Szczecin, 17.10.2024 r.

dr hab. inż. Marcin Korzeń, prof ZUT
Katedra Sztucznej Inteligencji i Matematyki Stosowanej
Wydział Informatyki, ZUT w Szczecinie
ul. Żołnierska 49, 71-210 Szczecin

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Magdaleny Wilkołazkiej pt. „Interpolacja Danych Zredukowanych na Bazie Krzywych Wielomianowych Trzeciego Stopnia"
recenzja wykonana na zlecenie Rady Dyscypliny Informatyka Techniczna i Telekomunikacja Politechniki Śląskiej

1 Cel i zakres rozprawy

Przedmiotem rozprawy są metody interpolacji za pomocą funkcji sklejanych, głównie wielomianów. W pracy rozważane są dwa zagadnienia interpolacji: parametryczna (gdy znana jest pełna informacja nt. węzłów interpolacji: $(t_i, q_i), i = 0, 1, \ldots, m$) oraz nieparametrycznej (gdy znana jest informacja nt. wartości funkcji w węzłach interpolacyjnych interpolacji: $(q_i), i = 0, 1, \ldots, m$). Zasadnicza różnica polega na tym, że w pierwszym przypadku interesującym zagadnieniem jest aproksymacji funkcji natomiast w drugim aproksymacja obrazu, zaniedbując w pewnym stopniu tempo przebiegania krzywej. Oba zagadnienia posiadają zastosowania. Klasyczne wyniki podręcznikowe odnoszą się głównie do interpolacji parametrycznej, natomiast w pracy znacznie silniej akcentowana jest interpolacja nieparametryczne tj. interpolacja na bazie danych zredukowanych. Dla przypadku interpolacji nieparametrycznej Kandydatka przedstawiła analogi klasycznych twierdzeń dotyczących oszacowań na tempo zbieżności aproksymacji w terminach stopnia gładkości interpolowanej krzywej, dla różnych rodzajów parametryzacji oraz średnicy podziału (lub próbkowania, ozn. δ_m) i przy różnych założeniach dotyczących próbkowania funkcji.

Praca na tle całej informatyki lokuje się obszarze analizy numerycznej i metod numerycznych oraz ogólnie obliczeń naukowych. Mimo, że główne wyniki są natury teoretycznej tj. sformułowano oraz przedstawiono dowody odpowiednich twierdzeń to jednak również przedstawiono własne procedury oraz wyniki licznych eksperymentów numerycznych ilustrujących jakość uzyskanych wyników teoretycznych. W końcowej części wskazano na możliwe zastosowania w obszarze modelowanie geometrycznego oraz fotogrametrii medycznej.

2 Zawartość rozprawy oraz główne wyniki

Recenzowana praca liczy 197 stron. Została ona podzielona na 7 rozdziałów w tym streszczenie i podsumowanie. Na końcu załączono spis wykorzystywanej bibliografii, spis rysunków i tabel oraz skorowidz. W dwóch początkowych rozdziałach sformułowano cele badawcze oraz omówiono główne schematy interpolacyjne: Newtona (węzły równomierne), Lagrange'a (węzły dowolne) oraz Hermite'a (zadane wartości funkcji i pochodnej na końcach przedziału), omówiono schematy interpolacyjne dla wielomianów sklejanych z różnymi warunkami na gładkość sklejania oraz podano klasyczne rezultaty określające dokładność aproksymacji za pomocą wielomianów sklejanych. W częsci tej sformułowano główne zagadnienie interpolacji nieparametrycznej. Przedstawiono tam również przygotowanie pojęciowe oraz teoretyczne wykorzystywane w zasadniczej części rozprawy.

W kolejnych rozdziałach 3, 4 i 5 stanowiących główną częśc rozprawy przedstawiono wyniki teoretyczne tj. sformułowania oraz dowody odpowiednich twierdzeń, oraz przedstawiono wyniki licznych eksperymentów numerycznych ilustrujących uzyskane wyniki teoretyczne, dla interpolatorów sklejanych spełniających warunki gładkości kolejno: C^0, C^1, i C^2.

W rozdziale 6 przedstawiono wybrane zastosowania przedstawionych schematów interpolacji nieparametrycznej do obliczania długości i pól powierzchni oraz przedstawiono zastosowanie interpolacji do rekonstrukcji klatek filmu.

Pracę kończy podsumowanie wyników oraz spis wykorzystywanej literatury liczący 49 pozycji.

Interpolacja nieparametryczna różni się od klasycznego zadania aproksymacji funkcji, ponieważ węzły (argumenty funkcji) nie są znane, a próbkowane są jedynie wartości funkcji węzłach. W takim ujęciu bezpośrednio możemy mówić o odtwarzaniu obrazu funkcji lub trajektorii natomiast sposób czy tempo przebiegania krzywej i sposób próbkowania są w ogólności nieznane. Autorka pokazała, że przy pewnych założeniach odnośnie nieznanego sposobu próbkowania funkcji (tzw. próbkowania mniej lub bardziej równomiernego) możemy w pewnym stopniu odtworzyć próbkowanie czyli wskazać nowe węzły oraz jednocześnie kontrolować oraz zapewnić pewną jakość aproksymacji. Jako rezultat główny wynik dostajemy, że dla pewnych parametryzacji i wybranych schematów interpolacyjnych możemy uzyskać jakość aproksymacji porównywalną do analogicznej interpolacji parametrycznej.

W pracy rozważane są sposoby odtwarzania węzłów w klasie tzw. parametryzacji wykładniczych zależnych od parametru λ, która obejmuje m.in. przypadki próbkowania równomiernego ($\lambda = 0$) oraz próbkowania równomierno–odległościowego ($\lambda = 1$, parametryzacja skumulowaną długością cięciw). W pracy przeanalizowano zbieżność 3 schematów interpolacyjnych 3-ciego stopnia : Lagrange'a (kontrolowane wartości funkcji w punktach sklejenia, interpolant w ogólności klasy jedynie C^0), Hermite'a (kontrolowane wartości funkcji i pochodnej w punktach sklejenia, interpolant kasy C^1), oraz interpolant kubiczny zupełny (zapewniający gładkość 2 rzędu, klasy C^2)

Główne wyniki uzyskane przez Kandydatkę rozszerzają i uzupełniają wcześniejsze wyniki Promotora oraz Lyle Noakesa dotyczą oszacowania tempa zbieżności aproksymacji w zależności od przyjętej parametryzacji wykładniczej (tj. parametru λ) dla różnych schematów interpolacyjnych przede wszystkim Lagerange'a i Hermite'a. Oszacowania dotyczące zbieżności skalują się z δ^α, gdzie delta jest średnicą podziału (maksymalną odległością pomiędzy węzłami) a α określa rząd lub tempo zbieżności.

Do pracy załączono skrypty programu Mathematica, ilustrujące wyniki eksperymentów numerycznych potwierdzających zachowanie interpolatorów zgodnie z rezultatami teoretycznymi wskazanymi w rozdziałach 3,4 i 5. Wyniki te potwierdzają dość zaskakujące na pierwszy rzut oka zachowanie interpolatorów dowiedzione wcześniej teoretycznie.

Przy założeniu odpowiedniej gładkości krzywej oraz próbkowania mniej lub bardziej równomiernego okazuje się, żę dla różnych wartościach parametru λ rząd zbieżności $\alpha(\lambda)$ nie zmienia się w sposób ciągły wraz z λ. Dla wartości parametru $\lambda \in [0, 1)$ ma słabszą zbieżność niż z w przypadku parametryzacji skumulowaną długością cięciwy (tj. $\lambda = 1$), gdzie w większości schematów udaje się udowodnić rząd zbieżności równy 4. Wyniki eksperymentów numerycznych przedstawione przez Autorkę są powtarzalne, wszystkie załączone skrypty działały poprawnie na posiadanej przeze mnie w wersji 11.3 programu Mathematica i zgodnie z wynikami przedstawionymi w pracy.

W pracy wskazano również na konieczność stosowania założeń dotyczących próbkowania mniej lub bardziej równomiernego z czego istotnie korzysta się w dowodach twierdzeń.

Poprawność przedstawionych wyników, mimo wskazanych poniżej pewnych uwag nie budzi zastrzeżeń. Autorka w poprawnej kolejności wprowadza główne pojęcia jak schematy interpolacyjne, parametryzację wykładniczą czy rzad zbieżności. Właściwie operuje głównymi narzędziami analitycznymi stosowanymi w dowodach jak: różne postacie wzoru Taylora, wzory na pochodną funkcji złożonej, własności różnic dzielonych oraz lemat Hadamarda. Autorka pokzazała, że umiejętnie korzysta z tych narzędzi analitycznych, miejscami wspomagając się systemem algebry komputerowej (w tym przypadku programem Mathematica). Praca zawiera pewne hipotezy i problemy wymagające jeszcze formalnych dowodów, które są motywowane eksperymentami numerycznymi.

Kandydatka wskazuje również, istotną aktywnością naukową, będąc współautorką (wraz z Promotorem) 4 artykułów w czasopismach m.in. (w Applied Mathematics and Computation, IF=3.5), 6 artykułów konferencyjnych (w tym m.in. ICCS 2020, konferencja CORE A, oraz ESM 2023 konferencja CORE B) oraz udział w licznych konferencjach.

3 Uwagi i problemy

1.

2. Zasadniczym celem pracy nie jest bezpośrednia aproksymacja funkcji, a tzw. interpolacja nieparametryczna (nieznane węzły znane jedynie wartości funkcji oraz pewne warunki nałożone na węzły). Zagadnienie to mogłbyć nieco lepiej zaakcentowane na wstępie zwłaszcza od strony potencjalnych zastosowań oraz uwypuklenia różnic i trudności względem interpolacji parametrycznej. Przykładowo ten rodzaj interpolacji posiada również istotne zastosowania (np. pole czy długosc krzywej określonej przez wartości w węzłach nie powinny istotnie zależeć od parametryzacji krzywej) oraz taki rodzaj próbkowania pojawia się często w praktyce np. w grafice komputerowej czy fotogrametrii, o czym wspomniano dopiero w dalszej części pracy. Samo klasyczne zadanie aproksymacji funkcji nie jest dobrym przykładem ilustracji omawianej interpolacji nieparametrycznej, należałoby raczej wskazać zadnienia typowe dla interpolacji nieparmetrycznej, np. wskazane w końcowej części zadania w modelowaniu geometrycznym czy fotogrametrii medycznej pasują tu znacznie lepiej.

3. O ile obliczanie długości za pomocą interpolacji sklejanej przeanalizowano dokładnie – wskazując np. oszacowania dokładności w zależności od rodzaju parametryzacji oraz prezentując

weryfikację eksperymentalną – to zagadnienie obliczania pól potraktowano bardzo ogólnikowo. Przedstawiono jedynie krótki eksperyment z obliczaniem pola nerki bez dokładnego omówienia procedury, nie jest jasne czy procedura istotnie korzysta z normalności całkowanego obszaru względem osi OY? wydaje się, że tak, ale brak dyskusji na ten temat. Nie jest jasne dlaczego, mając daną krzywą (w tym przypadku sklejaną) opisująca nerkę zadaną jawnie, nie policzono pola przez bezpośrednie całkowanie interpolanta.

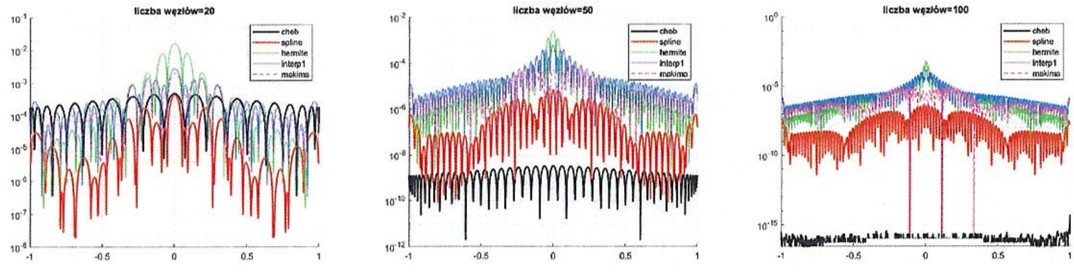
4. Skupienie uwagi na zagadnieniu aproksymacji funkcji na samym początku otwiera następujące zagadnienie. Na str. 14. rys. 1. Autorka wsakzuje na zjawisko Rungego (oscylacji na brzegach w przypadku interpolacji wielomianowej z węzłami równomiernymi) jako wadę interpolacji wielomianowej w ogólności oraz wskazuje na konieczność i zalety stosowania funkcji sklejanych w takich przypadkach. Agument ten jest czesto przytaczany przytaczany w podręcznikach jak w cytowanym podręczniku Fortuna, Macukow, 1993. Jednak w opinii recenzenta jest to duże uproszczenie, z którym trudno się zgodzić bezkrytycznie.

   W tym przypadku problem dotyczy głównie rozmieszczenia węzłów, a nie stosowania interpolacji wielomianowej w ogólności. Problem z interpolacją na węzłach równomiernie rozmieszczonych jest zjawiskiem dobrze znanym stosunkowo dobrze przeanalizowanym w literaturze (por. np. Platte R.B., Trefethen L.N., Kuijlaars A.B.J., Impossibility of fast stable approximation of analytic functions from equispaced samples, SIAM Rev., 2011, vol. 53, no. 2, s. 308–318). Zajwisko to jest właściewie opisane rownież w cytowanej przez Autorkę pracy C. Boora z 1985 r. (pozycja [24]). Schematy interpolacyjne oparte na zerach wielomianów ortogonalnych nie posiadają tych wad i ogólnie w pracy brakuje uczciwego doniesienia się do aproksymacji (w tym interpolacji) wielomianami wyższych rzędów. Właściwsze byłoy tu podkreślenie odmienności obu zadań np. w klasynym ujęciu aproksymowana funkcja może być próbkowana w sposób dowolny.

   Aby dołożyć swój głos do dyskusji (o wyższości interpolacji krzywymi sklejanymi nad interpolacją wielomianową), proszę przeanalizować krótki eksperyment w programie Matlab:

```
n= 100
fun = @(t) 1./(1+6*t.*t)
ti = linspace(-1,1,n)
yi = f(ti)
i1n = @(t) interp1(ti, yi, t, 'cubic')
sn = @(t) spline(ti, yi, t)
pn = @(t) pchip(ti, yi, t)
mn = @(t) makima(ti, yi, t)
cf = chebfun(@(t) 1./(1+6*t.*t), [-1,1], 'trunc', n)

figure()
title("liczba węzłów=" + n)
hold on
t = linspace(-1,1, 1000)
```



6. Praca została złożona w dyscyplinie Informatyka Techniczna i Telekomunikacja, więc nie powinna być to więc praca wyłącznie teoretyczna. Wartościowe są w tym kontekście załączone eksperymenty numeryczne oraz przykłady zastosowań w modelowaniu graficznym. Natomiast wskazane byłoby dodatkowo również zwrócić uwagę na pewne aspekty złożoności obliczeniowej, zwłaszcza w przypadkach wyznaczania współczynników oraz obliczania wartości funkcji np.: w odniesieniu do interpolacji wielomianowej (por. np. pracę Berrut, Trefethen, Barycentric Lagrange Interpolation, SIAM Rev., 2004, vol. 64, no. 3, s. 501–517, czy algorytm De Casteljau). Dyskusyjna jest również efektywność zaprezentowanej procedury całkowania oraz nawet jej poprawność wymaga pewnego komentarza.

7. Praca zawiera odwołania do 49 pozycji literatury. Część z nich to wcześniejsze prace prace Promotora oraz wspólne prace Kandydatki z Promotrem, świadczy to pozytywnie o kontynuacji prac rozpoczętych wcześniej. Pozostała część prac również ściśle poświęcona jest tematyce interpolacji za pomocą funkcji sklejanych. Trochę brakuje w pracy szerszego przeglądu rozwiązań konkurencyjnych, jak wspomniana interpolacja na węzłach wielomianów ortogonalnych, krzywe Beziera czy krzywe B-sklejane. Zwłaszcza te dwa ostanie podejścia są często wykorzystywane w grafice komputerowej i mogą być rozważane jako rozwiązania konkurencyjne.

3.1 Niektóre uwagi o charakterze redakcyjnym

1. Str. 7: w wyrażeniu "$\gamma \in C^{r+1}$", użyte r jest bez związku z tekstem dalszym i wcześniejszym, dodając w domyśle "dla dowolnego r" wynik w ogólności nie jest prawdziwy, powinno być klasy C^4. W dalszej części np. tw. 3.1 (str. 39) jest już poprawnie.

2. Str. 15 i inne: Nazwisko i nazwa głównego narzędzia analitycznego pisane jest konsekwentnie "Tylora" powinno być "Taylora".

3. Str 12, tab. 1. Brakuje niektórych często pojawiających się w tekście symboli, np.: δ, δ_m , które używane są w tekście często.

4. Str. 15: definicja funkcji klasy C^k pojawia się później niż pierwsze wystąpienie tego pojęcia np. lemat 2.5.

5. Str. 17, 8 linia od dołu: powinno być raczej $O(\delta^{\alpha(\lambda)})$

6. Str. 18: zamienne i niekonsekwentne użycie $\gamma\prime$ i $\dot{\gamma}$.

7. Str. 33: Coś nie tak jest zapisem (49) powinno być raczej: $i = 0, 3, \ldots, m$, lub t_{3i}, t_{3i+1}, w przeciwnym razie interpolanty będą nachodzić na siebie. W rozdziale 3.1 i na rysunku 19 indeksacja jest już prawidłowa.

8. Str. 36. wprowadzono tu pojęcie $O(\cdot)$ w postaci wektorowej, które było używane już wcześniej np. na stronie 17

9. Str. 41, linia 10: powinno być $\alpha(\lambda = 1) = 3$.

10. Str. 18, 24 i inne, nie wskazano rodzaju za normy, Autorka stara sie używać $\|\cdot\|$ dla normy euklidesowej i w większości przypadków jest to robione konsekwentnie, ale przynajmniej na str. 24, 7 linia od góry raczej chodzi o normę jednostajną.

4 Podsumowanie

Mimo kilku uwag o charakterze polemicznym należy podkreślić, że praca jest napisana w sposób przemyślany, cześć teoretyczna oraz oryginalny wkład Autorki nie budzą zastrzeżeń. Praca zawiera oryginalne rozwiązanie problemu naukowego w tym przypadku analizy zbieżności wybranych schematów interpolacji nieparametrycznej. Załączone eksperymenty numeryczne dobrze ilustują uzyskane wyniki teoretyczne. Autorka pokazała, że potrafi sformułować i rozwiązać istotne zagadnienie naukowe oraz umie posługiwać się zarówno aparatem matematycznym, jak i sprawnie przeprowadzać eksperymenty numeryczne z użyciem komputera. Podsumowując stwierdzam, że przedłożona rozprawa spełnia wymagania Ustawy „o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki" z dnia 13.03.2003 r., z późniejszymi zmianami, w zakresie wymagań stawianych rozprawom doktorskim. Wobec powyższego wnioskuję o dopuszczenie Autora do publicznej obrony.