ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ

Andrzej POLAŃSKI

WYBRANE ZAGADNIENIA STABILNOŚCI UKŁADÓW LINIOWYCH O ZMIENNYCH W CZASIE PARAMETRACH

AUTOMATYKA
Z. 128

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

GLIWICE 2000

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 1464

Andrzej POLAŃSKI

WYBRANE ZAGADNIENIA STABILNOŚCI UKŁADÓW LINIOWYCH O ZMIENNYCH W CZASIE PARAMETRACH

GLIWICE 2000

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0434-0760

Wydawnictwo Politechniki Śląskiej
ul. Akademicka 5, 44-100 Gliwice
tel./fax 237-13-81, www.wydawnictwo.polsl.gliwice.pl,
wydawnictwo@polsl.gliwice.pl

Nakład 110+83 egz. Ark. wyd. 15. Ark. druk. 11,25. Papier offset. kl. III 70x100 80 g
Oddano i podpisano do druku 22.05.2000 r. Druk ukończono w maju 2000 r.
Zam. 20/2000

Fotokopie, druk i oprawę wykonano w UKiP sc, *J&D Gębka*,
Gliwice, ul. Pszczyńska 44, tel./fax 231-87-09

Spis treści

Wstep **11**

1. Układy liniowe o zmiennych w czasie parametrach **15**

1.1. Model zmian parametrów w czasie . . . 15
1.2. Definicje stabilności . . . 16
1.3. Sformułowanie rozważanych problemów . . . 18
1.4. Inkluzje różniczkowe . . . 18
1.5. Modelowanie układów o zmiennych w czasie parametrach . . . 19
1.5.1. Obwód RLC . . . 19
1.5.2. Wahadło . . . 21
1.5.3. Odwrócone wahadło . . . 23
1.5.4. Kompartmentalny model wzrostu komórek nowotworowych . . . 24
1.5.5. Układy regulacji automatycznej . . . 25

2. Zastosowania teorii Floqueta **31**

2.1. Twierdzenie Floqueta . . . 31
2.1.1. Określenia . . . 33
2.1.2. Warunek asymptotycznej stabilności . . . 33
2.1.3. Przypadek rzeczywisty . . . 34
2.1.4. Przykład . . . 35
2.2. Numeryczne obliczanie multiplikatorów . . . 36
2.2.1. Wahadło o ruchomym punkcie zawieszenia . . . 37
2.2.2. Odwrócone wahadło o ruchomym punkcie podparcia . . . 39
2.2.3. Układ regulacji z zależną od czasu nieliniowością sektorową . . . 41
2.3. Rezonans parametryczny . . . 43
2.3.1. Częstotliwości krytyczne rezonansu parametrycznego . . . 45
2.3.2. Przykład . . . 48
2.4. Uwagi i komentarze . . . 51

3. Kwadratowe funkcje Lapunowa **53**

3.1. Układ liniowy o stałych współczynnikach . . . 54

3.2. Absolutna stabilność i niestabilność . . . 57
3.3. Warunki nieistnienia wspólnych funkcji Lapunowa . . . 60
3.4. Liniowe nierówności macierzowe . . . 61
3.5. Przykłady obliczeniowe . . . 63
3.5.1. Wahadło o ruchomym punkcie zawieszenia . . . 63
3.5.2. Odwrócone wahadło o ruchomym punkcie podparcia . . . 64
3.5.3. Kaskadowy układ regulacji ze zmiennymi wzmocnieniami . . . 66
3.6. Kryteria częstotliwościowe . . . 69
3.6.1. Nierówność macierzowa . . . 69
3.6.2. Lemat Kalmana - Jakubowicza - Popova . . . 70
3.6.3. Częstotliwościowe kryteria absolutnej stabilności . . . 72
3.6.4. Częstotliwościowe kryteria absolutnej niestabilności . . . 78
3.6.5. Kryterium Popova . . . 80
3.7. Przykłady obliczeniowe . . . 86
3.7.1. Układ z podwójnym całkowaniem i korektorem PD . . . 87
3.7.2. Kaskadowy układ regulacji ze zmiennymi wzmocnieniami . . . 89
3.8. Uwagi i komentarze . . . 92

4. Wielościenne i przedziałami liniowe funkcje Lapunowa 93
4.1. Osłabienie założenia o gładkości funkcji $V(x)$ w twierdzeniach Lapunowa 94
4.1.1. Obliczanie pochodnych Diniego . . . 96
4.2. Zastosowanie wypukłej funkcji Lapunowa do problemu absolutnej stabilności . . . 96
4.3. Norma jako funkcja Lapunowa dla układu liniowego . . . 100
4.3.1. Norma macierzy . . . 101
4.3.2. Norma logarytmiczna macierzy . . . 102
4.3.3. Warunki wystarczające . . . 104
4.3.4. Warunki konieczne . . . 105
4.3.5. Przestrzenie o własności S . . . 107
4.3.6. Konstrukcja funkcji Lapunowa zadanych przez normę dla układu liniowego . . . 109
4.4. Analiza absolutnej stabilności . . . 118
4.4.1. Konstruktywny dowód twierdzenia Mołczanowa Piatnickiego . . 119
4.4.2. Skalowanie . . . 123
4.4.3. Warunek wystarczający absolutnej stabilności . . . 123
4.4.4. Przykład obliczeniowy . . . 124
4.5. Wielościan definiowany przez listę wierzchołków . . . 126
4.6. Zagadnienia obliczeniowe . . . 128
4.6.1. Krok 1 . . . 130

4.6.1. Krok 1 . . . 130
4.6.2. Krok 2 . . . 131
4.6.3. Krok 3 . . . 132
4.7. Przykłady obliczeniowe . . . 134
4.7.1. Kaskadowy układ regulacji ze zmiennymi wzmocnieniami . . . 134
4.7.2. Układ z podwójnym całkowaniem i korektorem PD . . . 134
4.8. Przedziałami liniowe funkcje Lapunowa . . . 136
4.8.1. Definicja przedziałami liniowej funkcji Lapunowa . . . 137
4.8.2. Pochodna wzdłuż trajektorii . . . 139
4.8.3. Pochodna we wnętrzu stożka C_m . . . 140
4.8.4. Pochodna dla promieni x_k . . . 140
4.8.5. Nieciągłość . . . 141
4.8.6. Wektory pochodnych funkcji $V(x)$ . . . 141
4.8.7. Absolutna stabilność i absolutna niestabilność . . . 142
4.8.8. Przykład . . . 145
4.9. Strategie destabilizujące . . . 147
4.10. Obliczanie funkcji $V(x)$ . . . 149
4.10.1. Twierdzenia o istnieniu strategii destabilizującej . . . 150
4.10.2. Skalowanie . . . 152
4.10.3. Przykład obliczeniowy - kaskadowy układ regulacji . . . 154
4.11. Uwagi i komentarze . . . 156

5. Podsumowanie 161
5.1. Metody bazujące na teorii Floqueta . . . 161
5.2. Zastosowanie kwadratowych funkcji Lapunowa . . . 163
5.3. Wielościenne i przedziałami liniowe funkcje Lapunowa . . . 164

Literatura 167

Streszczenie 177

Contents

Introduction **11**

1. Linear systems with time-varying parameters **15**

1.1. Model of parameters time-change 15

1.2. Stability definitions 16

1.3. Formulations of the analyzed problems 18

1.4. Differential inclusions 18

1.5. Modeling of systems with time-varying parameters 19

1.5.1. RLC circuit 19

1.5.2. Pendulum 21

1.5.3. Inverted pendulum 23

1.5.4. Compartmental model of neoplastic cells growth 24

1.5.5. Automatic control systems 25

2. Applications of Floquet theory **31**

2.1. Floquet theorem 31

2.1.1. Definitions 33

2.1.2. Asymptotic stability condition 33

2.1.3. Real case 34

2.1.4. Example 35

2.2. Numerical calculation of Lyapunov exponents 36

2.2.1. Pendulum with time-varying position of the swing point 37

2.2.2. Inverted pendulum with mobile fulcrum 39

2.2.3. Control system with time-varying sector nonlinearity 41

2.3. Parametric resonance 43

2.3.1. Critical frequencies of parametric resonance 45

2.3.2. Example 48

2.4. Remarks and comments 51

3. Quadratic Lyapunov functions **53**

3.1. Linear time-invariant system 54

3.2. Absolute stability and absolute instability . . . 57
3.3. Conditions that exclude existence of simultaneous Lyapunov function . 60
3.4. Linear matrix inequalities . . . 61
3.5. Numerical examples . . . 63
3.5.1. Pendulum with time-varying position of the swing point . . . 63
3.5.2. Inverted pendulum with mobile fulcrum . . . 64
3.5.3. Cascaded control system with time-varying gains . . . 66
3.6. Frequency criteria . . . 69
3.6.1. Matrix inequality . . . 69
3.6.2. Kalmana - Yakubovich - Popov lemma . . . 70
3.6.3. Frequency criteria of absolute stability . . . 72
3.6.4. Frequency criterion of absolute instability . . . 78
3.6.5. Popov criterion . . . 80
3.7. Numerical examples . . . 86
3.7.1. Double integrator with a phase lead element . . . 87
3.7.2. Cascaded control system with time-varying gains . . . 89
3.8. Remarks and comments . . . 92

4. Polyhedral and piecewise linear Lyapunov functions 93
4.1. Dropping the assumtion of smoothness of the function $V(x)$ in Lyapunov theorems . . . 94
4.1.1. Calculating Dini derivatives . . . 98
4.2. Application of convex Lyapunov function to the absolute stability problem 96
4.3. Norm as a Lyapunov function for linear system . . . 100
4.3.1. Matrix norm . . . 101
4.3.2. Logarithmic matrix norm . . . 102
4.3.3. Sufficient conditions . . . 104
4.3.4. Necessary conditions . . . 105
4.3.5. Spaces with **S** property . . . 107
4.3.6. Construction of Lyapunov function defined by norm for linear system . . . 109
4.4. Absolute stability analysis . . . 118
4.4.1. Constructive proof of Molchanov - Pyatnitskii theorem . . . 119
4.4.2. Scaling . . . 123
4.4.3. Sufficient condition for absolute stability . . . 123
4.4.4. Numerical example . . . 124
4.5. Polyhedron defined by a list of vertices . . . 126
4.6. Computational aspects . . . 128
4.6.1. Step 1 . . . 130

4.6.2. Step 2 . . . 131
4.6.3. Step 3 . . . 132
4.7. Numerical examples . . . 134
4.7.1. Cascaded control system with time-varying gains . . . 134
4.7.2. Double integrator with a phase lead element . . . 134
4.8. Piecewise linear Lyapunov functions . . . 136
4.8.1. Definition of a piecewise linear Lyapunov function . . . 137
4.8.2. Derivative along trajectory . . . 139
4.8.3. Derivative inside the cone C_m . . . 140
4.8.4. Derivative for rays x_k . . . 140
4.8.5. Discontinuity . . . 141
4.8.6. Vectors of derivatives of the function $V(x)$ . . . 141
4.8.7. Absolute stability and absolute instability . . . 142
4.8.8. Example . . . 145
4.9. Destabilizing strategies . . . 147
4.10. Calculating the function $V(x)$ . . . 149
4.10.1. Theorems on the existence of destabilizing strategies . . . 150
4.10.2. Scaling . . . 152
4.10.3. Numerical example - cascaded control system . . . 154
4.11. Remarks and comments . . . 156

5. Conclusion 161
5.1. Methods basing on Floquet theory . . . 161
5.2. Application of quadratic Lyapunov funcitons . . . 163
5.3. Polyhedral and piecewise linear Lyapunov functions . . . 164

References 167

Summary 177

Wstęp

Przedmiotem niniejszej pracy są zagadnienia związane ze stabilnością układów opisywanych przez liniowe równania różniczkowe o zmiennych w czasie współczynnikach. Modele badanych układów wykorzystujące zapis w postaci równań stanu można przedstawić następująco:

$$\dot{x} = A(t)x. \tag{0.1}$$

W przedstawionym wzorze $x \in R^n$ jest n-wymiarowym wektorem stanu, $A(t) \in R^{n \times n}$ - zmienną w czasie macierzą stanu.

Gdy macierz stanu jest stała i znana ($A(t) = A = \text{const}$), to (0.1) redukuje się do układu równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach, dla którego istnieje kompletna teoria stabilności (np. [46], [45], [25], [23]).

Jeśli przebiegi czasowe opisujące zmiany parametrów są znane (znana jest funkcja $A(t)$), to można, czasem analitycznie, a zawsze numerycznie, wyznaczyć rozwiązanie dla dowolnego warunku początkowego $x(t_0)$ i w ten sposób zbadać własności układu (0.1). Dla zmian parametrów opisywanych przez funkcje okresowe istnieją ponadto twierdzenia wiążące stabilność z wartościami własnymi pewnych, możliwych do numerycznego wyznaczenia, macierzy (macierzy monodromii). Twierdzenia takie uzyskuje się na bazie teorii Floqueta (np. [25], [23], [129]).

Znajomość dokładnych przebiegów czasowych funkcji opisujących zmiany parametrów często jednak nie może być przyjęta za wiarygodne założenie przy opracowywaniu modelu układu dynamicznego. W celu zbadania własności układu lub poprawności konstrukcji konieczne okazuje się przeanalizowanie zachowania się układu nie dla jednej funkcji, lecz dla całej klasy (rodziny) funkcji opisujących dopuszczalne zmiany parametrów. Przy tym, klasa tych funkcji może być definiowana w różny sposób, co prowadzi do różnego typu problemów. Problemy takie mogą być już znacznie trudniejsze do rozwiązania zarówno analityczego, jak i numerycznego. Wiedza o własnościach tego typu układów jest bardziej ograniczona, a szereg zagadnień pozostaje nadal otwartych. Badanie takich układów jest jednym z ważnych kierunków współczesnej teorii systemów. Poświęcona jest im obszerna literatura, między innymi wymienione poniżej monografie lub ich fragmenty.

W [129], [25], [23], [67], [52], [1] można znaleźć wyniki dotyczące stabilności układu (0.1), bazujące na zastosowaniach teorii Floqueta. Układy o zmiennych parametrach

można modelować w postaci inkluzji różniczkowych, którym poświęcone są prace [3], [4], [122]. Zastosowania teorii stabilności Lapunowa do badania układów ze zmiennymi parametrami opisane są w [25], [23], [39], [83], [107]. W [61] (zob. także artykuły [38], [99], [121]) przedstawia się wykorzystanie do analizy własności układu (0.1) metod optymalizacji dynamicznej.

Rozwój metodologii badań układu (0.1) inspirowany jest przez szereg różnorodnych zastosowań. Do najstarszych należą teoria drgań [67] oraz teoria układów Hamiltonowskich w mechanice [129]. Głównym podejściem stosowanym w tych dziedzinach jest wykorzystanie teorii Floqueta i różnorodnych wyników analitycznych na jej bazie wyprowadzanych. Szeroki obszar badań nad wpływem zmian parametrów na własności systemu (0.1) stanowią układy sterowania automatycznego, omawiane np. w [109], [49], [98] [61], [119], [58], [35], [51]. Stosuje się tu różnorodne metody, między innymi teorię stabilności Lapunowa, metody częstotliwościowe, a także wyniki ogólnej teorii systemów oraz analizy funkcjonalnej. Te ostatnie pozwalają badać stabilność układów nieskończenie wymiarowych, np. systemów z opóźnieniami lub linii długich [51], [35]. W teorii sterowania automatycznego ważne miejsce zajmuje także badanie stabilności układów postaci (0.1) o bardzo wolno zmiennych parametrach lub też rodzin niezmiennych w czasie układów liniowych, których parametry przebiegają pewnien zakres. Takie problemy można uważać za graniczną postać powyżej opisywanych. Wyniki z tej dziedziny można znaleźć w [6], [20].

W niniejszej pracy omówiony jest pewien wybór zagadnień poruszanych w literaturze. Większość wyników dotyczy konkretnego modelu zmian parametrów w czasie dokładniej opisanego w następnym rozdziale. W modelu tym parametry zadane są mierzalnymi funkcjami czasu o wartościach w pewnych zadanych zbiorach wielościennych. Dla układów z przedstawionej klasy bada się podstawowe zagadnienie stabilności układu (0.1). W aspekcie możliwości zmian parametrów w czasie zagadnienie stabilności rozbija się na następujące problemy częściowe. Dla jakiej klasy funkcji lub dla jakiego zakresu dopuszczalnych zmian parametrów układ (0.1) zawsze pozostaje stabilny (niestabilny) ? Dla jakich zmian (przebiegów czasowych) parametrów układu (0.1) następuje utrata stabilności ?

Rozważa się dwa sposoby podejścia do przedstawionych problemów. Pierwszy z nich obejmuje wyniki wywodzące się z teorii Floqueta. Podstawowym założeniem w tym podejściu jest okresowość zmian parametrów w czasie. Z praktycznego punktu widzenia założenie o okresowości nie jest jednak ograniczeniem dla uzyskiwanych rezultatów, dlatego że sygnały okresowe stanowią bardzo szeroką klasę pobudzeń. Drugie podejście tworzą metody wykorzystujące twierdzenia teorii stabilności Lapunowa. Podstawowa idea polega na dobraniu takiej funkcji (funkcji Lapunowa), której pochodna wzdłuż trajektorii systemu (0.1) jest, niezależnie od zmian wartości parametrów zadanych przez $A(t)$, funkcją określonego znaku. Najwięcej rezultatów publikowanych w literaturze dotyczy funkcji Lapunowa zadawanych przez formy kwadratowe lub formy kwadratowe z dodatkowymi składnikami całkowymi. Stosuje się także funkcje Lapunowa zadawane nieparametrycznie, przez normy lub funkcje indukowane zbiorami wielościennymi, a także przez funkcje definiowane przedziałami.

Przedstawia się także pewne wyniki dotyczące innych modeli zmian parametrów układu (0.1) niż podstawowy model założony w pracy. W ich skład wchodzą twierdzenia teorii rezonansu parametrycznego oraz metoda Popova. Wyniki teorii rezonansu parametrycznego pozwalają skomentować i uzasadnić pewne własności zaobserwowanych zależności wykładnika Lapunowa układu od parametrów pobudzenia. Z kolei argumentem za przedstawieniem twierdzenia Popova jest sposób jego wyprowadzenia (z zastosowaniem funkcji Lapunowa) analogiczny do metod zaprezentowanych w pracy, a także możliwość zobrazownia wpływu intensywności pobudzenia parametrycznego na warunki stabilności układu (0.1).

W pracy, opisując metody badania układu (0.1), starano się przeanalizować specyfikę oraz zakres stosowalności różnych podejść. Przedstawiono sytuacje, gdy zastosowanie różnych metod daje równoważne rezultaty. Dla przykładowych zadań wykonywano obliczenia numeryczne i symulacje ilustrujące opisywane metody. Analizę przykładów obliczeniowych realizowano z wykorzystaniem oprogramowania do obliczeń naukowych i inżynierskich, przede wszystkim ze środowiska Matlab - Simulink. Wykorzystywano także specjalistyczne oprogramowanie przeznaczone do rozwiązywania dużych problemów programowania liniowego. Starano się te same przykłady kontynuować przez kilka rozdziałów, co ułatwia wyrobienie sobie poglądu na zalety i wady opisywanych podejść, a także pozwala porównać różne metody. Analiza obliczeniowa zwykle pozwala głębiej zrozumieć rozważany problem, a niejednokrotnie dostrzec nowe fakty i prawidłowości. Daje doświadczenia dotyczące stopnia trudności problemów i złożoności obliczeniowej algorytmów. Umożliwia porównywanie różnych metod. Pokazuje też popełniane błędy.

Część z przedstawionych metod analizy stabilności układu (0.1) pochodzi z oryginalnych publikacji autora pracy. Należą do nich przede wszystkim rezultaty przedstawione w rozdziale czwartym, dotyczące zastosowania funkcji wielościennych oraz przedziałami liniowych. Zebranie i usystematyzowanie wyników kilku publikacji pozwoliło na stworzenie kompletnej medotologii obliczeniowej badania układu (0.1). Stworzona metodologia jest praktycznym rozwinięciem twierdzeń sformułowanych po raz pierwszy przez Mołczanowa i Piatnickiego [115], [116], [62]. W oryginalnych sformułowaniach twierdzenia te prowadziły do macierzowych warunków algebraicznych, których nie udawało się praktycznie sprawdzać. W publikacjach [70]-[74] przedstawione zostały metody, które pozwalają numerycznie weryfikować warunki Mołczanowa i Piatnickiego (oraz ich rozwinięcia), a także wyznaczać na ich podstawie odpowiednie wielościenne lub przedziałami liniowe funkcje Lapunowa. Wprowadzone metody numeryczne głównie wykorzystują algorytm programowania liniowego. Układ pracy oraz przebadanie

szeregu przykładów obliczeniowych pozwalają w wyczerpujący sposób porównać proponowane metody obliczeniowe z innymi podejściami znanymi z literatury.

Układ pracy jest następujący. W rozdziale pierwszym zebrane są zagadnienia wprowadzające do dalszej problematyki. Opisany jest model zmian parametrów wykorzystywany w pracy oraz sformułowana jest lista problemów rozważanych w pracy. Podane są także przykłady modelowania układów fizycznych, które zawierają zmienne w czasie parametry. Ważna część przedstawionych przykładów dotyczy zmian parametrów w układach sterowania. W rozdziale drugim omawia się zastosowanie teorii Floqueta do badania stabilności układów o okresowo zmiennych parametrach. W rozdziałach trzecim i czwartym analizuje się stabilność układu (0.1) z zastosowaniem funkcji Lapunowa. Rozdział trzeci poświęcony jest kwadratowym (parametrycznym) funkcjom Lapunowa. Przedstawiono tu także związane z tym podejściem warunki częstotliwościowe stabilności. W rozdziale czwartym omawia się nieparametrycznie definiowane funkcje Lapunowa, zadawane w postaci funkcji wypukłych, norm, funkcji indukowanych przez hiperwielościany, a także funkcji przedziałami liniowych.

W pracy stosuje się standardowy system oznaczeń.

Autor dziękuje osobom, które przez dyskusje i krytykę przyczyniły się do rozwinięcia i usystematyzowania rezultatów składających się na niniejszą pracę: prof. R. Gessingowi, prof. A. Świerniakowi, prof. K. Wojciechowskiemu, dr. hab. Z. Dudzie oraz wszystkim pracownikom Zakładu Teorii Sterownia Instytutu Automatyki Politechniki Śląskiej.

Autor wyraża również wdzięczność opiniodawcom niniejszej pracy prof. J. Kudrewiczowi oraz dr. hab. P. Grabowskiemu za opracowanie wnikliwych recenzji, wiele ważnych uwag merytorycznych, zwrócenie uwagi na nieznane wcześniej autorowi pozycje literaturowe, a także wskazanie szeregu błędów oraz niejasności w pierwszej wersji maszynopisu.

Autor składa też podziękowania Pani Redaktor serii Automatyka Zeszytów Naukowych Politechniki Śląskiej dr inż. A. Skrzywan-Kosek za wiele cennych uwag redakcyjnych.

Końcowe etapy pracy były finansowane przez Komitet Badań Naukowych, częściowo z grantu KBN 8 T 11A 012 19, a częściowo z prac BW.

Rozdział 1

Układy liniowe o zmiennych w czasie parametrach

Rozdział ten poświęcony jest zebraniu pojęć i problemów, które stanowią wspólną bazę dla dalszej części pracy. Definiuje się tu stosowany dalej model zmian parametrów w czasie oraz formułuje się analizowane w dalszych rozdziałach pracy problemy. Przedstawia się także przykłady modeli układów, w których występują zmienne w czasie parametry. Przykłady te ilustrują różne mechanizmy prowadzące do zmian parametrów w ukladach liniowych oraz pozwalają zinterpretować znaczenie formułowanych problemów.

1.1. Model zmian parametrów w czasie

Elementy macierzy $A(t)$ we wzorze (0.1) zależą od czasu. Zakłada się, że zmiany tych elementów w czasie opisane są funkcjami mierzalnymi takimi, że ich wartości należą do pewnego znanego zbioru, tzn. dla każdej chwili czasu t zachodzi:

$$A(t) \in \mathcal{A}. \tag{1.1}$$

Przyjmuje się (por. np. [14, str. 61]), że zbiór $\mathcal{A} \subset R^{n\times n}$, definiujący możliwe zakresy zmian parametrów, jest następującym, wypukłym hiperwielościanem:

$$\mathcal{A} = \{A : A = \sum_{i=1}^{N} A_i\alpha_i\}, \tag{1.2}$$

$$\alpha_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1. \tag{1.3}$$

Inaczej mówiąc, istnieją mierzalne funkcje $\alpha_1(t) \geq 0, \ldots, \alpha_N(t) \geq 0$, $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i(t) = 1$ takie, że

$$A(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i\alpha_i(t). \tag{1.4}$$

Macierze A_i, $i = 1, 2, \ldots N$ nazywają się *macierzami narożnymi*, natomiast układy liniowe

$$\dot{x} = A_i x, \tag{1.5}$$

$i = 1, 2, \ldots N$ nazywamy *układami narożnymi*. Hiperwielościan $\mathcal{A} \subset R^{n \times n}$ jest powłoką wypukłą ([37, str. 14]) macierzy narożnych A_i, $i = 1, 2, \ldots N$.

Na ogół w rozważanych problemach tylko część z elementów macierzy $A(t)$ może zmieniać się w czasie, reszta natomiast pozostaje stała. Jeśli liczba zmieniających się w czasie elementów macierzy $A(t)$ wynosi K ($K < n^2$), to naturalne jest zawężenie przestrzeni, której podzbiorem jest $\mathcal{A}$, do przestrzeni R^K, tzn., jeśli przez $a(t)$ oznaczymy wektor zmieniających się parametrów układu (0.1), wybranych z elementów macierzy $A(t)$, $a(t) = [a_1(t), \ldots a_K(t)]^T$, to mamy:

$$a(t) \in \mathcal{A} = \{a : a = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{a}_i \alpha_i\}, \tag{1.6}$$

$$a(t) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{a}_i \alpha_i(t), \tag{1.7}$$

przy czym przedstawienie (1.6) lub (1.7) wynika z (1.2) lub (1.4); wierzchołki $\mathbf{a}_i$ są wektorami zbudowanymi z odpowiednich elementów macierzy narożnych A_i, a współczynniki α_i i funkcje $\alpha_i(t)$ są jednakowe odpowiednio w (1.2) i (1.6) oraz w (1.4) i (1.7).

Przy zadanym przebiegu $A(t)$ spełniającym (1.1) zawsze można znaleźć funkcje $\alpha_i(t)$, występujące w przedstawieniu (1.4) i (1.7). Jeśli hiperwielościan (1.6) jest simpleksem, tzn. $N = K$, to łatwo na podstawie (1.6) wyliczyć:

$$\alpha(t) = [\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_N]^{-1} a(t), \tag{1.8}$$

gdzie $\alpha(t) = [\alpha_1(t) \ldots \alpha_N(t)]^T$, a $[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_N]$ jest macierzą zbudowaną z kolumn $\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_N$.

Ogólnie natomiast, funkcje te nie są wyznaczone jednoznacznie. Aby efektywnie wyliczyć funkcje $\alpha_i(t)$ dla zadanego przebiegu $a(t)$, można dokonać (niejednoznacznie wyznaczonej) dekompozycji symplicjalnej hiperwielościanu (1.6) [31] (podziału na simpleksy), a następnie dla każdego simpleksu stosować wzór (1.8).

1.2. Definicje stabilności

Układy o zmiennych w czasie parametrach wykazują bardziej złożone typy zachowań od układów, których parametry są stałe. Aby je scharakteryzować wprowadza

się odpowiednie definicje stabilności, niestabilności i destabilizacji, które podajemy poniżej.

Definicja 1. (Absolutna stabilność [116], [109]). Układ (0.1), (1.1) nazywa się *absolutnie stabilny*, jeśli, przy ustalonym t_0, dla każdej funkcji $A(t)$ z klasy (1.1) zerowy punkt równowagi równania (0.1) jest globalnie asymptotycznie stabilny i, dodatkowo, stabilność ta jest jednostajna ze względu na możliwe $A(t)$ z klasy (1.1). Inaczej mówiąc, dla dowolnej funkcji $A(t)$ spełniającej (1.1) zachodzi:

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \parallel x_0 \parallel < \delta \Rightarrow \parallel x(t; t_0, x_0) \parallel < \varepsilon, \text{ dla } t > t_0 \tag{1.9}$$

oraz

$$\forall_{\varepsilon>0} \forall_{x_0} \exists_{T>0} \forall_{t \geq t_0+T} \parallel x(t; t_0, x_0) \parallel < \varepsilon, \tag{1.10}$$

gdzie $x(t; t_0, x_0)$ oznacza wartość w chwili t takiego rozwiązania, które dla t_0 przyjmuje wartość x_0. Jednostajność ze względu na możliwe $A(t)$ z klasy (1.1) oznacza, że liczby δ i T w powyższych warunkach nie zależą od $A(t)$.

Warunkiem koniecznym absolutnej stabilności jest, aby wszystkie macierze narożne A_i, $i = 1, 2 \ldots, N$ były macierzami asymptotycznie stabilnymi.

Definicja 2. (Absolutna niestabilność [117]). Układ (0.1), (1.1) nazywa się *absolutnie niestabilny*, jeśli, przy ustalonym t_0, dla każdej funkcji $A(t)$ z klasy (1.1) zerowy punkt równowagi równania (0.1) jest niestabilny jednostajnie ze względu na możliwe $A(t)$ z klasy (1.1). Inaczej mówiąc, dla dowolnej funkcji $A(t)$ spełniającej (1.1) zachodzi:

$$\exists_{\varepsilon>0} \forall_{\delta>0} \exists_{\|x(t_0)\|<\delta} \exists_{T>0} \parallel x(t_0 + T; t_0, x_0) \parallel > \varepsilon. \tag{1.11}$$

Jednostajność ze względu na możliwe $A(t)$ z klasy (1.1) oznacza, że liczby ε i T w powyższych warunkach nie zależą od $A(t)$.

Warunkiem koniecznym absolutnej niestabilności jest, aby wszystkie układy narożne $\dot{x} = A_i x$ były niestabilne.

Absolutna stabilność i absolutna niestabilność nie wyczerpują klasyfikacji możliwych zachowań układu (0.1). Wprowadza się zatem kolejne definicje.

Definicja 3(a). Macierzowa funkcja $A_d(t)$ nazywa się *strategią destabilizującą* dla układu (0.1), jeśli $A_d(t)$ należy do klasy (1.1) oraz zerowy punkt równowagi układu (0.1) z $A(t) = A_d(t)$ jest jednostajnie niestabilny.

Definicja 3(b). Macierzowa funkcja $A_s(t)$ nazywa się *strategią stabilizującą* dla układu (0.1), jeśli $A_s(t)$ należy do klasy (1.1) oraz zerowy punkt równowagi układu (0.1) z $A(t) = A_s(t)$ jest jednostajnie asymptotycznie stabilny.

Istnienie strategii destabilizującej wyklucza absolutną stabilność. Podobnie, istnienie strategii stabilizującej wyklucza absolutną niestabilność. Warunkiem wystarczającym istnienia strategii destabilizującej dla (0.1), (1.1) jest niestabilność któregokolwiek z układów narożnych (1.5). Podobnie, warunkiem wystarczającym istnienia strategii stabilizującej jest asymptotyczna stabilność któregokolwiek z układów narożnych (1.5).

1.3. Sformułowanie rozważanych problemów

Wykorzystując wprowadzone określenia sformułujemy problemy, których rozwiązywaniu poświęcone są dalsze rozdziały pracy:

1. Wykazać absolutną stabilność lub znaleźć strategię destabilizującą dla układu liniowego o zmiennych w czasie parametrach (0.1), (1.1).

2. Wykazać absolutną niestabilność lub znaleźć strategię stabilizującą dla układu liniowego o zmiennych w czasie parametrach (0.1), (1.1).

Przedstawiane dalej metody i rezultaty będą analizowane pod kątem przydatności oraz efektywności ich zastosowania w rozwiązywaniu powyższych problemów.

1.4. Inkluzje różniczkowe

Przy przyjętych założeniach dotyczących zmian parametrów w czasie układ (0.1), (1.1) jest równoważny z modelem zadawanym przez liniową inkluzję różniczkową [3], [4], [111], [122]. Model w postaci liniowej inkluzji różniczkowej jest następujący:

$$\dot{x}(t) \in \mathcal{A}(x), \tag{1.12}$$

gdzie zbiór $\mathcal{A}(x)$ zdefiniowany jest jako:

$$\mathcal{A}(x) = \{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i A_i x : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1\}. \tag{1.13}$$

Przez rozwiązanie inkluzji różniczkowej rozumie się absolutnie ciągłą funkcję $x(t)$ taką, która spełnia (1.12) dla prawie wszystkich $t \geq 0$.

Teoria inkluzji różniczkowych dostarcza wielu twierdzeń dotyczących istnienia i własności ich rozwiązań. Dla rozważanych w tej pracy problemów istotne i interesujące są następujące wyniki.

Twierdzenie o parametryzacji [4, twierdzenie 2.1.1, str. 26] zapewnia równoważność zbioru rozwiązań układu opisanego przez (0.1), (1.1) z rozwiązaniami układu, w którym parametry mogą dodatkowo zależeć od stanu $x(t)$, opisanego równaniem:

$$\dot{x}(t) = A(t,x)x(t), \tag{1.14}$$

przy czym wartości funkcji określających zmiany parametrów $A(x,t)$ należą do tego samego zbioru $\mathcal{A}$, do którego należą parametry układu (0.1). Dzięki temu można uprościć analizę układu (1.14) zaniedbując zależność parametrów od stanu $x(t)$ układu.

Twierdzenie o relaksacji [4, twierdzenie 1.3.5, str. 14] pozwala sprowadzić inkluzję różniczkową

$$\dot{x}(t) \in \mathcal{F}(x,t), \tag{1.15}$$

gdzie $\mathcal{F} : R^n \times [0,\infty) \ni (x,t) \to \mathcal{F}(x,t) \in 2^{R^n}$ do postaci:

$$\dot{x}(t) \in \overline{co}[\mathcal{F}(x,t)], \tag{1.16}$$

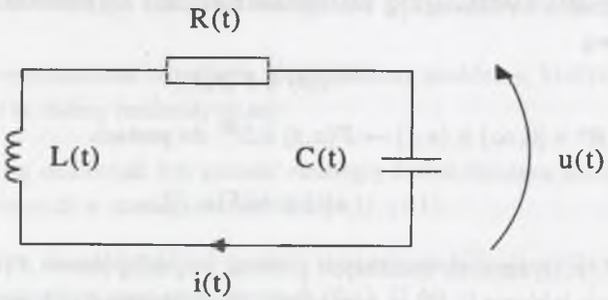
gdzie $\overline{co}[\mathcal{F}(x,t)]$ oznacza domknięcie powłoki wypukłej zbioru $\mathcal{F}(x,t)$. Inkluzja (1.16) reprezentuje inkluzję (1.15) w tym sensie, że zbiór wszystkich jej trajektorii (rozwiązań) jest gęsty w zbiorze rozwiązań inkluzji (1.15). Z twierdzenia o relaksacji wynika, że przyjęty wielościenny opis zbioru możliwych wartości parametrów pozwala reprezentować szerszą klasę zakresów zmian parametrów, obejmującą takie zbiory, których powłoki wypukłe są hiperwielościanami.

1.5. Modelowanie układów o zmiennych w czasie parametrach

Układy, które można opisać stosując model (0.1), mają duże znaczenie w wielu zastosowaniach. W punkcie tym podamy przykłady takich układów. Przykłady te będą ilustracją możliwości sprowadzenia modeli układów fizycznych do postaci, którą analizuje się w tej pracy oraz pozwolą zinterpretować sformułowane problemy. Będą także wykorzystywane w obliczeniach w dalszych rozdziałach.

1.5.1. Obwód RLC

Za pracą [52, str. 118] rozważmy obwód elektryczny RLC, przestawiony na rys. 1.1, w którym pojemność, indukcyjność i oporność mogą zmieniać się w czasie. Przy stałych parametrach, niezerowej oporności i braku źródeł, prąd i napięcie w układzie po pewnym czasie wygasną od dowolnych warunków początkowych do zera. Jednak zmiana w czasie parametrów obwodu może wymagać wydatkowania energii, która musi przenosić się do obwodu. Można zatem rozważać następujący problem: czy przez zmiany w czasie wielkości $L(t)$, $C(t)$ i $R(t)$ można spowodować niestabilność zerowego punktu równowagi układu z rys. 1.1 Inaczej mówiąc: czy przez zmiany $L(t)$, $C(t)$ i $R(t)$ można spowodować narastanie prądu $i(t)$ i napięcia $u(t)$ w obwodzie. Jeśli przy założonych dopuszczalnych zakresach zmian parametrów nie jest to możliwe, to układ z rys. 1.1 jest absolutnie stabilny. Jeśli istnieją funkcje czasu $L(t)$, $C(t)$ i $R(t)$, które powodują narastanie prądu $i(t)$ i napięcia $u(t)$, to zadają one strategię destabilizującą.



Rys. 1.1. *Obwód RLC o zmieniających się w czasie parametrach*
Fig. 1.1. *RLC circuit with time-varying parameters*

Równania opisujące obwód z rys. 1.1 mają postać:

$$\frac{d}{dt}[L(t)i(t)] = -R(t)i(t) - u(t), \tag{1.17}$$

$$\frac{d}{dt}[C(t)u(t)] = i(t). \tag{1.18}$$

Stąd, przy założeniu, że funkcje L, C, i oraz u należą do $C^1[0,\infty)$, dostajemy:

$$i(t)\frac{d}{dt}L(t) + L(t)\frac{d}{dt}i(t) = -R(t)i(t) - u(t) \tag{1.19}$$

$$u(t)\frac{d}{dt}C(t) + C(t)\frac{d}{dt}u(t) = i(t). \tag{1.20}$$

W równaniach (1.17)-(1.20), obok zależnych od czasu parametrów, $L(t)$ i $C(t)$, występują również pochodne funkcji $L(t)$ i $C(t)$. Celowe jest poszukiwanie takiego opisu, w którym można usunąć składniki zawierające pochodne funkcji $L(t)$ i $C(t)$. Przy założeniu, że wartości $L(t)$ i $C(t)$ są ograniczone od dołu i góry

$$L_{min} \le L(t) \le L_{max} \tag{1.21}$$

$$C_{min} \le C(t) \le C_{max} \tag{1.22}$$

oraz, że wartości L_{min}, L_{max}, C_{min} i C_{max} są dodatnie (z fizycznego punktu widzenia jest to naturalne założenie), można zapisać równania modelu układu z rys. 1.1 w postaci:

$$\dot{\phi}(t) = -\frac{R(t)}{L(t)}\phi(t) - \frac{1}{C(t)}q(t), \tag{1.23}$$

$$\dot{q}(t) = \frac{1}{L(t)}\phi(t), \tag{1.24}$$

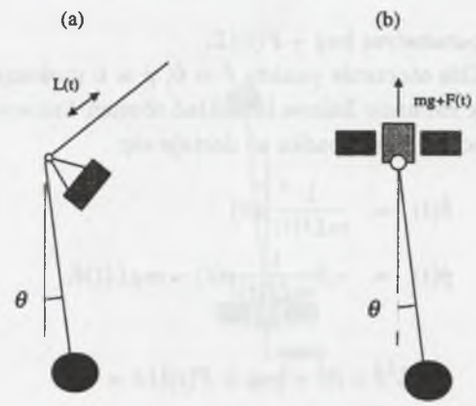
$$\phi(t) = L(t)i(t), \tag{1.25}$$

$$q(t) = C(t)u(t), \tag{1.26}$$

gdzie jako nowych współrzędnych stanu używa się ładunku na kondensatorze $q(t)$ oraz strumienia magnetycznego $\phi(t)$ w cewce (są to kanoniczne współrzędne Hamiltona). Na podstawie założenia (1.21), (1.22) stabilność układu (1.19), (1.20) jest równoważna ze stabilnością układu (1.23), (1.24). W otrzymanych równaniach (1.23), (1.24) nie występują pochodne funkcji $L(t)$ i $C(t)$.

1.5.2. Wahadło

Na rys. 1.2a przedstawiono wahadło o zmieniającej się w czasie długości, a na rys. 1.2b - wahadło o zmieniającym się, pod wpływem działającej na niego w osi pionowej siły $mg + F(t)$, położeniu punktu zawieszenia. Podobnie jak w poprzednim przykładzie możemy zapytać: czy zmieniając długość wahadła lub jego punkt zawieszenia możliwe jest zdestabilizowanie punktu równowagi $\theta = 0$. Inaczej mówiąc: czy możliwe jest rozhuśtanie wahadła przez zmianę $L(t)$ lub $F(t)$.



Rys. 1.2. *a) Wahadło o zmiennej długości, b) wahadło o ruchomym punkcie zawieszenia*
Fig. 1.2. *a) Pendulum with time-varying length, b) pendulum with time-varying position of the swing point*

Załóżmy, że cała masa m wahadła jest skupiona na jego końcu, oznaczmy długość wahadła przez L i kąt odchylenia od pionu przez θ, współczynnik tarcia lepkiego przez β, przyspieszenie grawitacyjne przez g. Równania ruchu wahadła przyjmą następującą postać.

Dla przypadku a) zależnej od czasu długości wahadła:

$$\frac{d}{dt}[mL^2(t)\dot{\theta}] + \beta\dot{\theta} + mgL(t)\sin\theta = 0. \tag{1.27}$$

Obliczając pochodną po czasie wyrażenia występującego w nawiasie kwadratowym dostalibyśmy, podobnie jak w poprzednim podpunkcie, równanie różniczkowe, którego współczynniki zależą zarówno od $L(t)$, jak i od pochodnej $\dot{L}(t)$. Aby usunąć tę trudność, możemy model układu z rys. 1.2 zapisać w postaci układu równań kanonicznych Hamiltona, w którym drugą współrzędną stanu jest moment pędu $p(t)$, tzn:

$$\dot{\theta}(t) = \frac{1}{mL^2(t)}p(t), \tag{1.28}$$

$$\dot{p}(t) = -\beta\frac{1}{mL^2(t)}p(t) - mgL(t)\sin\theta. \tag{1.29}$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, przy założeniu, że zmiany długości wahadła są ograniczone od dołu i góry, stabilność modelu (1.28), (1.29) jest równoważna ze stabilnością równania (1.27).

Dla przypadku b), gdy na punkt zawieszenia działa siła $F(t)$, dostajemy równanie:

$$mL^2\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + [mg + F(t)]L\sin\theta = 0 \tag{1.30}$$

o zmiennym w czasie parametrze $[mg + F(t)]L$.

Rozważając niewielkie otoczenie punktu $\theta = 0$, $p = 0$ możemy oba równania zlinearyzować otrzymując równanie liniowe lub układ równań liniowych o zmieniających się w czasie parametrach. Dla przypadku a) dostaje się:

$$\dot{\theta}(t) = \frac{1}{mL^2(t)}p(t) \tag{1.31}$$

$$\dot{p}(t) = -\beta\frac{1}{mL^2(t)}p(t) - mgL(t)\theta, \tag{1.32}$$

a dla przypadku b)

$$mL^2\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + [mg + F(t)]L\theta = 0. \tag{1.33}$$

W równaniach (1.31) i (1.32) występują nieliniowe zależności pomiędzy zmieniającymi się w czasie parametrami. Taki sposób zmian parametrów nie może być opisany przez model (1.1), (1.2). Możemy oznaczyć

$$a(t) = \frac{1}{mL^2(t)}, \quad b(t) = mgL(t), \tag{1.34}$$

podstawić $a(t)$ i $b(t)$ w (1.31) i (1.32) i traktować te dwie zmienne jak zmieniające się niezależnie. Wtedy wartości $a(t)$ i $b(t)$ należą do pewnego prostokąta, czyli model zależności parametrów od czasu jest zgodny z (1.1), (1.2). Jednak, jeśli będziemy

następnie analizować absolutną stabilność, to otrzymane warunki będą nadmiarowe, dlatego że zachowania układu (1.31) i (1.32), w którym występują niezależnie zmieniające się parametry $a(t)$ i $b(t)$, są bardziej różnorodne od możliwych zachowań, gdy $a(t)$ i $b(t)$ są związane przez (1.34).

Jeśli usprawiedliwione jest założenie, że zmiany długości wahadła są niewielkie

$$L(t) = L_0 + \Delta L(t), \tag{1.35}$$

to można uprościć problem badania układu (1.31) i (1.32) przez zastosowanie przybliżenia

$$\frac{1}{mL^2(t)} \simeq \frac{1}{mL_0^2} - \frac{2}{mL_0^3}\Delta L(t). \tag{1.36}$$

Podstawiając przybliżoną zależność (1.36) do układu równań (1.31), (1.32) otrzymamy model przybliżony, zgodny z opisem (1.1), (1.2), w którym występuje jeden zależny od czasu parametr $\Delta L(t)$.

1.5.3. Odwrócone wahadło

W punkcie tym podamy przykład ilustrujący zagadnienie absolutnej niestabilności i poszukiwania strategii stabilizującej. Rozważmy odwrócone wahadło przedstawione na rys. 1.3.

Rys. 1.3. *Odwrócone wahadło o ruchomym punkcie podparcia*
Fig. 1.3. *Inverted pendulum with mobile fulcrum*

Punkt podparcia tego wahadła jest ruchomy; oddziałuje na niego siła $mg + F(t)$. Podobnie jak poprzednio, oznaczając przez m - skupioną na jego końcu masę wahadła, L - długość, θ - kąt odchylenia od pionu, β - współczynnik tarcia lepkiego w punkcie podparcia, g - przyspieszenie grawitacyjne, dostajemy następujące równanie ruchu:

$$mL^2\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} - [mg + F(t)]L\sin\theta = 0, \tag{1.37}$$

o zmiennym w czasie parametrze $[mg + F(t)]L$. Oczywiście, jeśli $F(t) \equiv 0$, to punkt równowagi jest niestabilny wykładniczo.

Linearyzując w niewielkim otoczeniu punktu $\theta = \dot{\theta} = 0$ otrzymujemy:

$$mL^2\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} - [mg + F(t)]L\theta = 0. \tag{1.38}$$

Przyjmując zakres dopuszczalnych zmian siły $F(t)$ jako:

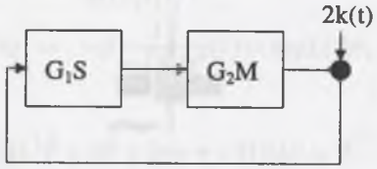
$$F_{min} \leq F(t) \leq F_{max}, \tag{1.39}$$

możemy absolutną niestabilność interpretować jako własność polegającą na tym, że przy dowolnych zmianach $F(t)$ w zakresie (1.39) punkt równowagi pozostaje niestabilny. Jeśli istnieje funkcja $F(t)$ spełniająca (1.39) taka, że zerowy punkt równowagi układu (1.38) jest asymptotycznie stabilny, to definiuje ona strategię stabilizującą.

1.5.4. Kompartmentalny model wzrostu komórek nowotworowych

Przedstawione dalej równania wywodzą się z zastowań modelowania matematycznego w biologii i medycynie. Opisują one proces wzrostu (lub zaniku) komórek nowotworowych poddawanych oddziaływaniu czynnika cytotoksycznego [61], [88], [91].

Przyjmujemy, że fazy cyklu rozwojowego komórki można podzielić na dwa kompartmenty, co jest schematycznie przedstawione na rys. 1.4. Kompartment pierwszy składa się z faz wzrostu G_1 i syntezy DNA S, kompartment drugi obejmuje fazy przygotowania do podziału G_2 i mitozy (podziału) M.



Rys. 1.4. *Dwukompartmentalny model wzrostu komórek nowotworowych poddawanych działaniu fazoczułego cytostatyku*
Fig. 1.4. *Two-compartmental model of neoplastic cells growth with phase-specific citotoxic agent*

Oddziaływanie cytostatyku na komórki nowotworowe jest zależne od fazy cyklu (cytostatyk jest fazoczuły). Jest ono opisane przez funkcję $2k(t)$, która ma następującą interpretację. Gdy nie podaje się cytostatyku, $k(t) \equiv 1$, to z każdej komórki po podziale powstają dwie nowe. Działanie cytostatyku powoduje, że część komórek w trakcie

podziału jest zabijana. Średnia liczba nowych komórek po podziale wynosi teraz $2k(t)$, przy czym

$$0 \leq k(t) \leq 1. \tag{1.40}$$

Czas przebywania komórki w każdym z kompartmentów (czas przechodzenia przez fazy obejmowane przez kompartment) jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym. Liczba komórek jest bardzo duża, dlatego stosuje się równania opisujące zmiany w czasie wartości średnich z liczb komórek w każdym z kompartmentów $N_1(t)$ i $N_2(t)$. Równania te mają następującą postać:

$$\begin{aligned} \dot{N}_1(t) &= -a_1N_1(t) + 2k(t)a_2N_2(t), \\ \dot{N}_2(t) &= a_1N_1(t) - a_2N_2(t). \end{aligned} \tag{1.41}$$

Parametry a_1 i a_2 są odwrotnościami średnich czasów przebywania komórek w kompartmentach.

W literaturze opisany układ nazywa się układem biliniowym, ponieważ funkcja $k(t)$ jest wielkością sterującą w tym modelu. Jednak model (1.41) ma taką samą strukturę jak wymienione wcześniej i można do niego stosować opisywane dalej metody. Dla układu (1.41) często formułuje się problem polegający na dobraniu takiego sterowania $k(t)$, aby osiągnąć zanikanie $N_1(t)$ i $N_2(t)$ z zadanym wykładnikiem λ. Dokonując zamiany zmiennych

$$\begin{bmatrix} M_1(t) \\ M_2(t) \end{bmatrix} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \end{bmatrix}, \tag{1.42}$$

można ten problem sprowadzić do zagadnienia poszukiwania strategii stabilizującej.

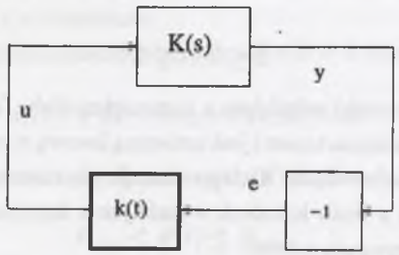
1.5.5. Układy regulacji automatycznej

Obszerną rodzinę układów o zmiennych parametrach, które bada się w literaturze, stanowią układy regulacji automatycznej. Najczęściej parametrami, których możliwe zmiany się analizuje, są wzmocnienia. Czasem istotne jest także zbadanie wpływu na działanie układu zmian innych wielkości: stałych czasowych, współczynników tłumienia itp.

W tym punkcie podamy przykłady układów regulacji, w których występują zmienne wzmocnienia. Przedyskutujemy relacje pomiędzy modelami o parametrach zależnych od czasu i parametrach zależnych nieliniowo od wartości sygnałów w układzie.

Układy z nieliniowościami sektorowymi

Na rys. 1.5 przedstawiony jest układ regulacji, w którym obiekt o transmitancji $K(s)$ objęty jest proporcjonalnym sprzężeniem zwrotnym przez element o wzmocnieniu, które może zmieniać się w czasie. Załóżmy, że wartości tego wzmocnienia $k(t)$



Rys. 1.5. *Układ o zmiennym w czasie wzmocnieniu w torze sprzężenia zwrotnego*
Fig. 1.5. *System with time-varying gain in the feedback loop*

mogą się zmieniać w zakresie:

$$\alpha \leq k(t) \leq \beta. \tag{1.43}$$

Transmitancję obiektu regulacji $K(s)$ można przedstawić w postaci:

$$K(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + ... + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_n}. \tag{1.44}$$

Załóżmy, że stopień licznika jest co najmniej o 1 mniejszy od stopnia mianownika, $m < n$. Wtedy równania stanu i wyjścia opisujące obiekt regulacji mają postać:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1.45}$$

$$y = Cx. \tag{1.46}$$

Z uwagi na zależność $u = -k(t)y$ otrzymujemy następujące równania stanu opisujące układ z rys. 1.5:

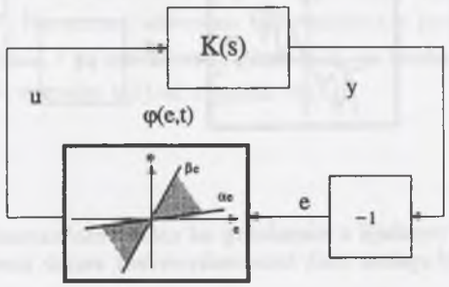
$$\dot{x} = [A - k(t)BC]x. \tag{1.47}$$

W równaniach tych występują zależne od czasu parametry. Ich postać jest zgodna z opisem (0.1). Na przykład jako model w przestrzeni stanu (1.45), (1.46) przyjmijmy reprezentację kanoniczną sterowalną [45], [65]. Otrzymamy wtedy jako (1.47) następujący układ równań:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & & \\ & 0 & \cdots & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ \bar{b}_m(t) & \bar{b}_{m-1}(t) & \cdots & \bar{b}_0(t) & \cdots & -a_2 \quad -a_1 \end{bmatrix} x(t), \tag{1.48}$$

gdzie $\bar{b}_i(t) = -k(t)b_i - a_{n-m+i}$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Abolutna stabilność modelu (1.48) oznacza, że układ regulacji z rys. 1.5 jest asymptotycznie stabilny dla dowolnych zmian wzmocnienia $k(t)$, mieszczących się w zakresie (1.43). Ma to oczywiście zasadnicze znaczenie przy projektowaniu toru sprzężenia zwrotnego.



Rys. 1.6. *Układ regulacji z nieliniowością sektorową zależną od czasu*
Fig. 1.6. *Control system with time-varying sector nonlinearity*

Na rys. 1.6 przedstawiony jest układ zawierający w torze sprzężenia zwrotnego element nieliniowy $\varphi(e,t)$, którego charakterystyka może zmieniać się w czasie i o którym zakłada się, że spełnia warunek sektorowy schematycznie zaznaczony na rys. 1.6, tzn. wykres $\varphi(e,t)$ mieści się pomiędzy dwoma prostymi αe i βe. Warunek ten można zapisać następująco:

$$\alpha \leq \frac{\varphi(e,t)}{e} \leq \beta, \quad e \neq 0, \quad \varphi(0,t) = 0. \tag{1.49}$$

Nieliniowość sektorową można także opisać jako:

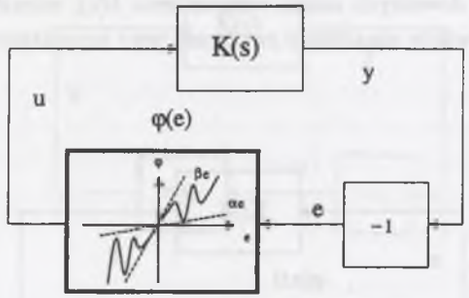
$$u = k(e,t)e, \tag{1.50}$$

gdzie

$$k(e,t) = \begin{cases} \frac{\varphi(e,t)}{e} & \text{jeśli } e \neq 0 \\ \frac{\partial \varphi(e,t)}{\partial e} & \text{jeśli } e = 0 \end{cases}. \tag{1.51}$$

Zdefniowane w powyższym wzorze $k(e,t)$ można interpretować jako wzmocnienie, które zależy od wartości e i od czasu. Na podstawie (1.49) wartości tego wzmocnienia zawierają się w przedziale $\alpha \leq k(e,t) \leq \beta$.

Przyjmijmy, że parametry α i β, opisujące sektor, pokrywają się z wartościami określającymi zakres, w którym może się zmieniać wzmocnienie układu z rys. 1.5. Przy tym założeniu możliwe zachowania układów z rys. 1.5 i 1.6 pokrywają się ze



Rys. 1.7. *Układ regulacji z niezależną od czasu. nieliniowością sektorową*
Fig. 1.7. *Control system with time-independent sector nonlinearity*

sobą. Oba układy mogą być równoważnie opisane przez tę samą inkluzję różniczkową na podstawie twierdzenia o parametryzacji przedstawionego w punkcie 1.4.

Rozważmy jeszcze układ regulacji przedstawiony na rys. 1.7. Liniowy obiekt regulacji o transmitancji $K(s)$ jest objęty sprzężeniem zwrotnym przez nieliniowy regulator opisany przez funkcję $\varphi(e)$, której wykres także spełnia warunek sektorowy.

$$\alpha \leq \frac{\varphi(e)}{e} \leq \beta, \quad e \neq 0 \tag{1.52}$$

oraz

$$\varphi(0) = 0. \tag{1.53}$$

Argumentem funkcji $\varphi(e)$ jest tylko sygnał uchybu e; funkcja ta jest jednoznaczna i nie zależy od czasu. Dlatego też model zmian parametrów założony w układzie na rys. 1.7 nie sprowadza się do modelu przyjętego w punktach 1.2, 1.3. Mimo to, opisane będą dalej warunki absolutnej stabilności (niestabilności) układów z tak zmieniającymi się parametrami. Pozwoli to na porównanie, dla przykładowych układów regulacji, efektów wynikających ze zmienności parametrycznej zgodnej z jednym (z rysunku 1.6) bądź drugim (z rysunku 1.7) modelem.

Parametryczne pobudzenie układu z rys. 1.7, wynikające z istnienia nieliniowości $\varphi(e)$, jest mniej intensywne niż pobudzenie wynikające z występowania nielinowości, które dodatkowo zależą od czasu $\varphi(e,t)$, jak na rys. 1.6. Można zatem pokazać, że możliwe zachowania (możliwe przebiegi czasowe) układu z rys. 1.6, ze wzmocnieniem $k(t)$, spełniającym (1.43), zawierają w sobie wszystkie możliwe zachowania układu z rys. 1.7. W układzie z rys. 1.6 można uzyskać takie same funkcje w układzie z rys. 1.7

przyjmując $k(t) = k(e(t))$, gdzie $k(e)$ dane jest przez:

$$k(e) = \begin{cases} \frac{\varphi(e)}{e} & \text{jeśli } e \neq 0 \\ \varphi'(0) & \text{jeśli } e = 0 \end{cases}, \tag{1.54}$$

a $e(t)$ jest przebiegiem zaobserwowanym w układzie z rys. 1.7. Stąd absolutna stabilność lub absolutna niestabilność układu z rys. 1.6 pociąga za sobą analogiczną własność układu z rys. 1.7. Natomiast odwrotne twierdzenie nie jest prawdziwe. Możliwe zachowania układu z rys. 1.7 są ograniczone przez fakt, że każda funkcja $\varphi(e)$ narzuca jednoznaczną zależność sygnału $u(t)$ od sygnału $e(t)$.

Rozdział 2

Zastosowania teorii Floqueta

W rozdziale tym rozważamy sytuację, gdy macierz $A(t)$ w (0.1) jest funkcją okresową. Przedstawiamy dowód podstawowego twierdzenia Floqueta. Twierdzenie to mówi, że jeśli $A(t)$ jest macierzą okresową o okresie T, to macierz fundamentalną, opisującą rozwiązanie $x(t)$ układu (0.1), można przedstawić w postaci iloczynu funkcji okresowej o okresie T i wykładniczej funkcji macierzowej o stałym wykładniku.

Przedstawiamy metody badania układów (0.1) wykorzystujące to twierdzenie. Podajemy warunki stabilności asymptotycznej układu o okresowo zmiennych parametrach. Przedstawiamy numeryczne metody przybliżonego badania stabilności.

Opiszemy także podstawowe twierdzenia teorii rezonansu parametrycznego. Teoria ta obejmuje sytuację, gdy analizowany układ jest liniowym układem hamiltonowskim, tzn. takim, w którym nie występuje rozpraszanie energii. Analizowane są efekty wynikające z bardzo niewielkich wahań parametrów, inaczej niż w (1.1). Utratę stabilności można interpretować jako rezonans (pokrywanie się krotności częstości zmian parametrów z krotnościami częstości własnych układu). Jak widać, teoria rezonansu parametrycznego dotyczy problemu sformułowanego nieco inaczej niż w punktach 1.2, 1.3. Jednak interesujące jest odniesienie wyników numerycznych obliczeń wykładników Lapunowa układów o zmiennych parametrach do wyników uzyskanych (przy założeniu braku rozpraszania energii) z zastosowaniem metody rezonansu parametrycznego. Teoria rezonansu parametrycznego daje analityczne rezultaty, które niekiedy można wykorzystać jako przybliżone warunki utraty stabilności, nawet gdy założenia potrzebne do ich wyprowadzenia nie są spełnione.

2.1. Twierdzenie Floqueta

Załóżmy, że macierz $A(t)$ w układzie (0.1) zmienia się okresowo z okresem T, tzn.

$$A(t+T) = A(t). \tag{2.1}$$

Zachodzi następujące twierdzenie (np. [25, str. 213]):

Twierdzenie 1. (Twierdzenie Floqueta). Macierz fundamentalna $X(t)$ układu (0.1) z macierzą okresową A o okresie T może być przedstawiona w postaci:

$$X(t) = \Phi(t)e^{\Lambda t}, \tag{2.2}$$

przy czym wykładnik Λ jest macierzą stałą, a $\Phi(t)$ jest nieosobliwą macierzą okresową o okresie T

$$\Phi(t+T) = \Phi(t) \tag{2.3}$$

taką, że

$$\Phi(0) = I. \tag{2.4}$$

W powyższym wzorze I oznacza $n \times n$ - wymiarową macierz jednostkową.

Dowód. Zauważmy, że $X(t+T)$ jest macierzą fundamentalną układu (0.1), ponieważ

$$\frac{d}{dt}X(t+T) = A(t+T)X(t+T) = A(t)X(t+T). \tag{2.5}$$

Zatem kolumny macierzy $X(t+T)$ muszą być kombinacjami liniowymi kolumn macierzy $X(t)$, tzn.

$$X(t+T) = X(t)\Theta, \tag{2.6}$$

gdzie Θ jest pewną macierzą nieosobliwą. Podstawiając w powyższym wzorze $t = 0$ otrzymujemy:

$$\Theta = X(T) \tag{2.7}$$

oraz

$$X(t+T) = X(t)X(T). \tag{2.8}$$

Zdefiniujmy

$$\Lambda = \frac{1}{T}\mathrm{Ln}X(T) \tag{2.9}$$

oraz

$$\Phi(t) = X(t)e^{-\Lambda t}. \tag{2.10}$$

We wzorze (2.9) oznacza logarytm macierzowy, który istnieje dla każdej macierzy nieosobliwej ([110, str. 206]).

Na podstawie (2.8) i (2.9) macierz $\Phi(t)$, dana przez (2.10), jest nieosobliwa i okresowa z okresem T, ponieważ

$$\Phi(t+T) = X(t+T)e^{-\Lambda(t+T)} = X(t)X(T)e^{-\Lambda T}e^{-\Lambda t} = \Phi(t). \tag{2.11}$$

Wyliczając $X(t)$ z (2.10) dostajemy (2.2), czego należało dowieść. □

Funkcja logarytm macierzowy, użyta do wyznaczenia macierzy Λ we wzorze (2.9), jest niejednoznaczna. Jeśli macierz $X(T)$ ma różne wartości własne $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$, tzn. można ją przedstawić w postaci:

$$X(T) = \Gamma\,\mathrm{diag}(\sigma_1\ldots\sigma_n)\,\Gamma^{-1}, \tag{2.12}$$

to Λ dana jest wzorem:

$$\Lambda = \Gamma\,\mathrm{diag}(\lambda_1\ldots\lambda_n)\,\Gamma^{-1}, \tag{2.13}$$

gdzie

$$\lambda_i = \frac{1}{T}[\ln|\sigma_i| + j(\arg(\sigma_i) + 2k\pi)], \tag{2.14}$$

$j = \sqrt{-1}$. W powyższym wzorze k jest dowolną liczbą całkowitą.

2.1.1. Określenia

Podamy określenia, które stosuje się w teorii Floqueta i które będą dalej stosowane.

Macierz $X(T)$ nazywa się *macierzą monodromii* układu (0.1) z okresowo zmiennymi parametrami (2.1).

Wartości własne macierzy $X(T)$, $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ nazywa się *multiplikatorami* układu (0.1), (2.1), a wartości własne macierzy Λ, $\lambda_1\ldots\lambda_n$ - jego *wykładnikami charakterystycznymi.*

Największą z części rzeczywistych wykładników charakterystycznych nazywa się *wykładnikiem Lapunowa* układu (0.1), (2.1). Oznaczać go będziemy przez λ,

$$\lambda = \max_k \mathrm{Re}\,(\lambda_k). \tag{2.15}$$

2.1.2. Warunek asymptotycznej stabilności

Z twierdzenia Floqueta wynika, że o asymptotycznej stabilności układu (0.1) decydują moduły multiplikatorów $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ lub równoważnie części rzeczywiste wykładników charakterystycznych $\lambda_1\ldots\lambda_n$, które wylicza się na podstawie macierzy monodromii. O ile wykładniki charakterystyczne $\lambda_1\ldots\lambda_n$ nie są jednoznacznie określone przez wzór (2.14), to ich części rzeczywiste $\mathrm{Re}(\lambda_i) = \frac{1}{T}\ln|\sigma_i|$ są już jednoznacznie wyznaczone przez funkcję $A(t)$. Zatem problem asymptotycznej stabilności układu (0.1) z okresową zmianą parametrów (2.1) ma jednoznaczne rozwiązanie, wynikające z przedstawienia (2.2).

Warunkiem asymptotycznej stabilności układu (0.1) z okresowo zmiennymi parametrami (2.1) jest, aby moduły wszystkich multiplikatorów były mniejsze od jedności lub równoważnie części rzeczywiste wszystkich wykładników charakterystycznych były ujemne. Inny równoważny warunek to, aby wykładnik Lapunowa układu (0.1), (2.1) był ujemny.

2.1.3. Przypadek rzeczywisty

W praktycznych zastosowaniach najważniejszy jest przypadek rzeczywisty. Dla rzeczywistej macierzy $A(t)$ macierz fundamentalna układu (0.1) jest także rzeczywista. Ze wzoru (2.14) wynika jednak, że reprezentacja (2.2) jest ogólnie dana przez macierze zespolone także, gdy macierz $A(t)$ jest funkcją rzeczywistą.

Jeśli dla macierzy monodromii $X(T)$ istnieje rzeczywisty logarytm macierzowy (zob. [110, str. 206]), to łatwo widać, że istnieje reprezentacja w postaci (2.2), (2.3), (2.4), w której macierze $\Phi(t)$ i Λ są rzeczywiste. Jednak w ogólnym przypadku rzeczywisty logarytm macierzowy z $X(T)$ może nie istnieć. Wtedy nie istnieje reprezentacja w postaci (2.2), (2.3), (2.4) z rzeczywistymi macierzami $\Phi(t)$ i Λ. Zachodzi natomiast następujące twierdzenie ([129, str. 84]):

Twierdzenie 2. Macierz fundamentalna $X(t)$ układu (0.1) z okresowo zmiennymi współczynnikami, w którym $A(t)$ (2.1) jest macierzą rzeczywistą, może być przedstawiona w postaci:

$$X(t) = \Phi_0(t)e^{\Lambda_0 t}, \tag{2.16}$$

gdzie macierze $\Phi_0(t)$ i Λ_0 mają elementy rzeczywiste. Przy tym

$$\Phi_0(0) = I \tag{2.17}$$

oraz

$$\Phi_0(t+T) = \Phi_0(t)R, \tag{2.18}$$

gdzie R jest nieosobliwą macierzą rzeczywistą taką, że

$$\Lambda_0 R = R\Lambda_0, \quad R^2 = I. \tag{2.19}$$

Dowód. Dowód tego twierdzenia wynika z faktu, że każdą rzeczywistą nieosobliwą macierz X można przedstawić w postaci:

$$X = e^{\Lambda}R = Re^{\Lambda}, \tag{2.20}$$

gdzie Λ i R są macierzami rzeczywistymi, przy czym $\Lambda = \frac{1}{2}\log(X^2)$, $R = Xe^{-\Lambda}$, $R^2 = I$ ([129, str. 57]). □

Zgodnie z (2.18), (2.19)

$$\Phi_0(t+2T) = \Phi(t)_0 R^2 = \Phi_0(t), \tag{2.21}$$

zatem w przypadku rzeczywistym można zawsze przedstawić macierz fundamentalną w postaci iloczynu macierzy okresowej $\Phi_0(t)$ o okresie $2T$ i wykładniczej funkcji macierzowej o stałym wykładniku.

2.1.4. Przykład

W celu zilustrowania powyższych twierdzeń rozważmy przykład, w którym stan układu (0.1) jest dwuwymiarowy, a $A(t)$ jest rzeczywistą macierzą okresową o okresie $T = 2\pi$, która zmienia się zgodnie z następującym wzorem:

$$A(t) = \begin{cases} A_1 \text{ dla } t \in [0,\pi) \\ A_2 \text{ dla } t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}, \tag{2.22}$$

gdzie:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.23}$$

Macierz $A(t)$ jest przedziałami stała. Zachodzi zatem

$$X(T) = e^{\pi A_2}e^{\pi A_1} = \begin{bmatrix} -e^{\pi} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{2.24}$$

Macierz $X(T)$ jest macierzą rzeczywistą, jednak nie istnieje dla niej rzeczywisty logarytm macierzowy.

Przedstawienie zespolone

Na podstawie wzorów (2.9), (2.14) dostajemy:

$$\Lambda = \frac{1}{2\pi}\log\begin{bmatrix} -e^{\pi} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 + \frac{2k+1}{2}j & 0 \\ 0 & \frac{2l+1}{2}j \end{bmatrix}, \tag{2.25}$$

gdzie k, l są dowolnymi liczbami całkowitymi. Przyjmijmy $k = l = 0$. Wtedy z (2.10) otrzymujemy następujące wzory opisujące funkcję $\Phi(t)$:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-0.5(1+j)t} & 0 \\ 0 & e^{-0.5jt} \end{bmatrix} \text{ dla } t \in [0,\pi) \tag{2.26}$$

oraz

$$\Phi(t) = -\begin{bmatrix} e^{(t-\pi)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-0.5(1+j)t} & 0 \\ 0 & e^{-0.5jt} \end{bmatrix} \text{ dla } t \in [\pi, 2\pi]. \tag{2.27}$$

Przedstawienie rzeczywiste

W przypadku, gdy nie istnieje rzeczywisty logarytm macierzowy z $X(T)$, wyliczamy rzeczywisty logarytm macierzowy z $X^2(T)$ (który zawsze istnieje) i definiujemy:

$$\Lambda_0 = \frac{1}{2T}\log X^2(T). \tag{2.28}$$

Macierz $\Phi_0(t)$ obliczamy jako

$$\Phi_0(t) = X(t)e^{-\Lambda_0 t}. \tag{2.29}$$

Podnosząc (2.24) do kwadratu otrzymujemy:

$$X(2T) = \begin{bmatrix} e^{2\pi} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

i dalej z (2.28)

$$\Lambda_0 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.31}$$

Z (2.29) otrzymujemy teraz następujące wzory opisujące funkcję $\Phi_0(t)$:

$$\Phi_0(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-0.5t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ dla } t \in [0, \pi) \tag{2.32}$$

oraz

$$\Phi_0(t) = -\begin{bmatrix} e^{(t-\pi)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-0.5t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ dla } t \in [\pi, 2\pi]. \tag{2.33}$$

Dla $t \in [2\pi, 4\pi]$ macierz $\Phi_0(t)$ dana jest przez (2.18), przy czym

$$R = \Phi_0(T) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{2.34}$$

Macierz $\Phi_0(t)$ jest funkcją okresową o okresie 4π.

2.2. Numeryczne obliczanie multiplikatorów

Macierz monodromii, a tym samym multiplikatory, można łatwo liczyć numerycznie. Podzielmy przedział $[0, T]$ na K podprzedziałów za pomocą punktów

$$0 = t_0, t_1, \ldots, t_K = T. \tag{2.35}$$

Długość k - tego podprzedziału będzie równa:

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}. \tag{2.36}$$

Stosujemy teraz przybliżenie polegające na tym, że wewnątrz podprzedziałów (2.36) macierz $A(t)$ uważamy za stałą, tzn. wprowadzamy schodkową funkcję czasu $A_\Delta(t)$ określoną następująco:

$$A_\Delta(t) = A_k, \text{ dla } t \in [t_{k-1} t_k), \tag{2.37}$$

gdzie

$$A_k = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} A(t)dt. \tag{2.38}$$

Zamiast układu (0.1), (2.1) rozważamy jego przybliżenie

$$\dot{x} = A_\Delta(t)x. \tag{2.39}$$

Łatwo napisać wzór na macierz monodromii $X_\Delta(T)$ układu o schodkowo zmieniającej się macierzy $A_\Delta(t)$

$$X_\Delta(T) = e^{A_K \Delta t_K} e^{A_{K-1} \Delta t_{K-1}} \ldots e^{A_1 \Delta t_1}. \tag{2.40}$$

Obliczona macierz monodromii układu ze schodkowo zmieniającymi się parametrami jest przybliżeniem macierzy monodromii $X(T)$ układu (0.1), (2.1). Obliczanie przybliżonej macierzy monodromii $X_\Delta(T)$ jest numerycznie bardzo proste. Wymaga tylko mnożenia macierzowych funkcji wykładniczych.

Oznaczmy

$$\Delta = \max_k \Delta t_k \tag{2.41}$$

oraz przyjmijmy

$$\| A(t) \| \leq M, \tag{2.42}$$

$$\| A(t) - A_\Delta(t) \| \leq \varepsilon, \tag{2.43}$$

$t \in [0, T]$. Można łatwo wykazać, że zachodzi ([25, str. 229])

$$\| X_\Delta(T) - X(T) \| \leq \varepsilon T e^{2MT}. \tag{2.44}$$

Ponieważ $\varepsilon \to 0$, gdy $\Delta \to 0$, zatem

$$\lim_{\Delta \to 0} \| X_\Delta(T) - X(T) \| = 0. \tag{2.45}$$

Jak widać, twierdzenie Floqueta pozwala badać stabilność dla konkretnego okresowego przebiegu zmian współczynników danego przez (2.1). Aby wnioskować o stabilności dla różnych przebiegów zmian współczynników wyznacza się macierz monodromii wielokrotnie, zadając różne funkcje okresowe opisujące te zmiany. Zilustrujemy to na podanych dalej przykładach.

Przedstawimy poniżej przykłady numeryczne obliczania wykładnika Lapunowa dla układów o zmieniających się okresowo parametrach. W przykładach tych w celu przeanalizowania możliwych zachowań układów będziemy obliczać wykładnik Lapunowa dla zmieniających się pobudzeń. Okresowe pobudzenia będą skokowe; zmieniane będą ich okresy, amplitudy i wypełnienia.

2.2.1. Wahadło o ruchomym punkcie zawieszenia

Zapiszmy zlinearyzowane równanie wahadła o ruchomym punkcie zawieszenia (1.33) w postaci:

$$\ddot{\theta} + 2\zeta\omega_0\dot{\theta} + [\omega_0^2 + a(t)]\theta = 0, \tag{2.46}$$

gdzie:

$$\zeta = \frac{\beta}{2m\sqrt{gL^3}}, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{L}, \tag{2.47}$$

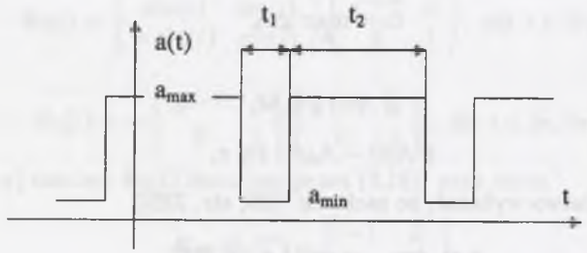
$$a(t) = \frac{F(t)}{mL}. \tag{2.48}$$

Przyjmujemy przy tym

$$2\zeta\omega_0 = 0.4, \quad \omega_0^2 = 0.5 \tag{2.49}$$

oraz zakładamy, że parametr $a(t)$ może się zmieniać w zakresie

$$a_{min} \leq a(t) \leq a_{max}. \tag{2.50}$$



Rys. 2.1. *Funkcja okresowa opisująca zmianę parametru $a(t)$*
Fig. 2.1. *Periodic function which defines changes of the parameter $a(t)$*

Dodatkowo zakładamy, że $a(t)$ jest funkcją okresową zmieniającą się skokowo, przedstawioną na rys. 2.1. Okres T, częstotliwość ω i wypełnienie wp dane są przez:

$$T = t_1 + t_2, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad wp = \frac{t_1}{T}, \tag{2.51}$$

gdzie t_1 i t_2 są czasami zaznaczonymi na rys. 2.1.

Przyjmujemy

$$a_{min} = 0 \text{ i } a_{max} = 1.4. \tag{2.52}$$

Wykonujemy teraz wielokrotnie obliczenia macierzy monodromii $X(T)$ układu (2.46). Zwróćmy uwagę, że przy założonym przebiegu $a(t)$ nie ma problemu przybliżania $X(T)$ przez inną macierz. W obliczeniach zmieniamy dwa parametry:

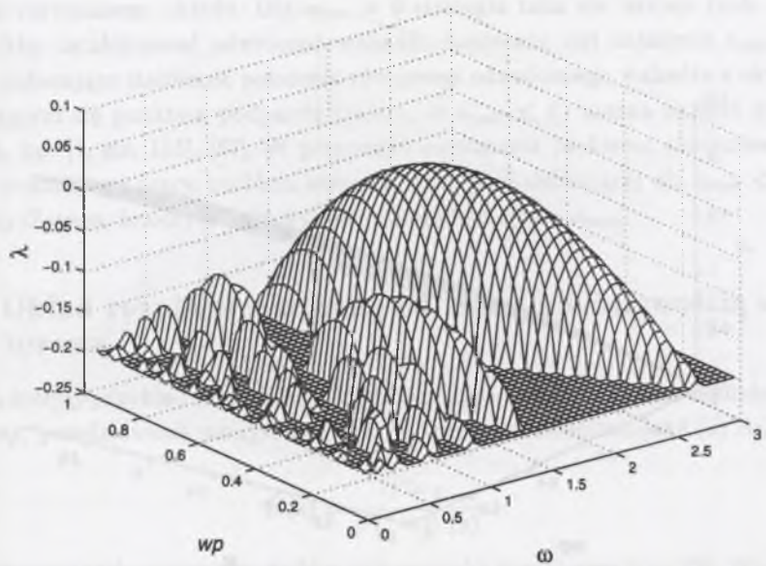
1: częstotliwość ω, w zakresie od 0 do 3,

2: wypełnienie wp, w zakresie od 0 do 1.

Dla każdej pary (ω, wp) obliczamy odpowiadający jej wykładnik Lapunowa $\lambda(wp, \omega)$ macierzy $X(T)$ (2.15). Wykres zależności $\lambda(wp, \omega)$ przedstawia rys. 2.2. Maksimum dla wykresu przedstawionego na rysunku jest osiągane w punkcie

$$wp = 0.65, \quad \omega = 1.86 \tag{2.53}$$

i wynosi 0.0116.



Rys. 2.2. *Zależność wykładnika Lapunowa λ układu od parametrów sygnału $a(t)$: ω i wp. Zależność tę otrzymano dla wahadła z ruchomym punktem zawieszenia*
Fig. 2.2. *Lyapunov exponent λ (lambda) of the system versus parameters of the signal $a(t)$: ω and wp. The plot was drawn for pendulum with time-varying position of the swing point*

Zatem przez przegląd klasy pobudzeń parametrycznych przedstawionych na rys. 2.1 można znaleźć strategię destabilizującą. Wyznaczona strategia destabilizująca zadana jest przez przebieg $a(t)$ przedstawiony na rys. 2.1, w którym przełączanie pomiędzy wartościami $a_{min} = 0$ i $a_{max} = 1.4$ wykonywane jest z częstotliwością $\omega = 1.86$, przy czym współczynnik wypełnienia wynosi $wp = 0.65$. Wykładnik Lapunowa odpowiadający wyznaczonej strategii wynosi 0.0116.

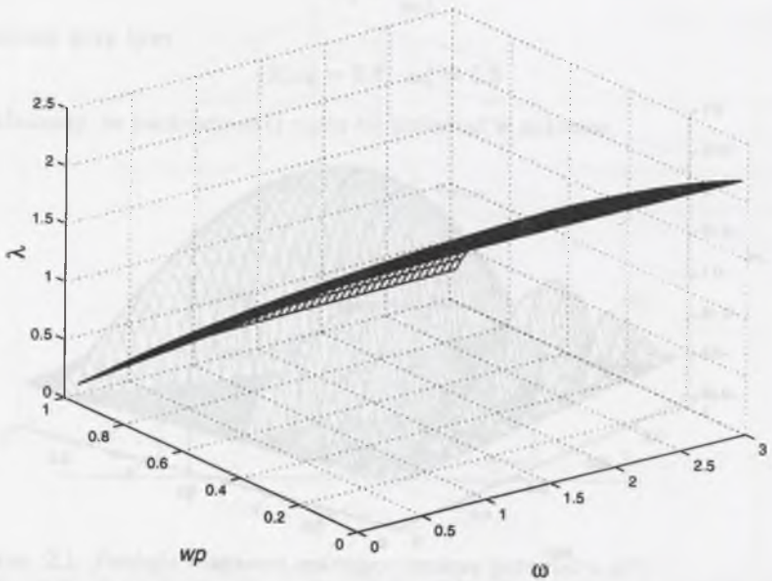
2.2.2. Odwrócone wahadło o ruchomym punkcie podparcia

Jako drugi przykład rozważamy odwrócone wahadło z rys. 1.3 (z rozdziału 1). Zapisujemy zlinearyzowane równanie odwróconego wahadła (1.38) w postaci:

$$\ddot{\theta} + b\dot{\theta} - a(t)\theta = 0, \tag{2.54}$$

gdzie

$$b = \frac{\beta}{mL^2}, \quad a(t) = \frac{g}{L} + \frac{F(t)}{mL} \tag{2.55}$$



Rys. 2.3. *Zależność wykładnika Lapunowa λ układu od zmieniających się parametrów sygnału $a(t)$: ω i wp. Zależność tę otrzymano dla odwróconego wahadła z ruchomym punktem podparcia*

Fig. 2.3. *Lyapunov exponent λ of the system versus parameters of the signal $a(t)$: ω and wp. The plot was drawn for inverted pendulum with mobile fulcrum*

oraz przyjmujemy:

$$b = 0.1, \tag{2.56}$$

$$a_{min} \leq a(t) \leq a_{max}. \tag{2.57}$$

Parametr $a(t)$ jest, podobnie jak poprzednio, zadany funkcją okresową zmieniającą się skokowo, przedstawioną na rys. 2.1. Okres T, czestotliwość ω i wypełnienie wp dane są przez (2.51).

Przyjmujemy

$$a_{min} = 0.01 \text{ i } a_{max} = 5 \tag{2.58}$$

i analogicznie jak w poprzednim podpunkcie, wielokrotnie obliczamy wykładnik Lapunowa $\lambda(wp, \omega)$, odpowiadający macierzy monodromii $X(T)$ układu (2.54), zmieniając dwa parametry

1: częstotliwość ω, w zakresie od 0 do 3,

2: wypełnienie wp, w zakresie od 0 do 1.

Wykres zależności $\lambda(wp, \omega)$ przedstawia rys. 2.3. Minimum dla wykresu przedstawionego na rysunku jest osiągane dla $wp = 1$ i $\omega = 0$ i wynosi 0.1198. Łatwo sprawdzić, że minimalna wartość odpowiada przebiegowi $a(t) = a_{min}$, co także dobrze widać na

rys. 2.3. W eksperymencie obliczeniowym nie udaje się wyznaczyć strategii stabilizującej dla rozważanego układu. Dla $a_{min} > 0$ strategia taka nie istnieje (zob. punkt 3.5.2.). Aby ustabilizować odwrócone wahadło, konieczne jest założenie $a_{min} < 0$. Wyniki pokazujące stabilność położenia równowagi odwróconego wahadła z okresowo poruszającym się punktem podparcia (takim, że $a_{min} < 0$) można znaleźć w wielu źródłach, np. [1, str. 115], [67]. W przypadku rozważania problemu sformułowanego tak jak w niniejszej pracy, problem istnienia strategii stabilizującej dla $a_{min} < 0$ jest trywialny dlatego, że oczywistym wyborem może być $a(t) = a_{min}$.

2.2.3. Układ regulacji z zależną od czasu nieliniowością sektorową

Jako kolejny przykład rozważymy układ regulacji z zależną od czasu nieliniowością sektorową, przedstawiony na rys. 1.6. Przyjmiemy, że transmitancja $K(s)$ dana jest przez

$$K(s) = \frac{1+s}{s^2(1+0.1s)}. \tag{2.59}$$

Jest to element zachowawczy (podwójne całkowanie) z korektorem typu PD. Wiadomo, że objęcie obiektu o transmitancji $K(s)$ danej wzorem (2.59) pętlą sprzężenia zwrotnego o dowolnym stałym (dodatnim) wzmocnieniu daje stabilny układ zamknięty.

W analizowanym układzie w pętli sprzężenia zwrotnego występuje element nieliniowy, zależny od czasu. Zakłada się, że element ten spełnia warunek sektorowy (1.49). Jak stwierdzono w punkcie 1.5.5, równoważnie możemy badać układ (przedstawiony na rys. 1.5) ze zmieniającym się wzmocnieniem $k(t)$, którego wartości leżą w zakresie (1.43). Równania stanu (1.48) opisujące analizowany układ mają następującą postać:

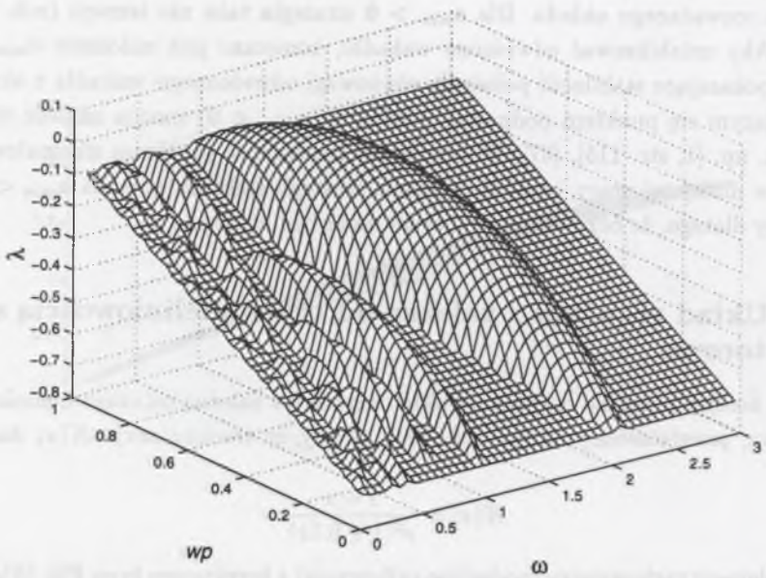
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -10k(t) & -10k(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \tag{2.60}$$

Przyjmujemy następujące wartości dla parametrów α i β z (1.49) i (1.43) zadających zakres możliwych zmian wzmocnienia $k(t)$

$$\alpha = 0.2, \quad \beta = 1.5. \tag{2.61}$$

Zbadamy teraz zachowanie się układu z rys. 1.6 z transmitancją (2.59) dla zmieniającego się okresowo wzmocnienia. Założymy, że $k(t)$ jest zadane takim samym przebiegiem, jak przedstawiony na rys. 2.1, tzn. $k(t) = a(t)$ oraz

$$k_{min} = a_{min} = 0.2, \quad k_{max} = a_{max} = 1.5. \tag{2.62}$$



Rys. 2.4. *Zależność wykładnika Lapunowa λ układu od zmieniających się parametrów sygnału $a(t)$: ω i wp. Zależność tę otrzymano dla układu regulacji z zależną od czasu nieliniowością sektorową*

Fig. 2.4. *Lyapunov exponent λ of the system versus parameters of the signal $a(t)$: ω and wp. The plot was drawn for control system with time-varying sector nonlinearity*

Wykonujemy, podobnie jak w poprzednim przykładzie, wielokrotne obliczenia macierzy monodromii dla układu z rys. 1.6 z transmitancją (2.59) zmieniając dwa parametry przebiegu $k(t)$: częstotliwość ω i wypełnienie wp (2.51). Dla każdego przebiegu obliczamy z macierzy monodromii $X(T)$ odpowiadający jej wykładnik Lapunowa $\lambda(wp, \omega)$. Zakres zmian częstotliwości ω i wypełnienia wp jest taki sam jak w poprzednim przykładzie, tzn. $\omega \in [0, 3]$, $wp \in [0, 1]$. Wyniki obliczeń przedstawia rys. 2.4.

Maksimum wykresu przedstawionego na rys. 2.4 jest osiągane w punkcie

$$wp = 0.804, \quad \omega = 1.30 \tag{2.63}$$

i wynosi 0.0011.

Znaleziony wykładnik Lapunowa jest dodatni. Zatem układ regulacji z rys. 1.6, przy transmitancji $K(s)$ danej przez (2.59) i możliwym zakresie zmian wzmocnienia (2.62), nie jest absolutnie stabilny. Istnieje dla niego strategia destabilizująca dana przez (2.63).

2.3. Rezonans parametryczny

Rezonans parametryczny jest to utrata stabilności liniowego układu hamiltonowskiego przy bardzo niewielkich okresowych zaburzeniach (zmianach parametrów). W teorii rezonansu parametrycznego wyznacza się częstotliwości krytyczne funkcji opisujących zmiany parametrów, przy których następuje utrata stabilności.

Termin układy hamiltonowskie pochodzi z mechaniki teoretycznej; definiuje się je jako układy holonomiczne, w których nie występuje rozpraszanie energii. Badanie stabilności takich układów ma ważne zastosowania.

Opiszemy podstawowe własności rezonansu parametrycznego. Mają one zastosowanie do niektórych z rozważanych tu przykładów układów o zmiennych parametrach. Równania opisujące liniowy układ hamiltonowski mają następującą postać:

$$\dot{x} = JA(t)x. \tag{2.64}$$

Wymiar wektora stanu jest tu zawsze parzysty, $x \in R^{2n}$. Przez J oznacza się następującą antysymetryczną macierz blokową:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \tag{2.65}$$

i nazywa się ją jednością symplektyczną. We wzorze (2.65) I oznacza $n \times n$ - wymiarową macierz jednostkową. O macierzy $A(t)$ we wzorze (2.64) zakłada się, że jest symetryczna, $A^T(t) = A(t)$, dla każdego t. Zwróćmy uwagę, że macierz J ma następujące własności:

$$JJ = -I, \quad J^T J = I, \tag{2.66}$$

przy czym I oznacza tu macierz jednostkową $2n \times 2n$ - wymiarową. Użycie tego samego oznaczenia, I, dla macierzy jednostkowych o różnych wymiarach nie będzie prowadzić do niejednoznaczności dlatego, że wymiar zawsze będzie wynikał z kontekstu. Wykorzystując własności (2.66) można udowodnić następujący lemat:

Lemat 1. Macierz fundamentalna $X(t)$ $(X(0) = I)$ układu hamiltonowskiego (2.64) ma wartości własne rozłożone parami symetrycznie względem okręgu jednostkowego, tzn., jeśli λ_k jest wartością własną macierzy $X(t)$ dla chwili t, to odpowiada jej wartość własna λ_l o tej samej krotności oraz

$$\lambda_l = \frac{1}{\lambda_k}. \tag{2.67}$$

Dowód. Rozważmy pochodną po czasie wyrażenia $X^T(t)JX(t)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[X^T(t)JX(t)] &= \frac{d}{dt}[X^T(t)]JX(t) + X^T(t)J\frac{d}{dt}[X(t)] \\ &= X^T(t)A^T(t)J^TJX(t) + X^T(t)JJA(t)X(t) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.68}$$

Ostatnia równość zachodzi na podstawie (2.66) oraz symetrii macierzy $A(t)$. W chwili zerowej $X(0) = I$, zatem

$$X^T(0)JX(0) = J. \tag{2.69}$$

Na podstawie (2.69) i (2.68) mamy dla dowolnego t

$$X^T(t)JX(t) = J, \tag{2.70}$$

skąd

$$X^{-1}(t) = J^{-1}X^T(t)J. \tag{2.71}$$

Transpozycja i przekształcenie podobieństwa po prawej stronie równania (2.71) nie zmieniają widma macierzy, co dowodzi lematu. □

W dalszym ciągu zajmować się będziemy okresowymi układami hamiltonowskimi, w których macierz $A(t)$ jest okresowa o okresie T

$$A(t+T) = A(t). \tag{2.72}$$

Na podstawie lematu 1 macierz monodromii tego układu ma wartości własne rozmieszczone symetrycznie względem koła jednostkowego. Wynika z tego, jak już wcześniej wspomniano, że układ hamiltonowski nie może być stabilny asymptotycznie (co jest zgodne z założeniem o tym, że nie ma w układzie rozpraszania energii). Warunkiem koniecznym stabilności jest, aby wszystkie multiplikatory (wartości własne macierzy monodromii $X(T)$) leżały na kole jednostkowym. Warunkiem koniecznym i wystarczającym stabilności jest, aby 1° wszystkie multiplikatory leżały na kole jednostkowym i 2° wszystkie dzielniki elementarne macierzy monodromii $X(T)$ były proste, inaczej mówiąc, aby postać kanoniczna Jordana macierzy $X(T)$ była diagonalna.

Dla badania rezonansu parametrycznego celowe jest dalsze rozbudowanie pojęcia stabilności. Rozważmy zaburzony okresowy układ hamiltonowski, tzn. układ o postaci:

$$\dot{x} = J[A(t) + \epsilon B(\epsilon, t)]x, \tag{2.73}$$

gdzie $B(\epsilon, t)$ jest symetryczną macierzą okresową o okresie T. Oznaczmy macierz monodromii odpowiadającą układowi (2.73) przez $X(\epsilon, T)$. Parametr ϵ jest niewielki.

Załóżmy, że okresowy układ hamiltonowski (2.64), (2.72) jest stabilny. Możemy teraz zapytać: czy niewielkie zaburzenie, jak w modelu (2.73), może spowodować destabilizację układu (2.64), (2.72). Bardziej precyzyjnie problem ten wyrażają następujące definicje:

Definicja 1. Okresowy układ hamiltonowski (2.64), (2.72) jest silnie stabilny, jeśli istnieje takie $\eta > 0$, że każdy układ (2.73) spełniający

$$\int_0^T \| \epsilon B(\epsilon, t) \| \, dt < \eta \text{ jest także stabilny.} \tag{2.74}$$

Definicja 2. Okresowy układ hamiltonowski (2.64), (2.72) jest słabo stabilny, jeśli jest stabilny, ale nie jest silnie stabilny.

Wprowadzamy jeszcze następujące określenie:

Definicja 3. Niech σ_k będzie multiplikatorem układu (2.64), (2.72). Niech $\mathcal{X}_k$ będzie podprzestrzenią niezmienniczą macierzy monodromii $X(T)$ generowaną przez jej wartość własną σ_k. Multiplikator σ_k nazywa się multiplikatorem pierwszego typu, jeśli dla każdego niezerowego wektora $\xi \in \mathcal{X}_k$ zachodzi

$$\bar{\xi}^T J \xi > 0 \tag{2.75}$$

oraz drugiego typu, gdy dla każdego niezerowego $\xi \in \mathcal{X}_k$

$$\bar{\xi}^T J \xi < 0. \tag{2.76}$$

We wzorach (2.75) i (2.76) $\bar{\xi}$ oznacza wektor sprzężony do ξ. Multiplikatory pierwszego i drugiego typu nazywają się multiplikatorami określonymi.

Jeśli w podprzestrzeni $\mathcal{X}_k$ można znaleźć niezerowy wektor ξ taki, że

$$\bar{\xi}^T J \xi = 0, \tag{2.77}$$

to σ_k nazywa się multiplikatorem typu mieszanego lub multiplikatorem nieokreślonym.

Możemy teraz sformułować najważniejsze twierdzenie o silnej stabilności liniowych układów hamiltonowskich.

Twierdzenie 3. (Twierdzenie Krejna, Gelfanda, Lidzkiego). Warunkiem koniecznym i wystarczającym silnej stabilności układu (2.64), (2.72) jest, aby wszystkie multiplikatory macierzy monodromii $X(T)$ były określone.

Dowód można znaleźć w [129, str. 144-172].

2.3.1. Częstotliwości krytyczne rezonansu parametrycznego

Korzystając z twierdzenia Krejna, Gelfanda, Lidzkiego możemy wyprowadzić wzory określające częstotliwości krytyczne rezonansu parametrycznego. Rozważmy następujący liniowy układ hamiltonowski

$$\dot{x} = J[A + \epsilon B(\epsilon, t)]x, \tag{2.78}$$

gdzie, tak jak w (2.73), ϵ jest małym parametrem, $B(\epsilon, t)$ jest symetryczną macierzą okresową o okresie T. Macierz A jest tu symetryczną macierzą stałą, niezależną od czasu. Załóżmy, że wszystkie wartości własne macierzy JA mają zerowe części rzeczywiste oraz że są to wartości własne pojedyncze. Zatem widmo macierzy JA składa się z liczb

$$j\nu_1, \; j\nu_2, \; \ldots \; j\nu_n \tag{2.79}$$

oraz

$$-j\nu_1,\ -j\nu_2,\ \ldots -j\nu_n, \tag{2.80}$$

$j = \sqrt{-1}$, przy czym $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n, -\nu_1, -\nu_2, \ldots -\nu_n$ są parami różne i każda z nich jest różna od zera. Udowodnimy teraz następujący lemat:

Lemat 2. Oznaczmy przez ξ_k wektor własny macierzy JA odpowiadający wartości własnej $j\nu_k$. Wtedy zachodzi następująca nierówność:

$$\bar{\xi}_k^T J\xi_k \neq 0. \tag{2.81}$$

Dowód. Oznaczmy przez $j\nu'$ dowolną wartość własną macierzy JA różną od $j\nu_k$ oraz przez ξ' odpowiadający jej wektor własny. Wtedy

$$\begin{aligned}\bar{\xi}'^T J\xi_k &= \bar{\xi}'^T J\frac{1}{j\nu_k}JA\xi_k = -\frac{1}{j\nu_k}\bar{\xi}'^T AJ^T J\xi_k = \\ &= \frac{j\nu'}{j\nu_k}\bar{\xi}'^T J\xi_k.\end{aligned} \tag{2.82}$$

Na podstawie pierwszej i ostatniej z powyższych równości dostajemy:

$$\frac{\nu_k - \nu'}{\nu_k}\bar{\xi}'^T J\xi_k = 0. \tag{2.83}$$

Ponieważ założyliśmy, że $\nu_k \neq \nu'$, zatem

$$\bar{\xi}'^T J\xi_k = 0. \tag{2.84}$$

Utwórzmy teraz macierz $\bar{\Xi}$, której wierszami są sprzężenia wektorów własnych macierzy JA, tzn. jej wiersze są postaci $\bar{\xi}_k$, $k = 1, 2 \ldots 2n$. Macierz $\bar{\Xi}J$ jest nieosobliwa, zatem

$$\bar{\Xi}J\xi_k \neq 0. \tag{2.85}$$

Ale na podstawie (2.84) $2n-1$ z $2n$ elementów wektora, który dostaniemy po wykonaniu mnożenia po lewej stronie nierówności (2.85), jest równe zero. Stąd wynika (2.81). □

Analogicznie do definicji 3 wartość własną $j\nu_k$ macierzy JA nazywamy pierwszego typu, jeśli dla odpowiadającego jej wektora własnego ξ_k zachodzi:

$$\bar{\xi}_k^T J\xi_k > 0 \tag{2.86}$$

oraz drugiego typu, jeśli

$$\bar{\xi}_k^T J\xi_k < 0. \tag{2.87}$$

Z lematu 2 wynika, że wszystkie wartości własne macierzy JA są pierwszego lub drugiego typu. Łatwo też sprawdzić, że prawdziwy jest następujący lemat:

Lemat 3. Jeśli $j\nu_k$ jest wartością własną pierwszego typu macierzy JA, to $-j\nu_k$ jest wartością własną drugiego typu i na odwrót.

Dlatego bez ograniczania ogólności będziemy dalej zakładać, że wartości własne (2.79) są pierwszego typu, a (2.80) drugiego typu.

Oznaczmy macierz monodromii odpowiadającą niezaburzonemu układowi (2.78) (tzn. przy $\epsilon = 0$) przez $X(T)$. Z uwagi na stałość macierzy A mamy:

$$X(T) = e^{JAT}. \tag{2.88}$$

Z przedstawionej równości wynika, że wektory własne macierzy monodromii $X(T)$ pokrywają się z wektorami własnymi macierzy JA. Ponadto, na podstawie założenia, że ν_k są parami różne i różne od zera, wszystkie dzielniki elementarne macierzy monodromii $X(T)$ są proste.

Możemy teraz udowodnić twierdzenie o częstotliwościach krytycznych dla układu (2.78). Podobnie jak poprzednio, niezaburzonym nazywamy układ (2.78), w którym $\epsilon = 0$.

Twierdzenie 4. Niezaburzony (tzn. przy $\epsilon = 0$) układ okresowy (2.78) jest silnie stabilny dla wszystkich okresów T takich, że

$$T \neq \frac{2\pi}{\omega_{kr}(k,l,m)} \tag{2.89}$$

oraz słabo stabilny dla

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{kr}(k,l,m)}. \tag{2.90}$$

Częstotliwości $\omega_{kr}(k,l,m)$ nazywa się częstotliwościami krytycznymi i wylicza się z następującego wzoru:

$$\omega_{kr}(k,l,m) = \frac{1}{m}(\nu_k + \nu_l), \tag{2.91}$$

$1 \leq k, l \leq n$, $m = 1, 2, \ldots$

Dowód. Na podstawie (2.79), (2.80) i (2.88) macierz monodromii $X(T)$ ma następujące wartości własne:

$$\sigma_1, \ldots, \sigma_n \tag{2.92}$$

oraz

$$\sigma_1^{-1}, \ldots, \sigma_n^{-1}, \tag{2.93}$$

przy czym

$$\sigma_k = e^{j\nu_k T},\ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.94}$$

Zbadajmy, dla jakich okresów T macierz monodromii $X(T)$ ma wielokrotne wartości własne. Z (2.94) wyliczamy, że $\sigma_k = \sigma_l$, $k \neq l$, $1 \leq k, l \leq n$, gdy

$$T = \frac{2\pi m}{\nu_k - \nu_l} \tag{2.95}$$

oraz że $\sigma_k = \sigma_l^{-1}$, $1 \le k, l \le n$, gdy

$$T = \frac{2\pi m}{\nu_k + \nu_l}, \tag{2.96}$$

gdzie m jest dowolną liczbą całkowitą różną od zera.

W następnym kroku badamy podprzestrzenie niezmiennicze generowane przez podwójne wartości własne $\sigma_k = \sigma_l$ oraz $\sigma_k = \sigma_l^{-1}$. Z lematu 3 wynika, że podprzestrzenie niezmiennicze związane z multiplikatorami $\sigma_k = \sigma_l$ są zawsze określone, natomiast podprzestrzenie niezmiennicze związane z multiplikatorami $\sigma_k = \sigma_l^{-1}$ są typu mieszanego. Zatem z twierdzenia 3 wynika teraz teza twierdzenia 4. □

2.3.2. Przykład

Jako przykład ilustrujący twierdzenie o częstotliwościach krytycznych rozważmy szczególną postać równania Hilla (np. [25], [129])

$$\ddot{x} + [1 + \epsilon a(t)]x = 0. \tag{2.97}$$

Przedstawione równanie może opisywać zachowanie się, w pobliżu położenia równowagi, wahadła o zmiennej długości lub wahadła o ruchomym punkcie zawieszenia, przy dodatkowym założeniu o braku tarcia w punkcie zawieszenia. Funkcja $\epsilon a(t)$ opisuje zmiany w czasie długości wahadła lub siły oddziałującej na punkt zawieszenia wahadła. Dzięki założeniu o braku tarcia rozważany układ jest liniowym układem hamiltonowskim. Wprowadzając współrzędne stanu $x_1 = x$ i $x_2 = \dot{x}$ można równanie (2.97) zapisać jako

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \left(I + \epsilon \begin{bmatrix} a(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \tag{2.98}$$

Równanie (2.97) można zatem sprowadzić do postaci (2.78). W analizowanym przypadku

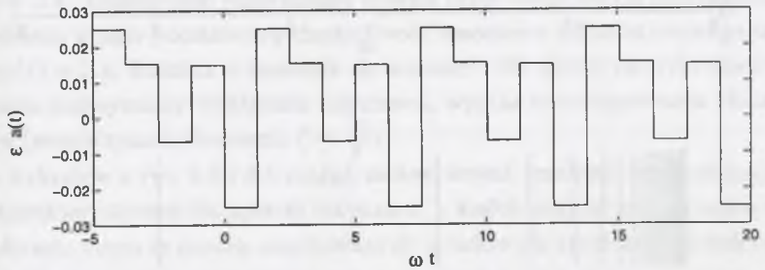
$$JA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.99}$$

i wartości własne macierzy JA wynoszą j i $-j$. Ponieważ są tylko dwie wartości własne, zatem w twierdzeniu 4 musimy przyjąć $k = l = 1$ i otrzymujemy następujący wzór na częstotliwości krytyczne $\omega_{kr}(k, l, m) = \omega_{kr}(1, 1, m) = \omega_{kr}(m)$:

$$\omega_{kr}(m) = \frac{2}{m}, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{2.100}$$

Zgodnie ze wzorem (2.100), dowolnie małe okresowe zaburzenia $\epsilon a(t)$ o częstotliwościach $\omega_{kr}(m)$ mogą zdestabilizować układ (2.97).

Zwróćmy uwagę, że z twierdzenia 4 wynika tylko, że dla każdej z częstotliwości krytycznych (2.100) istnieje niewielkie pobudzenie destabilizujące układ. Nie oznacza to, że każde pobudzenie o częstotliwości (2.100) destabilizuje układ (2.97). Możemy to zilustrować obliczeniami numerycznymi. Jako $a(t)$ przyjmujemy przebieg przedstawiony na rysunku (2.5). Jest to okresowy przebieg schodkowy, który w okresie T przyjmuje 5 możliwych, generowanych losowo, wartości.



Rys. 2.5. *Przykładowy przebieg funkcji $\epsilon a(t)$. Częstotliwość sygnału $\epsilon a(t)$ wynosi ω. Funkcja zależy od pięciu losowych wartości i jest skalowana do zakresu* $[-0.025, 0.025]$

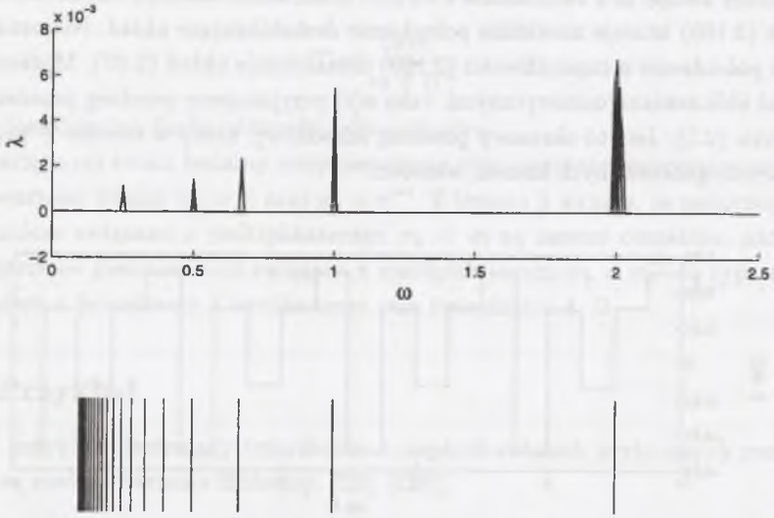
Fig. 2.5. *Exemplary plot of the function $\epsilon a(t)$. Frequency of the signal $\epsilon a(t)$ is equal to ω. The function depends on five random values and is rescaled to fit the interval* $[-0.025, 0.025]$

Procedura pobudzania rezonansu parametrycznego jest następująca:

1. Generowanych jest 5 liczb losowych, które zadają przebieg funkcji $\epsilon a(t)$ jak na rys. 2.5. Dodatkowo przebieg funkcji skaluje się tak, że $\max \epsilon a(t) = -\min \epsilon a(t) = 0.025$.

2. Wygenerowany przebieg funkcji $\epsilon a(t)$ jest podstawą do obliczenia macierzy monodromii $X(T)$ i wykładnika Lapunowa λ. Wykładnik Lapunowa λ oblicza się wielokrotnie, zakładając stały kształt funkcji $\epsilon a(t)$ i zmieniając częstotliwość ω w zakresie $[0, 2.5]$. Kreślony jest wykres zależności wartości wykładnika Lapunowa λ od częstotliwości ω sygnału $\epsilon a(t)$.

Opisana procedura została powtórzona 30 razy, a wykresy z jej punktu 2 były nakładane na siebie. Rezultat tego przedstawia rys. 2.6. Na górnym wykresie widać maksima, będące wynikiem rezonansu parametrycznego. Poniżej zaznaczone są pionowymi kreskami wartości częstotliwości krytycznych. Kreśląc pojedynczy wykres $\lambda(\omega)$ uzyskuje się zwykle 1 - 2 maksima, wynikające z pobudzenia tylko niektórych częstotliwości krytycznych. Nakładając na siebie więcej wykresów można lepiej zobrazować zależność $\lambda(\omega)$ i sprawdzić zgodność pozycji maksimów z wartościami częstotliwości krytycznych.



Rys. 2.6. *Wykres obrazujący rezonans parametryczny. Na górnym rysunku przedstawione są zależności wykładnika Lapunowa λ od częstotliwości ω pobudzenia $\epsilon a(t)$ dla 30 wygenerowanych pobudzeń $\epsilon a(t)$. Na dolnym rysunku pionowymi kreskami zaznaczone są wartości częstotliwości krytycznych $\omega_{kr}(m) = \frac{2}{m}$*

Fig. 2.6. *The above plots demonstrate parametric resonance. In the upper plot Lyapunov exponent λ is presented versus frequency ω of the signal $\epsilon a(t)$, for 30 random signals $ea(t)$. In the lower plot vertical markers depict values of critical frequencies $\omega_{kr}(m) = \frac{2}{m}$*

Na rysunku możemy zaobserwować, że pobudzone zostały 4 częstotliwości krytyczne rezonansu parametrycznego. Piąte maksimum jest związane z dwoma częstościami krytycznymi (o numerach 8 i 9). Jego obecność wynika z aspektów numerycznych, tzn. z tego, że parametr układu pobudzano sygnałem o skończonej (niezerowej) amplitudzie (0.025).

Zauważamy również prawidłowość polegającą na tym, że maksima odpowiadające niższym częstotliwościom są słabsze, gdyż rezonanse odpowiadające niższym częstotliwościom trudniej pobudzić. Niektóre częstotliwości nie zostały pobudzone, brak odpowiadających im maksimów.

Najsilniejsze i najczęściej występujące jest maksimum związane z podstawową częstotliwością krytyczną, odpowiadającą $m = 1$. Częstotliwość ta jest równa podwojonej częstotliwości drgań swobodnych niezaburzonego układu (2.97).

Mimo że teoria rezonansu parametrycznego stosuje się tylko do układów hamiltonowskich (w których nie występuje rozpraszanie energii) oraz analizuje asymptotyczne zależności dla niewielkich pobudzeń parametrów, jej wyniki stosuje się także jako przybliżenie w analizie układów, w których założenia te nie są dokładnie spełnione. Często, aby zbadać możliwość destabilizacji układu, zamiast analizować wszystkie możliwe pobudzenia, można ograniczyć się do funkcji okresowych, których częstotliwości leżą w pobliżu podstawowej częstotliwości krytycznej, jeśli tylko częstotliwość tę można w jakiś sposób oszacować.

Przeanalizujmy ponownie wykresy przedstawione na rys. 2.2 i 2.4. Zakres możliwych zmian częstotliwości drgań swobodnych wahadła z rys. 2.2, odpowiadający zakresowi zmian parametru a, wynosi 0.5 – 1.9. Jeśli weźmiemy środek tego zakresu, tzn. 1.2, to odpowiadająca tej wartości podstawowa częstotliwość krytyczna wynosi $2 \times 1.2 = 2.4$. Zaniedbując rozpraszanie energii przez tarcie lepkie dostaniemy zatem z twierdzenia 4 jako podstawową częstotliwość rezonansu parametrycznego częstotliwość $\omega_{kr}(1) = 2.4$. Różnica w stosunku do wartości 1.86, której na wykresie z rys. 2.2 odpowiada maksymalny wykładnik Lapunowa, wynika z występowania tłumienia w układzie (współczynnik tłumienia $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{5}$).

Dla wykresów z rys. 2.2 i 2.4 można zaobserwować przebiegi przypominające wykresy charakterystyczne dla zjawisk rezonansu, z wielokrotnymi maksimami o różnych wysokościach, mimo że modele analizowanych układów nie spełniają założeń stosowalności teorii rezonansu parametrycznego.

2.4. Uwagi i komentarze

Opisane w tym rozdziale metody i twierdzenia bazują głównie na pracach [25] i [129]. Przedstawione wyniki nie wyczerpują wszystkich, wywodzących się z teorii Floqueta, technik i podejść. Istnieje wiele innych metod obliczeniowych dla układów o okresowo zmieniających się parametrach. Spośród pominiętych warto wspomnieć o analitycznych metodach, w których macierz monodromii $X(T)$ wylicza się bezpośrednio na podstawie funkcji $A(t)$ [129], [112]. Mimo że metodę tę można stosować tylko w prostych przypadkach, gdy rząd układu jest 2 lub 3, jest ona często bardzo użyteczna, ponieważ pozwala bezpośrednio uzależnić wykładnik Lapunowa od parametrów modelu. Pomimo ograniczenia się tylko do najważniejszych metod przedstawione tu przykłady pozwolą jednak porównać opisywane w tym rozdziale techniki z innymi rozwiązaniami.

Założenie, że zmiany parametrów są okresowe, jest bardzo niewielkim ograniczeniem przy analizie układów o zmiennych parametrach, ponieważ sygnały okresowe stanowią bardzo szeroką klasę pobudzeń. Wymienimy tu trzy wyniki z literatury, które potwierdzają tę tezę. W pracy [21] wykazano, że jeśli dla układu o zmieniających się w czasie parametrach (0.1) istnieje strategia destabilizująca, to istnieje także okresowa strategia destabilizująca. W pracy [121] udowodniono, że dla układów dwuwymiarowych z jednym zmieniającym się parametrem strategii destabilizującej wystarczy poszukiwać w klasie sygnałów okresowych, schodkowych z co najwyżej dwoma przełą-

czeniami za okres. W pracy [78] wykazano, stosując twierdzenie Poincarego - Bendixona, że dla układów trójwymiarowych okresowej strategii destabilizującej odpowiada okresowy w granicy przebieg współrzędnych stanu układu.

Przeanalizowane przykłady pokazują też ograniczenia metod bazujących na twierdzeniu Floqueta. Jeśli chcemy badać wpływ na zachowanie się układu sygnałów okresowych o kształtach bardziej złożonych niż analizowane w przedstawionych przykładach, to przegląd wszystkich możliwych pobudzeń staje się trudny lub niemożliwy.

Oczywiście, przegląd wszystkich możliwych pobudzeń nie jest konieczny dla zbadania istnienia strategii destabilizującej. Interesuje nas tylko maksimum (minimum) na wykresie zależności wykładnika Lapunowa od parametrów pobudzenia. Można zatem zaproponować zamiast przeglądu stosowanie numerycznych metod optymalizacji statycznej. Jednak podejście to jest także trudne w zastosowaniu, co łatwo zrozumieć patrząc na rys. 2.2 i 2.4. Oba wykresy mają wiele maksimów lokalnych, zatem metody numerycznej maksymalizacji będą często dawać błędne wyniki, spowodowane odszukaniem maksimum lokalnego zamiast globalnego.

Kolejny problem polega na tym, że wykonanie opisanych obliczeń numerycznych dla założonych zakresów zmian częstotliwości, wypełnień lub faz i stwierdzenie, że w przeszukanym zakresie nie znaleziono strategii destabilizującej (stabilizującej), nie daje jednak formalnego dowodu absolutnej stabilności (niestabilności) analizowanego układu. Przykładem może być model odwróconego wahadła z ruchomym punktem podparcia, badany w punkcie 2.2.2, gdzie nie udaje się znaleźć strategii stabilizującej. Mimo że w eksperymentach obliczeniowych nie udaje się ustabilizować układu, aby być pewnym absolutnej niestabilności, trzeba zastosować inne metody (por. rozdział trzeci).

Mimo opisanych trudności, nawet dla złożonych układów, warto przed zastosowaniem innych metod wykonać opisywane w tym rozdziale eksperymenty obliczeniowe z wielokrotnie modyfikowanym okresowym pobudzeniem zmian parametrów. Czasem daje to już wystarczające informacje o zachowaniu się badanego układu (np. strategię destabilizującą), a często pozwala lepiej zaplanować dalsze badania.

Wykonane obliczenia numeryczne będą służyły w dalszych rodziałach pracy jako odniesienie do wyników uzyskiwanych tam innymi metodami.

Rozdział 3

Kwadratowe funkcje Lapunowa

W rozdziale tym omówione zostaną bardzo efektywne obliczeniowo metody badania absolutnej stabilności i absolutnej niestabilności układu (0.1), (1.1), wykorzystujące funkcje Lapunowa definiowane w postaci form kwadratowych współrzędnych stanu:

$$V(x) = x^T P x \tag{3.1}$$

lub też funkcje Lapunowa dane w postaci sumy formy kwadratowej i dodatkowych składników całkowych. We wzorze (3.1) $x \in R^n$ jest wektorem stanu układu (0.1), a $P \in R^{n \times n}$ jest symetryczną macierzą formy kwadratowej.

Podstawowym pojęciem, które wykorzystuje się do dowodzenia absolutnej stabilności (niestabilności) układu ze zmiennymi parametrami (0.1), (1.1), jest pojęcie *jednoczesnych (wspólnych) funkcji Lapunowa.* Terminy jednoczesna oraz wspólna funkcja Lapunowa będą dalej używane jako synonimy. Funkcja $V(x)$ jest wspólną funkcją Lapunowa dla układu ze zmiennymi parametrami (0.1), (1.1), jeśli jest ona funkcją Lapunowa dla każdego z układów narożnych (1.5), (tzn. pochodne wzdłuż rozwiązań każdego z układów narożnych są funkcjami określonego znaku). Istnienie funkcji Lapunowa wspólnej dla wszystkich układów narożnych dowodzi absolutnej stabilności (niestabilności) układu (0.1), (1.1).

W przypadku gdy zmianę parametrów układu można zinterpretować jako wynikającą z istnienia sprzężenia zwrotnego poprzez funkcję, na którą nałożony jest warunek sektorowy (1.49), do badania absolutnej stabilności i niestabilności można zastosować kryteria częstotliwościowe - kryterium koła oraz kryterium Popova. Są one uogólnieniem na przypadek układów o zmiennych parametrach klasycznego kryterium Nyquista stabilności liniowych pętli sprzężenia zwrotnego. Zastosowanie tych kryteriów pozwala sprowadzić problem poszukiwania jednoczesnej funkcji Lapunowa do analizy własności charakterystyk Nyquista (macierzy) transmitancji układu otwartego. Kryterium koła otrzymuje się przez zastosowanie jako funkcji Lapunowa formy kwadratowej. Kryterium Popova dotyczy sytuacji, gdy zmienność parametrów jest spowodowana istnieniem niezależnej od czasu nieliniowości sektorowej, jak w układzie przedstawionym

w punkcie 1.5.5 na rys. 1.7. W takiej sytuacji jako funkcję Lapunowa definiuje się sumę formy kwadratowej oraz składnika powstającego przez scałkowanie nieliniowości wzdłuż trajektorii układu.

Warunek na to, aby $V(x)$ była wspólną funkcją Lapunowa dla układu (0.1), można zapisać w postaci algebraicznej jako *liniową nierówność macierzową*. Także kryteria częstotliwościowe absolutnej stabilności lub niestabilności mogą być sformułowane w postaci liniowych nierówności macierzowych. Liniowe nierówności macierzowe są to warunki, które obejmują ujemną (dodatnią) określoność macierzy z jednoczesnym zachodzeniem pewnych liniowych równości dotyczących elementów tej macierzy. Problem poszukiwania macierzy spełniających liniowe nierówności macierzowe należy do klasy problemów programowania wypukłego i w ostatnich latach opracowano efektywne numerycznie algorytmy rozwiązywania takich problemów [64], [32]. Dzięki temu możliwe jest badanie problemów absolutnej stabilności (niestabilności) dla układów, w których wymiar wektora stanu może być bardzo wysoki (kilkanaście, a nawet kilkadziesiąt współrzędnych stanu).

Ceną za wysoką efektywność obliczeniową jest fakt, że zastosowanie funkcji kwadratowych (kwadratowych ze składnikami całkowymi) pozwala uzyskiwać tylko warunki wystarczające absolutnej stabilności lub niestabilności. Warunki te zawierają nadmiar w stosunku do rzeczywistej granicy stabilności. W literaturze można znaleźć przykłady, w których wykazuje się, że nadmiar ten może być bardzo duży. Przykłady takie podane zostaną także w następnym rozdziale tej pracy, gdzie do badania absolutnej stabilności (niestabilności) układu (0.1), (1.1) zastosowane będą nieparametrycznie definiowane (wielościenne i przedziałami liniowe) funkcje Lapunowa.

Mimo trudnego zwykle do oszacowania zapasu w otrzymywanych oszacowaniach dopuszczalnych zakresów zmian parametrów, metody wykorzystujące kwadratowe funkcje Lapunowa są podstawowymi metodami stosowanymi w praktycznych obliczeniach, zwłaszcza dla bardziej złożonych układów.

3.1. Układ liniowy o stałych współczynnikach

Na wstępie przedstawimy twierdzenia o stabilności i niestabilności dla układu liniowego o stałych współczynnikach. Rozważamy układ liniowy o stałych współczynnikach, opisany równaniem stanu

$$\dot{x} = Ax. \tag{3.2}$$

Asymptotyczna stabilność

Asymptotyczną stabilność układu (3.2) rozstrzyga następujące klasyczne twierdzenie: [49, str. 123], [39], [53], [46], [25].

Twierdzenie 1. Układ (3.2) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje symetryczna, istotnie dodatnio określona macierz $P \in R^{n\times n}$ taka, że

$$A^TP + PA < 0. \tag{3.3}$$

W przedstawionym wzorze, a także w dalszym tekście, znak ostrej nierówności "<" (">") w odniesieniu do macierzy jest rozumiany jako istotnie ujemna (dodatnia) określoność. Podobnie przez słabe nierówności oznacza się półokreśloność macierzy.

Pochodna funkcji Lapunowa (3.1) wzdłuż trajektorii układu (3.2) dana jest przez wyrażenie

$$\dot{V}(x) = x^T(A^TP + PA)x. \tag{3.4}$$

Zatem warunek (3.3) jest warunkiem wystarczającym asymptotycznej stabilności na mocy twierdzenia Lapunowa o asymptotycznej stabilności (np. [49, str. 101]). Z kolei łatwo stwierdzić, że gdy wszystkie części rzeczywiste wartości własnych macierzy A są ujemne (macierz A jest asymptotycznie stabilna), to algebraiczne równanie Lapunowa

$$A^TP + PA = -Q \tag{3.5}$$

ma dla każdej symetrycznej macierzy $Q > 0$ jednoznaczne, istotnie dodatnio określone rozwiązanie

$$P = \int_0^\infty e^{A^Tt}Qe^{At}dt. \tag{3.6}$$

Dowodzi to konieczności.

Następujące warunki są sobie równoważne:

1. Istnieje $P = P^T > 0$ taka, że $A^TP + PA < 0$.
2. Dla każdej macierzy $Q = Q^T > 0$ równanie $A^TP + PA = -Q$ ma rozwiązanie $P = P^T > 0$.
3. $\mathrm{Re}\lambda(A) < 0$, tzn. widmo macierzy A leży w lewej otwartej półpłaszczyźnie.

Niestabilność

Niestabilność układu (3.2) może być wykazana z zastosowaniem następującego twierdzenia:

Twierdzenie 2. Warunkiem wystarczającym niestabilności układu (3.2) jest, aby istniała symetryczna macierz P taka, że

$$A^TP + PA > 0 \tag{3.7}$$

oraz, aby macierz P miała przynajmniej jedną dodatnią wartość własną.

Twierdzenie to jest konsekwencją pierwszego twierdzenia Lapunowa o niestabilności (np. [49, str. 154], [39, str. 19]). Zdefiniujmy jako

$$\mathrm{In}(A) = (n_d, n_u, n_z) \tag{3.8}$$

bezwładność (inercję) macierzy A, gdzie n_d oznacza liczbę wartości własnych macierzy A o dodatnich częściach rzeczywistych, n_u - liczbę wartości własnych macierzy A o ujemnych częściach rzeczywistych, a n_z - liczbę wartości własnych macierzy A o zerowych częściach rzeczywistych. Wiadomo (zob. [45, dod. F], [110, str. 252]), że aby zachodził warunek (3.7), bezwładność macierzy A musi spełniać warunek $n_z = 0$, tzn. macierz A nie może mieć wartości własnych o zerowych częściach rzeczywistych oraz musi zachodzić

$$\mathrm{In}(A) = \mathrm{In}(P). \tag{3.9}$$

Z przedstawionego komentarza wynika, że twierdzenie 2 daje tylko warunek wystarczający niestabilności układu (3.2). Rozważmy następujący przykład:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

Jest to równanie stanu układu zachowawczego (podwójnego całkowania), który jest niestabilny. Jednak twierdzenie 2 nie pozwala na wykazanie niestabilności układu (3.10). Widać, że przy dowolnym wyborze macierzy P lewa strona nierówności macierzowej (3.7) nie jest macierzą określoną. Zatem (3.7) nie może zachodzić.

Niestabilność układu (3.10) można udowodnić stosując np. twierdzenie Czetajewa ([49, twierdzenie 3.3, str. 113]). Przyjmując jako funkcję V

$$V(x_1, x_2) = x_1 x_2 \tag{3.11}$$

dostajemy:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = x_2^2. \tag{3.12}$$

Funkcja $V(x_1, x_2)$ przyjmuje dodatnie wartości w dowolnie małym otoczeniu zera. Definiując teraz zgodnie z założeniami twierdzenia Czetajewa zbiór U

$$U = \{x_1, x_2 : x_1 x_2 > 0,\ x1 > 0\} \cap B_\varepsilon, \tag{3.13}$$

gdzie B_ε oznacza koło o promieniu ε i środku w punkcie zerowym, widzimy, że $\dot{V}(x_1, x_2) > 0$ w całym zbiorze U. Dowodzi to niestabilności. Do wykazania niestabilności układu (3.10) można też użyć drugiego twierdzenia Lapunowa o niestabilności [49, str. 154] lub twierdzenia Krasowskiego [107, str. 23].

Mimo że, jak pokazaliśmy, istnieją silniejsze od twierdzenia 2 warunki niestabilności, zaletą twierdzenia 2 jest prostota i wygoda jego zastosowania. Wspominane silniejsze twierdzenia wymagają dodatkowo poszukiwania odpowiednich zbiorów lub funkcji, które w ogólnym przypadku mogą być trudne do wyliczenia. Dlatego, zwłaszcza

przy konstrukcji funkcji Lapunowa do dowodzenia absolutnej niestabilności układów o zmiennych w czasie parametrach, uogólnienia twierdzenia 2 są często wykorzystywane.

3.2. Absolutna stabilność i niestabilność

Powracamy teraz do układu o zmiennych w czasie parametrach (0.1), (1.1). Sformułowane dalej twierdzenia o absolutnej stabilności i absolutnej niestabilności dla tego układu są bezpośrednimi uogólnieniami twierdzenia 1 i twierdzenia 2.

Twierdzenie 3. Warunkiem wystarczającym absolutnej stabilności układu (0.1), (1.1) jest istnienie symetrycznej, istotnie dodatnio określonej macierzy $P \in R^{n \times n}$ takiej, że

$$A_i^T P + P A_i < 0 \tag{3.14}$$

dla wszystkich $i = 1, 2..., N$.

Dowód. Jako funkcję Lapunowa przyjmujemy $V(x)$ daną przez (3.1). Na podstawie (1.2) istnieją mierzalne funkcje skalarne α_i, $\alpha_1 \geq 0$ i $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i(t) = 1$ dla p.w. $t \geq 0$ takie, że

$$A(t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(t) A_i. \tag{3.15}$$

Teraz pochodną funkcji V wzdłuż trajektorii układu (0.1) możemy zapisać następująco:

$$\dot{V}(x) = x^T \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(t)(A_i^T P + P A_i) x. \tag{3.16}$$

Z (3.14) oraz z faktu, że liczba układów narożnych jest skończona, wynika istnienie liczby $\varepsilon > 0$ takiej, że

$$A_i^T P + P A_i \leq -\varepsilon I, \tag{3.17}$$

dla wszystkich $i = 1, 2..., N$. Z nierówności (3.17) oraz z (3.16) mamy:

$$\dot{V}(x) \leq -\varepsilon \parallel x \parallel^2. \tag{3.18}$$

Teraz na podstawie nierówności Rayleigha

$$\lambda_{\min}(P) I \leq P \leq \lambda_{\max}(P) I \tag{3.19}$$

dostajemy nierówność różniczkową

$$\dot{V} \leq -\frac{\varepsilon}{\lambda_{\max}(P)} V, \tag{3.20}$$

z której wynika [79, str. 7]:

$$V(t) = V[x(t)] \leq V[x(0)] e^{-\frac{\varepsilon}{\lambda_{\max}(P)} t}. \tag{3.21}$$

Wykorzystując jeszcze raz (3.19) otrzymujemy:

$$\| x(t) \|^2 \leq \| x(0) \|^2 \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} e^{-\frac{\varepsilon}{\lambda_{\max}(P)}t}. \tag{3.22}$$

Zatem układ (0.1), (1.1) jest jednostajnie wykładniczo stabilny, co pociąga za sobą absolutną stabilność. □

Uwaga. Dla układu opisanego modelem (0.1), (1.1) absolutna stabilność jest równoważna jednostajnej wykładniczej stabilności (por. twierdzenie 2 rozdziału 4).

Zwróćmy uwagę, że mimo iż twierdzenie 1 określało zarówno warunek wystarczający, jak i konieczny asymptotycznej stabilności, to rozszerzenie tego twierdzenia na układ ze zmiennymi parametrami (twierdzenie 3) daje już tylko warunek wystarczający. Przykłady dowodzące, że warunki z twierdzenia 3 są nadmiarowe, podane zostaną w następnym rozdziale.

Funkcję Lapunowa (3.1) definiowaną przez macierz P spełniającą (3.14), $i = 1, 2..., N$, nazywa się wspólną funkcją Lapunowa układów narożnych danych przez macierze A_1, A_2, ..., A_N.

Na podobnej do użytej w poprzednim twierdzeniu idei bazuje metoda dowodzenia absolutnej niestabilności sformułowana poniżej.

Twierdzenie 4. Warunkiem wystarczającym absolutnej niestabilności układu (0.1), (1.1) jest istnienie macierzy $P \in R^{n \times n}$, posiadającej przynajmniej jedną dodatnią wartość własną, oraz takiej, że

$$A_i^T P + P A_i > 0 \tag{3.23}$$

dla wszystkich $i = 1, 2..., N$.

Dowód. Jako funkcję Lapunowa przyjmujemy $V(x)$ daną przez (3.1). Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 3 pochodną tej funkcji wzdłuż trajektorii układu (0.1) możemy zapisać w postaci (3.16). Z (3.23) oraz z faktu, że liczba układów narożnych jest skończona, wynika istnienie liczby $\varepsilon > 0$ takiej, że

$$A_i^T P + P A_i \geq \varepsilon I \tag{3.24}$$

dla wszystkich $i = 1, 2..., N$. Mamy zatem (analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 3)

$$\dot{V}(x) \geq \varepsilon \| x \|^2 . \tag{3.25}$$

Na podstawie nierówności Rayleigha (3.19) oraz założenia, że $\lambda_{\max}(P) > 0$, zachodzi nierówność różniczkowa

$$\dot{V}(x) \geq \frac{\varepsilon}{\lambda_{\max}(P)} V(x), \tag{3.26}$$

z której wynika [79, str. 7]

$$V(t) = V[x(t)] \geq V[x(0)] e^{\frac{\varepsilon}{\lambda_{\max}(P)}t}. \tag{3.27}$$

Rozważmy z kolei zbiór Z

$$R^n \supset Z = \{x : x^T P x \geq \eta \| x \|^2\}, \tag{3.28}$$

gdzie $\eta > 0$. Na podstawie założenia, że $\lambda_{\max}(P) > 0$, zbiór Z jest niepusty dla odpowiednio małych η. Ponadto dla wszystkich $x \in Z$ zachodzi oszacowanie:

$$\eta \| x(t) \|^2 \leq x^T P x \leq \lambda_{\max}(P) \| x(t) \|^2 . \tag{3.29}$$

Definiujemy funkcję $W(x)$

$$W(x) = x^T (P - \eta I) x, \tag{3.30}$$

przyjmującą wartości dodatnie wewnątrz, zerowe na brzegu oraz ujemne na zewnątrz zbioru Z. Pochodna funkcji $W(x)$ wzdłuż trajektorii układu (0.1) dana jest przez

$$\dot{W}(x) = x^T \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(t)(A_i^T P + P A_i) x - \eta x^T \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(t)(A_i^T + A_i) x, \tag{3.31}$$

$\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i(t) = 1$ dla p.w. $t \geq 0$. Jeśli oznaczymy

$$\lambda_M = |\max_i \lambda_{\max}(A_i^T + A_i)|, \tag{3.32}$$

to na podstawie (3.24) dostajemy następujące oszacowanie dla $\dot{W}(x)$:

$$\dot{W}(x) \geq \| x(t) \|^2 (\varepsilon - \lambda_M \eta) \tag{3.33}$$

Widzimy zatem, że jeśli

$$\eta < \frac{\varepsilon}{\lambda_M}, \tag{3.34}$$

to Z jest zbiorem dodatnio niezmienniczym dla układu (0.1), (1.1).

Wybieramy η spełniające (3.34) oraz $x(0) \in Z$. Wtedy z (3.29) i (3.27) wynika:

$$\| x(t) \|^2 \geq \| x(0) \|^2 \frac{\eta}{\lambda_{\max}(P)} e^{\frac{\varepsilon}{\lambda_{\max}(P)}t}. \tag{3.35}$$

Zatem układ (0.1), (1.1) jest jednostajnie wykładniczo niestabilny, co pociąga za sobą absolutną niestabilność. □

Podobnie jak poprzednio, twierdzenie to daje tylko warunek wystarczający. Warunkiem koniecznym, aby twierdzenie 4 zachodziło (nierówności macierzowe (3.23) były spełnione dla pewnej macierzy P), jest, aby wszystkie macierze A_i, $i = 1, 2, ..., N$ miały takie same bezwładności równe bezwładności macierzy P

$$\mathrm{In}(A_i) = \mathrm{In}(P), \; i = 1, 2 \ldots, N, \tag{3.36}$$

([45, twierdzenie F7, str. 767]).

Rozważmy układ ze zmiennymi w czasie parametrami (0.1), w którym zakres zmian parametrów określony jest przez (1.2), przy czym $N = 2$ oraz

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.37}$$

Ponieważ $\mathrm{In}(A_1) \neq \mathrm{In}(A_2)$, zatem absolutna niestabilność układu z macierzami narożnymi (3.37) nie może być wykazana z zastosowaniem twierdzenia 4. Z drugiej strony układ ten jest absolutnie niestabilny, co łatwo wykazać wyznaczając rozwiązanie startujące z warunku początkowego $x(0) = \varepsilon[1 \;\; 0]^T$, gdzie ε jest dowolnie małą liczbą różną od zera.

Zwróćmy uwagę, że na podstawie cytowanych wcześniej własności inercji macierzy można połączyć twierdzenia 3 i 4 następująco. Jeśli, bez narzucania na symetryczną macierz P warunków określoności lub nieokreśloności, udaje się znaleźć rozwiązanie P układu nierówności macierzowych (3.14), to

1. Macierz P jest nieosobliwa;
2. Kwadratowa funkcja Lapunowa $V(x) = x^T P x$ rozstrzyga bądź o absolutnej stabilności układu (0.1), (1.1), gdy $P > 0$, bądź też o jego absolutnej niestabilności, gdy $P < 0$ lub P jest macierzą nieokreśloną (posiada zarówno dodatnie, jak i ujemne wartości własne).

3.3. Warunki nieistnienia wspólnych funkcji Lapunowa

Nierówności macierzowe (3.3), (3.7) występujące w twierdzeniach 1 i 2 można łatwo rozwiązywać przez rozwiązanie algebraicznego równania Lapunowa (3.5). W odróżnieniu od nich układy nierówności (3.14) i (3.23) z twierdzeń 3 i 4 rozwiązuje się, stosując odpowiednie wersje metod wypukłej optymalizacji (zob. następny punkt). Zarówno dla konstrukcji numerycznych metod rozwiązywania (3.14), (3.23), jak też dla oceny i kontroli wyników otrzymywanych na podstawie procedur obliczeniowych, celowe jest sformułowanie warunków algebraicznych, przy spełnieniu których wiadomo, że rozwiązania (3.14) lub (3.23) nie istnieją. Warunki takie podamy poniżej (por. [14, str. 29], [15], [42], [113]).

Twierdzenie 4 a. Warunkiem wystarczającym na to, aby nie istniała żadna macierz symetryczna P spełniająca (3.23), jest istnienie N symetrycznych, istotnie dodatnio określonych macierzy $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ takich, że

$$\sum_{k=1}^{N} (Q_k A_k^T + A_k Q_k) = 0. \tag{3.38}$$

Dowód. Rozważmy przestrzeń Φ macierzy symetrycznych, blokowo diagonalnych $\Phi \ni \mathbf{S} = \mathrm{diag}(S_1, S_2, \ldots, S_N)$, gdzie $S_1, S_2, \ldots, S_N$ są $n \times n$ wymiarowymi macierzami symetrycznymi. Zbiór defniowany przez

$$S_k = PA_k + A_k^T P, \; P \text{ - dowolna macierz symetryczna,} \tag{3.39}$$

jest liniową podprzestrzenią przestrzeni Φ. Układ (3.23) nie ma rozwiązania, jeśli podprzestrzeń (3.39) nie ma punktów wspólnych ze stożkiem (wypukłym) macierzy istotnie dodatnio określonych w przestrzeni Φ, co może być udowodnione przez wskazanie funkcjonału liniowego, który dla elementów stożka macierzy istotnie dodatnio określonych (tzn. dla $\mathbf{S} \in \Phi, \mathbf{S} > 0$) przyjmuje ściśle dodatnie wartości, a dla elementów podprzestrzeni (3.39) przyjmuje wartości mniejsze lub równe zero. (Funkcjonał taki definiuje hiperpłaszczyznę oddzielającą stożek $\mathbf{S} > 0$ od podprzestrzeni (3.39) [81]).

Biorąc pod uwagę fakt, że ogólna postać funkcjonału liniowego na przestrzeni Φ jest następująca:

$$\sum_{k=1}^{N} \mathrm{tr}(Q_k S_k),$$

gdzie tr oznacza ślad macierzy, widzimy, że funkcjonał liniowy, zadany przez macierze $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$, spełniające założenia twierdzenia, przyjmuje wartości ściśle dodatnie na stożku $\mathbf{S} > 0$ oraz zeruje się na podprzestrzeni (3.39), co dowodzi tezy. □

3.4. Liniowe nierówności macierzowe

Twierdzenia 3 i 4 określają wystarczające warunki absolutnej stabilności i niestabilności układu ze zmiennymi w czasie parametrami w kategoriach nierówności, które nazywane są liniowymi nierównościami macierzowymi.

Definicja 1. Niech $Q_i \in R^{n \times n}$, $i = 1, 2, \ldots, M$ będą zadanymi macierzami symetrycznymi. Przez rozwiązanie *liniowej nierówności macierzowej*

$$\sum_{i=1}^{M} \kappa_i Q_i < 0 \tag{3.40}$$

lub

$$\sum_{i=1}^{M} \kappa_i Q_i \leq 0 \tag{3.41}$$

rozumie się znalezienie takich $\kappa_1, \kappa_2, \ldots \kappa_M$, nie wszystkich równych zero, dla których (3.40) lub (3.41) jest spełniona, lub stwierdzenie, że takie liczby nie istnieją.

Termin "liniowa nierówność macierzowa" został użyty po raz pierwszy w pracy [101]. W ostatnich latach ukazało się wiele publikacji, w których pokazuje się, że do

problemu rozwiązywania liniowych nierówności macierzowych można sprowadzić szereg zagadnień z zakresu teorii systemów i teorii sterowania ([14] i prace tam cytowane).

Pokażemy, że warunki wynikające z twierdzeń 3 i 4 można sprowadzić do postaci (3.40). Zauważmy, że układ nierówności macierzowych (3.14) można zapisać jako

$$\begin{bmatrix} A_1^T P + P A_1 & & 0 \\ & A_2^T P + P A_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & A_N^T P + P A_N \end{bmatrix} < 0. \tag{3.42}$$

Oznaczmy przez $Z_1, Z_2 ... Z_M$, $(M = n(n+1)/2)$ dowolną bazę w przestrzeni $n \times n$ wymiarowych macierzy symetrycznych. Wtedy macierz formy kwadratowej P w (3.1) można przedstawić w postaci:

$$P = \sum_{i=1}^{M} \kappa_i Z_i \tag{3.43}$$

i warunki $P > 0$ i (3.14) są równoważne z istnieniem rozwiązania nierówności macierzowej:

$$\sum_{i=1}^{M} x_i \begin{bmatrix} -Z_i & & 0 \\ & A_1^T Z_i + Z_i A_1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & A_N^T Z_i + Z_i A_N \end{bmatrix} < 0. \tag{3.44}$$

Dołączenie $-Z_i$ jako pierwszego bloku macierzy blokowo-diagonalnej w przedstawionym wzorze zapewnia dodatnią określoność rozwiązania P (jeśli rozwiązanie istnieje). Na podstawie uwagi na końcu punktu 3.2, aby zbadać absolutną stabilność lub absolutną niestabilność układu (0.1), (1.1), można też zbudować liniową nierówność macierzową z macierzami blokowymi nie zawierającymi $-Z_i$ (tak jak w (3.42)), a następnie sprawdzić określoność otrzymanego rozwiązania.

Podobnie jak powyżej, do postaci liniowej nierówności macierzowej można sprowadzić układ (3.23), a także warunki na macierze Q_1, Q_2, ..., Q_N, występujące w twierdzeniu 4 a.

Wraz ze wzrostem zainteresowania liniowymi nierównościami macierzowymi rozwijały się numeryczne metody ich rozwiązywania. Problem rozwiązania liniowych nierówności macierzowych należy do klasy problemów programowania wypukłego. Początkowo jako niezawodne i dość wygodne narzędzie do rozwiązywania liniowych nierówności macierzowych stosowano różne odmiany metody hiperpłaszczyzny tnącej [48], [15], [69], [75]. Obecnie stosuje się znacznie bardziej efektywne numerycznie metody punktu wewnętrznego [40], [14], [64]. Dostępna jest biblioteka procedur LMI CONTROL TOOLBOX do programu MATLAB [32], wykorzystująca algorytmy punktu wewnętrznego z pracy [64], pozwalająca efektywnie rozwiązywać problemy typu (3.14), (3.23) dla układów, których wektor stanu ma kilkanaście (a nawet kilkadziesiąt) współrzędnych.

3.5. Przykłady obliczeniowe

W punkcie tym przedstawimy przykłady obliczeniowe wyliczania wspólnych, kwadratowych funkcji Lapunowa dla układów o zmiennych w czasie parametrach. Dwa z trzech przedstawionych przykładów są kontynuacją obliczeń wykonywanych w poprzednim rozdziale.

3.5.1. Wahadło o ruchomym punkcie zawieszenia

Jest to przykład analizowany już w poprzednim rozdziale, w punkcie 2.2.1, z wykorzystaniem metod obliczeniowych teorii Floqueta. Rozważamy zatem ponownie równanie

$$\ddot{\theta} + 2\zeta\omega_0\dot{\theta} + [\omega_0^2 + a(t)]\theta = 0. \tag{3.45}$$

Zapisujemy (3.45) w postaci układu dwóch równań stanu

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 - a(t) & -2\zeta\omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{3.46}$$

i zakładamy następujące parametry:

$$2\zeta\omega_0 = 0.4, \quad \omega_0^2 = 0.5. \tag{3.47}$$

Przyjmujemy, że parametr $a(t)$ może się zmieniać w zakresie

$$a_{min} \le a(t) \le a_{max}. \tag{3.48}$$

Zgodnie z twierdzeniem 3 warunkiem wystarczającym absolutnej stabilności układu opisanego równaniem (3.45) jest istnienie kwadratowej funkcji Lapunowa, wspólnej dla dwóch układów narożnych reprezentowanych przez macierze

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 - a_{min} & -0.4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 - a_{max} & -0.4 \end{bmatrix}. \tag{3.49}$$

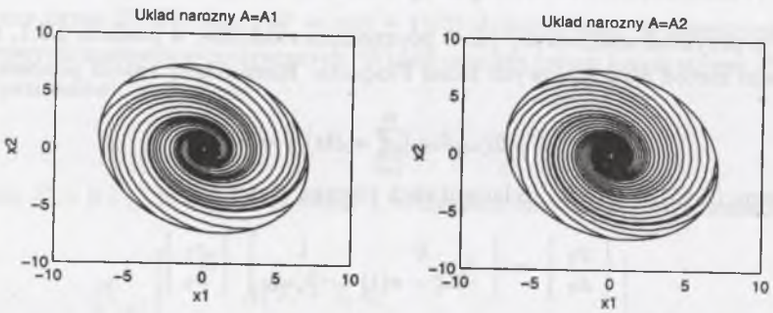
Przyjmujemy $a_{min} = 0$, $a_{max} = 0.7$. Korzystając z procedury `quadstab.m` pakietu MATLAB/LMI CONTROL TOOLBOX, możemy stwierdzić, że poszukiwana wspólna kwadratowa funkcja Lapunowa istnieje. Jest ona dana przez następującą macierz formy kwadratowej

$$P = \begin{bmatrix} 0.2123 & 0.0460 \\ 0.0460 & 0.2525 \end{bmatrix}. \tag{3.50}$$

Przyjęty zakres możliwych zmian $a(t)$ jest bliski granicy kwadratowej stabilności. Przez kwadratową stabilność rozumie się istnienie wspólnej kwadratowej funkcji Lapunowa, jak w twierdzeniu 3. Jeśli zwiększymy a_{max} do wartości $a_{max} = 0.8$, to

kwadratowej funkcji Lapunowa wspólnej dla układów narożnych A_1 i A_2 nie udaje się już znaleźć (funkcja taka nie istnieje).

Na rys. 3.1 wykreślona jest warstwica wyliczonej funkcji Lapunowa z macierzą formy kwadratowej P zadaną przez (3.50) oraz trajektorie fazowe dla dwóch układów narożnych $A = A_1$, $A = A_2$, dla których jako warunki początkowe dla wektora stanu wybrano punkty leżące na wyznaczonej warstwicy. Jak widać, dla obu układów $A = A_1$ i $A = A_2$ trajektorie fazowe pozostają wewnątrz warstwicy funkcji Lapunowa dla $t > 0$, co potwierdza fakt, że $V(x) = x^T P x$ jest wspólną funkcją Lapunowa.



Rys. 3.1. *Warstwica $\{x : x^T P x = 1\}$ wyliczonej kwadratowej funkcji Lapunowa wraz z wykresami trajektorii stanu układów narożnych*

Fig. 3.1. *Level set $\{x : x^T P x = 1\}$ of the calculated quadratic Lyapunov function and plots of state trajectories of vertex systems*

Porównując zakres zmian $a(t)$ badany w punkcie 2.2.1, $a_{min} = 0$, $a_{max} = 1.4$, dla którego znaleziono strategię destabilizującą, z zakresem analizowanym obecnie ($a_{min} = 0$, $a_{max} = 0.7$) stwierdzamy występowanie dość szerokiego marginesu, dla którego nie możemy rozstrzygnąć, czy układ jest absolutnie stabilny, czy też istnieje strategia destabilizująca. Przyczyną jest nadmiarowość warunków twierdzenia 3.

3.5.2. Odwrócone wahadło o ruchomym punkcie podparcia

Rozważamy ponownie zlinearyzowane równanie odwróconego wahadła z punktu 1.5.3, analizowane także w punkcie 2.2.2.

$$\ddot{\theta} + b\dot{\theta} - a(t)\theta = 0, \tag{3.51}$$

$$b = \frac{\beta}{mL^2}, \quad a(t) = \frac{g}{L} + \frac{F(t)}{mL}. \tag{3.52}$$

Zakładamy, że

$$a_{min} \le a(t) \le a_{max}, \tag{3.53}$$

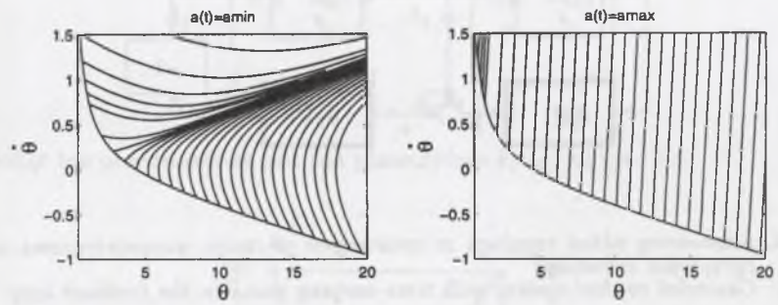
przy czym $a_{min} > 0$. Układ narożny nr 1 dany jest przez równanie (3.51) z parametrem $a(t) = a_{min}$, układ narożny nr 2 - z parametrem $a(t) = a_{max}$. Przyjmujemy jako funkcję

Lapunowa następującą formę kwadratową:

$$V(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} b\theta^2 + \theta\dot{\theta}. \tag{3.54}$$

Pochodna tej funkcji wzdłuż trajektorii równania (3.51) wyraża się wzorem:

$$\dot{V}(\theta, \dot{\theta}) = \dot{\theta}^2 + a(t)\theta^2. \tag{3.55}$$



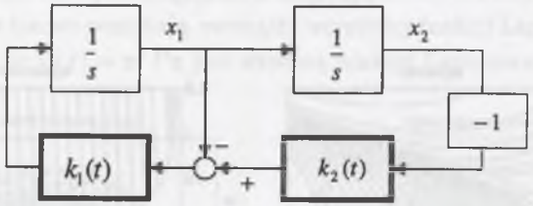
Rys. 3.2. *Fragment warstwicy $\{V(\theta, \dot{\theta}) = 1\} \cap \{\theta > 0\}$ funkcji Lapunowa dowodzącej absolutnej niestabilności odwróconego wahadła, wraz z wykresami trajektorii fazowych dla układów narożnych. Dla wykresu po lewej przyjęto $a(t) = a_{min}$, po prawej $a(t) = a_{max}$*

Fig. 3.2. *Fragment of the level set $\{V(\theta, \dot{\theta}) = 1\} \cap \{\theta > 0\}$ of the Lyapunov function that proves absolute instability of the inverted pendulum, and plots of phase trajectories of vertex systems. In the plot on the left hand side we assumed $a(t) = a_{min}$, on the right hand side $a(t) = a_{max}$*

Jak widać, przy założeniu, że $a_{min} > 0$, pochodna wzdłuż trajektorii jest istotnie dodatnio określona dla dowolnych przebiegów $a(t)$. Ponieważ funkcja Lapunowa (3.54) przyjmuje dodatnie wartości w dowolnie małym otoczeniu punktu zerowego, zatem, zgodnie z twierdzeniem 4, układ opisany równaniem (3.51) jest absolutnie niestabilny. Wniosek ten jest zgodny z wynikami obliczeń z punktu 2.2.2, przedstawionymi na wykresie z rys. 2.3, gdzie dla wszystkich analizowanych funkcji $a(t)$ wykładnik Lapunowa układu był dodatni.

Załóżmy, tak jak w punkcie 2.2.2, następujące parametry: $b = 0.1$, $a_{min} = 0.01$ oraz $a_{max} = 5$. Dla takich parametrów na rys. 3.2 przedstawiono fragment warstwicy $\{V(\theta, \dot{\theta}) = 1\} \cap \{\theta > 0\}$ funkcji Lapunowa (3.54) oraz wykresy trajektorii fazowych układu (3.51) wyliczone w taki sposób, że punkty początkowe położone są na warstwicy. Na wykresie po lewej stronie przyjęto $a(t) = a_{min}$, natomiast po prawej $a(t) = a_{max}$. Zbiór $\{V(\theta, \dot{\theta}) > 1\} \cap \{\theta > 0\}$ jest zbiorem nieograniczonym, co wynika z faktu, że funkcja $V(\theta, \dot{\theta})$ jest zadana przez nieokreśloną formę kwadratową. Jak widać na rysunku, dla obu układów narożnych $a(t) = a_{min}$ oraz $a(t) = a_{max}$ zbiór ten jest obszarem "ucieczki" trajektorii, co potwierdza absolutną niestabilność.

3.5.3. Kaskadowy układ regulacji ze zmiennymi wzmocnieniami



Rys. 3.3. *Kaskadowy układ regulacji ze zmiennymi w czasie wzmocnieniami w torze sprzężenia zwrotnego*
Fig. 3.3. *Cascaded control system with time-varying gains in the feedback loop*

Rozpatrujemy kaskadowy układ regulacji przedstawiony na rysunku 3.3. W układzie tym obiekt regulacji składa się z dwóch jednakowych elementów całkujących. W torze sprzężenia zwrotnego występują dwa zmieniające się w czasie wzmocnienia $k_1(t)$ i $k_2(t)$, o których zakłada się, że spełniają warunki:

$$\alpha \le k_1(t) \le \beta, \tag{3.56}$$

$$\alpha \le k_2(t) \le \beta. \tag{3.57}$$

Badamy zakres możliwych zmian wzmocnień $k_1(t)$ i $k_2(t)$, przy których układ jest absolutnie stabilny.

Model matematyczny układu z rys. 3.3 możemy zapisać w postaci następującego równania stanu

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \tag{3.58}$$

gdzie

$$A(t) = \begin{bmatrix} -k_1(t) & -k_1(t)k_2(t) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.59}$$

oraz

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}. \tag{3.60}$$

W modelu (3.58) - (3.60) występują zmienne w czasie parametry $k_1(t)$ oraz $k_1(t)k_2(t)$. Oznaczając

$$k_3(t) = k_1(t)k_2(t) \tag{3.61}$$

oraz zapisując nierówności dla $k_1(t)$ oraz $k_3(t)$ równoważne z (3.56) i (3.57)

$$\alpha \le k_1(t) \le \beta, \tag{3.62}$$

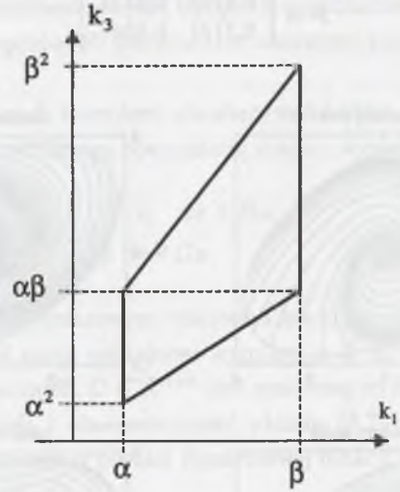
$$\alpha k_1(t) \le k_3(t) \le \beta k_1(t), \tag{3.63}$$

widzimy, że zakres zmian elementów macierzy $A(t)$ obejmuje wnętrze i brzeg czworokąta o wierzchołkach:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\alpha & -\alpha^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -\alpha & -\alpha\beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.64}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -\beta & -\alpha\beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -\beta & -\beta^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.65}$$

Czworokąt ten przedstawiony jest (na płaszczyźnie k_1-k_3) na rys. 3.4.



Rys. 3.4. *Czworokąt dopuszczalnych zmian parametrów $k_1(t)$ i $k_3(t)$*
Fig. 3.4. *Quadrangle of feasible parameters $k_1(t)$ and $k_3(t)$*

Na podstawie (3.64) i (3.65) możemy (3.58) równoważnie zapisać w postaci zgodnej z (1.2)

$$\dot{x}(t) = \left[\sum_{i=1}^{4} A_i v_i(t)\right] x(t), \tag{3.66}$$

gdzie

$$v_i \ge 0, \ \sum_{i=1}^{4} v_i = 1. \tag{3.67}$$

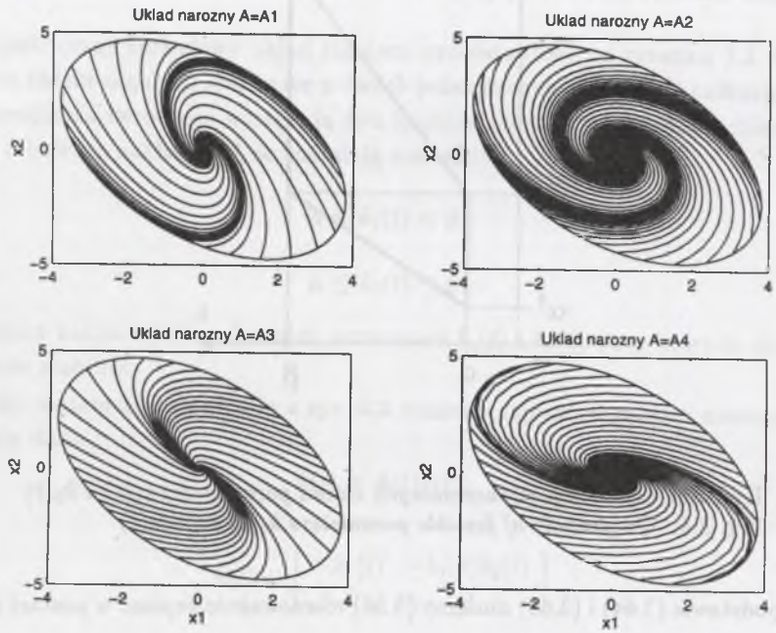
Zgodnie z twierdzeniem 3 warunkiem wystarczającym absolutnej stabilności jest istnienie funkcji Lapunowa (3.1) wspólnej dla czterech macierzy narożnych (3.64), (3.65).

Przyjmijmy $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.3$. Dla takich danych, rozwiązując liniową nierówność macierzową

$$\begin{bmatrix} -P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1^T P + PA_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2^T P + PA_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_3^T P + PA_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_4^T P + PA_4 \end{bmatrix} < 0, \tag{3.68}$$

możemy stwierdzić, że poszukiwana wspólna kwadratowa funkcja Lapunowa istnieje. Jest ona dana przez następującą macierz formy kwadratowej:

$$P = \begin{bmatrix} 0.8705 & 0.3171 \\ 0.3171 & 0.5647 \end{bmatrix}. \tag{3.69}$$



Rys. 3.5. *Warstwica $\{x : x^T Px = 1\}$ wyliczonej kwadratowej funkcji Lapunowa wraz z wykresami trajektorii stanu układów narożnych*

Fig. 3.5. *Level set $\{x : x^T Px = 1\}$ of the calculated quadratic Luapunov function and plots of the state trajectories of vertex systems*

Na rys. 3.5 wykreślona jest warstwica wyliczonej funkcji Lapunowa oraz trajektorie stanu dla czterech układów narożnych (3.64), (3.65). Trajektorie startują z punktów

warstwicy $x^T Px = 1$. Jak widać, wszystkie one znajdują się wewnątrz obszaru ograniczonego warstwicą, co potwierdza fakt, że obszar ten jest wspólnym dla wszystkich układów narożnych zbiorem dodatnio niezmienniczym.

Możemy także sprawdzić, że dla $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.4$ nie istnieje już kwadratowa funkcja Lapunowa wspólna dla czterech układów narożnych danych w (3.64), (3.65).

3.6. Kryteria częstotliwościowe

Gdy rozważany jest układ objęty sprzężniem zwrotnym, a zmiany jego parametrów wynikają ze zmian wzmocnienia lub występowania nieliniowości w torze sprzężenia zwrotnego, warunki absolutnej stabilności lub niestabilności można sformułować w postaci kryteriów częstotliwościowych, będących uogólnieniami częstotliwościowego kryterium stabilności Nyquista. W punkcie tym omówimy podstawowe wyniki z tego zakresu.

Większość formułowanych twierdzeń obowiązywać będzie dla układu liniowego o stałych współczynnikach, opisanego równaniami stanu i wyjścia

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{3.70}$$

$$y = Cx, \tag{3.71}$$

przy czym $x \in R^n$ jest n-wymiarowym wektorem stanu, $A \in R^{n\times n}$, macierzą stanu, wektory sterowań i wyjść mają jednakowe wymiary $u \in R^m$, $y \in R^m$, $B \in R^{n\times m}$ nazywamy macierzą wzmocnień, $C \in R^{m\times n}$ jest macierzą wyjść.

Zakładamy sterowalność i obserwowalność układu (3.70), (3.71), zatem równoważny z (3.70), (3.71) jest opis w postaci macierzowej funkcji przejścia (transmitancji macierzowej)

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B, \tag{3.72}$$

gdzie I oznacza $n \times n$ - wymiarową macierz jednostkową.

Przedstawimy tu wyprowadzenie częstotliwościowych kryteriów absolutnej stabilności oraz niestabilności wykorzystujące twierdzenia o nierównościach macierzowych oraz lemat Kalmana - Jakubowicza - Popova.

3.6.1. Nierówność macierzowa

Rozważmy dwie formy kwadratowe wektora $x \in R^n$; $x^T \Pi x$ oraz $x^T \Phi x$, $\Pi = \Pi^T \in R^{n\times n}$, $\Phi = \Phi^T \in R^{n\times n}$. W dalszych rozważaniach istotne okazuje się przebadanie przy jakich warunkach, dotyczących elementów macierzy Π i Φ, forma $x^T \Pi x$ przyjmuje

dodatnie wartości na stożku $\{x : x^T\Phi x \leq 0, x \neq 0\}$. Inaczej, przy jakich warunkach zachodzi następująca implikacja:

$$x^T\Phi x \leq 0, x \neq 0 \Rightarrow x^T\Pi x < 0. \tag{3.73}$$

Prawdziwy jest następujący lemat:

Lemat 1. [111, str. 131-135]. Załóżmy, że istnieje taki wektor $x_1 \in R^n$, że $x_1^T\Phi x_1 < 0$. Wtedy implikacja

$$x^T\Phi x \leq 0, x \neq 0 \Rightarrow x^T\Pi x < 0 \tag{3.74}$$

jest równoważna z istnieniem liczby $\tau \geq 0$ takiej, że

$$\Pi - \tau\Phi < 0. \tag{3.75}$$

3.6.2. Lemat Kalmana - Jakubowicza - Popova

Przedstawimy twierdzenie, nazywane w literaturze lematem Kalmana - Jakubowicza - Popova. Twierdzenie to jest szeroko stosowane w teorii systemów i w literaturze można znaleźć kilka jego sformułowań [49], [98], [85], [119]. Wersja dalej przedstawiona bazuje na pracy [80]. Jej zaletą jest ogólne sformułowanie, pozwalające na zastosowanie zarówno do problemu absolutnej stabilności, jak i absolutnej niestabilności. W pracy [80] podano też nowy dowód, w którym nie wykorzystuje się twierdzeń o spektralnej faktoryzacji [103], [119].

Twierdzenie 5. (Lemat Kalmana - Jakubowicza - Popova). Niech $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times n}$, $M = M^T \in R^{(n+m)\times(n+m)}$. Jeśli $\det(j\omega I - A) \neq 0$ dla wszystkich $\omega \in R$, (macierz $A \in R^{n\times m}$ nie posiada czysto urojonych wartości własnych) oraz para (A, B) jest sterowalna, to nierówność

$$\begin{bmatrix} (j\omega - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix}^* M \begin{bmatrix} (j\omega - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix} \leq 0 \tag{3.76}$$

zachodzi dla każdego $\omega \in R \cup \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz $P = P^T \in R^{n\times n}$ taka, że

$$M + \begin{bmatrix} A^TP + PA & PB \\ B^TP & 0 \end{bmatrix} \leq 0. \tag{3.77}$$

W nierówności częstotliwościowej (3.76) " * " oznacza sprzężenie hermitowskie.

Analogiczna równoważność pomiędzy odpowiednikami (3.76) i (3.77), w których słabe nierówności zastąpione są ostrymi zachodzi bez wymagania sterowalności pary (A, B) [80], [124].

Uwaga. W przypadku wersji twierdzenia 5 z ostrymi nierównościami we wzorach (3.76) i (3.77) można przedział zmienności $\omega \in R \cup \infty$ zastąpić przedziałem otwartym $\omega \in R$. Fakt ten będzie wykorzystywany w sformułowaniach dalej podawanych twierdzeń.

Układy pasywne, macierze transmitancji ściśle dodatnio rzeczywiste

Przedstawimy związek twierdzenia 5 z pasywnością układów liniowych oraz z transmitancjami macierzowymi ściśle dodatnio rzeczywistymi.

Definicja 2. Układ liniowy o postaci:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{3.78}$$

$$y = Cx + Du, \tag{3.79}$$

gdzie $x \in R^n$, $u \in R^m$, $y \in R^m$, A, B, C, D są macierzami o odpowiednich wymiarach, para (A, B) jest sterowalna i para (A, C) jest obserwowalna, dla którego istnieje forma kwadratowa zmiennych stanu

$$V(x) = \frac{1}{2}x^TPx, \; P = P^T \in R^{n\times n}, \; P > 0, \tag{3.80}$$

taka że

$$V[x(t_1)] - V[x(t_0)] < \int_{t_0}^{t_1} u^Tydt, \text{ dla } x(t_0) \neq 0, t_1 > t_0, \tag{3.81}$$

nazywamy układem pasywnym.

Definicja 3. Macierz funkcji wymiernych $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$, gdzie para (A, B) jest sterowalna i para (A, C) jest obserwowalna, nazywa się ściśle dodatnio rzeczywista, jeśli macierz A jest macierzą asymptotycznie stabilną (wszystkie bieguny transmitancji macierzowej $H(s)$ mają ujemne części rzeczywiste) oraz

$$H(j\omega) + H^T(-j\omega) > 0 \tag{3.82}$$

dla każdego $\omega \in R$.

Zwróćmy uwagę, że ścisła dodatnia rzeczywistość macierzy $H(s)$ pociąga za sobą dodatnią określoność macierzy $D = H(\infty)$.

Jeśli forma kwadratowa (3.80) określa energię zgromadzoną w układzie, to własność pasywności oznacza, że przyrost energii układu $V[x(t_1)] - V[x(t_0)]$, który występuje po lewej stronie nierówności (3.81), musi być mniejszy od energii doprowadzonej $\int_{t_0}^{t_1} u^Tydt$. Przechodząc do granicy $t_1 \to t_0$ możemy nadać nierówności (3.81) następującą postać różniczkową (nazywaną nierównością dyssypacji [101]):

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} < u^Ty, \text{ dla } x(t_0) \neq 0. \tag{3.83}$$

Wykorzystując (3.80), (3.78), (3.79) możemy nierówność (3.83) zapisać (po pomnożeniu obu stron przez 2) jako:

$$x^TP(Ax + Bu) + (Ax + Bu)^TPx - 2u^T(Cx + Du) < 0, \text{ dla } x(t_0) \neq 0 \tag{3.84}$$

lub

$$\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^TP + PA & PB - C^T \\ B^TP - C & -D - D^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} < 0, \text{ dla } x(t_0) \neq 0. \tag{3.85}$$

Przyjmijmy teraz

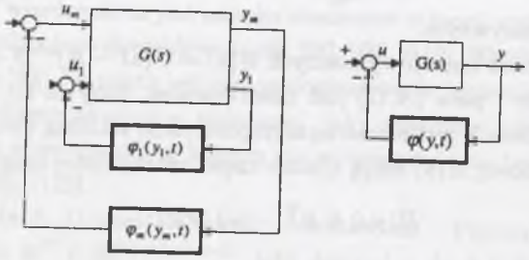
$$M = \begin{bmatrix} 0 & -C^T \\ -C & -D-D^T \end{bmatrix} \tag{3.86}$$

i zastosujmy twierdzenie 5. Jako wniosek otrzymujemy twierdzenie.

Twierdzenie 6. Warunkiem wystarczającym pasywności układu (3.78), (3.79) jest, aby jego transmitancja macierzowa $H(s) = C(sI-A)^{-1}B+D$ była ściśle dodatnio rzeczywista.

Twierdzenie 6 a. Jeśli macierz D jest nieosobliwa, to pasywność układu (3.78), (3.79) jest równoważna z tym, że jego transmitancja macierzowa $H(s)$ jest ściśle dodatnio rzeczywista. □

3.6.3. Częstotliwościowe kryteria absolutnej stabilności



Rys. 3.6. *Układ ze sprzężeniem zwrotnym w postaci zależnych od czasu nieliniowości sektorowych. Po lewej schemat układu z wyszczególnieniem wszystkich składowych wektorów u i y. Po prawej ten sam schemat z wykorzystaniem wektorowych linii sygnałowych*

Fig. 3.6. *Feedback loop with time-varying sector nonlinearities. On the left hand side block diagram with all elements of vectors u i y. On the right hand side the same block diagram drawn with the use of vector signals*

Zakładamy teraz, że układ (3.70), (3.71) został objęty sprzężeniem zwrotnym, jak to jest przedstawione na rys. 3.6. W torze sprzężenia zwrotnego występują zależne od czasu elementy nieliniowe $\varphi_k(y_k,t)$, $k = 1,2,\ldots m$, określające zależności $u_k(t)$ od $y_k(t)$

$$u_k(t) = -\varphi_k(y_k(t),t), \quad k = 1,\ldots m. \tag{3.87}$$

W równoważnym schemacie po prawej stronie rys. 3.6 przez $\varphi(y,t)$ oznaczamy wektorowy element nieliniowy, który reprezentuje wszystkie tory sprzężenia zwrotnego ze schematu po lewej stronie rys. 3.6, tzn.:

$$u = -\varphi(y,t), \tag{3.88}$$

$$\varphi(y,t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(y_1,t) \\ \vdots \\ \varphi_m(y_m,t) \end{bmatrix}. \tag{3.89}$$

Układ z rysunku 3.6 jest uogólnieniem, na przypadek wielu sygnałów wejściowych i wyjściowych, układu przedstawionego w rozdziale 1 na rys. 1.6. O nieliniowościach $\varphi_k(y_k,t)$, $k = 1,2,\ldots m$ zakładamy, że spełniają warunki sektorowe (1.49) opisane w rozdziale 1, pkt. 1.5.5, tzn.:

$$k_k(y_k,t) = \begin{cases} \frac{\varphi_k(y_k,t)}{y_k(t)} & \text{jeśli } y_k(t) \neq 0 \\ 0 & \text{jeśli } y_k(t) = 0 \end{cases}, \tag{3.90}$$

oraz

$$\alpha_k \leq k_k(y_k,t) \leq \beta_k. \tag{3.91}$$

Opiszemy teraz zastosowanie lematu 1 i twierdzenia 5 do dowodzenia absolutnej stabilności układu z rys. 3.6. Wygodne jest przeanalizowanie kolejno dwóch przypadków.

Przypadek 1

Przyjmujemy, że

$$0 \leq k_k(y_k,t) \leq \beta_k. \tag{3.92}$$

Zbudujmy macierz diagonalną

$$K_{max} = \mathrm{diag}(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m) \tag{3.93}$$

i zauważmy, że warunek (3.92) jest równoważny nierówności

$$\varphi^T(y,t)[K_{max}y - \varphi(y,t)] \geq 0 \tag{3.94}$$

lub

$$u^T(K_{max}y + u) \leq 0, \tag{3.95}$$

(przy czym u i y są związane zależnością (3.88)). Podstawiając z (3.71) $y = Cx$ nierówność (3.95) możemy zapisać jako:

$$\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & C^TK_{max} \\ K_{max}C & 2I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \leq 0. \tag{3.96}$$

Poszukujemy teraz, dla systemu (3.70), (3.71), objętego sprzężeniem zwrotnym spełniającym (3.96), funkcji Lapunowa $V(x)$ o postaci (3.1) z istotnie dodatnio określoną macierzą P. Pochodna funkcji $V(x)$ liczona wzdłuż trajektorii układu (3.70), (3.71) jest dana następującą formą kwadratową zmiennych x i u:

$$\dot{V}(x) = x^TP(Ax - B\varphi(Cx,t)) + (Ax - B\varphi(Cx,t))^TPx = \tag{3.97}$$

$$= \begin{bmatrix} x \\ -\varphi(Cx,t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^TP + PA & PB \\ B^TP & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -\varphi(Cx,t) \end{bmatrix}. \tag{3.98}$$

Z przyjętych założeń dotyczących sprzężenia zwrotnego (3.92) wynika, że wektor $[x^T \; -\varphi(Cx,t)^T]^T$ we wzorze (3.98) spełnia (3.96). Zastosujmy teraz lemat 1, przyjmując w nim

$$\Pi = \begin{bmatrix} A^TP + PA & PB \\ B^TP & 0 \end{bmatrix} \tag{3.99}$$

oraz

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & C^TK_{max} \\ K_{max}C & 2I \end{bmatrix}. \tag{3.100}$$

Jako wniosek dostajemy, że, przy zastosowaniu funkcji $V(x)$ danej przez (3.1), warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby jej pochodna wzdłuż trajektorii była istotnie ujemnie okeślona jest, aby dla pewnego $\tau \geq 0$ spełniona była nierówność macierzowa

$$-\tau \begin{bmatrix} 0 & C^TK_{max} \\ K_{max}C & 2I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^TP + PA & PB \\ B^TP & 0 \end{bmatrix} < 0. \tag{3.101}$$

Zastosujmy z kolei twierdzenie 5 przyjmując w nim

$$M = -\tau \begin{bmatrix} 0 & C^TK_{max} \\ K_{max}C & 2I \end{bmatrix}. \tag{3.102}$$

Zauważmy, że z ostrej nierówności w (3.101) wynika $\tau > 0$, możemy zatem podzielić obie strony (3.76) przez τ. Przyjmując $M_1 = -\frac{M}{\tau}$ dostajemy:

$$\begin{bmatrix} (j\omega - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix}^* M_1 \begin{bmatrix} (j\omega - A)^{-1}B \\ I \end{bmatrix} = Z(j\omega) + Z^T(-j\omega), \tag{3.103}$$

gdzie $Z(s) = I + K_{max}G(s)$. Biorąc pod uwagę fakt, że warunek $P > 0$ jest równoważny z asymptotyczną stabilnością $G(s)$, otrzymujemy ostatecznie następujące twierdzenie:

Twierdzenie 7. Warunkiem wystarczającym absolutnej stabilności (warunkiem koniecznym i wystarczającym kwadratowej stabilności) układu z rys. 3.6, w którym obiekt sterowania opisany jest przez (3.70), (3.71), a nieliniowości w pętli sprzężenia zwrotnego $\varphi_k(y_k,t)$, $k = 1,2,\ldots m$ spełniają warunek sektorowy (3.92) jest, aby macierz transmitancji $G(s)$ miała bieguny o częściach rzeczywistych ujemnych oraz macierz transmitancji $Z(s)$ dana przez

$$Z(s) = I + K_{max}G(s) \tag{3.104}$$

spełniała

$$Z(j\omega) + Z^T(-j\omega) > 0 \tag{3.105}$$

dla każdego $\omega \in R$. W przedstawionych wzorach I jest $m \times m$ - wymiarową macierzą jednostkową, a $G(s)$ jest transmitancją macierzową układu (3.70), (3.71) daną przez (3.72).

W sformułowaniu twierdzenia 7 przez kwadratową stabilność rozumiemy, że w klasie form kwadratowych istnieje funkcja Lapunowa, która dowodzi absolutnej stabilności układu.

Przypadek 2

Rozważamy teraz ogólny przypadek

$$\alpha_k \leq k_k(y_k,t) \leq \beta_k. \tag{3.106}$$

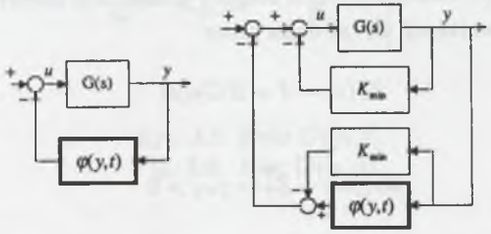
Utwórzmy drugą macierz diagonalną zbudowaną podobnie jak K_{max} w (3.93)

$$K_{min} = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m). \tag{3.107}$$

Warunki sektorowe (3.106) można zapisać w postaci analogicznej do (3.94), tzn.:

$$[\varphi(y,t) - K_{min}y]^T[K_{max}y - \varphi(y,t)] \geq 0. \tag{3.108}$$

Dalej można rozumować analogicznie do przypadku 1 i wykonując dodatkowo pewne przekształcenia otrzymać odpowiedni warunek absolutnej stabilności.



Rys. 3.7. *Przekształcenie schematu blokowego z rysunku 3.6*
Fig. 3.7. *Transformation of the block diagram from figure 3.6*

Pokażemy tu jednak inne podejście, wykorzystujące transformację schematu blokowego przedstawioną na rys. 3.7. Transformację taką nazywa się w literaturze przesuwaniem pętli sprzężenia zwrotnego. Pozwala ona rozważany przypadek bezpośrednio sprowadzić do poprzedniego. Oznaczmy

$$K = K_{max} - K_{min}. \tag{3.109}$$

Jak widać z rys. 3.7 po transformacji zmodyfikowany obiekt sterowania o transmitancji

$$G_T(s) = G(s)[I + K_{min}G(s)]^{-1} \tag{3.110}$$

jest objęty zmodyfikowaną pętlą ujemnego sprzężenia zwrotnego, zapisaną wektorowo w postaci

$$u(t) = -\varphi_T(y,t), \tag{3.111}$$

gdzie

$$\varphi_T(y,t) = \varphi(y,t) - K_{min}y. \tag{3.112}$$

Widzimy, że jeśli nieliniowości w sprzężeniu zwrotnym z rysunku 3.6 spełniają (3.106) to zdefiniowana zmodyfikowana nieliniowość $\varphi_T(y,t)$ spełnia nierówność analogiczną do (3.95)

$$u^T(Ky+u) \leq 0, \tag{3.113}$$

(przy czym u i y są związane zależnością (3.111)). Możemy zatem zastosować twierdzenie 7 przyjmując w nim $G_T(s)$ zamiast $G(s)$, a $\varphi_T(y,t)$ zamiast $\varphi(y,t)$. Dostajemy w ten sposób twierdzenie opisujące warunek absolutnej stabilności dla rozważanego przypadku.

Twierdzenie 8. Warunkiem wystarczającym absolutnej stabilności (warunkiem koniecznym i wystarczającym kwadratowej stabilności) układu z rys. 3.6, w którym obiekt sterowania opisany jest przez (3.70), (3.71), a nieliniowości w pętli sprzężenia zwrotnego $\varphi_k(y_k,t)$, $k = 1,2,\ldots m$ spełniają warunek sektorowy (3.106), jest, aby macierz transmitancji $G_T(s)$ miała wszystkie bieguny o częściach rzeczywistych ujemnych oraz aby macierz transmitancji $Z_T(s)$ dana przez

$$Z_T(s) = I + KG_T(s) \tag{3.114}$$

spełniała

$$Z_T(j\omega) + Z_T^T(-j\omega) > 0 \tag{3.115}$$

dla każdego $\omega \in R$.

Macierz transmitancji $Z_T(s)$ możemy zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} Z_T(s) &= I + (K_{max} - K_{min})G(s)[I + K_{min}G(s)]^{-1} = \\ &= [I + K_{max}G(s)][I + K_{min}G(s)]^{-1}. \end{aligned} \tag{3.116}$$

Zwróćmy też uwagę, że w twierdzeniu 8 nie zakładamy stabilności układu (3.70), (3.71).

Kryterium koła

Dla przypadku skalarnego wejścia i wyjścia, gdy $m = 1$, warunki twierdzenia 8 można zinterpretować jako własności wykresu Nyquista $G(j\omega)$. Dla przypadku $m = 1$,

$$K_{min} = \alpha, \quad K_{max} = \beta, \tag{3.117}$$

na podstawie twierdzenia 8 warunek wystarczający absolutnej stabilności układu (3.70), (3.71) przyjmuje postać:

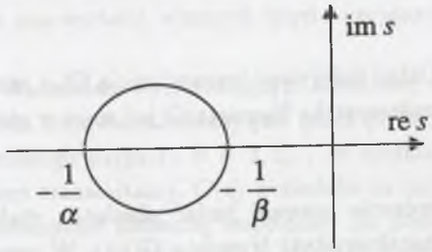
1) transmitancja $\frac{G(s)}{1+\alpha G(s)}$ jest asymptotycznie stabilna i

2) następująca nierówność:

$$\mathrm{Re}\left[\frac{1+\beta G(j\omega)}{1+\alpha G(j\omega)}\right] > 0 \tag{3.118}$$

zachodzi dla wszystkich $\omega \in R$.

Zdefiniujmy przez $\mathcal{O}(\alpha,\beta)$, $\alpha,\beta \neq 0$ domknięte koło na płaszczyźnie zespolonej, którego środek leży na osi rzeczywistych, a punkty przecięcia jego brzegu z osią $\mathrm{Re}(s)$ wynoszą $-\frac{1}{\alpha}$ i $-\frac{1}{\beta}$, jak to zostało przedstawione na rys. 3.8.



Rys. 3.8. *Koło* $\mathcal{O}(\alpha,\beta)$
Fig. 3.8. *Disc* $\mathcal{O}(\alpha,\beta)$

Dla odwzorowania

$$z = f(s) = \frac{1+\beta s}{1+\alpha s}, \; s \in C \tag{3.119}$$

(C - zbiór liczb zespolonych) łatwo można wyprowadzić następujące własności (zob. np. [87, str. 50]):

1. W przypadku $0 < \alpha \leq \beta$ funkcja $f(s)$ odwzorowuje koło $\mathcal{O}(\alpha,\beta)$ w lewą półpłaszczyznę $\mathrm{Re}z \leq 0$.

2. W przypadku $\alpha < 0 < \beta$ funkcja $f(s)$ odwzorowuje koło $\mathcal{O}(\alpha,\beta)$ w prawą półpłaszczyznę $\mathrm{Re}(z) \geq 0$.

3. W przypadku $\alpha = 0, \beta > 0$ funkcja $f(s)$ odwzorowuje półpłaszczyznę $\mathrm{Re}(s) \leq -\frac{1}{\beta}$ w lewą półpłaszczyznę $\mathrm{Re}(z) \leq 0$.

Wykorzystując (3.118) oraz wymienione własności dostajemy twierdzenie określane w literaturze jako kryterium koła.

Twierdzenie 9. (Kryterium koła) Dla układu liniowego (3.70), (3.71) o skalarnym wejściu i wyjściu ($m = 1$), objętego pętlą sprzężenia zwrotnego przez zależny od czasu element nieliniowy $\varphi(y,t)$, spełniający warunek sektorowy (3.106), warunek

wystarczający absolutnej stabilności (warunek konieczny i wystarczający kwadratowej stabilności) ma następującą postać:

1. Dla $0 < \alpha \leq \beta$: Charakterystyka Nyquista $G(j\omega)$ nie może przecinać koła $\mathcal{O}(\alpha, \beta)$ i musi r-krotnie okrążać koło $\mathcal{O}(\alpha, \beta)$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, gdzie r jest liczbą biegunów transmitancji $G(s)$ o dodatnich częściach rzeczywistaych.

2. Dla $\alpha < 0 < \beta$: Układ opisany transmitancją $G(s)$ musi być asymptotycznie stabilny oraz charakterystyka Nyquista $G(j\omega)$ musi w całości leżeć wewnątrz koła $\mathcal{O}(\alpha, \beta)$.

3. Dla $\alpha = 0, \beta > 0$: Układ opisywany transmitancją $G(s)$ musi być asymptotycznie stabilny oraz charakterystyka Nyquista $G(j\omega)$ musi w całości leżeć na prawo od linii $\mathrm{Re}\, s = -\frac{1}{\beta}$.

Przedstawione twierdzenie pozwala badać absolutną stabilność układu (3.70), (3.71) na podstawie charakterystyki Nyquista $G(j\omega)$. W przypadku 1 nie musimy zakładać asymptotycznej stabilności transmitancji $\frac{G(s)}{1+\alpha G(s)}$ dlatego, że jest ona gwarantowana przez warunek nałożony na charakterystykę Nyquista.

3.6.4. Częstotliwościowe kryteria absolutnej niestabilności

Lemat 1 i twierdzenie 5 można także zastosować do sformułowania warunków absolutnej niestabilności układu z rys. 3.6. Przeprowadzimy rozumowanie analogiczne do tego z podpunktu 3.6.3 i wskażemy punkty, w których dokonuje się modyfikacji tego rozumowania, aby dostać warunek absolutnej niestabilności. Dla skalarnego sprzężenia zwrotnego twierdzenie o absolutnej niestabilności po raz pierwszy udowodniono w pracy [18]. Następnie w pracach [125], [126] zostało ono uogólnione na przypadek układów o wielu wyjściach i wejściach.

Analizujemy układ przedstawiony na rys. 3.6 i, podobnie jak w podpunkcie 3.6.3, rozważamy najpierw przypadek pierwszy, gdy u i y spełniają (3.95). Dla układu (3.70), (3.71) objętego sprzężeniem zwrotnym, spełniającym (3.95), definiujemy funkcję Lapunowa $V(x)$ o postaci (3.1). O macierzy P zakładamy, że jest nieosobliwa, jednak nie zakładamy tym razem, że jest istotnie dodatnio określona. Pochodna funkcji $V(x)$ wzdłuż trajektorii układu (3.70), (3.71) dana jest przez (3.98), a sprzężenie zwrotne narzuca na u i x warunek (3.96). Stosujemy teraz lemat 1, definiując macierze Π i Φ jak w (3.99) i (3.100). Z kolei korzystamy z twierdzenia 5, określając macierz M przez (3.102). Teraz, ponieważ nie zakładamy dodatniej określoności macierzy P, zastosowanie twierdzenia 5 prowadzi do następującego wniosku: warunkiem koniecznym

i wystarczającym, aby pochodna funkcji $V(x)$ wzdłuż rozwiązań układu z rys. 3.6 była istotnie ujemnie określona jest, aby

$$Z(j\omega) + Z^T(-j\omega) > 0 \tag{3.120}$$

dla wszystkich $\omega \in R$, gdzie $Z(s) = I + K_{max}G(s)$. Na podstawie pierwszego twierdzenia Lapunowa o niestabilności warunkiem wystarczającym absolutnej niestabilności układu z rys. 3.6 jest zatem nierówność (3.120) oraz aby macierz P miała przynajmniej jedną ujemną wartość własną. Równoważnie możemy założyć, że macierz A posiada co najmniej jedną wartość własną w prawej otwartej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej oraz nie ma wartości własnych czysto urojonych. Sformułujemy to w postaci twierdzenia.

Twierdzenie 10. Warunkiem wystarczającym absolutnej niestabilności układu z rys. 3.6, w którym obiekt sterowania opisany jest przez (3.70), (3.71), a nieliniowości w pętli sprzężenia zwrotnego $\varphi_k(y_k, t)$, $k = 1, 2, \ldots m$ spełniają warunek sektorowy (3.95), jest, aby macierz transmitancji $G(s)$ posiadała co najmniej jeden biegun w prawej otwartej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej, nie posiadała biegunów czysto urojonych oraz aby macierz transmitancji $Z(s) = I + K_{max}G(s)$ spełniała nierówność (3.120).

Podobnie możemy wykazać twierdzenie o absolutnej niestabilności dla warunku sektorowego w ogólnej postaci (3.106):

Twierdzenie 11. Warunkiem wystarczającym absolutnej niestabilności układu z rys. 3.6, w którym obiekt sterowania opisany jest przez (3.70), (3.71), a nieliniowości w pętli sprzężenia zwrotnego $\varphi_k(y_k, t)$, $k = 1, 2, \ldots m$ spełniają warunek sektorowy (3.106), jest, aby macierz transmitancji $G_T(s) = G(s)[I + K_{min}G(s)]^{-1}$ nie miała biegunów czysto urojonych, miała co najmniej jeden biegun o części rzeczywistej dodatniej oraz aby macierz transmitancji $Z_T(s) = I + KG_T(s)$ spełniała warunek:

$$Z_T(j\omega) + Z_T^T(-j\omega) > 0 \tag{3.121}$$

dla wszystkich $\omega \in R$.

Kryterium koła dla absolutnej niestabilności

Zakładamy, że układ ma jedno wejście i jedno wyjście, $m = 1$. Wykorzystując wymienione poprzednio własności odwzorowania (3.119) możemy udowodnić analogiczne do twierdzenia 9 twierdzenie o absolutnej niestabilności.

Twierdzenie 12. Dla układu liniowego (3.70), (3.71) o skalarnym wejściu i wyjściu ($m = 1$), objętego pętlą sprzężenia zwrotnego przez zależny od czasu element nieliniowy $\varphi(y, t)$, spełniający warunek sektorowy (3.106), warunek wystarczający absolutnej niestabilności ma następującą postać:

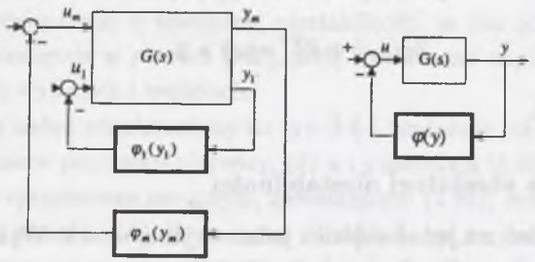
1. Dla $0 < \alpha \leq \beta$: Transmitancja $\frac{G(s)}{1+\alpha G(s)}$ nie ma czysto urojonych biegunów oraz charakterystyka Nyquista $G(j\omega)$ nie przecina koła $\mathcal{O}(\alpha, \beta)$ i okrąża koło $\mathcal{O}(\alpha, \beta)$ l-krotnie w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, gdzie l jest mniejsze od liczby biegunów transmitancji $G(s)$ o dodatnich częściach rzeczywistych.

2. Dla $\alpha < 0 < \beta$: Transmitancja $G(s)$ nie ma czysto urojonych biegunów, posiada co najmniej jeden biegun o dodatniej części rzeczywistej oraz charakterystyka Nyquista $G(j\omega)$ w całości leży wewnątrz koła $\mathcal{O}(\alpha, \beta)$.

3. Dla $\alpha = 0, \beta > 0$: Transmitancja $G(s)$ nie ma czysto urojonych biegunów, posiada co najmniej jeden biegun o dodatniej części rzeczywistej oraz charakterystyka Nyquista $G(j\omega)$ w całości leży na prawo od linii $s = -\frac{1}{\beta}$.

3.6.5. Kryterium Popova

W przypadku gdy w układzie ze sprzężeniem zwrotnym występują nieliniowości sektorowe, które są jednoznaczne i niezależne od czasu, możliwe jest podanie silniejszych warunków absolutnej stabilności (niestabilności) od wyprowadzonych w poprzednich podpunktach. Warunki te zostały wprowadzone przez V. Popova w pracy [118] z zastosowaniem metod częstotliwościowych. Następnie w pracach [47], [127], [128] wykazano, że równoważnie kryterium Popova można wyprowadzić stosując funkcję Lapunowa w postaci: forma kwadratowa plus całka z nieliniowości (funkcję taką nazywa się formą Łurie). Takie wyprowadzenie zostanie przedstawione poniżej.



Rys. 3.9. *Układ ze sprzężeniem zwrotnym w postaci jednoznacznych, niezależnych od czasu nieliniowości sektorowych. Po lewej schemat układu z wyszczególnieniem składowych wektorów u i y. Po prawej ten sam schemat z użyciem wektorowych linii sygnałowych*

Fig. 3.9. *Feedback loop with time-invariant sector nonlinearities. On the left hand side block diagram with components of vectors u i y. On the right hand side the same block diagram with vector signals*

Układ (3.70), (3.71) jest objęty sprzężeniem zwrotnym jak na rys. 3.9. W torze sprzężenia zwrotnego występują niezależne od czasu elementy nieliniowe $\varphi_k(y_k)$, $k = 1, 2, \ldots m$, określające zależności $u_k(t)$ od $y_k(t)$

$$u_k(t) = -\varphi_k(y(t)), \; k = 1, \ldots m. \tag{3.122}$$

W równoważnym schemacie po prawej stronie rys. 3.9 przez $\varphi(y)$ oznacza się wektorowy, niezależny od czasu element nieliniowy, który reprezentuje wszystkie pętle sprzężenia zwrotnego ze schematu po lewej stronie rys. 3.9, tzn.

$$u = -\varphi(y), \tag{3.123}$$

$$\varphi(y) = \begin{bmatrix} \varphi_1(y_1) \\ \vdots \\ \varphi_m(y_m) \end{bmatrix}. \tag{3.124}$$

Układ z rys. 3.9 jest uogólnieniem, na przypadek wielu sygnałów wejściowych i wyjściowych, układu przedstawionego w rozdziale 1 na rys. 1.7. O niezależnych od czasu nieliniowościach $\varphi_k(y_k)$, $k = 1, 2, \ldots m$ zakładamy, że spełniają warunki sektorowe (1.52), opisane w rozdziale 1, pkt. 1.5.5, tzn.

$$k_k(y_k) = \begin{cases} \frac{\varphi_k(y_k)}{y_k(t)} & \text{jeśli } y_k(t) \neq 0 \\ 0 & \text{jeśli } y_k(t) = 0 \end{cases}. \tag{3.125}$$

O zakresie możliwych wartości $k_k(y_k)$ zakładamy

$$0 \leq k_k(y_k) \leq \beta_k. \tag{3.126}$$

Podobnie jak w (3.95), (3.96) nierówności sektorowe (3.126) możemy zapisać jako:

$$u^T(K_{max}y + u) \leq 0, \tag{3.127}$$

(przy czym u i y są związane zależnością (3.123)) oraz

$$\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & C^T K_{max} \\ K_{max}C & 2I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \leq 0, \tag{3.128}$$

gdzie $K_{max} = \mathrm{diag}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$.

Dla systemu z rys. 3.9 definiujemy teraz funkcję Lapunowa w następującej postaci:

$$V(x) = x^T P x + 2\eta \int_0^{Cx} \varphi^T(\sigma) K_{max} d\sigma. \tag{3.129}$$

Przy spełnieniu warunków (3.126) i $\eta \geq 0$ składnik całkowy $2\eta \int_0^{Cx} \varphi^T(\sigma) K_{max} d\sigma$ definiuje funkcję nieujemnie określoną.

Pochodną funkcji $V(x)$ (3.129) liczoną wzdłuż trajektorii układu (3.70), (3.71) możemy zapisać w postaci następującej formy kwadratowej :

$$\dot{V}(x) = x^T P(Ax - B\varphi(Cx)) + (Ax - B\varphi(Cx))^T Px + 2\eta\varphi(Cx)^T K_{max} C(Ax + B\varphi(Cx)) \tag{3.130}$$

lub równoważnie

$$\dot{V}(x) = \begin{bmatrix} x \\ -\varphi(Cx) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB - \eta A^T C^T K_{max} \\ B^T P - \eta K_{max} CA & -\eta(K_{max} CB + B^T C^T K_{max}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -\varphi(Cx) \end{bmatrix}. \tag{3.131}$$

Z przyjętych założeń dotyczących sprzężenia zwrotnego (3.126) wynika, że wektor $[x^T\ u^T]^T$ w przedstawionym wzorze spełnia (3.128). Zastosujmy teraz lemat 1, przyjmując w nim

$$\Pi = \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB - \eta A^T C^T K_{max} \\ B^T P - \eta K_{max} CA & -\eta(K_{max} CB + B^T C^T K_{max}) \end{bmatrix} \tag{3.132}$$

oraz

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & C^T K_{max} \\ K_{max} C & 2I \end{bmatrix}. \tag{3.133}$$

Jako wniosek otrzymujemy, że warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby pochodna funkcji $V(x)$ danej przez (3.129), liczona wzdłuż trajektorii układu (3.70), (3.71), była ujemnie określona, jest, aby dla pewnego $\tau \geq 0$ poniższa macierz była ujemnie określona

$$-\tau \begin{bmatrix} 0 & C^T K_{max} \\ K_{max} C & 2I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB - \eta A^T C^T K_{max} \\ B^T P - \eta K_{max} CA & -\eta(K_{max} CB + B^T C^T K_{max}) \end{bmatrix} < 0. \tag{3.134}$$

Stosujemy teraz twierdzenie 5, przyjmując w nim

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -\tau C^T K_{max} - \eta A^T C^T K_{max} \\ -\tau K_{max} C - \eta K_{max} CA & -2\tau I - \eta(K_{max} CB + B^T C^T K_{max}) \end{bmatrix}. \tag{3.135}$$

Otrzymujemy zatem

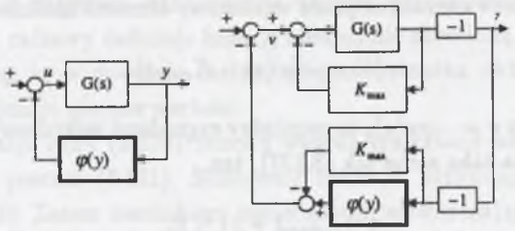
$$\eta[Z(j\omega) + Z^T(-j\omega)] + \tau[H(j\omega) + H^T(-j\omega)] < 0 \tag{3.136}$$

dla $\omega \in R$, gdzie

$$Z(j\omega) = K_{max} CA(j\omega I - A)^{-1} B + K_{max} CB \tag{3.137}$$

oraz

$$H(j\omega) = K_{max} C(j\omega I - A)^{-1} B + I = K_{max} G(j\omega) + I. \tag{3.138}$$



Rys. 3.10. *Przekształcenie schematu blokowego z rysunku 3.9*
Fig. 3.10. *Transformation of the block diagram from figure 3.9*

Ponieważ $Z(j0) = 0$, więc aby zachodziła ostra nierówność (3.136), musi być $\tau > 0$. Możemy zatem podzielić obie strony nierówności (3.136) przez τ. Zauważmy także, że

$$Z(j\omega) = j\omega K_{max} G(j\omega). \tag{3.139}$$

Definiując $q = \frac{\eta}{\tau}$,

$$\begin{aligned} K(q, j\omega) &= H(j\omega) + qZ(j\omega) = \\ &= I + (1 + qj\omega) K_{max} G(j\omega) \end{aligned} \tag{3.140}$$

oraz biorąc pod uwagę, że warunek $P > 0$ w połączeniu z (3.134) jest równoważny z asymptotyczną stabilnością $G(s)$, otrzymujemy ostatecznie następującą postać kryterium Popova:

Twierdzenie 13. (Wielowymiarowe kryterium Popova). Warunkiem wystarczającym absolutnej stabilności układu z rys. 3.9 z nieliniowościami spełniającymi warunek sektorowy (3.128) jest, aby transmitancja macierzowa $G(s)$ miała wszystkie bieguny w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej oraz aby istniała liczba rzeczywista $q \geq 0$ taka, że

$$K(q, j\omega) + K^T(q, -j\omega) > 0 \tag{3.141}$$

dla wszystkich $\omega \in R$.

Uwaga. Twierdzenie 13 podaje wersję kryterium Popova ze słabymi warunkami sektorowymi, silną nierównością częstotliwościową oraz założoną stabilnością układu otwartego. Inne wersje twierdzenia Popova można znaleźć w [36].

Warunek $q \geq 0$ w przedstawionym twierdzeniu można pominąć na podstawie następującego rozumowania ([109, str. 164]):

Rozważmy przekształcenie schematu blokowego z rys. 3.9 przedstawione na rys. 3.10. Dla przekształconego schematu blokowego obiekt o transmitacji macierzowej

$$G_T(s) = -K_{max} G(I + K_{max} G)^{-1} \tag{3.142}$$

jest objęty sprzężeniem zwrotnym przez wektorowy element nieliniowy

$$\varphi_T(z) = -[\varphi(z) - K_{max}z]. \tag{3.143}$$

Jeśli zdefiniujemy $v = -\varphi_T(z)$, to pomiędzy sygnałami wektorowymi v i z zachodzi nierówność sektorowa taka sama jak (3.127), tzn.

$$v^T(K_{max}z + v) \leq 0. \tag{3.144}$$

Zatem spełnione są założenia twierdzenia 13 i jako wniosek z zastosowania tego twierdzenia otrzymujemy, że warunkiem wystarczającym absolutnej stabilności układu z rys. 3.10 jest, aby transmitancja macierzowa $G_T(s)$ miała wszystkie bieguny w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej oraz aby istniała liczba rzeczywista $q \geq 0$, taka, że transmitancja macierzowa

$$K_T(q,s) = I + (1 + qj\omega)K_{max}G_T(j\omega) \tag{3.145}$$

spełnia

$$K_T(q,j\omega) + K_T^T(q,-j\omega) > 0 \tag{3.146}$$

dla wszystkich $\omega \in R$. Podstawiając (3.145) w (3.146) oraz mnożąc otrzymaną nierówność macierzową lewostronnie przez $I + G^T(-j\omega)K_{max}$, a prawostronnie przez $I + K_{max}G(j\omega)$ (taka operacja zachowuje znak rozważanej nierówności) dostaniemy po prostych przekształceniach

$$2I + (1 - qj\omega)K_{max}G(j\omega) + (1 - qj\omega)G^T(-j\omega)K_{max} > 0 \tag{3.147}$$

dla wszystkich $\omega \in R$.

Ponieważ układy z rys. 3.9 i 3.10 są sobie równoważne, zatem porównując (3.147) i (3.141) widzimy, że jeśli istnieje liczba rzeczywista q dowolnego znaku taka, że spełniona jest (3.141), to układ z rys. 3.9 jest absolutnie stabilny.

Wielowymiarowe kryterium Popova dla absolutnej niestabilności

Analogicznie do poprzednich rozważań można funkcję o postaci (3.129) zastosować do sformułowania warunków absolutnej niestabilności układu z rys. 3.9. Metoda ta została opisana w pracy [18]. Tu przedstawimy jej wielowymiarowe uogólnienie.

Powtórzymy rozumowanie prowadzące do sformułowania twierdzenia 13, wskazując modyfikacje konieczne do tego, aby uzyskać warunek absolutnej niestabilności. Rozważamy układ (3.70), (3.71) objęty sprzężeniem zwrotnym jak na rys. 3.9 z nieliniowymi niezależnymi od czasu elementami (3.122). Zakładamy, że spełnione są warunki sektorowe (3.125), (3.126), (3.127), (3.128). Dla systemu z rys. 3.9 definiujemy, analogicznie do przypadku poprzedniego, funkcję Lapunowa o postaci (3.129). Przyjmujemy teraz,

że macierz P ma co najmniej jedną ujemną wartość własną oraz zakładamy $\eta \leq 0$. Ponieważ składnik całkowy definiuje funkcję nieujemnie określoną, zatem przyjęte założenia zapewniają, że w dowolnie małym otoczeniu środka układu współrzędnych funkcja $V(x)$ przyjmuje ujemne wartości.

Pochodną funkcji $V(x)$ (3.129) liczoną wzdłuż trajektorii układu (3.70), (3.71) można zapisać w postaci (3.131). Stosujemy lemat 1, przyjmując w nim definicje (3.132) oraz (3.133). Zatem warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby pochodna wzdłuż trajektorii $\dot{V}(x)$ była istotnie ujemnie określona, jest, aby dla pewnego $\tau \geq 0$ spełniona była nierówność macierzowa (3.134). Stosujemy twierdzenie 5, przyjmując w nim definicję (3.135) i otrzymujemy warunek (3.136). Podobnie jak poprzednio musi zachodzić $\tau > 0$, co pozwala na podzielenie obu stron nierówności (3.136) przez τ. Zauważmy także, że warunek: macierz P ma co najmniej jedną ujemną wartość własną i zachodzi (3.136) jest równoważny z warunkiem: macierz A ma co najmniej jedną wartość własną o części rzeczywistej dodatniej i zachodzi (3.136). Zatem, biorąc pod uwagę (3.140), na podstawie pierwszego twierdzenia Lapunowa o niestabilności dostajemy:

Twierdzenie 14. (Wielowymiarowe kryterium Popova dla absolutnej niestabilności). Warunkiem wystarczającym absolutnej niestabilności układu z rys. 3.9 z nieliniowościami spełniającymi warunek sektorowy (3.128) jest, aby transmitancja macierzowa $G(s)$ miała co najmniej jeden biegun w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej, nie miała biegunów na osi urojonych oraz aby istniała liczba rzeczywista $q \leq 0$ taka, że tramsmitancja macierzowa $K(q,s)$ dana przez (3.140) spełnia

$$[K(q,j\omega) + K^T(q,-j\omega)] > 0 \tag{3.148}$$

dla wszystkich $\omega \in R$.

Podobnie jak poprzednio możemy pominąć warunek $q \leq 0$, posługując się przekształceniem schematu blokowego przedstawionym na rys. 3.10 oraz wykonując przekształcenia (3.145)-(3.147).

Przypadek skalarnego sprzężenia zwrotnego, $m = 1$

W przypadku gdy jest tylko jeden sygnał wejściowy i jeden sygnał wyjściowy w obiekcie regulacji, kryterium Popova może być sformułowane w postaci graficznej. Dalej przedstawimy graficzne sformułowanie kryterium Popova dla absolutnej stabilności i niestabilności.

Stosujemy oznaczenia dla skalarnego przypadku

$$K_{max} = \beta, \quad K_{min} = \alpha = 0. \tag{3.149}$$

Warunek (3.146) można teraz zapisać następująco:

$$\mathrm{Re}[\frac{1}{\beta} + (1 + qj\omega)G(j\omega)] > 0 \tag{3.150}$$

dla wszystkich $\omega \in R$, przy czym $G(j\omega)$ jest transmitancją skalarną. Wprowadzając oznaczenia

$$U(\omega) = \mathrm{Re}\,[G(j\omega)], \quad V(\omega) = \omega \mathrm{Im}\,[G(j\omega)] \tag{3.151}$$

możemy warunek (3.150) przedstawić jako:

$$\frac{1}{\beta} + U(\omega) + qV(\omega) > 0. \tag{3.152}$$

Wykres $U(\omega), V(\omega)$ przy zmieniającej się częstotliwości ω nazywa się zmodyfikowaną charakterystyką amplitudowo-fazową obiektu o transmitancji $G(s)$. Możemy zauważyć, że na płaszczyźnie (U, V) nierówność (3.152) możemy zinterpretować następująco: zmodyfikowana charakterystyka amplitudowo-fazowa leży silnie na prawo od prostej

$$-\frac{1}{\beta} + U + qV = 0. \tag{3.153}$$

Prostą o takiej własności nazywa się prostą Popova. Taka interpretacja pozwala na sformułowanie następujących twierdzeń.

Twierdzenie 15. (Kryterium Popova). W przypadku jednego sygnału wejściowego i jednego sygnału wyjściowego, warunkiem wystarczającym absolutnej stabilności układu z rys. 3.9 z nieliniowością spełniającą warunek sektorowy (3.125), (3.126) jest aby transmitancja $G(s)$ miała wszystkie bieguny w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej oraz aby istniała prosta przechodząca przez punkt $-\frac{1}{\beta}$, o nachyleniu $\frac{1}{q}$ taka, że cała zmodyfikowana charakterystyka amplitudowo - fazowa $(U(\omega), V(\omega))$ leży silnie na prawo od niej.

Twierdzenie 16. (Kryterium Popova dla absolutnej niestabilności). W przypadku jednego sygnału wejściowego i jednego sygnału wyjściowego warunkiem wystarczającym absolutnej niestabilności układu z rys. 3.9 z nieliniowością spełniającą warunek sektorowy (3.125), (3.126) jest, aby transmitancja $G(s)$ miała co najmniej jeden biegun w prawej otwartej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej, nie miała biegunów czysto urojonych oraz aby istniała prosta przechodząca przez punkt $-\frac{1}{\beta}$, o nachyleniu $\frac{1}{q}$ taka, że cała zmodyfikowana charakterystyka amplitudowo - fazowa $(U(\omega), V(\omega))$ leży silnie na prawo od niej.

3.7. Przykłady obliczeniowe

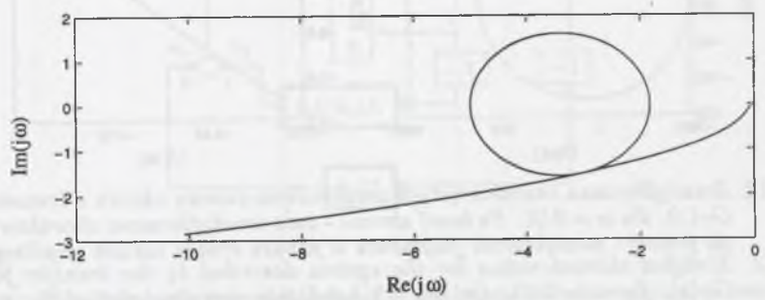
W punkcie tym podamy przykłady ilustrujące możliwości obliczeniowe stwarzane przez twierdzenia 8-16.

3.7.1. Układ z podwójnym całkowaniem i korektorem PD

Analizujemy układ regulacji z zależną od czasu nieliniowością sektorową, o schemacie blokowym przedstawionym na rys. 1.6, w którym transmitancja obiektu (podwójne całkowanie z korektorem PD) dana jest przez

$$K(s) = \frac{1+s}{s^2(1+0.1s)}. \tag{3.154}$$

Granice sektora dla nieliniowości opisane są przez parametry α i β. Układ ten analizowany był poprzednio w punkcie 2.2.3, gdzie dla $\alpha = 0.2$ i $\beta = 1.5$ znaleziono strategię destabilizującą.



Rys. 3.11. *Zastosowanie kryterium koła do układu regulacji z podwójnym całkowaniem i korektorem typu PD*
Fig. 3.11. *Application of the circle criterion to the control system with a double integrator and the phase lead element*

Ponieważ w układzie jest tylko jeden zależny od czasu element nieliniowy, możemy zastosować twierdzenie 9. Kreśląc i analizując kształt charakterystyki amplitudowo-fazowej $K(j\omega)$ możemy wyznaczyć wartości dla parametrów α i β z (1.49) i (1.43), zadających zakres możliwych wartości funkcji $\varphi(e,t)$, dla których układ jest absolutnie stabilny. Analiza przebiegu charakterystyki amplitudowo - fazowej pozwala z dowolną dokładnością wyznaczyć granicę, po przekroczeniu której nie istnieje już wspólna kwadratowa funkcja Lapunowa. Dla układu z rys. 1.6 z transmitancją obiektu (3.154) dla

$$\alpha = 0.2 \tag{3.155}$$

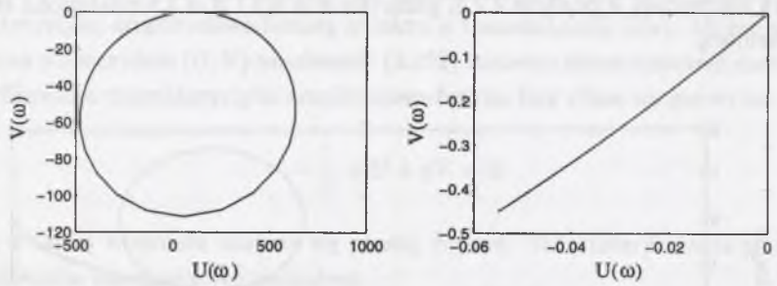
graniczna wartość paramteru β, dla której wspólna kwadratowa funkcja Lapunowa przestaje istnieć, wynosi:

$$\beta = 0.5467. \tag{3.156}$$

Przebieg charakterystyki amplitudowo-fazowej oraz koło $\mathcal{O}(\alpha, \beta)$ dla $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.5467$ przedstawione są na rysunku 3.11.

Możliwość wyznaczenia dokładnych wartości stanowi zaletę w stosunku do metod wykorzystujących liniowe nierówności macierzowe, gdzie, aby zorientować się w zakresach wartości parametrów, dla których istnieje lub przestaje istnieć wspólna kwadratowa funkcja Lapunowa, konieczne jest wielokrotne powtarzanie numerycznego algorytmu.

Zastosowanie kryterium Popova



Rys. 3.12. *Zmodyfikowana charakterystyka amplitudowo-fazowa układu o transmitancji $G_T(s)$, dla $\alpha = 0.01$. Po lewej stronie - cała zmodyfikowana charakterystyka, po prawej - powiększenie fragmentu w pobliżu środka układu współrzędnych*

Fig. 3.12. *Modified characteristics for the system described by the transfer function $G_T(s)$, for $\alpha = 0.01$. On the left hand side complete plot of the modified characteristics. On the right hand side - neighborhood of zero zoomed out*

Rozważmy teraz ten sam układ przy założeniu, że nieliniowość w torze sprzężenia zwrotnego jest jednoznaczna i niezależna od czasu (jak na rys. 1.7). Do analizy można zatem zastosować metodę Popova. Przyjmujemy

$$\alpha \leq \frac{\varphi(e)}{e} \leq \beta. \tag{3.157}$$

Aby zastosować twierdzenie 15 musimy najpierw dokonać przekształcenia schematu blokowego przedstawionego na rys. 3.7, przy czym $K_{min} = \alpha$. Wykonując to przekształcenie otrzymujemy zmodyfikowany obiekt o transmitacji

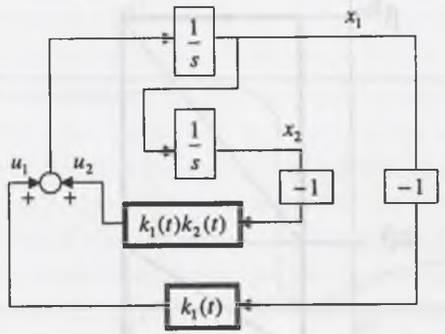
$$G_T(s) = \frac{1 + 0.1s}{s^3 + s^2 + 0.1\alpha s + \alpha}. \tag{3.158}$$

Możemy teraz narysować wykres zmodyfikowanej charakterystyki amplitudowo - fazowej, odpowiadającej transmitancji $G_T(s)$. Dla $\alpha = 0.01$ wykres ten jest przedstawiony na rys. 3.12. Jak widać, układ jest absolutnie stabilny dla dowolnie dużego $\beta < \infty$.

Uwaga. Stosując metody z pracy [36] można, przy pewnych założeniach dotyczących funkcji $\varphi(e)$, wykazać, że zerowy punkt równowagi jest globalnie asymptotycznie stabilny także dla $\beta = \infty$.

3.7.2. Kaskadowy układ regulacji ze zmiennymi wzmocnieniami

Rozważamy ponownie kaskadowy układ regulacji omawiany w punkcie 3.5.3., którego schemat blokowy przedstawiony jest na rys. 3.3. Przekształćmy schemat blokowy z rys. 3.3 w sposób przedstawiony na rys. 3.13.



Rys. 3.13. *Przekształcony schemat blokowy kaskadowego układu regulacji ze zmiennymi w czasie wzmocnieniami w torze sprzężenia zwrotnego*

Fig. 3.13. *Transformed block diagram of the cascaded control system with time-varying gains in the feedback loop*

Oznaczmy jak w (3.61) $k_3(t) = k_1(t)k_2(t)$. Przez przekształcenie schematu blokowego z rys. 3.13 uzyskuje się obiekt dwuwymiarowy o macierzy transmitancji

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix}, \tag{3.159}$$

objęty sprzężeniem zwrotnym o postaci:

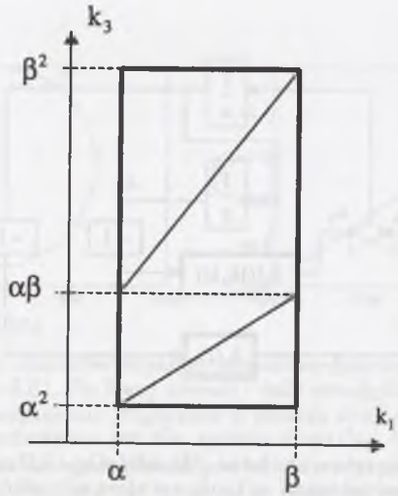
$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_1(t) & 0 \\ 0 & k_3(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \tag{3.160}$$

Aby do badania takiego układu zastosować twierdzenie 8 musimy potraktować parametry $k_3(t)$ i $k_1(t)$ jako niezależne. Jeśli $k_1(t)$ i $k_2(t)$ spełniają warunki (3.56) i (3.57), to dla $k_3(t) = k_1(t)k_2(t)$ mamy oszacowanie:

$$\alpha^2 \leq k_3(t) \leq \beta^2. \tag{3.161}$$

Badamy teraz absolutną stabilność układu (3.159), (3.160), w którym zmienne paramery $k_1(t)$ i $k_3(t)$ spełniają (3.56) i (3.161). Jest to dodatkowe uproszczenie w

stosunku do modelu zmian parametrów z punktu 3.5.3., które prowadzi do bardziej zachowawczych warunków absolutnej stabilności. Prostokąt dopuszczalnych wartosci $k_1(t)$, $k_3(t)$ przedstawiony jest na rys. 3.14. Na tym samym rysunku cienkimi liniami wykreślony jest także czworokąt z rys. 3.4. Jak widać, prostokąt (3.56), (3.161) zawiera w sobie czworokąt (3.56), (3.63), co obrazowo ilustruje nadmiarowość wynikającą z potraktowania $k_1(t)$, $k_3(t)$ jako niezależnie zmieniających się parametrów.



Rys. 3.14. *Prostokąt dopuszczalnych zmian parametrów $k_1(t)$ i $k_3(t)$*
Fig. 3.14. *Rectangle of feasible parameters $k_1(t)$ and $k_3(t)$*

Przyjmujemy

$$K_{min} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{bmatrix} \tag{3.162}$$

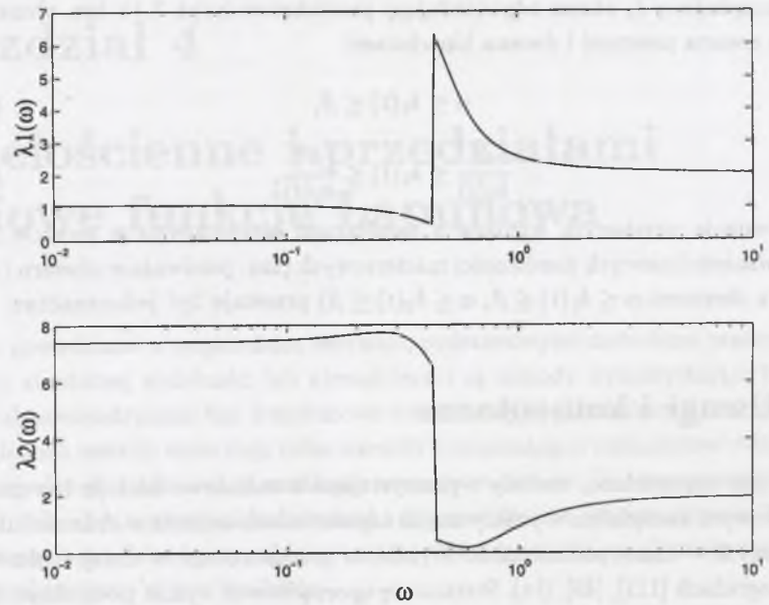
oraz

$$K_{max} = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{bmatrix} \tag{3.163}$$

i wyliczamy macierz transmitancji $Z_T(s)$ zadaną wzorem (3.116). Otrzymujemy

$$Z_T(s) = \frac{1}{s^2 + \alpha s + \alpha^2} \begin{bmatrix} s^2 + \beta s + \alpha^2 & s(\beta - \alpha) \\ \beta^2 - \alpha^2 & s^2 + \alpha s + \beta^2 \end{bmatrix}. \tag{3.164}$$

Stosujemy teraz twierdzenie 8. Aby sprawdzić czy zachodzi warunek (3.115), możemy dla każdej częstotliwości ω (z odpowiednio szerokiego zakresu) wyliczyć dwie



Rys. 3.15. *Przebiegi wartości własnych macierzy $Z_T(j\omega) + Z_T^T(-j\omega)$, $\lambda_1(\omega)$, $\lambda_2(\omega)$ w funkcji częstotliwości ω*
Fig. 3.15. *Eigenvalues of the matrix $Z_T(j\omega) + Z_T^T(-j\omega)$, $\lambda_1(\omega)$, $\lambda_2(\omega)$ versus frequencies ω*

wartości własne macierzy hermitowskiej $Z_T(j\omega) + Z_T^T(-j\omega)$, tzn.:

$$\lambda_1(\omega) = \lambda_1[Z_T(j\omega) + Z_T^T(-j\omega)], \tag{3.165}$$

$$\lambda_2(\omega) = \lambda_2[Z_T(j\omega) + Z_T^T(-j\omega)] \tag{3.166}$$

i zbadać, czy dla całego zakresu zmian częstotliwości są one dodatnie.

Rysunek 3.15 przedstawia zależności wartości własnych $\lambda_1(\omega)$ i $\lambda_2(\omega)$ od częstotliwości ω dla następujących parametrów

$$\alpha = 0.5, \quad \beta = 0.9. \tag{3.167}$$

Ponieważ obie wartości własne są zawsze dodatnie, zatem układ z rys. 3.13 jest absolutnie stabilny. Jeśli przyjmie się $\beta = 1.0$ (i pozostawi się α bez zmian), to dla niektórych częstotliwości przynajmniej jedna z wartości własnych $\lambda_1(\omega)$, $\lambda_2(\omega)$ będzie ujemna. Zatem dla $\alpha = 0.5$ $\beta = 1.0$ nie istnieje kwadratowa funkcja Lapunowa, dowodząca absolutnej stabilności układu z rys. 3.13. Widać, że uzyskany zakres możliwych wartości wzmocnień $k_1(t)$ i $k_2(t)$ jest teraz węższy niż oszacowany w punkcie 3.5.3.

Uwaga. (Spostrzeżenie poczynione przez P. Grabowskiego). Zastosowanie twierdzenia 8 doprowadziło do węższych zakresów dla parametrów α i β od otrzymanych

w punkcie 3.5.3 metodą liniowych nierówności macierzowych. Jeśli jednak wykreślimy na płaszczyźnie k_1-k_2 obszar odpowiadający prostokątowi z rys. 3.14, tzn. obszar ograniczony dwoma prostymi i dwoma hiperbolami

$$\alpha \leq k_1(t) \leq \beta, \tag{3.168}$$

$$\frac{\alpha^2}{k_1(t)} \leq k_2(t) \leq \frac{\beta^2}{k_1(t)}, \tag{3.169}$$

to porównanie uzyskanych wyników z rezultatami otrzymanymi w punkcie 3.5.3 z zastosowaniem liniowych nierówności macierzowych (tzn. porównanie obszaru (3.168), (3.169) z obszarem $\alpha \leq k_1(t) \leq \beta$, $\alpha \leq k_2(t) \leq \beta$) przestaje być jednoznaczne.

3.8. Uwagi i komentarze

Jak już wspomniano, metody wykorzystujące kwadratowe funkcje Lapunowa są podstawowym narzędziem w praktycznych zagadnieniach badania stabilności układów o zmiennych w czasie parametrach. Wyniki tu przedstawione w dużej części bazują na monografiach [111], [49], [14]. Starano się uporządkować wyniki pochodzące z kilku źródeł w taki sposób, aby przedstawić jednolitą metodologię badania absolutnej stabilności i absolutnej niestabilności dla układów o parametrach zmieniających się w czasie w dowolny sposób, jak też układów, w których zmiana parametrów wynika z istnienia niezależnych od czasu, jednoznacznych nieliniowości sektorowych.

Obok sytuacji, gdy nieliniowość sektorowa może zależeć, bądź nie, od czasu formułuje się także w literaturze twierdzenia obowiązujące dla przypadku, gdy występują ograniczenia na pochodną funkcji $\varphi(e)$ lub $\varphi(e,t)$ w torze sprzężenia zwrotnego. Jeśli pochodna jest ograniczona do pewnego przedziału lub musi być dodatnia (funkcja $\varphi(e)$ jest wtedy rosnąca), to warunki absolutnej stabilności spełnione są na ogół dla szerszych zakresów opisujących dopuszczalne sektory zmienności parametrów. Odpowiednie wyniki można znaleźć w pracach [19], [104] [84], [33], [41].

Rozdział 4

Wielościenne i przedziałami liniowe funkcje Lapunowa

Jak powiedziano w poprzednim rozdziale, podstawowymi metodami praktycznego badania absolutnej stabilności lub niestabilności są metody wykorzystujące kwadratowe (lub parametryczne, tzn. kwadratowe z dodatkowymi składnikami) funkcje Lapunowa. Jednak metody takie dają tylko warunki wystarczające, nadmiarowe w stosunku do rzeczywistego zakresu dopuszczalnych zmian parametrów. Nasuwa się zatem pytanie, jak duże są marginesy nadmiarowości i czy możliwe jest ich oszacowanie. Wyniki, które pozwalają udzielić przynajmniej częściowych odpowiedzi na sformułowane pytania, przedstawiamy w tym rozdziale.

Przedstawione dalej rezultaty będą dotyczyły obu problemów przedstawionych w punkcie 1.3. Formułujemy twierdzenia zarówno dotyczące absolutnej stabilności i niestabilności, jak też istnienia i metod poszukiwania strategii destabilizujących. Opisane będą także praktyczne algorytmy, pozwalające stosować otrzymywane warunki dla przykładowych problemów.

Omówione zostaną funkcje Lapunowa, których zastosowanie umożliwia sformułowanie zarówno warunków wystarczających, jak i koniecznych absolutnej stabilności układów liniowych o zmieniających się w czasie parametrach (0.1), (1.1). Ich konstrukcja wykorzystuje twierdzenie udowodnione niezależnie przez kilku autorów [116], [16], [8], które mówi, że jeśli układ (0.1), (1.1) jest absolutnie stabilny, to istnieje wypukła funkcja Lapunowa wspólna dla wszystkich układów narożnych. Aby zastosować to twierdzenie w praktyczny sposób, wypukłą funkcję Lapunowa przybliża się *funkcją wielościenną*, która może być opisana przez skończoną liczbę parametrów. Wielościenne funkcje Lapunowa nie są funkcjami gładkimi. Prowadzi to do konieczności przeformułowania klasycznych twierdzeń Lapunowa, w których zakłada się, że $V(x)$ jest funkcją klasy C^1. Wyniki umożliwiające stosowanie funkcji Lapunowa, które są ciągłe, ale nie gładkie, są znane w literaturze (np. [83, rozdział 2]). W odpowiednich twierdzeniach zamiast pochodnej $\dot{V}$ stosuje się prawą górną pochodną Diniego, oznaczaną jako D^+V.

Jako uogólnienie klasy funkcji wielościennych wprowadzone są następnie *funkcje przedziałami liniowe*. Funkcje takie (w odróżnieniu od funkcji wielościennych) mogą przyjmować zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne, dzięki czemu mogą być zastosowane zarówno do badania absolutnej stabilności, jak i absolutnej niestabilności układu (0.1), (1.1). Przedstawia się warunki wynikające z zastosowania takich funkcji do problemów absolutnej stabilności i niestabilności oraz dyskutuje się ich związki z warunkami Mołczanowa Piatnickiego [116].

Rozwijając wynik uzyskany w pracy [78] przedstawia się z kolei algebraiczne warunki na to, aby dla (0.1), (1.1) istniała strategia destabilizująca, oraz opisuje się algorytm wyliczania takiej strategii. Twierdzenie z pracy [78] gwarantuje istnienie wypukłej funkcji, która rośnie wzdłuż rozwiązania wynikającego z zastosowania strategii destabilizującej. W przedstawionym algorytmie obliczeniowym funkcję tę przybliża się funkcją wielościenną.

Chociaż opisywana metodologia pozwala formułować zarówno wystarczające, jak i konieczne warunki absolutnej stabilności oraz poszukiwać strategii destabilizujących jej praktyczne zastosowanie jest ograniczone przez problemy obliczeniowe. W praktyce udaje się konstruować wielościenne lub przedziałami liniowe funkcje Lapunowa dla układów, których rząd wektora stanu wynosi dwa lub trzy. Mimo to zastosowanie przedstawionych metod jest interesujące, ponieważ, przynajmniej dla pewnej klasy przykładów, pozwala dokładnie uchwycić granicę pomiędzy absolutną stabilnością (niestabilnością) a istnieniem strategii destabilizującej (stabilizującej). Pozwala to np. dla niektórych problemów oszacować, jak dalece nadmiarowe są warunki stabilności uzyskiwane z zastosowaniem kwadratowych funkcji Lapunowa w stosunku do rzeczywistych granic zakresów stabilności.

4.1. Osłabienie założenia o gładkości funkcji $V(x)$ w twierdzeniach Lapunowa

Klasyczne sformułowania twierdzeń Lapunowa wymagają założenia, że funkcja Lapunowa $V(x)$ (lub $V(x,t)$ dla układów niestacjonarnych) jest funkcją gładką, tzn. należy do klasy C^1. Jednak funkcje Lapunowa dalej stosowane są jedynie ciągłe, natomiast mogą posiadać punkty nieciągłości gradientu.

Poniżej podamy twierdzenie o stabilności obowiązujące dla funkcji Lapunowa, które nie należą do klasy C^1. Twierdzenie to poprzedzone będzie dwoma definicjami.

Defnincja 1. Funkcję $a : R^+ \ni x \to a(x) \in R^+$ (gdzie R^+ oznacza zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych) nazywamy funkcją klasy $\mathcal{K}$ lub mówimy, że $a(x)$ należy do klasy $\mathcal{K}$, jeśli:

a- funkcja $a(x)$ jest ściśle rosnąca, **b**- $a(0) = 0$.

Defninicja 2. [83] Niech $f(t)$ oznacza ciągłą funkcję. Prawą górną pochodną Diniego funkcji $f(t)$ w punkcie $t = t_0$ oznaczamy jako $D^+f(t_0)$ i definiujemy jako:

$$D^+f(t_0) = \limsup_{t \to t_0^+} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}. \tag{4.1}$$

Powyższa definicja jest jedną z czterech, które otrzymujemy biorąc górne, dolne oraz lewo i prawostronne granice ilorazu różnicowego. Jeśli funkcja $f(t)$ spełnia warunek Lipschitza w punkcie t_0, to wszystkie cztery pochodne Diniego przyjmują skończone wartości. Wszystkie cztery pochodne są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $f(t)$ jest różniczkowalna w punkcie t_0.

Rozważmy teraz układ

$$\dot{x} = f(x,t), \tag{4.2}$$

$x \in R^n$, który ma punkt równowagi w punkcie $x_0 = 0$. Zastosowanie funkcji Lapunowa $V(x)$ klasy C do badania stabilności zerowego punktu równowagi tego układu opisuje następujące twierdzenie ([83, str. 89]).

Twierdzenie 1. Jeśli istnieje ciągła funkcja $V(x,t)$, lokalnie lipschitzowska ze względu na zmienną x taka, że istnieją trzy funkcje $a, b, c \in \mathcal{K}$, dla których w pewnym otoczeniu punktu równowagi zachodzi

$$a(\| x \|) \leq V(x,t) \leq b(\| x \|) \tag{4.3}$$

oraz

$$D^+V(x,t)\Big|_{\dot{x}=f(x,t)} \leq -c(\| x \|), \tag{4.4}$$

to zerowy punkt równowagi jest jednostajnie, asymptotycznie stabilny.

Jeśli ponadto przedstawione warunki zachodzą w całej przestrzeni stanu oraz dodatkowo

$$a(r) \to \infty, \text{ gdy } r \to \infty, \tag{4.5}$$

to zerowy punkt równowagi układu (4.2) jest jednostajnie, globalnie asymptotycznie stabilny.

We wzorze (4.4) po lewej stronie występuje prawa, górna pochodna Diniego wzdłuż trajektorii układu (4.2), tzn.

$$D^+V(x,t)\Big|_{\dot{x}=f(x,t)} = \limsup_{\Delta \to 0^+} \frac{V[x(t+\Delta), t+\Delta] - V[x(t), t]}{\Delta}, \tag{4.6}$$

przy czym $x(t)$ jest rozwiązaniem (4.2). W dalszych rozważaniach będziemy zwykle upraszczali notację pisząc $D^+V(x,t)$ zamiast $D^+V(x,t)\Big|_{\dot{x}=f(x,t)}$. Na ogół pominięcie indeksu określającego, wzdłuż jakiego układu liczona jest pochodna, nie prowadzi do niejednoznaczności.

4.1.1. Obliczanie pochodnych Diniego

Ciągłe ale nieróżniczkowalne funkcje Lapunowa można efektywnie wykorzystywać do badania stabilności dzięki temu, że pochodną Diniego wzdłuż trajektorii układu można liczyć podobnie jak zwykłą pochodną. Prawdziwy jest następujący lemat [83, Dodatek I].

Lemat 1. Załóżmy, że rozwiązanie układu (4.2) spełnia $x(t_0) = x_0$. Wtedy

$$D^+V(x_0,t_0)\big|_{\dot{x}=f(x_0,t_0)} = \limsup_{\Delta\to 0^+} \frac{V[x_0+\Delta f(x_0,t_0), t_0+\Delta] - V(x_0,t_0)}{\Delta}. \tag{4.7}$$

W dalszych rozważaniach wykorzystywane będą funkcje Lapunowa, które zależą tylko od zmiennej x, tzn. $V(x,t) = V(x)$, oraz dodatkowo są wypukłe, tzn. $V[\alpha x + (1-\alpha)y] \le \alpha V(x) + (1-\alpha)V(y)$, $0 \le \alpha \le 1$, [81, str. 25]. Przy takich założeniach operację lim sup w lemacie 1 można zamienić, na lim, tzn.

$$D^+V(x_0)\big|_{\dot{x}=f(x_0,t_0)} = \lim_{\Delta\to 0^+} \frac{V[x_0+\Delta f(x_0,t_0)] - V(x_0)}{\Delta}. \tag{4.8}$$

Wynika to z faktu, że dla funkcji wypukłych istnieją pochodne kierunkowe we wszystkich kierunkach [81].

4.2. Zastosowanie wypukłej funkcji Lapunowa do problemu absolutnej stabilności

W punkcie tym przedstawimy twierdzenie, które stanowi podstawę dalej rozwijanych metod analizy absolutnej stabilności. Twierdzenie to orzeka, że warunkiem wystarczającym i koniecznym absolutnej stabilności układu (0.1), (1.1) jest istnienie wypukłej funkcji Lapunowa, wspólnej dla wszystkich układów narożnych $\dot{x} = A_1x$, $\dot{x} = A_2x$, ..., $\dot{x} = A_Nx$. Dowody można znaleźć w pracach [116], [16], [8]. Za [116] przedstawimy twierdzenie i jego dowód.

Wprowadzimy niewielką modyfikację oznaczeń w stosunku do (0.1), (1.1), aby wygodniej było przeprowadzić rozumowanie. Rozważamy układ (0.1), (1.1) zapisany następująco:

$$\dot{x} = A[u(t)]x, \tag{4.9}$$

gdzie

$$u(t) = [u_1(t)\ u_2(t)\ \dots u_N(t)]^T, \tag{4.10}$$

$$A[u(t)] = \sum_{i=1}^{N} A_i u_i(t), \tag{4.11}$$

$$u(t) \in \mathcal{U} = \{u_i(t) \ge 0, \sum_{i=1}^{N} u_i(t) = 1\}. \tag{4.12}$$

Podamy najpierw twierdzenie dotyczące trajektorii układu (4.9)-(4.12) potrzebne do dowodu głównego wyniku.

Twierdzenie 2. Układ (4.9)-(4.12) jest absolutnie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednostajnie wykładniczo stabilny, tzn. istnieją takie stałe $C \ge 1$, $\gamma > 0$, niezależne od $A(t)$, że dowolne rozwiązanie $x(t)$ startujące z warunku początkowego $x(0) = x_0$ spełnia

$$\| x(t) \| < C \| x_0 \| e^{-\gamma t}. \tag{4.13}$$

Dowód można znaleźć w [120], zob. także [49, str. 174].

Wykorzystując przedstawioną własność możemy udowodnić następujący warunek wystarczający i konieczny absolutnej stabilności układu (4.9)-(4.12).

Twierdzenie 3. Warunkiem wystarczającym i koniecznym absolutnej stabilności układu (4.9)-(4.12) jest istnienie wypukłej funkcji Lapunowa $V(x)$, wspólnej dla wszystkich układów narożnych $\dot{x} = A_1x$, $\dot{x} = A_2x$, ..., $\dot{x} = A_Nx$, (tzn. wypukłej funkcji $V(x)$, która jest istotnie dodatnio określona i której pochodna $D^+V(x)$ jest istotnie ujemnie określona wzdłuż rozwiązań każdego z układów narożnych).

Dowód

Dostateczność. Dowód jest podobny do dowodu twierdzenia 3 z poprzedniego rozdziału. Załóżmy, że istnieje wypukła funkcja funkcja Lapunowa $V(x)$, wspólna dla $\dot{x} = A_1x$, $\dot{x} = A_2x$, ..., $\dot{x} = A_Nx$, tzn. taka, że

$$a(\| x \|) \le V(x,t) \le b(\| x \|), \tag{4.14}$$

$$D^+V(x)\big|_{\dot{x}=A_ix} = \lim_{\Delta\to 0^+} \frac{V(x+\Delta A_ix) - V(x)}{\Delta} \le -c_i(\| x \|) \tag{4.15}$$

$i = 1, 2, \dots N$, $a, b, c_i \in \mathcal{K}$.

Zdefiniujmy

$$c_M(\| x \|) = \min_i c_i(\| x \|). \tag{4.16}$$

Na podstawie definicji 1 mamy $c_M \in \mathcal{K}$.

Obliczając $D^+V(x)$ wzdłuż rozwiązań układu zgodnie z (4.8) (4.9)-(4.12) dostajemy:

$$\begin{aligned} D^+V(x)\big|_{\dot{x}=A[u(t)]x} &= \lim_{\Delta\to 0^+} \frac{V[x+\Delta(\sum u_iA_ix)] - V(x)}{\Delta} = \\ &= \lim_{\Delta\to 0^+} \frac{V(\sum u_i(x+\Delta A_ix) - V(x)}{\Delta} \le \\ &\le \lim_{\Delta\to 0^+} \frac{\sum u_i\,[V(x+\Delta A_ix) - V(x)]}{\Delta}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

W przekształceniach wykorzystano (4.12) i nierówność Jensena [81, str. 25]. Na podstawie (4.17) i (4.15) mamy:

$$D^+V(x)\big|_{\dot{x}=A[u(t)]x} \le -\sum u_ic_i(\| x \|) \le -c_M(\| x \|). \tag{4.18}$$

Ponieważ $c_M(\| x \|)$ nie zależy od $u(t)$, zatem układ (4.9)-(4.12) jest absolutnie stabilny.

Konieczność. Oznaczmy przez $x_u(x_0, T)$ rozwiązanie, w chwili T, układu (4.9), startujące z warunku początkowego $x(0) = x_0$ i wynikające z konkretnego przebiegu $u(t)$, $t \in [0, T]$. Defniujemy teraz

$$S(x_0, T) = \max_{u \in \mathcal{U}} \| x_u(x_0, T) \| = \max_{u \in \mathcal{U}} \| X_u(T) x_0 \|, \tag{4.19}$$

przy czym $X_u(t) = X_u(x_0, t)$ oznacza macierz fundamentalną układu (4.9), wynikającą z przebiegu funkcji $u(t)$, a $\| \cdot \|$ jest normą euklidesową. Maksimum w (4.19) zawsze istnieje dlatego, że zbiór $\mathcal{Z}(x_0, T)$ wszystkich punktów osiągalnych z punktu x_0 przy dowolnych przebiegach $u(t) \in \mathcal{U}$

$$\mathcal{Z}(x_0, T) = \{x_u(x_0, T)\} \tag{4.20}$$

przy ustalonym x_0 i T jest zbiorem zwartym.

Zauważmy, że funkcja $S(x_0, T)$ jest wypukła. Istotnie

$$\begin{aligned} S(x_0^1 + x_0^2, T) &= \max_{u \in \mathcal{U}} \| X_u(T)(x_0^1 + x_0^2) \| \leq \\ &\leq \max_{u \in \mathcal{U}} \left[\| X_u(T) x_0^1 \| + \| X_u(T) x_0^2 \| \right] \leq \\ &\leq \max_{u \in \mathcal{U}} \| X_u(T) x_0^1 \| + \max_{u \in \mathcal{U}} \| X_u(T) x_0^2 \| = \\ &= S(x_0^1, T) + S(x_0^2, T). \end{aligned} \tag{4.21}$$

Wykorzystując $S(x_0, T)$ definiujemy następującą funkcję Lapunowa:

$$V(x_0) = \int_0^{T_1} S(x_0, \tau) d\tau. \tag{4.22}$$

Wartość granicy całkowania T_1 będzie dobrana później.

Obliczamy teraz

$$D^+ V(x_0) = \lim_{\Delta \to 0^+} \frac{1}{\Delta} \left[\int_0^{T_1} S(x(\Delta), \tau) d\tau - \int_0^{T_1} S(x_0, \tau) d\tau \right], \tag{4.23}$$

przy czym $x(\Delta)$ jest stanem osiąganym w chwili $t = \Delta$ przez trajektorię startującą z $x(0) = x_0$ przy przebiegu funkcji $u(t)$, który maksymalizuje (4.19).

Zauważmy, że funkcję $S(x_0, T)$ można zapisać, z użyciem zdefiniowanego w (4.20) zbioru osiągalności, jako

$$S(x_0, T) = \max_{x \in \mathcal{Z}(x_0, T)} \| x \| \tag{4.24}$$

oraz weźmy pod uwagę następującą własność wynikającą z definicji zbioru osiągalności (4.20):

$$\mathcal{Z}(x(\Delta), T) \subset \mathcal{Z}(x_0, T + \Delta), \tag{4.25}$$

obowiązującą dla dowolnego $T > \Delta$. Z tej własności i z (4.24) wynika nierówność dla funkcji $S(.)$

$$S(x(\Delta), \tau) \leq S(x_0, \Delta + \tau), \tag{4.26}$$

prawdziwa dla wszystkich $\Delta \geq 0$, $\tau \geq 0$.

Na podstawie (4.26) dostajemy:

$$\begin{aligned} D^+ V(x_0) &\leq \lim_{\Delta \to 0^+} \frac{1}{\Delta} \left[\int_0^{T_1} S(x_0, \Delta + \tau) d\tau - \int_0^{T_1} S(x_0, \tau) d\tau \right] = \\ &= \lim_{\Delta \to 0^+} \frac{1}{\Delta} \left[\int_\Delta^{T_1 + \Delta} S(x_0, \tau) d\tau - \int_0^{T_1} S(x_0, \tau) d\tau \right] = \\ &= \lim_{\Delta \to 0^+} \frac{1}{\Delta} \left[\int_{T_1}^{T_1 + \Delta} S(x_0, \tau) d\tau - \int_0^{\Delta} S(x_0, \tau) d\tau \right] = \\ &= S(x_0, T_1) - S(x_0, 0) \leq \| x_0 \| (C e^{-\gamma T_1} - 1). \end{aligned} \tag{4.27}$$

Ostatnia nierówność wynika z twierdzenia 2.

Wystarczy teraz dobrać

$$T_1 > \frac{\ln C}{\gamma}, \tag{4.28}$$

aby zakończyć dowód twierdzenia. □

Zwróćmy uwagę, że z przyjętej defnicji funkcji Lapunowa wynika, że

$$V(x_0) = \int_0^{T_1} S(x_0, \tau) d\tau = \int_0^{T_1} \sqrt{x_0^T \Phi(x_0, \tau) x_0} d\tau, \tag{4.29}$$

gdzie $\Phi(x_0, \tau) = X^T(x_0, t) X(x_0, t)$, a $X(x_0, t)$ jest macierzą fundamentalną układu (4.9), wynikającą z takiego przebiegu funkcji $u(t)$, który maksymalizuje (4.19). Wynika stąd, że

$$V(-x) = V(x) \tag{4.30}$$

oraz

$$V(\alpha x) = | \alpha | V(x). \tag{4.31}$$

Zatem funkcja Lapunowa $V(x)$, której istnienie zapewnia twierdzenie 3, jest pewną normą.

Wynik ten jest motywacją do przebadania zastosowania norm jako funkcji Lapunowa dla układów liniowych o zmiennych w czasie parametrach.

4.3. Norma jako funkcja Lapunowa dla układu liniowego

Zastosowanie formy kwadratowej lub równoważnie normy euklidesowej jako funkcji Lapunowa dla układów liniowych jest klasycznym zagadnieniem (por. pierwszy punkt poprzedniego rozdziału). W świetle twierdzenia 3 interesujące wydaje się rozważenie szerszego problemu zastosowania dowolnej normy jako funkcji Lapunowa układu liniowego. Problem ten będzie rozważony w tym punkcie.

Poszukiwać będziemy funkcji Lapunowa o następującej postaci:

$$V(x) = \| x \|_W = \| Wx \|, \tag{4.32}$$

przy czym x jest wektorem stanu układu, $x \in R^n$, W jest macierzą $m \times n$ - wymiarową, $m \geq n$. Zakłada się też, że W jest macierzą pełnego rzędu. Symbol $\| \cdot \|$ oznacza normę w przestrzeni R^m. Zatem $\| \cdot \|_W$ jest normą w przestrzeni R^n.

Idea definiowania funkcji Lapunowa w postaci (4.32) pojawia się w wielu pracach, między innymi w [7], [8]-[13], [16], [17], [50], [59], [70]-[72], [74], [82], [94], [95], [100], [115], [116]. Dzięki temu, że w definicji (4.32) występuje macierz W, której elementy można zmieniać, istnieje swoboda w kształtowaniu funkcji $V(x)$. Można jej użyć do dopasowania funkcji $V(x)$ do konkretnego problemu. W zastosowaniu do praktycznych obliczeń ważne są tylko niektóre przypadki szczególne norm w (4.32). Pierwszy z nich to norma euklidesowa. Dla tego przypadku funkcja (4.32) jest równoważna z omawianą w poprzednim rozdziale funkcją kwadratową (przy założeniu, że macierz P jest istotnie dodatnio określona). Drugi ważny przypadek szczególny to norma typu maksimum modułu, tzn. $\| \cdot \| = \| \cdot \|_\infty$. Norma taka była stosowana do różnych problemów związanych ze stabilnością i absolutną stabilnością układów w pracach [7], [8]-[13], [16], [17], [50], [70]-[72], [74], [94], [95], [100], [115], [116]. Wreszcie trzeci przypadek, dla którego istnieją efektywne metody obliczeniowe, to norma typu suma modułów elementów, tzn. $\| \cdot \| = \| \cdot \|_1$. Wyniki związane z taką normą można znaleźć w pracach [59], [82].

Warstwice (zbiory argumentów odpowiadające stałym wartościom funkcji) funkcji $V(x)$ zależą od macierzy W oraz od normy $\| \cdot \|$ w przestrzeni R^m. Dla normy euklidesowej $\| \cdot \| = \| \cdot \|_2$ wartwice są elipsoidami. W takiej sytuacji jako macierz W przyjmuje się macierz kwadratową, tzn. $m = n$. Dla normy typu maksimum modułów elementów wektora, $\| \cdot \| = \| \cdot \|_\infty$, warstwice są wypukłymi hiperwielościanami. W tym przypadku m jest liczbą ścian hiperwielościanu. W praktycznych obliczeniach, aby dopasować funkcję $V(x)$ do założonego problemu, konieczne może być zdefiniowanie hiperwielościanu o dużej liczbie ścian, tzn. $m > n$.

Dalej rozpatrujemy następujący problem: jakie są warunki konieczne i wystarczające na to, aby funkcja dana normą (4.32) była funkcją Lapunowa układu liniowego

$$\dot{x} = Ax. \tag{4.33}$$

We wzorze tym $x \in R^n$, $A \in R^{n \times n}$. Poszukuje się warunków, które musi spełniać macierz W, aby pochodna Diniego funkcji $V(x)$ danej wzorem (4.32) wzdłuż trajektorii układu (4.33) była istotnie ujemnie określona.

Przed sformułowaniem zasadniczych wyników tego punktu podamy najpierw kilka potrzebnych definicji.

4.3.1. Norma macierzy

Definicja 3. [110] Przez $\| Q \|$ oznaczamy normę macierzy $Q \in R^{m \times m}$ indukowaną przez normę $\| \cdot \|$ na przestrzeni zespolonej C^m, tzn.

$$\| Q \| = \sup_{\|u\|=1} \| Qu \| . \tag{4.34}$$

Biorąc za normę $\| \cdot \|$ na przestrzeni zespolonej C^m kolejno normę euklidesową

$$\| u \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |u_i|^2}, \tag{4.35}$$

normę typu maksimum modułu z elementów $\| \cdot \| = \| \cdot \|_\infty$

$$\| u \|_\infty = \max_i |u_i| \tag{4.36}$$

i normę typu suma modułów elementów, $\| \cdot \| = \| \cdot \|_1$

$$\| u \|_1 = \sum_{i=1}^{m} |u_i|, \tag{4.37}$$

mamy odpowiednio:

$$\| Q \|_2 = \sigma_{\max}(Q) = \sqrt{\lambda_{\max}(Q^* Q)}, \tag{4.38}$$

$$\| Q \|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{m} |q_{ij}| \tag{4.39}$$

oraz

$$\| Q \|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{m} |q_{ij}|. \tag{4.40}$$

W podanych wzorach: $u \in C^m$, u_i jest i-tym elementem wektora u, q_{ij} jest ij-tym elementem macierzy Q, "$*$" oznacza sprzężenie hermitowskie, $\sigma_{\max}(Q)$ oznacza największą wartość szczególną (singularną) macierzy Q.

4.3.2. Norma logarytmiczna macierzy

Definicja 4.([26], [27], [97]). Normę logarytmiczną macierzy Q związaną z normą $\| Q \|$ oznaczamy $\mu(Q)$ i definiujemy jako

$$\mu(Q) = \lim_{\Delta \to 0^+} \frac{\| I + \Delta Q \| - 1}{\Delta} \tag{4.41}$$

I - macierz jednostkowa.

Termin "norma logarytmiczna" bierze się stąd, że równoważnie z (4.41) możemy napisać:

$$\mu(Q) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\| I + e^{tQ} \| - 1}{t}. \tag{4.42}$$

Podamy podstawowe fakty dotyczące norm logarytmicznych macierzy określonych w definicji 4. Oprócz terminu norma logarytmiczna macierzy stosuje się także w literaturze inną nazwę - miara macierzowa (zob. [27]).

Podstawowym wynikiem, który wymaga dowodu, jest istnienie granicy w (4.41). Istnienie granicy w (4.41) wynika z następujących lematów:

Lemat 2 a. Dla ustalonej macierzy Q, funkcja

$$f(\Delta) = \frac{\| I + \Delta Q \| - 1}{\Delta} \tag{4.43}$$

określona dla $\Delta > 0$ jest niemalejącą funkcją argumentu Δ.

Dowód. Korzystamy z nierówności

$$\| A + B \| - \| B \| \leq \| A \| \tag{4.44}$$

podstawiając w niej

$$A + B = \frac{I + \Delta_1 Q}{\Delta_1}, \tag{4.45}$$

$$B = \frac{I + \Delta_2 Q}{\Delta_2}, \quad 0 < \Delta_1 < \Delta_2. \tag{4.46}$$

Dostajemy zatem

$$\frac{\| I + \Delta_1 Q \|}{\Delta_1} - \frac{\| I + \Delta_2 Q \|}{\Delta_2} \leq \| I(\frac{1}{\Delta_1} - \frac{1}{\Delta_2}) \| = \frac{1}{\Delta_1} - \frac{1}{\Delta_2} \tag{4.47}$$

lub równoważnie

$$\frac{\| I + \Delta_1 Q \| - 1}{\Delta_1} \leq \frac{\| I + \Delta_2 Q \| - 1}{\Delta_2} \text{ dla } \Delta_1 \leq \Delta_2, \tag{4.48}$$

co dowodzi lematu. □

Lemat 2 b. Dla każdego $\Delta > 0$

$$- \| Q \| \leq \frac{\| I + \Delta Q \| - 1}{\Delta} \leq \| Q \|. \tag{4.49}$$

Dowód. Otrzymuje się przez oszacowania podobnie jak w lemacie 2 a. □

Na podstawie lematu 2 a i lematu 2 b $f(\Delta)$ jako funkcja monotoniczna i ograniczona posiada granicę, zatem norma logarytmiczna (4.41) jest dobrze zdefiniowana.

Więcej własności normy logarytmicznej $\mu(Q)$ można znaleźć np. w [26], [27], [97].

Łatwe do wyliczenia są wyrażenia norm logarytmicznych dla trzech poniższych przypadków.

Norma logarytmiczna związana z normą euklidesową

Podstawiając (4.38) w (4.41) dostajemy:

$$\begin{aligned} \mu_2(Q) &= \lim_{\Delta \to 0^+} \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(I + \Delta Q^* + \Delta Q + \Delta^2 Q^* Q)} - 1}{\Delta} = \\ &= \lim_{\Delta \to 0^+} \frac{\lambda_{\max}(I + \Delta Q^* + \Delta Q + \Delta^2 Q^* Q) - 1}{\Delta(\sqrt{\lambda_{\max}(I + \Delta Q^* + \Delta Q + \Delta^2 Q^* Q)} + 1)}. \end{aligned} \tag{4.50}$$

Biorąc pod uwagę, że $\lambda_{\max}(A + I) = 1 + \lambda_{\max}(A)$ oraz zaniedbując składniki mnożone przez Δ^2 dostajemy:

$$\mu_2(Q) = \max_i \left[\lambda_i \left(\frac{Q + Q^*}{2} \right) \right]. \tag{4.51}$$

Norma logarytmiczna związana z normą $\| \cdot \|_\infty$

Podstawiając (4.39) w (4.41) dostajemy:

$$\mu_\infty(Q) = \lim_{\Delta \to 0^+} \frac{\max_i (\sum_{j=1}^m |\delta_{ij} + q_{ij}\Delta|) - 1}{\Delta}, \tag{4.52}$$

gdzie δ_{ij} oznacza deltę Kroneckera. Obliczając

$$\begin{aligned} |1 + q_{ii}\Delta| - 1 &= \sqrt{[1 + \mathrm{Re}(q_{ii})\Delta]^2 + [\mathrm{Im}(q_{ii})\Delta]^2} - 1 \\ &= \frac{2\mathrm{Re}(q_{ii})\Delta + [\mathrm{Re}(q_{ii})\Delta]^2 + [\mathrm{Im}\,(q_{ii})\Delta]^2}{\sqrt{[1 + \mathrm{Re}(q_{ii})\Delta]^2 + [\mathrm{Im}(q_{ii})\Delta]^2} + 1} \end{aligned} \tag{4.53}$$

i przechodząc do granicy w (4.52) dostajemy:

$$\mu_\infty(Q) = \max_i [\mathrm{Re}(q_{ii}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} | q_{ij} |]. \tag{4.54}$$

Norma logarytmiczna związana z normą $\| \cdot \|_1$

W wyniku obliczeń analogicznych do (4.53) dostajemy wyrażenie na normę logarytmiczną związaną z macierzową normą (4.40)

$$\mu_1(Q) = \max_j [\mathrm{Re}(q_{jj}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} | q_{ij} |]. \tag{4.55}$$

4.3.3. Warunki wystarczające

Przez bardzo proste oszacowanie można podać warunki wystarczające na to, aby funkcja dana normą (4.32) była funkcją Lapunowa układu liniowego (4.33). Warunki te są sformułowane w twierdzeniu, które podajemy za [50]. W sformułowaniu tego twierdzenia będziemy za [70] zakładać nieco ogólniejszą sytuację niż w poprzednich punktach (oraz w pracy [50]), polegającą na tym, że macierz W jest macierzą o elementach zespolonych, tzn. $W \in C^{m \times n}$ oraz norma $\| \cdot \|$ we wzorze (4.32) jest normą na przestrzeni zespolonej C^m. Uogólnienie to pozwoli na efektywną konstrukcję funkcji Lapunowa zadanej normą $\| \cdot \|_\infty$ lub $\| \cdot \|_1$ dla dowolnego stabilnego układu liniowego.

Łatwo sprawdzić (por. konstrukcje w punkcie 4.3.6.), że obie funkcje $V(x) = \| Wx \|$ $x \in R^n$, $W \in C^{m \times n}$ są istotnie dodatnio określone wtedy i tylko wtedy, gdy realrank$(W) = n$, gdzie realrank(W) oznacza rzeczywisty rząd macierzy zespolonej W, określony przez następującą definicję:

Definicja 5. Rzeczywisty rząd macierzy $W \in C^{m \times n}$ oznaczamy przez realrank(W) i określamy jako

$$\mathrm{realrank}(W) = \mathrm{rank}\ [\mathrm{Re}(W)^T \ \ \mathrm{Im}(W)^T]^T. \tag{4.56}$$

Możemy teraz sformułować natępujące twierdzenie.

Twierdzenie 4. Niech $W \in C^{m \times n}$ i realrank$(W) = n$. Warunkiem wystarczającym, aby $V(x) = \| Wx \|$ była funkcją Lapunowa układu liniowego (4.33), jest, aby istniała macierz $Q \in C^{m \times m}$ taka, że

$$WA - QW = 0, \tag{4.57}$$

$$\mu(Q) < 0. \tag{4.58}$$

Dowód. Do obliczenia pochodnej Diniego wykorzystujemy wzór (4.8), co prowadzi do

$$D^+V(x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\| W(I + tA)x(t) \| - \| Wx(t) \|}{t}. \tag{4.59}$$

Podstawiając (4.57) w (4.59) i stosując nierówność

$$\| (I + tQ)Wx \| \leq \| I + tQ \| \| Wx \| \tag{4.60}$$

dostajemy:

$$D^+V(x(t)) \leq \mu(Q) \| Wx(t) \| = \mu(Q)V[x(t)]. \tag{4.61}$$

Ponieważ na podstawie założenia, że realrank$(W) = n$, zachodzi $\| Wx(t) \| > 0$ dla $x(t) \neq 0$, zatem $\| Wx(t) \|$ jest funkcją istotnie dodatnio określoną, a z (4.58) wynika, że $D^+V(x)$ jest istotnie ujemnie określona, co dowodzi tezy. □

4.3.4. Warunki konieczne

Warunki uzyskane w poprzednim podpunkcie są tylko warunkami wystarczającymi dlatego, że otrzymano je przez oszacowania. Oznacza to, że na podstawie twierdzenia 4 nie można wykluczyć sytuacji, w której funkcja $V(x)$ dana normą (4.32) jest funkcją Lapunowa układu (4.33), mimo że założenia tego twierdzenia nie są spełnione. Zatem istotnym zagadnieniem jest przestudiowanie problemu warunków koniecznych na to, aby (4.32) była funkcją Lapunowa.

Przy dyskusji warunków koniecznych na to, aby $V(x)$ dana normą (4.32) była funkcją Lapunowa układu liniowego (4.33), ograniczymy się do przypadku norm rzeczywistych.

W pracy [57] podano klasę przestrzeni (norm w przestrzeniach skończenie wymiarowych), dla których warunki twierdzenia 4 są zarówno konieczne, jak i wystarczające. Klasę tę będziemy nazywać przestrzeniami o własności **S**. Opisano tam także związek problemu poszukiwania macierzy Q z zagadnieniem rozszerzania operatorów liniowych z zachowaniem normy. Wymienione wyniki przedstawimy poniżej.

Zdefiniujemy najpierw własność **S** przestrzeni Banacha. Niech $\mathcal{S}$ będzie rzeczywistą przestrzenią Banacha, y, z będą oznaczały elementy (wektory) tej przestrzeni. Niech $\mathcal{U}$ będzie podprzestrzenią przestrzeni $\mathcal{S}$ oraz oznaczmy przez $\mathcal{F}$ operator liniowy, który odwzorowuje $\mathcal{U}$ w siebie

$$\mathcal{F} : \mathcal{U} \ni y \to \mathcal{F}(y) \in \mathcal{U}. \tag{4.62}$$

Operator liniowy Q odwzorowujący przestrzeń S w siebie

$$Q : \mathcal{S} \ni z \to Q(z) \in \mathcal{S} \tag{4.63}$$

nazywamy rozszerzeniem operatora $\mathcal{F}$, gdy $Q(y) = \mathcal{F}(y)$, dla $y \in \mathcal{U}$.

Definicja 6. Mówimy, że przestrzeń $\mathcal{S}$ ma własność **S**, gdy dla każdej jej podprzestrzeni $\mathcal{U}$ i dowolnego ograniczonego operatora liniowego $\mathcal{F}$ odwzorowującego $\mathcal{U}$ w siebie, istnieje rozszerzenie Q o tej samej normie co $\mathcal{F}$.

Przeanalizujmy teraz sytuację, gdy $\mathcal{S}$ jest przestrzenią m - wymiarowych wektorów z normą $\| \cdot \|$, $\mathcal{S} = (R^m, \| \cdot \|)$. Ponieważ jest to przestrzeń skończenie wymiarowa, zatem każda jej podprzestrzeń $\mathcal{U}$ może być przedstawiona jako:

$$\mathcal{U} = \{y \in R^m : y = Wx, W \in R^{m \times n}, x \in R^n, n \leq m\}, \tag{4.64}$$

gdzie macierz W jest macierzą pełnego rzędu. Kolumny macierzy W definiują bazę w podprzestrzeni $\mathcal{U}$. Każdy operator liniowy $\mathcal{F}$, który odwzorowuje $\mathcal{U}$ w siebie, może być reprezentowany przez $n \times n$ - wymiarową macierz F w następujący sposób:

$$\mathcal{U} \ni y = Wx \to \mathcal{F}(y) = WFx, \quad F \in R^{n\times n}. \tag{4.65}$$

Prawdziwy jest następujący lemat.

Lemat 3. Operator liniowy $\mathcal{Q} : R^{m\times m} \to R^{m\times m}$ jest rozszerzeniem operatora $\mathcal{F}$ danego przez (4.65) wtedy i tylko wtedy, gdy jest reprezentowany przez macierz $Q \in R^{m\times m}$, która spełnia

$$WF = QW. \tag{4.66}$$

Dowód. Rozważmy wektor $y \in \mathcal{U}$. Może on być przedstawiony w postaci $y = Wx$, gdzie wektor x składa się ze współczynników rozwinięcia względem bazy danej przez kolumny macierzy W. Do tego, aby

$$\mathcal{Q}(y) = \mathcal{F}(y) \tag{4.67}$$

dla wszystkich $y \in \mathcal{U}$, konieczne i wystarczające jest, aby dla każdego k zachodziła równość $\mathcal{Q}(w_k) = \mathcal{F}(w_k)$, gdzie w_k jest k-tym wektorem bazy w przestrzeni W (k-tą kolumną macierzy W). Zatem

$$\mathcal{Q}(w_k) = Qw_k \tag{4.68}$$

oraz

$$\mathcal{F}(w_k) = Wf_k, \tag{4.69}$$

gdzie f_k jest k-tą kolumną macierzy F. Równania (4.68) i (4.69) są równoważne z (4.66), co dowodzi prawdziwości lematu. □

Z lematu 3 i z definicji 6 wynika następujący lemat 4, który podaje algebraiczne warunki na to, aby przestrzeń $(R^m, \|\cdot\|)$ miała własność **S**.

Lemat 4. Przestrzeń $(R^m, \|\cdot\|)$ ma własność **S** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej macierzy $W \in R^{m\times n}$ pełnego rzędu, $n \leq m$, i dla każdej macierzy $F \in R^{n\times n}$ istnieje macierz $Q \in R^{m\times m}$ spełniająca (4.66) i taka, że

$$\sup_{x\in R^n\, x\neq 0} \frac{\| WFx \|}{\| Wx \|} = \sup_{y\in R^m\, y\neq 0} \frac{\| Qy \|}{\| y \|}. \tag{4.70}$$

□

Podane definicje i lematy charakteryzujące przestrzenie $(R^m, \|\cdot\|)$ o własności **S** pozwalają udowodnić, że w przestrzeniach tych warunki (4.57), (4.58) są zarówno wystarczające, jak i konieczne.

Twierdzenie 5. Załóżmy, że przestrzeń $(R^m, \|\cdot\|)$ ma własność **S**. Wtedy warunki (4.57), (4.58) są zarówno wystarczające, jak i konieczne do tego, aby funkcja $V(x)$ dana wzorem (4.32) była funkcją Lapunowa układu liniowego (4.33).

Dowód:

Dostateczność. Została udowodniona w twierdzeniu 4.

Konieczność. Aby udowodnić konieczność, musimy wykazać, że z faktu

$$D^+V(x) < 0, \text{ dla } x \neq 0 \tag{4.71}$$

wynika istnienie macierzy $Q \in R^{m\times m}$ spełniającej warunki (4.57), (4.58). Z (4.71) wynika, że istnieje taka liczba $t > 0$, dla której

$$\sup_{x\in R^n\, x\neq 0} \frac{\| W(I+tA)x \|}{\| Wx \|} < 1. \tag{4.72}$$

Z kolei zastosowanie lematu 4 z $F = I + tA$ zapewnia istnienie macierzy $I + tQ$ takiej, że

$$W(I+tA) = (I+tQ)W \tag{4.73}$$

oraz

$$\sup_{y\in R^m\, y\neq 0} \frac{\| (I+tQ)y \|}{\| y \|} = \| I + tQ \| < 1. \tag{4.74}$$

Łatwo widać, że (4.73) jest równoważne (4.57).

Zgodnie z lematem 2 a, $\frac{1}{t}(\| I + tQ \| - 1)$ jest malejącą funkcją t, a zatem (4.74) pociąga za sobą (4.58), co kończy dowód. □

4.3.5. Przestrzenie o własności S

Jak widzieliśmy, problem konieczności warunków (4.57), (4.58) wiąże się z zagadnieniem rozszerzania operatorów liniowych z zachowaniem normy. Przegląd rezultatów dotyczących rozszerzania operatorów liniowych w przestrzeniach Banacha z zachowaniem ich normy można znaleźć w [30, str. 554] oraz w [114, rozdział IV], (zob. także bibliografię cytowaną w wymienionych pozycjach). Przedstawimy podstawowe fakty dotyczące tego problemu.

W publikowanych wynikach rozważa się ogólną sytuację, gdy dziedzina oraz zakres operatora liniowego są różnymi przestrzeniami (o różnych wymiarach i różnych normach). Problem zachowującego normę rozszerzenia może być ogólnie sformułowany następująco. Niech $\mathcal{S}$ i $\mathcal{U}$ będą przetrzeniami Banacha, $\mathcal{S}_0$ i $\mathcal{U}_0$ - ich podprzestrzeniami oraz niech dany będzie operator liniowy $\mathcal{Q}_0$

$$\mathcal{Q}_0 : \mathcal{S}_0 \ni y_0 \to \mathcal{Q}_0(y_0) \in \mathcal{U}_0. \tag{4.75}$$

Mówimy, że operator liniowy $\mathcal{Q}$

$$\mathcal{Q} : \mathcal{S} \ni y \to \mathcal{Q}(y) \in \mathcal{U} \tag{4.76}$$

jest zachowującym normę rozszerzeniem operatora $\mathcal{Q}_0$, jeśli

$$\mathcal{Q}(y_0) = \mathcal{Q}_0(y_0), \text{ dla wszystkich} y_0 \in \mathcal{S}_0 \tag{4.77}$$

oraz

$$\| \mathcal{Q} \| = \| \mathcal{Q}_0 \| . \tag{4.78}$$

Ogólnie, operatory liniowe nie mogą być rozszerzone z zachowaniem normy. Istnieją jednak specjalne przypadki, gdy można uzyskać rozszerzenie operatora liniowego zachowując jego normę. Poniżej krótko je opiszemy, ograniczając się do przypadku skończenie wymiarowego.

1. Jeśli zakres $\mathcal{U}$ jest przestrzenią z normą typu nieskończoność (4.36), wtedy dla dowolnej przestrzeni $\mathcal{S}$ rozszerzenie zachowujące normę może być zawsze uzyskane. Za szczególny przypadek tego wyniku można uważać twierdzenie Hahna - Banacha.

2. Jeśli dziedzina $\mathcal{S}$ jest przestrzenią z normą euklidesową (4.35), to dla dowolnej przestrzeni $\mathcal{U}$ także zawsze można uzyskać rozszerzenie z zachowaniem normy. W takiej sytuacji roszerzenie można otrzymać przez rzutowanie ortogonalne w dziedzinie operatora.

Własność **S** zdefiniowana w poprzednim podpunkcie dotyczy sytuacji, gdy dziedzina i zakres operatora liniowego są jedną i tą samą przestrzenią. Z przedstawionych faktów wynika, że zarówno przestrzeń z normą typu nieskończoność, jak też przestrzeń z normą euklidesową posiadają własność **S**. Łatwo się zorientować, że zastosowanie twierdzeń 4 i 5 dla normy euklidesowej nie daje wyników prowadzących poza klasyczną teorię kwadratowych funkcji Lapunowa dla układów liniowych.

Natomiast defniując jako $\| \cdot \|$ normę typu nieskończoność, tzn. $\| \cdot \| = \| \cdot \|_\infty$, gdzie $\| \cdot \|_\infty$ jest zdefiniowana przez $\| y \| = \| y \|_\infty = \max_i | y_i |$, dostajemy następujące twierdzenie, które po raz pierwszy wykazane zostało przez Mołczanowa i Piatnickiego [116], (z zastosowaniem innej metody dowodu niż użyta tutaj).

Twierdzenie 6. (Twierdzenie Mołczanowa Piatnickiego). Niech $W \in R^{m \times n}$ będzie macierzą pełnego rzędu. Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby $V(x)$ zdefiniowana wzorem

$$V(x) = \| Wx \|_\infty \tag{4.79}$$

była funkcją Lapunowa układu liniowego (4.33), jest, aby istniała macierz $Q \in R^{m \times m}$ spełniająca

$$WA = QW \tag{4.80}$$

oraz dla każdego k

$$q_{kk} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{m} | q_{kl} | < 0. \tag{4.81}$$

Wzór (4.81) wynika z zastosowania definicji (4.54) dla przypadku rzeczywistego. Macierz $Q \in R^{m \times m}$ spełniającą warunek (4.81) nazywa się macierzą o ściśle dominującej przekątnej. Jak widać ze wzorów (4.54), (4.81), $Q \in R^{m \times m}$ jest macierzą o ściśle dominującej przekątnej wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu_\infty(Q) < 0$.

Interesujące wydają się też następujące problemy: (1) czy istnieją przestrzenie (skończenie wymiarowe), które nie mają własności **S** oraz, ogólniejszy, (2) jakie przestrzenie posiadają własność **S**. Co do problemu (1), to w pracy [57] przedstawiono przykład przestrzeni trójwymiarowej z normą, która nie ma własności **S**. Rozwiązanie problemu (2) jest nieznane. Wydaje się jednak, że własność **S** jest własnością dość specjalną.

4.3.6. Konstrukcja funkcji Lapunowa zadanych przez normę dla układu liniowego

Rozważymy teraz problem efektywnego wyznaczenia odpowiedniej macierzy W, tak aby $V(x)$ dana przez (4.32) była funkcją Lapunowa układu liniowego (4.33). Przedstawimy konstrukcję takiej funkcji opisaną w pracy [70]. Idea konstrukcji polega na zastosowaniu warunków wystarczających sformułowanych w twierdzeniu 3 dla przypadku, gdy macierz W jest macierzą o elementach zespolonych. Następnie wykorzystując otrzymane rozwiązanie można skonstruować także funkcję Lapunowa dla rzeczywistej macierzy W. Dokonuje się tego przez przybliżenie warstwic funkcji $V(x)$ (z zespoloną macierzą W) odpowiednimi hiperwielościanami.

Opisywana konstrukcja dotyczy dwóch norm $\| \cdot \|_\infty$, oraz $\| \cdot \|_1$.

Konstrukcja dla zespolonej macierzy W

Załóżmy, że macierz A w (4.33) jest stabilna (wszystkie jej wartości własne mają części rzeczywiste ujemne) oraz nie posiada wielokrotnych wartości własnych. Niech teraz $W = T^{-1}$, gdzie T jest macierzą modalną, która transformuje macierz A do postaci diagonalnej Jordana. Wtedy, zgodnie z (4.57)

$$Q = T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n), \tag{4.82}$$

gdzie $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ są wartościami własnymi macierzy A. Jest jasne, że dla tak wybranej macierzy W macierz Q, która wynika z (4.82), spełnia zarówno

$$\mu_1(Q) < 0, \tag{4.83}$$

jak i

$$\mu_\infty(Q) < 0, \tag{4.84}$$

gdzie $\mu_1(Q)$ i $\mu_\infty(Q)$ są zdefiniowane w (4.55) i (4.54).

W przypadku gdy macierz A ma wielokrotne wartości własne, macierz $W = T^{-1}$ transformuje A do postaci Jordana [110]:

$$Q = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & p_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & p_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}, \tag{4.85}$$

gdzie $p_i = 0$, jeśli $\lambda_i \neq \lambda_{i+1}$ oraz $p_i = 1$ lub 0 leśli $\lambda_i = \lambda_{i+1}$. Zatem z (4.54), (4.55) i (4.85) wynika, że nawet jeśli układ liniowy (4.33) jest asymptotycznie stabilny, macierz Q dana przez (4.85) nie musi spełniać (4.83), (4.84).

Niemniej jednak, stosując dekompozycję (4.85), możemy otrzymać funkcję Lapunowa o postaci (4.32) dla układu liniowego (4.33) przez dodatkową operację skalowania. Załóżmy, że funkcja $V(x)$ dana jest przez

$$V(x) = \| W_D\, x \|, \tag{4.86}$$

gdzie

$$W_D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) \cdot T^{-1}, \tag{4.87}$$

$d_i > 0$, $i = 1, \dots n$. Podstawiając (4.87) zamiast W w (4.82) dostajemy:

$$Q = W_D A W_D^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \frac{d_1}{d_2}p_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & \frac{d_{n-1}}{d_n}p_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}. \tag{4.88}$$

Przez odpowiedni dobór liczb $d_1, d_2, \dots, d_n$ możemy spowodować, że ilorazy $\frac{d_1}{d_2}, \frac{d_2}{d_3}, \dots, \frac{d_{n-1}}{d_n}$ będą dowolnie małe, co zapewni, że warunek (4.83) lub (4.84) będzie spełniony. Możemy też zauważyć, że opisana przez (4.87) operacja skalowania pozwoli skonstruować funkcję Lapunowa (4.32) także wtedy, gdy macierz W transformuje A do postaci trójkątnej.

Łatwo jest opisać geometrycznie warstwice (zbiory argumentów odpowiadające stałym wartościom funkcji) funkcji otrzymanych przez przedstawioną konstrukcję. Oznaczamy zbiór ograniczony warstwicą funkcji Lapunowa $V(x)$ przez $\mathcal{D}$, tzn.:

$$\mathcal{D} = \{x \in R^n : V(x) < C\}. \tag{4.89}$$

Natomiast dla warstwicy, która jest brzegiem zbioru $\mathcal{D}$, stosujemy oznaczenie:

$$\partial\mathcal{D} = \{x \in R^n : V(x) = C\}. \tag{4.90}$$

Przedstawmy macierz W w postaci:

$$W = \begin{bmatrix} w_1^T \\ w_2^T \\ \vdots \\ w_m^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^T + jv_1^T \\ u_2^T + jv_2^T \\ \vdots \\ u_m^T + jv_m^T \end{bmatrix}, \tag{4.91}$$

gdzie w_i^T są wierszami, $w_i \in C^n$ oraz $u_i^T = \mathrm{Re}(w_i^T)$, $v_i^T = \mathrm{Im}(w_i^T)$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Zatem dla rzeczywistego wektora $x \in R^n$ mamy

$$\| Wx \|_\infty = \max_i \sqrt{(u_i^T x)^2 + (v_i^T x)^2} \tag{4.92}$$

oraz

$$\| Wx \|_1 = \sum_i \sqrt{(u_i^T x)^2 + (v_i^T x)^2}. \tag{4.93}$$

W przypadku, gdy $v_j = 0$, mamy:

$$\sqrt{(u_i^T x)^2 + (v_i^T x)^2} = | u_j^T x |. \tag{4.94}$$

Z przedstawionych wzorów wynika, że dla normy $\| \cdot \|_\infty$ zbiór $\mathcal{D}$ jest przecięciem warstw

$$\mathcal{L}_j = \{x \in R^n : | u_j^T x | < C\} \tag{4.95}$$

oraz cylindrów

$$\mathcal{C}_i = \{x \in R^n : \sqrt{(u_i^T x)^2 + (v_i^T x)^2} < C\}, \tag{4.96}$$

tzn.

$$\mathcal{D} = \bigcap_j \mathcal{L}_j \cap \bigcap_i \mathcal{C}_i. \tag{4.97}$$

Z kolei dla normy $\| \cdot \|_1$ zbiór $\mathcal{D}$ możemy zapisać w postaci:

$$\mathcal{D} = \{x : \sqrt{(u_i^T x)^2 + (v_i^T x)^2} = c_i,\ | u_j^T x | = d_j,\ c_i > 0, d_j > 0,\ \sum_i c_i + \sum_j d_j < C\}. \tag{4.98}$$

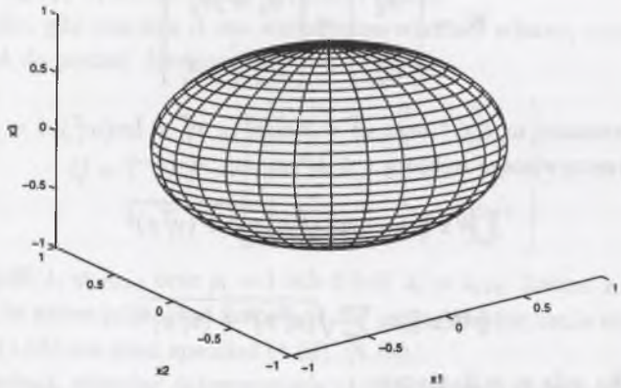
Przykład

Analizujemy układ opisany równaniem trzeciego rzędu

$$\dddot{x} + \ddot{x} + 3\dot{x} + x = 0. \tag{4.99}$$

Równania stanu odpowiadające układowi (4.99) mają postać:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \tag{4.100}$$



Rys. 4.1. *Warstwica kwadratowej funkcji Lapunowa*
Fig. 4.1. *Level set of the quadratic Lyapunov function*

Rozwiązując algebraiczne równanie Lapunowa

$$A^T P + PA = -I, \tag{4.101}$$

gdzie I jest macierzą jednostkową oraz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -1, \end{bmatrix} \tag{4.102}$$

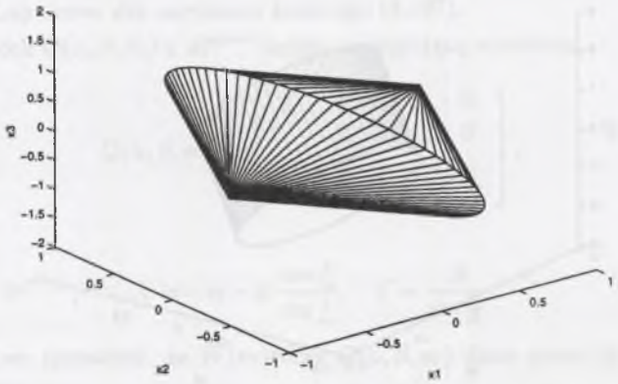
otrzymujemy klasyczną funkcję Lapunowa dla układu (4.100) z macierzą formy kwadratowej daną przez:

$$P = \begin{bmatrix} 2.25 & 1.75 & 0.50 \\ 1.75 & 4.00 & 0.75 \\ 0.50 & 0.75 & 1.25 \end{bmatrix}. \tag{4.103}$$

Warstwicę tej kwadratowej funkcji Lapunowa $\partial\mathcal{D} = \{x \in R^3 : \sqrt{x^T P x} = 1\}$, $x = [x_1\ x_2\ x_3]^T$ (która jest elipsoidą) przedstawia rys. 4.1.

Dla tego samego układu możemy skonstruować także funkcje Lapunowa dane przez normy $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$. Dla ich konstrukcji potrzebna jest transformacja macierzy A do postaci kanonicznej Jordana. Macierz A ma jedną rzeczywistą wartość własną oraz parę wartości własnych zespolonych. Odwrotność macierzy transformacji ma postać:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -1.1114 & -0.2564 & -0.4013 \\ -0.3809 - j0.0003 & 1.0984 - j0.2256 & 0.1211 - j0.6221 \\ -0.3809 + j0.0003 & 1.0984 + j0.2256 & 0.1211 + j0.6221 \end{bmatrix}. \tag{4.104}$$



Rys. 4.2. *Warstwica funkcji Lapunowa zadanej przez normę* $\|\cdot\|_1$
Fig. 4.2. *Level set of the Lyapunov function defined by* $\|\cdot\|_1$ *norm*

Wykorzystując macierz T^{-1} oraz wzory (4.98), (4.97) możemy wykreślić warstwice dla norm $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$.

Warstwica $\partial\mathcal{D} = \{x \in R^3 : \| T^{-1}x \|_1 = 1\}$, $x = [x_1\ x_2\ x_3]^T$, przedstawiona jest na rys. 4.2, natomiast warstwicę $\partial\mathcal{D} = \{x \in R^3 : \| T^{-1}x \|_\infty = 1\}$ przedstawia rys. 4.3.

Warstwice na rys. 4.1, 4.2 i 4.3 wykreślono przybliżając elipsoidę, stożek oraz cylinder wielościanami o dużej liczbie ścian.

Konstrukcja dla rzeczywistej macierzy W

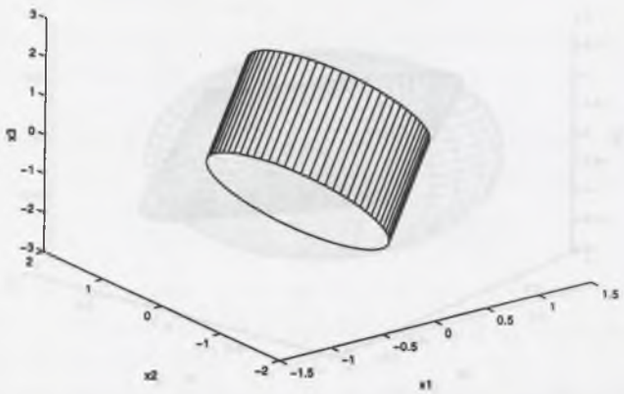
Opisana konstrukcja, w której użyto zespolonej macierzy W, może być wykorzystana do znalezienia funkcji Lapunowa

$$V(x) = \| Wx \|_1 \tag{4.105}$$

lub

$$V(x) = \| Wx \|_\infty \tag{4.106}$$

z rzeczywistą macierzą $W \in R^{m \times n}$. Można to zrobić przez aproksymację zbiorów (4.97), (4.98) hiperwielościanami. Okazuje się, że dokładność aproksymacji (liczba ścian hiperwielościanu), którą trzeba zapewnić, zależy od stosunków części urojonych i rzeczywistych zespolonych wartości własnych macierzy A. Przedstawimy konstrukcję, która wymaga zdefiniowania hiperwielościanu o możliwie małej liczbie ścian.



Rys. 4.3. *Warstwica funkcji Lapunowa zadanej przez normę* $\|\cdot\|_\infty$
Fig. 4.3. *Level set of the Lyapunov function defined by* $\|\cdot\|_\infty$ *norm*

Proponowana metoda bazuje na transformacji macierzy A do postaci blokowo - diagonalnej, w której rzeczywistym wartościom własnym odpowiadają bloki jednowymiarowe, a parom zespolonych sprzężonych wartości własnych - bloki dwuwymiarowe.

Rozważmy najpierw oscylator liniowy zapisany w postaci równań stanu (we współrzędnych Flügge-Lotz [123])

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \tag{4.107}$$

gdzie $\alpha, \beta > 0$.

Zdefiniujmy macierz $W(m) \in R^{m\times 2}$ następująco:

$$W(m) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos\frac{\pi}{m} & \sin\frac{\pi}{m} \\ \cos\frac{2\pi}{m} & \sin\frac{2\pi}{m} \\ \dots & \dots \\ \cos\frac{(m-1)\pi}{m} & \sin\frac{(m-1)\pi}{m} \end{bmatrix}. \tag{4.108}$$

Udowodnimy następujący lemat.

Lemat 5. Jeśli

$$\frac{\alpha}{\beta} > \operatorname{tg}\frac{\pi}{2m}, \tag{4.109}$$

to obie funkcje

$$V(x) = \| W(m)x \|_1 \tag{4.110}$$

oraz

$$V(x) = \| W(m)x \|_\infty \tag{4.111}$$

są funkcjami Lapunowa dla oscylatora liniowego (4.107).

Dowód. Niech $Q(\alpha,\beta,m) \in R^{m\times m}$ będzie następującą macierzą:

$$Q(\alpha,\beta,m) = \begin{bmatrix} X & Y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X & Y & \dots & 0 \\ .. & .. & .. & \dots & .. \\ -Y & 0 & 0 & \dots & X \end{bmatrix}, \tag{4.112}$$

przy czym

$$X = -\alpha - \beta\frac{\cos\frac{\pi}{m}}{\sin\frac{\pi}{m}}, \quad Y = \frac{\beta}{\sin\frac{\pi}{m}}. \tag{4.113}$$

Można łatwo sprawdzić, że $W(m)$ oraz $Q(\alpha,\beta,m)$ dane przez (4.108) i (4.112) spełniają (4.57), tzn.

$$W(m)\begin{bmatrix} -\alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha \end{bmatrix} = Q(\alpha,\beta,m)\, W(m). \tag{4.114}$$

Obliczając normy logarytmiczne $\mu_1(Q(\alpha,\beta,m))$ i $\mu_\infty(Q(\alpha,\beta,m))$ dostajemy:

$$\begin{aligned} \mu_1(Q(\alpha,\beta,m)) &= \mu_\infty(Q(\alpha,\beta,m)) = \\ = X + |Y| &= -\alpha + \beta \operatorname{tg}\frac{\pi}{2m}. \end{aligned} \tag{4.115}$$

Jak widać, warunek $\mu_1(Q(\alpha,\beta,m)) < 0$ lub $\mu_\infty(Q(\alpha,\beta,m)) < 0$ z twierdzenia 4 jest równoważny nierówności (4.109), co dowodzi lematu. □

Warstwice obu funkcji Lapunowa (4.110) i (4.111) z macierzą $W(m)$ daną przez (4.108) są wielokątami foremnymi o $2m$ bokach. Jeśli $\alpha > \beta$, to $m = 2$ spełnia (4.109), co prowadzi do wyniku udowodnionego w pracy [50].

Ponieważ trajektorie systemu (4.107) są spiralami logarytmicznymi, zatem funkcja Lapunowa, której warstwice są okręgami, dowodzi stabilności (4.107). Zgodnie z lematem 5 okręgi można aproksymować wielokątami (foremnymi), przy czym konieczna dokładność aproksymacji zależy od dekrementu tłumienia w układzie, który z kolei zależy od stosunku $\frac{\alpha}{\beta}$. Jeśli $\frac{\alpha}{\beta}$ jest bliskie zeru, to liczba boków wielokąta musi być duża. Widać to we wzorze (4.109). Ponieważ prawa strona nierówności (4.109) dąży do zera, gdy $m \to \infty$, zatem dla dostatecznie dużych m zawsze da się dobrać odpowiednią funkcję Lapunowa postaci (4.110) lub (4.111).

Lemat 5 może być użyty do ogólnej konstrukcji funkcji Lapunowa zadanej normą $\|\cdot\|_\infty$ lub $\|\cdot\|_1$ dla rzeczywistej macierzy W. Oznaczmy najmniejszą liczbę naturalną m, która spełnia (4.109), przez $m(\alpha,\beta)$. Następujące twierdzenie podaje konstrukcję odpowiednich funkcji Lapunowa.

Twierdzenie 7. Załóżmy, że: układ liniowy (4.33) jest asymptotycznie stabilny, macierz systemowa A nie ma wielokrotnych wartości własnych, $T \in R^{n\times n}$ jest rzeczywistą macierzą transformacji, która sprowadza macierz A do postaci blokowo diagonalnej

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} B_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & B_k & & & \\ & & & -\gamma_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & -\gamma_l \end{bmatrix}, \tag{4.116}$$

gdzie $n = 2k + l$, $B_1, ...B_k$ są blokami 2×2 - wymiarowymi, związanymi z parami zespolonych wartości własnych macierzy A,

$$B_i = \begin{bmatrix} -\alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & -\alpha_i \end{bmatrix}, \tag{4.117}$$

$\alpha_i, \beta_i > 0$, natomiast $-\gamma_1, ..., -\gamma_l$ są rzeczywistymi wartościami własnymi macierzy A.

Wtedy istnieje funkcja Lapunowa o postaci zarówno (4.105), jak (4.106), przy czym macierz $W \in R^{m\times n}$ (taka sama dla obu funkcji) dana jest przez:

$$W = UT^{-1}, \tag{4.118}$$

gdzie

$$U = \begin{bmatrix} W[m(\alpha_1,\beta_1)] & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & W[m(\alpha_k,\beta_k)] & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.119}$$

Liczba wierszy macierzy W wynosi:

$$m = m(\alpha_1,\beta_1) + ... + m(\alpha_k,\beta_k) + l. \tag{4.120}$$

Dowód. Niech $Q \in R^{m\times m}$ będzie określona przez:

$$Q = \begin{bmatrix} Q[\alpha_1,\beta_1,m(\alpha_1,\beta_1)] & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & Q[\alpha_k,\beta_k,m(\alpha_k,\beta_k)] & & & \\ & & & -\gamma_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & -\gamma_l \end{bmatrix}, \tag{4.121}$$

gdzie $Q[\alpha_i, \beta_i, m(\alpha_i, \beta_i)]$ jest dane przez (4.112). Stosując lemat 5 sprawdzamy, że warunek (4.57) jest spełniony. Normy logarytmiczne wynoszą:

$$\mu_1(Q) = \max[\mu_1(Q(\alpha_1,\beta_1)), \ldots, \mu_1(Q(\alpha_k,\beta_k)), -\gamma_1, \ldots, -\gamma_l] < 0, \tag{4.122}$$

$$\mu_\infty(Q) = \max[\mu_\infty(Q(\alpha_1,\beta_1)), \ldots, \mu_\infty(Q(\alpha_k,\beta_k)), -\gamma_1, \ldots, -\gamma_l] < 0, \tag{4.123}$$

co dowodzi prawdziwości twierdzenia. □

Twierdzenie 7 pozostaje prawdziwe dla macierzy A, mającej nieliniowe dzielniki elementarne, co można wykazać stosując opisywaną wcześniej operację skalowania.

Przykład

Rozważmy jeszcze raz przykład (4.99), (4.100). Macierz A w (4.100) posiada rzeczywistą wartość własną $\lambda_3 = -0.3611$ oraz parę wartości własnych zespolonych, sprzężonych $\lambda_{12} = -\alpha_1 \pm j\beta_1 = -0.3194 \pm j1.6332$. Iloraz wartości bezwzględnych części rzeczywistej i urojonej λ_{12} wynosi:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{0.3194}{1.6332} = 0.1956 \tag{4.124}$$

i na podstawie nierówności (4.109) dostajemy:

$$m(\alpha_1, \beta_1) = 9. \tag{4.125}$$

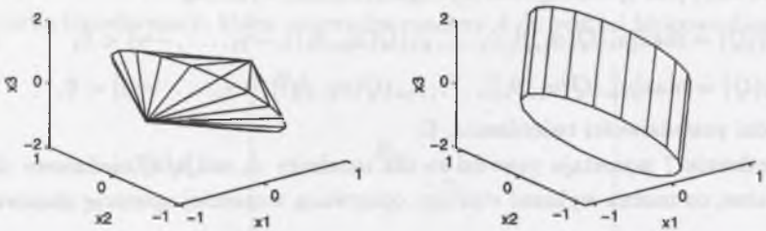
Zatem, na podstawie twierdzenia 7 możemy skonstruować funkcję Lapunowa o postaci (4.105) lub (4.106), w której liczba wierszy macierzy W wynosi $m = 9+1 = 10$. Macierz transformacji, która przekształca macierz A z (4.102) do postaci blokowo diagonalnej (4.116), jest następująca:

$$T = \begin{bmatrix} -0.0491 & -0.2916 & -0.9336 \\ 0.4919 & 0.0130 & 0.3371 \\ -0.1783 & 0.7992 & -0.1217 \end{bmatrix}, \tag{4.126}$$

natomiast macierz W na podstawie (4.118), (4.119) dana jest przez:

$$W = \begin{bmatrix} 0.7617 & 2.1969 & 0.2422 \\ 0.5839 & 1.9729 & 0.9853 \\ 0.1329 & 0.8258 & 1.2674 \\ -0.3803 & -0.7077 & 0.9564 \\ -0.7155 & -1.9101 & 0.1979 \\ -0.7160 & -2.2187 & -0.6532 \\ -0.3814 & -1.4892 & -1.1986 \\ 0.1316 & -0.0629 & -1.1833 \\ 0.5831 & 1.3929 & -0.6142 \\ -1.1114 & -0.2564 & -0.4013 \end{bmatrix}. \tag{4.127}$$

Warstwice funkcji Lapunowa (4.105) oraz (4.106) z macierzą W daną przez (4.127) przedstawione są na rys. 4.4.



Rys. 4.4. *Warstwice funkcji Lapunowa dla rzeczywistej macierzy W o 10 wierszach. Po lewej warstwica funkcji Lapunowa zadanej przez normę $\|\cdot\|_1$, po prawej warstwica funkcji Lapunowa zadanej przez normę $\|\cdot\|_\infty$*

Fig. 4.4. *Level sets of Lyapunov funtions for real matrix W with 10 rows. On the left hand side - level set of the Lyapunov function given by $\|\cdot\|_1$ norm. On the right hand side - level set of the Lyapunov function given by $\|\cdot\|_\infty$ norm*

4.4. Analiza absolutnej stabilności

Przedstawiane do tej pory obliczeniowe wyniki dotyczyły zastosowania funkcji Lapunowa definiowanych przez normy $\|\cdot\|_\infty$ i $\|\cdot\|_1$ do badania stabilności pojedynczego układu liniowego (4.33), co samo w sobie stanowi interesujące zagadnienie. Jednak podstawowym celem wprowadzenia funkcji Lapunowa defniowanych przez normy jest zastosowanie ich do badania absolutnej stabilności układów liniowych o zmiennych w czasie parametrach (0.1), (1.1). W punkcie tym rozwiniemy to zagadnienie.

Skupimy tu uwagę na funkcjach Lapunowa postaci (4.32), w których $\|\cdot\|$ jest normą typu nieskończoność, tzn. $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$. Argumentem za wyborem tej normy jest wynik z punktu 3.4.5 - twierdzenie 6 (Mołczanowa Piatnickiego). Zgodnie z tym twierdzeniem algebraiczne warunki (4.57), (4.58) są dla normy $\|\cdot\|_\infty$ zarówno wystarczające, jak i konieczne.

Warstwice funkcji Lapunowa $V(x) = \| Wx \|_\infty$ są symetrycznymi względem środka układu współrzędnych hiperwielościanami. Jak wiadomo, ([81, str. 184, twierdzenie 20.4]) dowoly zbiór wypukły można aproksymować wypukłym hiperwielościanem [1]. Interpretacja tego faktu w kategoriach funkcji wypukłych prowadzi do wniosku, że każdą wypukłą, jednorodną funkcję można przybliżyć z dowolną dokładnością za pomocą funkcji $V(x) = \| Wx \|_\infty$ (przez odpowiedni dobór macierzy W). Wykorzystując tę własność oraz twierdzenie 3, można dalej wykazać, że układ (0.1), (1.1) jest absolutnie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja Lapunowa postaci $V(x) = \| Wx \|_\infty$, wspólna dla wszystkich układów narożnych (ścisły dowód znajduje się w [116]).

[1] Bardziej precyzyjnie, dla dowolnych dwóch ograniczonych i domkniętych zbiorów wypukłych C i D takich, że $C \subset \mathrm{int}D$, istnieje wielościenny zbiór wypukły P taki, że $P \subset \mathrm{int}D$ oraz $C \subset \mathrm{int}P$.

Aby rozwinąć metodę obliczeniową, pozwalającą efektywnie liczyć funkcje Lapunowa dane przez normy $\|\cdot\|_\infty$, konieczne jest podanie konstruktywnego dowodu twierdzenia 6 (Mołczanowa Piatnickiego). Przez konstruktywny dowód rozumiemy taki, który dla zadanego układu liniowego $\dot{x} = Ax$ i zadanej macierzy $W \in R^{m\times n}$ w jawny sposób wskazuje macierz Q spełniającą (4.57), (4.58). Zarówno dowód przedstawiony w punktach 4.3.4, 4.3.5, jak też oryginalny dowód podany w [116] są niekonstruktywne, tzn. nie podają metody konstrukcji odpowiedniej macierzy Q. Także metody opisane w punkcie 4.3.6 nie rozwiązują tego zagadnienia (dlatego, że w nich macierz W jest zakładana arbitralnie, a macierz Q jest "odgadywana").

Przedstawiony poniżej konstruktywny dowód twierdzenia 6 podano w pracy [71].

4.4.1. Konstruktywny dowód twierdzenia Mołczanowa Piatnickiego

Zaczniemy od sformułowania pewnych oznaczeń. Rozważamy funkcję

$$V(x) = \| Wx \|_\infty \tag{4.128}$$

z zadaną macierzą $W \in R^{m\times n}$, $m \geq n$. Zakładamy, jak poprzednio, że W jest macierzą pełnego rzędu. Wypukły, ograniczony i środkowo-symetryczny zbiór $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D} = \{x \in R^n : \| Wx \|_\infty \leq 1\} \tag{4.129}$$

można równoważnie zapisać jako

$$\mathcal{D} = \{x \in R^n : \begin{bmatrix} W \\ -W \end{bmatrix} x \leq \mathbf{1}(2m)\}, \tag{4.130}$$

gdzie

$$\mathbf{1}(2m) = [1\ 1\ \ldots\ 1]^T \tag{4.131}$$

jest $2m$ - wymiarowym wektorem kolumnowym, którego wszystkie elementy są równe 1. Warstwica $\partial\mathcal{D}$ (brzeg zbioru $\mathcal{D}$) może być przedstawiona jak niżej

$$\partial\mathcal{D} = \{x \in R^n : \| Wx \|_\infty = 1\}. \tag{4.132}$$

Niech w_i^T będzie i - tym wierszem macierzy W, $1 \leq i \leq m$. Ze wzoru (4.132) wynika, że $x \in \partial\mathcal{D}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|w_i^T x| = 1$ dla co najmniej jednego i. Definiujemy teraz zbiór

$$\mathcal{F}_i = \{x \in \partial\mathcal{D} : w_i^T x = 1\}. \tag{4.133}$$

Oczywiście, $\mathcal{F}_i \subseteq \partial\mathcal{D}$. Zamiast (4.133) będziemy też używać innej równoważnej notacji:

$$\mathcal{F}_i = \{x \in R^n : \begin{bmatrix} W \\ -W \end{bmatrix} x \leq \mathbf{1}^-(2m, m+i)\}, \tag{4.134}$$

gdzie

$$\mathbf{1}^-(2m, m+i) = [1\ 1\ ...\ 1 - 1\ 1\ ...\ 1]^T \tag{4.135}$$

oznacza $2m$ - wymiarowy wektor kolumnowy, którego wszystkie elementy są równe 1, z wyjątkiem elementu o numerze $m+i$, który jest równy -1. W (4.134) warunek $w_i^T x = 1$ z (4.133) jest zastąpiony przez dwie nierówności $w_i^T x \leq 1$ i $-w_i^T x \leq -1$.

Jeśli zbiór $\mathcal{F}_i$ jest niepusty, to jest on (być może zdegenerowaną) ścianą hiperwielościanu $\mathcal{D}$.

Pochodna Diniego funkcji $V(x) = \| Wx \|_\infty$

Rozważamy teraz pochodną Diniego funkcji (4.128) wzdłuż trajektorii układu liniowego (4.33). Zgodnie z lematem 1 mamy:

$$D^+V(x)\,|_{\dot{x}=Ax} = \lim_{\Delta \to 0^+} \frac{\| W(I + A\Delta)x \|_\infty - \| Wx \|_\infty}{\Delta}. \tag{4.136}$$

Możemy teraz wykazać następujący lemat.

Lemat 6. Dla każdego i

$$\max_{x \in \mathcal{F}_i} w_i^T Ax \leq \max_{x \in \partial\mathcal{D}} D^+V(x). \tag{4.137}$$

Dopuszcza się, aby $\mathcal{F}_i$ był zbiorem pustym. W takim przypadku zakładamy, że $\max_{x \in \mathcal{F}_i} w_i^T Ax = -\infty$.

Dowód. Oznaczmy przez

$$\mathcal{K} = \{k_1, k_2, ..., k_r\},\ r \leq m \tag{4.138}$$

zbiór indeksów wierszy macierzy W oraz niech σ będzie wektorem

$$\sigma = [\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r]^T \tag{4.139}$$

o elementach $\sigma_k = 1$ lub $\sigma_k = -1$. Jeśli zbiór

$$\mathcal{FK}(\sigma) = \{x \in \partial\mathcal{D} :\ w_i^T x = \sigma_i \text{ dla } i \in \mathcal{K}, \text{oraz } |w_j^T x| < 1 \text{ dla } j \notin \mathcal{K}\} \tag{4.140}$$

jest niepusty, to nazywamy go $\mathcal{K}(\sigma)$-ścianą zbioru $\partial\mathcal{D}$. Zauważmy, że

$$\mathcal{F}_i = \bigcup_{i \in \mathcal{K}, \sigma_i = 1} \mathcal{FK}(\sigma), \tag{4.141}$$

gdzie suma przebiega wszystkie $\mathcal{K}(\sigma)$-ściany takie, że $i \in \mathcal{K}$ i $\sigma_i = 1$.

Stosując wzór (4.136) można bezpośrednio wyliczyć $D^+V(x)$ dla $x \in \mathcal{FK}(\sigma)$. Dla dostatecznie małych Δ mamy:

$$|w_k^T(I + A\Delta)x| > |w_j^T(I + A\Delta)x| \tag{4.142}$$

dla wszystkich $k \in \mathcal{K}$, $j \notin \mathcal{K}$, $x \in \mathcal{FK}(\sigma)$. Zatem z (4.136), (4.142) dostajemy:

$$D^+V(x) = w_{k*}^T Ax \operatorname{sign}(w_{k*}^T x), \tag{4.143}$$

gdzie indeks $k*$ jest wyznaczony przez warunek

$$w_{k*}^T Ax \operatorname{sign}(w_{k*}^T x) = \max_{k \in \mathcal{K}} w_k^T Ax \operatorname{sign}(w_k^T x). \tag{4.144}$$

Z (4.141), (4.143), (4.144) wynika teraz

$$D^+V(x) \geq w_i^T Ax \operatorname{sign}(w_i^T x) = w_i^T Ax \tag{4.145}$$

dla wszystkich $x \in \mathcal{F}_i$. □

W (4.143)-(4.145) sign oznacza funkcję zwracającą znak swojego argumentu. Stosując przedstawiony lemat możemy podać nowy dowód twierdzenia 6.

Konstruktywny dowód twierdzenia 6. Dowód ulega modyfikacji jedynie w części dotyczącej konieczności. Celem jest wykazanie, że z warunku

$$D^+V(x)\,|_{\dot{x}=Ax} < 0 \text{ dla } \| x \| \neq 0 \tag{4.146}$$

wynika istnienie macierzy $Q \in R^{m \times m}$ spełniającej (4.80) i (4.81). Jest jasne, że (4.146) pociąga za sobą $D^+V(x) < 0$ dla wszystkich $x \in \partial\mathcal{D}$. Zatem z lematu 6 wynika, że

$$w_i^T Ax < 0 \text{ dla wszystkich } x \in \mathcal{F}_i \tag{4.147}$$

oraz dla wszystkich $1 \leq i \leq m$. Stosując (4.134) możemy zapisać (4.147) jako:

$$d_{max}^i < 0, \tag{4.148}$$

gdzie d_{max}^i jest dane przez rozwiązanie następującego problemu programowania liniowego

$$d_{max}^i = \max\ w_i^T Ax, \tag{4.149}$$

przy ograniczeniach

$$\begin{bmatrix} W \\ -W \end{bmatrix} x \leq \mathbf{1}^-(2m, m+i). \tag{4.150}$$

Rozważmy zadanie programowania liniowego dualne w stosunku do (4.149)-(4.150). [56, rozdział 4]

$$d_{dual}^i = \min\ \lambda^T\ \mathbf{1}^-(2m, m+i) \tag{4.151}$$

przy ograniczeniach

$$\lambda^T \begin{bmatrix} W \\ -W \end{bmatrix} = w_i^T A, \tag{4.152}$$

$$\lambda \geq 0. \tag{4.153}$$

W zadaniu dualnym $\lambda \in R^{2m}$ jest wektorem mnożników Lagrange'a dla problemu (4.149)-(4.150).

Pomiędzy elementami wektora λ muszą zachodzić następujące relacje:

$$\begin{aligned} \lambda_j > 0 &\Rightarrow \lambda_{m+j} = 0, \\ \lambda_j = 0 &\Leftarrow \lambda_{m+j} > 0, \end{aligned} \tag{4.154}$$

obowiązujące dla $1 \leq j \leq m$, $j \neq i$. Wynikają one z faktu, że nierówności o numerach j oraz $m+j$, $j \neq i$ w (4.150) nie mogą jednocześnie stać się równościami.

Jeśli problem (4.149)-(4.150) posiada ograniczone rozwiązanie (tzn. zbiór $\mathcal{F}_i$ jest niepusty), to (4.149)-(4.150) i (4.151)-(4.153) są sobie równoważne i $d^i_{max} = d^i_{dual}$. Jeśli zbiór $\mathcal{F}_i$ jest pusty, to rozwiązanie problemu (4.151)-(4.153) jest nieograniczone od dołu [56]. W obu wypadkach istnieje wektor $\lambda \in R^{2m}$ taki, że

$$d^i_{dual} < 0. \tag{4.155}$$

Zdefiniujmy wektor wierszowy $q_i^T \in R^m$ o elementach:

$$q_{ij} = \lambda_j - \lambda_{m+j}, \; 1 \leq j \leq m. \tag{4.156}$$

Zauważmy, że z (4.154) i (4.156) wynika:

$$\lambda_j + \lambda_{m+j} = |q_{ij}| \tag{4.157}$$

dla $1 \leq j \leq m$, $j \neq i$. Podstawiając (4.156) w (4.152) dostajemy:

$$q_i^T W = w_i^T A. \tag{4.158}$$

Uwzględniając (4.156), (4.157) w (4.151) dostajemy teraz

$$d^i_{dual} = q_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} |\, q_{ij} \,|. \tag{4.159}$$

Niech q_i^T będzie i-tym wierszem macierzy Q. Wtedy równanie (4.158) jest i-tym wierszem macierzowego równania (4.80), a z (4.159), (4.155) wynika (4.81). □

Dowód przeprowadzono w taki sposób, że podany został algorytm wyznaczania macierzy Q dla zadanych A (macierzy stanu układu liniowego) oraz W (macierzy zawierającej listę ścian warstwicy funkcji (4.128)). Macierz Q otrzymaną w wyniku opisanej konstrukcji (opisanego algorytmu) będziemy dalej oznaczać przez $Q(W, A)$ podkreślając zależność od A i W. Macierz $Q(W, A)$ zawsze spełnia warunek (4.80). Jeśli funkcja (4.128) jest funkcją Lapunowa układu liniowego (4.33), to spełniony jest warunek (4.81), tzn. $\mu_\infty Q(W, A) < 0$. Jeśli warunek (4.81) nie jest spełniony, to funkcja (4.128) nie jest funkcją Lapunowa układu liniowego (4.33). Widać zatem, że stworzony w tym dowodzie algorytm pozwala w efektywny sposób stwierdzić, czy funkcja (4.128) jest funkcją Lapunowa układu (4.33).

4.4.2. Skalowanie

Załóżmy, że macierz W dana jest przez $W = W_D$, gdzie

$$W_D = D^{-1}U \tag{4.160}$$

oraz

$$D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, ..., d_m) \tag{4.161}$$

jest macierzą diagonalną ze ściśle dodatnimi elementami $d_i > 0$, które nazywać będziemy skalami. Dalej macierz $U \in R^{m \times n}$ będzie ustalona, natomiast zmieniane będą skale $d_1, d_2, ..., d_m$ tak, aby nadać funkcji $V(x)$ pożądany kształt.

Wyliczmy teraz, zgodnie z algorytmem opisanym powyżej, macierz $Q(U, A)$. Załóżmy, że obliczona macierz $Q(U, A)$ nie spełnia warunku (4.81). Czy możliwe jest, przez odpowiedni dobór skal, otrzymanie nowej macierzy Q_D, dla której warunek (4.81) byłby spełniony?

Zdefiniujmy

$$Q_D = D^{-1}Q(U, A)D. \tag{4.162}$$

Łatwo sprawdzić, że para $W = W_D$, $Q = Q_D$ spełnia (4.80), co zapiszemy w postaci twierdzenia.

Twierdzenie 8. Warunkiem wystarczającym na to, żeby $V(x) = \| D^{-1}Ux \|_\infty$ była funkcją Lapunowa układu (4.33), jest, aby macierz Q_D spełniała warunek (4.81).

Twierdzenie 8 daje tylko warunek wystarczający dlatego, że macierz Q_D otrzymana przez skalowanie (4.162) nie musi być równa $Q(D^{-1}U, A)$. Efektywną metodę sprawdzenia, czy macierz Q_D spełnia (4.81), daje następujący lemat:

Lemat 7. [5], [59]. Warunek

$$\mu_\infty(D^{-1}QD) < 0 \tag{4.163}$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|Q(U, A)|\, d < 0, \tag{4.164}$$

gdzie d jest wektorem kolumnowym o elementach $d_1, d_2, ..., d_m$, a $|Q|$ oznacza macierz otrzymaną z macierzy Q przez zastąpienie jej elementów pozadiagonalnych q_{ij}, $i \neq j$, przez $|q_{ij}|$ oraz pozostawienie elementów na głównej przekątnej bez zmian.

Warunek (4.164) jest równoważny żądaniu, aby $-|Q(U, A)|$ była M-macierzą [5].

4.4.3. Warunek wystarczający absolutnej stabilności

Warunek (4.164) możemy teraz łatwo rozszerzyć tak, aby można go było zastosować do problemu badania absolutnej stabilności. Rozpatrzmy układ (0.1), (1.1). Z

dowodu twierdzenia 6 przedstawionego w punkcie 4.4.1 oraz lematu 7 wynika następujące twierdzenie, dające warunek wystarczający absolutnej stabilności układu (0.1), (1.1):

Twierdzenie 9. $V(x) = \| D^{-1}Ux \|_\infty$ jest jednoczesną funkcją Lapunowa układów narożnych $\dot{x} = A_1x$, $\dot{x} = A_2x$, ..., $\dot{x} = A_Nx$ systemu ze zmiennymi w czasie parametrami (0.1), (1.1), jeśli istnieje wektor skal $d = [d_1, \dots d_m]^T$ taki, że

$$|Q(U, A_i)|\, d < 0 \text{ dla wszystkich } 1 \le i \le N. \tag{4.165}$$

W przedstawionym wzorze $Q(U, A_i)$ oznacza macierz otrzymaną przez zastosowanie algorytmu opisanego w punkcie 4.4.1 (w drugiej wersji dowodu twierdzenia 6) do układu narożnego z macierzą $A = A_i$. Warunek (4.165) można efektywnie sprawdzić stosując metody programowania liniowego.

4.4.4. Przykład obliczeniowy

Rozważamy po raz trzeci przykład wahadła o ruchomym punkcie zawieszenia, analizowany uprzednio w punktach 2.2.1 i 3.5.1. Zapisujemy równania stanu (3.46) opisujące wahadło, tzn.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 - a(t) & -2\zeta\omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \tag{4.166}$$

przy czym zakładamy te same parametry ζ i ω_0 co w punktach 2.2.1, 3.5.1.

$$2\zeta\omega_0 = 0.4, \quad \omega_0^2 = 0.5. \tag{4.167}$$

Natomiast teraz przyjmiemy, że parametr $a(t)$ może się zmieniać w szerszym niż w punkcie 3.5.1 zakresie

$$a_{min} = 0, a_{max} = 1.1. \tag{4.168}$$

Przyjętej sytuacji odpowiadają następujące macierze układów narożnych:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -0.4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.6 & -0.4 \end{bmatrix}. \tag{4.169}$$

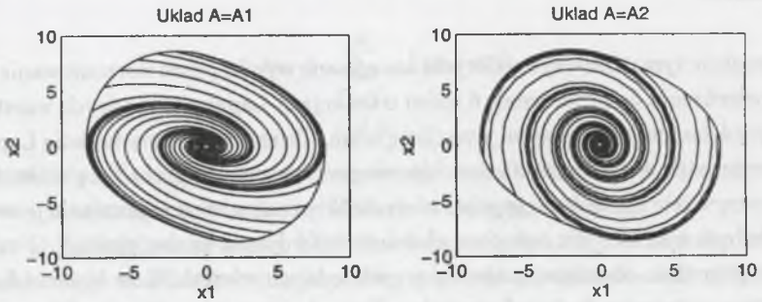
Zakładamy, że liczba wierszy macierzy W w (4.128) wynosi $m = 80$. Macierz W dana wzorem (4.160) z $U = U(80)$

$$U(80) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos\frac{\pi}{m} & \sin\frac{\pi}{m} \\ \cos\frac{2\pi}{m} & \sin\frac{2\pi}{m} \\ \dots & \dots \\ \cos\frac{(m-1)\pi}{m} & \sin\frac{(m-1)\pi}{m} \end{bmatrix}, \quad m = 80, \tag{4.170}$$

odpowiada przybliżeniu okręgu jednostkowego wielokątem foremnym o 160 bokach. Wyliczamy teraz macierze $Q_1 = Q[U(80), A_1]$ oraz $Q_2 = Q[U(80), A_2]$. Elementy tych macierzy nie są podane z uwagi na to, że zajmowałyby zbyt dużo miejsca. Wymiary macierzy Q_1 i Q_2 wynoszą 80×80 (zob. też punkt o zagadnieniach obliczeniowych). Stosujemy następnie metodę skalowania ścian (boków), która prowadzi do problemu rozwiązania układu nierówności:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} d < 0, \quad d > 0. \tag{4.171}$$

Wymiar poszukiwanego wektora d wynosi 80. Otrzymany układ nierówności został rozwiązany z zastosowaniem standardowej procedury `lp.m` rozwiązującej problem programowania liniowego metodą simpleksów, wchodzącej w skład pakietu MATLAB OPTIMIZATION TOOLBOX.



Rys. 4.5. *Warstwica funkcji Lapunowa dla modelu wahadła o ruchomym punkcie zawieszenia. Na wykresach przedstawiono także przebiegi trajektorii fazowych dla obu układów narożnych definiowanych przez macierze A_1 (lewy wykres) i A_2 (prawy wykres). Punkty początkowe trajektorii wybrano na warstwicy funkcji Lapunowa*

Fig. 4.5. *Level set of the Lyapunov function for pendulum with mobile swing point. In the plots phase trajectories for vertex systems are also presented. The plot on the left hand side corresponds to the vertex system A_1; the plot on the right hand side corresponds to the vertex system A_2. State trajectories start from points belonging to the level set*

Obliczenia numeryczne wykazują, że dla przyjętych danych układ (4.171) jest niesprzeczny; istnieje wektor skal $d > 0$ spełniający wszystkie nierówności. Wykorzystując otrzymany wektor skal wyznaczono macierz W i wyliczono funkcję $V(x)$ w (4.128). Warstwicę wyznaczonej funkcji Lapunowa przedstawiono na rysunku 4.5. Na wykresach z rys. 4.5 przedstawiono też trajektorie fazowe dla obu układów narożnych A_1 (lewy wykres) i A_2 (prawy wykres). Punkty początkowe trajektorii leżą na warstwicy wyliczonej funkcji Lapunowa. Jak widać, zbiór ograniczony przez warstwicę jest istotnie zbiorem dodatnio niezmienniczym dla obu układów narożnych.

Porównując graniczne wartości dopuszczalnych zmian parametru $a(t)$ widzimy, że zastosowanie wielokątnej funkcji Lapunowa dla $m = 80$ pozwala, dla $a_{min} = 0$, po-

prawić uzyskane metodą kwadratowych funkcji Lapunowa oszacowanie a_{max} z 0.7 do 1.1. Z obliczeń przeprowadzonych w punkcie 2.2.1 wiadomo, że dla $a_{max} = 1.4$ istnieje już strategia destabilizująca. Margines niepewności pomiędzy wartościami $a_{max} = 1.1$ oraz $a_{max} = 1.4$ można dalej zawężać zwiększając liczbę wierszy macierzy U. Jednak przy wykorzystaniu założonych algorytmów obliczeniowych i oprogramowania MATLAB OPTIMIZATION TOOLBOX napotyka się przy powiększaniu liczby m na coraz większe trudności obliczeniowe. Metodą poprawienia możliwości obliczeniowych jest dokonanie pewnych usprawnień w opisanym algorytmie; zostaną one dalej przedstawione w punkcie 4.6.

4.5. Wielościan definiowany przez listę wierzchołków

W punkcie tym rozszerzymy dotychczas opisane wyniki przez sformułowanie drugiej wersji twierdzenia 6. Twierdzenie 6 mówi o funkcjach Lapunowa, których warstwice są hiperwielościanami zadawanymi przez listę ścian. Teraz rozważymy funkcję Lapunowa, której warstwica jest określona przez hiperwielościan zadany przez listę wierzchołków. Można oczywiście reprezentację przez wierzchołki przeliczyć na reprezentację w postaci ścian. Jednak możliwe jest też sformułowanie twierdzenia analogicznego do twierdzenia 6 bezpośrednio obowiązującego dla współrzędnych wierzchołków hiperwielościanu, opisującego warstwicę funkcji Lapunowa. Twierdzenie takie zostanie dalej przedstawione. Możliwość wyboru pomiędzy reprezentacjami w postaci ścian lub wierzchołków jest wygodna w praktycznych obliczeniach.

Funkcja Lapunowa definiowana przez zbiór

Oznaczmy przez Π symetryczny względem środka układu współrzędnych hiperwielościan, $\Pi \subset R^n$, zdefiniowany jako domknięta powłoka wypukła zbioru $2M$ punktów $\{x_1, x_2, ..., x_M, -x_1, -x_2, ..., -x_M\}$, $x_i \in R^n$,

$$\Pi = \mathrm{co}\{x_1, x_2, ..., x_M, -x_1, -x_2, ..., -x_M\}, \tag{4.172}$$

("co" oznacza domkniętą powłokę wypukłą zbioru punktów). Przy użyciu zbioru Π definiujemy funkcję $V(x)$

$$V(x) = \inf\{v > 0 : x \in v\Pi\}. \tag{4.173}$$

Zakładamy, że $M \geq n$, oraz że macierz X zbudowana z kolumn $x_1\ x_2\ ...\ x_M$

$$X = [x_1\ x_2\ ...\ x_M], \tag{4.174}$$

jest macierzą pełnego rzędu. Przy tych założeniach hiperwielościan Π ma niepuste wnętrze. Z kolei funkcja $V(x)$ jest ciągła i wypukła. Zbiór Π jest zbiorem ograniczonym przez warstwicę $\{x : V(x) = 1\}$ funkcji $V(x)$. Funkcję $V(x)$ nazywa się funkcją (funkcjonałem) Minkowskiego zbioru Π.

Funkcję $V(x)$ określoną przez (4.173) zastosujemy teraz jako funkcję Lapunowa dla układu liniowego (4.33). Warunki wystarczające i konieczne na to, aby (4.173) była funkcją Lapunowa układu liniowego (4.33) (tzn. aby jej pochodna $D^+V(x)$ wzdłuż rozwiązań układu (4.33) była funkcją istotnie ujemnie określoną), podaje następujące twierdzenie:

Twierdzenie 10. $V(x)$ dana przez (4.173) jest funkcją Lapunowa układu liniowego (4.33) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz $P \in R^{M \times M}$, spełniająca:

$$AX = XP \tag{4.175}$$

oraz

$$p_{kk} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{M} |\, p_{ik} \,| < 0 \tag{4.176}$$

dla wszystkich $1 \leq k \leq M$, gdzie p_{ik} są elementami P. Macierze o własności (4.176) nazywamy macierzami o kolumnowo ściśle dominującej przekątnej.

Dowód. Funkcja wielościenna $V(x)$ indukowana przez Π jest funkcją Lapunowa układu liniowego (4.33) wtedy i tylko wtedy, gdy każda trajektoria $x(t)$ układu (4.33) startująca (dla $t = 0$) z brzegu zbioru Π, należy do wnętrza tego zbioru dla $t > 0$ lub równoważnie, własność ta zachodzi dla wszystkich wierzchołków x_k, $k = 1, \ldots M$ zbioru Π [66]. Własność tę można sprawdzić wyliczając iloczyny skalarne wektorów normalnych hiperpłaszczyzn podpierających Π w punkcie x_k oraz wektorów kierunkowych trajektorii układu (4.33), wychodzących z wierzchołka x_k. Wszystkie takie iloczyny skalarne muszą być ujemne. Wektor kierunkowy trajektorii startującej w x_k dany jest przez Ax_k, natomiast każda hiperpłaszczyzna w, podpierająca Π w punkcie x_k, spełnia

$$w^T[X\ \ -X] \ \leq\ \mathbf{1}^T \tag{4.177}$$

$$w^T x_k \ =\ 1, \tag{4.178}$$

gdzie $\mathbf{1}^T$ jest $2M$-wymiarowym wektorem wierszowym o wszystkich elementach równych 1. Zwróćmy uwagę, że nie każdy z punktów $x_1, \ldots x_M$ musi być wierzchołkiem zbioru Π. W przypadku, gdy x_k nie jest wierzchołkiem, zbiór wektorów spełniających (4.177), (4.178) może być pusty.

Warunek, aby iloczyn skalarny był ujemny, można zapisać jako:

$$\max_w\ w^T A x_k < 0, \tag{4.179}$$

gdzie maksimum brane jest po zbiorze (4.177), (4.178). Jeśli zbiór (4.177), (4.178) jest pusty, to przyjmujemy $\max_w = -\infty$. Maksymalizacja w (4.179) z ograniczeniami (4.177), (4.178) jest problemem programowania liniowego. Porównując wzory (4.179), (4.177), (4.178) oraz (4.149), (4.150) widzimy, że dalej można postępować tak samo jak w dowodzie przedstawionym w punkcie 4.4.1, tzn. macierz P, która będzie spełniać warunki (4.175), (4.176), budujemy wykorzystując elementy wektora mnożników Lagrange'a λ, występującego w następującym problemie dualnym do problemu (4.179), (4.177), (4.178):

$$\min \sum_{i=1}^{N} \lambda_i + \rho_i \lambda_{N+i}, \tag{4.180}$$

gdzie $\rho_i = 1$, $i = 1, 2..., N$, $i \neq k$, $\rho_k = -1$,

$$[X \ -X]\,\lambda = Ax_k \tag{4.181}$$

$$\lambda \geq 0. \tag{4.182}$$

□

Otrzymane warunki są analogiczne do zadawanych przez twierdzenie 6. Porównując (4.80), (4.81) oraz (4.175), (4.176) widzimy, że $V(x)$ zadana wzorem (4.32) jest funkcją Lapunowa układu liniowego $\dot{x} = Ax$ wtedy i tylko wtedy, gdy $V(x)$ zadana wzorem (4.173), gdzie $X = W^T$, jest funkcją Lapunowa układu liniowego $\dot{x} = A^T x$.

W dalszym ciągu będziemy stosować oznaczenie analogiczne do wprowadzonego w punkcie 4.4.1, tzn. macierz P otrzymaną przez zastosowanie algorytmu opisanego w dowodzie twierdzenia 10 oznaczać będziemy przez $P(X, A)$.

Skalowanie

Wykazane twierdzenie 10 pozwala zbadać, czy indukowana przez zbiór Π funkcja $V(x)$ (4.173) jest funkcją Lapunowa układu liniowego (4.33). Dalej, analogiczne do punktu 4.4.2., aby dopasowywać kształt warstwicy funkcji $V(x)$ do postawionych wymagań, można posłużyć się ideą skalowania. Definiując $X^D = XD^{-1}$ dostajemy nowy zbiór Π, który powstaje z pierwotnego przez zmianę długości wektorów $x_1, ..., x_M$ bez modyfikowania ich cosinusów kierunkowych. Zastosowanie tej metody pozwala na wyliczenie funkcji Lapunowa postaci (4.173) wspólnej dla wszystkich układów narożnych A_1, A_2, ..., A_N systemu o zmiennych parametrach (0.1).

4.6. Zagadnienia obliczeniowe

Jak widać, wykorzystanie reprezentacji w postaci zarówno wierzchołków, jak i ścian prowadzi do tego samego problemu obliczeniowego. Obejmuje on wyliczenie macierzy $Q(W, A_1)$, ..., $Q(W, A_N)$, (lub $P(X, A_1)$, ..., $P(X, A_N)$), a następnie rozwiązanie

odpowiedniego układu nierówności liniowych (4.165) (lub analogicznego układu dla macierzy $P(X, A_1)$, ..., $P(X, A_N)$).

Warstwica poszukiwanej funkcji Lapunowa ma przybliżać kształt pewnej wypukłej powierzchni (warstwicy funkcji V(x) określonej w twierdzeniu 3). Aby uzyskać dobre przybliżenie musimy zapewnić dostatecznie dużą liczbę ścian m w (4.132) lub wierzchołków M w (4.172). Łatwo też zauważyć, że złożoność problemu aproksymacji wielościennej rośnie wykładniczo wraz ze wzrostem rzędu wektora stanu x. Wymiarowość koniecznego do rozwiązania układu nierówności liniowych wynosi $N * m^2$ (lub $N * M^2$) i może być bardzo duża.

Podstawowa idea, która w znacznym stopniu usprawnia procedurę obliczania wspólnej wielościennej funkcji Lapunowa wynika z obserwacji, że macierz $Q(W, A)$ lub $P(X, A)$ jest macierzą rzadką (to znaczy taką, której większość elementów to zera). Dzięki tej obserwacji możliwe jest zorganizowanie obliczeń w taki sposób, że liczone i zapamiętywane w komputerze są jedynie niezerowe elementy macierzy $Q(W, A)$ lub $P(X, A)$. Także problem rozwiązania układu nierówności liniowych (4.165) znacznie się upraszcza dzięki temu, że macierze w nim występujące są rzadkie.

W tym punkcie uzasadnimy fakt, że macierz $Q(W, A)$, $P(X, A)$ jest rzadka oraz opiszemy dokładniej algorytm obliczeniowy do poszukiwania wspólnej wielościennej funkcji Lapunowa. Algorytm sformułowany jest dla wersji, gdy funkcja $V(x)$ jest zadawana przez listę wierzchołków zbioru Π definiującego warstwicę. Analogiczny algorytm można skonstruować dla funkcji zadawanej przez listę ścian. Dzięki efektywności obliczeniowej algorytmu możliwe jest zastosowanie go do wyliczenia funkcji Lapunowa w trzech wymiarach (zob. [72]).

Załóżmy, że układ (0.1), (1.1) jest absolutnie stabilny. Poniżej podamy dokładny opis algorytmu, który pozwala wyliczyć wspólną wielościenną funkcję Lapunowa dla tego układu. Jego struktura wynika z rozważań przeprowadzonych w poprzednich punktach. Algorytm składa się z trzech kroków.

Krok 1

Zakładamy możliwie dużą liczbę M wierzchołków hiperwielościanu i budujemy macierz X, której kolumny określają wierzchołki hiperwielościanu Π. Zakładamy, że wszystkie wektory definiujące wierzchołki mają jednostkowe długości, a ich cosinusy kierunkowe wybieramy tak, aby ich końce były (w przybliżeniu) równomiernie rozłożone na n - wymiarowej sferze jednostkowej.

Krok 2

Na podstawie macierzy X zawierającej listę wierzchołków hiperwielościanu Π wyznaczamy, korzystając z algorytmu opisanego w twierdzeniu 10, macierze $P(X, A_1)$,

$P(X, A_2)$, ... , $P(X, A_N)$. Przy tym obliczenia wynikające z tego algorytmu są zorganizowane w taki sposób, aby wykorzystać fakt, że macierze $P(X, A_1)$, $P(X, A_2)$, ... , $P(X, A_N)$ są macierzami rzadkimi.

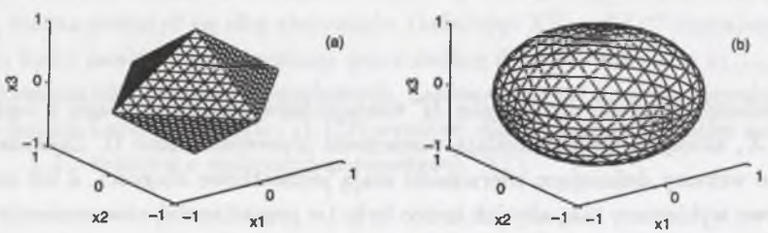
Krok 3

Ponieważ funkcja, której warstwica jest (w przybliżeniu) sferą jednostkową, na ogół nie jest poszukiwaną wspólną funkcją Lapunowa, modyfikujemy kształt warstwicy przez skalowanie (tzn. zmianę długości wektorów opisujących położenie wierzchołków). Diagonalna macierz skal oznaczana jest przez D, zmodyfikowany przez skalowanie wielościan oznacza się przez Π_D, a funkcję idukowaną przez zbiór Π_D oznacza się przez $V_D(x)$. Skale (elementy na przekątnej macierzy D) wylicza się rozwiązując problem programowania liniowego.

Dalej, każdy z kroków jest dokładniej rozwinięty.

4.6.1. Krok 1

Zdefiniowanie wielościanu Π takiego, że jego wierzchołki są rozmieszczone w równomierny sposób na sferze, jest problemem z zakresu geometrii obliczeniowej [31]. Dla dwuwymiarowego przypadku rozwiązanie jest bardzo proste (przykład 4.4.4.). Dla trzech wymiarów problem ten jest już mniej trywialny. W rozważanych zadaniach obliczeniowych stosowana była następująca konstrukcja. Definiujemy ośmiościan w R^3 o wierzchołkach [1 0 0], [-1 0 0], [0 1 0], [0 -1 0], [0 0 1], [0 0 -1]. Następnie tniemy jego ściany na warstwy płaszczyznami równoległymi do $(x_1\ x_2)$. Każdą z warstw dzielimy na małe trójkąty tak, jak jest to pokazane na rys. 4.6 (a). Na rysunku założono, że liczba warstw $L = 10$.



Rys. 4.6. *Metoda konstrukcji wielościanu Π dla trzech wymiarów*
Fig. 4.6. *Method of construction of the polyhedron Π in three dimensions*

Z kolei dokonujemy rzutowania środkowego wierzchołków małych trójkątów na sferę jednostkową. Otrzymujemy w ten sposób wielościan Π. Ścianami wielościanu Π są

małe trójkąty o wierzchołkach leżących na sferze. W celu podkreślenia zależności od założonej liczby wartw L używać będziemy w razie potrzeby oznaczenia Π_L. Wielościan Π_{10} przedstawiony jest na rys. 4.6 (b). Liczba wierzchołków wielościanu Π_L wynosi $2M = 2(1 + 2L^2)$; liczba jego ścian wynosi $2m = 2 \cdot 4L^2$. Mimo że, jak widać na rys. 4.6 (b), istnieją pewne nierównomierności w rozmieszczeniu wierzchołków, konstrukcja ta dawała zadowalające wyniki w obliczeniach. Przybliżenie sfery jednostkowej przez siatkę typu globus (przecięć południków i równoleżników) daje gorsze wyniki, ponieważ w pobliżu biegunów występują osobliwości.

Konstrukcja wielościanu Π określa relacje sąsiedztwa pomiędzy jego wierzchołkami. Wierzchołki sąsiadują ze sobą, jeśli należą do tej samej ściany. Relacje sąsiedztwa opisane są przez funkcję $\chi(k)$, która każdemu indeksowi k, $1 \le k \le N$ przypisuje listę indeksów $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = \chi(k), \tag{4.183}$$

przy czym $\mathcal{L}$ ma postać:

$$\mathcal{L} = \{k_l \mathrm{sign}_l : l = 1, 2, ..., L(k)\}. \tag{4.184}$$

$L(k)$ jest liczbą wierzchołków sąsiadujących z x_k, k_1, k_2,..., $k_{L(k)}$ są indeksami wierzchołków sąsiadujących z x_k, natomiast funkcja znaku sign_l przyjmuje wartość 1 (jeśli z x_k sąsiaduje x_{k_l}) lub -1 (jeśli z x_k sąsiaduje $-x_{k_l}$).

4.6.2. Krok 2

Wyliczanie macierzy $P(X, A_1), P(X, A_2), ..., P(X, A_N)$ przez bezpośrednie rozwiązywanie problemu dualnego do problemu programowania liniowego (4.179), (4.177), (4.178) jest numerycznie nieefektywne. Wymaga rozwiązania problemu programowania liniowego, który zawiera $2M$ zmiennych dla określenia każdej z kolumn macierzy $P(X, A_k)$.

Znacznie efektywniejsza jest metoda wykorzystująca relacje sąsiedztwa pomiędzy wierzchołkami opisane przez funkcję $\chi(k)$, daną przez (4.183), (4.184).

Oznaczamy przez

$$X_L(k) = [x_k\ \ \mathrm{sign}_1 x_{k_1}\ ...\ \mathrm{sign}_{L(k)} x_{k_{L(k)}}] \tag{4.185}$$

$n \times [L(k)+1]$ - wymiarową macierz zbudowaną z kolumny x_k macierzy X oraz kolumn odpowiadających wierzchołkom sąsiadującym z x_k. Indeksy $k_1, k_2, ..., k_{L(k)}$ oraz znaki sign_1, sign_2, ..., $\mathrm{sign}_{L(k)}$ są określone przez funkcję $\chi(k)$.

Następnie rozwiązujemy problem programowania liniowego

$$\max_w\ w^T A_i x_k \tag{4.186}$$

z ograniczeniami

$$w^T X_L(k) \leq \mathbf{1}^T, \tag{4.187}$$

$$w^T x_k = 1, \tag{4.188}$$

gdzie $\mathbf{1}^T$ jest $L(k)+1$ - wymiarowym wektorem, którego wszystkie elementy są równe 1. Oznaczmy wektor kolumnowy mnożników Lagrange'a związany z problemem (4.186), (4.187), (4.188) przez $\lambda(k)$. Na podstawie relacji dualności w problemach programowania liniowego $\lambda(k)$ spełnia

$$X_L(k)\lambda(k) = A_i x_k. \tag{4.189}$$

Wykorzystując elementy wektora $\lambda(k)$ budujemy k-tą kolumnę macierzy $P(X, A_i)$ następująco: $p^0_{kk} = \lambda_1(k)$ oraz $p^0_{k_l k} = \mathrm{sign}_l \lambda_{l+1}(k)$, $l = 1, 2, ..., L(k)$. Przy tym indeksy $k_1, k_2, ..., k_{L(k)}$ oraz znaki sign_1, sign_2, ..., $\mathrm{sign}_{L(k)}$ są określone przez funkcję $\chi(k)$. Elementom p^0_{jk} o indeksach j takich, że x_j nie należy do sąsiedztwa wierzchołka x_k, przypisujemy zera.

Liczba niezerowych elementów w wektorze $\lambda(k)$ wynosi n (lub $\leq n$, jeśli uwzględnić możliwość degeneracji [56]). Widać stąd, że $P(X, A_i)$ jest macierzą rzadką o liczbie elementów niezerowych, nie przekraczającej nM. Algorytm wykorzystujący (4.186), (4.187), (4.188) jest skonstruowany w taki sposób, że tylko niezerowe elementy macierzy $P(X, A_i)$ są obliczane i zapisywane do pamięci mikrokomputera.

4.6.3. Krok 3

Skalowanie polega na zmianie długości wektorów $x_1, x_2, ..., x_N$, tzn. na zastąpieniu X przez

$$X^D = XD^{-1}, \tag{4.190}$$

gdzie D jest macierzą diagonalną zbudowaną ze skal d_i

$$D = \mathrm{diag}\{d_1, ..., d_N\}, \; d_i > 0. \tag{4.191}$$

Oznaczamy wielościan zbudowany z wierzchołków X^D przez Π_D oraz funkcję Lapunowa indukowaną przez Π_D jako $V_D(x)$.

Podstawiając X^D zamiast X w (4.175) widzimy, że $V_D(x)$ jest wspólną funkcją Lapunowa dla wszystkich układów narożnych $\dot{x} = A_1 x$, ..., $\dot{x} = A_N x$, jeśli macierze

$$P(X, A_k)^D = DP(X, A_k)D^{-1}, \; k = 1, 2, ..., N \tag{4.192}$$

mają własność ścisłej dominacji kolumnowej, tzn. spełniają (4.176). Równoważnie (na podstawie lematu 7) warunek (4.176) można zapisać jako:

$$|P(X, A_i)|^T d < 0, \tag{4.193}$$

gdzie d jest wektorem zbudowanym ze skal, $d = [d_1 \; d_2 \; ... \; d_M]^T$ oraz $|P(X, A_i)|$ oznacza macierz otrzymaną z $P(X, A_i)$ przez zastąpienie jej elementów poza przekątną p_{kl}, $k \neq l$ przez ich moduły $|p_{kl}|$ oraz pozostawienie elementów na przekątnej p_{kk} bez zmian; analogicznie do wzoru (4.164).

Z (4.193) wynika, że przez skalowanie można zapewnić, że $P(X, A_i)^D$ spełniają (4.176) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wektor skal $d > 0$, który spełnia układ nierówności liniowych

$$\begin{bmatrix} |P(X, A_1)|^T \\ |P(X, A_2)|^T \\ \vdots \\ |P(X, A_K)|^T \end{bmatrix} d < 0. \tag{4.194}$$

Układ (4.194) można rozwiązywć z zastosowaniem algorytmu programowania liniowego

$$\min z \tag{4.195}$$

z ograniczeniami

$$\begin{bmatrix} |P(X, A_1)|^T \\ |P(X, A_2)|^T \\ \vdots \\ |P(X, A_K)|^T \end{bmatrix} d - \mathbf{1}z \leq 0 \tag{4.196}$$

$$d \geq 0, \tag{4.197}$$

$$z \geq -100. \tag{4.198}$$

Dodano tutaj nową zmienną skalarną z. Przez $\mathbf{1}$ oznaczono wektor kolumnowy o odpowiednich wymiarach, którego wszystkie elementy są równe 1. Na wartość z trzeba narzucić ograniczenie, ponieważ w przeciwnym przypadku rozwiązanie może być nieograniczone z dołu. (wartość -100 przyjęto arbitralnie). Jeśli układ nierówności liniowych (4.194) posiada rozwiązanie $d > 0$, to rozwiązaniem (4.195) - (4.198) jest $z_{opt} = -100$. Z faktu, że macierze $|P(X, A_k)|$ mają nieujemne elementy poza przekątną główną, wynika, że $z_{opt} = -100$ pociąga za sobą $d_{opt} > 0$. Jeśli (4.194) nie posiada rozwiązania $d > 0$, wtedy $z_{opt} = 0$ oraz $d_{opt} = 0$.

W przedstawianych dalej przykładach numerycznych problem programowania liniowego (4.195)-(4.198) rozwiązywano używając programu PCx [24] wykorzystującego metodę punktu wewnętrznego, dobrze nadającego się do dużych problemów z rzadkimi macierzami ograniczeń.

4.7. Przykłady obliczeniowe

4.7.1. Kaskadowy układ regulacji ze zmiennymi wzmocnieniami

Rozważamy po raz drugi kaskadowy układ regulacji z zależnymi od czasu wzmocnieniami w torze sprzężenia zwrotnego, analizowany poprzednio z użyciem kwadratowych funkcji Lapunowa w punkcie 3.5.3. Schemat blokowy tego układu przedstawiony jest na rys. 3.3. Tak jak poprzednio, zakładamy, że wzmocnienia $k_1(t)$ i $k_2(t)$ spełniają warunki $\alpha \leq k_1(t) \leq \beta$, $\alpha \leq k_2(t) \leq \beta$. Zapisujemy równania układu w postaci modelu w przestrzeni stanu (3.58), gdzie macierz $A(t)$ należy do czworokąta o wierzchołkach (3.64), (3.65). W punkcie 3.5.3 wykazano kwadaratową stabilność dla zakresu zmian wmocnień $k_1(t)$ i $k_2(t)$ $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.3$.

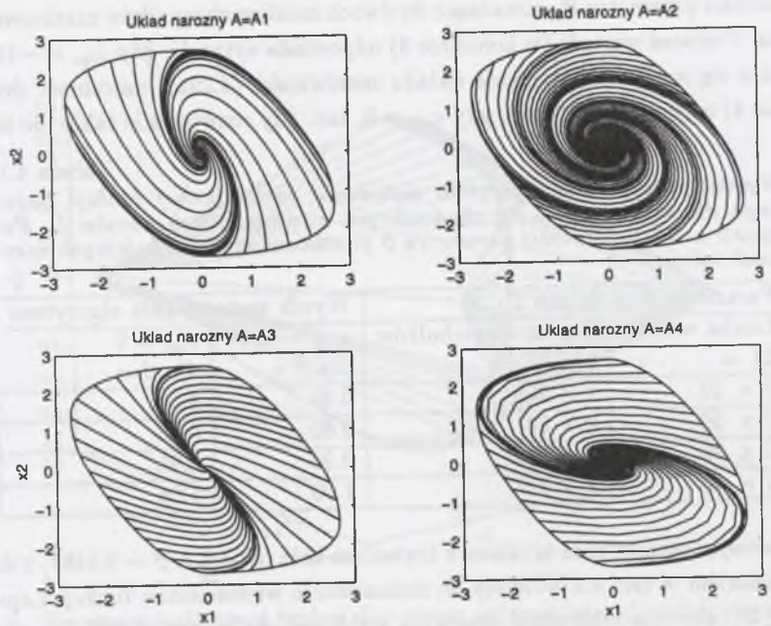
Tutaj założymy szerszy zakres dopuszczalnych zmian wmocnień $k_1(t)$ i $k_2(t)$ - określony przez $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.8$. Ponadto przyjmujemy $M = 200$ oraz macierz $X(200)$ o postaci:

$$X(200) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos\frac{\pi}{M} & \sin\frac{\pi}{M} \\ \cos\frac{2\pi}{M} & \sin\frac{2\pi}{M} \\ \dots & \dots \\ \cos\frac{(M-1)\pi}{m} & \sin\frac{(M-1)\pi}{m} \end{bmatrix}^T, \quad M = 200. \tag{4.199}$$

Dla czterech macierzy narożnych (3.64), (3.65) wyznaczamy, korzystając z opisanego algorytmu, odpowiadające im macierze (o wymiarach 200×200) $P[X(200), A_1]$, $P[X(200), A_2]$, $P[X(200), A_3]$, $P[X(200), A_4]$. Są to macierze rzadkie, każda z nich zawiera tylko 400 różnych od zera elementów. Z kolei poszukujemy wektora skal $d \in R^{200}$ rozwiązując układ 800 nierówności liniowych (4.194). Do rozwiązania wykorzystujemy sformułowanie w postaci problemu programowania liniowego (4.195), (4.196)-(4.198). Dla przyjętych danych uzyskuje się $z_{opt} = -100$, co oznacza, że istnieje wielokątna funkcja Lapunowa wspólna dla układów A_1 - A_4. Warstwicę wyliczonej w ten sposób funkcji Lapunowa przedstawiono na rys. 4.7. Na rysunku tym przedstawiono także wykresy trajektorii stanu dla czterech układów narożnych A_1 - A_4. Wykreślone trajektorie startują z punktów leżących na warstwicy. Widać, że zbiór ograniczony przez warstwicę jest zbiorem dodatnio niezmienniczym dla każdego z układów narożnych.

4.7.2. Układ z podwójnym całkowaniem i korektorem PD

Analizujemy ponownie układ regulacji rozważany już w punktach 2.2.2 i 3.7.1, przedstawiony na rys. 1.6, w którym transmitancja obiektu regulacji dana jest przez $K(s) = \frac{1+s}{s^2(1+0.1s)}$, a w sprzężeniu zwrotnym występuje zależna od czasu nieliniowość



Rys. 4.7. *Warstwica wyliczonej funkcji Lapunowa wraz z wykresami trajektorii stanu czterech układów narożnych*
Fig. 4.7. *Level set of the calculated Lyapunov function and plots of state trajectories for four vertex systems*

sektorowa. Granice sektora opisane są przez parametry α i β. W punkcie 3.7.1 udowodniono, na podstawie kryterium koła, że dla $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.5467$ układ jest absolutnie stabilny. W punkcie 2.2.3 dla $\alpha = 0.2$, $\beta = 1.5$ znaleziono strategię destabilizującą.

Zapisujemy równania modelu układu z rys. 1.6 w postaci (0.1), (1.1), gdzie występują dwie macierze narożne

$$A_1 = \begin{bmatrix} -10 & -10\alpha & -10\alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -10 & -10\beta & -10\beta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.200}$$

Jak widać, w obecnie rozważanym przykładzie wektor stanu jest trójwymiarowy. Konstruujemy wielościenną funkcję Lapunowa wykorzystując algorytm opisany w punkcie 4.6. W algorytmie tym stosowana była funkcja $V(x)$ generowana przez wielościan Π_L (z rys. 4.6 (b)); przyjmowano przy tym różne liczby warstw L. Wykonując obliczenia wielokrotnie oszacowano granicę, dla której udaje się znaleźć wielościenną funkcję Lapunowa (tzn. dla której istnieje rozwiązanie układu nierówności (4.194)).

Wyniki zastosowania algorytmu przy różnych L przedstawia tab. 4.1. Dwie kolumny po lewej stronie podają parametry wielościanu Π_L użytego w algorytmie: L - liczbę warstw oraz M - liczbę wierzchołków. Dwie kolumny po prawej stronie podają

dwie wartości parametru β prowadzące do dwóch możliwych wyników zastosowania algorytmu. Pierwsza wartość (w kolumnie 3) odpowiada sytuacji, gdy $z_{opt} = -100$, tzn. gdy udaje się znaleźć rozwiązanie układu nierówności (4.194); natomiast druga (w kolumnie 4) odpowiada sytuacji, gdy $z_{opt} = 0$, tzn. gdy rozwiązanie takie nie istnieje.

Tabela 4.1

Wyniki zastosowania algorytmu wyliczania wielościennej funkcji Lapunowa dla wielościanów Π_L zbudowanych z różnych liczb warstw L. Parametr $\alpha = 0.2$; wartości parametru β przedstawione są w kolejnych wierszach tabeli

Parametry wielościanu Π_L		Wynik zastosowania algorytmu	
Liczba warstw $2L =$	Liczba wierzchołków $2M =$	$z_{opt} = -100$ dla $\beta =$	$z_{opt} = 0$ dla $\beta =$
2 × 10	2 × 201	0.45	0.50
2 × 20	2 × 801	0.80	0.85
2 × 30	2 × 1801	0.90	0.95
2 × 40	2 × 3201	1.00	1.05

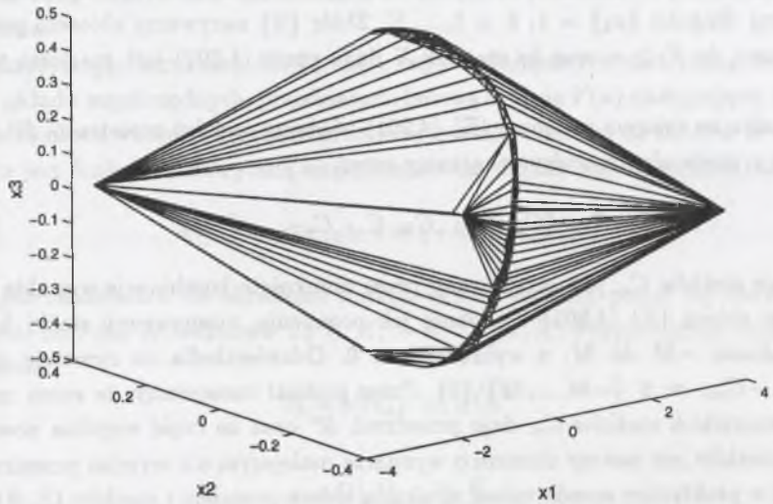
Porównując oszacowanie uzyskane z kryterium koła ($\alpha = 0.2$, $\beta = 0.5467$) z danymi zamieszczonymi w tab. 4.1 widzimy, że zastosowanie wielościennej funkcji Lapunowa (dla $L \geq 20$) pozwala udowodnić absolutną stabilność dla szerszego sektora.

Na rys. 4.8 przedstawiono warstwicę wyznaczonej wielościennej funkcji Lapunowa, odpowiadającej drugiemu wierszowi tab. 4.1, tzn. wielościanowi Π_{20}. Funkcja ta pozwala udowodnić absolutną stabilność badanego układu dla sektora $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.8$. Operacja skalowania realizowana przez rozwiązanie problemu programowania liniowego (4.195), (4.196)-(4.198) spowodowała, że część wierzchołków stała się niewidoczna. Przed wykreśleniem warstwicy z rys. 4.8 usunięto niewidoczne wierzchołki stosując algorytm, wyliczający powłokę wypukłą zbioru puktów [31]. Liczba wierzchołków wielościanu z rys. 4.8 wynosi 2 × 167.

4.8. Przedziałami liniowe funkcje Lapunowa

Metody konstrukcji funkcji Lapunowa w poprzednich punktach tego rozdziału zapewniały, że funkcje te zawsze były istotnie dodatnio określone i wypukłe. W niniejszym punkcie jako funkcje Lapunowa zastosowane będą funkcje z szerszej klasy - przedziałami liniowych. Funkcje z tej klasy mogą przyjmować zarówno wartości dodatnie jak i ujemne. Dzięki temu można je będzie użyć zarówno do badania absolutnej stabilności, jak też do badania absolutnej niestabilności [74].

Omówienie problemów obliczeniowych, które powstają przy przybliżaniu (reprezentacji) funkcji ciągłych przez funkcje zadawane przedziałami, można znaleźć w pracach [22], [43], [44], [54], [55].



Rys. 4.8. *Warstwica wyliczonej funkcji Lapunowa odpowiadającej wielościanowi Π_{20}*
Fig. 4.8. *Level set of the calculated Lyapunov function which corresponds to the polyhedron Π_{20}*

Stosując jako funkcję Lapunowa funkcję przedziałami liniową udowodnimy odpowiednie twierdzenia o absolutnej stabilności i niestabilności układu (0.1), (1.1). Dla zagadnienia absolutnej stabilności przedstawimy związek otrzymanych warunków z uzyskanymi poprzednio. Zastosowanie funkcji przedziałami liniowych do badania absolutnej niestabilności jest rozszerzeniem dotychczas stosowanego aparatu obliczeniowego. Pozwala badać absolutną niestabilność z zastosowaniem metod analogicznych do poprzednio wprowadzonych dla absolutnej stabilności.

4.8.1. Definicja przedziałami liniowej funkcji Lapunowa

Niech $\{\Xi\}$ będzie zbiorem $2K$ punktów należących do przestrzeni R^n

$$\Xi = \{x_1, x_2, ..., x_K, -x_1, -x_2, ..., -x_K\}, \; x_k \in R^n. \tag{4.201}$$

Zgodnie ze wzorem (4.201) punkty należące do $\{\Xi\}$ są rozmieszczone symetrycznie względem środka układu współrzędnych. Dlatego cały zbiór (4.201) jest już w pełni określony, jeśli podanych zostanie K pierwszych wektorów. Macierz, której kolumnami są te wektory, oznaczamy przez X, tzn.

$$X = [x_1 \; x_2 \ldots \; x_K]. \tag{4.202}$$

Dla wygody oznaczeń stosować będziemy indeksy wektorów należących do $\{\Xi\}$ przebiegające zakres od $-K$ do K, z wyłączeniem 0. Numeracja ta odzwierciedla symetrię $x_{-k} = -x_k$, $k \in \{-K, ..., K\}\backslash\{0\}$. Zakładamy, że wszystkie Ξ są wektorami o jednostkowej długości $\|x_k\| = 1$, $k = 1, ..., K$. Zbiór $\{\Xi\}$ nazywamy zbiorem promieni. Zakładamy, że $K \geq n$ oraz że macierz X dana przez (4.202) jest macierzą pełnego rzędu.

Ponadto ze zbiorem promieni $\{\Xi\}$ (4.201) wiążemy podział przestrzeni R^n na $2M$ stożków symplicjalnych, który oznaczamy przez:

$$\Psi = \{C_1, C_2, ..., C_M, C_{-1}, C_{-2}, ..., C_{-M}\}. \tag{4.203}$$

Każdy ze stożków C_m jest generowany przez domknięte kombinacje wypukłe n promieni ze zbioru $\{\Xi\}$ (4.201). Podobnie jak promienie, numerujemy stożki liczbami m z zakresu $-M$ do M, z wykluczeniem 0. Odzwierciedla to symetrię stożków $C_{-m} = -C_m$, $m \in \{-M, ..., M\}\backslash\{0\}$. Przez podział rozumiemy, że suma mnogościowa wszystkich stożków C_m daje przestrzeń R^n oraz że część wspólna dowolnych dwóch stożków jest zawsze zbiorem o wymiarze mniejszym niż wymiar przestrzeni n.

Aby w praktyczny sposób opisać strukturę zbioru promieni i stożków (Ξ, Ψ) wprowadzamy dwie funkcje

- $\kappa(m)$ jest to funkcja, która definiuje n - elementową listę indeksów promieni generujących stożek C_m,
- $\mu(k)$ jest to funkcja, która podaje listę indeksów stożków, zawierających promień x_k wśród swoich promieni generujących.

Przez $F(m)$ oznaczać będziemy $n \times n$ macierz, związaną ze stożkiem C_m, zbudowaną z kolumn zadawanych przez wektory x_k, których indeksy spełniają $k \in \kappa(m)$

$$F(m) = [x_k], \; k \in \kappa(m). \tag{4.204}$$

Macierz $F(m)$ jest zawsze nieosobliwa, co wynika z faktu, że x_k, $k \in \kappa(m)$ są wektorami generującymi stożek symplicjalny w R^n. Z użyciem powyższej macierzy $F(m)$ możemy zdefiniować stożek C_m jako:

$$C_m = \{x \in R^n : x = F(m)\alpha, \; 0 \leq \alpha \in R^n\}, \tag{4.205}$$

gdzie α jest nieujemnym wektorem kolumnowym. Stożki symplicjalne C_m są zbiorami domkniętymi, zatem punkty leżące na brzegach należą do kilku stożków jednocześnie. Mimo to reprezentacja (4.205) jest jednoznaczna w następującym sensie. Załóżmy, że x_1 jest punktem brzegowym, tzn. istnieją dwa stożki C_{m_1} i C_{m_2} i dwa wektory α_1, α_2 takie, że $x_1 = F(m_1)\alpha_1 = F(m_2)\alpha_2$. Z powodu tego, że x_1 należy do brzegu

stożka, część elementów wektorów α_1 i α_2 jest zerowa. Usuńmy zerowe elementy tych wektorów i odpowiadające im kolumny macierzy $F(m_1)$ i $F(m_2)$. Powstałe wektory i macierze będą identyczne z dokładnością do kolejności elementów i odpowiadających im kolumn.

Wykorzystując strukturę (Ξ, Ψ), $\mu(.)$, $\kappa(.)$ definiujemy symetryczną względem środka układu współrzędnych, przedziałami liniową funkcję $V(x)$ następująco. Funkcja $V(x)$ jest liniowa wzdłuż wszystkich promieni; jest także liniowa na każdym ze stożków C_m oraz jest funkcją symetryczną względem środka układu współrzędnych, tzn.

$$V(x_k) = V(x_{-k}), \; k \in \{-K, ..., K\}\backslash\{0\}. \tag{4.206}$$

Przy tych założeniach do określenia funkcji $V(x)$ wystarczy podać jej wartości dla promieni, tzn. dla K wektorów $x_k \in X$, $k = 1, 2, ..., K$. Przyjmujemy następujące oznaczenia:

$$V_k = V(x_k), \; x_k \in X \tag{4.207}$$

oraz

$$v = [V_1 \; V_2 \; ... \; V_K]^T. \tag{4.208}$$

Elementy wektora v są wartościami funkcji $V(x)$ w punktach x_k, $k = 1, ..., K$.

Aby obliczyć wartość funkcji $V(x)$ dla punktu $x \in R^n$ musimy znaleźć stożek C_m, do którego x należy. Następnie definiujemy

$$V(x) = \alpha^T v(m), \tag{4.209}$$

gdzie wektor α wynika z jednoznacznej reprezentacji (4.205), a $v(m)$ jest wektorem kolumnowym zbudowanym z V_k w (4.207), natomiast indeksy k wyznaczone są przez funkcję $\kappa(m)$, tzn.

$$v(m) = [V_k], \; k \in \kappa(m). \tag{4.210}$$

Tak określona funkcja $V(x)$ jest oczywiście ciągła.

4.8.2. Pochodna wzdłuż trajektorii

Aby zastosować $V(x)$ (4.209) jako funkcję Lapunowa należy wyznaczyć jej prawą górną pochodną Diniego wzdłuż trajektorii badanego układu. Bazą do dalszych obliczeń będzie wyznaczenie zmian wartości funkcji $V(x)$ wzdłuż trajektorii układu liniowego

$$\dot{x} = Ax, \tag{4.211}$$

gdzie $x \in R^n$ jest n - wymiarowym wektorem stanu, a A - $n \times n$ - wymiarową macierzą stanu.

W przypadku stosowanej tu funkcji przedziałami liniowej obie prawe pochodne Diniego są sobie równe. Zatem

$$D^+V(x) = \lim_{\Delta \to 0^+} \frac{V[(I + A\Delta)x] - V(x)}{\Delta}, \tag{4.212}$$

gdzie I oznacza $n \times n$ - wymiarową macierz jednostkową. Wyliczymy teraz $D^+V(x)$ korzystając z (4.212) oraz biorąc pod uwagę strukturę (Ξ, Ψ) definiującą funkcję $V(x)$.

4.8.3. Pochodna we wnętrzu stożka C_m

Dla punktu x leżącego we wnętrzu stożka C_m można obliczyć następujące wyrażenie dla $D^+V(x)$

$$D^+V(x) = p^T(x, m)v(m), \tag{4.213}$$

gdzie $v(m)$ dany jest przez (4.210), a wektor wierszowy $p^T(x, m)$ określony jest przez

$$p^T(x, m) = [F^{-1}(m)Ax]^T, \tag{4.214}$$

przy czym macierz $F(m)$ utworzona jest zgodnie z wyrażeniem (4.204).

4.8.4. Pochodna dla promieni x_k

W podpunkcie tym obliczymy prawą pochodną (4.212) dla zbioru promieni $x_k \in X$. Aby wyznaczyć $D^+V(x_k)$ trzeba określić, który ze stożków symplicjalnych C_m, zawierających promień x_k (tzn. taki, że $m \in \mu(k)$), zawiera także wektor $x_k + \Delta Ax$ dla odpowiednio małych wartości Δ.

Niech $m^+(k)$ będzie funkcją, która podaje indeks tego stożka, tzn. trajektoria wychodząca z punktu x_k wchodzi do stożka $C_{m^+(k)}$. Wyliczmy, zgodnie z (4.214)

$$p^T[x_k, m^+(k)] = (F^{-1}[m^+(k)]Ax_k)^T. \tag{4.215}$$

Można łatwo sprawdzić, że warunek "trajektoria wychodząca z punktu x_k wchodzi do stożka $C_{m^+(k)}$" jest równoważny z:

$$p[x_k, m^+(k)]_i \geq 0 \text{ dla } i \neq k,\ i \in \kappa[m^+(k)]. \tag{4.216}$$

Można zatem przedstawiony układ nierówności użyć do wyznaczenia $m^+(k)$. Możliwa jest sytuacja, że wektor kierunkowy trajektorii wychodzącej z punktu x_k - Ax_k należy do brzegu, tzn. do kilku stożków jednocześnie. W takiej sytuacji zakładamy, że funkcja $m^+(k)$ zwraca indeks dowolnego ze stożków zawierających wektor $x_k + \Delta Ax$. Używając funkcji $m^+(k)$ możemy napisać:

$$D^+V(x_k) = p^T[x_k, m^+(k)]v[m^+(k)], \tag{4.217}$$

gdzie $v[m^+(k)]$ jest zdefiniowany przez wzór (4.210), w którym za m podstawiono $m^+(k)$.

4.8.5. Nieciągłość

Oczywiście, funkcja $D^+V(x)$ jest nieciągła na brzegach pomiędzy stożkami oraz na liniach (półprostych) generowanych przez promienie x_k. Rozważamy granice funkcji $D^+V(x)$, gdy jej argument x dąży z wnętrza zbioru C_m (tzn. $x \in \text{int}(C_m)$) do jednego z promieni x_k tworzących stożek C_m

$$D_m^+(x_k) = \lim_{x \to x_k \mid x \in \text{int}(C_m)} D^+V(x), \tag{4.218}$$

gdzie $m \in \mu(k)$ a "int" oznacza wnętrze. Wykorzystując wyrażenie (4.213) łatwo wyprowadzić

$$D_m^+(x_k) = p^T(x_k, m)v(m). \tag{4.219}$$

Otrzymany wzór będzie wykorzystywany w dalszych obliczeniach.

4.8.6. Wektory pochodnych funkcji $V(x)$

Do badania stabilności bądź niestabilności istotne są znaki prawych pochodnych funkcji Lapunowa wzdłuż trajektorii. Listy wartości pochodnych dla promieni x_k uporządkujemy w postaci wektorów kolumnowych, aby można było wygodnie zapisać warunki stabilności (niestabilności).

Zbudujmy wektor kolumnowy, którego elementami są granice $D_m^+(x_k)$, $m \in \mu(k)$ zdefiniowane w (4.218) i oznaczmy go przez

$$\mathbf{d}^+(x_k) = [D_m^+(x_k)],\ m \in \mu(k). \tag{4.220}$$

Zwróćmy uwagę, że funkcje $m^+(k)$ podobnie jak wektory $p^T(x, m)$, $p^T[x_k, m^+(k)]$ nie zależą od wartości funkcji Lapunowa V_k.

Tworzymy z kolei dwie macierze $\hat{P}(A)$ i $\bar{P}(A)$, które można wykorzystać do obliczania wektorów prawych pochodnych funkcji $V(x)$ wzdłuż trajektorii układu (4.211). Są one konstruowane w taki sposób, że pomnożone przez wektor v dają odpowiednio listę pochodnych $D^+V(x_k)$ oraz listę wektorów $\mathbf{d}^+(x_k)$, $k = 1, ..., K$.

$K \times K$ - wymiarowa macierz $\hat{P}(A)$ określona jest następująco:

$$\hat{P}(A) = \begin{bmatrix} \hat{p}_1^T \\ \hat{p}_2^T \\ \vdots \\ \hat{p}_K^T \end{bmatrix}. \tag{4.221}$$

Każdy z wierszy $\hat{p}_k^T$ tworzony jest według następującej reguły:

$$\hat{p}_{kl} = \begin{cases} p[x_k, m^+(k)]_r & \text{jeśli } l \in \kappa[m^+(k)] \text{ lub } -l \in \kappa[m^+(k)] \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \tag{4.222}$$

W przedstawionym wzorze $\hat{p}_{kl}$ oznacza l-ty element wiersza $\hat{p}_k^T$, $p[x_k, m^+(k)]_r$ jest r-tym elementem wektora $p[x_k, m^+(k)]$, przy czym r jest numerem kolumny macierzy $F[m^+(k)]$ "zajmowanej" przez wektor x_l lub x_{-l}. Oczywiście, indeksy l i $-l$ nie mogą jednocześnie należeć do $\kappa[m^+(k)]$, ponieważ x_l i x_{-l} nie mogą jednocześnie być kolumnami macierzy $F[m^+(k)]$.

Analogicznie konstruuje się macierz $\tilde{P}(A)$. Macierz ta ma strukturę blokową; bloki oznaczone są przez $\Delta(1), \Delta(2), \ldots \Delta(K)$, tworzy się je według reguły analogicznej do (4.222). Opisują to poniższe dwa wyrażenia, dla $\tilde{P}(A)$

$$\tilde{P}(A) = \begin{bmatrix} \Delta(1) \\ \Delta(2) \\ \vdots \\ \Delta(K) \end{bmatrix} \tag{4.223}$$

oraz dla bloku $\Delta(k)$

$$\Delta(k)_{ml} = \begin{cases} p(x_k, m)_r & \text{jeśli } l \in \kappa(m) \text{ lub } -l \in \kappa(m) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \tag{4.224}$$

We wzorze (4.224) $\Delta(k)_{ml}$ oznacza ml-ty element bloku $\Delta(k)$, $p(x_k, m)_r$ jest r-tym elementem wektora $p(x_k, m)$, przy czym r jest numerem kolumny macierzy $F[m^+(k)]$ "zajmowanej" przez wektor x_l lub x_{-l}. Tak jak poprzednio indeksy l i $-l$ nie mogą jednocześnie należeć do $\kappa[m^+(k)]$, ponieważ x_l i x_{-l} nie mogą jednocześnie być kolumnami macierzy $F[m^*(k)]$.

Oznaczmy przez $\mathrm{card}[\mu(k)]$ liczbę elementów listy zwracanej przez funkcję $\mu(k)$. Wtedy liczba wierszy macierzy $\tilde{P}(A)$ wynosi $\sum_{k=1}^{K} \mathrm{card}[\mu(k)]$.

Zgodnie z powyższymi określeniami mamy:

$$\hat{P}(A)v = \begin{bmatrix} D^+V(x_1) \\ D^+V(x_2) \\ \vdots \\ D^+V(x_K) \end{bmatrix} \tag{4.225}$$

oraz

$$\tilde{P}(A)v = \begin{bmatrix} \mathrm{d}^+(x_1) \\ \mathrm{d}^+(x_2) \\ \vdots \\ \mathrm{d}^+(x_K) \end{bmatrix}. \tag{4.226}$$

Pisząc $\hat{P}(A)$ i $\tilde{P}(A)$ podkreśliliśmy zależność obu macierzy od macierzy stanu układu liniowego (4.211).

4.8.7. Absolutna stabilność i absolutna niestabilność

Wykorzystując wyniki z poprzednich podpunktów zastosujemy przedziałami liniową funkcję $V(x)$ do badania absolutnej stabilności i niestabilności układu ze zmiennymi w czasie parametrami (0.1), (1.1).

Podając algebraiczne warunki absolutnej stabilności i niestabilności odnosić je będziemy do ustalonej struktury opisywanej przez zbiory promieni i stożków (Ξ, Ψ) oraz funkcje $\kappa(.)$, $\mu(.)$, opisane w punkcie 4.8.. Do zapisania tych warunków wykorzystywane będą macierze $\hat{P}(A)$ i $\tilde{P}(A)$ wprowadzone w poprzednim paragrafie.

Absolutna stabilność

Twierdzenie 11. Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby funkcja przedziałami liniowa $V(x)$ zadana przez strukturę (Ξ, Ψ), $\kappa(.)$, $\mu(.)$ oraz wektor v była funkcją Lapunowa, przesądzającą o absolutnej stabilności układu (0.1), (1.1) (tzn. funkcją Lapunowa wspólną dla wszystkich układów narożnych), jest, aby

$$v > 0 \tag{4.227}$$

oraz

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}(A_1) \\ \tilde{P}(A_2) \\ \vdots \\ \tilde{P}(A_N) \end{bmatrix} v < 0. \tag{4.228}$$

Dowód. Na podstawie wyników punktu 4.8.5. warunki (4.227) i (4.228) są warunkami koniecznymi, ponieważ każda z wartości otrzymana w wyniku wymnożenia macierzy blokowej w (4.228) przez wektor v jest pochodną funkcji Lapunowa wzdłuż trajektorii któregoś z układów narożnych w pewnym punkcie przestrzeni stanu. Weźmy teraz pod uwagę wyrażenie określające prawą pochodną $D^+V(x)$ wzdłuż trajektorii układu liniowego, wyprowadzone w punkcie 4.8.3.. Jak widać z (4.213), prawa pochodna jest formą liniową wartości funkcji $V(x)$ przyjmowanych dla promieni tworzących stożek $C(m)$. Przeprowadzając maksymalizację tej formy liniowej po zmiennej x, przebiegającej stożek $C(m)$, otrzymamy maksimum przyjmowane dla jednego z promieni. Z kolei wartość ta jest zapisana w liście pochodnych po lewej stronie (4.228), co dowodzi, że warunki (4.227) i (4.228) są także wystarczające. □

Twierdzenie to sprowadza poszukiwanie funkcji Lapunowa dla układu ze zmiennymi w czasie parametrami (0.1) do rozwiązywania układu nierówności liniowych (4.227), (4.228).

Zwrócimy teraz uwagę na związki warunków otrzymywanych z zastosowaniem funkcji przedziałami liniowych z warunkami absolutnej stabilności Mołczanowa i Piatnickiego. Oznaczmy przez $P(A)$ macierz otrzymaną z macierzy $\hat{P}(A)$ przez odwrócenie znaków pewnych jej elementów. Znaki elementów są zmieniane według następującej reguły. Jeśli $l \in \kappa[m^+(k)]$, to $p_{kl} = \hat{p}_{kl}$ (tzn. znak pozostaje niezmieniony). Jeśli natomiast $-l \in \kappa[m^+(k)]$, to $p_{kl} = -\hat{p}_{kl}$. Równoważnie elementy macierzy $P(A)$ definio-

wane są następująco:

$$p_{kl} = \begin{cases} p[x_k, m^+(k)]_r & \text{jeśli } l \in \kappa[m^+(k)] \\ -p[x_k, m^+(k)]_r & \text{jeśli } -l \in \kappa[m^+(k)] \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases} \tag{4.229}$$

W wyrażeniu tym $p[x_k, m^+(k)]_r$ oznacza r-ty element wektora $p[x_k, m^+(k)]$, gdzie r jest numerem kolumny macierzy $F[m^+(k)]$ "zajmowanej" przez wektor x_l lub odpowiednio x_{-l}.

Na podstawie konstrukcji macierzy $P(A)$ widzimy też, że zachodzi $\hat{P}(A) = |P(A)|$, przy czym operacja $|.|$ definiowana była w (4.164).

Możemy teraz udowodnić następujący lemat, który charakteryzuje związek macierzy $P(A)$ z macierzami występującymi w twierdzeniu Mołczanowa Piatnickiego.

Lemat 8. Macierz $P(A)$ spełnia warunek (4.175) z twierdzenia 10, tzn.

$$AX = XP(A). \tag{4.230}$$

Dowód. Transponując równość (4.215) oraz mnożąc obie strony przez $F[m^+(k)]$ dostajemy:

$$F[m^+(k)]p[x_k, m^+(k)] = Ax_k. \tag{4.231}$$

Biorąc teraz pod uwagę regułę (4.229) tworzenia macierzy $P(A)$ oraz regułę (4.204) budowania macierzy $F(m)$ sprawdzamy, że zachodzi (4.230). □

Przedstawiony lemat podaje interpretacje wyprowadzonych wzorów na prawe pochodne funkcji $V(x)$ w kategoriach warunków Mołczanowa Piatnickiego. Na podstawie lematu 8 mamy zatem następujące twierdzenie:

Twierdzenie 12. Warunkiem wystarczającym absolutnej stabilności układu (0.1), (1.1) jest istnienie przedziałami liniowej funkcji $V(x)$ zadanej przez strukturę (Ξ, Ψ), $\kappa(.)$, $\mu(.)$ oraz wektor v takiej, że

$$v > 0 \tag{4.232}$$

oraz

$$\begin{bmatrix} \hat{P}(A_1) \\ \hat{P}(A_2) \\ \vdots \\ \hat{P}(A_N) \end{bmatrix} v < 0. \tag{4.233}$$

Dowód wynika z lematu 8 i twierdzenia 6.

Twierdzenie 12 daje wygodniejszą metodę badania absolutnej stabilności układu (0.1), (1.1) niż twierdzenie 11. Powodem jest to, że macierz $\hat{P}(A)$ ma zawsze mniejszą liczbę wierszy niż macierz $\bar{P}(A)$. Zastosowanie twierdzenia 12 prowadzi do takich samych zagadnień obliczeniowych, jak opisywane w punktach 4.4 - 4.6.

Zwróćmy też uwagę, że $V(x)$ występująca w twierdzeniu 12 nie musi być funkcją Lapunowa (wspólną dla układów narożnych). Funkcją Lapunowa, natomiast, jest funkcja, której warstwice są powłokami wypukłymi warstwic funkcji $V(x)$.

Absolutna niestabilność

Dzięki wprowadzonej strukturze funkcji przedziałami liniowych możemy rozszerzyć dotychczas stosowany aparat na problem badania absolutnej niestabilności układów o niepewnych, zmiennych w czasie parametrach. Absolutną niestabilność możemy badać dlatego, że funkcja przedziałami liniowa może przyjmować zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne. Możemy dzięki temu stosować twierdzenia Lapunowa o niestabilności.

Podamy najpierw twierdzenie o absolutnej niestabilności z zastosowaniem ciągłej funkcji Lapunowa.

Twierdzenie 13. [117] oraz [83, rozdz. 5]. Warunkiem wystarczającym absolutnej niestabilności układu (0.1) jest istnienie lokalnie lipschitzowskiej funkcji $V(x) \in C$, której prawe górne pochodne Diniego liczone wzdłuż trajektorii układów narożnych spełniają $D^+V(x) < 0$, $x \neq 0$ oraz $V(x)$ przyjmuje ujemne wartości w dowolnie małym otoczeniu środka układu współrzędnych.

Wykorzystując twierdzenie 13 możemy podać warunek wystarczający absolutnej niestabilności układu (0.1), (1.1) w postaci następującego twierdzenia:

Twierdzenie 14. Warunkiem wystarczającym absolutnej niestabilności układu (0.1), (1.1) jest istnienie przedziałami liniowej funkcji $V(x)$ zadanej przez strukturę (Ξ, Ψ), $\kappa(.)$, $\mu(.)$ oraz wektor v takiej, że

$$\begin{bmatrix} \hat{P}(A_1) \\ \hat{P}(A_2) \\ \vdots \\ \hat{P}(A_N) \end{bmatrix} v < 0 \tag{4.234}$$

oraz przynajmniej jedna współrzędna wektora v jest ujemna.

Dowód jest analogiczny do dowodu dostateczności w twierdzeniu 12.

4.8.8. Przykład

Badanie absolutnej stabilności zilustrowano przykładami numerycznymi w poprzednich punktach tego rozdziału. Dlatego teraz uwagę skoncentrujemy na zagadnieniu absolutnej niestabilności.

Analizowano problem absolutnej niestabilności układu (0.1), (1.1) dla przypadku, gdy wektor stanu jest dwuwymiarowy, a hiperwielościan redukuje się do odcinka (tzn. są dwie macierze narożne A_1 i A_2). Przyjęto, że oba układy narożne $\dot{x} = A_1x$ i $\dot{x} = A_2x$ mają punkt równowagi typu siodłowego (hiperbolicznego), tzn. mają parę rzeczywistych wartości własnych, z których jedna jest dodatnia a druga ujemna. Przebadano szereg układów o opisanych własnościach porównując wyniki uzyskiwane z zastosowaniem kwadratowych oraz przedziałami liniowych funkcji Lapunowa. W przeprowadzonej analizie napotkano przypadki, gdy układ był absolutnie niestabilny, jednak

kwadratowa funkcja Lapunowa nie pozwalała udowodnić tej własności. Z kolei zastosowanie funkcji przedziałami liniowej dowodziło absolutnej niestabilności. Przykładem takiej sytuacji jest układ (0.1), (1.1), w którym macierze narożne dane są przez:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.6514 & 1.5434 \\ -0.2601 & 2.1514 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2.4567 & 0.4731 \\ -2.4677 & 0.5567 \end{bmatrix}. \tag{4.235}$$

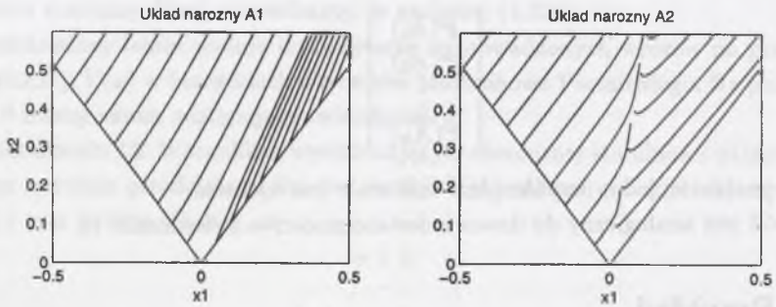
Można sprawdzić, że nie istnieje wspólna kwadratowa funkcja Lapunowa, która dowodziłaby absolutnej niestabilności układu (0.1), (1.1) z macierzami narożnymi (4.235). Istotnie, wykorzystując opisywane wcześniej oprogramowanie do rozwiązywania liniowych nierówności macierzowych możemy wyznaczyć następujące dwie macierze symetryczne:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 172.2535 & 127.4689 \\ 127.4689 & 99.0562 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 76.9570 & 220.9487 \\ 220.9487 & 659.1526 \end{bmatrix}. \tag{4.236}$$

Obie te macierze są istotnie dodatnio określone, a także spełniają

$$A_1Q_1 + Q_1A_1^T + A_2Q_2 + Q_2A_2^T = 0, \tag{4.237}$$

co na podstawie twierdzenia 4 a) z rozdziału trzeciego dowodzi, że nie istnieje wspólna kwadratowa funkcja Lapunowa, która przesądzałaby o absolutnej niestabilności układu (0.1), (1.1) z macierzami narożnymi (4.235).



Rys. 4.9. *Fragment warstwicy $\{V(x) = 0 \cap x_2 > 0\}$ dla wyliczonej przedziałami liniowej funkcji Lapunowa oraz trajektorie stanu układów narożnych A_1 i A_2. Na rysunku przedstawiono także trajektorie stanu układów narożnych (po lewej dla układu narożnego $A = A_1$ oraz po prawej dla $A = A_2$). Punkty początkowe wszystkich trajektorii leżą na warstwicy*

Fig. 4.9. *Fragment of the level set $\{V(x) = 0 \cap x_2 > 0\}$ for the calculated piecewise linear Lyapunov function. In the plots above trajectories of the vertex systems are also presented with initial points that belong to the level set. The plot on the left hand side corresponds to A_1 while the one on the right hand side corresponds to A_2*

Można natomiast skonstruować przedziałami liniową wspólną funkcję Lapunowa. Przyjmujemy $K = 2$ oraz

$$\Xi = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}. \tag{4.238}$$

Wyliczając macierze $\hat{P}(A_1)$, $\hat{P}(A_2)$ oraz analizując układ nierówności liniowych (4.234) możemy się przekonać, że wektor

$$v = [16.4011 \quad -15.8321]^T \tag{4.239}$$

jest jednym z jego rozwiązań. Zatem na podstawie twierdzenia 14 układ (0.1), (1.1) z macierzami narożnymi (4.235) jest absolutnie niestabilny.

Na rys. 4.9 przedstawiono fragment warstwicy $\{V(x) = 0\} \cap x_2 > 0$ wyliczonej przedziałami liniowej funkcji Lapunowa oraz trajektorie stanu układów narożnych A_1 i A_2. Całą warstwicę można uzyskać dodając do wykreślonego fragmentu jego symetrycze odbicie względem środka układu. Przedstawiony fragment warstwicy tworzony jest przez dwie proste. Pomiędzy tymi prostymi znajduje się zbiór $V(x) < 0$. Zbiór obejmowany przez warstwicę jest nieograniczony, ponieważ funkcja $V(x)$ przyjmuje zarówno dodatnie, jak i ujemne wartości w dowolnym otoczeniu zera. Jak widać na rysunku, warstwica tworzy stożek "ucieczki" wspólny dla obu układów narożnych, co potwierdza absolutną niestabilność analizowanego układu.

4.9. Strategie destabilizujące

Algorytmy obliczeniowe przedstawione w poprzednich punktach pozwalają poszukiwać wspólnych wielościennych lub przedziałami liniowych funkcji Lapunowa dla dowodu absolutnej stabilności lub absolutnej niestabilności układu (0.1), (1.1). Jednak, jak wiemy, absolutna stabilność lub niestabilność nie wyczerpuje możliwych klasyfikacji zachowań układu (0.1), (1.1). Możliwa jest sytuacja, gdy mimo że wszystkie układy narożne $\dot{x} = A_1x$, $\dot{x} = A_2x$, ..., $\dot{x} = A_Nx$ są asymptotycznie stabilne, to układ (0.1), (1.1) nie jest absolutnie stabilny; istnieje dla niego strategia destabilizująca.

W przedstawionych do tej pory przykładach analiza obliczeniowa istnienia strategii destabilizujących bazowała na zastosowaniu metod teorii Floqueta, opisanych w rozdziale 2. Natomiast w tym punkcie przedstawimy zastosowanie funkcji wielościennej do poszukiwania strategii destabilizującej dla układu (0.1), (1.1). Skonstruowany algorytm obliczeniowy (opisany w pracy [73]) wykorzystuje wynik przedstawiony w pracy [78]. Zgodnie z tym wynikiem, jeśli dla układu (0.1), (1.1) istnieje strategia destabilizująca, to istnieje także wypukła funkcja $V(x)$, która rośnie wzdłuż rozwiązania wynikającego z zastosowania strategii destabilizującej. Własność ta pozwala efektywnie rozwiązywać problem poszukiwania strategi destabilizującej.

Będziemy zakładać, że zbiór macierzy narożnych $\{A_1, A_2, ..., A_N\}$ jest nieosobliwy [78], [86], tzn. nie istnieje żadna właściwa podprzestrzeń przestrzeni R^n, która byłaby jednocześnie przestrzenią niezmienniczą każdej z macierzy $A_1, A_2, ..., A_N$. Wykorzystując podejście przedstawione w pracy [78] rozważamy, dla ustalonego N, rodzinę

systemów (0.1), (1.1). Inaczej mówiąc, każdy z systemów (0.1), (1.1) traktujemy jako punkt w $N \times n^2$ - wymiarowej przestrzeni, której współrzędne zadają elementy macierzy $A_1, A_2, ..., A_N$. W przestrzeni tej zbiór systemów absolutnie stabilnych jest otwartym stożkiem [78]. Stożek ten oznaczać będziemy przez Ψ. Twierdzenie 1 w pracy [78] pozwala scharakteryzować wszystkie systemy (0.1), (1.1) należące do brzegu stożka Ψ. Zgodnie z tym twierdzeniem, jeśli układ (0.1), (1.1) należy do brzegu stożka Ψ, to istnieją: dodatnio określona, wypukła funkcja $V(x)$ oraz strategia $u_1^b(x), u_2^b(x), ..., u_N^b(x)$ takie, że

$$D^+V[x, u_1^b(x), u_2^b(x), ..., u_N^b(x)] = 0 \text{ dla } x \neq 0. \tag{4.240}$$

We wzorze (4.240) $D^+V[x, u_1^b(x), u_2^b(x), ..., u_N^b(x)]$ oznacza prawą pochodną wzdłuż rozwiązania układu (0.1), (1.1) wynikającego z zastosowania strategii $u_1^b(x)$, $u_2^b(x)$, ... , $u_N^b(x)$; (dzięki wypukłości funkcji $V(x)$ obie prawe pochodne Diniego są sobie równe). Pochodna ta jest równa pochodnej kierunkowej funkcji $V(x)$ w kierunku definiowanym przez wektor $(u_1^b A_1 + u_2^b A_2 + ... + u_N^b A_N)x$, tzn. zachodzi następująca równość:

$$D^+V[x, u_1^b(x), u_2^b(x), ..., u_N^b(x)] = \frac{\partial V}{\partial z}, \tag{4.241}$$

gdzie

$$z = \sum_{i=1}^{N} u_i^b A_i^b x \tag{4.242}$$

oraz $\frac{\partial V}{\partial z}$ oznacza pochodną kierunkową funkcji V wzdłuż kierunku określonego przez wektor z. Wykorzystując twierdzenie 1 z pracy [78] możemy udowodnić lemat:

Lemat 9. Jeśli układ (0.1), (1.1), w którym macierze narożne dane są przez A_1^d, A_2^d, ... ,A_N^d, leży na zewnątrz stożka Ψ, to istnieją dodatnio określona, wypukła funkcja $V(x)$ oraz strategia $u_1^d(x), u_2^d(x), ..., u_N^d(x)$ takie, że prawa pochodna funkcji $V(x)$ wzdłuż rozwiązania wynikającego z zastosowania $u_1^d(x), u_2^d(x), ..., u_N^d(x)$ spełnia

$$D^+V[x, u_1^d(x), u_2^d(x), ..., u_N^d(x)] > 0 \text{ dla } x \neq 0. \tag{4.243}$$

Dowód. Rozważmy układ (0.1), (1.1) z parametrami $A_1 = -I$, $A_2 = -I$, ..., $A_N = -I$, gdzie I oznacza $n \times n$ - wymiarową macierz jednostkową. Układ ten oczywiście należy do wnętrza stożka Ψ. Rozważmy teraz odcinek (w $N \times n^2$ - wymiarowej przestrzeni parametrów) o końcach $(-I, -I, ..., -I)$ i $(A_1^d, A_2^d, ..., A_N^d)$. Odcinek ten musi przecinać brzeg stożka Ψ w co najmniej jednym punkcie. Istnieją zatem liczby $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$ takie, że układ (0.1), (1.1) z parametrami $(A_1^b, A_2^b, ..., A_N^b)$

$$A_i^b = -\alpha I + \beta A_i^d, \; i = 1, 2, ..., N \tag{4.244}$$

należy do brzegu Ψ. Stosujemy teraz (4.240), (4.241) i (4.242) definiując A_i^b przez (4.244). Otrzymujemy:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \tag{4.245}$$

gdzie $z = z^I + z^d$,

$$z^I = -\alpha \sum_{i=1}^{N} u_i^b x \tag{4.246}$$

oraz

$$z^d = \beta \sum_{i=1}^{N} u_i^b A_i^d x. \tag{4.247}$$

Z wypukłości $V(x)$ wynika, że

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} > 0 \tag{4.248}$$

oraz

$$\frac{\partial V}{\partial (z^I + z^d)} \leq \frac{\partial V}{\partial z^I} + \frac{\partial V}{\partial z^d}. \tag{4.249}$$

Zatem (4.245) i (4.246)-(4.249) pociągają za sobą

$$\frac{\partial V}{\partial z^d} > 0,$$

gdzie z^d jest kierunkiem definiowanym przez wektor (4.247), zaczepiony w punkcie $x \neq 0$. Ostatecznym wnioskiem jest, że funkcja $V(x)$ oraz strategia

$$u_i^d = \beta u_i^b, \; i = 1, 2, ..., N$$

spełniają tezę lematu. □

4.10. Obliczanie funkcji $V(x)$

Opiszemy teraz metodę wyliczania funkcji $V(x)$ oraz strategii destabilizującej u_i^d, $i = 1, 2, ..., N$, wykorzystującą lemat 9. Poszukiwana strategia destabilizująca ma postać funkcji wektora stanu x, tzn. $u_i^d = u_i^d(x)$, $i = 1, 2, ..., N$. Dla potrzeb praktycznych obliczeń poczynione będą założenia dotyczące klas funkcji, do których należą $V(x)$ oraz $u_i^d(x)$, $i = 1, 2, ..., N$.

Przyjmuje się, że $V(x)$ jest funkcją wielościenną, definiowaną przez listę ścian (jak w punkcie 4.4.), tzn.

$$V(x) = \| Wx \|_\infty, \tag{4.250}$$

gdzie, tak jak poprzednio, W jest $M \times n$ macierzą rzeczywistą $W \in R^{M \times n}$. Zakładamy, że każdy wiersz w_m^T macierzy W odpowiada niepustej i niezdegenerowanej ścianie $F(m)$, $F(m) = \left\{ x : w_m^T x = 1, \| Wx \|_\infty = 1 \right\}$ wielościanu zadanego przez warstwicę funkcji $V(x)$: $\partial \mathcal{D} = \{ x \in R^n : \| Wx \|_\infty \leq 1 \}$. Równoważnie można napisać (por. (4.134))

$$F(m) = \left\{ x : \begin{bmatrix} W \\ -W \end{bmatrix} x \leq \mathbf{1}^-(M + m) \right\}, \tag{4.251}$$

przy czym $\mathbf{1}^{-}(M+m)$ oznacza $2M$ - wymiarowy wektor kolumnowy o wszystkich elementach równych 1, z wyjątkiem elementu o numerze $M+m$, któremu przypisana jest wartość -1. W (4.251) warunek $w_m^T x = 1$ reprezentowany jest przez dwie nierówności $w_m^T x \leq 1$, $-w_m^T x \leq -1$. Ściany wielościanu Π zadają podział przestrzeni R^n na stożki; m - ty stożek, oznaczany przez $C(m)$, zdefiniowany jest przez

$$C(m) = \{\alpha x : x \in F(m), \alpha \geq 0\}, \quad m = 1, \ldots, M. \tag{4.252}$$

W odniesieniu do funkcji $u_i^d(x)$ definiujących poszukiwaną strategię zakładamy, że wewnątrz stożków $C(m)$ funkcje te przyjmują stałe wartości, tzn.

$$u_i^d(x) = u_i^d(m), \text{ dla } x \in \operatorname{int} C(m), \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{4.253}$$

Przyjęta definicja powoduje, że funkcje $u_i^d(x)$ są nieciągłe. Zatem na brzegach pomiędzy stożkami możliwe jest występowanie stanów poślizgowych. Aby poprawnie zdefiniować rozwiązanie układu (0.1), (1.1), trzeba odpowiednio określić wartości funkcji $u_i^d(x)$ na brzegach pomiędzy stożkami $C(m)$ ([122], [96]).

4.10.1. Twierdzenia o istnieniu strategii destabilizującej

Rozważmy macierze narożne A_1, A_2, ..., A_N definiujące zakres zmian parametrów (1.1) układu (0.1). Załóżmy, że wektor x należy do względnego wnętrza ściany $F(m)$, $x \in F(m)$. Przy tym założeniu prawa pochodna $D^+V(x)$ funkcji (4.250) wzdłuż rozwiązania układu narożnego A_i dana jest przez formę liniową (zob. punkt 4.4.1).

$$D^+V(x) = w_m^T A_i x, \quad x \in \operatorname{relint} F(m). \tag{4.254}$$

W przedstawionym wzorze relint oznacza względne wnętrze ściany $F(m)$. Rozpatrujemy teraz minimum powyższej formy liniowej na zbiorze $F(m)$

$$d_{\min}^m = \min_{x \in F(m)} w_m^T A_i x. \tag{4.255}$$

Zapisane zadanie minimalizacji jest zadaniem programowania liniowego, ponieważ zbiór $F(m)$ jest opisany przez układ nierówności liniowych (4.251). Wykorzystując, tak jak w punktach 4.4.1, 4.5, relacje dualności w programowaniu liniowym [56] otrzymujemy następującą nierówność dla $d_{\min}^m$:

$$d_{\min}^m \geq -[q_{mm}(i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^{M} |q_{mj}(i)|], \tag{4.256}$$

która obowiązuje dla każdego wektora $q_m^T(i) = [q_{m1}(i) q_{m2}(i) \ldots q_{mM}(i)]$ spełniającego

$$q_m^T(i) W = -w_m^T A_i. \tag{4.257}$$

Ponieważ zbiór $F(m)$ jest niepusty, można znaleźć wektor

$$q_m^{0T}(i) = [q_{m1}^0(i) q_{m2}^0(i) \ldots q_{mM}^0(i)]$$

taki, że

$$d_{\min}^m = -[q_{mm}^0(i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^{M} |q_{mj}^0(i)|] \tag{4.258}$$

oraz

$$q_m^{0T}(i) W = -w_m^T A_i. \tag{4.259}$$

Wektor $q_m^{0T}(i)$ otrzymuje się na podstawie rozwiązania problemu dualnego do (4.255). Jeśli $\lambda(i) \in R^{2M}$ oznacza wektor mnożników Lagrange'a, odpowiadający rozwiązaniu problemu (4.255), (4.251), to

$$q_{mj}^0(i) = \lambda_j(i) - \lambda_{M+j}(i), \tag{4.260}$$

gdzie $\lambda_j(i)$ jest j-tym elementem wektora $\lambda(i)$.

Budujemy $M \times M$ - wymiarowe macierze $Q(i)$ oraz $Q^0(i)$, których wiersze dane są odpowiednio przez $q_m^T(i)$ oraz $q_m^{0T}(i)$:

$$Q(i) = \begin{bmatrix} q_1^T(i) \\ q_2^T(i) \\ \ldots \\ q_M^T(i) \end{bmatrix}, \quad Q^0(i) = \begin{bmatrix} q_1^{0T}(i) \\ q_2^{0T}(i) \\ \ldots \\ q_M^{0T}(i) \end{bmatrix}. \tag{4.261}$$

Na podstawie (4.257), (4.259) macierze te spełniają następujące równania:

$$Q(i) W = -W A_i, \quad Q^0(i) W = -W A_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{4.262}$$

Wykorzystując macierze $Q(i), Q^0(i)$ możemy teraz sformułować następujące twierdzenia o istnieniu strategii destabilizującej.

Twierdzenie 14. Jeśli istnieją $M \times M$ - wymiarowe macierze $Q(1), Q(2), \ldots, Q(N)$, które spełniają równania (4.262), oraz dla każdego numeru wiersza m $(1 \leq m \leq M)$ można znaleźć numer macierzy narożnej $i^* = i^*(m)$ taki, że zachodzi

$$q_{mm}(i^*) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^{M} |q_{mj}(i^*)| < 0, \tag{4.263}$$

to istnieje strategia destabilizująca dla układu (0.1), (1.1). (W (4.263) $q_{mj}(i^*)$ oznacza mj - ty element macierzy $Q(i^*)$). Strategia destabilizująca może być wybrana następująco:

$$u_i^d(x) = \begin{cases} 1, \text{ jeśli } i = i^*(m) \\ 0, \text{ w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \tag{4.264}$$

Przy czym powyższy wzór obowiązuje dla $x \in C(m)$.

Dowód. Funkcja $V(x)$ dana przez (4.250) wzrasta wzdłuż rozwiązań $x^d(t)$ wynikających z zastosowania strategii (4.264). Zatem niestabilność wynika z twierdzeń Lapunowa o niestabilności. □

Twierdzenie 15. Znalezienie $M \times M$-wymiarowych macierzy $Q(1), Q(2), ..., Q(N)$, które spełniają równania (4.262) oraz warunek (4.263), jest możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy macierze $Q^0(1), Q^0(2), ..., Q^0(N)$ zadane przez (4.260) spełniają warunek (4.263).

Dowód. Dowód wynika z faktu, że (4.258) jest górnym ograniczeniem dla prawych stron (4.256). □

4.10.2. Skalowanie

Z dotychczasowych rozważań wynika, że jeśli tylko wielościenna funkcja $V(x)$ spełniająca warunki twierdzenia 15 (warunek (4.263)) zostanie znaleziona (przez odpowiedni dobór macierzy W w (4.250)), to wyliczenie strategii destabilizującej nie nastręcza już trudności.

Podobnie jak w punkcie 4.6, należy stwierdzić, że arbitralny dobór macierzy W w (4.250) na ogół doprowadzi do zdefiniowania funkcji $V(x)$, która nie spełnia (4.263). Aby znaleźć macierz W definiującą odpowiednią funkcję $V(x)$ posłużymy się, tak jak poprzednio, ideą skalowania.

Zakładamy, że

$$W = D^{-1}U, \tag{4.265}$$

gdzie $M \times n$ - wymiarowa macierz U jest wybierana tak samo jak macierz X w punkcie 4.6, tzn. w taki sposób, że ściany definiowane przez wiersze macierzy U przybliżają n - wymiarową sferę jednostkową. Macierz D

$$D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, ..., d_M) \tag{4.266}$$

jest diagonalną macierzą skal o elementach na przekątnej $d_m > 0$. Dobierając skale dopasowujemy warstwice funkcji $V(x)$ do pożądanego kształtu.

Podstawiając $W = U$ wyznaczamy macierze $Q^0(i)$ $i = 1, 2, ..., N$ zgodnie z twierdzeniem 15. Definiujemy $|Q|$ jak w (4.164), tzn. $|Q|$ powstaje z macierzy Q przez zastąpienie elementów poza główną przekątną ich wartościami bezwzględnymi oraz pozostawienie elementów na głównej przekątnej bez zmian. Możemy teraz sformułować następujący lemat:

Lemat 10. Jeśli istnieje M wymiarowy wektor skal

$$d = [d_1, d_2, ..., d_M]^T, \; d_m > 0 \tag{4.267}$$

taki, że

$$\min_{1 \le i \le N} \left[\left| Q^0(i) \right| d \right]_m < 0, \text{ dla wszystkich } 1 \le m \le M, \tag{4.268}$$

to istnieje strategia destabilizująca dla układu (0.1), (1.1). We wzorze (4.268) $[|Q^0(i)|\, d]_m$ oznacza m - ty element wektora $|Q^0(i)|\, d$.

Dowód. Jeśli zachodzi (4.268), to warunki twierdzenia 14 są spełnione z $W = D^{-1}U$ oraz $Q(i) = D^{-1}Q^0(i)D$. □

Zauważmy, że warunki (4.268) nie mogą być bezpośrednio sprawdzane przy użyciu metod programowania liniowego, jak tego dokonano w poprzednich punktach. Jednak przez odpowiednią transformację można je sprowadzić do problemu programowania liniowego. Odpowiedni wynik jest sformułowany jako kolejne twierdzenie.

Twierdzenie 16. M - wymiarowy wektor skal $d > 0$ (4.267), spełniający (4.268), istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje NM - wymiarowy wektor $s \in R^{NM}$, o ściśle dodatnich elementach, $s > 0$ taki, że

$$s^T \begin{bmatrix} |Q^0(1)| \\ |Q^0(2)| \\ \cdots \\ |Q^0(N)| \end{bmatrix} < 0. \tag{4.269}$$

Dowód

Konieczność. Zauważmy, że (4.268) jest równoważne z istnieniem N - wymiarowego wektora $\sigma_m = [\sigma_{m1}, \sigma_{m2}, ..., \sigma_{mN}]$ o ściśle dodatnich elementach, $\sigma_{mi} > 0$, spełniającego

$$\sum_{i=1}^{N} \sigma_{mi} \left[\left| Q^0(i) \right| d \right]_m < 0. \tag{4.270}$$

Utwórzmy macierz $\sigma = [\sigma_{mi}]$, $m = 1, 2, .., M$, $i = 1, 2, .., N$. Oznaczmy przez σ^i i-tą kolumnę tej macierzy $\sigma^i = [\sigma_{1i}, \sigma_{2i}, ..., \sigma_{Mi}]^T$. Nierówność (4.270) zachodzi dla wszystkich $1 \le m \le M$, a przy użyciu wprowadzonej notacji nierówność ta może być równoważnie zapisana jako

$$R(\sigma)d < 0, \tag{4.271}$$

gdzie

$$R(\sigma) = \mathrm{diag}[\sigma^1] \left| Q^0(1) \right| + \mathrm{diag}[\sigma^2] \left| Q^0(2) \right| + ... + \mathrm{diag}[\sigma^N] \left| Q^0(N) \right|. \tag{4.272}$$

W wyrażeniu (4.272) $\mathrm{diag}[\sigma^i]$ jest macierzą diagonalną utworzoną z elementów wektora σ^i. Wszystkie elementy macierzy $-R(\sigma)$, które leżą poza główną przekątną, są niedodatnie, zatem z (4.271) wynika, że $-R(\sigma)$ jest M - macierzą [5]. Wynika stąd, że istnieje M-wymiarowy ściśle dodatni wektor wierszowy $\delta^T \in R^M$, $\delta^T > 0$ taki, że

$$\delta^T R(\sigma) < 0.$$

Definiujemy wektor s^T następująco:

$$s^T = [s^T(1)\ s^T(2)\ \dots\ s^T(N)], \tag{4.273}$$

gdzie $s^T(i) \in R^M$ są dane przez

$$s^T(i) = \delta^T \mathrm{diag}[\sigma^i].$$

Można bezpośrednio sprawdzić, że tak zdefiniowany wektor s^T spełnia (4.269).

Dostateczność. Zadajemy strukturę blokową wektora s, jak w (4.273) (zgodnie z blokowym mnożeniem w (4.269)). Tworzymy z kolei następującą macierz:

$$R(s) = \mathrm{diag}[s(1)]\,|Q(1)| + \mathrm{diag}[s(2)]\,|Q(2)| + \dots + \mathrm{diag}[s(N)]\,|Q(N)|, \tag{4.274}$$

gdzie $\mathrm{diag}[s(i)]$ jest macierzą diagonalną z elementami wektora $s(i)$ na przekątnej. Ponieważ

$$\mathbf{1}^T R(s) < 0 \tag{4.275}$$

oraz macierz $-R(s)$ ma niedodatnie elementy poza główną przekątną, zatem $-R(s)$ jest M-macierzą i istnieje wektor $d > 0$ taki, że

$$R(s)d < 0. \tag{4.276}$$

W (4.275) $\mathbf{1}^T$ oznacza wektor wierszowy, którego wszystkie elementy są równe 1. Podstawmy (4.274) w (4.276) i rozważmy m - te z otrzymanego układu równań. Dostajemy:

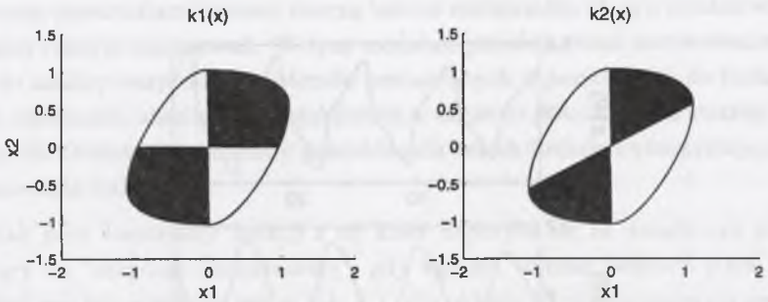
$$\sum_{i=1}^{N} s(i)_m [|Q(i)|\, d]_m < 0, \tag{4.277}$$

gdzie $s(i)_m$ oznacza m - ty element wektora $s(i)$. Ponieważ suma jest mniejsza od zera, zatem co najmniej jeden ze składników jest ujemny, co dowodzi (4.268). □

Układ nierówności liniowych (4.269) możemy już rozwiązywać z zastosowaniem algorytmów programowania liniowego. Przez rozwiązanie (4.269) otrzymujemy wektor s^T, na podstawie którego budujemy macierz $R(s)$, jak w (4.274). Wektor skal d, który definiuje funkcję $V(x)$, można teraz otrzymać z (4.276), a strategię destabilizującą z (4.264).

4.10.3. Przykład obliczeniowy - kaskadowy układ regulacji

Rozważamy kaskadowy układ regulacji z zależnymi od czasu wzmocnieniami w torze sprzężenia zwrotnego, analizowany wcześniej w punktach 3.5.3 oraz 4.7.1. Schemat blokowy tego układu przedstawiony jest na rys. 3.3. Wzmocnienia $k_1(t)$ i $k_2(t)$ spełniają warunki $\alpha \le k_1(t) \le \beta$, $\alpha \le k_2(t) \le \beta$.



Rys. 4.10. *Warstwica wyliczonej funkcji $V(x)$. Kolorem białym i czarnym przedstawiono także funkje $k_1(x)$ i $k_2(x)$ definiujące strategię destabilizującą, przy czym wartości $k_1 = \alpha$, $k_2 = \alpha$ zaznaczono czarnym kolorem, a $k_1 = \beta$, $k_2 = \beta$ białym*

Fig. 4.10. *Level set of the calculated function $V(x)$. In white and black we also depicted functions $k_1(x)$ i $k_2(x)$ which give a destabilizing strategy; $k_1 = \alpha$, $k_2 = \alpha$ (black), and $k_1 = \beta$, $k_2 = \beta$ (white)*

W punkcie 4.7.1 poprzez dobór wypukłej funkcji Lapunowa (o warstwicy przybliżanej przez wielokąt) wykazano absolutną stabilność układu dla sektora danego przez $\alpha = 0.5$, $\beta = 1.8$.

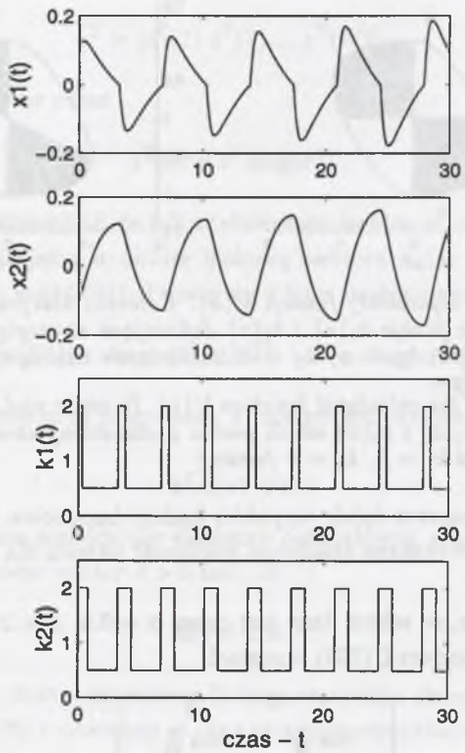
Przyjmujemy teraz, że sektor dany jest przez $\alpha = 0.5$, $\beta = 2.0$. Ponadto przyjmujemy $M = 200$ oraz macierz $U(200)$ o postaci:

$$U(200) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos\frac{\pi}{M} & \sin\frac{\pi}{M} \\ \cos\frac{2\pi}{M} & \sin\frac{2\pi}{M} \\ \dots & \dots \\ \cos\frac{(M-1)\pi}{m} & \sin\frac{(M-1)\pi}{m} \end{bmatrix}^T, \quad M = 200. \tag{4.278}$$

Dla czterech macierzy narożnych (3.64), (3.65) wyznaczamy na podstawie (4.260) i (4.262), odpowiadające im macierze (o wymiarach 200 × 200) $Q^0(1)$, $Q^0(2)$, $Q^0(3)$, $Q^0(4)$. Są to macierze rzadkie; każda z nich zawiera tylko 400 różnych od zera elementów.

Wykonując obliczenia numeryczne (z zastosowaniem programu "PCx" [24]) przekonujemy się, że rozwiązanie układu nierówności liniowych (4.269) (o wymiarze 800 × 200) istnieje. Otrzymujemy w ten sposób (800 - elementowy) wektor s^T, na podstawie którego budujemy macierz $R(s)$ jak w (4.274). Wektor skal d, który definiuje funkcję $V(x)$, wyliczamy z (4.276), a strategię destabilizującą z (4.264).

Na rys. 4.10 przedstawiono warstwicę $\{x : V(x) = 1\}$ wyliczonej wypukłej funkcji $V(x)$ oraz funkcje $k_1(x)$ i $k_2(x)$ definiujące strategię destabilizującą, przy czym obszary (stożki) $k_1 = \alpha$, $k_2 = \alpha$ zaznaczono czarnym kolorem, a $k_1 = \beta$, $k_2 = \beta$ białym. Rysunek 4.11 przedstawia przebiegi czasowe w układzie, wynikające z zastosowania wyliczonej strategii destabilizującej. Od góry: pierwszy i drugi wykres reprezentują



Rys. 4.11. *Przebiegi czasowe w układzie, wynikające z zastosowania wyliczonej strategii destabilizującej*
Fig. 4.11. *Time plots of signals in the analyzed system resulting from the calculated destabilizing strategy*

zależność od czasu pierwszej i drugiej współrzędnej stanu. Na wykresie u dołu przedstawiono zmiany $k_i(t)$, $i = 1, 2$.

Porównując dwa sektory: z punktu 4.7.1 ($\alpha = 0.5$, $\beta = 1.8$) i analizowany obecnie ($\alpha = 0.5$, $\beta = 2.0$) widzimy, że stosując opisaną metodologię oraz efektywne numerycznie algorytmy udaje się dość dobrze uchwycić granicę pomiędzy absolutną stabilnością układu a istnieniem strategii destabilizującej.

4.11. Uwagi i komentarze

Zebrane w tym rozdziale rezultaty tworzą metodologię obliczeniową, za pomocą której można badać zagadnienia związane ze stabilnością układu (0.1), (1.1). Przedstawione wyniki wykazują, że nieparametrycznie definiowane funkcje Lapunowa, wielo-

ścienne oraz przedziałami liniowe, tworzą bardzo uniwersalną klasę z punktu widzenia możliwości różnych zastosowań. W tym rozdziale przedstawiono zastosowanie takich funkcji do analizy wszystkich problemów postawionych w punkcie 1.3, do badania absolutnej stabilności, absolutnej niestabilności, a także do poszukiwania strategii destabilizujących. Obliczeniowe metody poszukiwania takich funkcji wykorzystują metody programowania liniowego.

Jednak przy konstrukcji funkcji z tej klasy napotyka się na zasadniczy problem, polegający na "eksplozji obliczeniowej", gdy wzrasta wymiar wektora stanu układu (0.1). Problem ten widoczny jest w tab. 4.1 (dla układu z trójwymiarowym wektorem stanu), gdy weźmie się pod uwagę wzrost liczby wierzchołków wielościanu Π_L spowodowany zwiększaniem L. Z tego powodu udaje się badać problemy stabilności dla przypadków, w których wymiar wektora stanu x wynosi 2 lub co najwyżej 3. Mimo skonstruowania dość efektywnych numerycznie procedur obliczeniowych trudno przekroczyć to ograniczenie. Interesujące wydaje się pytanie: czy możliwe jest wprowadzenie innych usprawnień lub nowych metod, które poprawiłyby możliwości obliczeniowe procedur analizy układu (0.1). Metodą poprawy efektywności obliczeniowej mogłoby być stworzenie algorytmu, w którym położenie (zarówno długość jak i kierunek) oraz liczba wierzchołków (ścian) hiperwielościanu definiującego funkcję Lapunowa byłyby modyfikowane tak, aby otrzymać nierównomierne ich rozmieszczenie, dopasowane do specyfiki analizowanego problemu. Prace w tym kierunku są interesującym tematem dalszych badań nad własnościami układu (0.1), (1.1).

W literaturze znana jest metoda obliczeniowa umożliwiająca poszukiwanie wielościennych funcji Lapunowa, odmienna od przedstawionych tutaj. Metoda ta, stosowana i rozwijana w szeregu publikacji, np. [8]-[13] bazuje na twierdzeniu udowodnionym w pracach Braytona i Tonga [16] oraz, niezależnie, przez Barabanowa w [106]. Twierdzenie to, w swej podstawowej wersji, dotyczy liniowych układów dyskretnych ze zmieniającymi się w czasie parametrami. Układy takie powstają np. przez dyskretyzację układu (0.1). Zgodnie ze wspomnianym twierdzeniem dyskretny układ o zmiennych w czasie parametrach jest absolutnie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednio skonstruowany ciąg zbiorów (wypukłych hiperwielościanów) w przestrzeni R^n ma granicę. Analizowany ciąg hiperwielościanów otrzymywany jest przez transformacje liniowe oraz operacje wyznaczania powłok wypukłych zbiorów. Aby twierdzenie to zastosować do układu z czasem ciągłym (0.1), dokonuje się jego dyskretyzacji z odpowiednio małym okresem. Zastosowanie opisanej metody jest ograniczone przez numeryczne aspekty konstrukcji odpowiedniego ciągu hiperwielościanów. Wielokrotne wyznaczanie powłoki wypukłej zbiorów oraz sprawdzanie warunku zatrzymania (przez przegląd wzajemnego położenia wierzchołków hiperwielościanów) może stwarzać duże trudności obliczeniowe. Dlatego przykłady numeryczne przedstawiane we wspominanych publikacjach dotyczą tylko układów drugiego rzędu. Zatem wydaje się, że z ob-

liczeniowego punktu widzenia przedstawione tu metody mają przewagę nad opisywanymi w pracach [8]-[13]. Należy jednak pamiętać, że konstrukcja złożonych metod obliczeniowych jest zawsze zagadnieniem wieloaspektowym i kryje w sobie różnorodne możliwości modyfikacji. Zastosowanie odpowiednio efektywnych obliczeniowo algorytmów i np. idei jednoczesnego wyliczania powłoki wypukłej oraz sprawdzania warunku zatrzymania, może umożliwić konstrukcję metod o wydajności wystarczającej do analizy problemów w przestrzeni trójwymiarowej. Interesujące wydaje się połączenie idei skalowania przedstawionej tutaj z metodami transformacji pochodzącymi z prac [16], [17]. Być może połączenie tych dwóch podejść mogłoby pozwolić na skonstruowanie algorytmu, w którym liczba i położenie wierzchołków hiperwielościanu definiującego funkcję $V(x)$ byłyby dobierane adaptacyjnie (jak wspomniano powyżej). Transformacje liniowe wprowadzałyby nowe punkty do listy wierzchołków hiperwielościanu, natomiast, zamiast obliczać powłokę wypukłą w algorytmie, przeprowadzałoby się operację skalowania opisaną w punktach 4.4 - 4.6.

Dla układów o rzędzie wektora stanu x równym dwa istnieją analityczne metody konstrukcji funkcji Lapunowa $V(x)$, w których warstwice poszukiwanej funkcji tworzy się na podstawie odcinków trajektorii układów narożnych $\dot{x} = A_1 x$, ..., $\dot{x} = A_N x$ (por. prace [77] [63]). Aby odpowiednio dobrać punkty przłączania pomiędzy układami narożnymi wykorzystuje się metody optymalizacji dynamicznej. Zaletą tego typu podejścia jest bardzo wysoka efektywność obliczeniowa. W niektórych sytuacjach możliwe jest wyprowadzenie analitycznych wzorów na zakresy zmienności parametrów, dla których układ pozostaje absolutnie stabilny. Na przykład dla wahadła o zmiennym położeniu puktu zawieszenia analizowanego w punktach 2.2.1, 3.5.1 i 4.4.4, opisanego równaniem (3.45), możemy, używając kryterium 2 (c) z pracy [63], uzyskać następujący warunek absolutnej stabilności:

$$\Gamma e^{-\frac{\zeta\omega_0}{\gamma}(\pi - \mathrm{arctg}\frac{\gamma}{\zeta\omega_0})} < \Delta e^{\frac{\zeta\omega_0}{\delta}\mathrm{arctg}\frac{\delta}{\zeta\omega_0}}, \tag{4.279}$$

gdzie

$$\Delta = \sqrt{\omega_0^2 + a_{min}}, \tag{4.280}$$

$$\delta = \sqrt{(1-\zeta^2)\omega_0^2 + a_{min}}, \tag{4.281}$$

$$\Gamma = \sqrt{\omega_0^2 + a_{max}}, \tag{4.282}$$

$$\delta = \sqrt{(1-\zeta^2)\omega_0^2 + a_{max}} \tag{4.283}$$

oraz istotne jest założenie $0 < \zeta < 1$. Wykorzystując przedstawiony warunek możemy sprawdzić, że przy $a_{min} = 0$ układ (3.45) pozostaje absolutnie stabilny dla $a_{max} < 1.2931$ oraz istnieje dla niego strategia destabilizująca przy $a_{max} > 1.2931$. Jest to wynik dokładniejszy od poprzednio tu opisywanych. Wadą wspomnianych metod analitycznych jest ograniczenie tylko do układów drugiego stopnia oraz konieczność przyjmowania szczegółowych założeń dotyczących maksymalnych i minimalnych

wartości parametrów dla wyprowadzenia warunków stabilności. Powoduje to, że nawet dla przypadku układów drugiego stopnia przypadki bardziej złożonej zmienności parametrów są raczej trudne do przeanalizowania.

Można także wspomnieć o szeregu innych rezultatów, polegających na zastosowaniu funkcji definiowanych nieparametrycznie do problemów modelowania analizy i projektowania układów dynamicznych. W [8], [9] przedziałami liniowe funkcje stosowano do zadawania nieliniowych praw sterowania dla liniowych układów z niepewnością. W [42], [68] funkcje przedziałami kwadratowe wykorzystywano do badania stabilności układów hybrydowych. Problem badania stabilności sprowadzono do poszukiwania rozwiązania liniowej nierówności macierzowej. W pracach [102] [76] do badania stabilności układu liniowego ze zmiennymi w czasie parametrami wykorzystywano funkcje przedziałami kwadratowe. Wykazano, że przy ich zastosowaniu uzyskuje się szersze zakresy dopuszczalnych zmian parametrów o zakresów uzyskiwanych przy zastosowaniu wspólnych kwadratowych funkcji Lapunowa. W artykule [10] funkcji przedziałami wielomianowych użyto do syntezy sterowania odpornie stabilizującego układ liniowy z niepewnością. W pracach [113] i [108] do badania stabilności układu liniowego z niepewnością wykorzystywano funkcje przedziałami kwadratowe. Problem poszukiwania funkcji z tej klasy sformułowano jako (wysoko wymiarowe) nieliniowe zadanie optymalizacji statycznej.

W artykule [105] do badania absolutnej stabilności układu liniowego ze zmiennymi w czasie parametrami użyto funkcji Lapunowa zadanej wielomianem wysokiego rzędu.

Rozdział 5

Podsumowanie

W pracy przedstawiono metody analizy stabilności układu liniowego o zmiennych w czasie parametrach, opisanego modelem (0.1), (1.1). Przez analizę stabilności układu (0.1), (1.1) rozumiano stwierdzenie, że układ ten posiada jedną z następujących własności: jest absolutnie stabilny, tzn. dla dowolnych zmian parametrów spełniających (1.1) rozwiązania startujące z dowolnych warunków początkowych są asymptotycznie stabilne, jest absolutnie niestabilny, tzn. dla dowolnych zmian parametrów spełniających (1.1) istnieją warunki początkowe takie, że trajektorie z nich startujące oddalają się od początku układu, bądź też istnieje dla tego układu strategia destabilizująca (stabilizująca), zdefiniowana przez odpowiednie funkcje opisujące zmiany parametrów w czasie. Omówiono podstawowe metody podejścia do rozważanego problemu oraz porównano możliwości ich zastosowania, a także złożoność obliczeniową. Przeprowadzona analiza prowadzi do następującej oceny przedstawionych metod badania układu (0.1), (1.1).

5.1. Metody bazujące na teorii Floqueta

Metody bazujące na teorii Floqueta wykorzystują założenie, że zmiany parametrów układu (0.1) są dane funkcjami okresowymi. Założenie to nie jest istotnym ograniczeniem dlatego, że funkcje okresowe stanowią dostatecznie szeroką klasę pobudzeń dla wyczerpującego przebadania układu (0.1), (1.1). Stosując tę metodę wylicza się wielokrotnie wykładnik Lapunowa układu (0.1), (1.1), odpowiadający różnym funkcjom zadającym zmiany paramterów. Oceny działania układu (0.1), (1.1) dokonuje się przez przegląd możliwie szerokiej klasy pobudzeń. W tego typu metodach obliczeniowych można poszukiwać strategii destabilizującej lub stabilizującej, jak to przedstawiono w przykładach z punktów 2.2.1, 2.2.1, 2.2.3. W przykładach tych zmieniano okres i wypełnienie prostokątnego przebiegu zadającego zmiany parametru.

O ile wyliczenie wykładnika Lapunowa układu dla jednego, konkretnego przebiegu zmian parametrów nie nastręcza trudności, to dokonanie przeglądu wszystkich możliwych pobudzeń z założonej klasy może być trudne lub niemożliwe. Trudności pojawiają się, jeśli funkcja zadająca zmianę parametru układu może mieć złożony przebieg zależny od kilku współczynników lub jeśli w układzie występuje więcej niż jeden zmienny w czasie parametr. Na przykład dla układu regulacji kaskadowej z punktów 3.5.3, 4.7.1, 4.10.3 zmieniają się dwa parametry $k_1(t)$ i $k_2(t)$. Układ ten nie był analizowany z wykorzystaniem metod teorii Floqueta, ponieważ efektywne wykonanie odpowiednich obliczeń byłoby bardzo trudne. Gdyby założyć, że poszukujemy dwóch częstotliwości, dwóch współczynników wypełnienia oraz jednego współczynnika opisującego fazę pomiędzy przebiegami $k_1(t)$ i $k_2(t)$, to przestrzeń pobudzeń, którą należy przeglądać, staje się pięciowymiarowa. Przeglądanie takiej przestrzeni, a także zobrazowanie jego wyników, jest raczej niemożliwe. Przegląd wszystkich możliwych pobudzeń nie jest konieczny do zbadania istnienia strategii destabilizującej (stabilizującej). Istotne jest tylko maksimum (minimum) na wykresie zależności wykładnika Lapunowa od parametrów pobudzenia. Można zatem zamiast przeglądu stosować, w połączeniu z algortymem obliczania wykładnika Lapunowa, numeryczne metody optymalizacji statycznej. Jednak podejście to często jest trudne lub niemożliwe w zastosowaniu, co zostało zilustrowane obliczeniami w przykładach analizowanych w rozdziale 2 (punkty 2.2.1, 2.2.3). Otrzymywane w praktycznych obliczeniach wykresy wykładnika Lapunowa mają wiele maksimów lokalnych, zatem metody numerycznej maksymalizacji będą często dawać błędne wyniki spowodowane odszukaniem maksimum lokalnego zamiast globalnego. Istnienie wielu maksimów i minimów lokalnych na wykresach zależności wykładnika Lapunowa od parametrów pobudzenia może być spowodowane mechanizmami analogicznymi do zjawiska rezonansu parametryczengo. Mimo tych trudności zaletą podejścia opisanego w rozdziale 2 jest jego prostota obliczeniowa i przez to łatwość numerycznej implementacji.

Obok wykorzystywania metod optymalizacji statycznej istnieje także podejście polegające na sformułowaniu problemu poszukiwania strategii destabilizującej (lub stabilizującej) dla układu (0.1), (1.1) jako zadania optymalizacji dynamicznej. Obiekt (0.1) traktuje się wtedy jako układ biliniowy (por. punkt 1.5.4), tzn. zmienne w czasie parametry uważa się za sygnały sterujące. Na przykład problem poszukiwania strategii destabilizującej sprowadza się do zadania maksymalizacji normy wektora stanu układu na końcu horyzontu sterowania. Wykazuje się, że rozwiązując ten problem oraz przechodząc z horyzontem sterowania do nieskończoności dostaje się rozwiązanie zadania poszukiwania strategii destabilizującej. Przy rozwiązywaniu problemów optymalizacji dynamicznej można zastosować dwie techniki. Pierwsza z nich wykorzystuje aparat warunków koniecznych optymalności i najpowszechniej formułowana jest w postaci zasady maksimum Pontriagina (np. [2], [34]). Jednak próby zastosowania tej

techniki do praktycznych zadań prowadzą do trudności podobnych do opisywanych. Wykorzystywanie warunków koniecznych może prowadzić do wyszukiwania punktów typu minima (maksima) lokalne, jeśli charakter rozwiązywanego problemu nie wyklucza istnienia takich punktów. W pracach [28], [29], gdzie wykorzystywano algorytm optymalizacji systemu biliniowego opisany wcześniej w [61], na podstawie badań numerycznych stwierdzono zależność położenia punktu zbieżności iteracji od założonych warunków początkowych. Sugeruje to istnienie wielokrotnych minimów lokalnych. W pracach [89], [90], [92], [93] wykazano analitycznie istnienie dowolnie dużej liczby rozwiązań w pewnych typach zadań optymalizacji układów bilinowych. Opisano tam związek tego zjawiska z osobliwością problemu optymalizacji. Wykorzystując warunki konieczne optymalności można natomiast sformułować pewne użyteczne twierdzenia, dotyczące własności optymalnych trajektorii [121] [21]. Drugie podejście to wykorzystanie aparatu warunków wystarczających, tzn. równania Hamiltona - Jacobiego - Bellmana. Stosując tę metodę można wyznaczać minima globalne dla analizowanych zadań optymalizacji. Obliczeniowe aspekty wykorzystania równania Hamiltona - Jacobiego - Bellmana do wyliczania wykładników Lapunowa układów biliniowych przedstawione są w pracach [38], [99]. Istnieją analogie pomiędzy rozwiązaniem równania Hamiltona - Jacobiego - Bellmana dla pewnych zadań optymalizacji związanych z układem (0.1), (1.1) a funkcjami Lapunowa dla tego układu (np. [85, str. 91]).

Interesującą dziedziną są także analityczne metody badania zachowania się układu (0.1), (1.1), bazujące na teorii Floqueta. Z wyników tych w pracy przedstawiono teorię rezonansu parametrycznego. Przy zastosowaniu wyników należących do tej kategorii napotyka się na ograniczenia dotyczące struktury układu (np. że musi to być układ hamiltonowski) lub ograniczenia rzędu wektora stanu (w metodach bazujących na analitycznym wyznaczaniu wykładniczej funkcji macierzowej).

5.2. Zastosowanie kwadratowych funkcji Lapunowa

Absolutną stabilność lub absolutną niestabilność układu (0.1), (1.1) można udowodnić znajdując kwadratową funkcję Lapnowa wspólną dla wszystkich układów narożnych. Zadanie poszukiwania wspólnej kwadratowej funkcji Lapunowa, zarówno dla problemu absolutnej stabilności, jak i niestabilności, sprowadza się do rozwiązania liniowej nierówności macierzowej. Liniowe nierówności macierzowe można efektywnie rozwiązywać dla układów o dość wysokim wymiarze wektora stanu; może on mieć kilkanaście a nawet kilkadziesiąt współrzędnych. Jeśli analizuje się układ ze sprzężeniem zwrotnym o zmieniającym się w czasie wzmocnieniu, to odpowiednią nierówność macierzową można przeformułować do postaci kryterium częstotliwościowego (kryterium

koła lub jego uogólnienia), będącego rozszerzeniem klasycznego kryterium Nyquista stabilności liniowych układów ze sprzężeniem zwrotnym. W przypadku gdy zmiana wzmocnienia w torze sprzężenia zwrotnego wynika z istnienia jednoznacznej, niezależnej od czasu nieliniowości spełniającej warunek sektorowy, to jako poszukiwaną wspólną funkcję Lapunowa można zastosować funkcję typu forma kwadratowa plus całka z nieliniowości. Zastosowanie takiej funkcji prowadzi do częstotliwościowego kryterium Popova (lub jego uogólnień). Wielowymiarowe kryterium Popova także ma równoważne sformułowanie w postaci liniowej nierówności macierzowej.

Opisywane w rozdziale 3 metody są najbardziej efektywne obliczeniowo. Pozwalają one analizować przykłady numeryczne, dla których inne metody przedstawione w tej pracy nie mogłyby być zastosowane, ponieważ prowadziłoby to do zbyt złożonych obliczeń.

Jednak zastosowanie kwadratowych funkcji Lapunowa pozwala uzyskać tylko wystarczające warunki absolutnej stabilności lub niestabilności. Warunki te są nadmiarowe w stosunku do rzeczywistych granic dopuszczalnych zmian parametrów. W pracy tej podano przykłady, gdzie przez zastosowanie wielościennych lub przedziałami liniowych funkcji Lapunowa pozwoliło uzyskać lepsze oszacowania dla dopuszczalnych zakresów zmian parametrów niż oszacowania wynikające z wykorzystania kwadratowych funkcji Lapunowa (przykłady w punktach 4.7.1, 4.4.4, 4.7.2, 4.8.8).

5.3. Wielościenne i przedziałami liniowe funkcje Lapunowa

Zgodnie z wynikami przedstawionymi w rozdziale 4 istnienie wielościennej funkcji Lapunowa o postaci (4.128) lub (4.173), wspólnej dla wszystkich układów narożnych, $\dot{x} = A_1x$, $\dot{x} = A_2x$,..., $\dot{x} = A_Nx$ jest warunkiem zarówno wystarczającym, jak i koniecznym absolutnej stabilności układu (0.1), (1.1). Przez zastosowanie odpowiednich metod w praktycznych obliczeniach udaje się dowieść absolutnej stabilności przykładowych układów dla zakresów zmian parametrów, których nie rozstrzygają metody wykorzystujące kwadratowe funkcje Lapunowa. Przykłady takie podano w punktach 4.7.1, 4.4.4 i 4.7.2.

Funkcje Lapunowa definiowane jako przedziałami liniowe mogą przyjmować zarówno dodatnie, jak i ujemne wartości. Dzięki temu można je zastosować do badania zarówno problemu absolutnej stabilności, jak i absolutnej niestabilności. Z zastosowaniem funkcji przedziałami liniowych formułuje się tylko warunki wystarczające absolutnej niestabiności.

Jednak, także udaje się znaleźć przykłady, gdzie zastosowanie przedziałami liniowych funkcji Lapunowa daje oszacowania zakresów zmian parametrów dokładniejsze

niż otrzymane z zastosowaniem kwadratowych funkcji Lapunowa (przykład obliczeniowy w punkcie 4.8.8).

Z wykorzystaniem funkcji wielościennych można także stworzyć algorytm poszukiwania strategii destabilizujących dla układu (0.1), (1.1). Algorytm ten opisano w punkcie 4.9. Dla układu regulacji kaskadowej (punkt 4.7.1) zastosowanie tego algorytmu pozwala wyliczyć efektywnie strategię destabilizującą. Jak już wspomniano, zastosowanie do tego problemu metody bazującej na twierdzeniu Floqueta byłoby bardzo trudne.

Zasadniczym ograniczeniem metod wykorzystujących wielościenne i przedziałami liniowe funkcje Lapunowa jest wymiarowość wektora stanu analizowanych układów dynamicznych. Wraz ze wzrostem wymiaru wektora stanu liczba wierzchołków (ścian) odpowiednich wielościanów wzrasta wykładniczo, co prowadzi do "eksplozji obliczeniowej". Z wykorzystaniem metod przedstawionych w rozdziale 4 udaje się efektywnie analizować problemy stabilności układów (0.1), (1.1), dla których wymiar wektora stanu wynosi dwa lub trzy.

Jak już wspomniano, z techniką obliczeniową polegającą na poszukiwaniu nieparametrycznie definiowanych funkcji Lapunowa spokrewnione jest podejście bazujące na zastosowaniu równania Hamiltona - Jacobiego - Bellmana do odpowiednio sformułowanego problemu optymalizacji dynamicznej. W implementacjach numerycznych tej metodologii dokonuje się dyskretyzacji biliniowego układu sterowania i w ten sposób zadanie sprowadza się do programowania dynamicznego [38]. Tu także napotyka się na trudności obliczeniowe analogiczne do opisanych powyżej, polegające na gwałtownym wzroście złożoności numerycznej wraz ze wzrostem wymiaru wektora stanu układu. W zagadnieniach programowania dynamicznego zjawisko to nazywa się często "przekleństwem wymiarowości".

Literatura

1. Arnold W. I.: Metody matematyczne mechaniki klasycznej, PWN, Warszawa 1981 (tłumaczenie z rosyjskiego).
2. Athans M., Falb P. L.: Sterowanie optymalne. Wstęp do teorii i jej zastosowania, WNT, Warszawa 1969.
3. Aubin J. P., Cellina A.: Differential inclusions, Springer Verlag, 1984.
4. Aubin J. P., Frankowska H.: Control and regulation of nonlinear systems, Materiały Europensis Maxima Schola, Warszawa, 1991.
5. Berman A., Plemmons R. J.: Nonnegative matrices in the mathematical sciences, Academic Press, 1979.
6. Białas S.: Systemy dynamiczne przedziałowe, Zeszyty Naukowe AGH, Automatyka, z. 41, Kraków 1987.
7. Bitsoris G.: Positively invariant polyhedral sets of discrete-time linear systems, Int. J. Contr., vol. 47, 1988, pp. 1713-1726.
8. Blanchini F.: Nonquadratic Lyapunov functions for robust control, Automatica, vol. 31, 1995, pp. 451-461.
9. Blanchini F.: Ultimate boundedness control for uncertain discrete-time systems via set-induced Lyapunov functions, IEEE Trans. Autom. Contr., vol. 39, 1994, pp. 428-433.
10. Blanchini F., Miani S.: On the transient estimate for linear systems with time-varying uncertain parameters, IEEE Trans. Circuits. Syst., vol. 43, 1996, pp. 592-596.
11. Blanchini F., Miani S.: A new class of universal Lyapunov functions for the control of uncertain linear systems, Proc. CDC, Kobe 1996.
12. Blanchini F., Miani S.: Constrained stabilization of continuous-time linear systems, System and Control Letters, vol. 28, 1996, pp. 95-102.

13. Blanchini F, Miani S.: Constrained stabilization via smooth Lyapunov functions, System and Control Letters, vol. 35, 1998, pp. 155-163.

14. Boyd S., El Ghaoui L., Ferron E.: Balakrishnan V., Linear matrix inequalities in system and control theory, SIAM, Studies in Applied Mathematics vol. 15, 1994.

15. Boyd S., Yang Q.: Structured and simultaneous Lyapunov functions for system stability problems, Int. J. Contr., vol. 49, 1989, pp.2215-2240.

16. Brayton R. K., Tong C. H.: Stability of dynamical systems, a constructive approach, IEEE Trans. Circuits Systems, vol. 26, 1979, pp. 224-234.

17. Brayton R. K., Tong C. H.: Constructive stability and asymptotic stability of dynamical systems, a constructive approach, IEEE Trans. Circuits Systems, vol. 27, 1980, pp. 1121-1130.

18. Brockett R. W., Lee H. B.: Frequency domain instability criteria for time-varying and nonlinear systems, Proc. IEEE, vol. 55, 1967, pp. 604-619.

19. Brockett R. W., Willems J. W.: Frequency domain stability criteria, I, II, IEEE Trans. Autom. Contr. vol. 11, 1966, I - pp. 255-261, II - pp. 407-413.

20. Buslowicz M.: Stabilność układów liniowych stacjonarnych o niepewnych parametrach, Politechnika Białostocka, Rozprawy Naukowe, nr. 48, Białystok 1997.

21. Colonius F., Kliemann W.: Minimal and maximal Lyapunov exponents of bilinear systems, J. Diff. Equat., vol. 101, 1993, pp. 232-275.

22. Chua L. O., Kang S. M.: Section-wise piecewise linear function: Canonical representation, properties and applications, Proc. IEEE, vol. 65, 1977, pp. 915-929.

23. Coddington E. A., Levinson N.: Theory of ordinary differential equations, McGraw Hill, 1955.

24. Czyzyk J., Mehotra S., Wright S. J.: PCx User Guide, Technical Report OTC 96/01, 1997.

25. Demidowicz B. P.: Matematyczna teoria stabilności, WNT, Warszawa 1972 (tłumaczenienie z rosyjskiego).

26. Deutsch E., On matrix norms and logarithmic norms, Numer. Math., vol. 24, 1975, pp. 49-51.

27. Desoer C. A., Haneda H.: The measure of a matrix as a tool to analyze computer algorithms for circuit analysis, IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-19, 1972 pp. 480-486.

28. Duda Z.: A gradient method for optimization of chemotherapy protocols, Journal of Biological Systems, vol. 13, 1995, pp. 3-11.

29. Duda Z.: Numerical solutions to bilinear models arising in cancer chemotherapy, Nonlinear World , vol. 4, 1997, 53-72.

30. Dunford N., Schwartz J. T.: Linear operators, Part I, General Theory, Interscience Publishers, New York, 1967.

31. Edelsbrunner H., Algorithms in combinatorial geometry, Springer Verlag, 1987.

32. Gahinet P., Nemirovski A., Laub A., Chilali M.: LMI control toolbox for use with Matlab, MathWorks Inc. 1995.

33. Gapski P. B., Geromel J. C.: A convex approach to absolute stability problem, IEEE Trans. Autom. Contr. vol. 39, 1994, pp. 1929-1932.

34. Górecki H.: Optymalizacja systemów dynamicznych, PWN, Warszawa 1993.

35. Grabowski P.: Spektralne i lapunowskie metody analizy nieskończenie wymiarowych systemów ze sprzężeniem zwrotnym, Zeszyty Naukowe AGH, Automatyka, z. 58, Kraków 1991.

36. Grabowski P.: Stabilność układów Lurie, Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne AGH, Kraków 1999.

37. Grunbaum B.: Convex Polytopes, Interscience Publishers, 1967.

38. Grune L.: Numerical stabilization of bilinear control systems, SIAM J. Contr. Optim., vol. 34, 1996, pp. 2024-2050.

39. Hahn W.: Theory and application of Liapunov's direct method, Prentice Hall, 1963.

40. Jarre F.: An interior point method for minimizing the maximum eigenvalue of a linear combination of matrices, SIAM J. Contr. Opt., vol. 31, 1993, pp.1360-1377.

41. Jonson U.: A Popov criterion for systems with slowly time-varying parameters, IEEE Trans. Autom. Contr. vol. 44, 1999, pp. 844-846.

42. Johansson M., Rantzer A.: Computation of Piecewise Quadratic Functions for Hybrid Systems, IEEE Trans. Autom. Contr. vol. 43, 1998, pp. 555-560.

43. Julian P., Jordan M., Desages A.: Canonical piecewise-linear approximation of smooth functions, IEEE Trans. Circuits Syst., vol. 45, 1998, pp. 567-571.

44. Julian P., Desages A., Agamennoni O.: High-level canonical piecewise linear representation using a simplicial partition, IEEE Trans. Circuits Syst., vol. 46, 1999, pp. 463-480.

45. Kaczorek T.: Teoria sterowania i systemów, PWN, Warszawa 1993.

46. Kailath T.: Linear systems, Prentice Hall, 1980.

47. Kalman R. E.: Lyapunov functions for the problem of Lur'e in automatic control, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, vol. 49, 1963, pp. 201-205.

48. Kelley J. E.: The cutting-plane method for solving convex programs, Journal of the Society of Industrial Applications of Mathematics, vol. 8, 1960, pp. 703-712.

49. Khalil H. K.: Nonlinear systems, Macmillan Publishing Company, 1992.

50. Kiendl H., Adamy J., Stelzner P.: Vector norms as Lyapunov functions for linear systems, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-37, 1992, pp. 839-842.

51. Kudrewicz J.: Częstotliwościowe metody w teorii nieliniowych układów dynamicznych, WNT, Warszawa 1970.

52. Kudrewicz J.: Nieliniowe obwody elektryczne, WNT, Warszawa 1996.

53. La Salle J., Lefschetz S.: Zarys teorii stabilności Lapunowa i jego metody bezpośredniej, (tłumaczenie z angielskiego), PWN, Warszawa 1966.

54. Lin J. N., Unbehauen R.: Canonical representation: From piecewise-linear to piecewise-smooth functions, IEEE Trans. Circuits Syst., vol. 40, 1993, pp. 461-467.

55. Li W., Lin J.N., Unbehauen R.: Canonical representation of piecewise polynomial functions with nondegenerate linear domain partitions IEEE Trans. Circuits Syst., vol. 45, 1998, pp. 838-849.

56. Luenberger D. G.: Introduction to linear and nonlinear programming, Addison-Vesley, 1973.

57. Łoskot K., Polański A., Rudnicki R.: Further comments on 'Vector norms as Lyapunov functions for linear systems', IEEE Trans. Autom. Contr., vol.43, no.2, 1998, pp.289-291.

58. Mitkowski W.: Stabilizacja systemów dynamicznych, WNT, Warszawa 1991.

59. Mitra D., So H. S.: Existence conditions for l_1 Lyapunov functions for a class of nonautonomous systems, IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-19, 1972, pp. 594-598.

60. Mohler R. R.: Nonlinear systems. I Dynamics and control, Prentice Hall, New Jersey, 1991.

61. Mohler R. R.: Nonlinear systems. II Applications to bilinear control, Prentice Hall, New Jersey, 1991.

62. Molchanov A. P., Pyatnitskiy Y. S.: Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory, Syst. Contr. Lett., vol. 13, 1989, pp. 59-64.

63. Muszyński J.: On some problems concerning pseudolinear equations, Nonlinear Vibration Problems - Zagadnienia Drań Nieliniowych, vol. 6, 1963, pp. 305-319.

64. Nesterov Y., Nemirovskii A.: Interior-point polynomial algorithms in convex programming, SIAM Studies in Applied Mathematics, 1993.

65. Niederliński A.: Układy wielowymiarowe automatyki, WNT, Warszawa 1984.

66. Ohta Y., Imanishi H., Gong L., Haneda H.: Computer generated Lyapunov functions for a class of nonlinear systems, IEEE Trans. Circuits. Syst., vol. 40, 1996, pp. 343-353.

67. Osiński Z.: Teoria drgań, PWN, Warszawa 1978.

68. Petterson S., Lennartson S.: An LMI approach to stability analysis, Proc. ECC, Brussels 1997.

69. Polak E., Wardi Y.: A nondifferentiable optimization algorithm for the design of control systems subject to singular value inequalities over a frequency range, Automatica, vol. 18, 1983, pp. 267-283.

70. Polański A.: On infinity norms as Lyapunov functions for linear systems, IEEE Trans. Autom. Contr. vol. 40, no. 7, pp. 1270-1274, 1995.

71. Polański A.: Lyapunov function construction by linear programming, IEEE Trans. Autom. Contr. vol. 42, no. 7, 1997, pp. 1113-1116.

72. Polański A.: On absolute stability analysis by polyhedral Lyapunov functions, Automatica, vol. 36, no. 4, 2000, pp. 573-578.

73. Polański A.: Destabilizing strategies for linear uncertain systems, IEEE Trans. Autom. Contr., praca przyjęta do druku (2000/2001).

74. Polański A.: Zastosowanie przedziałami liniowych funkcji Lapunowa do badania absolutnej stabilności i absolutnej niestabilności, Materiały Konferencji XIII KKA, Opole 1999, tom 1, str. 97-102.

75. Polański A.: Metody rozwiązywania liniowych nierówności macierzowych, Sprawozdanie z prac BW (badania własne) Instytutu Automatyki Politechniki Śląskiej, BW-419/RAu1/95/5, Gliwice 1995.

76. Power H. M., Tsoi A. C.: Improving the predictions of the Circle Criterion by combining quadratic forms, IEEE Trans. Autom. Contr. vol. 18, 1973, pp. 65-67.

77. Power H. M., Tsoi A. C.: A note on Brocket's variational technique and a conjecture in stability theory, IEEE Trans. Autom. Contr. vol. 19, 1974, pp. 251-252.

78. Pyatnitskiy E. S., Rapoport L. B.: Criteria of asymptotic stability of differential inclusions and periodic motions of time-varying nonlinear control systems, IEEE Trans. Circuit. Syst. vol. 43, 1996, pp. 219-229.

79. Rabczuk R.: Elementy nierówności różniczkowych, PWN, Warszawa 1976.

80. Rantzer A.: On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma, Syst. Contr. Lett., vol. 28, 1996, pp. 7-10.

81. Rockafellar T.: Convex analysis, Princeton University Press, 1970.

82. Rosenbrock H. H.: A Lyapunov function with applications to some nonlinear physical systems, Automatica, vol. 1, 1963, pp. 31-53.

83. Rouche N., Habets P., Laloy M.: Stability theory by Lyapunov's direct method, Springer Verlag, 1977.

84. Safonov M. G., Weytzner G.: Computer-aided stability analysis renders Popov criterion obsolete, IEEE Trans. Autom. Contr. vol. 32, 1987, pp. 1128-1131.

85. Sepulchre R., Jankovic M., Kokotovic P.: Constructive nonlinear control, Springer Verlag, 1997.

86. Sussmann H. J.: Minimal realizations and canonical forms for bilinear systems, J. Franklin Instit, vol. 301, 1976, pp. 593-604.

87. Szabat B. W.: Wtęp do analizy zespolonej, PWN, Warszawa 1974 (tłumaczenie z rosyjskiego).

88. Świerniak A.: Optimal treatment protocols in leukemia - modeling the proliferation cycle. Trans. IMACS on Sci. Comp. vol. 5, 1989, 51-53.

89. Świerniak A., Polański A.: Irregularity of optimal control problem in scheduling of cancer chemotherapy. Appl. Math. and Comp. Sci., Special issue: Control and Modelling of Cancer Cell Population, vol. 4 1994, 263-271.

90. Świerniak A., Polański A.: Some properties of TPBVP arising in optimal scheduling of cancer chemotherapy, Mathematical Population Dynamics (eds. Arino, Kimmel, Axelrod), Wuerz Publishing Ltd., part 2, 1995, pp. 357-368.

91. Świerniak A., Cell cycle as an object of control, Journal of Biological Systems, vol. 3, 1995, pp.41-54.

92. Świerniak A., Polański A., Kimmel M.: Optimal control problems arising in cell-cycle-specific cancer chemotherapy, Cell Proliferation, vol. 29, 1996, pp. 117-139.

93. Świerniak A., Polański A., Duda Z., Kimmel M.: Phase specific chemotherapy of cancer: Optimization of scheduling and rationale for periodic protocols, Biocybernetics and Biomedical Engineering, vol.2, 1997, pp. 13-43.

94. Tarbouriech S., Burgat S.: Positively invariant sets for constrained continuous-time systems with cone properties, IEEE Trans. Autom. Contr. vol. 39, 1994, pp. 401-405.

95. Vassilaki M., Bitsoris M.: Constrained regulation of linear continuous - time dynamical systems, Syst. Contr. Lett., vol. 13, 1989, pp. 247-252.

96. Utkin V. I.: Sliding modes in control and optimization, Springer Verlag, 1992, (tłumaczenie z rosyjskiego).

97. Vidyasagar M.: On matrix measures and convex Liapunov functions, J. Math. Anal. Appl., vol. 62, 1978, pp. 90-103.

98. Vidyasagar M.: Nonlinear systems analysis, Prentice Hall, New Jersey, 1993.

99. Wang H.: Feedback stabilization of bilinear control systems, SIAM J. Contr. Optim., vol. 36, 1998, pp. 1669-1684.

100. Weisenberger S.: Piecewise-quadratic and piecewise-linear Lyapunov functions for discontinuous systems, Int. J. Contr., vol. 10, 1969, pp. 171-180.

101. Willems J. C.: Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation, IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-16, 1971, pp.621-634.

102. Xie L., Shishkin S., Fu M.: Piecewise Lyapunov functions for robust stability of linear time-varying systems, Syst. Contr. Lett., vol. 31, 1997, pp. 165-171.

103. Youla D. C.: On factorization of rational matrices, IRE Trans. Information Theory, vol. 7, 1961, pp. 172-189.

104. Zames G., Falb P.: Stability conditions for systems with monotone and slope restricted nonlinearities, SIAM J. Contr., vol. 6, 1968, pp. 89-108.

105. Zelentsovsky A. L.: Nonquadratic Lyapunov functions for robust stability analysis of linear uncertain systems, IEEE Trans. Autom. Contr. vol. 39, 1994, pp. 135-138.

106. Барабанов Н. Е.: Метод вычисления показателя Ляпунова дифференциального включения, Автоматика и Телемеханика, 1989, nr 4, стр. 53-58.

107. Барбашин Е. А.: Функции Ляпунова, "Наука", Москва 1970.

108. Богатырев А. В., Пятницкий Е. С.: Построение кусочно-квадратичных функций Ляпунова для нелинейных систем управления, Автоматика и Телемеханика, 1987, nr 10, стр. 30-38.

109. Воронов А. А.: Устойчивость управляемость наблюдаемость, "Наука", Москва 1979.

110. Гантмахер Ф. Р.: Теория матриц, "Наука", Москва 1988.

111. Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А.: Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия, "Наука", Москва 1978.

112. Гостев В. И., Гусобский С. В.: Расчет и оптимизация систем с конечным временем съема данных, Техника, Киев 1985.

113. Каменецкий В. А., Пятницкий Е. С.: Градиентный метод построения функций Ляпунова в задачах абсолютной устойчивости, Автоматика и Телемеханика, 1987, nr 1, стр. 3-12.

114. Канторович Л. В., Акилов Г. П.: Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, Москва 1959.

115. Молчанов А. П.: Функции Ляпунова для нелинейных дискретных систем управления, Автоматика и Телемеханика, 1987, nr 6, стр. 26-35.

116. Молчанов А. П., Пятницкий Е. С.: Функции Ляпунова определяющие необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем управления. I, II, III Автоматика и Телемеханика 1986, I - nr 3, стр. 63-73, II - nr 4, стр. 5-15, III - nr 5, стр. 38-49.

117. Молчанов А. П., Пятницкий Е. С.: Абсолютная неустойчивость нелинейных, нестационарных систем, I, II, III, Автоматика и Телемеханика, 1982, I - nr 1, стр. 19-27, II - nr 2, стр. 17-28, III - nr 3, стр. 29-41.

118. Попов В. М.: Об абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования, Автоматика и Телемеханика, 1961, nr 8, стр. 961-979.

119. Попов В. М.: Гиперустойчибость автоматических систем, "Наука", Москва 1970 (tłumaczenie z rumuńskiego).

120. Пятницкий Е. С.: О равномерной устойчивости при параметрических возмущениах, Дифференциальные уравнения, 1973, nr 7, стр. 1262-1274.

121. Пятницкий Е. С.: Критерий абсолютной устойчивости нелинейных регулируемых систем с одним нелинейным нестационарным элементом, Автоматика и Телемеханика, 1971, nr 1, стр. 5-16.

122. Филиппов А. Ф.: Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью, "Наука", Москва 1985.

123. Флюгге-Лотц И.: Метод фазовой плоскости в теории релейных систем, Государственное Издательство Физико-Математической Литературы, Москва 1959 (tłumaczenie z angielskiego).

124. Чурилов А. Н.: О разрешимоси матричных неравенств, Математические заметки, vol. 36, no. 5, 1984, pp. 725-733.

125. Якубович В. А.: Абсолютная неустойчибость нелинейных систем управления. I Общие частотные критерии, Автоматика и Телемеханика, 1970, nr 12, стр. 5-14.

126. Якубович В. А.: Абсолютная неустойчибость нелинейных систем управления. II Системы с нестационарными нелинейностями. Круговой критерий, Автоматика и Телемеханика, 1971, nr 6, стр. 25-35.

127. Якубович В. А.: Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. Абсолютная устойчивость систем с гистерезисными нелинейностями, Автоматика и Телемеханика, 1965, nr 5, стр. 753-763.

128. Якубович В. А.: Решение некоторых матричных неравенств встречающихся в нелинейной теории автоматического регулирования, Доклады А. Н. СССР, 1964, nr 2, стр. 278-281.

129. Якубович В. А., Старжинский В. М.: Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, "Наука", Москва 1972.

WYBRANE ZAGADNIENIA STABILNOŚCI UKŁADÓW LINIOWYCH O ZMIENNYCH W CZASIE PARAMETRACH

Streszczenie

W niniejszej pracy rozważa się problem stabilności układu liniowego o zmiennych w czasie parametrach. W modelu analizowanym w pracy parametry zadane są mierzalnymi funkcjami czasu o wartościach w zadanych zbiorach wielościennych. Dla układów z przedstawionej klasy zagadnienie stabilności rozbija się na problemy częściowe (1) wykazania stabilności bądź niestabilności układu niezależnie od zmian jego parametrów (absolutnej stabilności lub niestabilności) oraz (2) znalezienia takich przebiegów zmian parametrów w czasie, które stabilizują bądź destabilizują układ (strategii stabilizującej lub destabilizującej).

Przedstawia się dwa sposoby podejścia do przedstawionych problemów. Pierwszy z nich obejmuje wyniki wywodzące się z teorii Floqueta. Podstawowym założeniem w tym podejściu jest okresowość zmian parametrów w czasie. Drugie podejście tworzą metody wykorzystujące twierdzenia teorii stabilności Lapunowa. Podstawowa idea polega na dobraniu funkcji Lapunowa, której pochodna wzdłuż trajektorii systemu jest, niezależnie od zmian wartości parametrów, funkcją określonego znaku.

Przedstawia się algorytmy numeryczne badania stabilności układu liniowego o zmiennych parametrach, bazujące na zastosowaniu twierdzenia Floqueta. Analizuje się przykłady obliczeniowe badania absolutnej stabilności kilku układów liniowych o zmiennych parametrach.

Opisuje się podstawowe wyniki zastosowania jako poszukiwanej funkcji Lapunowa formy kwadratowej. W najogólniejszym przypadku sprowadzają się one do problemów rozwiązywania liniowych nierówności macierzowych. Przedstawia się także częstotliwościowe warunki absolutej stabilności, obowiązujące dla układów regulacji automatycznej, w których zmiana parametrów wynika ze zmiany wzmocnień elementów sprzężenia zwrotnego. Przedstawione wyniki ilustruje się przykładami obliczeniowymi. Zastosowanie kwadratowych funkcji Lapunowa jest podejściem najbardziej efektywnym obliczeniowo, jednak warunki uzyskiwane tą drogą są tylko warunkami wystarczającymi.

Omawia się też wyniki użycia jako funkcji Lapunowa, funkcji definiowanych nieparametrycznie, wielościennych oraz przedziałami liniowych. Zastosowanie takich funkcji Lapunowa umożliwia sformułowanie zarówno warunków wystarczających, jak i koniecznych absolutnej stabilności układów liniowych o zmieniających się w czasie parametrach. Przedstawia się algebraiczne kryteria wynikające z zastosowania jako funkcji

Lapunowa funkcji wielościennych oraz przedziałami liniowych. Analizuje się szereg przykładów numerycznych badania stabilności układów liniowych o zmiennych w czasie parametrach z wykorzystaniem wyprowadzonych wyników.

STABILITY OF LINEAR SYSTEMS WITH TIME VARYING PARAMETERS - SELECTED TOPICS

Summary

In this book the problem of stability of a linear system with time - varying parameters is considered. In the analyzed model the parameters are given by measurable time functions with values belonging to given polyhedral sets. For systems from the assumed class the stability problem is decomposed into subproblems (1) of proving stability or instability of the system for all possible parameter changes (absolute stability or instability) (2) of finding such time functions defining parameter changes which will ensure stabilization or destabilization of the system (stabilizing or destabilizing strategies).

Two approaches to the introduced problems are presented. The first one includes results of Floquet theory. The main assumption in this approach is periodicity of parameter time changes. The second approach includes methods utilizing theorems from Lyapunov stability theory. The main idea is in fitting a Lyapunov function, which derivative along system trajectories is a definite function for all possible system parameter changes.

Numerical algorithms for analyzing linear time - varying system stability, based on Floquet theorem are presented. Computational examples of absolute stability analysis for linear systems with time varying parameters are given.

Basic results of application of the quadratic form as a Lyapunov function candidate are described. In the most general form absolute stability conditions lead to problems of solving linear matrix inequalities. Frequency domain absolute stability conditions, related to feedback systems with parameter change defined by time varying gains in the feedback loop, are also presented. The described results are illustrated by computational examples. Application of quadratic Lyapunov functions is the most numerically efficient approach. However, the obtained absolute stability conditions are only sufficient.

The results of using non - parametric Lyapunov function candidates, polyhedral or piecewise linear, are discussed. Applying such Lyapunov functions enables formulation of conditions which are both sufficient and necessary for absolute stability of linear systems with time varying parameters. Algebraic criterions which follow from using polyhedral or piecewise linear functions as Lyapunov function candidates, are presented. Several numerical examples of stability analysis of linear time varying systems are shown which apply the introduced methods.

Druk: Drukarnia Gliwice, ul. Zwycięstwa 27, tel. 230 49 50