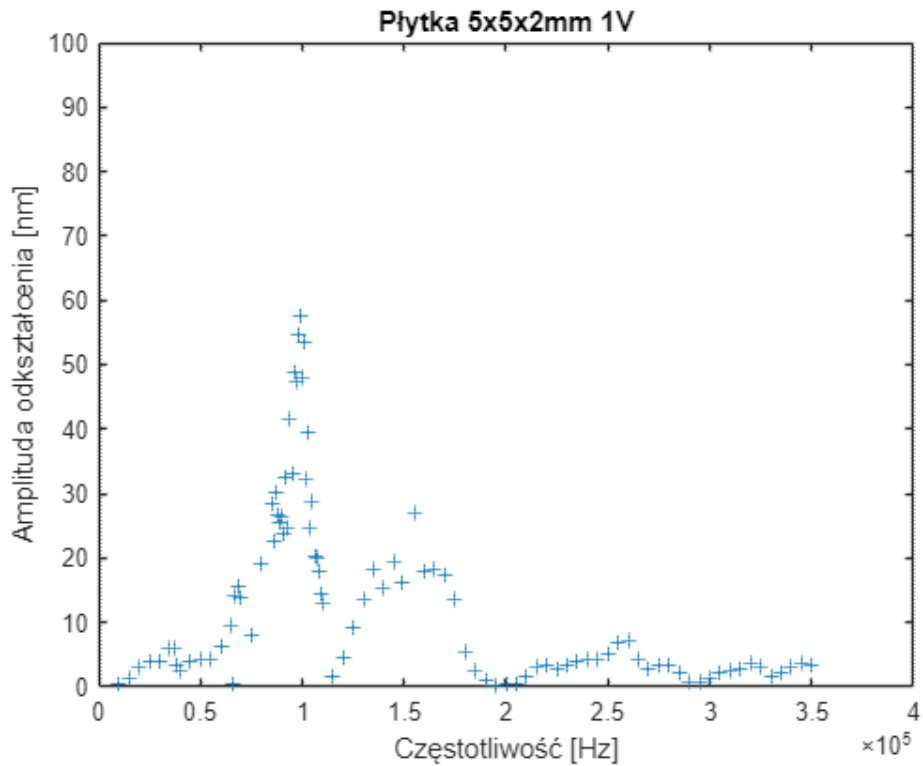
- przetwarzanie danych przy zastosowaniu algorytmu komputerowego przygotowanego w programie Matlab R2019b.

Pierwszy pomiar przeprowadzono na układzie piezoelektrycznym złożonym z jednego spieku ceramicznego w postaci płytki o wymiarach geometrycznych 10x10x2 mm. W trakcie badania zgromadzono łącznie 106 próbek sygnału badanego układu piezoelektrycznego przy różnych częstotliwościach. W celu wyznaczenia przebiegu częstotliwościowego, na podstawie zarejestrowanych próbek utworzono algorytm, który zamieszczono w załączniku 3 do pracy. W opracowanym algorytmie zastosowano szybką transformację Fouriera sygnału cyfrowego. Wyjściowy sygnał przyjmował postać przebiegu odpowiedzi w dziedzinie częstotliwości z lustrzanym odbiciem mierzonego spektrum częstotliwości. Dodatkowo, otrzymane wartości przebiegu były wartościami zespolonymi. W celu oczyszczenia danych, odcinano lustrzany przebieg oraz obliczano wartość bezwzględną z wyznaczonych wartości zespolonych. W przypadku prowadzonego badania, wyjście wibrometru połączono z wejściem oscyloskopu o rezystancji 1 M Ω , co oznaczało, że rejestrowany sygnał napięciowy odpowiadał zależności odkształcenia od napięcia w stosunku 25 nm/V. Na podstawie wyznaczonych transformacji Fouriera próbkowanego sygnału obliczano następnie wartość amplitudy odkształcenia przy mierzonej częstotliwości. Operację przeprowadzono na wszystkich zgromadzonych pomiarach i wyznaczono na tej podstawie przebieg zarejestrowanych wartości odkształcenia badanego układu piezoelektrycznego w badanej dziedzinie częstotliwości. Obliczone wartości zaznaczono na wykresie przemieszczenia od częstotliwości symbolem w kształcie plusa. Utworzony w ten sposób wykres amplitudy odkształcenia pojedynczej płytki piezoelektrycznej o wymiarach 10x10x2 mm wzbudzanej sygnałem harmonicznym o napięciu 1 V_{pp} przedstawiono na rysunku 6.32.

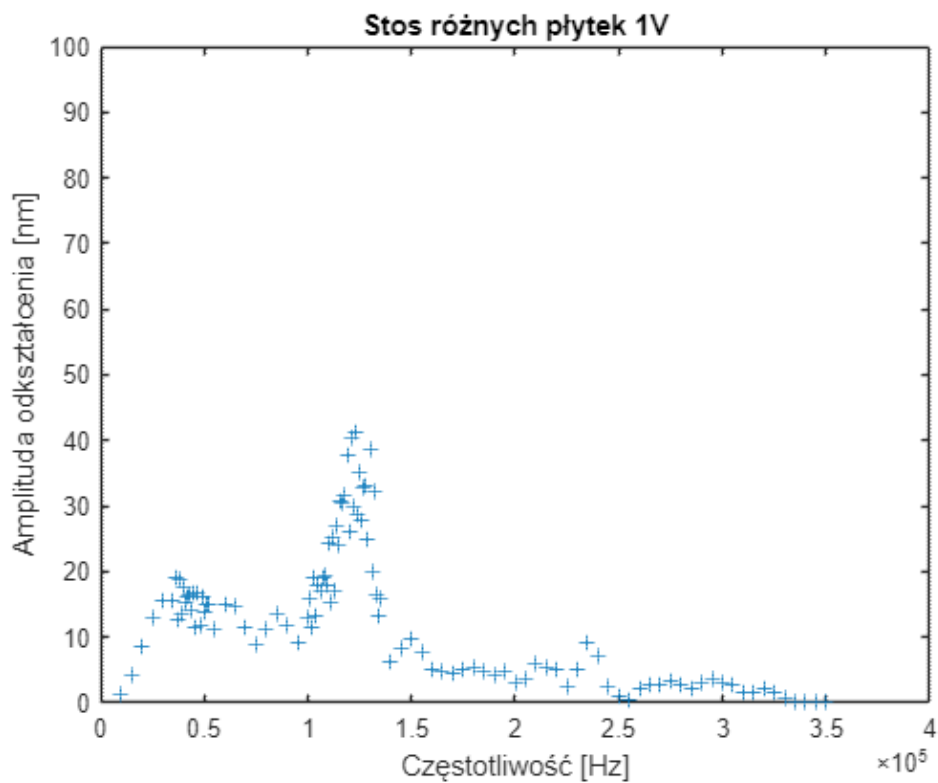


Rys. 6.32. Wyniki pomiarów przeprowadzonych na płytce o wymiarach 10x10x2 mm przy napięciu sygnału sterującego o wartości 1 V p-p

W sposób analogiczny przygotowano również pomiary zgromadzone w badaniu układu piezoelektrycznego złożonego z jednego przetwornika o wymiarach 5x5x2 mm. Zgromadzono w badaniu 99 pomiarów. Identycznie przeprowadzono również badanie stosu piezoelektrycznego złożonego z dwóch płytek o różnych wymiarach geometrycznych, w którym przetwornik o wymiarach 10x10x2 mm umieszczono na spodzie stosu, natomiast przetwornik o wymiarach 5x5x2 mm umieszczono na wierzchniej stronie stosu tj. od strony mierzonej przez interferometr laserowy. W tym badaniu zarejestrowano 111 próbek pomiarowych. Wykresy wartości amplitudy odkształcenia układów w dziedzinie częstotliwości wyznaczone na podstawie przeprowadzonych pomiarów zamieszczono na rysunku 6.33 oraz 6.34.



Rys. 6.33. Wyniki pomiarów przeprowadzonych na płytce o wymiarach 5x5x2 mm przy napięciu sygnału sterującego o wartości 1 V p-p



Rys. 6.34. Wyniki pomiarów przeprowadzonych na stosie piezoelektrycznym złożonym z jednej płytki o wymiarach 10x10x2 mm w podstawie oraz płytki 5x5x2 mm na wierzchu przy napięciu sygnału sterującego o wartości 1 V p-p

Na podstawie analizy odpowiedzi układu piezoelektrycznego złożonego z pojedynczego przetwornika o wymiarach 10x10x2 mm w dziedzinie częstotliwości wyznaczono maksymalną amplitudę przemieszczenia powierzchni płytki o wartości 42,31 nm przy częstotliwości 63,018 kHz. W przypadku analizy układu składającego się z pojedynczego przetwornika o wymiarach 5x5x2 mm maksymalne zarejestrowane odkształcenie wystąpiło przy częstotliwości 99,029 kHz i wyniosło 57,44 nm. Zarejestrowane częstotliwości, przy których wystąpiły maksymalne wartości odkształcenia uznano za częstotliwości rezonansowe. Częstotliwości rezonansowe wyznaczone w badaniu różniły się od częstotliwości wskazanych w specyfikacji przez producenta przetworników piezoelektrycznych. Według specyfikacji technicznej element o wymiarach 10x10x2 mm powinien posiadać własną częstotliwość rezonansową o wartości 165 kHz natomiast element o wymiarach 5x5x2 mm częstotliwość o wartości 310 kHz. Zaobserwowane w badaniu częstotliwości różnią się zatem o 102 kHz w przypadku przetwornika o wymiarach 10x10x2 mm oraz o 201 kHz w przypadku przetwornika o wymiarach 5x5x2 mm.

Przeprowadzono próby mające na celu weryfikację poprawności wykonanego badania oraz identyfikację potencjalnych przyczyn rozbieżności. Zaobserwowane różnice mogły powstać na skutek interferencji wprowadzonych przez powierzchnie odblaskowe użyte do odbijania wiązki lasera interferometru. Złożone są z kilku różnych warstw materiałów, które mogły posiadać własne częstotliwości rezonansowe zaburzające wynik badania. W celu weryfikacji tej tezy zastosowano lakier o właściwościach refleksyjnych i pokryto nim powierzchnię jednego z badanych układów piezoelektrycznych. Dodatkowo, przeprowadzono również badanie przy użyciu cienkiej warstwy folii aluminiowej przyklejonej do badanego układu piezoelektrycznego za pomocą kleju cyjanoakrylowego. W przypadku badania, w którym układ pokryto warstwą lakieru o właściwościach odblaskowych, nie uzyskano odpowiednich właściwości refleksyjnych powierzchni do przeprowadzenia rzetelnego badania. W przypadku badania, w którym zastosowano folię aluminiową udało się uzyskać dostateczne właściwości odblaskowe, ale uzyskane wyniki nie różniły się od wyników uzyskanych przy użyciu naklejek odblaskowych. W związku z rozbieżnościami zaobserwowanymi w badaniu doświadczalnym podjęto również decyzję o skontaktowaniu się z producentem badanych przetworników piezoelektrycznych w celu konsultacji przeprowadzonych pomiarów. Niestety nie otrzymano żadnej informacji zwrotnej od przedstawicieli firmy.

Badanie układów piezoelektrycznych przeprowadzono przy użyciu sygnału sterującego o napięciu 1 V, zgodnego z dopuszczanym przez producenta zakresem napięcia sterującego. Wartości odkształcenia przetwornika o wymiarach 10x10x2 mm poza obszarem rezonansowym

wynosiły pomiędzy 0,28 nm, a 10,92 nm, natomiast w przypadku przetwornika o wymiarach 5x5x2 mm zmierzone wartości odkształcenia mieściły się w przedziale od 0,12 nm do 27,04 nm. Zarejestrowane pomiary w obu przypadkach, w przewodze wskazywały na wartości przemieszczenia mniejsze od wartości wyznaczonych na podstawie przyjętej zależności liniowej pomiędzy odkształceniem oraz przyłożonym napięciem. Różnice mogą wynikać bezpośrednio z błędów w przyjętej w badaniu zależności liniowej.

Kolejnym powodem zaobserwowanych rozbieżności pomiędzy danymi zawartymi w specyfikacji technicznej, a przeprowadzonymi obserwacjami jest duże prawdopodobieństwo występowania tłumienia oraz innych zakłóceń związanych ze sposobem mocowania układów piezoelektrycznych. W badaniu poznawczym zaobserwowano duże tłumienie drgań spowodowane spoiną zastosowaną do połączenia dwóch przetworników piezoelektrycznych. Grubość spoiny w badanym stosie znacznie zredukowano przez wyeliminowanie warstw izolujących, ale nie można kompletnie wykluczyć efektu tłumienia warstwy kleju cyjanoakrylowego łączącej badany układ piezoelektryczny z powierzchnią pełniącą funkcję usztywnienia.

Następną przyczyną zaobserwowanych różnic mógł być sam sposób mocowania układów do płyty. W specyfikacji technicznej przetworników nie ma wzmianek na temat sposobu mocowania przetworników piezoelektrycznych w trakcie wyznaczania ich parametrów technicznych. Usztywnienie badanego układu z jednej strony w istotny sposób zmienia charakterystykę drgań przetwornika piezoelektrycznego zarówno w przypadku rejestrowanych częstotliwości rezonansowych, jak i rejestrowanej amplitudy wibracji.

W przypadku przemieszczeń zarejestrowanych przy częstotliwościach uznanych za częstotliwości rezonansowe, były one kilkukrotnie większe niż obliczone przy napięciu 1V wartości odkształcenia przetworników, co potwierdza, że zarejestrowane częstotliwości były częstotliwościami rezonansowymi badanych układów. Stosunek pomiędzy wartościami odkształcenia zamieszczonymi w specyfikacji technicznej obu przetworników piezoelektrycznych wynosił 84% (stosunek odkształceń generowanych przez płytkę o wymiarach 10x10x2 mm względem płytki o wymiarach 5x5x2 mm). Stosunek odkształceń zarejestrowanych w badaniu wyniósł 73%.

Biorąc pod uwagę przytoczone wcześniej możliwe przyczyny zaburzeń w rejestrowanych przemieszczeniach oraz 37% błąd zaobserwowany przy rejestracji sygnału z generatora, wyniki uznano za prawdopodobne.

W badaniu układu złożonego z dwóch połączonych ze sobą przetworników piezoelektrycznych zaobserwowano dwa obszary o zwiększonej wartości amplitudy odkształcenia przy częstotliwościach 36 kHz oraz 122,986 kHz. Zmierzone wartości przemieszczenia badanego układu w przypadku wskazanych częstotliwości wynosiły 18,97 nm oraz 41,38 nm. Wyniki pomiarów wykazały rozbieżność w zarejestrowanych częstotliwościach uznanych w badaniu za częstotliwości rezonansowe.

Zmniejszenie częstotliwości rezonansowych elementów stanowiących część większego układu jest zjawiskiem normalnym, spowodowanym zmianą w dynamice układu złożonego z kilku elementów. Zwiększenie częstotliwości rezonansowej przetwornika o wymiarach 5x5x2 mm mogło wynikać z rozbieżności pomiędzy charakterystyką pracy użytych w badaniu elementów piezoelektrycznych. Do utworzenia stosu piezoelektrycznego użyto innego egzemplarza przetwornika o wymiarach 5x5x2 mm niż tego, który był badany osobno. Proces klejenia przetworników do płyty granitowej, jak i łączenia ich ze sobą prowadził do nieodwracalnego zanieczyszczenia powierzchni pozostałościami po kleju, co znacznie zmniejszało trwałość spoiny przy ponownej próbie klejenia. Kolejnym problemem była warstwa odblaskowa, którą należało przykleić do czystej powierzchni badanego przetwornika. Niemożliwe było zatem przeprowadzenie powtarzalnego pomiaru przy zastosowaniu tych samych przetworników piezoelektrycznych w przypadku konieczności ich ponownego klejenia. Naklejane warstwy odblaskowe okazały się być najlepszym dostępnym środkiem pozwalającym na rejestrację wibracji poprzez wibrometr laserowy, co ograniczało możliwości wyeliminowania wpływu ich struktury na rejestrowane pomiary.

Zarejestrowane wartości odkształcenia stosu były również mniejsze od zakładanych przemieszczeń. Przepuszczalna wartość odkształcenia stosu na podstawie wyliczeń wynikających z przyjętej zależności liniowej pomiędzy przyłożonym napięciem oraz odkształceniem poszczególnych przetworników powinna wynosić około 31 nm. Tymczasem zarejestrowana wartość przemieszczenia powierzchni badanego stosu mieściła się w przedziale od 0,34 nm do 15 nm. Ponownie, jak w przypadku pomiarów osobnych elementów piezoelektrycznych przypuszczono, że na wynik pomiaru wpływ mogą mieć warstwy kleju cyjanoakrylowego. Kolejnym czynnikiem mającym wpływ na mniejsze odkształcenia płytek było zasilanie dwóch przetworników piezoelektrycznych z tego samego źródła zasilania. Układ złożony z dwóch przetworników piezoelektrycznych posiada większą pojemność elektryczną i rezystancję, co ma wpływ na częstotliwości rezonansowe oraz maksymalne odkształcenia w przypadku wzbudzania układów prądem przemiennym o wysokiej częstotliwości.

Tak, jak w przypadku badań poszczególnych przetworników, również w tym przypadku wpływ na zarejestrowane częstotliwości, przy których wystąpiły największe odkształcenia, mógł mieć sposób utwierdzenia badanych płytek piezoelektrycznych. Układy piezoelektryczne, poza odkształceniem w głównej osi roboczej, odkształcają się również w mniejszym stopniu, w pozostałych osiach. Utwierdzenie jednej lub obu powierzchni roboczych może zatem zaburzyć regularność odkształceń w części przekroju pracującego przetwornika, zmieniając diametralnie jego parametry pracy.

Badania doświadczalne przetworników piezoelektrycznych wykazały wiele niezgodności ze specyfikacją techniczną dostarczoną przez producenta. Wobec braku odpowiedzi producenta na prośby o konsultację otrzymanych wyników badań oraz po podjęciu licznych prób wyeliminowania potencjalnych przyczyn zaobserwowanych różnic, przyjęto, że wyniki uzyskane w ramach badania będą podstawą do dalszych rozważań na etapie weryfikacji utworzonych modeli matematycznych. Decyzję podjęto na podstawie rozbieżności pomiędzy warunkami, w których producent wyznaczył charakterystyki użytych przetworników piezoelektrycznych oraz warunkami w jakich pracowały one w trakcie badania. Nieznany jest sposób utwierdzenia płytek, jaki producent zastosował przy wyznaczaniu parametrów technicznych przetworników piezoelektrycznych. Użyte w badaniu doświadczalnym utwierdzenie sztywne, zbliżone do modelu układu teoretycznego w sposób istotny wpływa na charakterystykę pracy układów piezoelektrycznych. W kartach katalogowych elementów można również odnaleźć odnośniki, w których zamieszczono informację, że ich właściwości wyznaczono bez uwzględnienia połączeń elektrycznych, które również posiadają pewną rezystancję oraz pojemność elektryczną.

6.3 Porównanie wyników syntezy z badaniami empirycznymi

W celu walidacji dokładności odwzorowania układów rzeczywistych przez modele matematyczne utworzone przy zastosowaniu autorskiej metody syntezy, porównano wyniki otrzymane na podstawie badań doświadczalnych z wynikami analizy modeli przygotowanych w aplikacji komputerowej, której działanie opisano w rozdziale piątym. Do celów porównawczych przygotowano modele matematyczne o identycznej liczbie stopni swobody, co rzeczywiste układy poddane badaniom doświadczalnym. W przypadku metody syntezy, w której przyjęto takie same parametry geometryczne modelowanego układu, weryfikowano stopień zgodności otrzymanych w procesie właściwości materiałowych układu. W odniesieniu do metody, w której przyjęto jednakowe właściwości materiałowe,

co w układach rzeczywistych, weryfikacji podlegały wyznaczone metodą syntezy parametry geometryczne.

W pierwszej kolejności analizie poddano modele matematyczne rzeczywistego układu piezoelektrycznego złożonego z pojedynczego przetwornika piezoelektrycznego o wymiarach 10x10x2 mm, oznaczonego kodem PA4HEW. Przy zastosowaniu autorskiej aplikacji komputerowej utworzono model matematyczny o zbliżonych parametrach technicznych do rzeczywistego układu. Przyjęto w modelu częstotliwość rezonansową o wartości 63 kHz na wzór częstotliwości zarejestrowanej w badaniu doświadczalnym. Weryfikację rozpoczęto od metody syntezy, w której przyjęto identyczne właściwości materiałowe, a informacją wyjściową były parametry geometryczne układu. W procesie syntezy dobrano zatem właściwości materiałowe z przygotowanego w aplikacji katalogu materiałów utworzonego na podstawie katalogu firmy THORLABS (rysunek 6.28). Dobrano materiał o oznaczeniu THP51, analogicznie do materiału użytego w rzeczywistym układzie piezoelektrycznym. Uzyskane na podstawie syntezy parametry mechaniczne układu dyskretnego przedstawiono w tabeli 6.2.

Tabela 6.2. Parametry mechaniczne modelu matematycznego układu jednego stopnia swobody z rezonansem mechanicznym przy 63 kHz wyznaczone pierwszą metodą syntezy

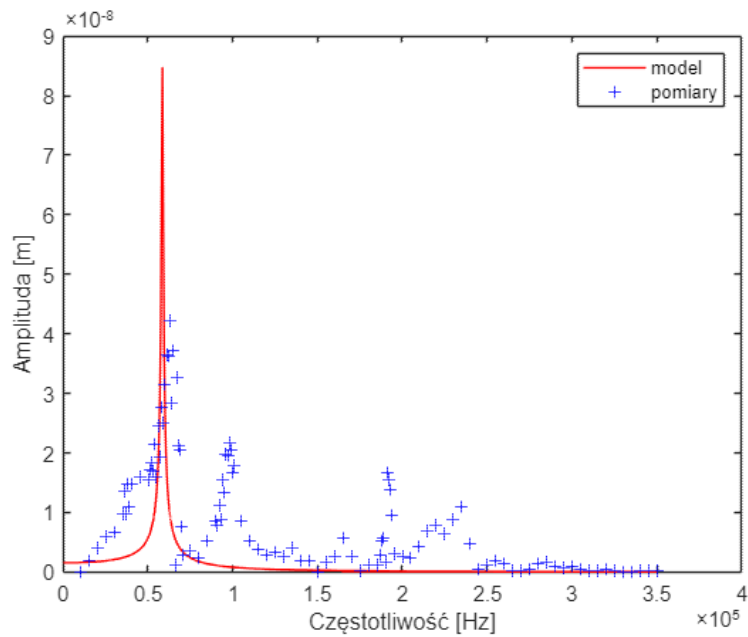
Masa [g]	Sztywność [N/m]	Wartość tłumienia [Ns/m]
14,000	$2,194 \cdot 10^9$	92,363

Następnie, na podstawie wyznaczonych parametrów mechanicznych obliczono parametry geometryczne syntezywanego układu. W obliczeniach przyjęto grubość elementu roboczego o wartości 2 mm, równej grubości rzeczywistego przetwornika piezoelektrycznego. Przyjęto również, że modelowany układ posiada przekrój powierzchni w kształcie kwadratu. Na podstawie zależności (4.130) oraz wzoru na pole powierzchni kwadratu wyznaczono długość boku modelowanego przetwornika piezoelektrycznego o wartości 10,045 mm. Zbiór parametrów układu wyznaczonych metodą syntezy oraz przyjętych na podstawie wstępnych założeń pokazano na rysunku 6.35.

	Stage 1
Thickness [mm]	2
Width [mm]	10.0453101803663
--	0
Eq Mass [g]	14
Eq stiffness [N/m]	2193657752.60372
Eq Damping [Ns/m]	92.3628240155399
Coupling k33	0.68
Avg coupling keff	0.5
[Hz/m]	0
d33 [C/N]	7.1e-10
g33 [Vm/N]	0.025
Mat stiffness cE33 [N/m^2]	43478260869.5652
Mechanical quality	60
eT33 [F/m]	2.92182e-08
Capacitance [F]	0
Density [kg/m3]	7700
Resonance [Hz]	63000
Anti-resonance [Hz]	85923.294280422

Rys. 6.35. Parametry syntezywanego układu o jednym stopniu swobody i wymiarach bliskich 10x10x2 mm, na podstawie przyjętych warunków początkowych w postaci właściwości materiałowych rzeczywistego przetwornika

Układ poddano analizie w celu wyznaczenia amplitudy odpowiedzi w dziedzinie częstotliwości. Przyjęto zakres częstotliwości o wartości 0 – 350 kHz analogicznie do zakresu pomiarów przeprowadzonych w badaniu doświadczalnym. Wzbudzenie zewnętrzne w postaci siły ustawiono w aplikacji na 0 N, gdyż żadne zewnętrzne siły nie działały na badany rzeczywisty układ. Przyłożono natomiast wzbudzenie napięciowe o wartości 1 V oraz cosinusowej postaci fali harmonicznnej. Obliczono wzory na podstawie metody macierzowej i wyznaczono wykresy odpowiedzi układu. Następnie, na wykres naniesiono dane otrzymane w badaniu doświadczalnym układu rzeczywistego. Przygotowany w ten sposób wykres z naniesionym przebiegiem odpowiedzi układu zamodelowanego przy zastosowaniu autorskiej metody syntezy oraz wartościami uzyskanymi w badaniu doświadczalnym rzeczywistego układu piezoelektrycznego pokazano na rysunku 6.36.



Rys. 6.36. Wykres odpowiedzi układu zamodelowanego autorską metodą syntezy na podstawie przyjętych rzeczywistych właściwości materiałowych oraz punkty pomiarowe wyznaczone w badaniu doświadczalnym rzeczywistego układu piezoelektrycznego złożonego z przetwornika o wymiarach 10x10x2 mm

Odpowiedź amplitudowa zamodelowanego układu piezoelektrycznego charakteryzowała się maksimum o wartości przemieszczenia 85 nm przy częstotliwości 58,5 kHz. Maksymalna zarejestrowana wartość amplitudy odkształcenia rzeczywistego układu piezoelektrycznego o wartości 42 nm została zarejestrowana przy częstotliwości 63 kHz. Różnica względna pomiędzy częstotliwością rezonansową modelu, a częstotliwością rezonansową rzeczywistego układu wyniosła zatem 8% natomiast różnica pomiędzy amplitudami wyniosła dwukrotność zarejestrowanego pomiaru układu rzeczywistego.

Następnie poddano weryfikacji metodę syntezy przy ustalonych parametrach geometrycznych modelowanego układu. Obliczone metodą Cauera parametry układu mechanicznego przedstawiono w tabeli 6.3.

Tabela 6.3. Parametry mechaniczne modelu matematycznego układu jednego stopnia swobody z rezonansem mechanicznym przy 63 kHz wyznaczone drugą metodą syntezy

Masa [g]	Sztywność [N/m]	Wartość tłumienia [Ns/m]
6,000	$9.401 \cdot 10^8$	4,750

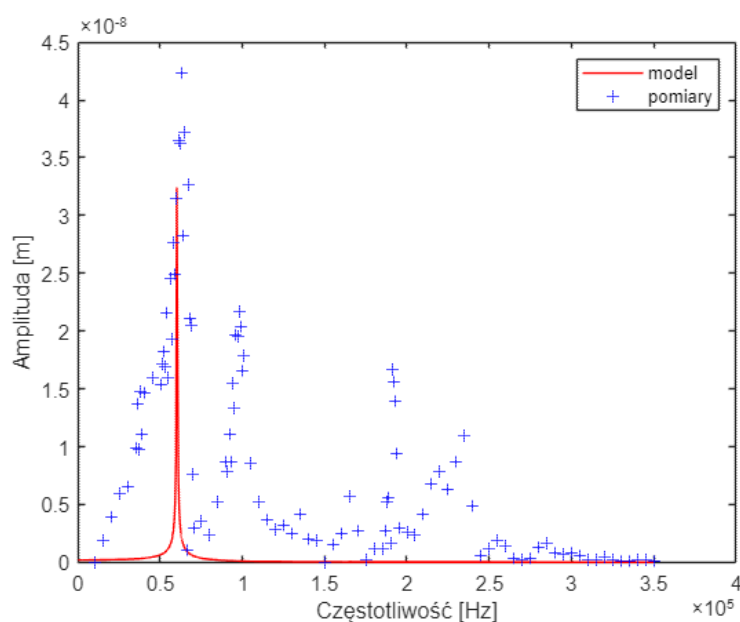
Przyjęto parametry geometryczne syntezywanego układu o wartościach identycznych jak w przypadku układu rzeczywistego, a więc element o przekroju w kształcie kwadratu, o boku długości 10 mm oraz o grubości 2 mm. Na podstawie wprowadzonych w procesie syntezy

danych wejściowych obliczono wartości określające właściwości materiałowe syntezowanego układu piezoelektrycznego. W tabeli 6.4 przedstawiono wartości otrzymane metodą syntezy oraz wartości materiału rzeczywistego przetwornika piezoelektrycznego.

Tabela 6.4. Właściwości materiałowe układu utworzonego w procesie syntezy oraz rzeczywistego układu piezoelektrycznego poddanego badaniu

	Syntezowany układ	Rzeczywisty układ
k_{33}	0,683	0,680
k_{eff}	0,646	0,500
d_{33} [C/m ²]	$9,812 \cdot 10^{-10}$	$7,100 \cdot 10^{-10}$
c_{33}^E [N/m ²]	$1,880 \cdot 10^{10}$	$4,348 \cdot 10^{10}$
ε_{33}^T [F/m]	$3,388 \cdot 10^{-8}$	$2,921 \cdot 10^{-8}$

Na podstawie wyznaczonych właściwości materiałowych modelu piezoelektrycznego przeprowadzono proces analizy odpowiedzi układu. Parametry analizy przyjęto w sposób analogiczny do poprzedniego badania. Wyniki analizy ponownie naniesiono na wykres, który pokazano na rysunku 6.37.



Rys. 6.37. Wykres odpowiedzi układu zamodelowanego autorską metodą syntezy na podstawie przyjętych rzeczywistych parametrów geometrycznych oraz punkty pomiarowe wyznaczone w badaniu doświadczalnym rzeczywistego układu piezoelektrycznego złożonego z przetwornika o wymiarach 10x10x2 mm

Odpowiedź amplitudowa zamodelowanego układu piezoelektrycznego charakteryzowała się maksimum przemieszczenia o wartości 32 nm przy częstotliwości 60 kHz. Różnica względna pomiędzy częstotliwością rezonansową modelu, a częstotliwością rezonansową rzeczywistego układu wyniosła zatem 5% natomiast różnica pomiędzy amplitudami wyniosła 24%.

W kolejnym badaniu analizie poddano modele matematyczne rzeczywistego układu piezoelektrycznego złożonego z pojedynczego przetwornika piezoelektrycznego o wymiarach 5x5x2 mm oznaczonego kodem PA4FEW. Utworzono kolejny model matematyczny o zbliżonych parametrach technicznych do badanego rzeczywistego układu. W modelu przyjęto tym razem częstotliwość rezonansową o wartości 99 kHz na wzór częstotliwości zarejestrowanej w badaniu doświadczalnym przetwornika o wymiarach 5x5x2 mm. Weryfikację po raz kolejny rozpoczęto od metody syntezy, w której przyjęto identyczne właściwości materiałowe, a informacją wyjściową były parametry geometryczne układu. Analogicznie do poprzedniego badania, z katalogu materiałów wybrano materiał THP51, z którego wykonane były rzeczywiste przetworniki piezoelektryczne. Uzyskane na podstawie syntezy parametry mechaniczne układu dyskretnego przedstawiono w tabeli 6.5.

Tabela 6.5. Parametry mechaniczne modelu matematycznego układu jednego stopnia swobody z rezonansem mechanicznym przy 99 kHz wyznaczone pierwszą metodą syntezy

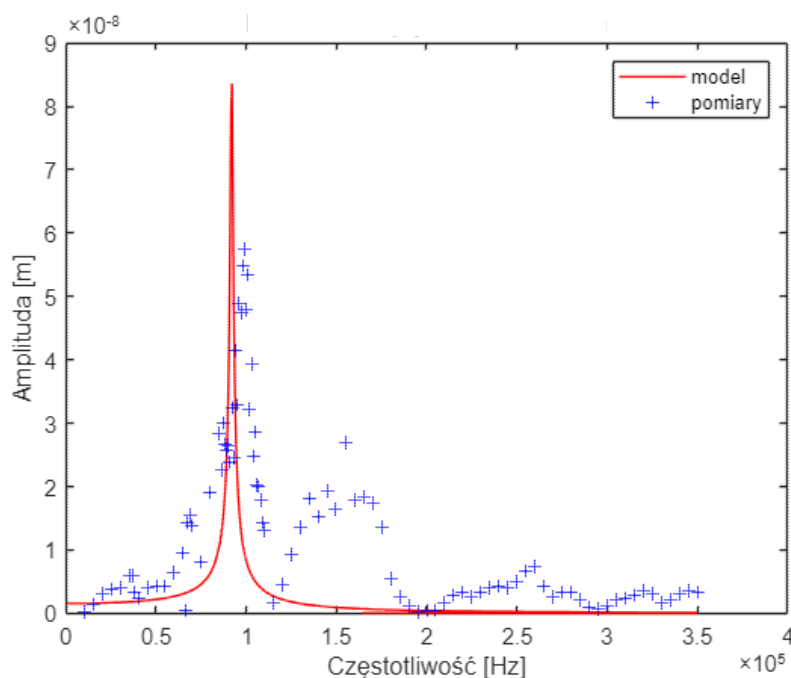
Masa [g]	Sztywność [N/m]	Wartość tłumienia [Ns/m]
1,410	$5,456 \cdot 10^8$	14,618

Na podstawie wyznaczonych parametrów mechanicznych obliczono parametry geometryczne syntezywanego układu. W obliczeniach przyjęto ponownie grubość elementu roboczego o wartości 2 mm, równej grubości rzeczywistego przetwornika piezoelektrycznego. Wyznaczona w przypadku drugiego modelowanego przetwornika długość boku wyniosła 5,0096 mm. Zbiór parametrów układu wyznaczonych metodą syntezy oraz przyjętych na podstawie wstępnych założeń pokazano na rysunku 6.38.

	Stage 1
Thickness [mm]	2
Width [mm]	5.00960559277757
--	0
Eq Mass [g]	1.41
Eq stiffness [N/m]	545568439.025833
Eq Damping [Ns/m]	14.6178306171533
Coupling k33	0.68
Avg coupling keff	0.5
[Hz/m]	0
d33 [C/N]	7.1e-10
g33 [Vm/N]	0.025
Mat stiffness cE33 [N/m^2]	43478260869.5652
Mechanical quality	60
eT33 [F/m]	2.92182e-08
Capacitance [F]	0
Density [kg/m3]	7700
Resonance [Hz]	99000
Anti-resonance [Hz]	135022.31958352

Rys. 6.38. Parametry syntezowanego układu o jednym stopniu swobody i wymiarach bliskich 5x5x2 mm, na podstawie przyjętych warunków początkowych w postaci właściwości materiałowych rzeczywistego przetwornika

Zamodelowany układ poddano analizie, na podstawie której wyznaczono wykres odpowiedzi amplitudowej na wymuszenie harmoniczne o napięciu 1 V. Otrzymane wyniki razem z wynikami uzyskanymi w badaniu doświadczalnym pokazano na rysunku 6.39.



Rys. 6.39. Wykres odpowiedzi układu zamodelowanego autorską metodą syntezy na podstawie przyjętych rzeczywistych właściwości materiałowych oraz punkty pomiarowe wyznaczone w badaniu doświadczalnym rzeczywistego układu piezoelektrycznego złożonego z przetwornika o wymiarach 5x5x2 mm

Odpowiedź amplitudowa zamodelowanego układu piezoelektrycznego o wymiarach zbliżonych do rzeczywistego przetwornika piezoelektrycznego charakteryzowała się maksymalnym przemieszczeniem o wartości 84 nm przy częstotliwości 92 kHz. Maksymalna wartość amplitudy zarejestrowana w badaniu rzeczywistego układu wynosiła 57 nm przy częstotliwości 99 kHz. Różnica względna pomiędzy częstotliwością rezonansową modelu, a częstotliwością rezonansową rzeczywistego układu wyniosła zatem 7% natomiast różnica pomiędzy amplitudami wyniosła 32%.

Następnie przeprowadzono weryfikację metody syntezy przy przyjętych parametrach geometrycznych, analogicznie do przypadku układu o wymiarach 10x10x2 mm. Uzyskane na podstawie syntezy parametry mechaniczne układu dyskretnego przedstawiono w tabeli 6.6.

Tabela 6.6. Parametry mechaniczne modelu matematycznego układu jednego stopnia swobody z rezonansem mechanicznym przy 99 kHz wyznaczone drugą metodą syntezy

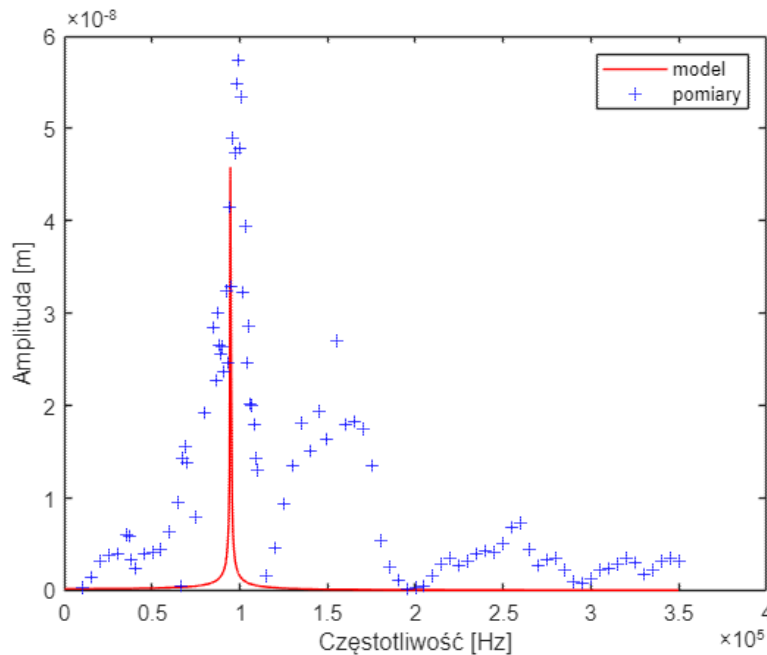
Masa [g]	Szywność [N/m]	Wartość tłumienia [Ns/m]
2,700	$1,045 \cdot 10^9$	3,359

W następnym kroku syntezy przyjęto parametry geometryczne syntezerowanego układu o wartościach identycznych jak w przypadku układu rzeczywistego, a więc element o przekroju w kształcie kwadratu, o boku długości 5 mm oraz o grubości 2 mm. Na podstawie przyjętych parametrów geometrycznych wyznaczono właściwości materiałowe syntezerowanego układu, które przedstawiono w tabeli 6.7.

Tabela 6.7. Właściwości materiałowe układu utworzonego w procesie syntezy oraz rzeczywistego układu piezoelektrycznego poddanego badaniu

	Syntezerowany układ	Rzeczywisty układ
k_{33}	0,679	0,680
k_{eff}	0,642	0,500
d_{33} [C/m ²]	$8,709 \cdot 10^{-10}$	$7,100 \cdot 10^{-10}$
c_{33}^E [N/m ²]	$8,358 \cdot 10^{10}$	$4,348 \cdot 10^{10}$
ϵ_{33}^T [F/m]	$1,372 \cdot 10^{-7}$	$2,921 \cdot 10^{-8}$

Na podstawie wyznaczonych właściwości materiałowych modelu piezoelektrycznego oraz przyjętych parametrów geometrycznych przeprowadzono ponownie proces analizy syntezy układu. Na rysunku 6.40 przedstawiono wykres, na którym zaznaczono przebieg odpowiedzi syntezy układu razem z wynikami pomiarów otrzymanymi w badaniu doświadczalnym układu rzeczywistego.



Rys. 6.40. Wykres odpowiedzi układu zamodelowanego autorską metodą syntezy na podstawie przyjętych rzeczywistych parametrów geometrycznych oraz punkty pomiarowe wyznaczone w badaniu doświadczalnym rzeczywistego układu piezoelektrycznego złożonego z przetwornika o wymiarach 5x5x2 mm

Odpowiedź amplitudowa układu piezoelektrycznego zamodelowanego drugą metodą syntezy charakteryzowała się maksimum przemieszczenia o wartości 46 nm przy częstotliwości 94,5 kHz. Różnica względna pomiędzy częstotliwością rezonansową modelu, a częstotliwością rezonansową rzeczywistego układu wyniosła zatem 5% natomiast różnica pomiędzy amplitudami wyniosła 19%.

Po porównaniu odpowiedzi układów złożonych z pojedynczych przetworników piezoelektrycznych z utworzonymi modelami matematycznymi przystąpiono do weryfikacji układu o dwóch stopniach swobody, w przypadku syntezy których zakładano dwie różne częstotliwości rezonansowe generowane przez dwa różne przetworniki piezoelektryczne o wymiarach geometrycznych 5x5x2 mm oraz 10x10x2 mm.

Postępując podobnie jak w przypadku weryfikacji układów złożonych z pojedynczych przetworników piezoelektrycznych analizę rozpoczęto od układu zamodelowanego przy użyciu metody syntezy, w której przyjęto początkowo właściwości materiałowe przetworników piezoelektrycznych identyczne do rzeczywistego układu. Po raz kolejny przeprowadzono syntezę układu mechanicznego metodą Cauera, a parametry układu mechanicznego przedstawiono w tabeli 6.8.

Tabela 6.8. Parametry mechaniczne modelu matematycznego układu o dwóch stopniach swobody z rezonansem mechanicznym przy 63 kHz oraz 99 kHz wyznaczone pierwszą metodą syntezy

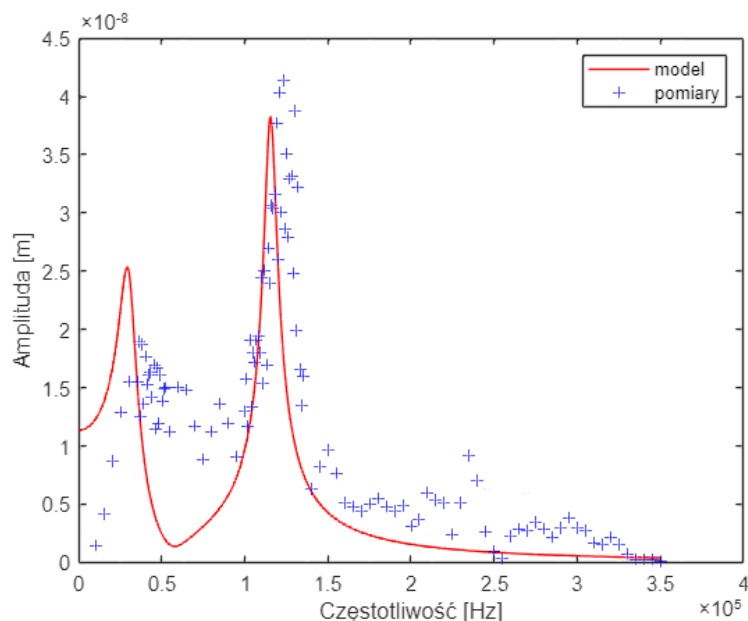
	Masa [g]	Sztywność [N/m]	Wartość tłumienia [Ns/m]
1 stopień swobody	2,800	$1,549 \cdot 10^9$	114,145
2 stopień swobody	38,7889	$2,143 \cdot 10^9$	46,204

Na podstawie parametrów układu mechanicznego oraz przyjętych właściwości materiału THP51 dobrane z katalogu materiałów piezoelektrycznych, a także po przyjęciu grubości obu przetworników w wymiarze 2 mm obliczono długości boków przekroju każdego z syntezowanych elementów. W tabeli 6.9 przedstawiono wyznaczone parametry geometryczne.

Tabela 6.9. Parametry mechaniczne modelu matematycznego układu o dwóch stopniach swobody z rezonansem mechanicznym przy 63 kHz oraz 99 kHz wyznaczone pierwszą metodą syntezy

	Grubość [mm]	Długość boku [mm]
1 stopień swobody	2,000	8,442
2 stopień swobody	2,000	9,927

Następnie przeprowadzono analizę syntezowanego układu w dziedzinie częstotliwości, a otrzymane wyniki przedstawiono na wykresie razem z wynikami otrzymanymi w badaniu doświadczalnym układu piezoelektrycznego złożonego z dwóch różnych przetworników. Wykres pokazano na rysunku 6.41.



Rys. 6.41. Wykres odpowiedzi modelu matematycznego układu piezoelektrycznego wykonanego pierwszą metodą syntezy oraz złożonego z dwóch przetworników piezoelektrycznych wraz z naniesionymi wartościami pomiarów wykonanych w badaniu rzeczywistego układu

Odpowiedź układu zamodelowanego pierwszą metodą syntezy charakteryzowała się dwiema wartościami maksymalnymi zarejestrowanej amplitudy przemieszczenia o wartościach 25 nm przy częstotliwości 29 kHz oraz 31 nm przy częstotliwości 115,5 kHz. W badaniu doświadczalnym na układzie rzeczywistym zarejestrowano maksymalną amplitudę odkształcenia o wartości 19 nm przy częstotliwości 36 kHz oraz amplitudę o wartości 41 nm przy częstotliwości 123 kHz. W przypadku pierwszego maksimum, błąd modelu względem wartości mierzonej wyniósł 20% wartości częstotliwości oraz 24% wartości amplitudy. W przypadku drugiego maksimum, błąd względny modelu wyniósł 6% wartości częstotliwości oraz 25% wartości amplitudy.

W kolejnym kroku przeprowadzono weryfikację modelu otrzymanego drugą metodą syntezy przy założeniu identycznych parametrów geometrycznych przetworników zastosowanych w modelowanym układzie w odniesieniu do układu rzeczywistego. Podobnie jak w przypadku syntezy układów złożonych z jednego przetwornika, pierwszym krokiem syntezy było utworzenie układu mechanicznego. Na podstawie metody Cauera wyznaczono wartości parametrów układu mechanicznego, które przedstawiono w tabeli 6.10.

Tabela 6.10. Parametry mechaniczne modelu matematycznego układu o dwóch stopniach swobody z rezonansem mechanicznym przy 63 kHz oraz 99 kHz wyznaczone drugą metodą syntezy

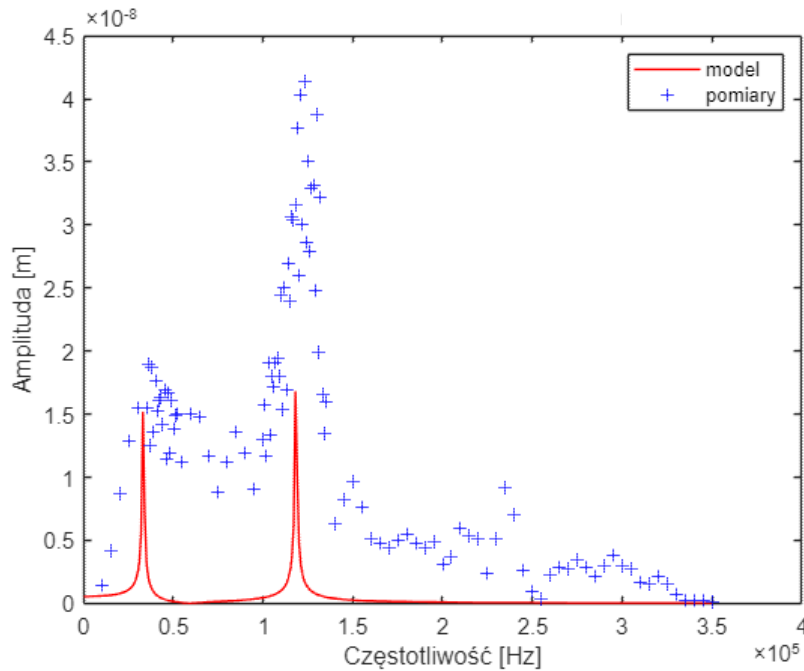
	Masa [g]	Sztywność [N/m]	Wartość tłumienia [Ns/m]
1 stopień swobody	2,800	$1,573 \cdot 10^9$	12,592
2 stopień swobody	48,498	$2,639 \cdot 10^9$	264,156

Przyjęto parametry geometryczne syntezowanego układu o wartościach identycznych jak w przypadku układu rzeczywistego, a więc założono, że syntezowany jest stos złożony z elementów o przekroju w kształcie kwadratu, o bokach długości 5 mm i 10 mm oraz o grubości 2 mm. Na podstawie przyjętych parametrów geometrycznych wyznaczono właściwości materiałowe syntezowanego układu, które przedstawiono w tabeli 6.11.

Tabela 6.11. Właściwości materiałowe układu utworzonego w procesie syntezy oraz rzeczywistego układu piezoelektrycznego poddanego badaniu

	Syntezowany układ		Rzeczywisty układ
	Płytką 1	Płytką 2	Płytką 1 i 2
k_{33}	0,679	0,678	0,680
k_{eff}	0,641	0,640	0,500
d_{33} [C/m²]	$5,768 \cdot 10^{-10}$	$3,420 \cdot 10^{-10}$	$7,100 \cdot 10^{-10}$
c_{33}^E [N/m²]	$3,145 \cdot 10^{10}$	$2,111 \cdot 10^{11}$	$4,348 \cdot 10^{10}$
ϵ_{33}^T [F/m]	$2,270 \cdot 10^{-8}$	$5,379 \cdot 10^{-8}$	$2,921 \cdot 10^{-8}$

Na podstawie obliczonych parametrów modelu piezoelektrycznego przeprowadzono analizę odpowiedzi układu, a otrzymane wyniki zamieszczono na wykresie, co pokazano na rysunku 6.42.



Rys. 6.42. Wykres odpowiedzi modelu matematycznego układu piezoelektrycznego wykonanego drugą metodą syntezy oraz złożonego z dwóch przetworników piezoelektrycznych wraz z naniesionymi wartościami pomiarów wykonanych w badaniu rzeczywistego układu

Na podstawie wyników analizy modelu oraz układu rzeczywistego zaobserwowano pierwsze maksimum amplitudy przy częstotliwości 33 kHz o wartości przemieszczenia równej 15 nm. Drugie maksimum zaobserwowano przy częstotliwości 118 kHz. Wartość przemieszczenia wyniosła w tym przypadku 17 nm. W porównaniu do wartości otrzymanych metodą doświadczalną na układzie rzeczywistym, błąd względny częstotliwości pierwszego maksimum wyniósł 9%, natomiast błąd wyznaczonej wartości wyniósł 22%. Błąd w przypadku drugiego zarejestrowanego maksimum częstotliwości wyniósł natomiast 4%. Błąd względny wartości przemieszczenia w przypadku drugiego maksimum to 59%.

7. Wnioski oraz uwagi końcowe

Utylitarnym celem pracy była weryfikacja poprawności postawionej tezy badawczej, w założeniu której możliwe jest utworzenie metody syntezy dowolnych układów piezoelektrycznych o strukturze kaskadowej na podstawie zbioru danych wejściowych w postaci częstotliwości charakterystycznych oraz ograniczonej informacji na temat właściwości materiałowych, czy parametrów geometrycznych zastosowanych przetworników. W ramach pracy przeprowadzono analizę układów kaskadowych nieklasyczną metodą liczb strukturalnych w celu ustalenia możliwości jej zastosowania w kontekście analizy syntezowanych układów piezoelektrycznych, jak również zdefiniowania potencjalnych problemów oraz ograniczeń związanych z jej parametryzacją oraz algorytmizacją do zastosowań w jednostkach obliczeniowych.

Na podstawie wykonanej w rozdziale piątym analizy kaskadowych podukładów mechanicznych, przy zastosowaniu metody macierzowej oraz metody liczb strukturalnych, przeprowadzono obserwację dokładności wyników otrzymanych na podstawie każdej z nich. Metoda macierzowa jest sprawdzoną metodą analizy zarówno układów elektrycznych, jak i mechanicznych, pozwalającą na usystematyzowany zapis równań Lagrange'a. Przyjęto zatem, że wyniki otrzymane na podstawie metody macierzowej będą punktem odniesienia do analizowanej w pracy metody grafów i liczb strukturalnych.

Zarówno w przypadku analizy drgających harmonicznie kaskadowych układów mechanicznych bez tłumienia, jak również w przypadku analizy układów z tłumieniem, zaobserwowano duży stopień zgodności częstotliwości rezonansowych otrzymanych obiema metodami analizy. Maksymalny błąd względny wyniósł w tym przypadku 1%. Pomiędzy wyznaczonymi wartościami amplitud przemieszczenia zaobserwowano natomiast odchylenia od 14% do 50% względnej wartości przemieszczenia przy częstotliwościach rezonansowych. Ze względu na zastosowane przekształcenia matematyczne niemożliwe było także wyznaczenie przesunięć fazowych w dziedzinie częstotliwości przy zastosowaniu metody liczb strukturalnych.

W ramach pracy zbadano możliwość zastosowania metody grafów i liczb strukturalnych w formie algorytmu komputerowego i porównano wydajność obliczeniową tej metody w odniesieniu do metody macierzowej. Przygotowano w tym celu autorskie algorytmy komputerowe umożliwiające analizę układów kaskadowych o dowolnej konfiguracji parametrów oraz liczbie stopni swobody na podstawie zastosowanych w pracy metod obliczeniowych. Przeprowadzono na ich podstawie pomiary czasu operacji do wyznaczenia

odpowiedzi układów kaskadowych o maksymalnej liczbie sześciu stopni swobody oraz użytej w procesie pamięci RAM. Wyniki przeprowadzonego badania wykazały na porównywalną wydajność obliczeniową zastosowanych metod przy układach o jednym oraz dwóch stopniach swobody. W przypadku układów o większej liczbie stopni swobody, algorytm przygotowany na podstawie metody liczb strukturalnych wymagał większej ilości czasu oraz rezerwował większy obszar pamięci RAM, co wskazywało na mniejszą wydajność metody. W badaniu czasu potrzebnego na obliczenie wartości wyjściowych na podstawie wyznaczonych wzorów, algorytm na bazie metody liczb strukturalnych osiągał porównywalne wyniki do algorytmu macierzowego.

Przeprowadzone badania wykazały zgodność zastosowanej metody grafów i liczb strukturalnych z metodą macierzową w przypadku wyznaczanych wartości częstotliwości rezonansowych układu. Opracowana autorska metoda analizy na bazie liczb strukturalnych umożliwiła również analizę układów tłumionych. Zaobserwowane odchylenia w wartościach amplitud przemieszczenia oraz mniejszy stopień optymalizacji algorytmu komputerowego w przypadku autorskiej metody wskazują jednak na obszary wymagające dalszej pracy naukowej w kierunku jej udoskonalenia. Metoda macierzowa, zastosowana w pracy jako metoda referencyjna jest metodą dobrze poznaną i lepiej zoptymalizowaną do pracy w środowiskach obliczeniowych, co mogło również przyczynić się w istotnym stopniu do osiągniętych wyników. Konieczna jest zatem dalsza weryfikacja autorskiej metody przy zastosowaniu alternatywnych środowisk obliczeniowych i wdrożenie niezbędnych optymalizacji, mających na celu zmniejszenie potrzebnej mocy obliczeniowej do wykonania analizy matematycznej. Na podstawie uzyskanych wyników podjęto w pracy decyzję o wyborze metody macierzowej do dalszej analizy syntezy układów elektromechanicznych stanowiących modele matematyczne rzeczywistych układów piezoelektrycznych.

W ramach niniejszej pracy utworzono dwie metody syntezy kaskadowych układów elektromechanicznych na podstawie metody Cauera [27-32, 37-43 74-77] oraz stosując przekształcenia matematyczne wyprowadzone z równań konstytutywnych piezoelektryki [52], a także zależności wyznaczone przez autorów publikacji naukowych [46, 89, 90]. Wyprowadzono również wzory konieczne do przeprowadzenia procesu analizy matematycznej utworzonych w procesie syntezy modeli matematycznych. Na podstawie utworzonych w pracy metod syntezy możliwe jest wyznaczenie parametrów geometrycznych lub właściwości materiałowych przetworników piezoelektrycznych stanowiących elementy projektowanego stosu piezoelektrycznego.

Przygotowano również autorską aplikację komputerową, wyposażoną w czytelny interfejs obsługi, umożliwiającą pełną interakcję z parametrami ustawianymi na dowolnym etapie syntezy matematycznej oraz przeprowadzenie pełnej analizy odpowiedzi projektowanego układu piezoelektrycznego w dziedzinie częstotliwości z możliwością konfiguracji warunków brzegowych oraz ustawienia gęstości punktów pomiarowych.

Przeprowadzono serię badań doświadczalnych, na podstawie których pozyskano wiedzę na temat sposobów zasilania oraz utwierdzenia układów piezoelektrycznych, a także prowadzenia pomiarów przy zastosowaniu specjalistycznej aparatury badawczej w postaci wzmacniacza napięciowego wysokich częstotliwości oraz interferometru laserowego. Dane pomiarowe uzyskane w badaniu doświadczalnym przeprowadzonym na układach utworzonych z przemysłowych przetworników piezoelektrycznych umożliwiły również przeprowadzenie weryfikacji modeli matematycznych przygotowanych autorską metodą syntezy.

Na podstawie analizy utworzonych modeli oraz wyników badań doświadczalnych, a także zgromadzonych danych katalogowych, zawierających właściwości materiałowe oraz parametry geometryczne przetworników, zweryfikowano dokładność autorskiej metody syntezy. W przypadku układów złożonych z pojedynczych przetworników piezoelektrycznych parametry geometryczne modelowanych elementów wskazywały dużą zgodność z wymiarami rzeczywistych przetworników poddanych badaniom doświadczalnym. Zaobserwowano błąd względny w granicach 1% wartości katalogowych wymiarów geometrycznych. Analiza układów utworzonych w procesie syntezy, gdzie przyjęto właściwości materiałowe na podstawie danych katalogowych rzeczywistych przetworników piezoelektrycznych wykazała zgodność pomiędzy wyznaczonymi wartościami częstotliwości rezonansowych na poziomie 5 – 8% wartości uzyskanych w pomiarach doświadczalnych. Różnica względna pomiędzy wartościami amplitud uzyskanymi w modelach matematycznych wyniosła jednak od 32% do niemal dwukrotności wartości mierzonych w układzie rzeczywistym. W przypadku syntezy, gdzie wstępnie przyjęto rzeczywiste parametry geometryczne układów, uzyskano właściwości materiałowe, które pokrywały się w granicach od 15% do dwukrotności wartości rzeczywistych. W przypadku analizy modeli matematycznych utworzonych tą metodą syntezy, zgodność pomiędzy wartościami częstotliwości rezonansowych wyniosła w obu przypadkach 5% wartości rzeczywistych, natomiast zgodność wartości amplitud mieściła się w granicach 24 – 32%.

Zaobserwowano większe odchylenia od wartości rzeczywistych w przypadku analizy modelu układu złożonego z dwóch połączonych przetworników piezoelektrycznych.

Wymiary geometryczne modelu układu utworzonego poprzez przyjęcie rzeczywistych właściwości materiałowych zastosowanych przetworników piezoelektrycznych różniły się od wartości rzeczywistych o 69% w przypadku płytki o wymiarach 5x5x2 mm oraz o 1% w przypadku płytki o wymiarach 10x10x2 mm. Częstotliwości rezonansowe układu otrzymanego tą metodą syntezy pokrywały się z częstotliwościami zarejestrowanymi w badaniu doświadczalnym w granicach 6 – 20% natomiast zgodność pomiędzy wartościami amplitud mieściła się w granicach błędu względnego 24 – 25%. W przypadku metody syntezy, gdzie przyjęto w modelu rzeczywiste wymiary geometryczne przetworników, synteżowane właściwości materiałowe układu pokrywały się z wartościami rzeczywistymi w granicach jednego rzędu wielkości. Na podstawie analizy odpowiedzi modelu utworzonego tą metodą syntezy stwierdzono zgodność częstotliwości rezonansowych z wartościami rzeczywistymi w granicach 4 – 9%, natomiast zgodność w przypadku wyznaczonych wartości amplitud wyniosła 22 – 59%.

W odniesieniu do wyników przeprowadzonej weryfikacji autorskiej metody syntezy stwierdzono częściową zgodność wyznaczonych parametrów geometrycznych oraz materiałowych synteżowanych modeli matematycznych z rzeczywistymi układami piezoelektrycznymi. Uzyskano dużą dokładność częstotliwości rezonansowych wszystkich synteżowanych układów, a także dużą dokładność wymiarów geometrycznych i właściwości materiałowych układów złożonych z pojedynczych przetworników piezoelektrycznych. Zaobserwowano natomiast odchylenia w przypadku wartości amplitud odkształcenia oraz parametrów układu złożonego z dwóch przetworników piezoelektrycznych. Na podstawie zaobserwowanych błędów przy weryfikacji metod syntezy przeprowadzono wnikliwą analizę czynników mogących mieć wpływ na zaobserwowane rozbieżności w wyznaczanych parametrach układów.

Jedną z przyczyn jest z pewnością różnica w sposobie reprezentacji oddziaływań pomiędzy elementami w układach o skupionych parametrach, a rzeczywistym zachowaniem układów piezoelektrycznych. Do modelowania oddziaływań w układzie piezoelektrycznym zastosowano model Van Dyke'a – Butterworth'a oraz podstawowe modele mechaniczne złożone ze skupionych wartości masy, sztywności oraz tłumienia. Przytoczone modele matematyczne posiadają jednak ograniczone możliwości symulacji zjawisk zachodzących w rzeczywistych układach elektromechanicznych i są ich uproszczoną postacią. W pracach naukowych [17, 24, 56] autorzy zwracają uwagę na ograniczenia modeli o parametrach skupionych i podejmują próby ich modyfikacji w celu lepszego odwzorowania rzeczywistych układów. Szczególną uwagę należy zwrócić na różnice w masie rzeczywistych układów

piezoelektrycznych oraz modelowanych układów o parametrach skupionych. Drgania przetworników piezoelektrycznych są efektem odkształceń powstających na skutek oddziaływań zachodzących w całym przekroju struktury krystalicznej materiału piezoelektrycznego. Skumulowane przemieszczenie powierzchni takiego przetwornika jest więc sumą odkształceń zachodzących w całości tej struktury. Można zatem stwierdzić, że masa drgającego przetwornika piezoelektrycznego odzwierciedlona w modelu matematycznym jest sumą cząstkową mas poszczególnych warstw przetwornika piezoelektrycznego, gdyż przemieszczają się one w różnym stopniu w zależności od tego, jak daleko usytuowane są od powierzchni przetwornika oraz od sposobu jego przymocowania. Rzeczywisty układ różni się zatem od modelowanego układu o parametrach skupionych, gdzie przemieszczeniu podlega całość drgającej masy w jednakowym stopniu. Potencjalnym rozwiązaniem tego problemu jest rozpatrzenie badanego problemu przy zastosowaniu metod elementów skończonych i specjalistycznego oprogramowania MES, stosowanego do analizy wytrzymałościowej układów o złożonej strukturze. Rozwój koncepcji syntezy układów o złożonej strukturze wewnętrznej przy zastosowaniu metody elementów skończonych jest jednym z priorytetowych zadań w ramach kontynuacji pracy badawczej nad modelowaniem układów piezoelektrycznych.

Tłumienie mechaniczne układów piezoelektrycznych zamodelowano w pracy przy użyciu metody Rayleigh'a, co również wiąże się z uproszczeniem przyjętych wartości tłumienia w modelu matematycznym. Przyjęty na podstawie częstotliwości współczynnik tłumienia proporcjonalnego skutkuje zaniżeniem tłumienia w modelowanych układach z uwagi na konieczność zachowania globalnej wartości poniżej wartości tłumienia krytycznego. Wady tej metody zostały szczegółowo omówione w rozdziale piątym. Konieczne będzie zatem rozważenie alternatywnych metod syntezy elementów tłumiących w przyszłej pracy naukowej celem zredukowania błędów wynikających z aproksymacji wartości tłumienia.

W synteżowanych modelach matematycznych zaobserwowano również zawyżony współczynnik przenikalności elektrycznej, którego obliczone wartości były większe o rząd wielkości względem wartości rzeczywistych. W publikacjach naukowych [101, 102] autorzy podważają zgodność parametrów piezoelektrycznych wyznaczanych według standardów przemysłowych [52], które producenci podają w odniesieniu do częstotliwości pracy znacznie poniżej częstotliwości rezonansowych układów piezoelektrycznych. Według autorów wymienionych publikacji, przyjęcie wartości przenikalności elektrycznej, jak również wartości sprzężenia elektromechanicznego i wartości tłumienia jako wartości stałych w całym przedziale częstotliwości pracy układów piezoelektrycznych jest błędnym założeniem. Badania

przytoczone w publikacji wskazują na dynamicznie zmieniające się właściwości przetworników piezoelektrycznych razem z częstotliwością pracy. W przypadku wartości przenikalności elektrycznej, różnice narastają w otoczeniu częstotliwości rezonansowych oraz antyrezonansowych i mogą być większe o rząd wielkości od wartości podanych w specyfikacji technicznej. Zaobserwowane w niniejszej pracy różnice w wartości przenikalności elektrycznej są zatem w zgodzie z obserwacjami przeprowadzonymi przez autorów przytoczonych publikacji.

Wyznaczone w badaniu doświadczalnym wartości przemieszczenia oraz częstotliwości rezonansowe rzeczywistych układów piezoelektrycznych obciążone są również dużym błędem pomiarowym wynikającym z precyzji zastosowanej aparatury pomiarowej oraz przyjętej procedury badawczej. Przetworniki piezoelektryczne przytwierdzono do płyty granitowej przy użyciu kleju, co w znacznym stopniu wpłynęło na charakter pracy badanych układów. Elementy piezoelektryczne zmieniają swoje wymiary geometryczne we wszystkich osiach niezależnie od trybu pracy. Usztywnienie powierzchni badanych przetworników skutkuje nierównomiernym odkształceniem w przekroju elementu piezoelektrycznego na całej jego grubości, w istotny sposób zmienia częstotliwości charakterystyczne i generowane przemieszczenia płytki. Konieczne będzie przeprowadzenie kolejnych badań doświadczalnych przy zastosowaniu alternatywnych metod pomiarowych w celu zweryfikowania zaobserwowanych odchyleń. Dalsza praca naukowa będzie wiązała się również z dogłębną analizą wpływu czynników takich jak utwierdzenie oraz parametry sygnału sterującego na otrzymywaną odpowiedź badanych układów piezoelektrycznych.

Na podstawie przeprowadzonych w pracy badań doświadczalnych oraz weryfikacji modeli matematycznych utworzonych przy zastosowaniu autorskiej metody syntezy, udowodniono prawdziwość przyjętej tezy badawczej. Opracowaną metodę syntezy można zastosować w modelowaniu kaskadowych układów elektromechanicznych, których parametry geometryczne oraz właściwości materiałowe stanowią bazę przy projektowaniu rzeczywistych układów piezoelektrycznych w formie pojedynczych przetworników oraz stosów. Przygotowana w ramach pracy aplikacja komputerowa umożliwia projektowanie oraz analizę kaskadowych układów piezoelektrycznych w łatwy oraz intuicyjny sposób. Stosy piezoelektryczne złożone z przetworników o różnych właściwościach materiałowych lub różnych parametrach geometrycznych stanowią nową formę układów zdolnych do generowania wibracji w szerokim zakresie częstotliwości, które można stosować jako środki techniczne do aktywnego tłumienia drgań oraz precyzyjnej kontroli. Na podstawie wniosków

wyciągniętych z przeprowadzonej pracy zdefiniowano także obszary badawcze wymagające dalszego rozwoju naukowego, które będą podejmowane w ramach przyszłej pracy naukowej.

8. Bibliografia

1. Lyon R.H.: Machinery Noise and Diagnostics. Butterworth-Heinemann, 1987, DOI: 10.1016/C2009-0-24812-4
2. Salokyova S. et al.: Research on impacts of mechanical vibrations on the production machine to its rate of change of technical state. *Advances in Mechanical Engineering*, vol. 8, 2016, pp. 1-10, DOI: 10.1177/1687814016655778
3. Tavner P.J.: Review of condition monitoring of rotating electrical machines. *IET Electric Power Applications*, vol. 2, issue 4, 2008, pp. 215-247, DOI: 10.1049/iet-epa:20070280
4. Mohanta R.K. et al.: Sources of vibration and their treatment in hydro power stations-A review, *Engineering Science and Technology. an International Journal*, vol. 20, issue 2, 2017, pp. 637-648, DOI: 10.1016/j.jestch.2016.11.004
5. Bergamo E., Fasan M., Bedon C.: Predictivity of CNC machine-induced vibrations on inter-story floors based on coupled experimental-numerical investigations. *Proceedings of First International Electronic Conference on Actuator Technology: Materials, Devices and Applications*, DOI: 10.3390/IeCAT2020-08529, 2020
6. Haiping Du et al.: Advanced seat suspension control system design for heavy duty vehicles, *Emerging Methodologies and Applications in Modelling*. Academic Press, 2020, DOI: 10.1016/B978-0-12-819601-4.00003-5
7. Shrestha B.: Study of building vibrations caused by machinery. Thesis, University of New Mexico, 2018
8. Hagood N.W., Flotow A.: Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 146, issue 2, 2003, pp. 243-268, DOI: 10.1016/0022-460X(91)90762-9
9. Benjeddou A., Ranger J-A.: Use of shunted shear-mode piezoceramics for structural vibration passive damping. *Computers & Structures*, vol. 84, issues 22-23, 2006, pp. 1415-1425, DOI: 10.1016/j.compstruc.2005.10.010
10. Brownjohn J., Pavic A.: Vibration control of ultra-sensitive facilities, *Proceedings of the Institution of Civil Engineers - Structures and Buildings*. vol. 159, issue 5, 2006, pp. 295-306, DOI: 10.1680/stbu.2006.159.5.295
11. Kowal J., Szymkat M., Uhl T.: Synthesis and Analysis of Active Suspension Control. ACTIVE 95 Newport Beach, CA, Poland, 1995, pp. 346-351
12. Kozek M. et al.: Vibration damping of a flexible car body structure using piezo-stack actuators. *Control Engineering Practice*, vol. 19, issue 3, 2011, pp. 298-310, DOI: 10.1016/j.conengprac.2009.08.001
13. Rivin E.: Vibration isolation theory. *Encyclopedia of Vibration*, DOI: 10.1006/rwvb.2001.0179, 2001
14. Tokhi M.O., Mamour K., Hossain M.A.: Adaptive active noise and vibration control. UKACC International Conference on CONTROL, 1996

15. Dassisti M., Olabi A.G., Brunetti G.: Application of magnetorheological fluids MRF in a suspension system. *Materials Science and Materials Engineering*, 2021, DOI: 10.1016/B978-0-12-815732-9.00085-1
16. Wstęp do piezoelektryki. Pod red. W. Solucha, Wydawnictwo Komunikacji i Łączności, Polska, 1980
17. Adriaens H., Koning W., Banning R.: Modeling piezoelectric actuators. *IEEE/ASME Transactions on mechatronics*, vol. 5, no. 4, 2000
18. Buchacz A., Wróbel A.: Modelowanie i badanie wpływu zjawiska piezoelektrycznego na charakterystyki układu mechanicznego. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Polska, 2010
19. Rodriguez-Fortun J.M. et al.: General Bond Graph model for piezoelectric actuators and methodology for experimental identification. *Mechatronics*, vol. 20, 2010, pp. 303-314, DOI: 10.1016/j.mechatronics.2010.01.004
20. Wróbel A.: Classical and non-classical research methods and experimental studies of piezoelectric plates. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Polska, 2018
21. Collet M., Cunefare K.A.: Modal synthesis and dynamical condensation methods for accurate piezoelectric systems impedance computation. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 19, issue 11, 2008
22. Geng Wang et al.: Comprehensive approach to modeling and identification of a two-axis piezoelectric fast steering mirror system based on multi-component analysis and synthesis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 127, 2019, pp. 50-67
23. Chih-yi Lin: Design and analysis of piezoelectric transformer converters. Virginia Tech, Doctoral Dissertations, 1997
24. Goldfarb M., Celanovic N.: Modeling piezoelectric stack actuators for control of micromanipulation, *IEEE Control Systems Magazine*, vol 17, issue 3, 1997, DOI: 10.1109/37.588158
25. Vijay K. et al.: Active noise control using piezoelectric sensors and actuators. Owens Corning Fibreglas Technology Inc, US5668744A Patent, 1995
26. Bellert S., Woźniacki H.: Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych. Wydawnictwo Naukowo Techniczne, Polska, 1968
27. Białas K., Buchacz A., Dzitkowski T.: Synteza drgających aktywnych układów mechanicznych z tłumieniem w ujęciu grafów biegunowych i liczb strukturalnych. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Polska, 2009
28. Białas K.: Electrical Elements in Reduction of Mechanical Vibrations. *Applied Mechanics and Materials*, vol. 371, 2013, pp. 657-661
29. Białas K.: Application of mechanical and electric elements as implementation of active reduction of vibration. *International Conference ModTech Proceedings MODTECH 2012: I and II*, 2012, pp. 105-108

30. Białas K., Buchacz A.: The Influence of Changing the Parameters of Electrical Components Implementing the Active Reduction of Vibration Applied Mechanics and Materials. vol. 657, Poland, 2014, pp. 614-618
31. Buchacz A., Żurek K.: Odwrotne zadanie dynamiki aktywnych układów mechanicznych w ujęciu grafów i liczb strukturalnych. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Polska, 2005
32. Buchacz A., Dymarek A., Dzitkowski T.: Synthesis of discrete, continuous and discrete continuous vibrating systems represented by graphs. Sixth International Scientific and Engineering Conference - Machine-Building and Technosphere on the Border of the XXI Century, vol. 3, 1999, pp. 243-245
33. Buchacz A., Gałęziowski D.: Odwrotne zadanie dyskretnych drgających układów mechatronicznych. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, 2012
34. Wojnarowski J.: Zastosowanie grafów w analizie drgań układów mechanicznych. Polskie Wydawnictwo Naukowe, Polska, 1981
35. Wojnarowski J.: Grafy i liczby strukturalne jako modele układów mechanicznych. Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, Polska, 1977
36. Wojnarowski J. i in.: Modelowanie drgań układów mechanicznych metodami grafów i liczb strukturalnych. Gliwice: Skrypty uczelniane Politechniki Śląskiej, nr 1266, Polska, 1986
37. Harazin J., Wróbel A.: Analytical approach to piezoelectric model synthesis with the use of Cauer's method for system design. F1000 Research, 2023, DOI: 10.12688/f1000research.140943.1
38. Harazin J., Wróbel A.: Synthesis of piezoelectric cascade systems by using piezoelements with variable parameters. The 8th International Conference on Modern Manufacturing Technologies in Industrial Engineering, 2020
39. Harazin J., Wróbel A.: A research on a cascade model synthesis with the use of classical and non-classical methods in the context of new piezoelectric stack applications. Mechanical Sciences, vol. 12, issue 2, 2021, pp. 959-969
40. Harazin J., Wróbel A.: Empirical analysis of piezoelectric stacks composed of plates with different parameters and excited with different frequencies. The 16th International Conference "Mechatronic Systems and Materials", 2021
41. Harazin J., Wróbel A.: A research of new potential vibration cancellation techniques with the use of piezo stacks. The 25th Edition of ImanEE 2021 International Conference, 2021, DOI: 10.1088/1757-899X/1235/1/012055
42. Cauer, W.; Ideale Transformatoren und lineare Transformationen. Elektrische Nachrichtentechnik (ENT), vol. 9, 1932, pp. 157-174
43. Cauer, W.; Theorie der linearen Wechselstromschaltungen. Akademie-Verlag: Berlin, Germany, 1960

44. Sheng-He Wang, Mi-Ching Tsai: Dynamic modeling of thickness-mode piezoelectric transducer using the block diagram approach. *Ultrasonics*, vol. 51, issue 5, pp. 617-624, 2011, DOI: 10.1016/j.ultras.2011.01.002
45. Yamaoka S., Ohnishi K.: Reaction Force Estimation of Piezoelectric Actuator by Charge Observation. *IEEE International Conference on Mechatronics (ICM)*, 2013, DOI: 10.1109/ICMECH.2013.6518534
46. Adamowski J.C., Nader G., Silva E.C.N.: Effective Damping Value of Piezoelectric Transducer Determined by Experimental Techniques and Numerical Analysis. *ABCM Symposium Series in Mechatronics*, vol. 1, 2004, pp.271-279
47. Naillon M., Coursant R., Besinier F.: Analysis of piezoelectric structures by a finite element method. *Acta Electronica*, vol. 25, issue 4, 1983, pp. 341-362
48. Curie J., Curie P.: Développement par compression de l'électricité polaire dans les cristaux hémihédres à faces inclinées. *Bulletin de la Société minéralogique de France*, vol. 3, 1880, pp. 90-93, DOI: 10.3406/bulmi.1880.1564
49. Lippmann, G.: Principe de la conservation de l'électricité, *Annales de chimie et de physique*, vol. 24, 1881, pp. 381-394, DOI: 10.1051/jphystap:0188100100038100
50. David J., Cheeke N.: *Fundamentals and applications of ultrasonic waves*. Academic Press, 1981
51. Scarrott B.: The best noise cancelling headphones 2024: top ANC headphones for every budget. [online] <https://www.techradar.com/news/audio/portable-audio/best-noise-cancelling-headphones-1280490> [dostęp 17 lutego 2024]
52. IEEE Standard on Piezoelectricity. ANSI/IEEE Std 176-1987, 1988, DOI: 10.1109/IEEESTD.1988.79638
53. Piezoelectric Ceramics Properties & Applications. [online] http://www.ultrasonic-resonators.org/misc/references/articles/Waanders_%27Piezoelectric_Ceramics__Properties_and_Applications%27.pdf [dostęp 17 lutego 2024]
54. Haider J. et al.: Harvesting Energy from Planetary Gear Using Piezoelectric Material. *Energies*, vol. 13, 2020, pp. 223, 2020, DOI: 10.3390/en13010223
55. Ambrosio R. et al.: Study of Piezoelectric Energy Harvesting System Based on PZT. *Integrated Ferroelectrics*, vol. 126, 2011, pp. 77-86, DOI: 10.1080/10584587.2011.574989
56. Goldfarb M., Celanovic N.: Behavioral Implications of Piezoelectric Stack Actuators for Control of Micromanipulation. *Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Robotics and Automation Minneapolis*, 1996
57. Boukari A.F. et al.: Piezo-actuators modeling for smart applications, *Mechatronics*. vol. 21, 2011, pp. 339–349, DOI: 10.1016/j.mechatronics.2010.12.005
58. Huige W. et al.: An overview of lead-free piezoelectric materials and devices. *Journal of Materials Chemistry C*, The Royal Society of Chemistry, vol. 6, issue 46, 2018, pp. 12446-12467, DOI: 10.1039/C8TC04515A

59. Maity K., Mandal D.: Piezoelectric polymers and composites for multifunctional materials. W: *Advanced Lightweight Multifunctional Materials*. Edited by Costa P. et al.: Woodhead Publishing in Materials, 2021, pp. 239-282, DOI: 10.1016/B978-0-12-818501-8.00001-9
60. Shrout T. R., Zhang S. J.: Lead-free piezoelectric ceramics: Alternatives for PZT. *Journal of Electroceramics*, vol. 19, 2007, pp. 113–126, DOI: 10.1007/s10832-007-9047-0
61. Akdogan E. K., Allahverdi M., Safari A.: Piezoelectric composites for sensor and actuator applications. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 52, issue 5, 2005, pp. 746-775, DOI: 10.1109/TUFFC.2005.1503962
62. Moncef H., Jean-Yves C., Faïda M.: A multi-agent methodology for multi-level modeling of mechatronic systems. *Advanced Engineering Informatics*, vol. 3, issue 3, 2014, pp. 208-217 DOI: 10.1016/j.aei.2014.03.005
63. Erturk A., Inman D.J.: *Piezoelectric Energy Harvesting*. 2011, pp. 343-348, DOI: 10.1002/9781119991151.app1
64. Guo-Qing Li, Chen Chuan-Yao, Hu Yuan-Tai: Equivalent electric circuits of thin plates with two-dimensional piezoelectric actuators. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 286, 2005, pp. 145-165
65. Miri N.: *An evolutionary approach to physics-based modelling of piezoelectric actuators*. The University of Adelaide, 2014
66. Huidong L., Chuan T., Deng D.: Energy harvesting from low frequency applications using piezoelectric materials. *Applied Physics Reviews* 1, 2014, DOI: 10.1063/1.4900845
67. Ahmad K., Abdullah N., Manaf A.: D33 mode based piezoelectric micromachined ultrasonic transducers. *IEEE 15th Student Conference on Research and Development (SCORED)*, 2017, pp. 158-161, DOI: 10.1109/SCORED.2017.8305402
68. Shekhani H.N., Uchino K.: Evaluation of the mechanical quality factor under high power conditions in piezoelectric ceramics from electrical power. *Journal of the European Ceramic Society*, vol. 35, issue 2, 2015, pp 541-544, DOI: 10.1016/j.jeurceramsoc.2014.08.038
69. Boukazouha F., Boubenider F.: Piezoelectric transformer: Comparison between a model and an analytical verification. *Computers and Structures*, vol. 86, 2008, pp. 374-378, DOI: 10.1016/j.compstruc.2007.01.048
70. Haus B., Mercorelli P., Wener N.: Modelling of a Servo Piezo Mechanical Hydraulic Actuator and its Feed-Forward Control. *Proceedings of 2014 International Conference on Modelling, Identification and Control*, Australia, 2014
71. Foster R. M.: A reactance theorem. *The Bell System Technical Journal*, vol. 3, issue 2, 1924, pp. 259-267, DOI: 10.1002/j.1538-7305.1924.tb01358.x
72. Smith M.: Synthesis of mechanical networks: The inerter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 47, issue 10, 2002, pp. 1648-1662. doi:10.1109/TAC.2002.803532

73. Komputerowe wspomaganie syntezy i analizy podzespołów maszyn modelowanych grafami i liczbami strukturalnymi. Pod red. A. Buchacza, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, z. 127, Polska, 1997
74. Buchacz A.: Synteza drgających układów prętowych w ujęciu grafów i liczb strukturalnych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, z. 104, Gliwice, 1991
75. Dymarek A., Dzitkowski T., Gwóźdź A.: Synteza układów belkowych ze względu na żądane widmo częstości. Modelowanie inżynierskie, z. 36, 2008, s. 55-62
76. Dymarek A., Dzitkowski T.: The use of synthesis methods in position optimisation and selection of tuned mass damper (TMD) parameters for systems with many degrees of freedom. Archives of Control Sciences, vol. 31, 2021, pp. 185-211
77. Dymarek A. et al.: Method for Tuning the Parameters of Active Force Reducing Building Vibrations - Numerical Tests. Energies, vol. 14, 2021, pp. 1-17
78. Leang Kam, Zou Qingze: Teaching Modules on Modeling and Control of Piezoactuators for System Dynamics, Controls, and Mechatronics Courses, IEEE Transactions on Education, vol. 53, issue 3, 2010, pp. 372-383, DOI: 10.1109/TE.2009.2024930
79. Piezoceramic Components and Actuators. Piezoelectric Elements in Different Shapes, Physik Instrumente, [online] <https://www.physikinstrumente.co.uk/en/products/piezoelectric-elements-in-different-shapes> [dostęp 18 lutego 2024]
80. Piezo Actuators product brochure, THORLABS, [online] https://www.thorlabs.com/images/Brochures/Thorlabs_Piezo_Brochure.pdf, [dostęp 17 lutego 2024]
81. Fine and fast steering mirrors, CEDRAT Technologies, [online] <https://pdf.directindustry.com/pdf/cedrat-technologies/fine-fast-steering-mirrors/54728-938782.html> [dostęp 18 lutego 2024]
82. Harribey D., Hoan T. Ryndzionek R.: Assembling and testing of quasi-static hybrid piezoelectric motor based on electroactive lubrication principle, Archives of Electrical Engineering, vol. 62, issue 2, 2013, pp. 237-250, DOI: 10.2478/aee-2013-0019
83. Piezo material properties. STEMiNC, [online] http://www.steminc.com/piezo/PZ_property.asp [dostęp 17 lutego 2024]
84. Liu M., Gorman D.G.: Formulation of Rayleigh damping and its extensions. Computers & Structures, vol. 57, issue 2, 1995, pp. 277-285, DOI: 10.1016/0045-7949(94)00611-6
85. Giergiel, J.; Tłumienie drgań mechanicznych. Kraków, Wydział Maszyn Górniczych i Hutniczych AGH, Polska, 1984
86. Priya S. Inman D.J.: Energy Harvesting Technologies. Springer New York, 2008
87. Buchacz A. Płaczek M.: Modelowanie i badanie jednowymiarowych, drgających układów mechatronicznych. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Polska, 2011
88. Piezoelectric Ceramics: Principles and Applications, APC International, 2011
89. Jing-Feng Li: Lead-free piezoelectric materials. Wiley, 2021

90. Etchenique R., Weisz A.: Simultaneous determination of the mechanical moduli and mass of thin layers using nonadditive quartz crystal acoustic impedance analysis. *Journal of Applied Physics*, vol. 86, 1999, pp. 1994-2000, DOI: 10.1063/1.370999.
91. Sriratana W., Murayama R., Tanachaikhan L.: Synthesis and Analysis of PZT Using Impedance Method of Reactance Estimation. *Advances in Materials Physics and Chemistry*, vol. 3, issue 1, 2013, pp. 62-70
92. Piezoelectric calculator, Ferroperm Piezoceramics, [online] <https://www.ferropermpiezoceramics.com/resources/piezo-calculator/>, [dostęp 17 lutego 2024]
93. Hard PZT – Type Pz26 (Nazy I), Ferroperm Piezoceramics, [online] <https://www.ferropermpiezoceramics.com/wp-content/uploads/2021/10/Datasheet-hard-pz26.pdf>, [dostęp 17 lutego 2024]
94. WW5064/1074/2074 Channel Arbitrary Waveform Generators, Tabor Electronics, [online], <https://www.taborelec.com/GenericHendler/GetFile.ashx?D=0&DG=4065>, [dostęp 17 lutego 2024]
95. High voltage amplifiers, Smart Material, [online] <https://www.smart-material.com/HVAsV2.html>, [dostęp 17 lutego 2024]
96. OFV-2570 HF Vibrometer Controller data sheet, Polytec, [online] https://www.acoutronic.se/pdf/vibration/Polytec_Datasheet_OFV-2570.pdf, [dostęp 17 lutego 2024]
97. Rigol DS1064B 60 MHz Digital Oscilloscope 4 Channel. TEquipment, [online] <https://www.tequipment.net/RigolDS1064B.html>, [dostęp 17 lutego 2024]
98. Single/Dual Channel High-Voltage Amplifiers, TEGAM, [online] https://www.tegam.com/wp-content/uploads/2023/08/2340-909_RevAB.pdf, [dostęp 17 lutego 2024]
99. PA4HEW - Piezo Chip, THORLABS, [online] <https://www.thorlabs.com/thorproduct.cfm?partnumber=PA4HEW>, [dostęp 17 lutego 2024]
100. PA4FEW - Piezo Chip, THORLABS, [online] <https://www.thorlabs.com/thorproduct.cfm?partnumber=PA4FEW>, [dostęp 17 lutego 2024]
101. Mirzoyan V., Sahakyan A., Mirzoyan P.: Behavior of dielectric permittivity of piezomonocrystal near the resonant frequency. *Physical and Mathematical Sciences*, vol. 3, 2014, pp. 62-65
102. Park Y. et al.: Improvement of the standard characterization method on k_{33} mode piezoelectric specimens. *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 312, 2020, pp. 112-124