Politechnika Śląska

Wydział Automatyki, Elektroniki i Informatyki

mgr inż. Magdalena Wilkołazka

Interpolacja Danych Zredukowanych na Bazie Krzywych Wielomianowych Trzeciego Stopnia

Rozprawa doktorska napisana pod kierunkiem:

dr hab. Ryszard Kozera, prof. SGGW

Gliwice 2024

Doktorant: mgr inż. Magdalena Wilkołazka Lublin 10.07.2024

Tytuł rozprawy: Interpolacja danych zredukowanych na bazie krzywych wielomianowych trzeciego stopnia.

Streszczenie

Głównym problemem badawczym podjętym w tej dysertacji jest zagadnienie interpolacji wielomianami sklejanymi stopnia trzeciego dla tzw. danych zredukowanych (tj. gdy znane są tylko uporządkowane punkty interpolacyjne $Q_m = \{q_i\}_{i=0}^m$ bez żadanych odpowiadających im węzłów interpolacyjnych). Podstawowym pytaniem jest czy twierdzenia (dotyczace szacowania rzędu zbieżności interpolanta do krzywej) klasycznej interpolacji parametrycznej wielomianami sklejanymi mogą zostać przeniesione na obszar danych zredukowanych i ich weryfikacja pozwoli uzyskać satysfakcjonujące rezultaty. *Głównym celem badawczym jest zbadanie jakości zbieżności kawałkami kubicznego interpolanta $\hat{\gamma}$ do nieznanej krzywej γ z pomocą parametryzacji wykładniczej zastępującej nieznane węzły $\mathscr{T}_m = \{t_i\}_{i=0}^m$.* Cele szczegółowe, które podjęto w dysertacji to:

- sformułowanie i udowodnienie twierdzeń (analogicznych do klasycznej interpolacji parametrycznej) dotyczących oszacowania rzędu zbieżności kawałkami kubicznego interpolanta $\hat{\gamma}$ do krzywej γ z pomocą wspomnianej parametryzacji wykładniczej dla trzech rodzajów interpolantów: kawałkami kubicznego Lagrange'a klasy C^0, zmodyfikowanego sklejanego kubicznego Hermita klasy C^1 oraz zmodyfikowanego splajna zupełnego i splajna naturalnego klasy C^2.

- weryfikacja konieczności istnienia założeń (próbkowanie mniej lub bardziej równomierne oraz regularności krzywej) określonych w twierdzeniach poprzez przykłady analityczne i testy numeryczne.

- weryfikacja postawionej tezy dotyczącej rzędu zbieżności interpolanta do krzywej i jego ostrości w testach numerycznych i przykładach

- ocena przydatności sformułowanej teorii w zastosowaniu praktycznym: analizie obrazu oraz rekonstrukcji filmu.

- określenie warunków dla wspomagającej funkcji ψ by była reparametryzacją, co pozwoli na dokładniejsze oszacowanie długości krzywej w interpolacji nieparametrycznej.

Rozprawa obejmuje 190 stron i składa się z siedmiu rozdziałów. Podjęte w niej rozważania rozpoczęto od wprowadzeniu niezbędnych definicji i uwag (Rozdział 2) i kolejno opisania sklejanej interpolacji Lagrange'a (Rozdział 3), sklejanej zmodyfikowanej interpolacji Hermita (Rozdział 4) oraz sklejanej interpolacji splajnami kubicznymi (Rozdział 5), a także zaprezentowania przykładowych zastosowań w praktyce (Rozdział 6) i podsumowania oraz wniosków (Rozdział 7).

W Rozdziale 2 wprowadzone zostały definicje danych zredukowanych, parametryzacji wykładniczej i inne definicje potrzebne w interpolacji nieparametrycznej, zostały opisane schematy interpolacji Lagrange'a, Hermita oraz interpolacji funkcjami sklejanymi. Zostały też wypunktowane różnice między interpolacją parametryczną a nieparametryczną. Przedstawiono wymagane założenia, które muszą spełniać krzywe i próbkowania oraz zacytowano niezbędne definicje z analizy matematycznej, używane podczas dowodzenia twierdzeń.

Rozdział 3 opisuje przedziałowo-kubiczną interpolację Lagrange'a $\hat{\gamma}^L$, gdzie wielomiany kubiczne $\hat{\gamma}_i^L$ w punktach łączenia $q_0, q_3, q_6, \ldots, q_{m-3}$ są tylko klasy C^0. W pierwszym podrozdziale dotyczącym oszacowania trajektorii krzywej sformułowano twierdzenie określające prędkość zbieżności interpolanta $\hat{\gamma}^L \circ \psi^L$ do γ wraz z jego pełnym dowodem. Dodatkowo w kolejnych sekcjach zawarty jest też dowód na ostrość powyższego oszacowania oraz konieczność istnienia warunku mniej lub bardziej równomierności w próbkowaniu. Przeprowadzone zostały też stosowne eksperymenty numeryczne. Drugi podrozdział obejmuje zagadnienia przybliżania długości interpolanta do długości krzywej a szczególnie określenie warunków wystarczających umożliwiających oszacowanie długości krzywej (warunki na to, aby funkcja kubiczna ψ^L była reparametryzacją tj. $\dot{\psi}_i > 0$). Koniec tego podrozdziału stanowią testy numeryczne weryfikujące spełnialność warunków dla wybranych próbkowań mniej lub bardziej równomiernych.

Podobne warunki zostały wyprowadzone także w przypadku zmodyfikowanej interpolacji Hermita $\hat{\gamma}^H$, którą opisuje Rozdział 4. Na wstępie tego rozdziału przedstawiony jest schemat budowania zmodyfikowanego interpolanta Hermita jako wielomianu kawałkami trzeciego stopnia. Przymiotnik "zmodyfikowany" odnosi się tu do sposobu w jaki zastępuje się nieznane prędkości $\mathrm{v}_i = \dot{\gamma}(t_i)$ dla q_i. Mianowicie, korzystamy tu z kolejnych generowanych nakładkowo (kolejne czwórki punktów) wielomianów Lagrange'a $\hat{\gamma}_i^L$ i $\hat{\gamma}_{i+1}^L$ określonych odpowiednio na przedziałach $[\hat{t}_i, \hat{t}_{i+3}]$ oraz $[\hat{t}_{i+1}, \hat{t}_{i+4}]$. W standardowej interpolacji Hermita prędkości te są zadane a priori wzorem $\mathrm{v}_i = \dot{\gamma}(t_i)$. W tej części pracy sformułowano twierdzenie, w którym określa się i dowodzi stopień zbieżności $\hat{\gamma}^H \circ \phi^H$ do γ w połączeniu z parametryzacją wykładniczą. Kolejne podrozdziały Rozdziału 4 opisują w pierwszej kolejności analityczne przykłady potwierdzające ostrość oszacowań zawartych w twierdzeniu, następnie przedstawione są przykłady weryfikujące konieczność istnienia założeń zawartych we wspomnianym twierdzeniu tj. mniej lub bardziej równomierności i regularności krzywych. W ostatnim podrozdziale zawarte są testy numeryczne potwierdzające kolejny raz ostrość rzędu zbieżności interpolanta do krzywej, konieczność mniej lub bardziej równomierności oraz regularności krzywych. W kolejnej części tego rozdziału zostało poruszone zagadnienie interpolacji długości krzywej γ z pomocą interpolacji $\hat{\gamma}^H$. W pierwszym podrozdziale opisano tutaj warunki wystarczające aby $\phi_i^H : [t_i, t_{i+1}] \to [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}]$ była reparametryzacją. Zostały one zobrazowane w postaci obszarów 3D, a przykładowe próbkowania oznaczono jako trójki punktów (x,y,z). W końcu rozdziału przeprowadzona została też analiza przynależności punktów próbkowań do opisanych twierdzeniu obszarów w kontekście przyszłych zastosowań do szacowania długości. Wyniki wskazały na istotność doboru odpowiedniego próbkowania przy szacowaniu wspomnianego parametru krzywej.

Rozdział 5 opisuje zagadnienie interpolacji splajnami kubicznymi klasy C^2. Splajny są funkcjami klasy C^2 i zapewniają gładkość (trajektorii i prędkości oraz ciągłość przyśpieszeń) w punktach łączenia kolejnych krzywych $\hat{\gamma}_i^S$ interpolujących Q_m. Dodatkowo, "sklejenie" ich likwiduje podobnie jak w przypadku przedziałowej interpolacji Lagrange'a i Hermita zjawisko Rungego, a błąd interpolacji jest mały, pomimo niskiego stopnia wielomianu. Klasa C^2 zapewnia gładkość we wnętrzu przedziałów i na sklejeniach, ciągłość pierwszej pochodnej sprawia, że interpolant $\hat{\gamma}^S = \{\hat{\gamma}_i^S\}_{i=0}^m$ nie ma ostrych rogów, a ciągłość drugiej pochodnej oznacza, że przyspieszenie jest określone w każdym punkcie i jest funkcją ciągłą. W rozdziale tym głównym wynikiem pracy jest twierdzenie o rzędzie zbieżności interpolanta do nieznanej krzywej oraz hipoteza - potwierdzone testami numerycznymi. Poruszane w tej sekcji zagadnienia opisują interpolację zmodyfikowanym splajnem zupełnym oraz interpolację splanem naturalnym (w połączeniu z parametryzacją wykładniczą) w kontekście szacowania trajektorii z zastosowaniem opisanych w Rozdziale 2 próbkowań i krzywych. Opisane w tym rozdziale eksperymenty dotyczą numerycznej weryfikacji stopnia zbieżności dla obu splajnów, konieczności użycia próbkowania mniej lub bardziej równomiernego oraz stosowania krzywej regularnej (dwa ostatnie zagadnienia zostały zweryfikowane dla splajna zupełnego $\hat{\gamma}^{MC}$). Został też przeprowadzony dowód teoretyczny o rzędzie zbieżności $\hat{\gamma}^{MC} \circ \psi^{MC}$ do γ. W odniesieniu do przybliżania długości zostały postawione dwie hipotezy dla obu typów splajnów oraz zweryfikowano je pozytywnie na podstawie testów numerycznych.

W Rozdziale 6 opisane zostały niektóre praktyczne zastosowania prezentowanych interpolacji do analizy obrazu medycznego i rekonstrukcji zagubionych (lub brakujących) klatek w filmie.

W kończącym rozprawę Rozdziale 7 podsumowano przeprowadzone testy oraz przedstawiono wnioski wynikające z przeprowadzonych badań, które potwierdziły, że interpolacja nieparametryczna w połączeniu z parametryzacją wykładniczą daje dobre możliwości szacowania trajektorii nieznanych krzywych zadanych tylko w postaci danych zredukowanych. Szacowanie rzędu zbieżności interpolanta do krzywej opierać się musi o założenia narzucone na próbkowania i krzywe, wtedy wyniki postawionych twierdzeń są analogiczne jak w klasycznej interpolacji parametrycznej. Warto zwrócić uwagę też na fakt iż parametr λ daje nam dodatkową możliwość manipulacji, bo mamy rodzinę krzywych interpolujacych przy zadanym schemacie i wtedy możemy wybrac taka lambdę by był spełniony dodatkowy warunek (np. możemy dopasować jego kształt do naszych założeń przy planowaniu trajektorii) z zachowaniem zbieżności, niższej bo stopnia 1 ale dalej zbieżności. Tymczasem stosowanie np. parametryzacji długością cięciwy czyli ze stałym parametrem $\lambda = 1$ pozwala uzyskać szybszy rząd zbieżności, ale nie mamy możliwości zmiany właściwości interpolanta. Na końcu rozdziału wskazano możliwości kontynuacji prac badawczych w zagadnieniach, które nie zostały ujęte w tej pracy doktorskiej.

Pracę zamyka spis bibliografii, rysunków, tabel oraz skorowidz pojęć.