ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ

Zygmunt PIĄTEK



# POLE MAGNETYCZNE W OTOCZENIU JEDNOBIEGUNOWYCH OSŁONIĘTYCH TORÓW WIELKOPRĄDOWYCH

ELEKTRYKA
Z. 166

GLIWICE
1999

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
ZESZYTY NAUKOWE
Nr 1417



Zygmunt PIĄTEK

# POLE MAGNETYCZNE W OTOCZENIU JEDNOBIEGUNOWYCH OSŁONIĘTYCH TORÓW WIELKOPRĄDOWYCH

GLIWICE 1999

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0072-4688

Wydawnictwo Politechniki Śląskiej
ul. Akademicka 5, 44-100 Gliwice
tel./fax 237-13-81

Nakład 110+83 egz. Ark. wyd. 14. Ark. druk. 12,25. Papier offset. kl. III 70x100 80 g
Oddano i podpisano do druku 10.06.1999 r. Druk ukończono w czerwcu 1999 r.
Zam. 16/99

Fotokopie, druk i oprawę wykonano w UKiP sc, *J&D. Gębka*,
Gliwice, ul. Pszczyńska 44, tel./fax 231-87-09



## SPIS TREŚCI

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ ... 9

1. WSTĘP ... 11
   1.1. Tory wielkoprądowe o przewodach szynowych osłoniętych ... 11
   1.2. Badania i obliczenia przewodów osłoniętych ... 13
   1.3. Cel i zakres pracy ... 14

2. RÓWNANIA CAŁKOWE ... 18
   2.1. Równanie całkowe dla przewodu odosobnionego ... 18
   2.2. Równania całkowe dla układu $N_C$ przewodów równoległych ... 22

3. WEKTOROWY POTENCJAŁ MAGNETYCZNY PRZEWODÓW RUROWYCH ... 28
   3.1. Potencjał magnetyczny przewodu rurowego - metoda analityczna ... 28
   3.2. Potencjał magnetyczny niewspółosiowego układu dwóch rurowych przewodów równoległych ... 31
   3.3. Potencjał magnetyczny układu $N_C$ przewodów równoległych - metoda analityczno-numeryczna ... 33
      3.3.1. Aproksymacja wektorowego potencjału magnetycznego ... 33
      3.3.2. Funkcja kształtu ... 35
         3.3.2.1. Prostokątny obszar elementarny ... 36
         3.3.2.2. Obszar elementarny przewodu walcowego i rurowego ... 37
         3.3.2.3. Trójkątny obszar elementarny ... 39
      3.3.3. Aproksymacja gęstości prądu funkcjami sklejanymi ... 45

4. IMPEDANCJE JEDNOBIEGUNOWEGO TORU WIELKOPRĄDOWEGO ... 53
   4.1. Impedancja własna przewodu odosobnionego ... 53
   4.2. Impedancje własne i wzajemne układu $N_C$ przewodów równoległych ... 55
   4.3. Impedancja przewodu rurowego ... 56
      4.3.1. Impedancja przewodu rurowego bez uwzględnienia zjawiska naskórkowości ... 56
      4.3.2. Impedancja przewodu rurowego z uwzględnieniem zjawiska naskórkowości ... 58
   4.4. Impedancje układu współosiowego dwóch przewodów rurowych ... 62
      4.4.1. Impedancje układu współosiowego dwóch przewodów rurowych bez uwzględnienia zjawisk naskórkowości i zbliżenia ... 63
      4.4.2. Impedancje układu współosiowego dwóch przewodów rurowych z uwzględnieniem zjawisk naskórkowości i zbliżenia ... 67
   4.5. Impedancje niewspółosiowego układu dwóch rurowych przewodów równoległych ... 79
      4.5.1. Impedancje niewspółosiowego układu dwóch rurowych przewodów równoległych bez uwzględnienia zjawisk naskórkowości i zbliżenia ... 81

4.5.2. Impedancje niewspółosiowego układu dwóch rurowych przewodów równoległych z uwzględnieniem zjawisk naskórkowości i zbliżenia ..... 83
4.6. Całkowite impedancje własne przewodów fazowych i osłon trójfazowego, jednobiegunowego toru wielkoprądowego ..... 89
4.7. Analityczno-numeryczne obliczanie impedancji układu $N_C$ przewodów równoległych ..... 90

5. POLE MAGNETYCZNE W OTOCZENIU OSŁONIĘTYCH TORÓW PRĄDOWYCH ..... 93
5.1. Analityczne wyznaczanie pola magnetycznego ..... 93
5.1.1. Pole magnetyczne w otoczeniu jednobiegunowego, jednofazowego, osłoniętego toru prądowego ..... 94
5.1.2. Pole magnetyczne w otoczeniu fazy $A$ ..... 99
5.1.3. Pole magnetyczne w otoczeniu fazy $B$ ..... 101
5.1.4. Pole magnetyczne w otoczeniu fazy $C$ ..... 103
5.2. Analityczno-numeryczne obliczanie pola magnetycznego ..... 104
5.3. Eliptyczne pole magnetyczne ..... 106

6. POLE MAGNETYCZNE W ŚRODOWISKACH O NIEJEDNORODNOŚCI ELEKTRYCZNEJ I MAGNETYCZNEJ ..... 110
6.1. Potencjał wektorowy ferromagnetyka ..... 110
6.1.1. Aproksymacja wektorowego potencjału magnetycznego ferromagnetyka ..... 113
6.2. Równania całkowe dla odosobnionego ferromagnetyka ..... 116
6.3. Impedancja odosobnionego ferromagnetyka ..... 122
6.4. Pole magnetyczne odosobnionego ferromagnetyka ..... 125
6.5. Układ $N_C$ równoległych ferromagnetyków ..... 126

7. POLE MAGNETYCZNE W OTOCZENIU WYBRANYCH UKŁADÓW OSŁONIĘTYCH TORÓW PRĄDOWYCH ..... 132
7.1. Pole magnetyczne w otoczeniu jednobiegunowego, jednofazowego, osłoniętego toru prądowego ..... 133
7.1.1. Jednobiegunowy, jednofazowy tor prądowy z izolowaną osłoną ..... 133
7.1.2. Jednobiegunowy, jednofazowy tor prądowy ze zwartą osłoną ..... 137
7.2. Pole magnetyczne w otoczeniu płaskiego, jednobiegunowego, osłoniętego, trójfazowego toru prądowego ..... 142
7.2.1. Pole magnetyczne w otoczeniu płaskiego toru prądowego z izolowanymi osłonami ..... 142
7.2.2. Pole magnetyczne w otoczeniu płaskiego toru prądowego z osłonami zwartymi między sobą na ich końcach i izolowanymi od ziemi ..... 146
7.2.3. Pole magnetyczne w otoczeniu płaskiego toru prądowego ze zwartymi między sobą i uziemionymi osłonami ..... 149
7.2.4. Pole magnetyczne w otoczeniu płaskiego toru prądowego z równoległą płytą przewodzącą ..... 159
7.2.5. Pole magnetyczne w otoczeniu płaskiego toru prądowego z prostopadłą płytą przewodzącą ..... 162
7.3. Pole magnetyczne w otoczeniu trójkątnego, jednobiegunowego, trójfazowego toru prądowego ..... 165



8. UWAGI KOŃCOWE I WNIOSKI ..... 167

LITERATURA ..... 172

ZAŁĄCZNIKI ..... 180
Z.1. Całki określające funkcję kształtu . $F_{ps}\left(X, Y_{ps}^{i}, Y_{ps}^{j}, Y_{ps}^{k}\right)$ ..... 180
Z.2. Całki określające funkcję kształtu . $F_{ps}^{i,j,k}\left(X, Y_{ps}^{i}, Y_{ps}^{j}, Y_{ps}^{k}\right)$ ..... 183
Z.3. Pochodne $f_{3x}, f_{3y}, \ldots, f_{7y}$ funkcji kształtu . $F_{ps}(X)$ ..... 186

STRESZCZENIA ..... 195

## CONTENTS

LIST OF PRINCIPAL SYMBOLS ..... 9

1. INTRODUCTION ..... 11
   1.1. High-current isolated-phase busducts ..... 11
   1.2. Research and calculations of isolated-phase busducts ..... 13
   1.3. Aims and scope of the paper ..... 14

2. INTEGRAL EQUATIONS ..... 18
   2.1. Integral equation for the separated conductor ..... 18
   2.2. Integral equations for the system of $N_C$ parallel conductors ..... 22

3. MAGNETIC VECTOR POTENTIAL OF TUBULAR CONDUCTORS ..... 28
   3.1. Magnetic potential of the tubular conductor - analytical method ..... 28
   3.2. Magnetic potential of the non-coaxial two parallel tubular conductors system ..... 31
   3.3. Magnetic potential of the system of $N_C$ parallel conductors - analytical-numerical method ..... 33
      3.3.1. Approximation of the magnetic vector potential ..... 33
      3.3.2. Shape function ..... 35
         3.3.2.1. Rectangular elementary area ..... 36
         3.3.2.2. Elementary area of a cylindrical or tubular conductor ..... 37
         3.3.2.3. Triangular elementary area ..... 39
      3.3.3. Approximation of current density by means of glued functions ..... 45

4. IMPEDANCES OF THE ISOLATED-PHASE BUSDUCT ..... 53
   4.1. Self-impedance of the separate conductor ..... 53
   4.2. Self and mutual impedances of the system of $N_C$ parallel conductors ..... 55
   4.3. Impedance of the tubular conductor ..... 56
      4.3.1. Impedance of the tubular conductor without considering skin effect ..... 56
      4.3.2. Impedance of the tubular conductor with regard to skin effect ..... 58
   4.4. Impedance of the coaxial system of two tubular conductors ..... 62
      4.4.1. Impedance of the coaxial system of two tubular conductors without considering skin and proximity effects ..... 63
      4.4.2. Impedance of the coaxial system of two tubular conductors with regard to skin and proximity effects ..... 67
   4.5. Impedance of the non-coaxial system of two parallel tubular conductors ..... 79
      4.5.1. Impedance of the non-coaxial system of two parallel tubular conductors without considering skin and proximity effects ..... 81
      4.5.2. Impedance of the non-coaxial system of two parallel tubular conductors with regard to skin and proximity effects ..... 83
   4.6. Total self-impedances of phase conductors and enclosures of three-phase high-current isolated-phase busducts ..... 89
   4.7. Analytical-numerical calculation of impedances of the system of $N_C$ parallel conductors ..... 90

5. MAGNETIC FIELD IN THE NEIGHBOURHOOD OF ISOLATED-PHASE BUSDUCTS ..... 93
   5.1. Analytical determination of the magnetic field ..... 93
      5.1.1. Magnetic field in the neighbourhood of the single-phase isolated-phase busduct ..... 94
      5.1.2. Magnetic field in the neighbourhood of phase $A$ ..... 99
      5.1.3. Magnetic field in the neighbourhood of phase $B$ ..... 101
      5.1.4. Magnetic field in the neighbourhood of phase $C$ ..... 103
   5.2. Analytical and numerical calculation of the magnetic field ..... 104
   5.3. Elliptical magnetic field ..... 106

6. MAGNETIC FIELD IN MEDIA WITH ELECTRIC AND MAGNETIC HETEROGENEITY ..... 110
   6.1. Vector potential of the ferromagnetic material ..... 110
      6.1.1. Approximation of magnetic vector potential of the ferromagnetic material ..... 113
   6.2. Integral equation for the separate ferromagnetic material ..... 116
   6.3. Impedance of the separate ferromagnetic material ..... 122
   6.4. Magnetic field of the separate ferromagnetic material ..... 125
   6.5. System of the $N_C$ parallel ferromagnetic materials ..... 126

7. MAGNETIC FIELD IN SELECTED SYSTEMS OF ISOLATED-PHASE BUSDUCTS ..... 132
   7.1. Magnetic field in the neighbourhood of the single-phase isolated-phase busduct ..... 133
      7.1.1. Single-phase isolated-phase busduct with insulated enclosure ..... 133
      7.1.2. Single-phase isolated-phase busduct with shorted enclosure ..... 137
   7.2. Magnetic field in the neighbourhood of the flat three-phase isolated-phase busduct ..... 142
      7.2.1. Magnetic field in the neighbourhood of the flat isolated-phase busduct with insulated enclosure ..... 142
      7.2.2. Magnetic field in the neighbourhood of the flat isolated-phase busduct with enclosures mutually shorted at its ends and isolated from earth ..... 146
      7.2.3. Magnetic field in the neighbourhood of the flat isolated-phase busduct with mutually shorted and grounded enclosures. ..... 149
      7.2.4. Magnetic field in the neighbourhood of the flat isolated-phase busduct with parallel conducting plate ..... 159
      7.2.5. Magnetic field in the neighbourhood of the flat isolated-phase busduct with perpendicular conducting plate ..... 162
   7.3. Magnetic field in the neighbourhood of the triangular three-phase isolated- phase busduct ..... 165

8. FINAL REMARKS AND CONCLUSIONS ..... 167

REFERENCES ..... 172

APPENDIX ..... 180

Z.1. Integrals determining shape function . $F_{ps}\left(X, Y_{ps}^{i}, Y_{ps}^{j}, Y_{ps}^{k}\right)$ ..... 180

Z.2. Integrals determining shape function . $F_{ps}^{ijk}\left(X, Y_{ps}^{i}, Y_{ps}^{j}, Y_{ps}^{k}\right)$ ..... 183

Z.3. Derivatives $f_{3x}, f_{3y}, \ldots, f_{5y}$ of shape function . $F_{ps}(X)$ ..... 186

ABSTRACT ..... 195

# WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

| | | |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{A}$ | - | zespolony wektorowy potencjał magnetyczny, $Wb \cdot m^{-1}$ |
| $A$ | - | zespolona wartość skuteczna wektorowego potencjału magnetycznego, $Wb \cdot m^{-1}$ |
| $\boldsymbol{B}$ | - | zespolony wektor indukcji magnetycznej, T |
| $B$ | - | zespolona wartość skuteczna indukcji magnetycznej, T |
| $\boldsymbol{E}$ | - | zespolony wektor natężenia pola elektrycznego, $V \cdot m^{-1}$ |
| $E$ | - | zespolona wartość skuteczna natężenia pola elektrycznego, $V \cdot m^{-1}$ |
| $f$ | - | częstotliwość, Hz |
| $\boldsymbol{H}$ | - | zespolony wektor natężenia pola magnetycznego, $A \cdot m^{-1}$ |
| $H$ | - | zespolona wartość skuteczna natężenia pola magnetycznego, $A \cdot m^{-1}$ |
| $I$ | - | zespolona wartość skuteczna prądu, A |
| $\lvert I \rvert$ | - | wartość skuteczna prądu sinusoidalnego, A |
| $I^*$ | - | zespolona sprzężona wartość skuteczna prądu, A |
| $\boldsymbol{J}$ | - | zespolony wektor gęstości powierzchniowej prądu, $A \cdot m^{-2}$ |
| $J$ | - | zespolona wartość skuteczna gęstości powierzchniowej prądu, $A \cdot m^{-2}$ |
| $J^*$ | - | zespolona sprzężona wartość skuteczna gęstości powierzchniowej prądu, $A \cdot m^{-2}$ |
| j | - | jednostka urojona $\left(j = \sqrt{-1}\right)$ |
| $\mathcal{J}_n$ | - | funkcja Bessela pierwszego rodzaju rzędu n |
| $\mathcal{K}_n$ | - | zmodyfikowana funkcja Bessela drugiego rodzaju (Kelvina) rzędu n |
| $\mathcal{L}$ | - | jednostkowa indukcyjność własna, $H \cdot m^{-1}$ |
| $\mathcal{M}$ | - | jednostkowa indukcyjność wzajemna, $H \cdot m^{-1}$ |
| $\boldsymbol{M}$ | - | zespolony wektor magnetyzacji, T |
| $R_1, R_2$ | - | promień wewnętrzny i zewnętrzny przewodu fazowego, m |
| $R_3, R_4$ | - | promień wewnętrzny i zewnętrzny osłony, m |
| $\mathcal{R}$ | - | rezystancja jednostkowa, $\Omega \cdot m^{-1}$ |
| $r_{XY}$ | - | odległość między punktami $X$ i $Y$, m |
| $r, \theta, z$ | - | współrzędne walcowe |
| $\mathcal{U}$ | - | jednostkowa zespolona wartość skuteczna napięcia, $V \cdot m^{-1}$ |
| $x, y, z$ | - | współrzędne kartezjańskie |
| $\mathcal{Y}$ | - | jednostkowa admitancja zespolona, $S \cdot m^{-1}$ |
| $Z$ | - | impedancja zespolona, $\Omega$ |
| $\mathcal{Z}$ | - | jednostkowa impedancja zespolona, $\Omega \cdot m^{-1}$ |
| $\gamma$ | - | konduktywność, $S \cdot m^{-1}$ |
| $\mu_r$ | - | przenikalność magnetyczna względna |
| $\mu_0$ | - | przenikalność magnetyczna bezwzględna próżni ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ H \cdot m^{-1}$) |
| $\tau$ | - | zespolony wektor gęstości liniowej prądu, $A \cdot m^{-1}$ |
| $\tau$ | - | zespolona wartość skuteczna gęstości liniowej prądu, $A \cdot m^{-1}$ |
| $\omega$ | - | pulsacja, $rad \cdot s^{-1}$ ($\omega = 2\pi f$) |
| $\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y, \mathbf{1}_z$ | - | wektory jednostkowe prostokątnego układu współrzędnych |
| $\mathbf{1}_r, \mathbf{1}_\theta, \mathbf{1}_z$ | - | wektory jednostkowe walcowego układu współrzędnych |

***Użycie w pracy innych oznaczeń, w szczególności powyższych uzupełnionych indeksami, będzie w tekście każdorazowo dokładnie objaśnione.***

# 1. WSTĘP

## 1.1. Tory wielkoprądowe o przewodach szynowych osłoniętych

W miarę wzrostu mocy elektrowni cieplnych i wodnych w końcu lat trzydziestych rozpoczęto instalowanie torów wielkoprądowych o przewodach szynowych osłoniętych, łączących wielkie generatory z transformatorami blokowymi [24, 41, 104, 181, 185]. Współczesnymi rozwiązaniami takich połączeń [104] są tory prądowe z izolacją powietrzną pod ciśnieniem atmosferycznym, o napięciach znamionowych do 36 kV oraz o prądach znamionowych:

- 10 kA w elektrowniach wodnych,
- 20 kA w elektrowniach cieplnych i jądrowych o mocach znamionowych do 900 MW,
- 31,5 kA w elektrowniach jądrowych o mocy 1300 MW.

Począwszy od lat siedemdziesiątych w elektroenergetyce światowej stosuje się tory wielkoprądowe z izolacją gazową. Najczęściej stosowanym gazem jest $SF_6$ (sześciofluorek siarki) o ciśnieniu od 0,29 do 0,51 MPa (przy $20^0$C) [29, 31, 64, 69, 74, 75, 79, 97, 123, 179, 180]. W ostatnich latach $SF_6$ zastępowany jest mieszaniną 95% $N_2$ i 5% $SF_6$ o ciśnieniu 13 MPa odpowiadającemu ciśnieniu 4 MPa w przypadku czystego $SF_6$ [47, 107, 179]. Obecnie takie tory są budowane na napięcia od 72 do 1200 kV, najczęściej jednak na napięcia od 110 do 750 kV i prądach znamionowych od 1 do 12 kA i mocach znamionowych od 200 do 4000 MV·A [31, 75, 97, 179, 180]. Najkorzystniejszym zastosowaniem torów wielkoprądowych z izolacją gazową, w porównaniu z liniami napowietrznymi lub kablowymi, jest stosowanie ich dla napięć większych od 245 kV i mocach przesyłowych od 2000 do 4000 MV·A. Według szacunków EdF [179, 180] koszt budowy takiego toru dla napięcia 400 kV jest dziesięciokrotnie mniejszy niż równoważnej linii napowietrznej i dwukrotnie mniejszy niż linii kablowej o izolacji z tworzyw sztucznych lub olejowej. Również wg polskich szacunków [31, 118] otrzymuje się podobną ocenę kosztów.

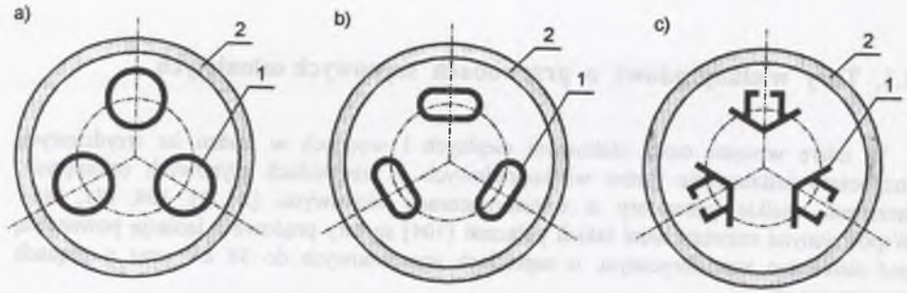
Tory wielkoprądowe z izolacją gazową w literaturze anglojęzycznej nazywane są GIL (gas-insulated line) lub GITL (gas-insulated transmission line). Spotyka się też nazwę CGIC (compressed gas-insulated cable). W literaturze francuskojęzycznej używa się nazwy CIG (câble à isolation gazeuse). W pracy [29] T.Bełdowski proponuje polską nazwę POG (przewód osłonięty z izolacją gazową).

Długości stosowanych torów wielkoprądowych o przewodach szynowych osłoniętych z izolacją lub bez izolacji gazowej zawarte są od kilku metrów do kilkunastu kilometrów [31, 68, 97, 123, 179, 180].

Tory wielkoprądowe o przewodach osłoniętych buduje się jako:

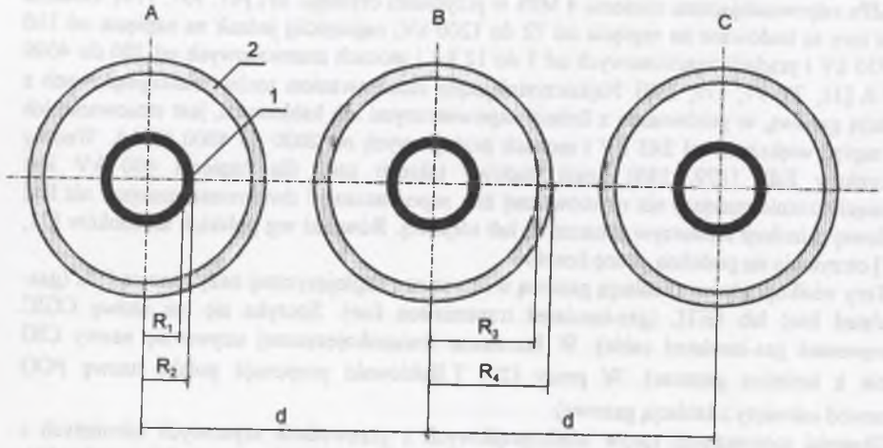
- trójbiegunowe, w których wszystkie trzy przewody fazowe są umieszczone we wspólnej obudowie; ang. TPGIL (three-phase gas insulated line), fr. TGT (Transport électrique à isolation Gazeuse Triphasé) - rys.1.1.
- jednobiegunowe (z izolowanymi fazami), w których każdy przewód fazowy znajduje się w osobnej osłonie; ang. IPGIL (isolated-phase gas insulated line) - rys.1.2.

W dotychczasowych rozwiązaniach osłoniętych torów wielkoprądowych przeważają oddzielne obudowy dla każdej z faz.




Rys.1.1. Trójbiegunowy tor wielkoprądowy o przewodach osłoniętych; a) o przewodach rurowych, b) o przewodzie profilowym typu HON („Holduct" Pszczyna [68]), c) o przewodzie profilowym typu ELPO („Elektrobudowa" Katowice [122, 123]), 1 - przewód fazowy, 2 - osłona

Fig.1.1. Three-phase gas insulated line; a) with tubular conductors, b) with moulded conductors of HON type („Holduct" Pszczyna [68]), c) with moulded conductors of ELPO type („Elektrobudowa" Katowice [122, 123]), 1 - phase condoctor, 2 - enclosure




Rys.1.2. Jednobiegunowy płaski tor wielkoprądowy o przewodach osłoniętych; 1 - przewód fazowy, 2 - osłona

Fig.1.2. Flat high-current isolated-phase busduct; 1 - phase condoctor, 2 - enclosure

Przewód fazowy jest zazwyczaj przewodem rurowym lub profilowanym z aluminium, ze stopu aluminium lub miedzi. Osłony wykonane są ze stopów aluminiowych, rzadziej ze stali niemagnetycznej. Jeżeli tor prądowy układany jest w ziemi, jak to ma często miejsce dla torów trójbiegunowych [64, 179, 180], to dodatkowo instaluje się koncentryczną, zewnętrzną obudowę stalową.



## 1.2. Badania i obliczenia przewodów osłoniętych

Zrealizowane dotychczas przykładowe badania przewodów osłoniętych dotyczyły rozkładu pola elektrycznego [123, 156, 158, 184], strat mocy [19, 184], badania nagrzewania i pomiaru rezystancji obwodu głównego [19, 125] badań napięciowych [43, 125] oraz pól magnetycznych w otoczeniu torów prądowych [140, 143].

Obliczenia osłoniętych torów wielkoprądowych dotyczą przede wszystkim:

- rozkładu pola elektromagnetycznego, prądów wirowych i strat mocy czynnej; dla torów trójbiegunowych w pracach [10, 21, 28, 48, 51, 79, 80, 81, 94, 98, 111, 122, 123, 124, 129, 133, 134, 161, 165, 172, 173, 189] oraz dla torów jednobiegunowych w pracach [1, 3, 12, 21, 23, 24, 25, 26, 38, 41, 53, 63, 65, 70, 78, 82, 84, 93, 117, 119, 120, 124, 129, 139, 142, 147, 148, 157, 162, 163, 177, 181, 185],
- rozkładu temperatur [20, 22, 28, 55, 73, 122, 123, 124, 132, 149, 151, 174, 186],
- sił elektrodynamicznych [28, 56, 85, 122, 123, 127, 130, 133],
- rozkładu pola elektrycznego i zagadnień izolacyjnych [9, 28, 47, 59, 107, 122, 157, 171].

Wśród metod obliczania osłoniętych torów wielkoprądowych wyróżnia się kilka podstawowych grup:

- metody „półempiryczne",
- metody analitycznego rozwiązywania równań różniczkowych,
- metoda elementów skończonych,
- metody równań całkowych,
- metoda elementów brzegowych.

Obszerne omówienie tych metod stosowanych dla osłoniętych torów wielkoprądowych wraz z podaniem literatury przedstawiono w pracach [28, 122, 123]. Metody te wywodzą się z bardzo obszernej problematyki zagadnień brzegowych [34, 40, 77, 90, 109, 135, 157, 165, 190].

Obliczanie pól elektromagnetycznych w otoczeniu osłoniętych torów wielkoprądowych dokonuje się ze swej natury w obszarach nieograniczonych. Obliczenia te wykonuje się metodami analitycznymi, jak również numerycznymi, takimi jak: różnic skończonych, sieci reluktancyjnych, równań całkowych, elementów brzegowych i najbardziej rozpowszechnioną w obliczeniach pól elektromagnetycznych w urządzeniach technicznych o skomplikowanych kształtach - metodą elementów skończonych. Ta ostatnia metoda jest generalnie stosowana z dobrymi rezultatami w przypadku obliczeń w obszarach ograniczonych [87, 88, 135, 165]. Stosowanie jej w ośrodkach nieograniczonych wymaga wprowadzenia powierzchni granicznej, na której wykonuje się obliczenie pola elektromagnetycznego, by następnie, wykorzystując równanie całkowe, obliczyć pole w obszarze nieograniczonym [37, 58, 103, 160].

Sformułowanie zagadnień brzegowych w postaci równań całkowych umożliwia otrzymanie przybliżonych rozwiązań pola elektromagnetycznego układów o złożonej postaci. Ogólną zaletą równań całkowych jest fakt, że wystarczy tu dyskretyzować jedynie obszar przewodzący, zaś spełnienie odpowiednich warunków przez rozwiązanie w obszarze zewnętrznym jest zapewnione automatycznie. Równanie całkowe zostaje przybliżone układem

$N$ równań algebraicznych, gdzie niewiadomymi są wartości poszukiwanej funkcji pola, natomiast elementy macierzy współczynników zespolonych są całkami z jądra równania całkowego. Otrzymane układy równań są skromniejszych rozmiarów niż przy zastosowaniu metody elementów skończonych, ale są to układy o macierzach pełnych niesymetrycznych. Nie stanowi to jednak większej trudności, uwzględniwszy możliwości obliczeniowe współczesnych elektronicznych maszyn cyfrowych.

Z powyższych względów, w niniejszej pracy, do obliczeń impedancji i pola magnetycznego osłoniętych torów wielkoprądowych zostaje wybrana metoda równań całkowych.

## 1.3. Cel i zakres pracy

Prądy znamionowe współcześnie instalowanych torów wielkoprądowych, zarówno nieosłoniętych jak i osłoniętych, mogą osiągać wartość do 40 kA. W konsekwencji wartości natężeń zmiennych pól magnetycznych emitowanych przez takie tory są duże nawet w warunkach znamionowych. Pola te, o częstotliwości przemysłowej, oddziałują na własne elementy oraz na szeroko rozumiane otoczenie - inne urządzenia i aparaty elektroenergetyczne, konstrukcje stalowe, elektroniczne obwody sterowania, kontroli i transmisji danych, środowiska naturalne i na człowieka [6, 30, 42, 45, 72, 83, 116, 168, 169]. Przekroczenie przez te pola pewnych dopuszczalnych wartości natężeń prowadzić może do nieprawidłowego funkcjonowania urządzeń elektrycznych, nadmiernego nagrzewania się konstrukcji stalowych, degradacji środowiska naturalnego i może także stwarzać zagrożenia dla człowieka. Wszystkie te problemy można sprowadzić do zagadnień kompatybilności elektromagnetycznej [46, 105, 126, 159, 192, 193], dla której wymaga się precyzyjnego określania wartości natężeń magnetycznych o częstotliwości przemysłowej.

Wartości natężeń magnetycznych w otoczeniu osłoniętych torów prądowych zależą od ich prądów roboczych ale również od ich struktury: trójbiegunowej lub jednobiegunowej.

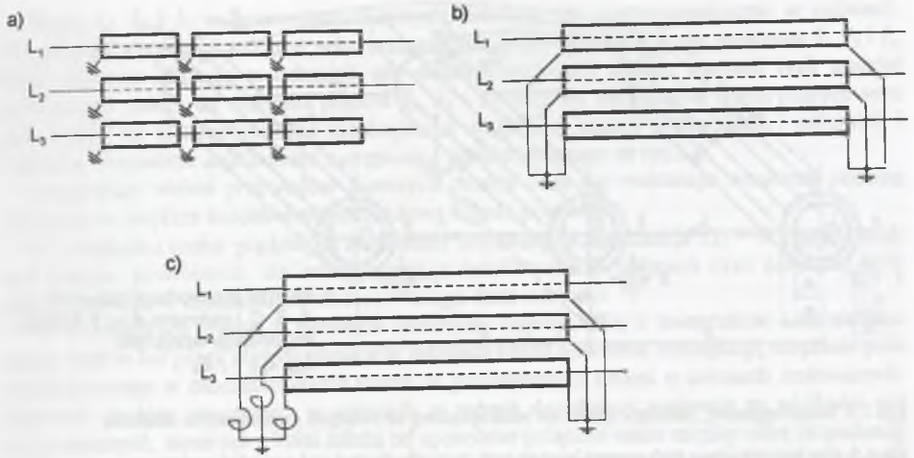
W przypadku torów trójbiegunowych (rys.1.1), dzięki symetrii geometrycznej (przewody fazowe umieszczone są w wierzchołkach trójkąta równobocznego) i przy osłonie przewodzącej, wypadkowe pole magnetyczne wytworzone przez symetryczne prądy fazowe zanika już w niewielkich odległościach od takiego toru [64, 131, 179, 180].

Odmienna sytuacja istnieje dla płaskich, jednobiegunowych, osłoniętych torów wielkoprądowych. Natężenia pola magnetycznego w ich otoczeniu osiągają duże wartości nawet w stosunkowo dużych odległościach od takiego toru. Spowodowane jest to ich asymetrią geometryczną. Natężenia tych pól zależą od fazowych prądów roboczych oraz od prądów powrotnych w osłonach. Wartości tych ostatnich prądów zależą od sposobów połączenia osłon między sobą, od sposobów uziemienia oraz od parametrów elektrycznych osłoniętego toru wielkoprądowego, tzn. impedancji własnych przewodów fazowych i osłon oraz impedancji wzajemnych między przewodami i osłonami.

Rozróżnia się trzy zasadnicze sposoby połączeń osłon toru wielkoprądowego [1, 24, 41, 162, 181, 185]:

- osłony izolowane, uziemione w jednym punkcie - rys.1.3a,
- osłony ciągłe z uziemieniem na ich końcach - rys.1.3b - lub także w punktach pośrednich [25, 26],
- osłony ciągłe z uziemieniem na ich końcach poprzez dławiki - rys.1.3c (rzadko stosowane).

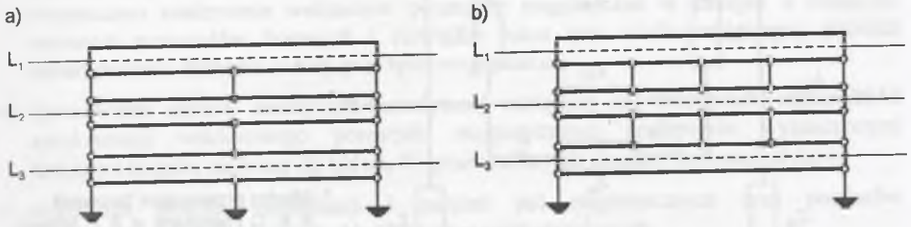





Rys.1.3. Sposoby połączeń osłon torów wielkoprądowych; a) osłony dzielone; b) osłony ciągłe uziemione bezpośrednio; c) osłony ciągłe uziemione przez dławiki

Fig.1.3. Ways of connections of high-current busducts enclosures; a) divided enclosures; b) continuous directly grounded enclosures; c) continuous enclosures grounded by reactors

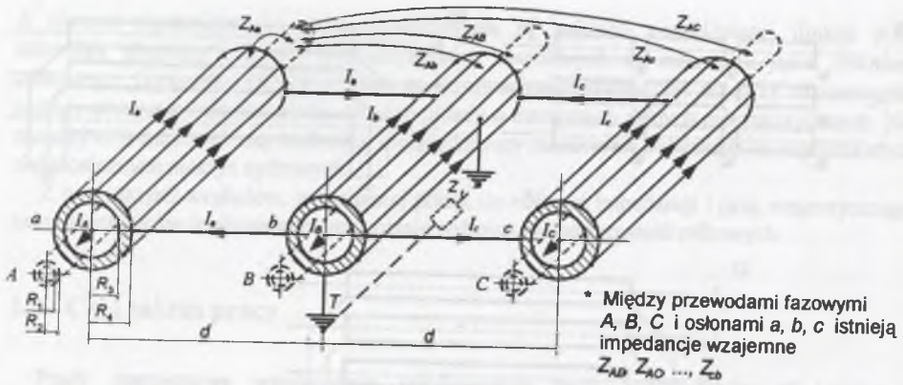
We współczesnych rozwiązaniach stosuje się przede wszystkim uziemienie osłon na ich końcach, przy czym dla długich torów prądowych osłony łączą się ze sobą w punktach pośrednich i w punktach uziemienia - rys.1.4a lub pozostawia się je odizolowane od ziemi- rys.1.4b.




Rys.1.4. Osłony torów wielkoprądowych połączone ze sobą w więcej niż dwóch punktach; a) osłony połączone ze sobą w trzech punktach i uziemione - Elektrownia „Konin" [26]; b) osłony połączone ze sobą w wielu punktach, przy czym tylko ich końce są uziemione - tor o długości 17 km w Arabii Saudyjskiej, zainstalowany przez GEC ALSTHOM [139]

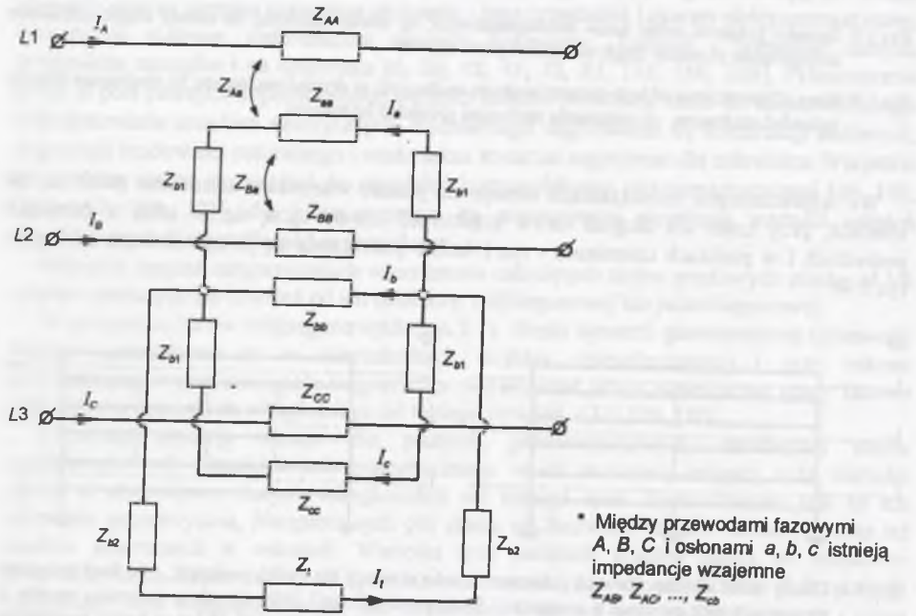
Fig.1.4. High-current busducts enclosures mutually connected at more than two points; a) enclosures are mutually connected at three points and grounded – Power plant „Konin" [26]; b) enclosures are mutually connected at several points while only its extreme points are grounded – busduct of 17 km length in Saudi Arabia installed by GEC ALSTHOM [139]

W przypadku ogólnym płaski tor prądowy lub jego „przęsło", tj. odcinek między dwoma sąsiednimi punktami zwarcia osłon między sobą, przedstawiono na rys.1.5.




Rys.1.5. Jednobiegunowy, osłonięty, płaski tor wielkoprądowy ze zwartymi i uziemionymi osłonami

Fig.1.5. Flat isolated-phase high-current busduct with mutually shorted and grounded enclosures




Rys.1.6. Schemat zastępczy płaskiego, osłoniętego toru wielkoprądowego ze zwartymi i uziemionymi osłonami; $Z_{AA}$, $Z_{BB}$, $Z_{CC}$ - impedancje własne przewodów fazowych, $Z_{aa}$, $Z_{bb}$, $Z_{cc}$ - impedancje własne osłon, $Z_{AB}$, ..., $Z_{aa}$, ..., $Z_{Cb}$ - impedancje wzajemne między przewodami fazowymi i osłonami, $Z_{b1}$ - impedancja szyny łączącej dwie osłony, $Z_{b2}$ - impedancja szyny uziemiającej (wraz z impedancją ewentualnego dławika), $Z_t$ - impedancja uziemienia

Fig.1.6. Equivalent diagram of flat isolated-phase high-current busduct with mutually shorted and grounded enclosures; $Z_{AA}$, $Z_{BB}$, $Z_{CC}$ – self impedances of phase conductors, $Z_{aa}$, $Z_{bb}$, $Z_{cc}$ – self impedances of enclosures, $Z_{AB}$, ..., $Z_{aa}$, ..., $Z_{Cb}$ – mutual impedances between the phase conductors and the enclosure, $Z_{b1}$ – impedance of bar connecting two enclosures, $Z_{b2}$ – impedance of grounding bar (together with the impedance of possible reactor), $Z_t$ – ground impedance



Prądy $I_A$, $I_B$ i $I_C$ w przewodach fazowych indukują siły elektromotoryczne w osłonach. W przypadku połączeń osłon ze sobą oraz z ziemią popłyną w nich prądy powrotne $I_a$, $I_b$ i $I_c$, które również indukują w osłonach siły elektromotoryczne. Zatem wartości tych prądów powrotnych zależą od wartości prądów $I_A$, $I_B$ i $I_C$ oraz od parametrów elektrycznych toru prądowego (w szczególności od indukcyjności wzajemnej między przewodami i osłonami) i można je wyznaczyć ze schematu zastępczego przedstawionego na rys.1.6.

Impedancje własne przewodów fazowych i osłon oraz ich reaktancje wzajemne zostaną wyznaczone poprzez modelowanie obwodowe układu polowego.

W przypadku torów prądowych z osłonami izolowanymi impedancja $Z_{b1} = \infty$ i wtedy brak jest prądów powrotnych, ale istnieją napięcia indukowane w osłonach oraz natężenie pola magnetycznego w otoczeniu takich torów osiąga duże wartości.

W przypadkach torów z osłonami zwartymi między sobą i ewentualnie uziemionymi bezpośrednio lub przez dławiki płynące w osłonach prądy powrotne zmniejszają natężenie pola magnetycznego w otoczeniu takich torów w porównaniu z torami o osłonach izolowanych. Wartości prądów powrotnych w osłonach w sposób decydujący wpływają na wielkości pól magnetycznych, same zaś z kolei zależą od sposobów połączeń osłon między sobą (impedancji $Z_{b1}$), uziemienia (impedancji $Z_{b2}$ i $Z_t$) i parametrów elektrycznych torów (impedancje $Z_{AA}$, $Z_{aa}$, ..., $Z_{Cb}$). Stąd też formułuje się zasadniczy cel niniejszej pracy, którym jest:

**Wyznaczanie impedancji własnych i wzajemnych oraz pól magnetycznych w otoczeniu osłoniętych, jednobiegunowych torów wielkoprądowych z uwzględnieniem sposobów połączeń osłon między sobą oraz sposobów ich uziemień.**

Przedstawiony cel pracy osiągnięto poprzez:

- opracowanie metody analitycznej wywodzącej się z równań całkowych dla układu $N_C$ przewodów równoległych, w których wprowadzono jednostkowe spadki napięć, odpowiadające natężeniom bezwirowych pól elektrycznych w przewodach oraz w których wyznaczono analitycznie wektorowe potencjały magnetyczne w każdym z obszarów rurowych przewodów fazowych i rurowych osłon toru wielkoprądowego; zjawiska nakórkowości i zbliżenia zostały przy tym uwzględnione,
- opracowanie metody analityczno-numerycznej bazującej na równaniach całkowych i aproksymacji wektorowego potencjału magnetycznego analitycznie wyznaczonymi funkcjami kształtu zarówno dla układu $N_C$ przewodów, jak również ferromagnetyków,
- wykonanie obliczeń impedancji i natężeń pól magnetycznych oraz pomiarów sprawdzających dla wybranych układów torów wielkoprądowych.

W pracy przyjęto następujące założenia:

- środowiska, w których analizuje się pole elektromagnetyczne są liniowe i izotropowe,
- przewody fazowe i osłony są nieskończenie długie – rozważany system zostaje ograniczony do przestrzeni 2D,
- przewidywany zakres częstotliwości prądu pozwala na pominięcie w rozważaniach prądów przesunięcia.

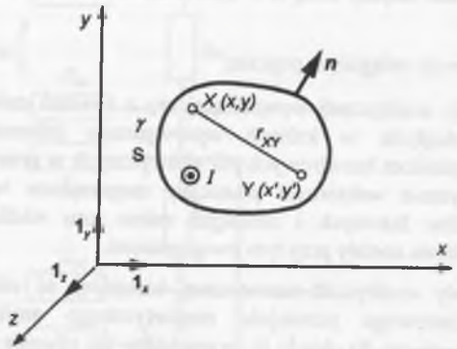
# 2. RÓWNANIA CAŁKOWE

Sformułowanie zagadnień brzegowych w postaci równań całkowych, w których wprowadza się jednostkowe spadki napięć w przewodach, pozwala otrzymać dla prostych układów torów prądowych analityczne wzory, określające impedancje własne i wzajemne toru. W przypadku złożonego toru prądowego otrzymuje się przybliżone rozwiązania pola elektromagnetycznego w jego przewodach i jego otoczeniu. Impedancje własne i wzajemne są wtedy wyznaczone również w sposób przybliżony.

W rozdziale tym wyprowadzono równania całkowe dla przewodu odosobnionego oraz dla układu $N_c$ przewodów równoległych.

## 2.1. Równanie całkowe dla przewodu odosobnionego

Zakłada się, że przez równoległy do osi $Oz$ przewód odosobniony (rys.2.1) o konduktancji $\gamma$ i przekroju poprzecznym S płynie, zgodnie ze zwrotem osi $Oz$, prąd sinusoidalny o pulsacji $\omega$ i wartości zespolonej $I$.




Rys.2.1. Przewód odosobniony z prądem $I$

Fig.2.1. Separated conductor with current $I$

Wektor gęstości prądu $J(X)$ w przewodzie ($X \in S$) jest równoległy do osi $Oz$, czyli ma jedną składową $J(X)$ wzdłuż tej osi. Wektor ten zapisuje się w postaci:

$$\boldsymbol{J}(X) = \mathbf{1}_z J(X). \tag{2.1}$$

Składowa $J(X)$ jest niezależna od współrzędnej $z$. Rozważany problem jest zatem dwuwymiarowy.



Wektor gęstości prądu spełnia następujący warunek na granicy powierzchni przewodzącej:

$$\boldsymbol{J}(X) \cdot \boldsymbol{n} = 0, \tag{2.1a}$$

gdzie $\boldsymbol{n}$ jest wektorem normalnym do powierzchni S przewodu. Ponadto wektor gęstości prądu spełnia warunek ciągłości

$$\operatorname{div} \boldsymbol{J}(X) = 0. \tag{2.1b}$$

Zakładając, że przenikalność magnetyczna przewodu jest równa $\mu_0$, natężenie pola magnetycznego w dowolnym punkcie $X \in R^2$

$$\boldsymbol{H}(X) = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \boldsymbol{A}(X), \tag{2.2}$$

gdzie $A(X)$ jest wektorowym potencjałem magnetycznym.

W analizowanym przypadku przewodu odosobnionego potencjał $\boldsymbol{A}(X)$ jest równoległy do osi $Oz$, czyli

$$\boldsymbol{A}(X) = \mathbf{1}_z A(X) \tag{2.3}$$

i jego składowa $A(X)$ wzdłuż osi $Oz$ określona jest [89, 90, 175] przez skalarne, dwuwymiarowe równanie Poissona

$$\nabla^2 A(X) = -\mu_0 J(X) \tag{2.3a}$$

w obszarze przewodzącym, tzn. dla $X(x, y) \in S$, oraz skalarne, dwuwymiarowe równanie Laplace'a

$$\nabla^2 A(X) = 0 \tag{2.3b}$$

poza tym obszarem, tzn. dla $X(x, y) \in R^2 \backslash S$.

Zagadnienie brzegowe układu równań (2.3a) i (2.3b) polega na wyznaczeniu ich rozwiązania spełniającego określone warunki brzegowe. Spełnienie tych warunków stanowi tutaj podstawową trudność. Zagadnienie to jest stosunkowo łatwe dla odosobnionych przewodów o symetrii geometrycznej (np. przewód walcowy lub rurowy) oraz dla układów przewodów o pewnych szczególnych symetriach geometrycznych (np. układ współosiowy dwóch przewodów rurowych).

Innym sposobem podejścia do zagadnień brzegowych jest sformułowanie ich w postaci układu równań całkowych [90, 175]. Równania całkowe pozwalają w stosunkowo prosty sposób uzyskać spełnienie warunków brzegowych, a samo rozwiązanie zagadnienia brzegowego otrzymuje się przy zastosowaniu metod przybliżonych.

Z drugiego równania Maxwella

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}(X) = -\mathrm{j}\omega\mu_0 \boldsymbol{H}(X) \tag{2.4}$$

oraz ze wzoru (2.2) otrzymuje się równanie

$$\mathbf{rot}\left[E(X)+\mathrm{j}\omega A(X)\right]=0, \tag{2.4a}$$

a stąd [90]

$$E(X)+\mathrm{j}\omega A(X)=-\mathbf{grad}\,\varphi, \tag{2.4b}$$

gdzie wielkość $\varphi$ jest zespolonym potencjałem elektrycznym.

Rozważany problem jest dwuwymiarowy, wobec tego

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0, \tag{2.5}$$

$$\mathbf{grad}\varphi=\mathbf{1}_z\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z} \tag{2.5a}$$

oraz

$$-\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}=\mathcal{U}, \tag{2.5b}$$

gdzie $\mathcal{U}$ jest jednostkowym (w $\mathrm{V\cdot m^{-1}}$) spadkiem napięcia w przewodzie. Wtedy też z równania (2.4b) otrzymuje się, że

$$E(X)=E_{in}(X)+E_{st}(X), \tag{2.6}$$

gdzie:

- natężenie indukowanego pola elektrycznego

$$E_{in}(X)=-\mathrm{j}\omega A(X), \tag{2.6a}$$

- natężenie bezwirowego pola elektrycznego (w pracy [90] Krakowski nazywa je statycznym polem elektrycznym)

$$E_{st}(X)=-\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}=\mathcal{U}, \tag{2.6b}$$

które jest polem zewnętrznym (pierwotnym, źródłowym) [87, 88, 89, 175].

Ostatecznie z powyższych równań otrzymuje się następujące równanie:

$$E(X)+\mathrm{j}\omega A(X)=\mathcal{U}. \tag{2.7}$$

Wypadkowe natężenie pola elektrycznego $E(X)$ w przewodzie związane jest z wypadkową gęstością prądu $J(X)$ uogólnionym prawem Ohma

$$E(X)=\frac{J(X)}{\gamma}. \tag{2.8}$$



Rozwiązaniem układu równań (2.3a) i (2.3b) jest funkcja zwana logarytmicznym potencjałem magnetycznym obszaru płaskiego S [40, 90, 95]

$$A(X)=\frac{\mu_0}{2\pi}\int_S J(Y)\ln\frac{1}{r_{XY}}\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y', \tag{2.9}$$ *

gdzie: $X=X(x,y)$ - punkt obserwacji i $X\in\mathrm{R}^2$,
$Y=Y(x',y')$ - punkt źródłowy i $Y\in S$,
S - powierzchnia, na której $J(Y)\neq 0$,
$r_{XY}$ - odległość między punktem obserwacji $X$ a punktem źródłowym $Y$ (rys.2.1), wyrażająca się wzorem:

$$r_{XY}=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}. \tag{2.9a}$$

Po podstawieniu wzorów (2.8) i (2.9) do równania (2.7) otrzymuje się dla $X(x,y)\in S$

$$\frac{J(X)}{\gamma}+\mathrm{j}\omega\frac{\mu_0}{2\pi}\int_S J(Y)\ln\frac{1}{r_{XY}}\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'=\mathcal{U}. \tag{2.10}$$

Równanie (2.10) jest dwuwymiarowym równaniem całkowym Fredholma drugiego rodzaju z jądrem słabo osobliwym [16, 89, 90, 152, 157, 175, 182, 188]. Jak wiadomo [16, 41, 182], ma ono jednoznaczne rozwiązanie dla dowolnej (nie tylko stałej) prawej strony.

W ogólnym przypadku równanie całkowe (2.10) daje się rozwiązać tylko metodami przybliżonymi. Istnieje szereg metod przybliżonego rozwiązywania równań całkowych [90, 112, 175, 188]. Metody sprowadzające równania całkowe do układu liniowych równań algebraicznych to przede wszystkim: metody momentów, Galerkina i kolokacji [90].

W niniejszej pracy proponuje się metodę zbliżoną do metody kolokacji, polegającą na podziale obszaru S przewodu na $N_d$ obszarów elementarnych $S_s$ i przyjęciu, że w każdym z tych obszarów funkcja gęstości prądu jest stała i równa $J_s$. Wtedy też potencjał (2.9), a więc całka w równaniu (2.10) zostaje aproksymowana tzw. funkcją kształtu $F_s(X)$, którą wyznaczono analitycznie w rozdziale 3, p.3.3.2. Wtedy potencjał

$$A(X)=\frac{\mu_0}{2\pi}\sum_{s=1}^{N_d}J_sF_s(X), \tag{2.11}$$

gdzie: $s=1,2,\ldots,N_d$,

$$F_s(X)=\int_{S_s}\ln\frac{1}{r_{XY}}\,\mathrm{d}x'dy'. \tag{2.11a}$$

---

* W układzie jednostek SI prawa strona równania Poissona (2.3a) wyrażona jest w $\mathrm{Wb\cdot m^{-3}}$. Zatem zmienne $x$, $y$ przyjętego tutaj płaskiego prostokątnego układu współrzędnych, występujące w Laplasjanie $\nabla^2$ lewej strony tego równania, wyrażone są w metrach. W konsekwencji odległość $r_{XY}$ określona wzorem (2.9a) również wyrażona jest w metrach. Aby zatem funkcja $\frac{1}{r_{XY}}$, logarytmowana we wzorze (2.9), była bezwymiarowa, jej licznik, co należy wyraźnie podkreślić, musi być równy jednostce miary długości. Obszerne przedstawienie zagadnień dotyczących matematycznej natury wielkości fizykalnych czytelnik znajdzie w pracy [36].

Stąd równanie całkowe (2.10) sprowadza się do układu $N_d$ równań algebraicznych dla $X \in S_t$

$$\frac{J_t}{\gamma} + \frac{j\omega\mu_0}{2\pi}\sum_{s=1}^{N_d} J_s F_s(X) = \mathcal{U}, \tag{2.12}$$

gdzie: $J_t$ - stała wartość gęstości prądu w obszarze elementarnym $S_t$,
$t = 1, 2, \ldots, N_d$ - numer $t$-tego obszaru elementarnego.

Równanie (2.10) zostało zatem przybliżone układem $N_d$ równań algebraicznych (2.12), gdzie niewiadomymi są wartości gęstości prądu w obszarach elementarnych $S_s$, natomiast elementy macierzy współczynników są całkami po elementach $S_s$ z jądra równania całkowego. Istnieją przy tym dwa sposoby podejścia do rozwiązania takiego układu równań:

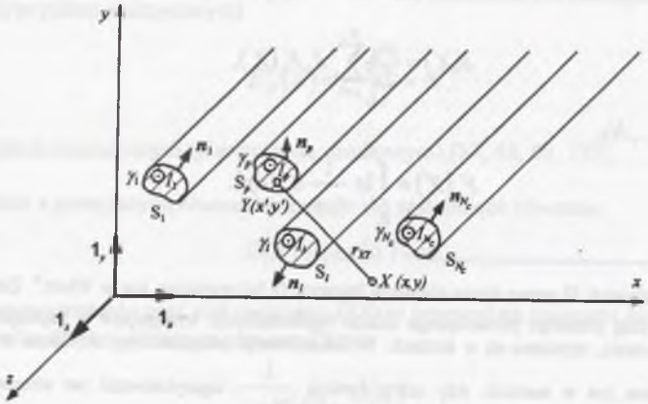
- dla wymuszenia napięciowego znane jest napięcie $\mathcal{U}$ na jednostkę długości przewodu i wtedy nieznane gęstości prądu $J_t$ wyznacza się z układu (2.12) $N_d$ równań algebraicznych,
- dla wymuszenia prądowego znany jest prąd całkowity $I$ i wtedy układ równań (2.12) należy uzupełnić równaniem dodatkowym:

$$I = \int_S J_s(Y)\,\mathrm{d}S = \sum_{s=1}^{N_d} S_s J_s, \tag{2.13}$$

otrzymując $N_d + 1$ równań algebraicznych.

## 2.2. Równania całkowe dla układu $N_c$ przewodów równoległych

Jednobiegunowy, trójfazowy osłonięty tor wielkoprądowy z rys.1.5 wraz z ewentualnymi, umieszczonymi w jego sąsiedztwie, innymi przewodami lub płytami przewodzącymi może być traktowany w przypadku ogólnym jako układ $N_c$ przewodów równoległych o różnych konduktancjach $\gamma_p$ ($p = 1, 2, \ldots, N_c$) - rys.2.2.




Rys.2.2. Układ $N_c$ przewodów równoległych

Fig.2.2. System of $N_c$ parallel conductors



Przekroje przewodów określone są przez $S_1, S_2, \ldots, S_p, \ldots, S_{N_c}$. Przez każdy z tych przewodów płyną, zgodnie ze zwrotem osi $Oz$, odpowiednio prądy zespolone $I_1, I_2, \ldots, I_p, \ldots, I_{N_c}$.

W układzie $N_c$ przewodów z prądami $I_p$ zachodzi wzajemne oddziaływanie pól elektromagnetycznych [113, 175, 182]. W wyniku tego oddziaływania wypadkowy wektor gęstości prądu w każdym z przewodów, w ogólnym przypadku, zależy od prądu własnego i od prądów w przewodach sąsiednich. Wektor ten spełnia warunki (2.1a) i (2.1b). Jest on równoległy do osi $Oz$, ma jedną składową $J_p(X)$, czyli dla $X \in S_p$

$$\mathbf{J}_p(X) = \mathbf{1}_z J_p(X). \tag{2.14}$$

Składowa $J_p(X)$ jest niezależna od współrzędnej $z$, czyli rozważany problem jest dwuwymiarowy.

W dowolnym punkcie $X(x,y) \in R^2$ wektorowy potencjał magnetyczny $\mathbf{A}(X)$ jest sumą wektorową potencjałów $\mathbf{A}_p(X)$ generowanych przez każdą z gęstości prądu $\mathbf{J}_p(Y)$, tj.

$$\mathbf{A}(X) = \sum_{p=1}^{N_c} \mathbf{A}_p(X). \tag{2.15}$$

W analizowanym przypadku układu $N_c$ przewodów równoległych potencjał $\mathbf{A}(X)$ jest równoległy do osi $Oz$, czyli wyraża się wzorem (2.3), a jego składowa $A(X)$ wzdłuż osi $Oz$

$$A(X) = \sum_{p=1}^{N_c} A_p(X), \tag{2.15a}$$

gdzie potencjał $A_p(X)$ generowany jest przez gęstość prądu $J_p(Y)$ i wyraża się wzorem:

$$A_p(X) = \frac{\mu_0}{2\pi}\int_{S_p} J_p(Y)\ln\frac{1}{r_{XY}}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y', \tag{2.15b}$$

gdzie $Y(x', y') \in S_p$, $p = 1, 2, \ldots, N_c$.

Wewnątrz $l$-tego przewodu ($l = 1, 2, \ldots, N_c$), tzn. dla $X(x,y) \in S_l$ z równania (2.4a) otrzymuje się, analogicznie do przewodu odosobnionego, następujące równanie:

$$E_l(X) + j\omega A(X) = \mathcal{U}_l, \tag{2.16}$$

w którym wypadkowe natężenie pola elektrycznego

$$E_l(X) = \frac{J_l(X)}{\gamma_l}, \tag{2.16a}$$

gdzie $J_l(X)$ jest wypadkową gęstości prądu, zaś $A(X)$ jest całkowitym potencjałem magnetycznym określonym wzorem (2.15a).

Po podstawieniu wzorów (2.15a), (2.15b) i (2.16a) do wzoru (2.16) otrzymuje się dla $X(x,y) \in S_l$ równanie:

$$\frac{J_l(X)}{\gamma_l} + \frac{j\omega\mu_0}{2\pi}\sum_{p=1}^{N_c}\int_{S_p} J_p(Y)\ln\frac{1}{r_{XY}}\,dx'dy' = \mathcal{U}_l\,, \tag{2.17}$$

gdzie: $p = 1, 2, ..., N_c$,
$l = 1, 2, ..., N_c$.

Równanie (2.17) jest również dwuwymiarowym równaniem całkowym Fredholma drugiego rodzaju, które poprzez aproksymację wektorowego potencjału magnetycznego, tak jak zrobiono to dla przewodu odosobnionego, przybliża się układem $N_d$ równań algebraicznych dla $X \in S_{lt}$

$$\frac{J_{lt}}{\gamma_l} + \frac{j\omega\mu_0}{2\pi}\sum_{p=1}^{N_c}\sum_{s=1}^{N_d} J_{ps}F_{ps}(X) = \mathcal{U}_l\,, \tag{2.18}$$

gdzie: $J_{lt}$ - stała wartość gęstości prądu w obszarze elementarnym $S_{lt}$,
$l = 1, 2, ..., N_c$ - numer $l$-tego przewodu,
$t = 1, 2, ..., N_d$ - $t$-ty numer obszaru elementarnego $l$-tego przewodu,
$p = 1, 2, ..., N_c$,
$s = 1, 2, ..., N_d$,
$F_{ps}(X)$ - funkcja kształtu (2.11a) obliczona dla obszaru $S_{ps}$.

Również dla układu $N_c$ przewodów istnieją dwa sposoby podejścia do rozwiązywania układu równań (2.18):

- dla wymuszeń napięciowych znane są napięcia $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, ..., \mathcal{U}_p, ..., \mathcal{U}_{Nc}$ i wtedy nieznane gęstości prądu wyznacza się z układu $N_c N_d$ równań algebraicznych (2.18),
- dla wymuszeń prądowych znane są całkowite prądy $I_1, I_2, ..., I_p, ..., I_{Nc}$ i wtedy układ równań (2.18) należy uzupełnić układem $N_c$ równań dodatkowych typu (2.13) otrzymując $N_c N_d + N_c$ równań algebraicznych.

Podstawiając wzory (2.15a) i (2.16a) do wzoru (2.16) otrzymuje się ($X \in S_l$):

$$\frac{J_l(X)}{\gamma_l} + j\omega\sum_{p=1}^{N_c} A_p(X) = \mathcal{U}_l\,, \tag{2.19}$$

w którym wypadkowa gęstość prądu $J_l(X)$ jak również potencjał $A_p(X)$ zależą od wszystkich prądów w przewodach.

W niektórych przypadkach, np. przy wyznaczaniu impedancji własnych i wzajemnych, celowe jest odseparowanie w równaniu (2.19) składników zależnych tylko od prądu $I_l$ od wszystkich pozostałych, tzn. zależnych od prądów $I_k$, gdzie $k \neq l$; $k = 1, 2, ..., N_c$-1. W tym celu całkowitą gęstość prądu $J_l(X)$ przedstawia się w postaci sumy:



$$J_l(X) = \sum_{p=1}^{N_c} J_{lp}(X) = J_{ll}(X) + \sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{N_c-1} J_{lk}(X)\,, \tag{2.20}$$

gdzie: $J_{lp}(X)$ - gęstość prądu w $l$-tym przewodzie pochodząca od prądu $I_p$ ($p$=1,2,...,$N_c$),
$J_{ll}(X)$ - gęstość prądu w $l$-tym przewodzie pochodząca od prądu $I_l$ ($l$=1,2,...,$N_c$),
$J_{lk}(X)$ - gęstość prądu w $l$-tym przewodzie pochodząca od prądu $I_k$ ($k \neq l$; $k$ = 1,2,...,$N_c$-1).

Analogicznie postępuje się w odniesieniu do potencjału całkowitego, występującego we wzorze (2.19). W pierwszym kroku ten potencjał całkowity w $l$-tym przewodzie zostanie rozdzielony na potencjał $A_{lp}(X)$ generowany przez całkowitą gęstość prądu w $l$-tym przewodzie i potencjał pochodzący od gęstości całkowitych prądu w przewodach sąsiednich;

$$A(X) = \sum_{p=1}^{N_c} A_p(X) = \sum_{p=1}^{N_c} A_{lp}(X) + \sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{N_c-1}\sum_{p=1}^{N_c} A_{kp}(X)\,, \tag{2.21}$$

gdzie

$$A_{lp}(X) = \frac{\mu_0}{2\pi}\int_{S_l} J_{lp}(Y)\ln\frac{1}{r_{XY}}\,dx'dy' \tag{2.21a}$$

jest potencjałem w $l$-tym przewodzie generowanym przez gęstość prądu $J_{lp}(Y)$ w $l$-tym przewodzie pochodzącą od prądu $I_p$ oraz

$$A_{kp}(X) = \frac{\mu_0}{2\pi}\int_{S_k} J_{kp}(Y)\ln\frac{1}{r_{XY}}\,dx'dy' \tag{2.21b}$$

jest potencjałem w $l$-tym przewodzie ($X \in S_l$) generowanym przez gęstość prądu $J_{kp}(Y)$ w $k$-tym przewodzie, pochodzącą od prądu $I_p$.

W następnym kroku od każdego z dwóch składników prawej strony wzoru (2.21) odłącza się potencjał wywołany prądem $I_l$. W pierwszej kolejności otrzymuje się:

$$\sum_{p=1}^{N_c} A_{lp}(X) = A_{ll}(X) + \sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{N_c-1} A_{lk}(X)\,, \tag{2.22}$$

gdzie:

$$A_{ll}(X) = \frac{\mu_0}{2\pi}\int_{S_l} J_{ll}(Y)\ln\frac{1}{r_{XY}}\,dx'dy'\,, \tag{2.22a}$$

$$A_{lk}(X) = \frac{\mu_0}{2\pi}\int_{S_l} J_{lk}(Y)\ln\frac{1}{r_{XY}}\,dx'dy'\,. \tag{2.22b}$$

Całkowita gęstość prądu w $k$-tym przewodzie

$$J_k(Y)=\sum_{p=1}^{N_c} J_{kp}(Y)=J_{kl}(Y)+\sum_{\substack{s=1\\ s\neq l}}^{N_c-1} J_{ks}(Y), \tag{2.23}$$

gdzie: $J_{kl}(Y)$ - gęstość prądu w $k$-tym przewodzie pochodząca od prądu $I_l$,
$J_{ks}(Y)$ - gęstość prądu w $k$-tym przewodzie pochodząca od prądu $I_s$ ($s\neq l$; $s=1,2,\ldots,N_c-1$).

Stąd drugi składnik z prawej strony wzoru (2.21)

$$\sum_{\substack{k=1\\ k\neq l}}^{N_c-1}\sum_{p=1}^{N_c} A_{kp}(X)=\sum_{\substack{k=1\\ k\neq l}}^{N_c-1} A_{kl}(X)+\sum_{\substack{k=1\\ k\neq l}}^{N_c-1}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq l}}^{N_c-1} A_{ks}(X), \tag{2.24}$$

gdzie

$$A_{kl}(X)=\frac{\mu_0}{2\pi}\int_{S_k} J_{kl}(Y)\ln\frac{1}{r_{XY}}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y', \tag{2.24a}$$

$$A_{ks}(X)=\frac{\mu_0}{2\pi}\int_{S_k} J_{ks}(Y)\ln\frac{1}{r_{XY}}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'. \tag{2.24b}$$

Podstawiając wzory (2.22) i (2.24) do wzoru (2.21) otrzymuje się:

$$\sum_{p=1}^{N_c} A_p(X)=A_{ll}(X)+\sum_{\substack{k=1\\ k\neq l}}^{N_c-1} A_{kl}(X)+\sum_{\substack{k=1\\ k\neq l}}^{N_c-1} A_{lk}(X)+\sum_{\substack{k=1\\ k\neq l}}^{N_c-1}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq l}}^{N_c-1} A_{ks}(X). \tag{2.25}$$

Ostatecznie, po podstawieniu wzorów (2.20) i (2.25) do wzoru (2.19), otrzymuje się równanie:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_l=&\frac{J_{ll}(X)}{\gamma_l}+\mathrm{j}\omega A_{ll}(X)+\mathrm{j}\omega\sum_{\substack{k=1\\ k\neq l}}^{N_c-1} A_{kl}(X)+\sum_{\substack{k=1\\ k\neq l}}^{N_c-1}\frac{J_{lk}(X)}{\gamma_l}+\\ &+\mathrm{j}\omega\sum_{\substack{k=1\\ k\neq l}}^{N_c-1} A_{lk}(X)+\mathrm{j}\omega\sum_{\substack{k=1\\ k\neq l}}^{N_c-1}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq l}}^{N_c-1} A_{ks}(X).\end{aligned} \tag{2.26}$$

Pierwsze trzy składniki prawej strony równania (2.26) zależą od prądu $I_l$; pozostałe od prądu $I_k$ ($k\neq l$). Pierwszy składnik reprezentuje pole elektryczne wywołane przepływem prądu $I_l$. Drugi składnik reprezentuje pole elektryczne indukcji generowane przez gęstość $J_{ll}$. Trzeci składnik jest polem indukcji generowanym przez prądy wirowe indukowane w przewodach sąsiednich przez przemienne pole magnetyczne prądu $I_l$. Składniki czwarty i piąty reprezentują prądy wirowe indukowane w $l$-tym przewodzie przez przemienne pole magnetyczne prądu $I_k$. Składnik ostatni jest polem indukcji generowanym przez prąd $I_s$.



Wśród potencjałów wchodzących w skład tego ostatniego składnika jest również potencjał związany z prądem $I_k$ (dla $s=k$) i wobec tego zachodzi pytanie o jednoczesne istnienie w składnikach czwartym, piątym i szóstym elementów zależnych od wybranego prądu $I_k$. Otóż istnienie w ostatnim składniku potencjału zależnego od prądu $I_k$ nie pociąga za sobą istnienia podobnych (zależnych od $I_k$) elementów w członach czwartym i piątym. Jeżeli dla $X\in S_l$ potencjał ($s=k$)

$$A_{ks}(X)=\text{const}, \tag{2.27}$$

to zgodnie ze wzorem (2.2) pole magnetyczne w punkcie $X\in S_l$ jest równe zero. W konsekwencji w $l$-tym przewodzie nie ma prądów wirowych zależnych od prądu $I_k$, a to oznacza, że w składnikach czwartym i piątym znikają elementy zależne od prądu $I_k$, ale w składniku szóstym nie znika potencjał (2.27).

W przypadkach szczególnych istnienie poszczególnych elementów w składnikach prawej strony równania (2.26), jak również całych składników zależy od konfiguracji wzajemnej przewodów, stanu prądowego w przewodach oraz od zakresu poczynionych założeń upraszczających, polegających, na zaniedbywaniu lub nie zjawisk zbliżenia między przewodami.

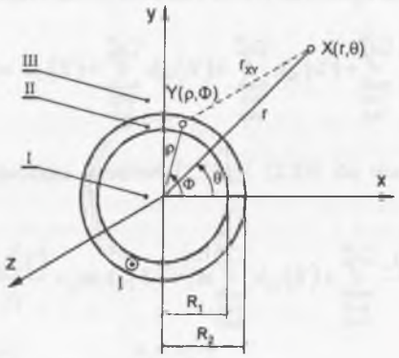
Równanie (2.26) jest szczególnie przydatne, jak to zostanie pokazane w rozdziale 4, przy wyznaczaniu impedancji własnych i wzajemnych przewodów rurowych.

# 3. WEKTOROWY POTENCJAŁ MAGNETYCZNY PRZEWODÓW RUROWYCH

W celu obliczenia natężenia pola magnetycznego jak również impedancji własnych i wzajemnych rurowych przewodów fazowych i rurowych osłon jednobiegunowego toru wielkoprądowego konieczne jest wyznaczenie rozwiązania równań Poissona i Laplace'a dla wektorowego potencjału magnetycznego we wszystkich obszarach układu przewodów (fazowych i osłon). Dla odosobnionego przewodu rurowego z prądem zespolonym $I$ i nierównomiernym rozkładem gęstości prądu potencjał magnetyczny będzie wyznaczony analitycznie. Otrzymane rozwiązania mogą być stosowane do układów współosiowych przewodów rurowych. Dla układu dwóch przewodów rurowych umieszczonych w odległości $d$ od siebie uproszczoną metodą analityczną będzie wyznaczony potencjał magnetyczny wytworzony przez prąd sąsiedniego przewodu rurowego. Dla dowolnego układu przewodów będzie zaprezentowana metoda analityczno-numeryczna wyznaczania potencjału magnetycznego w dowolnym punkcie tego układu.

## 3.1. Potencjał magnetyczny przewodu rurowego - metoda analityczna

Zakłada się, że w nieskończenie długim przewodzie rurowym (rys. 3.1) wektor gęstości prądu $J$ ma jedną składową $J(r, \Theta)$ wzdłuż osi $Oz$, która w przypadku ogólnym jest funkcją zmiennych $r$ i $\Theta$ walcowego układu współrzędnych.




Rys.3.1. Przewód rurowy

Fig.3.1. Tubular conductor

Wektorowy potencjał magnetyczny $A$ ma wtedy również jedną składową wzdłuż osi $Oz$. W obszarze przewodzącym II jego składowa $A(r, \Theta)$ wzdłuż osi $Oz$ spełnia dwuwymiarowe równanie Poissona

$$\nabla^2 A(r,\Theta) = -\mu_0 J(r,\Theta), \tag{3.1}$$



a poza tym obszarem, tzn. w obszarach I i III, dwuwymiarowe równanie Laplace'a

$$\nabla^2 A(r,\Theta) = 0, \tag{3.2}$$

gdzie $J(r, \Theta)$ jest zespoloną gęstością prądu w przewodzie rurowym w $A \cdot m^{-2}$.

Rozwiązaniem tych dwóch równań jest funkcja nazywana logarytmicznym potencjałem magnetycznym [40, 90]

$$A(X) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_S J(Y) \ln \frac{1}{r_{XY}} \rho \, d\rho \, d\Phi, \tag{3.3}$$

gdzie: $X = X(r, \Theta)$ - punkt obserwacji,
$Y = Y(\rho, \Phi)$ - punkt źródłowy, gdzie $J \neq 0$,
$J(Y)$ - całkowita zespolona gęstość prądu w przewodzie rurowym,
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H·m$^{-1}$ - przenikalność magnetyczna próżni,
$(r, \Theta)$ oraz $(\rho, \Phi)$ - współrzędne punktów $X(r, \Theta)$ i $Y(\rho, \Phi)$ w walcowym układzie współrzędnych,
S - przekrój poprzeczny przewodu rurowego,
$r_{XY}$ - odległość między punktem źródłowym a punktem obserwacji, we współrzędnych walcowych jest dana wzorem:

$$r_{XY}^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\Phi - \Theta). \tag{3.4}$$

Wyznaczenie wektorowego potencjału magnetycznego (rozwiązania równań (3.1) i (3.2)) przewodu rurowego sprowadza się więc do obliczenia całki (3.3). W tym celu rozważa się dwa przypadki wzajemnych związków między współrzędną $r$ oraz współrzędną $\rho$ walcowego układu współrzędnych : $r > \rho$ i $r < \rho$.

Dla $r > \rho$ ze wzoru (3.4) otrzymuje się:

$$\frac{r_{XY}^2}{r^2} = 1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 - 2\frac{\rho}{r}\cos(\Phi - \Theta), \tag{3.5}$$

a stąd

$$\ln\frac{r_{XY}}{r} = \frac{1}{2}\ln\left[1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 - 2\frac{\rho}{r}\cos(\Phi - \Theta)\right] \tag{3.5a}$$

i w rozwinięciu prawej strony równania (3.5a) w szereg Fouriera (wykorzystano wzór (1.514) z pracy [60], str.53) otrzymuje się dla $n \in N$, że

$$\ln\frac{r_{XY}}{r} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \cos[n(\Phi - \Theta)]. \tag{3.6}$$

Wobec tego

$$\ln\frac{1}{r_{XY}} = \ln\frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \cos[n(\Phi - \Theta)]. \tag{3.7}$$

Podstawiając wzór (3.7) do wzoru (3.3) otrzymuje się dla $r > \rho$

$$A(r,\Theta)=\frac{\mu_0}{2\pi}\int_S J(\rho,\Phi)\left\{\ln\frac{1}{r}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cos[n(\Phi-\Theta)]\right\}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\Phi. \tag{3.8}$$

Jeżeli gęstość prądu $J(\rho,\Phi)$ nie zależy od zmiennej $\Phi$ walcowego układu współrzędnych, to zespolony potencjał wektorowy dla $r > \rho$

$$A(r)=\lim_{\delta\to 0}\mu_0\ln\frac{1}{r}\int_{R_1}^{r-\delta}J(\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho. \tag{3.9}$$

Dla $r < \rho$ ze wzoru (3.4) otrzymuje się:

$$\frac{r_{XY}^2}{\rho^2}=1+\left(\frac{r}{\rho}\right)^2-2\frac{r}{\rho}\cos(\Phi-\Theta), \tag{3.10}$$

a stąd

$$\ln\frac{r_{XY}}{\rho}=\frac{1}{2}\ln\left[1+\left(\frac{r}{\rho}\right)^2-2\frac{r}{\rho}\cos(\Phi-\Theta)\right] \tag{3.10a}$$

i w rozwinięciu prawej strony równania (3.10a) w szereg Fouriera otrzymuje się dla $n \in N$, że

$$\ln\frac{r_{XY}}{\rho}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n\cos[n(\Phi-\Theta)]. \tag{3.11}$$

Wobec tego

$$\ln\frac{1}{r_{XY}}=\ln\frac{1}{\rho}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n\cos[n(\Phi-\Theta)]. \tag{3.12}$$

Wtedy zespolony, wektorowy potencjał magnetyczny dla $r < \rho$

$$A(r,\Theta)=\frac{\mu_0}{2\pi}\int_S J(\rho,\Phi)\left\{\ln\frac{1}{\rho}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n\cos[n(\Phi-\Theta)]\right\}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\Phi. \tag{3.13}$$

Jeżeli $J(\rho,\Phi)$ nie należy od zmiennej $\Phi$, to potencjał magnetyczny dla $r < \rho$

$$A(r)=\lim_{\delta\to 0}\mu_0\int_{r+\delta}^{R_2}J(\rho)\rho\ln\frac{1}{\rho}\,\mathrm{d}\rho. \tag{3.14}$$

Ze wzorów (3.9) i (3.14) można wyznaczyć zespolony potencjał magnetyczny we wszystkich obszarach przewodu rurowego, w którym gęstość prądu nie należy od zmiennej $\Phi$.



Dla $r \geq R_2$ ze wzoru (3.9) otrzymuje się

$$A^{III}(r)=\mu_0\ln\frac{1}{r}\int_{R_1}^{R_2}J(\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho, \tag{3.15}$$

z którego wynika, że potencjał magnetyczny w obszarze zewnętrznym przewodu rurowego jest funkcją zmiennej $r$ walcowego układu współrzędnych.

Dla $R_1 \leq r \leq R_2$ ze wzorów (3.9) i (3.14) otrzymuje się:

$$A^{II}(r)=\lim_{\delta\to 0}\left[\mu_0\ln\frac{1}{r}\int_{R_1}^{r-\delta}J(\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho+\mu_0\int_{r+\delta}^{R_2}J(\rho)\rho\ln\frac{1}{\rho}\,\mathrm{d}\rho\right]. \tag{3.16}$$

Dla $r \leq R_1$, ze wzoru (3.14) otrzymuje się:

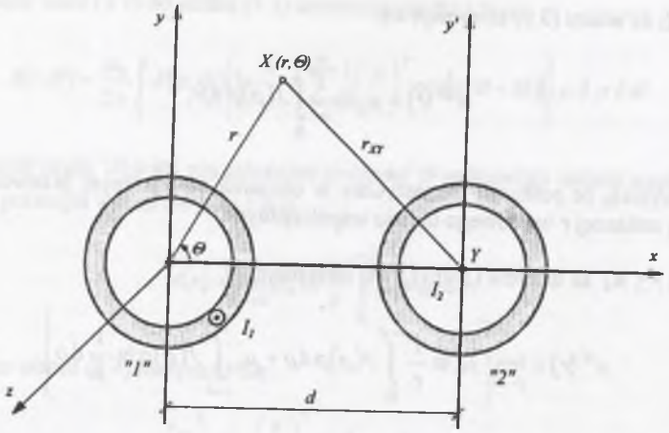
$$A^{I}(r)=\mu_0\int_{R_1}^{R_2}J(\rho)\rho\ln\frac{1}{\rho}\,\mathrm{d}\rho=\text{const}, \tag{3.17}$$

skąd wynika, że w obszarze wewnętrznym przewodu rurowego potencjał magnetyczny jest stały, niezależny od zmiennej $r$ walcowego układu współrzędnych.

Jeżeli gęstość prądu w przewodzie rurowym jest gęstością prądów wirowych indukowanych przez pole magnetyczne pochodzenia zewnętrznego, to na ogół (z wyjątkiem układu współosiowego) gęstość ta jest funkcją dwóch zmiennych $\rho$ oraz $\Phi$ walcowego układu współrzędnych $(J = J(\rho,\Phi))$. Wtedy przy wyznaczaniu wektorowego potencjału magnetycznego należy posługiwać się wzorami (3.8) i (3.13).

## 3.2. Potencjał magnetyczny niewspółosiowego układu dwóch rurowych przewodów równoległych

W niewspółosiowym układzie dwóch rurowych przewodów równoległych (rys.3.2) potencjał magnetyczny w otoczeniu przewodu "1", wytworzony przez prąd $I_2$ przewodu "2", wyznacza się zakładając [53, 70, 93, 177], że punkt źródłowy $Y$ umieszczony jest na osi przewodu "2". Innymi słowy zakłada się, że przewód "2" jest przewodem nieskończenie cienkim.




Rys.3.2. Niewspółosiowy układ dwóch rurowych przewodów równoległych

Fig.3.2. Non-coaxial system of two parallel tubular conductors

Wtedy potencjał magnetyczny generowany przez prąd $I_2$ [53]

$$A(r,\Theta)=\frac{\mu_0 I_2}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{XY}}, \tag{3.18}$$

gdzie

$$r_{XY}^2=r^2+d^2-2r\,d\cos\Theta. \tag{3.18a}$$

Jeżeli wyznacza się ten potencjał w otoczeniu przewodu "1" takim, dla którego $r<d$, to wtedy ze wzoru (3.18a)

$$\frac{r_{XY}^2}{d^2}=1+\left(\frac{r}{d}\right)^2-2\frac{r}{d}\cos\Theta, \tag{3.19}$$

a stąd

$$\ln\frac{r_{XY}}{d}=\frac{1}{2}\ln\left[1+\left(\frac{r}{d}\right)^2-2\frac{r}{d}\cos\Theta\right] \tag{3.19a}$$

i w rozwinięciu prawej strony równania (3.19a) w szereg Fouriera otrzymuje się dla $n\in N$, że

$$\ln\frac{r_{XY}}{d}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{d}\right)^n\cos n\Theta. \tag{3.20}$$

Wobec tego

$$\ln\frac{1}{r_{XY}}=\ln\frac{1}{d}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{d}\right)^n\cos n\Theta. \tag{3.21}$$



Po podstawieniu wzoru (3.21) do wzoru (3.18) wyznacza się wektorowy potencjał magnetyczny w punkcie $X(r,\Theta)$ takim, dla którego $r<d$

$$A(r,\Theta)=\frac{\mu_0 I_2}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{d}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{d}\right)^n\cos n\Theta\right]. \tag{3.22}$$

Jeżeli natężenie pola magnetycznego w punkcie $X$ wytworzone przez prąd $I_2$ wyznaczy się z prawa przepływu jako

$$H_2=\frac{I_2}{2\pi r_{XY}} \tag{3.23}$$

i dla $r<d$ jego składowe $H_{2r}$ i $H_{2\Theta}$ rozwinie się w szereg Fouriera [12,150], to okaże się, że są one równe odpowiednim składowym obliczonym ze wzoru

$$H=\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,A, \tag{3.24}$$

w którym przyjmie się, że potencjał magnetyczny $A$ ma jedną składową $A(r,\Theta)$ wzdłuż osi $Oz$ daną wzorem (3.22).

## 3.3. Potencjał magnetyczny układu $N_c$ przewodów równoległych - metoda analityczno-numeryczna

Jednobiegunowy, trójfazowy osłonięty tor wielkoprądowy z rys.1.5 jest układem sześciu przewodów rurowych. Przewód fazowy i jego osłona wybranej fazy jest układem współosiowym i dla niego można wyznaczać wektorowe potencjały magnetyczne - wzory (3.15), (3.16) i (3.17) dla dowolnych gęstości prądów w przewodzie i osłonie. Dla układu przewód fazowy (lub osłona) wybranej fazy i przewód fazowy (lub osłona) innej fazy trzeba korzystać ze wzoru (3.22), tzn., że w przewodzie, który jest źródłem potencjału $A$, nie uwzględnia się gęstości prądu ani też wymiarów poprzecznych tego przewodu rurowego (promieni wewnętrznego i zewnętrznego).

Konduktancja $\gamma_1$ przewodu fazowego jest na ogół różna od konduktancji $\gamma_2$ osłony. Oprócz tego w pobliżu takiego toru prądowego mogą znajdować się inne przewody czy też płyty przewodzące. Ogólnie jest to więc układ $N_c$ przewodów równoległych przedstawiony na rys.2.2.

### 3.3.1. Aproksymacja wektorowego potencjału magnetycznego

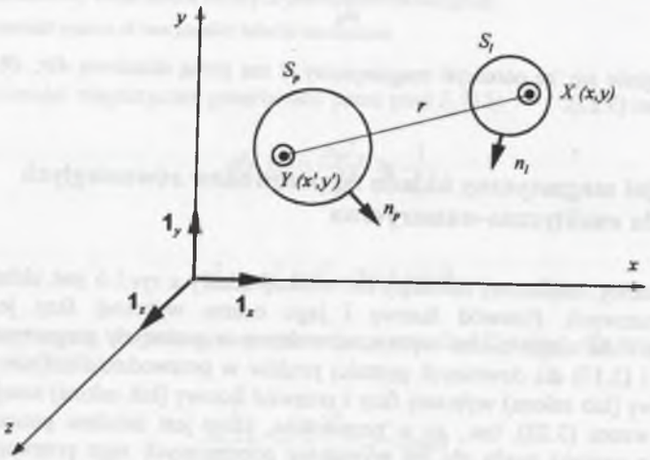
Rozważany układ (rys.2.2) zawiera $N_c$ przewodów o dowolnych przekrojach $S_1$, $S_2$, ..., $S_p$, ..., $S_{N_c}$. Przez każdy z tych przewodów płyną odpowiednio prądy zespolone $I_1$, $I_2$, ..., $I_p$, ..., $I_{N_c}$. Przewody są równoległe do osi $Oz$.

Rozpatrywany problem jest dwuwymiarowy i wektorowy potencjał magnetyczny ma jedną składową wzdłuż osi $Oz$. Potencjał ten jest funkcją dwóch zmiennych: $x$ oraz $y$. W obszarze przewodzącym spełnia on dwuwymiarowe równanie Poissona, a poza tym obszarem dwuwymiarowe równanie Laplace'a. Podstawowym rozwiązaniem tych dwóch równań jest

$$A(X)=\frac{\mu_0}{2\pi}\int_S J(Y)\ln\frac{1}{r}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y', \tag{3.25}$$

gdzie: $X=X(x,y)$ - punkt obserwacji,
$Y=Y(x',y')$ - punkt źródłowy,
$S=S_1\cup S_2\cup\ldots\cup S_p\cup\ldots\cup S_{N_c}$ - powierzchnia, na której $J(Y)\neq 0$,
$r$ - odległość między punktem $X(x,y)$ a punktem $Y(x',y')$ (rys.3.3);

$$r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}. \tag{3.25a}$$




Rys.3.3. Punkt źródłowy $Y(x',y')$ oraz punkt obserwacji $X(x,y)$ we współrzędnych kartezjańskich

Fig.3.3. Surce point $Y(x',y')$ and observation point $X(x,y)$ in cartesian coordinates

Punkt $Y\in S$ zaś punkt $X\in R^2$; w szczególności punkt ten może leżeć wewnątrz przewodu (np. $l$-tego; rys.3.3).

Dla układu $N_c$ przewodów wektorowy potencjał magnetyczny w punkcie $X$ jest sumą potencjałów pochodzących od każdego z przewodów

$$A(X)=\frac{\mu_0}{2\pi}\sum_{p=1}^{N_c}\int_{S_p} J_p(Y)\ln\frac{1}{r}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'. \tag{3.26}$$



Następnie obszar $S_p$ dzieli się na $N_d$ obszarów elementarnych $S_{p1}$, $S_{p2}$, ..., $S_{ps}$, ..., $S_{pN_d}$ przyjmując, że w każdym z tych obszarów elementarnych funkcja gęstości prądu $J_p(Y)$ jest stała i równa $J_{ps}$ ($p=1, 2, \ldots, N_c$; $s=1, 2, \ldots, N_d$), tzn., że jest równa przybliżonej wartości funkcji $J(Y)$ w obszarze $S_{ps}$. W ten sposób otrzymuje się $N=N_c\,N_d$ obszarów elementarnych, od których potencjał magnetyczny

$$A(X)=\frac{\mu_0}{2\pi}\sum_{p=1}^{N_c}\sum_{s=1}^{N_d}\int_{S_{ps}} J_{ps}\ln\frac{1}{r}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'. \tag{3.27}$$

Gęstość prądu $J_{ps}$ jest wielkością stałą, więc może być zapisana przed całką we wzorze (3.27). Stąd otrzymuje się dla układu $N_c$ przewodów

$$A(X)=\frac{\mu_0}{2\pi}\sum_{p=1}^{N_c}\sum_{s=1}^{N_d}J_{ps}F_{ps}(X). \tag{3.28}$$

Jeżeli $p$-ty przewód jest przewodem odosobnionym, to ze wzoru (3.28) otrzymuje się:

$$A(X)=\frac{\mu_0}{2\pi}\sum_{s=1}^{N_d}J_{ps}F_{ps}(X). \tag{3.28a}$$

We wzorach (3.28) i (3.28a) funkcja $F_{ps}(X)$ jest funkcją kształtu obszaru elementarnego $S_{ps}$ i wyznacza się ją ze wzoru:

$$F_{ps}(X)=\int_{S_{ps}}\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y' \tag{3.29}$$

dla $X\in S$ dowolnie usytuowanego względem obszaru elementarnego $S_{ps}$.

### 3.3.2. Funkcja kształtu

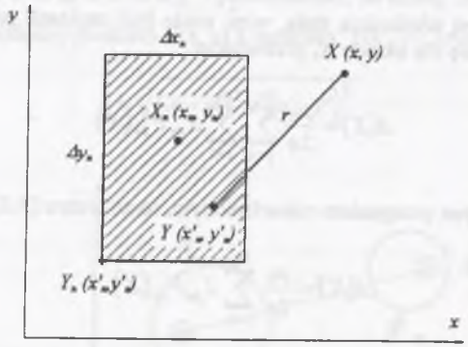
Funkcja kształtu (3.29) zależy od podziału powierzchni $S_p$ na elementy $S_{ps}$ oraz od funkcji aproksymujących kształt tych powierzchni. Obliczenie całek (3.29) w każdym z obszarów elementarnych może być wykonane numerycznie [175], stosując odpowiednie wzory na kwadraturę, lub też oblicza się je analitycznie w pierwszym całkowaniu, zaś w drugim całkowaniu numerycznie [133, 172].

W niniejszej pracy całki (3.29) oblicza się analitycznie w układzie współrzędnych prostokątnych lub walcowych. Rozwiązanie przedstawia się jako kombinację funkcji standardowych. Uzyskuje się przez to duże uproszczenie obliczeń, co znacznie skraca czas obliczeń numerycznych impedancji, gęstości prądu i natężenia pola magnetycznego w osłoniętych torach prądowych. Ma to szczególne znaczenie w przypadku, gdy punkt $X$ leży w obszarze elementarnym $S_{ps}$. Wtedy całka (3.29) jest całką niewłaściwą, co znacznie utrudnia całkowanie numeryczne wprowadzając w konsekwencji duże błędy obliczeń.

Zazwyczaj powierzchnię $S_p$ przewodu dzieli się na obszary elementarne prostokątne, wycinków kołowych oraz trójkątne. W dalszej kolejności będzie zatem obliczona funkcja kształtu dla tych trzech podstawowych sposobów dyskretyzacji powierzchni przewodów.

### 3.3.2.1. Prostokątny obszar elementarny

Podziału obszaru przewodzącego $S_p$ na prostokątny elementarne $S_{ps}$ dokonuje się dla przewodów, których przekroje poprzeczne są naturalnymi prostokątami (prostokątne szyny zbiorcze i prostokątne pakiety szynowe) lub też dają się przedstawić za pomocą prostokątów (przewody szynowe złożone z ceowników) [11, 13, 14].




Rys.3.4. Prostokątny obszar elementarny

Fig.3.4. Rectangular elementary area

Gdy obszar elementarny jest prostokątem o bokach $\Delta x_n$, $\Delta y_n$, którego położenie określone jest przez jego dolne, lewe naroże, tj. przez punkt $Y_n(x'_n, y'_n)$ - rys.3.4, funkcję kształtu oblicza się następującym wzorem [11, 13, 14]:

$$F(X, Y_n, \Delta x_n, \Delta y_n) = -\frac{1}{2}\int_{y'_n}^{y'_n+\Delta y_n}\int_{x'_n}^{x'_n+\Delta x_n} \ln\left[(x'-x)^2+(y'-y)^2\right] dx'\,dy'. \tag{3.30}$$

W wyniku pierwszego całkowania (3.30) otrzymuje się:

$$F(X, Y_n, \Delta x_n, \Delta y_n) = -\frac{1}{2}(x'_n - x + \Delta x_n)\int_{y'_n}^{y'_n+\Delta y_n} \ln\left[(y'-y)^2+(x'_n-x+\Delta x_n)^2\right] dy' +$$
$$+\frac{1}{2}(x'_n - x)\int_{y'_n}^{y'_n+\Delta y_n} \ln\left[(y'-y)^2+(x'-x)^2\right] dy' + \Delta x_n \Delta y_n -$$
$$-\int_{y'_n}^{y'_n+\Delta y_n} (y'-y)\,\mathrm{arctg}\frac{x'_n - x + \Delta x_n}{y'-y}\,dy' + \int_{y'_n}^{y'_n+\Delta y_n} (y'-y)\,\mathrm{arctg}\frac{x'_n - x}{y'-y}\,dy'. \tag{3.31}$$



Drugie całkowanie można wykonać również analitycznie otrzymując:

$$F(x, y, x'_n, y'_n, \Delta x_n, \Delta y_n) = \frac{3}{2}\Delta x_n \Delta y_n - f(x, y, x'_n+\Delta x_n, y'_n+\Delta y_n) +$$
$$+ f(x, y, x'_n, y'_n+\Delta y_n) + f(x, y, x'_n+\Delta x_n, y'_n) - f(x, y, x'_n, y'_n) -$$
$$- g(x, y, x'_n+\Delta x_n, y'_n+\Delta y_n) + g(x, y, x'_n, y'_n+\Delta y_n) +$$
$$+ g(x, y, x'_n+\Delta x_n, y'_n) - g(x, y, x'_n, y'_n) - h(x, y, x'_n+\Delta x_n, y'_n+\Delta y_n) +$$
$$+ h(x, y, x'_n, y'_n+\Delta y_n) + h(x, y, x'_n+\Delta x_n, y'_n) - h(x, y, x'_n, y'_n), \tag{3.32}$$

gdzie funkcje $f$, $g$ oraz $h$ dane są wzorami:

$$f(x, y, x', y') = -\frac{1}{2}(x-x')(y-y')\ln\frac{1}{\left|(x-x')^2+(y-y')^2\right|}, \tag{3.33}$$

$$g(x, y, x', y') = \frac{1}{2}(y-y')^2\,\mathrm{arctg}\frac{x-x'}{y-y'}, \tag{3.34}$$

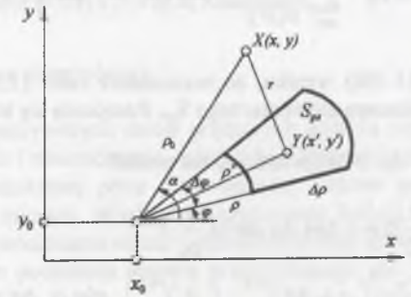
$$h(x, y, x', y') = \frac{1}{2}(x-x')^2\,\mathrm{arctg}\frac{y-y'}{x-x'}. \tag{3.35}$$

Całki (3.33), (3.34) i (3.35) są całkami niewłaściwymi ale zbieżnymi. Fakt ten należy odpowiednio uwzględnić przy konstruowaniu programu obliczeniowego.

W układach wieloprzewodowych przewody jak również ich wybrane obszary mogą być podzielone na prostokąty elementarne o różnych wymiarach. W ten sposób można zagęszczać siatkę podziału w wybranych obszarach, tzn. w takich, w których zjawiska naskórkowości i zbliżenia uwidaczniają się w sposób silny.

### 3.3.2.2. Obszar elementarny przewodu walcowego i rurowego

Dla przewodów walcowych lub rurowych obszar elementarny może być wybrany jako wycinek pierścienia - rys.3.5




Rys.3.5. Obszar elementarny $S_{pe}$ przewodu walcowego lub rurowego

Fig.3.5. Elementary area of a cylindrical or tubular conductor

Z zależności geometrycznych (rys.3.5) wyznacza się [8,10]:

$$\left.\begin{aligned} S_{oe} &= \frac{1}{2}(2\rho+\Delta\rho)\,\Delta\rho\,\Delta\varphi \\ dx'\,dy' &= \rho'\,d\rho'\,d\varphi \\ r^2 &= \rho_0^2+\rho'^2-2\rho_0\rho'\cos(\varphi-\alpha) \\ \rho_0^2 &= (x_0-x)^2+(y_0-y)^2 \\ \rho'^2 &= (x_0-x')^2+(y_0-y')^2 \\ \sin\alpha &= \frac{y-y_0}{\rho_0} \\ \cos\alpha &= \frac{x-x_0}{\rho_0} \\ \rho \le \rho' &\le \rho+\Delta\rho \end{aligned}\right\} \tag{3.36}$$

Funkcję kształtu można wtedy zapisać w postaci ogólnej jako:

$$F(x,y,x_0,y_0,\rho,\Delta\rho,\varphi,\Delta\varphi) = \int_{S_{ps}} \ln\frac{1}{r}\,dx'dy' =$$

$$= -\int_{\rho}^{\rho+\Delta\rho}\int_{\varphi}^{\varphi+\varphi} \frac{\rho'}{2}\ln\left|\rho_0^2+\rho'^2-2\rho_0\rho'\cos(\varphi-\alpha)\right| d\rho'\,d\varphi. \tag{3.37}$$

Funkcję podcałkową w całce (3.37) rozwija się w szereg Fouriera otrzymując:

$$\frac{\rho'}{2}\ln\left|\rho_0^2+\rho'^2-2\rho_0\rho'\cos(\varphi-\alpha)\right| =$$

$$= \begin{cases} \rho'\ln\rho_0 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\rho')^{n+1}}{n\rho_0^n}\cos n(\varphi-\alpha) \quad \text{dla } \rho_0>\rho' & (3.38a) \\ \rho'\ln\rho_0 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho_0^n}{n(\rho')^{n-1}}\cos n(\varphi-\alpha) \quad \text{dla } \rho_0<\rho'. & (3.38b) \end{cases}$$

Ze wzorów (3.38a) i (3.38b) wynika, że rozwiązanie całki (3.37) zależy od położenia punktu $X(x,y)$ względem obszaru elementarnego $S_{ps}$. Rozróżnia się trzy przypadki:

a) dla $\rho_0 > \rho'$ tj. $\rho_0 > \rho+\Delta\rho$ funkcja kształtu ma postać:

$$F = \frac{1}{2}(2\rho+\Delta\rho)\,\Delta\rho\,\Delta\varphi\,\ln\frac{1}{\rho_0} +$$

$$+\rho_0^2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{\rho+\Delta\rho}{\rho_0}\right)^{n+2}-\left(\frac{\rho}{\rho}\right)^{n+2}\right]\cdot\frac{g(n,\varphi,\Delta\varphi,\alpha)}{(n+2)n^2}, \tag{3.39}$$



gdzie:

$$g(n,\varphi,\Delta\varphi,\alpha) = [\sin n(\varphi+\Delta\varphi)-\sin n\varphi]\cos n\alpha -$$
$$-[\cos n(\varphi+\Delta\varphi)-\cos n\varphi]\sin n\alpha\,, \tag{3.39a}$$

b) dla $\rho_0 < \rho'$, tj. $\rho_0 < \rho$ funkcja kształtu ma postać:

$$F = \frac{1}{2}\Delta\varphi\left[(\rho+\Delta\rho)^2\ln\frac{1}{\rho+\Delta\rho}-\rho^2\ln\frac{1}{\rho}+\frac{1}{2}(2\rho+\Delta\rho)\Delta\rho\right]+$$

$$+\Delta\rho\rho_0 g(1,\varphi,\Delta\varphi,\alpha)+\frac{1}{4}\rho_0^2\ln\frac{\rho+\Delta\rho}{\rho}g(1,\varphi,\Delta\varphi,\alpha)-$$

$$-\rho_0^2\sum_{n=3}^{\infty}\left[\left(\frac{\rho_0}{\rho+\Delta\rho}\right)^{n-2}-\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{n-2}\right]\frac{g(n,\varphi,\Delta\varphi,\alpha)}{(n-2)n^2}, \tag{3.40}$$

c) dla $\rho \le \rho_0 \le \rho+\Delta\rho$, tj. dla punktu $X$ leżącego wewnątrz $S_{ps}$ funkcję kształtu oblicza się wykonując całkowanie funkcji (3.38a) względem zmiennej $\rho'$ w granicach od $\rho$ do $\rho_0$ oraz funkcji (3.38b) w granicach od $\rho_0$ do $\rho_0+\Delta\rho$ otrzymując:

$$F = \frac{1}{2}\Delta\varphi\left\{(\rho+\Delta\rho)^2\ln\frac{1}{\rho+\Delta\rho}-\rho^2\ln\frac{1}{\rho_0}+\frac{1}{2}\left[(\rho+\Delta\rho)^2-\rho_0^2\right]\right\}-$$

$$-\left[\frac{2}{3}\rho_0^2+\frac{1}{3}\cdot\frac{\rho^3}{\rho_0}-(\rho+\Delta\rho)\rho_0\right]g(1,\varphi,\Delta\varphi,\alpha)+$$

$$+\frac{1}{4}\left[\rho_0^2\ln\frac{\rho+\Delta\rho}{\rho}+\frac{1}{4}\left(\rho_0^2-\frac{\rho^4}{\rho_0^2}\right)\right]g(2,\varphi,\Delta\varphi,\alpha)+$$

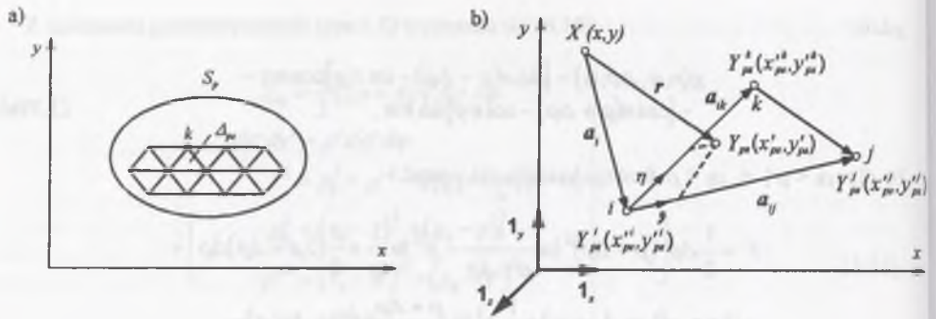
$$+\rho_0^2\sum_{n=3}^{\infty}\left\{\left[1-\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{n+2}\right]\frac{1}{n+2}+\left[1-\left(\frac{\rho_0}{\rho+\Delta\rho}\right)^{n-2}\right]\frac{1}{n-2}\right\}\frac{g(n,\varphi,\Delta\varphi,\alpha)}{n^2}. \tag{3.41}$$

Można wykazać, że dla $\rho_0 = \rho$ funkcje kształtu (3.40) i (3.41) są identyczne. Również dla $\rho_0 = \rho+\Delta\rho$ funkcje kształtu (3.39) i (3.41) są identyczne.

### 3.3.2.3. Trójkątny obszar elementarny

Często w układach rzeczywistych torów prądowych spotyka się przewody równoległe o przekrojach prostokątnych i równocześnie przewody o przekrojach kołowych (osłonięty tor prądowy w pobliżu prostokątnej płyty przewodzącej, fazowe przewody prostokątne lub ceownikowe w rurowej osłonie). Wtedy do wyznaczania funkcji kształtu trzeba stosować równocześnie podział na prostokątne obszary elementarne oraz na wycinki pierścienia.

Bardziej uniwersalnym podziałem obszaru przewodzącego jest jego podział na trójkątne obszary elementarne - rys.3.6.




Rys.3.6. Podział $p$-tego przewodnika na trójkąty elementarne $\Delta_{ps}$: a) sieć triangulacyjna, b) trójkąt elementarny $\Delta_{ps}$

Fig.3.6. Division of the $p$-conductor into elementary triangles $\Delta_{ps}$ ; a) triangulation system, b) triangle $\Delta_{ps}$

Taki podział powierzchni $S_p$ przewodnika na $s$ trójkątów elementarnych $\Delta_{ps}$ stanowi sieć triangulacyjną utworzoną przez punkty: $Y^i_{ps}$, $Y^j_{ps}$ $Y^k_{ps} \in S_p$, zwane punktami triangulacyjnymi - rys.3.6.

Każdy punkt $Y_{ps}$ wewnątrz $s$-tego trójkąta $\Delta_{ps}$ może być aproksymowany liniowo punktami wierzchołkowymi tego trójkąta, tzn., że zbiór tych punktów jest dany przez:

$$\tau^{ijk}_{ps} = \begin{cases} x'_{ps} = x''^i_{ps} + \left(x''^j_{ps} - x''^i_{ps}\right)\xi + \left(x''^k_{ps} - x''^i_{ps}\right)\eta \\ \left(x'_{ps}, y'_{ps}\right): \\ y'_{ps} = y''^i_{ps} + \left(y''^j_{ps} - y''^i_{ps}\right)\xi + \left(y''^k_{ps} - y''^i_{ps}\right)\eta , \end{cases} \tag{3.42}$$

gdzie nowe zmienne $\xi$ i $\eta$

$$0 \le \xi \le 1 \; ; \qquad 0 \le \eta \le 1 - \xi \; . \tag{3.43}$$

Oznacza to, że zbiór $\tau_p$ wszystkich punktów powierzchni $S_p$ $p$-tego przewodu został przybliżony zbiorem punktów

$$\tau_p = \bigcup_{\{i,j,k\} \in N_p} \tau^{ijk}_{ps} , \tag{3.44}$$

gdzie $\tau_p$ jest zbiorem wszystkich trójkątów triangulacji powierzchni $S_p$.

Z rys.3.6b wektor $\boldsymbol{r}$ jest funkcją zmiennych $\xi$ i $\eta$:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_{ij}\xi + \boldsymbol{a}_{ik}\eta , \tag{3.45}$$



gdzie wektory:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a}_i &= \left(x''^i_{ps} - x\right)\mathbf{1}_x + \left(y''^i_{ps} - y\right)\mathbf{1}_y = a_{ix}\mathbf{1}_x + a_{iy}\mathbf{1}_y \\ \boldsymbol{a}_{ij} &= \left(x''^j_{ps} - x''^i_{ps}\right)\mathbf{1}_x + \left(y''^j_{ps} - y''^i_{ps}\right)\mathbf{1}_z = a_{ijx}\mathbf{1}_x + a_{ijy}\mathbf{1}_y \\ \boldsymbol{a}_{ik} &= \left(x''^k_{ps} - x''^i_{ps}\right)\mathbf{1}_x + \left(y''^k_{ps} - y''^i_{ps}\right)\mathbf{1}_z = a_{ikx}\mathbf{1}_x + a_{iky}\mathbf{1}_y \end{aligned}\right\} . \tag{3.46}$$

Element różniczkowy powierzchni w nowych współrzędnych

$$\mathrm{d}S_p = \mathrm{d}x'_p \mathrm{d}y'_p = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x'_{ps}}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x'_{ps}}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y'_{ps}}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y'_{ps}}{\partial \eta} \end{vmatrix} \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta = \left|\boldsymbol{a}_{ij} \times \boldsymbol{a}_{ik}\right| \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta = 2\Delta_{ps} \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta , \tag{3.47}$$

gdzie

$$2\Delta_{ps} = \det \begin{bmatrix} 1 & x''^i_{ps} & y''^i_{ps} \\ 1 & x''^j_{ps} & y''^j_{ps} \\ 1 & x''^k_{ps} & y''^k_{ps} \end{bmatrix} . \tag{3.48}$$

Przy powyższych oznaczeniach funkcja kształtu (3.29) przyjmuje postać:

$$F_{ps}\left(X, Y'_{ps}, Y^j_{ps}, Y^k_{ps}\right) = -2\Delta_{ps} \int_0^{1-\xi} \int_0^1 \ln\left|\boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_{ij}\xi + \boldsymbol{a}_{ik}\xi\right| \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta . \tag{3.49}$$

Gdy punkt $X \in \Delta_{ps}$, to całka (3.49) jest całką niewłaściwą, lecz zbieżną w sensie Cauchy'ego i niezależną przy całkowaniu od położenia punktu $X$ w przestrzeni $R^2$ oraz dającą się przedstawić za pomocą funkcji standardowych.

Ze wzoru (3.45) oblicza się kwadrat modułu wektora $\boldsymbol{r}$

$$r^2 = a^2_{ik}\eta^2 + 2\boldsymbol{a}_{ik} \cdot \left(\boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_{ij}\xi\right)\eta + \left|\boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_{ij}\xi\right|^2 . \tag{3.50}$$

Jest to wielomian kwadratowy zmiennej $\eta$, którego wyróżnik

$$\Delta = -4\left|\boldsymbol{a}_{ik} \times \left(\boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_{ij}\xi\right)\right|^2 \le 0 . \tag{3.51}$$

Wzór (3.50) można przedstawić w postaci:

$$r^2 = a^2_{ik}\left[\eta + \frac{\boldsymbol{a}_{ik} \cdot \left(\boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_{ij}\xi\right)}{a^2_{ik}}\right]^2 + \frac{\left|\boldsymbol{a}_{ik} \times \left(\boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_{ij}\xi\right)\right|^2}{a^2_{ik}} . \tag{3.52}$$

Pierwsze całkowanie we wzorze (3.49) wykonuje się względem zmiennej $\eta$ przez zamianę zmiennych podstawiając za

$$u = a_{ik}\left[\eta + \frac{a_{ik}\cdot\left(a_i + a_{ij}\,\xi\right)}{a_{ik}^2}\right], \tag{3.53}$$

skąd oblicza się

$$\mathrm{d}u = a_{ik}\,\mathrm{d}\eta\,. \tag{3.54}$$

Dla $\eta_1 = 0$ ze wzoru (3.53) otrzymuje się:

$$u_1 = \frac{a_{ik}\cdot\left(a_i + a_{ij}\,\xi\right)}{a_{ik}} = \frac{a_5\,\xi + a_6}{a_{ik}}, \tag{3.55}$$

gdzie

$$\left.\begin{aligned} a_5 &= a_{ik}\cdot a_{ij} \\ a_6 &= a_{ik}\cdot a_i \end{aligned}\right\}. \tag{3.56}$$

Dla $\eta_2 = 1 - \xi$ ze wzoru (3.53) otrzymuje się:

$$u_2 = -a_{ik}\,\xi + \frac{a_{ik}^2 + a_{ik}\cdot\left(a_i + a_{ij}\,\xi\right)}{a_{ik}} = \frac{a_1\,\xi + a_2}{a_{ik}}, \tag{3.57}$$

gdzie

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= a_{ik}\cdot\left(a_{ij} - a_{ik}\right) \\ a_2 &= a_{ik}\cdot\left(a_i + a_{ik}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{3.58}$$

Dodatkowo dokonuje się podstawienia

$$a = \frac{\left|a_{ik}\times\left(a_i + a_{ij}\,\xi\right)\right|}{a_{ik}} = \frac{\left|a_3\,\xi + a_4\right|}{a_{ik}}, \tag{3.59}$$

gdzie

$$\left.\begin{aligned} a_3 &= a_{ikx}\,a_{ijy} - a_{iky}\,a_{ijx} \\ a_4 &= a_{ikx}\,a_{iy} - a_{iky}\,a_{ix} \end{aligned}\right\} \tag{3.60}$$

i wtedy, wykorzystując powyższe podstawienia, oblicza się funkcję kształtu (3.49)

$$F_{ps}\left(X, Y_{ps}^i, Y_{ps}^j, Y_{ps}^k\right) = -\Delta_{ps}\int_0^1\int_{u_1}^{u_2}\frac{1}{a_{ik}}\ln\left(u^2 + a^2\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\xi = -\Delta_{ps}\int_0^1\frac{I_2 - I_1}{a_{ik}}\,\mathrm{d}\xi\,, \tag{3.61}$$



gdzie:

$$\left.\begin{aligned} I_2 &= u_2\ln\left(u_2^2 + a^2\right) - 2u_2 + 2a\,\mathrm{arctg}\frac{u_2}{a} \\ I_1 &= u_1\ln\left(u_1^2 + a^2\right) - 2u_1 + 2a\,\mathrm{arctg}\frac{u_1}{a} \end{aligned}\right\} \tag{3.61a}$$

Różnica obliczonych całek $I_2$ i $I_1$

$$\begin{aligned} I_2 - I_1 = {} & u_2\ln\left(u_2^2 + a^2\right) - u_1\ln\left(u_1^2 + a^2\right) - 2\left(u_2 - u_1\right) + \\ & + 2a\,\mathrm{arctg}\frac{u_2}{a} - 2a\,\mathrm{arctg}\frac{u_1}{a} \end{aligned} \tag{3.61b}$$

jest funkcją zmiennej $\xi$.

Suma występująca w pierwszym składniku prawej strony wzoru (3.61b)

$$u_2^2 + a^2 = A_1\,\xi^2 + A_2\,\xi + A_3\,, \tag{3.62}$$

gdzie

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \left|a_{ik} - a_{ij}\right|^2 \\ A_2 &= 2\left(a_{ij} - a_{ik}\right)\cdot\left(a_i + a_{ik}\right) \\ A_3 &= \left|a_i + a_{ik}\right|^2 \end{aligned}\right\}, \tag{3.62a}$$

jest wielomianem kwadratowym zmiennej $\xi$, którego wyróżnik

$$\Delta_3 = -4\left|\left(a_{ik} - a_{ij}\right)\times\left(a_i + a_{ik}\right)\right|^2 \le 0\,. \tag{3.62b}$$

Różnica występująca w trzecim składniku prawej strony wzoru (3.61b)

$$u_2 - u_1 = a_{ik}\left(1 - \xi\right). \tag{3.63}$$

Suma występująca w drugim składniku prawej strony wzoru (3.61b)

$$u_1^2 + a^2 = A_4\,\xi^2 + A_5\,\xi + A_6\,, \tag{3.64}$$

gdzie

$$\left.\begin{aligned} A_4 &= a_{ij}^2 \\ A_5 &= 2a_i\cdot a_{ij} \\ A_6 &= a_i^2 \end{aligned}\right\}, \tag{3.64a}$$

jest wielomianem kwadratowym zmiennej $\xi$, którego wyróżnik

$$\Delta_4 = -4\left|a_{ij}\times a_i\right|^2 \le 0\,. \tag{3.64b}$$

Ilorazy występujące w składniku czwartym i piątym prawej strony wzoru (3.61b) przedstawiają się wzorami:

$$\frac{u_2}{a} = \frac{a_1\xi + a_2}{|a_3\xi + a_4|} \tag{3.65}$$

oraz

$$\frac{u_1}{a} = \frac{a_5\xi + a_6}{|a_3\xi + a_4|} . \tag{3.66}$$

Wykorzystując powyższe podstawienia funkcję kształtu (3.61) przedstawia się poprzez sumę algebraiczną odpowiednich całek $I_3$, $I_4$, $I_5$, $I_6$ i $I_7$, tzn.

$$F_{ps}\left(X, Y_{ps}^{i}, Y_{ps}^{j}, Y_{ps}^{k}\right) = -\Delta_{ps}\left(I_3 - I_4 - I_5 + I_6 - I_7\right), \tag{3.67}$$

gdzie:

$$I_3 = \int_0^1 \frac{u_2}{a_{ik}} \ln\left(u_2^2 + a^2\right) \mathrm{d}\xi , \tag{3.67a}$$

$$I_4 = \int_0^1 \frac{u_1}{a_{ik}} \ln\left(u_1^2 + a^2\right) \mathrm{d}\xi , \tag{3.67b}$$

$$I_5 = \int_0^1 \frac{2\left(u_2 - u_1\right)}{a_{ik}} \mathrm{d}\xi , \tag{3.67c}$$

$$I_6 = \int_0^1 \frac{2a}{a_{ik}} \operatorname{arctg}\frac{u_2}{a} \mathrm{d}\xi , \tag{3.67d}$$

$$I_7 = \int_0^1 \frac{2a}{a_{ik}} \operatorname{arctg}\frac{u_1}{a} \mathrm{d}\xi . \tag{3.67d}$$

Wykorzystując metody obliczenia całek z prac [5, 54, 153] i wzory z pracy [60] oblicza się analitycznie całki $I_3$, $I_4$, $I_5$, $I_6$, $I_7$ (przedstawiono je w załączniku Z1) i wtedy funkcję kształtu $F_{ps}$ przedstawia się jako kombinację funkcji standardowych.



### 3.3.3. Aproksymacja gęstości prądu funkcjami sklejanymi

Dokładniejsze wyznaczenie logarytmicznego potencjału magnetycznego w przewodach równoległych i ich otoczeniu otrzymuje się poprzez aproksymację funkcji gęstości prądu $J(Y)$ funkcjami sklejanymi pierwszego stopnia dwóch zmiennych: $\xi$ oraz $\eta$ [16, 44]. W obszarze trójkątnym $\Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}$ w wyniku interpolacji wartościami gęstości prądu $J_{ps}^{i_s}$, $J_{ps}^{j_s}$ i $J_{ps}^{k_s}$ w punktach triangulacji $Y_{ps}^{i_s}$, $Y_{ps}^{j_s}$ i $Y_{ps}^{k_s}$ funkcję gęstości prądu $J_{ps}^{i_s j_s k_s}(Y)$ przedstawia się następująco:

$$J_{ps}^{i_s j_s k_s}(Y) = \begin{cases} J_{ps}^{i_s} + \left(J_{ps}^{j_s} - J_{ps}^{i_s}\right)\xi + \left(J_{ps}^{k_s} - J_{ps}^{i_s}\right)\eta & \text{dla} \quad Y \in \Delta_{ps}^{i_s j_s k_s} \\ 0 \quad \text{dla} \quad Y \notin \Delta_{ps}^{i_s j_s k_s} \end{cases} , \tag{3.68}$$

gdzie: $0 \le \xi \le 1$,
$0 \le \eta \le 1 - \xi$,
$s = 1, 2, \ldots, N_d$,
$p = 1, 2, \ldots, N_c$,
$i_s, j_s, k_s$ - wierzchołki trójkąta $\Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}$.

Wtedy w dowolnym punkcie $X(x, y) \in \mathrm{R}^2$ na podstawie wzoru (3.27) wektorowy potencjał magnetyczny wytworzony przez prądy układu $N_c$ przewodów równoległych, z których każdy podzielony jest na $N_d$ trójkątnych obszarów elementarnych, wyraża się wzorem:

$$A(X) = \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{p=1}^{N_c} \sum_{s=1}^{N_d} \int_{\Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}} J_{ps}^{i_s j_s k_s}(Y) \ln\frac{1}{r} \mathrm{d}x' \mathrm{d}y' , \tag{3.69}$$

gdzie $r$ jest dane wzorem (3.25a) oraz (3.50).

Ze wzoru (3.69) wynika, że wektorowy potencjał magnetyczny aproksymowany jest wartościami gęstości prądu w wierzchołkach trójkątów $\Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}$. Wzór ten można także przedstawić następująco:

$$A(X) = \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{p=1}^{N_c} \sum_{s=1}^{N_d} A_{ps}^{i_s j_s k_s}\left(X, \Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}\right) , \tag{3.70}$$

gdzie funkcja

$$\begin{aligned} A_{ps}^{i_s j_s k_s}\left(X, \Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}\right) &= F_{ps}^{i_s j_s k_s}\left(X, \Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}\right) J_{ps}^{i_s}\left(Y_{ps}^{i_s}\right) + \\ &+ C_{ps}^{i_s j_s k_s}\left(X, \Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}\right) J_{ps}^{j_s}\left(Y_{ps}^{j_s}\right) + D_{ps}^{i_s j_s k_s}\left(X, \Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}\right) J_{ps}^{k_s}\left(Y_{ps}^{k_s}\right) \end{aligned} \tag{3.71}$$

jest przedstawiona poprzez wartości gęstości prądu w punktach triangulacji i funkcje kształtu

$$F_{ps}^{i_s j_s k_s}\left(X,\Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}\right)=\int\limits_{\Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}}(1-\xi-\eta)\ln\frac{1}{r}\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'=$$

$$=-2\Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}\int\limits_0^{1-\xi}\int\limits_0^1(1-\xi-\eta)\ln r\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,, \tag{3.71a}$$

$$C_{ps}^{i_s j_s k_s}\left(X,\Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}\right)=\int\limits_{\Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}}\xi\ln\frac{1}{r}dx'dy'=-2\Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}\int\limits_0^{1-\xi}\int\limits_0^1\xi\ln r\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,, \tag{3.71b}$$

$$D_{ps}^{i_s j_s k_s}\left(X,\Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}\right)=\int\limits_{\Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}}\eta\ \ln\frac{1}{r}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'=-2\Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}\int\limits_0^{1-\xi}\int\limits_0^1\eta\ln r\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,. \tag{3.71c}$$

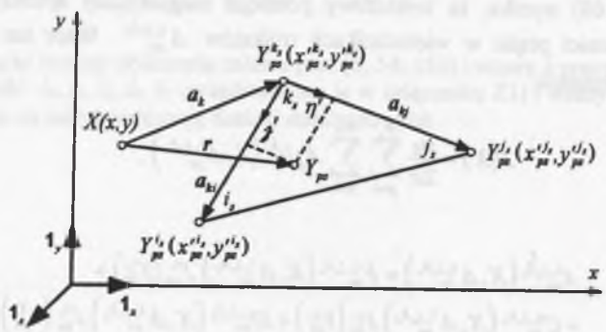
Pole $\Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}$ oblicza się ze wzoru:

$$\Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}=\frac{1}{2}\det\begin{bmatrix}1 & x_{ps}^{\prime i_s} & y_{ps}^{\prime i_s}\\ 1 & x_{ps}^{\prime j_s} & y_{ps}^{\prime j_s}\\ 1 & x_{ps}^{\prime k_s} & y_{ps}^{\prime k_s}\end{bmatrix}. \tag{3.72}$$

Jeżeli parametry $\xi$ i $\eta$ zamieni się miejscami, to całka (3.71a) nie ulegnie zmianie, a to oznacza, że

$$F_{ps}^{i_s j_s k_s}\left(X,\Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}\right)=F_{ps}^{i_s k_s j_s}\left(X,\Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}\right). \tag{3.73}$$

Struktura całek (3.71a), (3.71b) i (3.71c) jest identyczna, a różnią się one tylko permutacją wskaźników. Aby to wykazać, wprowadza się nowe współrzędne parametryczne $\xi'$ i $\eta'$ trójkąta $\Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}$, których początek zlokalizowany jest w punkcie $Y_{ps}^{k_s}$ - rys.3.7.




Rys.3.7. Współrzędne parametryczne $\xi'$, $\eta'$ w trójkącie $\Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}$

Fig.3.7. Parametric coordinates $\xi'$, $\eta'$ in triangle $\Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}$



Wtedy każdy punkt $Y_{ps}$ wewnątrz trójkąta $\Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}$ aproksymowany jest następująco:

$$\tau_{ps}^{i_s j_s k_s}=\left(x'_{ps},y'_{ps}\right):\begin{cases}x'_{ps}=x_{ps}^{\prime k_s}+\left(x_{ps}^{\prime i_s}-x_{ps}^{\prime k_s}\right)\xi'+\left(x_{ps}^{\prime j_s}-x_{ps}^{\prime k_s}\right)\eta'\\ y'_{ps}=y_{ps}^{\prime k_s}+\left(y_{ps}^{\prime i_s}-y_{ps}^{\prime k_s}\right)\xi'+\left(y_{ps}^{\prime j_s}-y_{ps}^{\prime k_s}\right)\eta'\,,\end{cases} \tag{3.74}$$

gdzie: $0\le\xi'\le 1$,
$0\le\eta'\le 1-\xi'$.

Aproksymując gęstość prądu $J(Y)$ funkcjami sklejanymi otrzymuje się:

$$J_{ps}^{i_s j_s k_s}(Y)=\begin{cases}J_{ps}^{k_s}+\left(J_{ps}^{i_s}-J_{ps}^{k_s}\right)\xi'+\left(J_{ps}^{j_s}-J_{ps}^{k_s}\right)\eta & \text{dla } Y\in\Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}\\ 0 \quad \text{dla} \quad Y\notin\Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}.\end{cases} \tag{3.75}$$

Wtedy funkcje kształtu występujące we wzorze (3.71) dla tych samych zmiennych węzłowych $J_{ps}^{i_s}$, $J_{ps}^{j_s}$ i $J_{ps}^{k_s}$ oblicza się następująco:

$$F_{ps}^{i_s j_s k_s}\left(X,\Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}\right)=-2\Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}\int\limits_0^{1-\xi'}\int\limits_0^1\xi'\ln r\,\mathrm{d}\xi'\mathrm{d}\eta', \tag{3.76}$$

$$C_{ps}^{j_s i_s k_s}\left(X,\Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}\right)=-2\Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}\int\limits_0^{1-\xi'}\int\limits_0^1\eta'\ln r\,\mathrm{d}\xi'\mathrm{d}\eta', \tag{3.76a}$$

$$D_{ps}^{k_s i_s j_s}\left(X,\Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}\right)=-2\Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}\int\limits_0^{1-\xi'}\int\limits_0^1\left(1-\xi'-\eta'\right)\ln r\,\mathrm{d}\xi'\mathrm{d}\eta', \tag{3.76b}$$

gdzie tym razem

$$r=|\boldsymbol{r}|=\left|\boldsymbol{a}_k+\boldsymbol{a}_{ki}\xi'+\boldsymbol{a}_{kj}\eta'\right|. \tag{3.77}$$

Porównując wzory (3.76) i (3.76a) otrzymuje się:

$$C_{ps}^{j_s i_s k_s}\left(X,\Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}\right)=F_{ps}^{j_s k_s i_s}\left(X,\Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}\right). \tag{3.78}$$

Przenosząc początek parametrycznego układu współrzędnych $\xi''$, $\eta''$ trójkąta $\Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}$ do punktu $Y_{ps}^{j_s}$ i wykonując analogicznie operacje jak powyżej otrzymuje się:

$$D_{ps}^{k_s i_s j_s}\left(X,\Delta_{ps}\right)=F_{ps}^{k_s i_s j_s}. \tag{3.79}$$

Zatem stwierdza się, że struktura całek (3.71a), (3.71b) i (3.71c) jest identyczna, a różnią się one tylko permutacją wskaźników. Wtedy funkcję $A_{ps}^{i_s j_s k_s}\left(X, \Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}\right)$ ze wzoru (3.71) wyraża się wzorem:

$$A_{ps}^{i_s j_s k_s}\left(X, \Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}\right) = F_{ps}^{i_s j_s k_s}\left(X, \Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}\right) J_{ps}^{i_s}\left(Y_{ps}^{i_s}\right) + \\ + F_{ps}^{j_s k_s i_s}\left(X, \Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}\right) J_{ps}^{j_s}\left(Y_{ps}^{j_s}\right) + F_{ps}^{k_s i_s j_s}\left(X, \Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}\right) J_{ps}^{k_s}\left(Y_{ps}^{k_s}\right). \tag{3.80}$$

Aby zatem wyznaczyć przybliżoną wartość funkcji $A(X)$ wystarczy w sposób ogólny określić funkcję $F_{ps}^{i_s j_s k_s}\left(X, \Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}\right)$, wykonując podwójne całkowanie we wzorze (3.71a) lub (3.76) (łatwiej tego dokonać we wzorze (3.76)). Natomiast funkcje $F_{ps}^{j_s k_s i_s}\left(X, \Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}\right)$ i $F_{ps}^{k_s i_s j_s}\left(X, \Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}\right)$ otrzymuje się poprzez odpowiednią permutację wskaźników $\{i_s\, j_s\, k_s\}$ trójkąta $\Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}$ w funkcji $F_{ps}^{i_s j_s k_s}\left(X, \Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}\right)$.

Przedstawiając wzór (3.80) w postaci:

$$A_{ps}^{i_s j_s k_s}\left(X, \Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}\right) = \sum_{\substack{r_s \in \{i_s j_s k_s\} \\ t_s,\, z_s \neq r_s \\ t_s \neq z_s}} F_{ps}^{r_s t_s z_s}\left(X, \Delta_{ps}^{r_s t_s z_s}\right) J_{ps}^{r_s} \tag{3.81}$$

wektorowy potencjał magnetyczny (3.70) w dowolnym punkcie $X(x, y) \in R^2$ wyraża się następującym wzorem:

$$A(X) = \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{p=1}^{N_c} \sum_{s=1}^{N_d} \sum_{\substack{r_s \in \{i_s j_s k_s\} \\ r_s,\, z_s \neq r_s \\ t_s \neq z_s}} F_{ps}^{r_s t_s z_s}\left(X, \Delta_{ps}^{r_s t_s z_s}\right) J_{ps}^{r_s}. \tag{3.82}$$

Sumowanie we wzorze (3.82) po numeracji trójkątów $\Delta_{ps}^{r_s t_s z_s}$ może być zastąpione sumowaniem po numeracji punktów $Y_p^w$ ($w$ = 1, 2, ..., $W$; $W$ - liczba węzłów sieci triangulacyjnej p-tego przewodu), będących węzłami sieci triangulacyjnej powierzchni $S_p$. Wtedy wzór (3.82) ma postać:

$$A(X) = \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{p=1}^{N_c} \sum_{w=1}^{W} F_p^w\left(X, \Delta_p^w\right) J_p^w, \tag{3.83}$$

gdzie $J_p^w$ jest gęstością prądu w punkcie $X_p^w$, zaś

$$F_p^w\left(X, \Delta_p^w\right) = \sum_{\substack{\{r_s t_s z_s\} \in \Delta_p^w \\ w \in \{r_s t_s z_s\}}} F_{ps}^{r_s t_s z_s}\left(X, \Delta_{ps}^{r_s t_s z_s}\right) \tag{3.83a}$$

oraz $\Delta_p^w$ jest zbiorem trójkątów mających wspólny wierzchołek w punkcie $Y_p^w$:

$$\Delta_p^w = \left\{\Delta_{ps}^{r_s t_s z_s} : w \in \{r_s t_s z_s\}\right\}. \tag{3.83b}$$



Oznacza to, że gęstość prądu $J_p^w$ pojawi się przy sumowaniu we wzorze (3.83) tyle razy, ile jest trójkątów o wspólnym wierzchołku $Y_p^w$.

Aby zatem ze wzoru (3.83) wyznaczyć wektorowy potencjał magnetyczny w dowolnym punkcie $X(x, y) \in R^2$ układu $N_c$ przewodów równoległych, należy uprzednio określić w sposób ogólny funkcję kształtu $F_{ps}^{i_s j_s k_s}\left(X, \Delta_{ps}^{i_s j_s k_s}\right)$ oraz gęstości prądów $J_p^w$ w węzłach sieci triangulacyjnej.

Funkcje kształtu występujące we wzorze (3.80) oblicza się w sposób ogólny ze wzoru (3.76). W celu uproszczenia zapisu w dalszej części opracowania będzie pominięty indeks „prim" w oznaczeniu zmiennych parametrycznych $\xi'$, $\eta'$ oraz indeks „$s$" przy $i_s$, $j_s$ i $k_s$.

Z rys.3.7 wyznacza się wektor

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{a}_{ki}\xi + \boldsymbol{a}_{kj}\eta \tag{3.84}$$

i wtedy całkę (3.76) przedstawia się następująco:

$$F_{ps}^{ijk}\left(X, Y_{ps}^i, Y_{ps}^j, Y_{ps}^k\right) = -2\Delta_{ps} \int_0^{1-\xi} \int_0^1 \xi \ln\left|\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{a}_{ki}\xi + \boldsymbol{a}_{kj}\eta\right| \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta. \tag{3.85}$$

Na podstawie wzoru (3.84) kwadrat modułu wektora $\boldsymbol{r}$

$$r^2 = |\boldsymbol{r}|^2 = a_{kj}^2\eta^2 + 2\boldsymbol{a}_{kj}\cdot\left(\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{a}_{ki}\xi\right)\eta + \left|\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{a}_{ki}\xi\right|^2. \tag{3.86}$$

Jest to wielomian kwadratowy zmiennej $\eta$, którego wyróżnik

$$\Delta = -4\left|\boldsymbol{a}_{kj} \times \left(\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{a}_{ki}\xi\right)\right|^2 \leq 0. \tag{3.87}$$

Wzór (3.86) można przedstawić w postaci:

$$r^2 = a_{kj}^2\left[\eta + \frac{\boldsymbol{a}_{kj}\cdot\left(\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{a}_{ki}\xi\right)}{a_{kj}^2}\right]^2 + \frac{\left|\boldsymbol{a}_{kj} \times \left(\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{a}_{ki}\xi\right)\right|^2}{a_{kj}^2}. \tag{3.88}$$

Pierwsze całkowanie we wzorze (3.85) wykonuje się względem zmiennej $\eta$ poprzez zamianę zmiennych podstawiając za

$$u = a_{kj}\left[\eta + \frac{\boldsymbol{a}_{kj}\cdot\left(\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{a}_{ki}\xi\right)}{a_{kj}^2}\right], \tag{3.89}$$

skąd otrzymuje się:

$$\mathrm{d}u = a_{kj}\,\mathrm{d}\eta. \tag{3.90}$$

Dla $\eta_1 = 0$ ze wzoru (3.89) oblicza się

$$u_1 = \frac{a_{kj}\cdot\left(a_k + a_{ki}\,\xi\right)}{a_{kj}} = \frac{a_5\,\xi + a_6}{a_{kj}}, \tag{3.91}$$

gdzie:

$$\left.\begin{aligned} a_5 &= a_{kj}\cdot a_{ki} \\ a_6 &= a_{kj}\cdot a_k \end{aligned}\right\}. \tag{3.92}$$

Dla $\eta_2 = 1 - \xi$ ze wzoru (3.89) otrzymuje się:

$$u_2 = -a_{kj}\,\xi + \frac{a_{kj}^2 + a_{kj}\cdot\left(a_k + a_{ki}\,\xi\right)}{a_{kj}} = \frac{a_1\,\xi + a_2}{a_{kj}}, \tag{3.93}$$

gdzie:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= a_{kj}\cdot\left(a_{ki} - a_{kj}\right) \\ a_2 &= a_{kj}\cdot\left(a_k + a_{kj}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{3.94}$$

Dodatkowo wykonuje się podstawienie

$$a = \frac{\left|a_{kj}\times\left(a_k + a_{ki}\,\xi\right)\right|}{a_{kj}} = \frac{a_3\,\xi + a_4}{a_{kj}}, \tag{3.95}$$

gdzie:

$$\left.\begin{aligned} a_3 &= a_{kjx}\,a_{kiy} - a_{kjy}\,a_{kix} \\ a_4 &= a_{kjx}\,a_{ky} - a_{kjy}\,a_{kx} \end{aligned}\right\}, \tag{3.96}$$

i wtedy, wykorzystując powyższe podstawienia, oblicza się funkcję kształtu (3.85)

$$F_{ps}^{ijk}\left(X, Y_{ps}^i, Y_{ps}^j, Y_{ps}^k\right) = -\Delta_{ps}\int_0^1\int_{u_1}^{u_2}\frac{\xi}{a_{kj}}\ln\left(u^2 + a^2\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= -\Delta_{ps}\int_0^1\frac{I_2 - I_1}{a_{kj}}\,\xi\,\mathrm{d}\xi, \tag{3.97}$$

gdzie:

$$\left.\begin{aligned} I_2 &= u_2\ln\left(u_2^2 + a^2\right) - 2u_2 + 2a\,\mathrm{arctg}\frac{u_2}{a} \\ I_1 &= u_1\ln\left(u_1^2 + a^2\right) - 2u_1 + 2a\,\mathrm{arctg}\frac{u_1}{a} \end{aligned}\right\}. \tag{3.98}$$

Różnica obliczonych całek $I_2$ i $I_1$

$$I_2 - I_1 = u_2\ln\left(u_2^2 + a^2\right) - u_1\ln\left(u_1^2 + a^2\right) - 2\left(u_2 - u_1\right) +$$

$$+ 2a\,\mathrm{arctg}\frac{u_2}{a} - 2a\,\mathrm{arctg}\frac{u_1}{a}. \tag{3.99}$$



Suma występująca w pierwszym składniku prawej strony równania (3.99)

$$u_2^2 + a^2 = A_1\,\xi^2 + A_2\,\xi + A_3, \tag{3.100}$$

gdzie:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \left|a_{kj} - a_{ki}\right|^2 \\ A_2 &= 2\left(a_{ki} - a_{kj}\right)\cdot\left(a_k + a_{kj}\right) \\ A_3 &= \left|a_k + a_{kj}\right|^2 \end{aligned}\right\}, \tag{3.101}$$

jest wielomianem kwadratowym zmiennej $\xi$, którego wyróżnik

$$\Delta_2 = -4\left|\left(a_{kj} - a_{ki}\right)\times\left(a_k + a_{kj}\right)\right|^2 \le 0. \tag{3.102}$$

Różnica występująca w trzecim składniku prawej strony wzoru (3.99)

$$u_2 - u_1 = a_{kj}\left(1 - \xi\right). \tag{3.103}$$

Suma z drugiego składnika prawej strony wzoru (3.99)

$$u_1^2 + a^2 = A_4\,\xi^2 + A_5\,\xi + A_6, \tag{3.104}$$

gdzie:

$$\left.\begin{aligned} A_4 &= a_{ki} \\ A_5 &= 2a_k\cdot a_{ki} \\ A_6 &= a_k^2 \end{aligned}\right\}, \tag{3.105}$$

jest wielomianem kwadratowym zmiennej $\xi$, którego wyróżnik

$$\Delta_1 = -4\left|a_{ki}\times a_k\right|^2 \le 0. \tag{3.106}$$

Ilorazy występujące w składniku czwartym i piątym prawej strony wzoru (3.99) przedstawia się wzorami:

$$\frac{u_2}{a} = \frac{a_1\,\xi + a_2}{\left|a_3\,\xi + a_4\right|} \tag{3.107}$$

oraz

$$\frac{u_1}{a} = \frac{a_5\,\xi + a_6}{\left|a_3\,\xi + a_4\right|}. \tag{3.108}$$

Wykorzystując powyższe podstawienia funkcję kształtu (3.97) przedstawia się poprzez sumę algebraiczną odpowiednich całek $I_3$, $I_4$, $I_5$, $I_6$, i $I_7$, tzn.

$$F_{ps}^{ijk}\left(X, Y_{ps}^i, Y_{ps}^j, Y_{ps}^k\right) = -\Delta_{ps}\left(I_3 - I_4 - I_5 + I_6 - I_7\right), \tag{3.109}$$

gdzie:

$$I_3 = \int_0^1 \frac{u_2 \xi}{a_{kj}} \ln\left(u_2^2 + a^2\right) \mathrm{d}\xi \,, \tag{3.109a}$$

$$I_4 = \int_0^1 \frac{u_1 \xi}{a_{kj}} \ln\left(u_1^2 + a^2\right) \mathrm{d}\xi \,, \tag{3.109b}$$

$$I_5 = \int_0^1 \frac{2(u_2 - u_1)\xi}{a_{kj}} \mathrm{d}\xi \,, \tag{3.109c}$$

$$I_6 = \int_0^1 \frac{2a\xi}{a_{kj}} \operatorname{arctg} \frac{u_2}{a} \mathrm{d}\xi \,, \tag{3.109d}$$

$$I_6 = \int_0^1 \frac{2a\xi}{a_{kj}} \operatorname{arctg} \frac{u_1}{a} \mathrm{d}\xi \,. \tag{3.109e}$$

Wykorzystując metody obliczania całek z prac [5, 54, 153] i wzory z pracy [60] oblicza się analitycznie całki $I_3, I_4, I_5, I_6$ i $I_7$ (przedstawiono je w załączniku Z2) i wtedy funkcję kształtu (3.109) przedstawia się jako kombinację funkcji standardowych.

Gęstości prądu $J_l(X)$ w dowolnym punkcie $X \in \mathrm{S}_l$ $l$-tego przewodu związana jest z wektorowym potencjałem magnetycznym równaniem(2.16). Przy aproksymacji potencjału wektorowego wzorem (3.83) równanie to ma następującą postać:

$$\frac{J_l(X)}{\gamma} + \frac{\mathrm{j}\omega\mu_0}{2\pi} \sum_{p=1}^{N_c} \sum_{w=1}^{W} F_p^w\left(X, \Delta_p^w\right) J_p^w = \mathcal{U}_l \,, \tag{3.110}$$

gdzie: $l = 1, 2, \ldots, N_c$.

Jeżeli punkt $X = X_l^v$ ($v = 1, 2, \ldots, W$), tzn., gdy jest on węzłem sieci triangulacyjnej powierzchni $S_l$ $l$-tego przewodu, powyższe równanie zapisuje się następująco:

$$\frac{J_l^v}{\gamma} + \frac{\mathrm{j}\omega\mu_0}{2\pi} \sum_{p=1}^{N_c} \sum_{w=1}^{W} F_p^w\left(X_l^v, \Delta_p^w\right) J_p^w = \mathcal{U}_l \,, \tag{3.111}$$

gdzie $J_l^v$ jest gęstością prądu w punkcie $X_l^v$.

Zapisując równania typu (3.111) dla każdego punktu węzłowego układu $N_c$ przewodów otrzymuje się układ $N_c W$ równań algebraicznych z nieznanymi gęstościami prądów w węzłach sieci triangulacyjnej.-Po rozwiązaniu tego układu równań ze wzoru (3.83) wyznacza się wektorowy potencjał magnetyczny w dowolnym punkcie $X \in \mathrm{R}^2$.

# 4. IMPEDANCJE JEDNOBIEGUNOWEGO TORU WIELKOPRĄDOWEGO

Osłony jednobiegunowego, płaskiego toru wielkoprądowego z rys.1.2 łączone są najczęściej z ziemią na ich końcach rys.1.3b oraz z osłonami innych faz - rys.1.5. Osłony mogą też być łączone między sobą w punktach pośrednich - rys.1.4. Wtedy w osłonach popłyną wzdłużne prądy powrotne (rys.1.5), wywołane siłami elektromotorycznymi indukcji wzajemnych między osłoną a przewodem roboczym własnej fazy oraz między osłoną a przewodami roboczymi i osłonami faz sąsiednich. Aby prawidłowo wykonać obliczenia pola magnetycznego w otoczeniu takiego toru (również obliczenia termiczne i dynamiczne) należy znać wartości tych prądów wzdłużnych. Wtedy konieczne staje się wyznaczenie impedancji własnych przewodów fazowych i osłon oraz wszystkich indukcyjności wzajemnych, czyli wyznaczenie parametrów elektrycznych schematu zastępczego przedstawionego na rys.1.6. Należy przy tym uwzględnić zjawiska naskórkowości i zbliżenia. W pierwszej kolejności, na podstawie równania całkowego wyprowadzonego w rozdziale 2, zostaną zdefiniowane impedancje własne i wzajemne w przypadku ogólnym układu $N_C$ przewodów równoległych.

## 4.1. Impedancja własna przewodu odosobnionego

Równanie całkowe (2.10) dla przewodu odosobnionego wiąże prąd $I$ z jednostkowym spadkiem napięcia $\mathcal{U}$ w przewodzie. Wobec tego zostanie ono wykorzystane do wyznaczenia impedancji jednostkowej przewodu odosobnionego.

Podstawiając wzór (2.9) do równania (2.10) otrzymuje się:

$$\mathcal{U} = \frac{J(X)}{\gamma} + \mathrm{j}\omega A(X). \tag{4.1}$$

Następnie równanie (4.1) mnoży się przez sprzężoną wartość $J^*(X)$ i całkuje w obszarze S, czyli

$$\int_S \mathcal{U} J^*(X) \mathrm{d}S = \frac{1}{\gamma} \int_S J(X) J^*(X) \mathrm{d}S + \mathrm{j}\omega \int_S A(X) J^*(X) \mathrm{d}S \,. \tag{4.2}$$

Jednostkowe napięcie $\mathcal{U}$ = const. (reprezentuje ono zewnętrzne, bezwirowe pole elektryczne), zaś

$$\int_S J^*(X) \mathrm{d}S = I^* \,. \tag{4.3}$$

Stąd też równanie (4.2) sprowadza się do równania:

$$\mathcal{U} I^* = \frac{1}{|I|^2}\left[\frac{1}{\gamma}\int_S J(X)J^*(X)\mathrm{d}S\right]|I|^2 + \frac{1}{|I|^2}\left[\mathrm{j}\omega\int_S A(X)J^*(X)\mathrm{d}S\right]|I|^2, \tag{4.4}$$

gdzie kwadrat modułu prądu $I$

$$|I|^2 = I I^*. \tag{4.4a}$$

Po podzieleniu stronami równania (4.4) przez $I^*$ otrzymuje się

$$\mathcal{U} = \mathcal{Z} I, \tag{4.5}$$

gdzie jednostkowa impedancja własna (w $\Omega\cdot\mathrm{m}^{-1}$) przewodu

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{\gamma|I|^2}\int_S J(X)J^*(X)\mathrm{d}S + \mathrm{j}\omega\frac{1}{|I|^2}\int_S A(X)J^*(X)\mathrm{d}S. \tag{4.5a}$$

Impedancja $\mathcal{Z}$ wiąże całkowity prąd $I$ w przewodzie z jednostkowym spadkiem napięcia. Zgodnie z pracami [50, 87, 88, 100, 167] część rzeczywista tej impedancji nazywa się jednostkową rezystancją własną (w $\Omega\cdot\mathrm{m}^{-1}$)

$$\mathcal{R} = \mathrm{Re}\,\mathcal{Z}, \tag{4.5b}$$

zaś jej część urojoną nazywa się jednostkową reaktancją własną (w $\Omega\cdot\mathrm{m}^{-1}$)

$$\mathcal{X} = \mathrm{Im}\,\mathcal{Z} \tag{4.5c}$$

i stąd jednostkowa indukcyjność własna (w $\mathrm{H}\cdot\mathrm{m}^{-1}$)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\omega}\mathrm{Im}\,\mathcal{Z}. \tag{4.5d}$$

Wzór (4.5d) określa jednostkową indukcyjność własną $\mathcal{L}$ jako parametr stojący przy $\mathrm{j}\omega$ we wzorze (4.5a), określającym jednostkową impedancję własną przewodu i z punktu widzenia teorii obwodów nazywa się ją [50, 87, 88, 100, 167] jednostkową indukcyjnością własną. Nie należy kojarzyć jej z konturem zamkniętym obwodu (wg klasycznego pojmowania indukcyjności własnej obwodu zamkniętego).



## 4.2. Impedancje własne i wzajemne układu $N_c$ przewodów równoległych

W rozdziale 2 z równania (2.16) dla układu $N_C$ przewodów równoległych otrzymano równanie (2.26), w którym odseparowano składniki zależne od prądu $I_l$ od składników zależnych od wszystkich pozostałych prądów $I_k$ ($k\neq l$ ; $k$=1,2,...,$N_C$-1).

W ostatnim składniku prawej strony równania (2.26) można zamienić miejscami $k$ oraz $s$. Następnie równanie to mnoży się stronami przez sprzężoną wartość gęstości prądu $J_{ll}^*(X)$ i całkuje po powierzchni $S_l$, otrzymując równanie:

$$\int_{S_l}\mathcal{U}_l J_{ll}^*(X)\mathrm{d}S_l = \left\{\frac{1}{|I_l|^2}\int_{S_l}\left[\frac{1}{\gamma_l}J_{ll}(X) + \mathrm{j}\omega A_{ll}(X) + \mathrm{j}\omega\sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{N_C-1}A_{kl}(X)\right]J_{ll}^*(X)\mathrm{d}S\right\}|I_l|^2 +$$

$$\left\{\frac{1}{I_l^* I_k}\int_{S_l}\left\{\sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{N_C-1}\left[\frac{1}{\gamma_l}J_{lk}(X) + \mathrm{j}\omega A_{lk}(X) + \mathrm{j}\omega\sum_{\substack{s=1\\s\neq l}}^{N_C-1}A_{sk}(X)\right]\right\}J_{ll}^*(X)\mathrm{d}S\right\}I_l^* I_k. \tag{4.6}$$

Jednostkowe napięcie $\mathcal{U}_l$= const., zaś

$$\int_{S_l}\mathcal{U}_l J_{ll}^*(X)\mathrm{d}S_l = \mathcal{U}_l I_l^*. \tag{4.6a}$$

Po podzieleniu stronami równania (4.6) przez $I_l^*$ otrzymuje się

$$\mathcal{U}_l = \mathcal{Z}_{ll} I_l + \sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{N_C-1}\mathcal{Z}_{lk} I_k, \tag{4.7}$$

gdzie jednostkowa impedancja własna $l$-tego przewodu (w $\Omega\cdot\mathrm{m}^{-1}$)

$$\mathcal{Z}_{ll} = \frac{1}{|I_l|^2}\int_{S_l}\left[\frac{1}{\gamma_l}J_{ll}(X) + \mathrm{j}\omega A_{ll}(X) + \mathrm{j}\omega\sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{N_C-1}A_{kl}(X)\right]J_{ll}^*(X)\mathrm{d}S \tag{4.7a}$$

oraz jednostkowa impedancja wzajemna (w $\Omega\cdot\mathrm{m}^{-1}$)

$$\mathcal{Z}_{lk} = \frac{1}{I_l^* I_k}\int_{S_l}\left\{\frac{1}{\gamma_l}J_{lk}(X) + \mathrm{j}\omega A_{lk}(X) + \mathrm{j}\omega\sum_{\substack{s=1\\s\neq l}}^{N_C-1}A_{sk}(X)\right\}J_{ll}^*(X)\mathrm{d}S, \tag{4.7b}$$

gdzie: $l$=1,2,...,$N_C$,
$k\neq l$ ; $k$=1,2,...,$N_C$-1,
$s\neq l$ ; $s$=1,2,...,$N_C$-1.

Ze wzoru (4.7a) określa się jednostkową rezystancję własną $l$-tego przewodu

$$\mathcal{R}_{ll} = \mathrm{Re}\,\mathcal{Z}_{ll} \tag{4.7c}$$

oraz jednostkową indukcyjność własną tego przewodu

$$\mathcal{L}_{ll} = \frac{1}{\omega}\mathrm{Im}\,\mathcal{Z}_{ll}, \tag{4.7d}$$

rozumianą jako parametr stojący przy $j\omega$ we wzorze (4.7a) określającym jednostkową impedancję własną $l$-tego przewodu (wg teorii obwodów).

Część urojoną, podzieloną przez $\omega$, jednostkowej impedancji wzajemnej $\mathcal{Z}_{lk}$ nazywa się [50, 87, 88, 100, 167] jednostkową indukcyjnością wzajemną (w $\mathrm{H{\cdot}m^{-1}}$), czyli

$$\mathcal{M}_{lk} = \frac{1}{\omega}\mathrm{Im}\,\mathcal{Z}_{lk}. \tag{4.7e}$$

Jednostkowa indukcyjność wzajemna $\mathcal{M}_{lk}$ jest parametrem określonym przez (4.7e), którego nie należy łączyć z klasycznym określeniem indukcyjności wzajemnej dwóch obwodów (dwóch cewek) sprzężonych magnetycznie. Parametr ten określa składową napięcia, indukowaną w $l$-tym przez prąd w $k$-tym przewodzie, przesuniętą w fazie względem prądu $I_k$ dokładnie o +90° (całkowite napięcie indukowane przez prąd $I_k$ jest przesunięte w fazie względem tego prądu o argument jednostkowej impedancji wzajemnej $\mathcal{Z}_{lk}$).

## 4.3. Impedancja przewodu rurowego

W niniejszym podrozdziale zostanie wyznaczona impedancja przewodu rurowego z rys.3.1 dla prądu przemiennego z uwzględnieniem i bez uwzględnienia zjawiska naskórkowości. W tym celu zostanie wykorzystany logarytmiczny, wektorowy potencjał magnetyczny, równanie (4.1) oraz metoda wyznaczania impedancji własnej przewodu przedstawiona w p.4.1.

### 4.3.1. Impedancja przewodu rurowego bez uwzględnienia zjawiska naskórkowości

Dla niskich częstotliwości gęstość prądu w przewodzie rurowym jest w przybliżeniu stała i wyraża się przybliżonym wzorem

$$J(r) \cong \frac{I}{\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)}. \tag{4.8}$$

Podstawiając wzór (4.8) do wzoru (3.16) otrzymuje się zespolony potencjał wektorowy w przewodzie rurowym

$$A^{II}(r) \cong \frac{\mu_0 I}{2\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)}\left[R_2^2 \ln\frac{1}{R_2} - R_1^2 \ln\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\left(R_2^2 - r^2\right)\right]. \tag{4.9}$$



Wektorowy potencjał magnetyczny (3.3) jest rozwiązaniem równania Poissona (3.1), więc potencjał (4.9) jest również rozwiązaniem tego równania w przewodzie rurowym z prądem przemiennym $I$ niskiej częstotliwości. Można zatem wykorzystać równanie (4.1), które po uwzględnieniu symetrii walcowej staje się

$$\mathcal{U} = E^{II} + j\omega A, \tag{4.10}$$

gdzie natężenie pola elektrycznego

$$E^{II}(r) = \frac{1}{\gamma}J(r). \tag{4.11}$$

Następnie równanie (4.10) mnoży się stronami przez sprzężoną gęstość prądu $J^*(r)$ i całkuje w obszarze $S^{II}$. W ten sposób otrzymuje się:

$$\int_{S^{II}} \mathcal{U} J^*(r)\mathrm{d}S^{II} = \frac{1}{\gamma}\int_{S^{II}} J(r)J^*(r)\mathrm{d}S^{II} + j\omega\int_{S^{II}} A^{II}(r)J^*(r)\mathrm{d}S^{II}. \tag{4.12}$$

Napięcie $\mathcal{U}$ nie zależy od zmiennej $r$, więc całka z lewej strony równania (4.12) jest iloczynem tego napięcia i prądu $I^*$ (jest więc zespoloną mocą pozorną w przewodzie rurowym).

Równanie to można zapisać w postaci :

$$\mathcal{U} I^* = \left[\frac{1}{\gamma|I|^2}\int_{S^{II}} J(r)J^*(r)\mathrm{d}S^{II}\right]|I|^2 + j\omega\left[\frac{1}{|I|^2}\int_{S^{II}} A^{II}(r)J^*(r)\mathrm{d}S^{II}\right]|I|^2. \tag{4.13}$$

Dzieląc równanie (4.13) stronami przez $I^*$ otrzymuje się :

$$\mathcal{U} = \mathcal{R} I + j\omega\mathcal{L} I = \mathcal{Z} I, \tag{4.14}$$

gdzie impedancja własna na jednostkę długości

$$\mathcal{Z} = \mathcal{R} + j\omega\mathcal{L}, \tag{4.15}$$

rezystancja własna na jednostkę długości

$$\mathcal{R} = \frac{2\pi}{\gamma|I|^2}\int_{R_1}^{R_2} J(r)J^*(r)r\,\mathrm{d}r \tag{4.16}$$

i indukcyjność własna na jednostkę długości

$$\mathcal{L} = \frac{2\pi}{|I|^2}\int_{R_1}^{R_2} A^{II}(r)J^*(r)r\,\mathrm{d}r. \tag{4.17}$$

Podstawiając (4.8) do wzorów (4.16) i (4.17) oraz wzór (4.9) do (4.17), po obliczeniu całek występujących w tym równaniu, otrzymuje się rezystancję na jednostkę długości przewodu rurowego

$$\mathcal{R}_0 \cong \frac{1}{\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)\gamma} \tag{4.18}$$

oraz jego jednostkową indukcyjność własną

$$\mathcal{L}_0 \cong \frac{\mu_0}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{R_2}+\frac{R_1^4}{\left(R_2^2-R_1^2\right)^2}\ln\frac{R_2}{R_1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{3R_1^2-R_2^2}{R_2^2-R_1^2}\right]. \tag{4.19}$$

W przedstawionym wzorze licznik wyrażenia $\frac{1}{R_2}$ jest równy jednostce miary długości – patrz również komentarz do wzoru (2.9).

### 4.3.2. Impedancja przewodu rurowego z uwzględnieniem zjawiska naskórkowości

Dla prądu przemiennego o zespolonej wartości skutecznej $I$ i częstotliwości pozwalającej na pominięcie prądów przesunięcia Maxwella gęstość prądu w przewodzie rurowym otrzymuje się z równania Helmholtza w postaci następującego wzoru [17, 91, 110, 114] :

$$J(r)=\frac{\sqrt{-\mathrm{j}}\,mI}{2\pi R_2}\cdot\frac{\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,mR_1\right)\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mr\right)-\mathrm{j}\,\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mR_1\right)\mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,mr\right)}{\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mR_2\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,mR_1\right)-\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mR_1\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,mR_2\right)}, \tag{4.20}$$

gdzie $m=\sqrt{\omega\mu_0\gamma}$ .

Podstawiając wzór (4.20) do wzoru (3.16), po wykonaniu całkowania funkcji Bessela zgodnie ze wzorami z [110], otrzymuje się zespolony potencjał wektorowy w przewodzie rurowym

$$A^{II}(r)=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left\{\ln\frac{1}{R_2}-\frac{\mathrm{j}\sqrt{-\mathrm{j}}}{mR_2}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\frac{\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,mR_1\right)\left[\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mR_2\right)-\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mr\right)\right]-\mathrm{j}\,\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mR_1\right)\left[\mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,mR_2\right)-\mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,mr\right)\right]}{\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mR_2\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,mR_1\right)-\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mR_1\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,mR_2\right)}\right\}. \tag{4.21}$$

Po podstawieniu wzorów (4.20) i (4.21) do wzorów (4.16) i (4.17) i wykonaniu odpowiednich całkowań funkcji Bessela otrzymuje się :

– rezystancję na jednostkę długości przewodu rurowego z uwzględnieniem zjawiska naskórkowości

$$\mathcal{R}=\frac{\sqrt{-\mathrm{j}}\,m}{4\pi\gamma R_2}\cdot\frac{a}{bb^*}, \tag{4.22}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}a=&\\ &=\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,mR_1\right)\mathcal{K}_1^*\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,mR_1\right)\left[\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mR_2\right)\mathcal{J}_1^*\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mR_2\right)+\mathrm{j}\,\mathcal{J}_0^*\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mR_2\right)\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mR_2\right)\right]+\\ &+\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mR_1\right)\mathcal{J}_1^*\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mR_1\right)\left[\mathcal{K}_0^*\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,mR_2\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,mR_2\right)+\mathrm{j}\,\mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,mR_2\right)\mathcal{K}_1^*\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,mR_2\right)\right]-\\ &-\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,mR_1\right)\mathcal{J}_1^*\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mR_1\right)\left[\mathcal{K}_0^*\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,mR_2\right)\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mR_2\right)+\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mR_2\right)\mathcal{K}_1^*\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,mR_2\right)\right]-\\ &-\mathrm{j}\,\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mR_1\right)\mathcal{K}_1^*\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,mR_1\right)\left[\mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,mR_2\right)\mathcal{J}_1^*\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mR_2\right)+\mathcal{J}_0^*\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mR_2\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mR_2\right)\right],\end{aligned}$$



$$b=\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mR_2\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,mR_1\right)-\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mR_1\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,mR_2\right),$$
$$b^*=\mathcal{J}_1^*\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mR_2\right)\mathcal{K}_1^*\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,mR_1\right)-\mathcal{J}_1^*\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mR_1\right)\mathcal{K}_1^*\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,mR_2\right),$$

– indukcyjność własną na jednostkę długości przewodu rurowego z uwzględnieniem zjawiska naskórkowości

$$\mathcal{L}=\frac{\mu_0}{2\pi}\left\{\ln\frac{1}{R_2}-\frac{\mathrm{j}\sqrt{-\mathrm{j}}}{mR_2 b}\left[\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,mR_1\right)\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mR_2\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\mathrm{j}\,\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mR_1\right)\mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,mR_2\right)\right]-\frac{a}{2b^*}\right\}. \tag{4.23}$$

Jeżeli obliczy się $\lim\limits_{m\to s}\mathcal{R}$ oraz $\lim\limits_{m\to s}\mathcal{L}$ dla $s\cong 0$, to otrzyma się odpowiednio wzory (4.18) i (4.19).

Impedancja własna przewodu rurowego

$$\mathcal{Z}=\mathrm{j}\omega\frac{\mu_0}{2\pi}\left\{\ln\frac{1}{R_2}-\frac{\mathrm{j}\sqrt{-\mathrm{j}}}{mR_2}\cdot\frac{\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,mR_1\right)\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mR_2\right)-\mathrm{j}\,\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mR_1\right)\mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,mR_2\right)}{\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mR_2\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,mR_1\right)-\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mR_1\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,mR_2\right)}\right\}. \tag{4.24}$$

We wzorach (4.23) i (4.24) licznik wyrażenia $\frac{1}{R_2}$ jest równy jednostce miary długości – patrz również komentarz do wzoru (2.9).

Jeżeli zamiast prądu $I$ w przewodzie rurowym dany jest spadek napięcia na jednostkę długości. tzn. dane jest zespolone wymuszenie napięciowe $\mathcal{U}$, to wtedy nieznana gęstość prądu $J$ jest rozwiązaniem ogólnym jednowymiarowego równania Helmholtza i można zapisać ją następująco, [17, 91, 110, 114]:

$$J(r)=C_1\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}mr\right)+C_2\mathcal{K}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}mr\right), \tag{4.25}$$

gdzie stałe $C_1$ i $C_2$ zależą od parametrów $mR_1$ i $mR_2$ oraz od napięcia $\mathcal{U}$.

Po podstawieniu (4.25) do (3.16) i całkowaniu funkcji Bessela otrzymuje się zespolony, wektorowy potencjał magnetyczny w przewodzie rurowym

$$A^{II}(r)=\frac{\sqrt{-\mathrm{j}}\mu_0}{m}\cdot$$
$$\cdot\left\{\mathrm{j}C_1\left\{-R_1\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mR_1\right)\ln\frac{1}{r}+R_2\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mR_2\right)\ln\frac{1}{R_2}-\frac{\mathrm{j}\sqrt{-\mathrm{j}}}{m}\left[\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mR_2\right)-\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,mr\right)\right]\right\}+\right.$$
$$\left.+C_2\left\{-R_1\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,mR_1\right)\ln\frac{1}{r}+R_2\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,mR_2\right)\ln\frac{1}{R_2}+\frac{\sqrt{-\mathrm{j}}}{m}\left[\mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,mR_2\right)-\mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,mr\right)\right]\right\}\right\}. \tag{4.26}$$

Tak wyznaczony potencjał magnetyczny podstawia się do równania (4.10) z jednoczesnym wykorzystaniem (4.11). Następnie tak otrzymane równanie zapisuje się dla dwóch warunków brzegowych – dla powierzchni wewnętrznej i zewnętrznej przewodu, wykorzystując niezależność napięcia $\mathcal{U}$ od zmiennej $r$. Otrzymuje się w ten sposób następujące równania :

– dla $r = R_1$

$$\mathcal{U} = \frac{1}{\gamma} C_1 \mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}mR_1\right) + \frac{1}{\gamma} C_2 \mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}mR_1\right) + \mathrm{j}\omega A^{II}(R_1), \tag{4.27}$$

– dla $r = R_2$

$$\mathcal{U} = \frac{1}{\gamma} C_1 \mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, mR_2\right) + \frac{1}{\gamma} C_2 \mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, mR_2\right) + \mathrm{j}\omega A^{II}(R_2). \tag{4.28}$$

Z tak otrzymanego układu równań wyznacza się stałe $C_1$ i $C_2$:

$$C_1 = \frac{\mathrm{j}\gamma \mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, mR_1\right)}{C} \mathcal{U}, \tag{4.29}$$

$$C_2 = \frac{\gamma \mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, mR_1\right)}{C} \mathcal{U}, \tag{4.30}$$

gdzie : $C = \mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, mR_2\right)\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, mR_1\right) + \mathrm{j}\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, mR_1\right)\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, mR_2\right) -$

$$- \mathrm{j}\sqrt{-\mathrm{j}}\, mR_2 \ln\frac{1}{R_2}\left[\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, mR_2\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, mR_2\right) - \mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, mR_1\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, mR_2\right)\right].$$

Zespolona wartość skuteczna prądu $I$ wynosi:

$$I = \int_{S^{II}} J(r) r \, \mathrm{d}r \mathrm{d}\Theta = \int_{S^{II}} \left[C_1 \mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, mr\right) + C_2 \mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, mr\right)\right] r \, \mathrm{d}r \mathrm{d}\Theta. \tag{4.31}$$

Po wykonaniu całkowania i podstawieniu stałych $C_1$ i $C_2$ prąd ten wyraża się jako funkcję napięcia $\mathcal{U}$:

$$I = \frac{\sqrt{-\mathrm{j}}\, 2\pi\gamma R_2}{mC}\left[\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, mR_1\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, mR_2\right) - \mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, mR_2\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, mR_1\right)\right]\mathcal{U} \tag{4.32}$$

lub też

$$I = \mathcal{Y}\mathcal{U}, \tag{4.33}$$

gdzie $\mathcal{Y}$ jest admitancją jednostkową przewodu rurowego

$$\mathcal{Y} = \frac{\sqrt{-\mathrm{j}}\, 2\pi\gamma R_2}{mC}\left[\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, mR_1\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, mR_2\right) - \mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, mR_2\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, mR_1\right)\right]. \tag{4.34}$$

Jednostkowa impedancja przewodu rurowego

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Y}^{-1}, \tag{4.35}$$

która po wykonaniu odpowiednich przekształceń wyraża się wzorem (4.24).



Dla przykładu obliczeniowego przyjęto parametry przewodu osłoniętego realizowanego przez GEC ALSTHOM T&D [139, 143]:

– przewód fazowy

$R_1$=2,9·10$^{-2}$ m, $R_2$=4,5·10$^{-2}$ m, $\gamma_1$=3,7037·10$^{7}$ S·m$^{-1}$,

– osłona

$R_3$=17,4·10$^{-2}$ m, $R_4$=18·10$^{-2}$ m, $\gamma_2$=1,8181·10$^{7}$ S·m$^{-1}$.

Dla wybranych częstotliwości prądu przemiennego rezystancję przewodów obliczono wg wzoru (4.22), zaś jego indukcyjność własną wg wzoru (4.23) i odniesiono je do odpowiednich wartości obliczonych ze wzorów (4.18) i (4.19) (dla przewodu fazowego za $\gamma$ podstawiono $\gamma_1$, dla osłony za $\gamma$ podstawiono $\gamma_2$ , za $R_1$ podstawiono $R_3$ i za $R_2$ podstawiono $R_4$) traktując te ostatnie jak wartości dla prądu stałego. Otrzymane wyniki zapisano w tabeli 4.1.

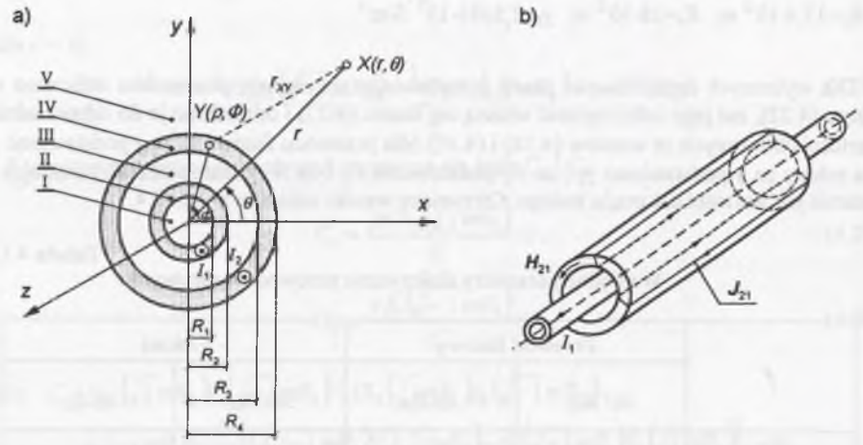
Tabela 4.1

Względne parametry elektryczne przewodów rurowych

| $f$ | Przewód fazowy | | Osłona | |
|---|---|---|---|---|
| | $\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_{10}$ | $\mathcal{L}_1/\mathcal{L}_{10}$ | $\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_{20}$ | $\mathcal{L}_2/\mathcal{L}_{20}$ |
| Hz | – | – | – | – |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 50 | 1,2185 | 0,9972 | 1,0014 | 0,9999 |
| 500 | 3,7077 | 0,9765 | 1,1372 | 0,9997 |
| $10^3$ | 5,1798 | 0,9728 | 1,4668 | 0,9991 |
| $10^4$ | 16,055 | 0,9666 | 5,0144 | 0,9954 |

## 4.4. Impedancje układu współosiowego dwóch przewodów rurowych

Podstawowym układem przewodów rurowych trójfazowego, jednobiegunowego toru wielkoprądowego z rys.1.5 jest układ współosiowy utworzony z rurowego przewodu fazowego i jego rurowej osłony - rys. 4.1




Rys.4.1. Układ współosiowy przewodu fazowego i osłony; a) przekrój poprzeczny, b) prądy wirowe $J_{21}$ indukowane w osłonie

Fig.4.1. Coaxial system of the phase conductor and the enclosure; a) cross-section, b) eddy current $J_{21}$ induced in the enclosure

Wartość prądu wzdłużnego w osłonie zależy przede wszystkim od indukcyjności wzajemnej między przewodem fazowym a osłoną. Wyznaczyć ją można tak jak dla kabla koncentrycznego [41], przy czym oblicza się ją przyjmując, że osłona jest bardzo cienka [2,38]. W pracy [166] uwzględniono grubość osłony podając wzór na indukcyjność całkowitą układu współosiowego dwóch przewodów rurowych. Dla prądu stałego podano wzór, wyprowadzony z tzw. średnich geometrycznych odległości. Dla prądu przemiennego podano uproszczony wzór, uwzględniający zjawisko naskórkowości (bez uwzględnienia zjawiska zbliżenia). We wzorach tych nie wyodrębniono jednak indukcyjności wzajemnej między rurowym przewodem fazowym a rurową osłoną. Ponadto wzory te zostały wyprowadzone przy warunku, że prąd $I_2$ w osłonie jest równy co do modułu prądowi $I_1$ w przewodzie fazowym, zaś jego zwrot jest przeciwny do zwrotu prądu $I_1$ ($I_2 = -I_1$). W trójfazowych, jednobiegunowych torach wielkoprądowych prąd w osłonie danej fazy nie jest na ogół równy prądowi w przewodzie roboczym tej samej fazy ze względu na zwarcia osłon między sobą i z ziemią. Stąd też nie można wykorzystać wzorów na indukcyjność całkowitą układu koncentrycznego dwóch przewodów rurowych. Zachodzi konieczność wyodrębnienia indukcyjności wzajemnej z całkowitej indukcyjności układu. Należy przy tym uwzględnić zjawisko naskórkowości i wpływ zjawiska zbliżenia w układzie przewód fazowy i jego osłona na wielkość impedancji własnych przewodów fazowych.



### 4.4.1. Impedancje układu współosiowego dwóch przewodów rurowych bez uwzględnienia zjawisk naskórkowości i zbliżenia

Zakłada się, że przez przewód fazowy i osłonę płyną odpowiednio prądy zespolone $I_1$ i $I_2$ o zwrotach zgodnych ze zwrotem osi $Oz$ - rys.4.1. Dla niskiej częstotliwości można pominąć prąd wirowy $J_{21}$ indukowany w osłonie i przyjąć, że zespolone gęstości prądów są w przybliżeniu stałe, tzn.

$$J_1 \cong \frac{I_1}{\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)}, \tag{4.36}$$

$$J_2 \cong \frac{I_2}{\pi\left(R_4^2 - R_3^2\right)}. \tag{4.36a}$$

Następnie zostanie wykorzystane równanie (2.26), które po pominięciu prądów wirowych $J_{21}$ ulega uproszczeniu. Wobec tego dla przewodu fazowego oraz osłony można zapisać następujące, uproszczone równania:

– dla przewodu fazowego

$$\mathcal{U}_1 = E^{II}(r) + j\omega A_1^{II}(r) + j\omega A_2^{II}(r), \tag{4.37}$$

– dla osłony

$$\mathcal{U}_2 = E^{IV}(r) + j\omega A_2^{IV}(r) + j\omega A_1^{IV}(r). \tag{4.38}$$

Natężenia pól elektrycznych

$$E^{II}(r) = \frac{1}{\gamma_1} J_1(r) \tag{4.39}$$

oraz

$$E^{IV}(r) = \frac{1}{\gamma_2} J_2(r). \tag{4.40}$$

Potencjały magnetyczne $A_1^{II}(r)$ i $A_2^{IV}(r)$ wytworzone są przez odpowiednie gęstości $J_1(r)$ i $J_2(r)$ prądów własnych $I_1$ i $I_2$. Na podstawie wzoru (3.16) potencjały te wynoszą :

– dla $R_1 \le r \le R_2$, tj. w przewodzie fazowym

$$A_1^{II}(r) \cong \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)}\left[R_2^2 \ln\frac{1}{R_2} - R_1^2 \ln\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\left(R_2^2 - r^2\right)\right], \tag{4.41}$$

– dla $R_3 \le r \le R_4$, tj. w osłonie

$$A_2^{IV}(r) \cong \frac{\mu_0 I_2}{2\pi\left(R_4^2 - R_3^2\right)}\left[R_4^2 \ln\frac{1}{R_4} - R_3^2 \ln\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\left(R_4^2 - r^2\right)\right]. \tag{4.42}$$

Potencjał magnetyczny $A_2^{II}(r)$ wytworzony jest przez gęstość prądu $J_2$ i dotyczy obszarów III, II i I. Ze wzoru (3.17) potencjał ten

– dla $r \le R_3$, tj. wewnątrz osłony

$$A_2^{III}(r) = A_2^{II}(r) = A_2^{I}(r) \cong \frac{\mu_0 I_2}{2\pi\left(R_4^2 - R_3^2\right)}\left[R_4^2 \ln\frac{1}{R_4} - R_3^2 \ln\frac{1}{R_3} + \frac{1}{2}\left(R_4^2 - R_3^2\right)\right]. \quad (4.43)$$

Potencjał magnetyczny $A_1^{IV}(r)$ wytworzony jest przez gęstość prądu $J_1$ i dotyczy obszaru zewnętrznego przewodu fazowego, tj. obszarów III, IV i V. Ze wzoru (3.15) potencjał ten

– dla $r \ge R_2$, tj. na zewnątrz przewodu fazowego

$$A_1^{III}(r) = A_1^{IV}(r) = A_1^{V}(r) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}. \quad (4.44)$$

Następnie wykorzystuje się ogólną metodę wyznaczania impedancji przedstawioną w p.4.2 tego rozdziału. Równanie (4.37) mnoży się stronami przez zespoloną sprzężoną gęstość prądu $J_1^*(r)$ i całkuje się je w obszarze $S^{II}$, równanie (4.38) mnoży się przez $J_2^*(r)$ i całkuje się je w obszarze $S^{IV}$. W ten sposób otrzymuje się :

$$\int_{S^{II}} \mathcal{U}_1 J_1^*(r)\mathrm{d}S^{II} = \frac{1}{\gamma_1}\int_{S^{II}} J_1(r)J_1^*(r)\mathrm{d}S^{II} + \mathrm{j}\omega\int_{S^{II}} A_1^{II}(r)J_1^*(r)\mathrm{d}S^{II} + \mathrm{j}\omega\int_{S^{II}} A_2^{II}(r)J_1^*(r)\mathrm{d}S^{II} \quad (4.45)$$

oraz

$$\int_{S^{IV}} \mathcal{U}_2 J_2^*(r)\mathrm{d}S^{IV} = \frac{1}{\gamma_2}\int_{S^{IV}} J_2(r)J_2^*(r)\mathrm{d}S^{IV} + \mathrm{j}\omega\int_{S^{IV}} A_2^{IV}(r)J_2^*(r)\mathrm{d}S^{IV} + \mathrm{j}\omega\int_{S^{IV}} A_1^{IV}(r)J_2^*(r)\mathrm{d}S^{IV}. \quad (4.46)$$

Napięcia $\mathcal{U}_1$ i $\mathcal{U}_2$ nie zależą od zmiennej $r$, więc całki z lewych stron równań (4.45) i (4.46) są odpowiednimi iloczynami tych napięć i prądów $I_1^*$ oraz $I_2^*$, są więc zespolonymi mocami pozornymi odpowiednio w przewodzie fazowym i osłonie.

Równania (4.45) i (4.46) można zapisać w postaci :

$$\mathcal{U}_1 I_1^* = \left[\frac{1}{\gamma_1 |I_1|^2}\int_{S^{II}} J_1(r)J_1^*(r)\mathrm{d}S^{II}\right]|I_1|^2 + \mathrm{j}\omega\left[\frac{1}{|I_1|^2}\int_{S^{II}} A_1^{II}(r)J_1^*(r)\mathrm{d}S^{II}\right]|I_1|^2 + \mathrm{j}\omega\left[\frac{1}{I_2 I_1^*}\int_{S^{II}} A_2^{II}(r)J_1^*(r)\mathrm{d}S^{II}\right]I_2 I_1^*, \quad (4.47)$$

$$\mathcal{U}_2 I_2^* = \left[\frac{1}{\gamma_2 |I_2|^2}\int_{S^{IV}} J_2(r)J_2^*(r)\mathrm{d}S^{IV}\right]|I_2|^2 + \mathrm{j}\omega\left[\frac{1}{|I_2|^2}\int_{S^{IV}} A_2^{II}(r)J_2^*(r)\mathrm{d}S^{IV}\right]|I_2|^2 + \mathrm{j}\omega\left[\frac{1}{I_1 I_2^*}\int_{S^{IV}} A_1^{IV}(r)J_2^*(r)\mathrm{d}S^{IV}\right]I_1 I_2^*. \quad (4.48)$$



Dzieląc równanie (4.47) stronami przez $I_1^*$ zaś równanie (4.48) przez $I_2^*$ otrzymuje się :

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{R}_1 I_1 + \mathrm{j}\omega\mathcal{L}_1 I_1 + \mathrm{j}\omega\mathcal{M}_{12} I_2 = \mathcal{Z}_1 I_1 + \mathrm{j}\omega\mathcal{M}_{12} I_2 \quad (4.49)$$

oraz

$$\mathcal{U}_2 = \mathcal{R}_2 I_2 + \mathrm{j}\omega\mathcal{L}_2 I_2 + \mathrm{j}\omega\mathcal{M}_{21} I_1 = \mathcal{Z}_2 I_2 + \mathrm{j}\omega\mathcal{M}_{21} I_1, \quad (4.50)$$

gdzie impedancja własna na jednostkę długości przewodu fazowego

$$\mathcal{Z}_1 = \mathcal{R}_1 + \mathrm{j}\omega\mathcal{L}_1 \quad (4.51)$$

i impedancja własna na jednostkę długości osłony

$$\mathcal{Z}_2 = \mathcal{R}_2 + \mathrm{j}\omega\mathcal{L}_2. \quad (4.52)$$

Porównując wzór (4.49) ze wzorem (4.47) wyznacza się:

– rezystancję własną na jednostkę długości przewodu fazowego

$$\mathcal{R}_1 = \frac{2\pi}{\gamma_1 |I_1|^2}\int_{R_1}^{R_2} J_1(r)J_1^*(r)\,r\mathrm{d}r, \quad (4.53)$$

– indukcyjność własną na jednostkę długości przewodu fazowego

$$\mathcal{L}_1 = \frac{2\pi}{|I_1|^2}\int_{R_1}^{R_2} A_1^{II}(r)J_1^*(r)\,r\mathrm{d}r. \quad (4.54)$$

Podstawiając do powyższych wzorów wzory (4.36) i (4.41) otrzymuje się:

$$\mathcal{R}_{10} \cong \frac{1}{\gamma_1\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)} \quad (4.55)$$

oraz

$$\mathcal{L}_{10} \cong \frac{\mu_0}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{R_2} + \frac{R_1^4}{\left(R_2^2 - R_1^2\right)^2}\ln\frac{R_2}{R_1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{3R_1^2 - R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\right]. \quad (4.56)$$

Porównując wzór (4.50) ze wzorem (4.48) wyznacza się :

– rezystancję własną na jednostkę długości osłony

$$\mathcal{R}_2 = \frac{2\pi}{\gamma_2 |I_2|^2}\int_{R_3}^{R_4} J_2(r)J_2^*(r)\,r\mathrm{d}r, \quad (4.57)$$

– indukcyjność własną na jednostkę długości osłony

$$\mathcal{L}_2 = \frac{2\pi}{|I_2|^2}\int_{R_3}^{R_4} A_2^{IV}(r)J_2^*(r)\,r\,\mathrm{d}r. \quad (4.58)$$

Podstawiając do powyższych wzorów wzory (4.36a) i (4.42) otrzymuje się :

$$\mathcal{R}_{20} \cong \frac{1}{\gamma_1 \pi \left(R_4^2 - R_3^2\right)} \tag{4.59}$$

oraz

$$\mathcal{L}_{20} \cong \frac{\mu_0}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{R_4} + \frac{R_3^4}{\left(R_4^2 - R_3^2\right)^2}\ln\frac{R_4}{R_3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{3R_3^2 - R_4^2}{R_4^2 - R_3^2}\right]. \tag{4.60}$$

Podobnie otrzymuje się indukcyjności wzajemne

$$\mathcal{M}_{12} = \frac{2\pi}{I_2 I_1^*}\int_{R_1}^{R_2} A_2^{II}(r) J_1^*(r)\, r\, \mathrm{d}r \tag{4.61}$$

oraz

$$\mathcal{M}_{21} = \frac{2\pi}{I_1 I_2^*}\int_{R_3}^{R_4} A_1^{IV}(r) J_2^*(r)\, r\, \mathrm{d}r. \tag{4.62}$$

Po podstawieniu odpowiednich wzorów i wykonaniu całkowań oblicza się z powyższych wzorów indukcyjność wzajemną (na jednostkę długości) między przewodem fazowym a osłoną

$$\mathcal{M}_{12} = \mathcal{M}_{21} = \mathcal{M}_0 \cong \frac{\mu_0}{2\pi}\left[\frac{R_4^2 \ln\frac{1}{R_4} - R_3^2 \ln\frac{1}{R_3}}{R_4^2 - R_3^2} + \frac{1}{2}\right]. \tag{4.63}$$

We wzorach (4.56), (4.60) i (4.63) liczniki wyrażeń logarytmowany $\frac{1}{R_2}$, $\frac{1}{R_3}$ i $\frac{1}{R_4}$ są równe jednostce miary długości.

W przypadku szczególnym, gdy $I_1 = -I_2$, indukcyjność całkowita układu współosiowego dwóch przewodów rurowych

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_{10} + \mathcal{L}_{20} - 2\mathcal{M}_0. \tag{4.64}$$

Po podstawieniu wzorów (4.56), (4.60) i (4.63) do wzoru (4.64) jednostkowa indukcyjność całkowita

$$\mathcal{L}_0 \cong \frac{\mu_0}{2\pi}\left\{\ln\frac{R_3}{R_2} + \frac{R_1^4}{\left(R_2^2 - R_1^2\right)^2}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{R_4^4}{\left(R_4^2 - R_3^2\right)^2}\ln\frac{R_4}{R_3} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4}\left[\frac{3R_4^2 - R_3^2}{R_4^2 - R_3^2} + \frac{3R_1^2 - R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\right]\right\}. \tag{4.65}$$



Taki sam wzór uzyskał Strunskij ([166] s.92) wykorzystując tzw. średnie geometryczne odległości. Indukcyjności własne i wzajemne rurowego układu współosiowego nie są w tym wzorze wyodrębnione.

Dla osłon cienkościennych, tzn. gdy $R_3 \equiv R_4$, indukcyjność własna osłony $\mathcal{L}_{20}$ jest równa w przybliżeniu indukcyjności wzajemnej $\mathcal{M}_0$ rurowego przewodu osłoniętego ( $\mathcal{L}_{20} \cong \mathcal{M}_0$ ).

### 4.4.2. Impedancje układu współosiowego dwóch przewodów rurowych z uwzględnieniem zjawisk naskórkowości i zbliżenia

W ogólnym przypadku układu współosiowego dwóch przewodów rurowych - rys.4.1 natężenie pola magnetycznego wytworzonego przez prąd $I_2$ osłony w obszarze wewnętrznym ($r \le R_3$) jest równe zero (prawo przepływu). W przewodzie fazowym nie ma zatem prądów wirowych, ale pojawia się w nim, na podstawie równania (2.26), bezwirowe pole elektryczne wytworzone przez gęstość prądu $J_2$ osłony. Pole magnetyczne wytworzone przez przemienny prąd $I_1$ przewodu fazowego indukuje w osłonie prądy wirowe o gęstości $J_{21}$ - rys.4.1b. Zjawiska te należy uwzględnić przy konstrukcji równań typu (2.26) dla przewodu fazowego i osłony.

Zgodnie z równaniem (2.26) prąd $I_1$ przewodu fazowego wpływa na spadek napięcia $U_2$ w osłonie. Analogicznie, prąd $I_2$ osłony wpływa na spadek napięcia $U_1$ przewodu fazowego. To wzajemne oddziaływanie będzie charakteryzowane impedancją wzajemną między przewodem fazowym a osłoną. Wyznaczenie tej impedancji z uwzględnieniem zjawisk naskórkowości i zbliżenia jest zasadniczym celem tego podrozdziału.

Zakłada się, że przez przewód fazowy płynie zespolony prąd $I_1$, zaś przez osłonę – prąd $I_2$. Zwroty tych prądów są zgodne ze zwrotem osi $Oz$ – rys. 4.1.

W przewodzie fazowym nie ma prądów wirowych i gęstość prądu $J_1$ dotyczy wyłącznie prądu $I_1$. Wyznacza się ją z równania Helmholtza [17, 91, 110, 114]

$$J_1(r) = \frac{\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_1 I_1}{2\pi R_2}\cdot\frac{\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_1 R_1\right)\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_1 r\right) - \mathrm{j}\,\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_1 R_1\right)\mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_1 r\right)}{\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_1 R_2\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_1 R_1\right) - \mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_1 R_1\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_1 R_2\right)}, \tag{4.66}$$

gdzie $m_1 = \sqrt{\omega\mu_0\gamma_1}$.

Całkowita gęstość prądu $J_2$ w osłonie jest sumą gęstości prądu $J_{21}$, tj. prądu wirowego indukowanego przez przemienne pole magnetyczne $H_{21}$ prądu $I_1$ (rys.4.1b) oraz gęstości prądu $J_{22}$, pochodzącej od prądu $I_2$ osłony :

$$J_2(r) = J_{22}(r) + J_{21}(r). \tag{4.67}$$

Na podstawie wzoru (4.66) gęstość prądu

$$J_{22}(r) = \frac{\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_2 I_2}{2\pi R_4}\cdot\frac{\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_2 R_3\right)\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_2 r\right) - \mathrm{j}\,\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_2 R_3\right)\mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_2 r\right)}{\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_2 R_4\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_2 R_3\right) - \mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_2 R_3\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_2 R_4\right)}, \tag{4.68}$$

gdzie : $m_2 = \sqrt{\omega\mu_0\gamma_2}$.

Gęstość prądu $J_{21}$ wyznacza się z tego samego równania Helmholtza z następującymi warunkami brzegowymi dla natężenia pola magnetycznego:

– dla $r = R_3$

$$H(R_3)=\frac{I_1}{2\pi R_3}, \tag{4.69}$$

– dla $r = R_4$

$$H(R_4)=\frac{I_1}{2\pi R_4}. \tag{4.70}$$

W rozwiązaniu otrzymuje się następujący wzór :

$$J_{21}(r)=\frac{\sqrt{-\mathrm{j}}\,m_2 I_1}{2\pi R_3 R_4}\cdot\frac{\alpha\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,m_2 r\right)-\mathrm{j}\beta\mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,m_2 r\right)}{\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,m_2 R_4\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,m_2 R_3\right)-\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,m_2 R_3\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,m_2 R_4\right)}, \tag{4.71}$$

gdzie : $\alpha=\left[R_3\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,m_2 R_3\right)-R_4\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,m_2 R_4\right)\right]$,

$\beta=\left[R_3\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,m_2 R_3\right)-R_4\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,m_2 R_4\right)\right]$.

Równania typu (2.26) po uwzględnieniu prądów wirowych $J_{21}$ mają postać:

– dla przewodu fazowego

$$\mathcal{U}_1 = E_1^{II}(r)+\mathrm{j}\omega A_1^{II}(r)+\mathrm{j}\omega A_{21}^{II}(r)+\mathrm{j}\omega A_{22}^{II}(r), \tag{4.72}$$

– dla osłony

$$\mathcal{U}_2 = E_{22}^{IV}(r)+E_{21}^{IV}(r)+\mathrm{j}\omega A_{22}^{IV}(r)+\mathrm{j}\omega A_{21}^{IV}(r)+\mathrm{j}\omega A_1^{IV}(r). \tag{4.73}$$

Natężenia pól elektrycznych

$$E^{II}(r)=\frac{1}{\gamma_1}J_1(r), \tag{4.74}$$

$$E^{IV}(r)=\frac{1}{\gamma_2}J_{22}(r), \tag{4.75}$$

$$E^{IV}(r)=\frac{1}{\gamma_2}J_{21}(r). \tag{4.76}$$

Na podstawie wzorów (3.15), (3.16) i (3.17), podstawiając wzory (4.66), (4.68) i (4.71), po wykonaniu odpowiednich całkowań funkcji Bessela wyznacza się potencjały występujące w równaniach (4.72) i (4.73). Potencjały magnetyczne związane z gęstością prądu $J_1$ wynoszą:



– dla $r \geq R_2$

$$A_1^{III}(r)=A_1^{IV}(r)=A_1^{V}(r)=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}, \tag{4.77}$$

– dla $R_1 \leq r \leq R_2$

$$A_1^{II}(r)=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\left\{\ln\frac{1}{R_2}-\frac{\mathrm{j}\sqrt{-\mathrm{j}}}{m_1 R_2}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\frac{\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,m_1 R_1\right)\left[\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,m_1 R_2\right)-\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,m_1 r\right)\right]-\mathrm{j}\,\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,m_1 R_1\right)\left[\mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,m_1 R_2\right)-\mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,m_1 r\right)\right]}{\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,m_1 R_2\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,m_1 R_1\right)-\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,m_1 R_1\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,m_1 R_2\right)}\right\}. \tag{4.78}$$

Wektorowe potencjały magnetyczne związane z gęstością prądu $J_2$ wyrażają się wzorami :

– dla $r \geq R_4$

$$A_2^{V}(r)=\frac{\mu_0 I_2}{2\pi}\ln\frac{1}{r}, \tag{4.79}$$

– dla $R_3 \leq r \leq R_4$

$$A_2^{IV}(r)=A_{22}^{IV}(r)+A_{21}^{IV}(r), \tag{4.80}$$

w którym potencjał wektorowy wytworzony przez prąd $I_2$ osłony

$$A_{22}^{IV}(r)=\frac{\mu_0 I_2}{2\pi}\left\{\ln\frac{1}{R_4}-\frac{\mathrm{j}\sqrt{-\mathrm{j}}}{m_2 R_4}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\frac{\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,m_2 R_3\right)\left[\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,m_2 R_4\right)-\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,m_2 r\right)\right]-\mathrm{j}\,\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,m_2 R_3\right)\left[\mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,m_2 R_4\right)-\mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,m_2 r\right)\right]}{\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,m_2 R_4\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,m_2 R_3\right)-\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,m_2 R_3\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,m_2 R_4\right)}\right\} \tag{4.81}$$

i potencjał wektorowy wytworzony przez prądy wirowe $J_{21}$ w osłonie

$$A_{21}^{IV}(r)=-\frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\left\{\ln\frac{R_4}{r}+\frac{\mathrm{j}\sqrt{-\mathrm{j}}}{R_3 R_4 m_2}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\frac{\alpha\left[\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,m_2 R_4\right)-\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,m_2 r\right)\right]-\mathrm{j}\,\beta\left[\mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,m_2 R_4\right)-\mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,m_2 r\right)\right]}{\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,m_2 R_4\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,m_2 R_3\right)-\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,m_2 R_3\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,m_2 R_4\right)}\right\}, \tag{4.82}$$

– dla $r \leq R_3$

$$A_2^{III}(r)=A_2^{II}(r)=A_2^{I}(r)=A_{22}^{III}(r)+A_{21}^{III}(r), \tag{4.83}$$

w którym potencjał wytworzony przez prąd $I_2$ osłony

$$A_{22}^{III}(r)=A_{22}^{II}(r)=A_{22}^{I}(r)=\frac{\mu_0 I_2}{2\pi}\left\{\ln\frac{1}{R_4}-\frac{j\sqrt{-j}}{m_2R_4}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\mathcal{K}_1\left(\sqrt{j}\,m_2R_3\right)\left[\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-j}\,m_2R_4\right)-\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-j}\,m_2R_3\right)\right]-j\,\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-j}\,m_2R_3\right)\left[\mathcal{K}_0\left(\sqrt{j}\,m_2R_4\right)-\mathcal{K}_0\left(\sqrt{j}\,m_2R_3\right)\right]}{\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-j}\,m_2R_4\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{j}\,m_2R_3\right)-\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-j}\,m_2R_3\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{j}\,m_2R_4\right)}\right\} \tag{4.84}$$

i potencjał wytworzony przez prądy wirowe $J_{21}$ w osłonie

$$A_{21}^{III}(r)=A_{21}^{II}(r)=A_{21}^{I}(r)=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\left\{\ln\frac{R_3}{R_4}-\frac{j\sqrt{-j}}{R_3R_4m_2}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\alpha\left[\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-j}\,m_2R_4\right)-\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-j}\,m_2R_3\right)\right]-j\,\beta\left[\mathcal{K}_0\left(\sqrt{j}\,m_2R_4\right)-\mathcal{K}_0\left(\sqrt{j}\,m_2R_3\right)\right]}{\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-j}\,m_2R_4\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{j}\,m_2R_3\right)-\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-j}\,m_2R_3\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{j}\,m_2R_4\right)}\right\}. \tag{4.85}$$

Następnie równanie (4.72) mnoży się przez zespoloną, sprzężoną gęstość prądu $J_1^*(r)$ i całkuje w obszarze $S^{II}$; równanie (4.73) mnoży się stronami przez $J_{22}^*(r)$ i całkuje w obszarze $S^{IV}$. W ten sposób otrzymuje się :

$$\int_{S^{II}}\mathcal{U}_1J_1^*(r)\mathrm{d}S^{II}=\frac{1}{\gamma_1}\int_{S^{II}}J_1(r)J_1^*(r)\mathrm{d}S^{II}+j\omega\int_{S^{II}}A_1^{II}(r)J_1^*(r)\mathrm{d}S^{II}+$$

$$+j\omega\int_{S^{II}}A_{21}^{II}(r)J_1^*(r)\mathrm{d}S^{II}+j\omega\int_{S^{II}}A_{22}^{II}(r)J_1^*(r)\mathrm{d}S^{II}, \tag{4.86}$$

$$\int_{S^{IV}}\mathcal{U}_2J_{22}^*(r)\mathrm{d}S^{IV}=\frac{1}{\gamma_2}\int_{S^{IV}}J_{22}(r)J_{22}^*(r)\mathrm{d}S^{IV}+j\omega\int_{S^{IV}}A_{22}^{IV}(r)J_{22}^*(r)\mathrm{d}S^{IV}+$$

$$+\frac{1}{\gamma_2}\int_{S^{IV}}J_{21}(r)J_{22}^*(r)\mathrm{d}S^{IV}+j\omega\int_{S^{IV}}A_{21}^{IV}(r)J_{22}^*(r)\mathrm{d}S^{IV}+j\omega\int_{S^{IV}}A_1^{IV}(r)J_{22}^*(r)\mathrm{d}S^{IV}. \tag{4.87}$$

Napięcia $\mathcal{U}_1$ i $\mathcal{U}_2$ nie zależą od zmiennej $r$, więc całki z lewych stron równań (4.86) i (4.87) są odpowiednimi iloczynami tych napięć i prądów $I_1^*$ oraz $I_2^*$, czyli są to zespolone moce pozorne odpowiednio w przewodzie fazowym i osłonie. Następnie równanie (4.86) dzieli się stronami przez $I_1^*$, zaś równanie (4.87) przez $I_2^*$. Wobec tego

$$\mathcal{U}_1=\left[\frac{1}{\gamma_1|I_1|^2}\int_{S^{II}}J_1(r)J_1^*(r)\mathrm{d}S^{II}\right]I_1+j\omega\left[\frac{1}{|I_1|^2}\int_{S^{II}}A_1^{II}(r)J_1^*(r)\mathrm{d}S^{II}\right]I_1+$$

$$+\left[\frac{j\omega}{|I_1|^2}\int_{S^{II}}A_{21}^{II}(r)J_1^*(r)\mathrm{d}S^{II}\right]I_1+\left[\frac{j\omega}{I_2I_1^*}\int_{S^{II}}A_{22}^{II}(r)J_1^*(r)\mathrm{d}S^{II}\right]I_2, \tag{4.88}$$



$$\mathcal{U}_2=\left[\frac{1}{\gamma_2|I_2|^2}\int_{S^{IV}}J_{22}(r)J_{22}^*(r)\mathrm{d}S^{IV}\right]I_2+j\omega\left[\frac{1}{|I_2|^2}\int_{S^{IV}}A_{22}^{IV}(r)J_{22}^*(r)\mathrm{d}S^{IV}\right]I_2+$$

$$+\left[\frac{1}{\gamma_2I_1I_2^*}\int_{S^{IV}}J_{21}(r)J_{22}^*(r)\mathrm{d}S^{IV}\right]I_1+\left[\frac{j\omega}{I_1I_2^*}\int_{S^{IV}}A_{21}^{IV}(r)J_{22}^*(r)\mathrm{d}S^{IV}\right]I_1+$$

$$+\left[\frac{j\omega}{I_1I_2^*}\int_{S^{IV}}A_1^{IV}(r)J_{22}^*(r)\mathrm{d}S^{IV}\right]I_1. \tag{4.89}$$

Powyższe równania można zapisać następująco:

$$\mathcal{U}_1=\mathcal{R}_{11}^{(1)}I_1+j\omega\mathcal{L}_{11}^{(1)}I_1+\mathcal{Z}_{11}^{(2)}I_1+\mathcal{Z}_{12}I_2 \tag{4.90}$$

oraz

$$\mathcal{U}_2=\mathcal{R}_{22}I_2+j\omega\mathcal{L}_{22}I_2+\mathcal{Z}_{21}^{(1)}I_1+\mathcal{Z}_{21}^{(2)}I_1+\mathcal{Z}_{21}^{(3)}I_1. \tag{4.91}$$

Rezystancja

$$\mathcal{R}_{11}^{(1)}=\frac{2\pi}{\gamma_1|I_1|^2}\int_{R_1}^{R_2}J_1(r)J_1^*(r)r\,\mathrm{d}r \tag{4.92}$$

jest rezystancją jednostkową przewodu fazowego z uwzględnieniem zjawiska naskórkowości, która po podstawieniu wzoru (4.66) do (4.92) i wykonaniu całkowania równa się:

$$\mathcal{R}_{11}^{(1)}=\frac{\sqrt{-j}\,m_1}{4\pi\gamma_1R_2}\cdot\frac{a_1}{b_1b_1^*}, \tag{4.93}$$

gdzie :

$$a_1=$$

$$=\mathcal{K}_1\left(\sqrt{j}\,m_1R_1\right)\mathcal{K}_1^*\left(\sqrt{j}\,m_1R_1\right)\left[\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-j}\,m_1R_2\right)\mathcal{J}_1^*\left(\sqrt{-j}\,m_1R_2\right)+j\mathcal{J}_0^*\left(\sqrt{-j}\,m_1R_2\right)\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-j}\,m_1R_2\right)\right]+$$

$$+\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-j}\,m_1R_1\right)\mathcal{J}_1^*\left(\sqrt{-j}\,m_1R_1\right)\left[\mathcal{K}_0^*\left(\sqrt{j}\,m_1R_2\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{j}\,m_1R_2\right)+j\mathcal{K}_0\left(\sqrt{j}\,m_1R_2\right)\mathcal{K}_1^*\left(\sqrt{j}\,m_1R_2\right)\right]-$$

$$-\mathcal{K}_1\left(\sqrt{j}\,m_1R_1\right)\mathcal{J}_1^*\left(\sqrt{-j}\,m_1R_1\right)\left[\mathcal{K}_0^*\left(\sqrt{j}\,m_1R_2\right)\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-j}\,m_1R_2\right)+\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-j}\,m_1R_2\right)\mathcal{K}_1^*\left(\sqrt{j}\,m_1R_2\right)\right]-$$

$$-j\,\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-j}\,m_1R_1\right)\mathcal{K}_1^*\left(\sqrt{j}\,m_1R_1\right)\left[\mathcal{K}_0\left(\sqrt{j}\,m_1R_2\right)\mathcal{J}_1^*\left(\sqrt{-j}\,m_1R_2\right)+\mathcal{J}_0^*\left(\sqrt{-j}\,m_1R_2\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{-j}\,m_1R_2\right)\right],$$

$$b_1=\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-j}\,m_1R_2\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{j}\,m_1R_1\right)-\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-j}\,m_1R_1\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{j}\,m_1R_2\right),$$

$$b_1^*=\mathcal{J}_1^*\left(\sqrt{-j}\,m_1R_2\right)\mathcal{K}_1^*\left(\sqrt{j}\,m_1R_1\right)-\mathcal{J}_1^*\left(\sqrt{-j}\,m_1R_1\right)\mathcal{K}_1^*\left(\sqrt{j}\,m_1R_2\right).$$

Następnie

$$\mathcal{L}_{11}^{(1)} = \frac{2\pi}{|I_1|^2}\int_{R_1}^{R_2} A_1^{II}(r)J_1^*(r)r\,dr \tag{4.94}$$

jest jednostkową indukcyjnością własną przewodu fazowego z uwzględnieniem zjawiska naskórkowości i wyraża się wzorem:

$$\mathcal{L}_{11}^{(1)} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left\{\ln\frac{1}{R_2} - \frac{j\sqrt{-j}}{m_1R_2b_1}\left[\mathcal{K}_1\left(\sqrt{j}\,m_1R_1\right)\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-j}\,m_1R_2\right) - j\,\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-j}\,m_1R_1\right)\mathcal{K}_0\left(\sqrt{j}\,m_1R_2\right)\right] - \frac{a_1}{2b_1^*}\right\}. \tag{4.95}$$

Impedancja

$$\mathcal{Z}_{11}^{(2)} = \frac{2\pi j\omega}{|I_1|^2}\int_{R_1}^{R_2} A_{21}^{II}(r)J_1^*(r)r\,dr \tag{4.96}$$

jest jednostkową impedancją dodatkową przewodu fazowego. Część rzeczywista tej impedancji jest proporcjonalna do ciepła wydzielonego w osłonie (przy $I_2 = 0$). Impedancja ta wynika ze zjawiska zbliżenia.

Impedancja

$$\mathcal{Z}_{12} = \frac{2\pi j\omega}{I_2I_1^*}\int_{R_1}^{R_2} A_{22}^{II}(r)J_1^*(r)r\,dr \tag{4.97}$$

jest jednostkową impedancją wzajemną między przewodem fazowym a osłoną. Stąd jednostkowa indukcyjność wzajemna [50,100,167]

$$\mathcal{M}_{12} = \frac{1}{\omega}\operatorname{Im}\mathcal{Z}_{12}. \tag{4.98}$$

Niezerowa część rzeczywista impedancji $\mathcal{Z}_{12}$ wynika z faktu, że w poszczególnych punktach przewodu fazowego (lub osłony) nie tylko moduły gęstości prądów są różne, ale również ich fazy różnią się między sobą.

Rezystancja

$$\mathcal{R}_{22} = \frac{2\pi}{\gamma_2|I_2|^2}\int_{R_3}^{R_4} J_{22}(r)J_{22}^*(r)r\,dr \tag{4.99}$$

jest rezystancją jednostkową osłony z uwzględnieniem zjawiska naskórkowości i wyraża się wzorem :

$$\mathcal{R}_{22} = \frac{\sqrt{-j}\,m_2}{4\pi\gamma_2R_4}\cdot\frac{a_2}{b_2b_2^*}, \tag{4.100}$$



gdzie:

$$\begin{aligned}
a_2 = {} & \\
= {} & \mathcal{K}_1\left(\sqrt{j}\,m_2R_3\right)\mathcal{K}_1^*\left(\sqrt{j}\,m_2R_3\right)\left[\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-j}\,m_2R_4\right)\mathcal{J}_1^*\left(\sqrt{-j}\,m_2R_4\right) + j\mathcal{J}_0^*\left(\sqrt{-j}\,m_2R_4\right)\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-j}\,m_2R_4\right)\right] + \\
& + \mathcal{J}_1\left(\sqrt{-j}\,m_2R_3\right)\mathcal{J}_1^*\left(\sqrt{-j}\,m_2R_3\right)\left[\mathcal{K}_0^*\left(\sqrt{j}\,m_2R_4\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{j}\,m_2R_4\right) + j\mathcal{K}_0\left(\sqrt{j}\,m_2R_4\right)\mathcal{K}_1^*\left(\sqrt{j}\,m_2R_4\right)\right] - \\
& - \mathcal{K}_1\left(\sqrt{j}\,m_2R_3\right)\mathcal{J}_1^*\left(\sqrt{-j}\,m_2R_3\right)\left[\mathcal{K}_0^*\left(\sqrt{j}\,m_2R_4\right)\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-j}\,m_2R_4\right) + \mathcal{J}_0\left(\sqrt{-j}\,m_2R_4\right)\mathcal{K}_1^*\left(\sqrt{j}\,m_2R_4\right)\right] - \\
& - j\,\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-j}\,m_2R_3\right)\mathcal{K}_1^*\left(\sqrt{j}\,m_2R_3\right)\left[\mathcal{K}_0\left(\sqrt{j}\,m_2R_4\right)\mathcal{J}_1^*\left(\sqrt{-j}\,m_2R_4\right) + \mathcal{J}_0^*\left(\sqrt{-j}\,m_2R_4\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{-j}\,m_2R_4\right)\right],
\end{aligned}$$

$$b_2 = \mathcal{J}_1\left(\sqrt{-j}\,m_2R_4\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{j}\,m_2R_3\right) - \mathcal{J}_1\left(\sqrt{-j}\,m_2R_3\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{j}\,m_2R_4\right),$$

$$b_2^* = \mathcal{J}_1^*\left(\sqrt{-j}\,m_2R_4\right)\mathcal{K}_1^*\left(\sqrt{j}\,m_2R_3\right) - \mathcal{J}_1^*\left(\sqrt{-j}\,m_2R_3\right)\mathcal{K}_1^*\left(\sqrt{j}\,m_2R_4\right).$$

Indukcyjność

$$\mathcal{L}_{22} = \frac{2\pi}{|I_2|^2}\int_{R_3}^{R_4} A_{22}^{IV}(r)J_{22}^*(r)r\,dr \tag{3.101}$$

jest jednostkową indukcyjnością własną osłony z uwzględnieniem zjawiska naskórkowości i wyraża się wzorem:

$$\mathcal{L}_{22} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left\{\ln\frac{1}{R_4} - \frac{j\sqrt{-j}}{m_2R_4b_2}\left[\mathcal{K}_1\left(\sqrt{j}\,m_2R_3\right)\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-j}\,m_2R_4\right) - j\,\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-j}\,m_2R_3\right)\mathcal{K}_0\left(\sqrt{j}\,m_2R_4\right)\right] - \frac{a_2}{2b_2^*}\right\}. \tag{4.102}$$

Suma impedancji

$$\mathcal{Z}_{21}^{(1)} = \frac{2\pi}{\gamma_2I_1I_2^*}\int_{R_3}^{R_4} J_{21}(r)J_{22}^*(r)r\,dr, \tag{4.103}$$

$$\mathcal{Z}_{21}^{(2)} = \frac{2\pi j\omega}{I_1I_2^*}\int_{R_3}^{R_4} A_{21}^{IV}(r)J_{22}^*(r)r\,dr \tag{4.104}$$

oraz

$$\mathcal{Z}_{21}^{(3)} = \frac{2\pi j\omega}{I_1I_2^*}\int_{R_3}^{R_4} A_1^{IV}(r)J_{22}^*(r)r\,dr \tag{4.105}$$

jest całkowitą, jednostkową impedancją wzajemną

$$\mathcal{Z}_{21} = \mathcal{Z}_{21}^{(1)} + \mathcal{Z}_{21}^{(2)} + \mathcal{Z}_{21}^{(3)}. \tag{4.106}$$

Równania (4.90) i (4.91) można zapisać następująco:

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{Z}_{11} I_1 + \mathcal{Z}_{12} I_2 , \tag{4.107}$$

$$\mathcal{U}_2 = \mathcal{Z}_{21} I_1 + \mathcal{Z}_{22} I_2 , \tag{4.108}$$

gdzie

$$\mathcal{Z}_{11} = \mathcal{R}_{11}^{(1)} + \mathrm{j}\omega\mathcal{L}_{11}^{(1)} + \mathcal{Z}_{11}^{(2)} , \tag{4.109}$$

$$\mathcal{Z}_{22} = \mathcal{R}_{22} + \mathrm{j}\omega\mathcal{L}_{22} . \tag{4.110}$$

Całkowita, jednostkowa impedancja własna przewodu fazowego

$$\mathcal{Z}_{11} = \mathcal{R}_{11} + \mathrm{j}\omega\mathcal{L}_{11} =$$

$$= \mathrm{j}\omega\frac{\mu_0}{2\pi}\left\{\ln\frac{1}{R_2} + \ln\frac{R_3}{R_4} - \frac{\mathrm{j}\sqrt{-\mathrm{j}}}{m_1 R_2}\cdot\frac{\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_1 R_1\right)\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_1 R_2\right) - \mathrm{j}\,\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_1 R_1\right)\mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_1 R_2\right)}{\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_1 R_2\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_1 R_1\right) - \mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_1 R_1\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_1 R_2\right)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\mathrm{j}\sqrt{-\mathrm{j}}}{R_3 R_4 m_2}\cdot\frac{\alpha\left[\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_2 R_4\right) - \mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_2 R_3\right)\right] - \mathrm{j}\beta\left[\mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_2 R_4\right) - \mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_2 R_3\right)\right]}{\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_2 R_4\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_2 R_3\right) - \mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_2 R_3\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_2 R_4\right)}\right\}, \tag{4.111}$$

(wielkości $\alpha$ i $\beta$ podano w objaśnieniu wzoru (4.71)).

Jednostkowa impedancja własna przewodu fazowego

$$\mathcal{Z}_{11}^{(1)} = \mathcal{R}_{11}^{(1)} + \mathrm{j}\omega\mathcal{L}_{11}^{(1)} = \mathrm{j}\omega\frac{\mu_0}{2\pi}\cdot$$

$$\cdot\left\{\ln\frac{1}{R_2} - \frac{\mathrm{j}\sqrt{-\mathrm{j}}}{m_1 R_2}\cdot\frac{\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_1 R_1\right)\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_1 R_2\right) - \mathrm{j}\,\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_1 R_1\right)\mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_1 R_2\right)}{\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_1 R_2\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_1 R_1\right) - \mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_1 R_1\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_1 R_2\right)}\right\}. \tag{4.112}$$

Jednostkowa impedancja dodatkowa przewodu fazowego

$$\mathcal{Z}_{11}^{(2)} = \mathcal{R}_{11}^{(2)} + \mathrm{j}\omega\mathcal{L}_{11}^{(2)} = \mathrm{j}\omega\frac{\mu_0}{2\pi}\left\{\ln\frac{R_3}{R_4} - \frac{\mathrm{j}\sqrt{-\mathrm{j}}}{R_3 R_4 m_2}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\alpha\left[\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_2 R_4\right) - \mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_2 R_3\right)\right] - \mathrm{j}\beta\left[\mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_2 R_4\right) - \mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_2 R_3\right)\right]}{\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_2 R_4\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_2 R_3\right) - \mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_2 R_3\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_2 R_4\right)}\right\}. \tag{4.113}$$

Jednostkowa impedancja własna osłony

$$\mathcal{Z}_{22} = \mathcal{R}_{22} + \mathrm{j}\omega\mathcal{L}_{22} = \mathrm{j}\omega\frac{\mu_0}{2\pi}\cdot$$

$$\cdot\left\{\ln\frac{1}{R_4} - \frac{\mathrm{j}\sqrt{-\mathrm{j}}}{m_2 R_4}\cdot\frac{\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_2 R_3\right)\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_2 R_4\right) - \mathrm{j}\,\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_2 R_3\right)\mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_2 R_4\right)}{\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_2 R_4\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_2 R_3\right) - \mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_2 R_3\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_2 R_4\right)}\right\}. \tag{4.114}$$



Jednostkowe impedancje wzajemne między przewodem fazowym a osłoną

$$\mathcal{Z}_{12} = \mathcal{R}_{12} + \mathrm{j}\omega\mathcal{M}_{21} = \mathrm{j}\omega\frac{\mu_0}{2\pi}\left\{\ln\frac{1}{R_4} - \frac{\mathrm{j}\sqrt{-\mathrm{j}}}{m_2 R_4}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_2 R_3\right)\left[\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_2 R_4\right) - \mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_2 R_3\right)\right] - \mathrm{j}\,\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_2 R_3\right)\left[\mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_2 R_4\right) - \mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_2 R_3\right)\right]}{\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_2 R_4\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_2 R_3\right) - \mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_2 R_3\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_2 R_4\right)}\right\} \tag{4.115}$$

oraz

$$\mathcal{Z}_{21} = \mathcal{R}_{21} + \mathrm{j}\omega\mathcal{M}_{21} = \mathrm{j}\omega\frac{\mu_0}{2\pi}\cdot$$

$$\cdot\left\{\ln\frac{1}{R_4} - \frac{\mathrm{j}\sqrt{-\mathrm{j}}}{R_3 R_4 m_2}\cdot\frac{\alpha\,\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_2 R_4\right) - \mathrm{j}\beta\,\mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_2 R_4\right)}{\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_2 R_4\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_2 R_3\right) - \mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_2 R_3\right)\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_2 R_4\right)}\right\}. \tag{4.116}$$

Struktura impedancji wzajemnej $\mathcal{Z}_{21}$ jest inna niż impedancji $\mathcal{Z}_{12}$. Ze względu jednak na własności funkcji Bessela, niezależnie od parametrów $m_2R_3$ oraz $m_2R_4$, otrzymuje się, że

$$\mathcal{Z}_{12} = \mathcal{Z}_{21} , \tag{4.117}$$

co potwierdzają obliczenia numeryczne. Stąd też

$$\mathcal{M}_{21} = \frac{1}{\omega}\mathrm{Im}\mathcal{Z}_{21} = \mathcal{M}_{12} = \frac{1}{\omega}\mathrm{Im}\mathcal{Z}_{12} = \mathcal{M} . \tag{4.118}$$

We wzorach (4.95), (4.102), (4.111), (4.112), (4.114), (4.115) i (4.116) liczniki wyrażeń logarytmowanych $\frac{1}{R_2}$ i $\frac{1}{R_4}$ są równe jednostce miary długości.

Jeżeli zamiast wymuszeń prądowych $I_1$ i $I_2$ w układzie współosiowym dwóch przewodów rurowych przyjąć wymuszenia napięciowe $\mathcal{U}_1$ i $\mathcal{U}_2$, to wtedy nieznane całkowite gęstości prądów $J_1$ i $J_2$ są rozwiązaniami ogólnymi równań Helmholtza, dane następującymi wzorami:

– dla przewodu fazowego

$$J_1(r) = C_1\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_1 r\right) + C_2\mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_1 r\right), \tag{4.119}$$

– dla osłony

$$J_2(r) = C_3\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, m_2 r\right) + C_4\mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, m_2 r\right), \tag{4.120}$$

gdzie stałe $C_1$, $C_2$, $C_3$ i $C_4$ zależą od parametrów $m_1R_1$, $m_1R_2$, $m_2R_3$ i $m_2R_4$ oraz napięć $\mathcal{U}_1$ i $\mathcal{U}_2$.

Spadki napięć można wtedy przedstawić następującymi równaniami:

– dla przewodu fazowego

$$\mathcal{U}_1 = E_1^{II}(r) + \mathrm{j}\omega A_1^{II}(r) + \mathrm{j}\omega A_2^{II}(r), \tag{4.121}$$

– dla osłony

$$\mathcal{U}_2 = E_2^{IV}(r) + \mathrm{j}\omega A_2^{IV}(r) + \mathrm{j}\omega A_1^{IV}(r). \tag{4.122}$$

W równaniu (4.121) natężenie pola elektrycznego $E_1^{II}(r)$ - wzór (4.39) i potencjał $A_1^{II}(r)$ - (na mocy wzoru (3.16)) będą wyrażone przez stałe $C_1$ i $C_2$. Potencjał $A_2^{II}(r)$ na mocy wzoru (3.17) będzie wyrażony przez stałe $C_3$ i $C_4$. W równaniu (4.122) natężenie pola elektrycznego $E_2^{IV}(r)$ - wzór (4.40) i potencjał $A_2^{IV}(r)$ - wzór (3.16), będą wyrażone przez stałe $C_3$ i $C_4$. Potencjał $A_1^{IV}(r)$ na mocy wzoru (3.15) będzie wyrażony przez stałe $C_1$ i $C_2$. Równania powyższe można więc przedstawić w następującej formie:

$$\mathcal{U}_1 = a_{11}(r)C_1 + a_{12}(r)C_2 + a_{13}(r)C_3 + a_{14}(r)C_4 \tag{4.123}$$

oraz

$$\mathcal{U}_2 = a_{21}(r)C_1 + a_{22}(r)C_2 + a_{23}(r)C_3 + a_{24}(r)C_4, \tag{4.124}$$

gdzie funkcje $a_{lk}(r)$ ( $l$ = 1,2 ; $k$ = 1,2,3,4 ) są kombinacjami funkcji Bessela pierwszego i drugiego rodzaju rzędu zerowego i pierwszego, argumentów: $m_1R_1$, $m_1R_2$, $m_2R_3$ i $m_2R_4$ oraz funkcji $\ln r$ ;

$$a_{11}(r)=\frac{1}{\gamma_1}\left\{\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}m_1R_2\right)+\sqrt{-\mathrm{j}}m_1\left[R_2\ln R_2\,\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}m_1R_2\right)-R_1\ln r\,\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}m_1R_1\right)\right]\right\}, \tag{4.125}$$

$$a_{12}(r)=\frac{1}{\gamma_1}\left\{\mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}m_1R_2\right)+\sqrt{\mathrm{j}}m_1\left[R_2\ln R_2\,\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}m_1R_2\right)-R_1\ln r\,\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}m_1R_1\right)\right]\right\}, \tag{4.125a}$$

$$a_{13}(r)=\frac{1}{\gamma_2}\left\{\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}m_2R_4\right)-\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}m_2R_3\right)+\right.$$
$$\left.+\sqrt{-\mathrm{j}}m_2\left[R_4\ln R_4\,\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}m_2R_4\right)-R_3\ln R_3\,\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}m_2R_3\right)\right]\right\}, \tag{4.125b}$$

$$a_{14}(r)=\frac{1}{\gamma_2}\left\{\mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}m_2R_4\right)-\mathcal{K}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}m_2R_3\right)+\right.$$
$$\left.+\sqrt{-\mathrm{j}}m_2\left[R_4\ln R_4\,\mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}m_2R_4\right)-R_3\ln R_3\,\mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}m_2R_3\right)\right]\right\}, \tag{4.125c}$$

$$a_{21}(r)=\frac{\sqrt{-\mathrm{j}}m_1}{\gamma_1}\ln r\left[R_2\,\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}m_1R_2\right)-R_1\,\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}m_1R_1\right)\right], \tag{4.125d}$$

$$a_{22}(r)=\frac{\sqrt{-\mathrm{j}}m_1}{\gamma_1}\ln r\left[R_2\,\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}m_1R_2\right)-R_1\,\mathcal{K}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}m_1R_1\right)\right], \tag{4.125e}$$

$$a_{23}(r)=\frac{1}{\gamma_2}\left\{\mathcal{J}_0\left(\sqrt{-\mathrm{j}}m_2R_4\right)+\sqrt{-\mathrm{j}}m_2\left[R_4\ln R_4\,\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}m_2R_4\right)-R_3\ln r\,\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}m_2R_3\right)\right]\right\}, \tag{4.125f}$$

$$a_{24}(r)=\frac{1}{\gamma_2}\left\{\mathcal{K}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}}m_2R_4\right)+\sqrt{\mathrm{j}}m_2\left[R_4\ln R_4\,\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}m_2R_4\right)-R_3\ln r\,\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}m_2R_3\right)\right]\right\}. \tag{4.125g}$$

Napięcia $\mathcal{U}_1$ i $\mathcal{U}_2$ są niezależne od zmiennej $r$. Stąd można zapisać następujące warunki brzegowe:

$$\mathcal{U}_1(R_1)=\mathcal{U}_1(R_2)=\mathcal{U}_1 \tag{4.126}$$



oraz

$$\mathcal{U}_2(R_3)=\mathcal{U}_2(R_4)=\mathcal{U}_2. \tag{4.127}$$

Wtedy z równań (4.126) i (4.127) otrzymuje się następujący układ równań:

$$\begin{bmatrix}\mathcal{U}_1\\ \mathcal{U}_1\\ \mathcal{U}_2\\ \mathcal{U}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14}\\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24}\\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34}\\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\\ C_3\\ C_4\end{bmatrix}, \tag{4.128}$$

gdzie : $d_{11}=a_{11}(R_1)$, $d_{12}=a_{12}(R_1)$, $d_{13}=a_{13}(R_1)$, $d_{14}=a_{14}(R_1)$,
$d_{21}=a_{11}(R_2)$, $d_{22}=a_{12}(R_2)$, $d_{23}=a_{13}(R_2)$, $d_{24}=a_{14}(R_2)$,
$d_{31}=a_{21}(R_3)$, $d_{32}=a_{22}(R_3)$, $d_{33}=a_{23}(R_3)$, $d_{34}=a_{24}(R_3)$,
$d_{41}=a_{21}(R_4)$, $d_{42}=a_{22}(R_4)$, $d_{43}=a_{23}(R_4)$, $d_{44}=a_{24}(R_4)$.

Rozwiązanie analityczne układu równań (4.128) ze względu na funkcje Bessela jest trudne. Dlatego rozwiązuje się go dalej numerycznie.

Macierz $\boldsymbol{D}=\lfloor d_{ij}\rfloor$ nie jest macierzą osobliwą, więc istnieje macierz $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{D}^{-1}$. Stąd:

$$\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\\ C_3\\ C_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_{11}+f_{12} & f_{13}+f_{14}\\ f_{21}+f_{22} & f_{23}+f_{24}\\ f_{31}+f_{32} & f_{33}+f_{34}\\ f_{41}+f_{42} & f_{43}+f_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathcal{U}_1\\ \mathcal{U}_2\end{bmatrix}. \tag{4.129}$$

Prąd w przewodzie fazowym

$$I_1=\int_{S^{II}}J_1(r)\mathrm{d}S^{II}=b_{11}C_1+b_{12}C_2 \tag{4.130}$$

i w osłonie

$$I_2=\int_{S^{IV}}J_2(r)\mathrm{d}S^{IV}=b_{23}C_3+b_{24}C_4, \tag{4.131}$$

gdzie : $b_{11}(r)=\dfrac{\mathrm{j}\sqrt{-\mathrm{j}}2\pi}{m_1}\left[R_2\,\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}m_1R_2\right)-R_1\,\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}m_1R_1\right)\right]$,

$$b_{12}(r)=\frac{\mathrm{j}\sqrt{-\mathrm{j}}2\pi}{m_1}\left[R_2\,\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}m_1R_2\right)-R_1\,\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}m_1R_1\right)\right],$$

$$b_{23}(r)=\frac{\mathrm{j}\sqrt{-\mathrm{j}}2\pi}{m_2}\left[R_4\,\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}m_2R_4\right)-R_3\,\mathcal{J}_1\left(\sqrt{-\mathrm{j}}m_2R_3\right)\right],$$

$$b_{24}(r)=\frac{\mathrm{j}\sqrt{-\mathrm{j}}2\pi}{m_2}\left[R_4\,\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}m_2R_4\right)-R_3\,\mathcal{K}_1\left(\sqrt{\mathrm{j}}m_2R_3\right)\right].$$

Równania (4.130) i (4.131) zapisuje się w postaci:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}. \tag{4.132}$$

Wykorzystując równanie (4.129) otrzymuje się:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{11} & \mathcal{Y}_{12} \\ \mathcal{Y}_{21} & \mathcal{Y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{U}_2 \end{bmatrix}, \tag{4.133}$$

gdzie macierz admitancyjna

$$\mathcal{Y} = [\mathcal{Y}_{ij}] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11}+f_{12} & f_{13}+f_{14} \\ f_{21}+f_{22} & f_{23}+f_{24} \\ f_{31}+f_{32} & f_{33}+f_{34} \\ f_{41}+f_{42} & f_{43}+f_{44} \end{bmatrix}. \tag{4.134}$$

Macierz $\mathcal{Y}$ nie jest macierzą osobliwą, więc istnieje macierz impedancyjna

$$\mathcal{Z} = [\mathcal{Z}_{ij}] = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_{11} & \mathcal{Z}_{12} \\ \mathcal{Z}_{21} & \mathcal{Z}_{22} \end{bmatrix} = \mathcal{Y}^{-1}. \tag{4.135}$$

Wtedy otrzymuje się:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_{11} & \mathcal{Z}_{12} \\ \mathcal{Z}_{21} & \mathcal{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}. \tag{4.136}$$

W przedstawionym postępowaniu (wymuszenia napięciowego) otrzymuje się impedancje całkowite: $\mathcal{Z}_{11}$ - przewodu fazowego, $\mathcal{Z}_{12} = \mathcal{Z}_{21}$ – wzajemną i $\mathcal{Z}_{22}$ – osłony.

Dla przykładu obliczeniowego przyjęto parametry przewodu osłoniętego takie jak w p.4.3. Dla kilku wybranych częstotliwości $f$ obliczono parametry elektryczne przewodu osłoniętego i odniesiono je do odpowiednich wartości obliczonych ze wzorów (4.55), (4.56), (4.59), (4.60) i (4.63) traktując te ostatnie jako wartości dla prądu stałego. Wyniki obliczeń zestawiono w tabeli 4.2.



Tabela 4.2

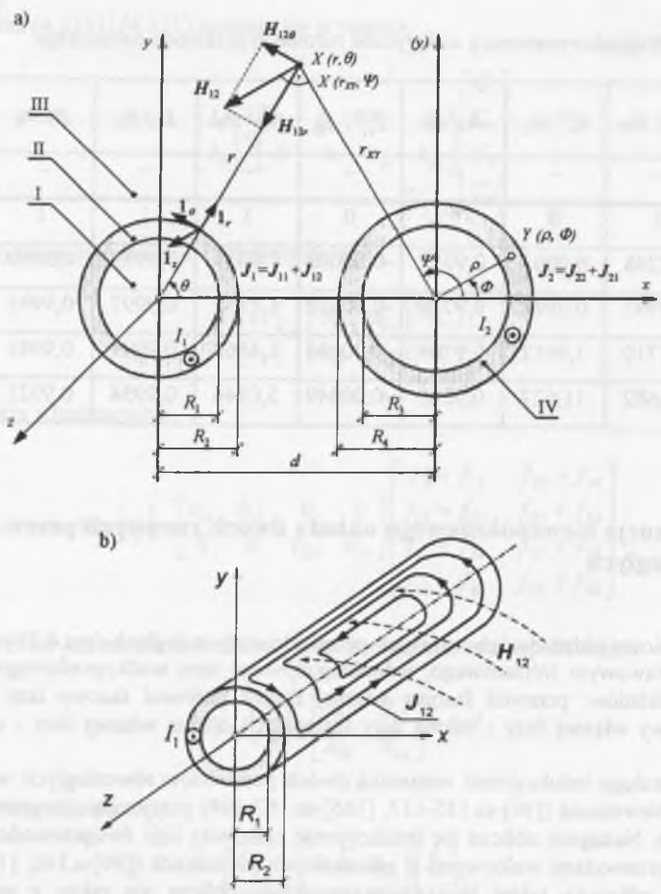
Względne parametry elektryczne rurowego przewodu osłoniętego

| $f$ | $\mathcal{R}_{11}/\mathcal{R}_{10}$ | $\mathcal{R}_{11}^{(2)}/\mathcal{R}_{10}$ | $\mathcal{L}_{11}/\mathcal{L}_{10}$ | $\mathcal{L}_{11}^{(2)}/\mathcal{L}_{10}$ | $\mathcal{R}_{22}/\mathcal{R}_{20}$ | $\mathcal{L}_{22}/\mathcal{L}_{20}$ | $\mathcal{M}/\mathcal{M}_0$ | $\mathcal{R}_{12}/\mathcal{R}_{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Hz | – | – | – | – | – | – | – | – |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 50 | 1,2248 | 0,0063 | 0,9972 | -0,00006 | 1,0014 | 0,9999 | 0,9999 | 0,0031 |
| 500 | 4,2995 | 0,5918 | 0,9759 | -0,00052 | 1,1372 | 0,9997 | 0,9995 | 0,2932 |
| $10^3$ | 7,1710 | 1,9912 | 0,9709 | -0,00184 | 1,4668 | 0,9991 | 0,9983 | 0,9864 |
| $10^4$ | 27,682 | 11,627 | 0,9581 | -0,00849 | 5,0144 | 0,9954 | 0,9921 | 5,735 |

## 4.5. Impedancje niewspółosiowego układu dwóch rurowych przewodów równoległych

Niewspółosiowy układ dwóch rurowych przewodów równoległych (rys.4.2) jest również układem podstawowym trójfazowego, jednobiegunowego toru wielkoprądowego z rys.1.5. Dotyczy on układów: przewód fazowy własnej fazy - przewód fazowy fazy sąsiedniej, przewód fazowy własnej fazy - osłona fazy sąsiedniej i osłona własnej fazy - osłona fazy sąsiedniej.

Dla prądu stałego indukcyjność wzajemną dwóch przewodów równoległych wyprowadza się ze wzoru Newmanna ([90]-ss.135-137, [165]-ss.167-168) przyjmując, że przewody te są bardzo cienkie. Następnie oblicza się indukcyjność całkowitą linii dwuprzewodowej, której przewody są przewodami walcowymi o jednakowych rozmiarach ([90]-s.140, [165]-s.160). Indukcyjność całkowitą takiej linii dwuprzewodowej oblicza się także z energii pola magnetycznego, związanego z linią ([102]-ss.137-141). Dla przewodów walcowych o różnych rozmiarach w pracy [108]-ss.161-162 Matusiak wyprowadza wzór na indukcyjność całkowitą linii z zależności całkowych między indukcyjnością, potencjałem magnetycznym i gęstością prądu, wyprowadzonych uprzednio z energii pola magnetycznego (ss.128-132). W pracy [166]-s.88 Strunskij podaje wzór na indukcyjność całkowitą linii dwuprzewodowej o przewodach rurowych jednakowych rozmiarów, wyprowadzony z tzw. średnich geometrycznych odległości. W pracy [155]-ss.292-293 Rawa wyprowadza inny wzór, niż te w cytowanych wyżej pracach, na indukcyjność wzajemną dwóch przewodów równoległych i w konsekwencji wyprowadza (s.295) odmienny wzór na indukcyjność całkowitą linii dwuprzewodowej o skończonej długości i różnych przekrojach poprzecznych przewodów.




Rys.4.2. Niewspółosiowy układ dwóch rurowych przewodów równoległych; a) przekrój poprzeczny, b) prądy wirowe $J_{12}$ indukowane w rozważanym przewodzie przez prąd sąsiedniego przewodu równoległego

Fig.4.2. Non-coaxial two parallel tubular conductors system; a) cross-section, b) eddy currents $J_{12}$ induced in the conductor considered by the current of neighbarring parallel conductor

W przypadku prądu przemiennego należy uwzględnić zjawisko naskórkowości oraz zjawisko zbliżenia, polegające na indukowaniu w rozważanym przewodzie prądów wirowych $J_{12}$ (rys.4.2.b) przez prąd $I_2$ przewodu sąsiedniego, jak również prądów wirowych $J_{21}$ indukowanych w przewodzie sąsiednim przez prąd $I_1$. W pracy [166]-s.89 Strunskij podaje wzór na indukcyjność całkowitą z uwzględnieniem zjawiska naskórkowości dla linii dwuprzewodowej o przewodach rurowych, ale tylko dla przypadku ich jednakowych rozmiarów.

Podawane wzory na indukcyjność całkowitą linii dwuprzewodowej wyprowadzane są dla warunku $I_1=-I_2$. W ogólnym przypadku warunek ten nie jest spełniony - prąd powrotny może płynąć przez przewody innych faz. Celem tego podrozdziału jest zatem ponowne wyznaczenie impedancji własnych i wzajemnych układu niewspółosiowego dwóch przewodów równoległych przy uwzględnieniu zjawisk naskórkowości i zbliżenia.



### 4.5.1. Impedancje niewspółosiowego układu dwóch rurowych przewodów równoległych bez uwzględnienia zjawisk naskórkowości i zbliżenia

Zakłada się, że przez przewody rurowe (rys.4.2) płyną prądy przemienne o wartościach zespolonych $I_1$ oraz $I_2$ i zwrotach zgodnych ze zwrotem osi $Oz$. Jeżeli pominie się zjawisko naskórkowości, to gęstość prądu $J_1$ jest w przybliżeniu równomierna i dana jest wzorem (4.36). Pomijając ponadto prądy wirowe $J_{12}$ przyjmuje się, że całkowite natężenie pola elektrycznego w rozważanym przewodzie dane jest wzorem (4.39). Wtedy z równania (2.26) zespolony spadek napięcia

$$\mathcal{U}_1 = E_1^{II}(r) + j\omega A_1^{II}(r) + j\omega A_2^{II}(r,\Theta). \tag{4.137}$$

Potencjał magnetyczny $A_1^{II}(r)$ wytworzony jest przez prąd $I_1$ i dany jest wzorem (4.41). Potencjał $A_2^{II}(r,\Theta)$ wytworzony jest przez prąd $I_2$ i dany jest wzorem (3.22), który dla jasności wywodów zostaje tu powtórzony.

$$A_2^{II}(r,\Theta) = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{d} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{d}\right)^n \cos n\Theta\right]. \tag{4.138}$$

Postępując dokładnie tak samo, jak zrobiono to w p.4.4.1, otrzymuje się równanie (4.49). W równaniu tym rezystancja $\mathcal{R}_1$ dana jest wzorem ogólnym (4.53) i wzorem końcowym (4.55). Indukcyjność $\mathcal{L}_1$ dana jest wzorem ogólnym (4.54) i wzorem końcowym (4.56).

Indukcyjność wzajemna

$$\mathcal{M}_{12} = \frac{1}{I_2 I_1^*}\int_{S^{II}} A_2^{II}(r,\Theta) J_1^*(r)\, r\,dr\,d\Theta. \tag{4.139}$$

Podstawiając do wzoru (4.139) gęstość prądu $J_1^*(r)$ ze wzoru (4.36) i wektorowy potencjał magnetyczny ze wzoru (4.138) otrzymuje się:

$$\mathcal{M}_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi^2\left(R_2^2 - R_1^2\right)}\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\left[\ln\frac{1}{d} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{d}\right)^n \cos n\Theta\right] r\,dr\,d\Theta. \tag{4.140}$$

Po obliczeniu całki (4.140) wyznacza się przybliżoną indukcyjność wzajemną na jednostkę długości linii dwuprzewodowej o przewodach rurowych

$$\mathcal{M}_{12} \cong \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{1}{d}. \tag{4.141}$$

Jeżeli przewody rurowe z rys.4.2 zamienić miejscami, to spadek napięcia

$$\mathcal{U}_2 = E_2^{II}(r) + j\omega A_2^{II}(r) + j\omega A_1^{II}(r,\Theta), \tag{4.142}$$

gdzie natężenie pola elektrycznego $E_2^{II}(r)$ dane jest wzorem (4.40), gęstość prądu $J_2(r)$ - wzorem (4.37), wektorowy potencjał magnetyczny $A_2^{II}(r)$ wytworzony przez prąd $I_2$ - wzorem (4.42), zaś potencjał $A_1^{II}(r,\Theta)$ wytworzony przez prąd $I_1$ jest dany wzorem:

$$A_1^{II}(r,\Theta)=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{d}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{d}\right)^n\cos n\Theta\right]. \tag{4.143}$$

Postępując tak jak poprzednio otrzymuje się równanie (4.50), w którym rezystancję $\mathcal{R}_2$ ze wzoru ogólnego (4.57) sprowadza się do wzoru (4.59), indukcyjność $\mathcal{L}_2$ ze wzoru ogólnego (4.58) sprowadza się do wzoru (4.60), zaś jednostkowa indukcyjność wzajemna

$$\mathcal{M}_{21}=\frac{1}{I_1 I_2^*}\int_{S^{II}} A_1^{II}(r,\Theta)J_2^*(r)r\,dr\,d\Theta. \tag{4.144}$$

Po odpowiednich podstawieniach ze wzoru (4.144) otrzymuje się:

$$\mathcal{M}_{21}=\mathcal{M}_{12}=\mathcal{M}_0\equiv\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{1}{d}. \tag{4.145}$$

We wzorach (4.141) i (4.145) licznik wyrażenia logarytmowanego $\frac{1}{d}$ jest równy jednostce miary długości.

W przypadku gdy $I_1=-I_2$, jednostkowa indukcyjność całkowita linii dwuprzewodowej o przewodach rurowych wyraża się wzorem (4.64), z którego po odpowiednich podstawieniach otrzymuje się indukcyjność całkowitą na jednostkę długości linii

$$\mathcal{L}_0=\frac{\mu_0}{2\pi}\left\{\ln\frac{d^2}{R_2R_4}+\frac{R_1^4}{\left(R_2^2-R_1^2\right)^2}\ln\frac{R_2}{R_1}+\frac{R_3^4}{\left(R_4^2-R_3^2\right)^2}\ln\frac{R_4}{R_3}-\frac{1}{4}\left[\frac{3R_1^2-R_2^2}{R_2^2-R_1^2}+\frac{3R_3^2-R_4^2}{R_4^2-R_3^2}\right]\right\}. \tag{4.146}$$

Dla linii o różnych przewodach walcowych, tj. gdy $R_1=R_3=0$ oraz $R_2\neq R_4$, otrzymuje się wzór:

$$\mathcal{L}_{0\,walc.}=\frac{\mu_0}{4\pi}+\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{d^2}{R_2R_4}, \tag{4.147}$$

który został wyprowadzony przez Matusiaka w pracy [108]-ss.161-162.

Dla linii o jednakowych przewodach walcowych, tj. gdy $R_1=R_3=0$ oraz $R_2=R_4=R$, ze wzoru (4.147) otrzymuje się :

$$\mathcal{L}_{0\,walc.\,j.}=\frac{\mu_0}{4\pi}+\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{R}, \tag{4.148}$$

wyprowadzony między innymi w pracach [90]-s.140, [165]-s.160, [102]-s.140 oraz w pracy [166] - s.88.



### 4.5.2. Impedancje niewspółosiowego układu dwóch rurowych przewodów równoległych z uwzględnieniem zjawisk naskórkowości i zbliżenia

Całkowita gęstość prądu $J_1(r,\Theta)$ w rozpatrywanym przewodzie rurowym z rys.4.2 jest sumą zespoloną gęstości prądu $J_{11}(r,\Theta)$ pochodzącej od prądu $I_1$ i gęstości prądu $J_{12}(r,\Theta)$, tj. prądu wirowego indukowanego przez przemienne pole magnetyczne $H_{12}(r,\Theta)$ prądu $I_2$ równoległego przewodu sąsiedniego (rys.4.2b):

$$J_1(r,\Theta)=J_{11}(r,\Theta)+J_{12}(r,\Theta). \tag{4.149}$$

Gęstość prądu $J_{11}(r,\Theta)$ jest gęstością wypadkową wzajemnego oddziaływania pól elektromagnetycznych układu dwóch przewodów równoległych. Analogicznie dla gęstości $J_{12}(r,\Theta)$ oraz dla przewodu "2", tj. gęstości $J_{22}(r_{XY},\Psi)$ i $J_{21}(r_{XY},\Psi)$.

W tzw. pierwszym przybliżeniu [113] można przyjąć, że gęstość prądu $J_{11}$ jest gęstością w przewodzie odosobnionym, zaś gęstość prądu $J_{12}$ jest wywołana przemiennym polem magnetycznym nieskończenie cienkiego przewodu "2" z prądem $I_2$.

Zjawisko zbliżenia dla przewodu "1" uwzględnia się wtedy w ten sposób, że pole magnetyczne prądu $I_1$ indukuje w przewodzie "2" prądy wirowe $J_{21}(r_{XY},\Psi)$, dla których zakłada się, że ich pole magnetyczne nie oddziałuje na rozważany przewód. Analogicznie postępuje się w odniesieniu do przewodu "2".

Wobec tego całkowita gęstość prądu

$$J_1(r,\Theta)=J_{11}(r)+J_{12}(r,\Theta), \tag{4.149a}$$

gdzie gęstość prądu $J_{11}(r)$ dana jest wzorem (4.66), zaś gęstość prądu $J_{12}(r,\Theta)$ (wyprowadzona w pracach [150] i [12]; patrz także p.5.1; cytowana między innymi w pracach [142, 147, 148, 149, 151]) dana jest następującym wzorem:

$$J_{12}(r,\Theta)=\frac{\sqrt{-j}m_1I_2}{\pi R_2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R_2}{d}\right)^n f_n(r)\cos n\Theta, \tag{4.150}$$

gdzie

$$f_n(r)=\frac{\mathcal{K}_{n+1}\left(\sqrt{j}m_1R_1\right)\mathcal{J}_n\left(\sqrt{-j}m_1r\right)-j\mathcal{J}_{n+1}\left(\sqrt{-j}m_1R_1\right)\mathcal{K}_n\left(\sqrt{j}m_1r\right)}{\mathcal{J}_{n-1}\left(\sqrt{-j}m_1R_2\right)\mathcal{K}_{n+1}\left(\sqrt{-j}m_1R_1\right)+\mathcal{J}_{n+1}\left(\sqrt{-j}m_1R_1\right)\mathcal{K}_{n-1}\left(\sqrt{j}m_1R_2\right)}. \tag{4.151}$$

Uwzględniając prądy wirowe $J_{12}(r,\Theta)$ i $J_{21}(r_{XY},\Psi)$ w równaniu całkowym (2.24), otrzymuje się spadek napięcia w rozpatrywanym przewodzie

$$\mathcal{U}_1=E_{11}^{II}(r)+E_{12}^{II}(r,\Theta)+j\omega A_{11}^{II}(r)+j\omega A_{12}^{II}(r,\Theta)+j\omega A_{21}^{II}(r_{XY},\Psi)+j\omega A_2^{II}(r,\Theta). \tag{4.152}$$

We wzorze (4.152) natężenia pól elektrycznych

$$E_{12}^{II}(r)=\frac{1}{\gamma_1}J_{11}(r), \tag{4.153}$$

$$E_{12}^{II}(r,\Theta)=\frac{1}{\gamma_1}J_{12}(r,\Theta). \tag{4.154}$$

Potencjał $A_{11}^{II}(r)$ pochodzący od gęstości prądu $J_{11}(r)$ dany jest wzorem (4.78); potencjał $A_2^{II}(r,\Theta)$ dany jest wzorem (4.138). Potencjał magnetyczny $A_{12}^{II}(r,\Theta)$ oblicza się ze wzorów (3.8) i (3.13) po podstawieniu do nich gęstości prądu $J_{12}(r,\Theta)$ ze wzoru (4.150). Wtedy

$$A_{12}^{II}(r,\Theta)=\frac{\sqrt{-\mathrm{j}}\,\mu_0 m_1 I_2}{2\pi^2 R_2}\lim_{\delta\to 0}\int_0^{2\pi}\left\{\int_{R_1}^{r-\delta}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{R_2}{d}\right)^m f_m(\rho)\cos m\Phi\left\{\ln\frac{1}{r}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cos[n(\Phi-\Theta)]\right\}\rho\mathrm{d}\rho+\int_{r+\delta}^{R_2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{R_2}{d}\right)^m f_m(\rho)\cos m\Phi\left\{\ln\frac{1}{\rho}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n\cos[n(\Phi-\Theta)]\right\}\rho\mathrm{d}\rho\right\}\mathrm{d}\Phi. \tag{4.155}$$

Funkcja trygonometryczna

$$\cos[n(\Phi-\Theta)]=\cos n\Phi\cos n\Theta+\sin n\Phi\sin n\Theta \tag{4.156}$$

i ze względu na całki funkcji trygonometrycznych względem zmiennej $\Phi$ [54, 60, 153, 183]:

$$\int_0^{2\pi}\cos m\Phi\,\mathrm{d}\Phi=0, \tag{4.156a}$$

$$\int_0^{2\pi}\cos m\Phi\,\sin n\Phi\,\mathrm{d}\Phi=0, \tag{4.156b}$$

$$\int_0^{2\pi}\cos m\Phi\,\cos n\Phi\,\mathrm{d}\Phi=\begin{cases}0 & \text{dla } m\neq n\\ \pi & \text{dla } m=n\end{cases} \tag{4.156c}$$

ze wzoru (4.155) otrzymuje się:

$$A_{12}^{II}(r,\Theta)=-\frac{\sqrt{-\mathrm{j}}\,\mu_0 m_1 I_2}{2\pi R_2}\lim_{\delta\to 0}\left\{\int_{R_1}^{r-\delta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{-n}}{n}\left(\frac{R_2}{d}\right)^n\cos n\Theta\, f_n(\rho)\rho^{n+1}\mathrm{d}\rho+\right.$$

$$\left.+\int_{r+\delta}^{R_2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}\left(\frac{R_2}{d}\right)^n\cos n\Theta\, f_n(\rho)\rho^{-n+1}\mathrm{d}\rho\right\}. \tag{4.157}$$

Na podstawie wzorów z pracy [110] otrzymuje się:

$$\int^{\rho}\rho^{n+1}\mathcal{J}_n\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,m_1\rho\right)\mathrm{d}\rho=\frac{\rho^{n+1}}{\sqrt{-\mathrm{j}}\,m_1}\mathcal{J}_{n+1}\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,m_1\rho\right), \tag{4.158}$$

$$\int^{\rho}\rho^{-n+1}\mathcal{J}_n\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,m_1\rho\right)\mathrm{d}\rho=-\frac{\rho^{-n+1}}{\sqrt{-\mathrm{j}}\,m_1}\mathcal{J}_{n-1}\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,m_1\rho\right), \tag{4.158a}$$



$$\int^{\rho}\rho^{n+1}\mathcal{K}_n\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,m_1\rho\right)\mathrm{d}\rho=-\frac{\rho^{n+1}}{\sqrt{\mathrm{j}}m_1}\mathcal{K}_{n+1}\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,m_1\rho\right), \tag{4.158b}$$

$$\int^{\rho}\rho^{-n+1}\mathcal{K}_n\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,m_1\rho\right)\mathrm{d}\rho=-\frac{\rho^{-n+1}}{\sqrt{\mathrm{j}}m_1}\mathcal{K}_{n-1}\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,m_1\rho\right). \tag{4.158c}$$

Wykorzystując przedstawione wzory na całki z funkcji Bessela wykonuje się całkowanie we wzorze (4.157) po uprzednim podstawieniu funkcji $f_n(\rho)$ ze wzoru (4.151). W wyniku otrzymuje się wektorowy potencjał magnetyczny w przewodzie rurowym wytworzony przez prądy wirowe $J_{12}(r,\Theta)$, indukowane przez przemienne pole magnetyczne $H_{12}(r,\Theta)$ prądu $I_2$ w przewodzie równoległym

$$A_{12}^{II}(r,\Theta)=-\frac{\mu_0 I_2}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\mathrm{j}\sqrt{-\mathrm{j}}}{m_1 R_2}\left(\frac{R_2}{d}\right)^n\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\mathcal{K}_{n+1}\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,m_1R_1\right)\mathcal{J}_n\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,m_1r\right)-\mathrm{j}\,\mathcal{J}_{n+1}\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,m_1R_1\right)\mathcal{K}_n\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,m_1r\right)}{\mathcal{J}_{n-1}\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,m_1R_2\right)\mathcal{K}_{n+1}\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,m_1R_1\right)+\mathcal{J}_{n+1}\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,m_1R_1\right)\mathcal{K}_{n-1}\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,m_1R_2\right)}-\frac{1}{n}\left(\frac{r}{d}\right)^n\right\}\cos n\Theta. \tag{4.159}$$

Dla wektorowego potencjału magnetycznego $A_{21}^{II}(r_{XY},\Psi)$ zmienna $r_{XY}>\rho$ (rys.4.2), więc ze wzoru (3.8)

$$A_{21}^{II}(r_{XY},\Psi)=\frac{\mu_0}{2\pi}\int_{S^W}J_{21}(\rho,\Phi)\left\{\ln\frac{1}{r_{XY}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\rho}{r_{XY}}\right)^n\cos[n(\Phi-\Psi)]\right\}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\Phi. \tag{4.160}$$

Gęstość prądów wirowych indukowanych w przewodzie "2" przez przemienne pole magnetyczne prądu $I_1$ [12, 142, 147, 148, 149, 150, 151]

$$J_{21}(r_{XY},\Psi)=-\frac{\sqrt{-\mathrm{j}}m_2 I_1}{\pi R_4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{R_4}{d}\right)^n g_n(r_{XY})\cos n\Psi, \tag{4.161}$$

gdzie

$$g_n(r_{XY})=\frac{\mathcal{K}_{n+1}\left(\sqrt{\mathrm{j}}m_2R_3\right)\mathcal{J}_n\left(\sqrt{-\mathrm{j}}m_2r_{XY}\right)-\mathrm{j}\mathcal{J}_{n+1}\left(\sqrt{-\mathrm{j}}m_2R_3\right)\mathcal{K}_n\left(\sqrt{\mathrm{j}}m_2r_{XY}\right)}{\mathcal{J}_{n-1}\left(\sqrt{-\mathrm{j}}m_2R_4\right)\mathcal{K}_{n+1}\left(\sqrt{-\mathrm{j}}m_2R_3\right)+\mathcal{J}_{n+1}\left(\sqrt{-\mathrm{j}}m_2R_3\right)\mathcal{K}_{n-1}\left(\sqrt{\mathrm{j}}m_2R_4\right)}. \tag{4.161a}$$

Po podstawieniu wzorów (4.161) i (4.161a) do wzoru (4.160) i po wykonaniu obliczeń (analogicznych jak w przypadku obliczania potencjału $A_{12}^{II}(r,\Theta)$) otrzymuje się:

$$A_{21}^{II}(r_{XY},\Psi)=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\frac{R_4^{2n}}{d^n}\frac{1}{r_{XY}^n}\cdot$$

$$\cdot\frac{\mathcal{J}_{n+1}\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,m_2R_4\right)\mathcal{K}_{n+1}\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,m_2R_3\right)-\mathcal{J}_{n+1}\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,m_2R_3\right)\mathcal{K}_{n+1}\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,m_2R_4\right)}{\mathcal{J}_{n-1}\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,m_2R_4\right)\mathcal{K}_{n+1}\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,m_2R_3\right)+\mathcal{J}_{n+1}\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\,m_2R_3\right)\mathcal{K}_{n-1}\left(\sqrt{\mathrm{j}}\,m_2R_4\right)}\cos n\Psi. \tag{4.162}$$

Następnie równanie (4.152) mnoży się przez zespoloną, sprzężoną gęstość prądu $J_{11}^{*}(r)$ i całkuje w obszarze $S^{II}$ otrzymując:

$$\int_{S^{II}} \mathcal{U}_1 J_{11}^{*}(r)\mathrm{d}S^{II} = \frac{1}{\gamma_1}\int_{S^{II}} J_{11}(r)J_{11}^{*}(r)\mathrm{d}S^{II} + \frac{1}{\gamma_1}\int_{S^{II}} J_{12}(r,\Theta)J_{11}^{*}(r)\mathrm{d}S^{II} +$$
$$+\mathrm{j}\omega\int_{S^{II}} A_{11}^{II}(r)J_{11}^{*}(r)\mathrm{d}S^{II} + \mathrm{j}\omega\int_{S^{II}} A_{12}^{II}(r,\Theta)J_{11}^{*}(r)\mathrm{d}S^{II} +$$
$$+\mathrm{j}\omega\int_{S^{II}} A_{21}^{II}(r_{XY},\Psi)J_{11}^{*}(r)\mathrm{d}S^{II} + \mathrm{j}\omega\int_{S^{II}} A_{2}^{II}(r,\Theta)J_{11}^{*}(r)\mathrm{d}S^{II}. \tag{4.163}$$

Funkcje podcałkowe $J_{12}(r,\Theta)$ i $A_{12}^{II}(r,\Theta)$ zawierają $\cos n\Theta$ (odpowiedni wzory (4.150) i (3.159)),wobec tego całkowanie ze względu na zmienną $\Theta$ daje zerowe wartości odpowiednich całek w równaniu (4.163).

Dzieląc następnie stronami równanie (4.163) przez $I_1^{*}$ otrzymuje się :

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{R}_{11}^{(1)}I_1 + \mathrm{j}\omega\mathcal{L}_{11}^{(1)}I_1 + \mathcal{Z}_{11}^{(3)}I_1 + \mathrm{j}\omega\mathcal{M}_{12}I_2, \tag{4.164}$$

gdzie $\mathcal{R}_{11}^{(1)}$ jest jednostkową rezystancją przewodu rurowego z uwzględnieniem zjawiska naskórkowości i dana jest wzorem (4.93), $\mathcal{L}_{11}^{(1)}$ jest jednostkową indukcyjnością własną przewodu rurowego z uwzględnieniem naskórkowości i dana jest wzorem (4.95), $\mathcal{Z}_{11}^{(3)}$ jest jednostkową impedancją dodatkową wynikłą ze zjawiska zbliżenia

$$\mathcal{Z}_{11}^{(3)} = \mathrm{j}\omega\int_{S^{II}} A_{21}^{II}(r_{XY},\Psi)J_{11}^{*}(r)\mathrm{d}S^{II}, \tag{4.164a}$$

$\mathcal{M}_{12}$ jest jednostkową indukcyjnością wzajemną

$$\mathcal{M}_{12} = \frac{1}{I_2 I_1^{*}}\int_{S^{II}} A_2^{II}(r,\Theta)J_{11}^{*}(r)\mathrm{d}S^{II}. \tag{4.164b}$$

Podstawiając do wzoru (4.164b) wzory (4.66) i (4.138) oraz wykonując całkowanie otrzymuje się indukcyjność wzajemną między dwoma niewspółosiowymi, równoległymi przewodami rurowymi, która wyraża się takim samym wzorem jak w przypadku nieuwzględniania zjawiska naskórkowości - wzór (4.141). Jest to konsekwencja przyjęcia, że przewód z prądem $I_2$ jest przewodem nieskończenie cienkim.

Impedancję dodatkową $\mathcal{Z}_{11}^{(3)}$ trudno jest przedstawić w postaci analitycznej ze względu na cztery zmienne: $r$, $\Theta$, $r_{XY}$ oraz $\Psi$, występujące we wzorze (4.164a). W dalszej części impedancja ta będzie obliczana numerycznie.

Jednostkowa impedancja dodatkowa

$$\mathcal{Z}_{11}^{(3)} = \mathcal{R}_{11}^{(3)} + \mathrm{j}\omega\mathcal{L}_{11}^{(3)}, \tag{4.165}$$



gdzie

$$\mathcal{R}_{11}^{(3)} = \mathrm{Re}\,\mathcal{Z}_{11}^{(3)}, \tag{4.165a}$$

$$\mathcal{L}_{11}^{(3)} = \frac{1}{\omega}\mathrm{Im}\,\mathcal{Z}_{11}^{(3)}. \tag{4.165b}$$

Rezystancja $\mathcal{R}_{11}^{(3)}$ jest proporcjonalna do strat Joule'a w równoległym przewodzie rurowym. Może być ona obliczana z twierdzenia Poytinga [90, 155, 165] następującym wzorem:

$$\mathcal{R}_{11}^{(3)} = \frac{1}{\gamma_2|I_1|^2}\int_{S^{IV}} J_{21}(r_{XY},\Psi)J_{21}^{*}(r_{XY},\Psi)\mathrm{d}S^{IV}, \tag{4.166}$$

gdzie $S^{IV}$ jest powierzchnią przekroju poprzecznego przewodu rurowego o promieniach wewnętrznym $R_3$ i zewnętrznym $R_4$.

Po podstawieniu wzoru (4.161) do wzoru (4.166) rezystancja

$$\mathcal{R}_{11}^{(3)} = \frac{m_2^2}{\pi^2\gamma_2 R_4^2}\cdot$$
$$\cdot\int_0^{2\pi}\int_{R_3}^{R_4}\left[\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{R_4}{d}\right)^m g_m(r_{XY})\cos m\Psi\right]\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{R_4}{d}\right)^n g_n^{*}(r_{XY})\cos n\Psi\right]r_{XY}\mathrm{d}r_{XY}\mathrm{d}\Psi. \tag{4.166a}$$

Uwzględniając (4.156c) ze wzoru (4.166a), po pierwszym całkowaniu ze względu na zmienną $\Psi$, otrzymuje się:

$$\mathcal{R}_{11}^{(3)} = \frac{m_2^2}{\pi\gamma_2 R_4^2}\int_{R_3}^{R_4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R_4}{d}\right)^{2n} g_n(r_{XY})g_n^{*}(r_{XY})r_{XY}\mathrm{d}r_{XY}. \tag{4.166b}$$

Dalsze całkowanie funkcji Bessela względem zmiennej $r_{XY}$ doprowadza do wzoru:

$$\mathcal{R}_{11}^{(3)} = \frac{\sqrt{-\mathrm{j}}m_2}{\pi\gamma_2 R_4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R_4}{d}\right)^{2n}\frac{a_n}{b_n b_n^{*}}, \tag{4.167}$$

gdzie :

$$a_n = \mathcal{K}_{n+1}(\sqrt{\mathrm{j}}m_2R_3)\mathcal{K}_{n+1}^{*}(\sqrt{\mathrm{j}}m_2R_3)\cdot$$
$$\cdot\left[\mathcal{J}_n(\sqrt{-\mathrm{j}}m_2R_4)\mathcal{J}_{n+1}^{*}(\sqrt{-\mathrm{j}}m_2R_4)+\mathrm{j}\mathcal{J}_n^{*}(\sqrt{-\mathrm{j}}m_2R_4)\mathcal{J}_{n+1}(\sqrt{-\mathrm{j}}m_2R_4)\right]+$$
$$+\mathcal{J}_{n+1}(\sqrt{-\mathrm{j}}m_2R_3)\mathcal{J}_{n+1}^{*}(\sqrt{-\mathrm{j}}m_2R_3)\cdot$$
$$\cdot\left[\mathcal{K}_n^{*}(\sqrt{\mathrm{j}}m_2R_4)\mathcal{K}_{n+1}(\sqrt{\mathrm{j}}m_2R_4)+\mathrm{j}\mathcal{K}_n(\sqrt{\mathrm{j}}m_2R_4)\mathcal{K}_{n+1}^{*}(\sqrt{\mathrm{j}}m_2R_4)\right]-$$
$$-\mathcal{K}_{n+1}(\sqrt{\mathrm{j}}m_2R_3)\mathcal{J}_{n+1}^{*}(\sqrt{-\mathrm{j}}m_2R_3)\cdot$$
$$\cdot\left[\mathcal{K}_n^{*}(\sqrt{\mathrm{j}}m_2R_4)\mathcal{J}_{n+1}(\sqrt{-\mathrm{j}}m_2R_4)+\mathcal{J}_n(\sqrt{-\mathrm{j}}m_2R_4)\mathcal{K}_{n+1}^{*}(\sqrt{\mathrm{j}}m_2R_4)\right]-$$
$$-\mathrm{j}\mathcal{J}_{n+1}(\sqrt{-\mathrm{j}}m_2R_3)\mathcal{K}_{n+1}^{*}(\sqrt{\mathrm{j}}m_2R_3)\cdot$$
$$\cdot\left[\mathcal{J}_n^{*}(\sqrt{-\mathrm{j}}m_2R_4)\mathcal{K}_{n+1}(\sqrt{\mathrm{j}}m_2R_4)+\mathcal{K}_n(\sqrt{\mathrm{j}}m_2R_4)\mathcal{J}_{n+1}^{*}(\sqrt{-\mathrm{j}}m_2R_4)\right],$$

$$b_n = \mathcal{J}_{n-1}\left(\sqrt{-j}m_2R_4\right)\mathcal{K}_{n+1}\left(\sqrt{j}m_2R_3\right)+\mathcal{J}_{n+1}\left(\sqrt{-j}m_2R_3\right)\mathcal{K}_{n-1}\left(\sqrt{j}m_2R_4\right),$$

$$b_n^* = \mathcal{J}_{n-1}^*\left(\sqrt{-j}m_2R_4\right)\mathcal{K}_{n+1}^*\left(\sqrt{j}m_2R_3\right)+\mathcal{J}_{n+1}^*\left(\sqrt{-j}m_2R_3\right)\mathcal{K}_{n-1}^*\left(\sqrt{j}m_2R_4\right).$$

Całkowita impedancja własna przewodu rurowego ($R_1$, $R_2$) z uwzględnieniem zjawiska zbliżenia (sąsiedni przewód o $R_3$ i $R_4$) wyraża się wzorem:

$$\mathcal{Z}_{11} = \mathcal{Z}_{11}^{(1)} + \mathcal{Z}_{11}^{(3)}, \tag{4.168}$$

gdzie impedancja $\mathcal{Z}_{11}^{(1)}$ dana jest wzorem (4.112).

Dla przykładu obliczeniowego przyjęto parametry przewodów "1" i "2" takie jak w p.4.4. Dla kilku wybranych częstotliwości $f$ i kilku odległości $d$ między przewodami obliczono $\mathcal{R}_{11}^{(1)}$, $\mathcal{R}_{11}^{(3)}$, $\mathcal{L}_{11}^{(1)}$ i $\mathcal{L}_{11}^{(3)}$ i odniesiono je do odpowiednich wartości obliczonych dla przewodu "1" ze wzorów (3.57) i (3.58).

Impedancję $\mathcal{Z}_{11}^{(3)}$ oblicza się numerycznie podstawiając do wzoru (4.164a)

$$r_{XY}^2 = r^2 + d^2 - 2rd\cos\Theta \tag{4.169}$$

oraz

$$\Psi = \arccos\frac{r\cos\Theta - d}{r_{XY}}. \tag{4.169a}$$

Wyniki obliczeń zestawiono w tabeli 4.3.

Tabela 4.3

Względne parametry elektryczne przewodu rurowego z uwzględnieniem zjawisk naskórkowości i zbliżenia niewspółosiowego układu dwóch rurowych przewodów równoległych.

| $f$ | $\frac{\mathcal{R}_{11}^{(1)}}{\mathcal{R}_{10}}$ | $\frac{\mathcal{L}_{11}^{(1)}}{\mathcal{L}_{10}}$ | $d=2R_4$ | | $d=3R_4$ | | $d=4R_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $\frac{\mathcal{R}_{11}^{(3)}}{\mathcal{R}_{10}}$ | $\frac{\mathcal{L}_{11}^{(3)}}{\mathcal{L}_{10}}$ | $\frac{\mathcal{R}_{11}^{(3)}}{\mathcal{R}_{10}}$ | $\frac{\mathcal{L}_{11}^{(3)}}{\mathcal{L}_{10}}$ | $\frac{\mathcal{R}_{11}^{(3)}}{\mathcal{R}_{10}}$ | $\frac{\mathcal{L}_{11}^{(3)}}{\mathcal{L}_{10}}$ |
| Hz | – | – | – | – | – | – | – | – |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 50 | 1,21852 | 0,9972 | 0,65897 | -0,07927 | 0,25687 | -0,03306 | 0,13846 | -0,01821 |
| 500 | 3,7077 | 0,9765 | 0,84472 | -0,08713 | 0,31779 | -0,03575 | 0,16964 | -0,01960 |
| $10^3$ | 5,1798 | 0,9726 | 1,08715 | -0,08741 | 0,40904 | -0,03585 | 0,21836 | -0,01966 |
| $10^4$ | 16,0550 | 0,9666 | 3,76305 | -0,08873 | 1,41308 | -0,03635 | 0,75393 | -0,01992 |



W analogiczny sposób otrzymuje się impedancję całkowitą drugiego przewodu równoległego (o promieniu wewnętrznym $R_3$ i zewnętrznym $R_4$):

$$\mathcal{Z}_{22} = \mathcal{Z}_{22}^{(1)} + \mathcal{Z}_{22}^{(3)}, \tag{4.170}$$

gdzie impedancja $\mathcal{Z}_{22}^{(1)}$ dana jest wzorem (4.110), zaś impedancję $\mathcal{Z}_{22}^{(3)}$ otrzymuje się ze wzoru (4.164a) zmieniając w nim $R_3$ na $R_1$, $R_4$ na $R_2$ oraz $m_2$ na $m_1$.

Dla $n$=1 wzór (4.150) przyjmuje postać, którą można wyprowadzić zakładając, że pole magnetyczne, w którym rozważany przewód znajduje się, jest polem równomiernym określonym z prawa przepływu wzorem

$$H_{12} = \frac{I_2}{2\pi d}. \tag{4.171}$$

Wtedy impedancje typu $\mathcal{Z}^{(3)}$ mogą być liczone wzorami uproszczonymi dla $n$=1.

## 4.6. Całkowite impedancje własne przewodów fazowych i osłon trójfazowego, jednobiegunowego toru wielkoprądowego

Osłony przewodów fazowych trójfazowego, jednobiegunowego toru wielkoprądowego z rys.1.5 znajdują się w przemiennym polu magnetycznym własnego przewodu fazowego oraz w polu magnetycznym zewnętrznym prądów przewodów fazowych i osłon sąsiednich.

Dla pola magnetycznego własnego przewodu fazowego osłona rurowa jest ekranem otwartym, nieprawidłowym, tzn., że pole magnetyczne wytworzone przez prąd przewodu fazowego jest praktycznie takie samo na powierzchni zewnętrznej, jak i wewnętrznej własnej osłony. Dla pola pochodzenia zewnętrznego osłona stanowi zamknięty ekran elektromagnetyczny o bardzo skutecznym działaniu ([185]–s.227).

Takie działanie osłon trójfazowego, jednobiegunowego toru wielkoprądowego jako ekranów elektromagnetycznych ma istotny wpływ na ich impedancje własne oraz impedancje własne przewodów fazowych, ściślej na impedancję dodatkową typu $\mathcal{Z}^{(2)}$ (tylko dla przewodu fazowego), związaną z prądami indukowanymi przez prąd przewodu fazowego we własnej osłonie (rys.4.1.b) i impedancję typu $\mathcal{Z}^{(3)}$, związaną z prądami indukowanymi przez prąd przewodu fazowego (lub osłony) w osłonach sąsiednich (rys.4.2.b). W obu przypadkach chodzi o zjawisko zbliżenia.

Pole magnetyczne prądu w wybranym przewodzie fazowym indukuje zatem prądy wirowe we własnej osłonie oraz w osłonach sąsiednich. Nie indukuje zaś prądów wirowych w sąsiednich przewodach fazowych - osłony przewodów sąsiednich są ekranami zamkniętymi. Pole magnetyczne prądu wzdłużnego osłony indukuje prądy wirowe tylko w osłonach sąsiednich.

Impedancja całkowita przewodu roboczego fazy $A$ jest więc dana wzorem:

$$\mathcal{Z}_{AA} = \mathcal{Z}_{AA}^{(A)} + \mathcal{Z}_{AA}^{(a)} + \mathcal{Z}_{AA}^{(b)} + \mathcal{Z}_{AA}^{(c)}, \tag{4.172}$$

gdzie : $\mathcal{Z}_{AA}^{(A)}$ - impedancja własna z uwzględnieniem naskórkowości,

$\mathcal{Z}_{AA}^{(a)}$ - impedancja dodatkowa z uwzględnieniem zjawiska zbliżenia między przewodem roboczym fazy $A$ a jego własną osłoną ,

$\mathcal{Z}_{AA}^{(b)}$ - impedancja dodatkowa z uwzględnieniem zjawiska zbliżenia między przewodem roboczym fazy $A$ a osłoną $b$ fazy $B$,

$\mathcal{Z}_{AA}^{(c)}$ - impedancja dodatkowa uwzględniająca zjawisko zbliżenia przewód fazowy $A$ - osłona $c$ .

Analogicznie dla przewodów fazowych pozostałych faz jest :

$$\mathcal{Z}_{BB} = \mathcal{Z}_{BB}^{(A)} + \mathcal{Z}_{BB}^{(b)} + \mathcal{Z}_{BB}^{(a)} + \mathcal{Z}_{BB}^{(c)}, \tag{4.173}$$

$$\mathcal{Z}_{CC} = \mathcal{Z}_{CC}^{(C)} + \mathcal{Z}_{CC}^{(c)} + \mathcal{Z}_{CC}^{(a)} + \mathcal{Z}_{CC}^{(b)}. \tag{4.174}$$

Całkowita impedancja osłony $a$ przewodu fazowego $A$

$$\mathcal{Z}_{aa} = \mathcal{Z}_{aa}^{(a)} + \mathcal{Z}_{aa}^{(b)} + \mathcal{Z}_{aa}^{(c)}, \tag{4.175}$$

gdzie : $\mathcal{Z}_{aa}^{(a)}$ - impedancja własna osłony $a$ z uwzględnieniem zjawiska naskórkowości,

$\mathcal{Z}_{aa}^{(b)}$ - uwzględnia zjawisko zbliżenia osłona $a$ – osłona $b$ ,

$\mathcal{Z}_{aa}^{(c)}$ - uwzględnia zjawisko zbliżenia osłona $a$ – osłona $c$.

Dla pozostałych osłon

$$\mathcal{Z}_{bb} = \mathcal{Z}_{bb}^{(b)} + \mathcal{Z}_{bb}^{(a)} + \mathcal{Z}_{bb}^{(c)}, \tag{4.176}$$

$$\mathcal{Z}_{cc} = \mathcal{Z}_{cc}^{(c)} + \mathcal{Z}_{cc}^{(a)} + \mathcal{Z}_{cc}^{(b)}. \tag{4.177}$$

## 4.7. Analityczno-numeryczne obliczanie impedancji układu $N_c$ przewodów równoległych

Dla układu $N_c$ przewodów równoległych układ równań (2.18) można zapisać w postaci:

$$\frac{I_{lt}}{\gamma_l S_{lt}} + \frac{j\omega\mu_0}{2\pi}\sum_{p=1}^{N_c}\sum_{s=1}^{N_d}\frac{I_{ps}}{S_{ps}}F_{ps}(X_{lt}) = \mathcal{U}_l , \tag{4.178}$$

gdzie: $I_{lt}$ - zespolone natężenie prądu w elemencie $S_{lt}$ ,

$I_{ps}$ - zespolone natężenie prądu w elemencie $S_{ps}$ .



Funkcję kształtu $F_{ps}(X)$ wyznaczono w p.3.3.2; dla podziału $S$ na trójkąty $S_{lt}$ staje się $\Delta_{lt}$ , zaś $S_{ps}$ staje się $\Delta_{ps}$ .

Jeżeli do równania (4.178) wprowadzi się macierz impedancji $\left[\mathcal{Z}_{lp}^{ts}\right]$, to można je zapisać w następującej formie:

$$\sum_{p=1}^{N_c}\sum_{s=1}^{N_d}\mathcal{Z}_{lp}^{ts} I_{ps} = \mathcal{U}_l . \tag{4.179}$$

Macierz

$$\left[\mathcal{Z}_{lp}^{ts}\right] = \left[\mathcal{Z}_{mn}\right]_{N_d N_c \times N_d N_c}, \tag{4.180}$$

gdzie: $m = (l-1)N_d + t$,

$n = (p-1)N_d + s$,

$p, l = 1, 2, ..., N_c$,

$t, s = 1, 2, ..., N_d$.

Elementy zespolone $\mathcal{Z}_{mn}$ macierzy $\left[\mathcal{Z}_{mn}\right]$ oblicza się następująco:

$$\mathcal{Z}_{mn} = \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma_l S_{lt}} + \dfrac{j\omega\mu_0}{2\pi S_{ps}}F_{ps}(X_{lt}), & \text{dla } m = n \\ \dfrac{j\omega\mu_0}{2\pi S_{ps}}F_{ps}(X_{lt}), & \text{dla } m \neq n. \end{cases} \tag{4.181}$$

Impedancja $\mathcal{Z}_{mn}$ jest więc impedancją wzajemną między dwoma obszarami elementarnymi; gdy $m = n$, to staje się ona impedancją własną $n$-tego elementu.

Z równania (4.179) otrzymuje się zespolony prąd

$$I_{lt} = \sum_{p=1}^{N_c}\sum_{s=1}^{N_d}\mathrm{Y}_{lp}^{ts}\mathcal{U}_p , \tag{4.182}$$

gdzie $Y_{lp}^{ts}$ są elementami macierzy admitancji

$$\left[\mathcal{Y}_{lp}^{ts}\right] = \left[\mathcal{Z}_{lp}^{ts}\right]^{-1} \tag{4.183}$$

lub też

$$\left[\mathcal{Y}_{lp}^{ts}\right] = \left[\mathcal{Y}_{mn}\right]_{N_d N_c \times N_d N_c} = \left[\mathcal{Z}_{mn}\right]^{-1}. \tag{4.183a}$$

Gęstość prądu

$$J_{lt} = \frac{I_{lt}}{S_{lt}} = \frac{1}{S_{lt}} \sum_{p=1}^{N_c} \sum_{s=1}^{N_d} Y_{lp}^{ts} \mathcal{U}_p \,. \tag{4.184}$$

Całkowity prąd w $l$-tym przewodzie

$$I_l = \sum_{t=1}^{N_d} I_{lt} = \sum_{p=1}^{N_c} \left[ \sum_{t=1}^{N_d} \sum_{s=1}^{N_d} \mathcal{Y}_{lp}^{ts} \right] \mathcal{U}_p = \sum_{p=1}^{N_c} \mathcal{Y}_{lp} \mathcal{U}_p \,, \tag{4.185}$$

gdzie $\mathcal{Y}_{lp}$ jest admitancją wzajemną między $l$-tym a $p$-tym przewodem

$$\mathcal{Y}_{lp} = \sum_{t=1}^{N_d} \sum_{s=1}^{N_d} \mathcal{Y}_{lp}^{ts} \tag{4.186}$$

i jest elementem macierzy $\left[\mathcal{Y}_{lp}\right]_{N_c \times N_c}$.

Z równania (4.185) otrzymuje się spadek napięcia w $l$-tym przewodzie

$$\mathcal{U}_l = \sum_{p=1}^{N_c} \mathcal{Z}_{lp} I_p \,, \tag{4.187}$$

gdzie impedancja wzajemna między $l$-tym a $p$-tym przewodem $\mathcal{Z}_{lp}$ jest elementem macierzy

$$\left[\mathcal{Z}_{lp}\right]_{N_c \times N_c} = \left[\mathcal{Y}_{lp}\right]^{-1}_{N_c \times N_c} \,. \tag{4.188}$$

Jednostkowa impedancja $\mathcal{Z}_{lp}$ dla $l = p$ jest impedancją własną $l$-tego przewodu; dla $l \neq p$ jest ona impedancją wzajemną między $l$-tym a $p$-tym przewodem.

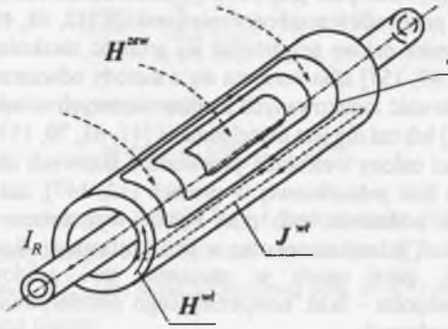
Dla przewodu odosobnionego układ równań (2.12) zapisuje się następująco:

$$\frac{I_t}{\gamma S_t} + \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \sum_{s=1}^{N_d} \frac{I_s}{S_s} F_s(X) = \mathcal{U} \,. \tag{4.189}$$

Postępując analogicznie jak w przypadku układu $N_c$ przewodów, biorąc $N_c = 1$, wyznacza się impedancję własną $\mathcal{Z}_{ll}$ przewodu odosobnionego.

# 5. POLE MAGNETYCZNE W OTOCZENIU OSŁONIĘTYCH TORÓW PRĄDOWYCH

W każdej z osłon trójfazowego, osłoniętego toru prądowego z rys.1.5 indukują się prądy wirowe wywołane przemiennym polem magnetycznym $H^{wl}$ własnego prądu fazowego oraz przemiennym polem magnetycznym $H^{zew}$ prądów faz sąsiednich [78, 157, 185, 187] - rys.5.1.




Rys.5.1. Prądy wirowe indukowane w osłonie rurowej

Fig.5.1. Eddy currents induced in the tubular enclosure

Gęstość prądów wirowych $J^{wl}$ indukowanych przez pole magnetyczne $H^{wl}$ jest z kolei źródłem pola magnetycznego przeciwnego (zgodnie z regułą Lenza) do $H^{wl}$, ale zamykającego się tylko w samym ekranie - we wnętrzu i na zewnątrz osłony pole to jest równe zeru.

Gęstość prądów wirowych $J^{zew}$ indukowanych przez zewnętrzne pole magnetyczne $H^{zew}$ jest z kolei źródłem pola magnetycznego $H^{oz}$ oddziaływania zwrotnego prądów wirowych.

Pole magnetyczne $H^{wl}$ w obszarze zewnętrznym osłony nie jest tłumione przez osłonę, gdyż dla przewodu fazowego własnej fazy stanowi ona ekran otwarty [185, 187].

Zatem pole magnetyczne $H^{zew}$ zewnętrzne względem rozpatrywanej osłony jest polem wytworzonym przez fazy sąsiednie, tzn. przez prądy przewodów fazowych, prądy powrotne w osłonach i prądy wirowe typu $J^{zew}$ osłon (pomija się prądy wirowe w przewodach fazowych).

Całkowite pole magnetyczne w otoczeniu rozpatrywanej osłony jest więc sumą pola $H^{zew}$ wytworzonego przez przewody i osłony faz sąsiednich, pola $H^{wl}$ prądu własnego i pola $H^{oz}$ oddziaływania zwrotnego prądów wirowych indukowanych w osłonie rozpatrywanej fazy.

## 5.1. Analityczne wyznaczanie pola magnetycznego

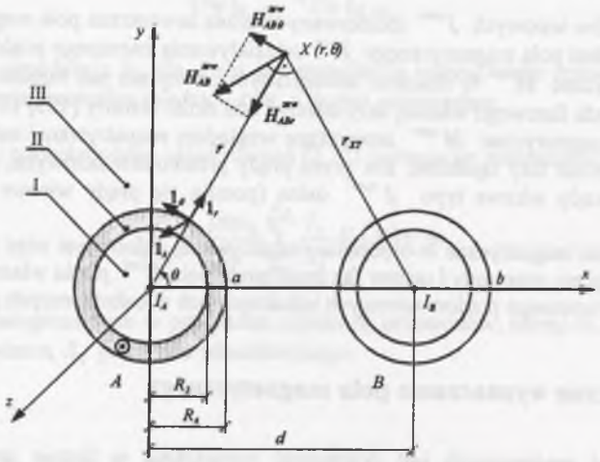
Zaletą metod analitycznych jest dostępność rozwiązania w formie jawnej w funkcji parametrów analizowanego układu. W dostępnej literaturze dotyczą one przede wszystkim obliczania rozkładu prądów wirowych indukowanych w osłonach [12, 28, 68, 122, 157, 185,

187], by następnie obliczać straty mocy i oddziaływanie elektrodynamiczne. Metody te polegają na analitycznym rozwiązaniu równań różniczkowych z wykorzystaniem magnetycznego potencjału wektorowego lub bezpośrednio natężenia pola magnetycznego, lub elektrycznego. Zazwyczaj dla jednej z tych wielkości otrzymuje się równanie Helmholtza w środowisku przewodzącym oraz równanie Laplace'a w powietrzu. Równanie to rozwiązuje się metodą rozdzielenia zmiennych Fouriera stosując przy tym szereg założeń upraszczających. Często przyjmuje się, że zewnętrzne pole magnetyczne $\boldsymbol{H}^{zew}$ jest polem równomiernym [78, 185, 187], przez co pomija się w rozwiązaniu ogólnym wyższe wyrazy nieskończonego szeregu Fouriera. Zakłada się również, że rozkład prądu w przewodach fazowych nie podlega wpływowi pola przewodów i osłon sąsiednich i jest dany zwykle jako prąd skupiony w postaci przewodów nieskończenie cienkich [12, 48, 49, 53, 66, 92, 157, 177, 178]. Idealizuje się również osłonę przyjmując jej grubość nieskończenie wielką [51] lub nieskończenie małą [48, 67, 157] albo korzysta się z metody odwzorowań prądów wirowych [185, 191]. Nierównomierność indukowanych prądów wirowych w osłonie jest uwzględniana [12, 53, 81, 84, 177, 178] lub też nie jest uwzględniana [41, 63, 70, 157, 163, 181].

Dla dowolnej grubości osłony i cienkich przewodów fazowych obliczono prądy wirowe indukowane w osłonach linii jednofazowej w pracach [12, 147], zaś w linii trójfazowej w pracach [142, 148]. Na podstawie tych prac będzie wyznaczone pole magnetyczne w otoczeniu ekranowanej linii jednofazowej oraz w linii trójfazowej. Rozważania ogranicza się do osłon izolowanych, gdyż wtedy w otoczeniu toru prądowego natężenie pola magnetycznego jest największe - brak kompensującego oddziaływania pola wytworzonego przez prądy powrotne w osłonach.

### 5.1.1. Pole magnetyczne w otoczeniu jednobiegunowego, jednofazowego osłoniętego toru prądowego

Rozważany tor prądowy przedstawiono na rys.5.2.




Rys.5.2. Jednobiegunowy, osłonięty, jednofazowy tor prądowy

Fig.5.2. Single-phase isolated-phase busduct



Zakłada się, że przewód fazowy fazy $B$ jest nieskończenie cienki. Wektorowy potencjał magnetyczny wytworzony przez prąd $I_B$ wyznaczono w p. 3.2 - wzór (3.22). Wtedy z definicji potencjału $A$ oblicza się składowe natężenia pola magnetycznego $\boldsymbol{H}_{AB}^{zew}$ w otoczeniu osłony „$a$" fazy „$A$":

$$H_{ABr}^{zew} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_B}{2\pi\, r} \left(\frac{r}{d}\right)^n \sin n\theta \tag{5.1}$$

oraz

$$H_{AB\theta}^{zew} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_B}{2\pi r} \left(\frac{r}{d}\right)^n \cos n\theta \,. \tag{5.1a}$$

Wówczas natężenie pola magnetycznego

$$\boldsymbol{H}_{AB}^{zew} = \mathbf{1}_r H_{ABr}^{zew} + \mathbf{1}_\theta H_{AB\theta}^{zew} \,. \tag{5.1b}$$

To pole magnetyczne indukuje w osłonie fazy $A$ prądy wirowe, które z kolei w obszarze $III$ są źródłem pola magnetycznego oddziaływania zwrotnego $\boldsymbol{H}_A^{oz}$. Zatem dla $r \geq R_4$ pole magnetyczne wypadkowe $\boldsymbol{H}_{Aw}^{III}$ jest sumą wektorową pola $\boldsymbol{H}_{AB}^{zew}$ i pola magnetycznego $\boldsymbol{H}_A^{oz}$ oddziaływania zwrotnego osłony

$$\boldsymbol{H}_{Aw}^{III} = \boldsymbol{H}_{AB}^{zew} + \boldsymbol{H}_A^{oz} \,. \tag{5.2}$$

Natężenie pola elektrycznego $\boldsymbol{E}_A^{oz}$ oddziaływania zwrotnego osłony w obszarze $III$ ma tylko jedną składową wzdłuż osi $Oz$ i spełnia skalarne równanie Laplace'a

$$\nabla^2 E_A^{oz}(r,\theta) = 0 \,. \tag{5.3}$$

Stosując metodę rozdzielenia zmiennych poszukuje się rozwiązania równania (5.3) w postaci

$$E_A^{oz}(r,\theta) = f_1(r)\, f_2(\theta) \,, \tag{5.3a}$$

gdzie:

$$f_1(r) = C_1 r^{\beta} + C_2 r^{-\beta} \tag{5.3b}$$

oraz

$$f_2(\theta) = C_3 \cos\beta\theta + C_4 \sin\beta\theta \,, \tag{5.3c}$$

gdzie $\beta$ jest stałą rozdzielenia zmiennych, zaś $C_1$, $C_2$, $C_3$ i $C_4$ są dowolnymi stałymi.

Ze względu na to, że natężenie pola elektrycznego jest ograniczone, należy przyjąć, że $C_1 = 0$.

Z warunków zagadnienia (rys.5.2) wynika ponadto, że przy zmianie kąta z $+\theta$ na $-\theta$ natężenie pola elektrycznego nie może zmieniać znaku, więc stała $C_4 = 0$. Stała $\beta$ musi być

liczbą całkowitą, gdyż spośród rozwiązań (5.3c) należy wybrać takie, które spełniają warunek $f_2(\theta) = f_2(\theta + 2\pi)$.

Ogólne rozwiązanie równania (5.3) spełniające powyższe zależności można uzyskać tworząc superpozycję rozwiązań elementarnych typu (5.3a)

$$E_A^{\alpha}(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{1}{r^n} \cos n\theta \,. \tag{5.3d}$$

Stałe $B_n$ należy wyznaczyć z warunków brzegowych, co będzie wykonane w dalszej kolejności.

Wykorzystując drugie równanie Maxwella do rozwiązania (5.3d) uzyskuje się wektor natężenia pola magnetycznego oddziaływania zwrotnego osłony

$$\boldsymbol{H}_A^{\alpha} = \mathbf{1}_r H_{Ar}^{\alpha} + \mathbf{1}_\theta H_{A\theta}^{\alpha}, \tag{5.4}$$

gdzie

$$H_{Ar}^{\alpha} = \frac{nB_n}{\mathrm{j}\omega\mu_0 r^{n+1}} \sin\theta \tag{5.4a}$$

oraz

$$H_{A\theta}^{\alpha} = -\frac{nB_n}{\mathrm{j}\omega\mu_0 r^{n+1}} \cos\theta \,. \tag{5.4b}$$

Podstawiając (5.1b) i (5.4b) do wzoru (5.2) otrzymuje się natężenie wypadkowego pola magnetycznego dla $r \geq R_4$

$$\boldsymbol{H}_{Aw}^{III} = -\mathbf{1}_r \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{I_B}{2\pi r} \left( \frac{r}{d} \right)^n - \frac{nB_n}{\mathrm{j}\omega\mu_0 r^{n+1}} \right] \sin n\theta -$$
$$- \mathbf{1}_\theta \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{I_B}{2\pi r} \left( \frac{r}{d} \right)^n + \frac{nB_n}{\mathrm{j}\omega\mu_0 r^{n+1}} \right] \cos n\theta \,. \tag{5.5}$$

W obszarze $II$ ($R_3 \leq r \leq R_4$) gęstość prądów wirowych $J_{aB}$ spełnia skalarne równanie Helmholtza [90, 185]

$$\nabla^2 J_{aB}(r,\theta) = \mathrm{j} m^2 J_{aB}(r,\theta) \,. \tag{5.6}$$

Stosując metodę rozdzielenia zmiennych poszukuje się rozwiązania równania (5.6) w postaci:

$$J_{aB}(r,\theta) = f_3(r) f_4(\theta) \,. \tag{5.6a}$$



W rozwiązaniu uzyskuje się:

$$f_3(r) = C_5 \mathcal{J}_\beta\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, mr\right) + C_6 \mathcal{K}_\beta\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, mr\right) \tag{5.6b}$$

oraz

$$f_4(\theta) = C_7 \sin\beta\theta + C_8 \cos\beta\theta \,. \tag{5.6c}$$

Z tego samego powodu co w wyrażeniu (5.3c) również we wzorze (5.6c) stała $C_7 = 0$ oraz $\beta$ jest liczbą naturalną. Rozwiązanie równania (5.6) przyjmuje więc postać:

$$J_{aB}(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ C_n \mathcal{J}_n\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, mr\right) + D_n \mathcal{K}_n\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, mr\right) \right] \cos n\theta \,. \tag{5.6d}$$

Wykorzystując drugie równanie Maxwella ze wzoru (5.6d) uzyskuje się natężenie pola magnetycznego $\boldsymbol{H}_{aB}^{II}$ w osłonie

$$\boldsymbol{H}_{aB}^{II} = \mathbf{1}_r \frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0 r} \sum_{n=1}^{\infty} n \left[ C_n \mathcal{J}_n\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, mr\right) + D_n \mathcal{K}_n\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, mr\right) \right] \sin n\theta +$$
$$+ \mathbf{1}_\theta \frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0 r} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_n \left[ -n\mathcal{J}_n\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, mr\right) + \sqrt{-\mathrm{j}}\, mr \mathcal{J}_{n-1}\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, mr\right) \right] + \right.$$
$$\left. + D_n \left[ -n\mathcal{K}_n\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, mr\right) - \sqrt{-\mathrm{j}}\, mr \mathcal{K}_{n-1}\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, mr\right) \right] \right\} \cos n\theta \,. \tag{5.7}$$

W obszarze $I$ ($r \leq R_3$) natężenie pola elektrycznego $\boldsymbol{E}_{AB}^{I}$ ma tylko jedną składową wzdłuż osi $Oz$ i spełnia równanie Laplace'a typu (5.3), a więc rozwiązanie elementarne ma postać:

$$E_{AB}^{I}(r,\theta) = \left(C_9 r^{\beta} + C_{10} r^{-\beta}\right)\left(C_{11} \cos\beta\theta + C_{12} \sin\beta\theta\right) \,. \tag{5.8}$$

Dla $r = 0$ natężenie pola elektrycznego musi być skończone, więc stała $C_{10} = 0$. Stała $C_{12} = 0$ z tego samego powodu co w wyrażeniu (5.3c), natomiast $\beta$ jest liczbą naturalną. Wobec powyższego wzór (5.8) przyjmuje postać:

$$E_{AB}^{I}(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n r^n \cos n\theta \,. \tag{5.8a}$$

Stosując drugie równanie Maxwella do wzoru (5.8a) otrzymuje się wzór na natężenie pola magnetycznego we wnętrzu osłony

$$\boldsymbol{H}_{AB}^{I} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nF_n r^{n-1}}{\mathrm{j}\omega\mu} \left[ \mathbf{1}_r \sin n\theta + \mathbf{1}_\theta \cos n\theta \right] \,. \tag{5.9}$$

Stałe $B_n$, $C_n$, $D_n$ i $F_n$ wyznacza się z następujących warunków brzegowych ($\mu^I = \mu^{II} = \mu^{III} = \mu_0$):

- dla $r = R_4$

$$\boldsymbol{H}_{Aw}^{III}(R_4,\theta) = \boldsymbol{H}_{aB}^{II}(R_4,\theta)\,, \tag{5.10}$$

- dla $r = R_3$

$$\boldsymbol{H}_{aB}^{II}(R_3,\theta) = \boldsymbol{H}_{AB}^{I}(R_3,\theta)\,. \tag{5.10a}$$

Na podstawie przedstawionego układu równań wyznacza się między innymi stałą

$$B_n = \frac{\mathrm{j} I_B \omega \mu_0}{2\pi m R_4} \cdot \frac{R_4^n}{n}\left(\frac{R_4}{d}\right)^n \left(mR_4 + 2n\sqrt{\mathrm{j}}\, f_n(r)\right), \tag{5.10b}$$

gdzie

$$f_n = \frac{\mathcal{K}_{n+1}\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, mR_3\right)\mathcal{J}_n\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, mR_4\right) - \mathrm{j}\mathcal{J}_{n+1}\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, mR_3\right)\mathcal{K}_n\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, mR_4\right)}{\mathcal{J}_{n-1}\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, mR_4\right)\mathcal{K}_{n+1}\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, mR_3\right) + \mathcal{J}_{n+1}\left(\sqrt{-\mathrm{j}}\, mR_3\right)\mathcal{K}_{n-1}\left(\sqrt{\mathrm{j}}\, mR_4\right)}\,. \tag{5.10c}$$

Podstawiając wzór (5.10b) do (5.5) otrzymuje się wypadkowe natężenia pola magnetycznego

$$\boldsymbol{H}_{Aw}^{III} = -\boldsymbol{1}_r \frac{I_B}{2\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{r}{d}\right)^n - \frac{1}{mR_4}\left(\frac{R_4}{r}\right)^n\left(\frac{R_4}{d}\right)^n\left(mR_4 + 2n\sqrt{\mathrm{j}}\, f_n\right)\right]\sin n\theta -$$

$$-\boldsymbol{1}_\theta \frac{I_B}{2\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{r}{d}\right)^n + \frac{1}{mR_4}\left(\frac{R_4}{r}\right)^n\left(\frac{R_4}{d}\right)^n\left(mR_4 + 2n\sqrt{\mathrm{j}}\, f_n\right)\right]\cos n\theta\,. \tag{5.11}$$

Całkowite natężenie pola magnetycznego w punkcie $X(r, \theta)$ otoczenia zewnętrznego ($r \geq R_4$) rozpatrywanej osłony

$$\boldsymbol{H}_A^{III}(r,\theta) = \boldsymbol{H}_{Aw}^{III}(r,\theta) + \boldsymbol{H}_{AA}^{III}(r,\theta)\,, \tag{5.12}$$

gdzie $\boldsymbol{H}_{AA}^{III}(r,\theta)$ jest natężeniem pola magnetycznego własnego prądu fazowego $I_A$ i wynosi

$$\boldsymbol{H}_{AA}^{III}(r,\theta) = \boldsymbol{1}_\theta H_{AA\theta}^{III}(r), \tag{5.13}$$

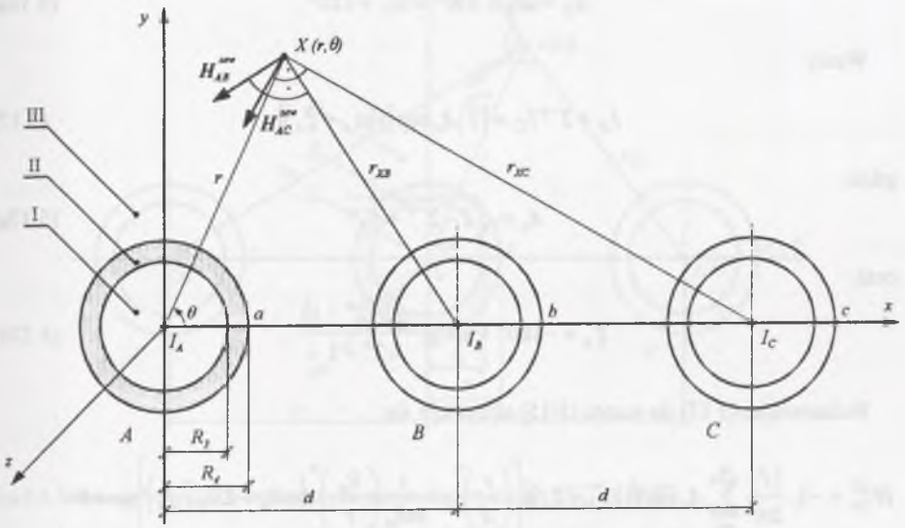
gdzie

$$H_{AA\theta}^{III}(r) = \frac{I_A}{2\pi r}\,. \tag{5.13a}$$



### 5.1.2. Pole magnetyczne w otoczeniu fazy *A*

Dla jednobiegunowego, płaskiego, z izolowanymi osłonami, trójfazowego toru prądowego zewnętrzne pole magnetyczne w otoczeniu osłony „*a*" fazy „*A*" wytworzone jest przez prądy fazowe $I_B$ i $I_C$ - rys.5.3.




Rys.5.3. Osłona „*a*" fazy „*A*" w zewnętrznych polach magnetycznych $\boldsymbol{H}_{AB}^{zew}$ i $\boldsymbol{H}_{AC}^{zew}$

Fig.5.3. Enclosure „*a*" of the phase „*A*" in externale magnetic fields $\boldsymbol{H}_{AB}^{zew}$ and $\boldsymbol{H}_{AC}^{zew}$

W układzie z rys.5.3 odległości

$$r_{XB}^2 = r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta \tag{5.14}$$

oraz

$$r_{XC}^2 = r^2 + 4d^2 - 4rd\cos\theta\,. \tag{5.14a}$$

Wyznaczając dla powyższych odległości wektorowy potencjał magnetyczny zgodnie z p.3.2, a następnie postępując tak jak w p.5.1.1, wyznacza się wypadkowe natężenie pola magnetycznego

$$\boldsymbol{H}_{Aw}^{III} = -\boldsymbol{1}_r \frac{1}{2\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\left(I_B + 2^{-n} I_C\right)\left[\left(\frac{r}{d}\right)^n - \frac{1}{mR_4}\left(\frac{R_4}{r}\right)^n\left(mR_4 + 2n\sqrt{\mathrm{j}}\, f_n\right)\right]\sin n\theta -$$

$$-\boldsymbol{1}_\theta \frac{1}{2\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\left(I_B + 2^{-n} I_C\right)\left[\left(\frac{r}{d}\right)^n + \frac{1}{mR_4}\left(\frac{R_4}{r}\right)^n\left(mR_4 + 2n\sqrt{\mathrm{j}}\, f_n\right)\right]\cos n\theta\,. \tag{5.15}$$

Dla zasilania symetrycznego moduły prądów fazowych

$$|I_A| = |I_B| = |I_C| = |I| \tag{5.16}$$

oraz między ich fazami początkowymi zachodzi związek:

$$\alpha_B = \alpha_A + 240^0 = \alpha_C + 120^0 \,. \tag{5.16a}$$

Wtedy

$$I_B + 2^{-n} I_C = |I| A_n \exp\left[\mathrm{j}\left(\alpha_A + \xi_n\right)\right], \tag{5.17}$$

gdzie

$$A_n = \sqrt{1 - 2^{-n} + 4^{-n}} \tag{5.17a}$$

oraz

$$\xi_n = -180^0 + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\left(2^n - 1\right)}{2^n + 1} \,. \tag{5.17b}$$

Podstawiając (5.17) do wzoru (5.15) otrzymuje się:

$$\boldsymbol{H}_{Aw}^{III} = -\mathbf{1}_r \frac{|I|}{2\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left[\mathrm{j}\left(\alpha_A + \xi_n\right)\right] \left[\left(\frac{r}{d}\right)^n - \frac{1}{mR_4}\left(\frac{R_4}{r}\right)^n \left(mR_4 + 2n\sqrt{\mathrm{j}}\, f_n\right)\right] \sin n\theta -$$

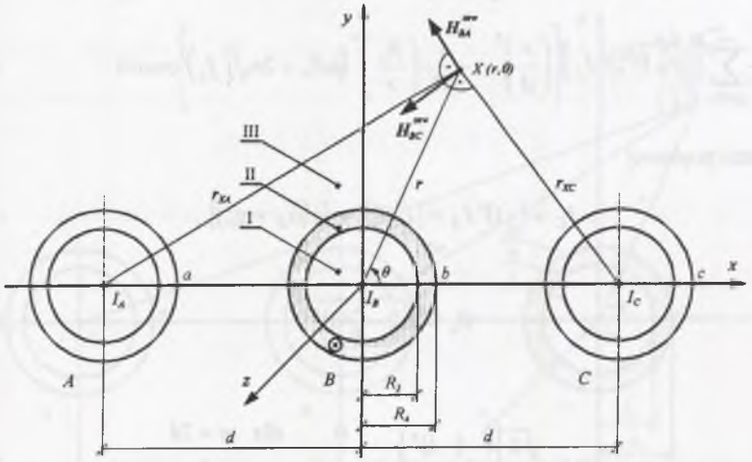
$$-\mathbf{1}_\theta \frac{|I|}{2\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left[\mathrm{j}\left(\alpha_A + \xi_n\right)\right] \left[\left(\frac{r}{d}\right)^n + \frac{1}{mR_4}\left(\frac{R_4}{r}\right)^n \left(mR_4 + 2n\sqrt{\mathrm{j}}\, f_n\right)\right] \cos n\theta \,. \tag{5.18}$$

Całkowite natężenie pola magnetycznego w punkcie $X(r, \theta)$ otoczenia zewnętrznego ($r \geq R_4$) osłony „a" fazy „A" jest sumą wektorową wektora $\boldsymbol{H}_{Aw}^{III}$ - wzór (5.18) i wektora natężenia pola magnetycznego własnego prądu fazowego $I_A$ - wzory (5.13) i (5.13a).



### 5.1.3. Pole magnetyczne w otoczeniu fazy *B*

Zewnętrzne pole magnetyczne w otoczeniu osłony „*b*" fazy „*B*" wytworzone jest przez prądy fazowe $I_A$ i $I_C$ - rys.5.4.




Rys.5.4. Osłona „*b*" fazy „*B*" w zewnętrznych polach magnetycznych $\boldsymbol{H}_{BA}^{zew}$ i $\boldsymbol{H}_{BC}^{zew}$

Fig.5.4. Enclosure „*b*" of the phase „*B*" in externale magnetic fields $\boldsymbol{H}_{BA}^{zew}$ and $\boldsymbol{H}_{BC}^{zew}$

W układzie z rys.5.4 odległości

$$r_{XA}^2 = r^2 + d^2 + 2rd\cos\theta \tag{5.19}$$

oraz

$$r_{XC}^2 = r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta \,. \tag{5.19a}$$

Dla (5.19) otrzymuje się w rozwinięciu w szereg Fouriera funkcji

$$\ln\frac{r_{XA}}{d} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{r}{d}\right)^n \cos n\theta \,. \tag{5.20}$$

Wtedy wektorowy potencjał magnetyczny wytworzony przez prąd $I_A$

$$A_A(r,\theta) = -\frac{\mu_0 I_A}{2\pi}\left[\ln d - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{r}{d}\right)^2\right] \cos n\theta \,. \tag{5.21}$$

Następnie, postępując tak jak w p.5.1.1 i p.5.1.2, otrzymuje się wypadkowe natężenie pola magnetycznego

$$\boldsymbol{H}_{Bw}^{III} = -\mathbf{1}_r \frac{1}{2\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\left[I_C + (-1)^n I_A\right]\left[\left(\frac{r}{d}\right)^n - \frac{1}{mR_4}\left(\frac{R_4}{r}\right)^n\left(mR_4 + 2n\sqrt{\mathrm{j}}\, f_n\right)\right]\sin n\theta -$$

$$-\mathbf{1}_\theta \frac{1}{2\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\left[I_C + (-1)^n I_A\right]\left[\left(\frac{r}{d}\right)^n + \frac{1}{mR_4}\left(\frac{R_4}{r}\right)^n\left(mR_4 + 2n\sqrt{\mathrm{j}}\, f_n\right)\right]\cos n\theta \quad (5.22)$$

Dla symetrii prądowej

$$I_C + (-1)^n I_A = |I| B_n \exp\left[\mathrm{j}\left(\alpha_B + \eta_n\right)\right], \quad (5.23)$$

gdzie

$$B_n = \sqrt{2 - (-1)^n} \quad (5.23a)$$

oraz

$$\eta_n = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}\left[1-(-1)^n\right]}{1+(-1)^n} = \begin{cases} 0 & dla \quad n = 2k \\ -\dfrac{\pi}{2} & dla \quad n = 2k+1. \end{cases} \quad (5.23b)$$

Podstawiając (5.23) do (5.22) otrzymuje się:

$$\boldsymbol{H}_{Bw}^{III} = -\mathbf{1}_r \frac{|I|}{2\pi r}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp\left[\mathrm{j}\left(\alpha_B + \eta_n\right)\right]\left[\left(\frac{r}{d}\right)^n - \frac{1}{mR_4}\left(\frac{R_4}{r}\right)^n\left(mR_4 + 2n\sqrt{\mathrm{j}}\, f_n\right)\right]\sin n\theta -$$

$$-\mathbf{1}_r \frac{|I|}{2\pi r}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp\left[\mathrm{j}\left(\alpha_B + \eta_n\right)\right]\left[\left(\frac{r}{d}\right)^n - \frac{1}{mR_4}\left(\frac{R_4}{r}\right)^n\left(mR_4 + 2n\sqrt{\mathrm{j}}\, f_n\right)\right]\cos n\theta \quad (5.24)$$

Całkowite natężenie pola magnetycznego w punkcie $X(r, \theta)$ otoczenia zewnętrznego ($r \geq R_4$) osłony „$b$" fazy „$B$" jest sumą wektorową

$$\boldsymbol{H}_B^{III}(r,\theta) = \boldsymbol{H}_{Bw}^{III}(r,\theta) + \boldsymbol{H}_{BB}^{III}(r,\theta), \quad (5.25)$$

gdzie $\boldsymbol{H}_{BB}^{III}(r,\theta)$ jest natężeniem pola magnetycznego własnego prądu fazowego $I_B$ i wynosi

$$\boldsymbol{H}_{BB}^{III}(r,\theta) = \mathbf{1}_\theta H_{BB\theta}^{III}(r), \quad (5.26)$$

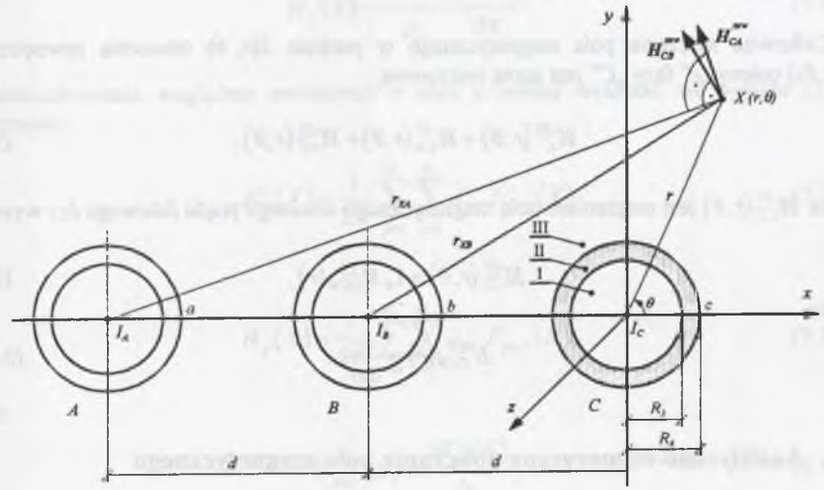
gdzie

$$H_{BB\theta}^{III}(r) = \frac{I_B}{2\pi r}. \quad (5.26a)$$



### 5.1.4. Pole magnetyczne w otoczeniu fazy *C*

Zewnętrzne pole magnetyczne w otoczeniu osłony „$c$" fazy „$C$" wytworzone jest przez prądy fazowe $I_A$ i $I_B$ - rys.5.5.




Rys.5.5. Osłona „$c$" fazy „$C$" w zewnętrznych polach magnetycznych $\boldsymbol{H}_{CA}^{zew}$ i $\boldsymbol{H}_{CB}^{zew}$

Fig.5.5 Enclosure „$c$" of the phase „$C$" in externale magnetic fields $\boldsymbol{H}_{CA}^{zew}$ and $\boldsymbol{H}_{CB}^{zew}$

W układzie z rys.5.5 odległości

$$r_{XA}^2 = r^2 + 4d^2 + 4rd\cos\theta \quad (5.27)$$

oraz

$$r_{XB}^2 = r^2 + d^2 + 2rd\cos\theta. \quad (5.27a)$$

Postępując analogicznie jak w punktach poprzednich otrzymuje się wypadkowe natężenie pola magnetycznego $\boldsymbol{H}_{Cw}^{III}$ w otoczeniu osłony „$c$".

$$\boldsymbol{H}_{Cw}^{III} = -\mathbf{1}_r \frac{1}{2\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\left[I_B + 2^{-n} I_A\right]\left[\left(\frac{r}{d}\right)^n - \frac{1}{mR_4}\left(\frac{R_4}{r}\right)^n\left(mR_4 + 2n\sqrt{\mathrm{j}}\, f_n\right)\right]\sin n\theta -$$

$$-\mathbf{1}_\theta \frac{1}{2\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\left[I_B + 2^{-n} I_A\right]\left[\left(\frac{r}{d}\right)^n + \frac{1}{mR_4}\left(\frac{R_4}{r}\right)^n\left(mR_4 + 2n\sqrt{\mathrm{j}}\, f_n\right)\right]\cos n\theta. \quad (5.28)$$

Dla symetrii prądowej

$$I_B + 2^{-n} I_A = |I| A_n \exp\left[j\left(\alpha_C - \xi_n\right)\right], \tag{5.29}$$

gdzie $A_n$ dane jest wzorem (5.17a), zaś $\xi_n$ wzorem (5.17b).

Całkowite natężenie pola magnetycznego w punkcie $X(r, \theta)$ otoczenia zewnętrznego ($r \geq R_4$) osłony „$c$" fazy „$C$" jest sumą wektorową

$$\boldsymbol{H}_C^{III}(r,\theta) = \boldsymbol{H}_{Cw}^{III}(r,\theta) + \boldsymbol{H}_{CC}^{III}(r,\theta), \tag{5.30}$$

gdzie $\boldsymbol{H}_{CC}^{III}(r,\theta)$ jest natężeniem pola magnetycznego własnego prądu fazowego $I_C$ i wynosi

$$\boldsymbol{H}_{CC}^{III}(r,\theta) = \mathbf{1}_\theta H_{CC\theta}^{III}(r), \tag{5.31}$$

gdzie

$$H_{CC\theta}^{III}(r) = \frac{I_C}{2\pi r}. \tag{5.31a}$$

## 5.2. Analityczno-numeryczne obliczanie pola magnetycznego

Dla podziału obszaru przewodzącego na trójkąty wektorowy potencjał magnetyczny po aproksymacji wg wzoru (3.28)

$$A(X) = \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{p=1}^{N_c} \sum_{s=1}^{N_d} J_{ps} F_{ps}(X), \tag{5.32}$$

w którym $F_{ps}(X)$ jest funkcją kształtu daną wzorem (3.67), zaś $J_{ps}$ jest gęstością prądu w elementarnym obszarze trójkątnym $\Delta_{ps}$ i na podstawie punktu 4.6 wynosi:

$$J_{ps} = \frac{1}{\Delta_{ps}} \sum_{l=1}^{N_c} \sum_{t=1}^{N_d} Y_{lp}^{ts} \left( \sum_{r=1}^{N_c} Z_{pr} I_p \right), \tag{5.33}$$

gdzie $r = 1, 2, \ldots, N_c$.

W rozważanym układzie przewodów wektorowy potencjał magnetyczny ma tylko jedną składową wzdłuż osi $Oz$. Wtedy, zgodnie z definicją (2.2), natężenie pola magnetycznego ma dwie składowe: $H_x(x, y)$ wzdłuż osi $Ox$ oraz $H_y(x, y)$ wzdłuż osi $Oy$, czyli wektor

$$\boldsymbol{H}(X) = \mathbf{1}_x H_x(X) + \mathbf{1}_y H_y(X), \tag{5.34}$$



gdzie składowe natężenia pola magnetycznego

$$H_x(X) = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\partial A(X)}{\partial y} \tag{5.34a}$$

oraz

$$H_y(X) = -\frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\partial A(X)}{\partial x}. \tag{5.34b}$$

Różniczkowanie względem zmiennych $x$ oraz $y$ można wykonać we wzorze (5.32) otrzymując:

$$H_x(X) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^{N_c} \sum_{s=1}^{N_d} J_{ps} F_{ps,x}(X) \tag{5.34c}$$

oraz

$$H_y(X) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^{N_c} \sum_{s=1}^{N_d} J_{ps} F_{ps,y}(X), \tag{5.34d}$$

gdzie

$$F_{ps,x}(X) = \frac{\partial F_{ps}(X)}{\partial y}, \tag{5.34e}$$

$$F_{ps,y}(X) = -\frac{\partial F_{ps}(X)}{\partial x}. \tag{5.34f}$$

Funkcje $F_{ps,x}$ oraz $F_{ps,y}$ są zatem funkcjami kształtu obszaru $\Delta_{ps}$ dla odpowiednich składowych natężenia pola magnetycznego. Jeżeli uwzględni się wzór (3.67), to funkcje te można przedstawić następująco:

$$F_{ps,x}(X) = -\Delta_{ps} \left[ \frac{\partial I_3(X)}{\partial y} - \frac{\partial I_4(X)}{\partial y} + \frac{\partial I_6(X)}{\partial y} - \frac{\partial I_7(X)}{\partial y} \right], \tag{5.34g}$$

$$F_{ps,y}(X) = \Delta_{ps} \left[ \frac{\partial I_3(X)}{\partial x} - \frac{\partial I_4(X)}{\partial x} + \frac{\partial I_6(X)}{\partial x} - \frac{\partial I_7(X)}{\partial x} \right]. \tag{5.34h}$$

Funkcje $I_3$, $I_4$, $I_6$ i $I_7$ są odpowiednio całkami (3.67a), (3.67b), (3.67d) i (3.67e), które obliczono w załączniku Z1. Mają one postać analityczną - są przedstawione jako kombinacje funkcji standardowych. Można będzie zatem wykonać analityczne różniczkowanie otrzymując składowe $H_x(X)$ i $H_y(X)$ natężenia pola magnetycznego w dowolnym punkcie $X(x, y) \in R^2$. Rozwiązanie to będzie miało postać analityczną, przedstawioną jako kombinacja funkcji standardowych. Takie przedstawienie analityczne skraca czas obliczeń numerycznych natężenia pola magnetycznego oraz zwiększa ich dokładność.

Przedstawiając za

$$f_{3x}(X)=\frac{\partial I_3(X)}{\partial y}, \tag{5.35}$$

$$f_{3y}(X)=\frac{\partial I_3(X)}{\partial x}, \tag{5.35a}$$

$$f_{4x}(X)=\frac{\partial I_4(X)}{\partial y}, \tag{5.35b}$$

$$f_{4y}(X)=\frac{\partial I_4(X)}{\partial x}, \tag{5.35c}$$

$$f_{6x}(X)=\frac{\partial I_6(X)}{\partial y}, \tag{5.35d}$$

$$f_{6y}(X)=\frac{\partial I_6(X)}{\partial x}, \tag{5.35e}$$

$$f_{7x}(X)=\frac{\partial I_7(X)}{\partial y}, \tag{5.35f}$$

$$f_{7y}(X)=\frac{\partial I_7(X)}{\partial x}, \tag{5.35g}$$

otrzymuje się funkcje kształtu dla składowych natężenia pola magnetycznego w dowolnym punkcie $X(x, y) \in R^2$

$$F_{ps,x}(X)=-\Delta_{ps}\left[f_{3x}(X)-f_{4x}(X)+f_{6x}(X)-f_{7x}(X)\right], \tag{5.36}$$

$$F_{ps,y}(X)=\Delta_{ps}\left[f_{3y}(X)-f_{4y}(X)+f_{6y}(X)-f_{7y}(X)\right]. \tag{5.36a}$$

Funkcje $f_{3x}$, $f_{3y}$, ..., $f_{7y}$, obliczono analitycznie. Przedstawiono je w załączniku Z3.

## 5.3. Eliptyczne pole magnetyczne

Składowe $H_r$ i $H_\theta$ natężenia pola magnetycznego wyznaczone w p.5.1 są liczbami zespolonymi. Również we współrzędnych kartezjańskich składowe:

$$H_x = H_r \cos\theta - H_\theta \sin\theta \tag{5.37}$$

oraz

$$H_y = H_r \sin\theta + H_\theta \cos\theta \tag{5.37a}$$



są liczbami zespolonymi. Te składowe, jak również składowe (5.34c) i (5.34d) można przedstawić w postaci:

$$H_x = |H_x| e^{j\varphi_x}, \tag{5.38}$$

$$H_y = |H_y| e^{j\varphi_y}. \tag{5.38a}$$

Fazy $\varphi_x$ i $\varphi_y$ są funkcjami zmiennych $x$ oraz $y$.

Dla czasu $t$ składowe $h_x(t)$ i $h_y(t)$ natężenia pola magnetycznego

$$h_x(x,y,t) = \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\, H_x e^{j\omega t}\right\} = \sqrt{2}\,|H_x| \cos\left[\omega t + \varphi_x(x,y)\right], \tag{5.39}$$

$$h_y(x,y,t) = \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\, H_y e^{j\omega t}\right\} = \sqrt{2}\,|H_y| \cos\left[\omega t + \varphi_y(x,y)\right]. \tag{5.39a}$$

Wektor $\boldsymbol{h}(x, y, t)$ pola wypadkowego jest funkcją harmoniczną czasu $t$

$$\boldsymbol{h}(x,y,t) = \mathbf{1}_x h_x(x,y,t) + \mathbf{1}_y h_y(x,y,t). \tag{5.40}$$

Dla $X(x, y) \in R^2$ w przypadku ogólnym argumenty

$$\varphi_x(x,y) \neq \varphi_y(x,y). \tag{5.41}$$

Stąd wynika, że dla przebiegów sinusoidalnych wektor $\boldsymbol{h}(x, y, t)$ obraca się; jego amplituda i faza w punkcie $X(x, y)$ są funkcjami czasu $t$. W ciągu jednego okresu $T$ wektor ten zakreśla elipsę.

Aby określić tę elipsę wprowadza się płaszczyznę Gaussa i wtedy wektor $\boldsymbol{h}(x, y, t)$ można przedstawić jako funkcję zespoloną czasu $t$ w punkcie $X(x, y) \in R^2$

$$H(x,y,t) = |H_x| \cos(\omega t + \varphi_x) + j|H_y| \cos(\omega t + \varphi_y). \tag{5.42}$$

Podstawiając za

$$\cos(\omega t + \varphi_x) = \frac{1}{2}\left[e^{j(\omega t+\varphi_x)} + e^{-j(\omega t+\varphi_x)}\right], \tag{5.43}$$

$$\cos(\omega t + \varphi_y) = \frac{1}{2}\left[e^{j(\omega t+\varphi_y)} + e^{-j(\omega t+\varphi_y)}\right] \tag{5.43a}$$

do wzoru (5.42) otrzymuje się:

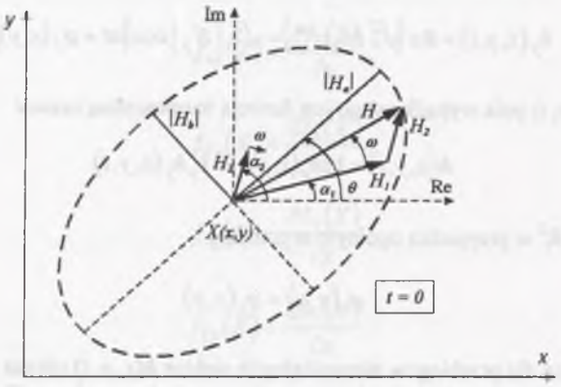
$$H(x,y,t) = H_1(x,y)e^{j\omega t} + H_2(x,y)e^{-j\omega t}, \tag{5.44}$$

gdzie

$$H_1(x,y)=\frac{1}{2}\left(H_x+\mathrm{j}H_y\right)=|H_1(x,y)|e^{\mathrm{j}\alpha_1(x,y)}\,, \tag{5.44a}$$

$$H_2(x,y)=\frac{1}{2}\left(H_x^*+\mathrm{j}H_y^*\right)=|H_2(x,y)|e^{\mathrm{j}\alpha_2(x,y)}\,. \tag{5.44b}$$

Ze wzorów (5.44a) i (5.44b) wynika, że natężenie pola magnetycznego w punkcie $X(x, y)$ można przedstawić jako superpozycję dwóch pól wirujących w przeciwnych kierunkach - wypadkowa opisuje elipsę (rys.5.6).




Rys.5.6. Eliptyczne pole magnetyczne dla $t = 0$

Fig.5.6. Eliptic representation of the magnetic field for $t = 0$

Ze wzorów (5.44a) i (5.44b) oraz z rys.5.6 oblicza się długość osi elipsy pola magnetycznego

$$|H_a|=\max_{t\in[0,T]}|H(x,y,t)|=|H_1(x,y)|+|H_2(x,y)|\,, \tag{5.45}$$

$$|H_b|=\min_{t\in[0,T]}|H(x,y,t)|=|H_1(x,y)|-|H_2(x,y)|\,, \tag{5.45a}$$

jak również kąt nachylenia elipsy

$$\theta(x,y)=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(x,y)+\alpha_2(x,y)\right]. \tag{5.45b}$$



Jeżeli elipsa pola magnetycznego w danej chwili $t$ jest wyznaczona, tzn. dane są $|H_a|$, $|H_b|$ oraz kąt $\theta(x, y)$, to można również wyznaczyć w tej chwili składowe natężenia pola magnetycznego[14, 58]:

$$|H_x|=\sqrt{\left(|H_a|\cos\theta\right)^2+\left(|H_b|\sin\theta\right)^2}\,, \tag{5.46}$$

$$|H_y|=\sqrt{\left(|H_a|\sin\theta\right)^2+\left(|H_b|\cos\theta\right)^2} \tag{5.46a}$$

oraz ich kąty fazowe ze związków:

$$\mathrm{tg}\,\varphi_x=\frac{|H_b|}{|H_a|}\mathrm{tg}\,\theta\,, \tag{5.46b}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi_y=-\frac{|H_b|}{|H_a|}\mathrm{ctg}\,\theta\,. \tag{5.46c}$$

# 6. POLE MAGNETYCZNE W ŚRODOWISKACH O NIEJEDNORODNOŚCI ELEKTRYCZNEJ I MAGNETYCZNEJ

Trójfazowy, osłonięty tor wielkoprądowy z rys.1.5, w rzeczywistych rozwiązaniach konstrukcyjnych, może być prowadzony w pobliżu konstrukcji stalowych, tj. ferromagnetyków, których względna przenikalność magnetyczna $\mu_r >> 1$. Obecność tych ferromagnetyków w sposób istotny wpływa na wartość pola magnetycznego w otoczeniu toru wielkoprądowego. W niniejszym rozdziale wpływ ten zostanie określony przez wprowadzenie na powierzchni ferromagnetyka liniowej gęstości prądu namagnesowania. Całkowity wektorowy potencjał magnetyczny jest wtedy sumą potencjału generowanego przez prądy przewodzenia i prądy fikcyjne (prądy Ampère'a) na powierzchni ferromagnetyka.

Wektorowy potencjał magnetyczny, pochodzący od gęstości liniowej prądu namagnesowania, można aproksymować funkcją kształtu dla tej gęstości liniowej poprzez założenie stałej gęstości $\tau_n$ na odcinkach $\Gamma_n$, na które zostaje podzielony kontur ferromagnetyka. Ta funkcja kształtu będzie wyznaczona analitycznie.

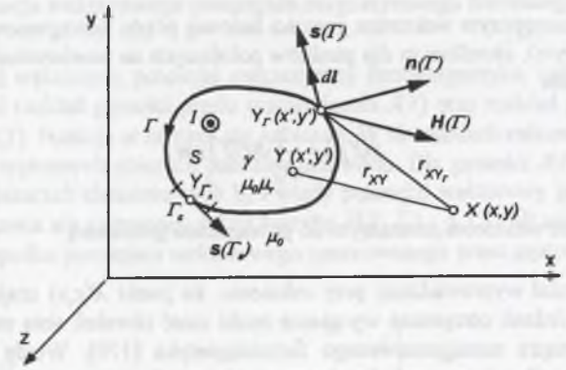
Dla gęstości prądu przewodzenia $J(X)$ oraz gęstości liniowej prądu $\tau(\Gamma)$ na powierzchni ferromagnetyka otrzymuje się równanie całkowe typu (2.11). Z warunku granicznego dotyczącego ciągłości natężenia pola magnetycznego otrzymuje się dodatkowe równanie całkowe Fredholma drugiego rodzaju dla gęstości prądu na powierzchni przewodzącego ferromagnetyka. Przy podziale przekroju poprzecznego ferromagnetyka na trójkąty elementarne $\Delta_s$, zaś jego konturu na odcinki elementarne $\Gamma_n$, z równań tych otrzymuje się układ równań algebraicznych z niewiadomymi gęstościami powierzchniowymi prądów w trójkątach $\Delta_s$ i niewiadomymi gęstościami liniowymi prądów na odcinkach $\Gamma_n$. Po ich wyznaczaniu określa się pole magnetyczne w dowolnym punkcie $X \in \mathrm{R}^2$. Analogicznie postępuje się w przypadku układu równoległego $N_c$ ferromagnetyków.

## 6.1. Potencjał wektorowy ferromagnetyka

Zakłada się, że przez ferromagnetyk z rys.6.1 płynie prąd sinusoidalny o wartości zespolonej $I$, o zwrocie zgodnym ze zwrotem osi $Oz$. Powierzchnia przekroju poprzecznego ferromagnetyka wynosi S, jego konduktywność $\gamma$, zaś jego względna przenikalność magnetyczna $\mu_r$.

Punkt obserwacji $X(x,y) \in \mathrm{R}^2$, zaś punkt źródłowy $Y(x',y') \in \mathrm{S}$, w szczególności punkt $Y \in \Gamma$.






Rys.6.1. Ferromagnetyk

Fig.6.1. Ferromagnetic material

Przyjmując w przypadku ogólnym wektor indukcji

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}, \tag{6.1}$$

gdzie natężenie pola magnetycznego $\boldsymbol{H}$ związane jest z gęstością prądu przewodzenia $\boldsymbol{J}$ ($\mathbf{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J}$), zaś wektor magnetyzacji $\boldsymbol{M}$ związany jest z gęstością prądu namagnesowania $\boldsymbol{J}_m$ ($\mathbf{rot}_Y\,\mathbf{M} = \mu_0 \mathbf{J}_m$), wprowadza się [155,170] dla $X \in \mathrm{S}$ dwuwymiarowe równanie Poissona

$$\nabla^2 \boldsymbol{A}(X) = -\mu_0 \left(\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_m\right) \tag{6.2}$$

oraz dla $X \notin \mathrm{S}$ dwuwymiarowe równanie Laplace'a

$$\nabla^2 \boldsymbol{A}(X) = 0. \tag{6.3}$$

Rozwiązaniem tych dwóch równań jest wektorowy, logarytmiczny potencjał magnetyczny, będący sumą potencjału wektorowego $\boldsymbol{A}_C$ prądów przewodzenia i potencjału wektorowego $\boldsymbol{A}_A$ związanego z prądami namagnesowania (Ampère'a) w ciałach magnetycznych [170]

$$\boldsymbol{A}(X) = \boldsymbol{A}_C(X) + \boldsymbol{A}_A(X). \tag{6.4}$$

Potencjał

$$\boldsymbol{A}_C(X) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{J}(Y) \ln \frac{1}{r_{XY}} \, \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}y', \tag{6.5}$$

zaś potencjał

$$\boldsymbol{A}_A(X) = \frac{\mu_0}{2\pi} \oint_{\Gamma} \tau(Y_\Gamma) \ln \frac{1}{r_{XY_\Gamma}} \, \mathrm{d}l + \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{\mathrm{S}} \frac{1}{\mu_0} \mathbf{rot}_Y \boldsymbol{M}(Y) \ln \frac{1}{r_{XY_\Gamma}} \, \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}y', \tag{6.6}$$

gdzie $\tau(Y_\Gamma)$ jest zastępczym wektorem gęstości liniowej prądu namagnesowania (zastępczym okładem prądowym), określonym dla punktów położonych na powierzchni ferromagnetyka i wyraża się wzorem

$$\tau(Y_\Gamma)=\frac{1}{\mu_0}M(Y)\times \boldsymbol{n}, \tag{6.7}$$

gdzie wektor $\boldsymbol{n}$ jest wektorem normalnym do powierzchni granicznej.

Wzór (6.6) został wyprowadzony przy założeniu, że punkt $X(x,y)$ znajduje się zewnątrz ferromagnetyka. Jednak otrzymane wyrażenie może mieć również sens matematyczny, gdy $X(x,y)$ jest wewnątrz namagnesowanego ferromagnetyka [170]. Wtedy można umownie przyjąć [170], że całkowity potencjał wektorowy odpowiada prądom przewodzenia i prądom Ampere'a dla $X(x,y)\in R^2$. Wprowadzenie gęstości prądu $\tau(Y)$ i $\boldsymbol{J}_m(Y)=1/\mu_0\,\mathbf{rot}_Y\boldsymbol{M}$ sprowadza problem obliczania magnetycznego potencjału wektorowego do jednorodnego materiałowo obszaru $R^2$ o przenikalności $\mu_0$, ferromagnetyk zaś jest zastąpiony określonym rozkładem wektorów $\tau(Y_\Gamma)$ oraz $\boldsymbol{J}_m(Y)$.

Dla $X(x,y)\in S$ gęstość prądu przewodzenia $\boldsymbol{J}(Y)=J(Y)\mathbf{1}_z$ i wtedy natężenie pola magnetycznego ma dwie składowe $H_x(Y)$ oraz $H_y(Y)$, a stąd wektor magnetyzacji

$$\boldsymbol{M}(Y)=\mu_0\,\kappa\,\boldsymbol{H}(Y), \tag{6.8}$$

gdzie $\kappa$ jest podatnością magnetyczną, ma także dwie składowe $M_x(Y)$ i $M_y(Y)$. Zgodnie ze wzorem (6.7) wektor gęstości liniowej prądu ma wtedy jedną składową $\tau(Y)$ wzdłuż osi $Oz$

$$\tau(Y_\Gamma)=\tau(Y_\Gamma)\mathbf{1}_z\,. \tag{6.9}$$

Wektor rotacji z wektora magnetyzacji dla $Y\in S$

$$\mathbf{rot}_Y\boldsymbol{M}(Y)=\mu_0\kappa\,\mathbf{rot}_Y\boldsymbol{H}(Y)=\mu_0\kappa\boldsymbol{J}(Y) \tag{6.10}$$

i wtedy stwierdza się, że całkowity wektorowy potencjał magnetyczny dla $X(x,y)\in R^2$ ma jedną składową wzdłuż osi $Oz$ daną wzorem

$$A(X)=\frac{\mu_0\mu_r}{2\pi}\int_S J(Y)\ln\frac{1}{r_{XY}}\,dx'dy'+\frac{\mu_0}{2\pi}\oint_\Gamma \tau(Y_\Gamma)\ln\frac{1}{r_{XY_\Gamma}}\,dl\,, \tag{6.11}$$

gdzie względna przenikalność magnetyczna

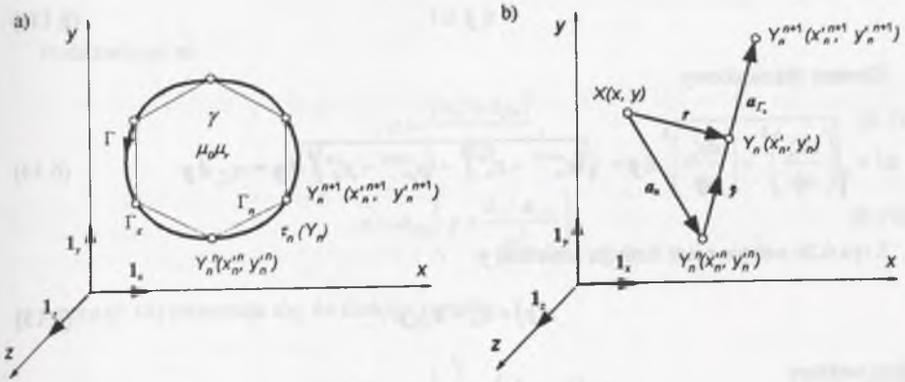
$$\mu_r=1+\kappa\,. \tag{6.11a}$$

Całka krzywoliniowa we wzorze (6.11) jest całką niewłaściwą, gdy punkt $X(x,y)$ leży na łuku $\Gamma$, lecz zbieżną ([99]-s.368).



### 6.1.1. Aproksymacja wektorowego potencjału magnetycznego ferromagnetyka

Aby wyznaczyć wektorowy potencjał magnetyczny ferromagnetyka, zgodnie ze wzorem (6.11), należy znać rozkład gęstości prądu przewodzenia $J(Y)$ oraz rozkład gęstości liniowej prądu Ampere'a $\tau(Y)$. Funkcje te na ogół nie są znane. W równaniach całkowych zakłada się, że są one stałe w wybranych zbiorach punktów przewodu. Dla gęstości $J(Y)$ zakłada się, że jest ona stała w obszarach elementarnych $S_p$ i wtedy potencjał wektorowy generowany przez te gęstości przedstawia się za pomocą fukcji kształtu $F(X, S_p)$ - p.3.3. W analogiczny sposób postąpi się w przypadku potencjału wektorowego generowanego przez gęstość liniową prądu $\tau(Y)$.




Rys.6.2. Przekrój poprzeczny ferromagnetyka; a) podział konturu $\Gamma$ na $N_\Gamma$ odcinków elementarnych ze stałymi gęstościami liniowymi prądu $\tau_n$, b) wektor elementarny $\boldsymbol{a}_{\Gamma n}$

Fig.6.2. Cross-section of the ferrimagnetic material; a) partition of the contour $\Gamma$ into segment elementarys with the linear current density $\tau_n$, b) vector elementarys $\boldsymbol{a}_{\Gamma n}$

Dzieląc kontur $\Gamma$ ferromagnetyka na $N_\Gamma$ odcinków elementarnych $\Gamma_n$ o długościach $a_{\Gamma n}$ - rys.6.2a, drugą całkę we wzorze (6.11) zastępuje się sumowaniem potencjałów generowanych przez elementarne gęstości liniowe prądów $\tau_n$, stałe na odcinkach $\Gamma_n$;

$$A_\tau(X)=\frac{\mu_0}{2\pi}\oint_\Gamma \tau(Y_\Gamma)\ln\frac{1}{r_{XY_\Gamma}}\,dl=\frac{\mu_0}{2\pi}\sum_{n=1}^{N_\Gamma}\tau_n G_n(X), \tag{6.12}$$

gdzie: $n=1,2,\ldots,N_\Gamma$,
$Y_\Gamma\in\Gamma$,
$\tau_n$ - gęstość liniowa prądu na odcinku $\Gamma_n$,
$G_n(X)$ - funkcja kształtu określona dla odcinka $\Gamma_n$,

$$G_n(X)=\int_{\Gamma_n}\ln\frac{1}{r_{XY_n}}\,dl\,. \tag{6.12a}$$

Funkcja kształtu $G_n(X)$ dla gęstości liniowej prądu zostanie wyznaczona analitycznie. W tym celu każdy punkt $Y_n(x'_n, y'_n) \in \Gamma_n$ aproksymuje się liniowo punktami $Y_n^n(x_n'^n, y_n'^n)$ i $Y_n^{n+1}(x_n'^{n+1}, y_n'^{n+1})$, określającymi odpowiednio początek i koniec wektora $\boldsymbol{a}_{\Gamma n}$ - rys.6.2b:

$$\left.\begin{aligned} x'_n &= x_n'^n + \xi\left(x_n'^{n+1} - x_n'^n\right) \\ y'_n &= y_n'^n + \xi\left(y_n'^{n+1} - y_n'^n\right) \end{aligned}\right\}, \tag{6.13}$$

gdzie nowa zmienna $\xi$

$$0 \le \xi \le 1 . \tag{6.13a}$$

Element różniczkowy

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\left(\frac{dx'_n}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy'_n}{d\xi}\right)^2}\,\mathrm{d}\xi = \sqrt{\left(x_n'^{n+1} - x_n'^n\right)^2 + \left(y_n'^{n+1} - y_n'^n\right)^2}\,\mathrm{d}\xi = a_{\Gamma_n}\,\mathrm{d}\xi . \tag{6.14}$$

Z rys.6.2b wektor $\boldsymbol{r}$ jest funkcją zmiennej $\xi$

$$\boldsymbol{r}(\xi) = \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_{\Gamma n}\xi , \tag{6.15}$$

gdzie wektory

$$\boldsymbol{a}_n = \left(x_n'^n - x\right)\mathbf{1}_x + \left(y_n'^n - y\right)\mathbf{1}_y = a_{nx}\mathbf{1}_x + a_{ny}\mathbf{1}_y , \tag{6.15a}$$

$$\boldsymbol{a}_{\Gamma n} = \left(x'^{n+1} - x_n'^n\right)\mathbf{1}_x + \left(y'^{n+1} - y_n'^n\right)\mathbf{1}_y = a_{\Gamma nx}\mathbf{1}_x + a_{\Gamma ny}\mathbf{1}_y . \tag{6.15b}$$

Po powyższych oznaczeniach funkcja kształtu

$$G_n(X) = -a_{\Gamma n}\int_0^1 \ln\left|\boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_{\Gamma n}\xi\right|\mathrm{d}\xi , \tag{6.16}$$

gdzie $a_{\Gamma n}$ jest modułem wektora $\boldsymbol{a}_{\Gamma n}$.

Ze wzoru (6.15) oblicza się kwadrat modułu wektora $\boldsymbol{r}$

$$r^2 = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r} = a_{\Gamma n}^2\xi^2 + 2\boldsymbol{a}_n\cdot\boldsymbol{a}_{\Gamma n}\xi + a_n^2 , \tag{6.17}$$

gdzie $a_n$ jest modułem wektora $\boldsymbol{a}_n$.

Jest to wielomian kwadratowy, którego wyróżnik

$$\Delta = -4\left|\boldsymbol{a}_n \times \boldsymbol{a}_{\Gamma n}\right|^2 \le 0 . \tag{6.17a}$$



Wzór (6.17) można przedstawić w postaci:

$$r^2 = a_{\Gamma n}^2\left(\xi + \frac{\boldsymbol{a}_n\cdot\boldsymbol{a}_{\Gamma n}}{a_{\Gamma n}^2}\right)^2 + \frac{\left|\boldsymbol{a}_n \times \boldsymbol{a}_{\Gamma n}\right|^2}{a_{\Gamma n}^2} \tag{6.17b}$$

i po podstawieniu go do wzoru (6.16) otrzymuje się:

$$G_n(X) = -\frac{1}{2}a_{\Gamma n}\int_0^1 \ln\left|a_{\Gamma n}^2\left(\xi + \frac{\boldsymbol{a}_n\cdot\boldsymbol{a}_{\Gamma n}}{a_{\Gamma n}^2}\right)^2 + \frac{\left|\boldsymbol{a}_n \times \boldsymbol{a}_{\Gamma n}\right|^2}{a_{\Gamma n}^2}\right|\mathrm{d}\xi . \tag{6.18}$$

Podstawiając za

$$a = \frac{\left|\boldsymbol{a}_n \times \boldsymbol{a}_{\Gamma n}\right|}{a_{\Gamma n}} , \tag{6.19}$$

$$u = a_{\Gamma n}\left(\xi + \frac{\boldsymbol{a}_n\cdot\boldsymbol{a}_{\Gamma n}}{a_{\Gamma n}^2}\right) \tag{6.19a}$$

ze wzoru (6.18) otrzymuje się, że funkcja kształtu

$$G_n(X) = -\frac{1}{2}\int_{u_1}^{u_2} \ln\left(u^2 + a^2\right)\mathrm{d}u , \tag{6.20}$$

gdzie

$$\mathrm{d}u = a_{\Gamma n}\mathrm{d}\xi \tag{6.20a}$$

$$u_1 = \frac{\boldsymbol{a}_n\cdot\boldsymbol{a}_{\Gamma n}}{a_{\Gamma n}} , \tag{6.20b}$$

$$u_2 = \frac{a_{\Gamma n}^2 + \boldsymbol{a}_n\cdot\boldsymbol{a}_{\Gamma n}}{a_{\Gamma n}} . \tag{6.20c}$$

Po wykonaniu całkowania we wzorze (6.20) funkcja kształtu

$$G_n(X) = -\frac{1}{2}\left(I_2 - I_1\right), \tag{6.21}$$

gdzie

$$I_2 = u_2\ln\left(u_2^2 + a^2\right) - 2u_2 + 2a\,\mathrm{arctg}\frac{u_2}{a} , \tag{6.21a}$$

$$I_1 = u_1\ln\left(u_1^2 + a^2\right) - 2u_1 + 2a\,\mathrm{arctg}\frac{u_1}{a} . \tag{6.21b}$$

Obliczając wyrażenia

$$u_2^2 + a^2 = \left|\boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_{\Gamma n}\right|^2, \tag{6.21c}$$

$$u_1^2 + a^2 = a_n^2, \tag{6.21d}$$

$$\frac{u_2}{a} = \frac{\boldsymbol{a}_{\Gamma n}\cdot\left(\boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_{\Gamma n}\right)}{\left|\boldsymbol{a}_n \times \boldsymbol{a}_{\Gamma n}\right|}, \tag{6.21e}$$

$$\frac{u_1}{a} = \frac{\boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{a}_{\Gamma n}}{\left|\boldsymbol{a}_n \times \boldsymbol{a}_{\Gamma n}\right|} \tag{6.21f}$$

i podstawiając je do wzoru (6.21) otrzymuje się analityczną postać funkcji kształtu dla $\Delta<0$

$$G_n(X) = -\frac{\boldsymbol{a}_{\Gamma n}\cdot\left(\boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_{\Gamma n}\right)}{a_{\Gamma n}}\ln\left|\boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_{\Gamma n}\right| + \frac{\boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{a}_{\Gamma n}}{a_{\Gamma n}}\ln a_n + a_{\Gamma n} - \\ -\frac{\left(\boldsymbol{a}_n \times \boldsymbol{a}_{\Gamma n}\right)\cdot \mathbf{1}_z}{a_{\Gamma n}}\left[\operatorname{arctg}\frac{\boldsymbol{a}_{\Gamma n}\cdot\left(\boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_{\Gamma n}\right)}{\left(\boldsymbol{a}_n \times \boldsymbol{a}_{\Gamma n}\right)\cdot \mathbf{1}_z} - \operatorname{arctg}\frac{\boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{a}_{\Gamma n}}{\left(\boldsymbol{a}_n \times \boldsymbol{a}_{\Gamma n}\right)\cdot \mathbf{1}_z}\right]. \tag{6.22}$$

Gdy $\Delta=0$, tzn. $\boldsymbol{a}_n \times \boldsymbol{a}_{\Gamma n} = 0$, to

$$G_n(X) = -\frac{\boldsymbol{a}_{\Gamma n}\cdot\left(\boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_{\Gamma n}\right)}{a_{\Gamma n}}\ln\left|\boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_{\Gamma n}\right| + \frac{\boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{a}_{\Gamma n}}{a_{\Gamma n}}\ln a_n + a_{\Gamma n} \tag{6.22a}$$

i gdy ponadto $X(x,y) \to Y_n^{n+1}\left(x_n'^{n+1}, y_n'^{n+1}\right)$, tzn. $\boldsymbol{a}_n \to -\boldsymbol{a}_{\Gamma n}$, lub też gdy $X(x,y) \to Y_n^{n}\left(x_n'^{n}, y_n'^{n}\right)$, tzn. $\boldsymbol{a}_n \to 0$, to

$$G_n(X) = a_{\Gamma n}\left(1 - \ln a_{\Gamma n}\right). \tag{6.22b}$$

## 6.2. Równania całkowe dla odosobnionego ferromagnetyka

Dla $X(x,y)\in S$ całkowity wektorowy potencjał magnetyczny ferromagnetyka z rys.6.1 dany jest wzorem (6.11). Wtedy równanie całkowe wyprowadza się tak, jak zrobiono to w p.2.2, otrzymując równanie typu (2.10) dla ferromagnetyka

$$\frac{\mathrm{J}(\mathrm{X})}{\gamma} + \mathrm{j}\omega\frac{\mu_0\mu_r}{2\pi}\int_S J(Y)\ln\frac{1}{r_{XY}}\,\mathrm{d}S + \mathrm{j}\omega\frac{\mu_0}{2\pi}\oint_\Gamma \tau(Y_\Gamma)\ln\frac{1}{r_{XY_\Gamma}}\,\mathrm{d}l = \mathcal{U}. \tag{6.23}$$



Na powierzchni granicznej, określonej krzywą $\Gamma$, składowa styczna natężenia pola magnetycznego musi być ciągła, tzn. dla $A(X)=A(X)\mathbf{1}_z$ i $\tau(Y_\Gamma)=\tau(Y_\Gamma)\mathbf{1}_z$ otrzymuje się warunek brzegowy

$$\frac{1}{\mu_0\mu_r}\lim_{\substack{X\to Y_\Gamma\\ X\in S}}\left[\boldsymbol{s}(\Gamma)\cdot\mathbf{rot}_X A(X)\right] = \frac{1}{\mu_0}\lim_{\substack{X\to Y_\Gamma\\ X\in \mathbf{R}^2\setminus S}}\left[\boldsymbol{s}(\Gamma)\cdot\mathbf{rot}_X A(X)\right], \tag{6.24}$$

gdzie $\boldsymbol{s}(\Gamma)$ jest wektorem stycznym do krzywej $\Gamma$ (rys.6.1), zaś potencjał $A(X)$ dany jest wzorem (6.11).

Jeżeli $X\to Y_\Gamma\in\Gamma$, to całka krzywoliniowa w równaniu (6.23) jest niewłaściwa, ale jest to całka bezwzględnie zbieżna w sensie następującej równości [188]

$$\oint_\Gamma \tau(Y_\Gamma)\ln\frac{1}{r_{XY_\Gamma}}\,\mathrm{d}l = \lim_{\Gamma_\varepsilon\to 0}\oint_{\Gamma\setminus\Gamma_\varepsilon}\tau(Y_\Gamma)\ln\frac{1}{r_{XY_\Gamma}}\,\mathrm{d}l, \tag{6.25}$$

gdzie $\Gamma_\varepsilon$ jest dostatecznie małą mierzalną częścią $\Gamma$, zawierającą punkt $Y_{\Gamma\varepsilon}$. Wtedy też, wykorzystując twierdzenie o wartościach granicznych pochodnej potencjału warstwy pojedynczej [188], z równania (6.24) dla $X\to Y_{\Gamma\varepsilon}$ otrzymuje się:

$$-\frac{\tau(Y_{\Gamma\varepsilon})}{2\mu_r} + \frac{1}{2\pi\mu_r}\boldsymbol{s}(\Gamma_\varepsilon)\cdot\mathbf{rot}_X\left[\mathbf{1}_z\oint_\Gamma \tau(Y_\Gamma)\ln\frac{1}{r_{Y_{\Gamma\varepsilon}Y_\Gamma}}\,\mathrm{d}l\right] + \\ +\frac{1}{2\pi}\boldsymbol{s}(\Gamma_\varepsilon)\cdot\mathbf{rot}_X\left[\mathbf{1}_z\int_S J(Y)\ln\frac{1}{r_{Y_{\Gamma\varepsilon}Y_\Gamma}}\,\mathrm{d}S\right] = \frac{\tau(Y_\Gamma)}{2} + \frac{1}{2\pi}\boldsymbol{s}(\Gamma_\varepsilon)\cdot \\ \cdot\mathbf{rot}_X\left[\mathbf{1}_z\oint_\Gamma \tau(Y_\Gamma)\ln\frac{1}{r_{Y_{\Gamma\varepsilon}Y_\Gamma}}\,\mathrm{d}l\right] + \frac{\mu_r}{2\pi}\boldsymbol{s}(\Gamma_\varepsilon)\cdot\mathbf{rot}_X\left[\mathbf{1}_z\int_S J(Y)\ln\frac{1}{r_{Y_{\Gamma\varepsilon}Y}}\,\mathrm{d}S\right], \tag{6.26}$$

gdzie: $Y_{\Gamma\varepsilon}\in\Gamma_\varepsilon$,
$Y_\Gamma\in\Gamma$,
$Y\in S$.

Z równania (6.26) otrzymuje się skalarne równanie całkowe Fredholma drugiego rodzaju z jądrem słabo osobliwym dla gęstości liniowej prądu na powierzchni ferromagnetyka:

$$\tau(Y_{\Gamma\varepsilon}) + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\mu_r-1}{\mu_r+1}\boldsymbol{s}(\Gamma_\varepsilon)\cdot\mathbf{rot}_X\left[\mathbf{1}_z\oint_\Gamma \tau(Y_\Gamma)\ln\frac{1}{r_{Y_{\Gamma\varepsilon}Y_\Gamma}}\,\mathrm{d}l\right] = \\ = -\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\mu_r-1}{\mu_r+1}\mu_r\boldsymbol{s}(\Gamma_\varepsilon)\cdot\mathbf{rot}_X\left[\mathbf{1}_z\int_S J(Y)\ln\frac{1}{r_{Y_{\Gamma\varepsilon}Y}}\,\mathrm{d}S\right], \tag{6.27}$$

gdzie całka krzywoliniowa jest całką bezwzględnie zbieżną w sensie równości (6.25).

Jeżeli w układzie dwuwymiarowym uwzględni się tożsamość wektorową

$$\mathbf{rot}_X\left[\mathbf{1}_z\oint_\Gamma \tau(Y_\Gamma)\ln\frac{1}{r}\,\mathrm{d}l\right]=-\oint_\Gamma \mathbf{1}_z\,\tau(Y_\Gamma)\times\mathbf{grad}_X\left[\ln\frac{1}{r}\right] \tag{6.28}$$

oraz przyjmie się, że potencjał

$$A(X)=A_0(X)=\frac{\mu_0\mu_r}{2\pi}\int_S J(Y)\ln\frac{1}{r}\,\mathrm{d}S, \tag{6.28a}$$

to z równania (6.27) otrzymuje się równanie całkowe dla gęstości liniowej prądu na powierzchni ferromagnetyka, wyprowadzone przez Szymańskiego w pracy [175] (ss. 23-25).

Dla ferromagnetyka otrzymuje się zatem układ równań (6.23) i (6.27), który może być rozwiązany tylko w sposób przybliżony. Dzieląc powierzchnię S ferromagnetyka na $N_d$ obszarów elementarnych, zaś jego kontur Γ na $N_\Gamma$ odcinków elementarnych, na podstawie p.2.2. oraz wzoru (6.12) z równania (6.23) otrzymuje się układ $N_d$ równań algebraicznych typu

$$\frac{J_t}{\gamma}+\frac{\mathrm{j}\omega\mu_0\mu_r}{2\pi}\sum_{s=1}^{N_d}J_sF_s(X)+\frac{\mathrm{j}\omega\mu_0}{2\pi}\sum_{n=1}^{N_\Gamma}\tau_nG_n(X)=\mathcal{U}, \tag{6.29}$$

gdzie: $t=1,2,\ldots,N_d$,
$s=1,2,\ldots,N_d$,
$n=1,2,\ldots,N_\Gamma$,
$X\in S_t$,
$J_t$ - gęstość powierzchniowa prądu na powierzchni $S_t$,
$J_s$ - gęstość powierzchniowa prądu na powierzchni $S_s$,
$\tau_n$ - gęstość liniowa prądu na odcinku $\Gamma_n$,
$F_s(X)$ - funkcja kształtu dla potencjału magnetycznego generowanego przez prądy przewodzenia (p.3.3.2.),
$G_n(X)$ - funkcja kształtu dla potencjału magnetycznego generowanego przez gęstości liniowe prądu Ampere'a (wzór (6.22)).

Wtedy też wektor

$$\mathbf{rot}_X\left[\mathbf{1}_z\oint_\Gamma \tau(Y_\Gamma)\ln\frac{1}{r_{XY_\Gamma}}\,\mathrm{d}l\right]=\sum_{n=1}^{N_\Gamma}\tau_n\,\mathbf{rot}_X\left[\mathbf{1}_zG_n(X)\right]=$$
$$=\sum_{n=1}^{N_\Gamma}\tau_n\left[\mathbf{1}_xG_{n,x}(X)+\mathbf{1}_yG_{n,y}(X)\right], \tag{6.30}$$



gdzie składowe

$$G_{n,x}(X)=\frac{\partial G_n(X)}{\partial y}, \tag{6.30a}$$

$$G_{n,y}(X)=-\frac{\partial G_n(X)}{\partial x}. \tag{6.30b}$$

Ze wzorów (6.22) i (6.22a) otrzymuje się:

- dla Δ<0

$$G_{n,x}(X)=\frac{1}{a_{\Gamma n}}\Bigg\{a_{\Gamma ny}\ln\frac{|\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_{\Gamma n}|}{a_n}-$$
$$-a_{\Gamma nx}\left[\operatorname{arctg}\frac{\boldsymbol{a}_{\Gamma n}\cdot(\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_{\Gamma n})}{(\boldsymbol{a}_n\times\boldsymbol{a}_{\Gamma n})\mathbf{1}_z}-\operatorname{arctg}\frac{\boldsymbol{a}_n\cdot\boldsymbol{a}_{\Gamma n}}{(\boldsymbol{a}_n\times\boldsymbol{a}_{\Gamma n})\mathbf{1}_z}\right]+$$
$$+\frac{\boldsymbol{a}_{\Gamma n}\cdot(\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_{\Gamma n})}{|\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_{\Gamma n}|^2}(a_{ny}+a_{\Gamma ny})-\frac{\boldsymbol{a}_{\Gamma n}\cdot\boldsymbol{a}_n}{a_n^2}a_{ny}+$$
$$+(\boldsymbol{a}_n\times\boldsymbol{a}_{\Gamma n})\mathbf{1}_z\left[\frac{a_{nx}+a_{\Gamma nx}}{|\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_{\Gamma n}|^2}-\frac{a_{nx}}{a_n^2}\right]\Bigg\}, \tag{6.30c}$$

$$G_{n,y}(X)=\frac{1}{a_{\Gamma n}}\Bigg\{-a_{\Gamma nx}\ln\frac{|\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_{\Gamma n}|}{a_n}-$$
$$-a_{\Gamma ny}\left[\operatorname{arctg}\frac{\boldsymbol{a}_{\Gamma n}\cdot(\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_{\Gamma n})}{(\boldsymbol{a}_n\times\boldsymbol{a}_{\Gamma n})\mathbf{1}_z}-\operatorname{arctg}\frac{\boldsymbol{a}_n\cdot\boldsymbol{a}_{\Gamma n}}{(\boldsymbol{a}_n\times\boldsymbol{a}_{\Gamma n})\mathbf{1}_z}\right]-$$
$$-\frac{\boldsymbol{a}_{\Gamma n}\cdot(\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_{\Gamma n})}{|\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_{\Gamma n}|^2}(a_{nx}+a_{\Gamma nx})+\frac{\boldsymbol{a}_{\Gamma n}\cdot\boldsymbol{a}_n}{a_n^2}a_{nx}+$$
$$+(\boldsymbol{a}_n\times\boldsymbol{a}_{\Gamma n})\mathbf{1}_z\left[\frac{a_{ny}+a_{\Gamma ny}}{|\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_{\Gamma n}|^2}-\frac{a_{ny}}{a_n^2}\right]\Bigg\}, \tag{6.30d}$$

- dla Δ=0

$$G_{n,x}(X)=\frac{1}{a_{\Gamma n}}\Bigg\{a_{\Gamma ny}\ln\frac{|\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_{\Gamma n}|}{a_n}+$$
$$+\frac{\boldsymbol{a}_{\Gamma n}\cdot(\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_{\Gamma n})}{|\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_{\Gamma n}|^2}(a_{ny}+a_{\Gamma ny})-\frac{\boldsymbol{a}_{\Gamma n}\cdot\boldsymbol{a}_n}{a_n^2}a_{ny}\Bigg\}, \tag{6.30e}$$

$$G_{n,y}(X)=\frac{1}{a_{\Gamma n}}\left\{-a_{\Gamma nx}\ln\frac{|\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_{\Gamma n}|}{a_n}-\right.$$
$$\left.-\frac{\boldsymbol{a}_{\Gamma n}\cdot(\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_{\Gamma n})}{|\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_{\Gamma n}|^2}(a_{nx}+a_{\Gamma nx})+\frac{\boldsymbol{a}_{\Gamma n}\cdot\boldsymbol{a}_n}{a_n^2}a_{nx}\right\}. \tag{6.30f}$$

Wektor jednostkowy styczny do odcinka $\Gamma_n$

$$\boldsymbol{s}(\Gamma_n)=\frac{\boldsymbol{a}_{\Gamma n}}{a_{\Gamma n}}=\frac{1}{a_{\Gamma n}}\left(\mathbf{1}_x a_{\Gamma nx}+\mathbf{1}_y a_{\Gamma ny}\right), \tag{6.31}$$

wobec tego składowa styczna natężenia pola magnetycznego, wytworzonego przez gęstość liniową prądu $\tau_n$ na odcinku $\Gamma_n$, charakteryzowana jest iloczynem skalarnym

$$\boldsymbol{s}(\Gamma_n)\cdot\mathbf{rot}_X\left[\mathbf{1}_z G(X)\right]=\frac{1}{a_{\Gamma n}}\left[a_{\Gamma nx}G_{n,x}(X)+a_{\Gamma ny}G_{n,y}(X)\right]. \tag{6.32}$$

Podstawiając do wzoru (6.32) współrzędną $G_{n,x}(X)$ ze (6.30c) i współrzędną $G_{n,y}(X)$ ze wzoru (6.30d) otrzymuje się:

$$\boldsymbol{s}(\Gamma_n)\cdot\mathbf{rot}_X\left[\mathbf{1}_z G(X)\right]=$$
$$=-\operatorname{arctg}\frac{\boldsymbol{a}_{\Gamma n}\cdot(\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_{\Gamma n})}{(\boldsymbol{a}_n\times\boldsymbol{a}_{\Gamma n})\cdot\mathbf{1}_z}+\operatorname{arctg}\frac{\boldsymbol{a}_n\cdot\boldsymbol{a}_{\Gamma n}}{(\boldsymbol{a}_n\times\boldsymbol{a}_{\Gamma n})\cdot\mathbf{1}_z}. \tag{6.32a}$$

Jeżeli (rys.6.2b)

$$(\boldsymbol{a}_n\times\boldsymbol{a}_{\Gamma n})\cdot\mathbf{1}_z>0, \tag{6.33}$$

to punkt $X(x,y)$ leży z lewej strony wektora $\boldsymbol{a}_{\Gamma n}$, tzn. $X(x,y)\in S$, gdy zaś

$$(\boldsymbol{a}_n\times\boldsymbol{a}_{\Gamma n})\cdot\mathbf{1}_z<0, \tag{6.33a}$$

to punkt ten leży z prawej strony $\boldsymbol{a}_{\Gamma n}$, tzn. $X(x,y)\in R^2\backslash S$.

Gdy zatem $r\to 0$ (rys.6.2b), to dla $X(x,y)\in S$ $(\boldsymbol{a}_n\times\boldsymbol{a}_{\Gamma n})\cdot\mathbf{1}_z\to 0^+$ i wtedy

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ X\in S}}\left\{\boldsymbol{s}(\Gamma_n)\cdot\mathbf{rot}_X\left[\mathbf{1}_z G_n(X)\right]\right\}=-\pi, \tag{6.34}$$

zaś dla $X(x,y)\in R^2\backslash S$ wyrażenie $(\boldsymbol{a}_n\times\boldsymbol{a}_{\Gamma n})\cdot\mathbf{1}_z\to 0^-$, a stąd

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ X\in R^2\backslash S}}\left\{\boldsymbol{s}(\Gamma_n)\cdot\mathbf{rot}_X\left[\mathbf{1}_z G_n(X)\right]\right\}=\pi, \tag{6.34a}$$



bowiem w obu przypadkach $\boldsymbol{a}_n\cdot\boldsymbol{a}_{\Gamma n}\le 0$ oraz $\boldsymbol{a}_{\Gamma n}\cdot(\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_{\Gamma n})\ge 0$. Powyższe wartości graniczne potwierdzają poprawność wyprowadzonych funkcji kształtu $G_n(X)$ i $\mathbf{rot}_X[\mathbf{1}_z G_n(X)]$ ze względu na zgodność z twierdzeniem o przejściu granicznym pochodnej potencjału warstwy pojedynczej - wzory (6.26) i (6.27).

Po podstawieniu (6.30) do równania (6.27) dla odcinka $\Gamma_m$ ($m$ = 1,2,...,$N_\Gamma$) otrzymuje się równanie

$$\tau_m+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\mu_r-1}{\mu_r+1}\boldsymbol{s}(\Gamma_m)\cdot\sum_{\substack{n=1\\ n\ne m}}^{N_\Gamma-1}\tau_n\left[\mathbf{1}_x G_{n,x}(Y_m)+\mathbf{1}_y G_{n,y}(Y_m)\right]=$$
$$=-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\mu_r-1}{\mu_r+1}\mu_r\boldsymbol{s}(\Gamma_m)\cdot\mathbf{rot}_X\left[\mathbf{1}_x\int_S J(Y)\ln\frac{1}{r_{XY}}\,\mathrm{d}S\right]\Bigg|_{X=Y_m}, \tag{6.35}$$

gdzie: $Y_m\in\Gamma_m$,
$\tau_m$ - gęstość liniowa prądu na odcinku $\Gamma_m$,
$\tau_n$ - gęstość liniowa prądu na odcinku $\Gamma_n$,
$Y\in S$,

$$\boldsymbol{s}(\Gamma_m)=\frac{\boldsymbol{a}_{\Gamma m}}{a_{\Gamma m}}=\frac{1}{a_{\Gamma m}}\left(\mathbf{1}_x a_{\Gamma mx}+\mathbf{1}_y a_{\Gamma my}\right). \tag{6.35a}$$

Wektor

$$\mathbf{rot}_X\left[\mathbf{1}_x\int_S J(Y)\ln\frac{1}{r_{XY}}\,\mathrm{d}S\right]=\sum_{s=1}^{N_d}J_s\,\mathbf{rot}_X\left[\mathbf{1}_z F_s(X)\right] \tag{6.36}$$

i jeżeli obszar S podzieli się na $N_d$ trójkątów $\Delta_s$ (rys.3.6), to dla zewnętrznych trójkątów sieci triangulacyjnej ich boki, które mają dwa punkty wspólne z konturem $\Gamma$, mogą być uważane jako odcinki $\Gamma_m$ i wtedy

$$\mathbf{rot}_X\left[\mathbf{1}_z F_s(X)\right]=\mathbf{1}_x F_{s,x}(X)+\mathbf{1}_y F_{s,y}(X), \tag{6.37}$$

gdzie $F_{s,x}(X)$ i $F_{s,y}(X)$ są dane odpowiednimi wzorami ogólnymi (5.34e) i (5.34f), z których otrzymuje się pochodne funkcji kształtu potencjału magnetycznego generowanego przez prądy przewodzenia. Pochodne te dane są wzorami ogólnymi (5.36) i (5.36a), w których poszczególne funkcje wyznaczone są analitycznie - wzory od (Z3.1) do (Z3.4c).

Wobec powyższego równanie (6.35) dla odcinka $\Gamma_m$ przyjmuje postać:

$$\tau_m+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\mu_r-1}{\mu_r+1}\boldsymbol{s}(\Gamma_m)\cdot\sum_{\substack{n=1\\ n\ne m}}^{N_\Gamma-1}\tau_n(Y_n)\left[\mathbf{1}_x G_{n,x}(Y_m)+\mathbf{1}_y G_{n,y}(Y_m)\right]=$$
$$=-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\mu_r-1}{\mu_r+1}\mu_r\boldsymbol{s}(\Gamma_m)\cdot\sum_{s=1}^{N_d}J_s(Y_s)\left[\mathbf{1}_x F_{s,x}(Y_m)+\mathbf{1}_y F_{s,y}(Y_m)\right]. \tag{6.38}$$

Zapisując powyższe równanie dla każdej gęstości liniowej prądu $\tau_m$ otrzymuje się $N_\Gamma$ równań algebraicznych. Razem z równaniami typu (6.29) otrzymuje się układ $N_d+N_\Gamma$ równań algebraicznych z $N_d$ niewiadomymi gęstościami powierzchniowymi prądów przewodzenia $J_s$ oraz $N_\Gamma$ niewiadomymi gęstościami liniowymi prądów $\tau_m$.

## 6.3. Impedancja odosobnionego ferromagnetyka

Układ $N_d+N_\Gamma$ równań (6.29) i (6.38) jest układem równań algebraicznych o współczynnikach zespolonych. Układ ten zapisuje się następująco:

$$C\begin{bmatrix} J \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ O \end{bmatrix}. \tag{6.39}$$

Macierz kolumnowa

$$U = [u_{s1}]_{N_d\times 1}, \tag{6.40}$$

której elementy

$$u_{s1} = U, \tag{6.40a}$$

gdzie $s = 1,2,\ldots,N_d$.

Macierz kolumnowa

$$O = [o_{m1}]_{N_\Gamma\times 1} \tag{6.41}$$

o elementach

$$o_{m1} = 0, \tag{6.41a}$$

gdzie $m = 1,2,\ldots,N_\Gamma$.

Macierz kolumnowa

$$J = [J_{s1}]_{N_d\times 1}, \tag{6.42}$$

której elementy są niewiadomymi gęstościami powierzchniowymi prądów

$$J_s = J_{s1}, \tag{6.42a}$$

gdzie $s = 1,2,\ldots,N_d$.

Macierz kolumnowa

$$\tau = [\tau_{m1}]_{N_\Gamma\times 1}, \tag{6.43}$$



której elementy są niewiadomymi gęstościami liniowymi prądów

$$\tau_m = \tau_{m1}, \tag{6.43a}$$

gdzie $m = 1,2,\ldots,N_\Gamma$.

Macierz kwadratowa

$$C = \begin{bmatrix} C^{J\times J} & C^{J\times\tau} \\ C^{\tau\times J} & C^{\tau\times\tau} \end{bmatrix} = [c_{kl}]_{(N_d+N_\Gamma)\times(N_d+N_\Gamma)}, \tag{6.44}$$

gdzie $k,l = 1,2,\ldots,N_d+N_\Gamma$.

Podmacierz

$$C^{J\times J} = [c_{ts}^{J\times J}]_{N_d\times N_d}, \tag{6.45}$$

gdzie $t,s = 1,2,\ldots,N_d$, zaś elementy tej podmacierzy zdefiniowane są przez

$$c_{ts} = c_{ts}^{J\times J} = \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma} + \dfrac{j\omega\mu_0\mu_r}{2\pi} F_t(X_t), & \text{dla } t = s \quad (6.45a) \\[2ex] \dfrac{j\omega\mu_0\mu_r}{2\pi} F_s(X_t), & \text{dla } t \neq s. \quad (6.45b) \end{cases}$$

Podmacierz

$$C^{J\times\tau} = [c_{tm}^{J\times\tau}]_{N_d\times N_\Gamma}, \tag{6.46}$$

gdzie $t = 1,2,\ldots,N_d$; $m = 1,2,\ldots,N_\Gamma$, zaś elementy

$$c_{t,m+N_d} = c_{tm}^{J\times\tau} = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} G_m(X_t). \tag{6.46a}$$

Podmacierz

$$C^{\tau\times J} = [c_{ms}^{\tau\times J}]_{N_\Gamma\times N_d}, \tag{4.47}$$

gdzie $m = 1,2,\ldots,N_\Gamma$, $s = 1,2,\ldots,N_d$, zaś elementy

$$c_{m+N_d,s} = c_{ms}^{\tau+J} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1}\mu_r s(\Gamma_m)\cdot\left[\mathbf{1}_x F_{s,x}(Y_m) + \mathbf{1}_y F_{s,y}(Y_m)\right]. \tag{6.47a}$$

Podmacierz

$$C^{\tau\times\tau} = \left[c_{mn}^{\tau\times\tau}\right]_{N_\Gamma\times N_\Gamma}, \tag{6.48}$$

gdzie $m, n = 1,2,\ldots,N_\Gamma$ oraz elementy zdefiniowane są przez

$$c_{m+N_d,n+N_d} = c_{mn}^{\tau\times\tau} = \begin{cases} 1, \text{ dla } m = n & (6.48a) \\ \dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1}\, s(\Gamma_m)\cdot\left[\mathbf{1}_x G_{n,x}(Y_m) + \mathbf{1}_y G_{n,y}(Y_m)\right], \text{ dla } m \neq n. & (6.48b) \end{cases}$$

Wprowadzając macierz kwadratową

$$D = \begin{bmatrix} D^{J\times J} & D^{J\times\tau} \\ D^{\tau\times J} & D^{\tau\times\tau} \end{bmatrix} = [d_{kl}]_{(N_d+N_\Gamma)\times(N_d+N_\Gamma)} = C^{-1} \tag{6.49}$$

z równania (6.39) otrzymuje się:

$$\begin{bmatrix} J \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{J\times J} & D^{J\times\tau} \\ D^{\tau\times J} & D^{\tau\times\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ O \end{bmatrix}, \tag{6.50}$$

a stąd

$$J = D^{J\times J}\, U, \tag{6.50a}$$

$$\tau = D^{\tau\times J}\, U. \tag{6.50b}$$

Podmacierz

$$D^{J\times J} = \lfloor d_{ts} \rfloor_{N_d\times N_d} \tag{6.51}$$

i wtedy z równania (6.50a) otrzymuje się gęstość powierzchniową prądu w elemencie $\Delta_t$

$$J_t = \left(\sum_{s=1}^{N_d} d_{ts}\right)\mathcal{U}. \tag{6.52}$$

Podmacierz

$$D^{\tau\times J} = \lfloor d_{ms} \rfloor_{N_\Gamma\times N_d}, \tag{6.53}$$

a stąd oraz z równania (6.50b) otrzymuje się gęstość liniową prądu na odcinku $\Gamma_m$

$$\tau_m = \left(\sum_{s=1}^{N_d} d_{ms}\right)\mathcal{U}. \tag{6.54}$$

Przy zadanym napięciu $\mathcal{U}$ z równania (6.52) oblicza się gęstość powierzchniową prądu w elemencie $\Delta_t$, zaś z równania (6.54) gęstość liniową prądu na odcinku $\Gamma_m$. Przy zadanym natężeniu prądu $I$ układ równań (6.29) i (6.38) należy uzupełnić równaniem

$$I = \sum_{t=1}^{N_d} \Delta_t J_t = \left(\sum_{t=1}^{N_d} \Delta_t \sum_{s=1}^{N_d} d_{ts}\right)\mathcal{U}. \tag{6.55}$$



Równanie (6.55) wraz z równaniami typu (6.52) pozwala na wyznaczenie gęstości prądu $J_t$ ($t = 1,2,\ldots,N_d$) oraz napięcia $\mathcal{U}$ w zależności od natężenia prądu $I$. Wtedy też z równań typu (6.54) wyznaczy się gęstości liniowe prądu $\tau_m$ ($m = 1,2,\ldots,N_\Gamma$) w zależności od prądu $I$.

Równanie (6.55) można przedstawić następująco:

$$I = \mathcal{Y}\mathcal{U}, \tag{6.56}$$

gdzie admitancja

$$\mathcal{Y} = \sum_{t=1}^{N_d} \Delta_t \sum_{s=1}^{N_d} d_{ts}, \tag{6.56a}$$

a stąd jednostkowa impedancja odosobnionego ferromagnetyka

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Y}^{-1}. \tag{6.56b}$$

## 6.4. Pole magnetyczne odosobnionego ferromagnetyka

Całkowity potencjał magnetyczny odosobnionego ferromagnetyka dany jest wzorem (6.11) i generowany przez prądy przewodzenia $J(Y)$ oraz prądy Ampere'a $\tau(Y_\Gamma)$. Jeżeli obszar S zostanie podzielony na trójkąty $\Delta_s$, zaś jego kontur $\Gamma$ na odcinki $\Gamma_n$, to dla $X\in R^2$ wektorowy potencjał magnetyczny

$$A(X) = \frac{\mu_0\mu_r}{2\pi}\sum_{s=1}^{N_d} J_s F_s(X) + \frac{\mu_0}{2\pi}\sum_{n=1}^{N_\Gamma} \tau_n G_n(X), \tag{6.57}$$

gdzie: $s = 1,2,\ldots, N_d$,
$n = 1,2,\ldots,N_\Gamma$,
$J_s$ - stała gęstość powierzchniowa prądu w trójkącie $\Delta_s$,
$\tau_n$ - stała gęstość liniowa prądu na odcinku $\Gamma_n$.

Wektor indukcji magnetycznej

$$\boldsymbol{B}(X) = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}(X) = \mathbf{rot}[\mathbf{1}_z A(X)] = \mathbf{1}_x B_x(X) + \mathbf{1}_y B_y(X). \tag{6.58}$$

Wprowadzając funkcje kształtu $F_s(X)$ oraz $G_n(X)$ otrzymuje się współrzędne wektora indukcji magnetycznej

$$B_x(X) = \frac{\mu_0\mu_r}{2\pi}\sum_{s=1}^{N_d} J_s F_{s,x}(X) + \frac{\mu_0}{2\pi}\sum_{n=1}^{N_\Gamma} \tau_n G_{n,x}(X), \tag{6.58a}$$

$$B_y(X) = \frac{\mu_0\mu_r}{2\pi}\sum_{s=1}^{N_d} J_s F_{s,y}(X) + \frac{\mu_0}{2\pi}\sum_{n=1}^{N_\Gamma} \tau_n G_{n,y}(X). \tag{6.58b}$$

Gęstości prądów $J_s$ oraz $\tau_n$ dane są odpowiednio wzorami (6.52) i (6.54).

## 6.5. Układ $N_C$ równoległych ferromagnetyków

Zakłada się, że układ $N_C$ przewodów równoległych z rys.2.1 jest układem ferromagnetyków o względnych przenikalnościach magnetycznych $\mu_{rp}$ ($p$ = 1,2,..., $N_C$). Dzieląc każdy przewód $S_p$ na $N_d$ trójkątów $\Delta_{ps}$ ($s$ = 1,2,...,$N_d$), zaś jego kontur $\Gamma_p$ na $N_\Gamma$ odcinków $\Gamma_{un}$ ($n$ = 1,2,...,$N_\Gamma$), otrzymuje się potencjał wektorowy w punkcie $X \in R^2$

$$A(X) = \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{p=1}^{N_c} \sum_{s=1}^{N_d} \mu_{rp} J_{ps} F_{ps}(X) + \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{u=1}^{N_c} \sum_{n=1}^{N_\Gamma} \tau_{un} G_{un}(X), \tag{6.59}$$

gdzie: $u, p = 1,2, ..., N_C$,
$s = 1,2, ..., N_d$,
$n = 1,2, ..., N_\Gamma$,
$J_{ps}$ - stała gęstość powierzchniowa prądu w trójkącie $\Delta_{ps}$,
$\tau_{un}$ - stała gęstość liniowa prądu na odcinku $\Gamma_{un}$.

Dla potencjału magnetycznego określonego wzorem (6.59) postępując tak jak poprzednio, zapisuje się równanie algebraiczne dla $X \in \Delta_{lt}$ ($l$ = 1,2, ..., $N_C$ ; $t$ = 1,2, ..., $N_d$)

$$\frac{J_{lt}}{\gamma_l} + \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \sum_{p=1}^{N_c} \sum_{s=1}^{N_d} \mu_{rp} J_{ps} F_{ps}(X) + \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \sum_{u=1}^{N_c} \sum_{n=1}^{N_\Gamma} \tau_{un} G_{un}(X) = \mathcal{U}_l, \tag{6.60}$$

gdzie: $t,s = 1,2, ..., N_d$,
$l,u,p = 1,2, ..., N_C$,
$n = 1,2, ..., N_\Gamma$.

Z warunku brzegowego (6.24) dla $X \in \Gamma_{lm}$ ($m$ = 1,2,...,$N_\Gamma$) otrzymuje się równanie algebraiczne

$$\tau_{lm} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\mu_{rl} - 1}{\mu_{rl} + 1} s(\Gamma_{lm}) \cdot \left[ \sum_{\substack{u=1 \\ u=l \\ n \neq m}}^{N_c} \sum_{n=1}^{N_\Gamma} \tau_{un} \left[ 1_x G_{un,x}(X) + 1_y G_{un,y}(X) \right] \right] + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\mu_{rl} - 1}{\mu_{rl} + 1} s(\Gamma_{lm}) \cdot \sum_{p=1}^{N_c} \sum_{s=1}^{N_d} \mu_{rp} J_{ps} \left[ 1_x F_{ps,x}(X) + 1_y F_{ps,y}(X) \right] = 0, \tag{6.61}$$

gdzie: $l,u,p = 1,2,..., N_C$,
$s = 1,2,...,N_d$,
$m,n = 1,2,...,N_\Gamma$.



Obierając w każdym z trójkątów elementarnych $\Delta_{lt}$ punkt $X_{lt} \in \Delta_{lt}$, zaś na każdym z odcinków elementarnych $\Gamma_{lm}$ punkt $X_{lm} \in \Gamma_{lm}$, z układu równań (6.60) i (6.61) otrzymuje się układ $(N_d + N_\Gamma)\, N_C$ równań algebraicznych, który może być zapisany równaniem macierzowym (6.39).

Macierz $U$ jest wtedy macierzą kolumnową

$$U = \lfloor u_{j1} \rfloor_{N_d N_c \times 1}, \tag{6.62}$$

której elementy

$$u_{j1} = U_l, \tag{6.62a}$$

gdzie: $j = (p-1)N_d + s$,
$l,p = 1,2,..., N_C$,
$s = 1,2,...,N_d$,
$l = [j/N_d] + 1$.

Macierz kolumnowa

$$O = \lfloor o_{r1} \rfloor_{N_\Gamma N_c \times 1} \tag{6.63}$$

o elementach

$$o_{r1} = 0, \tag{6.63a}$$

gdzie: $r = (u-1)N_\Gamma + m$,
$u = 1,2, ..., N_C$,
$m = 1,2, ..., N_\Gamma$.

Macierz kolumnowa

$$J = \lfloor J_{j1} \rfloor_{N_d N_c \times 1}, \tag{6.64}$$

której elementy są niewiadomymi gęstościami powierzchniowymi prądów

$$J_j = J_{j1}, \tag{6.64a}$$

gdzie: $j = (p-1)N_d + s$,
$p = 1,2,..., N_C$,
$s = 1,2,...,N_d$.

Macierz kolumnowa

$$\tau = \lfloor \tau_{r1} \rfloor_{N_\Gamma N_c \times 1}, \tag{6.65}$$

której elementy są niewiadomymi gęstościami liniowymi prądów

$$\tau_r = \tau_{r1}, \tag{6.65a}$$

gdzie: $r = (u-1)N_\Gamma + m$,
$u = 1,2,..., N_C$,
$m = 1,2,...,N_\Gamma$.

Macierz kwadratowa

$$C = \begin{bmatrix} C^{J\times J} & C^{J\times\tau} \\ C^{\tau\times J} & C^{\tau\times\tau} \end{bmatrix} = [c_{ik}]_{(N_d+N_\Gamma)N_c\times(N_d+N_\Gamma)N_c}, \tag{6.66}$$

gdzie $i, k = 1,2,\ldots,(N_d + N_\Gamma)N_C$.

Podmacierz

$$C^{J\times J} = \left[c_{ik}^{J\times J}\right]_{N_dN_c\times N_dN_c}, \tag{6.67}$$

gdzie: $i = (l\text{-}1)N_d + t$,
$(l = 1,2,\ldots,N_C) \cap (t = 1,2,\ldots,N_d)$,
$k = (p\text{-}1)N_d + s$,
$(p = 1,2,\ldots,N_C) \cap (s = 1,2,\ldots,N_d)$,

zaś elementy tej podmacierzy

$$c_{ik}^{J\times J} = \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma_l} + \dfrac{j\omega\mu_0}{2\pi}\mu_{rp}F_{ps}(X_{lt}), \text{ dla } k = i \ (p = l \cap s = t) & (6.67a) \\ \dfrac{j\omega\mu_0}{2\pi}\mu_{rp}F_{ps}(X_{lt}), \text{ dla } k \neq i. & (6.67b) \end{cases}$$

Podmacierz

$$C^{J\times\tau} = \left[c_{ik}^{J\times\tau}\right]_{N_dN_c\times N_\Gamma N_c}, \tag{6.68}$$

gdzie: $i = (l\text{-}1)N_d + t$,
$(l = 1,2,\ldots,N_C) \cap (t = 1,2,\ldots,N_d)$,
$k = (u\text{-}1)N_\Gamma + n$,
$(u = 1,2,\ldots,N_C) \cap (n = 1,2,\ldots,N_\Gamma)$,

zaś elementy

$$c_{ik}^{J\times\tau} = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi}G_{un}(X_{lt}). \tag{6.68a}$$

Podmacierz

$$C^{\tau\times J} = \left[c_{ik}^{\tau\times J}\right]_{N_\Gamma N_c\times N_dN_c}, \tag{6.69}$$

gdzie: $i = (l\text{-}1)N_\Gamma + m$,
$(l = 1,2,\ldots,N_C) \cap (m = 1,2,\ldots,N_\Gamma)$,
$k = (p\text{-}1)N_d + s$,
$(p = 1,2,\ldots,N_C) \cap (s = 1,2,\ldots,N_d)$,

zaś elementy

$$c_{ik}^{\tau\times J} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\mu_{rl}-1}{\mu_{rl}+1}s(\Gamma_{lm})\cdot\mu_{rp}\left[\mathbf{1}_x F_{ps,x}(X_{lm}) + \mathbf{1}_y F_{ps,y}(X_{lm})\right]. \tag{6.69a}$$



Podmacierz

$$C^{\tau\times\tau} = \left[c_{ik}^{\tau\times\tau}\right]_{N_\Gamma N_c\times N_\Gamma N_c}, \tag{6.70}$$

gdzie: $i = (l\text{-}1)N_\Gamma + m$,
$(l = 1,2,\ldots,N_C) \cap (m = 1,2,\ldots,N_\Gamma)$,
$k = (u\text{-}1)N_\Gamma + n$,
$(u = 1,2,\ldots,N_C) \cap (n = 1,2,\ldots,N_\Gamma)$,

zaś elementy tej podmacierzy

$$c_{ik}^{\tau\times\tau} = \begin{cases} 1, \text{ dla } i = k \ (l = u \cap n = m) & (6.70a) \\ \dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{\mu_{rl}-1}{\mu_{rl}+1}s(\Gamma_{lm})\cdot\left[\mathbf{1}_x G_{un,x}(X_{lm}) + \mathbf{1}_y G_{un,y}(X_{lm})\right], \text{ dla } i \neq k. & (6.70b) \end{cases}$$

Wprowadzając macierz kwadratową

$$D = \begin{bmatrix} D^{J\times J} & D^{J\times\tau} \\ D^{\tau\times J} & D^{\tau\times\tau} \end{bmatrix} = [d_{ik}]_{(N_d+N_\Gamma)N_c\times(N_d+N_\Gamma)N_c} = C^{-1}, \tag{6.71}$$

gdzie macierz $C$ dana jest wzorem (6.66), z równania (6.39) otrzymuje się równanie (6.50), w którym macierze $U$, $O$, $J$ i $\tau$ określone są odpowiednio wzorami (6.62), (6.63), (6.64) i (6.65). Wtedy też macierz $J$ wyraża się również wzorem (6.50a), z którego otrzymuje się gęstość powierzchniową prądu

$$J_j = \sum_{l=1}^{N_c}\left(\sum_{t=1}^{N_d} d_{j,(l-1)N_d+t}\right)\mathcal{U}_t, \tag{6.72}$$

gdzie: $j = (p\text{-}1)N_d + s$,
$l,p = 1,2,\ldots,N_C$,
$s,t = 1,2,\ldots,N_d$,
$l = [j/N_d] + 1$,
$j = 1,2,\ldots,N_d N_C$.

W analogiczny sposób otrzymuje się gęstość liniową prądu

$$\tau_r = \sum_{l=1}^{N_c}\left(\sum_{t=1}^{N_d} d_{r+N_cN_d,(l-1)N_d+t}\right)\mathcal{U}_t, \tag{6.73}$$

gdzie: $r = (u\text{-}1)N_\Gamma + m$,
$l, u = 1,2,\ldots,N_C$,
$m = 1,2,\ldots,N_\Gamma$,
$t = 1,2,\ldots,N_d$,
$r = 1,2,\ldots,N_\Gamma N_C$.

Natężenie prądu w $p$-tym przewodzącym ferromagnetyku

$$I_p = \sum_{s=1}^{N_d} \Delta_{ps} J_{(p-1)N_d+s}, \tag{6.74}$$

a stąd, po podstawieniu wzoru (6.72), otrzymuje się:

$$I_p = \sum_{l=1}^{N_c} \left[ \sum_{s=1}^{N_d} \left( \sum_{t=1}^{N_d} \Delta_{ps} d_{(p-1)N_d+s,(l-1)N_d+t} \right) \mathcal{U}_l \right] = \sum_{l=1}^{N_c} \mathcal{Y}_{pl} \mathcal{U}_l, \tag{6.74a}$$

gdzie admitancja

$$\mathcal{Y}_{pl} = \sum_{l=1}^{N_d} \sum_{t=1}^{N_d} \Delta_{ps} d_{(p-1)N_d+s,(l-1)N_d+t}. \tag{6.74b}$$

Zapisując równanie (6.74a) dla każdego z prądów przewodowych $I_p$ ( $p = 1,2,...,N_C$ ) otrzymuje się równanie macierzowe

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{Y}\,\boldsymbol{U}, \tag{6.75}$$

gdzie macierz prądów

$$\boldsymbol{I} = \left[ I_{p1} \right]_{N_c \times 1}, \tag{6.75a}$$

macierz admitancji

$$\boldsymbol{Y} = \left[ \mathcal{Y}_{pl} \right]_{N_c \times N_c} \tag{6.75b}$$

oraz macierz spadków napięć

$$\boldsymbol{U} = \left[ \mathcal{U}_{l1} \right]_{N_c \times 1}. \tag{6.75c}$$

Macierz impedancji

$$\boldsymbol{Z} = \left[ \mathcal{Z}_{pl} \right]_{N_c \times N_c} = \boldsymbol{Y}^{-1} \tag{6.76}$$

i wtedy

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{Z}\,\boldsymbol{I}. \tag{6.77}$$

Gdy $p = l$, to impedancja jednostkowa $\mathcal{Z}_{pp}$ jest impedancją własną $p$-tego ferromagnetyka; dla $p \neq l$ impedancja $\mathcal{Z}_{pl}$ jest impedancją wzajemną między $p$-tym a $l$-tym ferromagnetykiem.

Występująca we wzorze (6.59) gęstość powierzchniowa prądu

$$J_{ps}(Y_{ps}) = J_{(p-1)N_d+s}(Y_{(p-1)N_d+s}) = J_j, \tag{6.78}$$



gdzie: $J_j$ jest gęstością prądu określoną wzorem (6.72),
$j = (p-1)N_d + s$,
$p = 1,2,..., N_C$,
$s = 1,2,...,N_d$,
$j = 1,2,...,N_d N_C$.

Gęstość liniowa prądu

$$\tau_{un}(Y_{un}) = \tau_{(u-1)N_\Gamma+n}(Y_{(u-1)N_\Gamma+n}) = \tau_r, \tag{6.79}$$

gdzie: $\tau_r$ określona jest wzorem (6.73),
$r = (u-1)N_\Gamma + n$,
$u = 1,2,..., N_C$,
$n = 1,2,...,N_\Gamma$,
$r = 1,2,...,N_\Gamma N_C$.

Wtedy ze wzoru (6.59) otrzymuje się potencjał wektorowy w punkcie $X \in \mathrm{R}^2$

$$\begin{aligned} A(X) = {} & \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{p=1}^{N_c} \sum_{s=1}^{N_d} \mu_{rp} J_{(p-1)N_d+s} F_{ps}(X) + \\ & + \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{u=1}^{N_c} \sum_{n=1}^{N_\Gamma} \tau_{(u-1)N_\Gamma+n} G_{un}(X), \end{aligned} \tag{6.80}$$

gdzie: $s = 1,2,...,N_d$,
$u,p = 1,2,..., N_C$,
$n = 1,2,...,N_\Gamma$.

Wykorzystując wzór (6.58) otrzymuje się składowe wektora indukcji magnetycznej w punkcie $X \in \mathrm{R}^2$

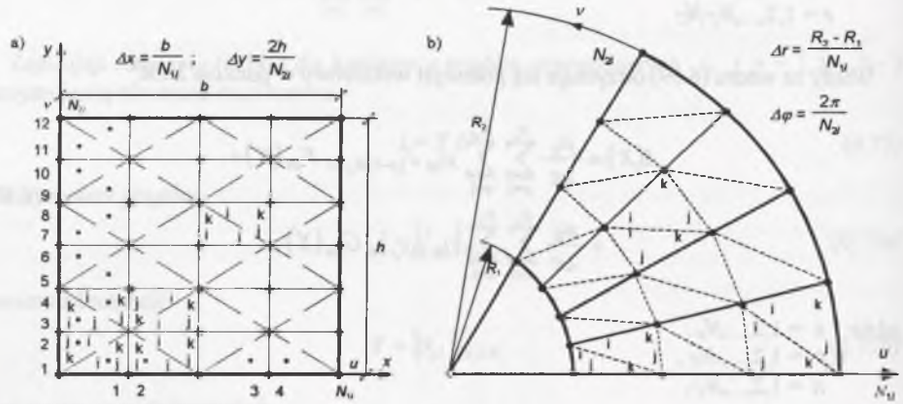
$$\begin{aligned} B_x(X) = {} & \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{p=1}^{N_c} \sum_{s=1}^{N_d} \mu_{rp} J_{(p-1)N_d+s} F_{ps,x}(X) + \\ & + \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{u=1}^{N_c} \sum_{n=1}^{N_\Gamma} \tau_{(u-1)N_\Gamma+n} G_{un,x}(X), \end{aligned} \tag{6.81}$$

$$\begin{aligned} B_y(X) = {} & \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{p=1}^{N_c} \sum_{s=1}^{N_d} \mu_{rp} J_{(p-1)N_d+s} F_{ps,y}(X) + \\ & + \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{u=1}^{N_c} \sum_{n=1}^{N_\Gamma} \tau_{(u-1)N_\Gamma+n} G_{un,y}(X). \end{aligned} \tag{6.81a}$$

# 7. POLE MAGNETYCZNE W OTOCZENIU WYBRANYCH UKŁADÓW OSŁONIĘTYCH TORÓW PRĄDOWYCH

W tym rozdziale zostaną przedstawione wyniki obliczeń i pomiarów (tylko dla toru jednofazowego) impedancji, natężeń pól magnetycznych w otoczeniu typowych, realizowanych w praktyce, jednobiegunowych, jednofazowych i trójfazowych, osłoniętych torów prądowych.

Do obliczeń numerycznych wykorzystano metody i bibliotekę programów opracowanych przez B.Barona i zawartych w pracy [18]. Przekroje przewodów fazowych, osłon i płyt przewodzących dzielono na trójkąty - rys.7.1.




Rys.7.1. Podział przekroju poprzecznego przewodu na trójkąty; a) dla przewodu prostokątnego, b) dla przewodu kołowego

Fig.7.1. Partition of the cross-section of the conductor into triangles; a) for the rectangular conductor, b) for the tubular conductor

Dla przykładów obliczeniowych przyjęto parametry osłoniętych torów prądowych realizowanych przez GEC ALSTHOM T & D [140, 143]:

- rurowy przewód fazowy:
  $R_1 = 2{,}9\cdot10^{-2}$ m,
  $R_2 = 4{,}5\cdot10^{-2}$ m,
  $\gamma_1 = 3{,}7037\cdot10^{7}$ S·m$^{-1}$,

- rurowa osłona:
  $R_3 = 17{,}4\cdot10^{-2}$ m,
  $R_4 = 18{,}0\cdot10^{-2}$ m,
  $\gamma_2 = 1{,}8181\cdot10^{7}$ S·m$^{-1}$.



## 7.1. Pole magnetyczne w otoczeniu jednobiegunowego, jednofazowego, osłoniętego toru prądowego

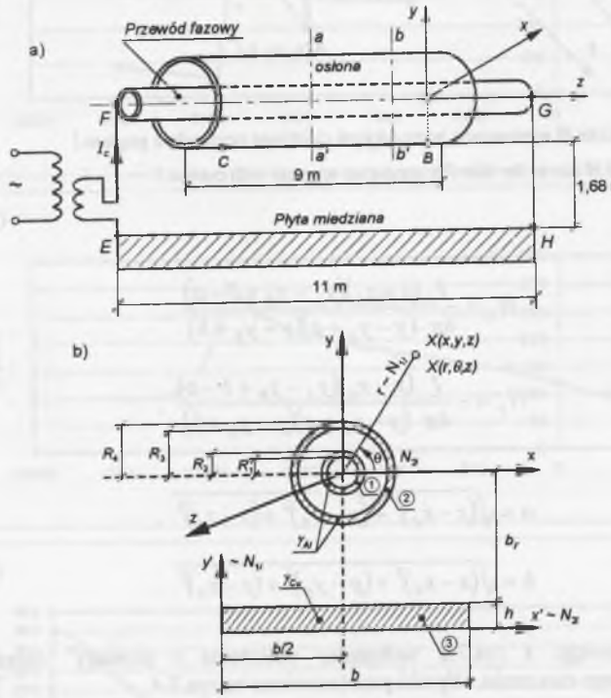
Przedmiotem badań były dwa rozwiązania konstrukcyjne jednobiegunowego, jednofazowego, osłoniętego toru prądowego: z izolowaną osłoną oraz z osłoną zwartą na jej końcach z miedzianą płytą powrotną.

### 7.1.1. Jednobiegunowy, jednofazowy tor prądowy z izolowaną osłoną

Jednobiegunowy, jednofazowy tor prądowy z izolowaną osłoną przedstawiono na rys.7.2.

W wyniku obliczeń numerycznych otrzymano następujące wartości jednostkowych impedancji własnych i wzajemnych:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Z}_{11} = 8{,}85 + j\,202 & \mathcal{Z}_{12} = 0{,}06 + j\,108 & \mathcal{Z}_{13} = 0{,}28 + j\,43{,}8 \\ \mathcal{Z}_{21} = 0{,}06 + j\,108 & \mathcal{Z}_{22} = 8{,}31 + j\,108 & \mathcal{Z}_{23} = 0{,}28 + j\,43{,}8 \\ \mathcal{Z}_{31} = 0{,}28 + j\,43{,}8 & \mathcal{Z}_{32} = 0{,}28 + j\,43{,}8 & \mathcal{Z}_{33} = 7{,}22 + j\,47{,}8 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}\,\Omega\cdot\mathrm{m}^{-1}.$$



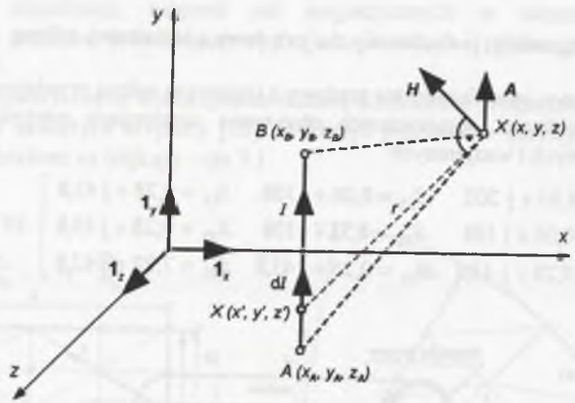

Rys.7.2. Jednobiegunowy, jednofazowy tor prądowy z izolowaną osłoną; a) widok ogólny, b) przekrój $a$-$a'$ (1 - przewód fazowy, 2 - osłona, 3 - miedziana płyta powrotna, $b_r = 1{,}9$ m., $h = 2\cdot10^{-3}$ m, $b = 1{,}9$ m, $\gamma_{Cu} = 5\cdot10^{7}$ S·m$^{-1}$)

Fig.7.2. Single-phase isolated-phase busduct with insulated enclosure; a) overall view, b) section $a$-$a'$ (1 - phase conductor, 2 - enclosure, 3 - return copper plate, $b_r = 1{,}9$ m., $h = 2\cdot10^{-3}$ m, $b = 1{,}9$ m, $\gamma_{Cu} = 5\cdot10^{7}$ S·m$^{-1}$)

Przy obliczeniach natężenia pola magnetycznego uwzględniono wpływ pionowych szyn zasilających *EF* i *GH* (rys.7.2). Uwzględniono, że pole magnetyczne generowane przez te szyny ma dwie składowe, tzn.

$$\boldsymbol{H} = \mathbf{1}_x H_x + \mathbf{1}_z H_z, \tag{7.1}$$

zaś składowe tego pola wyznaczono z rys.7.3 [140, 143].




Rys.7.3. Pole magnetyczne *H* wytworzone przez odcinek cienkiego przewodu z prądem *I*

Fig.7.3. Magnetic field *H* due to the thin flat conductor segment with current *I*

Składowe te

$$H_x = \frac{I}{4\pi}\frac{(z-z_A)(y_A-y_B+b-a)}{(y-y_A+a)(y-y_B+b)}, \tag{7.1a}$$

$$H_z = -\frac{I}{4\pi}\frac{(x-x_A)(y_A-y_B+b-a)}{(y-y_A+a)(y-y_B+b)}, \tag{7.1b}$$

gdzie

$$a = \sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2}, \tag{7.1c}$$

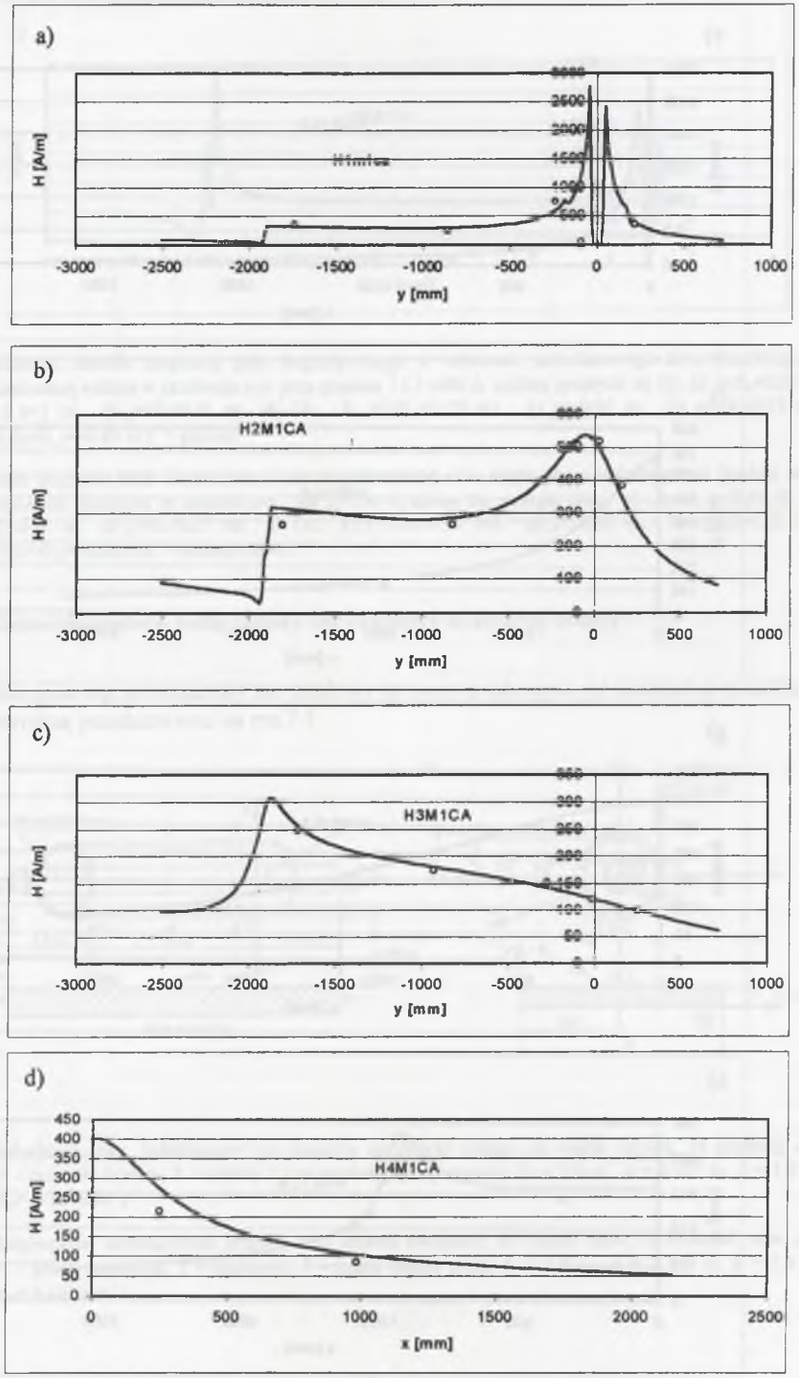
$$b = \sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_B)^2+(z-z_A)^2}. \tag{7.1d}$$

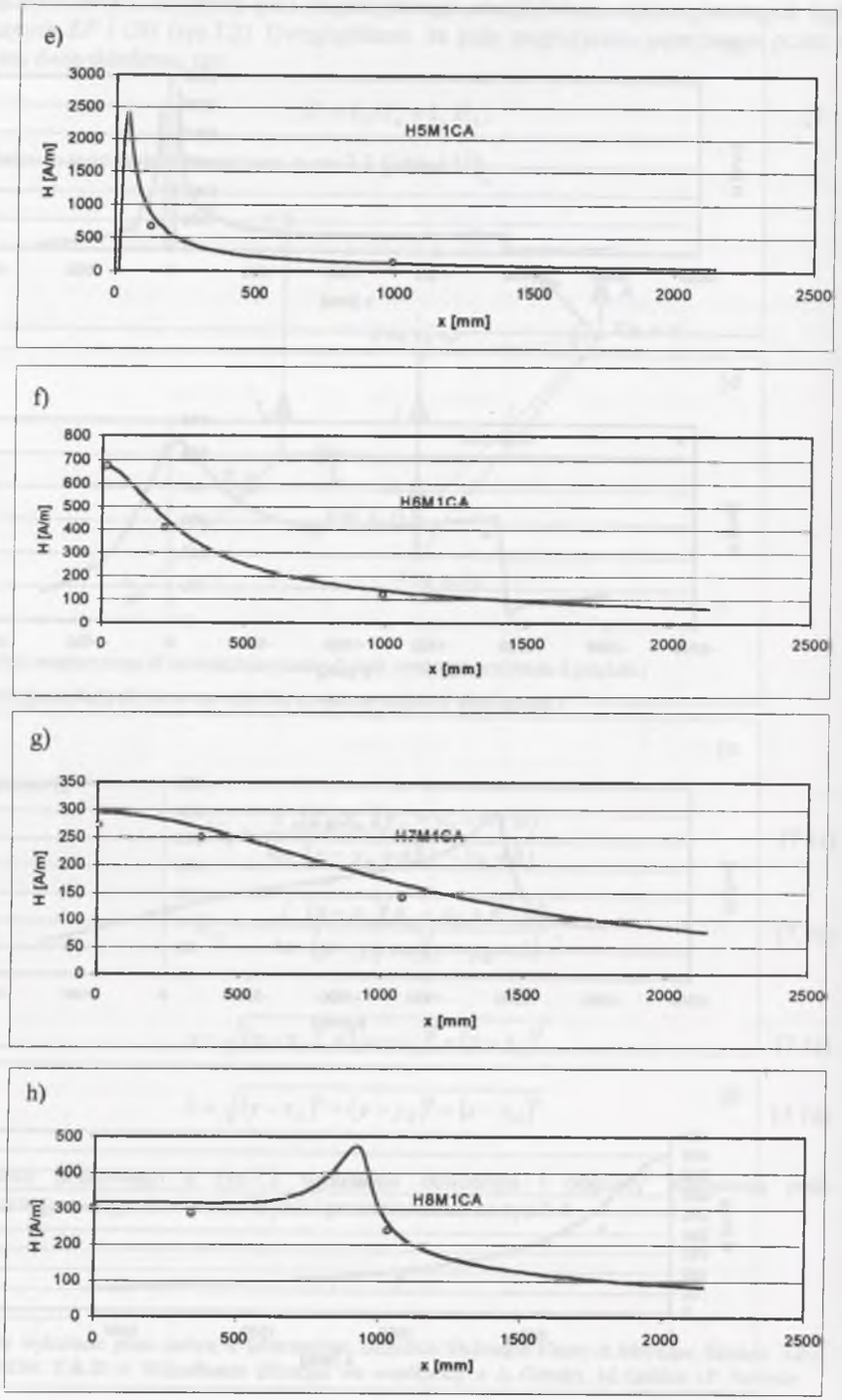
Dla toru prądowego z rys.7.2 wykonano obliczenia i pomiary* natężenia pola magnetycznego w jego otoczeniu. Wyniki przedstawiono na rys.7.4.

---

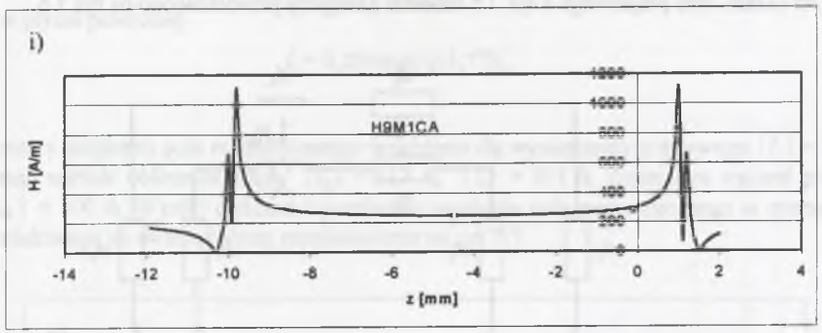
* Pomiary wykonane przez autora w laboratorium Direction Technique Haute et Moyenne Tension GEC ALSTHOM T & D w Villeurbanne (Francja) we współpracy z A. Girodet, M. Guillen i F. Fournier.









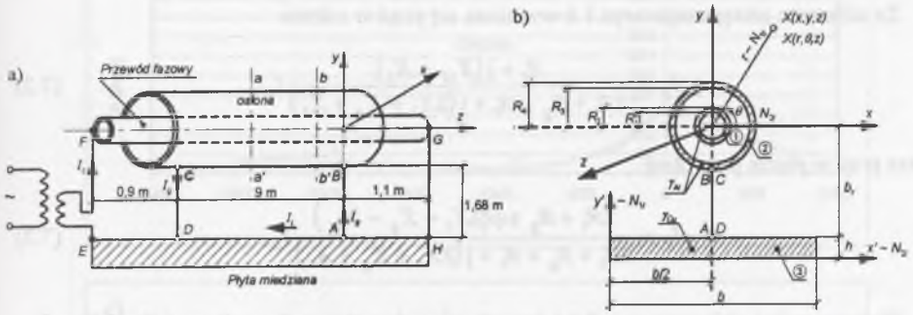




Rys.7.4. Rozkład modułu natężenia pola magnetycznego w otoczeniu jednofazowego toru prądowego z izolowaną osłoną w przekroju *a-a'* przy prądzie $|I_c|$=690 A wzdłuż prostych; a) *Oy*, b) $x=R_4+0{,}03$ m, c) $x=1$ m, d) $y=R_4+0{,}03$ m, e) *Ox*, f) $y=-(R_4+0{,}03$ m), g) $y=-0{,}85$ m, h) $y=-(b_r-0{,}03$ m), i) $\{x=0, y=-0{,}85$ m$\}$; °- pomiar

Fig.7.4. Rms magnetic field distribution in the neighbourhood of a single-phase isolated-phase busduct with insulated enclosure in section *a-a'* for $I_c$=690 A along the straight lines: a) *Oy*, b) $x=R_4+0{,}03$ m, c) $x=1$ m, d) $y=R_4+0{,}03$ m, e) *Ox*, f) $y=-(R_4+0{,}03$ m), g) $y=-0{,}85$ m, h) $y=-(b_r-0{,}03$ m), i) $\{x=0, y=-0{,}85$ m$\}$; °- measurement

### 7.1.2. Jednobiegunowy, jednofazowy tor prądowy ze zwartą osłoną

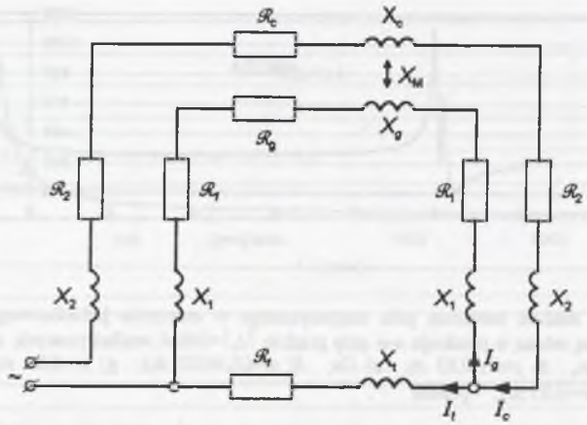
Jednobiegunowy, jednofazowy tor prądowy ze zwartą osłoną na jej końcach z miedzianą płytą powrotną przedstawiono na rys.7.5.




Rys.7.5. Jednobiegunowy, jednofazowy tor prądowy ze zwartą osłoną; a) widok ogólny, b) przekrój *a-a'* (1 - przewód fazowy, 2 - osłona, 3 - miedziana płyta powrotna, $b_r$ = 1,9 m., $h = 2\cdot10^{-3}$ m, $b$ = 1,9 m, $\gamma_{Cu}= 5\cdot10^{7}$ S·m$^{-1}$)

Fig.7.5. Single-phase isolated-phase busduct with shorted enclosure; a) overall view, b) sectional view *a-a'* (1 - phase conductor, 2 - enclosure, 3 - return copper plate, $b_r$ = 1,9 m., $h = 2\cdot10^{-3}$ m, $b$ = 1,9 m, $\gamma_{Cu}= 5\cdot10^{7}$ S·m$^{-1}$)

Dla układu toru prądowego z rys.7.5 schemat zastępczy przedstawiono na rys.7.6.




Rys.7.6. Schemat zastępczy układu z rys.7.5; $\mathcal{R}_c$ i $X_c$ - rezystancja i reaktancja przewodu fazowego, $\mathcal{R}_g$ i $X_g$ - rezystancja i reaktancja osłony, $\mathcal{R}_1$ i $X_1$ - rezystancja i reaktancja szyn pionowych AB i CD, $\mathcal{R}_2$ i $X_2$ - rezystancja i reaktancja szyn pionowych EF i HG, $\mathcal{R}_t$ i $X_t$ - rezystancja i reaktancja miedzianej płyty powrotnej

Fig.7.6. Equivalent diagram of the system fig.7.5; $\mathcal{R}_c$ i $X_c$ - resistance and reactance of the phase conductor, $\mathcal{R}_g$ i $X_g$ - resistance and reactance of the enclosure, $\mathcal{R}_1$ i $X_1$ - resistance and reactance of the vertical busways AB i CD, $\mathcal{R}_2$ i $X_2$ - resistance and reactance of the vertical busways EF i HG, $\mathcal{R}_t$ i $X_t$ - resistance and reactance of the return copper plate.

Ze schematu zastępczego z rys.7.6 wyznacza się prąd w osłonie

$$I_g = \frac{\mathcal{R}_t + j(X_M + X_t)}{2\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_g + \mathcal{R}_t + j(2X_1 + X_g + X_t)} I_c \tag{7.2}$$

oraz prąd w płycie powrotnej

$$I_t = \frac{2\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_g + j(2X_1 + X_g - X_M)}{2\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_g + \mathcal{R}_t + j(2X_1 + X_g + X_t)} I_c . \tag{7.3}$$

Wykorzystując obliczone w p.7.1.1 impedancję jednostkową $\mathcal{Z}_{22}$ osłony ($\mathcal{R}_g + jX_g = Z_{22}$; gdzie impedancja całkowita osłony $Z_{22}=\mathcal{Z}_{22}l_g$, $l_g$ jest długością osłony), wzajemną impedancję jednostkową $\mathcal{Z}_{12}$ ($X_M$ = Im $Z_{12}$, gdzie $Z_{12} = \mathcal{Z}_{12}\, l_g$) i impedancję jednostkową $\mathcal{Z}_{33}$ płyty powrotnej ($\mathcal{R}_t + jX_t = Z_{33}$, gdzie $Z_{33} = \mathcal{Z}_{33}\, l_t$, $l_t$ jest długością płyty powrotnej) oraz obliczając z danych katalogowych (dla szyn pionowych *AB* i *CD*) wartości $\mathcal{R}_1 = 79{,}51\cdot10^{-6}\ \Omega$, $X_1 = 258{,}2\cdot10^{-6}\ \Omega$, oblicza się prądy:

- w osłonie

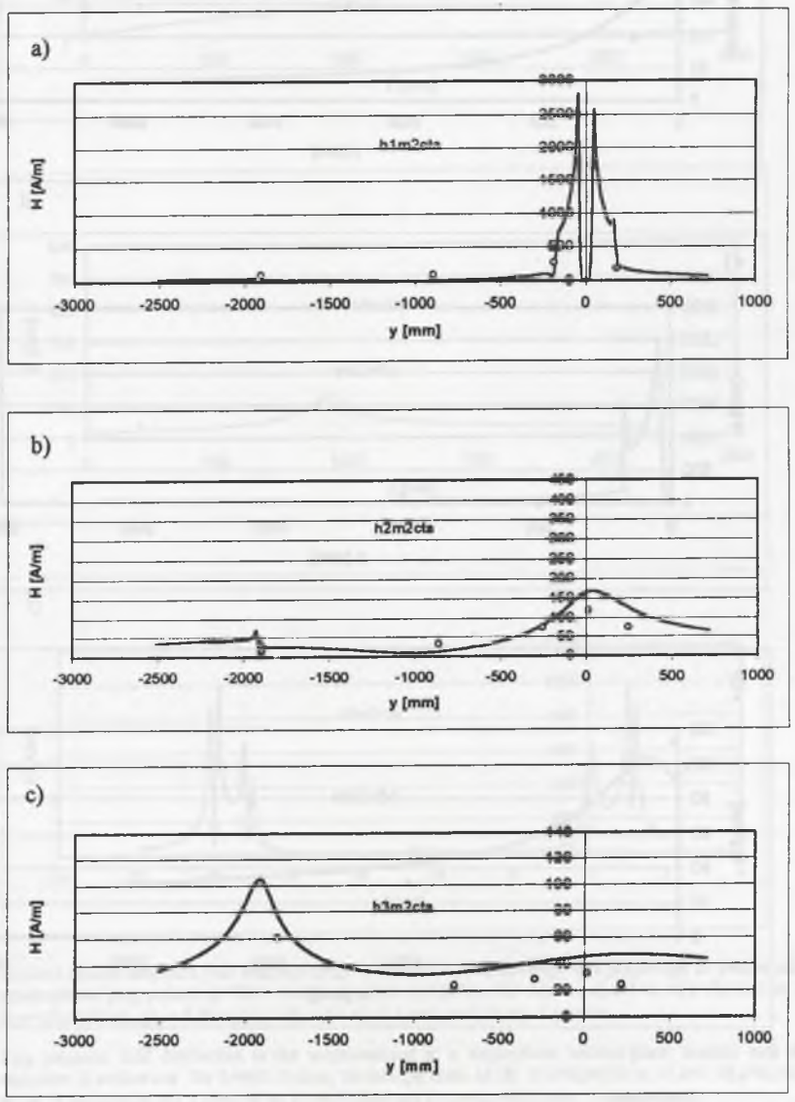
$$I_g = 0{,}718\exp[j6{,}4^\circ]I_c ,$$

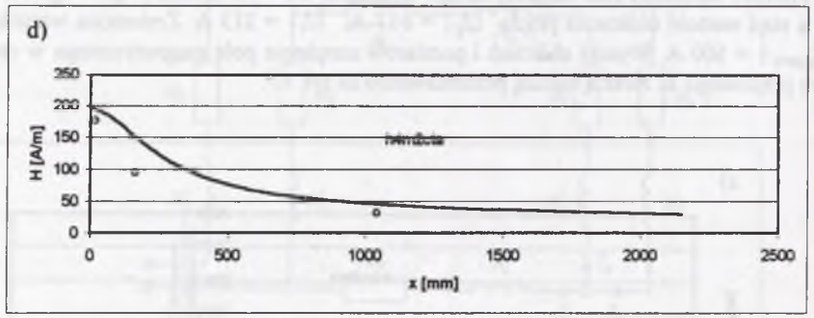


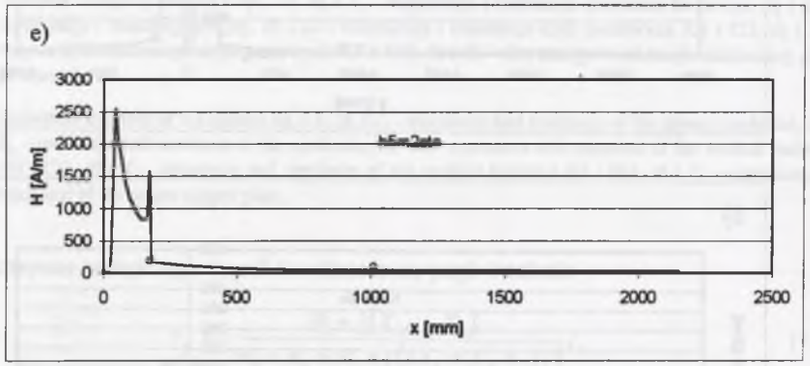
- w płycie powrotnej

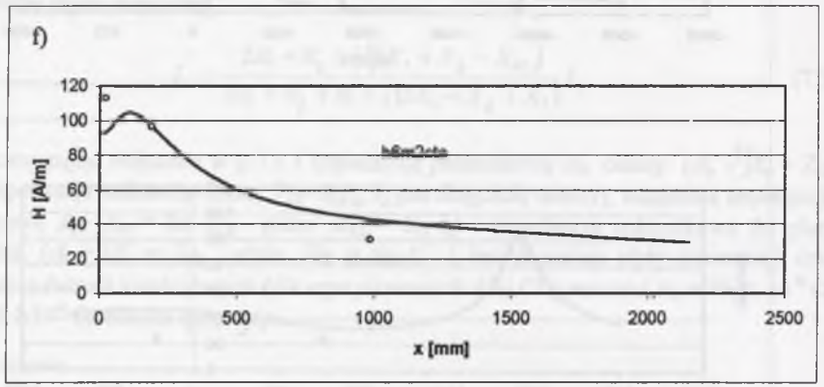
$$I_t = 0{,}296\exp[-j15{,}7^\circ]I_c .$$

Pomiary natężenia pola magnetycznego wykonano dla wymuszenia prądowego $|I_c| = 720$ A, a stąd wartość obliczona prądu $|I_g| = 517$ A, $|I_t| = 213$ A. Zmierzona wartość prądu $|I_{g\ pom.}| = 500$ A. Wyniki obliczeń i pomiarów natężenia pola magnetycznego w otoczeniu toru prądowego ze zwartą osłoną przedstawiono na rys.7.7.

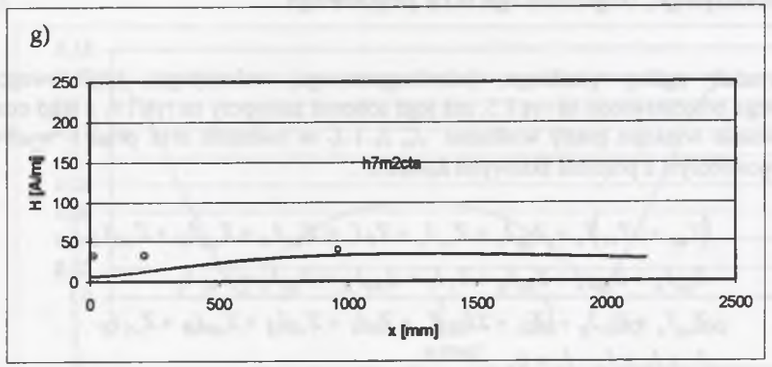


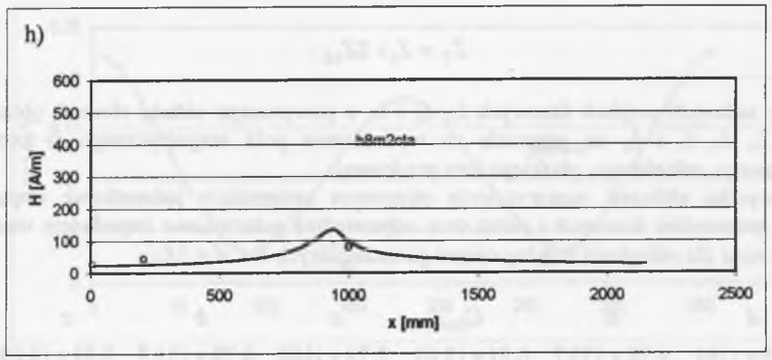


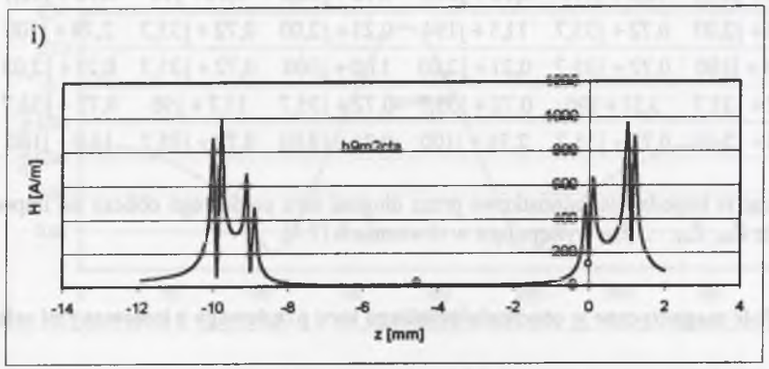






Rys.7.7. Rozkład modułu natężenia pola magnetycznego w otoczeniu jednofazowego toru prądowego ze zwartą osłoną w przekroju *a-a'* przy prądzie $I_c$=720 A wzdłuż prostych: a) *Oy*, b) $x=R_4$+0,03 m, c) $x$=1 m, d) $y=R_4$+0,03 m, e) *Ox*, f) $y$=-($R_4$+0,03 m), g) $y$=-0,85 m, h) $y$=-($b_r$-0,03 m), i) { $x$=0, $y$=-0,85 m}; °- pomiar

Fig.7.7. Rms magnetic field distribution in the neighbourhood of a single-phase isolated-phase busduct with shorted enclosure in section *a-a'* for $I_c$=690 A along the straight lines: a) *Oy*, b) $x=R_4$+0,03 m, c) $x$=1, d) $y=R_4$+0,03 m, e) *Ox*, f) $y$=-($R_4$+0,03 m), g) $y$=-0,85 m, h) $y$=-($b_r$-0,03 m), i) { $x$=0, $y$=-0,85 m}; °- measurement

## 7.2. Pole magnetyczne w otoczeniu płaskiego, jednobiegunowego, osłoniętego, trójfazowego toru prądowego

Przypadek ogólny płaskiego, jednobiegunowego, osłoniętego, trójfazowego toru prądowego przedstawiono na rys.1.5, zaś jego schemat zastępczy na rys.1.6, a stąd otrzymuje się równania wiążące prądy wzdłużne $I_a$, $I_b$ i $I_c$ w osłonach oraz prąd $I_t$ w obwodzie ziemnopowrotnym z prądami fazowymi $I_A$, $I_B$ i $I_C$ :

$$\left.\begin{aligned}
&(Z_{aa}+2Z_{b1})I_a+Z_{ab}I_b+Z_{ac}I_c+Z_TI_t=Z_{aA}I_A+Z_{aB}I_B+Z_{aC}I_C\\
&Z_{ba}I_a+Z_{bb}I_b+Z_{bc}I_c+Z_TI_t=Z_{bA}I_A+Z_{bB}I_B+Z_{bC}I_C\\
&Z_{ca}I_a+Z_{cb}I_b+(Z_{cc}+2Z_{b1})I_c+Z_TI_t=Z_{cA}I_A+Z_{cB}I_B+Z_{cC}I_C\\
&I_a+I_b+I_c-I_t=0,
\end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

gdzie

$$Z_T=Z_t+2Z_{b2}\,. \tag{7.4a}$$

Przy zadanych prądach fazowych $I_A$, $I_B$ i $I_C$ z powyższego układu równań oblicza się prądy $I_a$, $I_b$, $I_c$ i $I_t$, co pozawala na wyznaczenie pola magnetycznego w otoczeniu trójfazowego, osłoniętego, płaskiego toru prądowego.

W wyniku obliczeń numerycznych otrzymano następujące jednostkowe impedancje własne przewodów fazowych i osłon oraz odpowiednie jednostkowe impedancje wzajemne między nimi dla odległości między osiami poszczególnych faz $d=3R_4$.

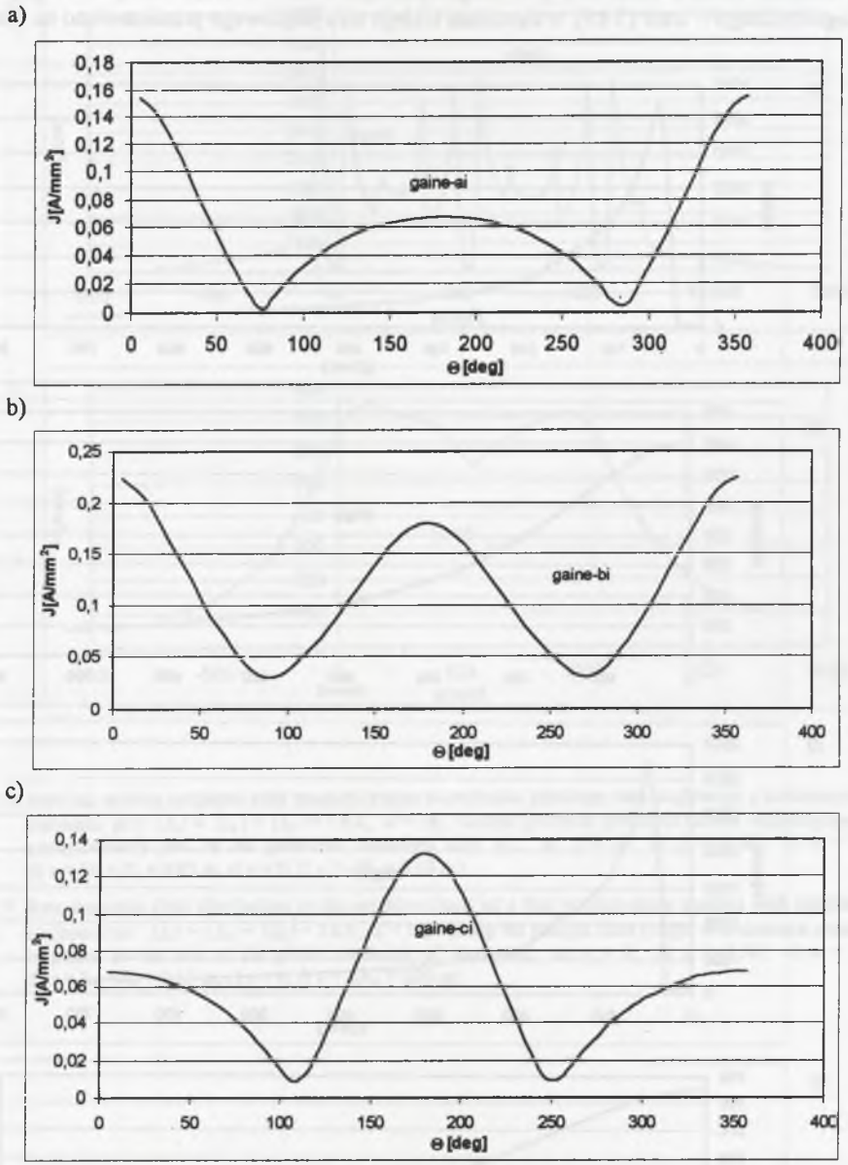
$$\begin{array}{c}
 \\ A\\ B\\ C\\ a\\ b\\ c
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} A & B & C & a & b & c \end{array}\\
\begin{bmatrix}
11{,}5+j194 & 0{,}72+j35{,}7 & 0{,}21+j2{,}03 & 2{,}74+j100 & 0{,}72+j35{,}7 & 0{,}21+j2{,}03\\
0{,}72+j35{,}7 & 12{,}3+j190 & 0{,}72+j35{,}7 & 0{,}72+j35{,}7 & 3{,}51+j96 & 0{,}72+j35{,}7\\
0{,}21+j2{,}03 & 0{,}72+j35{,}7 & 11{,}5+j194 & 0{,}21+j2{,}03 & 0{,}72+j35{,}7 & 2{,}74+j100\\
2{,}74+j100 & 0{,}72+j35{,}7 & 0{,}21+j2{,}03 & 11{,}0+j100 & 0{,}72+j35{,}7 & 0{,}21+j2{,}03\\
0{,}72+j35{,}7 & 3{,}51+j96 & 0{,}72+j35{,}7 & 0{,}72+j35{,}7 & 11{,}7+j96 & 0{,}72+j35{,}7\\
0{,}21+j2{,}03 & 0{,}72+j35{,}7 & 2{,}74+j100 & 0{,}21+j2{,}03 & 0{,}72+j35{,}7 & 11{,}0+j100
\end{bmatrix}
\end{array}
\cdot 10^{-6}\,\frac{\Omega}{\mathrm{m}}$$

Mnożąc te impedancje jednostkowe przez długość toru prądowego oblicza się impedancje całkowite $Z_{aa}$, $Z_{aA}$, ..., $Z_{cc}$, występujące w równaniach (7.4).

### 7.2.1. Pole magnetyczne w otoczeniu płaskiego toru prądowego z izolowanymi osłonami

Przyjmując w schemacie zastępczym toru prądowego (rys.1.6.), że impedacje $Z_{b1}$, zwierające osłony między sobą oraz impedancje $Z_{b2}$, łączące osłony z ziemią, są bardzo duże, otrzymuje się tor prądowy z izolowanymi osłonami. Wtedy w osłonach nie płyną prądy wzdłużne, ale istnieją prądy wirowe indukowane przez pola magnetyczne własnych prądów fazowych i prądów faz sąsiednich. Rozkład modułów tych prądów na powierzchniach zewnętrznych osłon przedstawiono na rys.7.8.

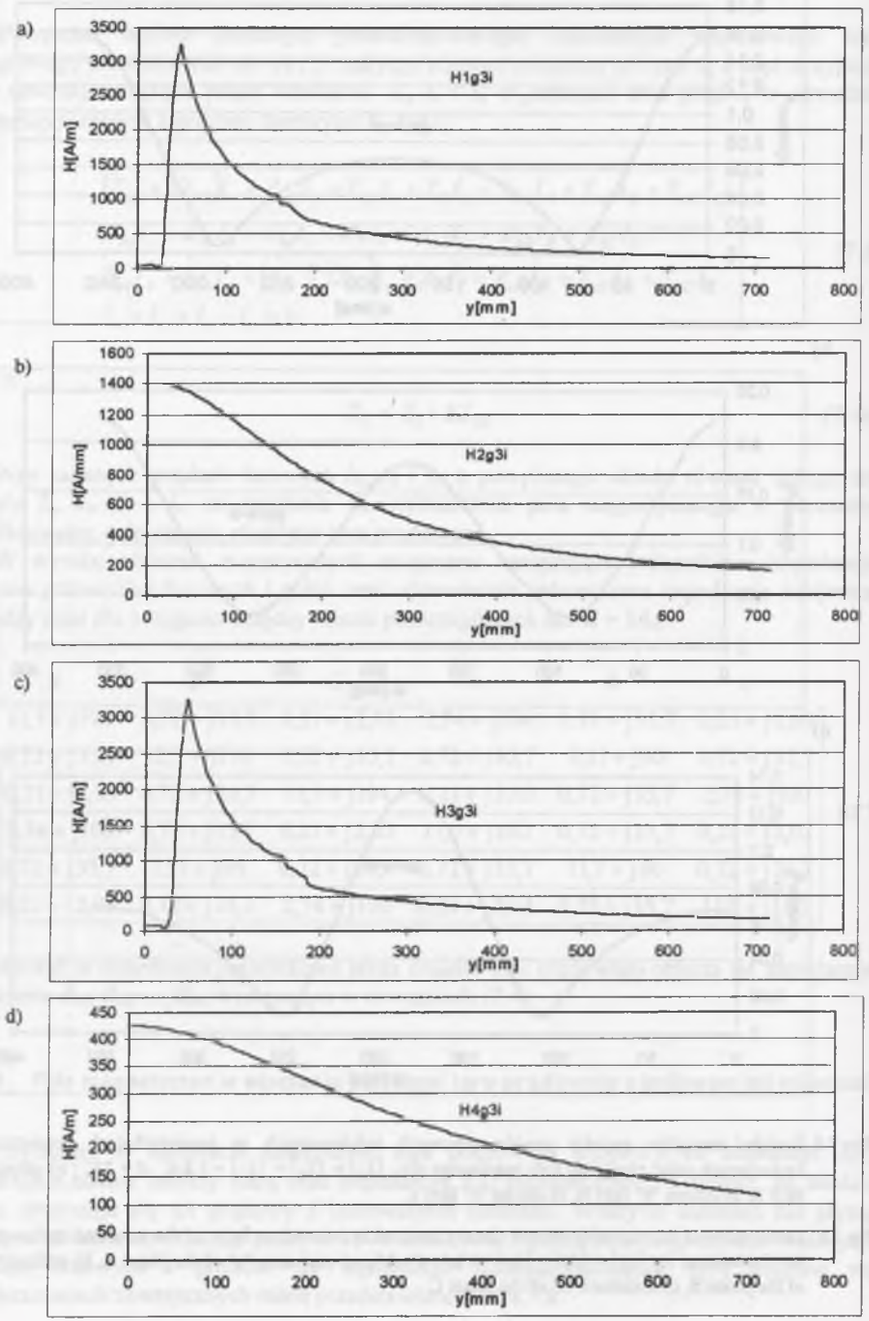




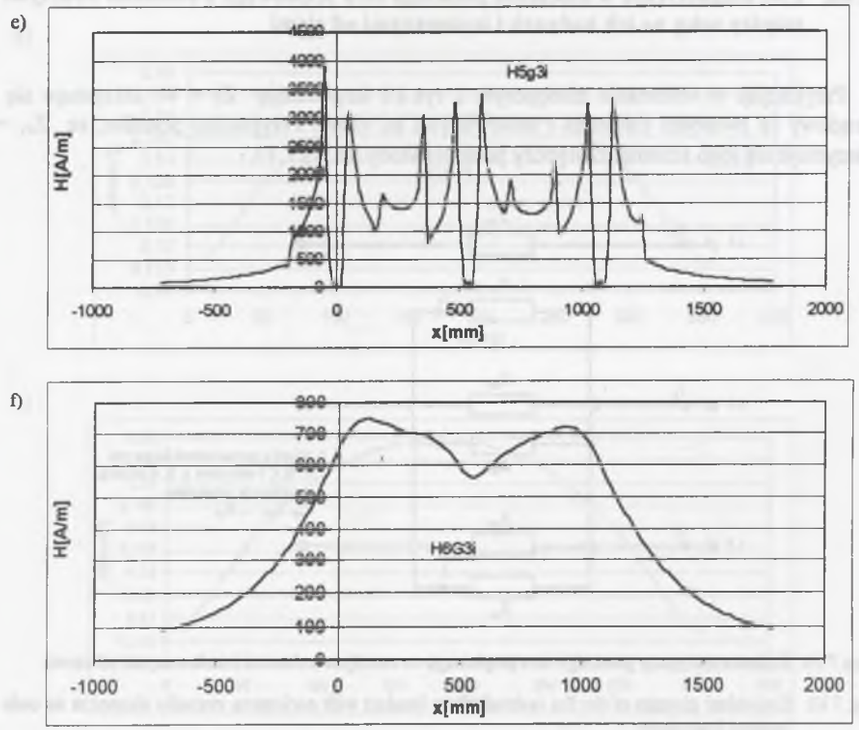

Rys.7.8. Rozkład modułów gęstości prądów wirowych indukowanych na powierzchniach zewnętrznych izolowanych osłon płaskiego toru prądowego dla $|I_A|=|I_B|=|I_C|=1$ kA, $d=3R_4$ ; a) osłona "a" fazy A, b) osłona "b" fazy B, c) osłona "c" fazy C

Fig.7.8. Distribution of the rms eddy current density induced in external surfaces of the insulated enclosures of the flat busduct for $|I_A|=|I_B|=|I_C|=1$ kA, $d=3R_4$; a) enclosure "a" of the phase A, b) enclosure "b" of the phase B, c) enclosure "c" of the phase C

Rozkład modułu natężenia pola magnetycznego, wartości $|H_a|$ dużej osi elipsy pola magnetycznego – wzór (5.45), w otoczeniu takiego toru prądowego przedstawiono na rys.7.9.





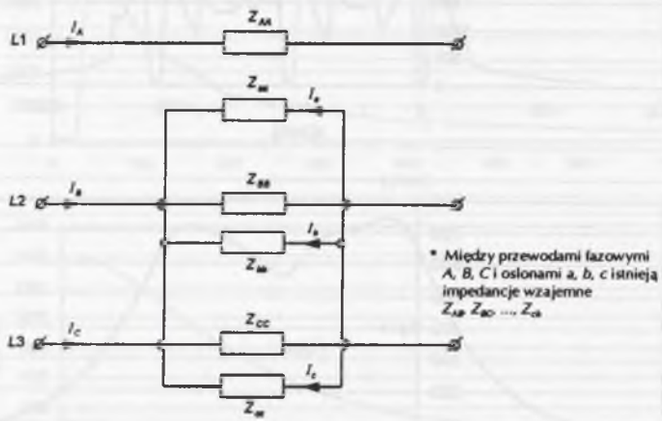




Rys.7.9. Rozkład modułu natężenia pola magnetycznego w otoczeniu płaskiego toru prądowego z izolowanymi osłonami przy $|I_A| = |I_B| = |I_C| = 1$ kA, $d = 3R_4$ wzdłuż prostych (początek układu współrzędnych umiejscowiony jest na osi przewodu fazowego fazy A): a) $x = 0$, b) $x = 0{,}5d$, c) $x = d$, d) $x = 2d + R_4 + 0{,}03$ m, e) $y = 0$, f) $y = -(R_4 + 0{,}03$ m)

Fig.7.9. Rms magnetic field distribution in the neighbourhood of a flat isolated-phase busduct with insulated enclosure for $|I_A| = |I_B| = |I_C| = 1$ kA, $d = 3R_4$ along the straight lines (origin of coordinate system is placed in the axis of the phase conductor of phase A): a) $x = 0$, b) $x = 0{,}5d$, c) $x = d$, d) $x = 2d + R_4 + 0{,}03$ m, e) $y = 0$, f) $y = -(R_4 + 0{,}03$ m)

### 7.2.2. Pole magnetyczne w otoczeniu płaskiego toru prądowego z osłonami zwartymi między sobą na ich końcach i izolowanymi od ziemi

Przyjmując w schemacie zastępczym z rys.1.6 impedancję $Z_T = \infty$ otrzymuje się tor prądowy ze zwartymi osłonami i izolowanymi od ziemi. Przyjmując ponadto, że $Z_{b1} = 0$, otrzymuje się jego schemat zastępczy przedstawiony na rys.7.10.




Rys.7.10. Schemat zastępczy płaskiego toru prądowego ze zwartymi osłonami i izolowanymi od ziemi

Fig.7.10. Equivalent diagram of the flat isolated-phase busduct with enclosures mutually shorted at its ends and isolated from earth

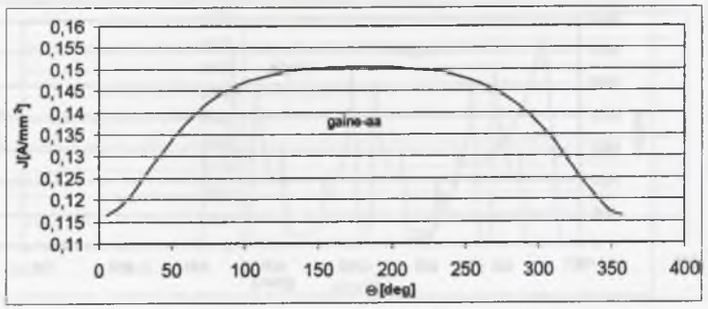
Wtedy zapisuje się następujące równania wiążące prądy fazowe $I_A$, $I_B$ i $I_A$ z prądami wzdłużnymi $I_a$, $I_b$ i $I_c$, płynącymi w osłonach:

$$\left.\begin{aligned}
&(Z_{aa}-Z_{ba})I_a+(Z_{ab}-Z_{bb})I_b+(Z_{ac}-Z_{bc})I_c=(Z_{aA}-Z_{bA})I_A+\\
&\qquad+(Z_{aB}-Z_{bB})I_B+(Z_{aC}-Z_{bC})I_C,\\
&(Z_{ca}-Z_{ba})I_a+(Z_{cb}-Z_{bb})I_b+(Z_{cc}-Z_{bc})I_c=(Z_{cA}-Z_{bA})I_A+\\
&\qquad+(Z_{cB}-Z_{aB})I_B+(Z_{cC}-Z_{aC})I_C,\\
&I_a+I_b+I_c=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(7.5)$$

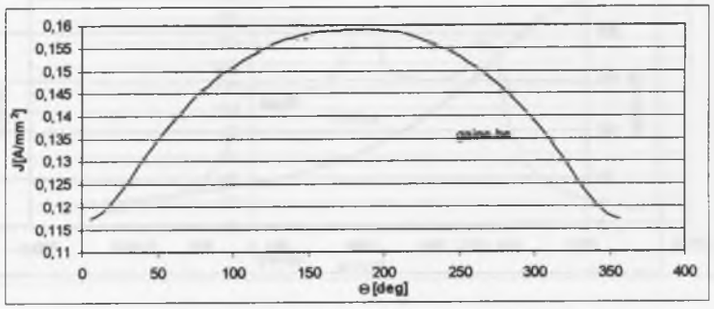
Z powyższych równań wyznacza się prądy wzdłużne w osłonach w zależności od prądów w przewodach fazowych. Umożliwia to obliczenie rozkładów gęstości prądów w osłonach - rys.7.11, jak również natężenia pola magnetycznego w otoczeniu takiego toru - rys.7.12.



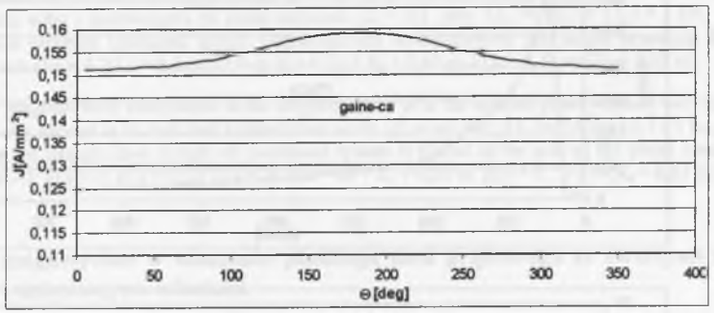
a)




b)



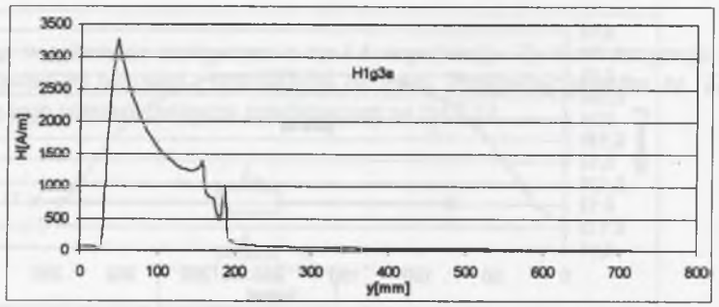

c)



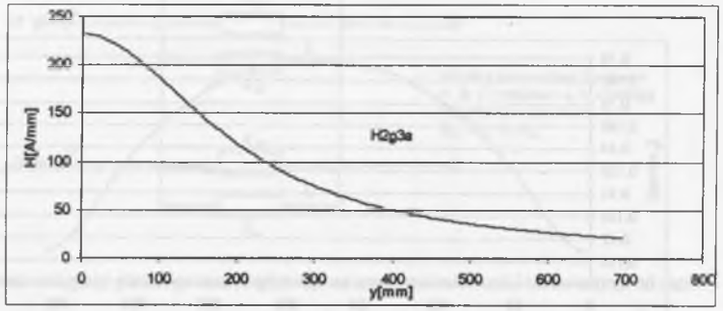

Rys.7.11. Rozkład modułów gęstości prądów na powierzchniach zewnętrznych osłon zwartych między sobą i izolowanych od ziemi, płaskiego toru prądowego dla $|I_A| = |I_B| = |I_C| = 1$ kA, $d = 3R_4$; a) osłona "a" fazy A, b) osłona "b" fazy B, c) osłona "c" fazy C

Fig.7.11. Distribution of the rms eddy current density induced in external surfaces of the enclosures mutually shorted at its ends and isolated from earth of the flat busduct for $|I_A| = |I_B| = |I_C| = 1$ kA, $d = 3R_4$; a) enclosure "a" of the phase A, b) enclosure "b" of the phase B, c) enclosure "c" of the phase C

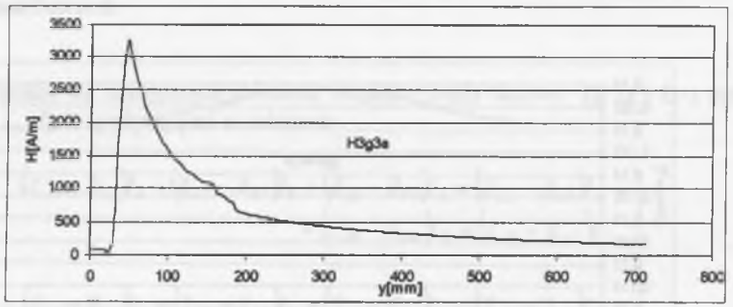
a)



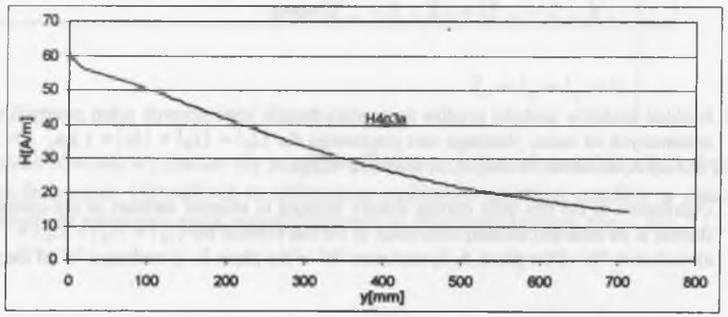

b)




c)

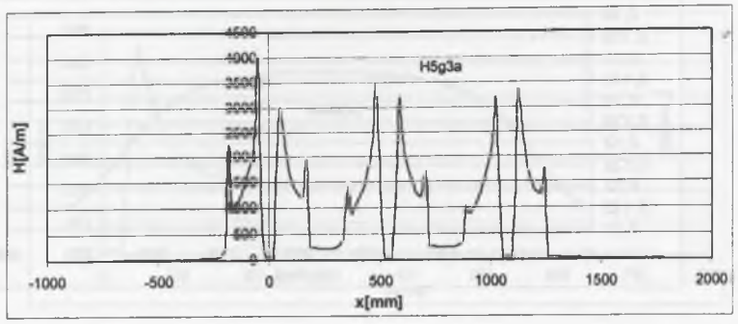



d)

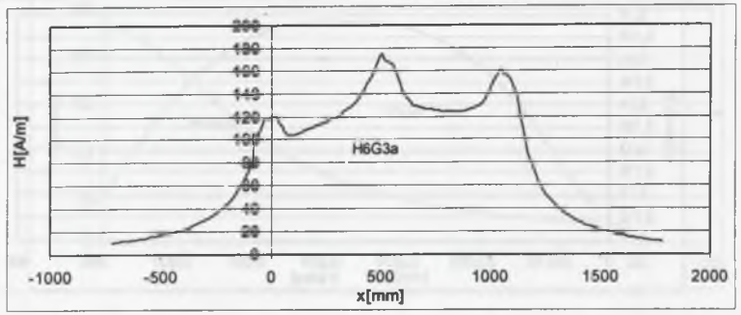





e)




f)



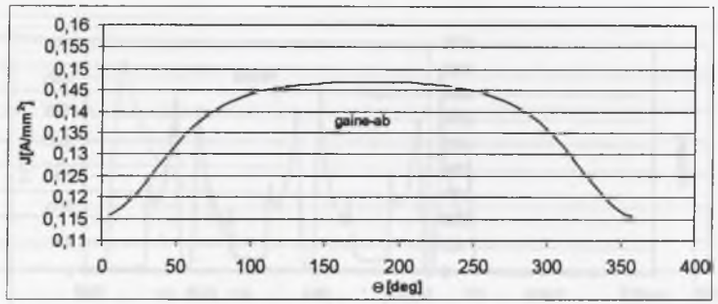

Rys.7.12. Rozkład modułu natężenia pola magnetycznego w otoczeniu płaskiego toru prądowego ze zwartymi między sobą i izolowanymi od ziemi osłonami ($Z_T = \infty$) przy $|I_A| = |I_B| = |I_C| = 1$ kA, $d = 3R_4$ wzdłuż prostych (początek układu współrzędnych umiejscowiony jest na osi przewodu fazowego fazy A): a) $x = 0$, b) $x = 0{,}5d$, c) $x = d$, d) $x = 2d + R_4 + 0{,}03$ m, e) $y = 0$, f) $y = -(R_4 + 0{,}03$ m)

Fig.7.12. Rms magnetic field distribution in the neighbourhood of a flat isolated-phase busduct with enclosures mutually shorted at its ends and isolated from earth ($Z_T = \infty$) for $|I_A| = |I_B| = |I_C| = 1$ kA, $d = 3R_4$ along the straight lines (origin of coordinate system is placed in the axis of the phase conductor of phase A): a) $x = 0$, b) $x = 0{,}5d$, c) $x = d$, d) $x = 2d + R_4 + 0{,}03$ m, e) $y = 0$, f) $y = -(R_4 + 0{,}03$ m)

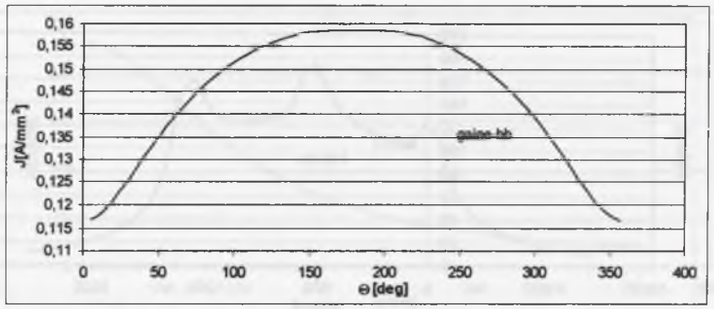
### 7.2.3. Pole magnetyczne w otoczeniu płaskiego toru prądowego ze zwartymi między sobą i uziemionymi osłonami

Do obliczeń numerycznych przyjmuje się, że $Z_{b1} = 0$ i wtedy bada się pole magnetyczne dla różnych wartości impedancji całkowitej uziemienia $Z_T = Z_t + 2Z_{b2}$. Odpowiednie rozkłady gęstości prądów przedstawiono na rys.7.13, rys.7.15 i rys.7.17, zaś rozkłady natężeń pól magnetycznych na rys.7.14, rys.7.16 i rys.7.18.

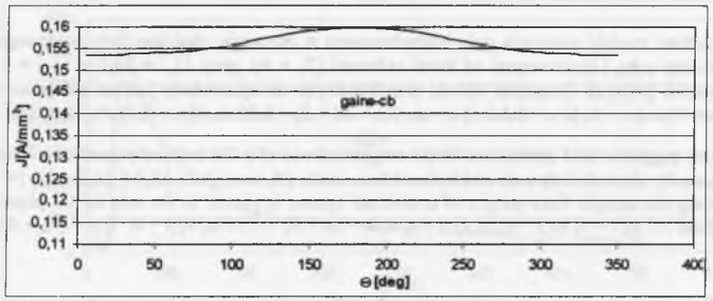
a)




b)




c)

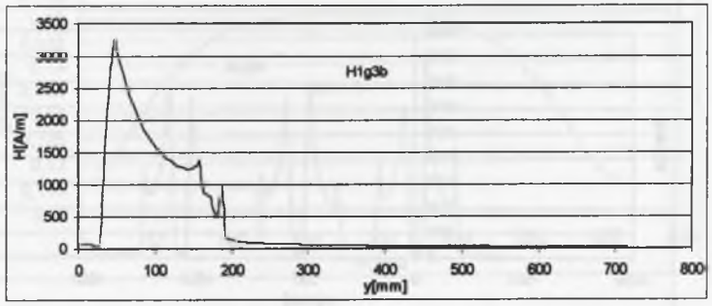



Rys.7.13. Rozkład modułów gęstości prądów na powierzchniach zewnętrznych osłon zwartych między sobą i uziemionych poprzez impedancję $Z_T = 0$, płaskiego toru prądowego dla $|I_A| = |I_B| = |I_C| = 1$ kA, $d = 3R_4$ ; a) osłona "a" fazy A, b) osłona "b" fazy B, c) osłona "c" fazy C

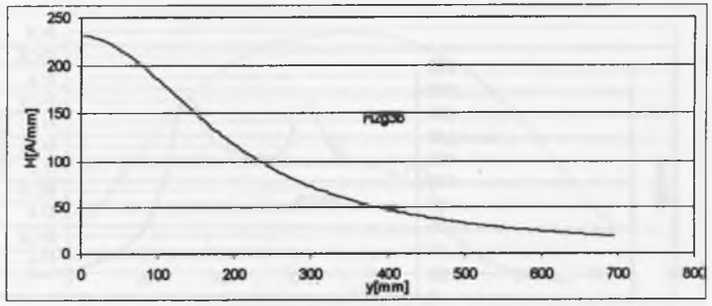
Fig.7.13. Distribution of the rms eddy current density induced in external surfaces of the enclosures mutually shorted and grounded by impedance $Z_T = 0$ of the flat busduct for $|I_A| = |I_B| = |I_C| = 1$ kA, $d = 3R_4$, a) enclosure "a" of the phase A, b) enclosure "b" of the phase B, c) enclosure "c" of the phase C



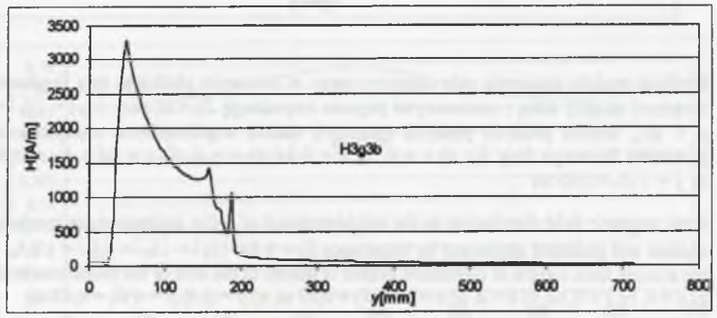
a)



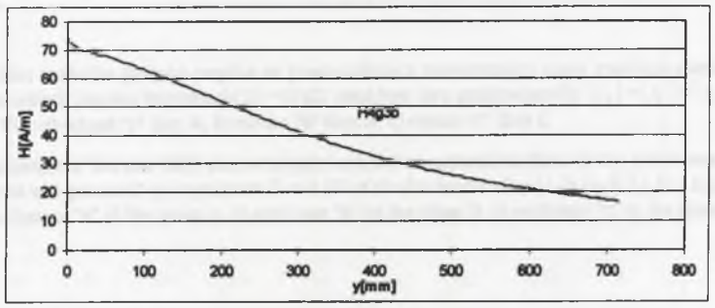

b)



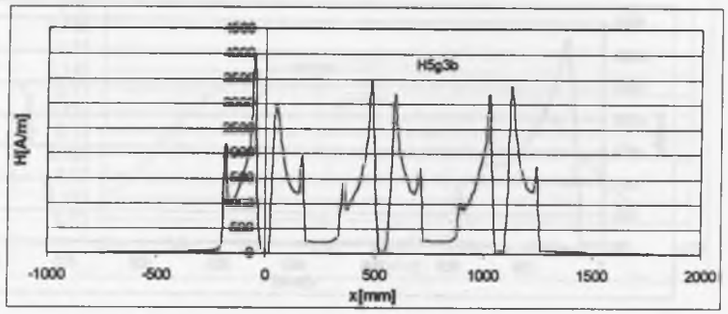

c)



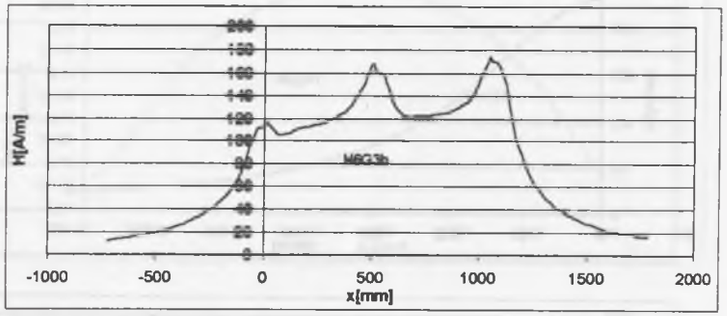

d)



e)




f)

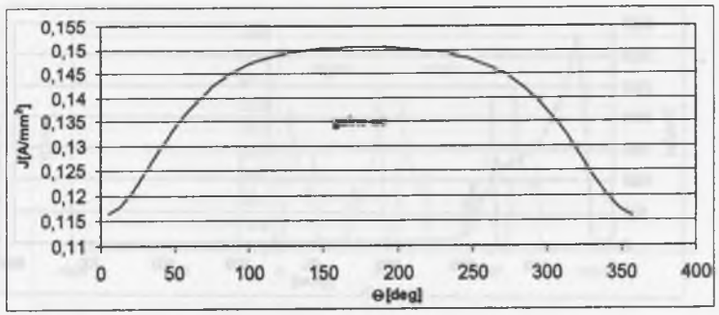



Rys.7.14. Rozkład modułu natężenia pola magnetycznego w otoczeniu płaskiego toru prądowego z osłonami zwartymi między sobą i uziemionymi poprzez impedancję $Z_T = 0$, przy $|I_A| = |I_B| = |I_C| = 1$ kA, $d = 3R_4$, wzdłuż prostych prostych (początek układu współrzędnych umiejscowiony jest na osi przewodu fazowego fazy A); a) $x = 0$, b) $x = 0{,}5d$, c) $x = d$, d) $x = 2d + R_4 + 0{,}03$ m, e) $y = 0$, f) $y = -(R_4 + 0{,}03$ m)

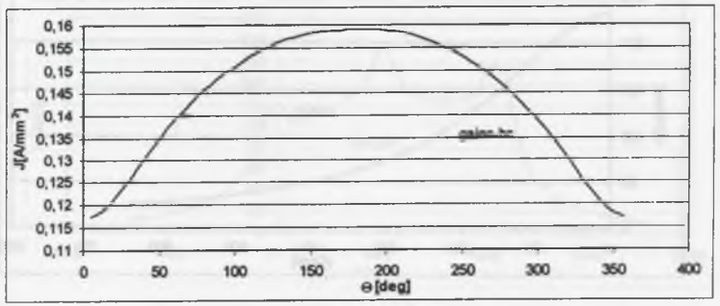
Fig.7.14. Rms magnetic field distribution in the neighbourhood of a flat isolated-phase busduct with mutually shorted and grounded enclosures by impedance $Z_T = 0$ for $|I_A| = |I_B| = |I_C| = 1$ kA, $d = 3R_4$ along the straight lines (origin of coordinate system is placed in the axis of the phase conductor of phase A); a) $x = 0$, b) $x = 0{,}5d$, c) $x = d$, d) $x = 2d + R_4 + 0{,}03$ m, e) $y = 0$, f) $y = -(R_4 + 0{,}03$ m)



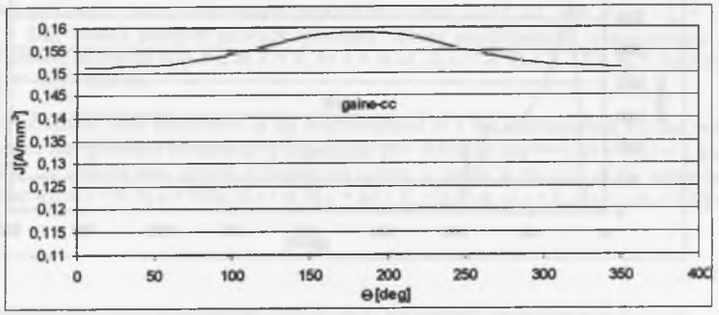
a)




b)



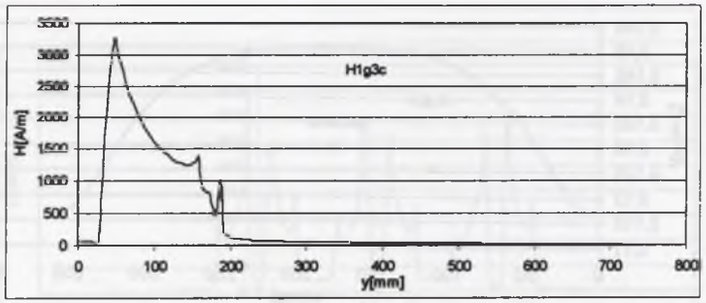

c)



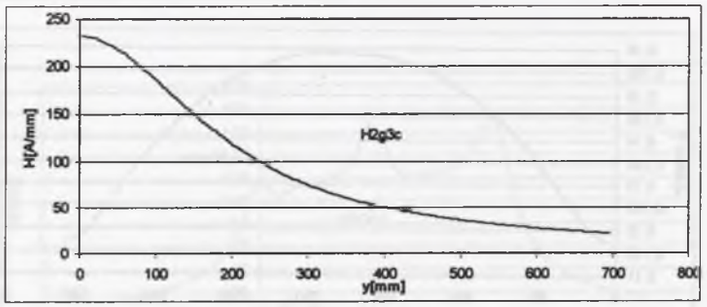

Rys.7.15. Rozkład modułów gęstości prądów na powierzchniach zewnętrznych osłon zwartych między sobą i uziemionych poprzez impedancję $Z_T = 0{,}1\Omega$, płaskiego toru prądowego dla $|I_A| = |I_B| = |I_C| = 1$ kA, $d = 3R_4$; a) osłona "a" fazy A, b) osłona "b" fazy B, c) osłona "c" fazy C

Fig.7.15. Distribution of the rms eddy current density induced in external surfaces of the enclosures mutually shorted and grounded by impedance $Z_T = 0{,}1\Omega$ of the flat busduct for $|I_A| = |I_B| = |I_C| = 1$ kA, $d = 3R_4$; a) enclosure "a" of the phase A, b) enclosure "b" of the phase B, c) enclosure "c" of the phase C

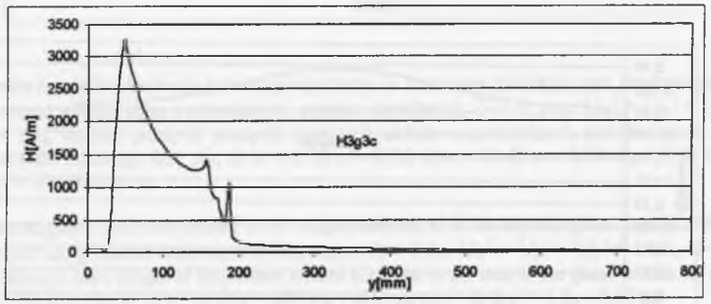
a)



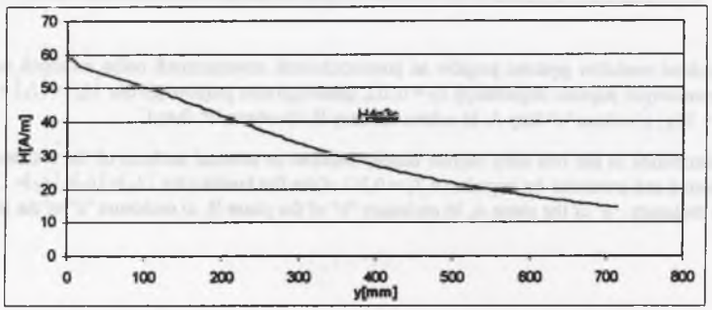

b)




c)

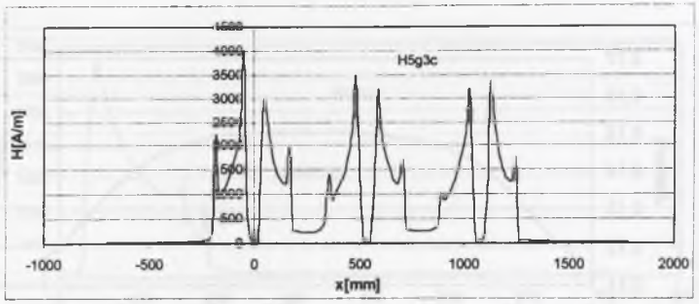



d)

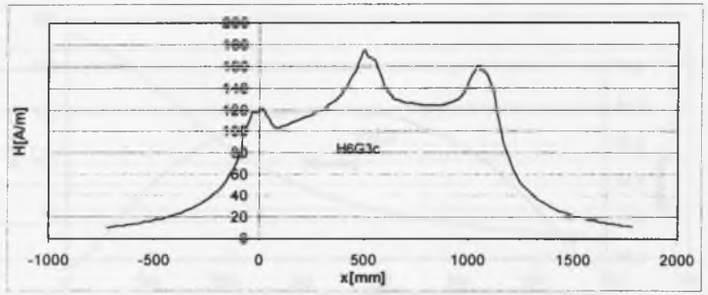





e)



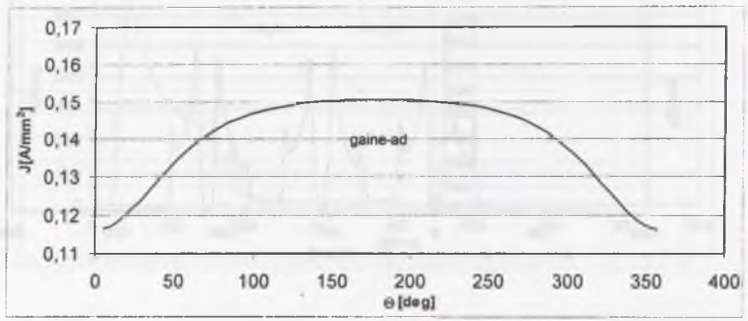

f)



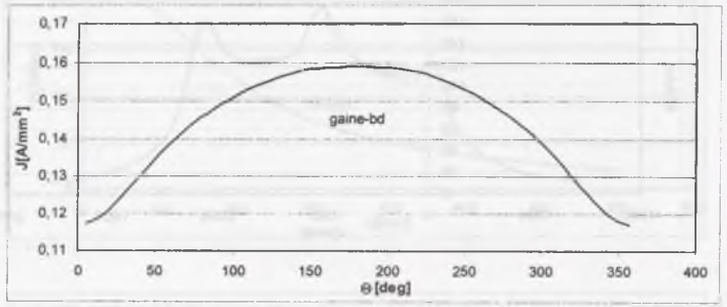

Rys.7.16. Rozkład modułu natężenia pola magnetycznego w otoczeniu płaskiego toru prądowego z osłonami zwartymi między sobą i uziemionymi poprzez impedancję $Z_T = 0.1\Omega$, przy $|I_A| = |I_B| = |I_C| = 1$ kA, $d = 3R_4$, wzdłuż prostych prostych (początek układu współrzędnych umiejscowiony jest na osi przewodu fazowego fazy A); a) $x = 0$, b) $x = 0{,}5d$, c) $x = d$, d) $x = 2d + R_4 + 0{,}03$ m, e) $y = 0$, f) $y = -(R_4 + 0{,}03$ m)

Fig.7.16. Rms magnetic field distribution in the neighbourhood of a flat isolated-phase busduct with mutually shorted and grounded enclosures by impedance $Z_T = 0.1\Omega$ for $|I_A| = |I_B| = |I_C| = 1$ kA, $d = 3R_4$ along the straight lines (origin of coordinate system is placed in the axis of the phase conductor of phase A); a) $x = 0$, b) $x = 0{,}5d$, c) $x = d$, d) $x = 2d + R_4 + 0{,}03$ m, e) $y = 0$, f) $y = -(R_4 + 0{,}03$ m)

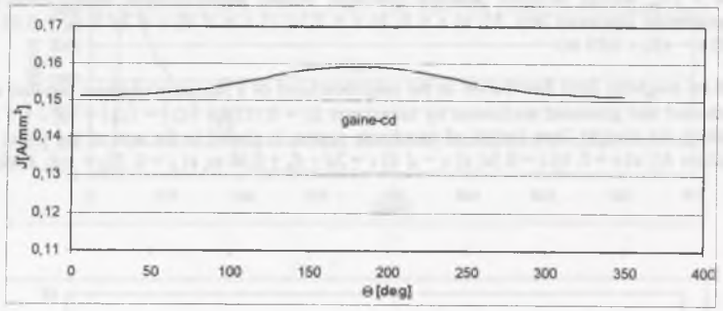
a)




b)




c)

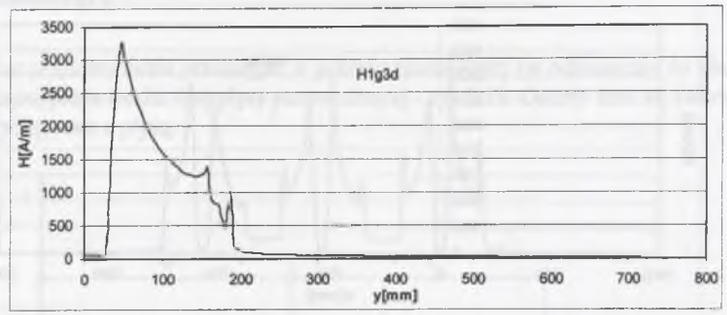



Rys.7.17. Rozkład modułów gęstości prądów na powierzchniach zewnętrznych osłon zwartych między sobą i uziemionych poprzez impedancję $Z_T = 10\Omega$, płaskiego toru prądowego dla $|I_A| = |I_B| = |I_C| = 1$ kA, $d = 3R_4$ ; a) osłona "a" fazy A, b) osłona "b" fazy B, c) osłona "c" fazy C

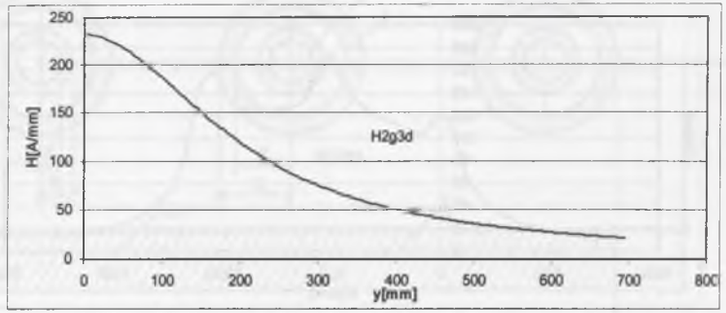
Fig.7.17. Distribution of the rms eddy current density induced in external surfaces of the enclosures mutually shorted and grounded by impedance $Z_T = 10$ of the flat busduct for $|I_A| = |I_B| = |I_C| = 1$ kA, $d = 3R_4$; a) enclosure "a" of the phase A, b) enclosure "b" of the phase B, c) enclosure "c" of the phase C



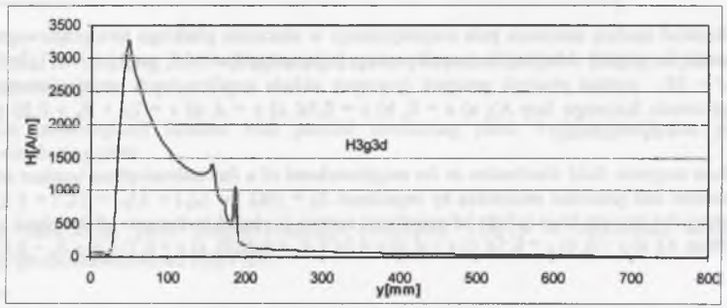
a)



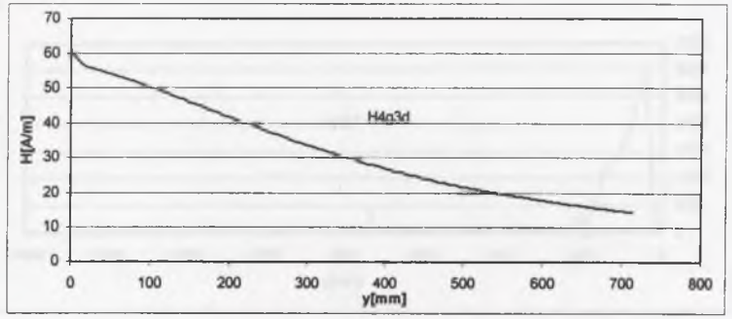

b)



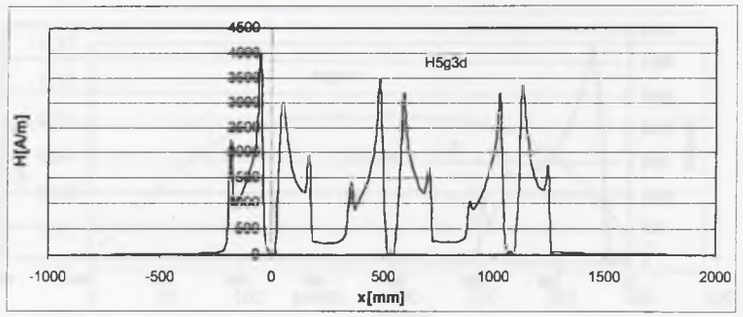

c)



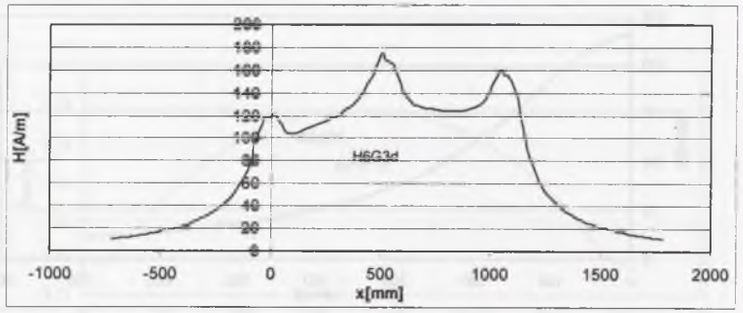

d)



e)




f)



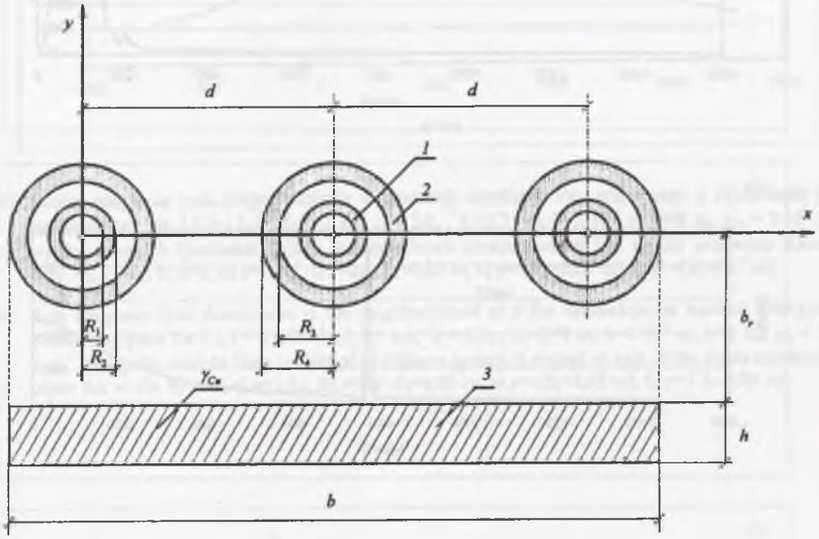

Rys.7.18. Rozkład modułu natężenia pola magnetycznego w otoczeniu płaskiego toru prądowego z osłonami zwartymi między sobą i uziemionymi poprzez impedancję $Z_T = 10\Omega$, przy $|I_A| = |I_B| = |I_C| = 1$ kA, $d = 3R_4$ wzdłuż prostych prostych (początek układu współrzędnych umiejscowiony jest na osi przewodu fazowego fazy A); a) $x = 0$, b) $x = 0{,}5d$, c) $x = d$, d) $x = 2d + R_4 + 0{,}03$ m, e) $y = 0$, f) $y = -(R_4 + 0{,}03$ m)

Fig.7.18. Rms magnetic field distribution in the neighbourhood of a flat isolated-phase busduct with mutually shorted and grounded enclosures by impedance $Z_T = 10\Omega$ for $|I_A| = |I_B| = |I_C| = 1$ kA, $d = 3R_4$ along the straight lines (origin of coordinate system is placed in the axis of the phase conductor of phase A); a) $x = 0$, b) $x = 0{,}5d$, c) $x = d$, d) $x = 2d + R_4 + 0{,}03$ m, e) $y = 0$, f) $y = -(R_4 + 0{,}03$ m)



### 7.2.4. Pole magnetyczne w otoczeniu płaskiego toru prądowego z równoległą płytą przewodzącą

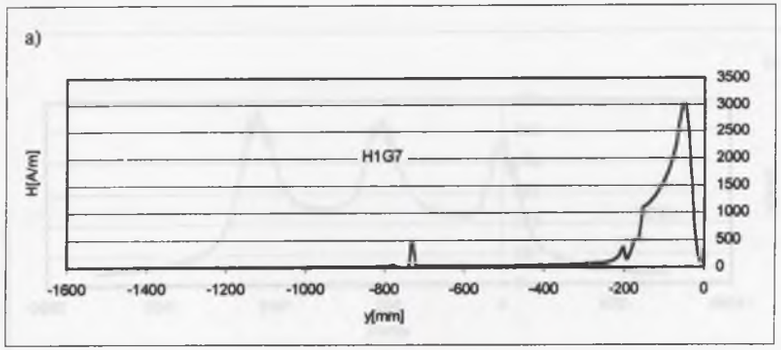
Płaski tor prądowy może przebiegać w pobliżu równoległej (w odniesieniu do płaszczyzny przechodzącej przez środki faz) płyty przewodzącej - rys.7.19. Osłony toru są zwarte między sobą i są połączone z płytą.

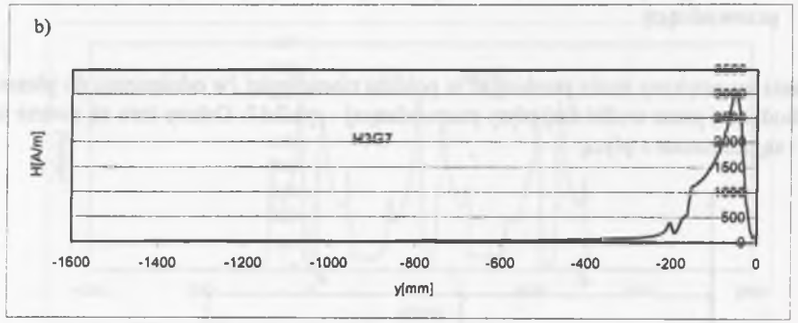


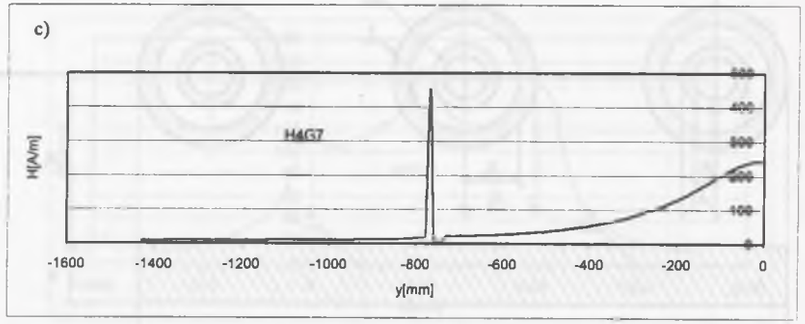

Rys.7.19. Płaski tor prądowy z równoległą płytą przewodzącą; 1-przewód fazowy, 2-osłona, 3-płyta przewodząca

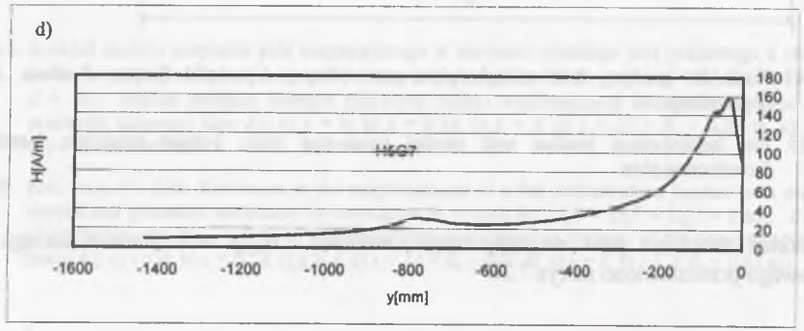
Fig.7.19. Flat isolated-phase busduct with parallel conducting plate; 1-phase conductor, 2-enclosure, 3-conducting plate

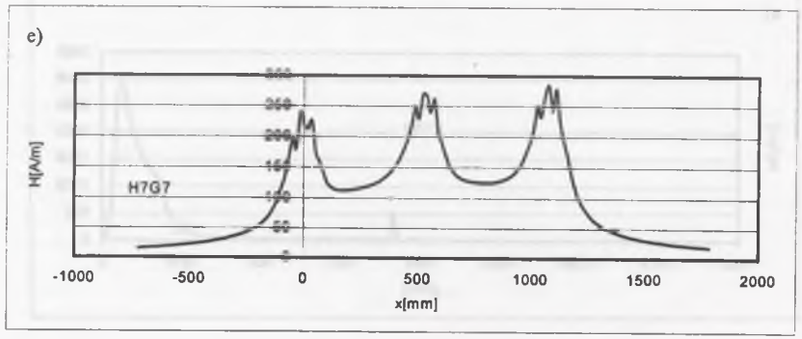
Rozkład natężenia pola magnetycznego (wartości $|H_a|$) w otoczeniu takiego toru prądowego przedstawiono na rys.7.20.



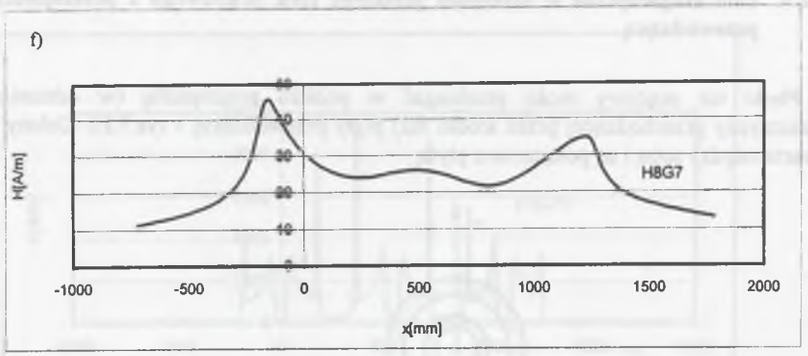




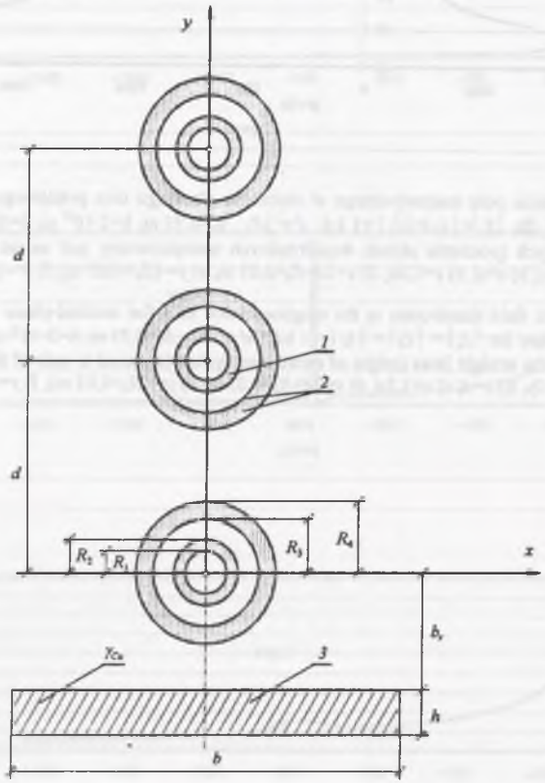




Rys.7.20. Moduł natężenia pola magnetycznego w otoczeniu płaskiego toru prądowego z równoległą płytą przewodzącą dla $|I_A|=|I_B|=|I_C|=1$ kA, $d = 3R_4$, $b_r$=0,75 m, h=$2\cdot10^{-3}$ m, b=8 $R_4$, $\gamma_{Cu} = 5\cdot10^7$ S·m$^{-1}$ wzdłuż prostych (początek układu współrzędnych umiejscowiony jest na osi przewodu fazowego fazy A); a) $Oy$, b) $x=d$, c) $x=1{,}5d$, d) $x=2d+R_4+0{,}03$ m, e) $y=-(R_4+0{,}03$ m), f) $y=-(b_r-0{,}03$ m)

Fig.7.20. Rms magnetic field distribution in the neighbourhood of a flat isolated-phase busduct with parallel conducting plate for $|I_A|=|I_B|=|I_C|=1$ kA, $d = 3R_4$, $b_r$=0,75 m, h=$2\cdot10^{-3}$ m, b=8 $R_4$, $\gamma_{Cu} = 5\cdot10^7$ S·m$^{-1}$ along the straight lines (origin of coordinate system is placed in axis of the phase conductor of phase A); a) $Oy$, b) $x=d$, c) $x=1{,}5d$, d) $x=2d+R_4+0{,}03$ m, e) $y=-(R_4+0{,}03$ m), f) $y=-(b_r-0{,}03$ m)

### 7.2.5. Pole magnetyczne w otoczeniu płaskiego toru prądowego z prostopadłą płytą przewodzącą

Płaski tor prądowy może przebiegać w pobliżu prostopadłej (w odniesieniu do płaszczyzny przechodzącej przez środki faz) płyty przewodzącej - rys.7.21. Osłony toru są zwarte między sobą i są połączone z płytą.



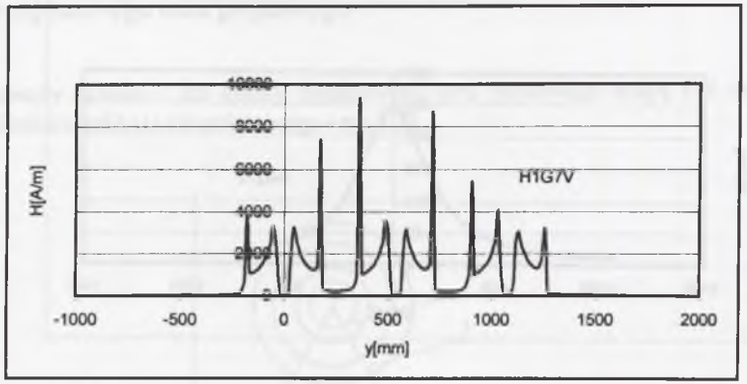

Rys.7.21. Płaski tor prądowy z prostopadłą płytą przewodzącą; 1 - przewód fazowy, 2 - osłona, 3 - płyta przewodząca

Fig.7.21. Flat isolated-phase busduct with perpendicular conducting plate; 1 - phase conductor, 2 - enclosure, 3 - conducting plate

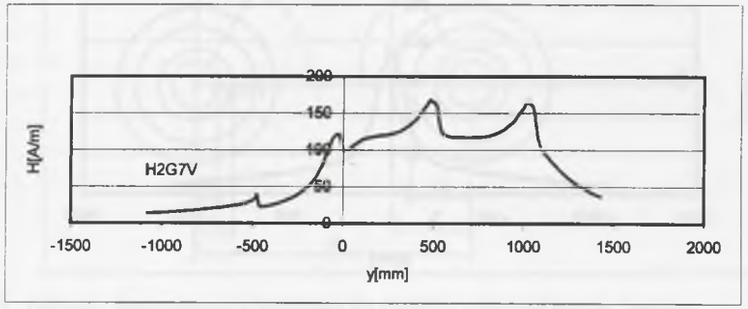
Rozkład natężenia pola magnetycznego (wartości $|H_a|$) w otoczeniu takiego toru prądowego przedstawiono na rys.7.22.



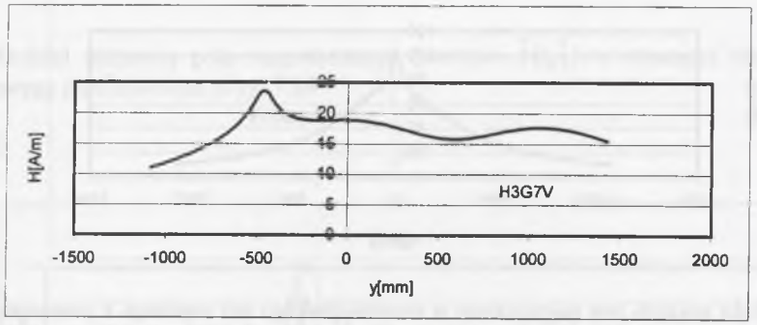
a)



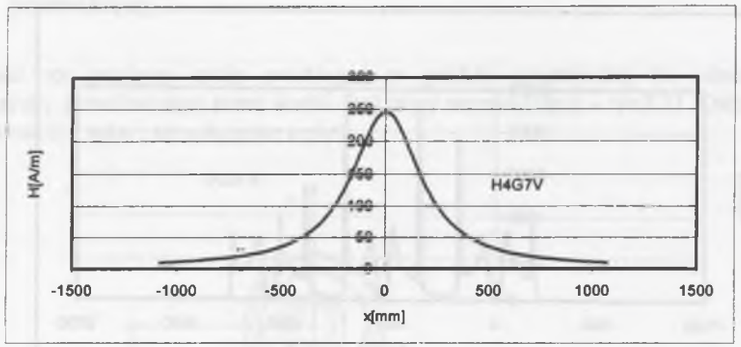

b)



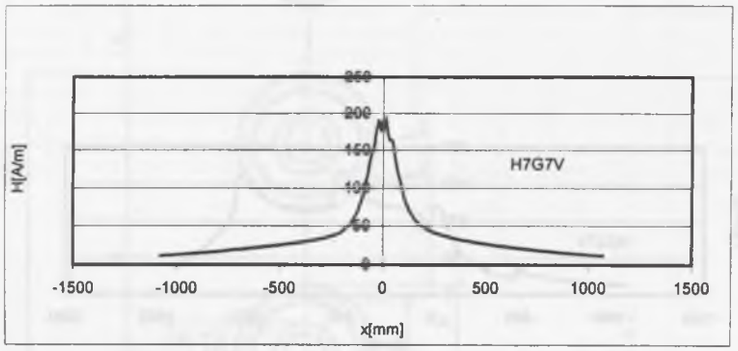

c)



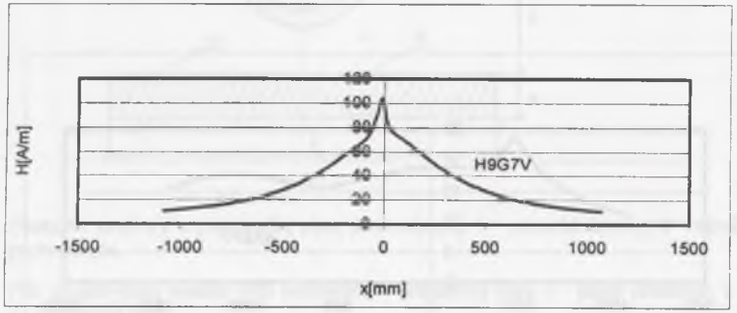
d)




e)




f)



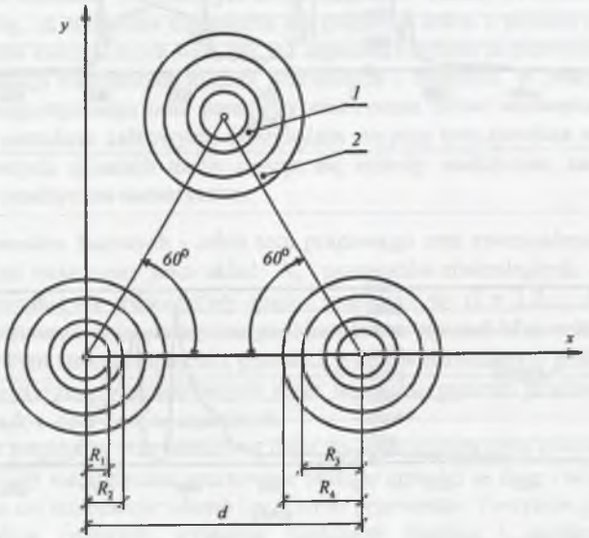

Rys.7.22. Moduł natężenia pola magnetycznego w otoczeniu płaskiego toru prądowego z prostopadłą płytą przewodzącą dla $|I_A|=|I_B|=|I_C|=1$ kA, $d=3R_4$, $b_r$=0,75 m, h=$2\cdot10^{-3}$ m, b=8 $R_4$, $\gamma_{Cu}=5\cdot10^7$ S·m$^{-1}$ wzdłuż prostych (początek układu współrzędnych umiejscowiony jest na osi przewodu fazowego fazy A); a) $Oy$, b) $x=R_4$+0,03 m, c) $x$=0,5$b$+0,03 m, d) $y$=0,5$d$, e) $y$=-($R_4$+0,03 m), f) $y$=2$d$+ $R_4$+0,03 m

Fig.7.22. Rms magnetic field distribution in the neighbourhood of a flat isolated-phase busduct with perpendicular conducting plate for $|I_A|=|I_B|=|I_C|=1$ kA, $d=3R_4$, $b_r$=0,75 m, h=$2\cdot10^{-3}$ m, b=8 $R_4$, $\gamma_{Cu}=5\cdot10^7$ S·m$^{-1}$ along the straight lines (origin of coordinate system is placed in the axis of the phase conductor of phase A); a) $Oy$, b) $x=R_4$+0,03 m, c) $x$=0,5$b$+0,03 m, d) $y$=0,5$d$, e) $y$=-($R_4$+0,03 m), f) $y$=2$d$+ $R_4$+0,03 m



## 7.3. Pole magnetyczne w otoczeniu trójkątnego, jednobiegunowego, trójfazowego toru prądowego

Przewody fazowe i ich osłony trójfazowego toru prądowego mogą być układane w wierzchołkach trójkąta równobocznego - rys.2.23.

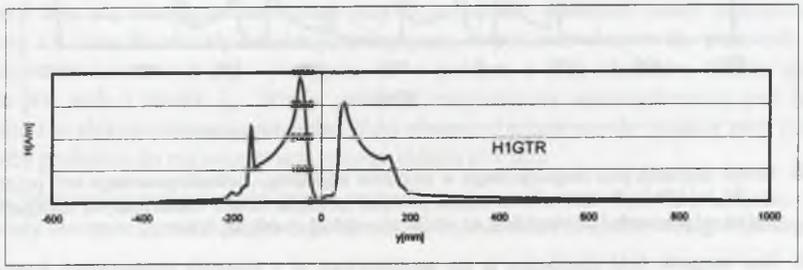



Rys.7.23. Trójkątny, jednobiegunowy, trójfazowy tor prądowy; 1-przewód fazowy, 2-osłona

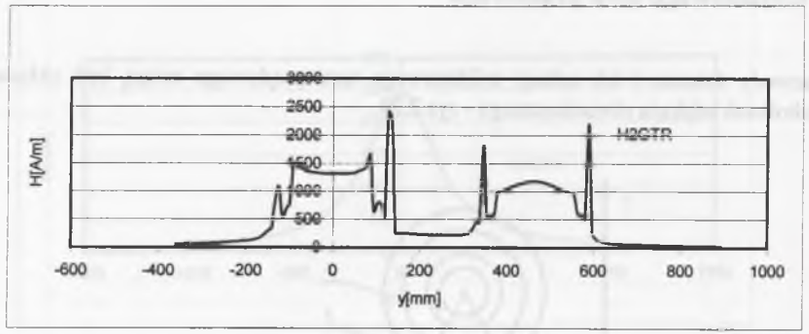
Fig.7.23. Triangular three-phase isolated- phase busduct; 1-phase conductor, 2-enclosure

Rozkład natężenia pola magnetycznego (wartości $|H_a|$) w otoczeniu takiego toru prądowego przedstawiono na rys.7.24

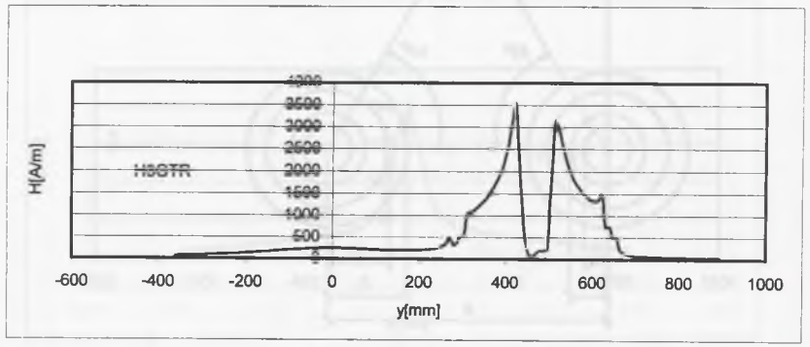
a)



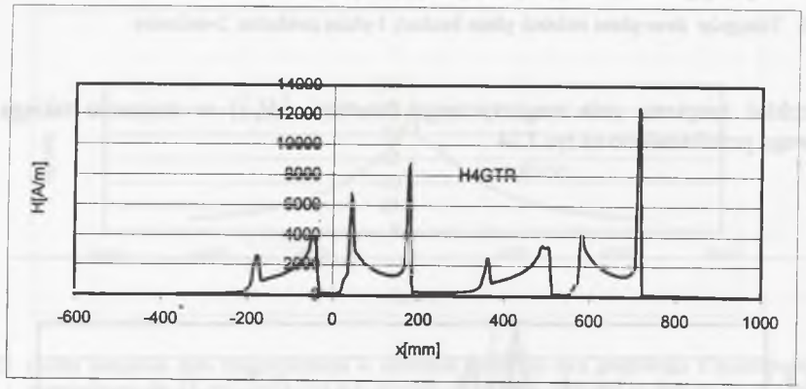
b)




c)




d)




Rys.7.24. Moduł natężenia pola magnetycznego w otoczeniu trójkątnego, jednobiegunowego toru prądowego dla $|I_A|=|I_B|=|I_C|=1$kA, $d=3R_4$ wzdłuż prostych (początek układu współrzędnych umiejscowiony jest na osi przewodu fazowego fazy A); a) $Oy$, b) $x=0{,}25d$, c) $x=0{,}5d$, d) $Ox$

Fig.7.24. Rms magnetic field distribution in the neighbourhood of a triangular isolated-phase busduct for $|I_A|=|I_B|=|I_C|=1$ kA, $d=3R_4$ along the straight lines (origin of coordinate system is placed in the axis of the phase conductor of phase A); a) $Oy$, b) $x=0{,}25d$, c) $x=0{,}5d$, d) $Ox$

# 8. UWAGI KOŃCOWE I WNIOSKI

1. Pole magnetyczne w otoczeniu jednobiegunowych osłoniętych torów wielkoprądowych generowane jest przez robocze prądy fazowe, prądy wirowe indukowane w osłonach przez przemienne pole magnetyczne przewodów fazowych i osłon sąsiednich oraz przez prądy powrotne w osłonach. Wartości tych ostatnich prądów zależą od sposobów połączenia osłon między sobą, od sposobów uziemienia lub połącznia osłon z płytami przewodzącymi oraz od parametrów elektrycznych toru, tzn. od impedancji własnych przewodów fazowych i osłon oraz impedancji wzajemnych między przewodami i osłonami. W pracy wykazano, że wielkości pola magnetycznego oraz parametry elektryczne torów wielkoprądowych mogą być wyznaczane metodami całkowymi. Uwzględnia się przy tym zjawiska naskórkowości i zbliżenia. W prostych układach torów stosuje się metody analityczne, zaś w złożonych układach metody analityczno-numeryczne.

2. Układ przewodów fazowych i osłon toru prądowego oraz ewentualnych płyt przewodzących może być traktowany jako układ $N_c$ przewodów równoległych. Dla każdego z przewodów wprowadza się jednostkowy spadek napięcia $\mathcal{U}_l$ ($l$ = 1,2,..., $N_c$) związany z natężeniem bezwirowego pola elektrycznego. Następnie z równań Maxwella otrzymuje się równanie wiążące ten spadek napięcia z gęstością prądu w rozważanym przewodzie i sumą potencjałów magnetycznych generowanych przez wszystkie gęstości prądów, tzn. również przez gęstości prądów przewodów sąsiednich.

Jeżeli gęstości prądów w przewodach są dane, np. jako rozwiązania równań Helmholtza, to również potencjały magnetyczne generowane przez te gęstości są dane i wtedy z układu $N_c$ równań wyznacza się impedancje własne i wzajemne przewodów. Powyższe gęstości prądów są dla przewodów rurowych wyrażone funkcjami Bessela i natężeniami prądów (wymuszenia prądowe) lub jednostkowymi spadkami napięcia (wymuszenia napięciowe) w przewodach. Natężenie pola magnetycznego w otoczeniu przewodów wyznacza się wtedy z pierwszego równania Maxwella.

W przypadku ogólnym rozkłady gęstości prądów w przewodach nie są znane i zagadnienie wyznaczania parametrów elektrycznych toru oraz wielkości pola magnetycznego w dowolnym punkcie $X(x,y)\in R^2$ sprowadza się przede wszystkim do wyznaczenia tych rozkładów. Wtedy potencjały wektorowe występujące w wymienionych równaniach przedstawia się w postaci całkowej jako rozwiązania równania Poissona w obszarach przewodzących. W ten sposób otrzymuje się układ $N_c$ dwuwymiarowych równań całkowych Fredholma drugiego rodzaju z jądrami słabo osobliwymi. W ogólnym przypadku taki układ równań daje się rozwiązać metodami przybliżonymi. W niniejszej pracy zaproponowano metodę zbliżoną do metody kolokacji, polegającą na podziale obszaru $S_p$ przewodu na $N_d$ trójkątów elementarnych $\Delta_{ps}$ i przyjęciu, że w każdym z tych obszarów funkcja gęstości prądu jest stała i równa $J_{ps}$. Wtedy potencjał magnetyczny aproksymowany jest funkcją kształtu i w efekcie otrzymuje się układ $N_cN_d$ równań algebraicznych. Istnieją przy tym dwa sposoby podejścia do rozwiązywania takiego układu równań:

- dla wymuszeń napięciowych znane są napięcia jednostkowe: $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$,..., $\mathcal{U}_p$,..., $\mathcal{U}_{N_c}$ i wtedy nieznane gęstości prądów $J_{ps}$ wyznacza się z układu $N_cN_d$ równań algebraicznych,

- dla wymuszeń prądowych znane są całkowite prądy: $I_1$, $I_2$,..., $I_p$,..., $I_{Nc}$ i wtedy układ $N_cN_d$ równań należy uzupełnić układem $N_c$ równań dodatkowych, określających każdy z prądów $I_p$ przez gęstości prądów $J_{ps}$.

Sformułowanie zagadnień brzegowych w postaci równań całkowych pozwala otrzymać przybliżone rozwiązania dla impedancji i pola magnetycznego toru wielkoprądowego.

3. W rozważanych torach wielkoprądowych przyjmuje się, że przewody fazowe i osłony są nieskończenie długie. Wtedy zagadnienie jest dwuwymiarowe i potencjał magnetyczny ma tylko jedną składową i nazywany jest logarytmicznym potencjałem wektorowym.

W przypadku znanej funkcji gęstości prądu w przewodzie rurowym potencjał ten wyznacza się analitycznie w dowolnym punkcie $X(x,y)\in R^2$, wykorzystując rozwinięcie funkcji $\ln\frac{r_{XY}}{r}$ ($r_{XY}$ jest odległością między punktem źródłowym $Y(x',y')$ a punktem obserwacji $X(x,y)$, zaś $r$ jest współrzędną walcowego układu współrzędnych) lub funkcji $\ln\frac{r_{XY}}{d}$ ($d$ jest odległością między osiami dwóch niekoncentrycznych przewodów rurowych) w szereg Fouriera.

W przypadku nieznanych rozkładów gęstości prądu logarytmiczny potencjał magnetyczny w dowolnym punkcie $X(x,y)\in R^2$ jest aproksymowany funkcjami kształtu, które mają postać analityczną, tzn., że są kombinacjami funkcji standardowych. Daje to podstawę do dokładnej algebraizacji równań całkowych bez wielokrotnego odwoływania się do procedury numerycznego całkowania. Jest to istotna różnica w stosunku do spotykanych dotychczasowych rozwiązań, w których funkcję kształtu oblicza się poprzez całkowanie numeryczne w układzie współrzędnych prostokątnych lub walcowych. Analityczne przedstawienie funkcji kształtu skraca czas obliczeń numerycznych rozkładu gęstości prądu, impedancji i natężenia pola magnetycznego oraz zwiększa dokładność obliczeń. Ma to szczególne znaczenie w przypadku, gdy punkt $X(x,y)$ leży w obszarze elementarnym. Wtedy całka określająca potencjał magnetyczny jest całką niewłaściwą, co znacznie utrudnia całkowanie numeryczne wprowadzając w konsekwencji duże błędy obliczeń.

Zaproponowany sposób aproksymacji potencjału magnetycznego pozwala na jego wyznaczanie, a tym samym na wyznaczanie natężenia pola magnetycznego w całej przestrzeni $R^2$, tzn. zarówno wewnątrz, jak również na zewnątrz przewodów. W przeciwieństwie do metody elementów skończonych nie wymaga się ograniczenia przestrzeni $R^2$ poprzez wprowadzenie sztucznej powierzchni granicznej.

Dokładniejsze wyznaczenie logarytmicznego potencjału magnetycznego dla układu $N_c$ przewodów równoległych otrzymuje się poprzez aproksymację funkcji gęstości prądu funkcjami sklejanymi.

4. Wyznaczanie impedancji własnych przewodów fazowych i osłon oraz impedancji wzajemnych między nimi jest zasadniczym zagadnieniem przy obliczaniu wielkości pola magnetycznego w otoczeniu torów wielkoprądowych. Na podstawie tych impedancji konstruuje się schemat zastępczy toru, z którego oblicza się prądy powrotne w osłonach i w konsekwencji oblicza się wszystkie prądy wirowe i pole magnetyczne w otoczeniu toru.

Konstrukcja równania, o którym mowa w punkcie 2 niniejszego rozdziału, wiążącego jednostkowy spadek napięcia z gęstością prądu w rozważanym przewodzie i potencjałami magnetycznymi generowanymi przez wszystkie gęstości prądów, pozwala na analityczne wyznaczanie impedancji podstawowych układów toru wielkoprądowego:

- odosobnionego przewodu rurowego,
- układu współosiowego dwóch przewodów rurowych,
- układu niewspółosiowego dwóch równoległych przewodów rurowych,



- układu przewodów fazowych i osłon trójfazowego, jednobiegunowego, osłoniętego toru wielkoprądowego.

Impedancje te wyznaczono z uwzględnieniem zjawisk naskórkowości i zbliżenia.

W przypadku układu równań całkowych zaproponowana metoda konstrukcji macierzy impedancji i macierzy admitancji pozwala na wyznaczanie jednostkowych impedancji zastępczych $\mathcal{Z}_{lp}$ i admitancji zastępczych $\mathcal{Y}_{lp}$ ($l$, $p$ = 1, 2,..., $N_c$). Metoda analityczno-numeryczna wyznaczania impedancji uwzględnia również zjawiska naskórkowości i zbliżenia.

W obu przedstawionych przypadkach szczególnie ważne jest wyznaczanie impedancji wzajemnych między przewodem fazowym a własną osłoną i osłonami faz sąsiednich oraz impedancji wzajemnych między osłonami. Impedancje te decydują bowiem o wartościach prądów powrotnych w osłonach.

Metoda analityczna i analityczno-numeryczna wykazały, że obecność przewodów sąsiednich wpływa na wartość impedancji własnej rozważanego fazowego przewodu rurowego lub rurowej osłony.

Obliczenia numeryczne wykazały, że wartości impedancji własnych i wzajemnych otrzymanych analitycznie nie różnią się więcej niż o ± 1% od wartości odpowiednich impedancji obliczonych metodą analityczno-numeryczną w przypadku trójfazowego, osłoniętego toru wielkoprądowego (6 przewodów rurowych), w którym każdy z przewodów został podzielony na 200 obszarów elementarnych.

5. Pole magnetyczne w otoczeniu jednobiegunowych, osłoniętych torów wielkoprądowych, w prostych układach torów, może być wyznaczane analitycznie. W układach złożonych wyznacza się je metodą analityczno-numeryczną.

Metoda analityczna polega na wyznaczaniu natężenia pola magnetycznego pochodzenia zewnętrznego $\boldsymbol{H}^{zew}$, tzn. wytworzonego przez prądy sąsiednich przewodów fazowych, natężenia pola własnego $\boldsymbol{H}^{wl}$ wytworzonego przez prąd własnej fazy oraz natężenia pola magnetycznego tzw. oddziaływania zwrotnego $\boldsymbol{H}^{oz}$ prądów wirowych indukowanych w osłonie rozpatrywanej fazy przez natężenie pola magnetycznego $\boldsymbol{H}^{zew}$ pochodzenia zewnętrznego. Wypadkowe natężenie pola magnetycznego w otoczeniu rozpatrywanej fazy jest superpozycją wymienionych natężeń pól magnetycznych. Natężenie pola magnetycznego $\boldsymbol{H}^{oz}$ wyznacza się po uprzednim rozwiązaniu skalarnego, dwuwymiarowego równania Helmholtza dla gęstości prądów wirowych indukowanych w osłonie, zastosowaniu równań Maxwella i rozwiązaniu skalarnego, dwuwymiarowego równania Laplace'a dla natężenia pola elektrycznego w otoczeniu osłony. Muszą być przy tym spełnione określone warunki brzegowe, dotyczące ciągłości składowych stycznych i normalnych ($\mu_r$ = 1) całkowitego natężenia pola magnetycznego na powierzchniach granicznych.

Metoda analityczno-numeryczna bazuje na aproksymacji logarytmicznego potencjału magnetycznego funkcją kształtu daną funkcjami standardowymi. Wtedy wykonuje się analityczną operację różniczkowania tych funkcji standardowych, otrzymując funkcje kształtu $F_x(X)$ i $F_y(X)$ dla pochodnych potencjału, czyli dla składowych $H_x(X)$ i $H_y(X)$ natężenia pola magnetycznego. Funkcje $F_x(X)$ i $F_y(X)$ są dane przez kombinacje funkcji standardowych, co daje analogiczne korzyści przy obliczeniach numerycznych jak te, wymienione w punkcie 3 niniejszego rozdziału, występujące przy obliczeniach potencjału magnetycznego. Umożliwia to wyznaczanie natężenia pola magnetycznego w dowolnym punkcie $X(x,y)\in R^2$.

W układach trójfazowych torów prądowych wypadkowe natężenie pola magnetycznego jest polem eliptycznym. Dlatego też za największą wartość skuteczną natężenia tego pola należy brać wartość skuteczną dużej półosi elipsy pola wirującego, co nie jest równe pierwiastkowi sumy kwadratów odpowiednich modułów składowych natężenia pola. Zaproponowany w pracy algorytm wyznaczania tej wartości największej natężenia pola

magnetycznego, z uwzględnieniem geometrii Gaussa, minimalizuje ilość operacji matematycznych biorąc za punkt wyjścia składowe zespolone $H_x(X)$ i $H_y(X)$. Może on być dołączony do dowolnego algorytmu obliczeniowego natężenia pola magnetycznego spolaryzowanego eliptycznie.

Porównujące obliczenia natężenia pola magnetycznego dla trójfazowego toru wielkoprądowego z izolowanymi osłonami wykazały, że wartości tych natężeń w wybranych punktach otoczenia toru obliczone metodą analityczną nie różnią się więcej niż o ± 0,5% od odpowiednich wartości otrzymanych metodą analityczno-numeryczną. Dla takiego samego toru trójfazowego porównano również wartości natężenia pola magnetycznego otrzymane metodą analityczno- numeryczną z wartościami otrzymanymi za pomocą programu *FLUX2D*, wykorzystującego metodę elementów skończonych; odpowiednie wartości nie różniły się między sobą więcej niż o ± 0,2%.

6. W przypadku układu $N_c$ ferromagnetyków logarytmiczny potencjał wektorowy wytworzony przez zastępczy wektor gęstości liniowej prądu $\tau$ (zastępczy okład prądowy), określony na konturze $\Gamma$ ferromagnetyka, jest aproksymowany funkcją kształtu $G(X)$ wyznaczoną analitycznie i wyrażoną funkcjami standardowymi. Aproksymacji tej dokonuje się po uprzednim podziale konturu $\Gamma$ na $N_\Gamma$ odcinków elementarnych, dla których przyjmuje się stałą wartość gęstości liniowej prądu $\tau_n$. Poprawność otrzymanego rozwiązania sprawdzono z twierdzeniem o przejściu granicznym pochodnej potencjału warstwy pojedynczej. W tym celu obliczono pochodne $G_x(X)$ i $G_y(X)$ funkcji kształtu $G(X)$. Pochodne te również wyrażono poprzez kombinację funkcji standardowych. Z twierdzenia o przejściu granicznym otrzymano równanie całkowe Fredholma drugiego rodzaju o jądrze słabo osobliwym dla gęstości powierzchniowej prądu przewodzenia $\boldsymbol{J}$ dla $X(x,y)\in S$ i gęstości liniowej prądu $\tau$ dla $X(x,y)\in\Gamma$. Z tego równania całkowego, przy aproksymacji potencjału magnetycznego generowanego przez gęstość liniową prądu $\tau$, otrzymuje się układ $N_\Gamma$ równań algebraicznych z niewiadomymi $\tau_n$. Razem z równaniami algebraicznymi otrzymanymi z równania całkowego dla gęstości prądu przewodzenia otrzymuje się układ $N_C$ ( $N_d + N_\Gamma$ ) równań algebraicznych, z których wyznacza się gęstości prądu $J$ i $\tau$ oraz impedancje $\mathcal{Z}_{lp}$. Wtedy też potencjał magnetyczny zostaje wyznaczony w dowolnym punkcie $X(x,y)\in R^2$.

Wykorzystując uprzednio wyznaczone pochodne $G_x(X)$ i $G_y(X)$ funkcji kształtu $G(X)$ oraz pochodne $F_x(X)$ i $F_y(X)$ funkcji kształtu $F(X)$ wyznacza się natężenie pola magnetycznego w punkcie $X(x,y)\in R^2$.

7. Zaproponowana w pracy metoda analityczno-numeryczna wyznaczania natężenia pola magnetycznego w otoczeniu jednobiegunowych torów wielkoprądowych może być stosowana dla torów płaskich, jak również dla torów o innej konfiguracji przewodów fazowych i osłon, np. dla torów jednobiegunowych ułożonych w wierzchołkach trójkąta równobocznego. Można ją również stosować bez dodatkowych uzupełnień dla trójbiegunowych, trójfazowych torów osłoniętych (przewody fazowe we wspólnej osłonie), jak również dla torów, w otoczeniu których mogą znajdować się płyty przewodzące lub płyty z ferromagnetyków.

Przeprowadzone obliczenia numeryczne wartości natężenia pola magnetycznego potwierdzają fakt jego redukcji w przypadku istnienia w osłonach prądów powrotnych. Jednocześnie stwierdza się, że o wartościach tych prądów i w konsekwencji o redukcji natężenia pola magnetycznego decydują przede wszystkim wartości impedancji $Z_{b1}$, zwierającej osłony między sobą. Doziemienie już zwartych między sobą osłon lub ich połączenie z płytą przewodzącą (z wyjątkiem toru jednofazowego) nie wpływa w sposób istotny na wartości natężenia pola magnetycznego w ich otoczeniu.



Wyniki pomiarów natężeń pola magnetycznego wykonane dla osłoniętego toru jednofazowego nie różniły się więcej niż o ± 8% od wyników otrzymanych z obliczeń numerycznych.

8. Na podstawie przedstawionych w pracy metod wyznaczania rozkładu gęstości prądu $\boldsymbol{J}(x,y)$ w dowolnym punkcie $X(x,y)\in S$ oraz rozkładu natężenia pola magnetycznego $\boldsymbol{H}(x,y)$ w dowolnym punkcie $X(x,y)\in R^2$ będzie można w następnej kolejności obliczać:

- siły elektrodynamiczne, działające w torach wielkoprądowych,
- straty mocy czynnej w przewodach fazowych i osłonach,
- rozkłady temperatur w przewodach fazowych i osłonach.

9. Za istotny autorski wkład do rozwiązania przedstawionej w pracy tematyki można uznać:

- sformułowanie równań całkowych dla odosobnionego przewodu i ferromagnetyka oraz dla układu $N_C$ przewodów lub ferromagnetyków z wprowadzeniem jednostkowego spadku napięcia,
- opracowanie metody analitycznej wyznaczania logarytmicznego potencjału magnetycznego dla przewodów rurowych,
- analityczne wyznaczenie impedancji własnej odosobnionego przewodu rurowego oraz impedancji własnych i wzajemnych układów współosiowego i niewspółosiowego dwóch równoległych przewodów rurowych z uwzględnieniem zjawisk nakórkowości i zbliżenia,
- konstrukcje schematów zastępczych różnych układów torów wielkoprądowych w celu obliczania prądów powrotnych,
- aproksymację logarytmicznych potencjałów magnetycznych generowanych przez gęstość powierzchniową prądu przewodzenia i gęstość liniową prądu Ampere'a poprzez analitycznie wyznaczone funkcje kształtu $F(X)$ i $G(X)$,
- aproksymację pochodnych logarytmicznych potencjałów magnetycznych generowanych przez wymienione gęstości prądu poprzez analitycznie wyznaczone funkcje kształtu odpowiednio $F_x(X)$ i $F_y(X)$ oraz $G_x(X)$ i $G_y(X)$,
- aproksymację gęstości prądu funkcjami sklejanymi,
- algebraizację równań całkowych poprzez wprowadzenie funkcji kształtu,
- opracowanie metody analityczno-numerycznej wyznaczania impedancji własnych i wzajemnych układu $N_C$ przewodów i układu $N_C$ ferromagnetyków,
- analityczne wyznaczanie natężenia pola magnetycznego w otoczeniu jednobiegunowych, jednofazowych i trójfazowych (o osłonach izolowanych) torów wielkoprądowych,
- opracowanie metody analityczno-numerycznej wyznaczania natężenia pola magnetycznego w dowolnych układach jednobiegunowych i trójbiegunowych torów wielkoprądowych łącznie z układami torów z płytami przewodzącymi i płytami z ferromagnetyków,
- opracowanie algorytmu obliczeniowego największej wartości skutecznej natężenia eliptycznego pola magnetycznego w otoczeniu toru wielkoprądowego,
- obliczenie natężenia pola magnetycznego w otoczeniu wybranych, najczęściej spotykanych w praktyce, układów torów wielkoprądowych,
- wykonanie pomiarów sprawdzających natężeń pola magnetycznego w otoczeniu jednofazowego, osłoniętego toru prądowego dla różnych sposobów połączenia jego osłony - osłona izolowana, połączona z przewodem fazowym, połączona z równoległą płytą przewodzącą na jej końcach oraz połączona dodatkowo z płytą w punkcie pośrednim.

# LITERATURA


1. Александров Г.Н.: *Проектирование электрических аппаратов.* Энергоатомиздат, Ленинград, 1985.
2. Ametani A.: *A General Formulation of Impedance and Admittance of Cables.* IEEE Trans. on Power Apparat. And Syst., Vol. PAS-99, No 3, May/June 1980, pp. 902-910.
3. Anderson D.M., Wollenberg B.F.: *Solving for Three Phase Conductively Isolated Busbar Voltages Using Phase Component Analysis.* IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 10, No 1, February 1995, pp. 98-108.
4. Apanasewicz S.: *O własnościach struktury pola elektromagnetycznego w kablu koncentrycznym.* Zesz. Nauk. Pol. Rzeszowskiej, s.Elektrotechnika, z.17, No 145, 1996, ss. 5-20.
5. Arbenz K., Wohlhauser A.: *Compléments d'analyse.* Presses Polytechniques Romandes, Lausanne,1981.
6. Armanimi D., Conti R., Mantini A., Nicolini D.: *Measurements of Power-Frequency Electric and Magnetic Field Around Different Industrial and Household Source.* CIGRÉ, Session 1990, Ref. 36.107.
7. *An American National Standard IEEE Guide for Metal-Enclosed Bus and Calculating Losses in Isolated-Phase Bus.* Amerykańska Norma Państwowa ANSI/IEEE C37.23-1987.
8. Baron B., Piątek Z.: *Aproksymacja logarytmicznego potencjału wektorowego we współrzędnych walcowych.* XX SPETO'97, Gliwice-Ustroń, maj 1997, ss. 167-171.
9. Baron B., Gacek Zb., Kiś W.: *Obliczanie rozkładu pola elektrycznego, wymiarowanie układów izolacyjnych i wyznaczanie temperatur w przewodach szynowych izolowanych sprężonym $SF_6$.* Zesz. Nauk. Pol. Śl. s.Elektryka, z.131, Gliwice 1993.
10. Baron B., Piątek Z.: *Application of a Certain Approximation of Vector Logarithmic Magnetic Potential to on Analysis of Elektromagnetic Field of Conductor System in a Common Shield.* AMTEE'97, Univ. of West Bohemia, Plzeň, Czech Republic, 9-11 Sept.1997, pp. 27-35.
11. Baron B., Piątek Z.: *Gęstość prądów i impedancje płaskiego toru wielkoprądowego złożonego z ceowników.* ZKwE'98, Poznań-Kiekrz, 20-22 kwietnia 1998, ss. 139-144.
12. Baron B., Piątek Z.: *Metoda obliczania prądów wirowych indukowanych w ekranie rurowym przez prąd w przewodzie równoległym.* Rozprawy Elektrotechniczne, Tom XXVII, z.27, ss. 111-121.
13. Baron B., Piątek Z.: *O pewnym sposobie aproksymacji logarytmicznego potencjału magnetycznego.* ZKwE'97, Poznań-Kiekrz, 7-9 kwietnia 1997, ss. 111-114.
14. Baron B., Piątek Z.: *Pole magnetyczne w otoczeniu płaskiego trójfazowego toru wielkoprądowego o ceownikowych przewodach szynowych.* XXI SPETO'98, Gliwice-Ustroń, maj 1998, ss. 267-272.
15. Baron B., Piątek Z.: *Zastosowanie metod numerycznych w teorii pola elektromagnetycznego.* ZKwE'96, Poznań-Kiekrz, 15-17 kwietnia 1996, ss. 409-410.
16. Baron B.: *Analiza numeryczna równań całkowo-brzegowych pól elektrycznych pewnej klasy modeli obliczeniowych.* Zesz. Nauk. Pol. Śl. s.Elektryka, z.97, Gliwice 1985.
17. Baron B.: *Komputerowa analiza harmonicznego pola elektromagnetycznego we współrzędnych walcowych.* Skrypt Pol. Śl., nr 1673, Gliwice 1993.
18. Baron B.: *Metody numeryczne w Turbo Pascalu.* Helion, Gliwice 1994.
19. Bartodziej G., Kiś W., Otręba H.: *Realizacja modelu fizycznego przewodów szynowych.* Sprawozdanie Inst. Elektroenergetyki i Sterowania Układów Pol. Śl. z zadania Nr 1.4.3.4, Gliwice 1987.
20. Bartodziej G., Kiś W., Szadkowski M., Rusek T., Siwy E.: *Realizacja modelu fizycznego przewodów szynowych.* Opracowanie Inst. Elektroenerg. i Ster. Układ. Pol. Śl., Zadanie 1.4.3.4., Gliwice 1990.
21. Bartodziej G., Kiś W., Szadkowski M., Siwy E.: *Realizacja modelu fizycznego przewodów szynowych.* Opracowanie Inst. Elektroenerg. i Ster. Układów Pol. Śl., temat 1.4.3., zadanie 1.4.3.4., Gliwice 1989.
22. Bartodziej G., Kiś W.: *Realizacja modelu fizycznego przewodów szynowych.* Opracowanie Inst. Elektroenerg. i Ster. Układ. Pol. Śl., Zadanie 1.4.3.4., Gliwice 1988.





23. Bartodziej G., Kiś W., Rusek T., Siwy E.: *Komputerowe wspomaganie projektowania przewodów szynowych hermetyzowanych z izolacją gazową.* Zeszyty Naukowe Pol. Śl. s.Elektryka, z.127, Gliwice 1992, ss. 187-197.
24. Bartodziej G.: *Układy szynowe o ekranach ciągłych.* Przegląd Elektrotechniczny, R. XL, Z. 11, 1964, ss. 169-471.
25. Bełdowski T., Bolkowski St., Dołowy M., Piłat K., Wincenciak St.: *Projekt techniczny przewodu szynowego z izolacją $SF_6$, 123 kV, 1250 A w Elektrowni Konin.* Opracowanie Inst. Elektroenerg. Pol. Warszawskiej, Warszawa, styczeń 1995.
26. Bełdowski T., Dołowy M., Sutkowski T., Piłat K.: *Projekt koncepcyjny przewodu szynowego z izolacją $SF_6$, 123 kV, 1250 A w Elektrowni "Konin".* Opracowanie Inst. Elektroenerg. Pol. Warszawskiej, Warszawa, styczeń 1993.
27. Bełdowski T., Markiewicz H.: *Stacje i urządzenia elektroenergetyczne.* WNT, Warszawa 1992.
28. Bełdowski T., Sutkowski T., Jankowicz S., Nawrowski R., Patecki A.: *Oddziaływanie elektrodynamiczne w torach wielkoprądowych izolowanych $SF_6$.* Opracowanie Inst. Elektroenergetyki Pol. Warszawskiej, Warszawa, grudzień 1992.
29. Bełdowski T., Sutkowski T., Pawuła Z.: *Przewody osłonięte z izolacją gazową $SF_6$.* Przegląd Elektrotechniczny, R. LXVIII, Z. 3, 1992, ss. 51-56.
30. Bełdowski T.: *Analiza przyrostów temperatury konstrukcji stalowych w elektrowniach pod wpływem zmiennych pól magnetycznych prądów zwarciowych.* Rozprawy Elektrotechniczne, Tom XIV, Z. 3, 1968, ss. 488-509.
31. Bełdowski T.: *Tory wielkoprądowe z izolacją gazową $SF_6$. Raport o pracach wykonanych w latach 1986-1990.* CPBP Nr 02.18. Wybrane Zagadnienia Poznawcze Energetyki, Kierunek I, Grupa tematyczna 1.4., Warszawa, styczeń 1991.
32. Бессонов Л.А.: *Теоретические основы электротехники. Том 2. Электромагнитное поле.* Высшая Школа, Москва, 1978.
33. Bins K.J., Lawrenson P.J., Trowbridge C.W.: *The Analytical and Numerical Solution of Electric and Magnetic Fields.* John Wiley & Sons, Chichester,1993.
34. Bolkowski St., Stabrowski M., Skoczylas J., Sroka J., Sikora J., Wincenciak St.: *Komputerowe metody analizy pola elektromagnetycznego.* WNT, Warszawa 1993.
35. Bolkowski St.: *Teoria obwodów elektrycznych.* WNT, Warszawa 1995.
36. Brodzki M.: *Kilka uwag o matematycznej naturze wielkości fizykalnych.* Zeszyty Naukowe Pol.Śl. s.Elektryka, z.100, 1985, ss.79-84.
37. Brunotte X., Meunier G., Bongiraud J.P.: *Éléments finis transformés. Application à la modélisation des problèmes à frontières ouvertes.* J. Phys. III France, No 3, 1993, pp. 423-442.
38. Carasimowic S.: *Proracunavanje prijelaznog prenapona oklopa metlom oklopljenih plinom $SF_6$ izoliranih postrojenja.* Energija, god. 40, 1991, pp. 341-345.
39. Cidrac Ch. de : *Électromagnétisme.* Vuibert, Paris 1976.
40. Ciok Zb.: *Metody obliczania pól elektromagnetycznych i przepływowych.* Wyd. Pol. Warszawskiej, Warszawa 1985.
41. Cognet F.: *Jeux de barres sous gaines coaxiales pour fortes intensités de courant.* Revue Générale de l'Électricité, Tome 70, No 3, mars 1961, pp. 141-150.
42. Coldecott R., English W.E., Sebo S.A., Addis G.T.: *Scale Modelling of the Electromagnetic Field in High Voltage Substation.* Proc. Of the 7-th Int. Symp. On High Voltage Eng., Dresden, 1991, Ref. 93.08, pp. 79-82.
43. *CIG triphasé. Rapport des essais.* GEC ALSTHOM T &D, Villeurbanne, mai 1997.
44. Dahlquist G., Björek A.: *Metody numeryczne.* PWN, Warszawa 1983.
45. Deschamps F.: *La mesure des champs magnétiques à basse fréquence. Principes et capteur.* Rapport EDF HM25/0115, février 1993.
46. Deville G., Zeddam A.: *Compatibilité électromagnétique et liaisons électrique blindées.* REE, No 5, novembre 1995, pp. 43-49.
47. Diarra T.B., Béroual A., Buret F., Thuries E., Guillen M., Roussel Ph.: *$N_2$-$SF_6$ Mixtures for High Voltage Gas Insulated Lines.* 10-th International Symposium on High Voltage Engineering, August 25-29, 1997, Montréal, Québec, pp. 105-108.

48. Dokopoulos P., Tampakis D.: *Eddy Currents in a System of Tubular Conductor*. IEEE Trans. on Magnetics, Vol. MAG-20, No 5, September 1984, pp. 1971-1973.
49. Ehrich M., Hannakam L.: *Abschirmung von Dammelschienen durch leitende zylindrische Rohre*. Arch. F. El., Bd. 61, 1079, pp. 237-251.
50. Ehrich M.: *Vereinfachte Verlust - und Induktivitätsberechnung bei ebenem Stromverdrängungsproblem*. Arch. f. El., No 60, 1978, pp. 129-135.
51. Emanuel A., Doepken H.C.: *Calculation of Losses in Steel Enclosures of Three Phase Bus or Cables*. IEEE Trans. Power App. Syst., Vol. PAS-93, 1974, pp. 1758-1764.
52. Фальковский О.И.: *Техническая электродинамика*. Связь, Москва 1978.
53. Ferkal K., Poloujadoff M., Dorison E.: *Proximity Effect and Eddy Current Losses in Insulated Cables*. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 11, No 3, July 1996, pp. 1171-1178.
54. Fichtenholz G.M.: *Rachunek różniczkowy i całkowy*. PWN, Warszawa 1972.
55. Frąckowiak J., Nawrowski R., Patecki A., Szymański G.: *Wyznaczanie rozkładu temperatur w jedno- i trójfazowych przewodach osłoniętych*. XII SPETO'89, Gliwice-Wisła, 1989, ss. 94-102.
56. Frąckowiak J., Nawrowski R., Patecki A., Szymański G.: *Wyznaczanie rozkładu sił elektrodynamicznych działających w stanach ustalonych w jednofazowych przewodach osłoniętych*. XII SPETO'89, Gliwice- Wisła, 1989, ss. 104-110.
57. Frankl D.R.: *Electromagnetic Theory*. Prentice-Hall, New Jersey 1986.
58. *Flux2D - Version 7.20. Notice d'utilisation générale*. CEDRAT, octobre 1996.
59. Gacek Zb., Kiś W., Przygrodzki A., Rusek T.: *Opracowanie kształtu i wymiarów izolatora grodziowego i wsporczego dla szynoprzewodu na napięcie 123 kV w izolacji $SF_6$*. Opracowanie Inst. Elektroenerg. i Ster. Układ. Pol. Śl. do pracy NB-128/RE1/96, Gliwice, lipiec 1996.
60. Gradsztejn I.S., Ryżyk I.M.: *Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów*. PWN, Warszawa 1972.
61. Gramz M., Ziółkowski M.: *SONMAP v.2.0. System oprogramowania metod numerycznych analizy pól*. Prace Nauk. Pol. Szczecińskiej, nr 358, Szczecin 1996.
62. Gratkowski St.: *Elementy specjalne w metodzie elementów skończonych do obliczeń elektromagnetycznych*. Prace Nauk. Pol. Szczecińskiej, nr 532, Szczecin 1996.
63. Grzybowski S., Tarasiewicz-Bartkowiak E.: *Optymalizacja parametrów konstrukcyjnych układu trójkablowego płaskiego ze względu na straty mocy*. IV SPETO'82, Gliwice-Wisła, 1982, ss. 284-290.
64. Guillen M., Girodet A., Thuries E.: *Three-Phase Gas-Insulated Transmission Line*. Conf. Proc. POWER DELIVERY'97, June 17-19, 1997, Madrid, Spain, pp. 396- 409.
65. Gustawsen B., Sletbak J., Henrisen T.: *Simulation of Transient Sheath Overvoltages in the Presence of Proximity Effects*. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 10, No 2, April 1995, pp. 1066-1075.
66. Hannakan L.: *Berechnung der Verluste im Einsenmantel dreiphasiger Rohrleitungen*. Arch. f. El., Bd. 64, 1981, pp. 37-42.
67. Heyda P.G., Kitchie G.E., Taylor J.E.: *Computation of Eddy-Current Losses in Cables sheaths and Busbar Enclosured*. IEEE, Vol. 120, 1973, pp. 447-452.
68. Hołoga Z.: *Enclosed Heavy current busbars*. Polish Engineering, No 4, 1983, pp. 7-10.
69. *Holduct Busduct System. Materiały informacyjne*, Pszczyna 1996.
70. Imai T.: *Exact Equation for Calculation of Sheath Proximity Loss of Single-Conductor Cables*. IEEE Proc., Vol. 56, No 7, July 1968, pp. 1172-1180.
71. Ingarden St.R., Jamiołkowski A.: *Elektrodynamika klasyczna*. PWN, Warszawa 1980.
72. Isaka K., Hayashi N., Yokoi Y., Okanioto M., Matsumoto T., Hammam S.: *Characterization of Electric and Magnetic Fields at Ground Level EHV Transmission Lines*. Proc. of the 7-th Int. Symp. On High Voltage Eng., Dresden, 1991, Ref. 93.01, pp. 51-54.
73. Itaka K., Araki T., Hara T.: *Heat Transfer Characteristics of Gas Spacer Cables*. IEEE Trans. on Power App. and Sys., Vol. PAS-97, No 5, Sept./Oct. 1978, pp. 1579-1585.
74. Jankowicz St.: *Przewody szynowe WN z izolacją gazową $SF_6$*. Wiadomości Elektrotechniczne, R. LVIII, Nr 3, 1990, ss. 48-50.
75. Johnson B.L., Doepken H.C., Trump. J.G.: *Operting Parameters of Compresse-Gas-Insulated Transmission Lines*. IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-88, No 4, April 1969, pp. 369-375.
76. Jouguet M.: *Traité d'électricité théorique*. Gauthier-Villars, Paris 1968.
77. Kącki E.: *Równania różniczkowe cząstkowe w zagadnieniach fizyki i techniki*. WNT, Warszawa 1995.



78. Каден Г.: *Электромагнитные экраны в высокочастотной технике и механике электросвязи*. Госэнергоиздат, Москва 1957.
79. Kadomskaya K.P., Nabokov S.L., Voitovitch R.A.: *Coordination d'isolement d'une liaison triphasé à isolation gazuese (TPGIL) avec les niveaux de surtensions et les caractéristiques des parafoudres à ZnO associés*. IV JICABLE'95, 25-29 juin 1995, Versailles, pp. 128-132.
80. Kane M., Ahmad A., Auriol Ph.: *Multiwire Shielded Cable Parameter Computation*. IEEE Trans. on Magnetics, Vol. 31, No 3, May 1995, pp. 1646-1649.
81. Kane M., Rathoin S., Auriol Ph.: *Développement de nouveuax modèls analytiques pour la détermination des impédances des câbles bifilaires blindés avec effets de proximités*. 7-ème Colloque International CEM'94, Toulouse 1994, pp. 349-354.
82. Kane M., Seltner Ph., Auriol Ph.: *Détermination des paramètres linéiques des câbles multifilaires*. 6-ème Colloque Intern. et Exposition sur la Compatibilité Électromagnétique CEM'92, 2-4 juin 1992, pp. 323-328.
83. Kasten D.G., Zhang W.: *Calculation of the Magnetic Flux Density in High Voltage AC Substation*. Proc. of the 7-th Int. Symp. On High Voltage Eng., Dresden, 1991, Ref. 93.02, pp. 55-57.
84. Kawasaki K., Inami M., Ishikawa T.: *Theoretical Considerations on Eddy Current Losses in Non-Magnetic and Magnetic Pipe for Power Transmission Systems*. IEEE Trans. on Pow. App. Syst., Vol. PAS-100, No 2, February 1981, pp. 474-484.
85. Knopf R., Cupsa A.: *Electromagnetism, Short-Circuit Forces and Strains in Elbow Sections of Phase-Isolaed, Metal-Enclosed Generator Busbars*. ETEP, Vol. 4, No 6, November/December 1994, pp. 537-546.
86. Konorski B.: *Elektrotechnika teoretyczna. Teoria pól*. Skrypt Pol. Łódzkiej, Łódź 1971.
87. Konrad A.: *Integrodifferential Finite Element Formulation of Two-Dimensional Steady-State Skin Effect Problems*. IEEE Trans. on Magn., Vol. MAG-18, No 1, January 1982, pp. 284-292.
88. Konrad A.: *The Numerical Solution of Steady-State Skin Effect Problems - An Integrodifferential Approach*. IEEE Trans. on Magn., Vol. MAG-17, No 1, January 1981, pp. 1148-1152.
89. Krakowski M., Szymański G.: *Numerical Analysis of Eddy-Currents Induced a Metal Cylinder by AC in Parallel Conductor*. Archiwum Elektrotechniki, Tom XXVII, z.1, 1978, pp. 133-142.
90. Krakowski M.: *Elektrotechnika teoretyczna. Tom 2. Pole elektromagnetyczne*. WNT, Warszawa 1993.
91. Krakowski M.: *Obwody ziemnopowrotne*. WNT, Warszawa 1979.
92. Kreizis E.E., Chrissoulidis D.P., Georgadis L.G.: *Generalized Solution of Field Distribution in Cylindrical Shells of Finite Length and Thickness due to Axial Currents*. IEEE Proc., Vol. 129, Pt. A., 1982, pp. 56-61.
93. Kriezis E.E., Cangellaris A.K.: *An Integral Equation to the Problem of Eddy Currents in Cylindrical Shells of Finite Thicknes with Infinite or Finite Length*. Archiv. Für Elektrotechnik, No 67, 1984, pp. 317-324.
94. Kriezis E.E., Zervas M.N.: *Calculation of the Forces and Field in a Cylindrical Shell with a General Excitation by Using an Integral Formulation*. IEEE Trans. on Magnetics, Vol. MAG-20, No 5, September 1984, pp. 1977-1979.
95. Krzyżański M.: *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego*. PWN, Warszawa 1957.
96. Kupalan S.D.: *Teoria pola elektromagnetycznego*. WNT, Warszawa 1967.
97. Kuroyanogi Y., Toya A., Hayashi T., Araki T.: *Construction of 8000 A Class 275 kV Gas Insulated Transmission Line*. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 5, No 1, January 1990, pp. 14-20.
98. Labridis D., Dokopoulos P.: *Finite Element Computation of Eddy Corrent Losses in Nonlinear Ferromagnetic Sheaths of Three-Phase Power Cables*. IEEE Trans. on Powe Delivery, Vol. 7, No 3, July 1992, pp. 1060-1067.
99. Leja F.: *Rachunek różniczkowy i całkowy*. PWN, Warszawa 1969.
100. Lipiński W., Gramz M.: *Analiza wypierania prądu i wyznaczania impedancji w układzie dwóch płaskich przewodów*. Rozprawy Elektrotechniczne, z.4, 1981, ss. 949-958.
101. Litwin R.: *Teoria pola elektromagnetycznego*. WNT, Warszawa 1969.
102. Lumbroso H.: *Électromagnétisme*. McGRAW-HILL, Paris 1981.
103. Luo Z., Demerdash N. A.: *A Finite-Element Ballooning Model for 2D Eddy Current Open Boundary Problems for Aerospace Applications*. NASA Lewis Research Center under Grant No NAG3-1126, Potsdam, 1992, pp. 1-3.
104. Lys N.: *Raccordement des grands transformateurs aux liaisons blindées*. Revue Alsthom, No 7, 1987, pp. 43-50.
105. Machczyński W.: *Kompatybilność elektromagnetyczna a teoria elektrotechniki*. III Seminarium - Teoria Elektrotechniki, Warszawa, 06.12.1996.

106.M a k s y m i u k J.: *Aparaty elektryczne*. WNT, Warszawa 1992.
107.M a r s d e n H.I., D a l e S.J., H o p k i n s M.D., E c k III C.R.: *High Voltage Performance of a Gas Insulated Cable with $N_2$ and $N_2$-$SF_6$ Mixtures*. 10-th International Symposium on High Voltage Engineering, August 25-29, 1997, Montréal, Québec, pp.9-12.
108.M a t u s i a k R.: *Elektrotechnika teoretyczna. Tom 2. Teoria pola elektromagnetycznego*. PWN, Warszawa 1982.
109.M a y e r D., U l r y c h B.: *Základy numerického řešení elektrických a magnetických polí*. SNTL, Praha 1999.
110.M c L a c h l a n N.W.: *Funkcje Bessela dla inżynierów*. PWN, Warszawa 1964.
111.M e y e r W.: *Kurzschluskräfte in ferromagnetischen Dreileiter-Kapselungen*. ETZ Archiv., Bol. 12, H. 4, 1990, pp.121-127.
112.M i c h l i n S.G., S m o l i c k i C.L.: *Metody przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych i całkowych*. PWN, Warszawa 1972.
113.M e e р о в и ч Э.А., Ч а л ь я н К.М.: *Расчет методом последовательных приближений распределения тока в токопроводах с учетом эффекта близости*. Из. АН СССР. Энергетика и Транспорт, Но 3, 1963.
114.M o o n P., S p e n c e r D.E.: *Foundations of Electrodynamics*. D. Van Nostrand Company, New Jersey 1960.
115.M o o n P., S p e n c e r D.E.: *Teoria pola*. PWN, Warszawa 1966.
116.M o r i l l o n F., R e c r o s i o N., Q u i n c h o n L., A d a m Ph., L i s i k H.: *Calcul du champ électromagnétique émis par un post THT*. CIGRÉ, Session 28.08-03.09.1994, pp.1-8.
117.M o r o P., V é r i t é J.C.: *Étude des densités de courent sur les conducteurs et les gaines de sortie de centrales*. Rev. Gén. Él., No 9, Septembre 1982, pp. 601-612.
118.N a w r o w s k i R., P a t e c k i A., Z i e l i ń s k a M.: *Analiza efektywności wykorzystania torów wielkoprądowych izolowanych $SF_6$*. Opracowanie Inst. Elektrot. Przemysł. Pol. Poznańskiej do umowy Nr 42-456, CPBP 02.18, Poznań, listopad 1990.
119.N a w r o w s k i R., P a t e c k i A.: *Model numeryczny optymalizacji konstrukcji torów wielkoprądowych z izolacją gazową*. Opracowanie Inst. Elektr. Przemysł. Pol. Poznańskiej do umowy Nr 42-471/91, Poznań, październik 1991.
120.N a w r o w s k i R., P a t e c k i A.: *Optymalizacja konstrukcji torów wielkoprądowych izolowanych $SF_6$*. XIV SPETO'91, Gliwice-Ustroń, 1991, ss. 225-231.
121.N a w r o w s k i R., S z y m a ń s k i G., P a t e c k i A., Z i e l i ń s k a M.: *Opracowanie kompleksowego modelu numerycznego wyznaczania strat mocy w osłoniętych torach wielkoprądowych*. Opracowanie Inst. Elektrot. Przemysł. Pol. Poznańskiej do umowy Nr 42-298, CPBP 02.18, Poznań, listopad 1990
122.N a w r o w s k i R., S z y m a ń s k i G., P a t e c k i A., Z i e l i ń s k a M.: *Opracowanie kompleksowego modelu numerycznego wyznaczania strat mocy w osłoniętych torach wielkoprądowych*. Opracowanie Inst. Elektr. Przemysł. Pol. Poznańskiej do umowy Nr 42-298, CPBP 02.18, Zad. Bad. 1.4.2.2., Poznań, listopad 1990.
123.N a w r o w s k i R.: *Tory wielkoprądowe izolowane powietrzem lub $SF_6$*. Wyd. Pol. Poznańskiej, Poznań 1998.
124.N a w r o w s k i R.: *Wpływ sprzężenia pól elektromagnetycznego i cieplnego na wartość strat mocy w 1 i 3 fazowych torach wielkoprądowych izolowanych $SF_6$*. XIII SPETO'90, Gliwice-Wisła 1990, ss. 221-228.
125.N o w i c k i K., P i e c h o c k i A., J a n k o w i c z St.: *Sprawozdanie z badań odcinka próbnego szynoprzewodu 123 kV, 1250 A izolowanego $SF_6$*. Dokumentacja techniczna Nr 5472/94, Inst. Elektrot., Warszawa, lipiec 1994.
126.*Normalisation Française C 18-600. Exposition humaine aux champ élektromagnétique basse fréquences (0 Hz à 10 kHz)*. Novembre 1995.
127.P a t e c k i A., F r ą c k o w i a k J.: *Wpływ osłony na wartość sił elektrodynamicznych działających w przekroju trójfazowych elektroenergetycznych przewodów osłoniętych*. XI SPETO'88, Gliwice-Wisła, 1988, ss. 521-527.
128.P a t e c k i A., N a w r o w s k i R., S k o w r o n e k K.: *System oprogramowania całkowych metod analizy pól elektromagnetycznych*. Opracowanie Inst. Elektr. Przemysł. Pol. Poznańskiej do umowy Nr 42-471/91, Poznań, maj 1991.
129.P a t e c k i A., N a w r o w s k i R., S k o w r o n e k K.: System oprogramowania całkowych metod analizy pól elektromagnetycznych. Opracowanie Inst. Elektr. Przemysł. Pol. Poznańskiej do umowy Nr 42-471/91, Poznań, maj 1991.



130.P a t e c k i A., N a w r o w s k i R., S z y m a ń s k i G.: *Obliczanie sił elektrodynamicznych w trójfazowych elektroenergetycznych przewodach osłoniętych z uwzględnieniem składowej nieokresowej*. XIII SPETO'90, Gliwice-Wisła, 1990, ss. 175-182.
131.P a t e c k i A., N a w r o w s k i R.: *Rozkład indukcji magnetycznej w przestrzeni wokół trójfazowych elektroenergetycznych przewodów osłoniętych*. XV SPETO'91, Gliwice-Wisła, 1991, ss. 217-224.
132.P a t e c k i A., S z y m a ń s k i G.: *Oszacowanie rozkładu temperatury w szynoprzewodach na podstawie rozkładu gęstości prądu*. VIII SPETO'85, Gliwice-Wisła, 1985, ss. 385-391.
133.P a t e c k i A.: *Obliczanie wybranych wielkości elektrodynamicznych trójfazowych elektroenergetycznych przewodów osłniętych*. Praca doktorska, Poznań 1986.
134.P a t e c k i A.: *Zależność strat mocy czynnej w trójfazowych elektroenergetycznych przewodach osłoniętych od parametrów osłony*. IX SPETO'86, Gliwice-Wisła 1986, ss. 337-344.
135.P a w l u k K., S i k o r a R., T u r o w s k i J., Z a k r z e w s k i K.: *Analiza i synteza pól elektromagnetycznych*. PAN Ossolineum, Wrocław 1990.
136.P c z e l i n B.K.: *Analiza wektorowa dla inżynierów*. PWN, Warszawa 1971.
137.P i ą t e k Z., B a r o n B.: *Impedances of the Coaxial Cable*. AMTEE'99, University of West Bohemia, Plzeň, Czech Republic (przyjęty do druku).
138.P i ą t e k Z., B a r o n B.: *Indukcyjności kabla koncentrycznego*. Zesz. Nauk. Pol. Śl. s.Elektryka, z.166, Gliwice,1999 (przyjęty do druku).
139.P i ą t e k Z., G i r o d e t A., G u i l l e n M.: *Champs magnétiques au voisinage d'une ligne triphasée à isolation gazeuse et à phases séparées*. Journées Franco-Polonaises en Électricité, Lyon, 27-29 avril 1998, pp. 144-155.
140.P i ą t e k Z., G i r o d e t A., G u i l l e n M.: *Magnetic Field in Proximity to GIS Busbars - a Single-Phase Study*. XXI SPETO'98, Gliwice-Ustroń 1998, pp. 179-186.
141.P i ą t e k Z.: *Approximation of a Vector Logarithmic Potential in Conducting Areas Divided into Triangles*. AMTEE'97, University of West Bohemia, Plzeň, Czech Republic, 9-11 September 1997, pp. 73-78.
142.P i ą t e k Z.: *Całkowite prądy wirowe indukowane w ekranach rurowych płaskiej linii trójfazowej*. XIX SPETO'96, Gliwice-Ustroń, 1996, ss. 119-123.
143.P i ą t e k Z.: *Champs magnétiques au voisinage des jeux de barres blindés*. Rapport du stage à GEC ALSTHOM T & D, Villeurbanne, septembre-novembre 1997.
144.P i ą t e k Z.: *Impedance of Overhead Transmission Line with Ground Return*. Acta Techn. CSAV 43, 1998, pp. 95-107.
145.P i ą t e k Z.: *Impedances of the Single-Pole Gas-Insulated Transmission Line*. ( praca niepublikowana ).
146.P i ą t e k Z.: *Indukcyjności przewodu osłoniętego*. Przegląd Elektrotechniczny, Rok LXXIV, No 11, 1998, ss. 287-290.
147.P i ą t e k Z.: *Method of Calculating Eddy Currents Induced in Pipe-Sheathings of the Three-Phase Flat Line*. Electrimacs'96, Saint-Nazaire, September 17-19, 1996, pp. 1011-1015.
148.P i ą t e k Z.: *Method of Calculating Total Eddy Current Induced in Tubular Screen*. Inter. Sc. Conf. VSB-TU, Ostrawa, September 12-14, 1995, pp. 132-137.
149.P i ą t e k Z.: *Pole temperatury w ekranie rurowym wywołane prądami wirowymi indukowanymi przez prąd w przewodzie równoległym*. XVIII SPETO'95, Gliwice-Ustroń, 1995, ss. 247-254.
150.P i ą t e k Z.: *Straty mocy Joule'a w trójfazowych, płaskich torach prądowych chłodzonych ciekłym azotem przy symetrii i asymetrii prądowej*. Rozprawa doktorska, Pol. Śląska, Gliwice 1980.
151.P i ą t e k Z.: *The Temperature Field in the Tubular Conductor in the Presence of the Skin and Proximity Effects*. AMTEE'95, University of West Bohemia, 28-30 June 1995, Plzeň, Czech Republic, pp. 63-68.
152.P i s k o r e k A.: *Równania całkowe. Elementy teorii i zastosowania*. WNT, Warszawa 1980.
153.П и с к у н о в Н.С.: *Дифференциальное и интегральное исчисление*. Наука, Москва 1970.
154.P o l t z J.: *Metody analizy strat wiroprądowych*. PWN, Warszawa-Poznań 1982.
155.R a w a H.: *Elektryczność i magnetyzm w technice*. PWN, Warszawa 1994.
156.R u s i n I., R z e p k a K.: *Badania modelowe pola elektrycznego wybranego układu energetycznych przewodów szynowych o złożonej geometrii w osłonie*. XII SPETO'89, Gliwice-Ustroń 1989, ss. 376-381.
157.R u s i n I., R z e p k a K.: *Parametry elektryczne i rozkład pola trójfazowego układu szyn w osłonie typu HON*. XIII SPETO'90, Gliwice-Wisła, 1990, ss. 213-220.

158.R u s i n I., R z e p k a K.: *Wpływ geometrii i układu enegetycznych przewodów w osłonie na rozkład i parametry pola elektrycznego.* XV SPETO'91, Gliwice-Ustroń 1991, ss. 233-239.
159.*Rozporządzenie Rady Ministrów z dn. 05.11.1980 r. w sprawie szczegółowych zasad ochrony przed elektromagnetycznym promieniowaniem niejonizującym szkodliwym dla ludzi i środowiska.* Dz. U. PRL, 1980, No 25. Poz. 101.
160.S a a d i A., P i c h o n L.: *Modélisation des phénomènes de diffraction 3D. Calcul simultané du champ proche et du champ lointain par une méthode d'éléments finis adaptée.* Recueil des interventions, Methode de Calcul Numérique en Électromagnétisme, 21 octobre 1996, Gif-sur-Yvette, SEE, Club 25 - Ondes et Signaux.
161.S a f i g i a n n i A.: *Short Circuit Losses in Three Phase Arrangements with Nonmagnetic Enclosure.* Electrical Engineering, Vol. 78, Iss. 1, 1994, pp. 57-62.
162.C e м ч и н о в A.M.: *Токопроводы промышленных предприятий.* Энергия, Москва 1964.
163.S i e m i o n o w K.: *Analiza rozkładu gęstości prądu w żyłach roboczych kabli elektroenergetycznych.* VII SPETO'82, Gliwice-Wisła, 1982, ss. 284-290.
164.S i k o r a R., P u r c z y ń s k i J., P a ł k a R., G r a t k o w s k i S.: *Analysis of Electromagnetic Field and Power Losses in Three Phase Gas Insulated Cable.* Rozprawy Elektrotechniczne, No 25, Z. 1, 1079, pp. 35-44.
165.S i k o r a R.: *Teoria pola elektromagnetycznego.* WNT, Warszawa 1998.
166.C т р у н с к и й Б.M.: *Короткие сети электрических печей.* ГНТИЛЧЦМ, Москва, 1962.
167.S t r z e l e c k i M.: *Straty mocy i impedancje jednofazowych torów wielkoprądowych.* XI SPETO'88, Gliwice-Wisła,1988, ss. 245-253.
168.S z u b a M.: *Pole magnetyczne w otoczeniu linii i rozdzielni wysokiego napięcia.* Energetyka, No 8, 1992, ss. 269-274.
169.S z u b a M.: *Wyznaczanie pola magnetycznego w procesie oddziaływania na organizmy żywe.* Przegląd Elektrotechniczny, No 3, 1989, ss. 91-93.
170.S z u l k i n P., P o g o r z e l s k i S.: *Podstawy teorii pola elektromagnetycznego.* WNT, Warszawa 1964.
171.S z y m a ń s k i G., N a w r o w s k i R., F r ą c k o w i a k J.: *Pole elektryczne szyn energetycznych umieszczonych w uziemionej osłonie.* X SPETO'85, Gliwice-Wisła, 1987, ss. 595-602.
172.S z y m a ń s k i G., N a w r o w s k i R., P a t e c k i A., F r ą c k o w i a k J.: *Badanie wpływu parametrów konstrukcyjnych torów wielkoprądowych na wielkość strat i mocy w szynach prądowych i osłonach.* Opracowanie Inst. Elektr. Przemysł. Pol. Poznańskiej do umowy Nr 42-298, CPBP 02.18, Zad. Bad. 1.4.2.2., Poznań, listopad 1987.
173.S z y m a ń s k i G., P a t e c k i A., N a w r o w s k i R., F r ą c k o w i a k J.: *Infuence of the Conductor Form on the Value of Eddy-Current Losses in the Sheath-Pipe of Three-Phase Pipe-Sheathing Systems.* ISEF'89, Łódź, September 1989, pp. 97-100.
174.S z y m a ń s k i G., P a t e c k i A.: *Eddy Current and Temperature of the Sheath in Three-Phase Pipe-Sheathing System.* IEEE Trans. on Magnetics, Vol. MAG-20, No 5, September 1984, pp. 2004-2006.
175.S z y m a ń s k i G.: *Zastosowanie metod całkowych w elektrodynamice technicznej.* Wyd. Pol. Poznańskiej, z.144, Poznań 1983.
176.*Switchgear Manual. Asea Brown Boveri Pochet Book.* Published by ABB Calor Emag Schaltanlagen AG, Mannheim 1993.
177.T e g o p o u l o s J.A., K r i e z i s E.E.: *Eddy Current Distribution in Cylindrical Shells of Infinite Length Due to Axial Currents. Part II: Shells of Finite Thickness.* IEEE Trans., Vol. PAS-90, 1971, pp. 1287-1294.
178.T e g o p o u l o s J.A., K r i e z i s E.E.: *Eddy Current Distribution in Cylindrical Shells of Infinite Length Due to Axial Currents. Part I: Shells of one Boudary.* IEEE Trans., Vol. PAS-90, 1971, pp. 1278-1286.
179.T h u r i e s E., G i r o d e t A., R o u s s e l Ph., G u i l l e n M.: *Liaison électrique souterraine à isolation gazeuse.* CIGRÉ, Session-1996, No 21/22-05, pp. 1-8.
180.T h u r i e s E., V o i s i n G.: *Électroduc à gaz 420-550 kV.* Revue Technique GEC ALSTHOM, No 13, 1994, pp. 17-24.
181.T h u r i o t H.: *Jeux de barres blindés pour fortes intensités.* Revue d'Électricité et de Mécanique (Alsthom), avril, mai, juin 1957, pp. 13-28.
182.T o з о н и O.B., M a е р г о й з И.Д.: *Расчет трехмерных электромагнитных полей.* Из. Техника, Киев, 1974.
183.T r a j d o s T.: *Matematyka dla inżynierów.* WNT, Warszawa 1974.
184.T u r o w s k i J., J a n o w s k i T.: *Modelowe badanie ekranów rurowych i nakórkowości w żelazie.* Archiwum Elektrotechniki, Tom XII, z.1, 1963, ss. 81-103.



185.T u r o w s k i J.: *Elektrodynamika techniczna.* WNT, Warszawa 1993.
186.T u r o w s k i J.: *Obliczanie strat i temperatur w ekranie rurowym szyny.* Archiwum Elektrotechniki, Tom XII, Z. 1, 1963, ss. 61-79.
187.T u r o w s k i J.: *Obliczenia elektromagnetyczne elementów maszyn i urządzeń elektrycznych.* WNT, Warszawa 1982.
188.W o l s k a - B o c h e n e k J., B o r z y m o w s k i A., C h m a j J., T r y j a r s k a M.: *Zarys teorii równań całkowych i równań różniczkowych cząstkowych.* PWN, Warszawa 1981.
189.Y a s h i m a M., K a w a m o t o T., F u j i n a m i H., T a k u m a T.: *A Study on Breakdown Characteristics of Hybrid Gas Insulated Transmission Line (H-GIL).* 10-th Inter. Symp. On H. V. Engineering, August 27-29, 1997, Montréal, Québec, pp. 5-8.
190.Z a k r z e w s k i K.: *Analiza i synteza pól elektromagnetycznych. Metoda różnic skończonych.* Zakład Naukowy im. Ossolińskich, Warszawa 1990.
191.Z a r ę b s k i W.: *Obliczanie prądów wirowych indukowanych w ekranach szynowych.* Przegląd Elektrotechniczny, R. XXXVIII, Z. 8, 1962, ss. 334-339.
192.*Zarządzenie Ministra Górnictwa i Energetyki z dn. 28.01.1985 r. w sprawie szczegółowych wytycznych projektowania i eksploatacji urządzeń elektroenegetycznych w zakresie ochrony ludzi i środowiska przed oddziaływaniem pola elektromagnetycznego.* Monitor Polski, No 2, poz. 24, 1985.
193.*Zarządzenie Ministra Łączności z dn. 26.03.1986 r. w sprawie sposobu przeprowadzania pomiarów kontrolnych pól elektromagnetycznych i oceny ich wyników oraz oznakowania stref ochronnych pierwszego stopnia do celów ochrony środowiska.* Monitor Polski, No 13, poz. 24, 1985.

# ZAŁĄCZNIKI

## Z1. Całki określające funkcję kształtu $F_{ps}\left(X, Y_{ps}^{i}, Y_{ps}^{j}, Y_{ps}^{k}\right)$

Całka $I_3$ ma w rozwiązaniu:

- dla $\Delta_3 < 0$

$$I_3 = \frac{1}{a_{ik}^2}\left[\left(\frac{1}{2}a_1 + a_2\right)\ln\left|A_1 + A_2 + A_3\right| + a_1\frac{A_2 - A_1}{2A_1} - 2a_2 + \right.$$
$$+\left(a_1\frac{2A_1A_3 - A_2^2}{4A_1^2} + a_2\frac{A_2}{2A_1}\right)\ln\frac{\left|A_1 + A_2 + A_3\right|}{\left|A_3\right|} -$$
$$\left. -\sqrt{4A_1A_3 - A_2^2}\,\frac{a_1A_2 - 2a_2A_2}{2A_1^2}\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{4A_1A_3 - A_2^2}}{2A_3 + A_2}\right], \tag{Z1.1}$$

- dla $\Delta_3 = 0$ wykorzystując, że

$$\lim_{\Delta_3 \to 0}\ln\left|A_1\xi^2 + A_2\xi + A_3\right| = \ln\left|A_1\left(\xi + \frac{A_2}{2A_1}\right)^2\right| \tag{Z1.1a}$$

oraz

$$\lim_{\Delta_3 \to 0}\frac{1}{\sqrt{-\Delta_3}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2A_1\xi + A_2}{\sqrt{-\Delta_3}} = -\frac{1}{2A_1\xi + A_2} \tag{Z1.1b}$$

oblicza się całkę

$$I_3 = \frac{1}{a_{ik}^2}\left[\left(\frac{1}{2}a_1 + a_2\right)\ln\left|A_1\left(1 + \frac{A_2}{2A_1}\right)^2\right| + a_1\frac{A_2 - A_1}{2A_1} - 2a_2 + \right.$$
$$\left. +\left(a_1\frac{2A_1A_3 - A_2^2}{4A_1^2} + a_2\frac{A_2}{A_1}\right)\ln\left|\frac{2A_1 + A_2}{A_2}\right|\right]. \tag{Z1.1c}$$

Całka $I_4$ jest tego samego typu co całka $I_3$; wystarczy zatem zastąpić w (Z1.1) i (Z1.1c) $\Delta_3$ przez $\Delta_4$, $a_1$ przez $a_5$, $a_2$ przez $a_6$, $A_1$ przez $A_4$, $A_2$ przez $A_5$ i $A_3$ przez $A_6$. W rozwiązaniu otrzymuje się:



- dla $\Delta_4 < 0$

$$I_4 = \frac{1}{a_{ik}^2}\left[\left(\frac{1}{2}a_5 + a_6\right)\ln\left|A_4 + A_5 + A_6\right| + a_5\frac{A_5 - A_4}{2A_4} - 2a_6 + \right.$$
$$+\left(a_5\frac{2A_4A_6 - A_5^2}{4A_4^2} + a_6\frac{A_5}{2A_4}\right)\ln\frac{\left|A_4 + A_5 + A_6\right|}{\left|A_6\right|} -$$
$$\left. -\sqrt{4A_4A_6 - A_5^2}\,\frac{a_5A_5 - 2a_6A_4}{2A_4^2}\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{4A_4A_6 - A_5^2}}{2A_6 + A_5}\right], \tag{Z1.2}$$

- dla $\Delta_4 = 0$

$$I_4 = \frac{1}{a_{ik}^2}\left[\left(\frac{1}{2}a_5 + a_6\right)\ln\left|A_4\left(1 + \frac{A_5}{2A_4}\right)^2\right| + a_5\frac{A_5 - A_4}{2A_4} - 2a_6 + \right.$$
$$\left. +\left(a_5\frac{2A_4A_6 - A_5^2}{4A_4^2} + a_6\frac{A_5}{A_4}\right)\ln\left|\frac{2A_4 + A_5}{A_5}\right|\right]. \tag{Z1.2a}$$

Całka

$$I_5 = 2\int_0^1\left(1 - \xi\right)d\xi = 1\,. \tag{Z1.3}$$

Wprowadzając

$$\Delta_6 = -4\left(a_1a_4 - a_2a_3\right)^2 \le 0 \tag{Z1.4}$$

oblicza się całkę $I_6$:

- dla $\Delta_6 < 0$

$$I_6 = \frac{2}{a_{ik}^2}\left[\left(\frac{1}{2}a_3 + a_4\right)\mathrm{arctg}\,\frac{a_1 + a_2}{a_3 + a_4} - \frac{a_3\left(a_1a_4 - a_2a_3\right)}{2\left(a_1^2 + a_3^2\right)} - \right.$$
$$-\frac{a_1\left(a_1a_4 - a_2a_3\right)^2}{2\left(a_1^2 + a_3^2\right)^2}\ln\frac{\left(a_1 + a_2\right)^2 + \left(a_3 + a_4\right)^2}{a_2^2 + a_4^2} + \frac{a_1a_4 - a_2a_3}{\sqrt{-\Delta_6}}\cdot$$
$$\cdot\frac{a_3^3\left(a_2^2 + a_4^2\right) + 3a_1^2a_3a_4^2 - a_1^2a_2^2a_3 + 2a_1a_2a_4\left(a_1^2 - a_3^2\right)}{\left(a_1^2 + a_3^2\right)^2}\cdot$$
$$\left.\cdot\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\left|a_1a_4 - a_2a_3\right|}{a_2^2 + a_4^2 + a_1a_2 + a_3a_4}\right], \tag{Z1.4a}$$

- dla $\Delta_6 = 0$

$$I_6 = \frac{2}{a_{ik}^2}\left(\frac{1}{2}a_3 + a_4\right)\mathrm{arctg}\,\frac{a_1 + a_2}{a_3 + a_4} \tag{Z1.4b}$$

- dla $a_i + a_{ij} = 0$

$$I_6 = -\frac{a_3}{a_{ik}^2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{a_1}{a_3}\,. \tag{Z1.4c}$$

Całka $I_7$ jest tego samego typu co całka $I_6$; zastępując $a_1$ przez $a_5$ oraz $a_2$ przez $a_6$ otrzymuje się, że

$$\Delta_7 = -4\left(a_5a_4 - a_6a_3\right)^2 \le 0 \tag{Z1.5}$$

i w rozwiązaniu otrzymuje się:

- dla $\Delta_7 < 0$

$$I_7 = \frac{2}{a_{ik}^2}\left[\left(\frac{1}{2}a_3 + a_4\right)\mathrm{arct}\,g\,\frac{a_5+a_6}{a_3+a_4} - \frac{a_3\left(a_5a_4 - a_6a_3\right)}{2\left(a_5^2+a_3^2\right)} - \right.$$
$$- \frac{a_5\left(a_5a_4 - a_6a_3\right)^2}{2\left(a_5^2+a_3^2\right)^2}\ln\frac{\left(a_5+a_6\right)^2+\left(a_3+a_4\right)^2}{a_6^2+a_4^2} + \frac{a_5a_4 - a_6a_3}{\sqrt{-\Delta_7}}\,\cdot$$
$$\cdot\frac{a_3^3\left(a_6^2+a_4^2\right)+3a_5^2a_3a_4^2 - a_5^2a_6^2a_3 + 2a_5a_6a_4\left(a_5^2-a_3^2\right)}{\left(a_5^2+a_3^2\right)^2}\,\cdot$$
$$\left.\cdot\,\mathrm{arctg}\,\frac{\left|a_5a_4 - a_6a_3\right|}{a_6^2+a_4^2+a_5a_6+a_3a_4}\right], \tag{Z1.5a}$$

- dla $\Delta_7 = 0$

$$I_7 = \frac{2}{a_{ik}^2}\left(\frac{1}{2}a_3 + a_4\right)\mathrm{arctg}\,\frac{a_5+a_6}{a_3+a_4}\,, \tag{Z1.5b}$$

- dla $a_i + a_{ij} = 0$

$$I_7 = -\frac{a_3}{a_{ik}^2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{a_5}{a_3}\,. \tag{Z1.5c}$$



## Z2. Całki określające funkcję kształtu $F_{ps}^{ijk}\left(X, Y_{ps}^i, Y_{ps}^j, Y_{ps}^k\right)$

W rozwiązaniu całki $I_3$ otrzymuje się:

- dla $\Delta_2 < 0$

$$I_3 = \frac{1}{a_{kj}^2}\left\{\left(\frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{2}a_2\right)\ln\left|A_1 + A_2 + A_3\right| + \frac{3A_1A_2 + 12A_1A_3 - 4A_1^2 - 6A_2^2}{18A_1^2}a_1 + \right.$$
$$+ \frac{A_2 - A_1}{2A_1}a_2 - \left[\frac{A_2\left(3A_1A_3 - A_2^2\right)}{6A_1^3}a_1 + \frac{A_2^2 - 2A_1A_3}{4A_1^2}a_2\right]\cdot\ln\frac{\left|A_1 + A_2 + A_3\right|}{\left|A_3\right|} -$$
$$\left. - \frac{2\left(4A_1^2A_3^2 - 5A_1A_2^2A_3 + A_2^4\right)a_1 + 3A_1A_2\left(4A_1A_3 - A_2^2\right)a_2}{6A_1^3\sqrt{4A_1A_3 - A_2^2}}\,arctg\,\frac{\sqrt{4A_1A_3 - A_2^2}}{2A_3 + A_2}\right\}. \tag{Z2.1}$$

- dla $\Delta_2 = 0$

$$I_3 = \frac{1}{a_{kj}^2}\left\{\left(\frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{2}a_2\right)\ln\left|A_1\left(1 + \frac{A_2}{2A_1}\right)\right|^2 + \frac{3A_1A_2 + 12A_1A_3 - 4A_1^2 - 6A_2^2}{18A_1^2}a_1 + \right.$$
$$+ \frac{A_2 - A_1}{2A_1}a_2 - 2\left[\frac{A_2\left(3A_1A_3 - A_2^2\right)}{6A_1^3}a_1 + \frac{A_2^2 - 2A_1A_3}{4A_1^2}a_2\right]\cdot\ln\left|\frac{2A_1 + A_2}{A_2}\right| -$$
$$\left. - \frac{2\left(4A_1^2A_3^2 - 5A_1A_2^2A_3 + A_2^4\right)a_1}{3A_1^2A_2\left(4A_1 + A_2\right)}\right\}. \tag{Z2.1a}$$

Całka $I_4$ - wzór (3.109b) jest tego samego typu co całka $I_3$; wystarczy zatem zastąpić w (Z2.1) i (Z2.1a) $\Delta_2$ przez $\Delta_1$ - wzór (3.106), $a_1$ przez $a_5$, $a_2$ przez $a_6$, $A_1$ przez $A_4$, $A_2$ przez $A_5$ i $A_3$ przez $A_6$. W rozwiązaniu otrzymuje się:

- dla $\Delta_1 < 0$

$$I_4 = \frac{1}{a_{kj}^2}\left\{\left(\frac{1}{3}a_5 + \frac{1}{2}a_6\right)\ln\left|A_4 + A_5 + A_6\right| + \frac{3A_4A_5 + 12A_4A_6 - 4A_4^2 - 6A_5^2}{18A_1^2}a_5 + \right.$$
$$+ \frac{A_5 - A_4}{2A_4}a_6 - \left[\frac{A_5\left(3A_4A_6 - A_5^2\right)}{6A_4^3}a_5 + \frac{A_5^2 - 2A_4A_6}{4A_4^2}a_6\right]\cdot\ln\frac{\left|A_4 + A_5 + A_6\right|}{\left|A_6\right|} -$$
$$\left. - \frac{2\left(4A_4^2A_6^2 - 5A_4A_5^2A_6 + A_5^4\right)a_5 + 3A_4A_5\left(4A_4A_6 - A_5^2\right)a_6}{6A_4^3\sqrt{4A_4A_6 - A_5^2}}\,arctg\,\frac{\sqrt{4A_4A_6 - A_5^2}}{2A_6 + A_5}\right\} \tag{Z2.2}$$

- dla $\Delta_1 = 0$

$$I_4 = \frac{1}{a_{kj}^2}\left\{\left(\frac{1}{3}a_5 + \frac{1}{2}a_6\right)\ln\left|A_4\left(1+\frac{A_5}{2A_4}\right)\right|^2 + \frac{3A_4A_5 + 12A_4A_6 - 4A_4^2 - 6A_5^2}{18A_1^2}a_5 + \right.$$
$$+\frac{A_5 - A_4}{2A_4}a_6 - 2\left[\frac{A_5\left(3A_4A_6 - A_5^2\right)}{6A_4^3}a_5 + \frac{A_5^2 - 2A_4A_6}{4A_4^2}a_6\right]\cdot\ln\left|\frac{2A_4 + A_5}{A_5}\right| -$$
$$\left. -\frac{2\left(4A_4^2A_6^2 - 5A_4A_5^2A_6 + A_5^4\right)a_5}{3A_4^2A_5\left(4A_4 + A_5\right)}\right\} \qquad \text{(Z2.2a)}$$

Całka $I_5$ - wzór (3.109c), po podstawieniu (3.103), wyraża się wzorem:

$$I_5 = 2\int_0^1\left(z - z^2\right)dz = \frac{1}{3}. \qquad \text{(Z2.3)}$$

Wprowadzając

$$\left.\begin{aligned} A_{15} &= \frac{1}{3}a_3\left(a_1a_4 - a_2a_3\right)\\ A_{16} &= \frac{1}{2}a_4\left(a_1a_4 - a_2a_3\right)\\ A_{17} &= a_1^2 + a_3^2\\ A_{18} &= 2\left(a_1a_2 + a_3a_4\right)\\ A_{19} &= a_2^2 + a_4^2 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(Z2.4)}$$

oraz

$$\Delta_3 = A_{18}^2 - 4A_{17}A_{19} = -4\left(a_1a_4 - a_2a_3\right)^2 \le 0 \qquad \text{(Z2.4a)}$$

ze wzoru (3.109d) oblicza się całkę $I_6$:

- dla $\Delta_3 < 0$

$$I_6 = \frac{2}{a_{kj}^2}\left\{\left(\frac{1}{3}a_3 + \frac{1}{2}a_4\right)ar\,\mathrm{ctg}\frac{a_1 + a_2}{a_3 + a_4} - \frac{A_{15}A_{17} + A_{16}A_{17} - A_{15}A_{18}}{2A_{17}^2} - \right.$$
$$-\frac{A_{15}A_{18}^2 - A_{15}A_{17}A_{19} - A_{16}A_{17}A_{18}}{2A_{17}^3}\ln\frac{\left(a_1 + a_2\right)^2 + \left(a_3 + a_4\right)^2}{a_2^2 + a_4^2} -$$
$$-\frac{3A_{15}A_{17}A_{18}A_{19} - 2A_{16}A_{17}^2A_{19} - A_{15}A_{18}^3 - A_{16}A_{17}A_{18}^2}{A_{17}^3\sqrt{-\Delta_3}}\cdot$$
$$\left.\cdot\,\mathrm{arc\,tg}\frac{\sqrt{-\Delta_3}}{2\left(a_2^2 + a_4^2 + a_1a_2 + a_3a_4\right)}\right\}, \qquad \text{(Z2.4b)}$$



- dla $\Delta_3 = 0$

$$I_6 = \frac{2}{a_{kj}^2}\left(\frac{1}{3}a_3 + \frac{1}{2}a_4\right)\mathrm{arctg}\frac{a_1 + a_2}{a_3 + a_4}. \qquad \text{(Z2.4c)}$$

Całka $I_7$ - wzór (3.109e) jest tego samego typu co całka $I_6$; wystarczy w podstawieniach (Z2.4), (Z2.4a) i rozwiązaniach (Z2.4b) i (Z2.4c) zastąpić $a_1$ przez $a_5$ oraz $a_2$ przez $a_6$. Wtedy też nowe współczynniki

$$\left.\begin{aligned} A_{24} &= \frac{1}{3}a_3\left(a_5a_4 - a_6a_3\right)\\ A_{25} &= \frac{1}{2}a_4\left(a_5a_4 - a_6a_3\right)\\ A_{26} &= a_5^2 + a_3^2\\ A_{27} &= 2\left(a_5a_6 + a_3a_4\right)\\ A_{28} &= a_6^2 + a_4^2 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(Z2.5)}$$

oraz

$$\Delta_4 = A_{27}^2 - 4A_{26}A_{28} = -4\left(a_5a_4 - a_6a_3\right)^2 \le 0. \qquad \text{(Z2.5a)}$$

Ponadto zastępując w rozwiązaniach (Z2.4b) i (Z2.4c) $A_{15}$ przez $A_{24}$, $A_{16}$ przez $A_{25}$, $A_{17}$ przez $A_{26}$, $A_{18}$ przez $A_{27}$ i $A_{19}$ przez $A_{28}$ otrzymuje się:

- dla $\Delta_4 < 0$

$$I_7 = \frac{2}{a_{kj}^2}\left\{\left(\frac{1}{3}a_3 + \frac{1}{2}a_4\right)\mathrm{arctg}\frac{a_5 + a_6}{a_3 + a_4} - \frac{A_{24}A_{26} + A_{25}A_{26} - A_{24}A_{27}}{2A_{26}^2} - \right.$$
$$-\frac{A_{24}A_{27}^2 - A_{24}A_{26}A_{28} - A_{25}A_{26}A_{27}}{2A_{26}^3}\ln\frac{\left(a_5 + a_6\right)^2 + \left(a_3 + a_4\right)^2}{a_6^2 + a_4^2} -$$
$$-\frac{3A_{24}A_{26}A_{27}A_{28} - 2A_{25}A_{26}^2A_{28} - A_{24}A_{27}^3 - A_{25}A_{26}A_{27}^2}{A_{26}^3\sqrt{-\Delta_4}}\cdot$$
$$\left.\cdot\,\mathrm{arc\,tg}\frac{\sqrt{-\Delta_4}}{2\left(a_6^2 + a_4^2 + a_5a_6 + a_3a_4\right)}\right\}, \qquad \text{(Z2.5b)}$$

- dla $\Delta_4 = 0$

$$I_7 = \frac{2}{a_{kj}^2}\left(\frac{1}{3}a_3 + \frac{1}{2}a_4\right)\mathrm{arctg}\frac{a_5 + a_6}{a_3 + a_4}. \qquad \text{(Z2.5c)}$$

## Z3. Pochodne $f_{3x}, f_{3y}, \ldots, f_{7y}$ funkcji kształtu $F_{ps}(X)$

Po wykonaniu operacji różniczkowania funkcji kształtu $F_{ps}(X)$ otrzymano następujące funkcje $f_{3x}, f_{3y}, \ldots, f_{7y}$ :

- dla $\Delta_3 < 0$

$$
\begin{aligned}
f_{3x}(X) = \frac{1}{a_{ik}^2}\Bigg\{ & -a_{iky}\ln\left|A_1+A_2+A_3\right| - \frac{(a_1+2a_2)(a_{iy}+a_{ijy})}{A_1+A_2+A_3} + \frac{a_1(a_{iky}-a_{ijy})}{A_1} + 2a_{iky} - \\
& - \left\{ \frac{a_1}{A_1^2}\left[A_1(a_{iy}+a_{iky}) + A_2(a_{iky}-a_{ijy})\right] + \frac{\left(A_2 a_{iky} - 2a_2(a_{iky}-a_{ijy})\right)}{2A_1} \right\} \ln\frac{|A_1+A_2+A_3|}{|A_3|} + \\
& + \left( a_1\frac{(2A_1A_3 - A_2^2)}{4A_1^2} + a_2\frac{A_2}{2A_1} \right) \frac{2}{(A_1+A_2+A_3)} \frac{\left((A_1+A_2+A_3)(a_{iy}+a_{iky}) - A_3(a_{iy}+a_{ijy})\right)}{A_3} + \\
& + \Bigg[ \frac{\left(2A_1(a_{iy}+a_{iky}) + A_2(a_{iky}-a_{ijy})\right)}{\sqrt{4A_1A_3 - A_2^2}} \cdot \frac{(a_1A_2 - 2a_2A_1)}{A_1^2} - \\
& - \sqrt{4A_1A_3 - A_2^2}\,\frac{\left(a_1(a_{iky}-a_{ijy}) + A_1 a_{iky}\right)}{A_1^2} \Bigg] \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{4A_1A_3 - A_2^2}}{2A_3 + A_2} + \frac{(a_1A_2 - 2a_2A_1)}{4A_1^2A_3} \cdot \\
& \cdot \frac{\left[\left[2A_1(a_{iy}+a_{iky}) + A_2(a_{iky}-a_{ijy})\right](2A_3+A_2) - (4A_1A_3 - A_2^2)(2a_{iy}+a_{iky}+a_{ijy})\right]}{(A_1+A_2+A_3)} \Bigg\},
\end{aligned}
$$

(Z3.1)



$$
\begin{aligned}
f_{3y}(X) = \frac{1}{a_{ik}^2}\Bigg\{ & -a_{ikx}\ln\left|A_1+A_2+A_3\right| - \frac{(a_1+2a_2)(a_{ix}+a_{ijx})}{A_1+A_2+A_3} + \frac{a_1(a_{ikx}-a_{ijx})}{A_1} + 2a_{ikx} - \\
& - \left\{ \frac{a_1}{A_1^2}\left[A_1(a_{ix}+a_{ikx}) + A_2(a_{ikx}-a_{ijx})\right] + \frac{\left(A_2 a_{ikx} - 2a_2(a_{ikx}-a_{ijx})\right)}{2A_1} \right\} \ln\frac{|A_1+A_2+A_3|}{|A_3|} + \\
& + \left( a_1\frac{(2A_1A_3 - A_2^2)}{4A_1^2} + a_2\frac{A_2}{2A_1} \right) \frac{2}{(A_1+A_2+A_3)} \frac{\left((A_1+A_2+A_3)(a_{ix}+a_{ikx}) - A_3(a_{ix}+a_{ijx})\right)}{A_3} + \\
& + \Bigg[ \frac{\left(2A_1(a_{ix}+a_{ikx}) + A_2(a_{ikx}-a_{ijx})\right)}{\sqrt{4A_1A_3 - A_2^2}} \cdot \frac{(a_1A_2 - 2a_2A_1)}{A_1^2} - \\
& - \sqrt{4A_1A_3 - A_2^2}\,\frac{\left(a_1(a_{ikx}-a_{ijx}) + A_1 a_{ikx}\right)}{A_1^2} \Bigg] \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{4A_1A_3 - A_2^2}}{2A_3 + A_2} + \frac{(a_1A_2 - 2a_2A_1)}{4A_1^2A_3} \cdot \\
& \cdot \frac{\left[\left[2A_1(a_{ix}+a_{ikx}) + A_2(a_{ikx}-a_{ijx})\right](2A_3+A_2) - (4A_1A_3 - A_2^2)(2a_{ix}+a_{ikx}+a_{ijx})\right]}{A_1+A_2+A_3} \Bigg\},
\end{aligned}
$$

(Z3.1a)

- dla $\Delta_3 = 0$

$$
\begin{aligned}
f_{3x}(X) = \frac{1}{a_{ik}^2}\Bigg\{ & -a_{iky}\ln\left|A_1\left(1+\frac{A_2}{2A_1}\right)^2\right| + 2\frac{(a_1+2a_2)(a_{iky}-a_{ijy})}{2A_1+A_2} + \frac{a_1(a_{iky}-a_{ijy})}{A_1} + 2a_{iky} - \\
& - \left\{ \frac{2a_1}{A_1^2}\left[A_1(a_{iy}+a_{iky}) + A_2(a_{iky}-a_{ijy})\right] + \frac{\left(A_2 a_{iky} - 2a_2(a_{iky}-a_{ijy})\right)}{A_1} \right\} \ln\left|\frac{2A_1+A_2}{A_2}\right| - \\
& - \left( a_1\frac{(2A_1A_3 - A_2^2)}{2A_1^2} + a_2\frac{A_2}{A_1} \right) \frac{4A_1(a_{iky}-a_{ijy})}{A_2(2A_1+A_2)} \Bigg\},
\end{aligned}
$$

(Z3.1b)

$$f_{3y}(X)=\frac{1}{a_{ik}^2}\left\{-a_{ikx}\ln\left|A_1\left(1+\frac{A_2}{2A_1}\right)^2\right|+2\frac{(a_1+2a_2)(a_{ikx}-a_{ijx})}{2A_1+A_2}+\frac{a_1(a_{ikx}-a_{ijx})}{A_1}+2a_{ikx}-\right.$$

$$-\left\{\frac{2a_1}{A_1^2}\left[A_1(a_{ix}+a_{ikx})+A_2(a_{ikx}-a_{ijx})\right]+\frac{(A_2a_{ikx}-2a_2(a_{ikx}-a_{ijx}))}{A_1}\right\}\cdot\ln\left|\frac{2A_1+A_2}{A_2}\right|-$$

$$\left.-\left(a_1\frac{(2A_1A_3-A_2^2)}{2A_1^2}+a_2\frac{A_2}{A_1}\right)\frac{4A_1(a_{ikx}-a_{ijx})}{A_2(2A_1+A_2)}\right\},\qquad\text{(Z3.1c)}$$

- dla $\Delta_4<0$

$$f_{4x}(X)=\frac{1}{a_{ik}^2}\left\{-a_{iky}\ln|A_4+A_5+A_6|-\frac{(a_5+2a_6)(a_{ijy}+a_{iy})}{A_4+A_5+A_6}-\frac{a_5\,a_{ijy}}{A_4}+2a_{iky}-\right.$$

$$-\left[\frac{a_5}{A_4^2}(A_4a_{iy}-A_5a_{ijy})+\frac{(A_5a_{iky}+2a_6a_{ijy})}{2A_4}\right]\ln\frac{|A_4+A_5+A_6|}{|A_6|}+$$

$$+\left(a_5\frac{(2A_4A_6-A_5^2)}{4A_4^2}+a_6\frac{A_5}{2A_4}\right)\frac{2}{A_4+A_5+A_6}\,\frac{((A_4+A_5+A_6)\,a_{iy}-A_6(a_{iy}+a_{ijy}))}{A_6}+$$

$$+\left[\frac{(2A_4a_{iy}-A_5a_{ijy})}{\sqrt{4A_4A_6-A_5^2}}\,\frac{(a_5A_5-2a_6A_4)}{A_4^2}+\sqrt{4A_4A_6-A_5^2}\,\frac{(a_5a_{ijy}-A_4a_{iky})}{A_4^2}\right]\cdot$$

$$\cdot\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{4A_4A_6-A_5^2}}{2A_6+A_5}+\frac{(a_5A_5-2a_6A_4)}{4A_4^2A_6}\cdot$$

$$\left.\cdot\frac{\left[(2A_4a_{iy}-A_5a_{ijy})(2A_6+A_5)-(4A_4A_6-A_5^2)(2a_{iy}+a_{ijy})\right]}{A_4+A_5+A_6}\right\},\qquad\text{(Z3.2)}$$



$$f_{4y}(X)=\frac{1}{a_{ik}^2}\left\{-a_{ikx}\ln|A_4+A_5+A_6|-\frac{(a_5+2a_6)(a_{ijx}+a_{ix})}{A_4+A_5+A_6}-\frac{a_5\,a_{ijx}}{A_4}+2a_{ikx}-\right.$$

$$-\left[\frac{a_5}{A_4^2}(A_4a_{ix}-A_5a_{ijx})+\frac{(A_5a_{ikx}+2a_6a_{ijx})}{2A_4}\right]\ln\frac{|A_4+A_5+A_6|}{|A_6|}+$$

$$+\left(a_5\frac{(2A_4A_6-A_5^2)}{4A_4^2}+a_6\frac{A_5}{2A_4}\right)\frac{2}{A_4+A_5+A_6}\,\frac{((A_4+A_5+A_6)\,a_{ix}-A_6(a_{ix}+a_{ijx}))}{A_6}+$$

$$+\left[\frac{(2A_4a_{ix}-A_5a_{ijx})}{\sqrt{4A_4A_6-A_5^2}}\,\frac{(a_5A_5-2a_6A_4)}{A_4^2}+\sqrt{4A_4A_6-A_5^2}\,\frac{(a_5a_{ijx}-A_4a_{ikx})}{A_4^2}\right]\cdot$$

$$\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{4A_4A_6-A_5^2}}{2A_6+A_5}+\frac{(a_5A_5-2a_6A_4)}{4A_4^2A_6}\cdot$$

$$\left.\cdot\frac{\left[(2A_4a_{ix}-A_5a_{ijx})(2A_6+A_5)-(4A_4A_6-A_5^2)(2a_{ix}+a_{ijx})\right]}{A_4+A_5+A_6}\right\},\qquad\text{(Z3.2a)}$$

- dla $\Delta_4=0$

$$f_{4x}(X)=\frac{1}{a_{ik}^2}\left\{-a_{iky}\ln\left|A_4\left(1+\frac{A_5}{2A_4}\right)^2\right|-2\frac{(a_5+2a_6)\,a_{ijy}}{2A_4+A_5}-\frac{a_5\,a_{ijy}}{A_4}+2a_{iky}-\right.$$

$$-\left[\frac{2a_5}{A_4^2}(A_4a_{iy}-A_5a_{ijy})+\frac{(A_5a_{iky}+2a_6a_{ijy})}{A_4}\right]\ln\left|\frac{2A_4+A_5}{A_5}\right|+\qquad\text{(Z3.2b)}$$

$$\left.+\left(a_5\frac{(2A_4A_6-A_5^2)}{2A_4^2}+a_6\frac{A_5}{A_4}\right)\frac{4A_4\,a_{ijy}}{A_5(2A_4+A_5)}\right\},$$

$$f_{4y}(X)=\frac{1}{a_{ik}^2}\left\{-a_{ikx}\ln\left|A_4\left(1+\frac{A_5}{2A_4}\right)^2\right|-2\frac{(a_5+2a_6)\,a_{ijx}}{2A_4+A_5}-\frac{a_5\,a_{ijx}}{A_4}+2a_{ikx}-\right.$$

$$-\left[\frac{2a_5}{A_4^2}(A_4a_{ix}-A_5a_{ijx})+\frac{(A_5a_{ikx}+2a_6a_{ijx})}{A_4}\right]\ln\left|\frac{2A_4+A_5}{A_5}\right|+\qquad\text{(Z3.2c)}$$

$$\left.+\left(a_5\frac{(2A_4A_6-A_5^2)}{2A_4^2}+a_6\frac{A_5}{A_4}\right)\frac{4A_4\,a_{ijx}}{A_5(2A_4+A_5)}\right\},$$

- dla $\Delta_6 < 0$

$$
\begin{aligned}
f_{6x}(X) = \frac{2}{a_{ik}^2}\Bigg\{ & -a_{ikx}\,\mathrm{arc\ tg}\,\frac{a_1+a_2}{a_3+a_4} + \\
& + \frac{\left(\frac{1}{2}a_3+a_4\right)\left[(a_1+a_2)a_{ikx}-(a_3+a_4)a_{iky}\right]}{\left[(a_1+a_2)^2+(a_3+a_4)^2\right]} + \frac{a_3\left(a_1a_{ikx}-a_3a_{iky}\right)}{2\left(a_1^2+a_3^2\right)} + \\
& + \frac{a_1(a_1a_4-a_2a_3)\left(a_1a_{ikx}-a_3a_{iky}\right)}{\left(a_1^2+a_3^2\right)^2}\,\ln\frac{\left((a_1+a_2)^2+(a_3+a_4)^2\right)}{a_2^2+a_4^2} + \frac{a_1(a_1a_4-a_2a_3)^2}{\left(a_1^2+a_3^2\right)^2}\cdot \\
& \cdot\frac{\left[(a_1+a_2)a_{iky}+(a_3+a_4)\,a_{ikx}\right]\left(a_2^2+a_4^2\right)-\left[(a_1+a_2)^2+(a_3+a_4)^2\right]\left(a_2a_{iky}+a_4a_{ikx}\right)}{\left[(a_1+a_2)^2+(a_3+a_4)^2\right]\left(a_2^2+a_4^2\right)} + \\
& + \Bigg[\frac{\left[\left(a_3a_{iky}-a_1a_{ikx}\right)\left|a_1a_4-a_2a_3\right|-(a_1a_4-a_2a_3)\left|a_3a_{iky}-a_1a_{ikx}\right|\right]}{2(a_1a_4-a_2a_3)^2}\cdot \\
& \cdot\frac{\left[a_3^3\left(a_2^2+a_4^2\right)+3a_1^2a_3a_4^2-a_1^2a_2^2a_3+2a_1a_2a_4\left(a_1^2-a_3^2\right)\right]}{\left(a_1^2+a_3^2\right)^2} + \frac{a_1a_4-a_2a_3}{\sqrt{-\Delta_6}}\cdot \\
& \cdot\frac{\left(-2a_3^3\left(a_2a_{iky}+a_4a_{ikx}\right)-6a_1^2a_3a_4a_{ikx}+2a_1^2a_2a_3a_{iky}-2\left(a_1^2-a_3^2\right)a_1\left(a_4a_{iky}+a_2a_{ikx}\right)\right)}{\left(a_1^2+a_3^2\right)^2}\Bigg]\cdot \\
& \cdot\mathrm{arc\ tg}\,\frac{\left|a_1a_4-a_2a_3\right|}{a_2^2+a_4^2+a_1a_2+a_3a_4} + \frac{a_1a_4-a_2a_3}{\sqrt{-\Delta_6}}\cdot \\
& \cdot\frac{\left[a_3^3\left(a_2^2+a_4^2\right)+3a_1^2a_3a_4^2-a_1^2a_2^2a_3+2a_1a_2a_4\left(a_1^2-a_3^2\right)\right]}{\left(a_1^2+a_3^2\right)^2}\cdot \\
& \cdot\frac{\left[\left|a_3a_{iky}-a_1a_{ikx}\right|\left(a_2^2+a_4^2+a_1a_2+a_3a_4\right)+\left|a_1a_4-a_2a_3\right|\left(2a_2a_{iky}+2a_4a_{ikx}+a_1a_{iky}+a_3a_{ikx}\right)\right]}{\left(\left(a_2^2+a_4^2+a_1a_2+a_3a_4\right)^2+\left(a_1a_4-a_2a_3\right)^2\right)}\Bigg]\Bigg\},
\end{aligned}
$$

(Z3.3)



$$
\begin{aligned}
f_{6y}(X) = \frac{2}{a_{ik}^2}\Bigg\{ & a_{iky}\,\mathrm{arc\ tg}\,\frac{a_1+a_2}{a_3+a_4} - \\
& - \frac{\left(\frac{1}{2}a_3+a_4\right)\left[(a_1+a_2)a_{iky}+(a_3+a_4)a_{ikx}\right]}{\left[(a_1+a_2)^2+(a_3+a_4)^2\right]} - \frac{a_3\left(a_1a_{iky}+a_3a_{ikx}\right)}{2\left(a_1^2+a_3^2\right)} - \\
& - \frac{a_1(a_1a_4-a_2a_3)\left(a_1a_{iky}+a_3a_{ikx}\right)}{\left(a_1^2+a_3^2\right)^2}\,\ln\frac{(a_1+a_2)^2+(a_3+a_4)^2}{a_2^2+a_4^2} - \frac{a_1(a_1a_4-a_2a_3)^2}{\left(a_1^2+a_3^2\right)^2}\cdot \\
& \cdot\frac{\left[(a_3+a_4)a_{iky}-(a_1+a_2)\,a_{ikx}\right]\left(a_2^2+a_4^2\right)-\left[(a_1+a_2)^2+(a_3+a_4)^2\right]\left(a_4a_{iky}-a_2a_{ikx}\right)}{\left[(a_1+a_2)^2+(a_3+a_4)^2\right]\left(a_2^2+a_4^2\right)} + \\
& + \Bigg[\frac{\left[\left(a_1a_{iky}+a_3a_{ikx}\right)\left|a_1a_4-a_2a_3\right|-(a_1a_4-a_2a_3)\left|a_1a_{iky}+a_3a_{ikx}\right|\right]}{2(a_1a_4-a_2a_3)^2}\cdot \\
& \cdot\frac{\left[a_3^3\left(a_2^2+a_4^2\right)+3a_1^2a_3a_4^2-a_1^2a_2^2a_3+2a_1a_2a_4\left(a_1^2-a_3^2\right)\right]}{\left(a_1^2+a_3^2\right)^2} + \frac{a_1a_4-a_2a_3}{\sqrt{-\Delta_6}}\cdot \\
& \cdot\frac{\left(2a_3^3\left(a_4a_{iky}-a_2a_{ikx}\right)+6a_1^2a_3a_4a_{iky}+2a_1^2a_2a_3a_{ikx}+2\left(a_1^2-a_3^2\right)a_1\left(a_2a_{iky}-a_4a_{ikx}\right)\right)}{\left(a_1^2+a_3^2\right)^2}\Bigg]\cdot \\
& \cdot\mathrm{arc\ tg}\,\frac{\left|a_1a_4-a_2a_3\right|}{a_2^2+a_4^2+a_1a_2+a_3a_4} + \frac{a_1a_4-a_2a_3}{\sqrt{-\Delta_6}}\cdot \\
& \cdot\frac{\left[a_3^3\left(a_2^2+a_4^2\right)+3a_1^2a_3a_4^2-a_1^2a_2^2a_3+2a_1a_2a_4\left(a_1^2-a_3^2\right)\right]}{\left(a_1^2+a_3^2\right)^2}\cdot \\
& \cdot\frac{\left[\left|a_1a_{iky}+a_3a_{ikx}\right|\left(a_2^2+a_4^2+a_1a_2+a_3a_4\right)-\left|a_1a_4-a_2a_3\right|\left(2a_4a_{iky}-2a_2a_{ikx}-a_1a_{ikx}+a_3a_{iky}\right)\right]}{\left(a_2^2+a_4^2+a_1a_2+a_3a_4\right)^2+\left(a_1a_4-a_2a_3\right)^2}\Bigg]\Bigg\},
\end{aligned}
$$

(Z3.3a)

- dla $\Delta_6 = 0$

$$
f_{6x}(X) = \frac{2}{a_{ik}^2}\left\{-a_{ikx}\,\mathrm{arctg}\,\frac{a_1+a_2}{a_3+a_4} + \frac{\left(\frac{1}{2}a_3+a_4\right)\left[(a_1+a_2)a_{ikx}-(a_3+a_4)a_{iky}\right]}{\left[(a_1+a_2)^2+(a_3+a_4)^2\right]}\right\}
$$

(Z3.3b)

$$f_{6y}(X)=\frac{2}{a_{ik}^2}\left\{a_{iky}\,\mathrm{arctg}\,\frac{a_1+a_2}{a_3+a_4}-\frac{\left(\frac{1}{2}a_3+a_4\right)\left[(a_1+a_2)a_{iky}+(a_3+a_4)a_{ikx}\right]}{\left[(a_1+a_2)^2+(a_3+a_4)^2\right]}\right\}$$

(Z3.3c)

- dla $\Delta_7<0$

$$f_{7x}(X)=\frac{2}{a_{ik}^2}\left\{-a_{ikx}\,\mathrm{arc\ tg}\,\frac{a_5+a_6}{a_3+a_4}+\right.$$

$$+\frac{\left(\frac{1}{2}a_3+a_4\right)\left[(a_5+a_6)a_{ikx}-(a_3+a_4)a_{iky}\right]}{\left[(a_5+a_6)^2+(a_3+a_4)^2\right]}+\frac{a_3\left(a_5a_{ikx}-a_3a_{iky}\right)}{2\left(a_5^2+a_3^2\right)}+$$

$$+\frac{a_5\left(a_5a_4-a_6a_3\right)\left(a_5a_{ikx}-a_3a_{iky}\right)}{\left(a_5^2+a_3^2\right)^2}\ln\frac{(a_5+a_6)^2+(a_3+a_4)^2}{a_6^2+a_4^2}+\frac{a_5\left(a_5a_4-a_6a_3\right)^2}{\left(a_5^2+a_3^2\right)^2}\cdot$$

$$\cdot\frac{\left[\left[(a_5+a_6)a_{iky}+(a_3+a_4)\,a_{ikx}\right]\left(a_6^2+a_4^2\right)-\left[(a_5+a_6)^2+(a_3+a_4)^2\right]\left(a_6a_{iky}+a_4a_{ikx}\right)\right]}{\left[(a_5+a_6)^2+(a_3+a_4)^2\right]\left(a_6^2+a_4^2\right)}+$$

$$+\left[\frac{\left[\left(a_3a_{iky}-a_5a_{ikx}\right)\left|a_5a_4-a_6a_3\right|-\left(a_5a_4-a_6a_3\right)\left|a_3a_{iky}-a_5a_{ikx}\right|\right]}{2\left(a_5a_4-a_6a_3\right)^2}\cdot\right.$$

$$\cdot\frac{\left[a_3^3\left(a_6^2+a_4^2\right)+3a_5^2a_3a_4^2-a_5^2a_6^2a_3+2a_5a_6a_4\left(a_5^2-a_3^2\right)\right]}{\left(a_5^2+a_3^2\right)^2}+\frac{a_5a_4-a_6a_3}{\sqrt{-\Delta_7}}\cdot$$

$$\left.\cdot\frac{\left(-2a_3^3\left(a_6a_{iky}+a_4a_{ikx}\right)-6a_5^2a_3a_4a_{ikx}+2a_5^2a_6a_3a_{iky}-2\left(a_5^2-a_3^2\right)a_5\left(a_4a_{iky}+a_6a_{ikx}\right)\right)}{\left(a_5^2+a_3^2\right)^2}\right]\cdot$$

$$\cdot\,\mathrm{arc\ tg}\,\frac{\left|a_5a_4-a_6a_3\right|}{a_6^2+a_4^2+a_5a_6+a_3a_4}+\frac{a_5a_4-a_6a_3}{\sqrt{-\Delta_7}}\cdot$$

$$\cdot\frac{\left[a_3^3\left(a_6^2+a_4^2\right)+3a_5^2a_3a_4^2-a_5^2a_6^2a_3+2a_5a_6a_4\left(a_5^2-a_3^2\right)\right]}{\left(a_5^2+a_3^2\right)^2}\cdot$$

$$\left.\cdot\frac{\left[\left|a_3a_{iky}-a_5a_{ikx}\right|\left(a_6^2+a_4^2+a_5a_6+a_3a_4\right)+\left|a_5a_4-a_6a_3\right|\left(2a_6a_{iky}+2a_4a_{ikx}+a_5a_{iky}+a_3a_{ikx}\right)\right]}{\left(\left(a_6^2+a_4^2+a_5a_6+a_3a_4\right)^2+\left(a_5a_4-a_6a_3\right)^2\right)}\right\},$$

(Z3.4)



$$f_{7y}(X)=\frac{2}{a_{ik}^2}\left\{a_{iky}\,arctg\,\frac{a_5+a_6}{a_3+a_4}-\right.$$

$$-\frac{\left(\frac{1}{2}a_3+a_4\right)\left[(a_5+a_6)a_{iky}+(a_3+a_4)a_{ikx}\right]}{(a_5+a_6)^2+(a_3+a_4)^2}-\frac{a_3\left(a_5a_{iky}+a_3a_{ikx}\right)}{2\left(a_5^2+a_3^2\right)}-$$

$$-\frac{a_5\left(a_5a_4-a_6a_3\right)\left(a_5a_{iky}+a_3a_{ikx}\right)}{\left(a_5^2+a_3^2\right)^2}\ln\frac{(a_5+a_6)^2+(a_3+a_4)^2}{a_6^2+a_4^2}-\frac{a_5\left(a_5a_4-a_6a_3\right)^2}{\left(a_5^2+a_3^2\right)^2}\cdot$$

$$\cdot\frac{\left[\left[(a_3+a_4)a_{iky}-(a_5+a_6)\,a_{ikx}\right]\left(a_6^2+a_4^2\right)-\left[(a_5+a_6)^2+(a_3+a_4)^2\right]\left(a_4a_{iky}-a_6a_{ikx}\right)\right]}{\left[(a_5+a_6)^2+(a_3+a_4)^2\right]\left(a_6^2+a_4^2\right)}+$$

$$+\left[\frac{\left[\left(a_5a_{iky}+a_3a_{ikx}\right)\left|a_5a_4-a_6a_3\right|-\left(a_5a_4-a_6a_3\right)\left|a_5a_{iky}+a_3a_{ikx}\right|\right]}{2\left(a_5a_4-a_6a_3\right)^2}\cdot\right.$$

$$\cdot\frac{\left[a_3^3\left(a_6^2+a_4^2\right)+3a_5^2a_3a_4^2-a_5^2a_6^2a_3+2a_5a_6a_4\left(a_5^2-a_3^2\right)\right]}{\left(a_5^2+a_3^2\right)^2}+\frac{a_5a_4-a_6a_3}{\sqrt{-\Delta_7}}\cdot$$

$$\left.\cdot\frac{\left(2a_3^3\left(a_4a_{iky}-a_6a_{ikx}\right)+6a_5^2a_3a_4a_{iky}+2a_5^2a_6a_3a_{ikx}+2\left(a_5^2-a_3^2\right)a_5\left(a_6a_{iky}-a_4a_{ikx}\right)\right)}{\left(a_5^2+a_3^2\right)^2}\right]\cdot$$

$$\cdot\,arctg\,\frac{\left|a_5a_4-a_6a_3\right|}{a_6^2+a_4^2+a_5a_6+a_3a_4}+\frac{a_5a_4-a_6a_3}{\sqrt{-\Delta_7}}\cdot$$

$$\cdot\frac{\left[a_3^3\left(a_6^2+a_4^2\right)+3a_5^2a_3a_4^2-a_5^2a_6^2a_3+2a_5a_6a_4\left(a_5^2-a_3^2\right)\right]}{\left(a_5^2+a_3^2\right)^2}\cdot$$

$$\left.\cdot\frac{\left[\left|a_5a_{iky}+a_3a_{ikx}\right|\left(a_6^2+a_4^2+a_5a_6+a_3a_4\right)-\left|a_5a_4-a_6a_3\right|\left(2a_4a_{iky}-2a_6a_{ikx}-a_5a_{ikx}+a_3a_{iky}\right)\right]}{\left(a_6^2+a_4^2+a_5a_6+a_3a_4\right)^2+\left(a_5a_4-a_6a_3\right)^2}\right\}$$

(Z3.4a)

- dla $\Delta_7 = 0$

$$f_{7x}(X) = \frac{2}{a_{ik}^2}\left\{-a_{ikx}\,\mathrm{arctg}\,\frac{a_5+a_6}{a_3+a_4} + \frac{\left(\frac{1}{2}a_3+a_4\right)\left[(a_5+a_6)a_{ikx}-(a_3+a_4)a_{iky}\right]}{\left[(a_5+a_6)^2+(a_3+a_4)^2\right]}\right\}, \tag{Z3.4b}$$

$$f_{7y}(X) = \frac{2}{a_{ik}^2}\left\{a_{iky}\,\mathrm{arctg}\,\frac{a_5+a_6}{a_3+a_4} - \frac{\left(\frac{1}{2}a_3+a_4\right)\left[(a_5+a_6)a_{iky}+(a_3+a_4)a_{ikx}\right]}{\left[(a_5+a_6)^2+(a_3+a_4)^2\right]}\right\}. \tag{Z3.4c}$$

## POLE MAGNETYCZNE W OTOCZENIU JEDNOBIEGUNOWYCH OSŁONIĘTYCH TORÓW WIELKOPRĄDOWYCH

### Streszczenie

W pracy przedstawiono zagadnienie wyznaczania natężenia pola magnetycznego w otoczeniu jednobiegunowych osłoniętych torów wielkoprądowych. Rozważania dotyczą torów jednofazowych oraz płaskich torów trójfazowych. W pobliżu tych torów mogą znajdować się niemagnetyczne płyty przewodzące lub ferromagnetyki. Pole magnetyczne wyznaczono w środowiskach o niejednorodności elektrycznej i magnetycznej. W przypadku torów trójfazowych rozpatrzono wpływ zwarć osłon między sobą oraz z ziemią na pole magnetyczne w otoczeniu takich torów.

Praca obejmuje następujące zagadnienia:

- równań całkowych układu $N_C$ przewodów równoległych (rozdział 2) lub ferromagnetyków (rozdział 6),
- magnetycznego potencjału wektorowego układu $N_C$ przewodów równoległych (rozdział 3) lub ferromagnetyków (rozdział 6),
- impedancji układu $N_C$ przewodów równoległych (rozdział 4) lub ferromagnetyków (rozdział 6),
- pola magnetycznego w otoczeniu osłoniętych torów prądowych (rozdział 5) oraz w środowisku o niejednorodności elektrycznej i magnetycznej (rozdział 6).

Zagadnienia te są analizowane metodą analityczną i metodą analityczno-numeryczną.

Posługując się metodą analityczną, bazującą na równaniach Poissona i Laplace'a dla wektorowego potencjału magnetycznego, wyznaczono analitycznie impedancję przewodu rurowego, koncentrycznego i niekoncentrycznego układu dwóch rurowych przewodów równoległych z uwzględnieniem zjawisk naskórkowości i zbliżenia. W szczególności wyznaczono impedancje wzajemne wymienionych układów przewodów. Następnie wyznaczono całkowite impedancje przewodów fazowych i osłon trójfazowego, jednobiegunowego toru wielkoprądowego. Metodą analityczną wyznaczono również natężenie pola magnetycznego w otoczeniu jenofazowych i trójfazowych, jednobiegunowych, osłoniętych torów prądowych.

Zastosowana metoda analityczno-numeryczna polega na aproksymacji wektorowego potencjału magnetycznego funkcjami kształtu i sprowadzeniu układu równań całkowych Fredholma drugiego rodzaju z jądrami słabo osobliwymi do układu równań algebraicznych z niewiadomymi gęstościami prądu w trójkątach, na które dyskretyzowano obszar przewodzący (punkt 3.3.2.3) lub w wierzchołkach tych trójkątów (punkt 3.3.3). W przypadku przewodzących ferromagnetyków wprowadzono funkcję kształtu dla potencjału magnetycznego generowanego przez gęstość liniową prądu, dyskretyzując kontur ferromagnetyka odcinkami, na których przyjęto, że gęstość liniowa prądu jest stała (punkty 6.1 i 6.2). Powyższe dyskretyzacje umożliwiły numeryczne wyznaczenie impedancji układu $N_C$ przewodów równoległych, jak również układu $N_C$ przewodzących ferromagnetyków. Następnie wprowadzono funkcje kształtu dla pochodnych wektorowego potencjału magnetycznego, co umożliwiło numeryczne wyznaczenie natężenia pola magnetycznego w otoczeniu jednobiegunowych, osłoniętych torów wielkoprądowych (punkty 5.2 i 6.4)

W rozdziale 7 przedstawiono przykłady obliczeń pól magnetycznych w otoczeniu wybranych układów jednobiegunowych, osłoniętych torów wielkoprądowych. Szczególną uwagę zwrócono na wpływ zwarć osłon między sobą oraz z płytami przewodzącymi na wartości natężeń tych pól.

Pracę zkończono uwagami końcowymi i wnioskami (rozdział 8).

# MAGNETIC FIELD IN HIGH-CURRENT ISOLATED-PHASE ENCLOSED BUSDUCTS SURROUNDINGS


## Abstract

In the paper the question of determining the magnetic field in high-current isolated-phase enclosed busducts surroundings is presented. The studies concern the single-phase isolated-phase enclosed busducts as well as the flat three-phase isolated-phase busducts. In the proximity of those busducts non-magnetic conducting plates or ferromagnetic materials can be found. The magnetis field is determined in media with electric and magnetic heterogeneity. In the case of the three-phase busducts, the influence of mutual short-circuits and the short-circuits with the ground of the enclosures on the magnetic field in such busducts surroundings is considered.

The paper cowers the following questions:

- the integral equations of the system of $N_C$ parallel conductors (Chapter 2) or of the ferromagnetic materials (Chapter 6).
- the magnetic vector potential of the system of $N_C$ parallel conductors (Chapter 3) or of the ferromagnetic materials (Chapter 6).
- the impedances of the system of $N_C$ parallel conductors (Chapter 4) or of the ferromagnetic materials (Chapter 6).
- the magnetic field in isolated-phase enclosed busducts surroundings (Chapter 5) or in media with electric and magnetic heterogeneity (Chapter 6).

The above questions get analysed by means of analytical and analytical-numerical method.

Using the analytical method, based on Poisson's and Laplace's equations for the magnetic vector potential, the impedance of the tubular conductor of the coaxial and non-coaxial system of two tubular conductors is analytically determined, with regard to skin and proximity effects. In particular, I determine the mutual impedances of the systems of conductors mentioned above. Afterwards, the total impedances of the phase conductors and of the high-current three-phase isolated-phase enclosures are determined. The analytical method is also used to determine the magnetic field in one-phase and three-phase isolated-phase enclosed busducts surroundings.

The analytical-numerical method applied consists on the approximation of the magnetic vector potential by means of shape functions and of reduction of the system of Fredholm's integral equations of the second kind with weakly singular kernels, to the system of algebraic equations with unknown current densities in triangles the conducting area has been discretisated on (point 3.3.2.3), or in those triangles vertexes (point 3.3.3). In the case of conducting ferromagnetic materials I introduce the shape function for the magnetic potential generated by the linear current density, discretising the ferromagnetic outline with the segments, on which it has been assumed that the linear current density is constant (points 6.1 and 6.2). Those discretisations allow to determine numerically the impedances of the system of $N_C$ parallel conductors as well as of the system of $N_C$ conducting materials. Next, the shape functions for the derivatives of the magnetic vector potential are introduced, which enables the numerical determination of the magnetic field strength in isolated-phase enclosed busducts surroundings (points 5.2 and 6.4).

In Chapter 7 the examples of the calculations of magnetic fields in selected systems of high-current isolated-phase enclosed busducts surroundings are presented. Particular consideration is given to the influence of the mutual short-circuits of the enclosures and of their short-circuits with the conducting plates on the values of those fields strengths.

The paper is ended with final remarks and conclusions (Chapter 8).

Druk: Drukarnia Gliwice, ul. Zwycięstwa 27, tel. 230 49 50