

**ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ**

P.4546/2000

Anna BŁACH

**WYBRANE ZAGADNIENIA GEOMETRII
BUDOWLANYCH STRUKTUR OBROTOWYCH**

**GEOMETRIA I GRAFIKA
INŻYNIERSKA**

Z. 4



GLIWICE 2000

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 1458



Anna BŁACH

**WYBRANE ZAGADNIENIA GEOMETRII
BUDOWLANYCH STRUKTUR OBROTOWYCH**

OPINIODAWCY

Prof. dr hab. inż. Marian Palej
Prof. dr hab. inż. Andrzej Rudnicki
Dr hab. inż. Bogusław Januszewski

KOLEGIUM REDAKCYJNE

REDAKTOR NACZELNY - Prof. dr hab. Zygmunt Kleszczewski
REDAKTOR DZIAŁU - Dr inż. Janina Głomb
SEKRETARZ REDAKCJI - Mgr Elżbieta Leško

REDAKCJA

Mgr Kazimiera Szafir

REDAKCJA TECHNICZNA

Alicja Nowacka

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 1427-9274

Wydawnictwo Politechniki Śląskiej
ul. Akademicka 5, 44-100 Gliwice
tel./fax 237-13-81,
www.wydawnictwo.polsl.gliwice.pl,
wydawnictwo@polsl.gliwice.pl

Nakład 110+83 egz. Ark. wyd. 16. Ark. druk. 15,875. Papier offset. kl. III 70x100 80 g
Oddano i podpisano do druku 26.04.2000 r. Druk ukończono w maju 2000 r.
Zam. 16/2000

Fotokopie, druk i oprawę wykonano w UKiP sc, *J&D Gębka*,
Gliwice, ul. Pszczyńska 44, tel./fax 231-87-09

OD AUTORA

Wprowadzanie nowych materiałów i technologii powoduje możliwość swobodniejszego eksponowania geometrii budowli.

Cechy geometryczne stanowiąc mogą o walorach estetycznych obiektu, ale również dostosowują kształt budowli do uwarunkowań eksploatacyjnych.

Przykładem może być budowla teoretycznie bezpieczna na wpływy sejsmiczne o kształcie zbliżonym do elipsoidy.

Wieża Eifla lub wieża Gliwicka, jako najwyższa na świecie budowla z drewna, stare, najczęściej jeszcze drewniane chłodnie kominowe, przekrycia wielu obiektów użyteczności publicznej to układ wielokątów i łuków tworzących przestrzenne kratownice.

Tradycyjne sklepienia w budowlach sakralnych oraz stosowane obecnie przekrycia dużych obiektów to przecież konstrukcje powstałe jako przenikające się powierzchnie stopnia drugiego. Koncepcja kształtu „żagli” dachu opery w Sydney według [42] stanowi system powłok kulistych.

Nowoczesne przekrycia dużych obiektów powstają często jako prostokątne powierzchnie Catalana.

Schody zabiegowe, fragmenty wielopoziomowych węzłów drogowych lub serpentyn to modele powierzchni śrubowych.

Można przytoczyć jeszcze wiele przykładów stosowania różnych form geometrycznych w praktyce inżyniera budowlanego, np. dachy wiszące, budowle balonowe, układy rurociągów, ciągnia sprężające w elementach z betonu sprężonego itp.

Wśród wymienionych można wyodrębnić wiele przykładów, składających się z elementów figur obrotowych.

Jako wieloletni projektant konstrukcji budowlanych i osoba zajmująca się nauczaniem geometrii i grafiki inżynierskiej mam świadomość potrzeby stałego stosowania wiedzy z tej dziedziny w praktyce inżynierskiej.

Efektorem doświadczeń, wynikających z praktyki projektowej oraz z badań naukowych prowadzonych w dziedzinie geometrii, jest przedstawiona praca.

W toku pracy nad książką korzystałam z życzliwości wielu osób, którym tą drogą chcę wyrazić serdeczne podziękowanie.

Panom profesorom Marianowi Palejowi, Andrzejowi Rudnickiemu i Bogusławowi Januszewskiemu jestem bardzo wdzięczna za cenne uwagi, wynikające z wnikliwej analizy maszynopisu. Uwagi te pozwoliły mi wzbogacić tekst, a równocześnie uwolnić go od zbędnych treści.

Panom profesorom Andrzejowi Majdemu i Jerzemu Weselemu dziękuję za konsultacje merytoryczne, dotyczące części aplikacyjnej.

Panu dr. inż. Krzysztofowi Tytkowskiemu dziękuję za czas poświęcony na dyskusje naukowe oraz za odciążanie mnie w działalności organizacyjnej na rzecz Ośrodka Geometrii i Grafiki Inżynierskiej, a Panu mgr. inż. Sławomirowi Bogackiemu za pomoc w opracowaniu składu komputerowego.

Osobno pragnę wyrazić słowa wdzięczności Redakcji Wydawnictwa Politechniki Śląskiej za wyjątkową życzliwość.

Równocześnie pracę tę dedykuję pamięci Zdzisławy Milewskiej, która zawsze była przy mnie.

Anna Błach

Gliwice, kwiecień 2000

SPIS TREŚCI

	Str.
WSTĘP	13
I. OGÓLNE OMÓWIENIE PRACY	15
I.1. Wprowadzenie	15
I.2. Zakres opracowania	16
I.3. Podstawy opracowania	18
I.4. Stosowane narzędzia	19
I.5. Stosowane metody odwzorowań	20
II. ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE WSPÓŁPŁASZCZYZNOWYCH OKRĘGÓW PRZECINAJĄCYCH SIĘ POD KĄTAMI O DANEJ MIERZE	21
II.1. Okręgi przechodzące przez dany punkt i przecinające dany współpłaszczyznowy z nimi okrąg pod kątami o danej mierze	21
II.2. Okręgi przecinające dane dwa współpłaszczyznowe z nimi okręgi pod kątami o zadanych miarach	35
II.3. Okręgi przechodzące przez dwa wyróżnione punkty i przecinające dany, współpłaszczyznowy z nimi, okrąg pod kątami o zadanej mierze	64
II.4. Okręgi przechodzące przez zadany punkt i przecinające dwa dane okręgi pod kątami o zadanych miarach przy założeniu, że rozważane okręgi i wyróżniony punkt są współpłaszczyznowe	66
II.5. Okręgi przecinające trzy zadane współpłaszczyznowe okręgi pod kątami o zadanych miarach	67
III. ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE SFER PRZECINAJĄCYCH SIĘ POD KĄTAMI O ZADANYCH MIARACH	68
III.1. Sfery przechodzące przez zadany punkt i przecinające daną sferę pod kątami o danej mierze	68
III.2. Właściwości zbioru środków sfer przecinających dwie dane sfery pod kątami o zadanych miarach	79
III.3. Sfery przechodzące przez zadane dwa dane punkty i przecinające daną sferę pod kątami o zadanej mierze	104

III.4. Sfery przechodzące przez zadane trzy punkty i przecinające daną sferę pod kątami o zadanej mierze	106
III.5. Sfery przechodzące przez zadany punkt i przecinające dane dwie sfery pod kątami o zadanych miarach	106
III.6. Sfery przechodzące przez zadane dwa punkty i przecinające dwie dane sfery pod kątami o danych miarach	107
III.7. Sfery przechodzące przez zadany punkt i przecinające trzy dane sfery pod kątami o zadanych miarach	108
III.8. Sfery zawierające z czterema zadanymi sferami zadane kąty	109
IV. ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE OKRĘGÓW I SFER PRZECINAJĄCYCH SIĘ POD KĄTAMI O ZADANYCH MIARACH	110
IV.1. Zagadnienia dotyczące zbioru środków okręgów, przechodzących przez zadany punkt i przecinających daną sferę pod kątami o zadanej rozwartości, mierzonej w płaszczyznach rozważanych okręgów	111
IV.2. Właściwości zbioru środków okręgów przecinających dane dwie sfery pod kątami o zadanych miarach i o ramionach zawartych w płaszczyznach rozważanych okręgów	118
IV.3. Okręgi przechodzące przez zadane dwa punkty i przecinające daną sferę pod kątami o ustalonej rozwartości, mierzonej w płaszczyznach rozważanych okręgów	124
IV.4. Okręgi przechodzące przez zadany punkt i przecinające dwie dane sfery pod kątami, których zadane miary są mierzone w płaszczyznach szukanych okręgów	124
IV.5. Okręgi przechodzące przez dwa zadane punkty i przecinające dwie dane sfery pod kątami o ustalonych rozwartościach, mierzonymi w płaszczyznach rozważanych okręgów	125
IV.6. Okręgi przechodzące przez zadany punkt i przecinające trzy dane sfery pod kątami o zadanych miarach, przy czym kąty te mierzone są w płaszczyznach szukanych okręgów	126
IV.7. Właściwości zbioru środków okręgów przechodzących przez dane dwa punkty i przecinających daną sferę pod kątami o zadanej mierze, gdy płaszczyzny tych kątów nie zawierają rozważanych okręgów	128

IV.8. Właściwości zbioru środków okręgów przechodzących przez zadany punkt i przecinających dwie dane sfery pod kątami o zadanych miarach, gdy kąty pomiędzy szukanimi okręgami a danymi sferami nie są zawarte w płaszczyznach rozważanych okręgów	133
IV.9. Usytuowanie środków okręgów przechodzących przez dwa zadane punkty i przecinających dwie dane sfery pod kątami o zadanych miarach, gdy kąty te nie są zawarte w płaszczyznach rozważanych okręgów	142
IV.10. Położenie środków okręgów przechodzących przez zadany punkt i zawierających z trzema danymi sferami kąty o ustalonych miarach, gdy kąty te nie należą do płaszczyzn rozważanych okręgów	142

V. ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE NIEWSPÓLPŁASZCZYNOWYCH OKRĘGÓW, PRZECINAJĄCYCH SIĘ POD KĄTAMI O PRZYJĘTYCH WSTĘPNIE MIARACH

V.1. Właściwości zbioru środków okręgów przechodzących przez zadany punkt i przecinających dany niewspółpłaszczyznowy z nimi okrąg pod kątami o znanym wierzchołku i zadanej mierze	145
V.2. Okręgi przechodzące przez zadany punkt, przecinające niewspółpłaszczyznowy z nimi dany okrąg pod kątami o przyjętej mierze i wierzchołku, przy szczególnym usytuowaniu płaszczyzn tych kątów	162
V.3. Podsumowanie	174

VI. OKREŚLANIE GRUBOŚCI POWŁOK BUDOWLI OBROTOWYCH

VI.1. Założenia metody	176
VI.2. Teoretyczne podstawy geometryczne	177
VI.3. Zasady realizacji pomiaru grubości powłoki	185
VI.4. Podsumowanie	192

VII. ŁĄCZNICE DWUPOZIOMOWYCH WĘZŁÓW DROGOWYCH

VII.1. Łącznica pośrednia lewa, gdy niwelety obu dróg w węźle są poziome	196
VII.2. Łącznica pośrednia lewa, gdy niwelety obu osi dróg węzła są w spadku ..	206
VII.3. Łącznica pośrednia lewa z jedną drogą w łuku	209
VII.4. Łącznica bezpośrednia prawa	213

VII.5. Łącznica półbezpośrednia lewa	215
VII.6. Profil podłużny łącznicy	218
VII.7. Podsumowanie	220
VIII. WYZNACZANIE OSI ŁĄCZNIKA MIĘDZY ŁUKAMI KABLA SPRĘŻAJĄCEGO	221
VIII.1. Konstrukcja osi wstawki łączącej, gdy osie kabli należą do współpłaszczyznowych i rozłącznych okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_2	222
VIII.2. Konstrukcja łącznika gdy okręgi \bar{a}_1 i \bar{a}_2 są współpłaszczyznowe i posiadają punkty wspólne	230
VIII.3. Konstrukcja osi wstawki gdy osie kabli są łukami okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_2 , które należąc do różnych płaszczyzn nie posiadają punktów wspólnych	230
VIII.4. Konstrukcja osi łącznika wygładzającego, gdy łuki okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_2 nie są współpłaszczyznowe i posiadają co najmniej jeden punkt wspólny	237
VIII.5. Podsumowanie	246
LITERATURA	247
STRESZCZENIE	250

CONTENTS

	Page
PREFACE.....	13
I. GENERAL CONCEPT OF THE WORK	15
I.1. Introduction	15
I.2. The scope of the thesis	16
I.3. Fundamentals of the thesis	18
I.4. Tools	19
I.5. Methods of transformation	20
II. PROBLEMS CONCERNING COPLANAR CIRCLES INTERSECTING AT ANGLES OF A GIVEN MEASURE	21
II.1. Circles intersecting a given point and crossing a given circle coplanar to them at angles of a given measure	21
II.2. Circles intersecting two given circles coplanar to them at angles of given measures	35
II.3. Circles crossing two specified points and intersecting a given circle, coplanar to them at angles of a given measure	64
II.4. Circles intersecting a given point and crossing two given circles at angles of given measures, with the assumption that both the circles and the specified point are coplanar	66
II.5. Circles intersecting three given coplanar circles at angles of given measures	67
III. PROBLEMS CONCERNING SPHERES INTERSECTING AT ANGLES OF GIVEN MEASURES	68
III.1. Spheres crossing a given point and intersecting a given sphere at angles of a given measure	68
III.2. Features of a set of sphere centres intersecting two given spheres at angles of given measures.....	79

III.3. Spheres crossing given two points and intersecting a given sphere at angles of a given measure	104
III.4. Spheres crossing three given points and intersecting a given sphere at angles of a given measure	106
III.5. Spheres crossing a given point and intersecting two given spheres at angles of given measures	106
III.6. Spheres crossing two given points and intersecting two given spheres at angles of given measures	107
III.7. Spheres crossing a given point and intersecting three given spheres at angles of given measures	108
III.8. Spheres having given angles with four given spheres	109
IV. PROBLEMS CONCERNING CIRCLES AND SPHERES INTERSECTING AT ANGLES OF GIVEN MEASURES	110
IV.1. Issues dealing with a set of circle centers crossing a given point and intersecting a given sphere at angles of a given measure, measured in planes of the discussed circles	111
IV.2. Features of a set of circle centers intersecting two given spheres at angles of given measures and with arms incorporated in planes of the discussed circles	118
IV.3. Circles crossing two given points and intersecting a given sphere at angles of a given measure, measured in planes of the discussed circles	124
IV.4. Circles crossing a given points and intersecting two given spheres at angles which measures are measured in planes of the desired circles	124
IV.5. Circles crossing two given points and intersecting two given spheres at angles of given measures, measured in planes of the discussed circles	125
IV.6. Circles crossing a given point and intersecting three given spheres at angles of given measures, but the angles are measured in planes of the desired circles	126
IV.7. Features of a set of circle centers crossing two given points and intersecting a given sphere at angles of a given measure when the planes of these angles do not incorporate the discussed circles	128

IV.8. Features of a set of circle centers crossing a given point and intersecting two given spheres at angles of given measures when the angles between desired circles and given spheres are not incorporated in planes of the discussed circles	133
IV.9. Location of circle centers crossing two given points and intersecting two given spheres at angles of given measures when the angles are not incorporated in planes of the discussed circles	142
IV.10. Location of circle centers crossing a given point and having angles of known measures with three spheres when the angles do not belong to the planes of the discussed circles	142

V. PROBLEMS CONCERNING NONCOPLANAR CIRCLES INTERSECTING EACH OTHER AT ANGLES OF PRE-SET MEASURES

V.1. Features of a set of circle centers crossing a given point and intersecting a given noncoplanar circle at angles of a known vertex and a given measure.	145
V.2. Circles crossing a given point and intersecting a given noncoplanar circle at angles of a known measure and vertex at special location of angle planes	162
V.3. Sum up	174

VI. DETERMINATION OF THICKNESS OF ROTARY BUILDING STRUCTURE SHELLS

VI.1. Assumptions	176
VI.2. Theoretical geometry background	177
VI.3. Principles of taking measurements of shell thickness	185
VI.4. Sum up	192

VII. SLIP ROAD OF TWO-LEVEL HIGHWAY JUNCTIONS

VII.1. Left, intermediate slip road when formation lines of both roads in junction are horizontal	196
VII.2. Right, intermediate slip road when formation lines of both roads in junction are falling	206
VII.3. Left, intermediate slip road with one road in a form of arch	209

VII.4. Direct, right slip road	213
VII.5. Left, half-direct slip road	215
VII.6. Longitudinal section of a slip road	218
VII.7. Sum up	220
VIII. DETERMINING AN AXIS OF A CONNECTOR BETWEEN ARCS OF PRESTRESSING TENDONS	
221	
VIII.1 Construction of insert axis when lines of tendon belong to coplanar and disjoint circles \bar{a}_1 and \bar{a}_2	222
VIII.2. Construction of axis of smoothing insert when circles \bar{a}_1 and \bar{a}_2 are coplanar and have common points	230
VIII.3. Construction of insert axis when lines of tendon are arcs of circles \bar{a}_1 and \bar{a}_2 which belong to different planes and have no common points	230
VIII.4. Construction of axis of smoothing insert when circle arcs of circles \bar{a}_1 and \bar{a}_2 belong to different planes and have at least one common point	237
VIII.5. Sum up	246
REFERENCES	247
ABSTRACT	252

WSTĘP

W otaczającej nas przyrodzie, a może nawet należałoby powiedzieć w otaczającej nas rzeczywistości istnieje wiele kształtów, które całkowicie lub częściowo mają postacie kołowe lub sferyczne. Ludzie od najdawniejszych czasów, słusznie naśladowując doskonałość naturalnych form, konstruują obiekty budowlane stosując takie postacie.

Łukowe kształty mostów przekraczających głębokie wąwozy górskie, stare akwedukty, sferyczne kopuły budowli sakralnych lub monumentalnych obiektów użyteczności publicznej to nadal urzekające pięknem i zadziwiające trwałością zabytkowe budowle.

Równocześnie formy nowoczesnych budowli przemysłowych, takich jak: kominy fabryczne, zbiorniki wodociągowe czy też oczyszczalnie ścieków, silosy, piece tunelowe, hiperboloidalne chłodnie kominowe, a ostatnio realizowane za pomocą nowych technologii tzw. „budowle balonowe” itp. wskazują na nadal aktualne i popularne stosowanie, w modelach geometrycznych obiektów budowlanych, łuków okręgów oraz fragmentów powierzchni obrotowych, w tym sfer.

W projektowaniu zagospodarowania przestrzennego, ukształtowania terenu, w drogownictwie, a szczególnie w problemach związanych z projektowaniem węzłów wielopoziomowych skrzyżowań ciągów komunikacyjnych itp. także często występują elementy kołowe.

Oczywiście, poza sferą budowlaną równie często występują formy kołowe w modelach geometrycznych, np. obiektów telekomunikacyjnych, radiolokacyjnych, w urządzeniach technologicznych itp.

Znajomość struktur geometrycznych i zależności zachodzących między nimi znacznie ułatwia ich stosowanie w procesie projektowania, czynnościach pomiarowych lub też w wykonawstwie. Przy istniejącym stanie techniki można stworzyć odpowiednie algorytmy pozwalające na stosowanie technik komputerowych, znacznie ułatwiających projektowanie, pomiary geodezyjne, a może nawet realizację obiektów o sprecyzowanych formach geometrycznych. Także w badaniach istniejących obiektów świadomość geometrii występujących tam postaci może być pomocna zarówno przy inwentaryzacji, jak i przy ocenie np. istniejących deformacji.

W pomiarach geodezyjnych znajomość geometrii form kołowych lub sferycznych może być użyteczna przy tworzeniu algorytmów lub ustalaniu procedur, służących do pomiarów niektórych budowli.

W ramach zagadnień dotyczących geometrii okręgów i sfer, a zwłaszcza przy analizie istniejących między nimi związków miarowych, jednym z ciekawych problemów są zależności wynikające z miary kątów zawartych między nimi.

I. OGÓLNE OMÓWIENIE PRACY

I.1. Wprowadzenie

Praca ma na celu całościowe opracowanie teoretycznych zagadnień geometrycznych, omawiających jeden ze związków, jakim jest miara kąta pomiędzy figurami obrotowymi zarówno płaskimi, czyli okręgami, jak i sferami jako wybranymi powierzchniami obrotowymi. Opracowanie to jest oparte na jednolitej metodzie miejsc geometrycznych i w znacznej części bazuje na wspólnym dla całej pracy przekształceniu inwersyjnym jako wiernokątnym [19,28].

W literaturze można spotkać rozwiązania niektórych pojedynczych zagadnień występujących w pracy. Proponowane tam konstrukcje oparte są na różnych sposobach rozumowania i bazują na rozmaitych przekształceniach, jak np.: inwersja, podobieństwo, rzut stereograficzny, rzut cyklograficzny. Rozważania te dotyczą głównie zagadnień dla kątów, których miara wynosi 0° [2,3,24,30,34].

Uzyskane tutaj rozwiązania potwierdzają wyniki znane z literatury [25], jak np. problem występujący jako zagadnienie Apoloniusza [30], dotyczące okręgów stycznych do danych trzech okręgów lub problem Steinera, omawiający okręgi przecinające trzy dane okręgi pod kątami o zadanych miarach, przyporządkowanych tym okręgom lub zadanie Fermata [34].

Potrzeba rozwiązania takiego zagadnienia wiąże się z występowaniem opracowanych teoretycznie relacji w praktyce inżynierskiej. W kolejnych rozdziałach wskazano trzy aplikacje rozważanego tematu w różnych działach związanych z budownictwem.

W szczególności przedstawiono metodę bezinwazyjnego ustalania grubości powłok obiektów budowlanych typu chłodnie kominowe, zbiorniki w oczyszczalniach ścieków itp. budowle inżynierskie. Ustalenie długości odcinka, którą stanowi grubość rozpatrywanej powłoki, opiera się na teoretycznych rozważaniach zależności zachodzących pomiędzy niewspółpłaszczyznowymi okręgami.

Inne zastosowanie teoretycznie opracowanych konstrukcji ma miejsce w przedstawionej metodzie wstępnego projektowania trasy osi łącznic bezkolizyjnych węzłów drogowych. W dotychczasowej praktyce na kształt osi łącznicy składały się

najczęściej klotoidalne krzywe przejściowe, walcowe linie śrubowe i odcinki prostych. Proponowany sposób zakłada wprowadzenie jako linii osi trasy łącznicy krzywą kosztową przestrzenną.

Kolejna aplikacja dotyczy trasowania kabli sprężających. W projektowaniu i konstrukcji z betonu sprężonego, w miejscach występujących załamania trasy kabla istnieje konieczność wprowadzenia łuku wygładzającego w postaci okręgu. Również w przypadku występowania przeszkody na trasie kabla istnieje potrzeba wykonania wstawki łączącej dwa sąsiednie kable.

Należy sądzić, że jest jeszcze wiele innych dziedzin, w których znajomość posługiwania się konstrukcjami geometrycznymi, opracowanymi tutaj teoretycznie, może być przydatna w procesie projektowania, wykonawstwa lub prac inwentaryzacyjnych - pomiarowych.

1.2. Zakres opracowania

Niniejsza praca zawiera, w części dotyczącej geometrii, rozważania związane z wybranymi zależnościami występującymi pomiędzy okręgami i sferami.

W czterech pierwszych rozdziałach rozpatruje się relacje zachodzące pomiędzy kołowymi lub sferycznymi obiektami geometrycznymi w zależności od ich rodzaju i wzajemnego usytuowania, uwzględniając w każdym z omawianych przypadków warunki zachowania przyjętej wstępnie miary kątów zawartych pomiędzy nimi.

I tak w szczególności w rozdziale drugim omawia się relacje planimetryczne wiążące współpłaszczyznowe okręgi spełniające założenia ustalone wstępnie, w tym zawierające kąty o zadanych miarach.

Następne rozdziały dotyczą niewspółpłaszczyznowych figur geometrycznych, a w szczególności:

- w rozdziale trzecim przeanalizowano odpowiednie zależności pomiędzy sferami,
- w rozdziale czwartym sprecyzowano związki pomiędzy sferami i okręgami,
- w rozdziale piątym badano relacje pomiędzy okręgami należącymi do różnych płaszczyzn.

We wszystkich rozważaniach teoretycznych wstępnie założono konieczność zachowania, pomiędzy analizowanymi okręgami czy sferami, miar ustalonych kątów.

Dla przyjętych założeń omawianych zależności określono położenie środków szukanych linii i powierzchni, możliwą liczbę istniejących rozwiązań oraz inne ciekawe zależności, występujące w ramach rozważanych przypadków.

Analizowane zagadnienia rozpatrzono przy założeniu, że miary przyjmowanych kątów są dowolne, jak też dla ich szczególnych wartości, wynoszących 0° lub 90° .

W większości przypadków przeprowadzono dowody określające rodzaje krzywych lub powierzchni, będących miejscami geometrycznymi środków szukanych okręgów lub sfer.

Część druga pracy zawiera przykłady zastosowań niektórych konstrukcji zawartych w pierwszej części, w praktyce inżynierskiej, zwłaszcza w branży budowlanej.

Mianowicie, w rozdziale szóstym podaje się opracowanie sposobu bezinwazyjnego określania grubości powłoki obrotowej budowli inżynierskiej.

Przedstawiona metoda dotyczy możliwości dokonywania pomiarów w płaszczyznach prostopadłych do osi powierzchni i tym samym może być stosowana dla powierzchni obrotowych, których grubość może być mierzona w takich płaszczyznach prostopadłych do osi. W przypadku kopuł sferycznych lub elipsoidalnych o niewielkich promieniach, obiektów o kształcie paraboloidy obrotowej w jej części „przywierzchołkowej” itp. zaproponowana metoda musi ulec modyfikacji (w trakcie opracowania). Przedstawiony sposób może być szczególnie przydatny przy inwentaryzacji powykonawczej żelbetowych zbiorników o kształcie walcowym, hiperboloidalnych powłok chłodni kominowych itp. [1,6,22,23,26,27,31].

Korzysta się w nim z konstrukcji miejsca geometrycznego środków niewspółpłaszczyznowych okręgów, zawierających kąt o założonej wielkości. Okręgi te przechodzą przez zadane dwa punkty, z których jeden należy do teoretycznie kołowego przekroju badanej powłoki.

Zaproponowany sposób pomiaru grubości powłok jest istotny w pracach inwentaryzacyjnych ze względu na możliwość częstego występowania znacznych odbieżności pomiędzy teoretycznie przyjętym w projekcie kształtem a zrealizowanym obiektem.

Ponadto sposób ten umożliwia określenie w dowolnie przyjętym miejscu monitorowanej powłoki deformacji w stosunku np. do uprzednio dokonywanych pomiarów [18].

Kolejny rozdział, siódmy, dotyczy uproszczonej metody określania, we wstępnym projektowaniu, trasy osi łącznic w wielopoziomowych bezkolizyjnych skrzyżowaniach drogowych ciągów komunikacyjnych. W metodzie tej proponuje się zastąpienie stosowanej dotychczas linii śrubowej i kłotoidalnych krzywych przejściowych przestrzenną krzywą koszową [29,39,40].

Zastosowanie zaproponowanej metody przeanalizowano na kilku przykładach najczęściej występujących łącznic różnego typu.

W rozdziale ósmym wskazano sposób projektowania „łączników” pomiędzy łukami okręgów stanowiących osie kabli sprężających w konstrukcjach betonowych. Przedstawiono sposób projektowania łuków wygładzających występujące załamania na trasie kabli sprężających, jak też wstawki łączące łuki tras czasem z konieczności należących do różnych płaszczyzn [5,21,38].

1.3. Podstawy opracowania

Teoretyczna część pracy stanowi rozszerzenie i kontynuację zagadnień zawartych w rozprawie doktorskiej autorki. W pracy tej omówiono w zasadzie główne twierdzenia i konstrukcje zawarte teraz w rozdziałach II-IV. Nie przedstawiono jednak sposobu wykorzystania wyznaczonych miejsc geometrycznych w celu skonstruowania okręgów lub sfer, co w wielu przypadkach jest banalne, jednak w niektórych uwarunkowaniach nie jest całkiem proste.

Rozdział V stanowi rozwiązanie zupełnie nowego zagadnienia.

W pracy doktorskiej wszystkie konstrukcje opracowane były metodami tradycyjnymi, zaś materiał ilustracyjny manualnie.

Wykorzystano tutaj także dorobek autorski w dziedzinie relacji pomiędzy okręgami i sferami [9,11,12,14,15,16] oraz opublikowane doświadczenia w posługiwaniu się programem komputerowym CABRI [7,8,10,13].

Przy przygotowaniu materiału ilustracyjnego zamieszczonego w niniejszym opracowaniu zastosowano technikę komputerową, co poszerzyło możliwości

zrealizowania wielu konstrukcji i pozwoliło na wskazanie łatwiejszych przebiegów konstrukcji graficznych.

Wprowadzenie techniki komputerowej stworzyło możliwości iteracyjnego realizowania konstrukcji, przy zmiennych elementach wyjściowych.

Szczególnie ważne jest to dla zagadnień przedstawionych w rozdziałach VII i VIII, gdzie można bezpośrednio na monitorze, w sposób ciągły, obserwować konsekwencje proponowanych zmian obiektów założonych wstępnie.

1.4. Stosowane narzędzia

Dla teoretycznie udowodnionych zależności ilustracje graficzne wykonano, korzystając z kolejnych wersji programu komputerowego CABRI. Jest to francuski program, opracowany przez matematyków Uniwersytetu w Grenoble i przeznaczony głównie do stosowania w dydaktyce geometrii. Zawiera on opcję bardzo przydatną do konstruowania krzywych wyższych rzędów. Opcja ta umożliwia automatyczne rysowanie figur geometrycznych, będących miejscem geometrycznym punktów, dla przyjętych wcześniej danych, przy ustalonych wyjściowo warunkach. Oczywiście, w celu wyznaczenia każdego miejsca geometrycznego trzeba utworzyć makrokonstrukcję, po wprowadzeniu odpowiedniego algorytmu. Obiektem zmieniającym swoje położenie jest zawsze punkt Q , który należy obrać, jako element dany, na dowolnie przyjętej prostej lub okręgu. Zmiana położenia punktu Q powoduje zmianę położenia punktu na generowanym miejscu geometrycznym. Możliwość tworzenia makrokonstrukcji, pozwalających na automatyczne generowanie szukanych figur, znacznie poszerza możliwości przedstawienia wyników badań teoretycznych, których opracowanie manualne byłoby bardzo trudne, a czasem wręcz niemożliwe. Program ten umożliwia, w sposób ciągły, obserwacje na monitorze wprowadzanych na bieżąco zmian, wynikających z doboru założeń. Te własności zdecydowały o wyborze programu CABRI.

Program CABRI ma niestety znaczne mankamenty, które szczególnie dotyczą efektów edytorskich. Zaliczyć do nich należy małą możliwość różnicowania linii rysunkowych zarówno pod względem struktury, jak i grubości oraz bardzo ograniczony dostęp do różnorodnych czcionek, oznaczeń graficznych, indeksów itp.

Całość pracy była realizowana przy użyciu trzech kolejnych wersji programu CABRI, co spowodowało znaczne różnice w formie graficznej ilustracji.

W tekście pracy podano nazwy opracowanych dla każdego z zagadnień makrokonstrukcji oraz założenia do ich stosowania.

Założenia te zawierają, dla każdej makrokonstrukcji, dane wyjściowe, czyli rysunki zadanych figur oraz wskazaną kolejność uaktywniania (wskazywania) ich za pomocą kursora i „kliknięcia” myszką.

Zbiór zastosowanych makrokonstrukcji z pokazaniem algorytmów ich tworzenia jest ujęty w oddzielnym opracowaniu, stanowiącym aneks do pracy.

Wykorzystanie programu komputerowego CABRI pozwoliło na wyeliminowanie konieczności wyznaczania dla krzywych stopnia drugiego oraz dla kwadryk elementów określających je, jak średnice sprzężone, asymptoty, osie itp. Dla wyznaczonego konstrukcyjnie jednego punktu krzywej, korzystając z opcji „miejsce geometryczne”, uzyskuje się rysunek całej krzywej.

Jednak dla czytelników nie korzystających z programu CABRI opracowano konstrukcje prowadzące do wyznaczenia figur identyfikujących w sposób tradycyjny krzywe i powierzchnie stopnia drugiego, występujące jako miejsca geometryczne środków rozważanych okręgów lub sfer. Konstrukcje te pokazane są w oddzielnym opracowaniu w postaci aneksu do pracy. Rysunki w tym aneksie są wykonane manualnie.

1.5. Stosowane metody odwzorowań

Przy sporządzaniu materiału ilustracyjnego, konstrukcje realizowano stosując metodę rzutów prostokątnych na jedną rzutnię lub w metodę Monge'a.

W przypadku rzutowania na jedną rzutnię odległość punktu od rzutni określano kładem odcinka, którego długość stanowiła tę odległość.

II. ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE WSPÓLPŁASZCZYZNOWYCH OKRĘGÓW PRZECINAJĄCYCH SIĘ POD KĄTAMI O DANEJ MIERZE

Celem rozważań prowadzonych w tym rozdziale jest przeanalizowanie zależności dotyczących okręgów należących do jednej płaszczyzny i posiadających rzeczywiste punkty wspólne. W takiej sytuacji mamy zawsze do czynienia z istnieniem miary kąta, pod którym takie okręgi przecinają się.

Przyjmując jako warunek wyjściowy znajomość miary tego kąta określono miejsca geometryczne środków okręgów dla dwóch podstawowych przypadków, opisanych w II.1 i II.2.

Znajomość tych miejsc geometrycznych pozwoli następnie wyznaczyć liczbę możliwych rozwiązań przy innych dodatkowych uwarunkowaniach wstępnych.

II.1. Okręgi przechodzące przez dany punkt i przecinające dany współpłaszczyznowy z nimi okrąg pod kątem o danej mierze

Podstawowe zagadnienia rozważane w niniejszym punkcie ująć można następującym twierdzeniem [12]:

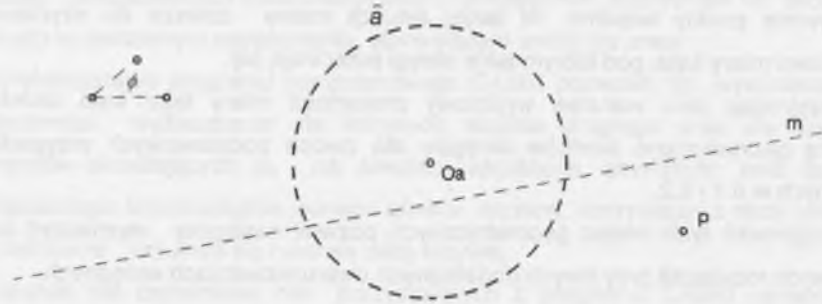
Miejscem geometrycznym środków okręgów przechodzących przez zadany punkt P i przecinających, współpłaszczyznowy z nimi, dany okrąg \bar{a} pod kątami o danej mierze ϕ jest stożkowa c^2 .

Tok rozumowania w celu udowodnienia powyższego twierdzenia ilustrowany jest za pomocą rzutu prostokątnego na płaszczyznę rysunku α , uznaną za rzutnię. Przyjęto założenie, że płaszczyzna, w której znajdują się rozważane okręgi oraz figury wyjściowe, jest równoległa do rzutni lub jednoczy się z nią.

We wszystkich rozważaniach dotyczących elementów współpłaszczyznowych, a więc zawartych w tym rozdziale, takie założenia są zachowane.

Przyjmijmy więc w płaszczyźnie α okrąg \bar{a} o środku O_a , punkt P oraz prostą m . Przyjęto także kąt płaski o mierze ϕ .

Sytuacja ta pokazana jest na rys. II.1.1a.

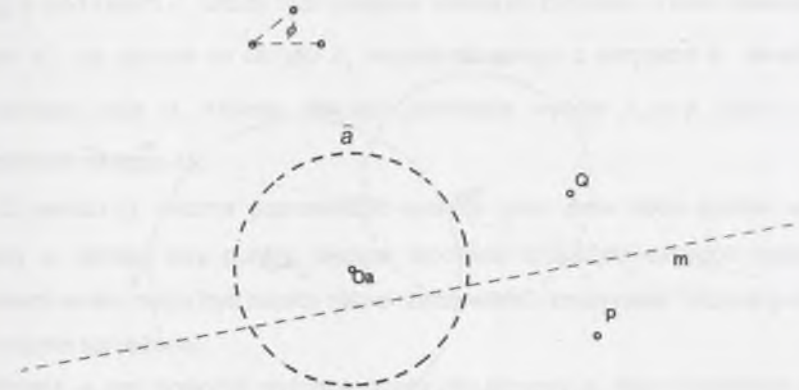


II.1.1a

W celu udowodnienia powyższego twierdzenia wystarczy wykazać, że dowolna prosta m , należąca do płaszczyzny α danego okręgu \bar{a} , posiada z rozważanym zbiorem c^2 dwa punkty wspólne, czyli że zbiór ten jest krzywą rzędu drugiego. Ponieważ nie istnieje krzywa rzędu drugiego, której klasa byłaby inna niż dwa, więc szukany zbiór c^2 jest krzywą stopnia drugiego [33]. Szukany jest zbiór punktów O_{b_1}, O_{b_2} , będących środkami okręgów $\bar{b}_{1,2}$, zawierających się w płaszczyźnie α , przechodzących przez punkt P i przecinających okrąg \bar{a} pod kątem o mierze ϕ .

Założmy, że okrąg \bar{b} jest jednym z szukanych okręgów, którego środek O_b ma należeć do prostej m . Zauważmy, że musi on przechodzić przez punkt Q symetryczny do punktu P względem prostej m .

Po przyjęciu prostej m na rys. II.1.1b wyznaczono punkt Q .



II.1.1b

W dalszym ciągu jako przekształcenie pomocnicze przyjmijmy inwersję I_k , o środku $O_k = P$ i okręgu podstawowym \bar{k} ortogonalnym do \bar{a} .

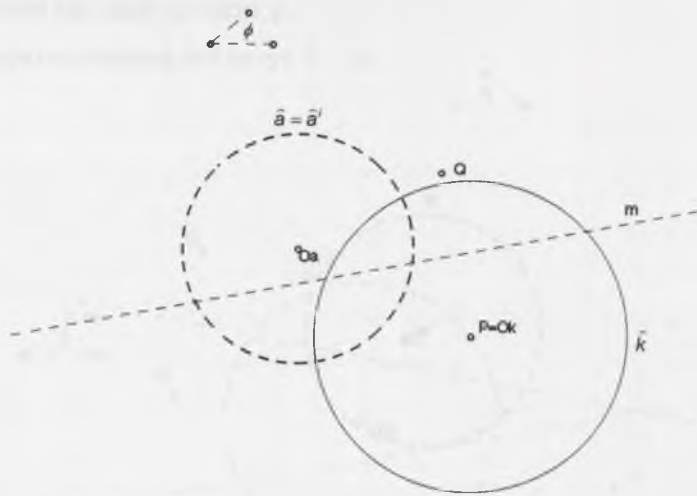
Przyjęcie jednego z punktów P lub Q jako środka inwersji O_k zapewni spełnienie warunku przynależności punktu O_k do okręgu \bar{b} , gdyż w przekształceniu inwersyjnym względem okręgu prostym, nie przechodzącego przez środek inwersji O_k , przyporządkowane są okręgi przechodzące przez ten środek [24].

Z dalszych rozważań wynika bowiem, że szukany okrąg \bar{b} powstanie z przekształcenia prostej b' w inwersji I_k , więc okrąg ten zawierać będzie punkt O_k .

Okrąg podstawowy \bar{k} przyjęto jako ortogonalny do okręgu \bar{a} .

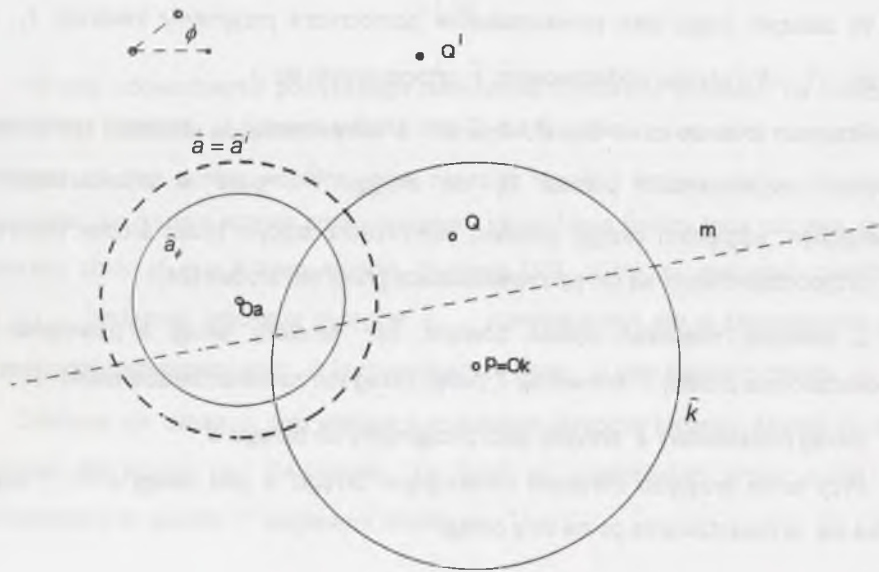
Przy takim przyjęciu obrazem inwersyjnym okręgu \bar{a} jest okrąg $\bar{a}' = \bar{a}$, więc unika się przekształcania go na inny okrąg.

Omówiona sytuacja jest przedstawiona na rys.II.1.1c.



II.1.1c

Punkt Q' jest punktem odpowiadającym punktowi Q w przekształceniu inwersyjnym względem okręgu \bar{k} [24], co przedstawiono na rys.II.1.1d.



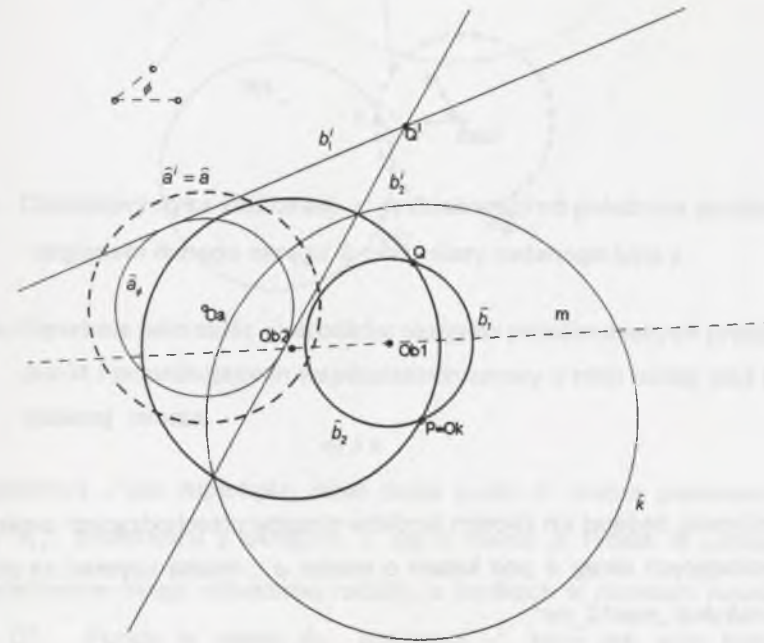
II.1.1d

Prostym $b'_{1,2}$ przechodzącym przez punkt Q' i przecinającym okrąg \bar{a}' pod kątem ϕ odpowiadają w inwersji I_k okręgi \bar{b} , które przechodząc przez punkt P , przecinają okrąg \bar{a} pod kątem ϕ . Środki tych okręgów należą do prostej m . Łatwo zauważyć, że proste $b'_{1,2}$ są styczne do okręgu \bar{a}_ϕ współśrodkowego z okręgiem \bar{a} , określonego dla danego kąta ϕ , którego długość promienia wynosi $r_a \cos \phi$ (gdzie r_a jest promieniem okręgu \bar{a}).

Z punktu Q' można poprowadzić zawsze tylko dwie takie proste, więc na prostej m istnieją dwa punkty, będące środkami szukanych okręgów (oczywiście punktami takimi mogą być punkty różne rzeczywiste, rzeczywiste liczone podwójnie lub urojone sprzężone).

Prosta m jest dowolnie wybraną prostą płaszczyzny α , więc z ostatnich ustaleń wynika, że każda prosta przecina szukany zbiór c^2 środków w dwóch punktach, co stanowi, że zbiór ten jest linią rzędu drugiego [24].

Sytuację tę ilustruje rys.II.1.1e.

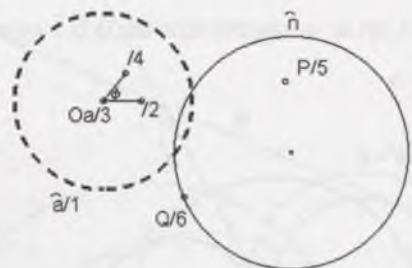


II.1.1e

W celu wyznaczenia miejsca geometrycznego środków szukanych okręgów można wykorzystać program komputerowy CABRI. W programie tym, wykorzystując jego możliwości wyznaczania miejsc geometrycznych, opracowano szereg makrokonstrukcji, pozwalających na prawie automatyczne kreślenie obrazów rozpatrywanych figur [7]. Makrokonstrukcje te opisane są szczegółowo wraz z podaniem odpowiednich algorytmów w aneksie do niniejszego opracowania. Każdą z nich nazwano skrótowo „mac.._m”. Dla każdej makrokonstrukcji podano przyjęte założenia, przy czym punkt ruchomy Q umieszczany jest zawsze (wymóg programu) na dowolnie przyjętym okręgu \hat{n} lub prostej n .

W całej pracy rysunki zawierające założenia do makrokonstrukcji oznaczono literą m.

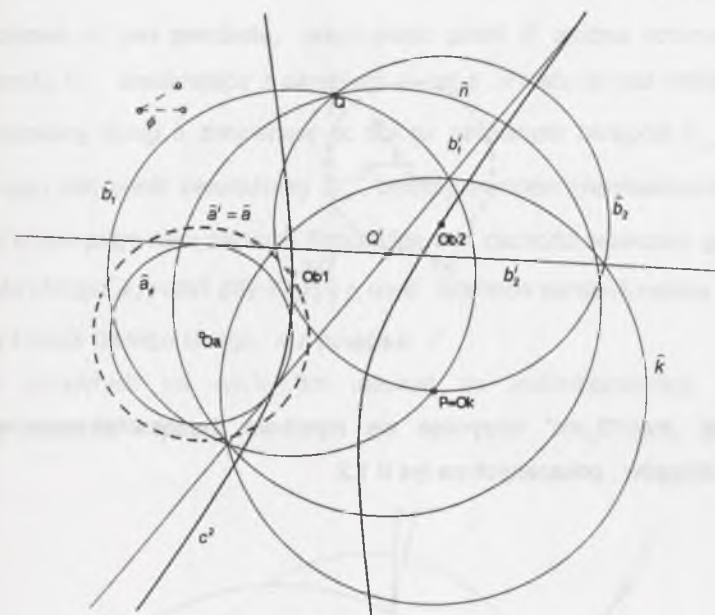
I tak, dla założeń przyjętych na rys.II.1.1m,



II.1.1m

obraz stożkowej, będącej ich zbiorem środków okręgów przechodzących przez punkt P i przecinających okrąg \hat{a} pod kątami o mierze ϕ , można uzyskać za pomocą makrokonstrukcji „mac10_mc”.

Na rys.II.1.1 pokazana jest stożkowa, w tym przypadku hiperbola, będąca szukanym miejscem geometrycznym.



II.1.1

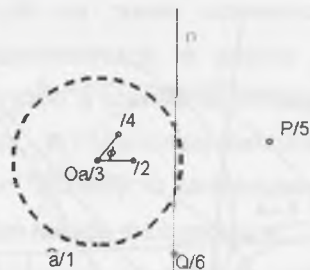
II.1.1. Charakterystyka stożkowej c^2 w zależności od położenia punktu P względem danego okręgu \hat{a} oraz miary zadanego kąta ϕ

II.1.1a. Hiperbola jako zbiór c^2 środków okręgów przechodzących przez dany punkt i przecinających współpłaszczyznowy z nimi okrąg pod kątami o zadanej mierze

Stożkowa c^2 jest hiperbolą, jeżeli przez punkt P można poprowadzić dwie proste $b'_{1,2}$, zawierające z okręgiem \hat{a} kąt o mierze ϕ . Proste te uznaje się za zdegenerowane okręgi rozważanej rodziny, o środkach w punktach niewłaściwych O_{h1}^∞ i O_{h2}^∞ . Punkty te należą do stożkowej c^2 , która jest więc hiperbolą, o asymptotach zawierających punkty O_{h1}^∞ i O_{h2}^∞ .

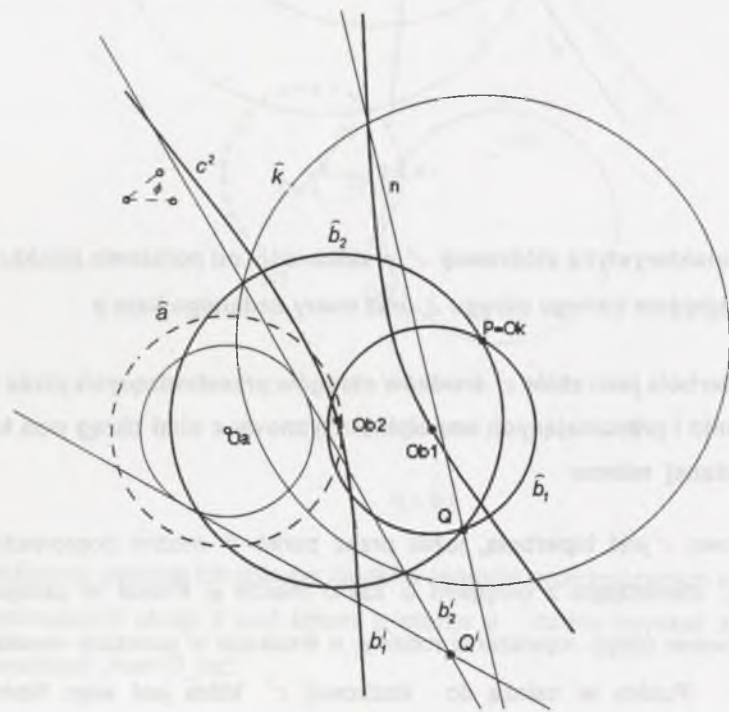
Przypadek ten zachodzi zawsze, gdy punkt P jest punktem zewnętrznym okręgu \bar{a}_ϕ , współśrodkowego z okręgiem \bar{a} , czyli gdy $|O_a P| > r_a \cos \phi$.

Dla przyjętych założeń na rys. II.1.2m



II.1.2m

za pomocą „mac10_mc” otrzymuje się hiperbolę, będącą zbiorem środków szukanych okręgów, pokazanych na rys II.1.2.

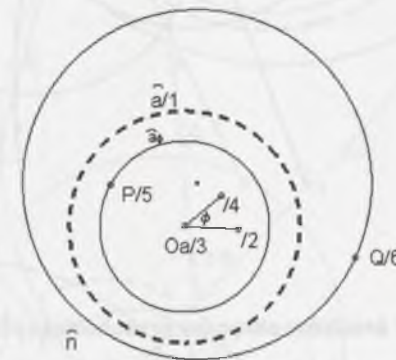


II.1.2

II.1.1b. Parabola jako zbiór środków okręgów przechodzących przez dany punkt i przecinających współpłaszczyznowy z nimi okrąg pod kątami o zadanej mierze

Stożkowa c^2 jest **parabolą**, jeżeli przez punkt P można poprowadzić tylko jedną prostą b' , zawierającą z okręgiem \bar{a} kąt ϕ . Prosta ta jest traktowana jako zdegenerowany okrąg \bar{b}_n , należący do zbioru szukanych okręgów $\bar{b}_{1..n}$. Środkiem tego okręgu jest punkt niewłaściwy O_m^∞ , będący punktem niewłaściwym stożkowej c^2 , czyli w tym przypadku paraboli. Przypadek ten zachodzi wówczas, gdy punkt P należy do okręgu \bar{a}_ϕ , czyli gdy $|O_a P| = r_a \cos \phi$. Średnica paraboli należy do prostej, łączącej środek danego okręgu \bar{a} z punktem P .

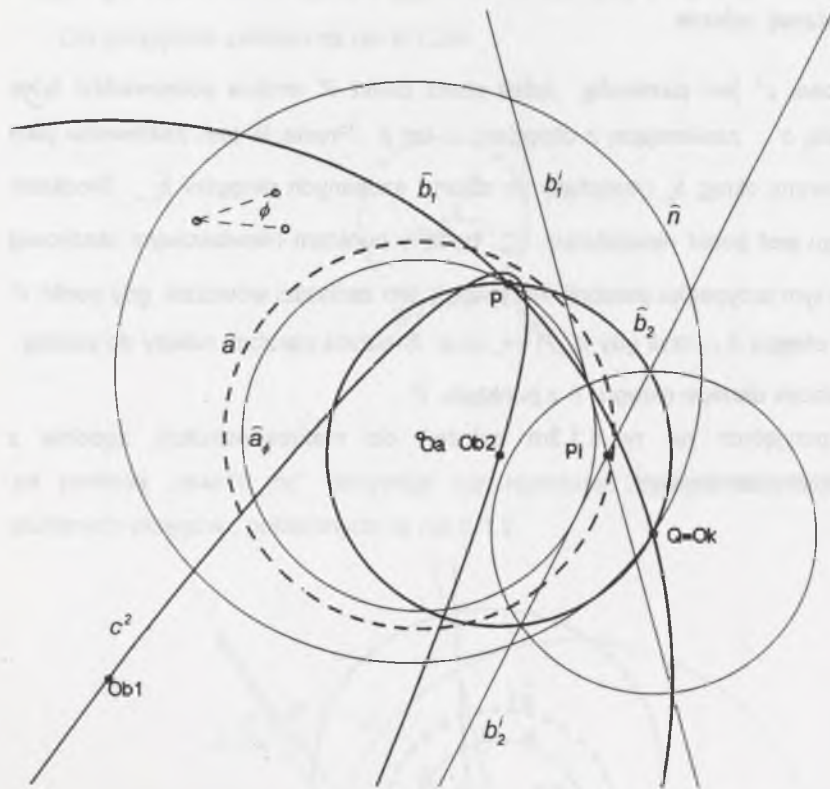
Dla przyjętych na rys. II.1.3m założeń do makrokonstrukcji, zgodnie z wcześniejszymi założeniami,



II.1.3m

za pomocą „mac10_mc” otrzymuje się parabolę, będącą zbiorem środków szukanych okręgów.

Parabolę taką pokazano na rys II.1.3.



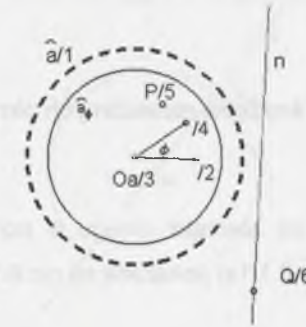
II.1.3

II.1.1c. Elipsa jako zbiór środków okręgów przechodzących przez dany punkt i przecinających współpłaszczyznowy z nimi okrąg pod kątami o zadanej mierze

Stożkowa c^2 jest **elipsą**, jeżeli przez punkt P nie przechodzi żadna rzeczywista prosta, zawierająca z okręgiem \hat{a} kąt ϕ . Oznacza to, że w zbiorze rozważanych okręgów $\hat{b}_{1..n}$ nie istnieje okrąg zdegenerowany do prostej, o środku w punkcie niewłaściwym.

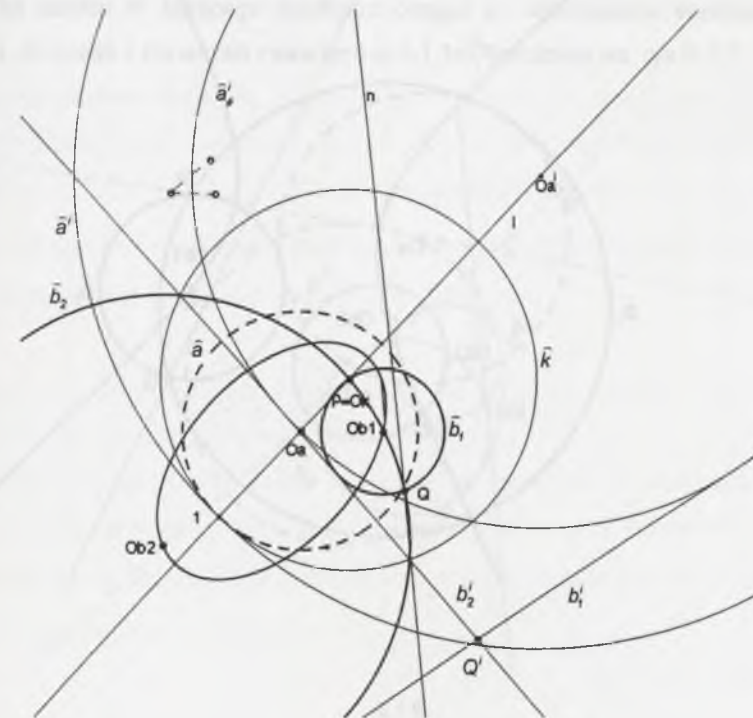
Wobec tego stożkowa c^2 nie zawiera punktów niewłaściwych, jest więc elipsą (lub okręgiem). Przypadek ten zachodzi wówczas, gdy $|O_o P| < r_o \cos \phi$, czyli gdy punkt P leży wewnątrz okręgu \hat{a}_ϕ .

Dla przyjętych założeń jak na rys. II.1.4m



II.1.4m

za pomocą „mac12_mc” otrzymuje się elipsę, będącą zbiorem środków szukanych okręgów, co pokazano na rys II.1.4.



II.1.4

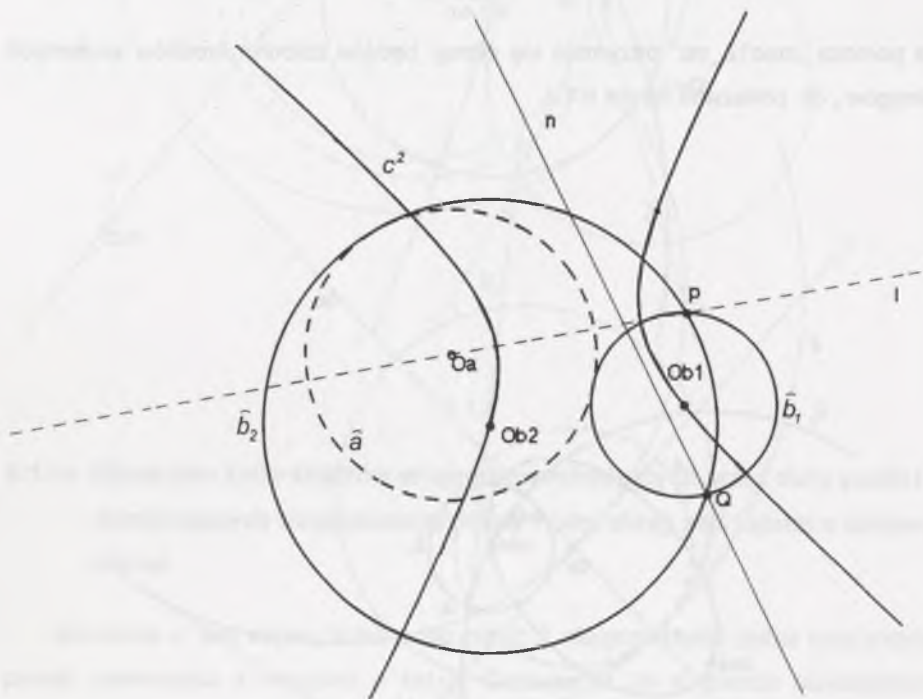
II.1.2. Właściwości zbioru c^2 środków rozważanych okręgów przy szczególnych miarach danego kąta

Dla szczególnych miar zadanego kąta stożkowa, będąca miejscem geometrycznym środków szukanych okręgów, może występować w postaci zdegenerowanej.

II.1.2a. Własności zbioru c^2 środków rozważanych okręgów, gdy miara kąta

$$\phi = 0^\circ$$

Dla punktu P leżącego na zewnątrz okręgu \bar{a} rozważana stożkowa c^2 jest hiperbolą (wniosek z ustaleń w II.1.1a) pokazaną na rys.II.1.5.



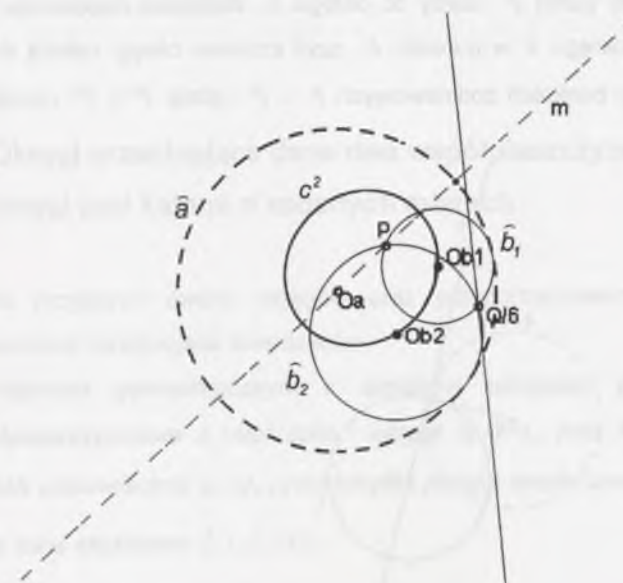
II.1.5

Na rys.II.1.6 pokazano zdegenerowaną do prostej $m = O_aP$ stożkową c^2 , gdy punkt P leży na okręgu \bar{a} .



II.1.6

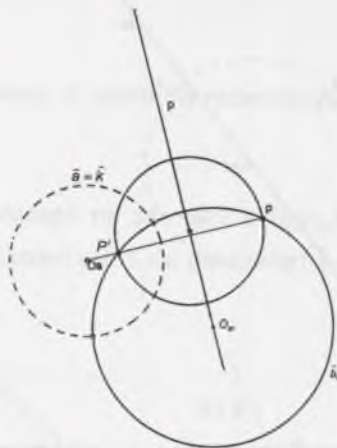
Dla punktu P , leżącego wewnątrz okręgu \bar{a} , analizowana stożkowa c^2 jest elipsą (wniosek z rozważań zawartych w II.1.1c), pokazaną na rys.II.1.7.



II.1.7

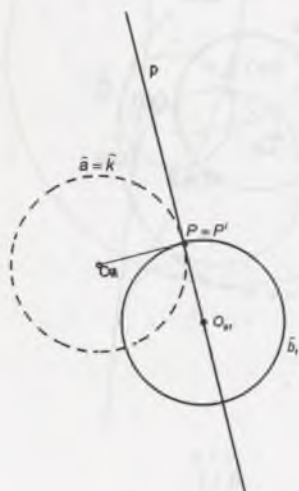
II.1.2b. Własności zbioru środków szukanych okręgów, gdy miara kąta $\phi = 90^\circ$

Gdy punkt P jest punktem zewnętrznym okręgu \bar{a} , szukane okręgi należą do pęku o punktach podstawowych P i P' , a więc ich środki należą do prostej p , będącej podstawą pęku, co wynika z rozważań w II.1.1a i widać na rys. II.1.8.



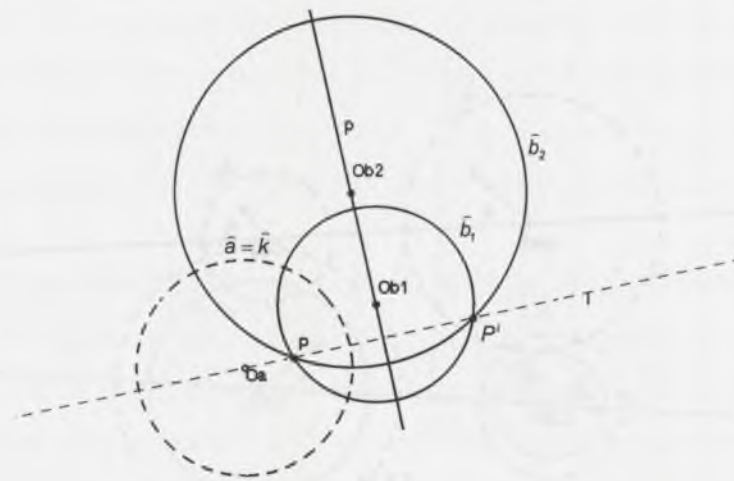
II.1.8

W przypadku gdy punkt P należy do okręgu \bar{a} , stożkowa degeneruje się do prostej stycznej do okręgu \bar{a} w punkcie P , czyli szukane okręgi należą do pęku okręgów (rys. II.1.9) o punktach podstawowych P i P' , gdzie $P = P'$ (wynika to z II.1.1b).



II.1.9

Dla punktu P leżącego wewnątrz okręgu \bar{a} szukany miejscem geometrycznym jest prosta p , będąca podstawą pęku okręgów o punktach podstawowych P i P' (jak to wynika z II.1.1c), co widać na rys. II.1.10.



II.1.10

II.2. Okręgi przecinające dane dwa współpłaszczyznowe z nimi okręgi pod kątami o zadanych miarach

Dla przyjętych dwóch okręgów oraz przyporządkowanych im miar kątów udowodniono następujące twierdzenie:

Miejscem geometrycznym c środków okręgów, przecinających dwa współpłaszczyznowe z nimi dane okręgi \bar{a}_1 i \bar{a}_2 pod kątami o zadanych miarach odpowiednio ϕ_1 i ϕ_2 , jest krzywa płaska rzędu czwartego, rozpadająca się na dwie stożkowe c_1^2 i c_2^2 [11].

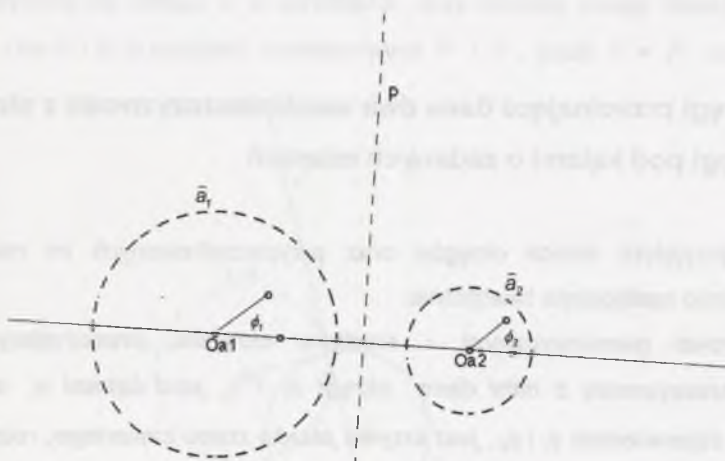
W celu przeprowadzenia dowodu powyższego twierdzenia przyjęto (w płaszczyźnie rysunku) dwa współpłaszczyznowe okręgi \bar{a}_1 i \bar{a}_2 oraz miary kątów ϕ_1 i ϕ_2 , pod którymi szukane okręgi $\bar{b}_{1..n}$ powinny przecinać odpowiednie dane okręgi.

Założenia takie podaje rys.II.2.1a.



II.2.1a

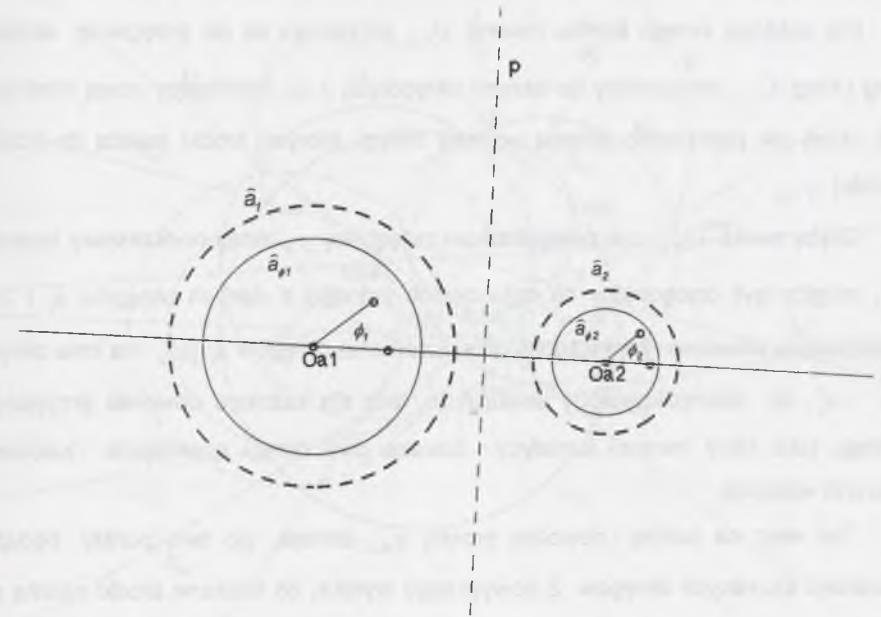
Dla przyjętych okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_2 wyznaczono na rys. II.2.1b oś potęgową.



II.2.1b

Następnie wyznaczono okręgi \bar{a}_{ϕ_1} i \bar{a}_{ϕ_2} o promieniach $r_{a1} \cos \phi_1$ i $r_{a2} \cos \phi_2$ takie, że proste styczne do \bar{a}_{ϕ_1} i \bar{a}_{ϕ_2} przecinają odpowiednio okręgi \bar{a}_1 i \bar{a}_2 pod kątami o zadanych miarach ϕ_1 i ϕ_2 .

Okręgi \bar{a}_{ϕ_1} i \bar{a}_{ϕ_2} pokazano na kolejnym rys.II.2.1c.



II.2.1c

Z kolei na osi potęgowej p wyróżniono środek inwersji O_k i przyjęto okrąg \bar{k} , będący bazą przekształcenia I_k , jako ortogonalny równocześnie do obu okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_2 . W tak określonej inwersji I_k unika się przekształcania okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_2 oraz \bar{a}_{ϕ_1} i \bar{a}_{ϕ_2} na inne okręgi, co ułatwia dalsze konstrukcje. Wiadomo, że przekształcenie inwersyjne jest przekształceniem wiernokątnym, więc proste przecinające okręgi ϕ_1 odpowiednio pod kątami o zadanych miarach ϕ_1 i ϕ_2 przekształca się w okręgi przecinające okręgi \bar{a}_1 i \bar{a}_2 również pod kątami ϕ_1 i ϕ_2 .

Parze prostych b'_{z1} i b'_{z2} , stycznych zewnętrznie do obu okręgów $\bar{a}_{\phi 1}$ i $\bar{a}_{\phi 2}$, odpowiadają szukane okręgi \bar{b}_{z1} i \bar{b}_{z2} . Okręgi te należą do pęku o punktach podstawowych $O_k M_z$, gdzie punkt M_z jest to punkt przyporządkowany inwersyjnie punktowi wspólnemu prostych stycznych zewnętrznie M'_z . Środki szukanych okręgów O_{bz1} i O_{bz2} należą do prostej q_z , będącej podstawą tego pęku.

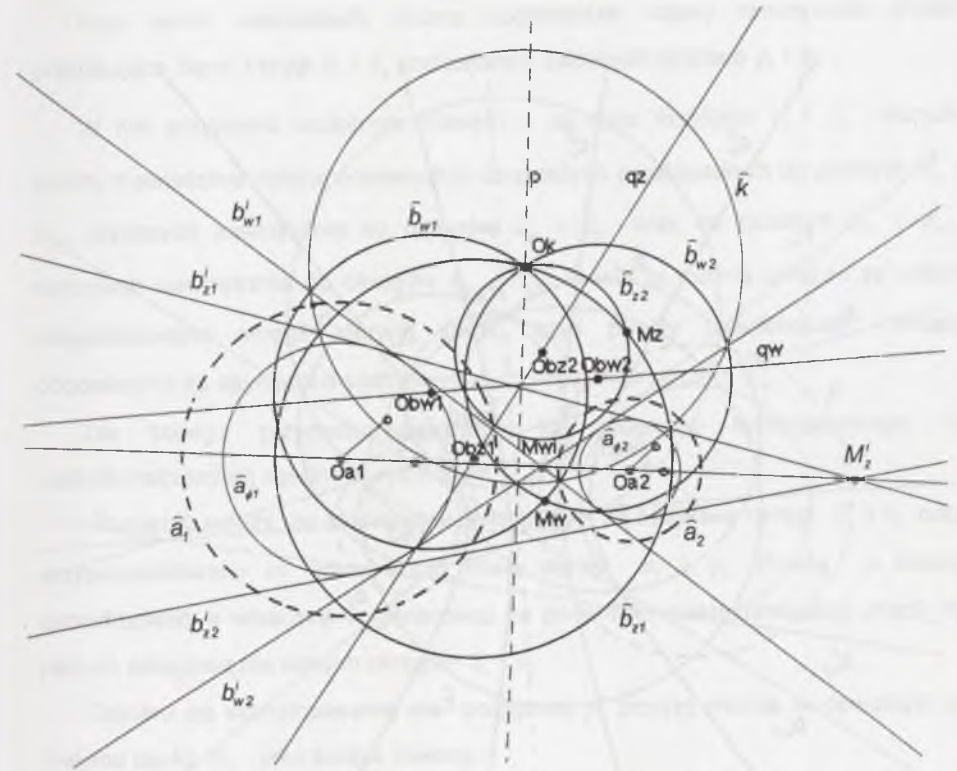
Dla każdego innego środka inwersji $O_{k1,2}$ przyjętego na osi potęgowej istnieje inny okrąg $\bar{k}_{1,2}$, ortogonalny do danych okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_2 , definiujący nową inwersję, dla której jak poprzednio istnieją po dwa okręgi, których środki należą do nowej prostej $q_{z1,2}$.

Gdyby punkt $O_{k1,2}$ nie należał do osi potęgowej p , okrąg podstawowy inwersji $\bar{k}_{1,2}$ mógłby być ortogonalny co najwyżej do jednego z danych okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_2 . Zaistniałaby wówczas konieczność przekształcania okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_2 na inne okręgi a'_1 i a'_2 , co skomplikowałoby konstrukcje, lecz dla każdego dowolnie przyjętego okręgu jako bazy inwersji istniałyby zawsze dwa okręgi spełniające założone warunki wstępne.

Tak więc na każdej dowolnej prostej $q_{z1,2}$ istnieją po dwa punkty, będące środkami szukanych okręgów. Z powyższego wynika, że szukane środki należą do stożkowej c^2_z .

W inwersji I_k weźmy w dalszym ciągu pod uwagę okręgi \bar{b}_{w1} i \bar{b}_{w2} , odpowiadające prostym b'_{w1} i b'_{w2} , stycznym wewnątrz do okręgów $\bar{a}_{\phi 1}$ i $\bar{a}_{\phi 2}$. Okręgi te należą do pęku okręgów o punktach podstawowych $O_k M_w$, gdzie punkt M_w jest punktem inwersyjnie przyporządkowanym punktowi M'_w jako wspólnemu prostych b'_{w1} i b'_{w2} . Punkty O_{bw1} i O_{bw2} , będące środkami szukanych okręgów, należą do prostej q_w , będącej podstawą tego pęku. Z powyższego wynika, że istnieje druga stożkowa c^2_w , będąca częścią składową miejsca geometrycznego środków szukanych okręgów.

Przedstawione rozumowanie ilustruje rys. II.2.1d.

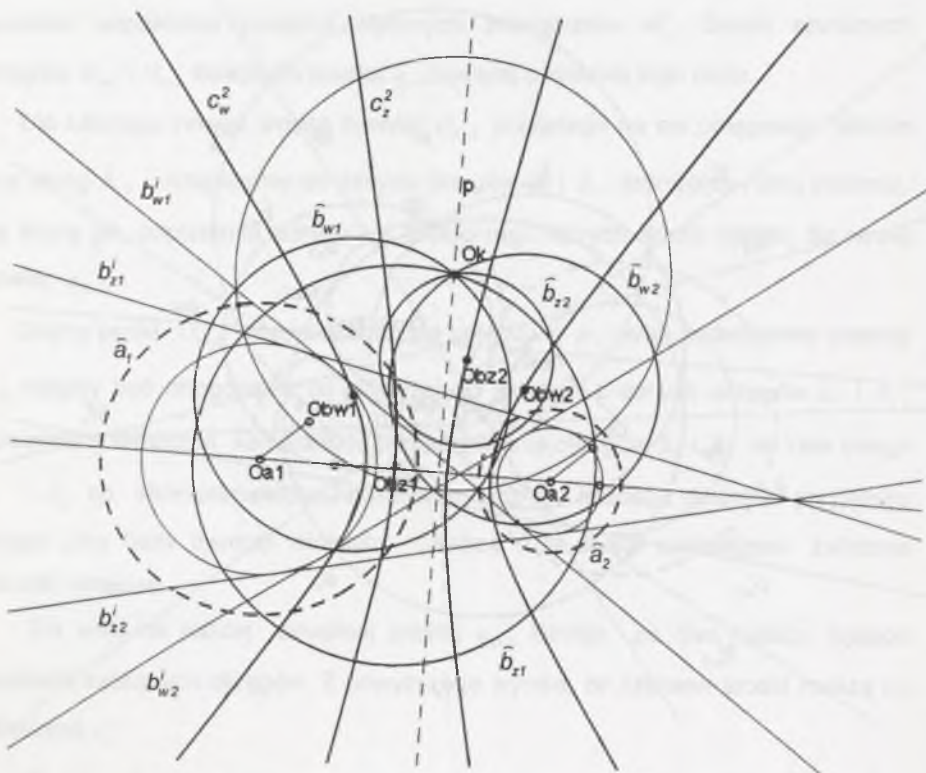


II.2.1d

Każdą z czterech prostych stycznych równocześnie do okręgów $\bar{a}_{\phi 1}$ i $\bar{a}_{\phi 2}$ można uważać za zdegenerowany okrąg o środku w punkcie niewłaściwym (mogą to być punkty rzeczywiste lub urojone w zależności od wzajemnego położenia okręgów $\bar{a}_{\phi 1}$ i $\bar{a}_{\phi 2}$).

Z tego wynika, że również prosta niewłaściwa płaszczyzny okręgów ma z szukanim zbiorem c środków cztery punkty wspólne. Fakt ten potwierdza tezę, że szukanim zbiorem jest krzywa płaska rzędu czwartego.

Dla przyjętych na rys.II.2.1d i rys.II.2.1 założeń krzywa ta składa się z dwóch hiperbol.



II.2.1

II.2.1. Właściwości stożkowych c_2^z i c_2^w w zależności od wzajemnego położenia danych okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_2 oraz od miar ϕ_1 i ϕ_2 przyporządkowanych im kątów. (gdy $\phi_{1,2} \neq 0^\circ$ i $\phi_{1,2} \neq 90^\circ$)

II.2.1a. Właściwości stożkowych c_2^z i c_2^w c a okręgi \bar{a}_{ϕ_1} i \bar{a}_{ϕ_2} wymijają się, czyli nie mają punktów wspólnych i leżą wzajemnie zewnętrznie

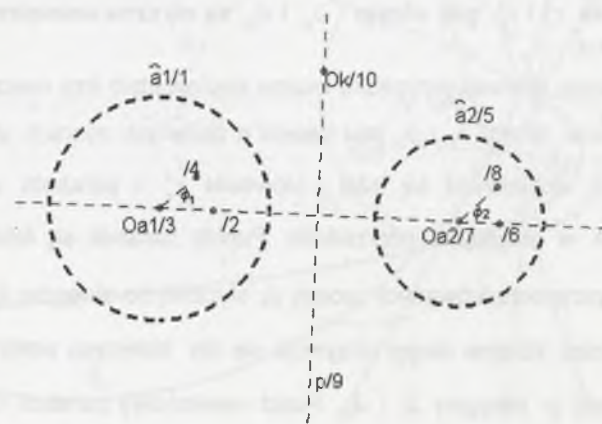
Przy takich założeniach można poprowadzić cztery rzeczywiste proste przecinające dane okręgi \bar{a}_1 i \bar{a}_2 pod kątami o zadanych miarach ϕ_1 i ϕ_2 .

W tym przypadku szukanym zbiorem c są dwie hiperbole c_2^z i c_2^w , których punkty niewłaściwe należą odpowiednio do prostych prostopadłych do prostych b'_{z1} i b'_{z2} , stycznych zewnętrznie do okręgów \bar{a}_{ϕ_1} i \bar{a}_{ϕ_2} oraz do prostych b'_{w1} i b'_{w2} , stycznych wewnętrznie do okręgów \bar{a}_{ϕ_1} i \bar{a}_{ϕ_2} . Proste te można uważać za cztery zdegenerowane okręgi, których środki, czyli punkty niewłaściwe, należą odpowiednio do asymptot dwóch hiperbol, czyli stożkowych c_2^z i c_2^w .

Dla takiego przypadku założenia dla programu komputerowego do makrokonstrukcji są zgodne z rys.II.2.2m.

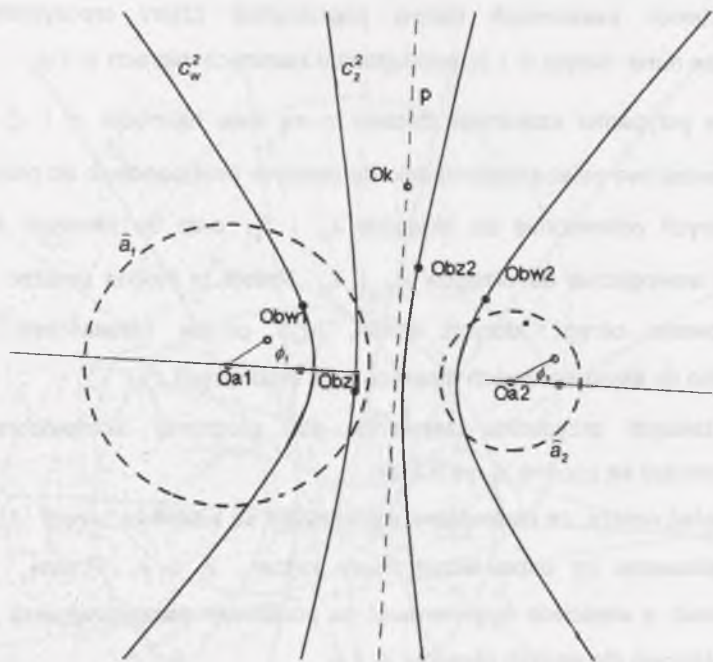
Pamiętać należy, że elementami wyjściowymi są tutaj dwa okręgi \bar{a}_1 i \bar{a}_2 oraz przyporządkowane im odpowiednio miary kątów ϕ_1 i ϕ_2 . Prosta p należy skonstruować, a właściwie wygenerować na podstawie makrokonstrukcji „mac9_m” jako oś potęgową dla danych okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_2 .

Dopiero na skonstruowanej osi potęgowej p , przyjętą można w dowolnym jej miejscu punkt O_k jako środek inwersji.



II.2.2m

Makrokonstrukcja „mac13-mc” pozwala wygenerować na rys.II.2.2.rozważane hiperbole.

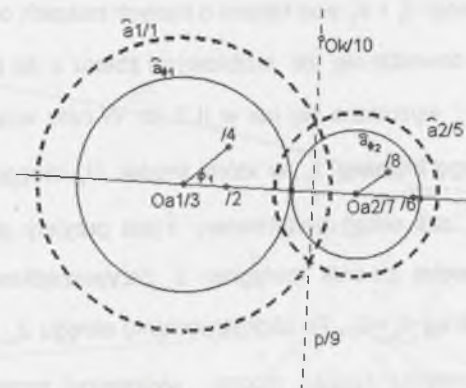


II.2.2

II.2.1b. Stożkowe c_z^2 i c_w^2 , gdy okręgi \hat{a}_{ϕ_1} i \hat{a}_{ϕ_2} są styczne zewnętrznie

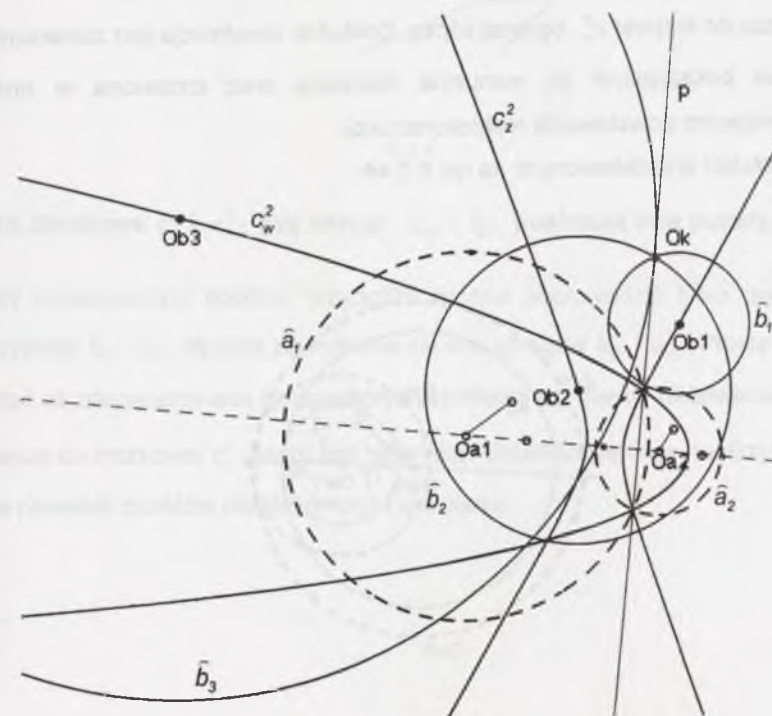
W rozważanym obecnie przypadku można poprowadzić trzy rzeczywiste proste przecinające dane okręgi \hat{a}_1 i \hat{a}_2 pod kątami o zadanych miarach ϕ_1 i ϕ_2 , wobec tego szukanymi stożkowymi są tutaj hiperbola c_z^2 i parabola c_w^2 . Hiperbolę wyznaczono jak w przypadku poprzednim. Punkty parabol są środkami $O_{bw1,2}$, okręgów $\hat{b}_{v1,2}$ przyporządkowanych prostej b'_w stycznej do okręgów \hat{a}_{ϕ_1} i \hat{a}_{ϕ_2} w ich punkcie styczności. Kolejne okręgi otrzymuje się dla kolejnych położenia punktu O_k na osi potęgowej p okręgów \hat{a}_1 i \hat{a}_2 . Punkt niewłaściwy parabol O_{kw} należy do prostej prostopadłej do prostej stycznej do okręgów \hat{a}_{ϕ_1} i \hat{a}_{ϕ_2} w ich punkcie

styczności, gdyż prostą taką można traktować jako zdegenerowany okrąg \hat{b} , należący do rozważanej rodziny, o środku niewłaściwym. Dla przyjętych na rys.II.2.3m założeń



II.2.3m

„mac13_mz” i „mac14_mc” pozwalają wykreślić na rys.II.2.3 omawiane stożkowe.



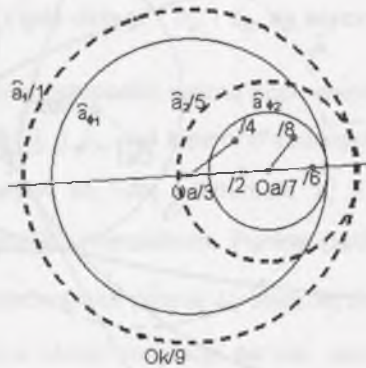
II.2.3

II.2.1c. Stożkowe c_z^2 i c_w^2 , gdy okręgi $\bar{a}_{\phi 1}$ i $\bar{a}_{\phi 2}$ są styczne wewnętrznie

W analizowanym przypadku można poprowadzić tylko jedną rzeczywistą prostą przecinającą dane okręgi \bar{a}_1 i \bar{a}_2 pod kątami o danych miarach odpowiednio ϕ_1 i ϕ_2 .

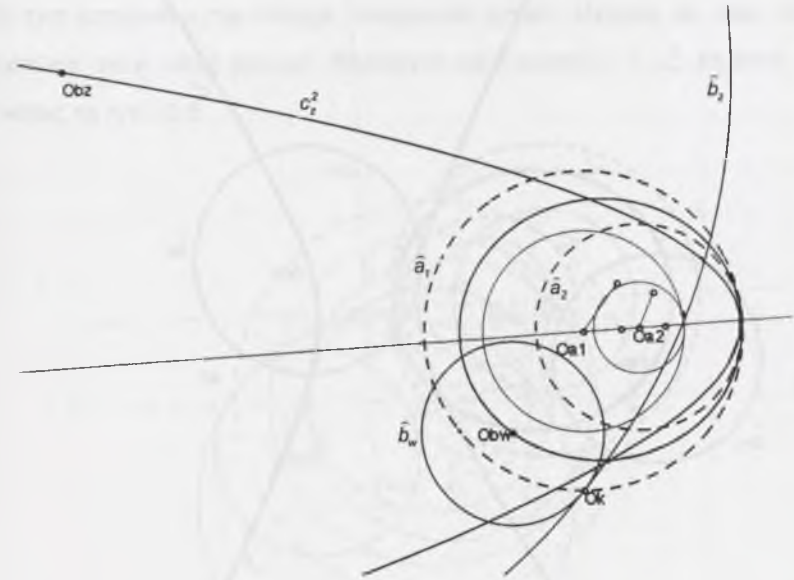
W związku z tym dowodzi się, że stożkowymi zbioru c są parabola c_z^2 i elipsa c_w^2 . Punkty paraboli c_z^2 wyznacza się jak w II.2.1b. W celu wyznaczenia elipsy c_w^2 należy wziąć pod uwagę inwersję I_k , w której środek O_k okręgu podstawowego \bar{k} należy do okręgu \bar{a}_1 , zaś okrąg podstawowy \bar{k} jest przyjęty jako ortogonalny do okręgu \bar{a}_2 . W tak przyjętej inwersji okręgowi \bar{a}_1 przyporządkowana będzie prosta a'_1 , zaś okręgowi \bar{a}_2 okrąg $\bar{a}'_2 = \bar{a}_2$. Po skonstruowaniu okręgu $\bar{a}_{\phi 2}$, współśrodkowego z okręgiem \bar{a}_2 o promieniu $r \cos \phi_2$, można wyznaczyć proste $b'_{1,2}$ przecinające prostą a'_1 i okrąg \bar{a}'_2 pod kątami o ustalonych odpowiednio miarach ϕ_1 i ϕ_2 . Prostym $b'_{1,2}$ przyporządkowane będą w inwersji I_k rozpatrywane okręgi $\bar{b}_{1,2}$, których środki $O_{b1,2}$ należą do krzywej c_w^2 , będącej elipsą. Dokładna konstrukcja jest zamieszczona w aneksie pokazującym jej manualną realizację oraz omówiona w aneksie przedstawiającym powstawanie makrokonstrukcji.

Dla założeń przedstawionych na rys.II.2.4m



II.2.4m

„mac14_mc” i „mac15_mw” pozwalają wykreślić szukane krzywe jak na rys.II.2.4.

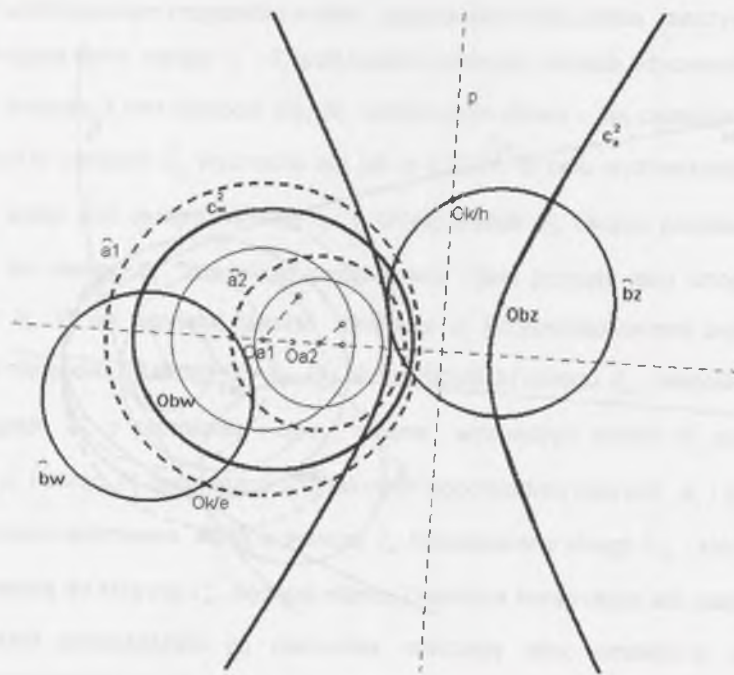


II.2.4

II.2.1d. Stożkowe c_z^2 i c_w^2 , gdy okręgi $\bar{a}_{\phi 1}$ i $\bar{a}_{\phi 2}$ posiadają dwa punkty wspólne

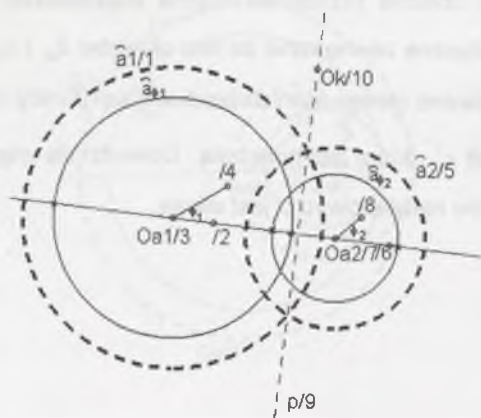
W analizowanym obecnie przypadku można poprowadzić tylko dwie proste rzeczywiste b'_{z1} i b'_{z2} , styczne zewnętrznie do obu okręgów $\bar{a}_{\phi 1}$ i $\bar{a}_{\phi 2}$. Proste te można uważać za zdegenerowane okręgi, których środkami są punkty niewłaściwe. Punkty te należą do stożkowej c_z^2 , która jest hiperbolą. Dowodzi się więc, że krzywa c_w^2 nie może posiadać punktów niewłaściwych i jest elipsą.

Rozważana elipsa jest przedstawiona na rys.II.2.5.



II.2.5

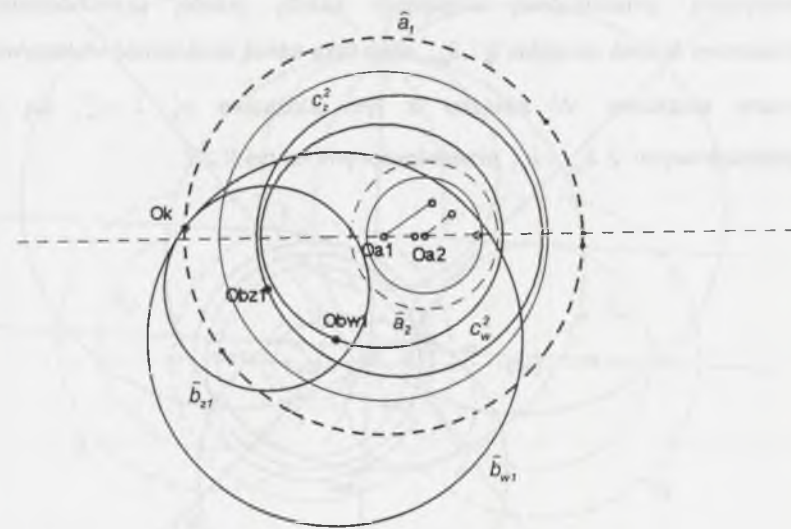
Stożkowe c_z^2 i c_w^2 można wykreślić korzystając z „mac13_mz” i „mac15_mw” dla założeń zgodnych z rys.II.2.5m.



II.2.5m

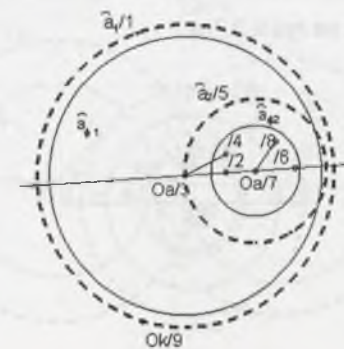
II.2.1e. Stożkowe c_z^2 i c_w^2 , gdy okręgi $\tilde{a}_{\phi 1}$ i $\tilde{a}_{\phi 2}$ nie posiadają punktów wspólnych i leżą jeden wewnątrz drugiego

W tym przypadku nie istnieją rzeczywiste proste styczne do obu okręgów. Dowodzi się, że w takiej sytuacji szukanymi stożkowymi c_z^2 i c_w^2 są dwie elipsy, jakie widać na rys.II.2.6.



II.2.6

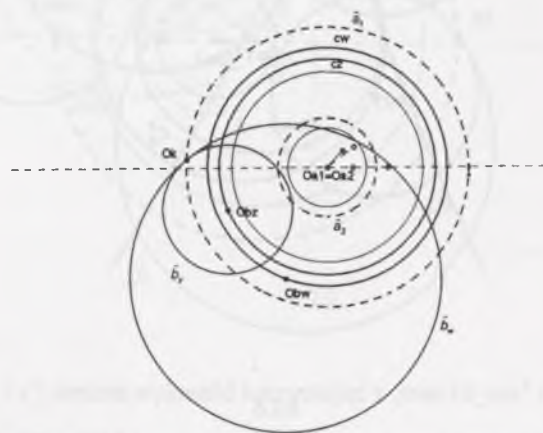
Rysunek tych krzywych można uzyskać za pomocą „mac15_mz” i „mac15_mw” lub łącznie „mac15_mc” dla odpowiednich założeń wg rys.II.2.6m.



II.2.6m

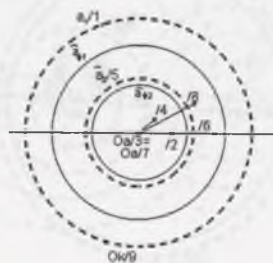
II.2.1f. Stożkowe c_z^2 i c_w^2 , gdy okręgi $\bar{a}_{\phi 1}$ i $\bar{a}_{\phi 2}$ są współśrodkowe

W omawianej obecnie sytuacji nie istnieją rzeczywiste proste styczne do obu okręgów, które mogłyby być traktowane jako okręgi zdegenerowane o środkach w punktach niewłaściwych, należących do stożkowych c_z^2 i c_w^2 . Tak więc stożkowe c_z^2 i c_w^2 są krzywymi zamkniętymi. Ponieważ suma okręgów $\bar{a}_{\phi 1}$ i $\bar{a}_{\phi 2}$ jest figurą symetryczną (prostokątnie) względem każdej prostej przechodzącej przez zjednoczony środek okręgów $\bar{a}_{\phi 1}$ i $\bar{a}_{\phi 2}$, więc taką samą właściwość wykazywać muszą szukane stożkowe. W związku z tym stożkowe c_z^2 i c_w^2 są okręgami współśrodkowymi z $\bar{a}_{\phi 1}$ i $\bar{a}_{\phi 2}$ przedstawionymi na rys.II.2.7.



II.2.7

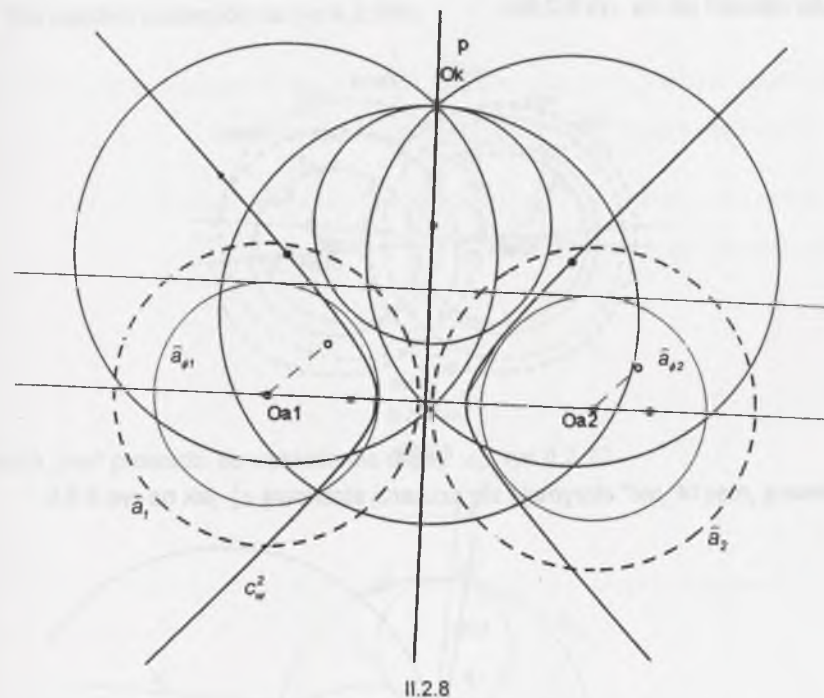
Okręgi te można wykreślić za pomocą „mac15_15mw” i „mac15_mz” lub łącznie „mac15_mc” dla założeń jak na rys.II.2.7m.



II.2.7m

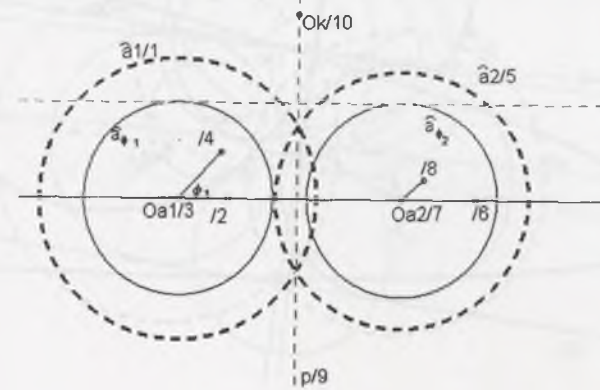
II.2.1g. Stożkowe c_z^2 i c_w^2 , gdy okręgi $\bar{a}_{\phi 1}$ i $\bar{a}_{\phi 2}$ mają promienie jednakowej długości i są położone zewnętrznie względem siebie

Dla przyjętych założeń szukany zbiorem c jest hiperbola i prosta $p=c_z^2$, będąca osią potęgową danych okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_2 jak na rys.II.2.8.



II.2.8

Kreśli się je za pomocą „mac13_mz” dla założeń jak na rys.II.2.8m.

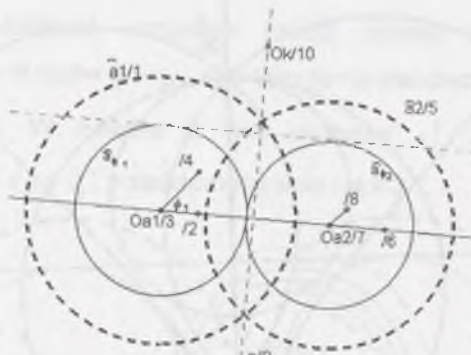


II.2.8m

II.2.1h. Stożkowe c_2^2 i c_w^2 , gdy okręgi $\bar{a}_{\rho 1}$ i $\bar{a}_{\rho 2}$ mają promienie jednakowej długości i są styczne zewnętrznie

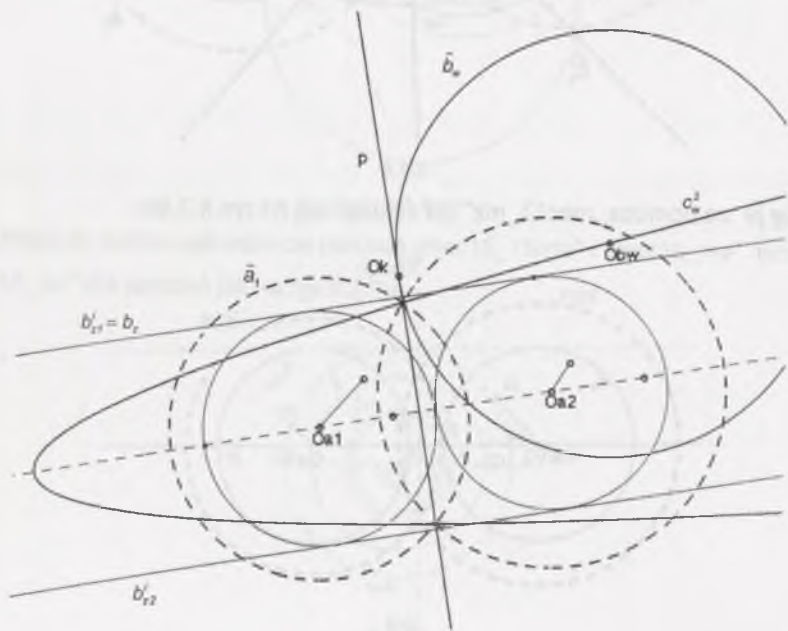
Szukany zbiorem c jest obecnie parabola c_w^2 i oś potęgowa $p=c_2^2$ danych okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_2 .

Dla założeń jak na rys.II.2.9m



II.2.9m

za pomocą „mac14_mc” otrzymuje się szukaną stożkową c_w^2 jak na rys.II.2.9.

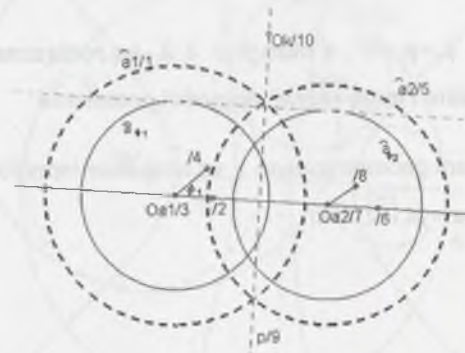


II.2.9

II.2.1i. Stożkowe c_2^2 i c_w^2 , gdy okręgi $\bar{a}_{\rho 1}$ i $\bar{a}_{\rho 2}$ mają promienie jednakowej długości i przecinają się

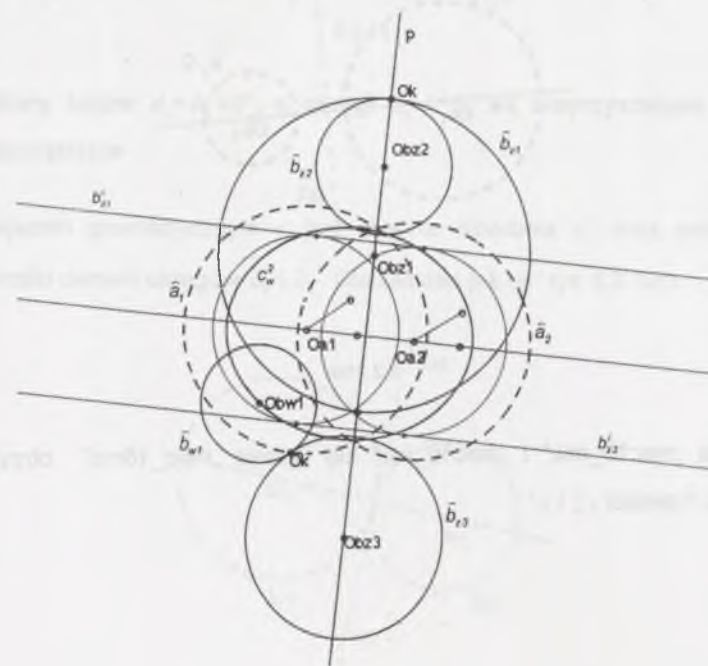
Dla przyjętych tutaj założeń szukany zbiorem c jest elipsa c_w^2 i oś potęgowa $p=c_2^2$ danych okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_2 .

Dla założeń podanych na rys.II.2.10m.



II.2.10m

„mac15_mw” prowadzi do wykreślenia elipsy c_w^2 rys.II.2.10.



II.2.10

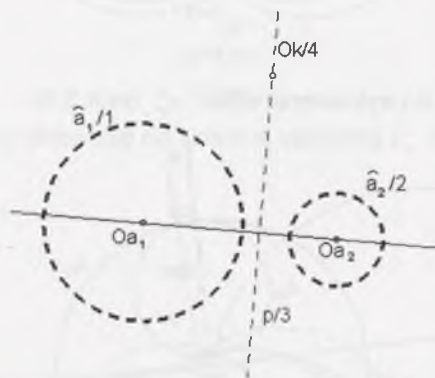
II.2.2. Stożkowe zbioru c środków szukanych okręgów dla szczególnych miar ϕ_1 i ϕ_2 zadanych kątów

Dla szczególnych miar ϕ_1 i ϕ_2 zadanych kątów stożkowe c_w^2 i c_z^2 , których suma jest miejscem geometrycznym c środków szukanych okręgów, mogą ulegać degeneracji.

II.2.2a. Miary kątów $\phi_1 = \phi_2 = 0^\circ$, a okręgi \hat{a}_1 i \hat{a}_2 są rozłączne, leżą zewnątrz siebie względem siebie i mają różnej długości promienie

Szukany miejscem geometrycznym c są tutaj dwie hiperbole c_w^2 i c_z^2 .

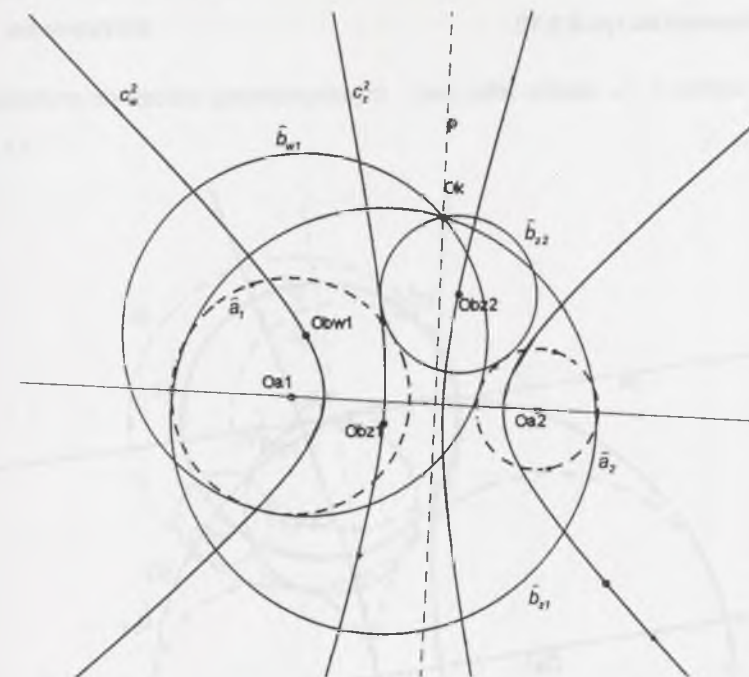
Dla założeń jak na rys.II.2.11m



II.2.11m

za pomocą „mac16_mw” i „mac16_mz” lub łącznie „mac_16mc” otrzymuje się rysunki obu hiperbol c_w^2 i c_z^2 .

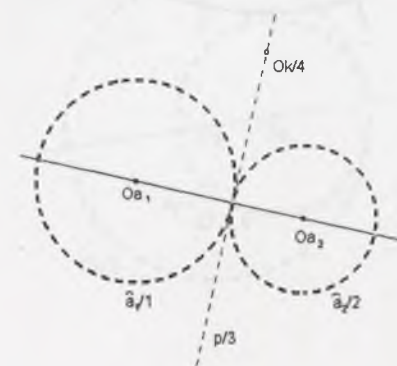
Na rys.II.2.11 przedstawiono te dwie hiperbole c_w^2 i c_z^2 .



II.2.11

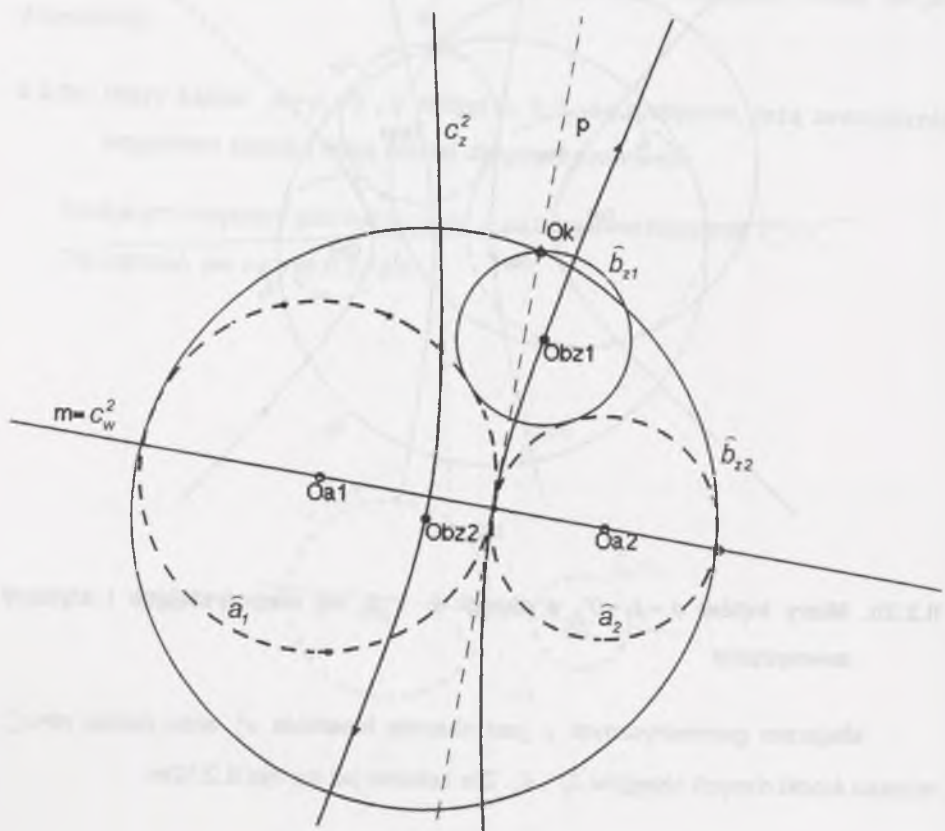
II.2.2b. Miary kątów $\phi_1 = \phi_2 = 0^\circ$, a okręgi \hat{a}_1 i \hat{a}_2 są nieprzystające i styczne zewnętrznie

Miejscem geometrycznym c jest obecnie hiperbola c_z^2 oraz prosta $m=c_w^2$, łącząca środki danych okręgów \hat{a}_1 i \hat{a}_2 . Dla założeń jak na rys.II.2.12m



II.2.12m

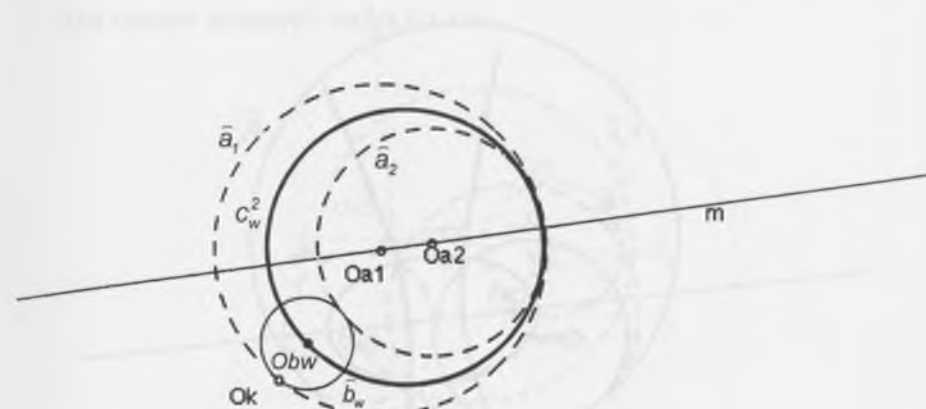
Za pomocą „mac16_mz” otrzymuje się rysunek szukanego miejsca geometrycznego c_2^2 , czyli hiperboli na rys. II.2.12.



II.2.12

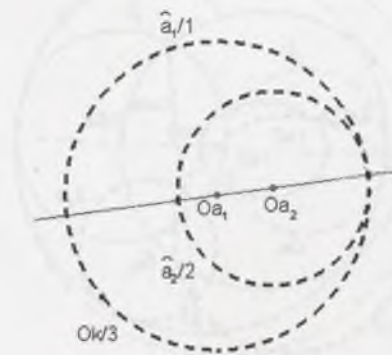
II.2.2c. Miary kątów $\phi_1 = \phi_2 = 0^\circ$, a okręgi \hat{a}_1 i \hat{a}_2 są nieprzystające i styczne wewnętrznie

Szukanim miejscem geometrycznym jest tutaj elipsa c_w^2 i prosta $m = c_2^2$ na rys. II.2.13.



II.2.13

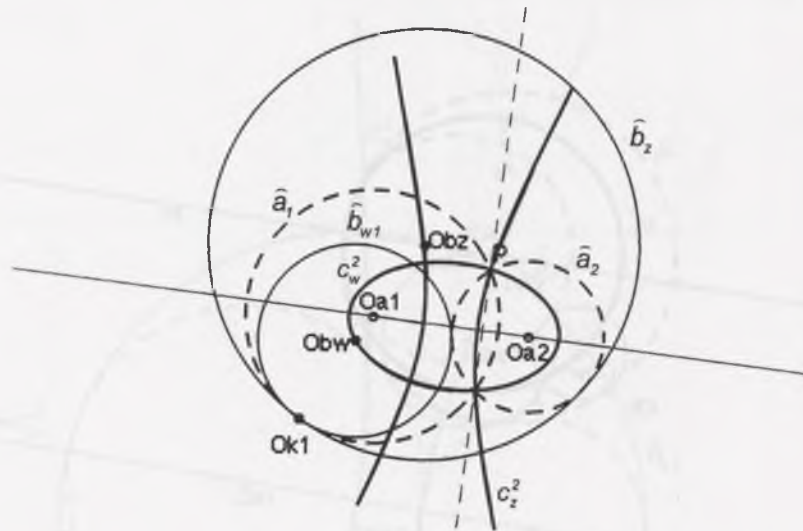
Rysunek II.2.13 wykonano dla założeń podanych na rys. II.2.13m za pomocą „mac18_mw”.



II.2.13m

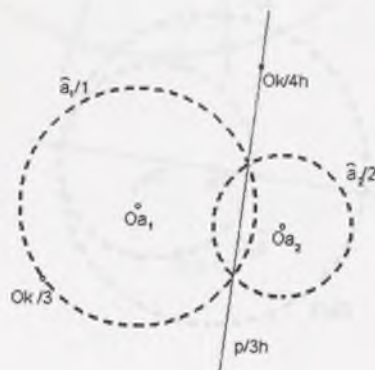
II.2.2d. Miary kątów $\phi_1 = \phi_2 = 0^\circ$, a okręgi \hat{a}_1 i \hat{a}_2 są nieprzystającymi okręgami przecinającymi się

Szukany miejscem geometrycznym c jest hiperbola c_z^2 i elipsa c_w^2 , pokazane na rys.II.2.14,



II.2.14

wykonanym za pomocą „mac16_mz” i „mac_18mw” dla założeń podanych na rys.II.2.14m.

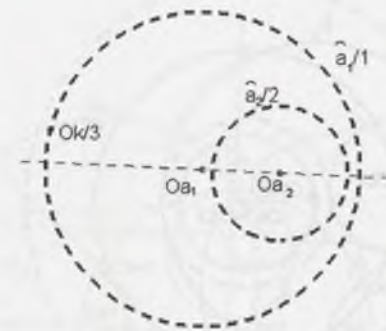


II.2.14m

II.2.2e. Miary kątów $\phi_1 = \phi_2 = 0^\circ$, a okręgi \hat{a}_1 i \hat{a}_2 są okręgami rozłącznymi, leżącymi jeden wewnątrz drugiego, o różnych długościach promieni

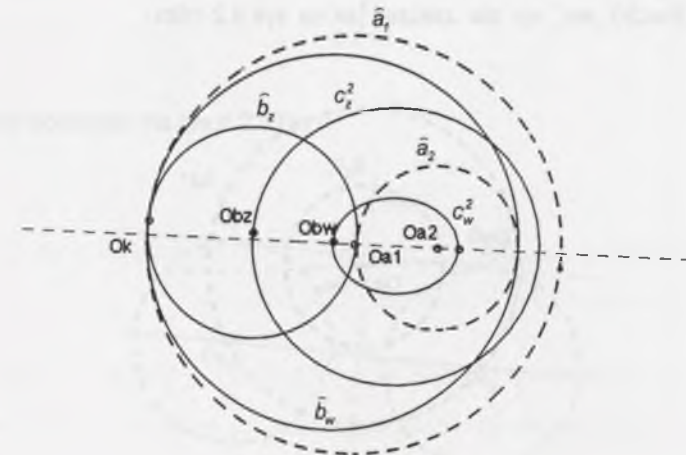
Przyjęte założenia powodują, że miejscem geometrycznym c są dwie elipsy c_w^2 i c_z^2 .

Dla założeń podanych na rys.II.2.15m



II.2.15m

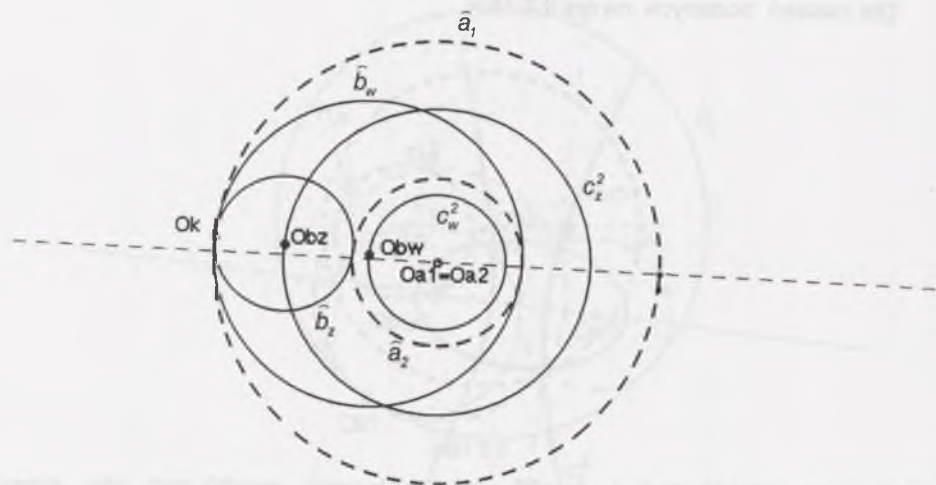
za pomocą „mac18_mw” i „mac20_mz” lub łącznie „mac20_mc” obie elipsy wykreślono na rys.II.2.15.



II.2.15

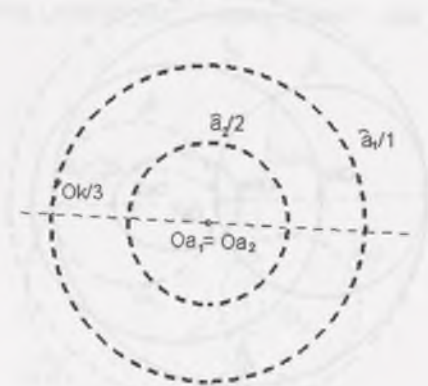
II.2.2f. Miary kątów $\phi_1 = \phi_2 = 0^\circ$, a okręgi \bar{a}_1 i \bar{a}_2 są różne i współśrodkowe

Szukanim miejscem geometrycznym c są tutaj dwa okręgi c_w^2 i c_z^2 , współśrodkowe z danymi okręgami \bar{a}_1 i \bar{a}_2 . Można je wykreślić jak na rys.II.2.16



II.2.16

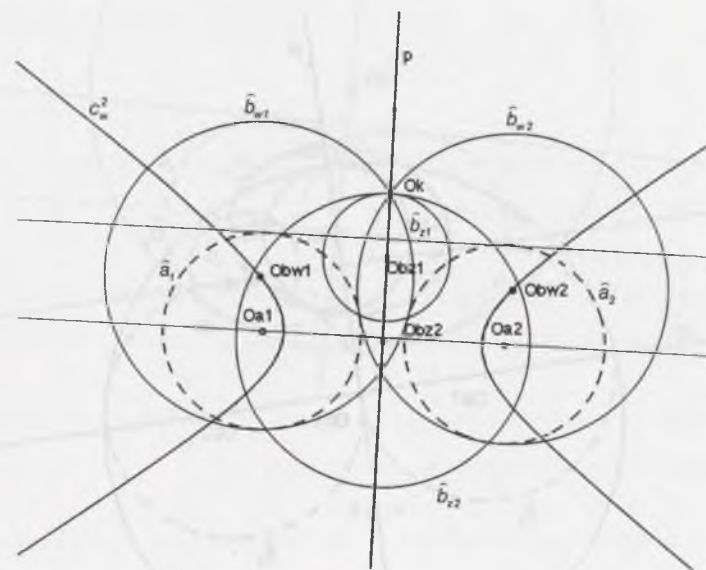
za pomocą „mac20_mc”, np. dla założeń jak na rys.II.2.16m.



II.2.16m

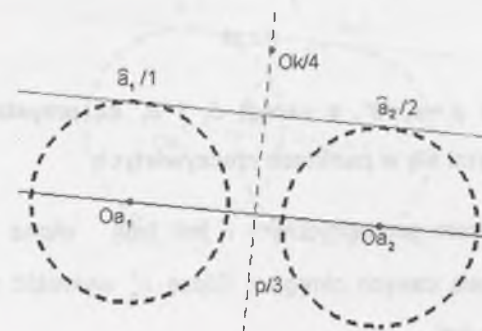
II.2.2g. Miary kątów $\phi_1 = \phi_2 = 0^\circ$, a okręgi \bar{a}_1 i \bar{a}_2 są przystające, rozłączne i położone zewnątrz względem siebie

Przy przyjętych obecnie założeniach szukanim miejscem geometrycznym c jest suma hiperboli c_w^2 i prostej potęgowej $p=c_z^2$ okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_2 . Hiperbolę c_w^2 na rys.II.2.17 pozwala wykreślić „mac16_mz”



II.2.17

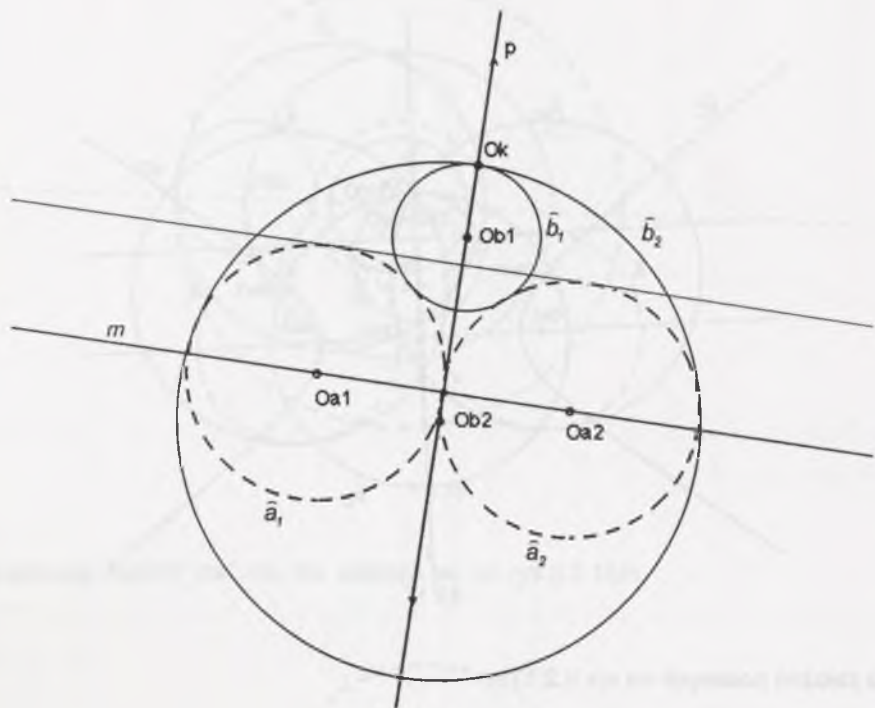
dla założeń podanych na rys.II.2.17m.



II.2.17m

II.2.2h. Miary kątów $\phi_1 = \phi_2 = 0^\circ$, a okręgi \bar{a}_1 i \bar{a}_2 są przystające i styczne zewnętrznie

W tym przypadku szukanim miejscem geometrycznym c są dwie proste: prosta p , będąca osią potęgową danych okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_2 oraz prosta m , wyznaczona przez ich środki, jak to pokazuje rys.II.2.18.

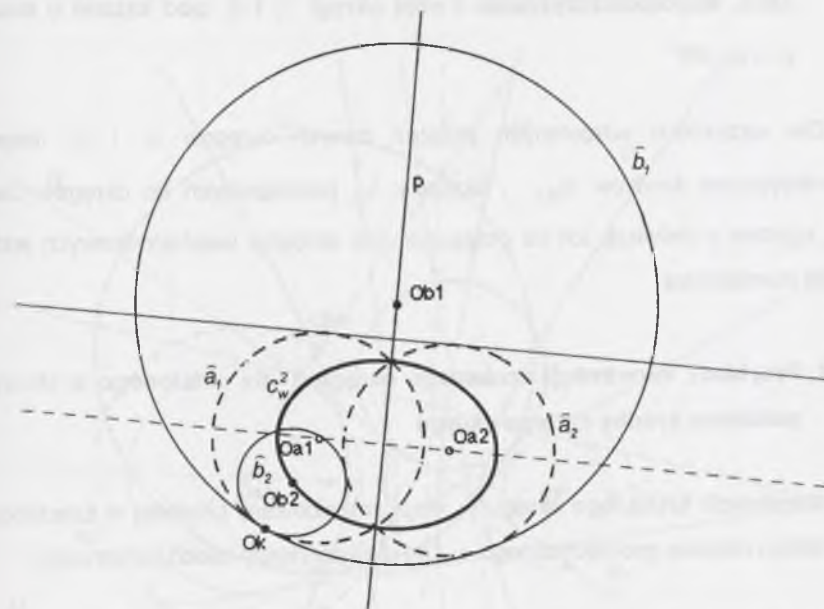


II.2.18

II.2.2i. Miary kątów $\phi_1 = \phi_2 = 0^\circ$, a okręgi \bar{a}_1 i \bar{a}_2 są przystającymi okręgami, przecinającymi się w punktach rzeczywistych

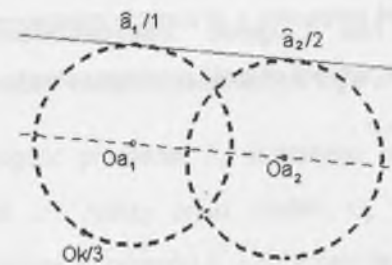
Szukanim miejscem geometrycznym c jest tutaj elipsa c_w^2 i prosta $p = c_s^2$, będąca osią potęgową danych okręgów. Elipsę c_w^2 wykreślić można za pomocą jednej z makrokonstrukcji.

W tym przypadku „mac18_mw” pozwala wykreślić elipsę pokazaną na rys.II.2.19



II.2.19

dla założeń jak na rys.II.2.19m.



II.2.19m

II.2.3. Charakterystyka zbioru c środków okręgów $\bar{b}_{1,2}$ przecinających dwa dane, współpłaszczyznowe z nimi okręgi \bar{a}_1 i \bar{a}_2 pod kątami o miarach $\phi_1 = \phi_2 = 90^\circ$

Dla wszystkich wzajemnych położenia danych okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_2 miejscem geometrycznym środków $O_{b_{1,2}}$, okręgów $\bar{b}_{1,2}$ prostopadłych do okręgów danych jest, zgodnie z definicją, ich oś potęgowa. Dla okręgów współśrodkowych jest ona prostą niewłaściwą.

II.2.4. Przykłady konstrukcji szukanego okręgu \bar{b} dla ustalonego w zbiorze c położenia środka O_b tego okręgu

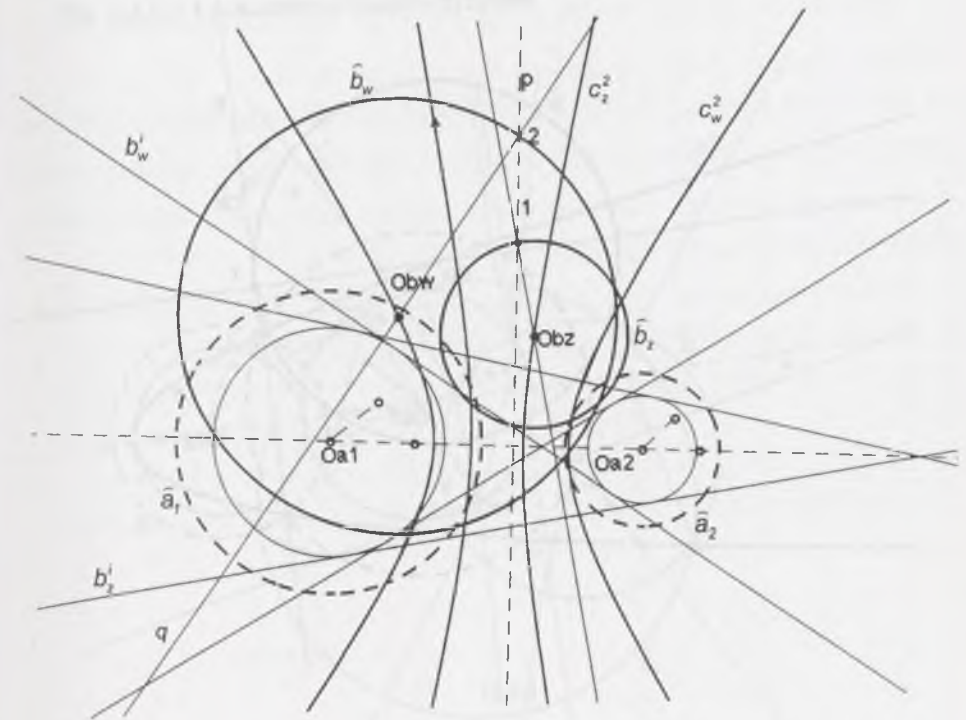
Konstrukcje szukanego okręgu \bar{b} mają zróżnicowany przebieg w zależności od charakteru miejsca geometrycznego c . Oto dwa przykłady takich konstrukcji:

II.2.4a. Środek O_b konstruowanego okręgu \bar{b} jest punktem hiperboli c^2 współtworzącej miejsce geometryczne c

Aby wyznaczyć długość promienia R_b szukanego okręgu \bar{b} , przy ustalonym na c^2 jego środku O_b , należy poprowadzić przez punkt O_b prostą q prostopadłą do prostej b' , odpowiadającej w inwersji I_k hiperboli c^2 i stycznej do okręgów \bar{a}_{ϕ_1} i \bar{a}_{ϕ_2} . Prosta q przecina oś potęgową p w punkcie należącym do szukanego okręgu.

Tak więc w opisanej sytuacji długość promienia okręgu \bar{b}_w o środku O_{bw} wynosi $R_b = |O_{bw}2|$, gdzie $2 = q \cap p$.

Przedstawiony przypadek jest zilustrowany na rys. II.2.20.

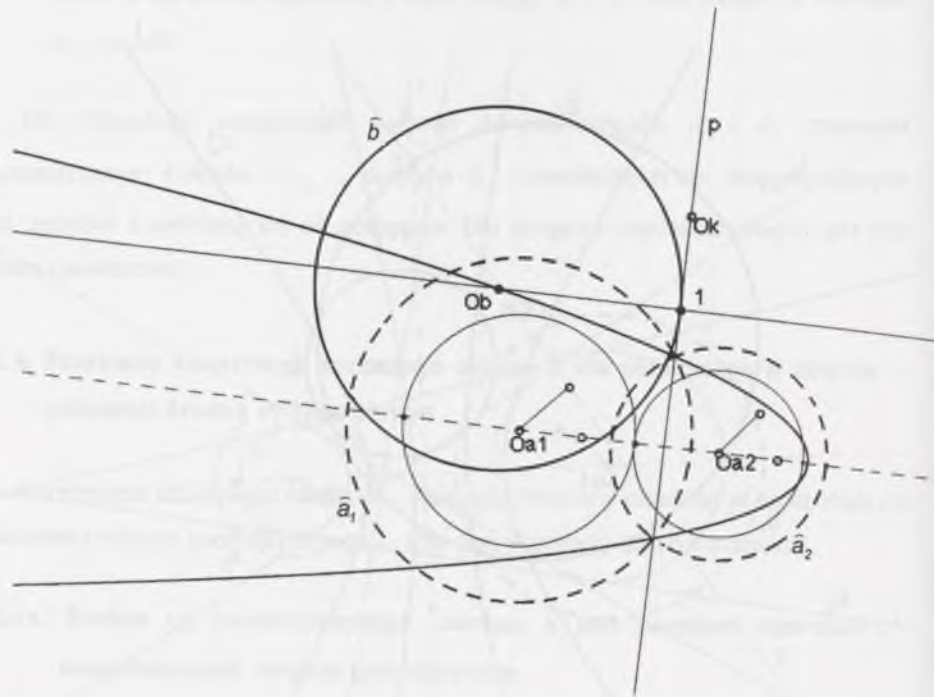


II.2.20

II.2.4b. Środek O_b konstruowanego okręgu \bar{b} jest punktem paraboli c^2 , wchodzącej w skład miejsca geometrycznego c

Aby wyznaczyć długość promienia R_b szukanego okręgu \bar{b} , o środku O_b należącym do paraboli c^2 , należy przez środek O_b poprowadzić prostą q prostopadłą do osi potęgowej p , okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_2 . Prosta ta przecina oś potęgową w punkcie 1, należącym do szukanego okręgu. Tak więc długość promienia $R_b = |O_b1|$.

Rysunek II.2.21 opisuje omówioną konstrukcję.



II.2.21

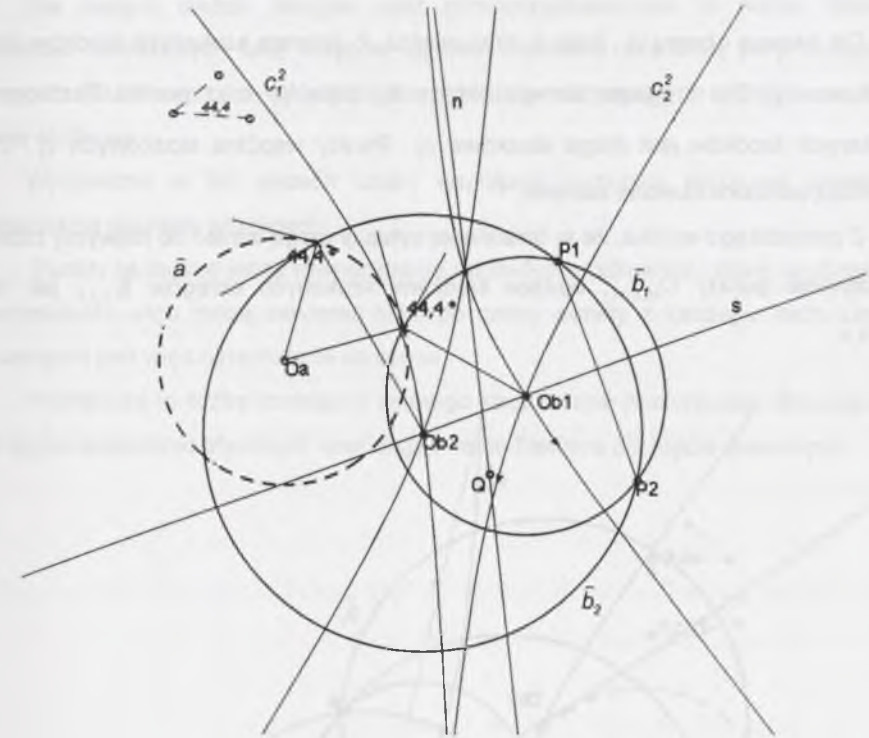
II.3. Okręgi przechodzące przez dwa wyróżnione punkty i przecinające dany, współpłaszczyznowy z nimi, okrąg pod kątami o zadanej mierze

Dla danego okręgu \bar{a} , miary kąta ϕ oraz każdego ze współpłaszczyznowych z \bar{a} wyróżnionych punktów P_1 lub P_2 , zbiorem szukanych środków okręgów $\bar{b}_{1,2}$, przecinających \bar{a} pod kątami o ustalonej mierze ϕ są stożkowe odpowiednio c_1^2 i c_2^2 . Punkty wspólne tych dwóch stożkowych spełniają założone warunki.

Teoretycznie takich punktów jest cztery. Wiadomo jednak, że szukane środki muszą leżeć na prostej s symetralnej odcinka $P_1 P_2$ jako cięciwy rozważanych

okręgów, a jednocześnie żadne trzy z nich jako punkty wspólne dwóch stożkowych nie mogą należeć do jednej prostej.

Na rys. II.3.1 pokazano omówiony przykład.



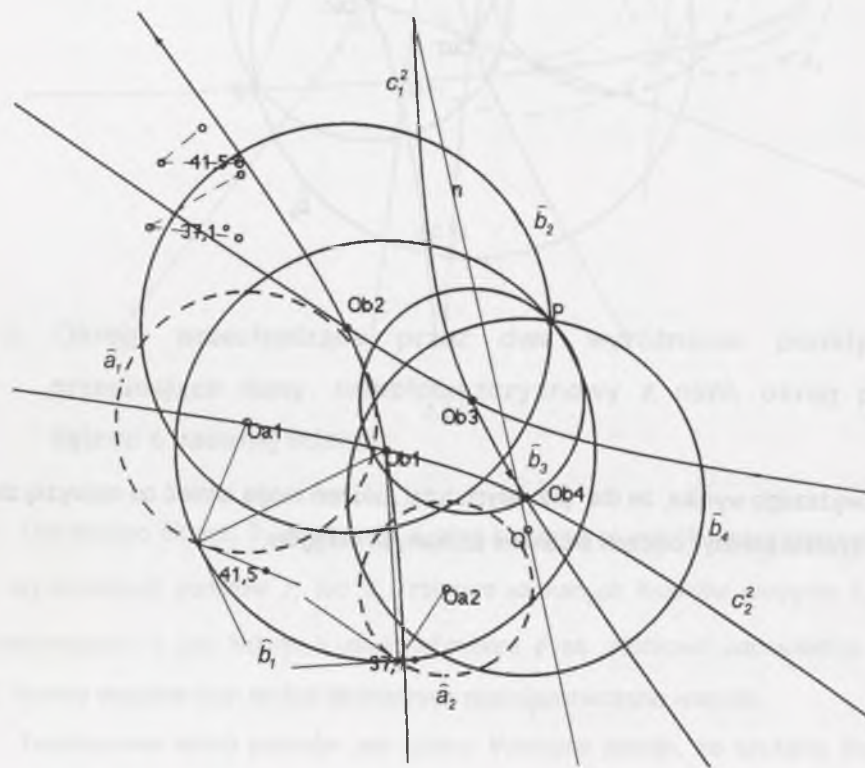
II.3.1

Z powyższego wynika, że dla przyjętych tutaj założeń mogą istnieć co najwyżej dwa rzeczywiste punkty, będące środkami szukanych okręgów.

II.4. Okręgi przechodzące przez zadany punkt i przecinające dwa dane okręgi pod kątami o zadanych miarach przy założeniu, że rozważane okręgi i wyróżniony punkt są współpłaszczyznowe

Dla danego okręgu \bar{a}_1 , kąta ϕ_1 oraz punktu P zbiorem szukanych środków jest stożkowa c_1^2 . Dla drugiego danego okręgu \bar{a}_2 , kąta ϕ_2 oraz punktu P zbiorem szukanych środków jest druga stożkowa c_2^2 . Punkty wspólne stożkowych c_1^2 i c_2^2 spełniają założone obecnie warunki.

Z powyższego wynika, że w omawianej sytuacji mogą istnieć co najwyżej cztery rzeczywiste punkty $O_{b1,2,3,4}$, będące środkami szukanych okręgów $\bar{b}_{1,2,3,4}$ jak na rys. II.4.



II.4

II.5. Okręgi przecinające trzy zadane współpłaszczyznowe okręgi pod kątami o zadanych miarach

Dla danych dwóch okręgów oraz przyporządkowanych im kątów zbiorem środków rozważanych tutaj okręgów są dwie stożkowe. Dla innej pary okręgów i przyporządkowanych im kątów zbiorem środków rozważanych okręgów są inne dwie stożkowe.

Wyróżnione w ten sposób cztery współpłaszczyznowe stożkowe posiadają szesnaście punktów wspólnych.

Punkty te muszą leżeć równocześnie na dwóch stożkowych, które są różne od pozostałych, więc mogą zawierać tylko po cztery punkty z każdej z nich. Liczba rozwiązań jest więc ograniczona do ośmiu.

Potwierdza to liczbę rozwiązań znanego zagadnienia Apoloniusza, dotyczącego okręgów wzajemnie stycznych oraz zagadnienie Steinera dla kątów dowolnych.

III. ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE SFER PRZECINAJĄCYCH SIĘ POD KĄTAMI O ZADANYCH MIARACH

W tym rozdziale przeanalizowano zależności zachodzące pomiędzy sferami, które posiadają rzeczywistą linię przenikania w postaci okręgu. W przypadku styczności rozpatrywanych sfer okrąg ten degeneruje się do punktu.

Przecinające się sfery zawierają ze sobą kąty, których miarę przyjmuje się jako znaną.

Jeżeli przyjąć, że omawiane tutaj sfery powstają przez obrót okręgów rozważanych w rozdziale II, można założyć, że krzywym stopnia drugiego, będącym miejscem geometrycznym środków okręgów, odpowiadać tutaj będą kwadryki obrotowe.

W całości tematu wyróżniono, podobnie jak w rozdziale II, dwa główne miejsca geometryczne, których znajomość umożliwi rozwiązaną większą liczbę przypadków.

III.1. Sfery przechodzące przez zadany punkt i przecinające daną sferę pod kątami o danej mierze

Dla przyjętych założeń udowodniono następujące twierdzenie:

Miejscem geometrycznym c środków sfer przechodzących przez zadany punkt i przecinających daną sferę pod kątami o danej mierze jest kwadryka [7].

Dla dowodu tego twierdzenia wykazano, że dowolna płaszczyzna α przecina szukany zbiór c w stożkowej c^2 .

Przyjęto sferę \bar{A} , punkt P , kąt o mierze ϕ oraz prostą m .

Należy wyznaczyć sferę \bar{B} o środku O_B na prostej m , przechodzącą przez punkt P , przecinającą sferę \bar{A} pod kątem o danej mierze ϕ .

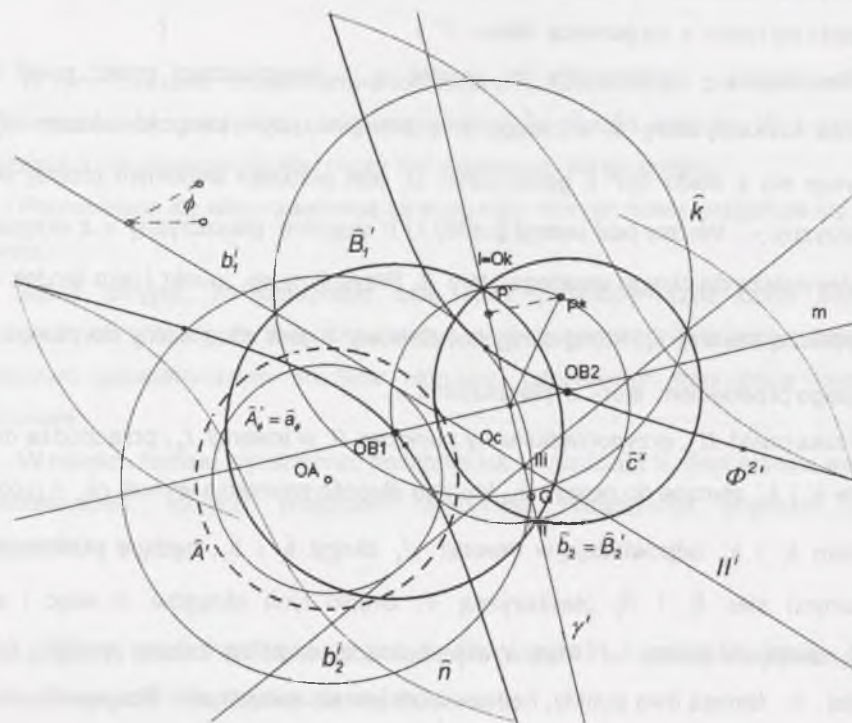
Środek O_A sfery \bar{A} oraz prosta m określają płaszczyznę π , która przecina sferę \bar{A} w okręgu wielkim \bar{a} , zaś szukaną sferę \bar{B} w okręgu wielkim \bar{b} .

(Ilustrację dowodu przedstawiono na rys III.1.1, korzystając z metody rzutów prostokątnych na rzutnię π , którą dla ułatwienia konstrukcji przyjęto jako płaszczyznę rysunku. Położenie w przestrzeni punktu P ustalono podając jego odległość od rzutni π za pomocą kątu P^* .)

Płaszczyzna γ prostopadła do prostej m i przechodząca przez punkt P przecina szukaną sferę \bar{B} w okręgu \hat{c} o promieniu $O_c P$ (długość odcinka $O_c P$ odczytuje się z kątu $O_c P^*$), gdzie punkt O_c jest punktem wspólnym prostej m i płaszczyzny γ . Weźmy pod uwagę punkty I i II wspólne płaszczyzny π z okręgiem \hat{c} , które należą do okręgu wielkiego sfery \bar{B} . Przyjmijmy np. punkt I jako środek O_k pomocniczej inwersji I_k , której okrąg podstawowy \hat{k} jest ortogonalny do okręgu \bar{a} , będącego przecięciem sfery \bar{A} płaszczyzną π .

Przez punkt II' , przyporządkowany punktowi II w inwersji I_k , przechodzą dwie proste b_1' i b_2' styczne do okręgu \hat{a}_ϕ , którego długość promienia wynosi $r\hat{a}_\phi = r_A \cos \phi$. Prostym b_1' i b_2' odpowiadają w inwersji I_k okręgi \bar{b}_1 i \bar{b}_2 , będące przecięciami szukanych sfer \bar{B}_1 i \bar{B}_2 płaszczyzną π . Środki tych okręgów, a więc i sfer \bar{B}_1 i \bar{B}_2 należą do prostej m . Można więc powiedzieć, że na każdej przyjętej w π prostej m istnieją dwa punkty, będące środkami szukanych sfer. Ponieważ jednak wybór prostej m , a więc i płaszczyzny $\pi(m, P)$ jest całkiem dowolny, więc ostatnie spostrzeżenie upoważnia do wniosku, że każda płaszczyzna przecina zbiór c środków rozważanych sfer w stożkowej. Zbiór ten jest więc kwadryką Φ^2 .

Rysunek III.1.1 przedstawia ilustrację przeprowadzonego rozumowania.



III.1.1

Rodzaj kwadryki Φ^2 zależy od położenia danego punktu P względem danej sfery \bar{A} oraz miary kąta ϕ , ale w przeprowadzonym dowodzie wykazano, że każda prosta posiada ze zbiorem $c = \Phi^2$ co najwyżej dwa punkty wspólne, więc nie może to być kwadryka prostokreślna. Tak więc szukany miejscem Φ^2 środków sfer $\bar{B}_{1,2}$, przecinających daną sferę \bar{A} pod kątem o zadanej mierze ϕ i przechodzących przez wyróżniony punkt P , może być hiperboloida dwupowłokowa obrotowa, paraboloida obrotowa, elipsoida obrotowa lub sfera. Ośią każdej z tych powierzchni jest prosta $l = O_A P$.

III.1.1. Rodzaj kwadryki Φ^2 w zależności od położenia punktu P względem danej sfery \bar{A} oraz od miary kąta ϕ

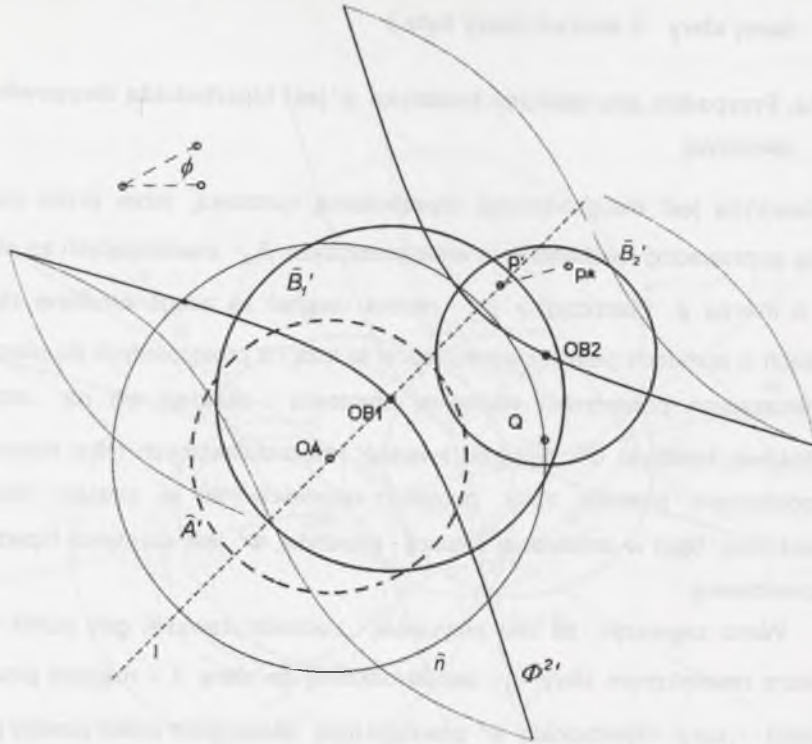
III.1.1a. Przypadek, gdy szukana kwadryka Φ^2 jest hiperboloidą dwupowłokową obrotową

Kwadryka jest dwupowłokową hiperboloidą obrotową, jeżeli przez punkt P można poprowadzić nieskończenie wiele płaszczyzn $\beta_{1,2}$ zawierających ze sferą \bar{A} kąty o mierze ϕ . Płaszczyzny $\beta_{1,2}$ można uważać za zdegenerowane sfery o środkach w punktach niewłaściwych. Środki te leżą na prostopadłych do płaszczyzn $\beta_{1,2}$ tworzących powierzchni stożkowej obrotowej i składają się na stożkową niewłaściwą kwadryki Φ^2 . Spośród kwadryk nieprostokreślnych tylko hiperboloidą dwupowłokową posiada zbiór punktów niewłaściwych w postaci stożkowej niewłaściwej. Stąd w omawianej sytuacji kwadryka Φ^2 jest obrotową hiperboloidą dwupowłokową.

Warto zauważyć, że taki przypadek zachodzi zawsze, gdy punkt P jest punktem zewnętrznym sfery \bar{A}_ϕ , współśrodkowej ze sferą \bar{A} i mającej promień o długości $r_A \cos \phi$. Hiperboloida Φ^2 powstaje tutaj przez obrót wokół prostej $l = O_A P$ hiperboli określonej jak w przypadku p.II.1.1a.

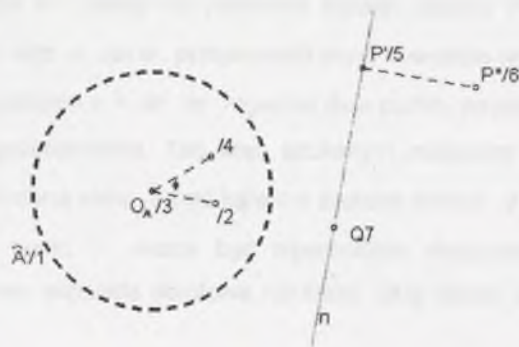
Na rys.III.1.2 przedstawiono rzuty prostokątne na płaszczyznę rysunku: sfery \bar{A} , punktu P oraz szukanego zbioru środków, czyli omawianej hiperboloidy Φ^2 .

Ilustracją do omówionego przypadku jest rys. III.1.2.



III.1.2

Zapis rozważanej kwadryki w rzucie prostokątnym na płaszczyznę rysunku można uzyskać za pomocą „mac22_m”. Założenia do tej makrokonstrukcji pokazano na rys.III.1.2m.

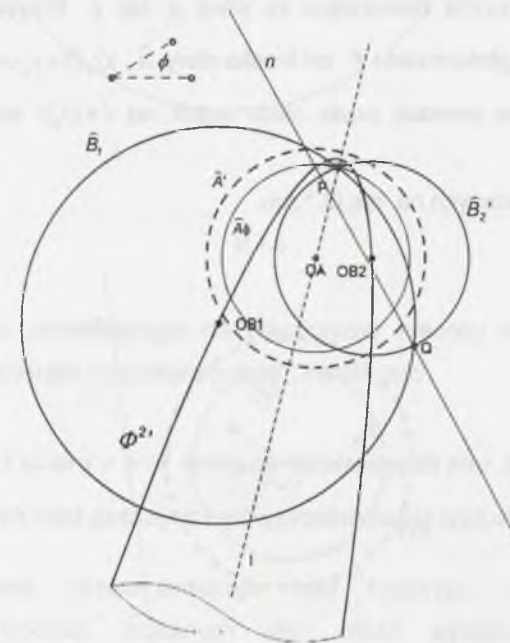


III.1.2m

III.1.1b. Przypadek, gdy rozważana kwadryka Φ^2 jest paraboloidą obrotową

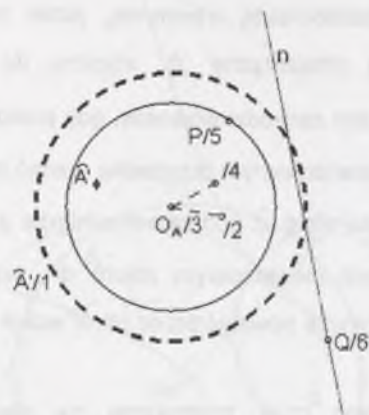
Kwadryka Φ^2 jest **paraboloidą obrotową**, jeżeli przez punkt P można poprowadzić tylko jedną płaszczyznę β styczną do sfery \bar{A}_ϕ , czyli gdy $|O_A P| = r_A \cos \phi$. Przypadek ten zachodzi wówczas, gdy punkt P należy do sfery \bar{A}_ϕ . Płaszczyznę β można w analizowanym przypadku uznać za zdegenerowaną sferę z rodziny $\bar{B}_{1,2}$, przecinającą sferę \bar{A} pod kątem o mierze ϕ . Niewłaściwy środek tej sfery jest jedynym punktem niewłaściwym zbioru Φ^2 , więc Φ^2 to paraboloida obrotowa. Paraboloida Φ^2 może powstać przez obrót wokół prostej $l = O_A P$, paraboli rozważanej w p.II.1.1b.

Na rys.III.1.3 pokazano rzuty prostokątne na płaszczyznę rysunku figur wyjściowych \bar{A} i P , szukanych $\bar{B}_{1,2}$, jak i paraboloidy Φ^2 , będącej zbiorem ich środków. Rysunek ten można wygenerować za pomocą „mac23_m”.



III.1.3

Założenia do tej makrokonstrukcji pokazuje rys.III.1.3m.



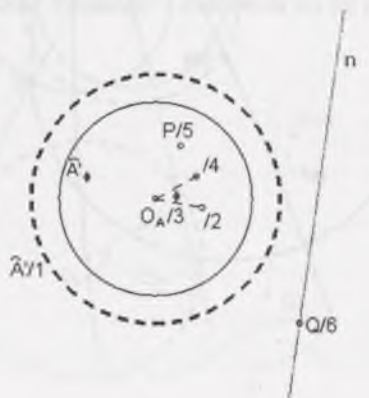
III.1.3m

III.1.1c. Przypadek, gdy analizowana kwadryka Φ^2 jest elipsoidą obrotową

Kwadryka jest **elipsoidą obrotową**, jeżeli przez punkt P nie przechodzi żadna rzeczywista płaszczyzna zawierająca ze sferą \bar{A} kąt ϕ . Przypadek ten zachodzi wówczas, gdy odległość punktu P od środka sfery \bar{A} , $|O_A P| < r_A \cos \phi$.

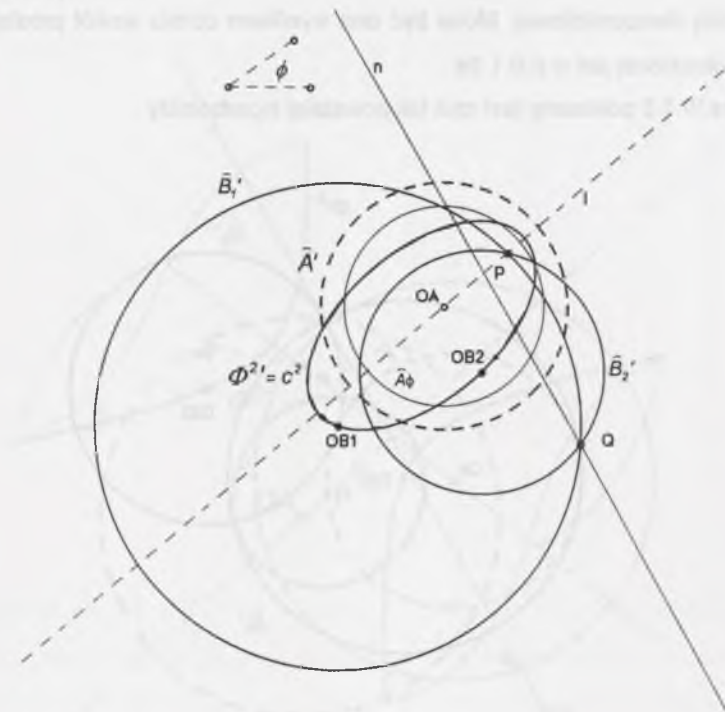
Elipsoida Φ^2 może powstać przez obrót wokół osi $l = O_A P$ elipsy omawianej w p.II.1.1a.

Dla założeń podanych na rys.III.1.4m,



III.1.4m

używając „mac24_mc” uzyskuje się rzut prostokątny na płaszczyznę elipsoidy Φ^2 przedstawiony na rys.III.1.4.



III.1.4

Rysunek rzutu prostokątnego na płaszczyznę rysunku kwadryki Φ^2 można uzyskać również stosując makrokonstrukcję „mac24_mc”.

III.1.2. Właściwości zbioru $c = \Phi^2$ środków rozwiązanych sfer $\bar{B}_{1,2}$ dla

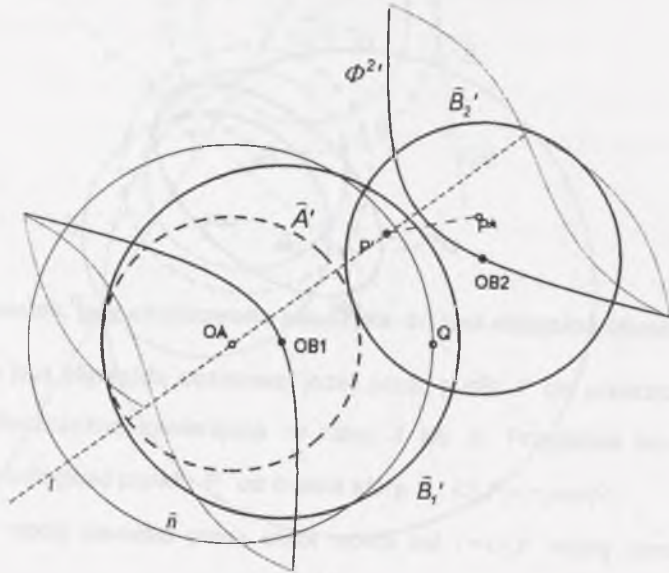
szczególnych miar zadanych kątów przecięcia się tych sfer z daną sferą \bar{A}

Dla szczególnej miary zadanego kąta kwadryka, będąca miejscem geometrycznym środków szukanych sfer, może występować w postaci zdegenerowanej.

III.1.2a. Charakterystyka zbioru Φ^2 w przypadku, gdy $\phi=0^\circ$

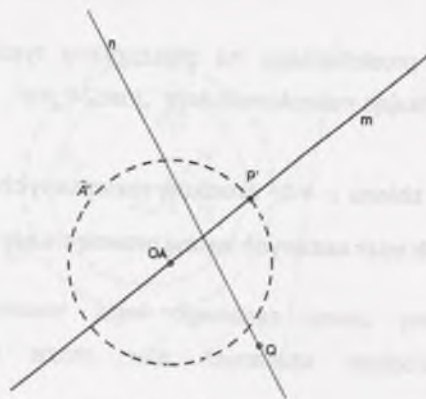
Dla punktu P leżącego na zewnątrz sfery \bar{A} szukana kwadryka Φ^2 jest obrotową hiperboloidą dwupowłokową. Może być ona wynikiem obrotu wokół prostej $l=O_A P$ hiperboli określonej jak w p.II.1.2a.

Na rys.III.1.5 pokazany jest rzut tak powstałej hiperboloidy.



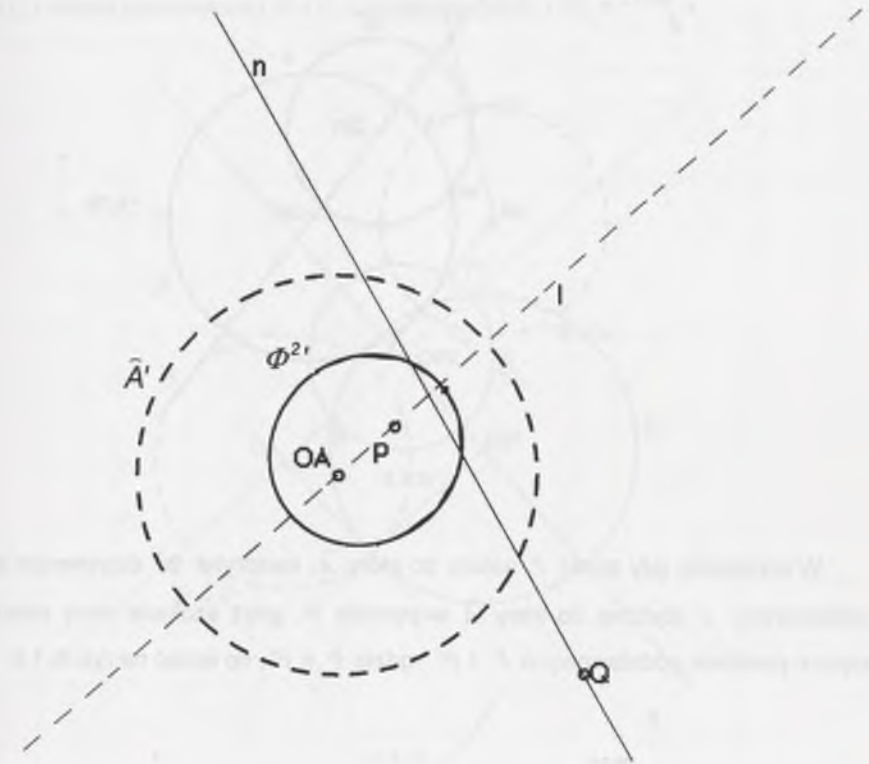
III.1.5

Dla punktu P leżącego na sferze \bar{A} szukana kwadryka Φ^2 degeneruje się do prostej $m=O_A P$, co widać na rys.III.1.6.



III.1.6

Dla punktu P leżącego wewnątrz sfery \bar{A} szukana kwadryka Φ^2 jest elipsoidą obrotową i może być ona wynikiem obrotu elipsy określonej jak w p.II.1.2a i pokazanej na rys.III.1.7.

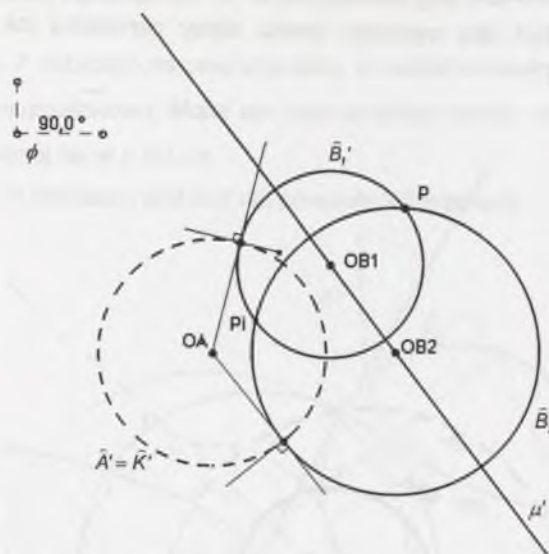


III.1.7

III.1.2b. Charakterystyka zbioru Φ^2 , $\phi=90^\circ$

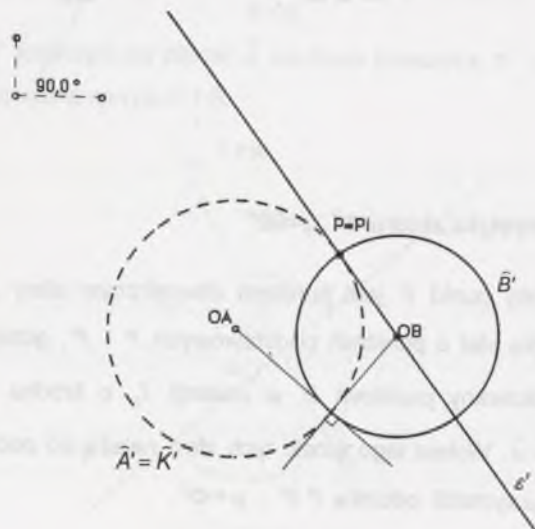
Gdy wyróżniony punkt P jest punktem zewnętrznym sfery \bar{A} , szukane sfery $\bar{B}_{1,2}$ należą do pęku sfer o punktach podstawowych P i P' , gdzie punkt P' jest to punkt przyporządkowany punktowi P w inwersji I_k o środku $O_k=O_A$ i sferze podstawowej $\bar{K}=\bar{A}$. Wobec tego środki tych sfer należą do podstawy pęku, która jest płaszczyzną μ symetrii odcinka PP' ; $\mu=\Phi^2$.

ilustruje ten przypadek rys.III.1.8.



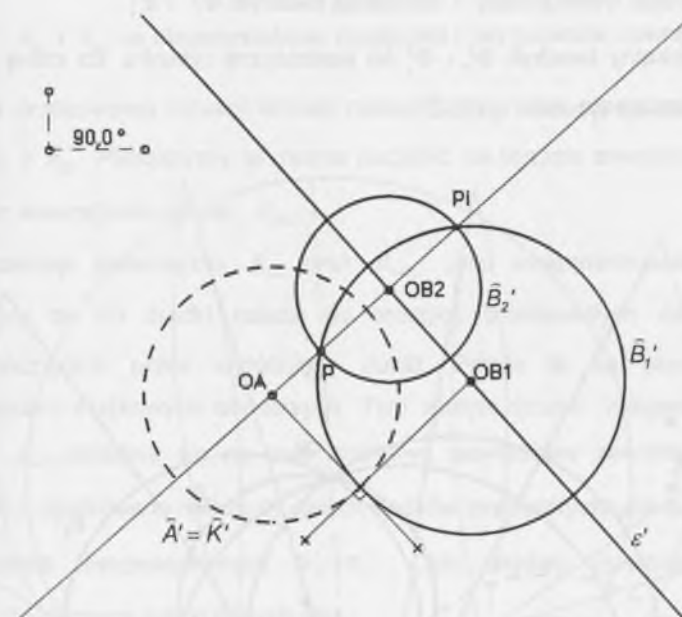
III.1.8

W przypadku gdy punkt P należy do sfery \bar{A} , kwadryka Φ^2 degeneruje się do płaszczyzny ε stycznej do sfery \bar{A} w punkcie P , gdyż szukane sfery należą do pęku o punktach podstawowych P i P' , gdzie $P = P'$, co widać na rys.III.1.9.



III.1.9

Dla punktu P leżącego wewnątrz sfery \bar{A} szukanym miejscem geometrycznym jest płaszczyzna ε , będąca podstawą pęku sfer o punktach podstawowych P i P' , gdzie punkt P' jest punktem przyporządkowanym punktowi P w inwersji I_k o środku $O_k = O_A$ i sferze podstawowej $\bar{K} = \bar{A}$, co ilustruje rys.III.1.10.



III.1.10

III.2. Właściwości zbioru środków sfer przecinających dwie dane sfery pod kątami o zadanych miarach

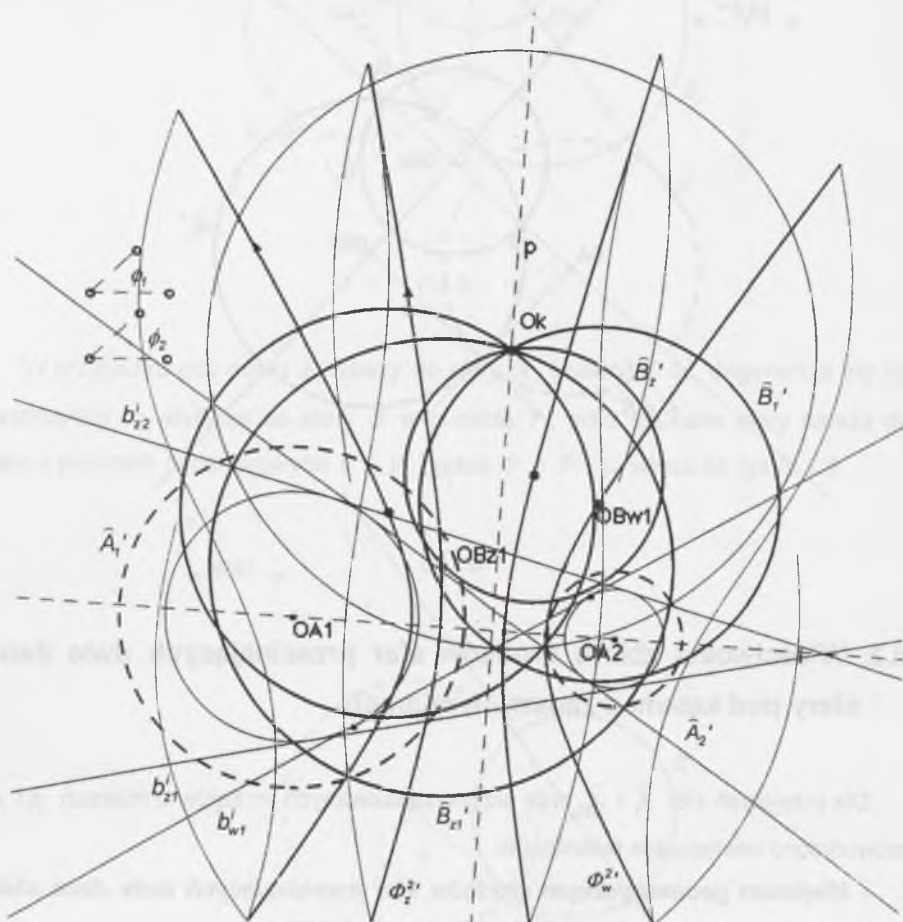
Dla przyjętych sfer \bar{A}_1 i \bar{A}_2 oraz przyporządkowanych im kątów o miarach ϕ_1 i ϕ_2 udowodniono następujące twierdzenie:

- Miejscem geometrycznym środków sfer przecinających dwie dane sfery pod kątami o zadanych miarach są dwie kwadryki [16].

Dowód oparto na twierdzeniu dotyczącym położenia środków okręgów przecinających dwa dane okręgi pod kątami o zadanych miarach (p.II.2.1).

Prosta l łącząca środki danych okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_2 jest równocześnie osią stożkowych c_1^2 i c_2^2 , stanowiących miejsce geometryczne środków szukanych okręgów. Dane sfery \bar{A}_1 i \bar{A}_2 przyjęto jako okręgi \bar{a}_1 i \bar{a}_2 obrócone wokół prostej l . Tym samym omawiane w p.II.2.1 stożkowe c_1^2 i c_2^2 jako zbiory środków szukanych okręgów po obrocie wokół prostej l zakreślają kwadryki Φ_1^2 i Φ_2^2 .

Rzut prostokątny kwadryk Φ_w^2 i Φ_z^2 na płaszczyznę rysunku, do której należy prosta l przedstawia rysunek rys.III.2.1.



III.2.1

III.2.1. Rodzaj kwadryk Φ_1^2 i Φ_2^2 w zależności od wzajemnego położenia sfer

\bar{A}_{ϕ_1} i \bar{A}_{ϕ_2} , współśrodkowych z danymi sferami \bar{A}_1 i \bar{A}_2 o promieniach $r_{A1} \cos \phi_1$ i $r_{A2} \cos \phi_2$

III.2.1a. Właściwości kwadryk Φ_w^2 i Φ_z^2 , gdy kąty $\phi_{1,2} \neq 0^\circ$ i $\phi_{1,2} \neq 90^\circ$, a sfery

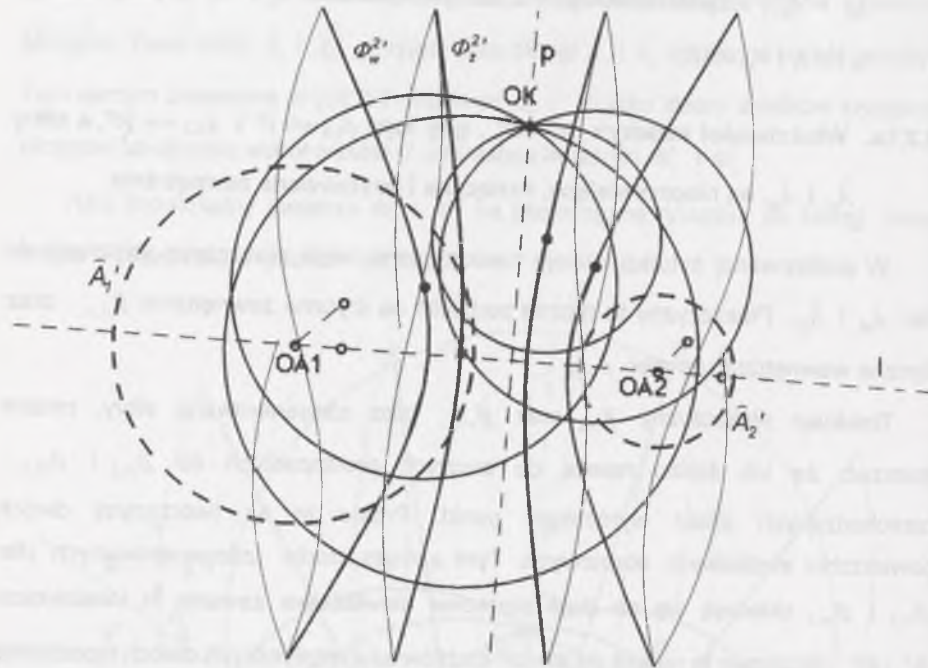
\bar{A}_{ϕ_1} i \bar{A}_{ϕ_2} są nieprzystające, rozłączne i usytuowane zewnętrznie

W analizowanej sytuacji istnieje nieskończenie wiele płaszczyzn stycznych do sfer \bar{A}_{ϕ_1} i \bar{A}_{ϕ_2} . Płaszczyzny te można podzielić na styczne zewnętrznie $\beta_{z1,2}$ oraz styczne wewnętrznie do sfer $\beta_{w1,2}$.

Traktując płaszczyzny $\beta_{z1,2}$ oraz $\beta_{w1,2}$ jako zdegenerowane sfery, można dostrzec, że ich środki należą do prostych prostopadłych do $\beta_{z1,2}$ i $\beta_{w1,2}$, przechodzących przez wyróżniony punkt. Proste te są tworzącymi dwóch powierzchni stożkowych obrotowych. Tym samym środki zdegenerowanych sfer $\beta_{z1,2}$ i $\beta_{w1,2}$ składają się na dwie stożkowe niewłaściwe zawarte w kwadrykach Φ_w^2 i Φ_z^2 . Stożkowe te należą do dwóch stożków asymptotycznych dwóch hiperboloid obrotowych dwupowłokowych Φ_w^2 i Φ_z^2 . Ośią obydwu hiperboloid jest prosta $l = O_{A1}O_{A2}$, łącząca środki danych sfer.

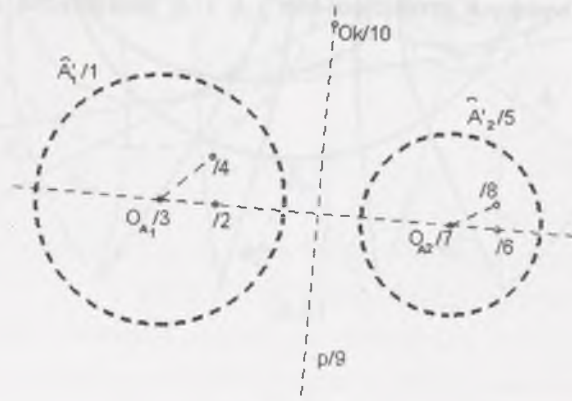
Rozważane hiperboloidy zakreślone są w trakcie obrotu wokół prostej $l = O_{A1}O_{A2}$ dwóch hiperbol c_1^2 i c_2^2 wyznaczonych w sposób podany w p.II.2.1a dla dwóch okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_2 będących przekrojem sfer \bar{A}_1 i \bar{A}_2 płaszczyzną π , zawierającą prostą l .

Na rys. III.2.2 przedstawiono omówioną sytuację.



III.2.2

Przy założeniach pokazanych na rys. III.2.2m rysunek III.2.2, zawierający rzuty prostokątne na płaszczyznę rysunku obu hiperboloid, można otrzymać korzystając z „mac13_mc”.



III.2.2m

III.2.1b. Własności kwadryk Φ_1^2 i Φ_2^2 gdy kąty $\phi_{1,2} \neq 0^\circ$ i $\phi_{1,2} \neq 90^\circ$, zaś sfery

\bar{A}_1 i \bar{A}_2 są nieprzystające i styczne zewnętrznie

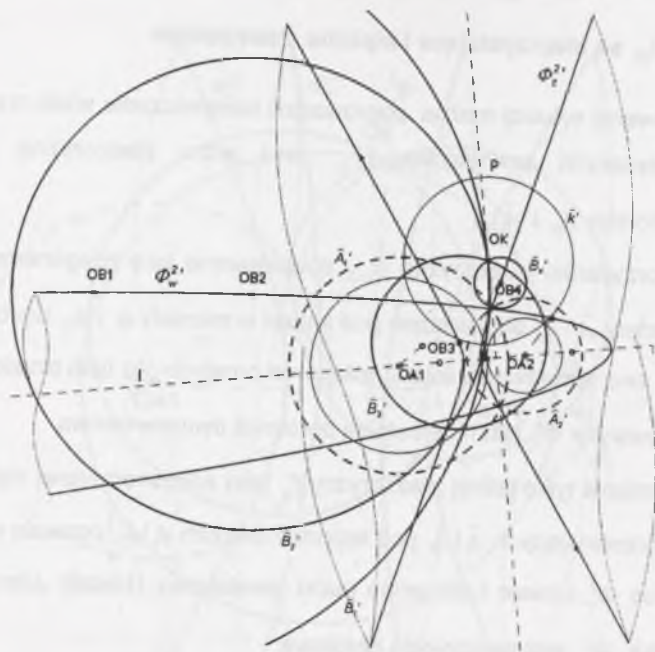
W analizowanej sytuacji można poprowadzić nieskończenie wiele rzeczywistych płaszczyzn stycznych zewnętrznie $\beta_{z1,2}$ oraz jedną płaszczyznę β_w styczną wewnętrzną do sfer \bar{A}_1 i \bar{A}_2 .

W takim przypadku płaszczyzny $\beta_{z1,2}$ potraktowane jako zdegenerowane sfery, przecinające sfery \bar{A}_1 i \bar{A}_2 odpowiednio pod kątami o miarach ϕ_1 i ϕ_2 , wprowadzają do kwadryki Φ_1^2 swe niewłaściwe środki, leżące na prostych do nich prostopadłych. W takim razie kwadryka Φ_1^2 jest hiperboloidą obrotową dwupowłokową.

Z kolei istnienie tylko jednej płaszczyzny β_w jako zdegenerowanej sfery w drugiej rodzinie sfer przecinających \bar{A}_1 i \bar{A}_2 pod kątami o miarach ϕ_1 i ϕ_2 , pozwala wnioskować, że w kwadryce Φ_2^2 istnieje tylko jeden punkt niewłaściwy (środek „sfery” β_w). Tak więc kwadryka Φ_2^2 jest paraboloidą obrotową.

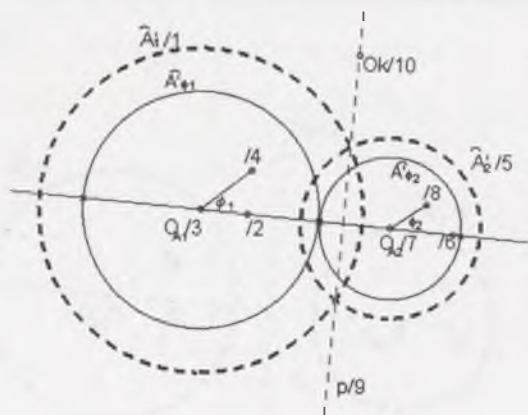
Ośią obu powierzchni jest prosta $l = O_{A1}O_{A2}$, zaś obie te powierzchnie są zakreślone w trakcie obrotu wokół osi stożkowych c_w^2 i c_z^2 wyznaczonych jak w p. II.2.1b.

Na rys.III..2.3 przedstawiono rzut obu powyższych kwadryk.



III.2.3

Obrazy rozważanych kwadryk w rzucie prostokątnym na płaszczyznę rysunku π , gdy prosta l jest równoległa do π , można wygenerować wykorzystując „mac13_mz” i „mac14_mc” dla założeń pokazanych na rys.III.2.3m.



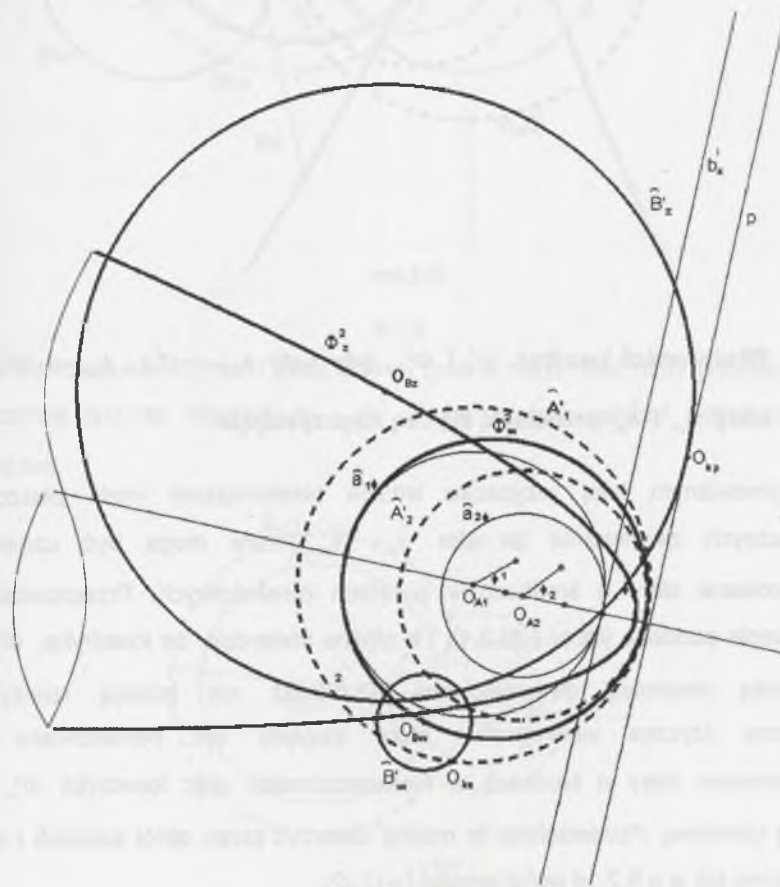
III.2.3m

III.2.1c. Właściwości kwadryk Φ_w^2 i Φ_z^2 , gdy kąty $\phi_{1,2} \neq 0^\circ$ i $\phi_{1,2} \neq 90^\circ$, zaś sfery

\bar{A}_{ϕ_1} i \bar{A}_{ϕ_2} są styczne wewnętrznie

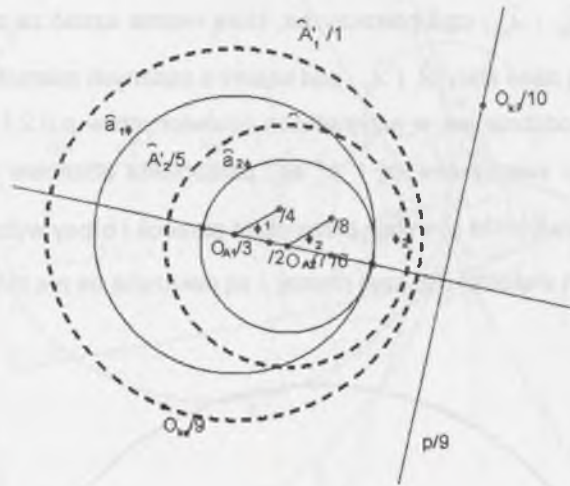
W analizowanym obecnie przypadku istnieje jedna rzeczywista płaszczyzna styczna do sfer \bar{A}_{ϕ_1} i \bar{A}_{ϕ_2} , czyli płaszczyzna, którą można uznać za zdegenerowaną sferę przecinającą dane sfery \bar{A}_1 i \bar{A}_2 pod kątami o zadanych miarach ϕ_1 i ϕ_2 .

Rozumując podobnie jak w przypadkach omówionych w p.II.2.1a i b stwierdza się, że szukany kwadrykami Φ_w^2 i Φ_z^2 są paraboloida obrotowa Φ_z^2 i elipsoida obrotowa Φ_w^2 . Kwadryki te powstają przez obrót paraboli i elipsy wyznaczonej jak w p.II.2.1c wokół ich wspólnej osi, czyli prostej i są pokazane na rys.III.2.4.



III.2.4

Założenia do „mac14_mc” i „mac15_mw”, prowadzących do zapisu na rzutni zjednoczonej z płaszczyzną rysunku rzutów kwadryk Φ_w^2 i Φ_z^2 , podano na rys.III.2.4m.

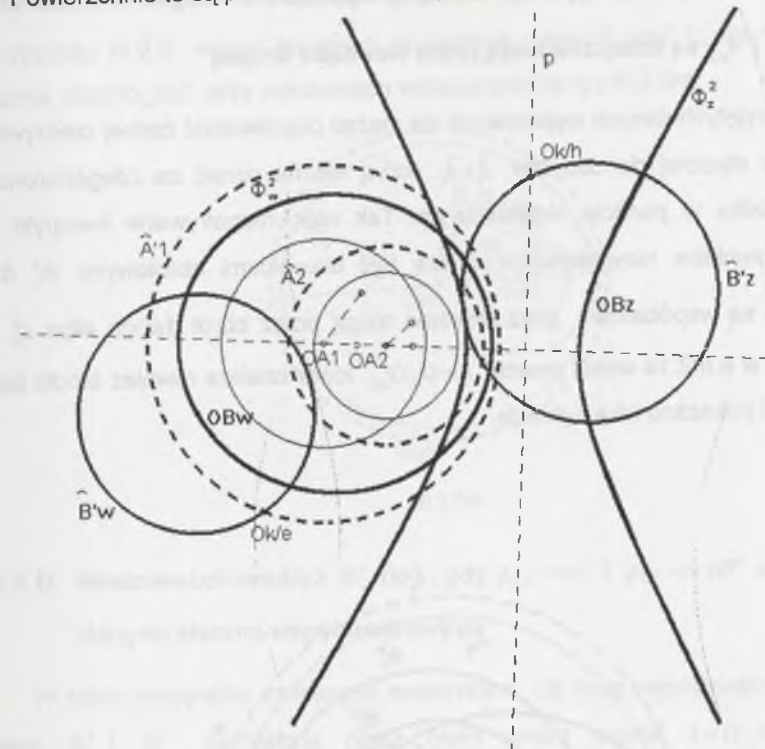


III.2.4m

III.2.1d. Właściwości kwadryk Φ_w^2 i Φ_z^2 , gdy kąty $\phi_{1,2} \neq 0^\circ$ i $\phi_{1,2} \neq 90^\circ$, zaś sfery \bar{A}_{ϕ_1} i \bar{A}_{ϕ_2} przecinają się i są nieprzystające

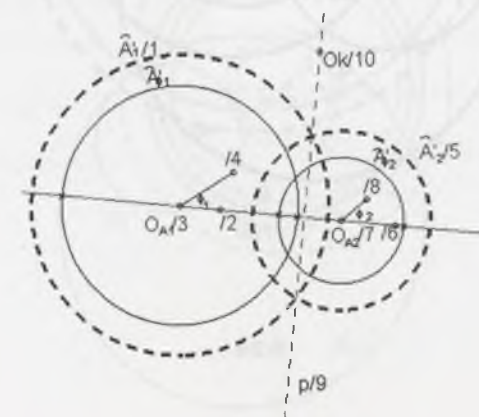
W omawianym tutaj przypadku istnieje nieskończenie wiele płaszczyzn $\beta_{z1,2}$ stycznych zewnętrznie do sfer \bar{A}_{ϕ_1} i \bar{A}_{ϕ_2} , które mogą być uznane za zdegenerowane sfery o środkach w punktach niewłaściwych. Przeprowadzając rozumowanie podobne jak w p.III.2.1a i b można stwierdzić, że kwadryka Φ_z^2 jest hiperboloidą obrotową dwupowłokową. Ponieważ nie istnieją rzeczywiste płaszczyzny styczne wewnętrznie, które mogłyby być potraktowane jako zdegenerowane sfery o środkach w nieskończoności, więc kwadryka Φ_w^2 jest elipsoidą obrotową. Powierzchnie te można utworzyć przez obrót paraboli i elipsy wyznaczonej jak w p.II.2.1d wokół prostej $l = O_{A1}O_{A2}$.

Powierzchnie te są przedstawione na rys.III.2.5.



III.2.5

Za pomocą „mac13_mz” i „mac15_mw” można narysować rzuty prostokątne na płaszczyznę rysunku kwadryk Φ_w^2 i Φ_z^2 , korzystając z założeń pokazanych na rys.III.2.5m.

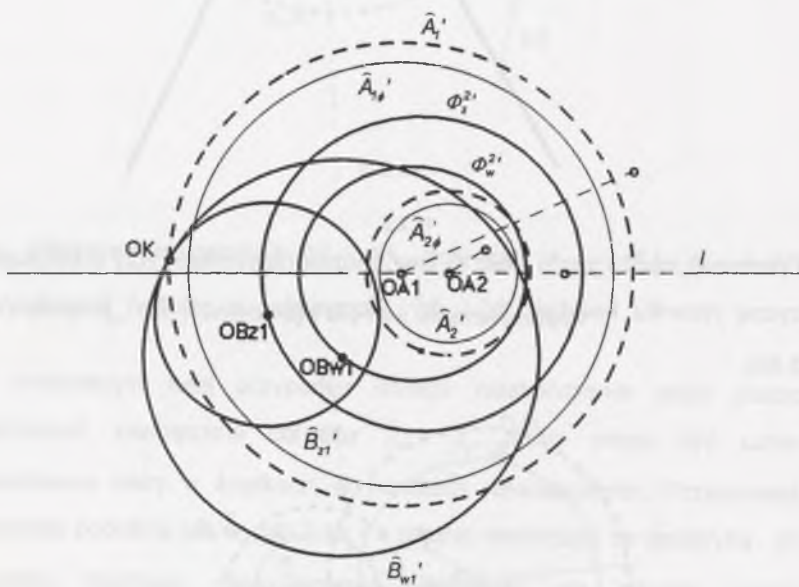


III.2.5m

III.2.1e. Właściwości kwadryk Φ_w^2 i Φ_z^2 , gdy kąty $\phi_{1,2} \neq 0^\circ$ i $\phi_{1,2} \neq 90^\circ$, zaś sfery

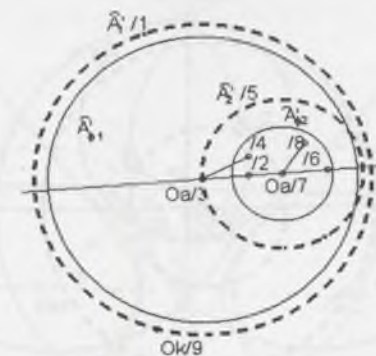
\bar{A}_{ϕ_1} i \bar{A}_{ϕ_2} są rozłączne i leżą jedna wewnątrz drugiej

Przy przyjętych danych wyjściowych nie można poprowadzić żadnej rzeczywistej płaszczyzny stycznej do obu sfer \bar{A}_1 i \bar{A}_2 , którą można uznać za zdegenerowaną sferę, o środku w punkcie niewłaściwym. Tak więc rozpatrywane kwadryki nie zawierając punktów niewłaściwych muszą być elipsoidami obrotowymi Φ_w^2 Φ_z^2 . Kwadryki te są współosiowe, gdyż powstać mogą przez obrót dwóch elips c_w^2 c_z^2 określonych w p.II.2.1e wokół prostej $l = O_{A1}O_{A2}$, która zawiera również środki elips. Na rys.III.2.6 pokazano taką sytuację.



III.2.6

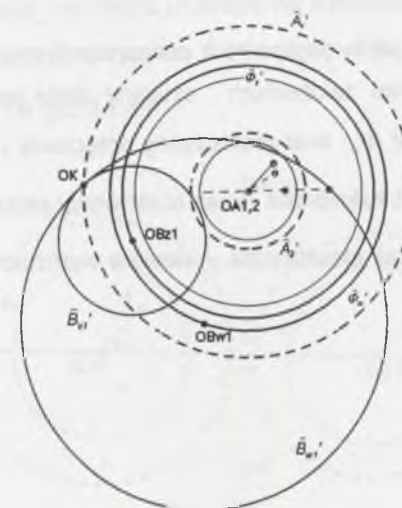
Rzuty prostokątne na płaszczyznę rysunku kwadryk Φ_w^2 i Φ_z^2 , przedstawionych na rysunku III.2.6, można otrzymać za pomocą „mac15_mw” i „mac115_mz” lub łącznie „mac15_mc” przy założeniach wskazanych na rys.III.2.6m.



III.2.6m

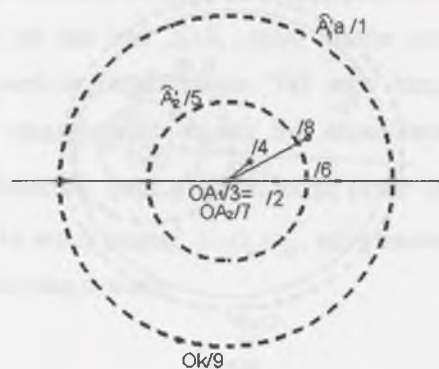
III.2.1f. Właściwości kwadryk Φ_w^2 i Φ_z^2 , gdy $\phi_{1,2} \neq 0^\circ$ i $\phi_{1,2} \neq 90^\circ$ a \bar{A}_{ϕ_1} i \bar{A}_{ϕ_2} są różnymi sferami współśrodkowymi

W takim przypadku szukanymi kwadrykami są dwie współśrodkowe z danymi sfery Φ_w^2 i Φ_z^2 zakreślone przez obrót wokół prostej $l = O_{A1}O_{A2}$, okręgów wyznaczonych jak w p.II.2.1f i przedstawionych na rys.III.2.7.



III.2.7

Makrokonstrukcje „mac15_mw” i „mac15_mz” lub łącznie „mac15_mc” określają długość promieni sfer $\tilde{\Phi}_1$ i $\tilde{\Phi}_2$ przy założeniach podanych na rys.III.2.7m.

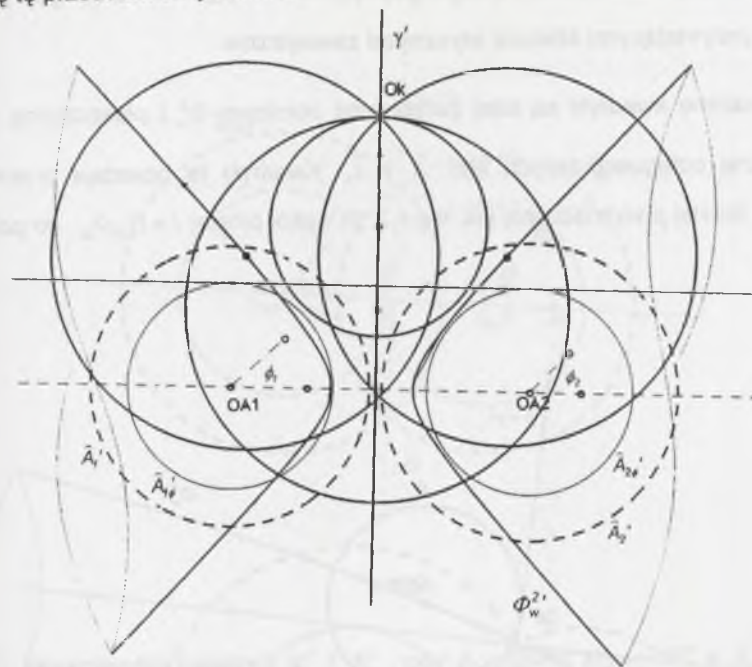


III.2.7m

III.2.1g. Właściwości kwadryk Φ_w^2 i Φ_z^2 , gdy kąty $\phi_{1,2} \neq 0^\circ$ i $\phi_{1,2} \neq 90^\circ$, a $\tilde{A}_{\phi 1}$ i $\tilde{A}_{\phi 2}$ są rozłącznymi, przystającymi sferami, położonymi zewnątrz względem siebie

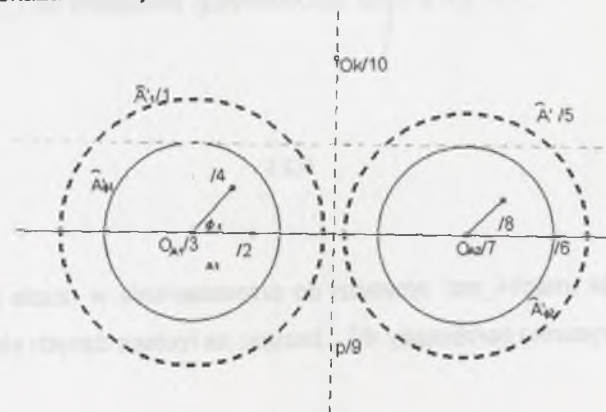
Rozumując podobnie jak w poprzednich podpunktach można dojść do wniosku, że przy przyjętych obecnie założeniach szukany zbiór jest sumą hiperboloidy obrotowej dwupowłokowej Φ_w^2 oraz płaszczyzny potęgowej γ danych sfer \tilde{A}_1 i \tilde{A}_2 . Hiperboloida Φ_w^2 może być zakreślona przez obrót wokół prostej $l = O_{A1}O_{A2}$ hiperboli c_w^2 ustalonej w p.II.2.1g, zaś płaszczyzna γ zawiera wyróżnioną tam prostą p i jest prostopadła do prostej l .

Sytuację tę przedstawia rys.III.2.8.



III.2.8

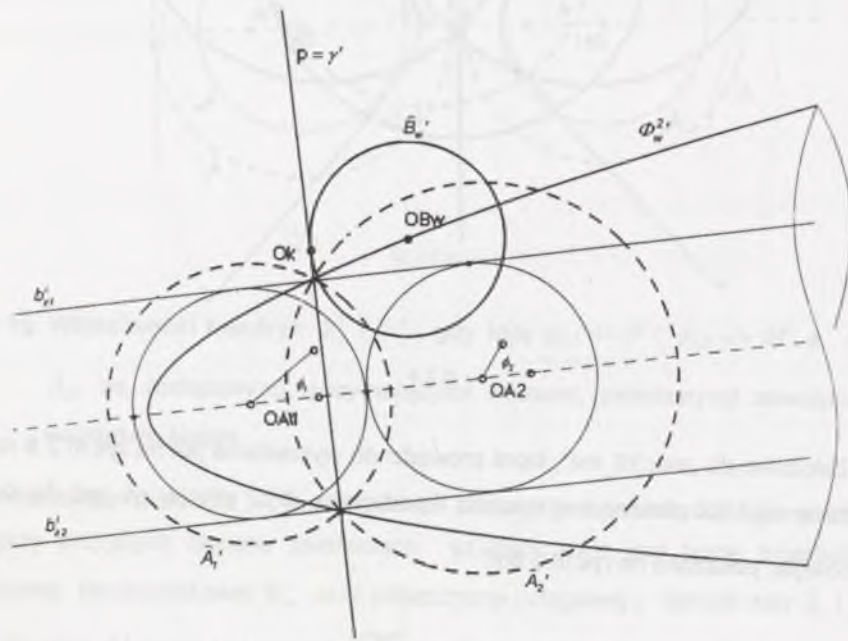
Założenia do „mac16_mz”, która prowadzi do wykreślenia jak na rys.III.2.8 rzutu prostokątnego na płaszczyznę rysunku hiperboloidy Φ_w^2 , gdy jej oś jest do rzutni równoległa, pokazano na rys.III.2.8m.



III.2.8m

III.2.1h. Rodzaj kwadryk Φ_w^2 i Φ_z^2 , gdy $\phi_{1,2} \neq 0^\circ$ i $\phi_{1,2} \neq 90^\circ$, a \bar{A}_{p1} i \bar{A}_{p2} są przystającymi sferami stycznymi zewnątrz

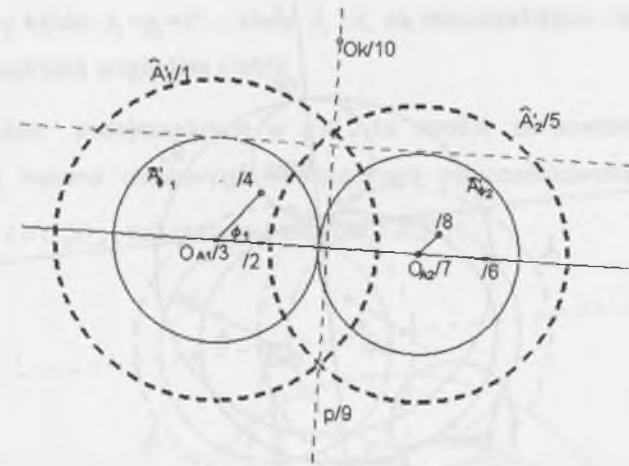
Rozważane kwadryki są tutaj paraboloidą obrotową Φ_w^2 i płaszczyzną γ , jako płaszczyzną potęgową danych sfer \bar{A}_1 i \bar{A}_2 . Kwadryki te powstają przez obrót paraboli i prostej p wyznaczonej jak w p.II.2.1h wokół prostej $l = O_{A1}O_{A2}$, co pokazuje rys.III.2.9.



III.2.9

Makrokonstrukcja „mac14_mc” prowadzi do przedstawienia w rzucie prostokątnym na płaszczyznę rysunku paraboloidy Φ_w^2 , bazując na rzutach danych sfer \bar{A}_1 i \bar{A}_2 .

Sfery \bar{A}_1 i \bar{A}_2 jako założenia do makrokonstrukcji pokazano rys.III.2.9m.

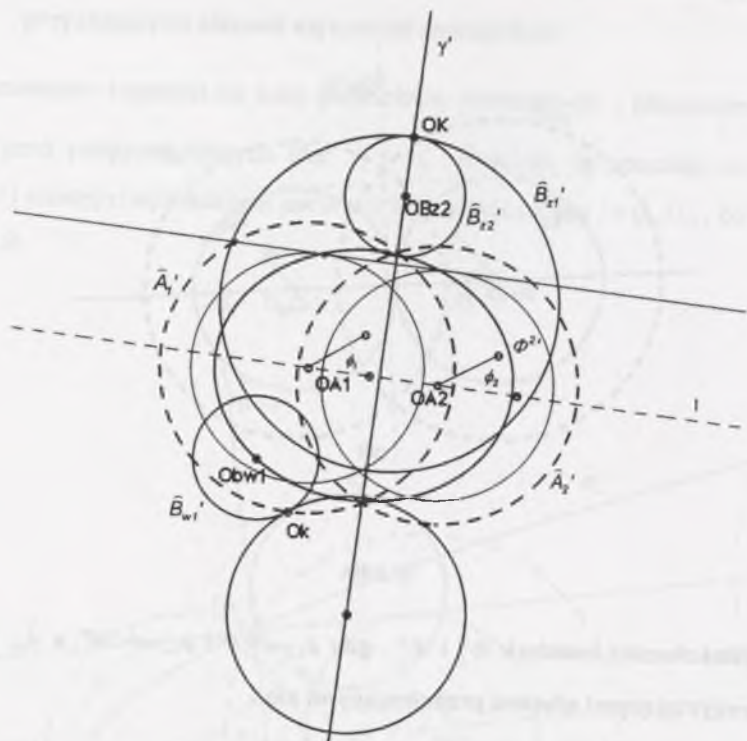


III.2.9m

III.2.1i. Właściwości kwadryk Φ_w^2 i Φ_z^2 , gdy $\phi_{1,2} \neq 0^\circ$ i $\phi_{1,2} \neq 90^\circ$, a \bar{A}_{p1} i \bar{A}_{p2} są przystającymi sferami przecinającymi się

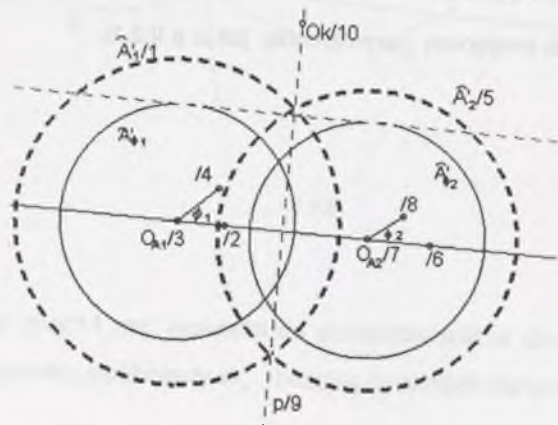
Bazując na dotychczasowych doświadczeniach łatwo dowieść, że w rozważanym przypadku kwadryki Φ_w^2 i Φ_z^2 są odpowiednio elipsoidą obrotową Φ_w^2 oraz płaszczyzną potęgową γ zadanych sfer \bar{A}_{p1} \bar{A}_{p2} . Zostają one zakreślone przez obrót elipsy c^2 i osi potęgowej p wyróżnionej jak w p.II.2.1i.

Rzut elipsoidy Φ_w^2 przedstawia rys. III.2.10



III.2.10

Założenia do „mac15_mw”, które pozwala wygenerować rzut elipsoidy Φ_w^2 na płaszczyznę rysunku, są podane na (rys.III.2.10m).

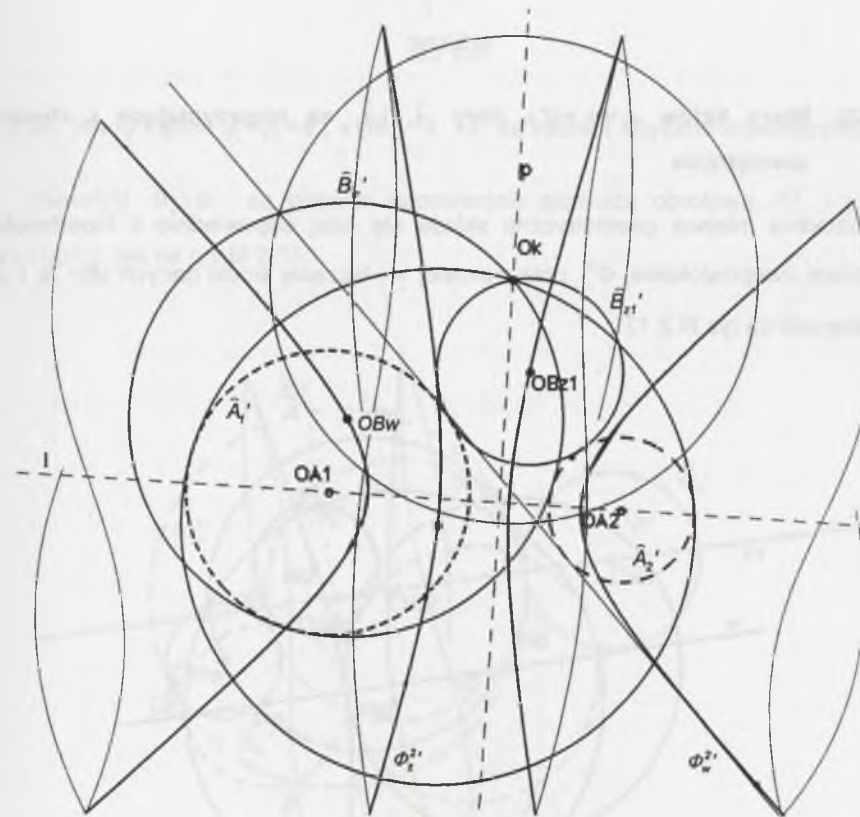


III.2.10m

III.2.2. Właściwości kwadryk Φ_1^2 i Φ_2^2 dla szczególnych miar zadanych kątów

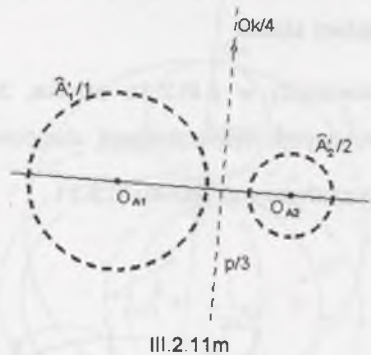
III.2.2a. Miary kątów $\phi_1 = \phi_2 = 0^\circ$, a sfery \bar{A}_1 i \bar{A}_2 są nieprzystające, rozłączne i leżą zewnętrźnie względem siebie

Z rozważań podejmowanych w p.III.2.1a wynika, że analizowane obecnie kwadryki są dwiema obrotowymi hiperboloidami dwupowłokowymi Φ_w^2 i Φ_z^2 , o wspólnej osi $l = O_{A1}O_{A2}$, pokazanymi na rysunku III.2.11.



III.2.11

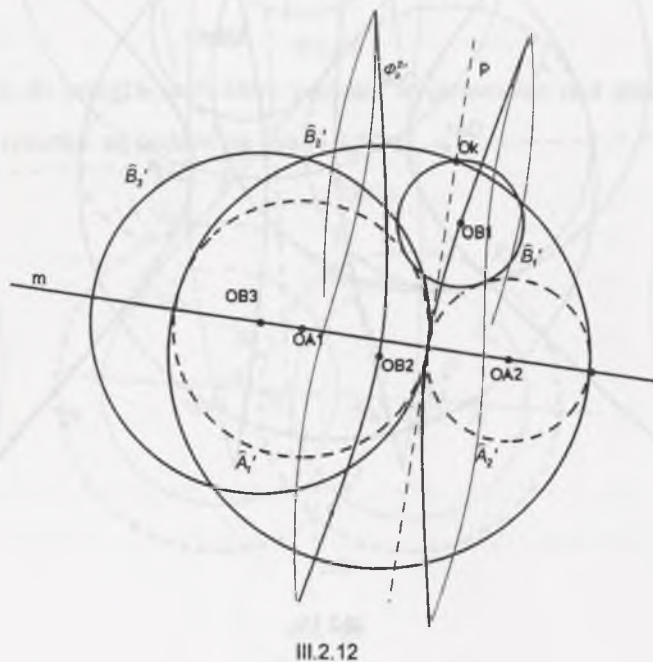
Założenia do „mac16_mz” i „mac16_mw” lub łącznie „mac16_mc”, umożliwiającą zapis rzutu prostokątnego na płaszczyznę rysunku rozważanych sfer i kwadryk wskazuje rys.III.2.11m.



III.2.11m

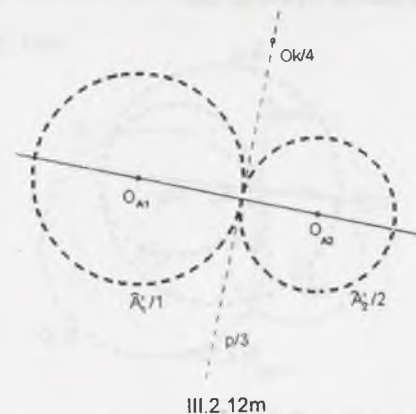
III.2.2b. Miary kątów $\phi_1 = \phi_2 = 0^\circ$ a sfery \bar{A}_1 i \bar{A}_2 są nieprzystające i styczne zewnętrznie

Szukane miejsce geometryczne składa się tutaj odpowiednio z hiperboloidy obrotowej dwupowłokowej Φ_w^2 oraz z prostej m , łączącej środki danych sfer \bar{A}_1 i \bar{A}_2 pokazanych na rys.III.2.12.



III.2.12

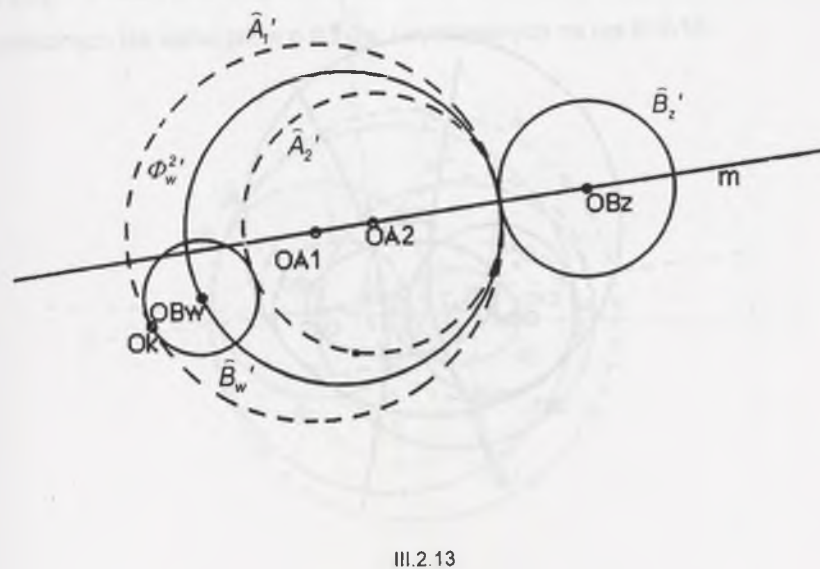
Założenia do „mac16_mz”, która pozwala na narysowanie rzutu prostokątnego, na płaszczyznę rysunku π , rozważanej hiperboloidy, podano na rys.III.2.12m.



III.2.12m

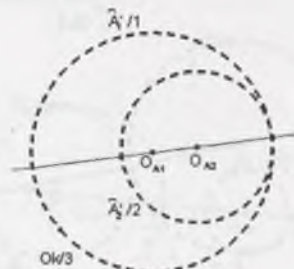
III.2.2c. Miary kątów $\phi_1 = \phi_2 = 0^\circ$, a sfery \bar{A}_1 i \bar{A}_2 są różne i styczne wewnętrznie

Kwadryki Φ_w^2 i Φ_s^2 są obecnie odpowiednio elipsoidą obrotową Φ_s^2 i prostą $m = O_{A1}O_{A2}$ jak na rys.III.2.13.



III.2.13

Makrokonstrukcja „mac18_mw” umożliwia wykreślenie rzutu elipsoidy Φ_w^2 na podstawie założeń podanych na rys.III.2.13m.



III.2.13m

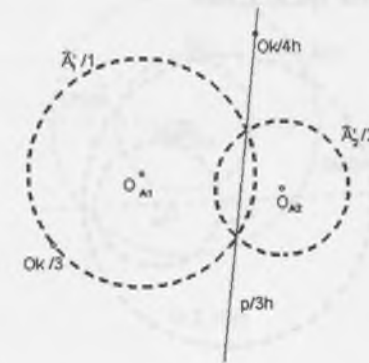
III.2.2d. Miary kątów $\phi_1 = \phi_2 = 0^\circ$, a \bar{A}_1 i \bar{A}_2 są różnymi i przecinającymi się sferami

Przy przyjętych założeniach analizowane kwadryki Φ_w^2 i Φ_z^2 są odpowiednio obrotową hiperboloidą dwupowłokową i elipsoidą obrotową o wspólnej osi $l = O_{A1}O_{A2}$. Kwadryki te mogą być zakreślone w wyniku obrotu wokół prostej l hiperboli c_z^2 oraz elipsy c_w^2 wyróżnionych analogicznie jak w p.II.2.2d i pokazanych na rys.III.2.14.



III.2.14

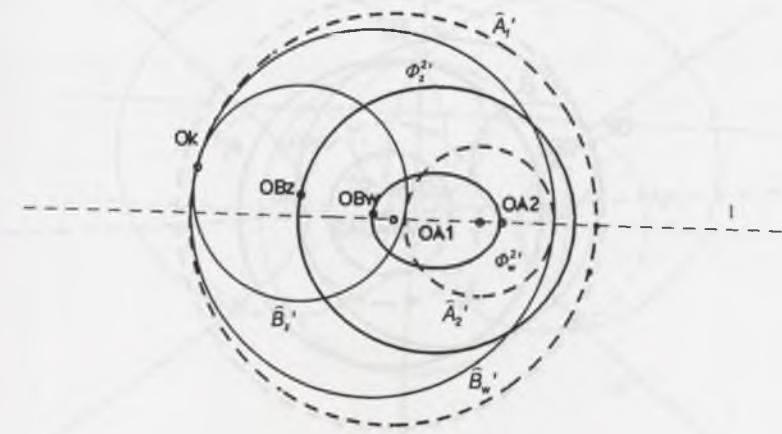
Założenia do „mac16_mz” i „mac18_mw”, które pozwalają na przedstawienie rzutu prostokątnego na rzutnię π (płaszczyzna rysunku) omawianych kwadryk Φ_w^2 i Φ_z^2 , podano na rys.III.2.14m.



III.2.14m

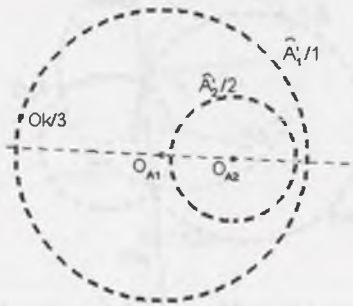
III.2.2e. Miary kątów $\phi_1 = \phi_2 = 0^\circ$, a \bar{A}_1 i \bar{A}_2 są rozłącznymi sferami leżącymi jedna wewnątrz drugiej

Rozważanymi kwadrykami Φ_w^2 i Φ_z^2 są tutaj dwie elipsoidy obrotowe o wspólnej osi $l = O_{A1}O_{A2}$. Kwadryki te mogą być zakreślone przez obrót wokół prostej l elipsy c_z^2 i c_w^2 ustalonych tak samo jak w p.II.2.2e i wykreślonych na rys.III.2.15.



III.2.15

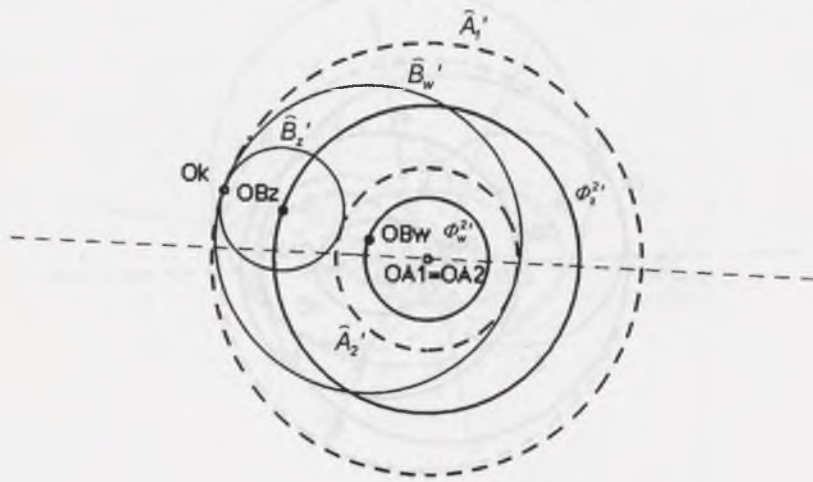
Za pomocą „mac18_mw” i „mac20_mz” lub dla obydwu kwadryk za pomocą „mac20_mc”, przy założeniu równoległości prostej l do rzutni, otrzymać można rzut prostokątny omawianych powierzchni na płaszczyznę rysunku. Założenia do tych makrokonstrukcji pokazano na rys.III.2.15m.



III.2.15m

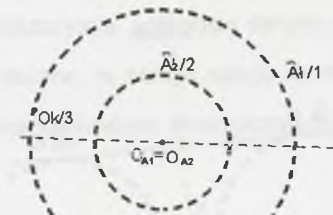
III.2.2f. Miary kątów $\phi_1 = \phi_2 = 0^\circ$, a \bar{A}_1 i \bar{A}_2 są sferami różnymi i współśrodkowymi

Kwadryki Φ_w^2 i Φ_z^2 są tutaj dwiema sferami współśrodkowymi z \bar{A}_1 i \bar{A}_2 . Można je traktować jako powierzchnie utworzone przez obrót okręgów c_w^2 i c_z^2 , określonych jak w p.II.2.2f, co wskazuje rys.III.2.16.



III.2.16

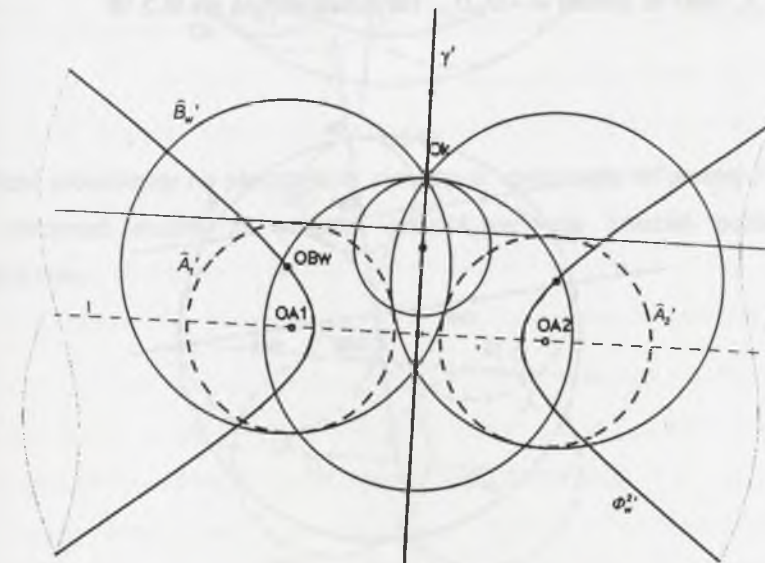
Pokazany na rys.III.2.16 rzut prostokątny tych sfer na płaszczyznę rysunku można otrzymać za pomocą „mac18_mw” i „mac20_mz” lub „mac20_mc” dla założeń podanych na rys.III.2.16m.



III.2.16m

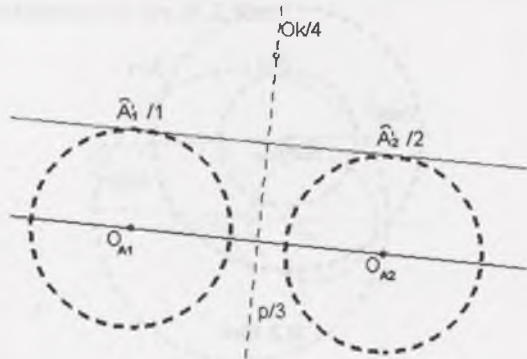
III.2.2g. Miary kątów $\phi_1 = \phi_2 = 0^\circ$, a \bar{A}_1 i \bar{A}_2 są sferami przystającymi i rozłącznymi

Miejscem geometrycznym środków rozważanych sfer jest tutaj suma obrotowej hiperboloidy dwupowłokowej Φ_w^2 i płaszczyzny potęgowej γ sfer \bar{A}_1 i \bar{A}_2 . Powstają one przez obrót wokół prostej $l = O_{A1}O_{A2}$ hiperboli c_w^2 i prostej p ustalonych analogicznie jak w p.II.2.2g, które podano na rys.III.2.17.



III.2.17

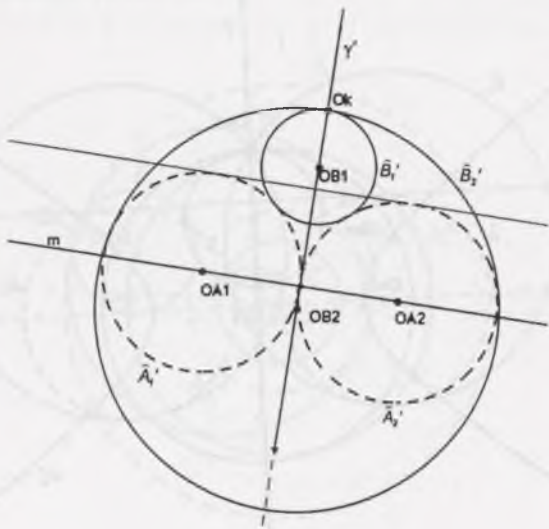
Rzut prostokątny hiperboloidy Φ_w^2 na rzutnię π równoległą do płaszczyzny rysunku można otrzymać za pomocą „mac16_mw” dla założeń pokazanych na rys.III.2.17m.



III.2.17m

III.2.2h. Miary kątów $\phi_1 = \phi_2 = 0^\circ$, a sfery \bar{A}_1 i \bar{A}_2 są przystające i styczne zewnętrznie

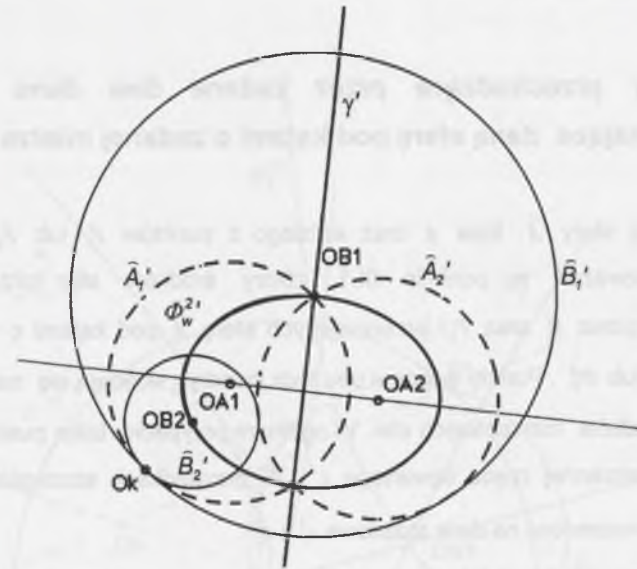
W tym przypadku kwadryki Φ_w^2 i Φ_s^2 degenerują się do płaszczyzny potęgowej γ sfer \bar{A}_1 i \bar{A}_2 oraz do prostej $m = O_{A1}O_{A2}$ narysowanych na rys.III.2.18.



III.2.18

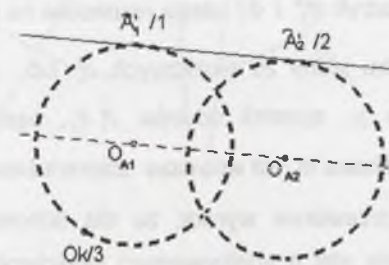
III.2.2i. Miary kątów $\phi_1 = \phi_2 = 0^\circ$, a sfery \bar{A}_1 i \bar{A}_2 są przystające i przecinają się

Kwadryki Φ_w^2 i Φ_s^2 są tutaj odpowiednio elipsoidą obrotową Φ_w^2 oraz płaszczyzną γ , będącą płaszczyzną potęgową danych sfer \bar{A}_1 i \bar{A}_2 . Zbiory te mogą być traktowane jako zakreślone, w trakcie obrotu wokół prostej $l = O_{A1}O_{A2}$, przez elipsę c_w^2 i prostą p , które są ustalone analogicznie jak w p.II.2.2 i przedstawione na rys.III.2.19.



III.2.19

Rzut prostokątny na płaszczyznę rysunku π równoległą do prostej l elipsoidy Φ_w^2 otrzymać można za pomocą „mac18_mw” dla założeń podanych na rys.III.2.19m.



III.2.19m

III.2.3. Charakterystyka zbiorów Φ_w^2 i Φ_z^2 , gdy miary danych kątów ϕ_1 i ϕ_2 są równe 90°

Dla wszystkich wzajemnych położenia danych sfer \bar{A}_1 i \bar{A}_2 miejscem geometrycznym środków szukanych sfer $\bar{B}_{1,2}$ prostopadłych do \bar{A}_1 i \bar{A}_2 jest, zgodnie z definicją, ich płaszczyzna potęgowa. Dla sfer współśrodkowych jest ona płaszczyzną niewłaściwą.

III.3. Sfery przechodzące przez zadane dwa dane punkty i przecinające daną sferę pod kątami o zadanej mierze

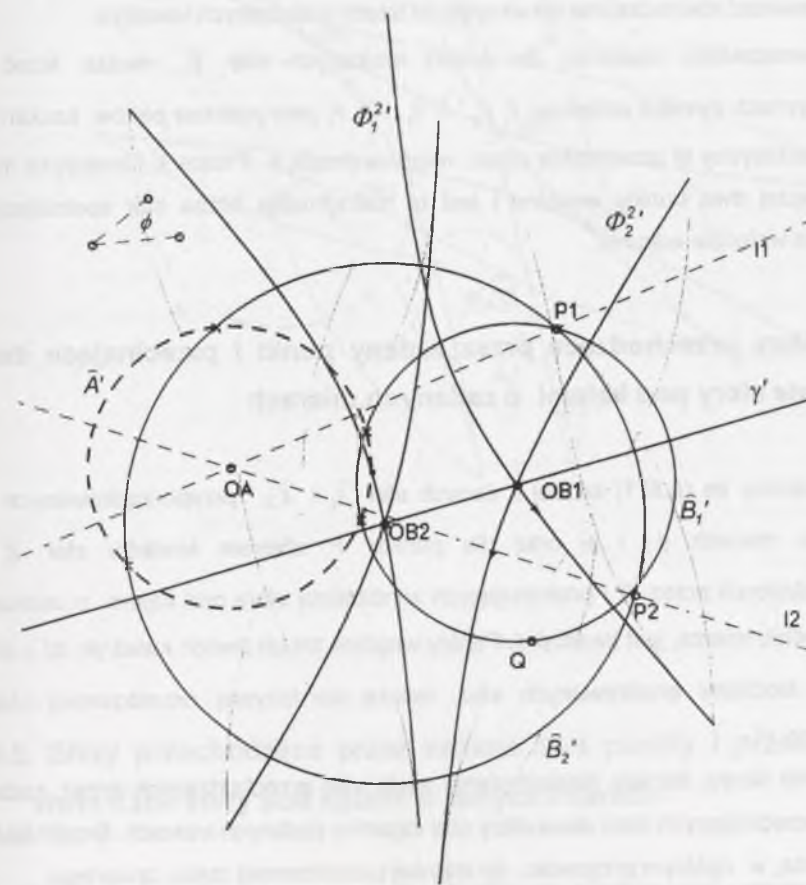
Dla danej sfery \bar{A} , kąta ϕ oraz każdego z punktów P_1 lub P_2 , zgodnie z wynikami rozważań w punkcie III.1, zbiory środków sfer przechodzących odpowiednio przez P_1 oraz P_2 i przecinających sferę \bar{A} pod kątami o mierze ϕ są kwadryki Φ_1^2 lub Φ_2^2 . Punkty wspólne obu tych kwadryk składają się na interesujący nas zbiór środków rozważanych sfer. W ogólnym przypadku takie punkty należą do krzywej przestrzennej rzędu czwartego c^4 . W przypadkach szczególnych krzywa c^4 może ulec rozpadowi na dwie stożkowe c_1^2 i c_2^2 .

W omawianej sytuacji taki przypadek ma miejsce, gdyż kwadryki Φ_1^2 i Φ_2^2 są przekształconymi inwersyjnie powierzchniami stożkowymi opisanymi na wspólnej kuli. Część wspólna tak utworzonych powierzchni stożkowych składa się z dwóch krzywych stopnia drugiego. Przekształcenie inwersyjne zachowuje przynależność, więc i część wspólna kwadryk Φ_1^2 i Φ_2^2 ulega rozpadowi na dwie stożkowe c_1^2 i c_2^2 . W szczególnym przypadku jedna ze stożkowych c_1^2 lub c_2^2 (np. c_1^2) może być zawarta w płaszczyźnie γ , symetrii odcinka P_1P_2 , będącej podstawą pęku szukanych sfer $\bar{B}_{1,2}$. Stożkowa ta jest wówczas zbiorem środków rozważanych sfer.

Z przedstawionych przesłanek wynika, że dla odpowiednich założeń może istnieć nieskończenie wiele sfer o analizowanych właściwościach. Środki tych sfer

należą do krzywej stopnia drugiego c^2 , będącej przekrojem płaszczyzną γ kwadryk Φ_1^2 i Φ_2^2 .

Dla przykładu na rys. III.3 pokazano rzut prostokątny dwóch takich punktów O_{B1} i O_{B2} należących do płaszczyzny określonej przez punkty P_1, P_2, O_A (w tym przypadku jest to płaszczyzna arkusza rysunku) oraz do stożkowej c^2 , będącej linią przecięcia kwadryk Φ_1^2 i Φ_2^2 płaszczyzną γ .



III.3

III.4. Sfery przechodzące przez zadane trzy punkty i przecinające daną sferę pod kątami o zadanej mierze

Zgodnie z ustaleniami z p. III.1 dla danej sfery \bar{A} , kąta ϕ oraz każdego z danych punktów P_1, P_2 lub P_3 zbiorem środków sfer $\bar{B}_{1,2}$, przechodzących przez jeden z punktów P_1, P_2 lub P_3 i przecinających wyróżnioną sferę \bar{A} pod kątem o ustalonej mierze ϕ jest kwadryka Φ_1^2, Φ_2^2 lub Φ_3^2 . Środki szukanych sfer $\bar{B}_{1,2}$ muszą należeć równocześnie do wszystkich trzech wskazanych kwadryk.

Równocześnie wiadomo, że środki szukanych sfer $\bar{B}_{1,2}$ muszą leżeć w płaszczyznach symetrii odcinków $P_1 P_2, P_1 P_3, P_2 P_3$ jako podstaw pęków szukanych sfer. Płaszczyzny te przechodzą przez wspólną prostą k . Prosta k i kwadryka mają co najwyżej dwa punkty wspólne i jest to maksymalna liczba sfer spełniających założone wstępnie warunki.

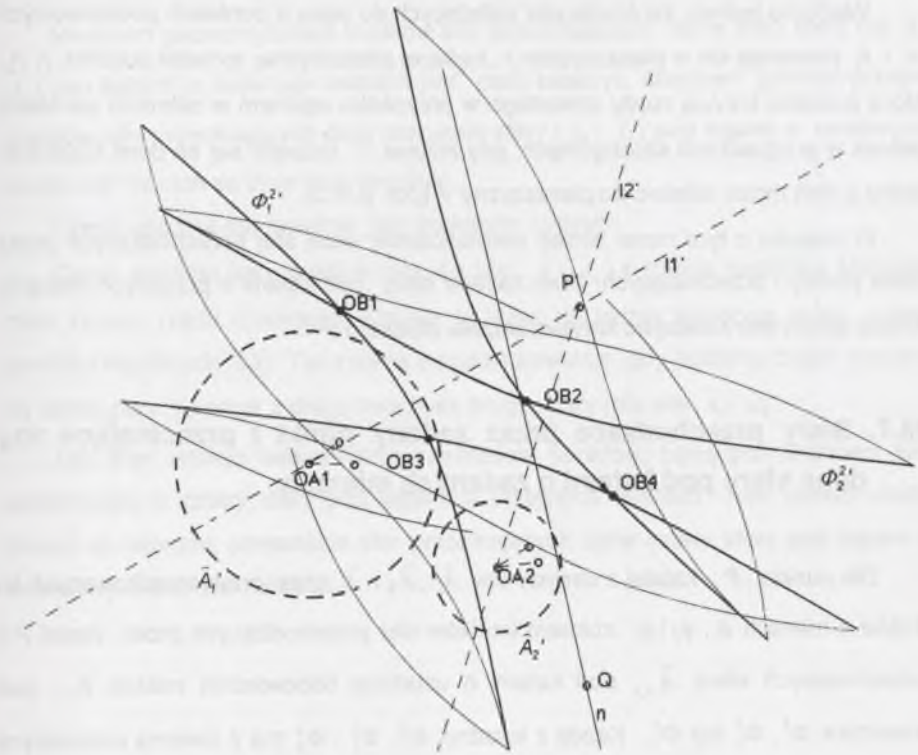
III.5. Sfery przechodzące przez zadany punkt i przecinające dane dwie sfery pod kątami o zadanych miarach

Widomo, że (p.III.1) każdej z danych sfer \bar{A}_1 i \bar{A}_2 , przyporządkowanych im kątów o miarach ϕ_1 i ϕ_2 oraz dla punktu P zbiorem środków sfer $\bar{B}_{1,2}$, przechodzących przez P i przecinających wyróżnioną sferę pod kątem o ustalonej odpowiednio mierze, jest kwadryka. Punkty wspólne takich dwóch kwadryk Φ_1^2 i Φ_2^2 , będące środkami analizowanych sfer, należą do krzywej przestrzennej rzędu czwartego c^4 .

Innymi słowy, istnieje nieskończenie wiele sfer przechodzących przez zadany punkt i przecinających dwie dane sfery pod kątami o zadanych miarach. Środki takich sfer należą, w ogólnym przypadku, do krzywej przestrzennej rzędu czwartego.

Dla przykładu pokazano rzuty prostokątne na płaszczyznę rysunku π czterech takich punktów $O_{B1,2,3,4}$, należących do płaszczyzny π , do której należą także środki danych sfer $\bar{O}_{A1}, \bar{O}_{A2}$ oraz punkt P .

Przykład ten ilustruje rys.III.5.



III.5

III.6. Sfery przechodzące przez zadane dwa punkty i przecinające dwie dane sfery pod kątami o danych miarach

Dla sfery \bar{A}_1 , kąta ϕ_1 oraz punktu P_1 zbiorem środków sfer przechodzących przez punkt P_1 i przecinających sferę \bar{A}_1 pod kątem o mierze ϕ_1 jest kwadryka Φ_1^2 .

Dla sfery \bar{A}_2 kąta ϕ_2 oraz punktu P_2 środki, analogicznych do wyżej opisanych, sfer

należą do innej kwadryki Φ_2^2 . Punkty wspólne tych obu kwadryk składają się na krzywą przestrzenną rzędu czwartego c^4 .

Wiadomo jednak, że środki sfer należących do pęku o punktach podstawowych P_1 i P_2 zawierają się w płaszczyźnie γ , będącej płaszczyzną symetrii odcinka $P_1 P_2$, która przecina krzywą rzędu czwartego w przypadku ogólnym w czterech punktach, jednak w przypadkach szczególnych, gdy krzywa c^4 rozpada się na dwie stożkowe, jedna z nich może należeć do płaszczyzny γ (por. p.III.3).

W związku z tym może istnieć nieskończenie wiele sfer przechodzących przez dane punkty i przecinających dwie zadane sfery pod kątami o przyjętych miarach. Środki takich sfer należą do krzywej stopnia drugiego c^2 .

III.7. Sfery przechodzące przez zadany punkt i przecinające trzy dane sfery pod kątami o zadanych miarach

Dla punktu P , każdej z danych sfer \bar{A}_1, \bar{A}_2 i \bar{A}_3 oraz przyporządkowanych im kątów o miarach ϕ_1, ϕ_2 i ϕ_3 zbiorem środków sfer przechodzących przez punkt P i przecinających sferę $\bar{A}_{1,2,3}$ pod kątami o ustalonej odpowiednio mierze $\phi_{1,2,3}$ jest kwadryka Φ_1^2, Φ_2^2 lub Φ_3^2 . Każda z kwadryk Φ_1^2, Φ_2^2 i Φ_3^2 ma z dwiema pozostałymi częścią wspólną w postaci dwóch krzywych rzędu czwartego. Te dwie krzywe przecinają się z kolei w ośmiu punktach.

Ze względu na to, że te krzywe rzędu czwartego leżą na jednej kwadryce i posiadają wspólną płaszczyznę symetrii ($\alpha = O_{A_1} O_{A_2} O_{A_3}$), ich rzutami prostokątnymi na tę płaszczyznę są dwie stożkowe. Cztery punkty przecięcia się tych stożkowych są rzutami ośmiu punktów wspólnych, rozpatrywanych krzywych stopnia czwartego.

Wynika to także z własności [33] mówiącej, że "krzywe rzędu czwartego, gatunku pierwszego, leżące na jednej i tej samej kwadryce, przecinają się w ośmiu punktach".

Z powyższego wynika, że istnieje maksimum osiem sfer przechodzących przez zadany punkt i przecinających trzy dane sfery pod kątami o przyjętych miarach.

III.8. Sfery zawierające z czterema zadanymi sferami zadane kąty

Miejszem geometrycznym środków sfer przecinających dane dwie sfery (np. \bar{A}_1 i \bar{A}_2) pod kątami o zadanych miarach jest para kwadryk. Miejszem geometrycznym środków sfer przecinających dwie pozostałe sfery (\bar{A}_3 i \bar{A}_4) pod kątami o ustalonych wcześniej miarach są dwie inne kwadryki.

Część wspólna par kwadryk jest szukanym zbiorem.

Część wspólną pary kwadryk (np. dla sfer \bar{A}_1 i \bar{A}_2) z trzecią kwadryką stanowią dwie krzywe rzędu czwartego. Krzywe te leżąc na jednej kwadryce mają osiem punktów wspólnych [33]. Taka sama sytuacja powstaje, gdy ustalimy część wspólną tej samej pary kwadryk z drugą kwadryką drugiej pary (dla sfer \bar{A}_3 i \bar{A}_4).

Tak więc istnieje maksymalnie szesnaście punktów, będących środkami sfer przecinających cztery sfery pod kątami o przyjętych miarach. Tym samym może istnieć co najwyżej szesnaście sfer przecinających dane cztery sfery pod kątami o wcześniej ustalonych miarach.

IV. ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE OKRĘGÓW I SFER PRZECINAJĄCYCH SIĘ POD KĄTAMI O ZADANYCH MIARACH

Niniejszy rozdział obejmuje zagadnienia dotyczące relacji pomiędzy sferami i okręgami, posiadającymi punkty wspólne. Wiadomo, że w takim przypadku można powiedzieć, że okrąg przecina sferę pod kątem, którego wierzchołkiem jest punkt wspólny sfery i okręgu, zaś miara tego kąta jest równa mierze kąta pomiędzy prostą styczną do okręgu i płaszczyzną styczną do sfery. Zakłada się, że miara tego kąta jest jednym z danych wyjściowych. Kąt, jako figura płaska, może być usytuowany w różnych płaszczyznach i jego położenie wyróżnia dwa odmienne przypadki.

Zakładając, że sfery i przyporządkowane im miary kątów są dane, celem postawionym w tym rozdziale jest określenie kształtu zbiorów, będących miejscami geometrycznymi środków szukanych okręgów.

W pierwszym z rozpatrywanych przypadków zakłada się, że płaszczyzny kątów jednoczą się z płaszczyznami rozważanych okręgów, zaś przypadek drugi jest bardziej ogólny i nie zakłada żadnego warunku usytuowania płaszczyzny kąta.

Celem rozważań prowadzonych w tym rozdziale jest określenie kształtu podstawowych zbiorów, będących miejscami geometrycznymi środków rozpatrywanych okręgów, aby następnie na ich podstawie ustalić liczbę możliwych rozwiązań dla przykładów o większej liczbie założonych warunków wstępnych.

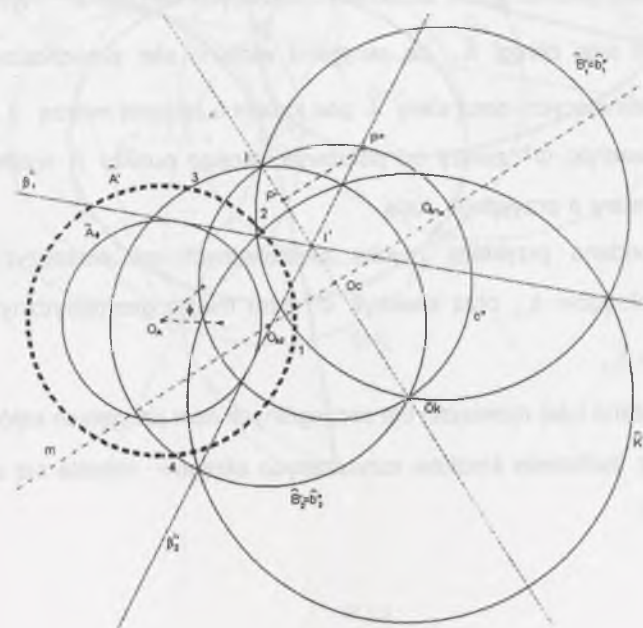
W każdym z dwu przypadków usytuowania płaszczyzny zadanego kąta wyróżniono po dwa różne zestawy elementów wyjściowych.

IV.1. Zagadnienia dotyczące zbioru środków okręgów, przechodzących przez zadany punkt i przecinających daną sferę pod kątami o zadanej rozwartości, mierzonej w płaszczyznach rozważanych okręgów

Dla przyjętych danych wyjściowych udowodniono następujące twierdzenie:

Miejscem geometrycznym środków okręgów przechodzących przez zadany punkt i przecinających daną sferę pod kątami o danej rozwartości, mierzonej w płaszczyznach rozważanych okręgów, jest kwadryka Φ^2 , [14].

Dla dowodu wykazano, że dowolna płaszczyzna α przecina zbiór Φ^2 środków szukanych okręgów w stożkowej. W tym celu wyróżniono na rys. IV.1.1 sferę \bar{A} , punkt P , kąt o mierze ϕ oraz dowolnie położoną prostą m , a następnie wyznaczono (jak w p. III.1.1) dwie sfery \bar{B}_1 i \bar{B}_2 przechodzące przez punkt P i przecinające sferę \bar{A} pod kątami o mierze ϕ , których środki, czyli punkty O_{B_1} i O_{B_2} należą do prostej m .



IV.1.1

Z kolei zauważono, że warunek pomiaru rozwartości kąta przecięcia okręgu \bar{b} ze sferą \bar{A} w płaszczyźnie okręgu \bar{b} pociąga za sobą konieczność prowadzenia płaszczyzny ω tego okręgu przez środek sfery \bar{A} . Wobec tego przekroje ustalonych wcześniej sfer \bar{B}_1 i \bar{B}_2 płaszczyznami $\omega_1 = O_A O_{B_1} P$ oraz $\omega_2 = O_A O_{B_2} P$ są okręgami \bar{b}_{ω_1} i \bar{b}_{ω_2} należącymi do omawianej obecnie rodziny okręgów, a ich środki identyczne ze środkami sfer \bar{B}_1 i \bar{B}_2 , należą do wyróżnionej prostej m . Analogiczny do wyżej opisanego zestaw działań geometrycznych można zrealizować dla każdej prostej m , zawartej w ustalonej płaszczyźnie α . Prowadzi to do wniosku, że każda prosta m płaszczyzny α przecina przekrój miejsca geometrycznego Φ^2 płaszczyzną α w dwóch punktach. Wobec tego zbiór takich par punktów należących do prostych płaszczyzny α stanowi stożkową. Jest to równoznaczne ze stwierdzeniem, że zbiór środków rozważanych okręgów jest kwadryką Φ^2 , złożoną ze stożkowych ustalonych wcześniej opisanym sposobem w płaszczyznach $\alpha_{1,2}$.

Zdefiniowana obecnie kwadryka Φ^2 jest taka sama jak kwadryka ustalona w p. III.1 jako miejsce geometryczne środków rozważanych tam sfer \bar{B} . Wynika to stąd, że wyróżnione tutaj okręgi $\bar{b}_{1,2,\dots}$ są okręgami wielkimi sfer przechodzących przez punkt P i przecinających daną sferę \bar{A} pod kątami o zadanej mierze ϕ .

Rodzaj kwadryki Φ^2 zależy od położenia danego punktu P względem danej sfery \bar{A} oraz miary ϕ przyjętego kąta.

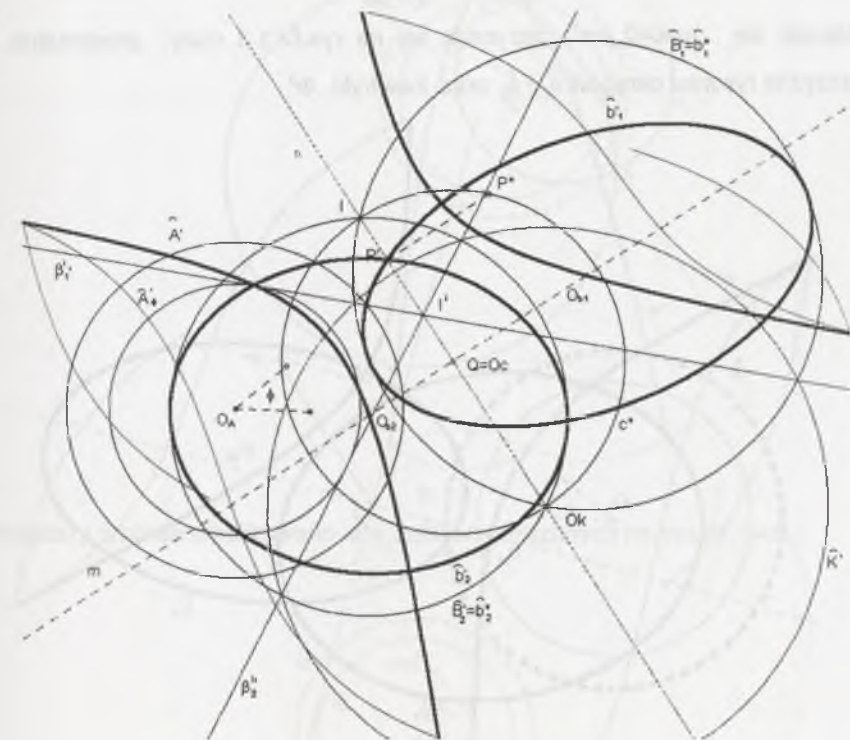
Poniżej podano przykłady rzutów prostokątnych na płaszczyznę rysunku omawianych okręgów $\bar{b}_{1,2}$ oraz kwadryk Φ^2 jako miejsc geometrycznych środków $O_{b_{1,2}}$ okręgów $\bar{b}_{1,2}$.

Nie rozważano tutaj rozwiązań dla szczególnych miar przyjętych kątów jak $\phi = 0^\circ$ i $\phi = 90^\circ$, gdyż położenie środków rozważanych okręgów określa się analogicznie do rozdziału III.

IV.1.1. Przypadek, gdy zbiór środków okręgów $\bar{b}_{1,2}$ jest hiperboloidą obrotową dwupowłokową Φ^2

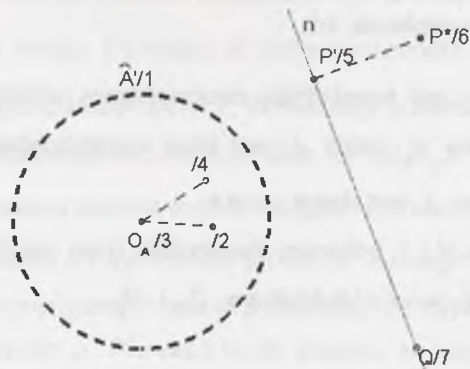
Kwadryka jest hiperboloidą dwupowłokową obrotową, gdy punkt P leży na zewnątrz sfery \bar{A}_p , gdzie \bar{A}_p jest sferą współśrodkową z daną sferą \bar{A} . Długość promienia sfery \bar{A}_p jest równa $r_A \cos \phi$.

Na rys. IV.1.2 pokazano konstrukcję rzutu prostokątnego dwóch szukanych okręgów \bar{b}_1 i \bar{b}_2 wraz z ich środkami O_{b_1} i O_{b_2} .



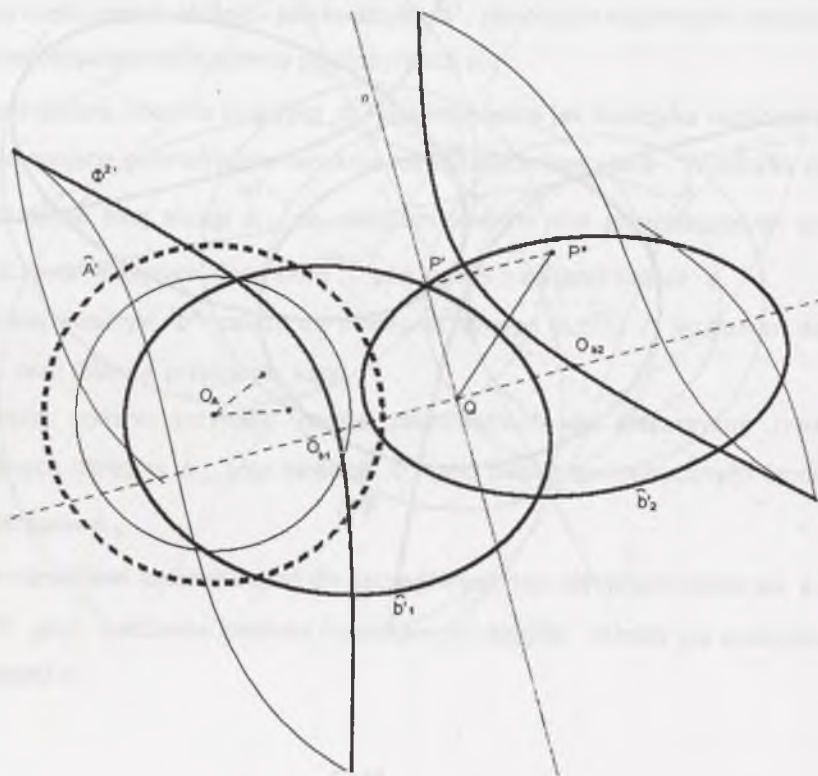
IV.1.2

Dla przyjętych założeń pokazanych na rys.IV.1.3m ,



IV.1.3m

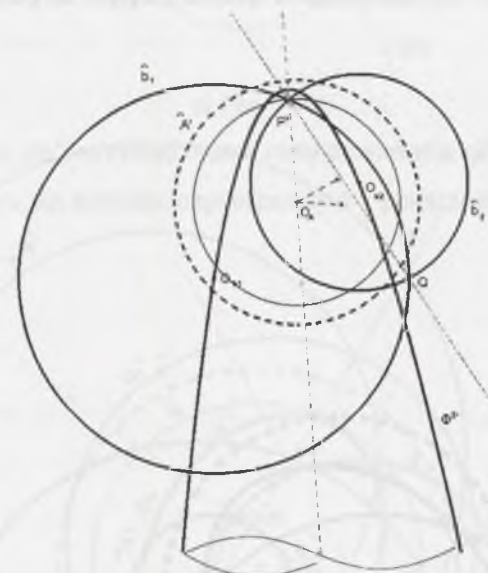
posługując się „mac40_mc”, otrzymuje się na rys.IV.1.3 rzuty prostokątne na płaszczyznę rysunku okręgów \tilde{b}_1 i \tilde{b}_2 oraz kwadryki Φ^2 .



IV.1.3

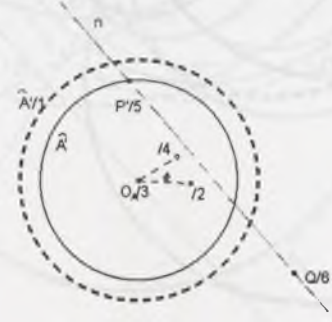
IV.1.2. Przypadek, gdy zbiór środków okręgów $\tilde{b}_{1,2}$ jest paraboloidą obrotową Φ^2

Kwadryka Φ^2 jest paraboloidą obrotową, gdy punkt P należy do sfery \tilde{A}_4 , czyli gdy $|PO_A| = r_A \cos \phi$. Posługując się makrokonstrukcją „mac41_mc” otrzymuje się rzuty prostokątne na płaszczyznę rysunku okręgów \tilde{b}_1 i \tilde{b}_2 oraz rzut prostokątny paraboloidy obrotowej Φ^2 , będącej zbiorem środków $O_{b_{1,2}}$ okręgów $\tilde{b}_{1,2}$, co pokazuje rys.IV.1.4.



IV.1.4

Powyższy rysunek zrealizowano dla założeń pokazanych na rys.IV.1.4m.

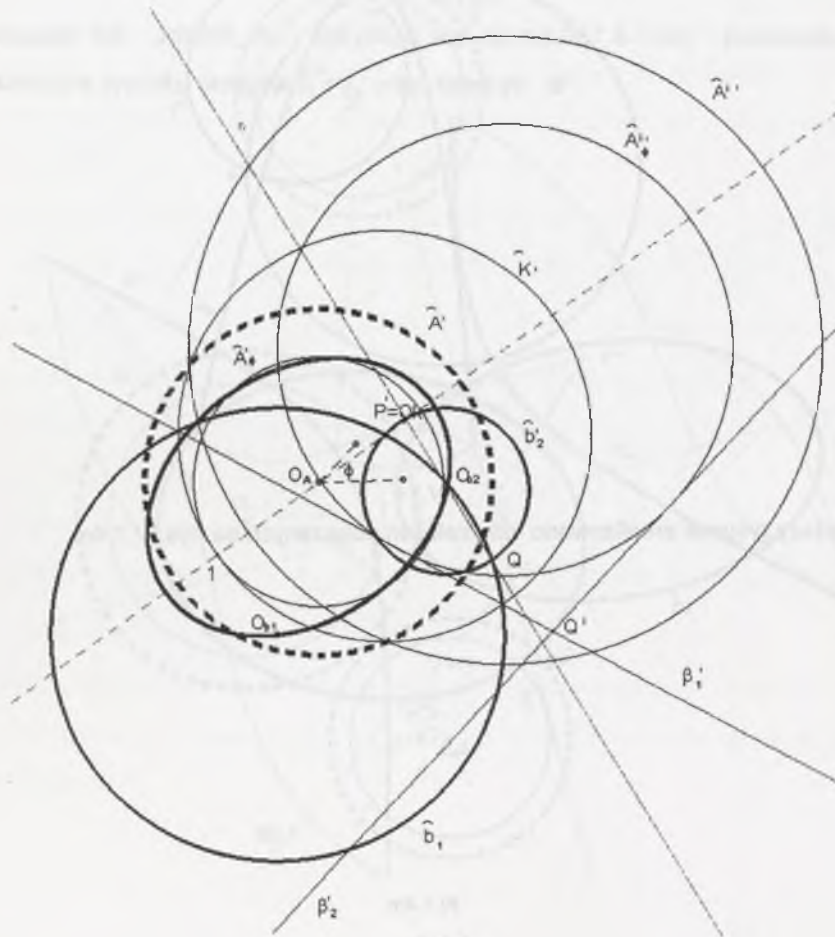


IV.1.4m

IV.1.3. Przypadek, gdy zbiór środków okręgów $\tilde{b}_{1,2}$ jest elipsoidą obrotową Φ^2

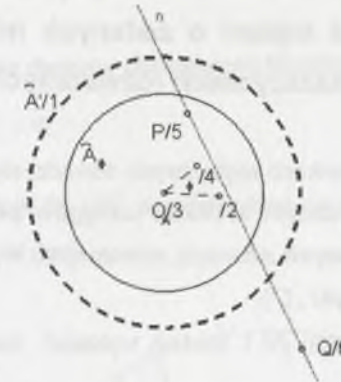
Kwadryka Φ^2 jest elipsoidą obrotową, gdy punkt P leży wewnątrz sfery A_4 , czyli gdy $|PO_A| < r_A \cos \phi$.

Na rys. IV.1.5 pokazano, w rzucie prostokątnym na płaszczyznę arkusza rysunku, konstrukcję szukanych okręgów $\tilde{b}_{1,2}$ oraz rzut elipsoidy Φ^2 , będącej zbiorem środków $O_{b_{1,2}}$ okręgów $\tilde{b}_{1,2}$. Dla uproszczenia rysunku przyjęto, że punkty O_A, P i Q należą do rzutni.



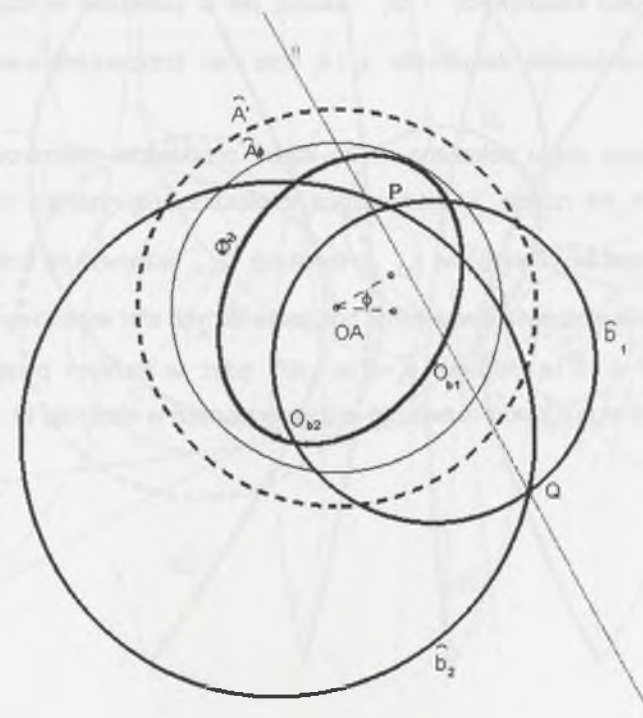
IV.1.5

Dla przyjętych założeń pokazanych na rys. IV.1.6m,



IV.1.6m

wykorzystując „mac12_mc”, otrzymać można rzuty prostokątne okręgów \tilde{b}_1 i \tilde{b}_2 oraz rzut prostokątny zbioru ich środków, czyli elipsoidy Φ^2 , pokazanych na rys. IV.1.6.



IV.1.6

IV.2. Właściwości zbioru środków okręgów przecinających dane dwie sfery pod kątami o zadanych miarach i o ramionach zawartych w płaszczyznach rozważanych okręgów

Przy założonych warunkach wyjściowych dowodzi się, że:

Miejszem geometrycznym środków okręgów przecinających dane dwie sfery pod kątami o zadanych miarach, mierzonych w płaszczyznach szukanych okręgów są dwie kwadryki, [7].

Analogicznie do punktu IV.1 można wykazać, że środki $O_{b_{1,2}}$ rozważanych okręgów $\bar{b}_{1,2}$ jednoczą się ze środkami $O_{B_{1,2}}$ sfer $\bar{B}_{1,2}$ przecinających dane dwie sfery \bar{A}_1 i \bar{A}_2 pod kątami o zadanych miarach ϕ_1 i ϕ_2 , a więc należą do dwóch obrotowych nieprostokreślnych kwadryk Φ_1^2 i Φ_2^2 .

Właściwości kwadryk Φ_1^2 i Φ_2^2 zależą, jak to pokazano w rozdziale III, od wzajemnego położenia danych sfer \bar{A}_1 i \bar{A}_2 oraz miar przyporządkowanych im kątów ϕ_1 i ϕ_2 .

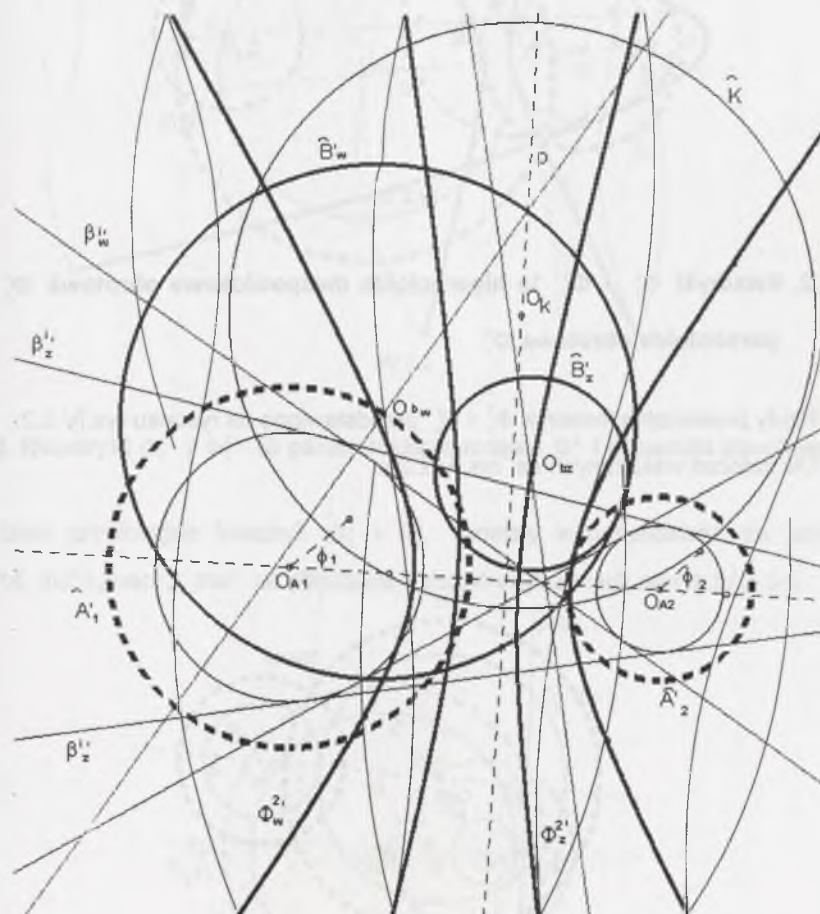
W dalszym ciągu pokazano tylko kilka przykładów odwzorowań w rzucie prostokątnym na rzutnię π zjednoczoną z płaszczyzną rysunku, kwadryk Φ_1^2 i Φ_2^2 oraz rozważanych okręgów $\bar{b}_{1,2}$, o środkach $O_{b_{1,2}}$ leżących na tych kwadrykach. Pominięto tutaj szczególne wzajemne położenia danych sfer wyjściowych \bar{A}_1 i \bar{A}_2 , miar kątów $\phi_1=0^\circ$ i $\phi_1=90^\circ$ oraz $\phi_2=0^\circ$ i $\phi_2=90^\circ$, gdyż w każdym przypadku można bezpośrednio skorzystać z rozwiązań przedstawionych w rozdziale III.

W przykładach tych wyróżniono przypadki:

IV.2.1. Kwadryki Φ_1^2 i Φ_2^2 są dwiema obrotowymi hiperboloidami

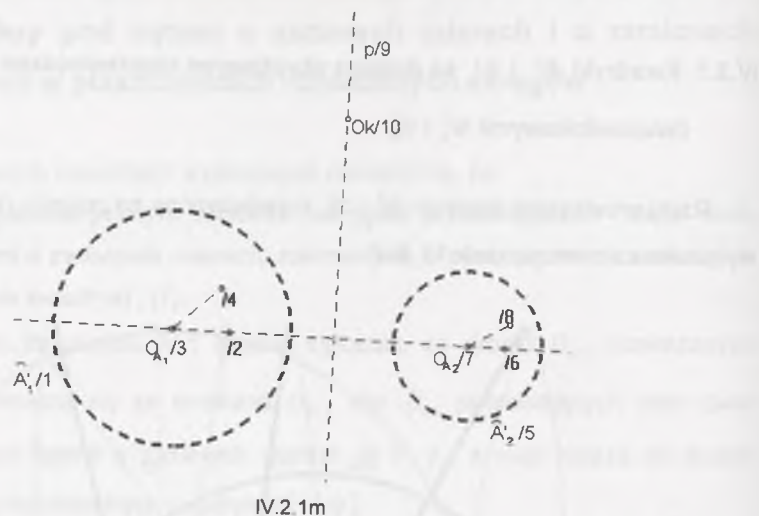
dwupowłokowymi Φ_w^2 i Φ_z^2

Rzuty prostokątne kwadryk Φ_w^2 i Φ_z^2 przedstawione na rysunku rys.IV.2.1 zostały wykonane za pomocą „mac13_mc”.



IV.2.1

Założenia do „mac13_mc” wskazano na rys.IV.2.1m.

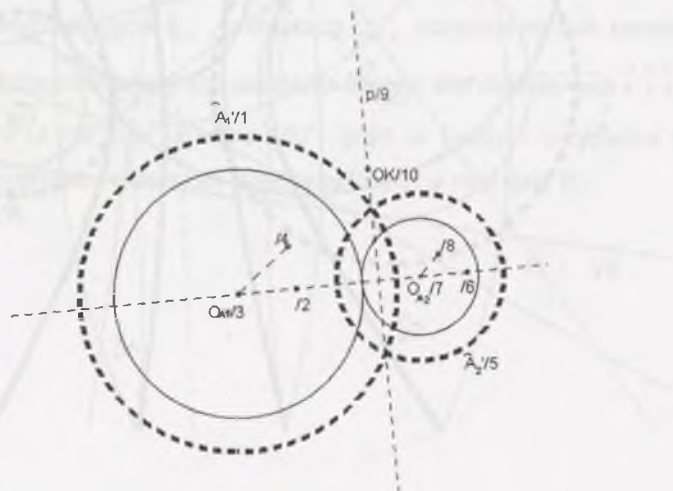


IV.2.1m

IV.2.2. Kwadryki Φ_1^2 i Φ_2^2 to hiperboloida dwupowłokowa obrotowa Φ_2^2 oraz paraboloida obrotowa Φ_1^2

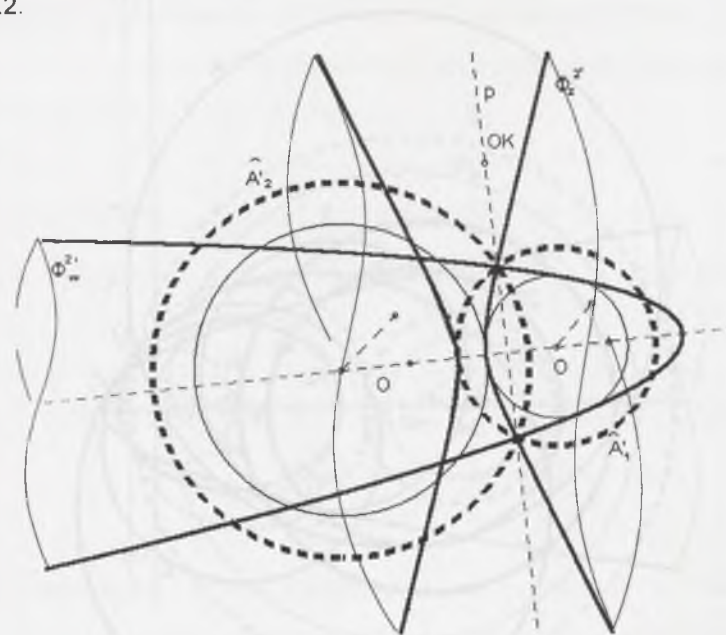
Rzuty prostokątne kwadryk Φ_1^2 i Φ_2^2 przedstawiono na rysunku rys.IV.2.2.

Dla założeń wskazanych na rys.IV.2.2m



IV.2.2m

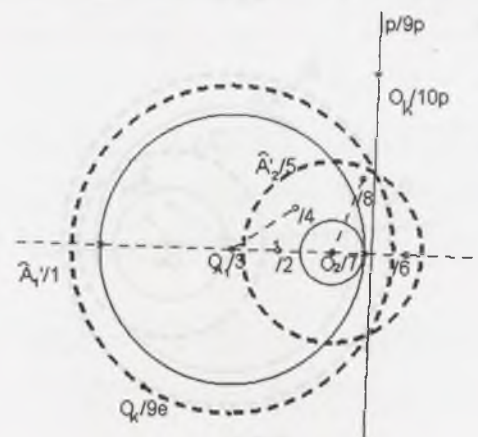
przy wykorzystaniu makrokonstrukcji „mac13_mz” i „mac14_mz” sporządzono rys.IV.2.2.



IV.2.2

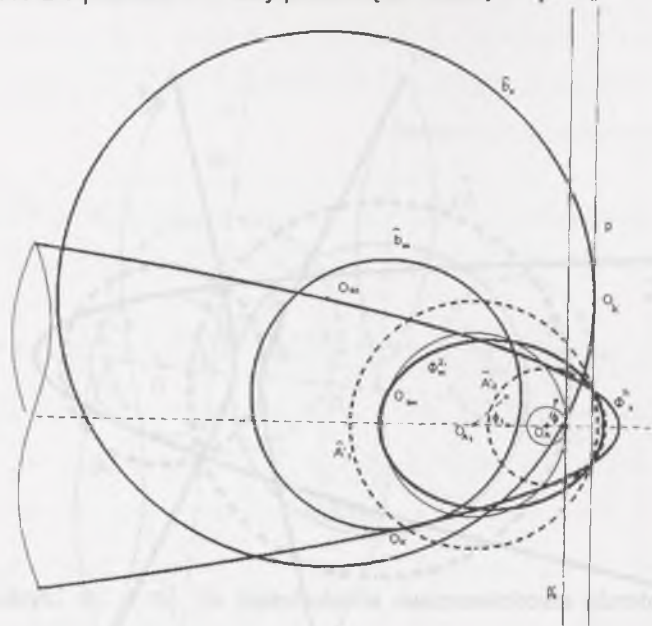
IV.2.3. Kwadryki Φ_1^2 i Φ_2^2 to paraboloida obrotowa Φ_1^2 i elipsoidal obrotowa Φ_2^2

Rzuty prostokątne kwadryk Φ_1^2 i Φ_2^2 zostały wygenerowane za pomocą „mac14_mc” i „mac15_mw” na podstawie założeń wskazanych na rys.IV.2.3m.



IV.2.3m

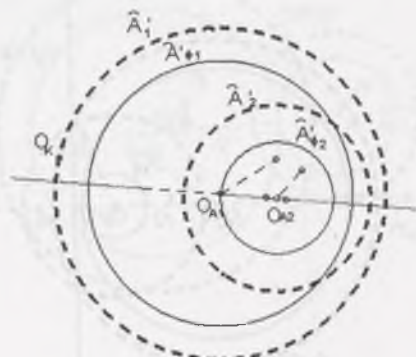
Rysunek IV.2.3 przedstawia rzuty prostokątne kwadryk Φ_1^2 i Φ_2^2 .



IV.2.3

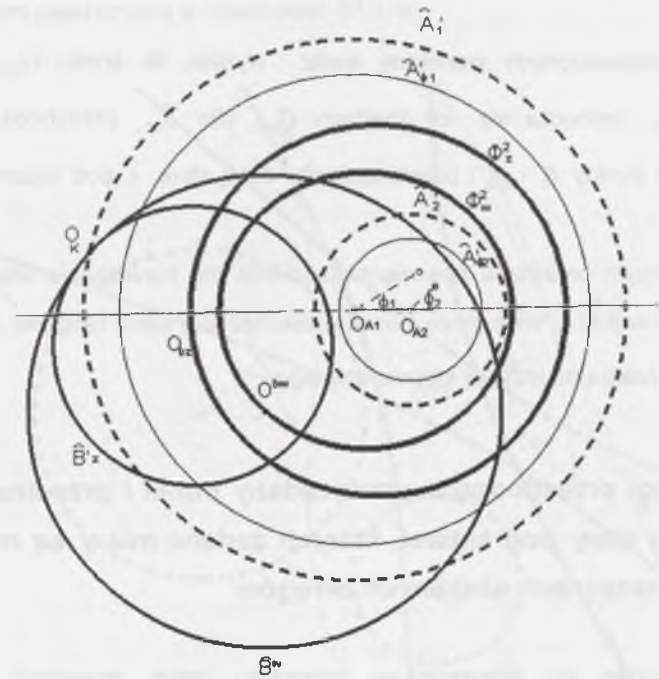
IV.2.4. Kwadrykami Φ_1^2 i Φ_2^2 są dwie elipsoidy obrotowe Φ_1^2 i Φ_2^2 .

Rzuty prostokątne kwadryk Φ_1^2 i Φ_2^2 wykonano na podstawie „mac15-mw” i „mac15_mz” lub łącznie dla obydwu kwadryk „mac15_mc” korzystając z założeń podanych na rys.2.4m.



IV.2.4m

Na rys. IV.2.4. przedstawiono rzuty kwadryk Φ_1^2 i Φ_2^2 .



IV.2.4

IV.3. Okręgi przechodzące przez zadane dwa punkty i przecinające daną sferę pod kątami o ustalonej rozwartości, mierzonej w płaszczyznach rozważanych okręgów

Z przeprowadzonych wcześniej analiz wynika, że środki $O_{b_{1,2}}$ szukanych okręgów $\bar{b}_{1,2}$ jednoczą się ze środkami $O_{B_{1,2}}$ sfer $\bar{B}_{1,2}$ przechodzących przez zadane dwa punkty P_1 i P_2 i przecinających daną sferę \bar{A} pod kątami o przyjętej mierze ϕ .

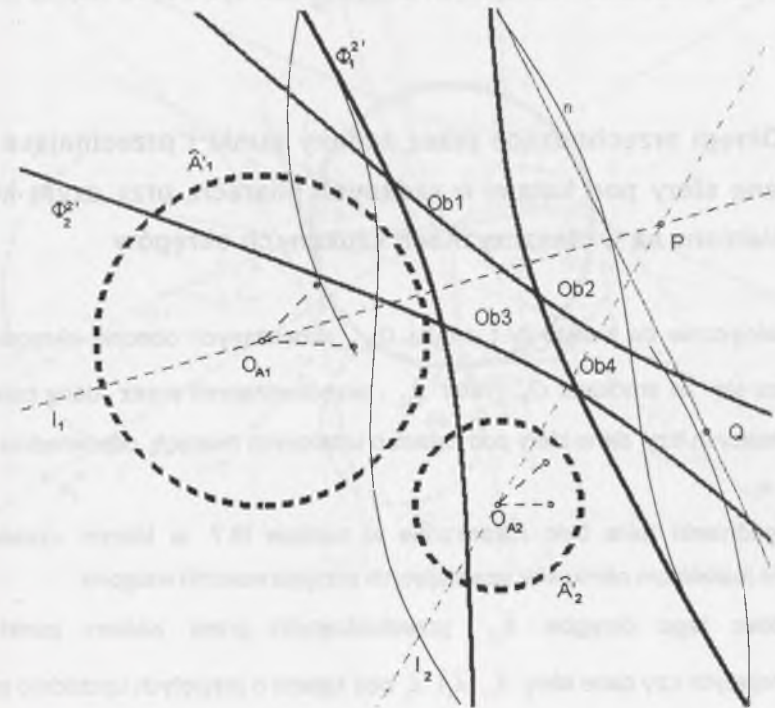
Tym samym omawiane obecnie zagadnienie ma rozwiązania analogiczne do wskazanych w p.III.3, więc może istnieć nieskończenie wiele okręgów $\bar{b}_{1,2}$, których środki $O_{b_{1,2}}$ należą do krzywej stopnia drugiego c^2 .

IV.4. Okręgi przechodzące przez zadany punkt i przecinające dwie dane sfery pod kątami, których zadane miary są mierzone w płaszczyznach szukanych okręgów

Analogicznie do poprzedniego przypadku łatwo stwierdzić, że środki $O_{b_{1,2}}$ rozważanych okręgów $\bar{b}_{1,2}$ jednoczą się ze środkami $O_{B_{1,2}}$ sfer $\bar{B}_{1,2}$ przechodzących przez dany punkt P i przecinających dwie dane sfery \bar{A}_1 i \bar{A}_2 pod kątami o zadanych miarach ϕ_1 i ϕ_2 . Analizę właściwości miejsc geometrycznych środków tego rodzaju sfer przeprowadzono w p.III.5. Można więc obecnie stwierdzić, że środki $O_{b_{1,2}}$ rozważanych tutaj okręgów $\bar{b}_{1,2}$ należą więc do krzywej rzędu czwartego c^4 , będącej częścią wspólną dwóch kwadryk Φ_1^2 i Φ_2^2 , określonych dla każdej z zadanych sfer \bar{A}_1 i \bar{A}_2 , przyporządkowanych im kątów ϕ_1 i ϕ_2 oraz danego punktu P .

Ramiona kątów o miarach ϕ_1 i ϕ_2 , zawartych pomiędzy szukanyimi okręgami $\bar{b}_{1,2}$ a danymi sferami \bar{A}_1 i \bar{A}_2 , należą do płaszczyzn szukanych okręgów.

Na rys.IV.4 pokazano cztery punkty $O_{b_{1,2,3,4}}$, należące do płaszczyzny określonej punktami O_{A_1} O_{A_2} P , które są wyznaczone dla przypadku, gdy płaszczyzna ta stanowi rzutnię π . Są one elementami wspólnymi hiperbol będących przekrojami południkowymi płaszczyzną π hiperboloid Φ_1^2 i Φ_2^2 .



IV.4

IV.5. Okręgi przechodzące przez dwa zadane punkty i przecinające dwie dane sfery pod kątami o ustalonych rozwartościach, mierzonymi w płaszczyznach rozważanych okręgów

Analogicznie do punktu IV.1 środki $O_{b_{1,2}}$ rozważanych okręgów $\bar{b}_{1,2}$ jednoczą się ze środkami $O_{B_{1,2}}$ sfer $\bar{B}_{1,2}$ przechodzących przez dwa dane punkty P_1 i P_2 przecinających dwie dane sfery \bar{A}_1 i \bar{A}_2 pod kątami o zadanych miarach ϕ_1 i ϕ_2 .

Zagadnienie to przeanalizowano w punkcie III.6. Z uzyskanych tam wniosków wynika, że środki $O_{b_{1,2}}$ rozważanych obecnie okręgów $\bar{b}_{1,2}$ należą do iloczynu płaszczyzny symetrii odcinka $P_1 P_2$ z określonymi w III.6 kwadrykami Φ_1^2 i Φ_2^2 . Dla szczególnego przypadku, który ma tutaj miejsce, a omówiony jest w p.III.6, miejscem geometrycznym środków rozważanych okręgów może być krzywa stopnia drugiego c^2 .

IV.6. Okręgi przechodzące przez zadany punkt i przecinające trzy dane sfery pod kątami o zadanych miarach, przy czym kąty te mierzone są w płaszczyznach szukanych okręgów

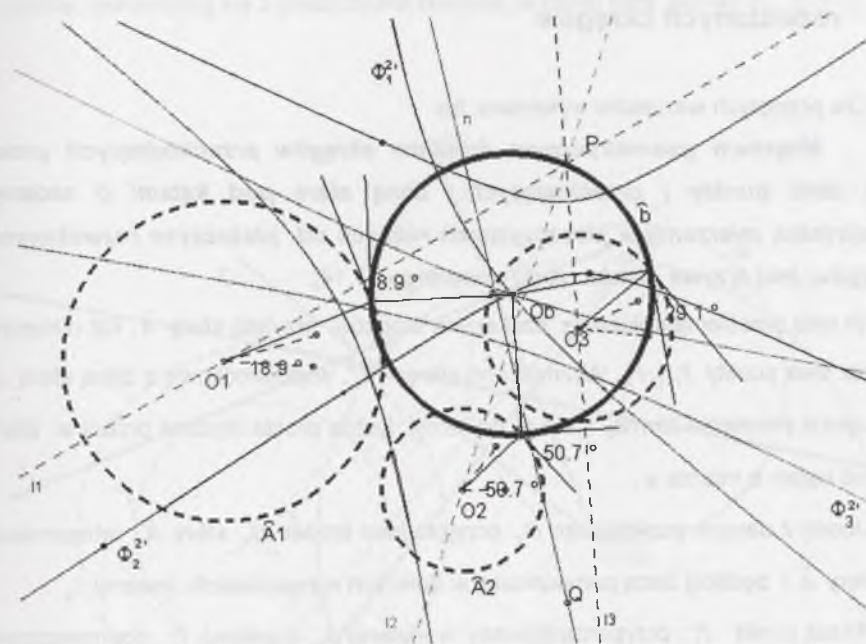
Analogicznie do punktu IV.1 środki $O_{b_{1,2}}$ rozważanych obecnie okręgów $\bar{b}_{1,2}$ jednoczą się ze środkami $O_{b_{1,2}}$ sfer $\bar{b}_{1,2}$, przechodzących przez dany punkt P i przecinających trzy dane sfery pod kątami o ustalonych miarach odpowiednio ϕ_1, ϕ_2 i ϕ_3 .

Zagadnienie takie było rozpatrzone w punkcie III.7, w którym uzasadniono istnienie maksimum ośmiu sfer spełniających przyjęte warunki wstępne.

Wobec tego okręgów $\bar{b}_{1,2}$ przechodzących przez zadany punkt P i przecinających trzy dane sfery \bar{A}_1, \bar{A}_2 i \bar{A}_3 pod kątami o przyjętych uprzednio miarach ϕ_1, ϕ_2 i ϕ_3 , może być co najwyżej osiem.

Jako przykład pokazano szczególny przypadek, gdy punkt P należy do płaszczyzny określonej środkami danych sfer $O_{A_1} O_{A_2} O_{A_3}$, czyli rzutni. Dla takich założeń wyznaczono punkt O_b jako środek szukanego okręgu. Jest on punktem wspólnym trzech stożkowych c_1^2, c_2^2 i c_3^2 , w których rzutnia przecina trzy kwadryki Φ_1, Φ_2 i Φ_3 , będące zbiorem środków okręgów przechodzących przez punkt P i zawierających z danymi sferami \bar{A}_1, \bar{A}_2 i \bar{A}_3 przyporządkowane im kąty ϕ_1, ϕ_2 i ϕ_3 .

Na rys.IV.6 zilustrowano omówiony przypadek.



IV.6

Przykład ten zamyka część omawiającą przypadki, gdy płaszczyzna kąta zawartego pomiędzy szukanym okręgiem a zadaną sferą jednoczy się z płaszczyzną rozpatrywanego okręgu.

Rozważania prowadzone w dalszej części rozdziału dotyczą założeń, w których usytuowanie płaszczyzn kątów, pod którymi rozważane okręgi przecinają dane sfery, jest dowolne.

IV.7. Właściwości zbioru środków okręgów przechodzących przez dane dwa punkty i przecinających daną sferę pod kątami o zadanej mierze, gdy płaszczyzny tych kątów nie zawierają rozważanych okręgów

Dla przyjętych warunków wykazano, że:

Miejscem geometrycznym środków okręgów przechodzących przez dwa dane punkty i przecinających daną sferę pod kątami o zadanej rozwartości, mierzonych w płaszczyznach różnych od płaszczyzn rozważanych okręgów, jest krzywa płaska rzędu czwartego, [7,14].

W celu określenia położenia szukanych środków przyjęto sferę \bar{A} , kąt o mierze ϕ oraz dwa punkty P_1 i P_2 . Wyznaczono sferę \bar{A}_ϕ , współśrodkową z daną sferą \bar{A} o długości promienia równej $r_A \cos \phi$, do której każda prosta styczna przecina sferę \bar{A} pod kątem o mierze ϕ .

Jeden z danych punktów np. O_K przyjęto jako środek O_K sfery \bar{K} , ortogonalnej do sfery \bar{A} i będącej bazą pomocniczej, w dalszych rozważaniach, inwersji I_K .

Przez punkt P_1' , przyporządkowany w inwersji I_K punktowi P_1 , poprowadzono proste $b_{1,2}'$ styczne do sfery \bar{A}_ϕ , które są tworzącymi powierzchni stożkowej obrotowej Φ^2 .

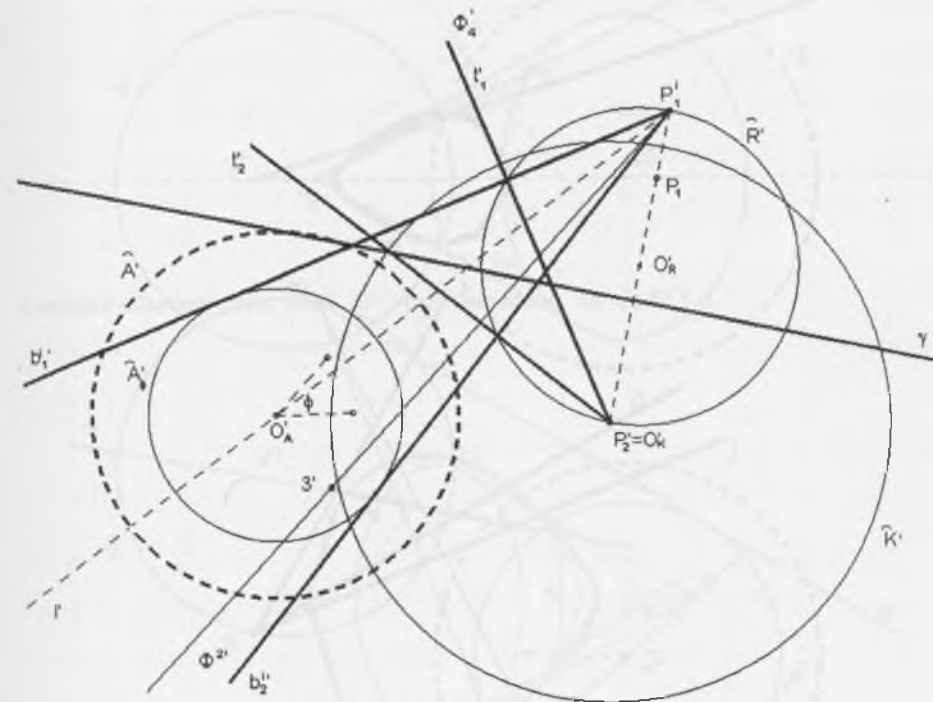
Każdej prostej $b_{1,2}'$ odpowiada w inwersji I_K okrąg $\bar{b}_{1,2}$, przechodzący przez punkty P_1 i P_2 i przecinający daną sferę \bar{A} pod kątem o zadanej mierze ϕ .

Z własności przekształcenia inwersyjnego I_K wynika, że środki okręgów $\bar{b}_{1,2}$ leżą na prostych $t_{1,2}$, które przechodzą przez punkt O_K , przecinają odpowiednie proste $b_{1,2}'$ i są do nich prostopadłe. Punkty wspólne parami prostopadłych prostych $b_{1,2}'$ i $t_{1,2}$ należą do sfery \bar{R} o średnicy $O_K P_1'$.

Część wspólna sfery \bar{R} i powierzchni stożkowej Φ^2 jest krzywą rzędu czwartego c^4 . Krzywą tę można uznać za kierującą powierzchni stożkowej, o wierzchołku O_K i tworzących $t_{1,2}$.

W publikacji [15] wykazano, że tak utworzona powierzchnia stożkowa o wierzchołku w punkcie P_2 jest powierzchnią rzędu czwartego Φ^4 .

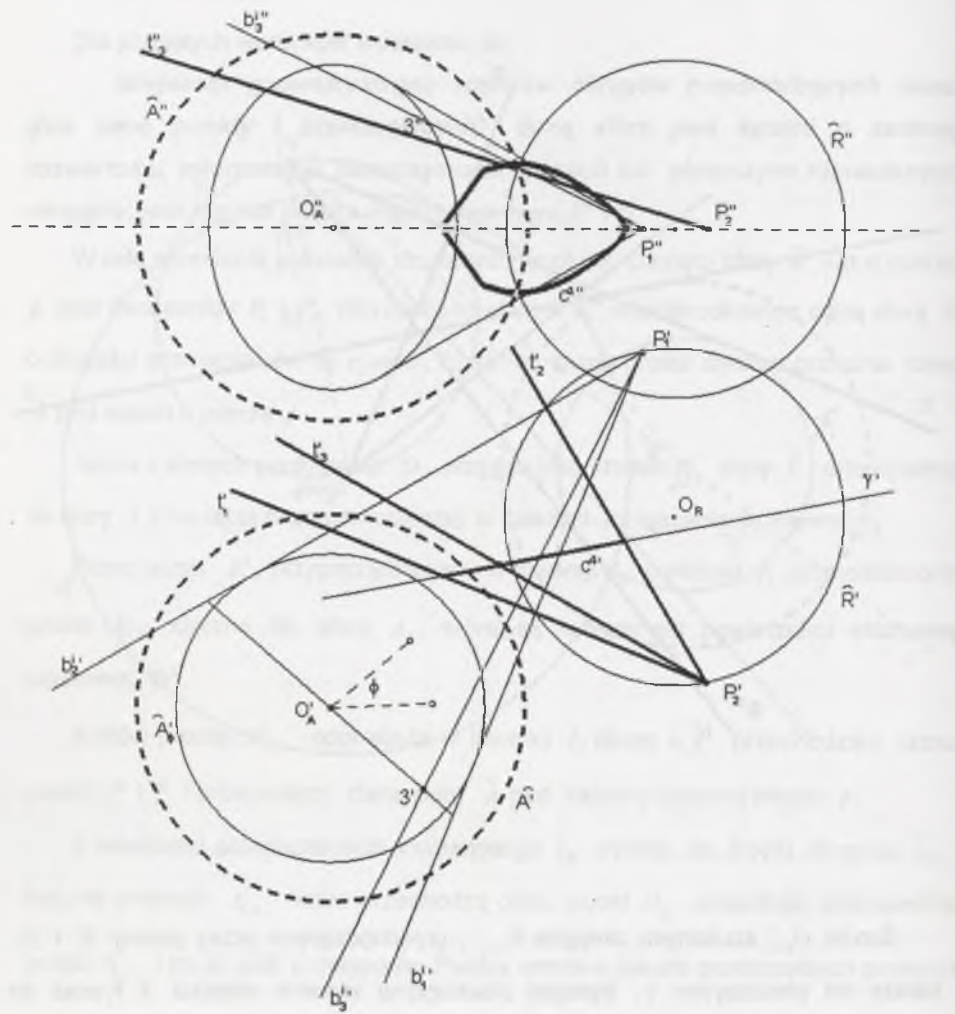
Na rys. IV.7.1 przedstawiono omówione zależności w rzucie prostokątnym na rzutnię, jednoczącą się z płaszczyzną rysunku, w której leżą punkty P_1 , P_2 i O_K .



IV.7.1

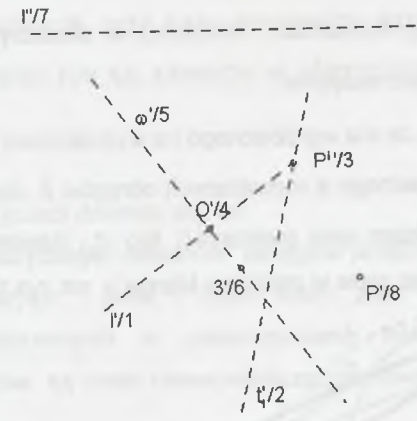
Środki $O_{b_{1,2}}$ szukanych okręgów $\bar{b}_{1,2}$, przechodzących przez punkty P_1 i P_2 , należą do płaszczyzny γ , będącej płaszczyzną symetrii odcinka $P_1 P_2$ oraz do wcześniej wyznaczonej powierzchni stożkowej Φ^4 . Tym samym należą one do krzywej płaskiej rzędu czwartego c^4 , będącej przekrojem powierzchni Φ^4 płaszczyzną γ .

Konstrukcję obrazu rozważanej krzywej c^4 wykreślono w rzutach prostokątnych metody Monge'a [32] na rys.IV.7.2.



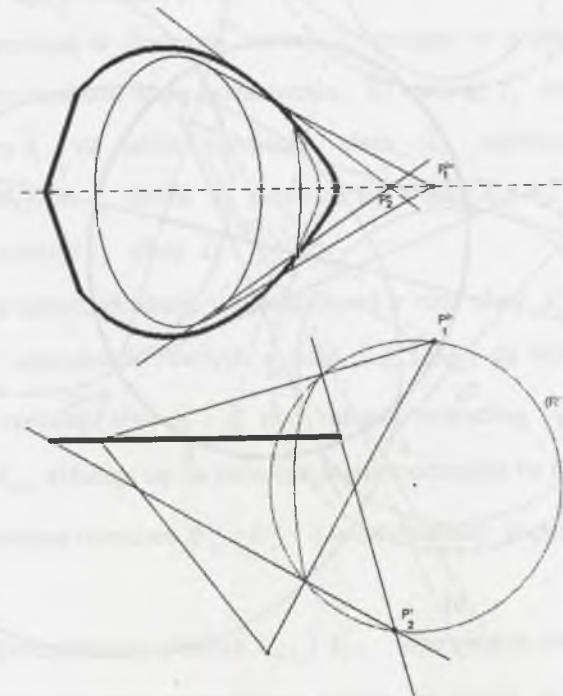
IV.7.2

Analogiczną konstrukcję krzywej c^4 zrealizowano przy założeniach danych na rys.IV.7.3m



IV.7.3m

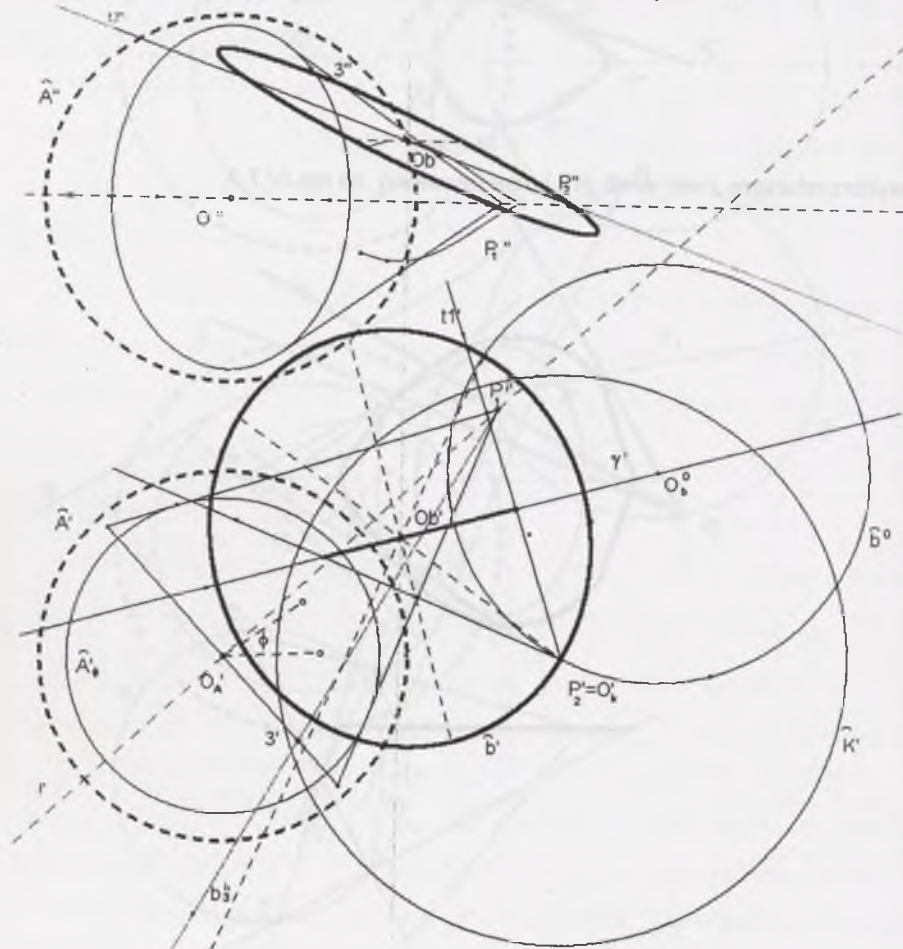
z wykorzystaniem „mac_wis6_m” i przedstawiono na rys.IV.7.3.



IV.7.3

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że istnieje nieskończenie wiele okręgów $\bar{b}_{1,2}$, przechodzących przez dwa dane punkty P_1 i P_2 i przecinających daną sferę \bar{A} pod kątami o ustalonej rozwartości, mierzonej w płaszczyznach okręgów $\bar{b}_{1,2}$, których miary $\phi_{1,2}$ przyjęto wstępnie.

Zauważmy jeszcze, że dla wyróżnionego na wyznaczonej uprzednio krzywej c^4 punktu O_b jako środka jednego z rozważanych okręgów \bar{b} okrąg ten jest określony jednoznacznie tym punktem oraz punktami P_1 lub P_2 . Konstrukcję obrazu takiego okręgu pokazano stosując zapis w metodzie Monge'a na rys. IV.7.4.



IV.7.4

IV.8. Właściwości zbioru środków okręgów przechodzących przez zadany punkt i przecinających dwie dane sfery pod kątami o zadanych miarach, gdy kąty pomiędzy szukаныmi okręgami a danymi sferami nie są zawarte w płaszczyznach rozważanych okręgów

W analizowanej sytuacji dowodzi się, że:

Miejscem geometrycznym środków okręgów przechodzących przez dany punkt i przecinających dwie dane sfery pod kątami o ustalonych rozwartościach, mierzonych w płaszczyznach różnych od płaszczyzn rozważanych okręgów, są dwie niewspółpłaszczyznowe krzywe płaskie rzędu czwartego, [7,4].

W celu określenia położenia środków $O_{b_{1,2}}$ rozważanych okręgów $\bar{b}_{1,2}$ przyjęto dwie sfery \bar{A}_1 i \bar{A}_2 , położone zewnątrz względem siebie, punkt P leżący na zewnątrz \bar{A}_1 i \bar{A}_2 oraz kąty o miarach ϕ_1 i ϕ_2 .

Środek O_K pomocniczej w dowodzie inwersji I_K przyjęto w punkcie P . Dla uproszczenia dalszego działania sferę podstawową \bar{K} inwersji I_K przyjęto jako ortogonalną do sfery \bar{A}_1 . W takim przypadku sfera \bar{A}'_1 , odpowiadająca w przekształceniu inwersyjnym I_K sferze \bar{A}_1 , jednoczy się z nią ($\bar{A}'_1 = \bar{A}_1$). Sferze \bar{A}_2 przyporządkowano w inwersji I_K sferę \bar{A}'_2 .

Sferom \bar{A}_1 i \bar{A}'_2 przyporządkowano współśrodkowe z nimi sfery \bar{A}'_{ϕ_1} i \bar{A}'_{ϕ_2} , o długościach promieni odpowiednio równych $r_{A_1} \cos \phi_1$ i $r_{A_2} \cos \phi_2$, do których proste styczne $b'_{z_{1,2}}$ i $b'_{w_{1,2}}$ przecinają sfery \bar{A}'_1 i \bar{A}'_2 pod kątami o miarach ϕ_1 i ϕ_2 .

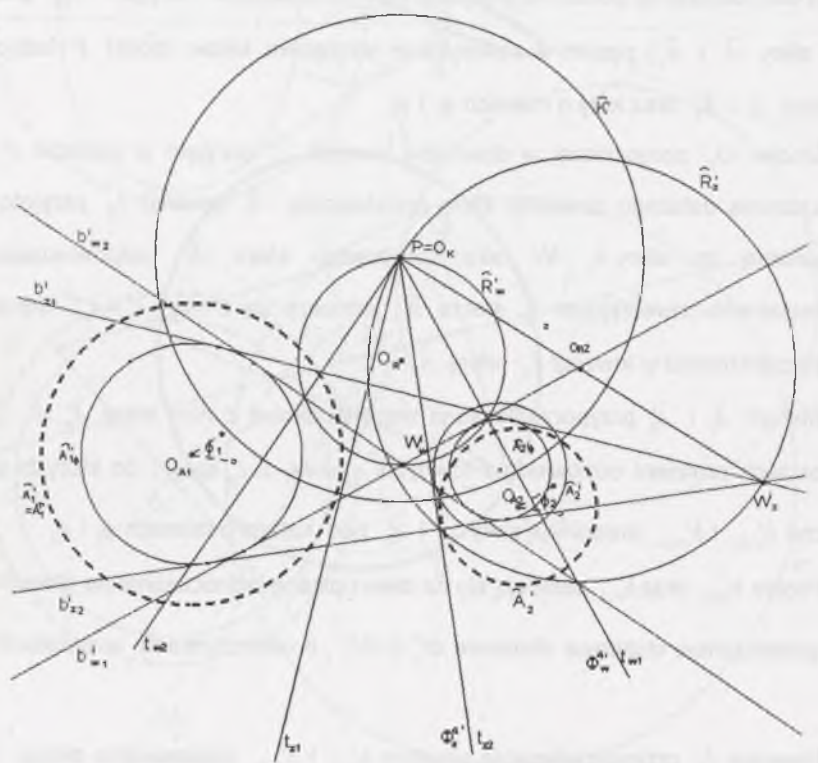
Proste $b'_{w_{1,2}}$ oraz $b'_{z_{1,2}}$ składają się na dwie opisane jednocześnie na sferach \bar{A}'_{ϕ_1} i \bar{A}'_{ϕ_2} powierzchni stożkowe obrotowe $\Phi_{\phi_1}^{z'}$ i $\Phi_{\phi_2}^{z'}$, o wierzchołkach w punktach W'_w i W'_z .

Inwersja I_K przyporządkowuje prostym $b'_{w_{1,2}}$ i $b'_{z_{1,2}}$ odpowiednio okręgi $\bar{b}_{w_{1,2}}$ i $\bar{b}_{z_{1,2}}$. Z własności przekształcenia inwersyjnego wynika, że okręgi $\bar{b}_{w_{1,2}}$ i $\bar{b}_{z_{1,2}}$

przechodzą przez punkt $P=O_K$ (jako środek inwersji), a także odpowiednio przez punkty W_w i W_z , będące obrazami w inwersji I_K punktów W'_w i W'_z . Ponadto okręgi $\bar{b}_{w1,2}$ i $\bar{b}_{z1,2}$ przecinają dane sfery \bar{A}_1 i \bar{A}_2 pod kątami o danych miarach ϕ_1 i ϕ_2 .

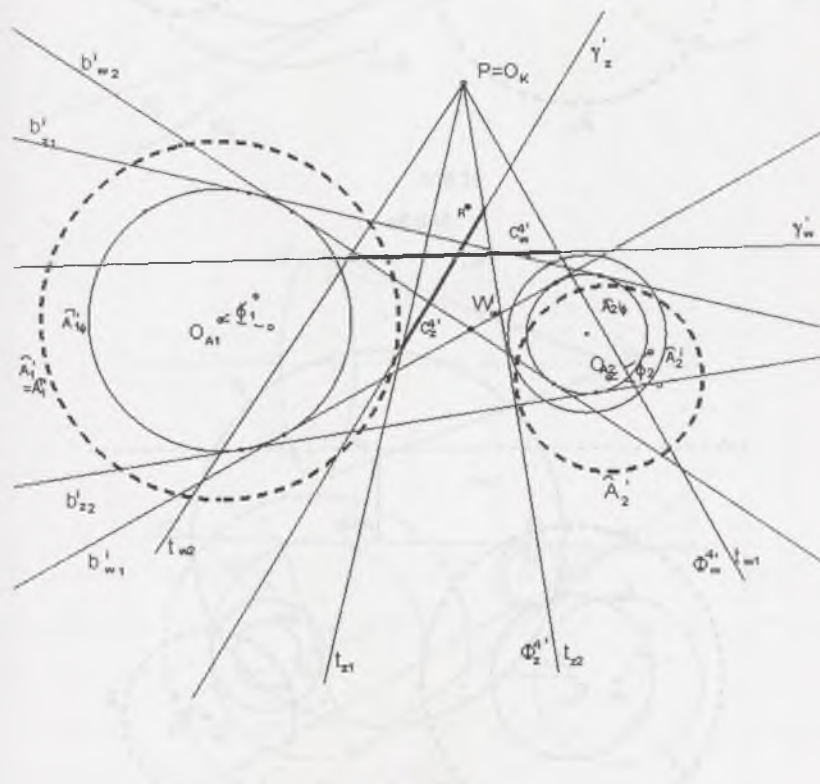
Z innej właściwości przekształcenia inwersyjnego wynika, że środki $O_{b1,2}$ rozwiązań okręgów $\bar{b}_{w1,2}$ i $\bar{b}_{z1,2}$, odpowiadających w inwersji I_K tworzącym $b'_{w1,2}$ i $b'_{z1,2}$, odpowiednio należą do prostych $t_{w1,2}$ i $t_{z1,2}$ przechodzących przez punkt P , przecinających tworzące $b'_{w1,2}$ i $b'_{z1,2}$ i prostopadłych do tych tworzących.

Jak już wcześniej wspomniano w [15], wykazano, że proste $t_{w1,2}$ i $t_{z1,2}$ są tworzącymi dwóch powierzchni stożkowych rzędu czwartego Φ_w^4 i Φ_z^4 . Rzut prostokątny omawianej sytuacji przestrzennej na płaszczyznę rysunku, tożsamą z płaszczyzną $\lambda = O_{A1}O_{A2}P$, pokazano na rys.IV.8.1.



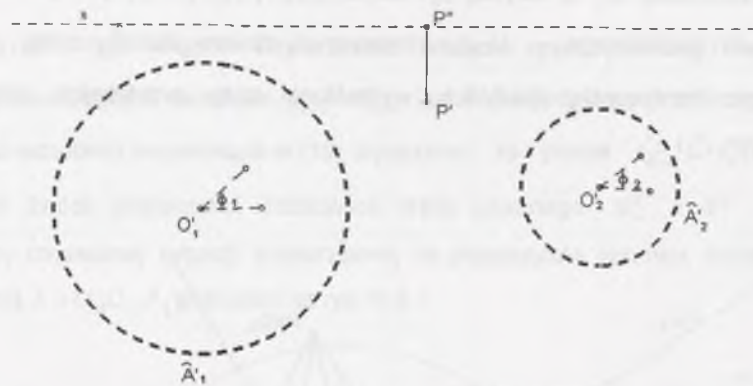
IV.8.1

Równocześnie środki rozwiązań okręgów $\bar{b}_{1,2}$ należą przynajmniej do jednej z płaszczyzn γ_w i γ_z , które są płaszczyznami symetrii odcinków PW_w i PW_z , gdzie punkty W_w i W_z są przyporządkowane inwersyjnie punktom W'_w i W'_z . Płaszczyzna γ_w przecina powierzchnię Φ_w^4 w krzywej płaskiej rzędu czwartego c_w^4 , zaś płaszczyzna γ_z powierzchnię Φ_z^4 w krzywej c_z^4 . Suma krzywych c_w^4 i c_z^4 jest poszukiwanym miejscem geometrycznym środków rozwiązań okręgów $\bar{b}_{1,2}$. Na rys.IV.8.2, będącym kontynuacją rys.IV.8.1, wykreślono rzuty prostokątne omawianych krzywych c_w^4 i c_z^4 .

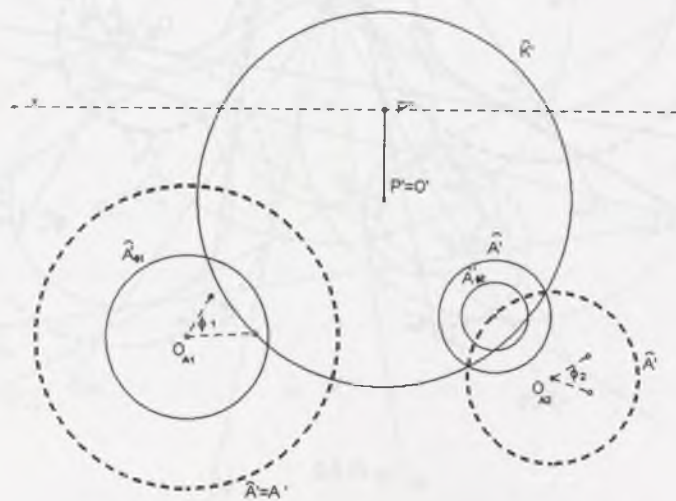


IV.8.2

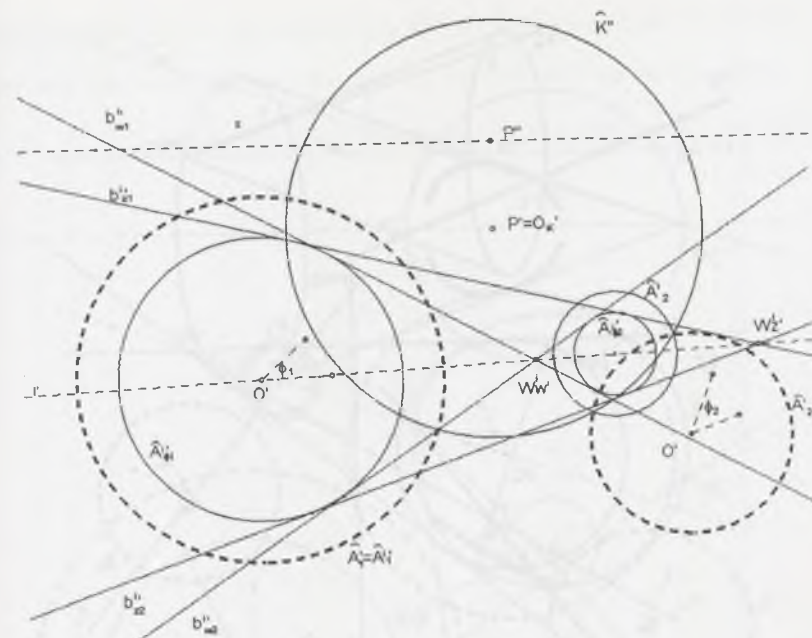
Następne rysunki IV.8.3a – IV.8.3g przedstawiają kolejne fazy konstrukcji w rzutach prostokątnych Monge'a obrazu jednej z wyróżnionych krzywych, a mianowicie krzywej c_4^4 .



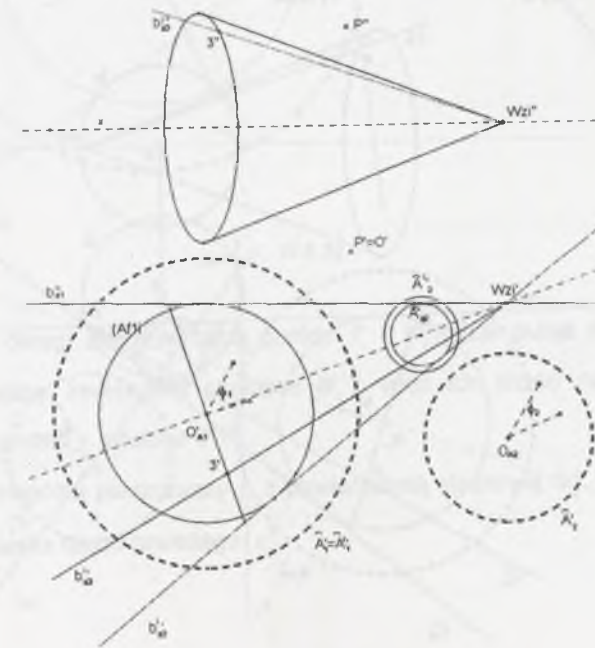
IV.8.3a



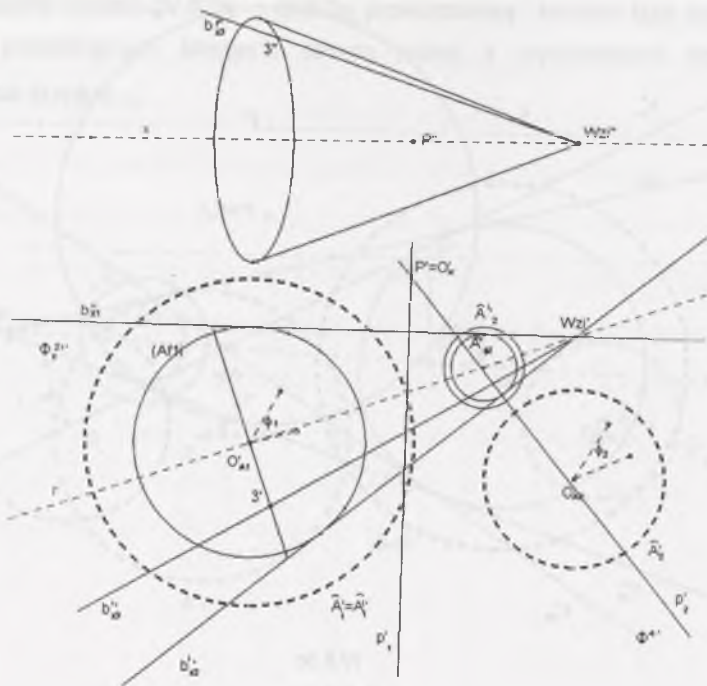
IV.8.3b



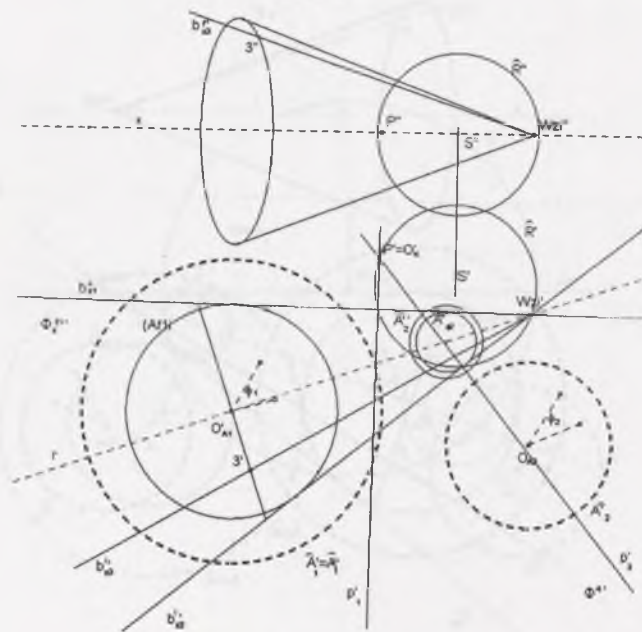
IV.8.3c



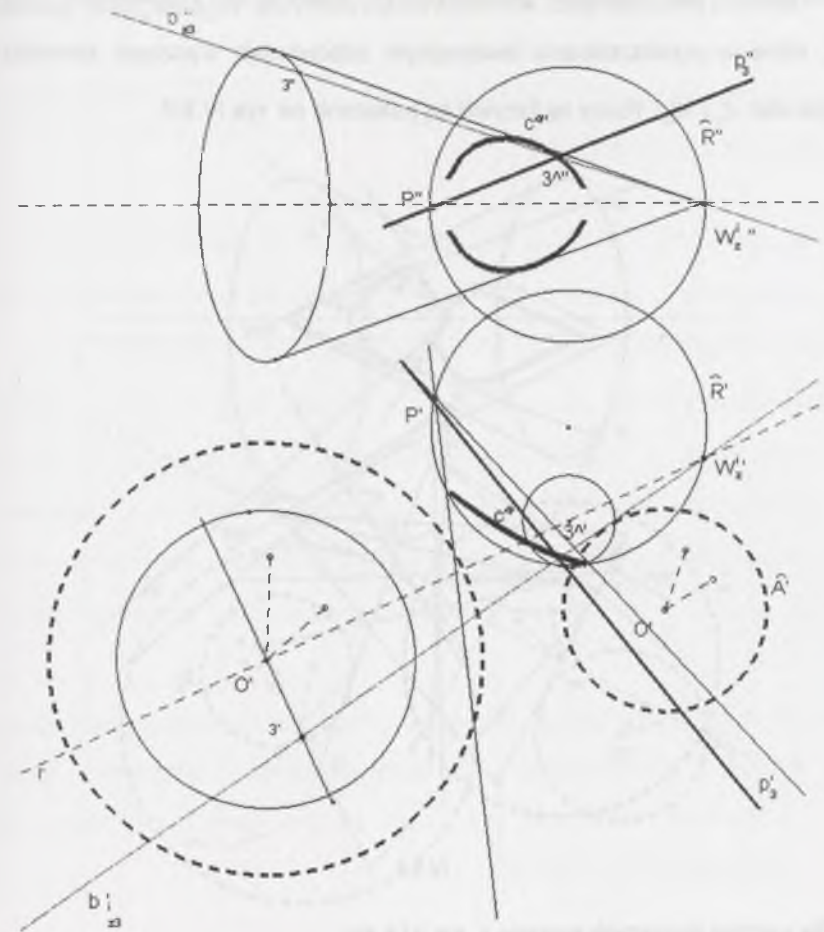
IV.8.3d



IV.8.3e



IV.8.3f

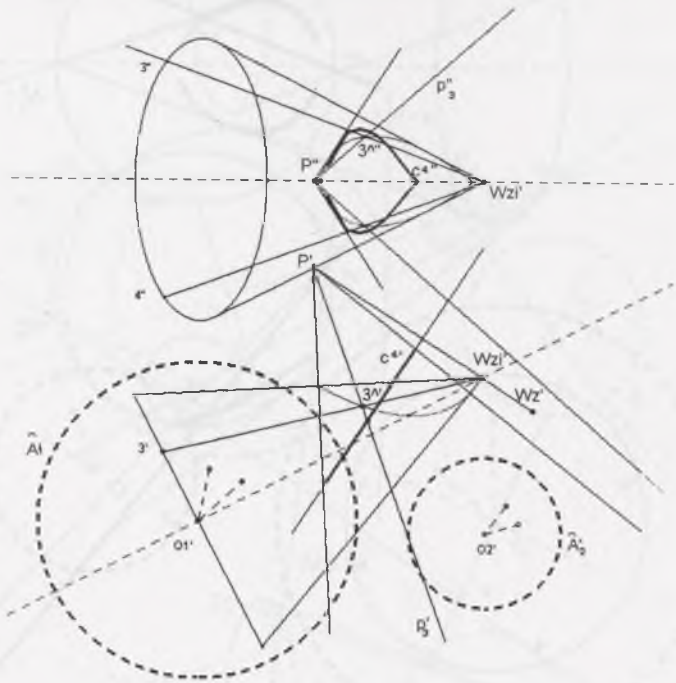


IV.8.3g

Szukane okręgi zawierać będą punkty P i W_2 (gdzie punkt W_2 jest to punkt przyporządkowany inwersyjnie punktowi W_2'), więc ich środki należeć będą do płaszczyzny symetrii γ odcinka PW_2 .

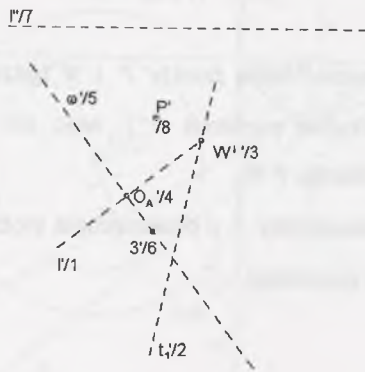
Częścią wspólną płaszczyzny γ z powierzchnią stożkową Φ_2^4 o wierzchołku P jest krzywa płaska rzędu czwartego c_2^4 .

Krzywa c_2^4 jest miejscem geometrycznym środków $O_{b_{21,2}}$ szukanych okręgów $\tilde{b}_{21,2}$, które w przekształceniu inwersyjnym odpowiadają stycznym zewnętrznym $b_{21,2}$ do sfer $\tilde{A}_{1\phi}$ i $\tilde{A}_{2\phi}$. Rzuty tej krzywej są pokazane na rys.IV.8.3.



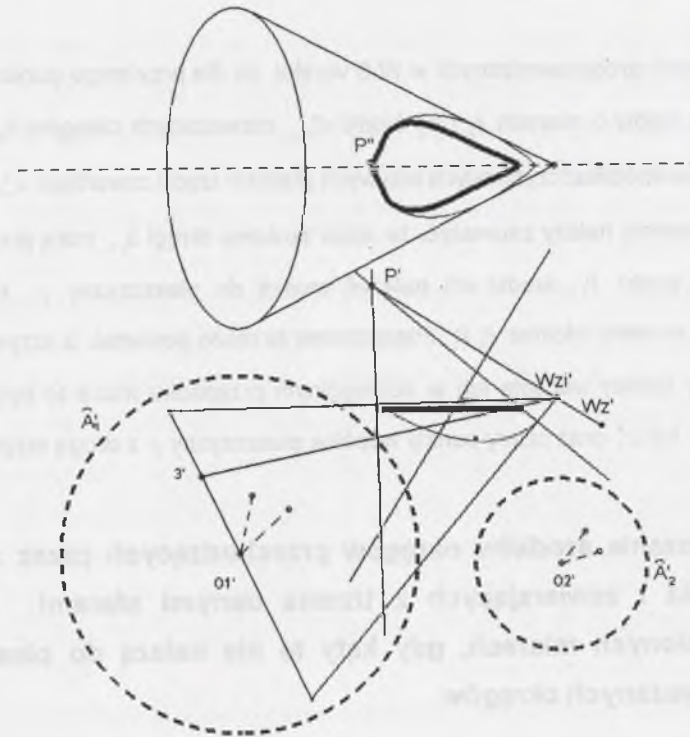
IV.8.3

Dla założeń przyjętych zgodnie z rys.IV.8.4m



IV.8.4m

za pomocą „mac_wis6_m” otrzymuje się na rys.IV.8.4 rzuty szukanej krzywej.



IV.8.4

Dla przyjętego na ustalonym miejscu geometrycznym c_2^4 punktu O_b jako środka okrąg \tilde{b} jest określony tym punktem O_b i wynikającym z założeń punktem P oraz punktem W_2 .

IV.9. Usytuowanie środków okręgów przechodzących przez dwa zadane punkty i przecinających dwie dane sfery pod kątami o zadanych miarach, gdy kąty te nie są zawarte w płaszczyznach rozważanych okręgów

Z rozważań przeprowadzonych w IV.8 wynika, że dla przyjętego punktu P_1 , sfer \bar{A}_1 i \bar{A}_2 oraz kątów o miarach ϕ_1 i ϕ_2 środki $O_{b_{1,2}}$ rozważanych okręgów $\bar{b}_{1,2}$ należą do dwóch niewspółpłaszczyznowych krzywych płaskich rzędu czwartego c_w^4 i c_z^4 .

Równocześnie należy zauważyć, że jeżeli szukane okręgi $\bar{b}_{1,2}$ mają przechodzić także przez punkt P_2 , środki ich należeć muszą do płaszczyzny γ , która jest płaszczyzną symetrii odcinka $P_1 P_2$. Płaszczyzna ta może posiadać z krzywymi c_w^4 i c_z^4 po cztery punkty wspólne lub w szczególnym przypadku może to być jedna z krzywych c_w^4 lub c_z^4 oraz cztery punkty wspólne płaszczyzny γ z drugą krzywą.

IV.10. Położenie środków okręgów przechodzących przez zadany punkt i zawierających z trzema danymi sferami kąty o ustalonych miarach, gdy kąty te nie należą do płaszczyzn rozważanych okręgów

W p.IV.8 wykazano, że dla przyjętego punktu P , sfer \bar{A}_1 i \bar{A}_2 oraz odpowiadających im kątów o miarach ϕ_1 i ϕ_2 środki rozpatrywanych okręgów należą do dwóch niewspółpłaszczyznowych krzywych płaskich rzędu czwartego c_w^4 i c_z^4 .

Dla tego samego punktu P oraz innej pary sfer, np. \bar{A}_1 i \bar{A}_3 , środki rozważanych okręgów należą do dwóch innych niewspółpłaszczyznowych krzywych płaskich rzędu czwartego c_{w1}^4 i c_{z1}^4 .

Każda z tych krzywych należy do innej płaszczyzny. Płaszczyzny krzywych c_w^4 i c_z^4 z płaszczyznami krzywych c_{w1}^4 i c_{z1}^4 posiadają cztery wspólne proste.

Każda z nich z każdą z krzywych c_w^4 , c_z^4 , c_{w1}^4 i c_{z1}^4 posiadać może cztery punkty wspólne.

Tak więc dla tak przyjętych założeń istnieje może co najwyżej szesnaście punktów, będących środkami szukanych okręgów.

V. ZAGADNIENIA DOTYCZĄCE NIEWSPÓŁPŁASZCZYZNOWYCH OKRĘGÓW, PRZECINAJĄCYCH SIĘ POD KĄTAMI O PRZYJĘTYCH WSTĘPNIE MIARACH

Rozdział V jest ostatnim rozdziałem, w którym rozpatruje się pewne teoretyczne zagadnienia dotyczące niektórych geometrycznych figur obrotowych, w tym przypadku okręgów posiadających punkty wspólne. Taki temat jest niejako dopełnieniem do całości omawianych zagadnień.

W ten sposób wyczerpuje się wszystkie możliwości wzajemnych relacji w zbiorze zawierającym okręgi i sfery.

Równocześnie opracowanie tego rozdziału zostało zainspirowane świadomością występowania omawianych tutaj relacji w różnych dziedzinach techniki.

Celem tych rozważań jest ustalenie miejsca geometrycznego środków niewspółpłaszczyznowych okręgów, przecinających się pod kątami o zadanych miarach i spełniających inne założone wstępnie warunki.

Zagadnienie to wydaje się być nowe, gdyż nie udało się ustalić publikacji dotyczących tak postawionego tematu. Dopiero zastosowanie techniki komputerowej pozwoliło wygenerować krzywe, stanowiące takie miejsce geometryczne. Wyznaczanie takich krzywych manualnie, indywidualnie dla każdego założenia, wydaje się być niezmiernie trudne.

Wyróżniono trzy przypadki w zależności od usytuowania płaszczyzn kątów, pod którymi przecinają się omawiane tu okręgi. Przypadek najbardziej ogólny nie definiuje położenia płaszczyzny takiego kąta. W przypadkach szczególnych płaszczyzna kąta może należeć do okręgu danego lub szukanego.

Nie wyróżniano tutaj sytuacji w zależności od liczby punktów wspólnych dwóch niewspółpłaszczyznowych okręgów.

Wydaje się, że w tak potraktowanym temacie można jeszcze szukać ciekawych nowych teoretycznych rozwiązań.

V.1. Właściwości zbioru środków okręgów przechodzących przez zadany punkt i przecinających dany niewspółpłaszczyznowy z nimi okrąg pod kątami o znanym wierzchołku i zadanej mierze

Wszystkie rysunki, ilustrujące rozważania prowadzone w niniejszym rozdziale, wykonano, posługując się rzutami prostokątnymi Monge'a [32]. Rysunki zawierające założenia do makrokonstrukcji dla programu CABRI oznaczono zawsze literą „m” (np. V.1.5m).

Dla zagadnień dotyczących okręgów niewspółpłaszczyznowych spełniających przyjęte obecnie warunki wykazano, że:

Miejscem geometrycznym środków okręgów, przechodzących przez zadany punkt i przecinających dany niewspółpłaszczyznowy z nimi okrąg pod kątami o danej mierze i ustalonym wierzchołku jest krzywa płaska rzędu czwartego.

Rozpoczynając przebieg rozumowania, mającego na celu wykazanie poprawności powyższego stwierdzenia, w pewnej płaszczyźnie przyjęto okrąg \bar{a} , punkt P oraz punkt W należący do okręgu \bar{a} , a także ustalono miarę kąta ϕ , pod którym rozważane okręgi $\bar{b}_{1,2}$ mają przecinać okrąg \bar{a} . Punkt W jest wierzchołkiem mierzonego kąta.

W dalszym ciągu przeprowadzono następujące działania geometryczne:

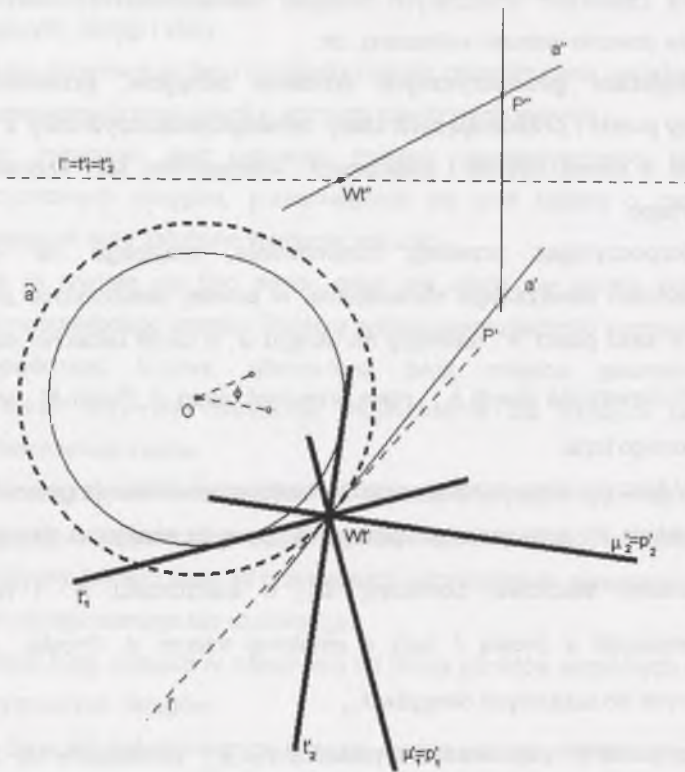
- w punkcie W poprowadzono prostą l styczną do okręgu \bar{a} , którą przyjęto jako oś powierzchni stożkowej obrotowej Φ_ϕ^2 , o wierzchołku W i tworzących $t_{1,2}$, zawierających z prostą l kąty o ustalonej mierze ϕ . Proste $t_{1,2}$ są prostymi stycznymi do szukanego okręgu $\bar{b}_{1,2}$;

- przez punkt W poprowadzono płaszczyzny $\mu_{1,2}$ prostopadłe do tworzących $t_{1,2}$.

W płaszczyznach tych leżeć muszą środki $O_{b_{1,2}}$ rozważanych okręgów, a równocześnie płaszczyzny te obwodzą powierzchnię stożkową obrotową o wierzchołku W .

- wyróżniono pęk płaszczyzn $\alpha_{1,2}$ o osi $a = WP$ wyznaczonych przez odpowiednie tworzące $t_{1,2}$ powierzchni Φ^2 i punkt P ;
- wzięto pod uwagę zbiór prostych $p_{1,2}$, będących krawędziami odpowiednich płaszczyzn $\alpha_{1,2}$ i $\mu_{1,2}$. Proste $p_{1,2}$ jako proste przechodzące przez punkt W i prostopadłe do odpowiednich tworzących $t_{1,2}$ składają się na powierzchnię stożkową rzędu czwartego Φ^4 , o wierzchołku w punkcie W .

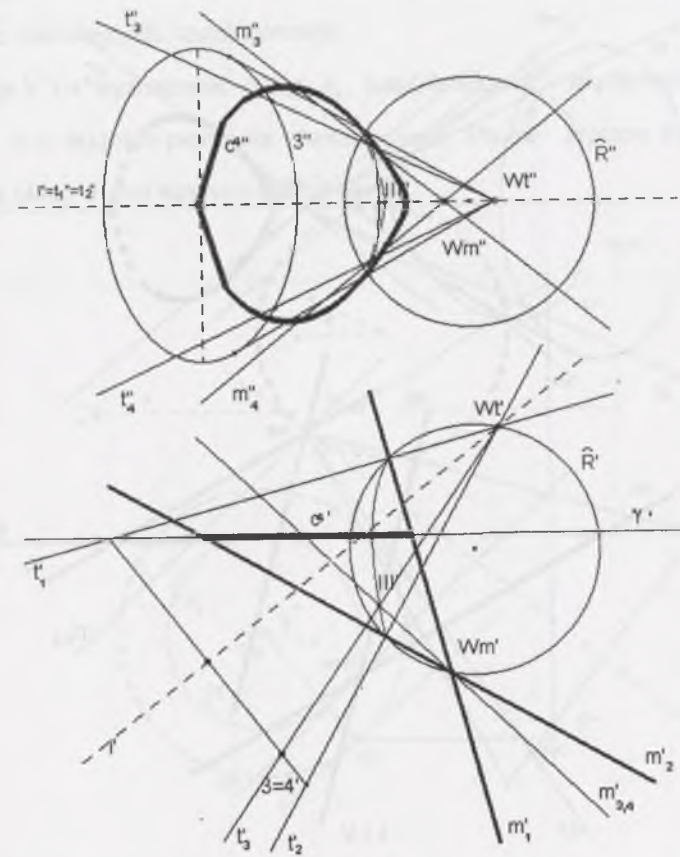
Opisana sytuacja jest pokazana na rys.V.1.1.



V.1.1

Rodzaj powierzchni Φ^4 ustalono na podstawie zależności podanych w [15].

W cytowanej publikacji rozważano dwie powierzchnie stożkowe: powierzchnię Φ^2 o wierzchołku W , i powierzchnię Φ_m^4 o wierzchołku W_m , których tworzące $t_{1,2}$ i $m_{1,2}$ są odpowiednio prostopadłe i przecinające się. Powierzchnie te pokazuje rys.V.1.2.

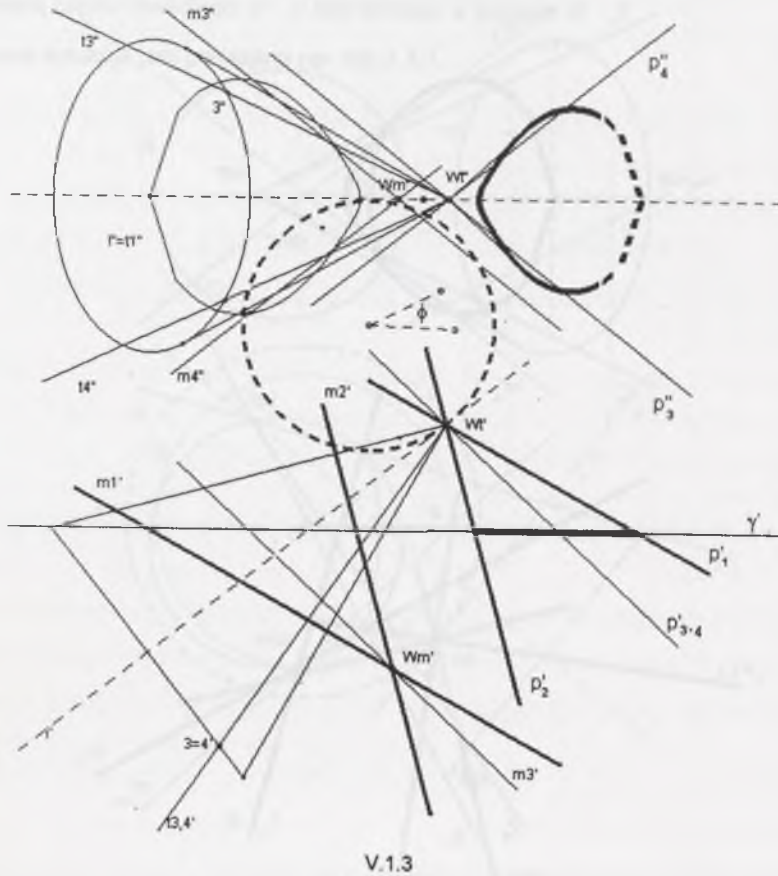


V.1.2

W przeprowadzonym rozumowaniu dla interesującego nas teraz przypadku obydwie powierzchnie stożkowe posiadają wspólny wierzchołek W .

Tworzące $p_{1,2}$ powierzchni stożkowej, o wierzchołku W są równoległe do tworzących $m_{1,2}$ powierzchni Φ^4 , więc powierzchnia o wierzchołku W jest powierzchnią rzędu czwartego Φ^4 .

Przekrój tej powierzchni płaszczyzną (w tym przypadku γ równoległą do rzutni pionowej) jest krzywą rzędu czwartego c^4 pokazaną na rys.V.1.3.

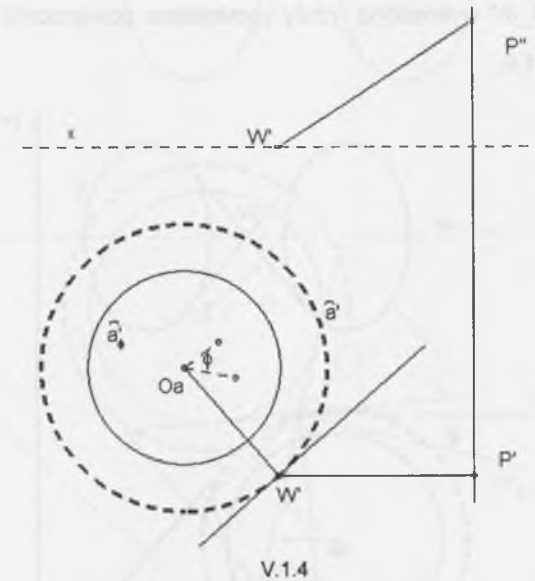


Rozważane okręgi $\hat{b}_{1,2}$ z założenia przechodzić mają przez punkty P i W , więc ich środki $O_{b_{1,2}}$ należą muszą do płaszczyzny γ , która w omawianym przypadku będzie płaszczyzną symetrii odcinka PW .

V.1.1. Konstrukcja zbioru środków okręgów przechodzących przez zadany punkt i przecinających dany niewspółpłaszczyznowy z nimi okrąg pod kątami o ustalonym wierzchołku i danej mierze

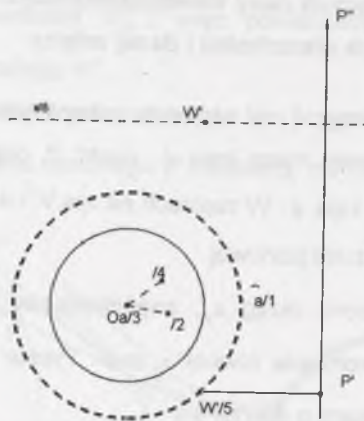
Jako dane przyjęto okrąg \hat{a} , w zapisach pokazanych na rys.V.1.4 – V.1.12 należący do rzutni poziomej, miarę kąta ϕ , punkt P oraz punkt W należący do okręgu \hat{a} jako wierzchołek kąta ϕ . W zapisach na rys.V.1.4-V.1.12 przyjęto odcinek WP jako równoległy do rzutni pionowej.

Na rys.V.1.4 wyznaczono okrąg a_ϕ , współśrodkowy i współpłaszczyznowy z okręgiem \hat{a} o długości promienia równej $r_a \cos \phi$. Proste styczne do okręgu a_ϕ przecinają okrąg \hat{a} pod kątami o mierze ϕ .



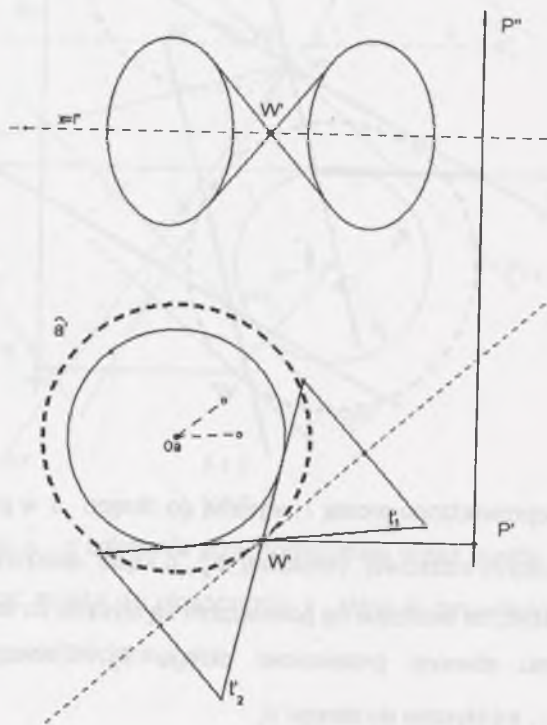
Z kolei poprowadzono prostą l , styczną do okręgu \hat{a} w punkcie W i uznano ją za oś powierzchni stożkowej obrotowej Φ_ϕ^2 , o kącie wierzchołkowym równym 2ϕ . Łatwo zauważyć, że tworzące tej powierzchni są styczne do kuli o środku w punkcie O_a i promieniu równym promieniowi okręgu \hat{a} . Tworzące konturowe rzutu poziomego $l_{1,2}$ są styczne do okręgu \hat{a} .

Dla założeń podanych na rys.V.1.5m



V.1.5m

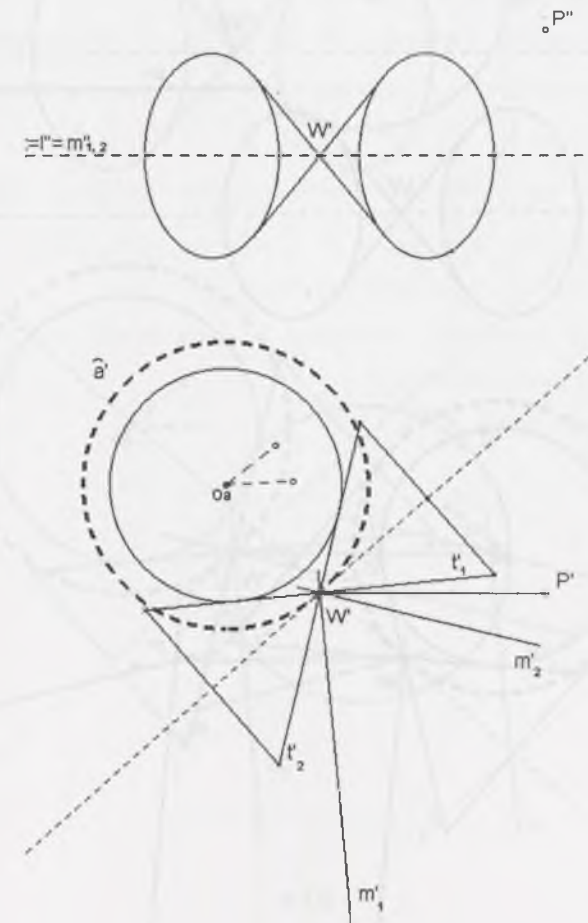
za pomocą „mac69_m” wykreślono rzuty prostokątne powierzchni stożkowej Φ_3^2 , pokazane na rys.V.1.5.



V.1.5

Jeżeli przyjąć, że tworzące $t_{1,2,3}$ są prostymi st stycznymi do szukanych okręgów $\hat{b}_{1,2}$ w punkcie W , wówczas oczywiste jest, że ich środki $O_{b1,2}$ będą należeć do prostych $m_{1,2,3}$, przechodzących przez punkt W i prostopadłych do tworzących $t_{1,2,3}$. Proste $m_{1,2,3}$ są tworzącymi kolejnej powierzchni stożkowej Φ_m .

Rzuty poziome tworzących konturowych $m_{1,2}$ powierzchni Φ_m , prostopadłych do tworzących konturowych $t_{1,2}$ powierzchni stożkowej Φ_3^2 , pokazano na rys.V.1.6.

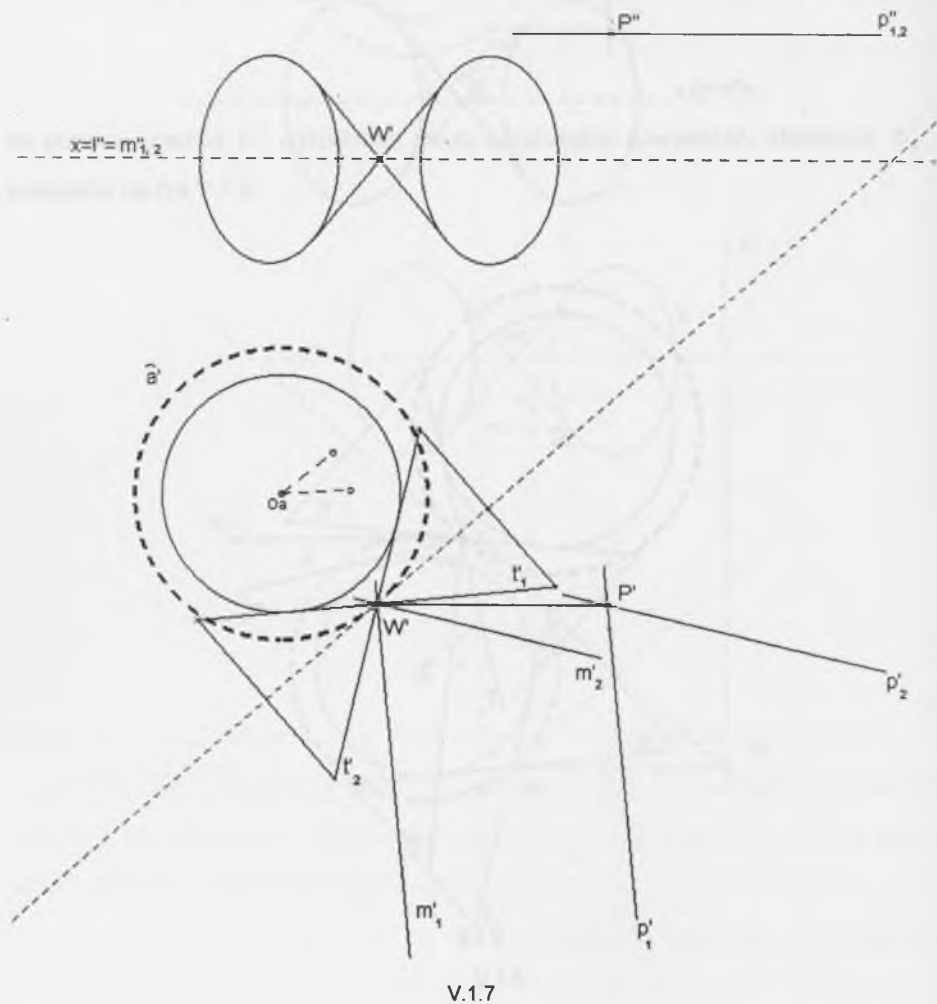


V.1.6

Okazuje się, że w dalszych rozważaniach wygodnie jest posłużyć się pomocniczą powierzchnią stożkową Φ_p^4 , której wierzchołkiem jest punkt P , a tworzące $p_{1,2,3}$ są równoległe do odpowiednich tworzących $m_{1,2,3}$ powierzchni Φ_m^4 .

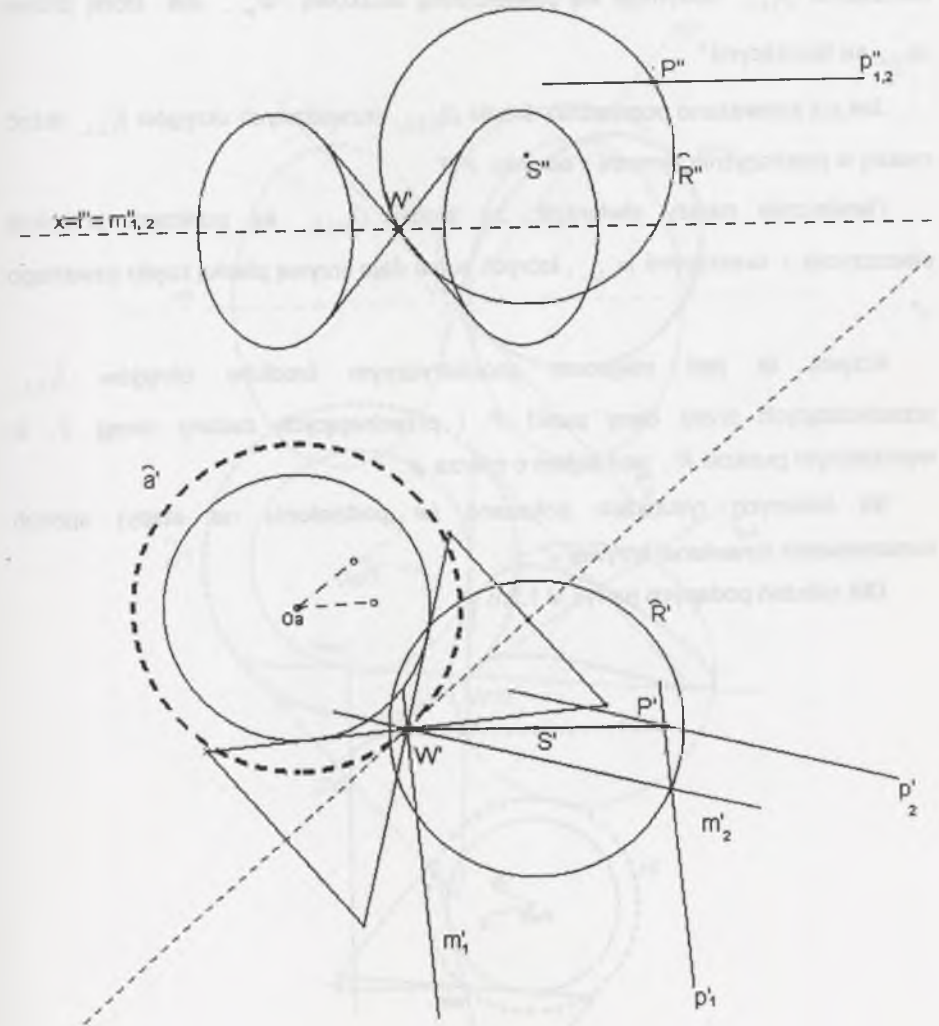
Łatwo zauważyć, że każda z tworzących $p_{1,2,3}$ jest prostopadła do odpowiedniej tworzącej $t_{1,2,3}$ i przecina ją.

Na rys.V.1.7 pokazano rzuty poziome tworzących konturowych $p_{1,2}$ równoległych do tworzących konturowych $m_{1,2}$.



V.1.7

Punkty wspólne ortogonalnych tworzących $t_{1,2,3}$ i $p_{1,2,3}$ należą do sfery \hat{R} o średnicy WP - rys.V.1.8.



V.1.8

Jeżeli więc znajdzie się punkty przebicia prostych $t_{1,2,3}$ ze sferą \bar{R} , to łącznie z punktem P pozwalają one wyznaczyć tworzące $p_{1,2,3}$ powierzchni Φ_p^4 .

Z kolei prowadząc przez punkt W odpowiednio proste $m_{1,2,3}$ równoległe do tworzących $p_{1,2,3}$ otrzymuje się powierzchnię stożkową Φ_m^4 , dla której proste $m_{1,2,3}$ są tworzącymi.

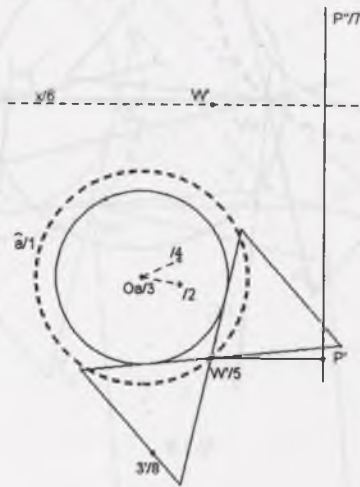
Jak już zauważono poprzednio, środki $O_{b_{1,2,3}}$ rozważanych okręgów $\bar{b}_{1,2,3}$ leżeć muszą w płaszczyźnie symetrii γ odcinka PW .

Ostatecznie należy stwierdzić, że środki $O_{b_{1,2,3}}$ są punktami przebicia płaszczyzny γ tworzącymi $m_{1,2,3}$, których suma daje krzywą płaską rzędu czwartego c^4 .

Krzywa ta jest miejscem geometrycznym środków okręgów $\bar{b}_{1,2,3}$ przechodzących przez dany punkt P i przecinających zadany okrąg \bar{a} , w wyróżnionym punkcie W , pod kątem o mierze ϕ .

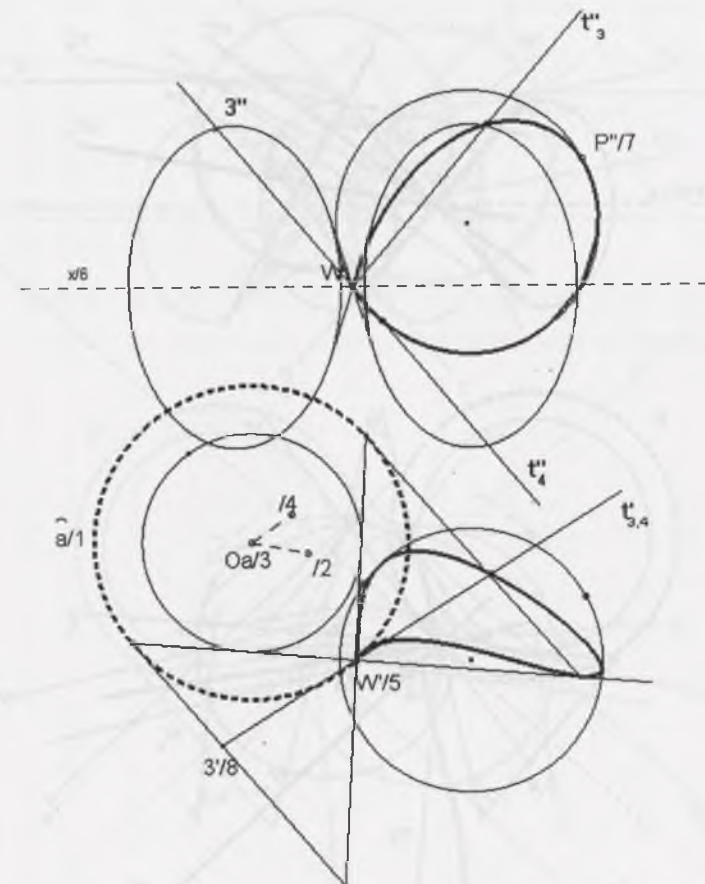
Na kolejnych rysunkach pokazano (w podzieleniu na etapy) sposób konstruowania omawianej krzywej c^4 .

Dla założeń podanych na rys.V.1.9m



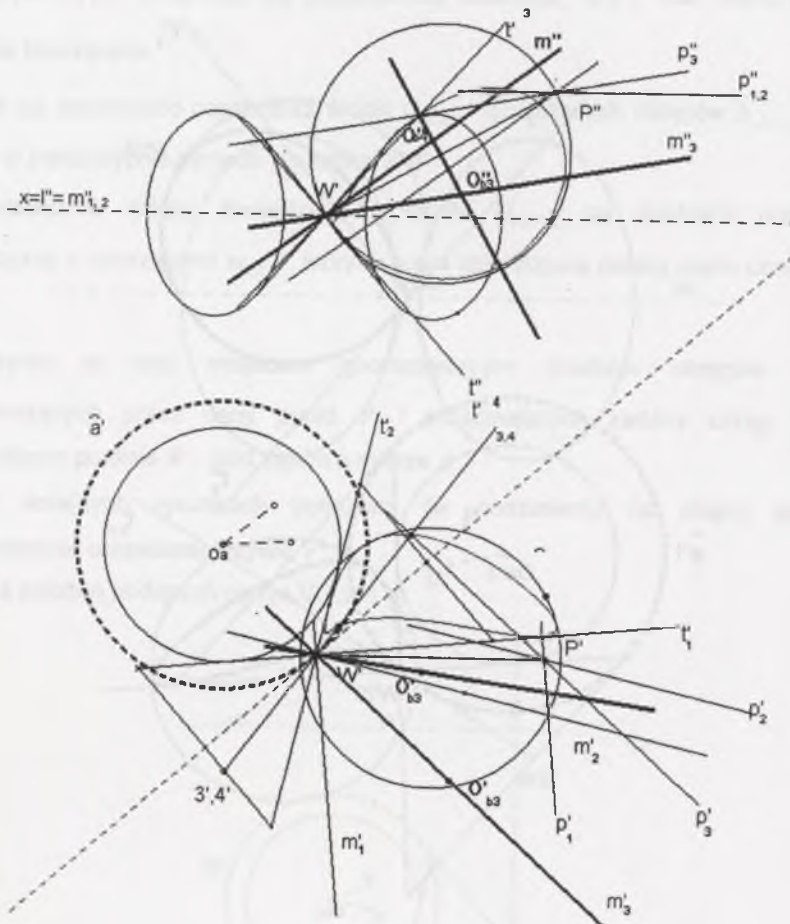
V.1.9m

za pomocą „mac73-m” (na rys.V.1.9) wyznacza się rzuty krzywej przestrzennej rzędu czwartego, będącej sumą punktów przebicia sfery \bar{R} tworzącymi $t_{1,2,3}$.



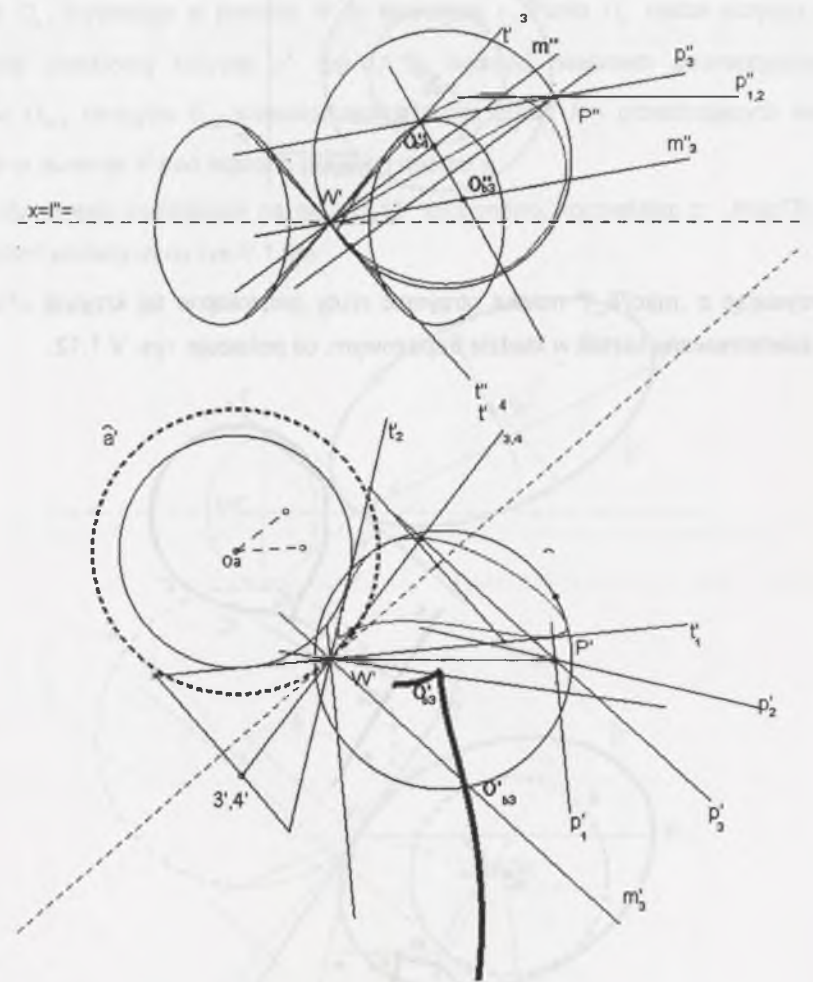
V.1.9

Dla wybranych tworzących $t_{3,4}$ wyznaczono, na rys.V.1.10, odpowiadające im tworzące $p_{3,4}$ a następnie $m_{3,4}$, które przebijają płaszczyznę γ w szukanych punktach O_{b3} i O_{b4} .



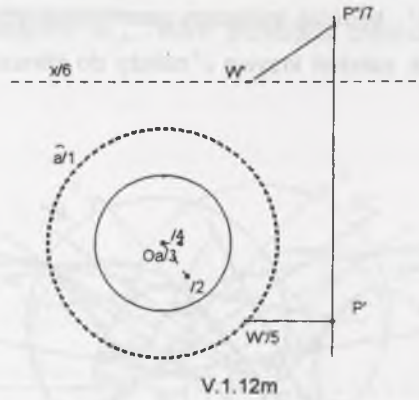
V.1.10

Przyjmując zmienne położenie tworzących t otrzymać można jak na rys.V.1.11 rzuty krzywej płaskiej c^4 , będącej miejscem geometrycznym środków szukanych okręgów (dla przyjętych założeń krzywa c^4 należy do płaszczyzny prostopadłej do rzutni pionowej).



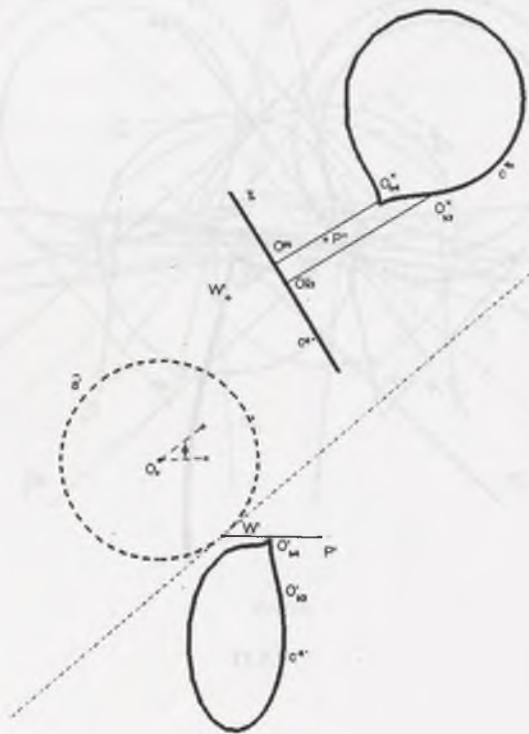
V.1.11

Dla założeń podanych na rys.V.1.12m



V.1.12m

korzystając z „mac76_p” można otrzymać rzuty prostokątne tej krzywej c^4 oraz jej niezdeformowany kształt w kładzie trapezowym, co pokazuje rys. V.1.12.



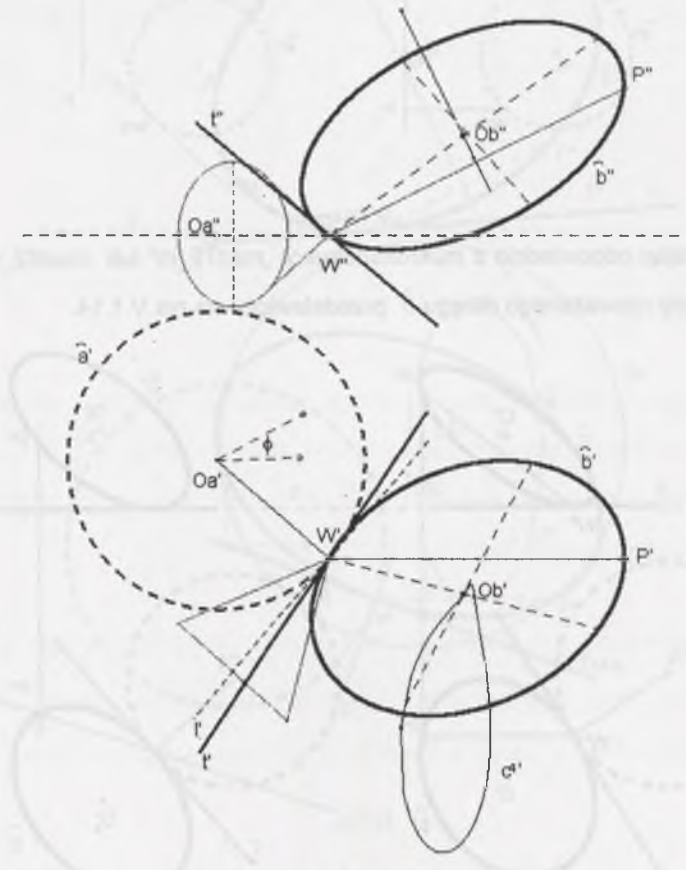
V.1.12

V.1.2. Konstrukcja rzutów prostokątnych rozważanych okręgów

V.1.2a. Konstrukcja rzutów okręgów, gdy $\phi \neq 0^\circ \neq 90^\circ$

Dla przykładu na rys.V.1.13 wykreślono rzuty prostokątne okręgu \bar{b} o środku w punkcie O_b , stycznego w punkcie W do tworzącej t . Punkt O_b został przyjęty na wcześniej określonej krzywej c^4 (pp.V.1.1), będącej miejscem geometrycznym środków $O_{b1,2}$ okręgów $\bar{b}_{1,2}$ przechodzących przez punkt P i przecinających dany okrąg \bar{a} w punkcie W pod kątem o przyjętej mierze ϕ .

Rzuty okręgu wykreślone na rys.V.1.13 otrzymano, korzystając z „mac78_m” dla założeń podanych na rys.V.1.9m.

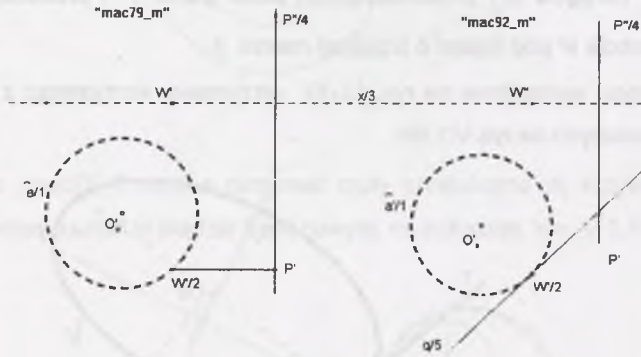


V.1.13

V.1.2b. Obrazy okręgu \bar{b} , gdy $\phi=0^\circ$

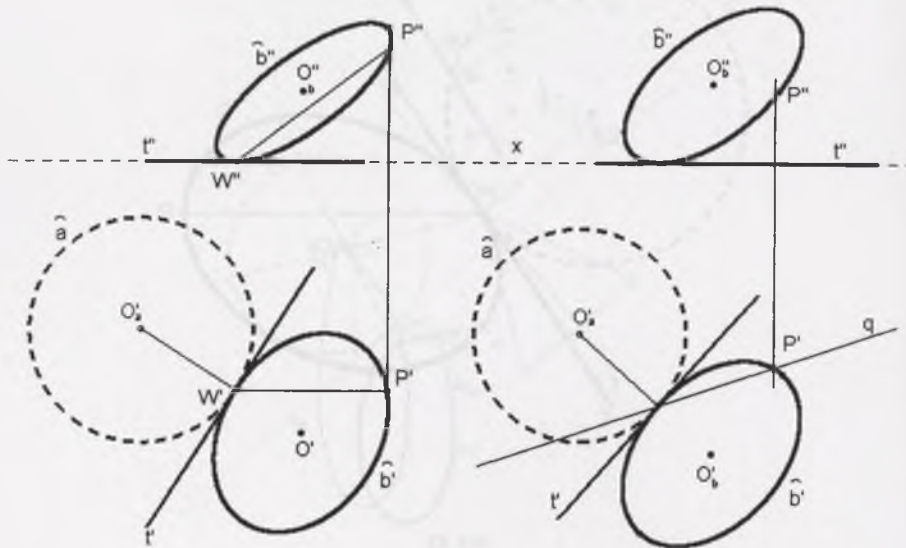
Dla kąta $\phi=0^\circ$ istnieje tylko jedno rozwiązanie. Okrąg \bar{b} jest okręgiem przechodzącym przez punkt P , stycznym do okręgu \bar{a} w punkcie W .

Założenia do makrokonstrukcji (ze względu na potrzeby jednej z aplikacji) przyjęto na rys.V.1.14m, różnicując położenia odcinka WP względem rzutni pionowej.



V.1.14m

Korzystając odpowiednio z makrokonstrukcji „mac79_m” lub „mac92_m” można uzyskać rzuty rozważanego okręgu \bar{b} przedstawione na rys.V.1.14.

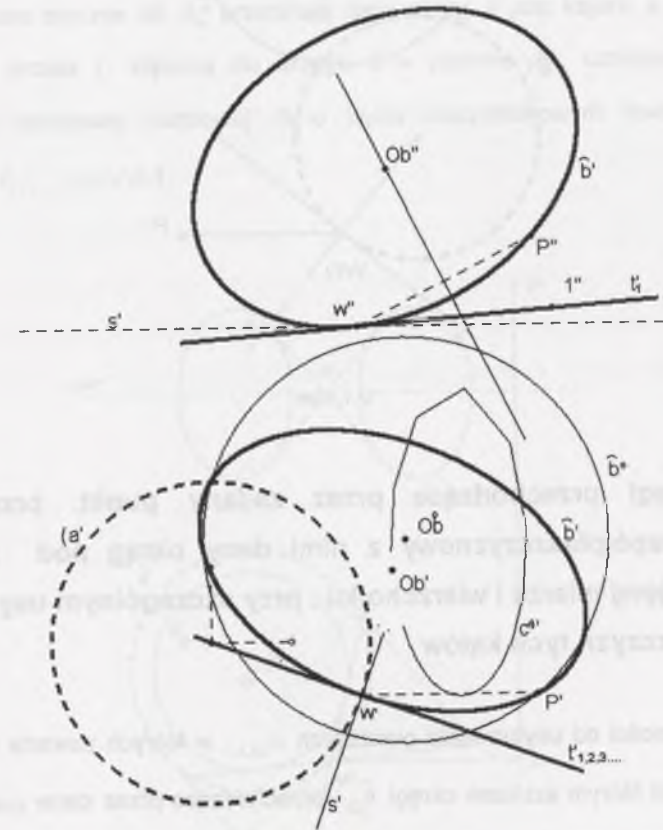


V.1.14

V.1.2c. Rzuty okręgu \bar{b} , gdy $\phi=90^\circ$

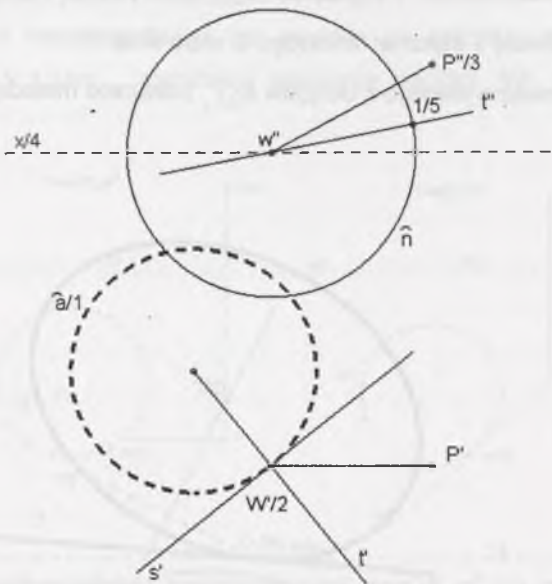
Dla miary kąta $\phi=90^\circ$ szukane okręgi zawarte są w płaszczyznach $\alpha_{1,2,3}$ wyznaczonych przez punkt P i proste $t_{1,2,3}$ przechodzące przez punkt W i prostopadłe do prostej s stycznej do okręgu \bar{a} w punkcie W .

Rzuty prostokątne jednego z okręgów $\bar{b}_{1,2,3}$ pokazano metodą klasyczną na rys.V.1.15.



V.1.15

Obraz krzywej zawierającej środki $O_{b_{1,2,3}}$ rozważanych okręgów $\bar{b}_{1,2,3}$ oraz ich rzuty prostokątne można uzyskać również dla założeń jak na rys.V.1.16m, posługując się makrokonstrukcją „mac80_m”.



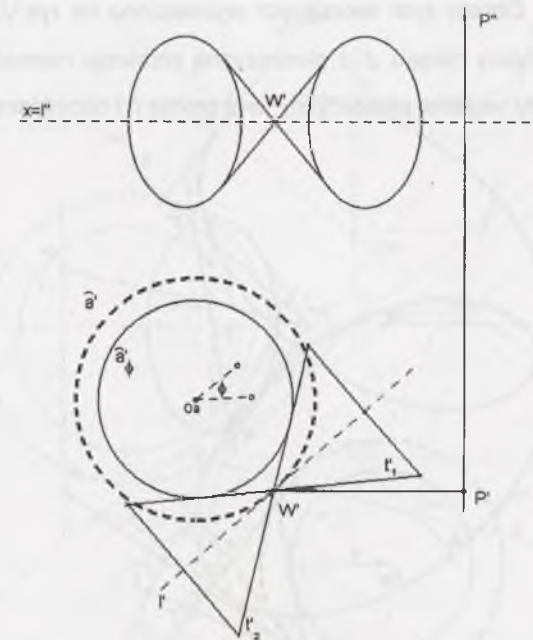
V.1.16m

V.2. Okręgi przechodzące przez zadany punkt, przecinające niewspółpłaszczyznowy z nimi dany okrąg pod kątami o przyjętej mierze i wierzchołku, przy szczególnym usytuowaniu płaszczyzn tych kątów

W zależności od usytuowania płaszczyzn $\sigma_{1,2,3}$, w których zawarte są ramiona kątów ϕ , pod którym szukane okręgi $\bar{b}_{1,2}$ przechodzące przez dane punkty P i W przecinają dany okrąg \bar{a} , można wyodrębnić dwa przypadki szczególne.

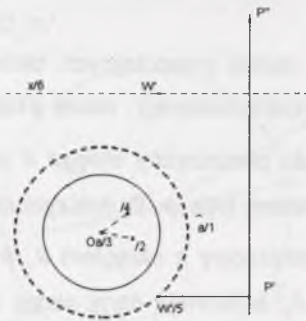
V.2.1. Płaszczyzny kątów, pod którymi okręgi $\bar{b}_{1,2}$ przecinają dany okrąg \bar{a} jednocześnie z płaszczyznami okręgów $\bar{b}_{1,2}$

W celu skonstruowania rzutów prostokątnych takiego okręgu \bar{b} przyjęto jako dane okrąg \bar{a} (należący do rzutni poziomej), miarę ϕ kąta przecięcia się okręgów \bar{a} i \bar{b} , punkt P nie należący do płaszczyzny okręgu \bar{a} oraz punkt W , należący do okręgu \bar{a} i będący wierzchołkiem kąta ϕ . W dalszym ciągu wyznaczono okrąg \bar{a}_ϕ , współśrodkowy i współpłaszczyznowy z okręgiem \bar{a} , o długości promienia równej $r_a \cos \phi$. Proste styczne do \bar{a}_ϕ przecinają dany okrąg \bar{a} pod kątem ϕ . Następnie wyróżniono prostą l , styczną do okręgu \bar{a} w punkcie W , uznając ją za oś powierzchni stożkowej obrotowej Φ_ϕ^2 o kącie wierzchołkowym równym 2ϕ , i tworzących $t_{1,2,3}$, rys.V.2.1.



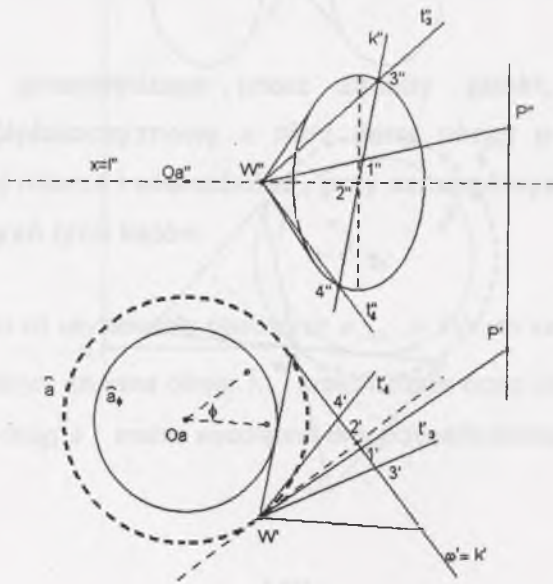
V.2.1

Rzuty prostokątne powierzchni Φ^2 wykreślono na rys.V.2.1, korzystając z makrokonstrukcji „mac69_m” przy założeniach przyjętych jak na rys.V.2.1m.



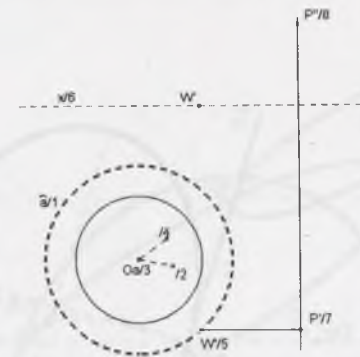
V.2.1m

Szukany okrąg \bar{b} zawarty jest w płaszczyźnie β określonej punktem P oraz jedną z tworzących powierzchni Φ^2 . W płaszczyźnie okręgu \bar{b} leżeć musi również oś l , wobec tego $\beta = Pl$. Płaszczyzna β przecina więc powierzchnię Φ^2 w dwóch tworzących t_3 i t_4 . Obrazy tych tworzących wyznaczono na rys.V.2.2, konstruując krawędź k , płaszczyzny okręgu β z płaszczyzną przekroju normalnego stożka ω , wykorzystując punkty wspólne płaszczyzny ω z prostą l i odcinkiem PW .



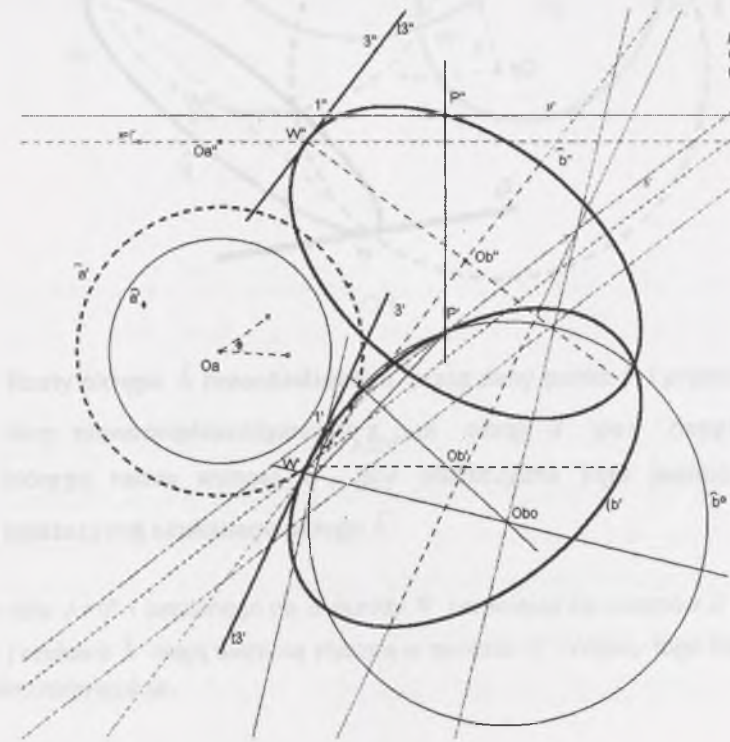
V.2.2

Rzuty tworzących t_3 i t_4 można również otrzymać za pomocą „mac81_m” korzystając z założeń przyjętych na rys.V.2.2m.



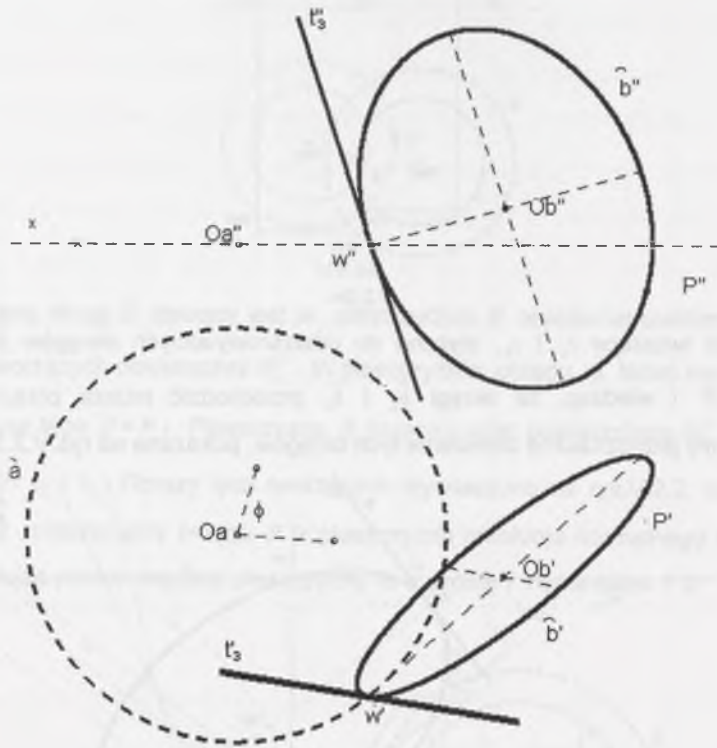
V.2.2m

Znając tworzące t_3 i t_4 , styczne do odwzorowywanych okręgów \bar{b}_3 i \bar{b}_4 w punkcie W i wiedząc, że okręgi \bar{b}_3 i \bar{b}_4 przechodzić muszą przez punkt P , otrzymujemy jednoznaczne określenie tych okręgów, pokazane na rys.V.2.3.



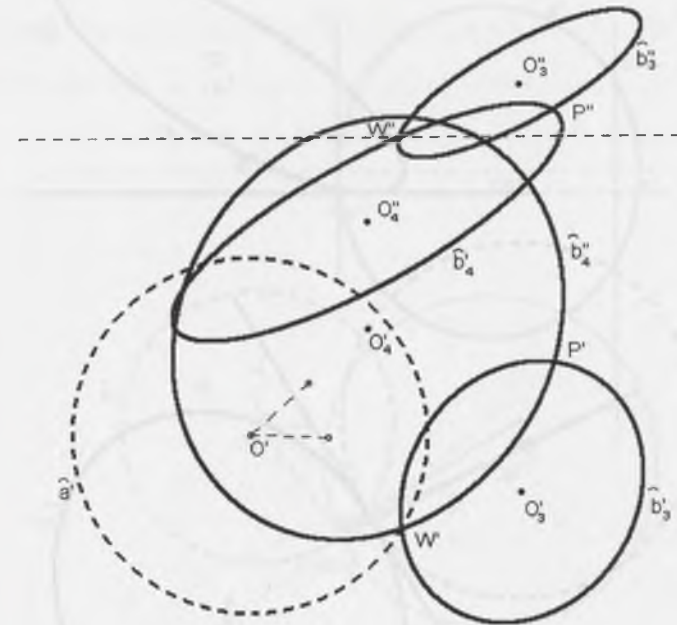
V.2.3

Ten sam efekt pokazany na rys.V.2.4 można uzyskać za pomocą „mac82_m”, przy założeniach podanych na rys.V.2.2.



V.2.4

Korzystając z makrokonstrukcji „mac83_m”, dla założeń jak na rys.V.2.2m, skonstruowano na rys. V.2.5 rzuty obu wcześniej wskazanych okręgów \tilde{b}_3 i \tilde{b}_4 .

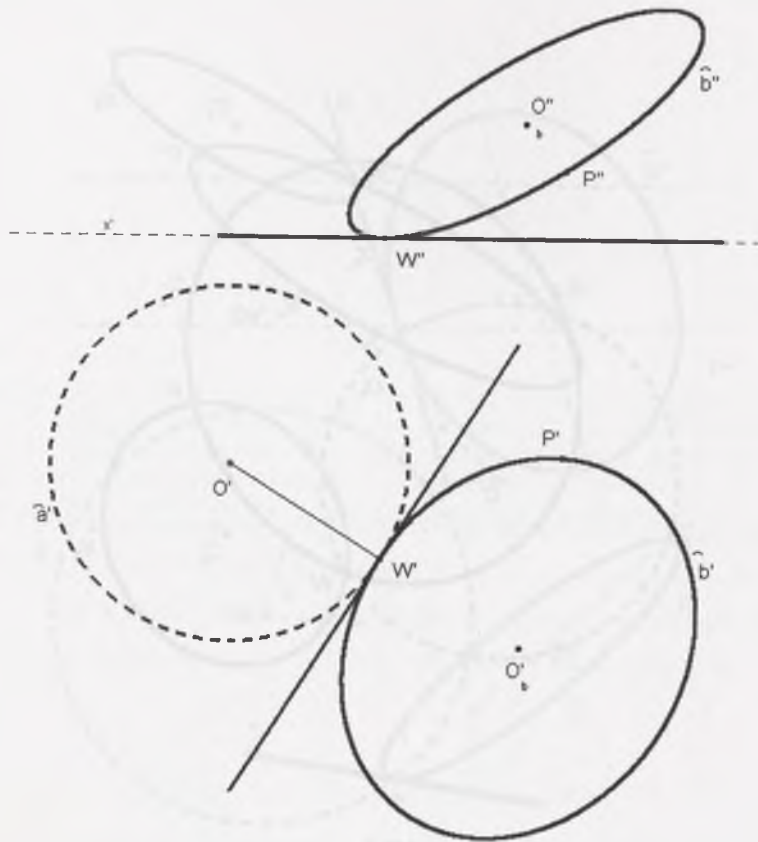


V.2.5

V.2.1a. Rzuty okręgu \tilde{b} przechodzącego przez dany punkt P i przecinającego dany niewspółpłaszczyznowy z nim okrąg \tilde{a} pod danym kątem, którego miara wynosi 0° , gdy płaszczyzna kąta jednoczy się z płaszczyzną szukanego okręgu \tilde{b}

Dla kąta $\phi=0^\circ$ i ustalonego na \tilde{a} punktu W przecięcia się okręgów \tilde{a} i \tilde{b} okręgi dany \tilde{a} i szukany \tilde{b} mają wspólną styczną w punkcie W . Wobec tego istnieje tutaj tylko jedno rozwiązanie.

Na rys.V.2.6 pokazano szukany okrąg \widehat{b} .

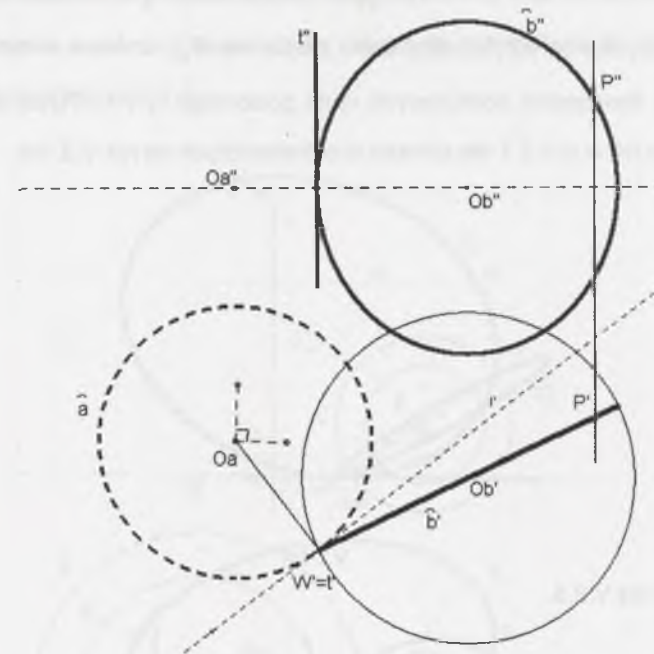


V.2.6

V.2.1b. Rzuty okręgów \widehat{b} przechodzących przez dany punkt P i przecinających dany niewspółpłaszczyznowy z nim i okrąg \widehat{a} pod danym kątem, którego miara wynosi 90° i którego płaszczyzna jednoczy się z płaszczyzną szukanego okręgu

W analizowanej sytuacji łatwo zauważyć, że każdy z rozważanych okręgów $\widehat{b}_{1,2,3}$ leżeć musi odpowiednio w płaszczyźnie $\beta_{1,2,3}$, przechodzącej przez punkt P ,

prostopadłej do płaszczyzny α okręgu \widehat{a} i stycznej do \widehat{a} . Rozważany okrąg jest styczny w punkcie W do prostej r prostopadłej do α i przechodzi przez punkt P . Okrąg ten pokazuje rys. V.2.7.



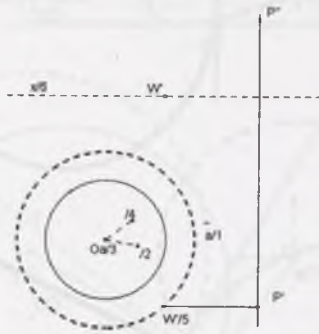
V.2.7

V.2.2. Konstrukcja obrazu szukanego okręgu \widehat{b} , przechodzącego przez zadany punkt P i przecinającego dany niewspółpłaszczyznowy z nim i okrąg \widehat{a} w danym punkcie W , pod kątem, którego miara ϕ jest znana, i którego płaszczyzna jednoczy się z płaszczyzną danego okręgu \widehat{a}

Rozwiązanie tego zagadnienia jest proste, lecz przedstawiono go tu dla kompletności tematu.

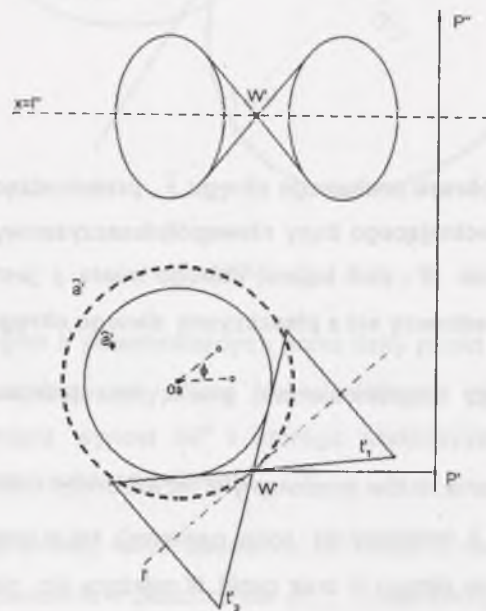
W celu wyznaczenia rzutów prostokątnych rozważanego obecnie okręgu \widehat{b} , jako dane przyjęto okrąg \widehat{a} (należący do rzutni poziomej), kąt o mierze ϕ , punkt P nie leżący w płaszczyźnie okręgu \widehat{a} oraz punkt W należący do okręgu \widehat{a} traktowany jako punkt przecięcia się okręgów \widehat{a} i \widehat{b} .

W pierwszej kolejności wyróżniono okrąg \bar{a}_ρ , współśrodkowy i współpłaszczyznowy z okręgiem \bar{a} , o długości promienia równej $r_a \cos \phi$, do którego proste styczne przecinają okrąg \bar{a} pod kątem ϕ . Prosta l , styczną do okręgu \bar{a} w punkcie W uznano za oś powierzchni stożkowej obrotowej Φ_ρ^2 , o kącie wierzchołkowym równym 2ϕ i tworzących konturowych rzutu poziomego t_1 i t_2 . Rzuty powierzchni Φ_ρ^2 wykonane jak w p.V.2.1 dla założeń przedstawionych na rys.V.2.1m



V.2.1m

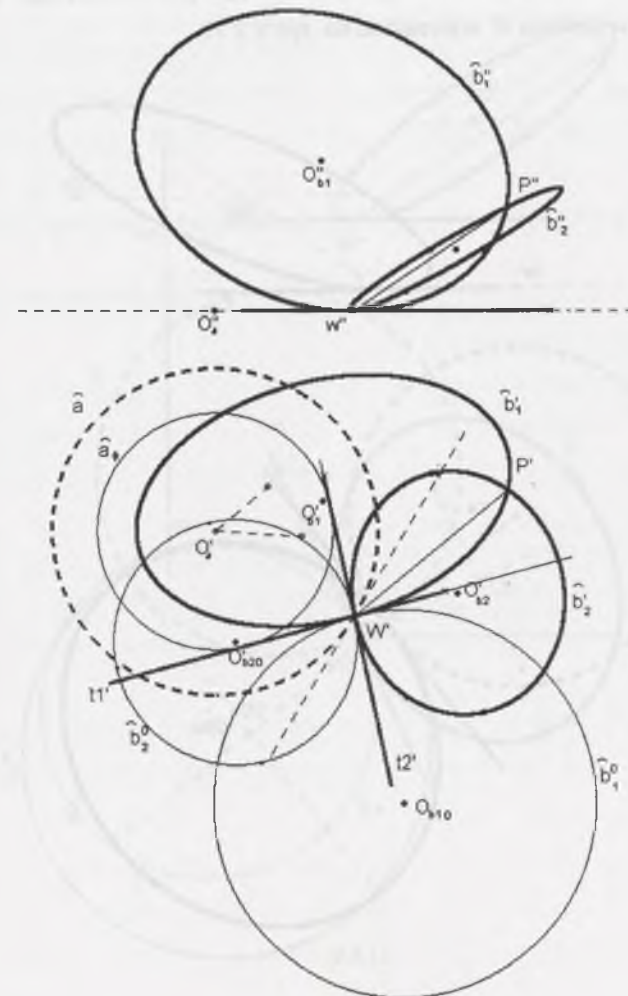
pokazuje rys.V.2.8.



V.2.8

Szukane okręgi \bar{b}_1 i \bar{b}_2 są tutaj okręgami przechodzącymi przez punkt P , stycznymi w punkcie W odpowiednio do prostych t_1 i t_2 , będących iloczynem powierzchni stożkowej Φ_ρ^2 i płaszczyzny okręgu \bar{a} .

Korzystając z konstrukcji kładu każdej z tych płaszczyzn, na rys.V.2.9 określono rzuty obu tych okręgów \bar{b}_1 i \bar{b}_2 .



V.2.9

V.2.2a. Rzuty okręgów \bar{b} przechodzących przez dany punkt P i przecinających zadany niewspółpłaszczyznowy z nimi okrąg \bar{a} w danym punkcie W i pod kątami o mierze $\phi = 0^\circ$ lub $\phi = 90^\circ$, gdy płaszczyzny tych kątów jednoczą się z płaszczyzną okręgu \bar{a}

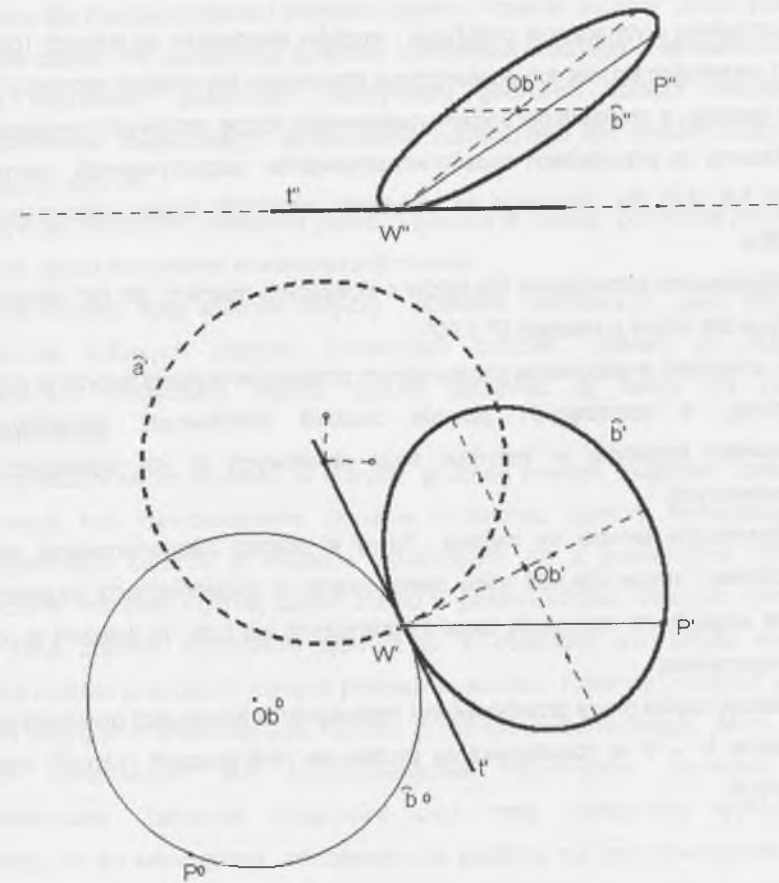
Dla $\phi = 0^\circ$ i ustalonego na \bar{a} punktu W istnieje tylko jeden okrąg \bar{b} spełniający narzucone warunki. Obraz tego okręgu jako okręgu przechodzącego przez P i stycznego do \bar{a} w punkcie W wykreślono na rys.V.2.10.



V.2.10

Dla kąta $\phi = 90^\circ$ i ustalonego na \bar{a} położenia punktu W istnieje również tylko jeden okrąg \bar{b} , spełniający przyjęte warunki. Okrąg ten przechodzi przez punkt P i jest styczny w punkcie \bar{a} do współpłaszczyznowej z \bar{a} prostej normalnej do \bar{a} w punkcie W .

Rzuty rozważanego okręgu \bar{b} pokazano na rys.V.2.11.



V.2.11

V.3. Podsumowanie

Rozdział niniejszy zamyka część pracy dotyczącą konstrukcji geometrycznych.

Obejmuje ona, jak się wydaje, większość zagadnień dotyczących zależności pomiędzy okręgami i sferami w ich wzajemnych relacjach (okrąg-okrąg, okrąg-sfera, sfera-sfera), uwarunkowanych zawsze wprowadzeniem jako elementu danego kątów o ustalonej mierze.

Umożliwiono wyznaczenie położenia środków elementów szukanych (okręgów lub sfer), określając krzywe lub powierzchnie stanowiące ich miejsca geometryczne.

Dla każdego z przypadków podano maksymalną liczbę możliwych rozwiązań.

Pokazano na przykładach sposób konstruowania rozpatrywanych elementów (okręgów lub sfer) dla obranego na uprzednio ustalonym miejscu geometrycznym ich środka.

Przedstawiono rozwiązania dla kątów o dowolnych miarach, jak też opracowano konstrukcje dla kątów o miarach 0° i 90° .

Aby umożliwić analizowanie różnorodnych problemów występujących w praktyce inżynierskiej, a dotyczących głównie budowli obrotowych, opracowano i przedstawiono tematykę w zakresie figur obrotowych w ich postaciach niezdegenerowanych.

Rozszerzenie tematu na zadane figury w postaci zdegenerowanej jest na pewno celowe i może również mieć zastosowanie w zagadnieniach inżynierskich, jednak ze względu na rozległość tematu ograniczono się tutaj do założeń w postaci niezdegenerowanej.

W dalszej części pracy przedstawiono zastosowanie konstrukcji geometrycznych z rozdziałów II – V w rozwiązywaniu problemów dotyczących różnych ustrojów budowlanych.

VI. OKREŚLANIE GRUBOŚCI POWŁOK BUDOWLI OBROTOWYCH

Obiekty budowlane są poddawane badaniom geodezyjnym, począwszy od inwentaryzacji powykonawczej, której wyniki powinny być bazą wymiarową przy kolejnych okresowych sprawdzianach przemieszczeń i deformacji całego obiektu lub też tylko np. zagrożonych fragmentów. Właściwa grubość powłoki ma zasadnicze znaczenie dla bezpieczeństwa i trwałości obiektu. Powłoki budowli przemysłowych, narażone często na agresywne działanie środowiska wodnego i atmosferycznego, ulegają degradacji. Znajomość rzeczywistej geometrii obiektu pozwala na zaproponowanie miejscowego wzmocnienia koniecznego dla dalszej bezpiecznej eksploatacji budowli.

Tak więc możliwość określenia grubości powłoki w czasie pomiarów jest jedną z istotnych części kompletnej inwentaryzacji obiektu.

Proponowana tutaj metoda dotyczy obiektów obrotowych, gdyż bazuje na teoretycznie kołowych płaskich przekrojach budowli. Jednak po dokonaniu nieznacznych modyfikacji można będzie stosować ją także do obiektów płaskościennych.

Przykładami takich budowli, w których grubość powłoki odgrywa zasadniczą rolę, mogą być hiperboloidalne chłodnie kominowe, komory fermentacyjne w oczyszczalniach ścieków o kształcie składającym się z powierzchni stożkowej, powierzchni walcowej i górnej części znowu w postaci stożka, walcowe zbiorniki na wodę pitną, zbiorniki o kształcie jajowym itp. W obiektach tych często występuje zmienny rozkład grubości w różnych partiach wysokości. Również „rozdział” grubości powłoki względem teoretycznego kształtu przekroju południkowego, jakim, np. dla chłodni kominowych, jest jednopowłokowa hiperboloida obrotowa, bywa niesymetryczny. Założenia projektowe oraz mała dokładność wykonawstwa powodują, że ani wewnętrzna ani zewnętrzna powłoka nie jest powierzchnią, którą można opisać matematycznie. W skrajnych przypadkach lokalne odchyłki od projektowanego kształtu, spowodowane grubymi błędami wykonawstwa, przekraczają 1,00 m.

Znajomość rzeczywistego kształtu obiektu jest więc często tylko wynikiem pomiarów i zależy od ich dokładności [22,23,26,31,35,37].

Zdarza się, że w wyniku awarii części powierzchni trzeba określić grubość powłoki w bliskim otoczeniu miejsca awarii, przeprowadzić niezbędną analizę wytrzymałościową, zaproponować sposób miejscowego wzmocnienia, który może się wiązać ze zmianą grubości powłoki i przeprowadzić zaprojektowany remont pod ciągłą kontrolą pomiarową. Następnie dopiero cykliczne pomiary geometrii pozwalają na ocenę skuteczności remontów i zabiegów regeneracyjnych [20].

Względy technologiczne powodują tendencję do odchodzenia od stosowania prefabrykacji na rzecz żelbetowych konstrukcji monolitycznych, co jeszcze bardziej zwiększa potrzebę możliwości dokonywania, w różnych etapach wznoszenia i eksploatacji budowli, pomiarów grubości powłoki [27].

VI.1. Założenia metody

W niniejszym opracowaniu proponuje się do określania grubości powłoki budowli obrotowej zastosowanie metody geometrycznej opartej na ustalaniu w poziomych płaskich przekrojach, odległości materialnych punktów wewnętrznych i zewnętrznych powłoki od punktów teoretycznych. Punkty teoretyczne, znane z projektu, należą do założonego w projekcie kształtu przekroju południkowego. W przypadku braku takich danych punkty teoretyczne należą do linii, będącej przekrojem południkowym, przyjętego teoretycznie kształtu badanego obiektu.

W celu dokonania takich pomiarów konieczny jest dostęp do wnętrza obiektu, co czasem może stanowić utrudnienie. Jednak dla inwentaryzacji powykonawczych lub realizowanych w czasie lub po remoncie możliwość taka zwykle istnieje.

Przedstawiona tutaj propozycja stanowi tylko założenia geometryczne i wymaga opracowania technologii wykonywania pomiarów, przy zastosowaniu odpowiedniego sprzętu mierniczego oraz komputerowego w celu opracowania potrzebnych wyników w ostatecznej formie. Założenia te zostały skonsultowane ze specjalistami zajmującymi się pomiarami obiektów budowlanych.

Dla powierzchni obrotowych, w których grubość powłoki nie może być mierzona w płaszczyznach prostopadłych do osi powierzchni, np. w kopułach sferycznych lub innych obrotowych powierzchniach o dużych krzywiznach, przedstawiona metoda będzie mogła mieć ograniczone zastosowanie (trudności z pomiarami z zewnątrz), jednak dopiero po dokonaniu niezbędnych modyfikacji.

Ilustracje rozpatrywanego zagadnienia wykonano przy wykorzystaniu metody rzutów prostokątnych Monge'a na dwie rzutnie. Rysunki zrealizowano przy użyciu programu komputerowego CABRI, który posiada opcję pozwalającą, po wprowadzeniu odpowiedniego algorytmu, na automatyczne wyznaczanie miejsc geometrycznych szukanych punktów dla przyjętego „ruchomego” punktu poruszającego się po prostej lub okręgu. Wersja programu CABRI, którą się posługiwano, posiada bardzo małe możliwości generowania rysunków o odpowiednich walorach graficznych. Te względy spowodowały występowanie na wielu ilustracjach różnic pomiędzy formą graficzną oznaczeń używanych w tekście i na rysunkach.

VI.2. Teoretyczne podstawy geometryczne

Opracowanie oparte jest na konstrukcjach niektórych zależności geometrycznych, dotyczących okręgów współpłaszczyznowych lub nie należących do jednej płaszczyzny, przechodzących przez dany punkt i przecinających się pod kątami, których miara kąta i położenie wierzchołków są znane. Zagadnienia te opracowane są w rozdziałach II i V niniejszej pracy.

Dla dowolnej miary zadanego kąta oraz dowolnie przyjętego w przestrzeni punktu środki okręgów przechodzących przez ten punkt i przecinających przyjęty wstępnie okrąg pod zadanym kątem należą do krzywej rzędu czwartego.

W przypadkach szczególnych miar zadanego kąta (0° lub 90°) lub szczególnego wzajemnego usytuowania elementów wyjściowych krzywa ta może ulegać degeneracji i przyjąć postać krzywej stopnia drugiego lub prostej.

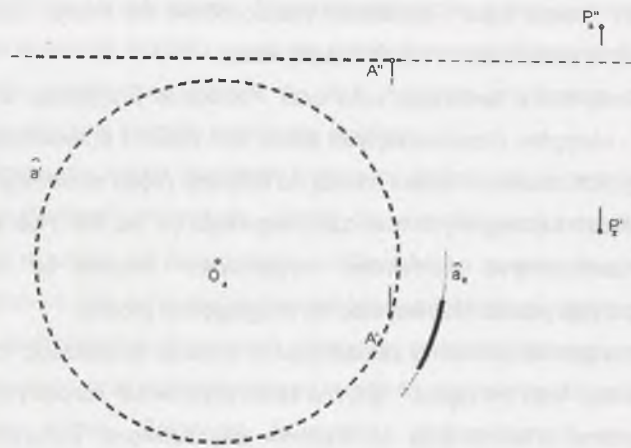
W celu rozwiązania problemu założonego w temacie niniejszego rozdziału, jako wielkość zadanego kąta przyjęto 0° , gdyż w takim przypadku rozpatrywane okręgi są wzajemnie styczne, a konstrukcja ich środków jest ułatwiona. Założenie to dotyczy rozważań teoretycznych, prowadzących do wyjaśnienia proponowanej metody badań. W efekcie do określenia grubości badanej powłoki ustala się długości średnic lub cięciw okręgów stycznych w punktach pomiaru do uprzednio określonych okręgów należących do przekrojów płaszczyznami prostopadłymi do osi powierzchni.

Aby otrzymać zamierzony rezultat trzeba kolejno zrealizować kilka etapów.

W poszczególnych krokach prowadzonych rozważań występujące okręgi są współpłaszczyznowe lub zawarte w różnych płaszczyznach. Poniżej przedstawiono, w kolejnych etapach, ilustrowanych odpowiednimi rysunkami, podstawy geometryczne proponowanej metody.

Dany jest okrąg bazowy \bar{a} , punkt A leżący na tym okręgu, fragment innego okręgu \bar{a}_z , współpłaszczyznowego i współśrodkowego z okręgiem \bar{a} , oraz znane jest położenie punktu P_z usytuowanego tak, aby jego rzut prostokątny na płaszczyznę okręgu bazowego \bar{a} znajdował się na zewnątrz tego okręgu. Punkt P_z może, ale nie musi, leżeć w płaszczyźnie okręgów \bar{a} i \bar{a}_z . Należy określić długość odcinka stanowiącego różnicę długości promieni obu okręgów \bar{a} i \bar{a}_z w sytuacji, gdy nie można dokonać bezpośredniego pomiaru tej wielkości.

Przyjęto, że płaszczyzna okręgów \bar{a} i \bar{a}_z jest pozioma, co występuje najczęściej w praktyce dla przekrojów budowli obrotowych płaszczyznami prostopadłymi do ich osi. Przyjęte założenia przedstawione są na rys.VI.2.1 jako rzut prostokątny na płaszczyznę rysunku.

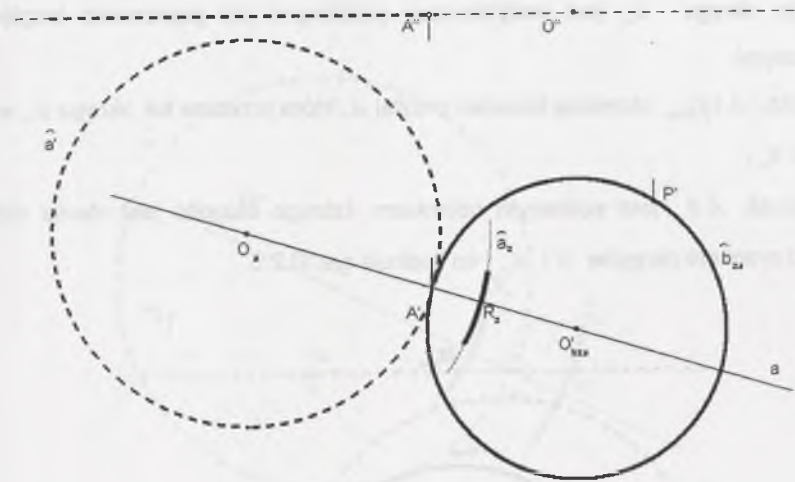


VI.2.1

W celu wyznaczenia położenia odcinka, którego długość stanowi różnicę długości promieni okręgów \bar{a} i \bar{a}_z , trzeba wyznaczyć kierunek prostej, na której ten odcinek leży. Najwygodniej zauważyć tutaj fakt, że kierunek ten jest zgodny z kierunkiem prostej zawierającej promień okręgu \bar{a} przechodzący przez punkt A .

Dla jego ustalania wzięto pod uwagę okrąg \hat{b}_{za} , współpłaszczyznowy z danym okręgiem \bar{a} , styczny do niego w punkcie A i przechodzący przez rzut poziomy P'_z danego punktu P_z . Środkiem okręgu \hat{b}_{za} jest punkt O_{bza} , który wraz ze znanym punktem A określa prostą a , na której znajduje się szukany odcinek.

Prosta a przecina łuk okręgu \bar{a}_z w punkcie R_z , co pokazuje rys.VI.2.2.



VI.2.2

Punkt O_{bza} musi znajdować się na zewnątrz okręgu \bar{a}_z , ze względów technicznych, gdyż w trakcie realizacji pomiaru szukany punkt R_z jest określany jako istniejący „fizycznie” na badanym obiekcie, dla którego przyjęty tutaj łuk okręgu \bar{a}_z stanowi teoretyczne przybliżenie istniejącego kształtu.

Okrąg \bar{a}_z jest tylko linią teoretyczną, pozwalającą na zastosowanie konstrukcji z rozdziału V, które w założeniach zawierają okręgi.

Odstępstwo rzeczywistego kształtu „okolicy” badanej powłoki od teoretycznego okręgu przekroju nie ma tutaj znaczenia.

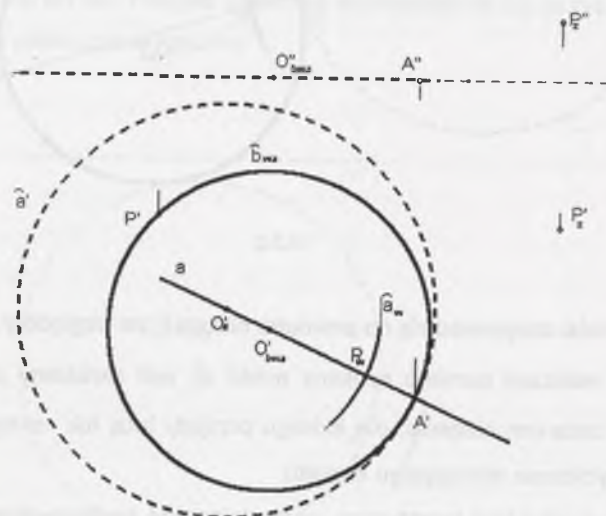
Punkt R_z może być na przykład ustalony jako przecięcie promienia (np. laserowego), rzutowanego z punktu O_{bza} w kierunku punktu A , z istniejącym

obiektem. Odcinek AR_2 jest szukany odcinkiem, którego długość stanowi różnicę długości promieni okręgów \bar{a} i \bar{a}_2 .

W identyczny sposób dla okręgu \bar{a} i punktu A , przyjętego fragmentu okręgu \bar{a}_w , współpłaszczyznowego i współśrodkowego z okręgiem \bar{a} , oraz przyjętego punktu P_w wewnątrz okręgu \bar{a}_w ustalono punkt $O_{b_{wa}}$ jako środek okręgu \bar{b}_{wa} stycznego do okręgu \bar{a} w punkcie A i przechodzącego przez punkt P_w . Wyznaczenie punktu $O_{b_{wa}}$ wewnątrz okręgu \bar{a}_w jest podyktowane podobnymi jak poprzednio względami technicznymi.

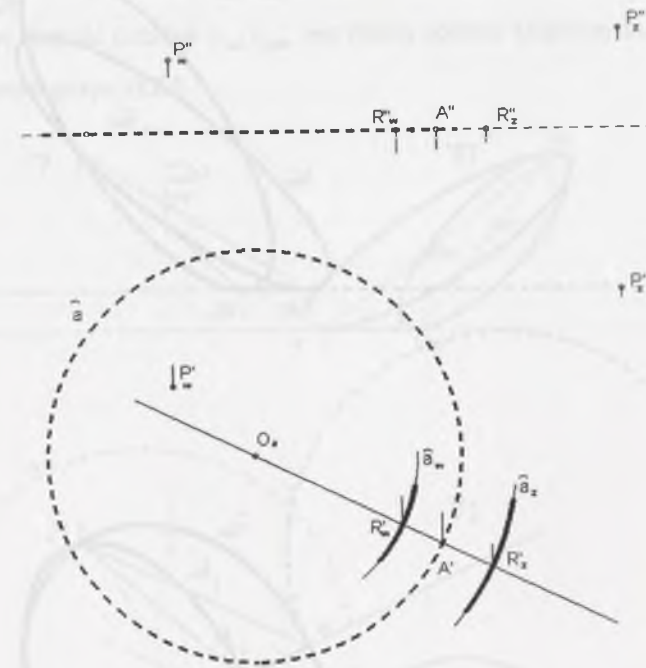
Punkty A i $O_{b_{wa}}$ określają kierunek prostej a , która przecina łuk okręgu \bar{a}_w w punkcie R_w .

Odcinek AR_w jest szukany odcinkiem, którego długość jest równa różnicy długości promieni okręgów \bar{a} i \bar{a}_w , co ilustruje rys.VI.2.3.



VI.2.3

Interesująca nas grubość powłoki w punkcie A , mierzona w płaszczyźnie okręgu \bar{a} , jest równa długości odcinka $R_wR_2 = |AR_w| + |AR_2|$, co widać na rys.VI.2.4.



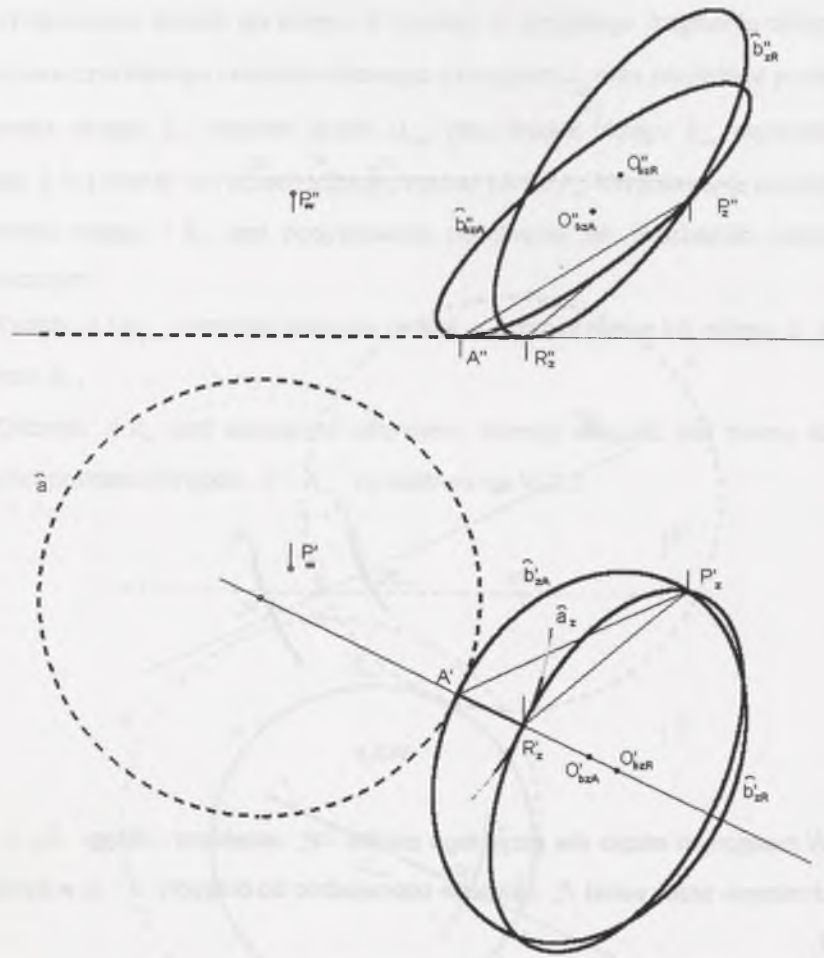
VI.2.4

W następnym etapie dla przyjętego punktu P_2 określono okręgi \bar{b}_{zA} i \bar{b}_{zR} , przechodzące przez punkt P_2 i styczne odpowiednio do okręgów \bar{a} i \bar{a}_2 w punktach A i R_2 .

Punkty $O_{b_{zA}}$ i $O_{b_{zR}}$ są środkami tych okręgów.

Przy konstruowaniu tych okręgów wykorzystano informacje podane w rozdziale V pracy, a dotyczące zagadnień okręgów niewspółpłaszczyznowych przechodzących przez zadany punkt i przecinających dany okrąg w uprzednio określonym punkcie pod zadany kąt, którego miara w tym przypadku wynosi 0° . Rozważane okręgi przechodzące przez punkt P_2 i styczne do okręgów \bar{a} i \bar{a}_2 odpowiednio w punktach A i R_2 są określone jednoznacznie.

Rozwiązanie tej części zagadnienia dla przyjętych uprzednio elementów i wyznaczonego w poprzednim etapie punktu R_z pokazano na rys.VI.2.5.

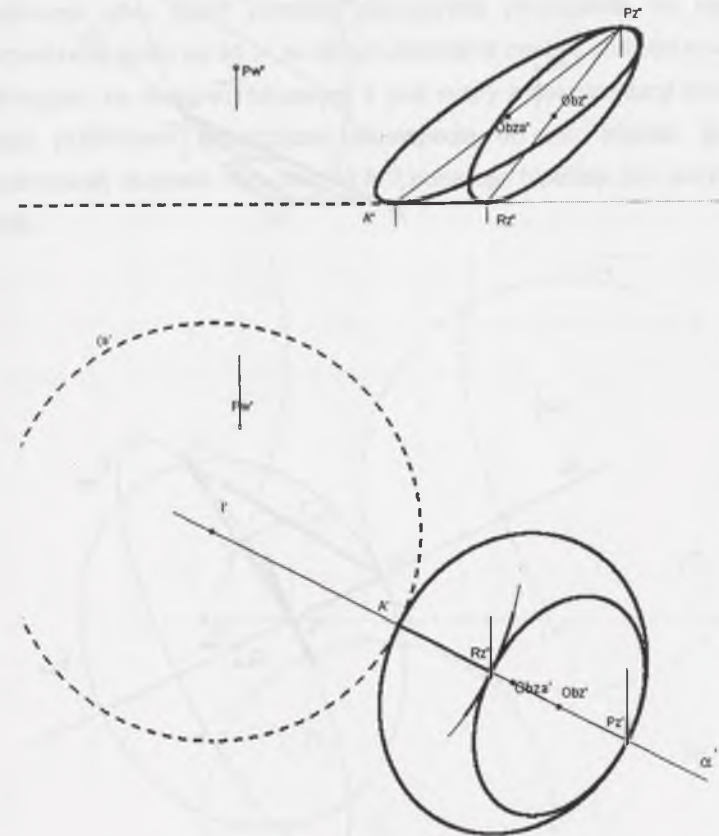


VI.2.5

Jeżeli punkt P_z należy do płaszczyzny α prostopadłej do płaszczyzny okręgu bazowego \bar{a} , zawierającej punkt O_a oraz punkty A i R_z , wówczas odcinki AP_z i R_zP_z są średnicami każdego z okręgów \bar{b}_{zA} i \bar{b}_{zR} .

Punkty O_{bzA} i O_{bzR} jako środki okręgów \bar{b}_{zA} i \bar{b}_{zR} są równoodległe od stałego punktu P_z i odpowiednio punktów styczności A lub R_z .

W konsekwencji odcinek $O_{bzA}O_{bzR}$ łączący te środki jest równoległy do odcinka AR_z , a więc długość odcinka $O_{bzA}O_{bzR}$ jest równa połowie szukanej długości odcinka AR_z , co pokazuje rys.VI.2.6.



VI.2.6

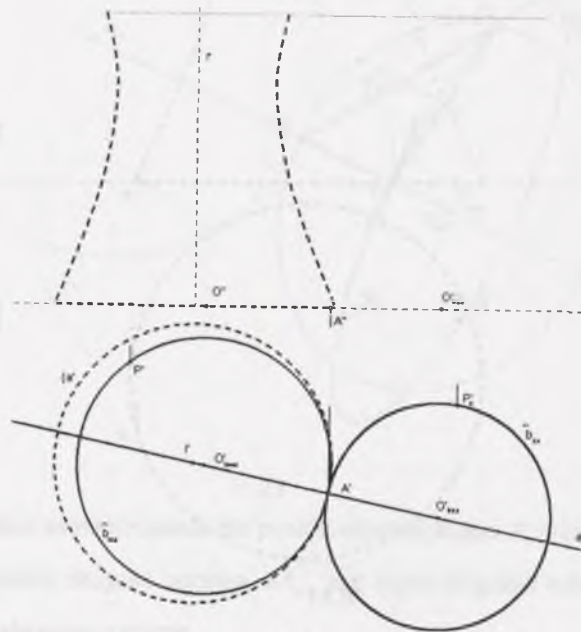
Jeżeli punkt P_z nie leży w płaszczyźnie α prostopadłej do płaszczyzny okręgu \bar{a} i przechodzącej przez O_a A i R_z , to odcinki AP_z i R_zP_z są cięciwami okręgów \bar{b}_{zA} i \bar{b}_{zR} .

Punkty P_z i P_w , zewnątrz i wewnątrz obiektu, określają położenie punktów, w których ustawiana jest aparatura pomiarowa. Punkt A jest teoretycznym punktem leżącym na przyjętym okręgu \bar{a} , w którym należy dokonać pomiaru.

Współrzędne punktu A i wielkość promienia okręgu \bar{a} są odczytane z projektu, zaś współrzędne punktów P_z i P_w są określone z „natury”.

W celu określenia fizycznego punktu, w którym będzie określana grubość powłoki, należy wytyczyć prostą a , przechodzącą przez środek okręgu przekroju O_a oraz punkt A .

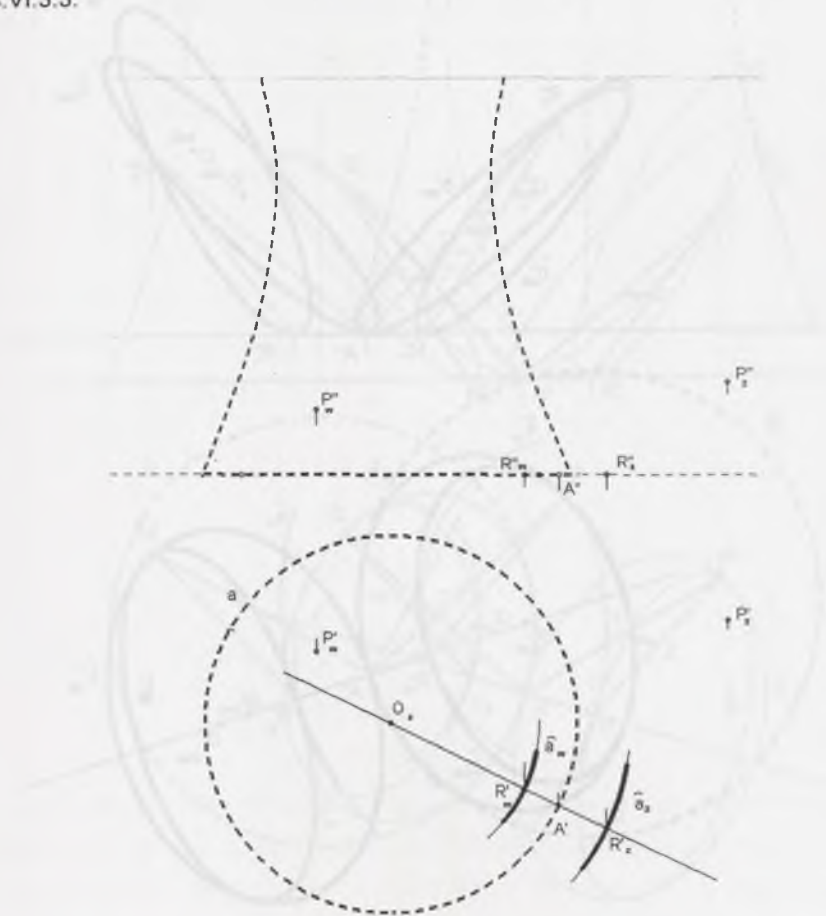
W tym celu wyznaczono punkty O_{bza} i O_{bwa} jako środki okręgów \bar{b}_{za} i \bar{b}_{wa} współpłaszczyznowych z okręgiem \bar{a} , stycznych do niego w punkcie A oraz przechodzących odpowiednio przez rzuty P_w i P_z danych punktów P_w i P_z na płaszczyznę okręgu a . Punkty O_{bza} , O_{bwa} , A i środek okręgu \bar{a} (punkt O_a) należą do prostej a . Dla zadanych współrzędnych punktów P_w, P_z i A oraz dla przyjętej długości promienia okręgu \bar{a} można ustalić parametry prostej a pokazanej na rys.VI.3.2.



VI.3.2

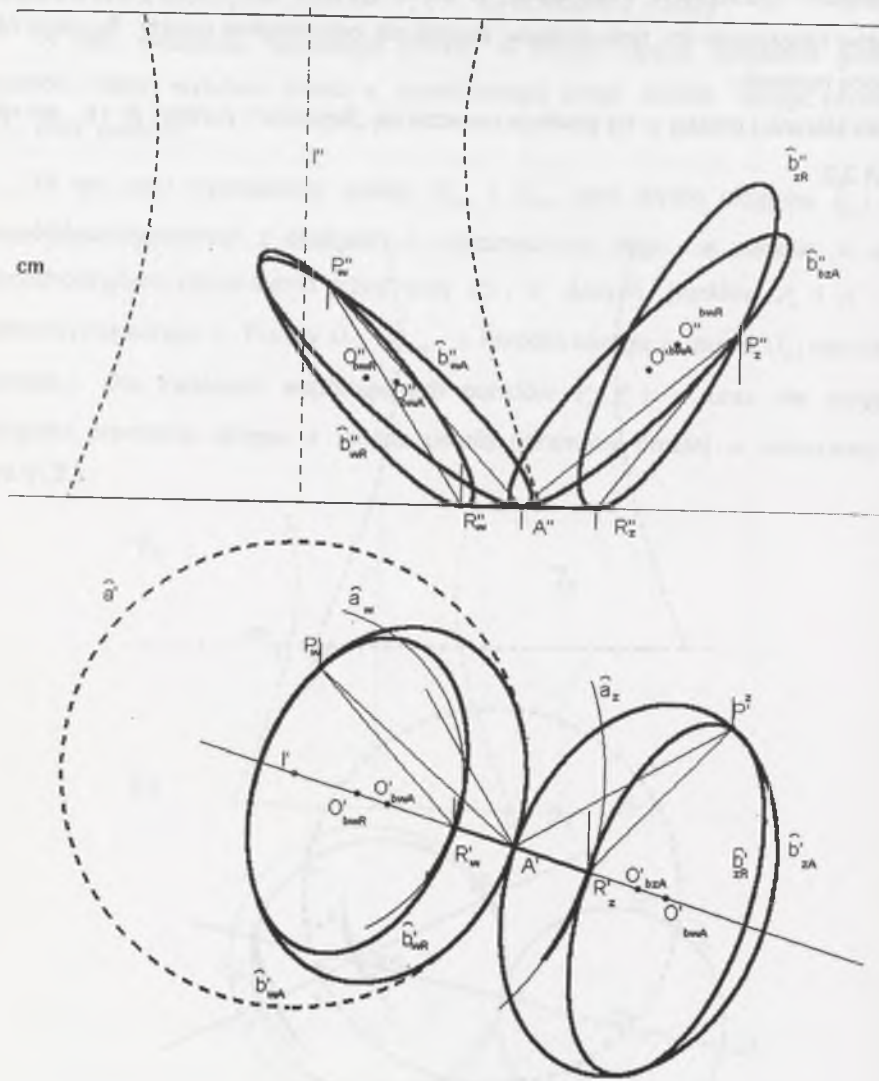
W dalszym ciągu przyjęto łuki okręgów \bar{a}_z i \bar{a}_w , współpłaszczyznowych i współśrodkowych z okręgiem \bar{a} , przebiegające w pobliżu rozpatrywanego miejsca pomiaru, czyli punktu A . Łuki te symbolizują zewnętrzną i wewnętrzną część powłoki budowli. Jako takie są wykorzystywane tylko w rozważaniach teoretycznych i ilustracjach graficznych. Praktycznie, w czasie pomiarów zamiast teoretycznych punktów należących do tych okręgów określa się odpowiednie punkty fizyczne na powłoce budowli.

Na kierunku prostej a na powłoce oznacza się „fizycznie” punkty R_z i R_w jak na rys.VI.3.3.



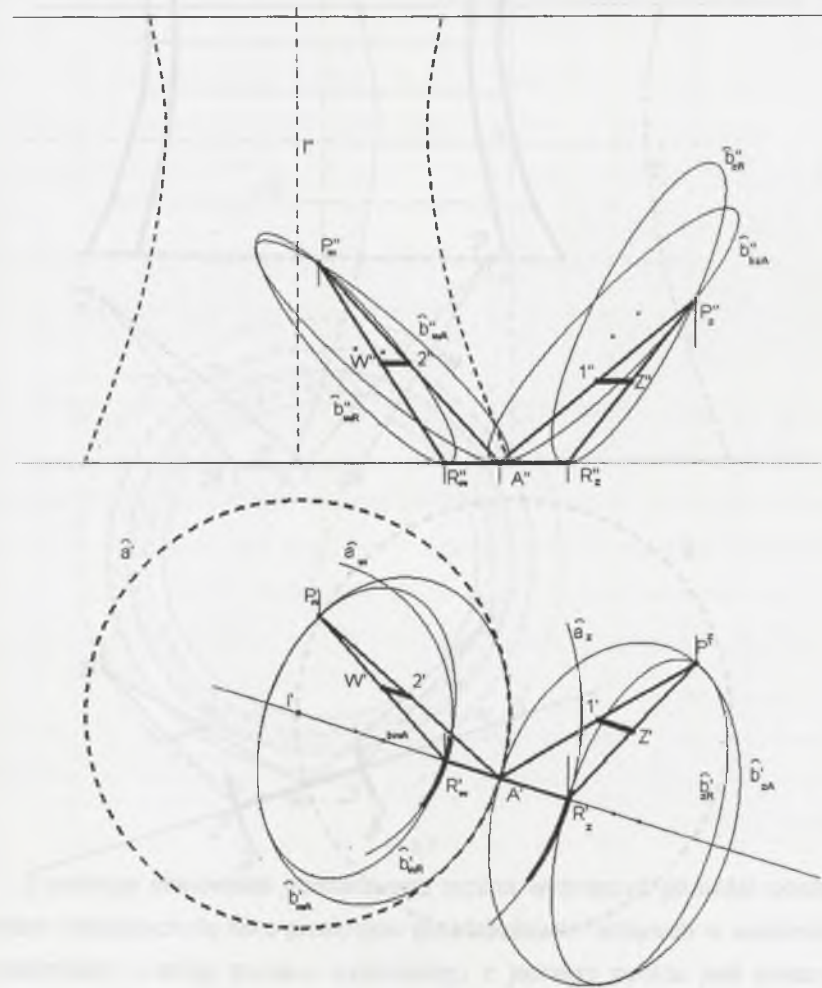
VI.3.3

Dla punktów R_z i R_w zaznaczonych na powłoce oraz dla punktów P_z i P_w można dla teoretycznych okręgów \hat{a}_z i \hat{a}_w określić pary okręgów $\{\hat{b}_{zA}$ i $\hat{b}_{zR}\}$, $\{\hat{b}_{wA}$ i $\hat{b}_{wR}\}$, przechodzących odpowiednio przez punkty P_z i P_w oraz styczne do okręgów $\{\hat{a}_z, \hat{a}_w\}$ i $\{\hat{a}_z, \hat{a}_w\}$ odpowiednio w punktach $\{A, R_z\}$ i $\{A, R_w\}$ jak na rys. VI.3.4.



VI.3.4

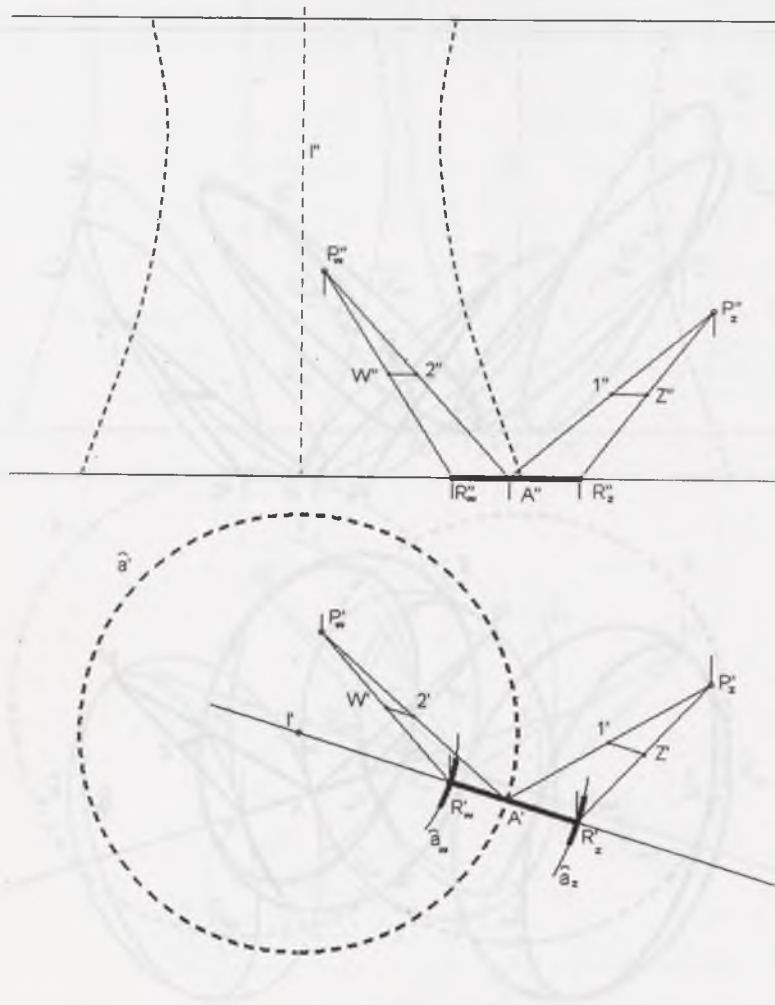
Odcinki $1Z$ oraz $2W$, łączące środki cięciw AP_z i R_zP_z oraz AP_w i R_wP_w okręgów \hat{b}_{zA} , \hat{b}_{zR} , \hat{b}_{wA} i \hat{b}_{wR} , są równoległe do odcinków AR_w i AR_z . Długości odcinków $1Z$ i $2W$ stanowią połowę długości odcinków AR_z i AR_w . Suma długości odcinków AR_z i AR_w jest miarą grubości powłoki w rozpatrywanym miejscu $|AR_z| + |AR_w| = |R_wR_z| = 2(|1Z| + |2W|)$. Sytuacja ta pokazana jest na rys. VI.3.5.



VI.3.5

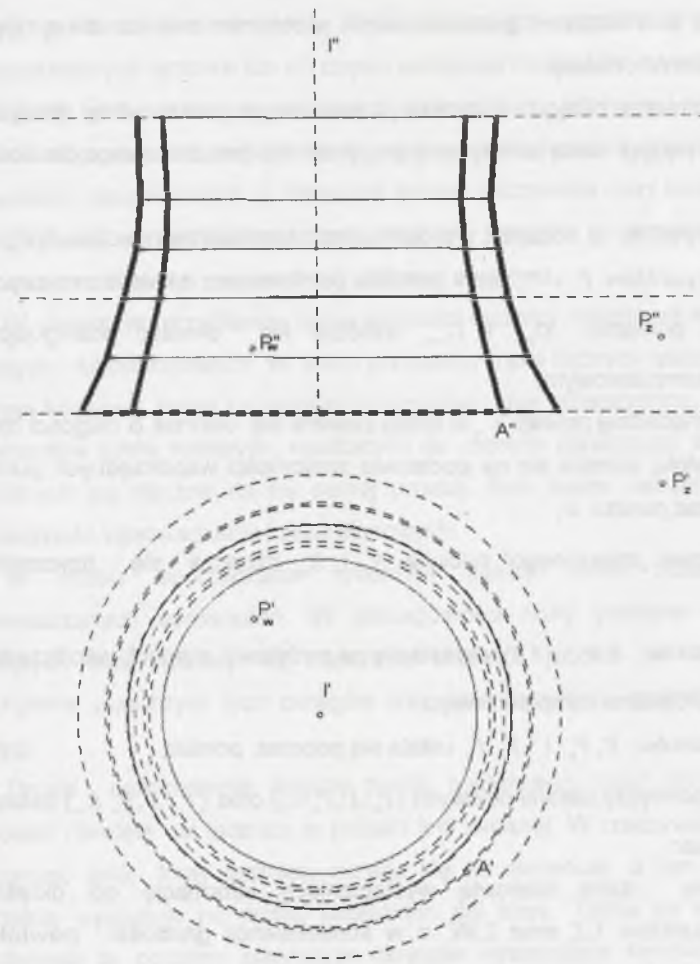
W szczególności, gdy punkty P_z i P_w należą do płaszczyzny okręgu \bar{a} , jak to miało miejsce w przypadku ilustrowanym rys.VI.2.6, zamiast środków cięciw występują środki O_{bzA} , O_{bzR} , O_{bwA} i O_{bwR} okręgów \bar{b}_{zA} , \bar{b}_{zR} , \bar{b}_{wA} i \bar{b}_{wR} .

Znajomość współrzędnych punktu A , promienia okręgu \bar{a} oraz długości odcinków $R_z P_z$ i $R_w P_w$ pozwalają określić długości odcinków $A R_w$ i $A R_z$, których suma stanowi grubość powłoki w punkcie A , co widać na rys.VI.3.6.



VI.3.6

Dla kolejnych przekrojów płaszczyznami poziomymi punkty $A_{1,2}$ przyjmuje się w płaszczyźnie pionowej przechodzącej przez prostą a , jak to widać na rysunku VI.3.7, wykonanym w bardzo skażonej skali.



VI.3.7

Z jednego stanowiska pomiarowego można wyznaczyć grubości powłoki w punktach należących do kilku przekrojów południkowych i leżących w wyróżnionych równoleżnikach. Zasięg pomiaru wykonanego z jednego punktu jest zależny od możliwości pomiarowych aparatury i istniejących uwarunkowań lokalnych.

VI.4. Podsumowanie

W praktyce w celu ustalenia grubości powłoki w obranym miejscu, dla przyjętego układu współrzędnych, należy:

- wielkość promienia okręgu \bar{a} przekroju poziomego płaszczyzną odczytać z projektu (lub przyjęc nową teoretyczną linię przekroju południkowego dla badanej powłoki),
- współrzędne punktu A odczytać z projektu (lub z przyjętej teoretycznej linii),
- współrzędne punktów P_z i P_w , czyli punktów pomiarowych, określić z natury,
- współrzędne punktów O_{bza} i O_{bwa} wyliczyć lub określić posługując się programem komputerowym,
- równanie pomocniczej prostej a , w której zawiera się odcinek o długości równej grubości powłoki, określa się na podstawie znajomości współrzędnych punktów O_{bza} i O_{bwa} oraz punktu A ,
- punkty końcowe „mierzonego” odcinka R_z i R_w oznacza się „fizycznie” na powłoce,
- długości odcinków AP_z i AP_w określa się na podstawie znanych współrzędnych za pomocą programu komputerowego,
- długości odcinków R_zP_z i R_wP_w ustala się poprzez pomiar,
- miary kątów pomiędzy parami celowych $\{P_z A, P_z R_z\}$ oraz $\{P_w A, P_w R_w\}$ ustala się poprzez pomiar.

Przedstawione dane stanowią wystarczającą informację do określenia pomocniczych punktów 1,Z oraz 2,W, a w konsekwencji **grubości powłoki w obranym punkcie A**.

VII. ŁĄCZNICE DWUPOZIOMOWYCH WĘZŁÓW DROGOWYCH

W geometrii bezkolizyjnych wielopoziomowych węzłów drogowych ciągów komunikacyjnych łącznice lub ich części występują najczęściej na planie sytuacyjnym w postaci łuków kołowych, łączonych klotoidalnymi krzywymi przejściowymi lub odcinkami prostej. Na profilach podłużnych niweleta łącznicy składa się z odcinków linii prostej, uzupełnianych w miejscach zmiany nachylenia trasy łukami kołowymi. W takiej sytuacji w rzeczywistości trasa łącznicy biegnie po krzywej, która jest linią śrubową nawiniętą na powierzchnię walcową obrotową.

W pierwszym przybliżeniu opisu geometrii łącznicy można ograniczyć się do linii prostych i łuków kołowych. W takim przypadku trasa łącznicy stanowi przestrzenną krzywą koszową. Przez to określenie rozumiem linię przestrzenną, składającą się z fragmentów łuków kołowych, należących do różnych płaszczyzn, które w punktach wspólnych są styczne do tej samej prostej. Przy takim założeniu nie zachodzi konieczność wprowadzania łuków pionowych.

W czasie sporządzania rysunków trzeba sobie zdawać sprawę z wprowadzanych uproszczeń. W szczególności rzuty poziome łuków okręgów, będących osią łącznicy, są naprawdę elipsami, jednak ze względu na małe nachylenie płaszczyzn tych okręgów oraz skalę rysunków można rysować je jako okręgi.

Drugie uproszczenie dotyczy profilu podłużnego trasy, gdzie wygodnie jest rysować niweletę osi łącznicy w postaci linii łamanej. W rzeczywistości łuk okręgu, będącego osią trasy łącznicy, rozwija się na sinusoidę, a tym samym w takim kształcie występuje na profilu podłużnym osi trasy. Także ze względu na małe nachylenia do poziomu płaszczyzn okręgów występujące sinusoidy mają bardzo małe amplitudy, tak że praktycznie trudno jest je narysować, nawet stosując skale skażone. W związku z tym sadzę, że można dopuścić rysowanie niwelety trasy na profilu w sposób przybliżony. Wszystkie te uproszczenia można „zredukować” znajomością współrzędnych poszczególnych.

Do wstępnego projektowania rzutu poziomego trasy łącznicy, przy podanych założeniach, zastosowano konstrukcje geometryczne opracowane w rozdziale V niniejszej pracy. Za ich pomocą można określić w przybliżeniu, wystarczającym dla

tego etapu projektowania, położenie środka okręgu, stanowiącego większą część osi łącznicy.

Przyjmując wynikające z obowiązujących przepisów i warunków technicznych [39,40] warunki wstępne dotyczące kierunków i spadków osi dróg oraz usytuowanie na nich punktów włączenia i wyłączenia można rozpatrywać różne przypadki.

Wprawdzie obowiązujące przepisy [39] narzucają minimalne pochylenie niwelety jako 0,05%, jednak droga, której niweleta posiada takie nachylenie, w praktyce inżynierskiej jest uznawana jako droga w poziomie i takie uproszczenie zastosowano w rozpatrywanych przypadkach zarówno w tytułach podrozdziałów, jak i w rysunkach.

Ze względu na skalę rysunków pominięto na rysunkach osie potoków ruchu i przedstawiano łącznice za pomocą jednej linii.

Względy edytorskie (wielkość rysunków) sprawiły, że w omawianych dalej przykładach jako punkty „włączenia” i „wyłączenia” (A i B) przyjęto początki łuków kołowych, pomijając część zawartą pomiędzy punktem wyłączenia się z ruchu a początkiem łuku.

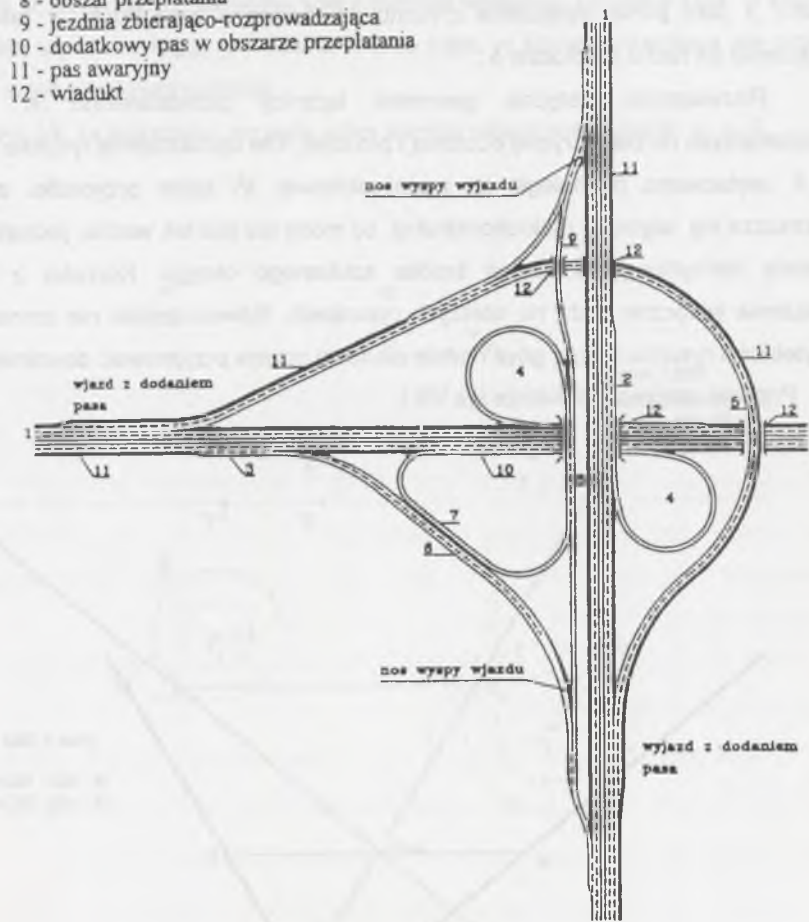
Niewątpliwym ułatwieniem jest zastosowanie programu komputerowego CABRI, który mając bardzo wiele wad, szczególnie edytorskich, pozwala na iteracyjne „manewrowanie” w sposób ciągły wprowadzanymi elementami wstępnymi. Daje to możliwość bieżącej obserwacji na monitorze zmian zachodzących w elementach wynikowych

Schematy rozwiązań węzłów różnią się między sobą głównie sposobami prowadzenia łącznic, odległościami punktów rozdziału i połączeń potoków ruchu oraz liczbą wlotów.

Na rysunku VII przedstawiono schemat hipotetycznego węzła, w skład którego wchodzi łącznice różnego typu [40].

W kolejnych punktach rozdziału pokazano przykłady sporządzania rysunków rzutów tylko kilku wybranych typów łącznic. Wyboru dokonano tak, aby pokazać zastosowanie różnych konstrukcji geometrycznych. Przy konstruowaniu pozostałych typów łącznic można się wzorować na rozwiązaniach już pokazanych. Ograniczono się do rysowania, w każdym z przykładów, tylko jednej łącznicy jako fragmentu węzła.

- 1 - jezdnia główna
- 2 - wjazd - pas włączania
- 3 - wyjazd - pas wyłączenia
- 4 - łącznica pośrednia
- 5 - łącznica półbezpośrednia
- 6 - łącznica bezpośrednia dopasowana
- 7 - łącznica pośrednia dopasowana
- 8 - obszar przeplatania
- 9 - jezdnia zbierająco-rozprowadzająca
- 10 - dodatkowy pas w obszarze przeplatania
- 11 - pas awaryjny
- 12 - wiadukt



VII

Profil podłużny sporządzono tylko dla jednego wybranego przykładu i pokazano go w ostatnim punkcie rozdziału.

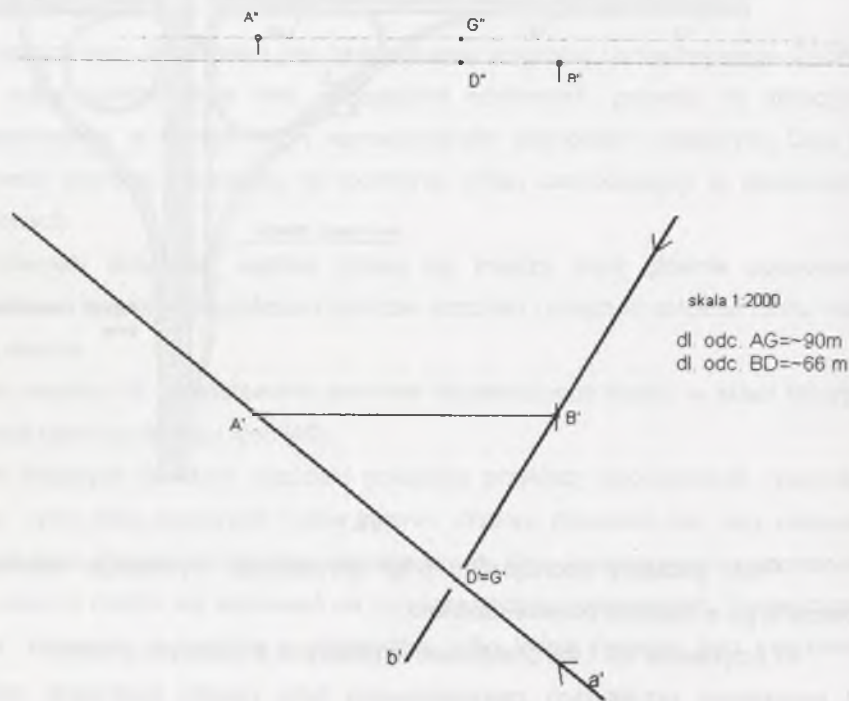
W przykładzie VII.1 tok postępowania pokazano w kolejnych etapach. W pozostałych przykładach zaprezentowano tylko rysunki ilustrujące sposoby dochodzenia do proponowanych rozwiązań.

VII.1. Łącznica pośrednia lewa, gdy niwelety obu dróg w węźle są poziome

Na przyjętych osiach dróg a i b , przebiegających w poziomie, określono punkt A jako punkt wyłączenia z ruchu na drodze a oraz punkt B jako punkt włączenia do ruchu na drodze b .

Rozwiązanie wstępne geometrii łącznicy przedstawiono w rzutach prostokątnych na płaszczyznę poziomą i pionową. Dla uproszczenia rysunku odcinek AB usytuowano równoległe do rzutni pionowej. W takim przypadku znacznie upraszcza się algorytm makrokonstrukcji, co może nie jest tak ważne, jednak bardzo ułatwia identyfikację położenia środka szukanego okręgu. Korzyści z takiego założenia widoczne będą na dalszych rysunkach. Równocześnie nie zmniejsza to czytelności rysunku węzła, gdyż rzutnię pionową można przyjmować dowolnie.

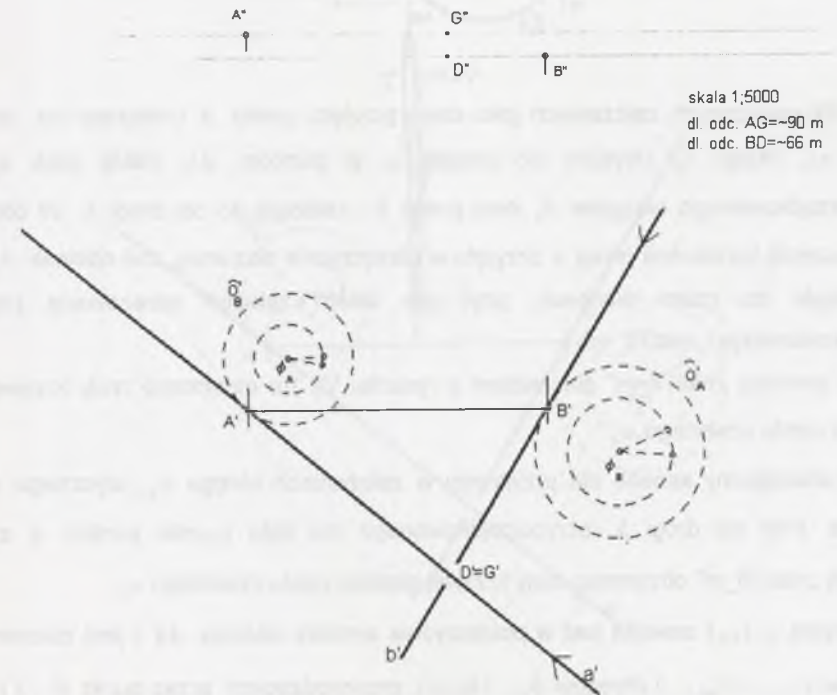
Przyjęte założenia pokazuje rys. VII.1.



VII.1

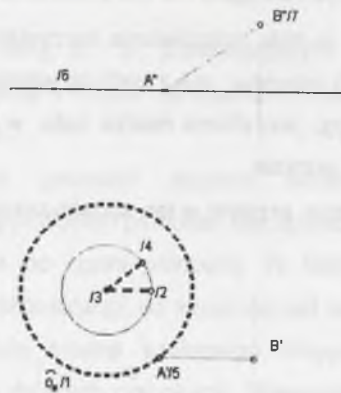
W punktach A i B przyjęto, usytuowane poziomo, dwa okręgi \bar{o}_A i \bar{o}_B , styczne do prostych a i b oraz przyporządkowano im odpowiednio miary kątów ϕ_A i ϕ_B . Długość promieni przyjętych okręgów nie ma znaczenia. Okręgi \bar{o}_A i \bar{o}_B teoretycznie zastępują proste a i b w celu umożliwienia korzystania z konstrukcji podanych w rozdziale V, dotyczących okręgów, zaś z definicji wiadomo, że miara kąta, w którym przecinają się dwa okręgi, jest równa mierze kąta, w którym przecinają się proste styczne w ich wspólnym punkcie.

Na rys. VII.1a pokazano przyjęte w ten sposób okręgi pomocnicze \bar{o}_A i \bar{o}_B .



VII.1a

Założenia do makrokonstrukcji „mac76_m” pokazano na rys.VII.1m. W całej pracy w numeracji rysunków wskazujących założenia do makrokonstrukcji wprowadzono literę m.



VII.1m

W powyższych założeniach jako dane przyjęto: punkt A (należący do osi drogi a), okrąg \bar{o}_A (styczny do prostej a w punkcie A), miarę kąta ϕ_A przyporządkowanego okręgowi \bar{o}_A oraz punkt B , należący do osi drogi b . W celu uproszczenia konstrukcji okrąg a przyjęto w płaszczyźnie poziomej, zaś odcinek AB równoległy do rzutni pionowej, gdyż dla takich założeń opracowana jest makrokonstrukcja „mac76_m”.

Za pomocą „mac76_m” dla założeń z rysunku VII.1m otrzymano rzuty krzywej płaskiej rzędu czwartego c_A .

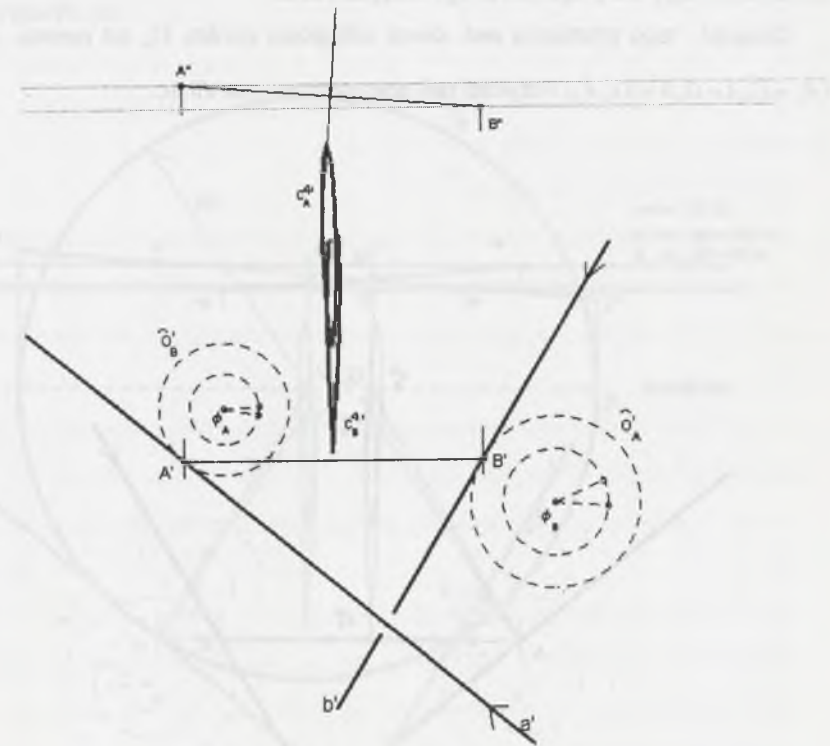
W analogiczny sposób dla przyjętego w założeniach okręgu \bar{o}_B , stycznego w punkcie B do osi drogi b , przyporządkowanego mu kąta ϕ_B oraz punktu A za pomocą „mac76_m” otrzymano rzuty krzywej płaskiej rzędu czwartego c_B .

Krzywa c_A (c_B) zawarta jest w płaszczyźnie symetrii odcinka AB i jest zbiorem środków $O_{bA1,2}$ ($O_{bB1,2}$) okręgów $\bar{o}_{A1,2}$ ($\bar{o}_{B1,2}$), przechodzących przez punkt B (A) i przecinających okrąg \bar{o}_A (\bar{o}_B) w punkcie A (B) pod kątami o mierze ϕ_A (ϕ_B).

Przyjęte uprzednio położenie odcinka AB równoległe do rzutni pionowej powoduje, że rzuty pionowe krzywych c_A i c_B występują tutaj w postaci współliniowych odcinków należących do prostej, będącej symetralną odcinka AB .

W takim przypadku identyfikacja punktów (np. $O_{bA1,2}$) należących do krzywych c_A i c_B jest ułatwiona. Przy innym usytuowaniu odcinka AB dla jednoznacznego określenia położenia punktu należącego np. do krzywej c_A należałoby sporządzić jej dodatkowy rzut lub kład płaszczyzny, do której krzywa ta należy.

Rzuty poziome krzywych c_A i c_B pokazano na rys.VII.1b.



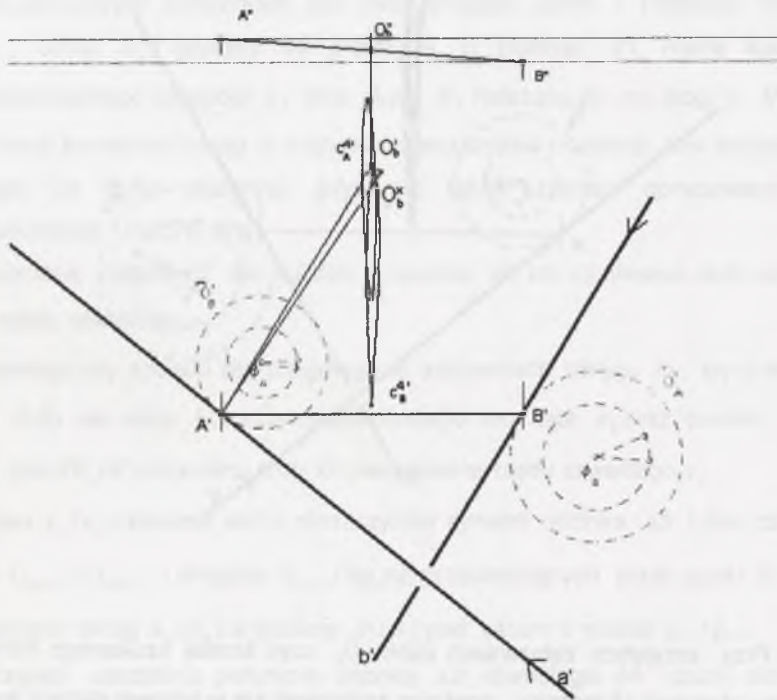
VII.1b

Przy przyjętych założeniach punkt O_b , czyli środek szukanego okręgu \bar{o} , który ma stanowić oś łącznicy, powinien znajdować się w połowie różnicy wysokości dróg o osiach a i b . Punkt ten powinien ponadto należeć równocześnie do obu krzywych c_A i c_B .

Zmieniając wielkości kątów ϕ_A i ϕ_B można ustalić w przybliżeniu takie krzywe c_A i c_B , że pozwolą one w wystarczającym przybliżeniu określić położenie szukanego punktu O_b .

Można równocześnie, w sposób iteracyjny, dostosować położenie środka okręgu \bar{b} do warunków technicznych [29,39,40] wynikających z dopuszczalnej wielkości promienia R_b , jak też z konieczności zachowania dopuszczalnych spadków na trasie łącznicy oraz innych uwarunkowań, np. ograniczenie wielkości powierzchni terenu przeznaczonych dla projektowanego skrzyżowania.

Długość tego promienia jest równa odległości punktu O_b od punktu A lub B ($R_b = O_bA = O_bB = |O_b^*A|$). Przykład taki pokazano na rys.VII.1c.

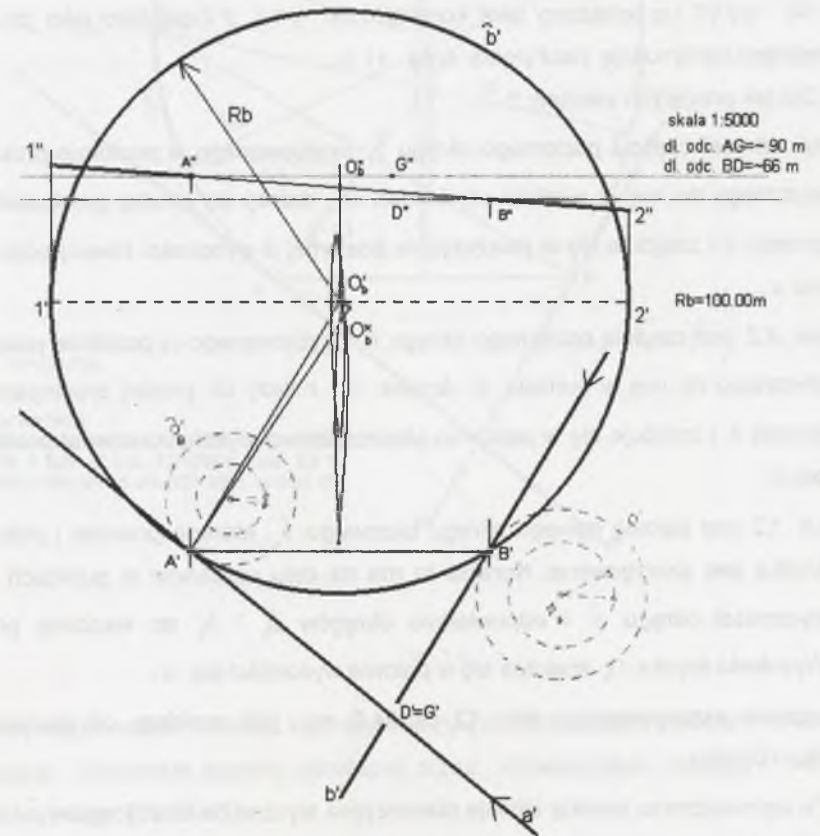


VII.1c

Rzut poziomy okręgu \bar{b} jest elipsą, ale ze względu na małe nachylenie płaszczyzny okręgu do poziomu jej kształt jest bardzo zbliżony do okręgu, co przy założeniu, że rysunek jest uproszczony, pozwala na rysowanie rzutu osi trasy łącznicy jako łuku kołowego.

Wyznaczony w ten sposób okrąg „bazowy” \bar{b} można traktować jako pierwsze przybliżenie osi trasy łączącej punkty A i B .

Łatwo zauważyć, że część okręgu \bar{b} znajduje się powyżej poziomu osi a , a część poniżej poziomu osi b . Są to łuki $A1$ - powyżej oraz $B2$ - poniżej trasy, co pokazuje rys.VII.1d.



VII.1.d

Do dalszych rozważań (rys.VII.1e) przyjęto, że połowa długości obwodu okręgu bazowego \bar{b} , zawarta pomiędzy punktami będzie wstępnie stanowić część osi projektowanej łącznicy. Jest to podyktowane możliwością uniknięcia wprowadzania łuków pionowych w okolicach punktów 1 i 2, co będzie widoczne na kolejnym rysunku oraz w punkcie VII.7 niniejszego rozdziału przy okazji wykonania profilu podłużnego łącznicy.

Części osi trasy $A1$ i $B2$ należałoby zastąpić fragmentami innych okręgów lub krzywymi przejściowymi, np. kłotoidami. Jednak krzywizna łuków, które powinny zastąpić fragmenty $A1$ i $B2$, musi być mniejsza od krzywizny okręgu \bar{b} . W związku z tym konieczna jest korekta promienia okręgu \bar{b} i położenia jego środka Ob .

Na rys.VII.1e pokazano taką korektę. Łuki $A1$ i $B2$ przyjęto jako poziome, stanowiące kontynuację nachylenia dróg a i b .

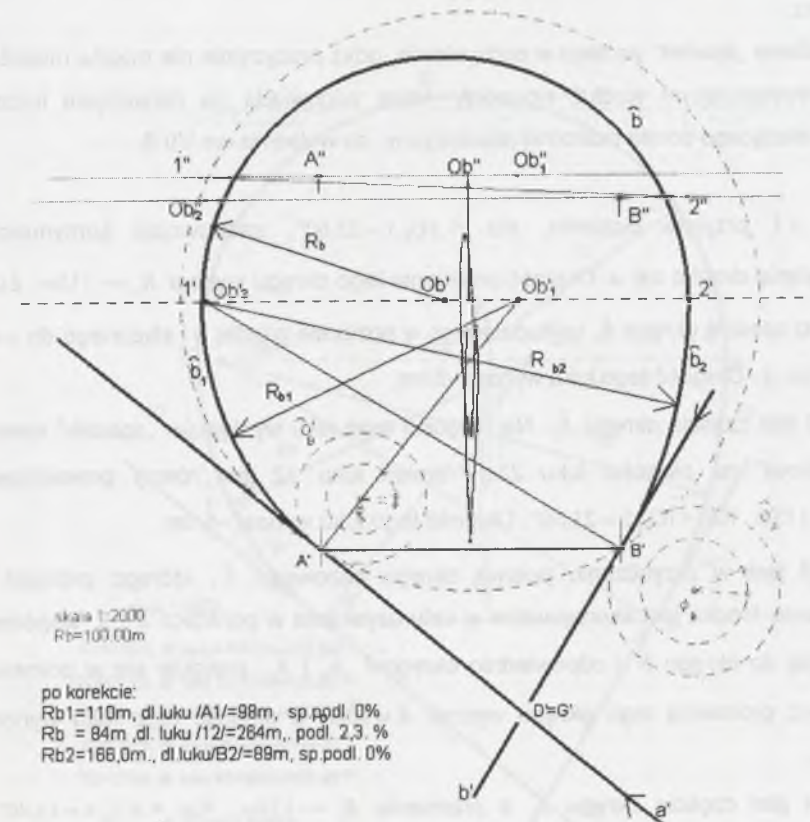
Dla tak przyjętych założeń:

- łuk $A1$ jest częścią poziomego okręgu \bar{b}_1 usytuowanego w poziomie prostej a i stycznego do niej w punkcie A ; środek O_{b1} należy do prostej prostopadłej do prostej a i znajduje się w płaszczyźnie poziomej o wysokości równej poziomowi osi a ,
- łuk $B2$ jest częścią poziomego okręgu \bar{b}_2 usytuowanego w poziomie prostej b i stycznego do niej w punkcie B ; środek O_{b2} należy do prostej prostopadłej do prostej b i znajduje się w poziomej płaszczyźnie o wysokości równej poziomowi osi b ,
- łuk $1,2$ jest połową nowego okręgu bazowego \bar{b} , którego promień i położenie środka jest skorygowane. Korekta ta ma na celu uzyskanie w punktach 1 i 2 styczności okręgu \bar{b} i odpowiednio okręgów \bar{b}_1 i \bar{b}_2 do wspólnej prostej. Wysokość środka O_b znajduje się w połowie wysokości osi b ;
- promień skorygowanego łuku 12 ($R=84.0$ m) jest mniejszy od pierwotnego ($R_b=100.0$ m).

Po wprowadzeniu korekty istnieje płaszczyzna styczna do obu okręgów \bar{b} i \bar{b}_1 (\bar{b}_2) w punkcie 1 (2). Równocześnie część wspólna płaszczyzn zawierających okręgi \bar{b} i \bar{b}_1 (\bar{b}_2) jest prostą wspólnie styczną do obydwu okręgów, co powoduje, że w

punktach tych nie występują załamania osi drogi. Eliminuje to konieczność wprowadzania łuków pionowych.

Na rys. VII.1.e pokazany jest układ rzutów okręgów po dokonaniu korekty.



VII.1 e

Przy opracowaniu projektu łącznicy należy już w pierwszych etapach brać pod uwagę różnorakie aspekty określone przez obowiązujące przepisy, warunki lokalizacyjne itp. [29,39,40].

Jednym z podstawowych warunków jest konieczność zachowania określonych parametrów, jak np. minimalny i maksymalny spadek niwelety osi drogi.

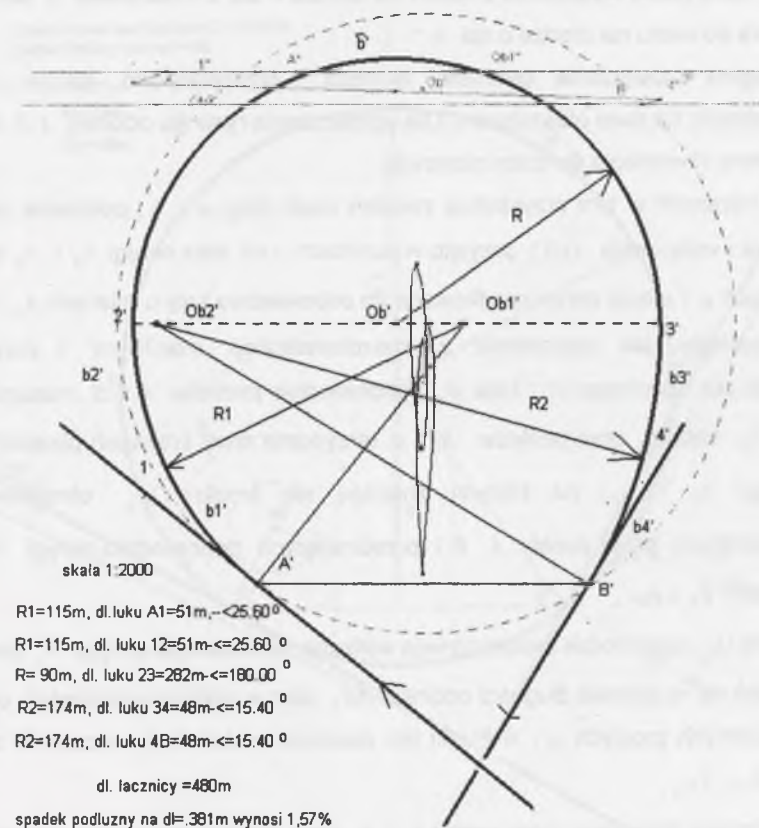
Jeżeli np. długość łuku okręgu \bar{b} jest zbyt mała dla zachowania dopuszczalnego nachylenia osi łącznicy, można łuk $A1$ rozdzielić na dwie części i ukształtować go w postaci krzywej koszowej przestrzennej.

Dla przykładu poniżej pokazano kształt osi projektowanej łącznicy dla takiego przypadku.

Określenie „spadek” podano w cudzysłowie, gdyż precyzyjnie nie można mówić o spadku występującym wzdłuż sinusoidy, która odpowiada na rozwinięciu łukowi okręgu należącego do nie poziomej płaszczyzny, co widać na rys.VII.6.

- łuk $A1$ przyjęto poziomo, dla $\angle AO_{b1}1 = 25,60^\circ$, zachowując kontynuację nachylenia drogi o osi a . Długość promienia tego okręgu wynosi $R_1 \approx 115m$. Łuk ten jest częścią okręgu \bar{b}_1 usytuowanego w poziomie prostej a i stycznego do a w punkcie A . Długość tego łuku wynosi $\sim 51m$;
- łuk 12 jest częścią okręgu \bar{b}_2 . Na długości tego łuku występuje „spadek” równy „spadkowi” na długości łuku 23 . Promień łuku 12 jest równy promieniowi $R_1 \approx 115m$. Kąt $\angle 1O_{b1}2 = 25,60^\circ$. Długość tego łuku wynosi $\sim 51m$;
- łuk 23 jest w przybliżeniu połową okręgu bazowego \bar{b} , którego promień i położenie środka jest skorygowane w celu uzyskania w punktach 2 i 3 wspólnej stycznej do okręgu \bar{b} i odpowiednio okręgów \bar{b}_2 i \bar{b}_3 . znajduje się w połowie. Długość promienia tego okręgu wynosi $R = 90m$, a długość tego łuku wynosi $282m$,
- łuk 34 jest częścią okręgu \bar{b}_3 o promieniu $R_2 \approx 174m$. Kąt $\angle 3O_{b2}4 = 15,40^\circ$. „Spadek” podłużny osi łuku jest równy spadkowi łuku 23 . Długość tego łuku wynosi $\sim 48m$;
- łuk $4B$ przyjęto poziomo, dla $\angle 4O_{b2}B = 15,40^\circ$, zachowując kontynuację nachylenia drogi b . Promień tego okręgu $R_2 \approx 174m$. Łuk ten jest częścią okręgu \bar{b}_4 usytuowanego w poziomie prostej b i stycznego do niej w punkcie B . Długość tego łuku wynosi $\sim 48m$.

Przykład ten jest pokazany na rys.VII.1f.



VII.1.f

VII.2. Łącznica pośrednia lewa, gdy niwelety obu osi dróg węzła są w spadku

Na przyjętych osiach dróg a i b , przebiegających w spadku $\sim 5\%$, określono punkt A jako punkt wyłączenia z ruchu na drodze o osi a oraz punkt B jako punkt włączenia do ruchu na drodze o osi b .

Wstępne rozwiązanie geometrii łącznicy przedstawiono, jak w rzutach prostokątnych, na dwie płaszczyzny. Dla uproszczenia rysunku odcinek AB również usytuowano równoległe do rzutni pionowej.

Dla obranych w tym przykładzie założeń (osie dróg a i b , położenie punktów włączenia i wyłączenia A i B) przyjęto w punktach A i B dwa okręgi \bar{o}_A i \bar{o}_B styczne do prostych a i b oraz przyporządkowano im odpowiednio kąty o miarach ϕ_A i ϕ_B .

Korzystając, jak poprzednio, z makrokonstrukcji „mac76_m” i przyjmując założenia raz dla okręgu \bar{o}_A , kąta ϕ_A i odpowiednio punktów A i B , następnie dla okręgu \bar{o}_B , kąta ϕ_B oraz punktów B i A otrzymano rzuty krzywych płaskich rzędu czwartego c_A i c_B , na których znajdują się środki $O_{b1,2}$ okręgów $\bar{b}_{1,2}$, przechodzących przez punkty A , B i przecinających odpowiednio okręgi \bar{o}_A i \bar{o}_B pod kątami ϕ_A i ϕ_B .

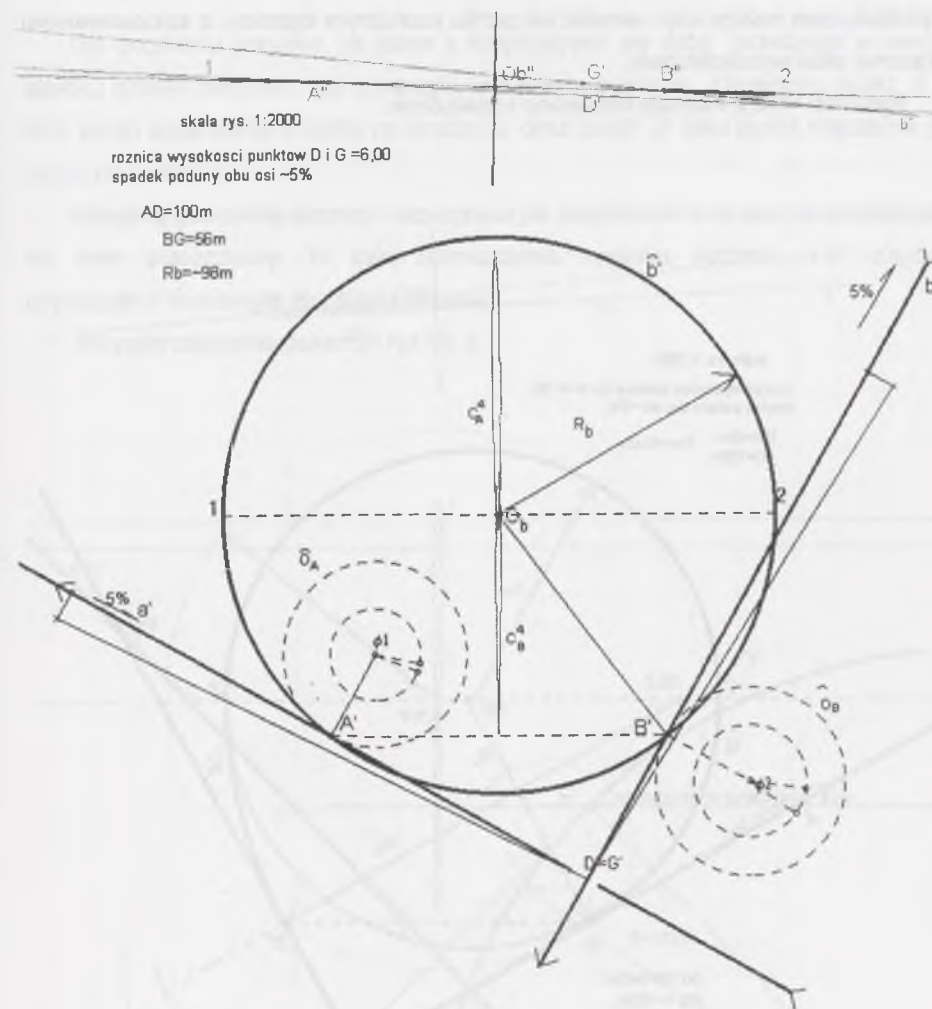
Punkt O_b , czyli środek teoretycznego wstępnie określanego okręgu \bar{b} , powinien znajdować się w połowie długości odcinka AB , jako w połowie wysokości osi tras, czyli poziomych prostych a i b . Punkt ten powinien należeć równocześnie do obu krzywych c_A i c_B .

Zmieniając iteracyjnie miary kątów ϕ_A i ϕ_B oraz, jeżeli to wskazane, inne przyjęte założenia, biorąc równocześnie pod uwagę uwarunkowania techniczne, można ustalić w przybliżeniu położenie punktu O_b .

Tak jak poprzednio okrąg „bazowy” \bar{b} traktuje się jako pierwsze przybliżenie kształtu osi łącznicy pomiędzy punktami A i B .

Z powodów podanych wcześniej (małe nachylenie płaszczyzny okręgu oraz skala rysunku) rysuje się go w rzucie poziomym jako okrąg.

Na rys. VII.2.1 pokazano omówioną sytuację.



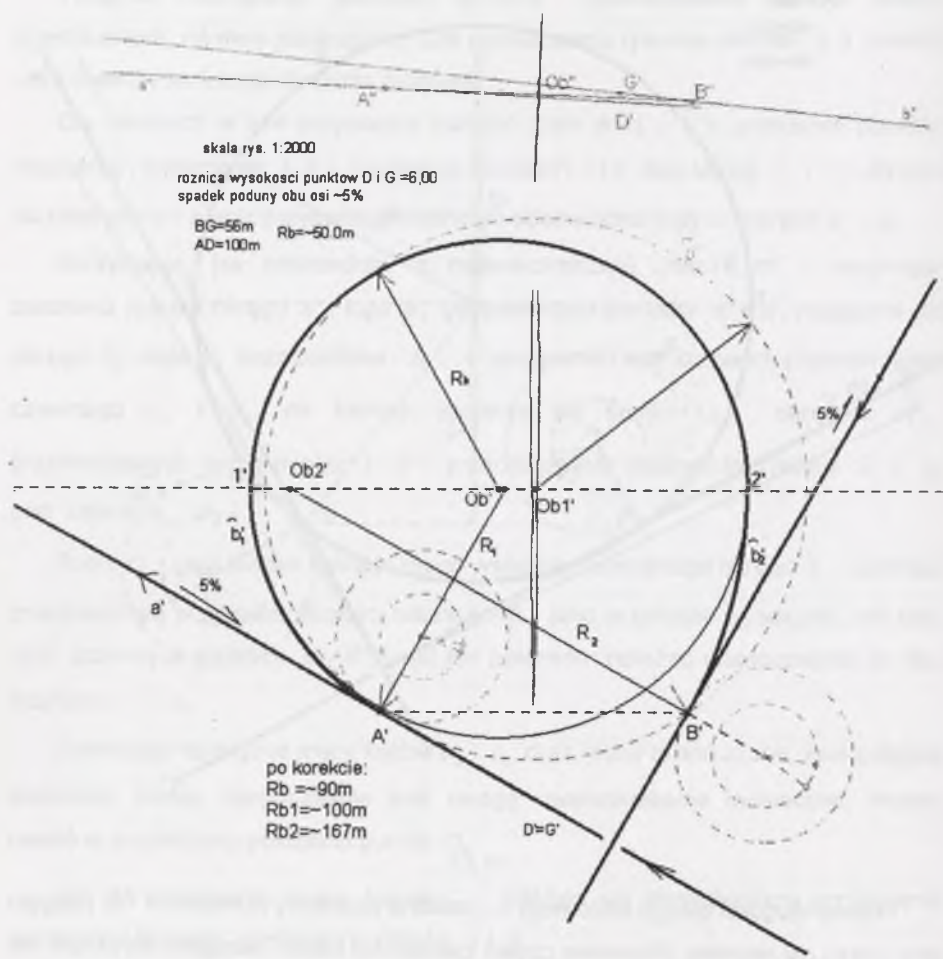
VII.2.1

Połowę długości okręgu bazowego \bar{b} , zawartą pomiędzy punktami 1 i 2, przyjęto jako część osi łącznicy. Pozostałe części zastąpiono łukami okręgów, stycznych do osi a i b w punktach A i B oraz do okręgu \bar{b} w punktach 1 i 2.

Ze względu na skalę rysunku i spadki podłużne na osiach dróg pokazano tylko rozwiązanie na planie sytuacyjnym.

Rzut pionowy w takim przybliżeniu jest zupełnie nieczytelny, a ze względu na stosowanie makrokonstrukcji nie można zastosować skali skażonej. Problemy wysokościowe należy więc określić na profilu podłużnym łącznicy, z zastosowaniem skażonej skali wysokościowej.

Rysunek VII.2.2 ilustruje omówione rozwiązanie.



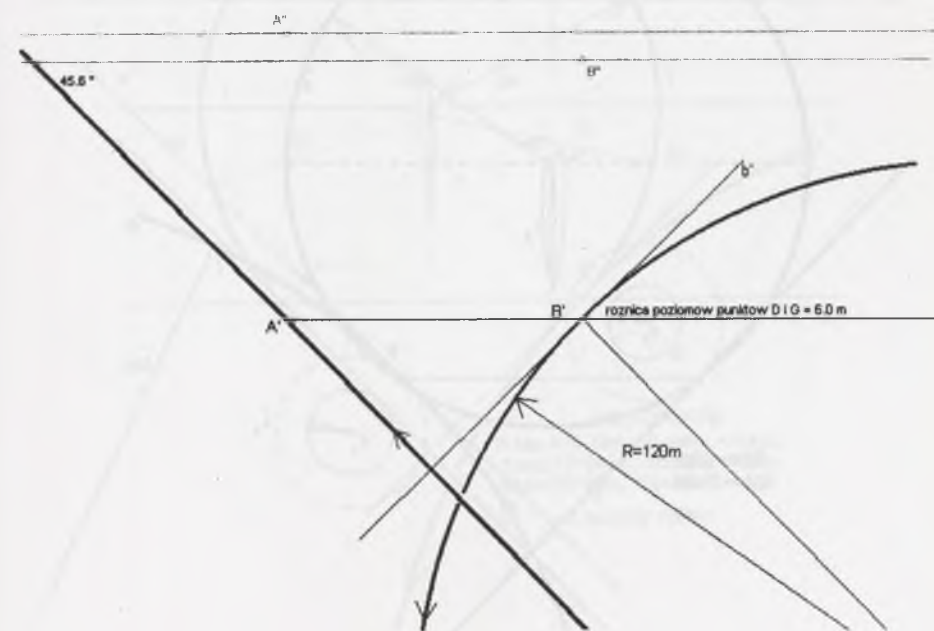
VII.2.2

VII.3. Łącznica pośrednia lewa z jedną drogą w łuku

Dla przykładu przyjęto, że jedna z krzyżujących się dróg przebiega w łuku o spadku prawie zerowym, zaś oś drugiej jest prostą poziomą. Określono punkt A jako punkt wyłączenia z ruchu na drodze a oraz punkt B jako punkt włączenia do ruchu na drodze b .

Wstępną geometrię łącznicy rozwiązano jak poprzednio w rzutach prostokątnych na dwie płaszczyzny. W celu uproszczenia rysunku odcinek AB również usytuowano równoległe do rzutni pionowej.

Przyjęte założenia pokazuje rys.VII.3.

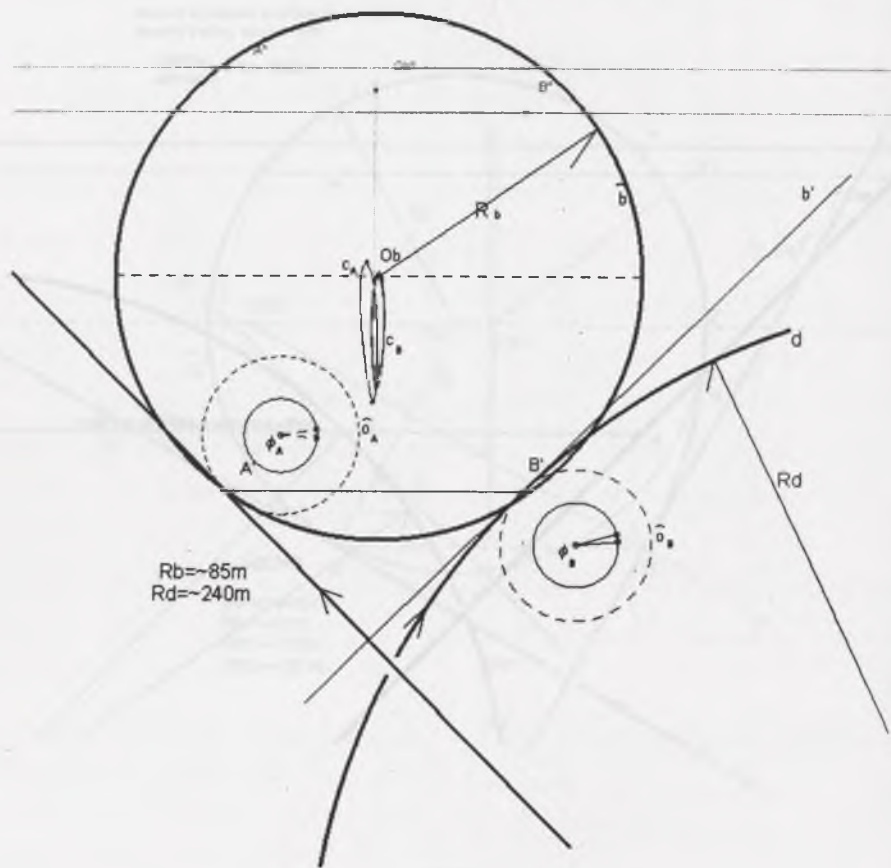


VII.3

W punkcie B poprowadzono prostą b styczną do okręgu \bar{b} , będącego osią drogi.

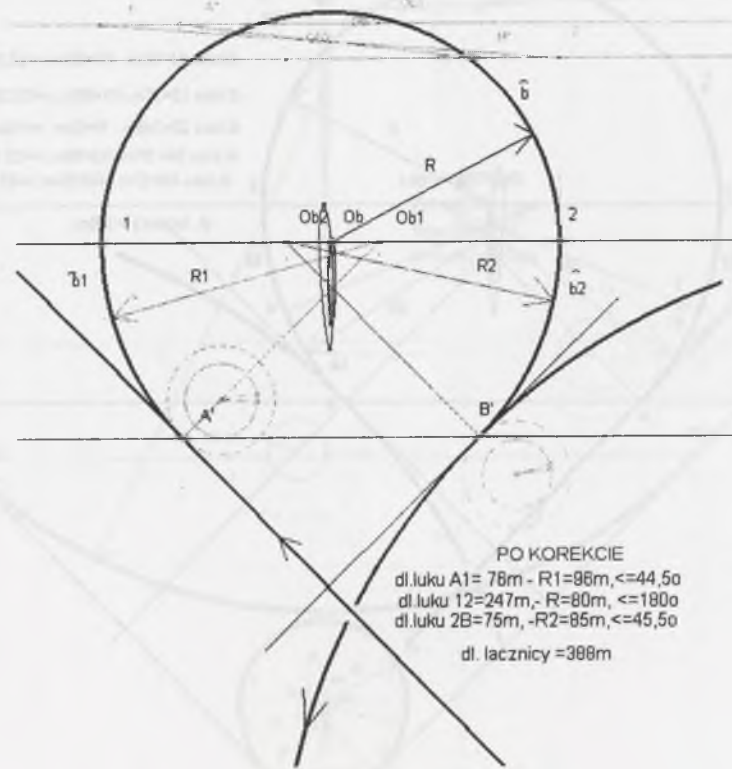
W dalszej kolejności postępowano jak w przypadku dwóch dróg o osiach w postaci prostych. W punktach A i B przyjęto okręgi \bar{o}_A i \bar{o}_B styczne do prostych a i b wraz z przyporządkowanymi im kątami ϕ_A i ϕ_B .

Za pomocą makrokonstrukcji „mac76_m” wyznaczono krzywe c_A i c_B , oraz wstępnie określono położenie środka okręgu O_b oraz długość jego promienia R_b , co pokazano na rys.VII.3.1.



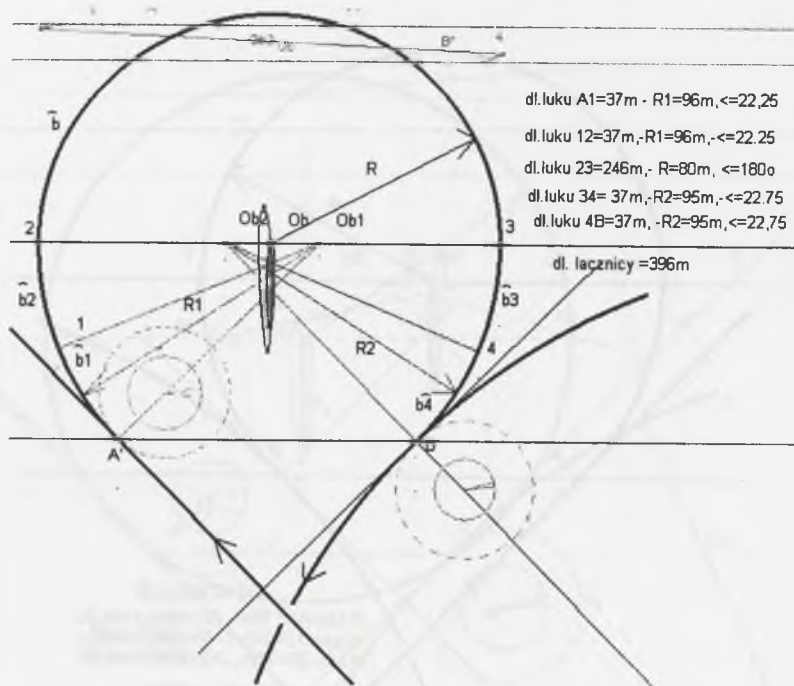
VII.3.1

Przyjęto, że połowa długości obwodu okręgu bazowego \bar{b} , zawarta pomiędzy punktami 1 i 2, będzie stanowić część osi łącznicy. Łuki $A1$ i $B2$ przyjęto jako poziome i styczne do prostych a i b w punktach A i B . Skorygowano promień okręgu \bar{b} tak, aby w punktach 1 i 2 istniały wspólnie styczne płaszczyzny do okręgów \bar{b} i \bar{b}_1 oraz \bar{b} i \bar{b}_2 . W efekcie otrzymano trasę osi łącznicy jak na rys.VII.3.2.



VII.3.2

Gdyby uzyskany spadek okazał się zbyt duży, można zamiast łuków $A1$ i $B2$ zastosować krzywe koszowe $A1,12$ oraz $B4,43$. Taki przypadek pokazano na rys.VII.3.3.

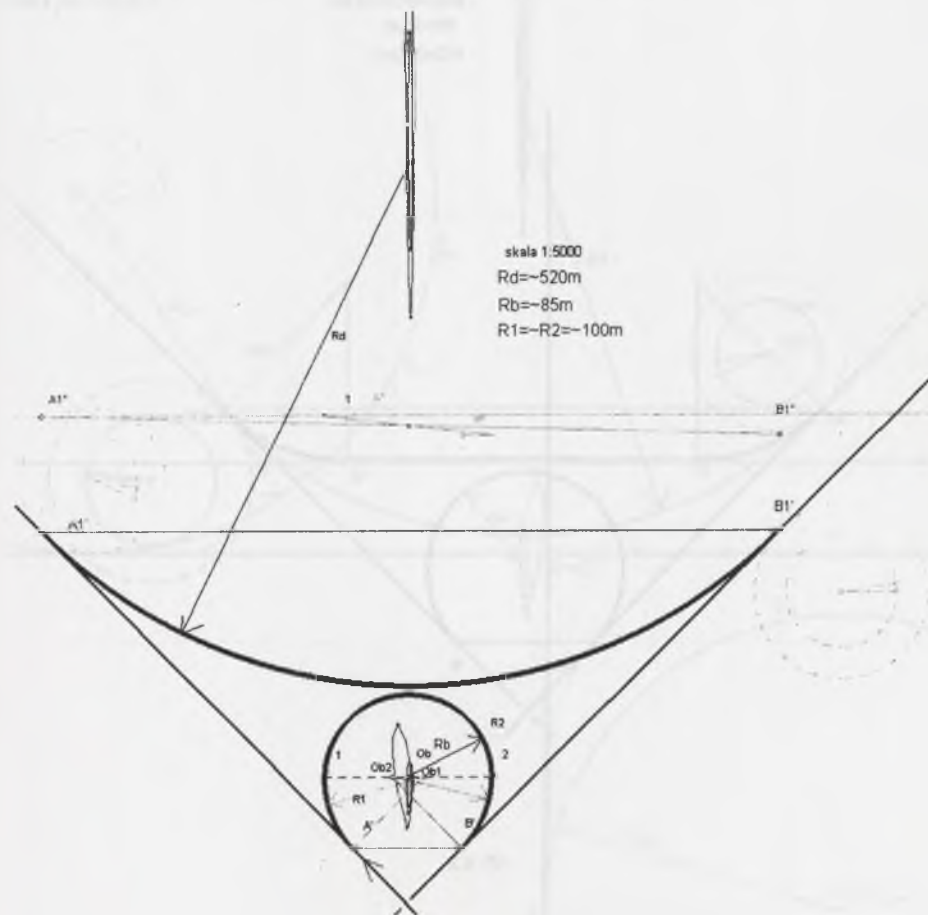


VII.3.3

VII.4. Łącznica bezpośrednia prawa

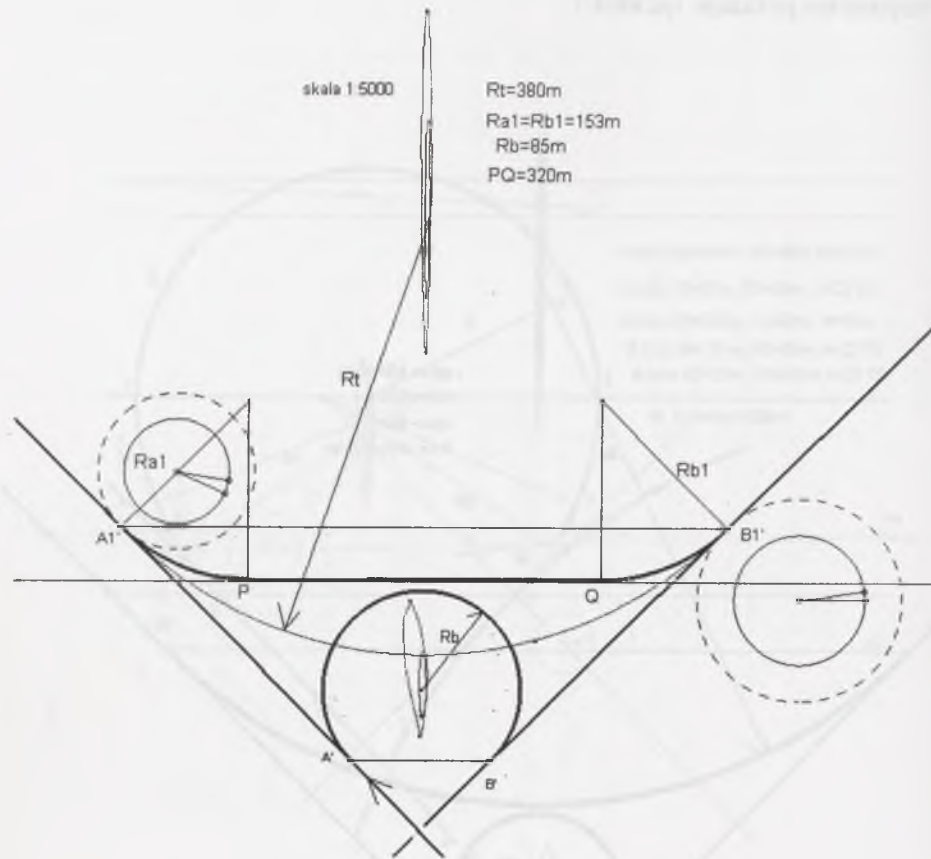
W podobny sposób można w przybliżeniu określić kształt łącznic bezpośrednich. Poniżej pokazano przykład wstępnego rozwiązania jednej czwartej części skrzyżowania z zastosowaniem tzw. pełnej „koniczyny”.

Przykład ten pokazuje rys.VII.4.1.



VII.4.1

Przy ograniczonych możliwościach terenowych można część łuku łącznicy bezpośredniej \bar{b} , zastąpić odcinkiem tworząc tzw. łącznicę dopasowaną, pokazaną na rys.VII.4.2.

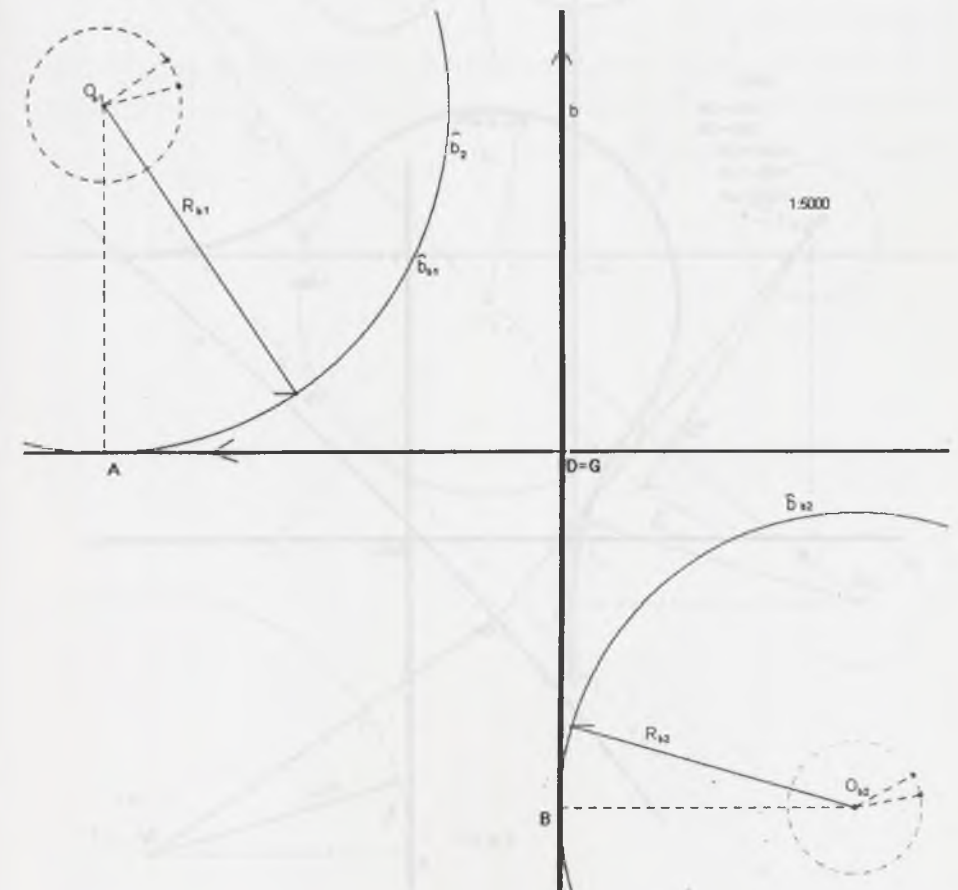


VII.4.2

VII.5. Łącznica półbezpośrednia lewa

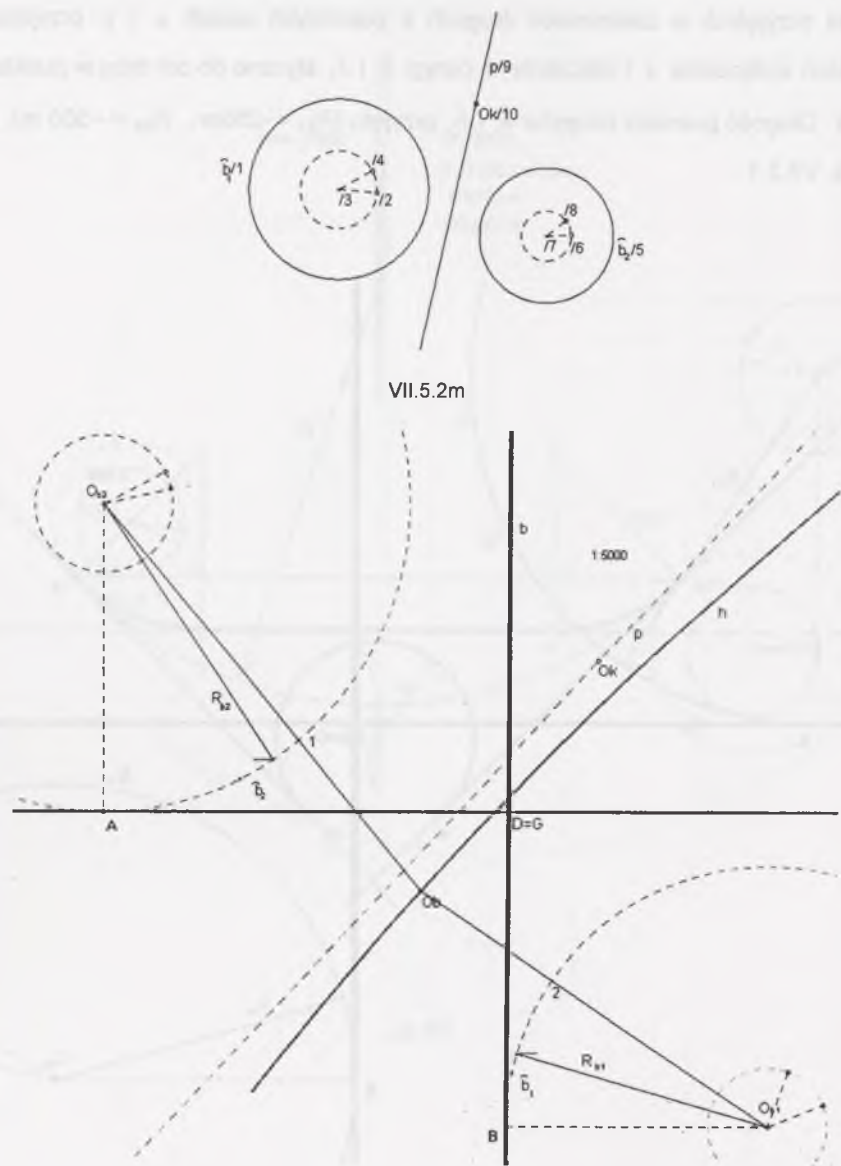
Jako przykład łącznicy półbezpośredniej wybrano łącznicę półbezpośrednią lewą z wyłączeniem z ruchu z prawej strony i włączeniem także ze strony prawej.

Na przyjętych w założeniach drogach o poziomych osiach a i b przyjęto w punktach wyłączenia A i włączenia B okręgi \bar{b}_1 i \bar{b}_2 styczne do osi dróg w punktach A i B . Długość promieni okręgów \bar{b}_1 i \bar{b}_2 przyjęto ($R_{b1} \approx 350m$, $R_{b2} \approx 300m$), jak na rys. VII.5.1.



VII.5.1

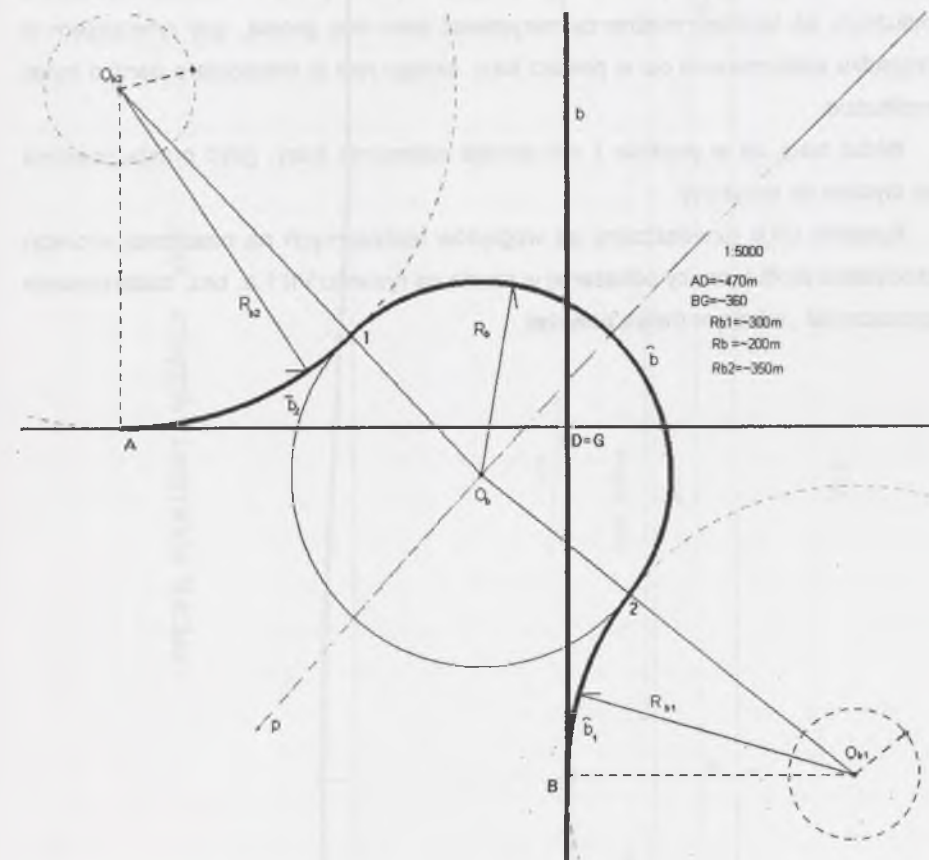
Następnie zgodnie z rozdz. II.2, korzystając z założeń pokazanych na rys. VII.5.2m, określono za pomocą makrokonstrukcji „mac13_mc” łuk hiperboli, będącej miejscem geometrycznym środków okręgów stycznych do okręgów \bar{b}_1 i \bar{b}_2 , jak pokazano na rys. VII.5.2.



VII.5.2m

VII.5.2

Następnie na wyznaczonej hiperboli przyjęto punkt O_b jako środek okręgu \bar{b} , łączącego okręgi \bar{b}_1 i \bar{b}_2 . Zmieniając iteracyjnie długości promieni okręgów \bar{b}_1 , \bar{b}_2 i \bar{b} lub położenie punktów A i B , można dobrać odpowiednio do istniejących uwarunkowań kształt łącznicy pokazanej na rys. VII.5.3.



VII.5.3

VII.6. Profil podłużny łącznicy

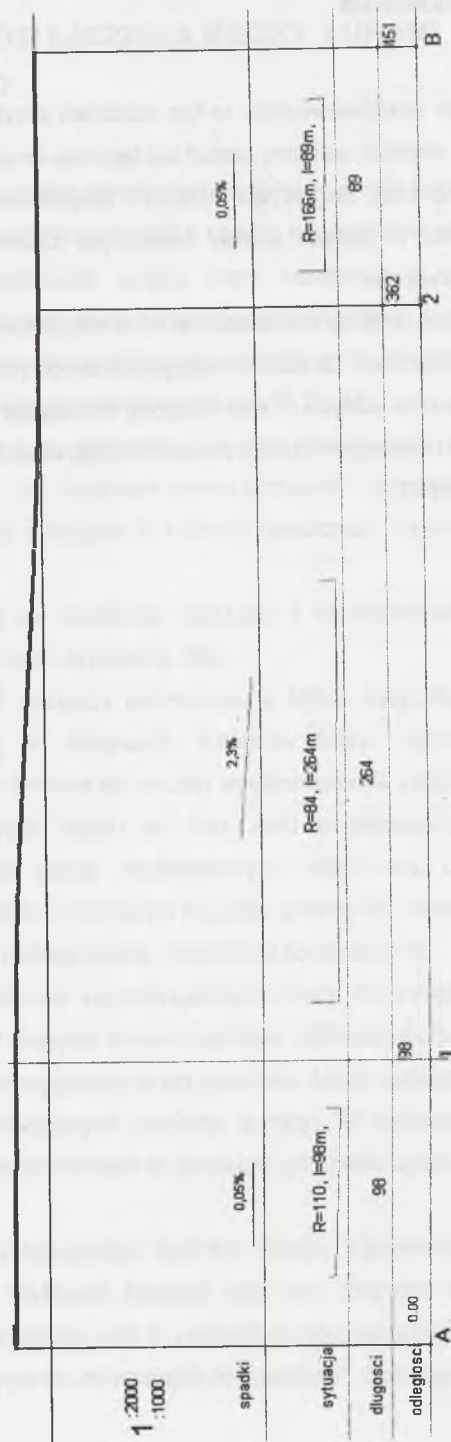
Profil podłużny łącznicy można sporządzić tradycyjnym sposobem, mając jednak na uwadze wprowadzane uproszczenia rysunkowe, wynikające ze skali i stopnia uszczegółowienia fazy projektu.

W rzeczywistości bowiem, tak jak zastosowano uproszczenie przy rysowaniu na planie rzutów okręgów jako okręgów, gdy naprawdę są to elipsy, na profilu podłużnym oś łącznicy można by narysować jako linię prostą, gdy tymczasem w przypadku zastosowania osi w postaci łuku okręgu jest to sinusoida o bardzo małej amplitudzie.

Widać tutaj, że w punkcie 1 nie istnieje załamanie trasy, gdyż prosta pozioma jest styczna do sinusoidy.

Rysunek VII.6 (umieszczony ze względów technicznych na następnej stronie) przedstawia profil łącznicy pokazanej w rzucie na rysunku VII.1.e, bez zastosowania uproszczenia, o którym mowa powyżej.

PROFIL PODŁUŻNY ŁĄCZNICY „VII.1”



VII.6

VII.7. Podsumowanie

Na podstawie przedstawionych w tym rozdziale przykładów można również, w podobny sposób, określić wstępny kształt osi łącznicy innych typów.

Przedstawiona tutaj propozycja dotyczy projektowania na etapie wstępnych wariantów węzłów, w których jednak należy już zachować skalę i uwzględniać elementy geometryczne.

Wykonane na kalce wydruki komputerowe kilku wariantów można nakładać na mapy sytuacyjno-wysokościowe, co ułatwi uwzględnienie cech topograficznych terenu oraz istniejących przeszkód stałych. Takie wstępne koncepcje umożliwiają łatwą analizę danych ogólnych, mających istotne znaczenie dla właściwego wyboru końcowego kształtu inwestycji [40].

VIII. WYZNACZANIE OSI ŁĄCZNIKA MIĘDZY ŁUKAMI KABLA SPRĘŻAJĄCEGO

W konstrukcjach betonowych sprężanych kablami osie tych kabli, zwane trasami, złożone są teoretycznie z odcinków prostych i łuków krzywoliniowych.

W przeszłości krzywoliniowe części trasy kształtowano w postaci łuków parabolicznych. Wykorzystanie nowych metod i technik analizy pociągnęło za sobą nowe ogólniejsze spojrzenie na zagadnienia projektowania. W wyniku tego obecnie w wielu przypadkach stosuje się krzywizny kołowe [5,21,38].

Ze względów statyczno - wytrzymałościowych i konstrukcyjnych stosowane łuki mają tę samą wypukłość. Do wyjątków należą przypadki, gdy sąsiadujące ze sobą łuki o różnych krzywiznach, należące do różnych płaszczyzn, są styczne do wspólnej prostej.

W praktyce spotyka się problemy związane z koniecznością „wygładzenia” ostrych kątów załomów i zmian krzywizny trasy.

Fizyczne cechy kabli, przepisy techniczne, a także wytyczne poszczególnych producentów wymagają, w miejscach załomów trasy, wprowadzania **łuków wygładzających**. Łuki te stosuje się w celu wyeliminowania załomów wynikających z przecinania się kołowych części osi tras. Łuki wygładzające mają odwrotną wypukłość w stosunku do łuków podstawowych części tras. Łączniki te muszą spełniać warunek zachowania minimalnej długości promienia, określonej z warunków technicznych dla danego rodzaju kabla, charakteru konstrukcji itp.

Określenie trasy łącznika wygładzającego zależy od wzajemnego położenia sąsiednich łuków oraz od długości dopuszczalnego minimalnego promienia łuku tego okręgu. Łuki wygładzające występują w przypadkach, kiedy sąsiadujące części trasy należą do okręgów posiadających wspólne punkty. W większości okręgi te są współpłaszczyznowe, jednak możliwe są sytuacje, gdy płaszczyzny tych okręgów są różne.

Innym rodzajem występującego łącznika między sąsiednimi częściami trasy kabli sprężających jest **wstawka** łącząca dwa łuki okręgów nie posiadających punktów wspólnych. Najczęściej jest to odcinek prostej stycznej do obydwu łuków trasy. Istnieją jednak przypadki zmuszające do „obejścia” istniejącej przeszkody, np.

kratki ściekowej lub wjazdu do kontroli zbrojenia. W takim przypadku stosuje się łuki kołowe styczne do łuków trasy. Dążyć należy do tego, aby długość promienia wstawki była jak największa.

Kiedy znane są dokładnie położenie „przeszkody”, jej kształt i wielkość, wówczas można precyzyjnie dobrać odpowiednią długość promienia wstawki.

Jeżeli ze względów technicznych zachodzi taka potrzeba, można również określić dokładnie długość promienia łuku wstawki, która powinna przechodzić przez zadany punkt.

W celu wyznaczenia osi omawianych łączników, dla różnych wzajemnych położen łuków tras kabli, wprowadzono konstrukcje geometryczne omówione w rozdziałach II i V niniejszego opracowania.

Zastosowanie programu komputerowego CABRI, w którym opracowane są poszczególne stosowane tutaj konstrukcje geometryczne, umożliwia iteracyjne potraktowanie zadania. Pozwala to na wyznaczanie rozpatrywanych elementów, przy możliwościach wprowadzania zmiennych parametrów wejściowych, jak minimalny promień łącznika wygładzającego, położenie lub wielkość przeszkody na trasie wstawki łączącej itp. Wielkości elementów wejściowych można zmieniać w sposób ciągły, obserwując równocześnie na monitorze skutki proponowanych zmian.

Dla omówionych zagadnień pokazano rozwiązanie geometrii trasy kabla dla poszczególnych przypadków wzajemnego usytuowania elementów wstępnie przyjętych jako dane wyjściowe.

Konstrukcyjne określanie osi łącznika dla łuków wygładzających i wstawek potraktowano oddzielnie w kolejnych punktach niniejszego rozdziału.

Niestety, ze względów edytorskich nie można było zachować właściwych proporcji wymiarowych pomiędzy przedstawianymi elementami.

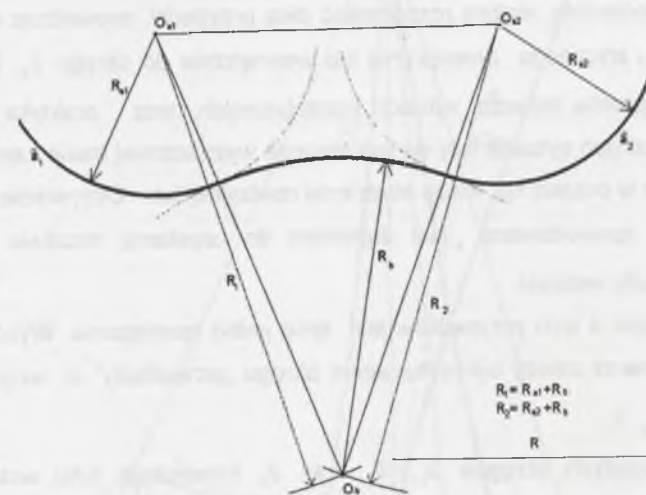
VIII.1. Konstrukcja osi wstawki łączącej, gdy osie kabli należą do współpłaszczyznowych i rozłącznych okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_2

VIII.1a. Konstrukcja osi wstawki łączącej, gdy długość jej promienia jest dana

W takim przypadku wyznaczenie środka okręgu, którego długość promienia jest zadana, sprowadza się do rozwiązania banalnego zadania planimetrycznego. Tylko dla kompletności zagadnienia pokazano ten przypadek.

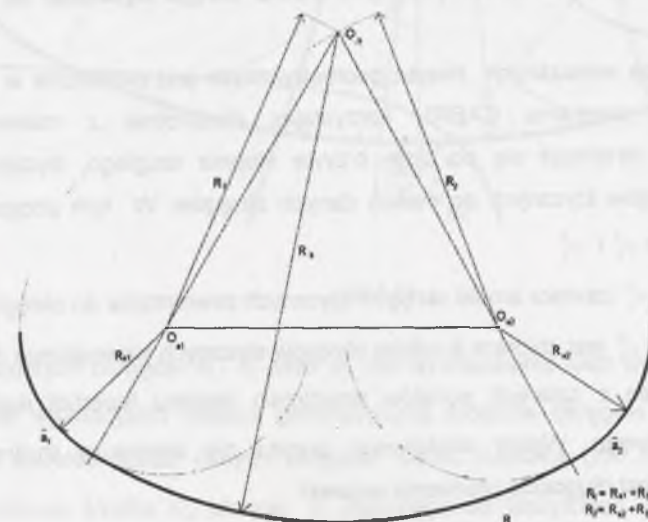
Dla danych współpłaszczyznowych okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_2 oraz przyjętej długości promienia R , przedstawiono konstrukcję szukanego łuku wstawki. Pokazano rozwiązanie dla dwóch przypadków, w zależności od tego czy łuk wstawki ma być styczny zewnętrznie, czy wewnętrznie do okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_2 .

Łuk wstawki styczny zewnętrznie przedstawia rys.VIII.1.1a.



VIII.1.1a

Łuk wstawki styczny wewnętrznie zilustrowany jest na rys.VIII.1.1b.



VIII.1.1b

VIII.1b. Konstrukcja osi wstawki łączącej, gdy dane są okręgi \bar{a}_1 , \bar{a}_2 oraz okrąg \bar{a}_3 , który należy ominąć

Dla danych okręgów \bar{a}_1 , \bar{a}_2 i \bar{a}_3 należy określić łuk osi wstawki stycznej jednocześnie do wszystkich trzech okręgów. Takie zagadnienie zostało teoretycznie omówione w punkcie 5 rozdziału II.

Jak poprzednio, można rozpatrywać dwa przypadki, prowadząc oś wstawki po łuku okręgu stycznego zewnętrznie lub wewnętrznie do okręgu \bar{a}_3 . Przedstawione tutaj rozwiązania dotyczą sytuacji hipotetycznych, lecz praktyka wskazuje na istnienie realnych sytuacji, gdy na teoretycznie wyznaczonej trasie kabla znajduje się przeszkoda w postaci np. włazu studzienki rewizyjnej lub. Oczywiście, styczność do okręgu \bar{a}_3 spowodowana jest dążeniem do uzyskania możliwie największego promienia łuku wstawki.

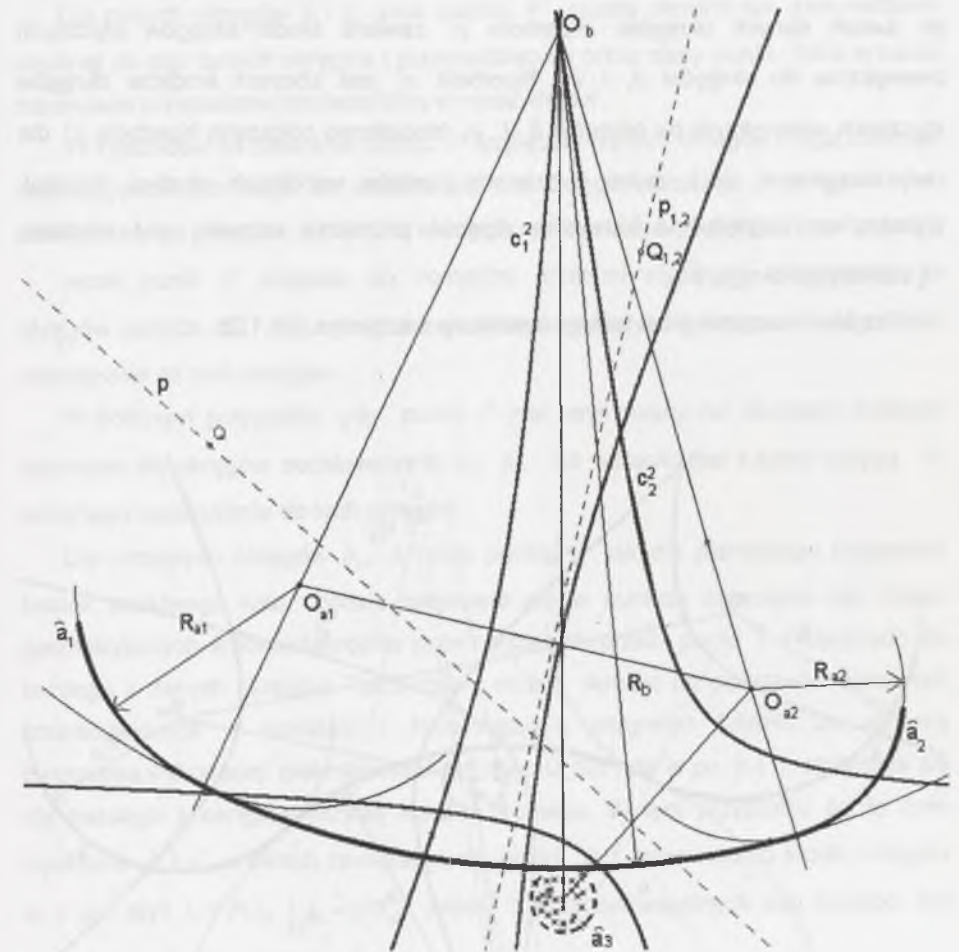
W każdym z tych przypadków jest tylko jedno rozwiązanie. Wybór koncepcji w znacznej mierze zależy od usytuowania okręgu „przeszkody” \bar{a}_3 względem danych okręgów \bar{a}_1 , \bar{a}_2 .

Dla przyjętych okręgów \bar{a}_1 , \bar{a}_2 oraz \bar{a}_3 konstrukcja łuku wstawki stycznej zewnętrznie polega na określeniu dwóch miejsc geometrycznych środków okręgów stycznych do dwóch par spośród trzech danych okręgów. Część wspólna tych dwóch miejsc geometrycznych określi położenie środka okręgu stycznego do wszystkich trzech.

Konstrukcja wskazanych miejsc geometrycznych jest omówiona w pp. II.2.2a. Przy użyciu programu CABRI, korzystając dwukrotnie z makrokonstrukcji „mac16_mc”, otrzymuje się po dwie krzywe stopnia drugiego, będące zbiorami środków okręgów stycznych do dwóch danych okręgów. W tym przypadku są to dwie hiperbole c_1^2 i c_2^2 .

Hiperbola c_1^2 zawiera środki okręgów stycznych zewnętrznie do okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_2 , zaś hiperbola c_2^2 jest zbiorem środków okręgów stycznych wewnętrznie do okręgów \bar{a}_2 i \bar{a}_3 . Jeden z czterech punktów wspólnych obydwu hiperbol jest środkiem szukanego okręgu. Wybór właściwego punktu nie następuje trudności, gdyż podyktowany jest długością promienia wstawki.

Konstrukcja ustalająca przebieg osi takiej wstawki jest pokazana na rys.VIII.1.2a.

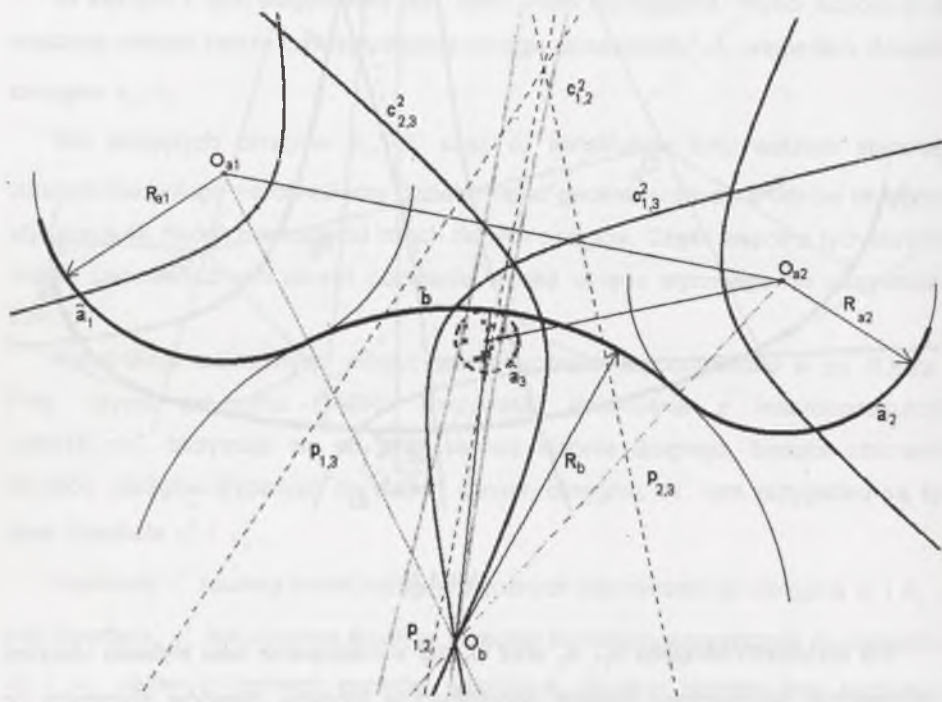


VIII.1.2a

Dla przyjętych okręgów \bar{a}_1 , \bar{a}_2 oraz \bar{a}_3 dla wytrasowania łuku wstawki stycznej wewnętrznie wyznaczono miejsca geometryczne środków okręgów stycznych do dwóch par spośród trzech danych okręgów. Część wspólna tych dwóch zbiorów określi położenie środka O_b okręgu \bar{b} stycznego do wszystkich trzech okręgów danych.

By narysować potrzebne miejsca geometryczne skorzystano z zasad omówionych w pp. II.2.2a i przy dwukrotnym użyciu makrokonstrukcji „mac16_mc” otrzymano dwie krzywe stopnia drugiego, które zawierają środki okręgów stycznych do dwóch danych okręgów. Hiperbola c_1^2 zawiera środki okręgów stycznych zewnętrznie do okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_2 , hiperbola c_2^2 jest zbiorem środków okręgów stycznych wewnętrznie do okręgów \bar{a}_2 i \bar{a}_3 (dodatkowo pokazano hiperbolę c_3^2 dla pary okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_3). Jeden z czterech punktów wspólnych obydwu hiperbol, wybrany ze względu na korzystną długość promienia wstawki, jest środkiem O_b szukanego okręgu \bar{b} .

Przykład konstrukcji osi takiego łącznika pokazuje rys. VIII.1.2b.



VIII.1.2b

VIII.1c. Konstrukcja osi wstawki łączącej, gdy dany jest punkt P , przez który powinna przechodzić oś łącznika

Dla danych okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_2 oraz punktu P należy określić łuk \bar{b} osi wstawki, stycznej do obu danych okręgów i przechodzących przez dany punkt. Taka sytuacja odpowiada przypadkowi omówionemu w rozdziale II.4.

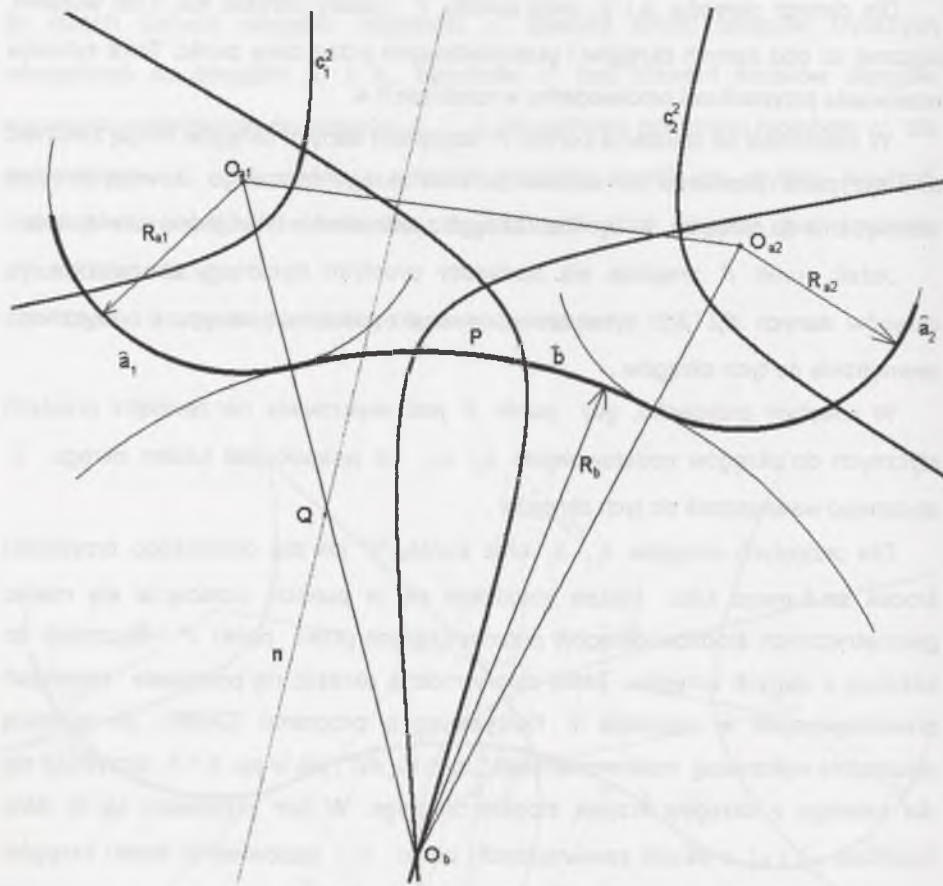
W zależności od położenia punktu P względem danych okręgów mogą zaistnieć dwa przypadki przebiegu osi wstawki po łuku okręgu stycznego zewnętrznie lub wewnętrznie do okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_2 . Dla każdego z nich istnieje tylko jedno rozwiązanie.

Jeżeli punkt P znajduje się pomiędzy prostymi stycznymi zewnętrznie do okręgów danych \bar{a}_1 i \bar{a}_2 , wówczas oś wstawki należy do okręgu \bar{b} , stycznego zewnętrznie do tych okręgów.

W kolejnym przypadku, gdy punkt P jest usytuowany na zewnątrz prostych stycznych do okręgów podstawowych \bar{a}_1 i \bar{a}_2 , oś wstawki jest łukiem okręgu \bar{b} stycznego wewnętrznie do tych okręgów.

Dla przyjętych okręgów \bar{a}_1 , \bar{a}_2 oraz punktu P jak dla pierwszego przypadku środek szukanego łuku będzie znajdował się w punkcie przecięcia się miejsc geometrycznych środków okręgów przechodzących przez punkt P i stycznych do każdego z danych okręgów. Takie zbiory można określić na podstawie rozważań przedstawionych w rozdziale I. Korzystając z programu CABRI, za pomocą dwukrotnie wykonanej makrokonstrukcji „mac10_mc”, jak w pp. II.1.1, otrzymuje się dla każdego z okręgów krzywą stopnia drugiego. W tym przypadku są to dwie hiperbole c_1^2 i c_2^2 o osiach zawierających punkt P i odpowiednio środki okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_2 , czyli $l_1 = PO_{a1}$ i $l_2 = PO_{a2}$. Jeden z punktów wspólnych obu hiperbol jest środkiem szukanego okręgu \bar{b} .

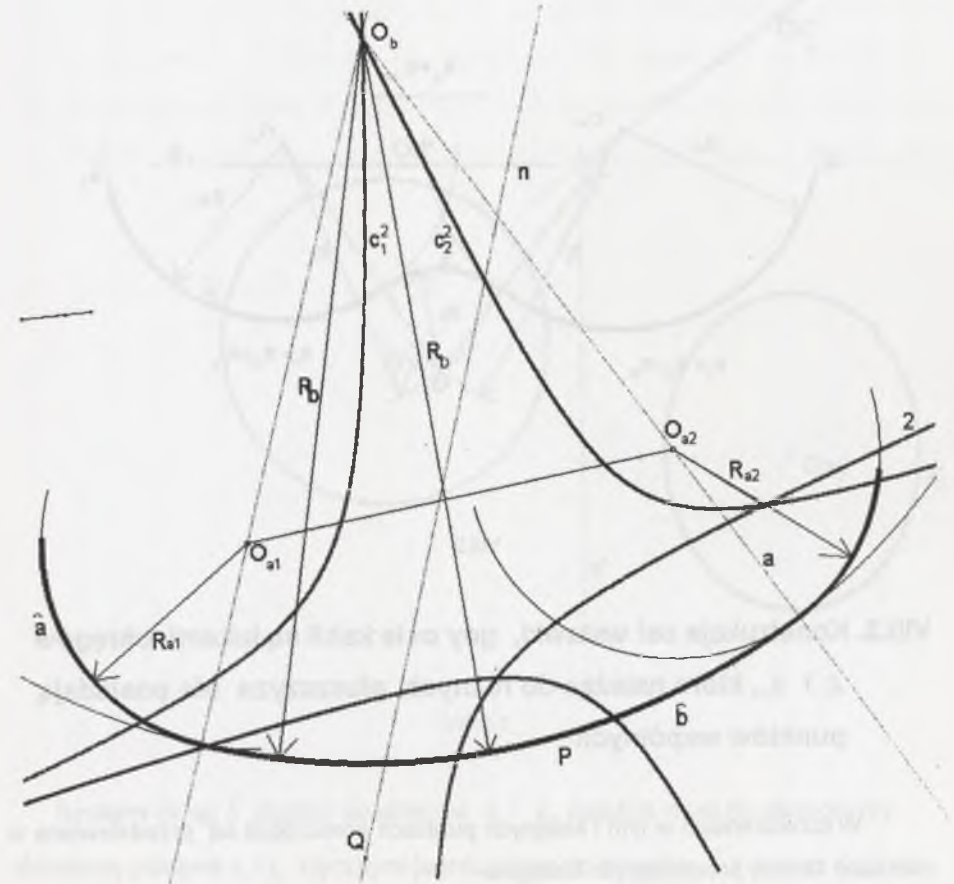
Konstrukcję osi wstawki \bar{b} , gdy jest ona łukiem okręgu stycznego zewnętrznie do okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_2 , pokazano na rys.VIII.1.3a.



VIII.1.3a

Dla przyjętych okręgów \bar{a}_1 , \bar{a}_2 oraz punktu P , jak dla przypadku drugiego, postępowanie jest analogiczne do przypadku pierwszego. Środek szukanego okręgu będzie znajdował się w punkcie przecięcia się miejsc geometrycznych środków okręgów przechodzących przez punkt P i stycznych do każdego z danych okręgów. Potrzebne miejsca geometryczne wyznaczono jak w pp. II.1.1, otrzymując dwie hiperbole c_1^2 i c_2^2 o osiach odpowiednio $l_1 = PO_{a1}$ i $l_2 = PO_{a2}$. Jeden z punktów wspólnych obu hiperbol jest środkiem szukanego okręgu \bar{b} .

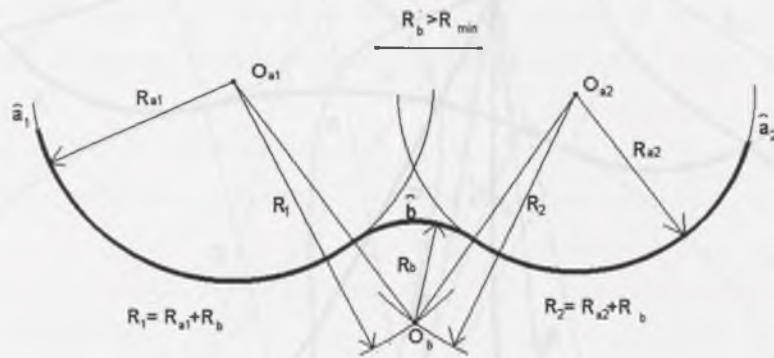
Jak poprzednio, hiperbole te otrzymano korzystając dwukrotnie z „mac10_mc”. Konstrukcję takiej wstawki \bar{b} , gdy jest ona łukiem okręgu stycznego wewnętrznie do okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_2 , pokazano na rys.VIII.1.3b.



VIII.1.3b

VIII.2. Konstrukcja łącznika gdy okręgi \hat{a}_1 i \hat{a}_2 są współpłaszczyznowe i posiadają punkty wspólne

W takim przypadku konstrukcja szukanego okręgu \hat{b} , którego długość promienia R_b musi być większa od długości minimalnego promienia R_{min} , ustalonego warunkami technicznymi, jest elementarna, lecz dla kompletności pokazano ją na rys.VIII.2.



VIII.2

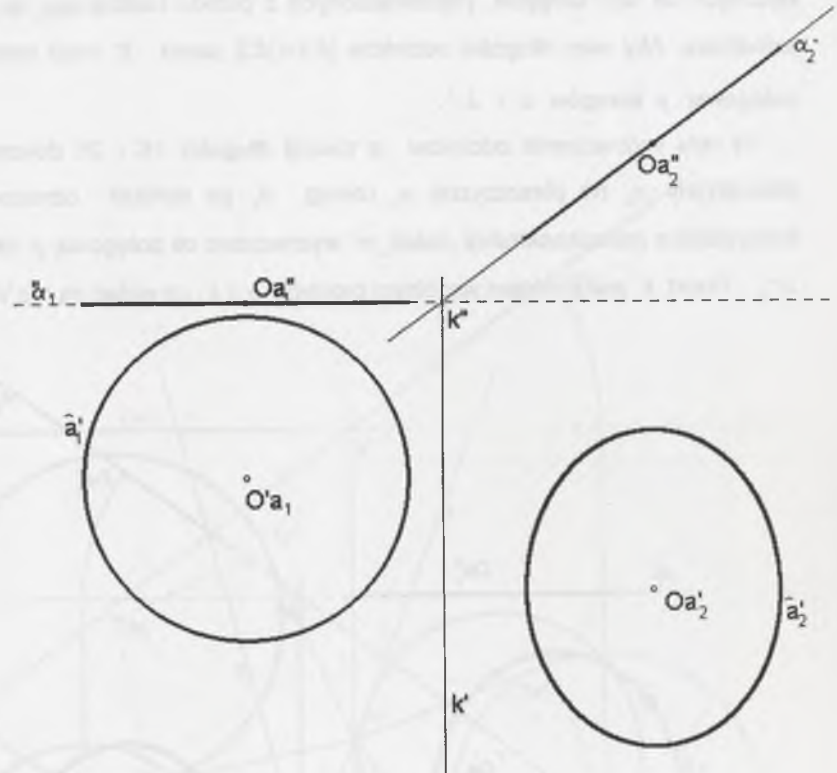
VIII.3. Konstrukcja osi wstawki, gdy osie kabli są łukami okręgów \hat{a}_1 i \hat{a}_2 , które należąc do różnych płaszczyzn nie posiadają punktów wspólnych

W rozważaniach w tym i kolejnych punktach konstrukcje są przedstawiane w metodzie rzutów prostokątnych Monge'a.

W przypadku gdy osie tras kabli są łukami niewspółpłaszczyznowych okręgów \hat{a}_1 i \hat{a}_2 , konstrukcja okręgu stycznego do obydwu okręgów \hat{a}_1 i \hat{a}_2 jest utrudniona i długość jego promienia zależy w znacznej mierze od wzajemnego usytuowania

okręgów wyjściowych. Ważne znaczenie dla konstrukcji ma fakt, czy wyjściowe okręgi \hat{a}_1 i \hat{a}_2 są rozłączne, czy też posiadają punkty wspólne.

Na rys.VIII.3.1 przyjęto rozłączne okręgi \hat{a}_1 i \hat{a}_2 , należące odpowiednio do płaszczyzn α_1 i α_2 .



VIII.3.1

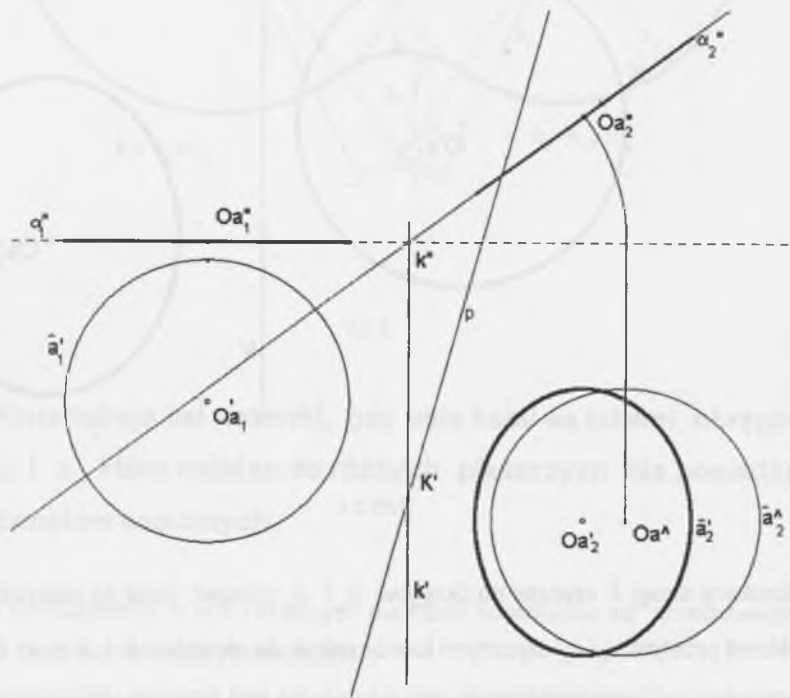
Szukany okrąg \hat{b} styczny do okręgów \hat{a}_1 i \hat{a}_2 należąc musi do płaszczyzny określonej prostymi t_1 i t_2 stycznymi jednocześnie do okręgów \hat{b} i \hat{a}_1 oraz do \hat{b} i \hat{a}_2 .

Proste t_1 i t_2 jako należące do płaszczyzny, muszą mieć wspólny punkt K , zawierający się w krawędzi k płaszczyzn α_1 i α_2 .

Punkty styczności 1 i 2 okręgu \tilde{b} do prostych t_1 i t_2 muszą być jednakowo odległe od punktu K . W celu ustalenia punktu K na krawędzi k skorzystano z osi potęgowej p , skonstruowanej dla dwóch współpłaszczyznowych okręgów \tilde{a}_1 i \tilde{a}_2^\wedge .

Oś potęgowa dwóch okręgów posiada taką własność, że długość odcinków stycznych do obu okręgów, poprowadzonych z punktu należącego do tej osi jest jednakowa. Aby więc długości odcinków $|K1|=|K2|$ punkt K musi należeć do osi potęgowej p okręgów \tilde{a}_1 i \tilde{a}_2^\wedge .

W celu wyznaczenia odcinków o równej długości $1K$ i $2K$ dokonano obrotu płaszczyzny α_2 na płaszczyznę α_1 (okrąg \tilde{a}_2 po obrocie oznaczono \tilde{a}_2^\wedge). Korzystając z makrokonstrukcji „mac9_m” wyznaczono oś potęgową p okręgów \tilde{a}_1 i \tilde{a}_2^\wedge . Punkt K jest punktem wspólnym prostych p i k , co widać na rys.VIII.3.2.

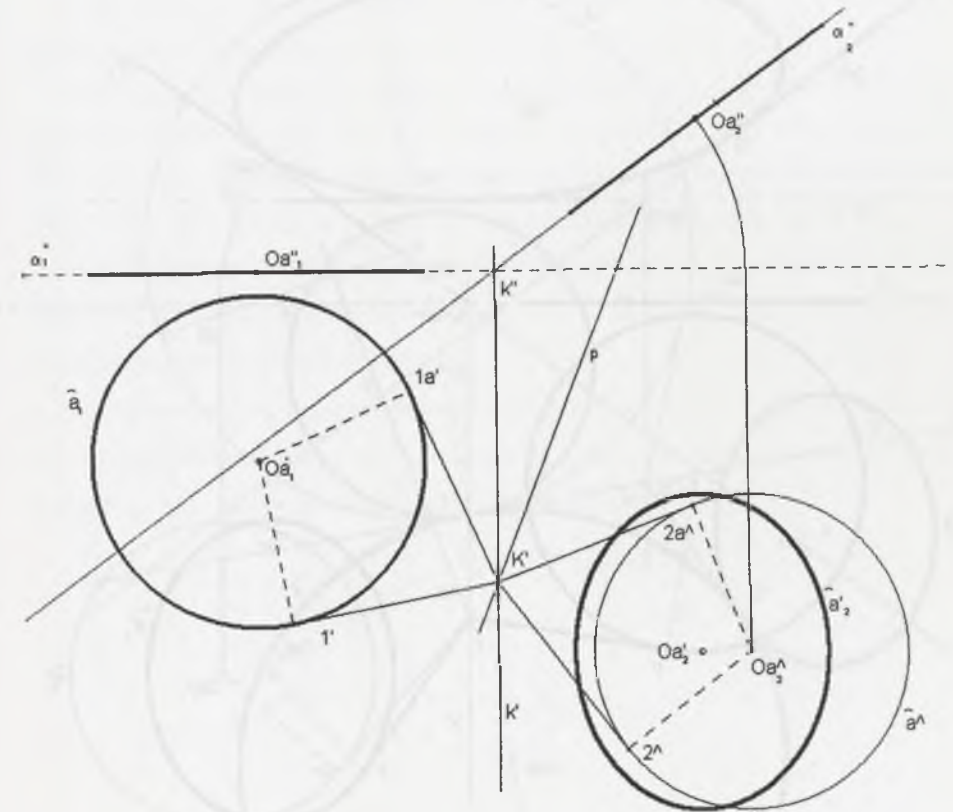


VIII.3.2

Następnie wyznaczono cztery proste styczne do obu okręgów, przechodzące przez punkt K .

Położenie punktu K na osi potęgowej sprawia, że punkty styczności 1, $1a$, 2^\wedge i $2^\wedge a$ znajdują się w równej odległości od punktu K .

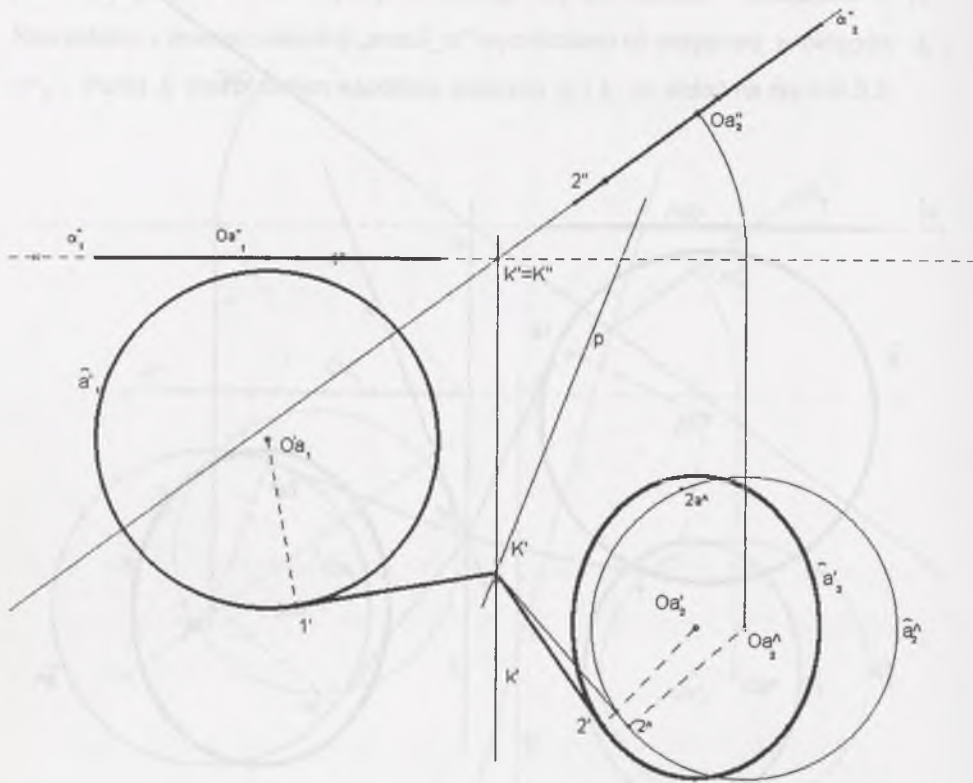
Na rys.VIII.3.3 wyznaczono cztery odcinki $K1a'$, $K1'$, $K2a^\wedge$, $K2^\wedge$ styczne do okręgów \tilde{a}_1 i \tilde{a}_2^\wedge .



VIII.3.3

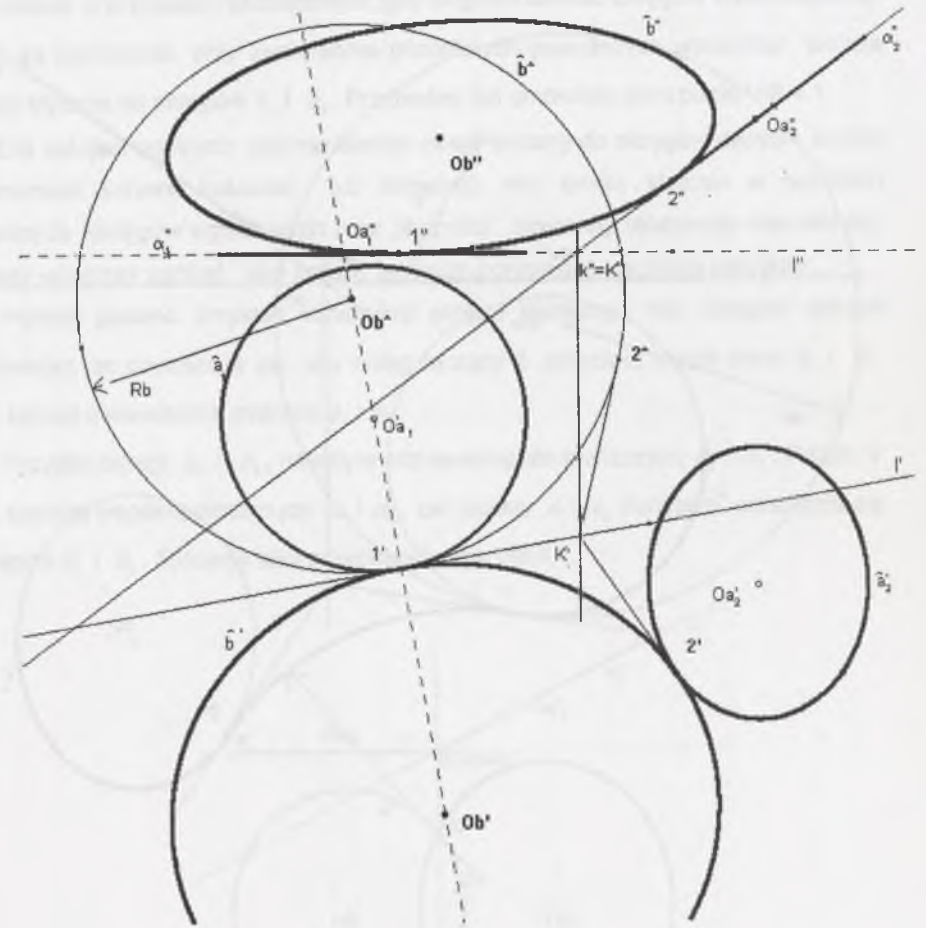
W dalszych rozważaniach, w celu polepszenia czytelności rysunku, a także ze względu na sytuacje występujące w praktyce omawianych zagadnień, rozpatruje się tylko jedną parę odcinków $K1'$ oraz $K2^{\wedge}'$.

Po obrocie płaszczyzny α_2 do pierwotnego położenia otrzymano na rys.VIII.3.4 rzuty obu tych odcinków $K1'$ oraz $K2^{\wedge}'$.



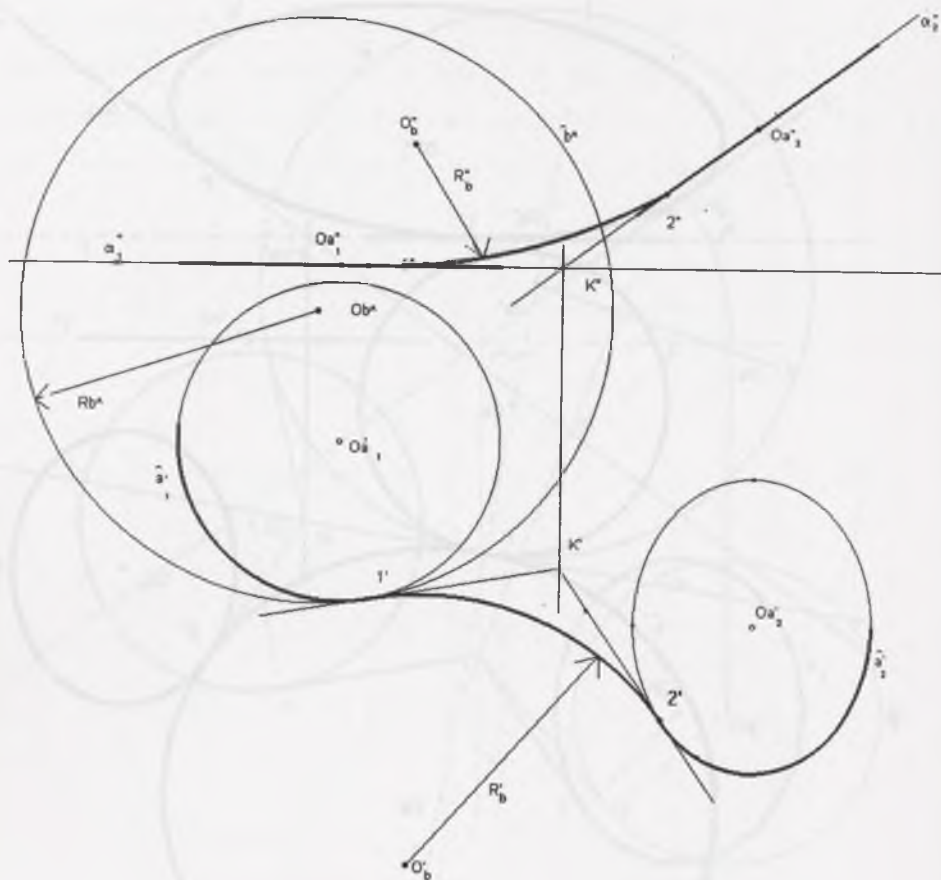
VIII.3.5

Aby wyznaczyć rzuty prostokątne okręgu \bar{b} o środku O_b i promieniu R_b , wykonano kład płaszczyzny β , w której ten okrąg się zawiera ($\beta=IK2$), na płaszczyznę α_1 (obrót wokół prostej $l=IK$) i ostatecznie skonstruowano, na rys.VIII.3.5, kład okręgu, a następnie jego dwa rzuty.



VIII.3.5

W celu poprawienia czytelności na kolejnym VIII.3.6 rysunku pokazano rzuty tylko części okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_2 połączonych łukiem okręgu \bar{b} .



VIII.3.6

VIII.4. Konstrukcja osi łącznika wygładzającego, gdy łuki okręgów

\bar{a}_1 i \bar{a}_2 nie są współpłaszczyznowe i posiadają co najmniej jeden punkt wspólny

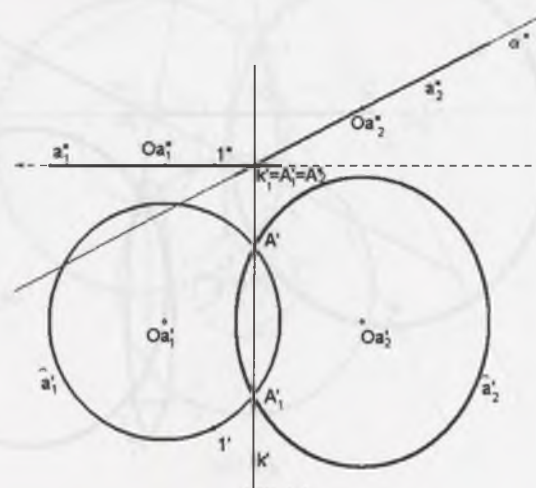
Przy takich założeniach w przypadku ogólnym nie istnieją okręgi \bar{b} styczne równocześnie do obu danych okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_2 .

Jednak w przypadku szczególnym, gdy długości średnic okręgów wyjściowych \bar{a}_1 i \bar{a}_2 są jednakowe, przy zachowaniu pozostałych powyższych warunków istnieją okręgi styczne do okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_2 . Przypadek ten omówiono jako punkt VIII.4.1.

Dla założeń ogólnych, gdy nie istnieje okrąg styczny do okręgów danych, można zastosować krzywe koszone lub dopuścić, aby proste styczne w punktach wspólnych okręgów wyjściowych oraz „łącznika” zawierały relatywnie niewielki kąt. Należy wówczas zadbać, aby zmiany krzywizn przebiegały możliwie łagodnie.

Poniżej podano przykład konstrukcji okręgu łączącego łuki okręgów danych zakładając, że dopuszcza się, aby okrąg łączący \bar{b} przecinał okręgi dane \bar{a}_1 i \bar{a}_2 pod kątami o niewielkich miarach ϕ_1 i ϕ_2 .

Przyjęto okręgi \bar{a}_1 i \bar{a}_2 , należące odpowiednio do płaszczyzn α_1 i α_2 . Prosta k jest częścią wspólną płaszczyzn α_1 i α_2 , zaś punkty A_1 i A_2 punktami przecięcia się okręgów \bar{a}_1 i \bar{a}_2 . Sytuację taką przedstawia rys.VIII.4.1.

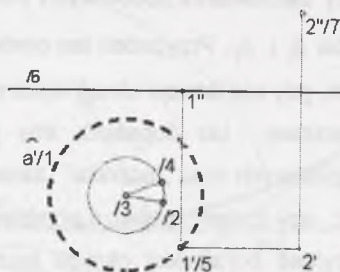


VIII.4.1

Na okręgu \bar{a}_1 przyjęto punkt 1 w okolicy przewidywanego punktu zmiany krzywizny. Okręgowi \bar{a}_1 przyporządkowano kąt ϕ_1 , którego miara nie jest zbyt duża (w czasie konstruowania może ona ulegać zmniejszeniu, lecz dla czytelności rysunku w początkowej fazie można przyjmować go dowolnie).

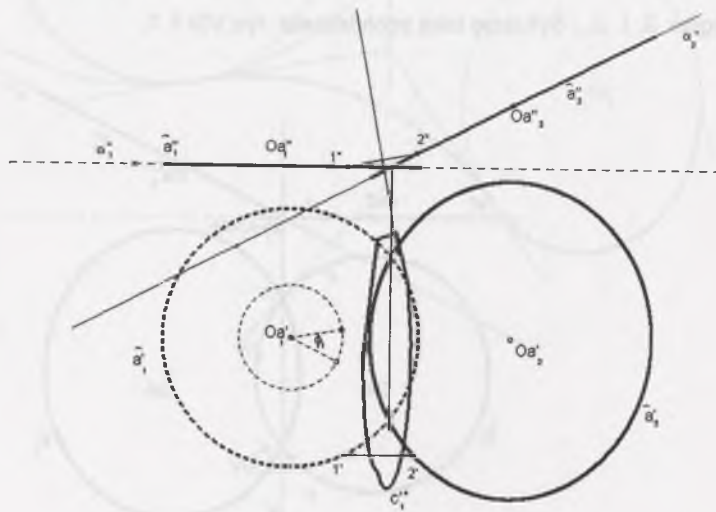
Przyjęto także punkt 2, należący do okręgu \bar{a}_2 (na rys.VIII.4.2 przyjęto, dla formalnego uproszczenia konstrukcji, odcinek 12 równoległy do rzutni pionowej).

Korzystając z konstrukcji omówionej w rozdziale V, za pomocą makrokonstrukcji „mac76_m”, dla założeń przyjętych zgodnie z rys.VIII.4.2m



VIII.4.2m

wyznaczono na rys.VIII.4.2 krzywą płaską rzędu czwartego c_1^4 , która jest zbiorem środków okręgów przechodzących przez punkty 1 i 2 i przecinających okrąg \bar{a}_1 pod kątem ϕ_1 .

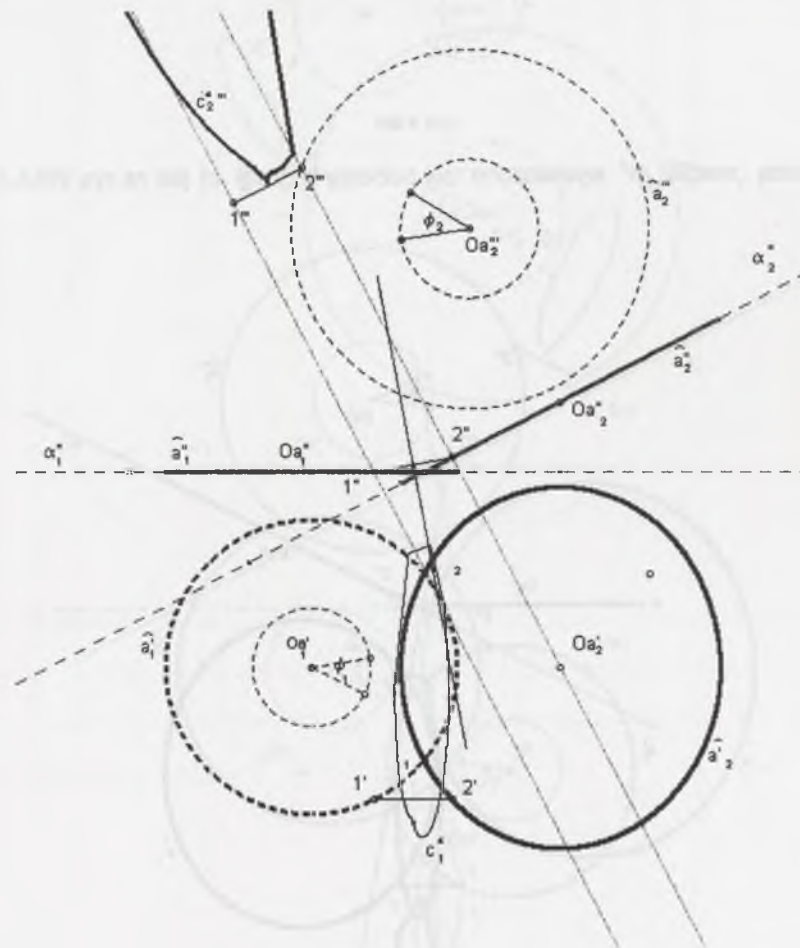


VIII.4.2

Aby wyznaczyć obraz wykreslny krzywej c_2^4 dla okręgu \bar{a}_1 skonstruowano trzeci rzut zespołu okręgów wyjściowych \bar{a}_1 i \bar{a}_2 na płaszczyznę równoległą do płaszczyzny α_2 .

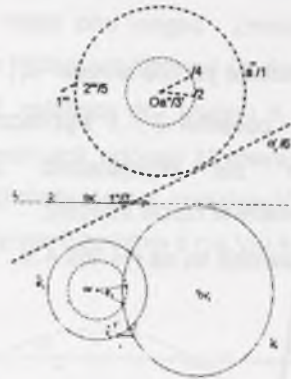
W tym rzucie przyjęto, podobnie jak dla okręgu \bar{a}_1 , niewielki kąt ϕ_2 dla okręgu \bar{a}_2 . Dla okręgu \bar{a}_2 , kąta ϕ_2 punktów 2 i 1 wyznaczono krzywą c_2^4 , używając makrokonstrukcji „mac76_m” dla odpowiednio zmodyfikowanych założeń (makrokonstrukcja jest realizowana w rzucie trzecim).

Rzuty krzywej c_2^4 przedstawione są na rys.VIII.4.3.



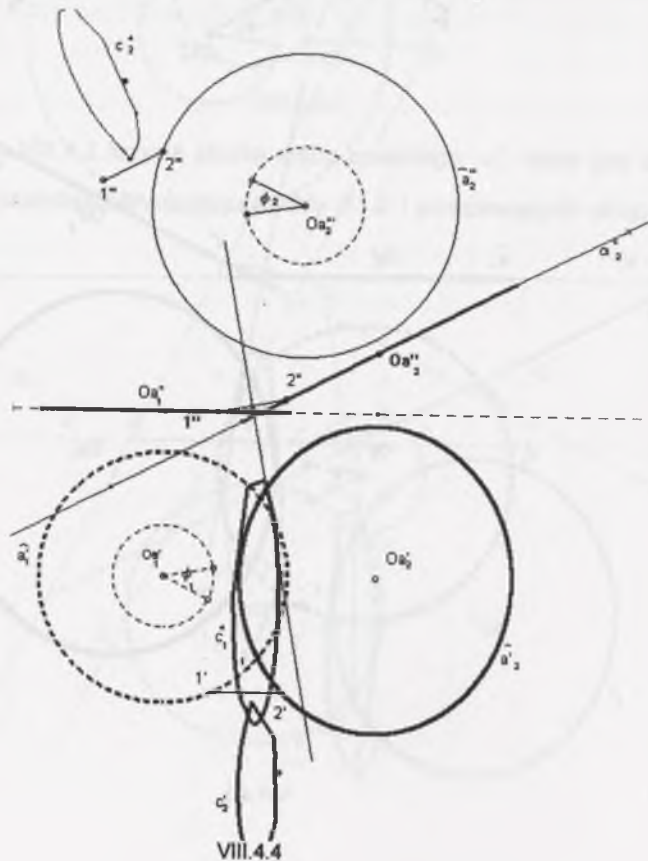
VIII.4.3

Obydwie krzywe c_1^4 i c_2^4 są współpłaszczyznowe i należą do płaszczyzny symetrii odcinka 12. Dla założeń pokazanych na rys.VIII.4.4m



VIII.4.4m

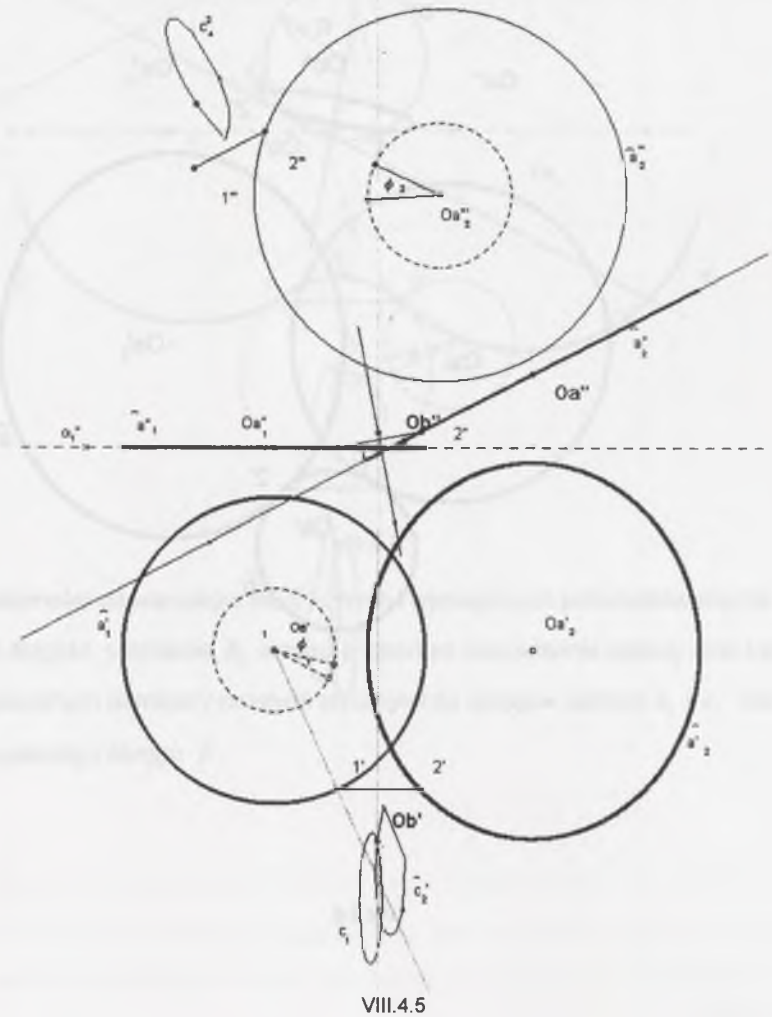
za pomocą „mac90_m” wyznaczono rzut poziomy krzywej c_2^4 jak na rys.VIII.4.4.



VIII.4.4

Środek O_b szukanego okręgu \bar{b} wstępnie przyjęto w miejscu przecięcia się krzywych c_1^4 i c_2^4 . W ogólnym przypadku współpłaszczyznowe krzywe rzędu czwartego mogą posiadać cztery punkty wspólne. W sytuacji dotyczącej rozpatrywanego zagadnienia charakter tych krzywych wskazuje na istnienie tylko dwóch punktów wspólnych. Wybór jednego z nich jako punktu O_b podyktowany jest potrzebą wyznaczenia okręgu \bar{b} o długości promienia mieszczącego się w określonych normatywnych granicach oraz innymi warunkami technologicznymi.

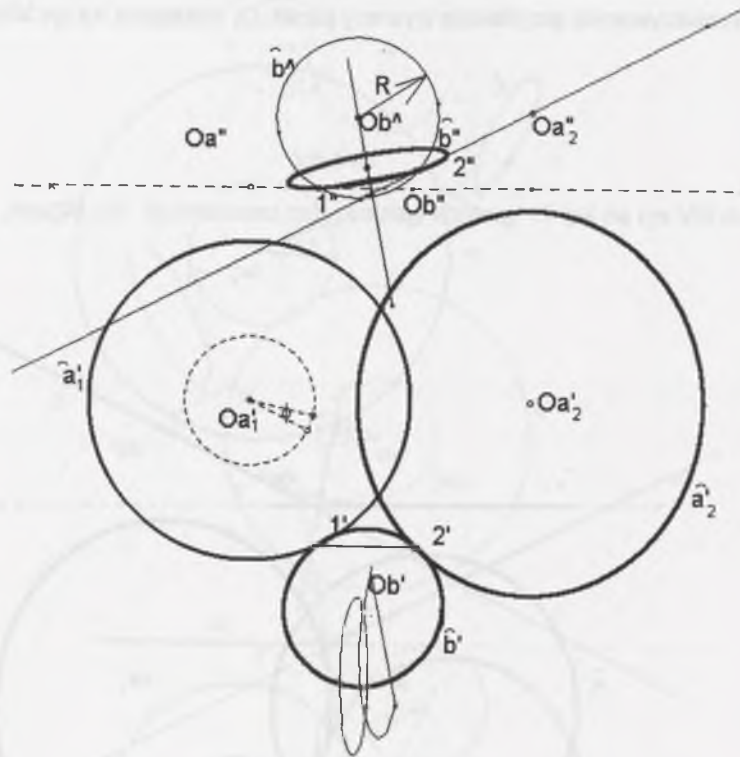
W rozpatrywanym przykładzie wybrany punkt O_b pokazano na rys.VIII.4.5.



VIII.4.5

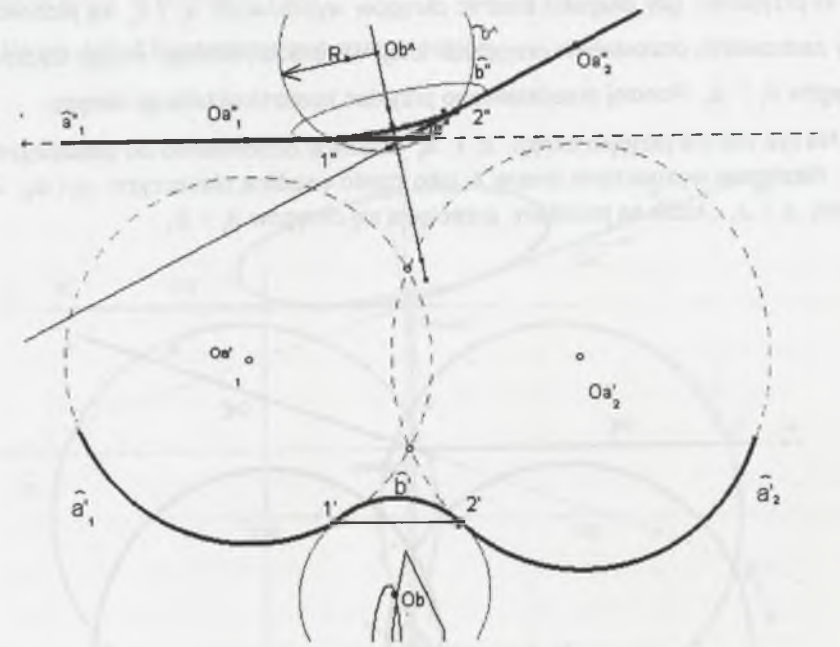
Szukany okrąg \hat{b} o środku O_b przechodzi przez punkty 1 i 2. Jego rzuty otrzymano wykonując obrót płaszczyzny $\beta = 10^\circ$ na płaszczyznę pionową wokół prostej $l = 12$, gdzie skonstruowano kład b^\wedge .

Po powrocie z kładu otrzymano rzuty okręgu \hat{b} , co pokazano na rys. VIII.4.6.



VIII.4.6

Na kolejnym rysunku (VIII.4.7) pokazano tylko części okręgów wyjściowych \hat{a}_1 i \hat{a}_2 oraz łuk okręgu \hat{b} zawarty pomiędzy punktami 1 i 2.



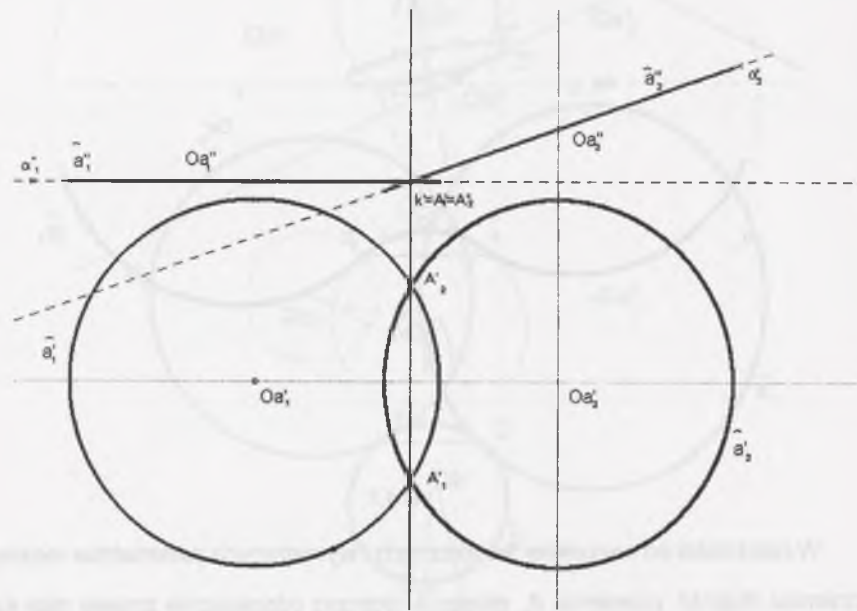
VIII.4.7

W zależności od warunków technicznych i wymaganych parametrów można zmieniać długość promienia R_b okręgu \hat{b} poprzez odpowiednie zmiany miar kątów ϕ_1 i ϕ_2 zawartych pomiędzy prostymi st stycznymi do okręgów danych \hat{a}_1 i \hat{a}_2 oraz łukiem szukanego okręgu \hat{b} .

VIII.4.1. Konstrukcja osi łącznika wygładzającego między danymi okręgami \hat{a}_1 i \hat{a}_2 , gdy okręgi te mają średnice o jednakowych długościach, są niewspółpłaszczyznowe i posiadają punkty wspólne

W przypadku gdy długości średnic okręgów wyjściowych \hat{a}_1 i \hat{a}_2 są jednakowe, przy zachowaniu pozostałych przyjętych tutaj warunków, istnieją okręgi styczne do okręgów \hat{a}_1 i \hat{a}_2 . Poniżej przedstawiono przykład konstrukcji takiego okręgu.

Na rys. VIII.4.8 przyjęto okręgi \hat{a}_1 i \hat{a}_2 należące odpowiednio do płaszczyzn α_1 i α_2 . Następnie wyznaczono prostą k jako część wspólną płaszczyzn α_1 i α_2 oraz punkty A_1 i A_2 , które są punktami przecięcia się okręgów \hat{a}_1 i \hat{a}_2 .

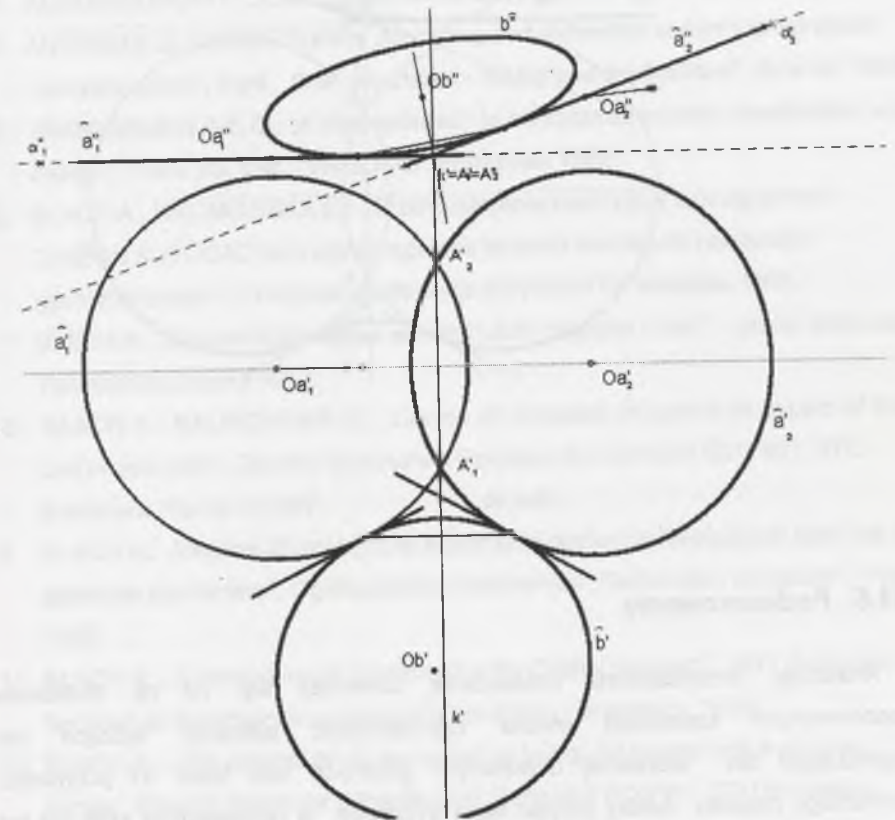


VIII.4.8

Na okręgu \hat{a}_1 przyjęto punkt 1 w okolicy przewidywanego punktu zmiany krzywizny. Punkt 2, należy do okręgu \hat{a}_2 oraz jest końcem odcinka 12, równoległego do rzutni pionowej (równoległość ta jest spowodowana ułatwieniem omówionym już poprzednio).

Wykorzystując konstrukcję omówioną w rozdziale V, przyjęto miarę kąta $\phi = 0^\circ$. Za pomocą makrokonstrukcji „mac76_m”, postępując jak w przypadku ogólnym, wyznaczono rzuty punktu O_b , będącego środkiem szukanego okręgu \hat{b} stycznego do okręgów \hat{a}_1 i \hat{a}_2 w punktach 1 i 2.

Na rys. VIII.4.9 przedstawiono rzuty okręgu \hat{b} .



VIII.4.9

Oczywiście, dla omawianego przypadku rozwiązanie postawionego zadania można uzyskać również dobrze innymi sposobami.

14. BŁACH A.: „The geometric locus of centres of circles coinciding with a given point and including a given angle with a given sphere”, Eighth International Conference on Engineering Design Graphics and Descriptive Geometry, Austin, Texas, USA 1998.
15. BŁACH A.: „Determination of the order of one of conic surfaces by means of the CABRI GEOMETRE II computer programme”, Zesz. Nauk. Pol. Śl. s. Geometria i Grafika Inżynierska 3/2000.
16. BŁACH A.: „The geometric locus of centres of spheres including two given angles with two given spheres”, Zbornik Seminara o Pocatacovej Geometrii SCG'99, STU Bratislava, Rocnik 8/1999.
17. BŁACH A.: „A Way of Determining the Thickness of Hulls of Rotational Buildings” temat referatu przyjętego przez komitet Naukowy „9th International Conference on Geometry and Graphics”, Johannesburg, RPA 2000.
18. BŁACH A.: zgłoszenie patentowe w UP RP w dniu 11.10.1999r "Sposób określania grubości powłok budowli obrotowych”.
19. COXETER H.: „Wstęp do geometrii dawnej i nowej”, PWN, Warszawa 1967.
20. GIGIEL J.: „Przestrzenno czasowa gęstość pomiarów powłok chłodni kominowych”, Konf. „Betonowe konstrukcje cienkościenne”, Wrocław 1993.
21. GŁOMB J.: JĘDRZEJEK S., WESELI J.: „Zagadnienia obliczeniowe specyficzne dla mostu betonowego nasuwanego podłużnie”, Pr. Nauk. Pol. Wr. Nr.37/1987.
22. GOLCZYK M.: „Problemy skuteczności kapitalnych remontów żelbetowych hiperboloidalnych powłok chłodni kominowych”, Konf. „Betonowe konstrukcje cienkościenne”, Wrocław 1993.
23. GRABIEC K.: „Problemy projektowe i wykonawcze żelbetowych zbiorników na ścieki”, Konf. „Betonowe konstrukcje cienkościenne”, Wrocław 1993.
24. HILBERT D., COHN-VOSSSEN S.: „Geometria pogładowa”, PWN, Warszawa 1956.
25. HOLUBAR J.: „O rowinnych konstrukcjach odwożonych z przestrowego utwaru”, Praga 1948.
26. JASZCZAK J.: „Ocena stanu technicznego żelbetowych komór WKF po czterdziestu latach ich eksploatacji”, Konf. „Betonowe konstrukcje cienkościenne”, Wrocław 1993.
27. KALISZ H.: „Zbiorniki w oczyszczalniach ścieków ze szczególnym uwzględnieniem wydzielonych komór fermentacyjnych”, Konf. „Betonowe konstrukcje cienkościenne”, Wrocław 1993.
28. KOSTIN W.: „Podstawy geometrii”, Państw. Zakł. Wyd. Szk., Warszawa 1961.
29. KRYSZEK R.: „Węzły drogowe”, WKŁ, Warszawa 1998.
30. KUTUZOW B.: „Geometria”, Moskwa 1950.
31. MAJDE A., MERCIK S.: „Udział geodety w zachowaniu funkcji i bezpieczeństwa chłodni kominowych”, Konf. „Betonowe konstrukcje cienkościenne”, Wrocław 1993.
32. OTTO F. i E.: „Podręcznik geometrii wykreślnej”, PWN, Warszawa 1998.
33. PASCAL E.: „Repetytorium matematyki wyższej”, Wyd. Red. „Wiadomosci Matematycznych”, Warszawa 1901.
34. PEREPEŁKIN D.: „Kurs elementarnej geometrii”, Moskwa 1960.
35. RYŚ H., PRZEWŁOCKI S.: Geodezyjne metody pomiarów przemieszczeń budowli”, PWN, Warszawa 1998.
36. SMART W.S.: „Foundation of analytical geometry”, Longmans, Green and co, Londyn, New York, Toronto 1956.
37. STACHOWICZ A., KORZENIOWSKI R., SIDWA M.: „Analiza pracy statycznej betonowej komory fermentacyjnej”, Konf. „Betonowe konstrukcje cienkościenne”, Wrocław 1993.
38. WESELI J. „Sprężenie ustroju jako sposób aktywnego kształtowania pola sił wewnętrznych”, Archiwum Inżynierii Lądowej-tom XXX z.2/1984.
39. „Rozporządzenie Ministra Transportu i Gospodarki Morskiej w sprawie warunków technicznych, jakim powinny odpowiadać drogi publiczne i ich usytuowanie” z dnia 2 marca 1999 r.
40. „Wytyczne projektowania dróg I i II klasy”, WPD-1, Warszawa 1995.
41. Konwersatorium „Systemy pomiaru i oceny kształtu chłodni kominowych”, Gliwice 1999.
42. LEOPOLD C. „Geometrische Grundlagen der Architekturdarstellung”, Verlag W., Cohlhammer 1999.

WYBRANE ZAGADNIENIA GEOMETRII KOŁOWYCH STRUKTUR BUDOWLANYCH

Streszczenie

W projektowaniu zagospodarowania przestrzennego, ukształtowania terenu, w drogownictwie, w problemach związanych z projektowaniem węzłów wielopoziomowych skrzyżowań ciągów komunikacyjnych itp. często występują elementy kołowe. Poza sferą budowlaną również często występują formy kołowe w modelach geometrycznych, np. obiektów telekomunikacyjnych, radiolokacyjnych, w urządzeniach technologicznych itp.

Znajomość struktur geometrycznych i zależności zachodzących między nimi znacznie ułatwia ich stosowanie w procesie projektowania, czynnościach pomiarowych lub też w wykonawstwie. Przy istniejącym stanie techniki można tworzyć odpowiednie algorytmy umożliwiające stosowanie technik komputerowych, znacznie ułatwiających projektowanie, pomiary geodezyjne, a może nawet i realizację obiektów, o sprecyzowanych formach geometrycznych. Także w badaniach istniejących obiektów świadomość geometrii występujących tam postaci może być pomocna zarówno przy inwentaryzacji, jak i przy ocenie np. istniejących deformacji.

W pomiarach geodezyjnych znajomość geometrii form kołowych lub sferycznych może być użyteczna przy tworzeniu algorytmów lub ustalaniu procedur pomiarowych służących do pomiarów elementów niektórych budowli.

W ramach zagadnień dotyczących geometrii okręgów i sfer, a zwłaszcza przy analizie istniejących między nimi związków miarowych, jednym z ciekawych problemów są zależności wynikające z miary kątów zawartych między nimi.

Przedstawiona praca ma na celu całościowe opracowanie teoretycznych zagadnień geometrycznych, omawiających jeden ze związków, jakim jest miara kąta pomiędzy figurami obrotowymi zarówno płaskimi, czyli okręgami, jak i sferami jako wybranymi powierzchniami obrotowymi. Opracowanie to jest oparte na jednolitej metodzie miejsc geometrycznych i w znacznej części bazuje na wspólnym dla całej pracy przekształceniu inwersyjnym jako wiernokątnym.

Potrzeba teoretycznego rozwiązania przedstawionych relacji wiąże się z ich występowaniem w praktyce inżynierskiej. Jako przykłady wskazano trzy zastosowania rozważanego tematu w różnych działach związanych z budownictwem.

Przedstawiono metodę bezinwazyjnego ustalania grubości powłok obiektów budowlanych typu chłodnie kominowe, zbiorniki w oczyszczalniach ścieków itp. budowle inżynierskie.

We wstępnym projektowaniu trasy osi łącznic bezkolizyjnych węzłów drogowych zaproponowano zastosowanie przestrzennej krzywej koszarowej.

Kolejna aplikacja dotyczy trasowania fragmentów łuków kabli w konstrukcjach z betonu sprężonego, w szczególności łuków wygładzających w miejscach występujących załamania trasy oraz wstawek łączących w przypadku występowania przeszkody na trasie kabla.

Należy sądzić, że istnieją jeszcze inne dziedziny, w których znajomość posługiwania się konstrukcjami geometrycznymi opracowanymi tutaj teoretycznie może być przydatna w procesie projektowania, wykonawstwa lub prac inwentaryzacyjno-pomiarowych.

W czterech pierwszych rozdziałach rozpatrywano relacje zachodzące pomiędzy kołowymi lub sferycznymi obiektami geometrycznymi w zależności od ich rodzaju i wzajemnego usytuowania, uwzględniając w każdym z omawianych przypadków warunek zachowania przyjętej wstępnie miary kątów zawartych między nimi.

Dla przyjętych założeń omawianych zależności określono położenie środków szukanych linii i powierzchni, możliwą liczbę istniejących rozwiązań oraz inne zależności, występujące w ramach rozważanych przypadków.

W większości przypadków przeprowadzono dowody dotyczące rodzajów krzywych lub powierzchni, będących miejscami geometrycznymi środków szukanych okręgów lub sfer.

Przy opracowywaniu zamieszczonego materiału ilustracyjnego zastosowano francuski program komputerowy CABRI.

SELECTED PROBLEMS OF GEOMETRY OF CIRCULAR BUILDING STRUCTURES

Abstract

Circular elements are often present in spatial management, land development, highway engineering, problems connected with designing multi - level highway junctions etc. Apart from building domain these elements appear in geometric models e.g. telecommunication objects, radiolocation, technological devices etc.

The knowledge of geometrical structures and correlations between them facilitates their application in designing, measurement or execution of works. Current state of art makes it possible to create suitable algorithms allowing application of computer techniques, which facilitate designing, geodetic measurements, and even realization of objects of defined geometric forms. Also in research on existing objects being aware of geometry can be helpful in inventory making as well evaluation of e.g. deformation.

In geodetic measurements the knowledge of geometry of circular or spherical forms may be useful when creating algorithms or settling measurement procedures for elements of some buildings.

Among issues concerning geometry of circles and spheres, and especially in the analysis of measure correlations, one of the more interesting problems are relations resulting from measure of angles incorporated between them.

The presented work aims at comprehensive elaboration of theoretical geometry problems concerning one of the relations - angle measure between rotary figures, both planar i.e. circles or spheres as chosen rotary surface. The work is based on a uniform method of geometry loci and to a large extent on inverse, preserving transformation common to the whole paper.

A need to solve these relations theoretically is connected with their existence in engineering experience. As an example three applications have been shown in various fields connected with civil engineering.

The method of non-invasive determining of thickness of shells of building structures such as cooling towers, tanks in sewage treatment plants etc. has been presented.

In preliminary designing of the route of axis of connectors of collision free highway junctions application of circle space curve has been suggested.

The next application deals with layout of parts of cable arcs in constructions of prestressed concrete and in particular smoothing arcs in road bends or connecting inserts in case of obstacles in cable way.

It can be assumed that there are other domains where the knowledge of geometry constructions, which have been theoretically discussed in this paper, can be useful in designing, execution or inventory-measurement works.

The first four chapters discuss relations between circular or spherical geometry objects depending on their type, mutual location. In each of the discussed cases the condition of preset measure of angles incorporated between them has been taken into consideration

Location of centers of desired lines and surfaces, possible number of existing solutions as well as other relations occurring in the discussed cases for the assumed assumptions have been determined,

In majority of cases proofs have been offered concerning types of curves or surfaces, which are geometry loci of the desired circles or spheres.

CABRI, French computer program has been used in preparing the presented drawings.

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
Politechniki Śląskiej

P 4546 / 00 / 4

Druk: Drukarnia Gliwice, ul. Zwycięstwa 27, tel. 230 48 50