ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ

P. 3361/02

Arkadiusz MĘŻYK

OPTYMALIZACJA WŁASNOŚCI DYNAMICZNYCH UKŁADÓW NAPĘDOWYCH MASZYN

MECHANIKA
Z. 139

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

GLIWICE 2002

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
ZESZYTY NAUKOWE
Nr 1528

P. 3361/02

Arkadiusz MĘŻYK

OPTYMALIZACJA WŁASNOŚCI DYNAMICZNYCH UKŁADÓW NAPĘDOWYCH MASZYN

GLIWICE 2002

OPINIODAWCY

Prof. zw. dr hab. inż. Józef Giergiel

Prof. zw. dr hab. inż. Krzysztof Marchelek

KOLEGIUM REDAKCYJNE

REDAKTOR NACZELNY - Prof. dr hab. Zygmunt Kleszczewski

REDAKTOR DZIAŁU - Prof. dr hab. inż. Andrzej Buchacz

SEKRETARZ REDAKCJI - Mgr Elżbieta Leśko

REDAKCJA

Mgr Anna Błażkiewicz

REDAKCJA TECHNICZNA

Alicja Nowacka

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0434-0817

Wydawnictwo Politechniki Śląskiej
ul. Akademicka 5, 44-100 Gliwice
tel./fax 237-13-81, www.polsl.gliwice.pl/alma.mater/wps.html
wydawnictwo@polsl.gliwice.pl

Nakład 100+50 egz. Ark. wyd. 13. Ark. druk. 8,25.

Fotokopie, druk i oprawę wykonano w UKiP sc, *J&D Gębka*,
Gliwice, ul. Pszczyńska 44, tel./fax 231-87-09

SPIS TREŚCI

WYKAZ PODSTAWOWYCH OZNACZEŃ 7

1. WPROWADZENIE 9

1.1. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU 10
1.2. DOTYCHCZASOWY STAN ZAGADNIENIA 12
1.2.1. Optymalizacja własności dynamicznych 12
1.2.2. Układy elektromechaniczne 15
1.2.3. Dynamika przekładni zębatych 16
1.2.4. Dynamiczne tłumienie drgań 19

2. CEL I ZAKRES PRACY 20

3. MODELOWANIE UKŁADU 22

3.1. MODEL ELEKTRYCZNEGO SILNIKA INDUKCYJNEGO 23
3.2. MODEL UKŁADU MECHANICZNEGO 28
3.2.1. Model drgań skrętnych 28
3.2.2. Model drgań giętno-skrętnych 28
3.2.3. Charakterystyki sztywności zazębień 36
3.2.4. Tłumienie w układzie 41
3.2.5. Redukcja liczby stopni swobody 41
3.3. OKREŚLENIE SIŁ W PARACH KINEMATYCZNYCH 42

4. ANALIZA WRAŻLIWOŚCI CHARAKTERYSTYK DYNAMICZNYCH 43

4.1. BADANIE WRAŻLIWOŚCI WARTOŚCI WŁASNYCH 43
4.1.1. Wyznaczanie pochodnej metodą bezpośrednią 43
4.1.2. Wyznaczanie pochodnej metodą sprzężoną 44
4.1.3. Przybliżony sposób wyznaczania pochodnej 44
4.2. WYZNACZANIE POCHODNYCH WEKTORÓW WŁASNYCH 45
4.3. BADANIE WRAŻLIWOŚCI PRZEBIEGÓW CZASOWYCH 47
4.3.1. Metoda bezpośredniego różniczkowania 48
4.3.2. Metoda zmiennych sprzężonych 50
4.4. BADANIE WRAŻLIWOŚCI TRANSMITANCJI WIDMOWEJ 50

5. OPTYMALIZACJA WŁASNOŚCI DYNAMICZNYCH 52

5.1. METODY PROGRAMOWANIA MATEMATYCZNEGO 53
5.1.1. Metoda sekwencyjnego programowania liniowego 53
5.1.2. Metoda sekwencyjnego programowania kwadratowego 54
5.2. ALGORYTMY GENETYCZNE 54
5.3. PORÓWNANIE PRZYDATNOŚCI METOD OPTYMALIZACJI 55

6. PROGRAMY KOMPUTEROWE 59

6.1. PROGRAM OPT_TD 60
6.2. PROGRAM OPT_FD 61
6.3. PROGRAM OPT_EV 63

7. BADANIA SYMULACYJNE DYNAMIKI UKŁADÓW NAPĘDOWYCH 65

7.1. BADANIE WRAŻLIWOŚCI UKŁADU Z TŁUMIKIEM DRGAŃ 65
7.2. ANALIZA DYNAMIKI UKŁADU NAPĘDOWEGO KOMBAJNU WĘGLOWEGO 67

7.2.1. Analiza postaci konstrukcyjnej i model fizyczny układu ... 67
7.2.2. Określenie elektromagnetycznego momentu napędowego asynchronicznego silnika dwuklatkowego ... 68
7.2.3. Symulacja stanu obciążenia zewnętrznego układu ... 69
7.2.4. Badanie wpływu postaci konstrukcyjnej organu urabiającego na dynamikę przekładni ... 70
7.2.5. Minimalizacja oddziaływań dynamicznych ... 78
7.2.6. Dobór dynamicznego tłumika drgań skrętnych ... 84
7.3. DOBÓR CECH KONSTRUKCYJNYCH ELEMENTÓW PROTOTYPOWEGO UKŁADU NAPĘDOWEGO ... 91
7.3.1. Model drgań giętno-skrętnych układu ... 91
7.3.2. Określenie wpływu parametrów silnika na zjawiska dynamiczne w parach kinematycznych ... 96
7.3.3. Badanie wrażliwości wartości własnych ... 101
7.3.4. Dobór sztywności wałka bezpieczeństwa ... 102
7.3.5. Badania doświadczalne prototypu ... 104

8. PRZYKŁADY OPTYMALIZACJI CHARAKTERYSTYK REZONANSOWYCH UKŁADÓW DYSKRETNO-CIĄGŁYCH I CIĄGŁYCH ... 107

8.1. OPTYMALIZACJA CHARAKTERYSTYKI REZONANSOWEJ UKŁADU CIĄGŁEGO Z DYSKRETNYM TŁUMIKIEM DRGAŃ ... 108
8.2. OPTYMALIZACJA CHARAKTERYSTYK DYNAMICZNYCH UKŁADU CIĄGŁEGO Z TŁUMIKIEM CIĄGŁYM ... 109

9. PODSUMOWANIE ... 116

LITERATURA ... 118

STRESZCZENIE ... 129

CONTENTS

LIST OF MAIN SYMBOLS ... 7

1. INTRODUCTION ... 9

1.1. PROBLEM FORMULATION ... 10
1.2. STATE OF THE ART ... 12
1.2.1. Optymization of dynamic features ... 12
1.2.2. Electromechanical systems ... 15
1.2.3. Gear train dynamics ... 16
1.2.4. Dynamic vibration dampers ... 19

2. AIM AND SCOPE OF THE WORK ... 20

3. MODELLING OF THE SYSTEM ... 22

3.1. MODEL OF ELECTRIC INDUCTIVE MOTOR ... 23
3.2. MODEL OF MECHANICAL SYSTEM ... 28
3.2.1. Model of torsional vibration ... 28
3.2.2. Model of transverse-torsional vibration ... 28
3.2.3. Characteristics of meshing stiffness ... 36
3.2.4. Damping in the system ... 41
3.2.5. Reduction of number of degrees of freedom ... 41
3.3. ESTIMATION OF FORCES IN KINEMATIC PAIRS ... 42

4. SENSITIVITY ANALISIS OF DYNAMIC CHRACTERISTICS ... 43

4.1. SENSITIVITY OF EIGENVALUES ... 43
4.1.1. Direct method of derivatives calculation ... 43
4.1.2. Adjoint method of derivatives calculation ... 44
4.1.3. Approximation of derivative ... 44
4.2. CALCULATION OF EIGENVECTOR DERIVATIVES ... 45
4.3. SENSITIVITY OF TIME FUNCTIONS ... 47
4.3.1. Direct differentiation method ... 48
4.3.2. Adjoint variable method ... 50
4.4. SENSITIVITY ANALISIS OF SPECTRAL TRANSFER FUNCTION ... 50

5. OPTIMIZATION OF DYNAMIC FEATURES ... 52

5.1. MATHEMATICAL PROGRAMMING METHODS ... 53
5.1.1. Sequential linear programming method ... 53
5.1.2. Sequential quadratic programming method ... 54
5.2. GENETICS ALGORITHMS ... 54
5.3. COMPARISON OF OPTIMIZATION METHODS ... 55

6. COMPUTER PROGRAMS ... 59

6.1. PROGRAMME OPT_TD ... 60
6.2. PROGRAMME OPT_FD ... 61
6.3. PROGRAMME OPT_EV ... 63

7. SYMULATIONS OF DYNAMICS OF DRIVE SYSTEMS ... 65

7.1. SENSITIVITY ANALYSIS OF THE SYSTEM WITH VIBRATION DAMPER ... 65
7.2. DYNAMIC ANALYSIS OF SHEARER LOADER DRIVE SYSTEM ... 67

7.2.1. Analysis of design form and physical model of the system ... 67
7.2.2. Calculations of electromagnetic driving moment of an asynchronous double squirrel-cage motor ... 68
7.2.3. Simulation of external load of the system ... 69
7.2.4. Testing an influence of design of cutting unit on dynamics of a transmission system ... 70
7.2.5. Minimization of dynamic reactions ... 78
7.2.6. Selection of dynamic torsional vibration damper ... 84
7.3. SELECTION OF DESIGN FEATURES OF ELEMENTS OF PROTOTYPE DRIVE SYSTEM ... 91
7.3.1. Model of transverse-torsional vibrations of the system ... 91
7.3.2. Analysis of influence of an electrical motor parameters on dynamic phenomena in kinematic pairs ... 96
7.3.3. Sensitivity of eigenvalues ... 101
7.3.4. Selection of safety shaft stiffness ... 102
7.3.5. Experimental tests of the prototype ... 104

8. EXAMPLES OF RESONANCE CHARACTERISTICS OPTIMIZATION OF DISCRETE-CONTINOUS AND CONTINOUS SYSTEMS ... 107

8.1. OPTIMIZATION OF RESONANCE CHARACTERISTIC OF CONTINOUS SYSTEM WITH A DISCRETE DAMPER ... 108
8.2. OPTIMIZATION OF DYNAMIC CHARACTERISTIC OF CONTINOUS SYSTEM WITH A CONTINOUS DAMPER ... 109

9. CONCLUSIONS ... 116

REFERENCES ... 118

ABSTRACT ... 129

WYKAZ PODSTAWOWYCH OZNACZEŃ

Symbole łacińskie

$\mathbf{A}$ - macierz systemu,
$\mathbf{B}$ - macierz wejść,
$\mathbf{b}$ - wektor zmiennych decyzyjnych,
c_i - współczynnik tłumienia,
$\mathbf{C}$ - macierz wyjść,
$\mathbf{C}_g$ - macierz efektu żyroskopowego,
$\mathbf{C}_v$ - macierz tłumienia,
$\mathbf{D}$ - macierz bezpośrednich oddziaływań wektora wejść $\mathbf{u}(t)$ na wektor wyjść $\mathbf{y}(t)$,
$\mathbf{d}$ - kierunek poszukiwań,
$\mathbf{d}_i$, $\mathbf{d}_j$ - wektory przemieszczeń punktów kontaktu zębów,
$\mathbf{e}_n$, $\mathbf{e}_{t1}$, $\mathbf{e}_{t2}$ - wersory sił w biegunie zazębienia,
$\mathbf{F}$ - wektory oddziaływań podukładów i sił zewnętrznych,
F - siła w parze kinematycznej,
$\mathbf{g}_i$ - funkcja ograniczeń,
$H(j\omega)$ - transmitancja widmowa (widmowa funkcja przejścia),
$\mathbf{H}$ - macierz transmitancji (funkcji przejścia),
$\mathbf{H}_k$ - Hesjan,
$\mathbf{i}$ - wektor prądów,
i_p^c - zespolony prąd klatki pracy,
i_r^c - zespolony prąd klatki rozruchowej,
i_s^c - zespolony prąd stojana,
I_i - masowy moment bezwładności,
j - jednostka urojona,
k_l - współczynnik sztywności,
$\mathbf{K}$ - macierz sztywności,
k_z - współczynnik sztywności zazębienia,
l - zadana wartość luzu,
$\mathbf{L}$ - macierz indukcyjności,
L_m - indukcyjność pola głównego,
L_p - indukcyjność klatki pracy sprowadzona na stronę stojana,
L_r - klatki rozruchowej sprowadzona na stronę stojana,
$L_{s\sigma}$ - indukcyjność rozproszenia stojana sprowadzona na stronę stojana,
L_w - indukcyjność wspólna sprowadzona na stronę stojana,
m_i - masa,
$\mathbf{M}$ - macierz bezwładności,
M_{el} - moment silnika,
P - liczba par biegunów,
P_{max} - wartość maksymalna siły dynamicznej w wybranej parze kinematycznej,
$\mathbf{q}$ - wektor współrzędnych uogólnionych,
$\mathbf{Q}$ - wektor sił uogólnionych,
$\mathbf{R}$ - macierz rezystancji,
R_p - rezystancja klatki pracy sprowadzona na stronę stojana,
R_r - rezystancja klatki rozruchowej sprowadzona na stronę stojana,
R_s - rezystancja stojana,
t_k - określa czas końcowy obliczeń,
T_z - siła tarcia w zazębieniu,

$\mathbf{U}$ - macierz napięć zasilających,
$\mathbf{u}(t)$ - wektor wejść,
U_s - napięcie zasilające,
$\mathbf{x}_e$ - wektor zmiennych stanu części elektromagnetycznej,
$\mathbf{x}_m$ - wektor zmiennych stanu części mechanicznej,
$\mathbf{X}$ - kwadratowa macierz wektorów własnych,
${}^{m}\mathbf{X}$ - macierz transformacji modalnej,
${}^{m}\mathbf{x}(t)$ - wektor m współrzędnych głównych,
$\mathbf{y}(t)$ - wektor wyjść.

Symbole greckie

α - wektor zmiennych sprzężonych,
α_n - nominalny kąt przyporu,
β - kąt pochylenia linii zęba,
γ - kąt określający konfigurację układu,
δ_i - wektor geometrycznych parametrów koła zębatego i,
ε_α - liczba przyporu,
${}^{m}\Lambda$ - macierz zawierająca wybrane wartości własne układu,
λ_i - wartości własne,
μ - współczynnik wzmocnienia amplitudy,
μ_z - współczynnik tarcia w zazębieniu,
ξ - względna współrzędna wzdłuż odcinka przyporu,
φ - przemieszczenie kątowe,
Ψ - funkcja celu,
ω - częstość kołowa,
ω_0 - prędkość synchroniczna elektryczna,
ω_x - prędkość wirowania układu współrzędnych osiowych (x,y),
ω_l - prędkość kątowa wirnika.

1. WPROWADZENIE

Współczesne metody numeryczne i technika komputerowa otwierają przed naukowcami szerokie możliwości w zakresie budowy modeli matematycznych oraz analizy opisanych nimi złożonych układów i procesów fizycznych. Badania symulacyjne pozwalają na głębsze poznanie zjawisk występujących w rozpatrywanym obiekcie i zazwyczaj są znacznie tańsze od badań doświadczalnych. Pozwalają ponadto na analizę stanów awaryjnych, niemożliwych do badania w warunkach eksperymentu na obiekcie rzeczywistym z powodu zagrożenia życia ludzkiego lub też niebezpieczeństwa zniszczenia drogich urządzeń. Budowa uniwersalnych modeli matematycznych, stanowiących wierne odzwierciedlenie cech obiektu rzeczywistego, jest praktycznie niemożliwa. Konieczne jest zatem przyjęcie założeń upraszczających, które zależeć będą od celu prowadzonych badań, cech dynamicznych obiektu badanego oraz charakteru sił zewnętrznych obciążających układ. Wybór modelu i wyznaczenie jego parametrów są w znacznej mierze zdeterminowane intuicją i doświadczeniem badacza. Dlatego też bardzo ważnym zadaniem jest opracowanie narzędzi wspomagających proces modelowania. Szerokie możliwości w zakresie udoskonalania opracowanych modeli dynamicznych stwarzają metody optymalizacji wraz z analizą wrażliwości. Wyznaczone funkcje wrażliwości określają ilościowy i jakościowy wpływ poszczególnych parametrów modelu na badane zjawiska fizyczne opisane funkcją celu. Umożliwiają w ten sposób efektywny wybór zmiennych decyzyjnych poprzez selekcję tych parametrów, które decydują o analizowanych zjawiskach dynamicznych.

Wyniki symulacji numerycznych, prowadzonych z wykorzystaniem modeli fizycznych, oraz wyniki analizy wrażliwości są źródłem cennych informacji i stanowią podstawę optymalnego kształtowania własności dynamicznych układu. Badania optymalizacyjne zapewniają znaczne obniżenie kosztów wytworzenia produktu o wysokich własnościach eksploatacyjnych przy jednoczesnym zapewnieniu jego wysokiej trwałości i niezawodności. Optymalizacja jako narzędzie wspomagające proces konstrukcyjny jest bardzo efektywna nawet przy dużej liczbie zmiennych decyzyjnych i złożonych funkcjach celu. Pierwsze zastosowania metod optymalizacji dotyczyły głównie zadań statycznych, a w miarę rozwoju metod numerycznych i techniki komputerowej zaczęto je stosować do rozwiązywania złożonych zagadnień dynamiki układów maszynowych oraz wspomagania procesu projektowania. Czas niezbędny do rozwiązania zadania zależy m.in. od stosowanych algorytmów obliczeniowych, dlatego też w ostatnich latach można zaobserwować dynamiczny rozwój metod optymalizacji. Na szczególną uwagę zasługują metody ewolucyjne i hybrydowe, umożliwiające znalezienie ekstremum globalnego. W dalszym ciągu udoskonalane są również klasyczne metody programowania matematycznego, zapewniające znaczne przyśpieszenie procesu optymalizacji poprzez wykorzystanie wyników analizy wrażliwości.

Podejście interdyscyplinarne do modelowania układów napędowych implikuje pewne trudności zarówno podczas budowy modelu, jak również doboru metod rozwiązania rozpatrywanego zagadnienia. Jednakże badania optymalizacyjne prowadzone z wykorzystaniem takich modeli umożliwiają szersze spojrzenie na badane zjawiska dynamiczne oraz efektywne łączenie układów o różnej naturze fizycznej, jak np. układy elektromechaniczne, bądź mechatroniczne z rozbudowanymi systemami sterowania. Analizując kierunki badań prowadzonych w przodujących gałęziach przemysłu, takich jak przemysł lotniczy czy samochodowy, można stwierdzić, że zastosowanie nowoczesnych metod obliczeniowych przy interdyscyplinarnym podejściu do zagadnień modelowania stanowi przyszłość szeroko rozumianej inżynierii mechanicznej.

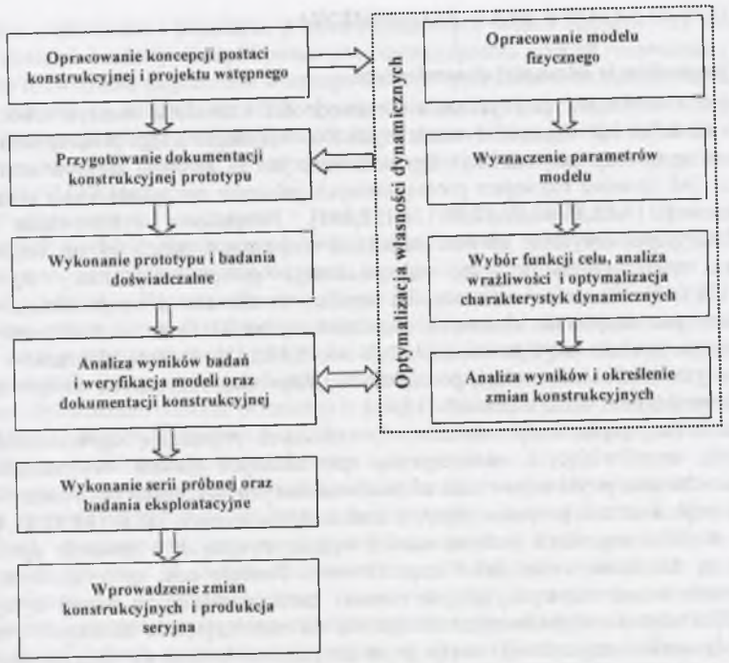
1.1. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Gwałtowny rozwój techniki stawia wysokie wymagania projektantom układów napędowych maszyn roboczych. Dążenie do obniżenia masy układu przy zapewnieniu przeniesienia dużej mocy powoduje zmniejszenie sztywności jego elementów, czego efektem ubocznym może być obniżenie częstości rezonansowych. Dodatkowo, zwiększanie wydajności powoduje konieczność zwiększania prędkości roboczych. W wyniku tego zdarza się, że częstości wymuszeń znajdują się w strefach rezonansowych układów. W takim przypadku zastosowanie nawet najdokładniejszych metod obliczeń statycznych nie zapewni wysokiej trwałości i niezawodności podczas eksploatacji przy złożonym, dynamicznym stanie obciążenia. Rozwiązanie powyższego problemu można uzyskać na drodze modelowania i analizy charakterystyk dynamicznych układu. Charakterystyki dynamiczne zależą od struktury układu oraz jego cech konstrukcyjnych, jednakże bezpośrednie określenie tego wpływu możliwe jest tylko w najprostszych przypadkach. Dodatkowo, opracowane modele komplikują się przy opisie układów o złożonej naturze fizycznej, jak np. układy elektromechaniczne. Wiele takich systemów w postaci układu złożonego z silnika elektrycznego i wielostopniowej przekładni zębatej lub przekładni planetarnej występuje w napędach maszyn roboczych. Zastosowanie wyników symulacji do modyfikacji charakterystyk dynamicznych jest w takich przypadkach bardzo złożone i pracochłonne. Badania te mogą być skutecznie wspomagane poprzez wykorzystanie metod analizy wrażliwości i optymalizacji. Dlatego też rozwój algorytmów modelowania, analizy i syntezy układów dynamicznych znajduje się w obszarze zainteresowania wielu ośrodków naukowych. Coraz więcej uwagi poświęca się zastosowaniu metod optymalizacji do wspomagania procesu doboru cech konstrukcyjnych maszyn, zapewniających im pożądane charakterystyki dynamiczne. Własności dynamiczne układu, determinowane przez jego strukturę oraz parametry fizyczne, mogą być kształtowane już podczas projektowania. Opracowanie projektu wstępnego zapewnia jednoznaczne określenie postaci konstrukcyjnej oraz cech geometrycznych, co umożliwia budowę modelu dynamicznego i estymację jego parametrów. W wyniku tego klasyczny algorytm projektowania, oparty na obliczeniach statycznych, może być z powodzeniem uzupełniony o moduł badań optymalizacyjnych już w fazie opracowania dokumentacji konstrukcyjnej prototypu (rys. 1.1).

Powodzenie takiego podejścia zależy od dysponowania odpowiednimi narzędziami obliczeniowymi, które umożliwiają badanie szerokiej klasy charakterystyk dynamicznych przy stosunkowo prostym opisie matematycznym modelu fizycznego. Komputerowy system wspomagania doboru cech dynamicznych układu powinien umożliwiać:

- przygotowanie modelu fizycznego, będącego odwzorowaniem własności dynamicznych projektowanego układu,
- estymację parametrów przyjętego modelu przy wykorzystaniu projektu wstępnego,
- dobór funkcji celu odpowiedniej do prowadzonych badań,
- przeprowadzenie analizy wrażliwości, której wyniki posłużą do modyfikacji modelu oraz wyboru zmiennych decyzyjnych do procesu optymalizacji,
- przeprowadzenie badań optymalizacyjnych, których wyniki stanowić będą podstawę określenia cech konstrukcyjnych projektowanego układu.

Opracowane modele dynamiczne oraz wyniki optymalizacji cech dynamicznych mogą być zweryfikowane podczas badań doświadczalnych prototypu za pomocą testów modalnych i pomiarów sygnałów wibroakustycznych.



Rys. 1.1. Rozpatrywany algorytm projektowania obiektu technicznego, uwzględniający optymalizację własności dynamicznych

Fig. 1.1. Algorithm of designing of a technical object which takes into account the optimization of dynamic properties

Optymalizacja własności dynamicznych, prowadzona podczas procesu projektowo-konstrukcyjnego, umożliwia rozpatrywanie znacznie większej liczby zmiennych decyzyjnych niż w przypadku modernizacji układów już istniejących. Ponadto istnieje możliwość zmiany struktury układu, np. poprzez zmianę łańcucha kinematycznego, bądź też dołączenie dodatkowych elementów obniżających poziom drgań w wybranych zakresach częstości.

Praca niniejsza stanowi próbę opracowania algorytmu, będącego skutecznym narzędziem wspomagającym proces konstrukcyjny elektromechanicznych układów napędowych dużej mocy. Zastosowanie metod modelowania, analizy wrażliwości i optymalizacji do doboru cech konstrukcyjnych zapewni otrzymanie charakterystyk dynamicznych złożonych układów maszynowych odpowiednich z punktu widzenia minimalizacji oddziaływań w parach kinematycznych oraz obniżenia poziomu drgań.

1.2. DOTYCHCZASOWY STAN ZAGADNIENIA

1.2.1. Optymalizacja własności dynamicznych

Jednym z kierunków podwyższania niezawodności i trwałości maszyn roboczych jest odpowiedni dobór ich własności dynamicznych. Do wspomagania tego procesu coraz częściej stosowane są metody optymalizacji. Spowodowane jest to zarówno efektywnością takiego podejścia, jak również rozwojem profesjonalnych pakietów oprogramowania oraz techniki komputerowej [1,11,38,40,69,77,96,126,138,148]. Początkowe zastosowania procedur optymalizacyjnych dotyczyły głównie zagadnień statycznych, takich jak np. minimalizacja kosztów, masy, gabarytów lub maksymalizacja przenoszonej mocy itp. [19,43, 62,125,129,162]. Obecnie coraz częściej analiza wrażliwości i optymalizacja stają się narzędziem rozwiązywania złożonych zagadnień dynamiki układów maszynowych oraz wspomagania procesu projektowania [9,22,24,44,45,48,111]. Przegląd kierunków i rozwój metod optymalizacji strukturalnej, począwszy od zagadnień statycznych do rozwiązywania zadań dynamiki, omówiono w pracach [16,41].

Zagadnienia optymalizacji układów dynamicznych wymagają opracowania modeli fizycznych, umożliwiających matematyczny opis badanych zjawisk. Wyznaczane na ich podstawie charakterystyki odpowiedzi częstotliwościowych są szeroko stosowane w procesie optymalizacji, kontroli poziomu drgań i doskonaleniu modeli MES [37,92,93,131,152]. Analiza modalna umożliwia budowę modeli wykorzystywanych w procesie optymalizacji zarówno w dziedzinie czasu, jak i częstotliwości. Funkcje celu są opracowywane przy zastosowaniu zasady superpozycji, jak również bardziej złożonych metod hybrydowych [119,120]. Badania optymalizacyjne stosuje się do rozwiązywania złożonych problemów statyki i dynamiki w najszybciej rozwijających się gałęziach przemysłu maszynowego, takich jak przemysł lotniczy [138] i samochodowy [32,57].

Wstępem do badań optymalizacyjnych jest zazwyczaj analiza wrażliwości. Jej wyniki służą do wspomagania wyboru zmiennych decyzyjnych [57,98,101] oraz do oceny ilościowego i jakościowego wpływu parametrów na funkcje celu, określające charakterystyki dynamiczne układów [51,52,91,94]. Najprostszym sposobem znalezienia pochodnych funkcji celu jest zastosowanie metody różnic skończonych [11,50]. Metoda ta ma bardzo prosty algorytm, jednakże otrzymane wyniki mogą być obarczone błędami numerycznymi. Dokładność tej metody jest wystarczająca do rozwiązywania niezbyt złożonych zadań. Metody półanalityczne są znacznie dokładniejsze i szybsze, lecz wymagają większego nakładu pracy przy przygotowywaniu danych. Spośród tych metod należy wymienić metody bezpośrednie i sprzężone [11,50,55,96]. Pochodne funkcji celu określają kierunki największego wzrostu funkcji i mogą być zastosowane do optymalizacji cech konstrukcyjnych układów maszynowych [11,38,53].

Tematyka prowadzonych badań optymalizacyjnych z zakresu dynamiki jest bardzo szeroka. Głównym kierunkiem optymalizacji cech dynamicznych układów maszynowych jest optymalizacja wartości i wektorów własnych. Mimo że parametry własne nie nadają się do określenia stanu układu w odpowiedzi na zadane obciążenie i warunki brzegowe, to odzwierciedlają własności dynamiczne układu i decydują o charakterze tej odpowiedzi. Zagadnieniem badania wrażliwości wartości własnych i wektorów własnych zajmuje się wiele ośrodków naukowych. Wyniki takich badań mogą racjonalizować wybór parametrów własnych przy identyfikacji, poszukiwaniu bądź szacowaniu uszkodzeń [88]. Duża część publikacji podaje sposoby analizy wrażliwości, które stosować można tylko dla jednokrotnych wartości własnych. W przypadku gdy wartość własna jest *w-krotna*, to wyznaczony wektor własny jest liniową kombinacją *w* wektorów, odpowiadających tym wielokrotnym wartościom własnym. Zagadnienie wyznaczania pochodnych wielokrotnych wartości własnych [25,147] jest bardzo ważne dla rozpatrywanej klasy maszyn (np.

przekładnie wielodrożne i planetarne o kilku jednakowych kołach obiegowych). Zadanie to staje się znacznie bardziej skomplikowane przy uwzględnieniu zjawisk rozpraszania energii. W wyniku rozwiązania zagadnienia własnego dla tego typu zadania otrzymuje się zespolone wartości własne, co znacznie utrudnia wyznaczanie pochodnych [28]. Ponadto złożoność zjawisk dyssypacji energii powoduje trudności w opisie matematycznym. Stosuje się więc modele uproszczone, które są obwarowane szeregiem założeń upraszczających, m.in. w pracach [36,37,110,166].

Wrażliwość wartości własnych i wektorów własnych układów tłumionych dla jednokrotnych i wielokrotnych wartości własnych omówiono m.in. w pracach [79,80,146]. W pierwszym przypadku zaproponowano prosty algorytm, umożliwiający znalezienie rozwiązań ścisłych. Wyznaczane współczynniki wrażliwości wielokrotnych wartości i wektorów własnych są określane poprzez rozwiązanie układu równań algebraicznych. Badania takie można przeprowadzać również metodami iteracyjnymi. Jednym z przykładów takiego podejścia jest przesunięcie każdej wartości własnej, w celu uniknięcia osobliwości [78]. Przy odpowiednim doborze przesunięcia można uzyskać satysfakcjonujący wynik już po jednej iteracji. Wybór przesunięcia zależy od wartości wektora własnego i dokładności reprezentacji wyrażeń zmiennoprzecinkowych w komputerze.

Dotychczas opisywane metody badania wrażliwości wektorów własnych i częstości własnych opierają się na modelach wiernie opisujących badany obiekt. Jednak w pewnych przypadkach dysponujemy jedynie skąpymi informacjami, które pochodzą z danych pomiarowych. Wymaga to zastosowania metod umożliwiających wyznaczenie pochodnych funkcji odpowiedzi częstotliwościowej oraz wartości i wektorów własnych przy wykorzystaniu zależności występujących pomiędzy własnościami dynamicznymi układu [87]. Budując model jedynie na podstawie określonych częstości własnych, należy uwzględnić brak jednoznaczności rozwiązania oraz implikacje praktyczne, które z tego wynikają [139,152].

Wyniki analizy modalnej wykorzystywane są również do syntezy modalnej układów. Jednakże w przypadku wykorzystywania tylko wybranych wartości własnych występuje błąd obcięcia. Konieczne jest zatem określenie liczby modów niezbędnych do utrzymania go w zadanych granicach [61].

Opisane metody i rozważania dotyczą modeli liniowych o stałych współczynnikach. Modele takie z powodzeniem stosowane są zarówno do układów dyskretnych, jak i ciągłych [88]. Jeżeli natomiast modele fizyczne opisane są równaniami liniowymi o współczynnikach okresowo zmiennych, to rozwiązanie dla drgań ustalonych można wyrazić jako kombinację liniową wektorów własnych Floqueta. Wektory te są ortogonalne ze względu na rozwiązanie zadania sprzężonego [170]. Metoda taka może być zastosowana np. do modeli opisanych równaniami Mathieu.

Analiza drgań ustalonych układów sprzężonych wymaga uwzględnienia wymiany energii pomiędzy nimi [10,134]. Drgania takie można opisać poprzez wykorzystanie sprzęgających wartości własnych i wektorów własnych [10]. Efektywnym narzędziem do badania przepływu energii pomiędzy układami z tłumieniem jest natomiast metoda receptancji [134].

Dla pewnych zagadnień możliwe jest wyznaczenie wartości własnych i wektorów własnych w postaci analitycznej przy zastosowaniu programów obliczeń symbolicznych [7]. Wyprowadzone w ten sposób wyrażenia wykorzystywane są do przygotowywania testów porównawczych dla metod przybliżonych.

Kolejną grupę zadań optymalizacji dynamicznej stanowią zadania z funkcjami celu, opisującymi charakterystyki dynamiczne w dziedzinie czasu bądź częstości. Funkcje celu budowane są zazwyczaj przy wykorzystaniu średniokwadratowych przyśpieszeń [32,82], przemieszczeń drgań [49,57,145,150] lub sił dynamicznych [96,143]. Metody optymalizacji stosowane są m.in. do wspomagania procesu wyrównoważania wirników [49], ulepszania

charakterystyk dynamicznych maszyn [94,95,173], minimalizacji drgań elementów wyposażenia samochodowego [32,57], czy optymalizacji zawieszenia pojazdu [141]. Metodę modyfikacji strukturalnej, bazującą na znajomości widmowej gęstości mocy wzbudzenia układu, zaprezentowano w pracach [17,18]. Do budowy funkcji celu, wrażliwości i odpowiedzi układu zastosowano dekompozycję modalną. Zamieszczono przykłady zastosowań z wykorzystaniem m.in. funkcji odpowiedzi częstotliwościowej jako kryterium jakości, których efektem jest modyfikacja strukturalna prowadząca do minimalizacji odpowiedzi dynamicznej układu. Pewna grupa prac dotyczy optymalizacji układów podlegających wzbudzeniom losowym [145,150]. Prowadzone badania skupiają się m.in. na obniżeniu wartości skutecznej odpowiedzi w przemieszczeniach dla pewnych stopni swobody. Rozpatruje się ograniczenia na częstości własne i zmienne decyzyjne. Zaproponowana w [150] metoda redukcji poziomu drgań może być stosowana przy wzbudzeniu stacjonarnym sygnałem losowym o rozkładzie Gaussa. Inny przykład dotyczy optymalizacji sztywności i tłumienia układów przy funkcji celu, która opisuje sumę średniokwadratowych odpowiedzi układu na stacjonarne wzbudzenie losowe [145].

Dużą grupę zadań optymalizacji dynamicznej stanowią zagadnienia sterowania optymalnego. Przykładem mogą być aktywne układy izolacji drgań [5,82,83,130].

Wybór funkcji celu dla badań optymalizacyjnych decyduje o powodzeniu całego procesu. Złożoność analizowanych zjawisk czasami utrudnia prawidłowe i jednoznaczne sformułowanie zadania optymalizacji. W takich przypadkach stosuje się interakcyjne, multidyscyplinarne schematy obliczeń, umożliwiające ingerencję projektanta w proces poszukiwania najlepszego rozwiązania [140]. Nie zawsze również rozwiązanie najlepsze z ekonomicznego punktu widzenia spełnia warunki optymalności stawiane w odniesieniu do zagadnień dynamicznych i odwrotnie. Ciągle istnieje „przepaść" pomiędzy wysublimowanymi metodami optymalizacji stosowanymi przez inżynierów i metodami wspomagania podejmowania decyzji przez menedżerów. Może to powodować trudności w odpowiednim doborze funkcji celu oraz powstawanie sprzeczności ograniczeń. Dlatego też podejmowane są próby stworzenia „pomostu", np. poprzez metody transformacji informacji jakościowych, otrzymywanych za pomocą narzędzi wspomagania decyzji w zagadnienie optymalizacji wielokryterialnej z ograniczeniami [89].

W większości zadań optymalizacji charakterystyk dynamicznych dąży się do zminimalizowania wartości maksymalnych. Trudność polega na tym, że podczas obliczeń prowadzonych dla określonych wartości zmiennych decyzyjnych nie wiadomo, dla jakiej wartości zmiennej niezależnej wystąpi maksymalna wartość funkcji celu. Zadania tego typu są silnie nieliniowe, a ponadto wartości ekstremalnych może być kilka. Pod względem stosowanych metod można zauważyć dwa podejścia: stosowanie wyrafinowanych metod programowania matematycznego, bazujących na gradientach funkcji celu, bądź też metod ewolucyjnych [47,50,102,117].

Wyniki dotychczasowych badań optymalizacyjnych z zakresu rozwiązywania omawianych zagadnień wskazują na dużą efektywność metod sekwencyjnych [1,11,47,96,116]. Jedną z takich metod jest metoda sekwencyjnego programowania liniowego. Istota tej metody polega na zamianie zadania optymalizacji nieliniowej funkcji celu w sekwencję zadań optymalizacji liniowej bazującej na gradientach. Zarówno metoda sekwencyjnego programowania liniowego, jak i kwadratowego wymaga wyznaczenia pochodnych funkcji celu względem zmiennych decyzyjnych. W zadaniach takich zbiór zmiennych decyzyjnych zawiera parametry konstrukcyjne układu, takie jak masy, masowe momenty bezwładności, współczynniki tłumienia i sztywności. Ze względu na ograniczenia techniczne nie zawsze można dowolnie zmieniać parametry układu (np. zakres zmian współczynnika tłumienia wewnętrznego dla danego materiału jest niewielki). W takich przypadkach zmiana charakterystyki dynamicznej może być osiągnięta poprzez zmianę struktury układu.

Przykładem takiego podejścia jest zastosowanie dynamicznego tłumika drgań, którego cechy dynamiczne zależą od parametrów układu napędowego [20,35,97,128]. Aby uzyskać najlepsze efekty eliminacji drgań, tłumik musi być dostrojony do układu. Jak wykazały wyniki symulacji numerycznych, układ z dynamicznym tłumikiem dobranym z wykorzystaniem metod optymalizacji cechuje się niską wartością współczynnika wzmocnienia drgań w szerokim zakresie częstości.

W ostatnich latach można zauważyć szczególny rozwój metod ewolucyjnych, który związany jest z rozwojem techniki komputerowej i zwiększeniem szybkości obliczeń. Przedstawicielami tych metod są algorytmy genetyczne (AG) i ewolucyjne (AE). W wielu przypadkach stwarzają możliwość prostego sformułowania zadania optymalizacji i uniknięcia wprowadzania dodatkowych funkcji ograniczeń poprzez zastosowania nieróżniczkowalnych funkcji celu. Ponadto z dużym prawdopodobieństwem można stwierdzić, że wyznaczone rozwiązanie jest rozwiązaniem globalnym. Inną, cenną, cechą jest łatwość łączenia zadań optymalizacji ciągłej i dyskretnej. Zakres zastosowań metod ewolucyjnych jest coraz szerszy, a wyżej wymienione zalety umożliwiają budowanie nietypowych funkcji celu. Spośród ciekawszych należy wymienić zastosowanie AG do modyfikacji ustroju nośnego, tak aby miał pasywną charakterystykę eliminującą drgania [66,67]. Redukcję poziomu drgań uzyskano przez wprowadzenie nietypowej geometrii. Zmiennymi decyzyjnymi były cechy geometryczne struktury, natomiast funkcja celu opisywała przenoszone drgania. Zastosowano ograniczenia zapewniające strukturalną integralność układu. Dla tak postawionego zadania wykazano większą użyteczność algorytmów genetycznych w stosunku do tradycyjnych metod optymalizacji. Wykorzystanie algorytmu genetycznego do minimalizacji masy całkowitej i odpowiedzi częstotliwościowej oraz odstrojenia prędkości krytycznej od prędkości roboczej omawia praca [23]. Jako zmienne decyzyjne zastosowano średnicę wału, długość łożyska oraz luz. Przydatność AG do syntezy układu przedstawiono natomiast w pracy [33]. Badano ruch drgającego układu wieloczłonowego połączonego elementami sprężystymi przy zastosowaniu formalizmu Newtona-Eulera. Wskazano na niewrażliwość algorytmu na nadmiarowe zmienne decyzyjne. Przykład zastosowania AG do polepszenia charakterystyk dynamicznych stopniowanej płyty przez określanie miejsc zamocowania mas dodatkowych można znaleźć w pracy [103]. Jako funkcję celu przyjęto całkę funkcji odpowiedzi częstotliwościowej, obejmującej 10-15 częstości własnych. W pracy [144] zaproponowano natomiast wykorzystanie AG do rozwiązania zadania optymalizacji dyskretnej. Badania prowadzono w zakresie syntezy układów ciągłych poprzez optymalizację topologiczną i kształtu. Zastosowano reprezentację morfologiczną, stosując układy morfologiczne do zdefiniowania struktury układu. Dobre wyniki otrzymano dla mechanizmu z elementami podatnymi oraz belki wspornikowej. Podobne zagadnienie opisano w pracy [124], gdzie wykorzystano AG do badania izomorfizmu mechanizmów oraz wyboru najlepszej postaci. Algorytmy genetyczne były także narzędziem optymalizacji parametrów regulatora PID układu z siłownikiem elektromechanicznym, zmierzającej do minimalizacji drgań rezonansowych [132].

1.2.2. Układy elektromechaniczne

Wiele obiektów technicznych jest układami elektromechanicznymi i wymaga szczególnego, interdyscyplinarnego podejścia do zagadnień modelowania [12,27,46, 71,76,93,96,118,164]. Ze względu na charakter zjawisk fizycznych w nich występujących układy elektromechaniczne stanowią złożone układy dynamiczne. Mogą one być rozdzielone na układ elektromagnetyczny, opisany prawami Maxwella, oraz mechaniczny, opisany zasadami i prawami mechaniki (np. prawami Newtona-Eulera). Prawa ruchu takich podukładów można sformułować w postaci równań różniczkowych. W celu uogólnienia stosowanych algorytmów obliczeń poszukuje się zunifikowanego podejścia do modelowania tego typu układów. Podstawą takiej unifikacji może być zasada prac przygotowanych.

Zastosowanie jej do opisu modeli elektromechanicznych umożliwia uzyskanie dynamicznych równań ruchu w postaci analogicznej do równań układu mechanicznego, zarówno dla więzów holonomicznych, jak i nieholonomicznych [46].

Drgania mechaniczne generowane przez siły i momenty elektromagnetyczne stanowią poważny problem w silnikach elektrycznych [34,81,164], układach napędowych maszyn [71, 75,93,96,118,142] czy transformatorach [27]. Spośród innych zastosowań warto wskazać na wyniki symulacji zjawisk elektromechanicznych zaworów wtryskowych silnika prezentowane w pracy [76].

Niekorzystne zjawiska dynamiczne w sprzężonych układach elektromechanicznych ujawniają się szczególnie w warunkach nieustalonych i stanach rezonansowych. Jednakże ich analiza jest niemożliwa bez zastosowania złożonego modelu dynamicznego, uwzględniającego własności dynamiczne zarówno podukładu mechanicznego, jak i elektromagnetycznego [118,142].

Można zauważyć znacznie większe zainteresowanie modelowaniem i analizą sprzężeń elektromechanicznych ze strony badaczy z zakresu inżynierii elektrycznej. Zapewne wynika to z faktu, że prawie wszystkie maszyny i urządzenia elektryczne są układami elektromechanicznymi, podczas gdy tylko niektóre maszyny robocze i mechanizmy mają cechy takich układów.

1.2.3. Dynamika przekładni zębatych

Modelowanie matematyczne i symulacje komputerowe układów napędowych z przekładniami zębatymi mogą stanowić źródło informacji na temat zjawisk dynamicznych zachodzących w parach kinematycznych układu. Wyniki takich analiz wykorzystywane są do określenia stanu obciążenia poszczególnych elementów napędu. Wyznaczenie zależności pomiędzy siłami międzyzębnymi oraz rejestrowanymi parametrami drgań (prędkość i przyśpieszenie) [3,8,26] umożliwia m.in. zastosowanie wyników symulacji do budowy systemów ekspertowych.

Złożoność modelu i uwzględniane w nim zjawiska zależeć będą od celu prowadzonych badań, postaci konstrukcyjnej układu i stanu obciążenia. Do analizy pewnych zagadnień (np. praca przekładni pod obciążeniem w warunkach ustalonych) wystarczające jest zastosowanie modelu liniowego [14,93,96,104,163]. Przyjęcie założenia liniowości znacznie upraszcza proces analizy i umożliwia zastosowanie metody sztywności dynamicznej i macierzy przejścia do badania sił dynamicznych w zazębieniach. Takie podejście zastosowano m.in. w pracy [14]. Stwierdzono, że model liniowy całkowicie charakteryzuje wymuszoną odpowiedź układu w warunkach ustalonych, jednakże analiza drgań korpusu i hałasu wymaga uwzględnienia dodatkowych stopni swobody.

Niewątpliwy wpływ na zjawiska dynamiczne w przekładni mają jej parametry konstrukcyjne. Jednak złożoność zjawisk występujących w parach kinematycznych przekładni zębatych powoduje trudności w ich opisie matematycznym. Dlatego też modele występujące w literaturze są bądź to modelami przekładni jednostopniowych, w których badany jest wpływ takich zjawisk, jak zmienne sztywności zazębień [4,29,30,74,75,95,104, 105,149,153,163], luzy [30,75,95,104,136,149,154,163], tarcie w zazębieniach [74,153,156], błędy wykonania [121,157], a także zużycie [74], bądź też spotyka się modele przekładni wielostopniowych budowane przy ostrzejszych założeniach co do liniowości modelu [95,158,159,172,173]. Ze względu na dużą liczbę publikacji dotyczących zagadnień dynamicznych tego typu przekładni, w pracy omówiono jedynie te, które są tematycznie związane z rozważanymi problemami.

Wyniki badania wpływu liczby przyporu na odpowiedź dynamiczną przekładni omówiono w pracy [4]. Zmienną sztywność zazębień symulowano za pomocą dwóch stałych poziomów sztywności. Stwierdzono istnienie wzbudzeń parametrycznych błędem przełożenia,

wynikającym ze zmiennej sztywności zazębień. Inny, nieliniowy, model zbudowany z wykorzystaniem MES oraz zagadnień mechaniki kontaktu wykorzystany do badania dynamiki pary kół zębatych zamieszczono w pracy [112]. Źródłem nieliniowości była utrata kontaktu pomiędzy współpracującymi zębami. Analiza dotyczyła szerokiego zakresu prędkości i momentów eksploatacyjnych. Przeprowadzono badania porównawcze z wynikami publikowanymi przez innych autorów. Siły dynamiczne w zazębieniach wyznaczano, stosując szczegółową analizę współpracy zębów wzdłuż odcinka przyporu, unikając w ten sposób konieczności wprowadzania dodatkowych funkcji symulujących zmiany sztywności zazębień. Wyniki obliczeń numerycznych porównano z wynikami uzyskanymi dla modelu z taką symulacją. Stwierdzono dużą wrażliwość tego drugiego podejścia na widmo zmiennej sztywności. Model zęba przekładni w postaci belki Timoshenki o zmiennym przekroju zaprezentowano natomiast w pracy [56]. Zbadano odpowiedź dynamiczną zęba i pary kół zębatych. Badania uwzględniały zmienną sztywność zazębień i siły w biegunie zazębienia.

Jedną z przyczyn budowy dokładnych modeli przekładni zębatych z kołami o zębach prostych i śrubowych jest generowanie hałasu. Zazwyczaj takie symulacje przeprowadzane są z wykorzystaniem modeli matematycznych i metod numerycznych. Problemy powstające przy rozwiązywaniu tego typu modeli omówiono w pracy [2]. Wskazano na problemy wynikające ze złożoności zjawisk fizycznych, ich opisu matematycznego oraz zastosowanych metod numerycznych. Omówiono paradoksalne wyniki powodowane przez stosowanie standardowych metod numerycznych w połączeniu z pewnymi komercyjnymi kompilatorami. Jednym z czynników generujących drgania w przekładni, uwzględnianych w modelach dynamicznych, jest tarcie w zazębieniu [153,156]. Model przekładni, zbudowany przy wykorzystaniu MES, który umożliwia analizę wpływu tarcia zębów na dynamikę przekładni walcowych o zębach prostych i śrubowych, omówiono w pracy [156]. Równania ruchu rozwiązywano w sposób umożliwiający spełnienie warunków kontaktu stycznego i normalnego. Porównanie wyników badań doświadczalnych i teoretycznych potwierdziło poprawność modelu, który znalazł zastosowanie do projektowania cichobieżnych przekładni zębatych. Podobne zagadnienia omówiono w artykule [153], proponując metodę modelowania pary kół zębatych ze zmienną w czasie sztywnością zazębień, tłumieniem wiskotycznym i tarciem ślizgowym. Uwzględniane w modelu wzbudzenie składało się z trzech składników: błędu przełożenia, obciążenia zewnętrznego i okresowo zmiennej siły tarcia ślizgowego. Rezultaty badań wpływu zjawisk zużycia zębów na zmiany widma drgań, przeprowadzanych za pomocą modeli matematycznych, przeanalizowano natomiast w pracy [74]. Charakterystyki dynamiczne aproksymowano, wykorzystując model uwzględniający zmienną sztywność zazębienia, rozkład obciążenia, tłumienie i tarcie. Do symulacji procesów zużycia zastosowano model predykcji zużycia zębów. Stwierdzono znaczny wpływ zużycia zębów na zmiany rejestrowanego widma drganiowego.

Złożoność postaci konstrukcyjnej napędu z przekładniami zębatymi powoduje konieczność rozbudowy modeli i uwzględnienia również wielu czynników nie wynikających bezpośrednio z geometrii zazębienia, ale decydujących o zjawiskach dynamicznych w parach kinematycznych układu. Jednym z takich czynników jest podatność łożysk [54,84]. Określenie charakterystyk sztywności łożysk tocznych napotyka na problemy wynikające z trudności w określeniu kąta styku elementu tocznego z bieżnią podczas jego ruchu. W analizie mechanicznej tocznych łożysk kulkowych przyjmuje się, że kąt styku kulki z bieżnią jest stały. Rzeczywista deformacja każdej kulki jest niemożliwa do przewidzenia. W pracy [84] zaproponowano określenie kąta styku kulki jako funkcję kąta położenia. Przeanalizowano szereg charakterystyk wynikających ze zmiennego kąta styku kulki łożyskowej. Na tej podstawie zaproponowano metodę wyznaczania liczby przyporu, która zapewnia uniknięcie rozdzielenia zębów w pobliżu prędkości krytycznej. W pracy [122] badano natomiast ruch periodyczny nieliniowego układu wał przekładni-łożysko, stosując

metodę bilansu harmonicznych. Wykorzystując metody numeryczne i wykładniki Lapunowa, zbadano ruch chaotyczny. Wyznaczono zakresy częstości wzbudzenia prowadzące do chaosu.

W zależności od stopnia uproszczenia modele przekładni budowane są z wykorzystaniem metody sztywnych elementów skończonych [73,93,95], odkształcalnych elementów skończonych bądź metodą hybrydową, będącą połączeniem tych dwóch metod [30,123,172,173]. Alternatywą dla modeli dyskretnych, budowanych z wykorzystaniem MES, są modele ciągłe [133], bądź dyskretno - ciągłe [105]. Modele takie stosuje się m.in. do analizy sił w zazębieniu przekładni jednostopniowej oraz wyznaczenia wskaźników dynamicznych [133]. Model dyskretno-ciągły przedstawiony w pracy [105] zbudowano przy wykorzystaniu równań falowych i zastosowano do badania wpływu zmiennej sztywności. Takie podejście ogranicza się jednak do analizy drgań skrętnych. Spośród nieklasycznych metod modelowania przekładni należy wspomnieć zastosowania metody grafów [165]. Modelowanie polegające na odwzorowaniu układu za pomocą struktur algebraicznych umożliwia usystematyzowanie algorytmu i dobrą organizację obliczeń. Metodologia ta dotyczy głównie modeli liniowych.

Modele fizyczne stają się bardziej złożone w przypadku analizy przekładni wielostopniowych [158,159,172,173]. Strategię modelowania takich przekładni omówiono w pracy [158]. Każde z kół modelowano jako ciało sztywne o sześciu stopniach swobody. Badano wzbudzenie układu pulsacją zewnętrznych momentów obciążających oraz wewnętrznym, statycznym błędem przełożenia. Analizę przekładni wielostopniowej z kołami zębatymi, modelowanymi jako podatne, omówiono w pracy [159]. Przyjęty schemat obliczeń łączy podatne modele kół zębatych z modelem układu wieloczłonowego, prowadząc do układu nieliniowych równań różniczkowych ze zmiennymi w czasie parametrami. Podano techniki wyznaczania wartości własnych i odpowiedzi na wymuszenia harmoniczne.

Modelowanie i analiza złożonych układów dynamicznych w większości przypadków wymagają redukcji liczby stopni swobody. Zmniejszenie liczby stopni można uzyskać poprzez pominięcie w rozważaniach pewnych postaci drgań [93,95], podział układu na podukłady [15,32,134] bądź też wykorzystanie metody kondensacji modalnej [172,173]. Przykładem zastosowań modeli redukowanych mogą być: zamiana układu rozgałęzionego na szeregowy [168] bądź redukcja całkowitej liczby stopni swobody układu z wykorzystaniem metody syntezy modalnej, umożliwiająca analizę sprzężonych drgań przekładni zębatej wraz z korpusem [172,173].

Postać modelu przyjętego do analizy zależy również od postaci konstrukcyjnej przekładni. W tym względzie na szczególną uwagę zasługują przekładnie stożkowe i planetarne. Analiza układów z przekładniami stożkowymi, uwzględniająca sztywności połączeń, kół zębatych oraz wałów, wymaga budowy modeli przestrzennych [137,161]. W przekładniach planetarnych występuje natomiast wielodrożność przepływu mocy oraz zmienna konfiguracja, wynikająca z ruchu płaskiego kół obiegowych [64,85,86,95,114,123]. Opracowanie wiarygodnych modeli dynamicznych i badanie dynamiki przekładni planetarnych jest bardzo ważne ze względu na to, że są one stosowane w szczególnie trudnych warunkach pracy, gdy konieczne jest przeniesienie dużej mocy, przy zapewnieniu dużego przełożenia i małej masy. Badania odpowiedzi dynamicznej takiej przekładni w szerokim zakresie prędkości eksploatacyjnych i momentów obciążenia omówiono w pracy [114]. Zastosowano unikalne, półanalityczne sformułowanie zagadnienia, bazujące na MES, które umożliwia precyzyjną reprezentację geometrii zębów i sił kontaktowych. Zbadano wrażliwość odpowiedzi na moment obciążenia oraz stwierdzono, że postacie drgań skrętnych są bardziej wrażliwe na momenty obciążające niż drgań translacyjnych. Zagadnienie badania wrażliwości częstości własnych i postaci drgań przekładni planetarnej na parametry układu są również bardziej złożone ze względu na jego symetrię, a co za tym idzie, występowanie wielokrotnych wartości własnych [64,85]. Celem analizy wrażliwości częstości

rezonansowych, prezentowanych w [85], było określenie wpływu zjawisk żyroskopowych na zjawiska dynamiczne. Wrażliwości podano w postaci ścisłych formuł, łączących wrażliwość częstości rezonansowych z odkształceniem modalnym lub energią kinetyczną. Badanie wpływu fazowania satelitów na obniżenie pewnych harmonik częstości zazębień przedstawiono natomiast w pracy [113]. Wnioski wyciągnięto bez konieczności analizy modeli dynamicznych. Zbadano jedynie symetrię układu, która implikuje pewne zależności pomiędzy wielokrotnymi zazębieniami i siłami.

1.2.4. Dynamiczne tłumienie drgań

Układy montowane na drgającym ustroju nośnym mogą mieć w swoim spektrum również składowe będące wynikiem wibracji podłoża. Zastosowanie pasywnych tłumików dynamicznych jest stosunkowo tanim i prostym sposobem eliminacji wybranych rezonansów i obniżenia poziomu drgań [20,35,36,39,53,93,99,101]. W przypadku układów bardziej złożonych, o charakterystykach rezonansowych z wieloma rezonansami, konieczne jest umieszczenie większej liczby odpowiednio rozmieszczonych tłumików [58,63]. Porównanie charakterystyk układów z jednym i kilkoma tłumikami wskazuje na większą efektywność tego ostatniego podejścia. Zagadnienie doboru parametrów kilku tłumików drgań może być zrealizowane metodami optymalizacji przy funkcji celu opisującej wartość skuteczną przemieszczenia układu [63]. Publikowane wyniki badań wskazują, że poprzez odpowiedni dobór postaci geometrycznej układu [66,67] bądź też dynamicznego tłumika drgań [21,108,109] można uzyskać lepsze wyniki niż dla układu z jednym czy nawet wieloma tłumikami. Takie podejście jest jednak bardzo złożone i wymaga zazwyczaj zastosowania metod optymalizacji do określenia wymaganych cech geometrycznych [66,67].

Pasywne tłumiki drgań dostrajane są do określonej częstości bądź też przeznaczane do pracy w szerokim widmie wymuszeń, np. przy wymuszeniu szumem białym [90] lub przy wymuszeniu o zmiennej częstotliwości [97]. Aby zapewnić niską wartość współczynnika wzmocnienia amplitudy drgań, należy zastosować w układu element dyssypacyjny [35,39,93,96,99,100].

Innym sposobem eliminacji drgań w stanach rezonansowych jest stosowanie tłumików aktywnych bądź półaktywnych [31,65,106,128,135,151]. W odróżnieniu od układów aktywnych, gdzie dostarczana jest energia zewnętrzna, działanie tłumików półaktywnych polega na zmianie ich własności tłumiących. Przykładem jest zastosowanie szybkiego przełączanie tłumików o zmiennym współczynniku tłumienia [31]. Badania porównawcze różnych aktywnych i półaktywnych systemów zawieszeń, otrzymane przy tłumieniu drgań naczepy ciągnika, zamodelowanej jako układ o dziewięciu stopniach swobody, zamieszczono w pracy [31]. Inny przykład optymalnego sterowania tłumikiem drgań omówiono w artykule [65]. Celem badań była maksymalizacja rozpraszanej energii. Stwierdzono, że ruch odpowiadający poszczególnym współrzędnym uogólnionym, w układzie zachowawczym o wymuszeniu harmonicznym, może zanikać przy odpowiednio dobranym tłumiku. Wykazano, że przy pewnych warunkach możliwa jest eliminacja drgań bez utraty stabilności.

Uzyskanie maksymalnej redukcji drgań w liniowym układzie zachowawczym jest możliwe przy zastosowaniu aktywnej izolacji drgań. W takim przypadku zagadnienie minimalizacji drgań można sprowadzić do optymalizacji układu ze sterowaniem [60,127,130,171]. Zasady doboru układu aktywnego, składającego się z czujnika i siłownika, przedstawiono w pracy [135]. Zagadnienie kontroli poziomu drgań można również zrealizować poprzez odpowiedni dobór wzbudzenia parametrycznego, gdzie przy odpowiednich parametrach wzbudzenia harmonicznego o wysokiej częstości możliwa jest redukcja wymuszonej odpowiedzi dla dowolnej niższej częstości wymuszenia [107].

2. CEL I ZAKRES PRACY

Dotychczasowe zastosowania metod optymalizacji do wspomagania procesu doboru cech dynamicznych układów wskazują na dużą efektywność takiego podejścia, szczególnie w przypadku układów złożonych i nieliniowych funkcji celu. Zazwyczaj dąży się do obniżenia poziomu drgań poprzez odpowiedni dobór cech dynamicznych układów, przeprowadzany z funkcjami celu w dziedzinie częstotliwości lub rzadziej - w dziedzinie czasu. Nie zawsze jednak takie podejście jest możliwe. Można wtedy zmienić strukturę układu, np. poprzez zastosowanie pasywnych bądź aktywnych, dynamicznych tłumików drgań.

Na podstawie przeprowadzonej analizy publikacji naukowych, dotyczących układów napędowych dużej mocy, stwierdzono brak badań z zakresu optymalizacji układów elektromechanicznych z przekładniami zębatymi, w których proces kształtowania charakterystyk dynamicznych prowadzony byłby z wykorzystaniem parametrów konstrukcyjnych zarówno części mechanicznej, jak i elektrycznej. Stwierdzono również konieczność opracowania systemowego podejścia do optymalizacji charakterystyk dynamicznych, w którym dla raz opisanej struktury układu oraz stanu obciążenia zewnętrznego można przeprowadzić badania optymalizacyjne w ramach jednego pakietu oprogramowania dla różnych kombinacji funkcji celu i ograniczeń, opisanych zarówno w dziedzinie czasu, jak i częstotliwości.

W wyniku przeprowadzonego przeglądu literatury oraz badań własnych sformułowano następującą tezę:

Zastosowanie metod analizy wrażliwości i optymalizacji do rozwiązywania zagadnień doboru cech dynamicznych układów drgających, a w szczególności elektromechanicznych układów napędowych, zapewnia efektywne kształtowanie ich charakterystyk dynamicznych, powodując znaczne zmniejszenie maksymalnych amplitud sił w parach kinematycznych. Badania takie mogą być z powodzeniem stosowane zarówno do modyfikacji obiektów istniejących, jak również do wspomagania procesu projektowo-konstrukcyjnego prototypów maszyn i urządzeń.

Celem pracy było opracowanie algorytmów doboru cech dynamicznych układów fizycznych, umożliwiających optymalne kształtowanie charakterystyk dynamicznych, opisanych zarówno w dziedzinie czasu, jak i częstotliwości. Do rozwiązania tak postawionego zagadnienia zastosowano metody analizy wrażliwości i optymalizacji wykorzystujące modele dynamiczne układów. Opracowany algorytm kształtowania charakterystyk dynamicznych umożliwia sformułowanie następujących typów funkcji celu:

- Funkcję celu opisaną w przestrzeni zmiennych decyzyjnych b:
$$\psi = \psi(b), \tag{2.1}$$
- Funkcję celu opisaną w dziedzinie czasu t:
$$\psi = \psi(b,t). \tag{2.2}$$
- Funkcję celu opisaną w dziedzinie częstotliwości ω:
$$\psi = \psi(b,\omega). \tag{2.3}$$

Badania przeprowadzono z wykorzystaniem dyskretnych i dyskretno-ciągłych modeli dynamicznych elektromechanicznych układów maszynowych. Dla wybranych zagadnień optymalizacji zbiór zmiennych decyzyjnych zawierał zarówno wielkości opisujące model układu mechanicznego, jak również parametry elektryczne silnika napędowego.

Tak postawione zadanie optymalizacji umożliwiło dostrajanie części mechanicznej i elektrycznej napędu. W procesie optymalizacji zastosowano metody gradientowe, wykorzystujące wyniki analizy wrażliwości. Dla wybranych zagadnień charakterystyk dynamicznych sprawdzono przydatność algorytmów genetycznych.

Niniejsza praca obejmuje:

- przegląd literatury z zakresu optymalizacji dla zagadnień dynamiki układów napędowych,
- opracowanie modeli matematycznych rozważanej klasy układów,
- analizę badanych zjawisk pod kątem wyboru funkcji celu do badań optymalizacyjnych,
- opracowanie metod analizy wrażliwości wybranych funkcji celu,
- opracowanie metodyki optymalizacji do rozwiązania zadania optymalnego kształtowania charakterystyk dynamicznych,
- wyniki symulacji komputerowych dla wybranych obiektów technicznych,
- weryfikację doświadczalną przyjętych założeń oraz otrzymanych wyników obliczeń numerycznych dla wybranych zagadnień.

Prezentowane badania prowadzone były przez autora głównie w ramach projektu badawczego nr 7T07A 023 17 oraz, częściowo, wcześniej realizowanych prac badawczych nr 9T12A 149 99 C/4600, 7 T07C 003 95 C/2559, 7T07C 026 10, finansowanych przez Komitet Badań Naukowych.

Treść pracy podzielona została na 9 rozdziałów i uzupełniona spisem literatury. W rozdziale 1. zamieszczono ogólne wprowadzenie do omawianych zagadnień, poparte analizą publikowanych wyników badań z zakresu tematyki pracy. Na podstawie analizy dostępnych publikacji sformułowano tezę, cel i zakres pracy prezentowane w rozdziale 2. W rozdziale 3. pracy omówiono wykorzystywane modele elektromechanicznych układów napędowych z silnikami asynchronicznymi i przekładniami zębatymi. Rozpatrzono sposoby modelowania dwuklatkowych i jednoklatkowych silników elektrycznych. Szczególną uwagę zwrócono na przestrzenne modele dynamiczne przekładni zębatych, uwzględniające nieliniowe charakterystyki sztywności zazębień. Omówione modele stanowiły podstawę prezentowanych w rozdziale 4. algorytmów analizy wrażliwości charakterystyk dynamicznych układów, których konfiguracje opisano za pomocą macierzy bezwładności, sztywności i tłumienia. Zastosowane funkcje celu umożliwiają badanie wrażliwości wartości i wektorów własnych oraz charakterystyk opisanych w dziedzinie czasu i częstotliwości. Analiza wrażliwości stanowi wstęp do badań optymalizacyjnych, omówionych w rozdziale 5. Przedstawiono w nim wybrane metody programowania matematycznego, jak również metody ewolucyjne, przydatne do optymalizacji rozpatrywanych funkcji celu.

Algorytmy obliczeń numerycznych, zamieszczone w rozdziałach 3-5, posłużyły do przygotowania programów komputerowych, które przedstawiono w rozdziale 6. Rozdziały 7. i 8. omawiają zastosowania opracowanych programów do optymalizacji własności dynamicznych układów drgających. W rozdziale 7. podano sposoby budowy modeli i optymalizacji dwóch prototypowych, elektromechanicznych układów napędowych dużej mocy, zamodelowanych z wykorzystaniem modeli drgań skrętnych i giętno-skrętnych. Rozdział 8. zawiera wyniki zastosowań algorytmów do optymalizacji układu dyskretno-ciągłego i ciągłego w postaci belki wspornikowej z dynamicznym tłumikiem drgań.

Podsumowanie prowadzonych badań i wnioski końcowe, potwierdzające słuszność przyjętej tezy, zamieszczono w rozdziale 9.

3. MODELOWANIE UKŁADU

Badania zjawisk dynamicznych złożonych układów elektromechanicznych wymagają przyjęcia modelu fizycznego rozpatrywanego obiektu rzeczywistego. O powodzeniu badań i wiarygodności otrzymanych wyników symulacji komputerowych decyduje właściwe przyjęcie założeń upraszczających w procesie modelowania. Opracowany model powinien uwzględniać zarówno najważniejsze cechy dynamiczne układu, jak i najważniejsze siły zewnętrzne oddziałujące na niego. W przypadku układów elektromechanicznych części napędu zarówno mechaniczna, jak i elektryczna są układami dynamicznymi, wzajemnie sprzężonymi. Analizując zjawiska dynamiczne, szczególnie w stanach nieustalonych, konieczne jest posługiwanie się modelem umożliwiającym realizację sprzężenia elektromechanicznego.

Mechaniczną częścią układu są zazwyczaj przekładnie zębate, które modeluje się w postaci dyskretnej lub dyskretno-ciągłej, z uwzględnieniem charakterystyki sztywności zazębień, luzów obwodowych, podatności podparć, sztywności wałów i korpusów, sił żyroskopowych itp. Model układu mechanicznego opisuje układ równań różniczkowych zwyczajnych, który w postaci macierzowej ma następującą postać:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \left(\mathbf{C}_v + \mathbf{C}_g\right)\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q} \tag{3.1}$$

gdzie: **M, C_v, C_g, K** - macierze bezwładności, tłumienia, efektu żyroskopowego i sztywności, **q** - wektor współrzędnych uogólnionych, **Q** - wektor sił uogólnionych.

Charakter przebiegów czasowych wielkości dynamicznych zależy w znacznym stopniu od charakterystyki i mocy silnika napędowego. Model silnika elektrycznego jest opisem zjawisk elektromagnetycznych związanych z powstawaniem i działaniem pola magnetycznego w maszynie. Dynamiczne równania ruchu modelu maszyny asynchronicznej mogą być sformułowane w postaci macierzowej:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}\mathbf{i} + \mathbf{R}\mathbf{i} = \mathbf{U} \tag{3.2}$$

$$M_{el} = \frac{1}{2}\mathbf{i}^T \frac{\partial}{\partial \varphi_1}\mathbf{L}\mathbf{i}$$

gdzie: **L, R, i, U** - macierze indukcyjności, rezystancji, prądów i napięć zasilających, M_{el} - moment silnika, φ_1 - kąt obrotu wirnika.

Sprzężenie elektromechaniczne realizowane jest przez kąt obrotu wirnika φ_1 wyznaczany z modelu układu mechanicznego oraz moment elektromagnetyczny M_{el} obliczany z modelu silnika elektrycznego. Łączne rozwiązanie równań ruchu modelu układu sprzężonego (3.1) i (3.2) umożliwia określenie jego charakterystyki dynamicznej.

Opisując model fizyczny za pomocą współrzędnych stanu, obniżamy rząd równań różniczkowych modelu do rzędu pierwszego. Taki zapis jest znacznie wygodniejszy do rozwiązania za pomocą większości obecnie stosowanych metod numerycznych

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{aligned} \tag{3.3}$$

gdzie: **A** - macierz systemu, **B** - macierz wejść, **C** - macierz wyjść, **D** - macierz bezpośrednich oddziaływań wektora wejść **u**(t) na wektor wyjść **y**(t).

Macierze **A** i **B** modelu układu mechanicznego, opisanego równaniami (3.3), określamy w sposób następujący:

$$\mathbf{A} = -\mathbf{S}_1^{-1}\cdot\mathbf{S}_2, \quad \mathbf{B} = \mathbf{S}_1^{-1} \tag{3.4}$$

gdzie: $\mathbf{S}_1$,$\mathbf{S}_2$ - pomocnicze macierze blokowe postaci

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{C}_V \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

$$\mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Taka postać równań modelu jest wygodna do jednolitego opisu rozpatrywanej klasy układów elektromechanicznych i stwarza możliwość uwzględnienia sterowania.

3.1. MODEL ELEKTRYCZNEGO SILNIKA INDUKCYJNEGO

Zjawiska dynamiczne występujące w maszynach asynchronicznych opisywane są zazwyczaj układem nieliniowych równań różniczkowych. Nieliniowości te wynikają z charakteru powiązań pomiędzy wielkościami mechanicznymi i elektrycznymi. Dodatkowymi źródłami nieliniowości modelu silnika asynchronicznego są m.in.:

- wypieranie prądu w klatkach wirnika silnika klatkowego,
- nasycenie obwodów magnetycznych.

Uwzględnienie najważniejszych zjawisk dynamicznych możliwe jest w modelach polowych, które są bardzo trudne do analizy. Dlatego też zazwyczaj przeprowadza się dyskretyzację układu, podobnie jak w przypadku modelowania układów mechanicznych. Własności dynamiczne opisuje się za pomocą modeli obwodowych o liczbie obwodów zależnych od przyjętej dokładności odwzorowania obiektu rzeczywistego [70,71,115,118,155]. Dalszego uproszczenia można dokonać poprzez odpowiedni wybór układu współrzędnych. Do analizy maszyn indukcyjnych wykorzystuje się zazwyczaj jeden z dwuosiowych układów współrzędnych:

- układ składowych symetrycznych *(1,2)*,
- układ współrzędnych osiowych *(x,y)*, wirujący względem stojana z prędkością kątową ω_k.

W obydwu przypadkach struktura modelu jest podobna, jednakże przy zastosowaniu składowych symetrycznych zmienne są zmiennymi zespolonymi.

Przy opracowywaniu modelu silnika indukcyjnego przyjmuje się zazwyczaj następujące założenia upraszczające:

- rezystancje wirnika są stałe,
- w chwili początkowej obwód magnetyczny nie jest wzbudzony,
- początkowa prędkość kątowa wirnika jest równa zeru,
- zależności pomiędzy indukcją magnetyczną w szczelinie a okładami prądów są liniowe,
- rozpatrywany układ jest układem holonomicznym,
- wpływ wyższych harmonicznych pola magnetycznego silnika jest pomijalnie mały,
- pole indukcji magnetycznej w szczelinie rozłożone jest sinusoidalnie wzdłuż obwodu szczeliny silnika,
- silnik zasilany jest napięciem sinusoidalnym,
- siłami uogólnionymi są napięcia zasilające stojan i moment obciążający silnik,
- dyssypacja energii jest równa stratom na rezystancjach obwodów elektrycznych maszyny oraz ewentualnym stratom tarcia wewnętrznego.

Model matematyczny asynchronicznego, dwuklatkowego silnika elektrycznego, opisanego w dwuosiowym układzie współrzędnych *(1,2)* [118], stanowią trzy równania różniczkowe:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}U_s = R_s i_s^c + \left(L_s + \frac{3}{2}L_m\right)\frac{d}{dt}i_s^c + \frac{3}{2}L_m\frac{d}{dt}i_r^c + \frac{3}{2}L_m\frac{d}{dt}i_p^c$$
$$+ j\omega_o\left[\left(L_s + \frac{3}{2}L_m\right)i_s^c + \frac{3}{2}L_m i_r^c + \frac{3}{2}L_m i_p^c\right]$$

$$0 = R_r i_r^c + \frac{3}{2}L_m\frac{d}{dt}i_s^c + \left(L_r + L_w + \frac{3}{2}L_m\right)\frac{d}{dt}i_r^c + \left(\frac{3}{2}L_m + L_w\right)\frac{d}{dt}i_p^c$$
$$+ j(\omega_o - p\omega_1)\left[\frac{3}{2}Li_s^c + \left(L_r + L_w + \frac{3}{2}L\right)i_r^c + \left(\frac{3}{2}L + L_w\right)i_p^c\right] \qquad (3.7)$$

$$0 = R_p i_p^c + \frac{3}{2}L_m\frac{d}{dt}i_s^c + \left(L_p + L_w + \frac{3}{2}L_m\right)\frac{d}{dt}i_p^c + \left(\frac{3}{2}L_m + L_w\right)\frac{d}{dt}i_r^c$$
$$+ j(\omega_o - p\omega_1)\left[\frac{3}{2}L_m i_s^c + \left(L_p + L_w + \frac{3}{2}L_m\right)i_p^c + \left(\frac{3}{2}L_m + L_w\right)i_r^c\right]$$

gdzie: i_s^c, i_p^c, i_r^c - zespolone prądy stojana, klatki pracy, klatki rozruchowej, j - jednostka urojona, L_m, L_s - indukcyjności uzwojeń związane ze strumieniami magnetycznymi głównym i rozproszenia stojana, L_w, L_r, L_p - indukcyjności uzwojeń związane ze strumieniami rozproszenia wspólnymi dla obu klatek, klatki rozruchowej i klatki pracy sprowadzone na stronę stojana, p - liczba par biegunów, R_s - rezystancja stojana, R_r, R_p - rezystancje klatki rozruchowej i klatki pracy sprowadzone na stronę stojana, U_s - napięcie zasilające, ω_o - prędkość synchroniczna elektryczna, ω_l - prędkość kątowa wirnika silnika.

Moment napędowy określa zależność:

$$M_{el} = jp\frac{3}{2}L_m\left[\bar{i}_s^c\left(i_r^c + i_p^c\right) - i_s^c\left(\bar{i}_r^c + \bar{i}_p^c\right)\right] \qquad (3.8)$$

gdzie: $\bar{i}_s^c, \bar{i}_r^c, \bar{i}_p^c$ - wartości sprzężone zespolonych prądów stojana, klatki rozruchowej i klatki pracy.

Równania napięciowo-prądowe (3.7) opisują zjawiska elektromagnetyczne zachodzące w stojanie i klatkach wirnika. Dla modeli liniowych przyjmuje się, że współczynniki równań są stałe. Aby rozwiązać układ równań (3.7), zastępuje się go układem sześciu równań różniczkowych, z których wyznacza się części urojone i rzeczywiste zespolonych prądów w trzech obwodach modelu. Równanie (3.8) podaje natomiast zależność pomiędzy momentem elektromagnetycznym silnika a wartościami prądów w obwodach zastępczych. Moment silnika przedstawiony w funkcji prędkości kątowej wirnika $M_{el}(\omega_l)$ określa jego podstawową charakterystykę dynamiczną.

Charakterystyki dynamiczne silnika napędowego można również wyznaczyć z modelu matematycznego, opisanego w dwuosiowym układzie współrzędnych (x,y).

Równania modelu w ogólnym zapisie macierzowym przyjmują następującą postać:

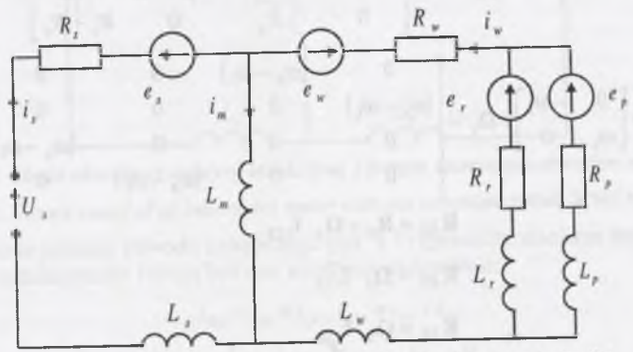
$$\begin{bmatrix}\mathbf{U}_s\\ \mathbf{0}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{R}_{SS} & \mathbf{R}_{SR}\\ \mathbf{R}_{RS} & \mathbf{R}_{RR}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{i}_S\\ \mathbf{i}_R\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{L}_{SS} & \mathbf{L}_{SR}\\ \mathbf{L}_{SR}^T & \mathbf{L}_{RR}\end{bmatrix}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\mathbf{i}_S\\ \mathbf{i}_R\end{bmatrix} \qquad (3.9)$$

Moment elektromagnetyczny określa wyrażenie:

$$M_{el} = pL_m\left(i_{mx}i_{sy} - i_{my}i_{sx}\right) \qquad (3.10)$$

gdzie: i_{mx}, i_{my}, i_{sx}, i_{sy} - składowe prądów magnesującego i stojana.

Dla silnika asynchronicznego dwuklatkowego zazwyczaj wystarcza przyjęcie modelu z dwoma obwodami zastępczymi w wirniku (rys. 3.1) [13].



gdzie: e_s, e_w, e_r, e_p - napięcia rotacji w obwodach stojana i wirnika

Rys. 3.1. Model obwodowy silnika indukcyjnego z dwoma zastępczymi obwodami w wirniku

Fig. 3.1. Circuit model of an inductance motor with two substitute circuits in the rotor

W takim przypadku poszczególne wielkości i macierze występujące w równaniach (3.9) i (3.10) wyznacza się w następujący sposób:

- prąd magnesujący

$$i_{mx} = i_{sx} + i_{rx} + i_{px},\ i_{my} = i_{sy} + i_{ry} + i_{py} \qquad (3.11)$$

- wektor napięć zasilających stojan

$$\mathbf{U}_S = \begin{bmatrix}U_{sx} & U_{sy}\end{bmatrix}^T,\quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T \qquad (3.12)$$

- wektory prądów stojana i wirnika

$$\mathbf{i}_S = \begin{bmatrix}i_{sx} & i_{sy}\end{bmatrix}^T,\ \mathbf{i}_R = \begin{bmatrix}i_{rx} & i_{ry} & i_{px} & i_{py}\end{bmatrix}^T \qquad (3.13)$$

- macierze zawierające rezystancje i indukcyjności

$$\mathbf{L}_{SS} = \begin{bmatrix}L_m + L_s & 0\\ 0 & L_m + L_s\end{bmatrix} \qquad (3.14)$$

$$\mathbf{L}_{SR} = \begin{bmatrix}L_m & 0 & L_m & 0\\ 0 & L_m & 0 & L_m\end{bmatrix} \qquad (3.15)$$

$$\mathbf{L}_{RR} = \begin{bmatrix}L_r + L_w + L_m & 0 & L_w + L_m & 0\\ 0 & L_r + L_w + L_m & 0 & L_w + L_m\\ L_w + L_m & 0 & L_p + L_w + L_m & 0\\ 0 & L_w + L_m & 0 & L_p + L_w + L_m\end{bmatrix} \qquad (3.16)$$

$$\mathbf{L}^{*} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{SS} & \mathbf{L}_{SR} \\ \mathbf{L}_{RS} & \mathbf{L}_{RR} \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

$$\mathbf{R}_{s} = \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{r} = \begin{bmatrix} R_r + R_w & 0 & R_w & 0 \\ 0 & R_r + R_w & 0 & R_w \\ R_w & 0 & R_p + R_w & 0 \\ 0 & R_w & 0 & R_p + R_w \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

$$\mathbf{\Omega}_{s} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_s \\ \omega_s & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Omega}_{r} = \begin{bmatrix} 0 & -(\omega_x - \omega_1) & 0 & 0 \\ (\omega_x - \omega_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\omega_x - \omega_1) \\ 0 & 0 & (\omega_x - \omega_1) & 0 \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

$$\mathbf{R}_{SS} = \mathbf{R}_{s} + \mathbf{\Omega}_{s} \cdot \mathbf{L}_{SS} \tag{3.20}$$

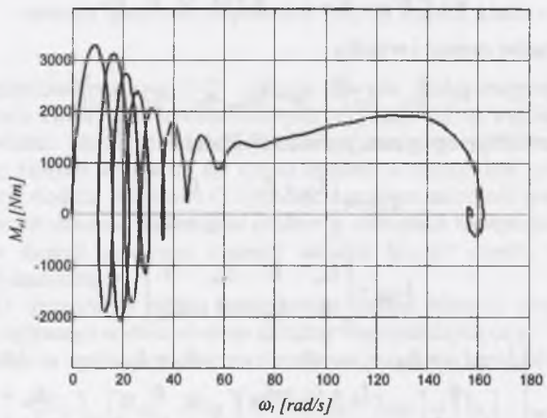
$$\mathbf{R}_{RS} = \mathbf{\Omega}_{r} \cdot \mathbf{L}_{SR}^{T} \tag{3.21}$$

$$\mathbf{R}_{SR} = \mathbf{\Omega}_{s} \cdot \mathbf{L}_{SR} \tag{3.22}$$

$$\mathbf{R}_{RR} = \mathbf{R}_{r} + \mathbf{\Omega}_{r} \cdot \mathbf{L}_{RR} \tag{3.23}$$

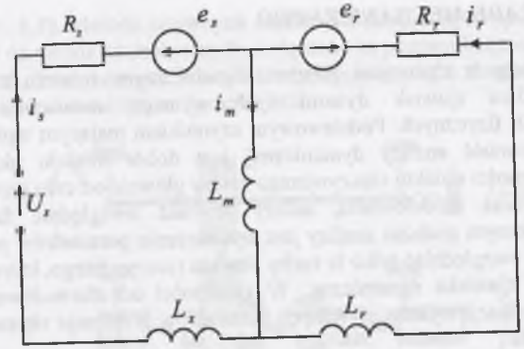
$$\mathbf{R}^{*} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{SS} & \mathbf{R}_{SR} \\ \mathbf{R}_{RS} & \mathbf{R}_{RR} \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

W wyniku rozwiązania modelu opisanego równaniami (3.9) i (3.10) otrzymuje się charakterystykę dynamiczną asynchronicznego silnika napędowego. Przykładowy przebieg takiej charakterystyki, otrzymany za pomocą symulacji komputerowych dla silnika o mocy *250 kW*, przedstawiono na rysunku 3.2. Cechuje się ona znacznymi wartościami chwilowymi momentu elektromagnetycznego podczas rozruchu, które są kilkakrotnie większe od katalogowego momentu rozruchowego.



Rys. 3.2. Charakterystyka dynamiczna silnika asynchronicznego dwuklatkowego o mocy 250 kW

Fig. 3.2. Dynamic characteristic of 250 kW double squirrel-cage asynchronous motor



Rys. 3.3. Model obwodowy maszyny indukcyjnej z jednym zastępczym obwodem w wirniku

Fig. 3.3. Circuit model of an inductance motor with one substitute circuit in the rotor

Zastosowanie jednego obwodu zastępczego (rys. 3.3) upraszcza macierze napięć, prądów, rezystancji i indukcyjności i mogą być one wyrażone następująco:

$$i_{mx} = i_{sx} + i_{rx}, \; i_{my} = i_{sy} + i_{ry} \tag{3.25}$$

$$\mathbf{U}_S = \begin{bmatrix} U_{sx} & U_{sy} \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.26}$$

$$\mathbf{i}_S = \begin{bmatrix} i_{sx} & i_{sy} \end{bmatrix}^T, \; \mathbf{i}_R = \begin{bmatrix} i_{rx} & i_{ry} \end{bmatrix}^T \tag{3.27}$$

$$\mathbf{L}_{SS} = \begin{bmatrix} L_m + L_s & 0 \\ 0 & L_m + L_s \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

$$\mathbf{L}_{SR} = \mathbf{L}_{RS} = \begin{bmatrix} L_m & 0 \\ 0 & L_m \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

$$\mathbf{L}_{RR} = \begin{bmatrix} L_r + L_m & 0 \\ 0 & L_r + L_m \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

$$\mathbf{R}_{SS} = \begin{bmatrix} R_s & -\omega_x (L_m + L_s) \\ \omega_x (L_m + L_s) & R_s \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

$$\mathbf{R}_{RR} = \begin{bmatrix} R_r & -(\omega_x - \omega_1)(L_m + L_r) \\ (\omega_x - \omega_1)(L_m + L_r) & R_r \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

$$\mathbf{R}_{SR} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x L_m \\ \omega_x L_m & 0 \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

$$\mathbf{R}_{RS} = \begin{bmatrix} 0 & -(\omega_x - \omega_1) L_m \\ (\omega_x - \omega_1) L_m & 0 \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

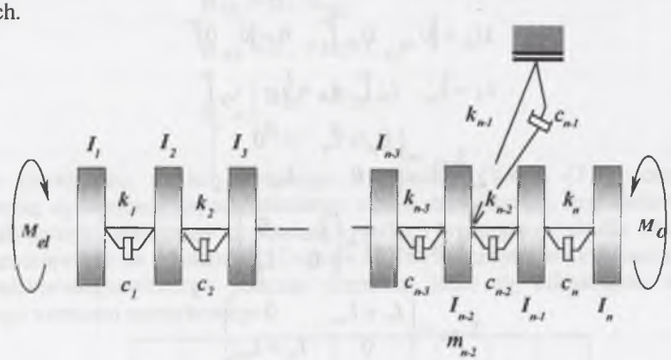
Liczba obwodów zastępczych zależy od celu badań, posiadanego sprzętu do prowadzenia obliczeń numerycznych i postaci konstrukcyjnej układu. Istotne problemy stwarza wyznaczenie parametrów przyjętego modelu, gdyż jest ono w zasadzie niemożliwe bez dostępu do dokumentacji konstrukcyjnej silnika.

3.2. MODEL UKŁADU MECHANICZNEGO

Przekładnie zębate są złożonymi układami dynamicznymi o wielu stopniach swobody. Szczegółowa analiza zjawisk dynamicznych wymaga stosowania rozbudowanych, nieliniowych modeli fizycznych. Podstawowym czynnikiem mającym wpływ na dokładność wyników i efektywność analizy dynamicznej jest dobór modelu układu. Dokładność odwzorowania własności obiektu rzeczywistego zależy głównie od celu prowadzonych badań. Rozpoczynając proces modelowania, należy również uwzględnić fakt, że głównym problemem napotykanym podczas analizy jest wyznaczenie parametrów przyjętego modelu. Powinien on zatem uwzględniać tylko te cechy obiektu rzeczywistego, które mają decydujący wpływ na badane zjawiska dynamiczne. W zależności od sformułowanego celu badań i możliwości identyfikacji wykorzystywanych parametrów przyjmuje się zatem różny stopień uproszczenia modelu.

3.2.1. Model drgań skrętnych

Analizując postać konstrukcyjną układu napędowego i charakter jego pracy, można stwierdzić, że większość elementów przekładni wykonuje ruch obrotowy, a głównym jej zadaniem jest przeniesienie momentu napędowego. Zatem w pierwszym przybliżeniu można ograniczyć się jedynie do analizy drgań skrętnych prowadzonej z zastosowaniem modeli dyskretnych.



Rys. 3.4. Zastępczy model fizyczny układu napędowego z przekładnią planetarną

Fig. 3.4. Physical model of a driving system with planetary gear

Model taki zbudowany jest ze sztywnych tarcz o masie m_i oraz masowym momencie bezwładności I_i, połączonych bezmasowymi elementami o współczynnikach sztywności k_i i współczynnikach tłumienia c_i (rys. 3.4). W takim przypadku ruch układu można opisać za pomocą równań różniczkowych zwyczajnych.

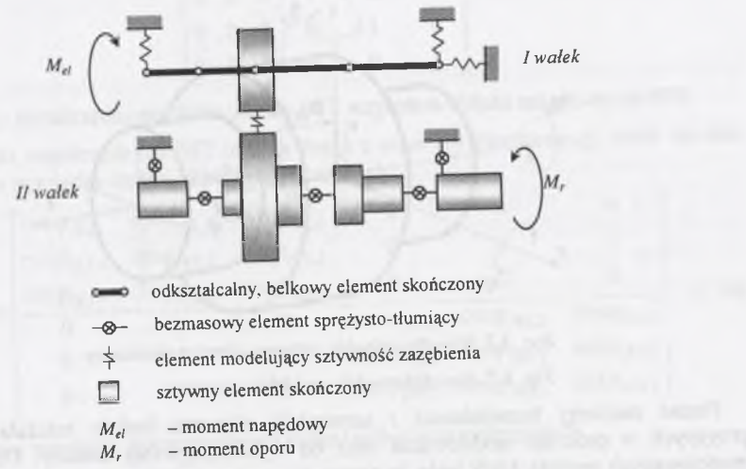
3.2.2. Model drgań giętno-skrętnych

Badanie drgań giętno-skrętnych wymaga opracowania bardziej rozbudowanych, przestrzennych modeli dynamicznych układu. Do budowy takich modeli stosuje się zazwyczaj następujące metody:

- metodę elementów skończonych,
- metodę sztywnych elementów skończonych,
- metodę hybrydową, będącą połączeniem dwóch powyższych metod.

Model przestrzenny składa się z podukładów, którymi zazwyczaj są wały z kołami zębatymi. Oddziaływanie podukładów na siebie realizowane jest za pomocą sił międzyzębnych lub sił

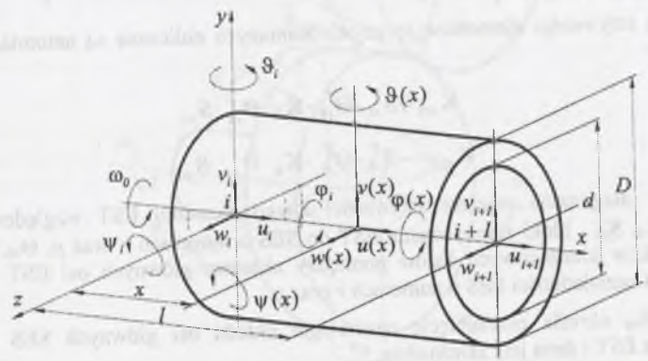
reakcji podpór (rys. 3.5). Metoda sztywnych elementów skończonych opiera się na podziale wałków przekładni na nieodkształcalne bryły, połączone za pomocą bezmasowych elementów sprężysto-tłumiących, modelujących własności sprężysto-tłumiące fragmentów układu (np. wałek II przekładni przedstawionej na rysunku 3.5).



Rys. 3.5. Model fizyczny jednostopniowej przekładni zębatej. Wałek I zamodelowano metodą hybrydową, wałek II za pomocą sztywnych elementów skończonych

Fig. 3.5. Physical model of a spur gear pair, shaft I modelled when applying a hybrid method, shaft II was medelled by rigid finite elements

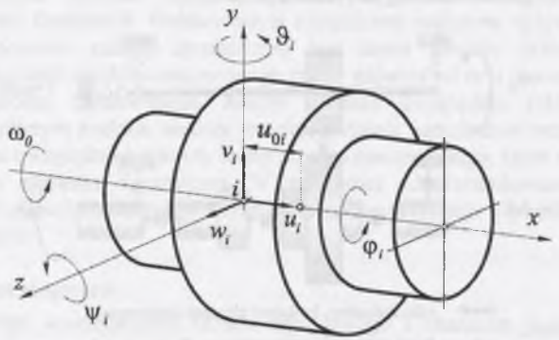
Model SES wystarczająco dokładnie opisuje układ w zakresie niskich częstości własnych. Do analizy wyższych częstości bądź szerokiego spektrum częstości stosowana jest metoda hybrydowa. W takim przypadku wałek dzielony jest na odkształcalne, belkowe elementy skończone (rys. 3.6), natomiast koło zębate, którego sztywność jest o kilka rzędów wyższa od sztywności wałka, traktowane jest jako bryła sztywna (rys. 3.7).



Rys. 3.6. Odkształcalny, dwuwęzłowy element skończony

Fig. 3.6. Deformable, two-nodes finite element

Na rysunku 3.6 przyjęto następujące oznaczenia: $u_i, v_i, w_i, \varphi_i, \vartheta_i, \psi_i$ - przemieszczenia liniowe i kątowe względem układu współrzędnych *i-tego* węzła, *d, D, l* - średnice wewnętrzna, zewnętrzna i długość elementu, ω_0 - prędkość kątowa elementu.



Rys. 3.7. Nieodkształcalny, sztywny element skończony

Fig. 3.7. Non-deformable, rigid finite element

Postać macierzy bezwładności i sztywności elementu będzie zależała od założeń przyjętych w procesie modelowania oraz od wykorzystywanej metody. Dla elementów modelowanych metodą MES będą to pasmowe macierze elementów belkowych (rys. 3.6), których szczegółową postać podaje wiele pozycji literaturowych, m.in. [72,123,173].

Metoda sztywnych elementów skończonych rozróżnia nieodkształcalne elementy typu SES (rys. 3.7), opisane za pomocą masy i masowych momentów bezwładności oraz bezmasowe, odkształcalne elementy typu EST określone przez współczynniki sztywności i tłumienia [73,93]. Macierze bezwładności SES są macierzami diagonalnymi, ponieważ określane są względem osi głównych.

$$\mathbf{M}_i = diag\left(m_i \quad m_i \quad m_i \quad I_{ix} \quad I_{iy} \quad I_{iz}\right) \tag{3.35}$$

gdzie: m_i, I_{ix}, I_{iy}, I_{iz} - masa oraz masowe momenty bezwładności *i-tego* elementu SES względem układu osi głównych.

Macierze sztywności elementów sprężysto-tłumiących obliczane są natomiast w sposób następujący:

$$\mathbf{K}_{rrk} = \mathbf{S}_{rk}^T \cdot \Theta_{rk}^T \cdot \mathbf{K}_k \cdot \Theta_{rk} \cdot \mathbf{S}_{rk} \tag{3.36}$$

$$\mathbf{K}_{rpk} = -\mathbf{S}_{rk}^T \cdot \Theta_{rk}^T \cdot \mathbf{K}_k \cdot \Theta_{pk} \cdot \mathbf{S}_{pk} \tag{3.37}$$

gdzie: $\mathbf{K}_k$ - diagonalna macierz sztywności *k-tego* elementu EST względem jego osi głównych, $\mathbf{S}_{rk}$, $\mathbf{S}_{pk}$ - bloki zamocowania EST do SES o numerach *r* oraz *p*, Θ_{rk}, Θ_{pk} - bloki współczynników kierunkowych kątów pomiędzy układem głównych osi EST i układami głównych osi bezwładności SES o numerach *r* oraz *p*.

Macierz $\mathbf{S}_{rk}$ określa przesunięcie równoległe układu osi głównych SES do punktu zamocowania EST i dana jest zależnością:

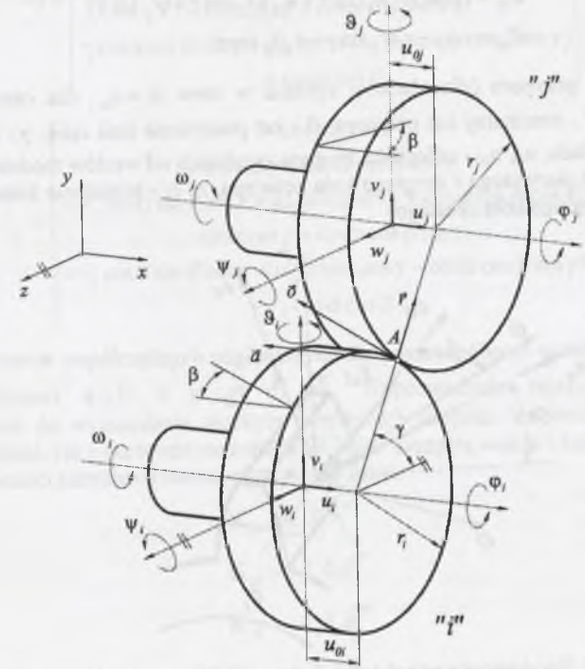
$$\mathbf{S}_{rk} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & v_0 & -u_0 \\ 0 & 1 & 0 & -v_0 & 0 & w_0 \\ 0 & 0 & 1 & u_0 & -w_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{3.38}$$

gdzie: u_0, v_0, w_0 - współrzędne początku układu EST względem układu osi głównych SES.

Obrót układu współrzędnych EST określa druga z macierzy transformacji, która zawiera cosinusy kątów pomiędzy osiami układu współrzędnych:

$$\Theta_{rk} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \cos\varphi_{rk1,1} & \cos\varphi_{rk1,2} & \cos\varphi_{rk1,3} & 0 & 0 & 0 \\ \cos\varphi_{rk2,1} & \cos\varphi_{rk2,2} & \cos\varphi_{rk2,3} & 0 & 0 & 0 \\ \cos\varphi_{rk3,1} & \cos\varphi_{rk3,2} & \cos\varphi_{rk3,3} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos\varphi_{rk1,1} & \cos\varphi_{rk1,2} & \cos\varphi_{rk1,3} \\ 0 & 0 & 0 & \cos\varphi_{rk2,1} & \cos\varphi_{rk2,2} & \cos\varphi_{rk2,3} \\ 0 & 0 & 0 & \cos\varphi_{rk3,1} & \cos\varphi_{rk3,2} & \cos\varphi_{rk3,3} \end{array}\right] \tag{3.39}$$

gdzie $\varphi_{rki,j}$ - kąty pomiędzy poszczególnymi osiami układów współrzędnych.



Rys. 3.8. Jednostopniowa przekładnia walcowa

Fig. 3.8. Single-stage spur gear

Zastosowanie metody sztywnych elementów skończonych jest szczególnie efektywne przy modelowaniu kół zębatych i podparć wałów.

Modelowanie wzajemnego oddziaływania podukładów (rys. 3.8) wymaga określenia sił występujących w zazębieniu współpracujących kół zębatych. Siłę normalną do zęba (rys. 3.9) wyznacza się z następującej zależności:

$$F_z = k_z(\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_j)\mathbf{e}_n \tag{3.40}$$

gdzie: $\mathbf{d}_i$, $\mathbf{d}_j$ - wektory przemieszczeń punktów kontaktu w biegunie zazębienia, $\mathbf{e}_n$ - wersor osi prostopadłej do płaszczyzny kontaktu w punkcie zazębienia, k_z - współczynnik sztywności zazębienia.

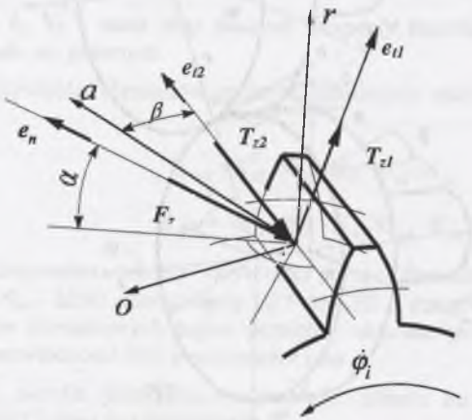
Ze względu na to, że model układu opisany jest za pomocą współrzędnych uogólnionych, siłę międzyzębną należy również wyrazić jako funkcję tych współrzędnych. W tym celu określamy współrzędne wektorów $\mathbf{d}_i$ i $\mathbf{d}_j$ w prostokątnym układzie *ora* o początku w biegunie zazębienia:

$$\begin{aligned} d_{oi} &= v_i\cos\gamma + w_i\sin\gamma + r_i\varphi_i - u_{oi}(\vartheta_i\sin\gamma - \psi_i\cos\gamma)\\ d_{ri} &= v_i\sin\gamma - w_i\cos\gamma + u_{oi}(\vartheta_i\cos\gamma + \psi_i\sin\gamma)\\ d_{ai} &= -u_i + r_i\psi_i\sin\gamma + r_i\vartheta_i\cos\gamma \end{aligned} \tag{3.41}$$

oraz

$$\begin{aligned} d_{oj} &= v_j\cos\gamma + w_j\sin\gamma - r_j\varphi_j - u_{oj}(\vartheta_j\sin\gamma - \psi_j\cos\gamma)\\ d_{rj} &= v_i\sin\gamma - w_i\cos\gamma + u_{oj}(\vartheta_j\cos\gamma + \psi_j\sin\gamma)\\ d_{aj} &= -u_j - r_j\psi_j\sin\gamma - r_j\vartheta_j\cos\gamma, \end{aligned} \tag{3.42}$$

gdzie: α - kąt przyporu (dla obrotów zębnika w lewo $\alpha = \alpha_n$, dla obrotów w prawo $\alpha = \pi - \alpha_n$), α_n - nominalny kąt przyporu, β - kąt pochylenia linii zęba, γ - kąt określający konfigurację układu, u_{oi}, u_{oi} - odległości bieguna zazębienia od węzłów modelu określających środki ciężkości pierwszego i drugiego koła zębatego, r_i, r_j - promienie koła podziałowego pierwszego i drugiego koła zębatego.



Rys. 3.9. Siły działające na ząb koła zębatego, zredukowane do bieguna zazębienia

Fig. 3.9. Forces acting on the tooth of a gear wheel reduced to the contact point

Wektor jednostkowy $\mathbf{e}_n$ wyrażony w tym samym układzie współrzędnych ma następujące składowe:

$$\begin{aligned} e_{no} &= \cos\alpha\cos\beta\\ e_{nr} &= \sin\alpha\\ e_{na} &= \cos\alpha\sin\beta \end{aligned} \tag{3.43}$$

Wstawiając do zależności (3.40) wyrażenie (3.41), (3.42), (3.43), siłę normalną w zazębieniu wyznacza się w sposób następujący:

$$F_z = k_z\left(\delta_i^T\mathbf{q}_i - \delta_j^T\mathbf{q}_j\right) \tag{3.44}$$

gdzie: δ_i, δ_j - wektory geometrycznych parametrów kół zębatych.

Wektory geometrycznych parametrów kół zębatych określa się uwzględniając zależności pomiędzy wektorami przemieszczeń punktów styku w biegunie zazębienia oraz wersorem osi prostopadłej do płaszczyzny zazębienia a współrzędnymi uogólnionymi węzłów, w których umieszczono koła zębate:

$$\delta_i = \begin{bmatrix} -\cos\alpha\sin\beta\\ \sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\\ r_i\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma + u_{oi}(\sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)\\ -\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma\\ r_i\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + u_{oi}(\sin\alpha\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma)\\ r_i\cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

$$\delta_j = \begin{bmatrix} -\cos\alpha\sin\beta\\ \sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\\ -r_j\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma + u_{oj}(\sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)\\ -\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma\\ -r_j\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + u_{oj}(\sin\alpha\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma)\\ -r_j\cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix} \tag{3.46}$$

Składowe wektorów współrzędnych uogólnionych dla poszczególnych elementów przekładni przyjęto w postaci $\mathbf{q} = [u \;\; v \;\; \psi \;\; w \;\; \vartheta \;\; \varphi]^T$. Wyprowadzone zależności mogą być wykorzystywane do wyznaczania macierzy sztywności zazębień zarówno dla przekładni z zębami prostymi, jak i skośnymi oraz dla dowolnego ułożenia wałów i kół zębatych [172]. Macierz sztywności zazębienia tworzą następujące bloki:

$$\mathbf{K}_{zii} = k_z\delta_i\delta_i^T \tag{3.47}$$

$$\mathbf{K}_{zij} = -k_z\delta_i\delta_j^T \tag{3.48}$$

$$\mathbf{K}_{zji} = -k_z\delta_j\delta_i^T \tag{3.49}$$

$$\mathbf{K}_{zjj} = k_z\delta_j\delta_j^T \tag{3.50}$$

$$\mathbf{K}_z = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \cdots & \mathbf{K}_{zii} & \cdots & \mathbf{K}_{zij} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \cdots & \mathbf{K}_{zji} & \cdots & \mathbf{K}_{zjj} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \} \mathbf{q}_i \\ \\ \} \mathbf{q}_j \\ \\ \end{matrix} \tag{3.51}$$

Bloki macierzy sztywności zazębienia są dodawane do bloków globalnej macierzy sztywności układu w miejscach odpowiadających współrzędnym uogólnionym węzłów kół zębatych.

W analizie przekładni zębatych mocno obciążonych i słabo smarowanych bądź też przekładni szybkobieżnych dodatkowo uwzględniana jest siła tarcia w zazębieniu. Zwrot siły tarcia zależy od zwrotu prędkości względnej punktów styku, a wartość określa się na podstawie wartości siły międzyzębnej:

$$T_z = \pm \mu_z |F_z| \tag{3.52}$$

gdzie: μ_z - współczynnik tarcia w zazębieniu, F_z - siła normalna do zęba.

Wersory składowych siły tarcia znajdują się w płaszczyźnie przyporu (rys. 3.9) i w układzie *ora* mają następujące współrzędne:

$$\begin{aligned} e_{t1o} &= -\sin\alpha\cos\beta \\ e_{t1r} &= \cos\alpha \\ e_{t1a} &= -\sin\alpha\sin\beta \end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned} e_{t2o} &= -\sin\beta \\ e_{t2r} &= 0 \\ e_{t2a} &= \cos\beta \end{aligned} \tag{3.54}$$

Wprawdzie wartości sił tarcia są znacznie mniejsze od wartości sił międzyzębnych, jednakże ze względu na oscylacyjny charakter mogą być źródłem generowania drgań i hałasu. Uwzględnienie sił tarcia wymaga zredukowania ich do wektora sił uogólnionych modelu. W tym celu korzystamy z macierzy transformacji, podobnych do macierzy (3.38) i (3.39) stosowanych przy transformacji układów współrzędnych elementów EST:

$$\mathbf{Q}_r = \sum_{j=1}^{2} \mathbf{S}_{rj}^T \cdot \mathbf{\Theta}_{rj}^T \cdot \mathbf{T}_{zj} \tag{3.55}$$

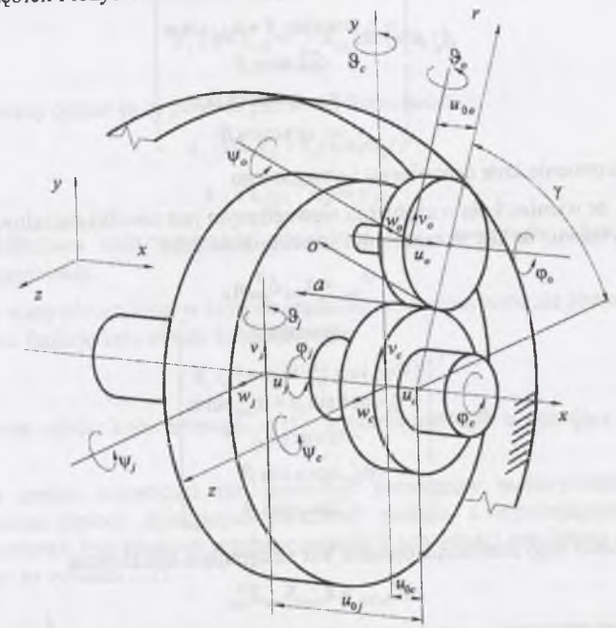
gdzie: $\mathbf{T}_{zj}$ - *j-ta* składowa siły tarcia w zazębieniu.

Algorytm określania charakterystyk sztywności zazębień wymaga pewnych modyfikacji dla kół zębatych z ruchomymi osiami (np. przekładnie planetarne [123]). Kąt γ, określający konfigurację układu, jest wtedy funkcją czasu (rys. 3.10).

Uwzględniając postać konstrukcyjną przekładni planetarnej, opracowano model dynamiczny, który umożliwia analizę drgań zarówno elementów wykonujących ruch obrotowy, jak i płaski. Macierz sztywności więzów przekładni planetarnej $\mathbf{K}_{pp}$ określono w sposób następujący:

$$\mathbf{K}_{pp} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_c & & \\ & & \\ & & \mathbf{K}_j \end{bmatrix} + \mathbf{K}_v \tag{3.56}$$

gdzie: $\mathbf{K}_c, \mathbf{K}_j$ - macierze sztywności łożyskowania koła centralnego i jarzma, $\mathbf{K}_v$ - macierz sztywności zazębień i łożyskowania kół obiegowych.



Rys. 3.10. Model przekładni planetarnej

Fig. 3.10. Model of a planetary gear

Elementami macierzy $\mathbf{K}_c, \mathbf{K}_j$ są współczynniki sztywności *k* łożysk, odpowiadające poszczególnym współrzędnym uogólnionym:

$$\mathbf{K}_c = diag\{k_{xc}, k_{yc}, k_{\psi c}, k_{zc}, k_{\vartheta c}, k_{\varphi c}\} \tag{3.57}$$

$$\mathbf{K}_j = diag\{k_{xj}, k_{yj}, k_{\psi j}, k_{zj}, k_{\vartheta j}, k_{\varphi j}\} \tag{3.58}$$

W przypadku zazębienia koła centralnego z kołem obiegowym macierz sztywności $\mathbf{K}_{vco}$ można wyznaczyć z zależności (3.45) i (3.47)÷(3.51), wyprowadzonych dla przekładni jednostopniowej:

$$\delta_c = \begin{bmatrix} -\cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \\ r_c\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma + u_{oc}(\sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma) \\ -\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma \\ r_c\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + u_{oc}(\sin\alpha\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma) \\ r_c\cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix} \tag{3.59}$$

$$\delta_o = \begin{bmatrix} -\cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha \\ -r_o\cos\alpha\sin\beta + u_{0o}\sin\alpha \\ \cos\alpha\cos\beta \\ -u_{0o}\cos\alpha\cos\beta \\ -r_o\cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix} \tag{3.60}$$

gdzie: r_c, r_o - promienie koła centralnego i obiegowego.

Zakładając, że wieniec koła o uzębieniu wewnętrznym jest nieodkształcalny, otrzymuje się następujące wyrażenie na siłę w zazębieniu „satelita-koło duże":

$$F_{ow} = k_{ow}\delta_{ow}^{\mathrm{T}}\mathbf{q}_o \tag{3.61}$$

$$\delta_{ow} = \begin{bmatrix} -\cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha \\ -r_o\cos\alpha\sin\beta + u_{0o}\sin\alpha \\ -\cos\alpha\cos\beta \\ u_{0o}\cos\alpha\cos\beta \\ -r_o\cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix} \tag{3.62}$$

Macierz sztywności tego zazębienia opisana jest następującą zależnością:

$$\mathbf{K}_{vow} = k_{ow}\delta_{ow}\delta_{ow}^{\mathrm{T}} \tag{3.63}$$

W celu wyznaczenia macierzy sztywności łożyskowania koła obiegowego $\mathbf{K}_{voj}$ wprowadza się elementy sprężysto-tłumiące, łączące koło z osią zamontowaną na jarzmie. Macierze sztywności EST określamy na podstawie zależności (3.36) i (3.37).

Postępując podobnie w przypadku większej liczby kół obiegowych, określa się macierz sztywności więzów występujących pomiędzy elementami modelu całej przekładni planetarnej:

$$\mathbf{K}_v = \sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{K}_{vco_i} + \mathbf{K}_{vow_i} + \mathbf{K}_{voj_i}\right) \tag{3.64}$$

gdzie: i - numer koła obiegowego, n - liczba kół obiegowych w przekładni.

Bloki macierzy (3.64) umieszcza się w tych blokach macierzy sztywności całego układu, które odpowiadają stosownym węzłom modelu.

3.2.3. Charakterystyki sztywności zazębień

Sztywność zazębienia pary kół zębatych jest parametrem zmiennym w czasie i zależy od zmiennej sztywności pary zębów oraz liczby zębów znajdujących się w przyporze. Zakładając stałe współczynniki sztywności zazębienia jednoparowego i dwuparowego, do opisu charakterystyki sztywności przyjmuje się następującą funkcję:

$$k_z(\xi) = \begin{cases} k_2 & 0 \le \xi \le \varepsilon_\alpha - 1 \\ k_1 & \varepsilon_\alpha - 1 < \xi < 1 \end{cases} \tag{3.65}$$

gdzie: k_1, k_2 - średnie sztywności zazębienia jedno- i dwuparowego, ε_α - liczba przyporu, ξ - względna współrzędna wzdłuż odcinka przyporu odniesiona do podziałki zazębienia.

W ruchu ustalonym zmienna sztywność jest okresową funkcją czasu i może być rozwinięta w szereg Fouriera:

$$k_z(t) = k_{z0} + \sum_{n=1}^{\infty} k_{zn}\sin(n\omega_z t) \tag{3.66}$$

Z reguły wystarczy opisać ją za pomocą pierwszej harmonicznej:

$$k_z(t) = k_s + k_d\sin(\omega_z t) \tag{3.67}$$

$$k_s = k_{z0}, \quad k_d = k_{z1} \tag{3.68}$$

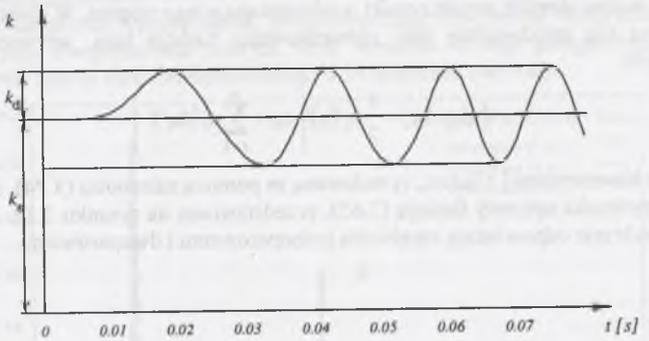
gdzie: k_s - składowa stała sztywności zazębienia, k_d - amplituda składowej zmiennej, ω_z - częstość zazębienia.

Analizując stany nieustalone, w których prędkość wirowania wału nie jest stała, sztywność opisuje się jako funkcję kąta obrotu koła zębatego:

$$k_z(t) = k_s + k_d\sin(z\varphi(t)) \tag{3.69}$$

gdzie: z - liczba zębów koła zębatego, $\varphi(t)$ - współrzędna kątowa opisująca położenie koła zębatego.

Taki opis zmian sztywności nie powoduje problemów numerycznych związanych z nieciągłościami funkcji opisujących parametry modelu, a wynikającymi ze skokowej zmiany ich wartości. Przykładowy przebieg symulacji sztywności zazębienia w funkcji czasu przedstawiono na rysunku 3.11.



Rys. 3.11. Symulacja zmiennej sztywności zazębienia funkcją harmoniczną. Rozruch układu

Fig. 3.11. Simulation of varying stiffness of meshing by using the harmonic function. Start up of the system

Głównym źródłem nieliniowości modelu przekładni są luzy: obwodowy i wierzchołkowy. Luzy są niezbędne dla prawidłowej pracy przekładni oraz dla zapewnienia swobodnego zazębiania i wyzębiania się kół zębatych. Badania pracy przekładni zębatych [104,163] wskazują, że w przypadku ustalonych warunków pracy luzy międzyzębne są skasowane i można traktować układ jak bez luzów. Oddziaływanie luzów uwidacznia się warunkach nieustalonych i może powodować wzrost obciążeń zębów, będący efektem pojawienia się sił impulsowych podczas zderzeń. Zazwyczaj luz międzyzębny symulowany jest za pomocą funkcji, opisującej siłę dynamiczną w zazębieniu w zależności od względnego przemieszczenia kół zębatych:

$$F(k_z,\Delta q)=k_z(q)\begin{cases}(\Delta q-0.5l) & \Delta q>0.5l\\ 0 & -0.5l\le\Delta q\le 0.5l\\ (\Delta q+0.5l) & \Delta q<-0.5l\end{cases} \tag{3.70}$$

gdzie: F - siła normalna w zazębieniu, $k_z(q)$ - współczynnik sztywności, l - zadana wartość luzu, Δq - różnica współrzędnych uogólnionych określona z zależności:

$$\Delta q=\delta_i^T\mathbf{q}_i-\delta_j^T\mathbf{q}_j \tag{3.71}$$

Inny sposób symulacji występowania luzu w parze kinematycznej polega na opisaniu siły w zazębieniu za pomocą wielomianu *n-tego* stopnia. W celu wyznaczenia współczynników tego wielomianu wprowadza się nowe zmienne $\Delta q'$ i F', spełniające warunki:

$$F'=\frac{2F}{k_z l},\quad \Delta q'=\frac{2\Delta q}{l} \tag{3.72}$$

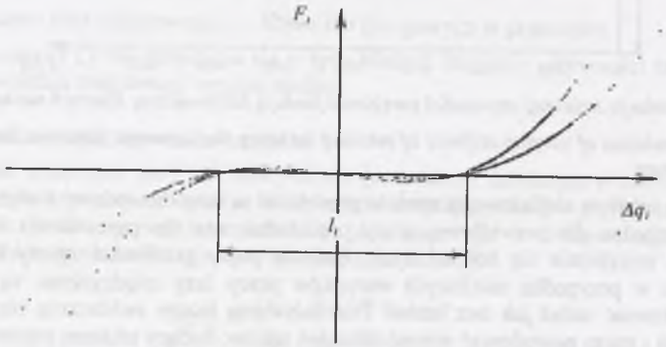
Podstawiając zmienne (3.72) do wzoru (3.70), otrzymuje się funkcję opisującą względną siłę dynamiczną, która ma jednakowy przebieg dla dowolnego współczynnika sztywności oraz luzu różnego od 0:

$$F'(\Delta q')=\begin{cases}(\Delta q'-1) & \Delta q'>1\\ 0 & -1\le\Delta q'\le 1\\ (\Delta q'+1) & \Delta q'<-1\end{cases} \tag{3.73}$$

Wykorzystując wartości F' obliczone z zależności (3.73), za pomocą metody najmniejszych kwadratów, można określić współczynniki a_i wielomianu *n-tego* stopnia. W efekcie otrzyma się wyrażenie na siłę międzyzębną jako różniczkowalną funkcję luzu, sztywności i różnicy przemieszczeń:

$$F(k_z,\Delta q)=\frac{1}{2}k_z(q)\left(a_0+\sum_{i=1}^{n}a_i(\Delta q')^i\right) \tag{3.74}$$

Siłę w parze kinematycznej z luzem, symulowaną za pomocą zależności (3.74), dla przypadku zmiennej sztywności opisanej funkcją (3.65), przedstawiono na rysunku 3.12. Poszczególne krzywe na wykresie odpowiadają zazębieniu jednoparowemu i dwuparowemu.



Rys. 3.12. Symulacja zmiennej sztywności i luzu w zazębieniu wielomianem 6. stopnia

Fig. 3.12. Simulation of varying stiffness and clearances by using the polynomial of 6th degree

Uwzględniając luz oraz zmienną sztywność zazębień rozpatruje się każdy z wałków przekładni jako wyizolowany podukład, oddziałujący na sąsiednie wałki za pomocą sił międzyzębnych. Ruch pojedynczego wałka opisuje następujące równanie różniczkowe w postaci macierzowej:

$$\mathbf{M}_{w_i}\ddot{\mathbf{q}}_{w_i}+(\mathbf{C}_{v_{wi}}+\mathbf{C}_{g_{wi}})\dot{\mathbf{q}}_{w_i}+\mathbf{K}_{w_i}\mathbf{q}_{w_i}=\mathbf{Q}_{w_i}+\sum_{j=1}^{n}\mathbf{F}_{w_{ij}} \tag{3.75}$$

gdzie: $\mathbf{M}_{wi}$, $\mathbf{C}_{v_{wi}}$, $\mathbf{K}_{wi}$, $\mathbf{C}_{g_{wi}}$ - macierze bezwładności, tłumienia, sztywności i efektu żyroskopowego pojedynczego, *i-tego* wałka przekładni, $\mathbf{q}_{wi}$ - wektor współrzędnych uogólnionych węzłów, $\mathbf{Q}_{wi}$ - wektor zewnętrznych sił uogólnionych przyłożonych do poszczególnych węzłów *i-tego* wałka, $\mathbf{F}_{wij}$ - wektor sił oddziaływań podukładów pomiędzy sobą, w tym przypadku sił międzyzębnych, n - liczba zazębień.

Siły w zazębieniu, działające odpowiednio na *i-ty* i *j-ty* wałek, dane są zależnościami:

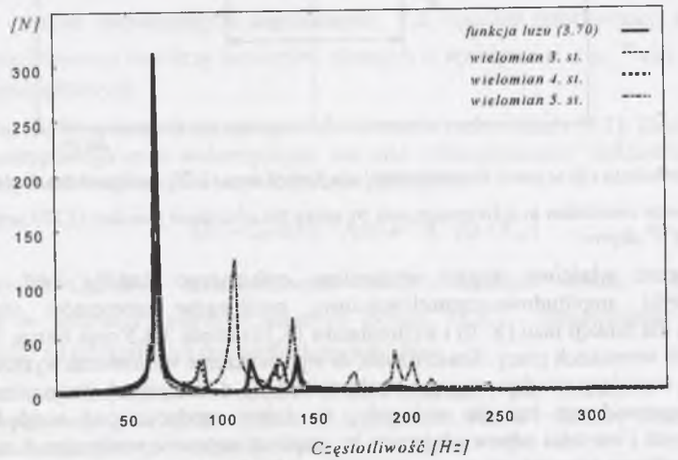
$$\mathbf{F}_{w_{ij}}=-F\delta_i \tag{3.76}$$

$$\mathbf{F}_{w_{ji}}=F\delta_j \tag{3.77}$$

gdzie: F - siła międzyzębna określona zależnością (3.70) lub (3.74).

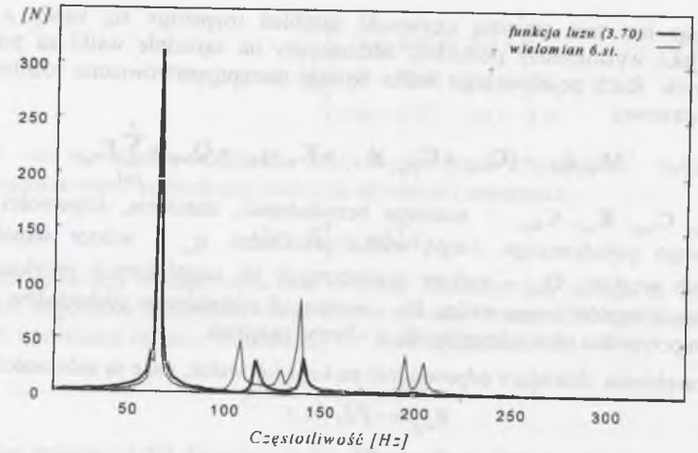
Macierze $\mathbf{M}_{wi}$, $\mathbf{C}_{v_{wi}}$, $\mathbf{K}_{wi}$, $\mathbf{C}_{g_{wi}}$, otrzymane dla poszczególnych podukładów, wykorzystywane są do budowy macierzy całego układu. Macierze bezwładności, tłumienia, sztywności i efektu żyroskopowego całego układu są macierzami blokowymi z poszczególnymi blokami umieszczonymi wzdłuż głównej przekątnej. Wektory $\mathbf{F}_{wij}$ dodawane są do bloków uogólnionych sił zewnętrznych w blokach odpowiadających węzłom, w których przyłożono te siły.

Omawiane zależności wykorzystano, przeprowadzając obliczenia numeryczne. Badania prowadzono przy uwzględnieniu różnych liczb wyrazów szeregu potęgowego. Obiektem badań był model układu elektromechanicznego o 14 stopniach swobody.



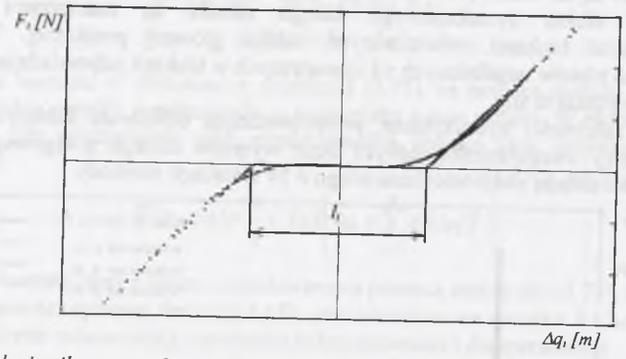
Rys. 3.13. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe przebiegów sił dynamicznych otrzymanych przy symulacji luzu wielomianami 3,4,5 st. i funkcją luzu

Fig. 3.13. Amplitude frequency characteristics of dynamic forces obtained when simulating clearances by using polynomials of 3,4,5th degree and the clearance function



Rys. 3.14. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe przebiegów otrzymanych przy symulacji luzu funkcją luzu i wielomianem 6. stopnia

Fig. 3.14. Amplitude frequency characteristics of dynamic forces obtained when simulating clearances by using the clearance function and polynomials of 6^{th} degree



Rys. 3.15. Symulacja siły w parze kinematycznej dla funkcji luzu (3.70) i wielomianu 6. stopnia

Fig. 3.15. Force simulation in a kinematic pair by using the clearance function (3.70) and polynomial of 6^{th} degree

Aby dobrać właściwy stopień wielomianu opisującego funkcję luzu, porównano charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe przebiegów momentów skręcających, uzyskanych dla funkcji luzu (3.70) i wielomianów (3.74) stopni 3,4,5 oraz 6 (rys. 3.13 i 3.14) w ustalonych warunkach pracy. Stwierdzono, że wprowadzenie wielomianu wyższego stopnia do równań modelu powoduje występowanie w widmie dodatkowych harmonicznych (rys. 3.13). Przeprowadzone badania wykazały, że dobrą zgodność pod względem liczby harmonicznych i wartości odpowiadających im amplitud zapewnia wielomian 6. stopnia (rys. 3.14). Stwierdzono również, że stosowanie większej liczby wyrazów szeregu potęgowego niż 6 powoduje znaczne skomplikowanie obliczeń przy niewielkiej poprawie otrzymanych wyników. Wyniki symulacji sił dynamicznych w funkcji różnicy przemieszczeń kół zębatych dla różnych sposobów opisu pary kinematycznej z luzem pokazano na rysunku 3.15.

3.2.4. Tłumienie w układzie

W procesie identyfikacji parametrów przyjętego modelu dynamicznego największych trudności dostarcza matematyczny opis zjawisk dyssypacji energii [36,37,72,73,166]. Ze względu na złożoność tych zjawisk konieczne jest przyjęcie szeregu założeń upraszczających. W modelowaniu rozpatrywanej klasy układów przyjęło się budować macierz tłumienia jako kombinację liniową macierzy bezwładności i sztywności:

$$\mathbf{C}_v = \alpha_v \mathbf{M} + \beta_v \mathbf{K} \tag{3.78}$$

gdzie: α_v, β_v - współczynniki skalarne.

Metoda ta jest bardzo prosta w zastosowaniu i znacznie upraszcza analizę drgań układów z tłumieniem. Często przyjmuje się, że α_v=0, a współczynnik β_v określa się na podstawie stałych materiałowych. Macierz tłumienia jest zatem proporcjonalna do macierzy sztywności.

Metoda modalna polega natomiast na wyznaczeniu tłumienia całego układu odpowiadającego poszczególnym postaciom drgań. W takim przypadku rozprzęga się układ równań różniczkowych zapisanych we współrzędnych uogólnionych, poprzez transformację modalną i przejście do układu współrzędnych głównych.

3.2.5. Redukcja liczby stopni swobody

Zwiększanie dokładności opisu matematycznego badanego obiektu prowadzi do złożonych modeli dynamicznych o wielu stopniach swobody. Prowadzone są zatem badania w zakresie opracowania metod redukcji liczby stopni swobody. Jednym ze sposobów zmniejszenia wymiarów zadania jest zastosowanie metody kondensacji modalnej. Opisując ruch liniowego modelu fizycznego za pomocą współrzędnych uogólnionych, otrzymuje się układ sprzężonych pomiędzy sobą równań różniczkowych zwyczajnych. Aby uzyskać układ o mniejszej liczbie niesprzężonych równań, stosuje się następujące podstawienie:

$$\mathbf{q}(t) = {}^{m}\mathbf{X}\,{}^{m}\mathbf{x}(t) \tag{3.79}$$

gdzie: $\mathbf{q}(t)$ - wektor współrzędnych uogólnionych, ${}^{m}\mathbf{X}$ - macierz transformacji utworzona z $\mathbf{M}$-*ortonormalizowanej* macierzy wektorów własnych o wymiarze m x n, ${}^{m}\mathbf{x}(t)$ - wektor m współrzędnych głównych.

Równanie (3.79) podstawia się następnie do równania ruchu układu (3.1). Zakładając brak efektu żyroskopowego oraz wykorzystując warunki ortonormalności wektorów własnych, otrzymuje się model zapisany we współrzędnych głównych:

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) + \hat{\mathbf{C}}_V \dot{\mathbf{x}}(t) + {}^{m}\mathbf{\Lambda}\mathbf{x}(t) = {}^{m}\mathbf{X}^T [\mathbf{Q} + \mathbf{F}_w] \tag{3.80}$$

gdzie: $\hat{\mathbf{C}}_V = {}^{m}\mathbf{X}^T \mathbf{C}_V \, {}^{m}\mathbf{X}$ - transformowana macierz tłumienia układu, ${}^{m}\mathbf{\Lambda}$ - macierz zawierająca m wybranych wartości własnych układu, $\mathbf{Q}, \mathbf{F}_w$ - odpowiednio wektory sił zewnętrznych i sił oddziaływań pozostałych podukładów.

Macierze współczynników równania (3.80) określamy na podstawie rozwiązania zagadnienia własnego. Następnie wybiera się te częstości własne i wektory własne, które są ważne z punktu widzenia prowadzonej analizy.

Rozwiązanie układu, składającego się z mniejszej liczby niesprzężonych równań różniczkowych, jest znacznie prostsze i szybsze, a jednocześnie zapewnia wystarczającą dokładność opisu badanych zjawisk.

3.3. *OKREŚLENIE SIŁ W PARACH KINEMATYCZNYCH*

Jednym z celów analizy dynamicznej układów jest określenie oddziaływań dynamicznych w parach kinematycznych. Siły oddziaływań są wynikiem działania sił sprężystych oraz sił oporu niesprężystego (np. tłumienia, tarcia). Największy wpływ na wartości oddziaływań dynamicznych mają siły sprężyste, a siły oporu niesprężystego są zazwyczaj pomijane ze względu na trudności w opisie zjawisk rozpraszania energii. Aby określić wartości sił sprężystych, wykorzystuje się wyrażenie na energię sprężystą układu w postaci następującej formy kwadratowej:

$$E_p = \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{K}\mathbf{q} \tag{3.81}$$

Uogólnione siły dynamiczne oblicza się jako pochodne energii sprężystej względem *i-tego* wektora zmiennych decyzyjnych. Zatem wyrażenie na siłę w elemencie łączącym węzły *i, j* określa zależność:

$$\mathbf{F}_{ij} = \frac{\partial E_{p_{ij}}}{\partial \mathbf{q}_i} = \mathbf{K}_{ij}\left(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\right) \tag{3.82}$$

gdzie: E_{pij} - energia potencjalna analizowanego elementu, $\mathbf{K}_{ij}$ - macierz sztywności elementu, $\mathbf{q}_i$, $\mathbf{q}_j$ - wektory współrzędnych uogólnionych węzłów modelu.

W pewnych szczególnych przypadkach zależności te będą przyjmowały inną postać. Dla elementu modelującego łożysko toczne, przy założeniu nieodkształcalności korpusu, siły uogólnione wyznacza się z zależności:

$$\mathbf{F}_i = \frac{\partial E_{p_{ij}}}{\partial \mathbf{q}_i} = \mathbf{K}_i\mathbf{q}_i \tag{3.83}$$

Siłę normalną w zazębieniu określa się natomiast, korzystając z zależności (3.76), podanej w rozdziale 3.2.3.

4. ANALIZA WRAŻLIWOŚCI CHARAKTERYSTYK DYNAMICZNYCH

Wyniki analizy dynamiki układu są cennym źródłem informacji o zjawiskach dynamicznych w parach kinematycznych, jednakże ich interpretacja jest trudna i wymaga zarówno szerokiej wiedzy, jak i pewnego doświadczenia. Dla zastosowań praktycznych najważniejszym celem jest określenie wpływu parametrów modelu na badane zjawiska. Z punktu widzenia analizy matematycznej zagadnienie takie sprowadza się do wyznaczenia gradientu pewnej funkcji w *n-wymiarowej* przestrzeni Hilberta. Funkcję tę nazywamy funkcją celu, natomiast obszar poszukiwań określony jest przez zbiór parametrów modelu, zwany zbiorem zmiennych decyzyjnych. Badania takie można prowadzić na drodze analitycznej lub numerycznej. Podejście analityczne ograniczone jest do przypadków opisanych prostymi modelami. Dla bardziej złożonych zadań pochodne wyznaczane są zazwyczaj z wykorzystaniem metod przybliżonych (np. metoda różnic skończonych) lub dokładniejszych od nich metod półanalitycznych (metoda bezpośrednia, metoda układów sprzężonych). Główną zaletą analizy wrażliwości jest możliwość dalszego wykorzystania jej wyników w procesie optymalizacji cech konstrukcyjnych układu.

4.1. *BADANIE WRAŻLIWOŚCI WARTOŚCI WŁASNYCH*

Częstości drgań własnych są podstawowymi wielkościami charakteryzującymi własności dynamiczne układów fizycznych. Wyznaczenie ich wymaga rozwiązania zagadnienia własnego z prawostronnymi wektorami własnymi, które można przedstawić w następującej postaci:

$$\mathbf{K}\mathbf{X} = \lambda\mathbf{M}\mathbf{X} \tag{4.1}$$

gdzie: λ - macierz wartości własnych, $\mathbf{X}$ - kwadratowa macierz wektorów własnych.

Określenie częstości własnych układu umożliwia wskazanie obszarów rezonansowych, w obrębie których, przy wymuszeniu harmonicznym, siły dynamiczne mogą znacznie przekraczać założone wartości nominalne. Zbadanie wpływu cech konstrukcyjnych układu na wartości częstości drgań swobodnych ma zatem fundamentalne znaczenie dla uzyskania pożądanych własności dynamicznych. W przypadku złożonych układów o wielu stopniach swobody intuicyjne określenie tego wpływu jest bardzo trudne, a często nawet niemożliwe, gdyż na wartości i wektory własne wpływają wszystkie cechy konstrukcyjne danego obiektu. Jednak w rzeczywistości wpływ tylko niektórych z nich może mieć znaczenie decydujące. Oceny tego wpływu można dokonać, wykorzystując wyniki analizy wrażliwości. Problem taki sprowadza się do wyznaczenia pochodnych wartości własnych względem parametrów konstrukcyjnych, które występują w postaci jawnej lub uwikłanej w macierzach sztywności i bezwładności.

4.1.1. *Wyznaczanie pochodnej metodą bezpośrednią*

Metoda bezpośrednia wyznaczania pochodnych wartości własnych polega na różniczkowaniu zagadnienia własnego (4.1). Różniczkując równanie względem *j-tego* parametru konstrukcyjnego, a następnie mnożąc lewostronnie obie strony równania przez transponowany, ortonormalny wektor własny, otrzymuje się wyrażenie na pochodne wartości własnych względem zmiennej decyzyjnej. Dla układu, w którym nie występuje tłumienie oraz

brak wielokrotnych wartości własnych, pochodną wybranej częstości własnej można wyznaczyć zatem z następującej zależności:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial b_j} = \mathbf{X}_i^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b_j} - \lambda_j \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b_j} \right) \mathbf{X}_i \tag{4.2}$$

gdzie: λ_i - wartość własna *i*, $\mathbf{X}_i$ - wektor własny odpowiadający *i-tej* wartości własnej unormowany tak, aby spełniał warunek $\mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \mathbf{X}_i = 1$.

4.1.2. Wyznaczanie pochodnej metodą sprzężoną

Metoda układów sprzężonych, w zastosowaniu do wyznaczania pochodnych wartości własnych, wykorzystuje prawe i lewe wektory własne macierzy $\mathbf{A} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$. Jeżeli macierz ta jest macierzą symetryczną, to zarówno jej prawe, jak i lewe wektory własne są jednakowe, jednakże w przypadku ogólnym są one różne. Pochodną wartości własnej względem parametrów układu określa zależność:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial b_j} = \frac{\mathbf{X}_{Li}^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial b_j} \mathbf{X}_{Pi}}{\mathbf{X}_{Li}^T \mathbf{X}_{Pi}} \tag{4.3}$$

gdzie $\mathbf{X}_{Pi}, \mathbf{X}_{Li}$ są odpowiednio *i-tym* prawym i lewym wektorem własnym macierzy **A**, które odpowiadają *i-tej* wartości własnej.

Tak sformułowane wyrażenie może być stosowane zarówno do jednokrotnych, jak i wielokrotnych wartości własnych. Pochodne wartości wielokrotnych można wyznaczyć również z zależności:

$$\left[\mathbf{X}_{wi}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b_j} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b_j} \right) \mathbf{X}_{wi} - \lambda_i^* \mathbf{I} \right] \mathbf{X}_i^* = 0 \tag{4.4}$$

gdzie: $\mathbf{X}_{wi}$ jest macierzą *w* ortonormalnych wektorów własnych, odpowiadających *w-krotnym* wartościom własnym, **I** jest kwadratową macierzą jednostkową o wymiarze *w*, λ_i^* jest wartością własną w równaniu (4.4), równą jednocześnie pochodnej wartości własnej λ_i względem parametru b_j oraz $\mathbf{X}_i^*$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości λ_i^*.

4.1.3. Przybliżony sposób wyznaczania pochodnej

Najprostszym sposobem wyznaczenia pochodnej jest przybliżenie jej wartości ilorazem różnicowym. Zakładając małą zmianę wektora parametrów konstrukcyjnych o wartość $\Delta\mathbf{b}$, otrzyma się zaburzenia wartości elementów macierzy **M** i **K** zapisane w macierzach $\Delta\mathbf{M}$ i $\Delta\mathbf{K}$. W takim przypadku zmianie ulegną zarówno wartości własne, jak i wektory własne. Zmianę *i-tej* wartości własnej można wyznaczyć z zależności:

$$\Delta\lambda_i = \mathbf{X}_i^T \left(\Delta\mathbf{K} - \lambda_i \Delta\mathbf{M} \right) \mathbf{X}_i \tag{4.5}$$

Pochodną zatem w przybliżeniu wyznacza się jako wartość ilorazu różnicowego:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial b_j} \approx \frac{\mathbf{X}_i^T \left(\Delta\mathbf{K}_j - \lambda_i \Delta\mathbf{M}_j \right) \mathbf{X}_i}{\Delta b_j} \tag{4.6}$$

gdzie $\Delta\mathbf{K}_j$, $\Delta\mathbf{M}_j$ są odpowiednio zaburzeniami macierzy **K** i **M**, będącymi wynikiem zmiany *j-tej* zmiennej decyzyjnej.

4.2. WYZNACZANIE POCHODNYCH WEKTORÓW WŁASNYCH

Zagadnienie wyznaczania pochodnych wektorów własnych znajduje mniejsze zastosowanie praktyczne niż analiza wrażliwości wartości własnych. Pochodne te wykorzystuje się m.in. w analizie wrażliwości i optymalizacji modeli o zredukowanej liczbie stopni swobody, gdzie redukcję przeprowadzano metodą kondensacji modalnej. W takim przypadku niezbędna jest znajomość pochodnych modalnej macierzy transformacji, zbudowanej z wybranych wektorów własnych.

Jeżeli zatem dla układu o *N* stopniach swobody znane są wszystkie wartości i wektory własne, to pochodną wektora własnego określa się z zależności:

$$\frac{\partial \mathbf{X}_i}{\partial b_j} = c_i \mathbf{X}_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} c_k \mathbf{X}_k \tag{4.7}$$

$$c_i = -\frac{1}{2} \mathbf{X}_i^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b_j} \mathbf{X}_i, \qquad c_k = -\frac{\mathbf{X}_i^T \frac{\partial \mathbf{Z}_i}{\partial b_j} \mathbf{X}_i}{\lambda_k - \lambda_i} \tag{4.8}$$

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M} \tag{4.9}$$

Rozwiązanie to jest rozwiązaniem ścisłym. W literaturze można znaleźć również wiele numerycznych metod przybliżenia pochodnej wektora własnego [160].

Analizę wrażliwości wektorów własnych znacznie komplikuje uwzględnienie tłumienia w przyjętym modelu. W takim przypadku zagadnienie własne należy sformułować w postaci:

$$\left(\lambda_i^2 \mathbf{M} + \lambda_i \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) \mathbf{X}_i = 0 \tag{4.10}$$

gdzie: λ_i - wartość własna, $\mathbf{X}_i$ - wektor własny.

Badanie wrażliwości jednokrotnych wektorów własnych układu z tłumieniem można przeprowadzić według następującego algorytmu [80]:

- Wyznaczenie pochodnych wartości własnych:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial b_j} = -\mathbf{X}_i^T \left(\lambda_i^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b_j} + \lambda_i \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial b_j} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b_j} \right) \mathbf{X}_i \tag{4.11}$$

- Wyznaczenie macierzy

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} \lambda_i^2 \mathbf{M} + \lambda_i \mathbf{C} + \mathbf{K} & (2\lambda_i \mathbf{M} + \mathbf{C}) \mathbf{X}_i \\ \mathbf{X}_i^T (2\lambda_i \mathbf{M} + \mathbf{C}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

- Obliczenie

$$\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} -(2\lambda_i \mathbf{M} + \mathbf{C}) \mathbf{X}_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial b_j} - \left(\lambda_i^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b_j} + \lambda_i \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial b_j} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b_j} \right) \mathbf{X}_i \\ -\mathbf{X}_i^T \left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b_j} \lambda_i + \mathbf{M} \frac{\partial \lambda_i}{\partial b_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial b_j} \right] \mathbf{X}_i \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

- Wyznaczenie poszukiwanej pochodnej

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{X}_i}{\partial b_j} \\ 0 \end{bmatrix} = \left(\mathbf{A}^*\right)^{-1} \mathbf{F}_i \tag{4.14}$$

Zaletą omawianej metody jest to, że wymagana jest tylko znajomość tej pary wartości oraz wektora własnego, której pochodna jest wyznaczana. Jest to szczególnie ważne przy analizie dużych układów.

W zagadnieniach technicznych spotyka się często układy cechujące się symetrią, co powoduje wystąpienie wielokrotnych wartości własnych. Jeżeli znane są wszystkie wartości własne i wektory własne w układzie z w wartościami wielokrotnymi, to można zdefiniować następujące pomocnicze zagadnienie własne:

$$\mathbf{M}\mathbf{X}_w\lambda_w^2 + \mathbf{C}\mathbf{X}_w\lambda_w + \mathbf{K}\mathbf{X}_w = 0 \tag{4.15}$$

gdzie: λ_w - macierz diagonalna wielokrotnych wartości własnych, $\mathbf{X}_w$ - macierz wielokrotnych wektorów własnych.

Przedstawiony poprzednio algorytm analizy wrażliwości wartości własnych układu z tłumieniem można rozszerzyć na poszukiwanie pochodnych dla zagadnienia wielokrotnych wartości własnych. Pochodne te wyznacza się w sposób następujący [79]:

- Wyznaczenie macierzy

$$\mathbf{D}_w = \mathbf{X}_w^T \left(\lambda_w^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b_j} + \lambda_w \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial b_j} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b_j} \right) \mathbf{X}_w \quad \text{oraz} \quad \mathbf{E} = -\mathbf{I}_w \tag{4.16}$$

gdzie: $\mathbf{I}_w$ - macierz jednostkowa.

- Rozwiązanie zagadnienia własnego

$$\mathbf{D}_w\mathbf{T} = \mathbf{E}\mathbf{T}\frac{\partial \lambda_w}{\partial b_j} \quad \text{oraz normalizowanie tak, aby} \quad \mathbf{T}^T\mathbf{T} = \mathbf{I}_w. \tag{4.17}$$

- Nowe wektory własne odczytuje się jako kolumny macierzy

$$\mathbf{X}^* = \mathbf{X}_w\mathbf{T}. \tag{4.18}$$

- Wyznaczenie macierzy

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} \lambda_w{}^2\mathbf{M} + \lambda_w\mathbf{C} + \mathbf{K} & (2\lambda_w\mathbf{M} + \mathbf{C})\mathbf{X}^* \\ \mathbf{X}^{*T}(2\lambda_w\mathbf{M} + \mathbf{C}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

- Obliczenie wektora

$$\mathbf{F}_w = \begin{bmatrix} -(2\lambda_w\mathbf{M} + \mathbf{C})\mathbf{X}^* \dfrac{\partial \lambda_w}{\partial b_j} - \left(\lambda_w^2 \dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial b_j} + \lambda_w \dfrac{\partial \mathbf{C}}{\partial b_j} + \dfrac{\partial \mathbf{K}}{\partial b_j} \right) \mathbf{X}^* \\ -\mathbf{X}^{*T} \left(\dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial b_j} \mathbf{X}^* \lambda_w + \mathbf{M}\mathbf{X}^* \dfrac{\partial \lambda_w}{\partial b_j} + \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial \mathbf{C}}{\partial b_j} \mathbf{X}^* \right) \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

- Wyznaczenie poszukiwanej pochodnej

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{X}^*}{\partial b_j} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \left(\mathbf{A}^*\right)^{-1} \mathbf{F}_w \tag{4.21}$$

Opisany algorytm opiera się na znajomości tylko wielokrotnych wartości i wektorów własnych oraz pierwszych pochodnych macierzy sztywności, bezwładności i tłumienia układu.

4.3. BADANIE WRAŻLIWOŚCI PRZEBIEGÓW CZASOWYCH

Analiza wrażliwości przebiegów czasowych wymaga rozwiązania modelu matematycznego układu. Model taki, opisany we współrzędnych stanu, zależy również od wybranych zmiennych decyzyjnych. Równania ruchu można więc zapisać w sposób następujący:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{b}) \tag{4.22}$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{h}(\mathbf{b}) \tag{4.23}$$

gdzie: $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \ldots, x_m(t)]^T$ - wektor zmiennych stanu, $\mathbf{b} = [b_1, \ldots, b_n]^T$ - wektor zmiennych decyzyjnych, t_0 - czas początkowy.

Czas t_k, określający moment wystąpienia badanego stanu układu, może być również zmienną decyzyjną. W ogólnym przypadku opisany jest wtedy następującą funkcją:

$$F(t_k, \mathbf{x}(t_k), \mathbf{b}) = 0 \tag{4.24}$$

Wybrana funkcja celu może zawierać człon całkowy dotyczący opisu w pewnym przedziale czasu oraz człon opisujący stan układu w określonej chwili czasu t_k:

$$\psi = g(t_k, \mathbf{x}(t_k), \mathbf{b}) + \int_{t_0}^{t_k} T(t, \mathbf{x}, \mathbf{b})\, dt \tag{4.25}$$

Różniczkując funkcjonał (4.25) względem **b**, po przekształceniach uzyskuje się wyrażenie:

$$\frac{d\psi}{d\mathbf{b}} = \frac{\partial g}{\partial t_k}\frac{\partial t_k}{\partial \mathbf{b}} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}\left[\dot{\mathbf{x}}(t_k)\frac{\partial t_k}{\partial \mathbf{b}} + \frac{\partial \mathbf{x}(t_k)}{\partial \mathbf{b}} \right] + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{b}} + \int_{t_0}^{t_k} \left[\frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{b}} + \frac{\partial T}{\partial \mathbf{b}} \right] dt + T(t_k)\frac{\partial t_k}{\partial \mathbf{b}} \tag{4.26}$$

Obliczając pochodną wyrażenia (4.24) względem czasu i wstawiając do (4.26), otrzymamy:

$$\frac{d\psi}{d\mathbf{b}} = \mathbf{G}^T(t_k, \mathbf{x}(t_k), \mathbf{b})\frac{\partial \mathbf{x}(t_k)}{\partial \mathbf{b}} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{b}} - \frac{\left[\dfrac{\partial g}{\partial t_k} + \dfrac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(t_k) \right] \dfrac{\partial F}{\partial \mathbf{b}}}{\dot{F}(t_k)} + \int_{t_0}^{t_k} \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{b}} + \frac{\partial T}{\partial \mathbf{b}} \right) dt \tag{4.27}$$

$$\mathbf{G}^T(t_k, \mathbf{x}(t_k), \mathbf{b}) = \left[\frac{\partial g(t_k)}{\partial \mathbf{x}} \right]^T - \frac{\left[\dfrac{\partial g}{\partial t_k} + \dfrac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(t_k) + T(t_k) \right] \left[\dfrac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} \right]^T}{\dot{F}(t_k)} \tag{4.28}$$

Pochodne cząstkowe występujące w wyrażeniach (4.27), (4.28) mogą być określone analitycznie, z wyjątkiem członu $\partial \mathbf{x}(t_k)/\partial \mathbf{b}$, gdyż $\mathbf{x}(t)$ wyznacza się poprzez numeryczne całkowanie równań ruchu. Określenie brakującego wyrażenia wymaga zastosowania metody bezpośredniego różniczkowania bądź też metody zmiennych sprzężonych [50].

4.3.1. Metoda bezpośredniego różniczkowania

Metoda ta polega na sformułowaniu dodatkowego zadania początkowego, uzyskanego przez zróżniczkowanie równań modelu (4.22) i (4.23) względem **b**.

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{b}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{b}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{b}} \tag{4.29}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t_0)}{\partial \mathbf{b}} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{b}}$$

Rozwiązanie zadania początkowego (4.29) określa wartości poszukiwanych pochodnych $\partial \mathbf{x}(t)/\partial \mathbf{b}$.

W dalszej części pracy pokazany zostanie sposób sformułowania równań metody bezpośredniego różniczkowania dla modelu elektromechanicznego. Ze względu na przejrzystość opisu wektor **x** zapisano jako składający się z dwóch wektorów zawierających odpowiednio współrzędne części elektrycznej $\mathbf{x}_e$ i mechanicznej $\mathbf{x}_m$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e \\ \mathbf{x}_m \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

gdzie indeksy *e*, *m* odnoszą się do wielkości opisujących odpowiednio modele układu elektrycznego i mechanicznego.

Równania ruchu modelu silnika indukcyjnego (3.9) przyjmą zatem postać:

$$\dot{\mathbf{x}}_e = \underbrace{\left(\mathbf{L}^*\right)^{-1}\mathbf{U}_z - \left(\mathbf{L}^*\right)^{-1}\mathbf{R}^*\mathbf{x}_e}_{\mathbf{f}_e(\mathbf{x},\mathbf{b})} \tag{4.31}$$

Różniczkując układ równań (4.31) względem zmiennych decyzyjnych, otrzymuje się zależność:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_e}{\partial \mathbf{b}} = \frac{\partial \mathbf{f}_e}{\partial \mathbf{b}} + \frac{\partial \mathbf{f}_e}{\partial \mathbf{x}_e}\frac{\partial \mathbf{x}_e}{\partial \mathbf{b}} \tag{4.32}$$

gdzie poszczególne macierze pochodnych cząstkowych wyznaczamy jako:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_e}{\partial \mathbf{x}_e} = -\left(\mathbf{L}^*\right)^{-1}\left(\frac{\partial \mathbf{R}^*}{\partial \mathbf{x}_e}\mathbf{x}_e + \mathbf{R}^*\right) \tag{4.33}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_e}{\partial \mathbf{b}} = -\left(\mathbf{L}^*\right)^{-1}\left[\frac{\partial \mathbf{L}^*}{\partial \mathbf{b}}\left(\mathbf{L}^*\right)^{-1}\left(\mathbf{U}_z - \mathbf{R}^*\mathbf{x}_e\right) + \frac{\partial \mathbf{R}^*}{\partial \mathbf{b}}\mathbf{x}_e\right] \tag{4.34}$$

Postać pochodnych macierzy indukcyjności i rezystancji oraz momentu elektromagnetycznego silnika zależeć będzie od uproszczeń przyjętych przy budowie modelu oraz liczby przyjętych obwodów zastępczych. W podobny sposób formułuje się równania modelu matematycznego (3.3) oraz wyznacza się pochodne współrzędnych części mechanicznej układu:

$$\dot{\mathbf{x}}_m = \underbrace{\mathbf{A}_m\mathbf{x}_m + \mathbf{B}_m\mathbf{u}_m}_{\mathbf{f}_m(\mathbf{x},\mathbf{b})} \tag{4.35}$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_m}{\partial \mathbf{b}} = \frac{\partial \mathbf{f}_m}{\partial \mathbf{b}} + \frac{\partial \mathbf{f}_m}{\partial \mathbf{x}_m}\frac{\partial \mathbf{x}_m}{\partial \mathbf{b}} \tag{4.36}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_m}{\partial \mathbf{x}_m} = \mathbf{A}_m + \mathbf{B}_m\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial \mathbf{x}_m} \tag{4.37}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_m}{\partial \mathbf{b}} = \frac{\partial \mathbf{A}_m}{\partial \mathbf{b}}\mathbf{x}_m + \frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial \mathbf{b}}\mathbf{u}_m + \mathbf{B}_m\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial \mathbf{b}} \tag{4.38}$$

Poszczególne pochodne cząstkowe macierzy układu określone są zależnościami:

$$\frac{\partial \mathbf{A}_m}{\partial \mathbf{b}} = -\mathbf{S}_1^{-1}\left(\frac{\partial \mathbf{S}_1}{\partial \mathbf{b}}\mathbf{A}_m + \frac{\partial \mathbf{S}_2}{\partial \mathbf{b}}\right) \tag{4.39}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial \mathbf{b}} = -\mathbf{B}_m\frac{\partial \mathbf{S}_1}{\partial \mathbf{b}}\mathbf{B}_m \tag{4.40}$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}_1}{\partial \mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{b}} \\ \dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{b}} & \dfrac{\partial \mathbf{C}_\gamma}{\partial \mathbf{b}} \end{bmatrix} \tag{4.41}$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}_2}{\partial \mathbf{b}} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{b}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dfrac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{b}} \end{bmatrix} \tag{4.42}$$

Szczegóły dotyczące wyznaczania pozostałych macierzy omówiono w rozdziale 3.

Ze względu na sprzężenia występujące pomiędzy modelami części mechanicznej i części elektrycznej należy również uwzględnić pochodne wielkości sprzęgających, czyli prędkości kątowej wirnika i momentu elektromagnetycznego silnika napędowego. Sprzężenia uwzględnia się wprowadzając następujące równania:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_m}{\partial \mathbf{x}_e} = \mathbf{B}_m\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial \mathbf{x}_e} \tag{4.43}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_e}{\partial \mathbf{x}_m} = -\left(\mathbf{L}^*\right)^{-1}\frac{\partial \mathbf{R}^*}{\partial \mathbf{x}_m}\mathbf{x}_e \tag{4.44}$$

Uwzględniając powyższe rozważania, dodatkowy układ równań różniczkowych metody bezpośredniego różniczkowania, dla modelu elektromechanicznego z silnikiem asynchronicznym, można zapisać w postaci:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \dot{\mathbf{x}}_e}{\partial \mathbf{b}} \\ \dfrac{\partial \dot{\mathbf{x}}_m}{\partial \mathbf{b}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial \mathbf{f}_e}{\partial \mathbf{x}_e} & \dfrac{\partial \mathbf{f}_e}{\partial \mathbf{x}_m} \\ \hline \dfrac{\partial \mathbf{f}_m}{\partial \mathbf{x}_e} & \dfrac{\partial \mathbf{f}_m}{\partial \mathbf{x}_m} \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{x}_e}{\partial \mathbf{b}} \\ \dfrac{\partial \mathbf{x}_m}{\partial \mathbf{b}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{f}_e}{\partial \mathbf{b}} \\ \dfrac{\partial \mathbf{f}_m}{\partial \mathbf{b}} \end{bmatrix} \tag{4.45}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_e(t_0)}{\partial \mathbf{b}} \\ \frac{\partial \mathbf{x}_m(t_0)}{\partial \mathbf{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{h}_e}{\partial \mathbf{b}} \\ \frac{\partial \mathbf{h}_m}{\partial \mathbf{b}} \end{bmatrix}$$

Zaletą metody bezpośredniego różniczkowania jest stosunkowo prosty algorytm oraz możliwość obliczania pochodnej $\partial \mathbf{x}(t)/\partial \mathbf{b}$ jednocześnie z $\mathbf{x}(t)$. Wadą jest konieczność rozwiązania dużej liczby dodatkowych równań różniczkowych.

Pochodne cząstkowe, wyznaczone w trakcie powyższych rozważań, można również wykorzystać w metodzie zmiennych sprzężonych.

4.3.2. Metoda zmiennych sprzężonych

Istotą metody zmiennych sprzężonych jest uniknięcie czasochłonnych obliczeń $\partial \mathbf{x}/\partial \mathbf{b}$ przez rozwiązanie zagadnienia w układzie sprzężonym. W tym celu wprowadza się nową zmienną $\boldsymbol{\alpha}$ nazywaną zmienną sprzężoną. Mnożąc obie strony równania (4.29) przez $-\boldsymbol{\alpha}^T$ i całkując je w granicach od t_0 do t_k, otrzymuje się tożsamość:

$$\int_{t_0}^{t_k} \left[\left(\dot{\boldsymbol{\alpha}}^T + \boldsymbol{\alpha}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{b}} + \boldsymbol{\alpha}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{b}} \right] dt - \boldsymbol{\alpha}^T(t_k) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}(t_k)}{\partial \mathbf{b}} + \boldsymbol{\alpha}^T(t_0) \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{b}} = \mathbf{0} \qquad (4.46)$$

Zmienną sprzężoną wybiera się tak, aby współczynniki przy $\partial \mathbf{x}/\partial \mathbf{b}$ w (4.27) i (4.28) oraz (4.46) były sobie równe:

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \cdot \boldsymbol{\alpha} = \left[\frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \qquad (4.47)$$

oraz równe współczynniki przy $\partial \mathbf{x}(t_k)/\partial \mathbf{b}$

$$\boldsymbol{\alpha}(t_k) = -\mathbf{G}(t_k, \mathbf{x}(t_k), \mathbf{b}) \qquad (4.48)$$

Zastępując wyrażenia zawierające $\partial \mathbf{x}/\partial \mathbf{b}$ w (4.27) przez wyrażenia z (4.46), po przekształceniach otrzymuje się:

$$\frac{d\psi}{d\mathbf{b}} = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{b}} - \frac{\left[\frac{\partial g}{\partial t_k} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(t_k) \right] \frac{\partial T}{\partial \mathbf{b}}}{\dot{F}(t_k)} - \boldsymbol{\alpha}^T(t_0) \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{b}} - \int_{t_0}^{t_k} \boldsymbol{\alpha}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{b}} dt \qquad (4.49)$$

Metoda ta wymaga obliczenia jedynie m zmiennych $\boldsymbol{\alpha}$, gdzie m jest liczbą równań w modelu matematycznym. Wadą tej metody jest konieczność przechowywania wartości $\mathbf{x}$ z każdego kroku obliczeń numerycznych, które są niezbędne dla rozwiązania zagadnienia (4.47) przy warunku końcowym (4.48).

4.4. BADANIE WRAŻLIWOŚCI TRANSMITANCJI WIDMOWEJ

Jedną z podstawowych charakterystyk stosowanych do opisu liniowych układów dynamicznych jest transmitancja widmowa. Stosując transformację Laplace'a do równań modelu układu, po przekształceniach otrzymuje się:

$$\mathbf{H}(j\omega) = \left(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C}_V \right)^{-1} \qquad (4.50)$$

Różniczkowanie równania (4.50) względem zmiennej decyzyjnej b_i prowadzi do następującego wyrażenia:

$$\frac{\partial \mathbf{H}(j\omega)}{\partial b_i} = -\mathbf{H}(j\omega) \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b_i} - \omega^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b_i} + j\omega \frac{\partial \mathbf{C}_v}{\partial b_i} \right) \mathbf{H}(j\omega) \qquad (4.51)$$

Zależność opisującą transmitancję widmową układu wyznacza się również dokonując transformacji Laplace'a różniczkowych równań ruchu zapisanych we współrzędnych stanu (3.3). Zakładając zerowe warunki początkowe, dla układu liniowego i stacjonarnego, otrzymuje się zatem:

$$\mathbf{y}(s) = \left[\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \right] \mathbf{u}(s) \qquad (4.52)$$

Występujące w równaniu (4.52) wyrażenie:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \qquad (4.53)$$

określa transmitancję operatorową systemu, która opisuje zależność pomiędzy transformatą sygnału wejściowego $\mathbf{u}(s)$ oraz sygnału wyjściowego $\mathbf{y}(s)$. Z punktu widzenia analizy cech dynamicznych wygodniej jest przedstawić transmitancję jako funkcję częstotliwości. Podstawiając $s=j\omega$, otrzymuje się:

$$\mathbf{H}(j\omega) = \mathbf{C}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \qquad (4.54)$$

Transmitancja widmowa (4.54) opisuje odpowiedź układu na pobudzenie sinusoidalne. Zbadanie wrażliwości transmitancji wymaga zróżniczkowania równania (4.54) względem zmiennych decyzyjnych. Po uwzględnieniu reguł różniczkowania można napisać następujące wyrażenie:

$$\frac{\partial \mathbf{H}(j\omega)}{\partial b_i} = \mathbf{C}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial b_i} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial b_i} (j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \right] + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial b_i} \qquad (4.55)$$

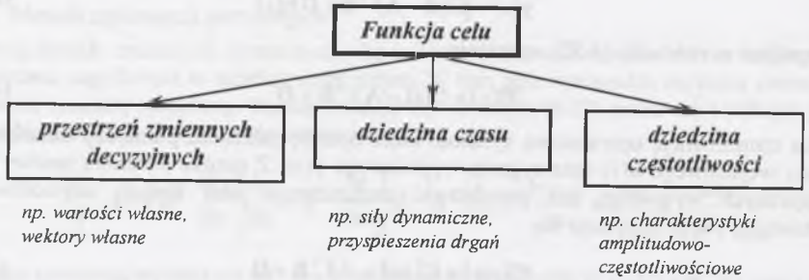
Ze względu na to, że argumentem funkcji (4.54) jest liczba urojona, poszukiwaną charakterystykę wykreśla się jako zależność $|\mathbf{H}(j\omega)|$. Równanie (4.55) przedstawia również funkcję zmiennej urojonej. Zatem poszukiwaną funkcję wrażliwości określa wyrażenie:

$$\frac{\partial}{\partial b_i} |\mathbf{H}(j\omega)| = \frac{1}{|\mathbf{H}(j\omega)|} \left[\mathrm{Re}(\mathbf{H}(j\omega)) \mathrm{Re}\left(\frac{\partial \mathbf{H}(j\omega)}{\partial b_i} \right) + \mathrm{Im}(\mathbf{H}(j\omega)) \mathrm{Im}\left(\frac{\partial \mathbf{H}(j\omega)}{\partial b_i} \right) \right] \qquad (4.56)$$

Najprostszym sposobem znalezienia poszukiwanych pochodnych jest zastosowanie metody różnic skończonych.

5. OPTYMALIZACJA WŁASNOŚCI DYNAMICZNYCH

Metody optymalizacji coraz częściej znajdują zastosowanie w procesie projektowo-konstrukcyjnym. Są szczególnie użyteczne w przypadkach, gdy konieczne jest zapewnienie wysokich parametrów eksploatacyjnych oraz wysokiej trwałości i niezawodności przy jednoczesnym spełnieniu ograniczeń wynikających z warunków technicznych i warunków bezpieczeństwa. Jednym z głównych czynników decydujących o trwałości i niezawodności układu są jego własności dynamiczne. Efektywny dobór tych własności może być wspomagany przez zastosowanie metod optymalizacji.



Rys. 5.1. Funkcje celu wykorzystywane do optymalizacji charakterystyk dynamicznych

Fig. 5.1. Objective functions applied for optimization of dynamic characteristics

Najczęściej stosowaną funkcją celu w optymalizacyjnych badaniach własności dynamicznych jest funkcja opisująca wartości własne układu λ_i (5.1)

$$\psi = \lambda_i(\mathbf{b}) \tag{5.1}$$

Poszukuje się takiego zbioru zmiennych decyzyjnych, który zapewni pożądane wartości częstości drgań swobodnych bądź wektorów własnych. Optymalizacja polega na „odstrajaniu" układu od częstotliwości rezonansowych, czyli zmianie wybranych częstości oraz zapewnieniu odpowiedniego „odstępu" pomiędzy nimi. Zagadnienie to zazwyczaj wiąże się z optymalizacją funkcji celu w dziedzinie częstotliwości.

Proces optymalizacji funkcji celu zależnych od częstotliwości dotyczy zagadnień kształtowania odpowiedzi dynamicznych układu. Wykorzystuje się w tym celu np. funkcje przejścia oraz krzywe rezonansowe. Optymalizacja w tym przypadku dotyczy minimalizacji całek funkcji odpowiedzi częstotliwościowych lub wartości amplitud, odpowiadających wybranym częstościom. Przykładowe zadanie optymalizacji funkcji celu, opisującej współczynnik wzmocnienia amplitud dla wybranego zakresu częstotliwości, ma następującą postać:

$$Min\,\psi = \mu_{\max}(\mathbf{b},\omega) \tag{5.2}$$

gdzie: μ - obliczona wartość współczynnika wzmocnienia amplitudy.

Proces optymalizacji prowadzić można również dla funkcji celu opisanych w dziedzinie czasu. W tym przypadku występują trudności związane z koniecznością analizowania funkcji celu zmiennej w czasie. Wymaga to numerycznego rozwiązywania różniczkowych równań ruchu układu. Tak sformułowane zadanie umożliwia jednak uwzględnienie w obliczeniach zjawisk rozpraszania energii, stanu obciążenia zewnętrznego oraz wpływu sprzężenia pomiędzy napędem elektrycznym i mechanizmem. Metoda taka może być stosowana przy

minimalizacji amplitud drgań elektromechanicznych układów napędowych w stanach nieustalonych (rozruch, nagła zmiana obciążenia), umożliwiając zapewnienie minimalnego czasu osiągnięcia stanu ustalonego. Cel badań może być zrealizowany przez minimalizację maksymalnych wartości chwilowych przebiegów przyśpieszeń lub oddziaływań dynamicznych (5.3) w parach kinematycznych, np.:

$$Min\,\psi = P_{\max}(\mathbf{b},t) \tag{5.3}$$

gdzie: P - obliczona wartość siły dynamicznej w wybranej parze kinematycznej układu.

Omawiane zadania optymalizacji (5.2) oraz (5.3), opisane zarówno w dziedzinie czasu, jak i częstotliwości, są zadaniami typu *MinMax*, w których będziemy minimalizować wartości maksymalne funkcji celu. Do poszukiwania optymalnych parametrów dynamicznych układów zastosowano metody sekwencyjnego programowania liniowego oraz sekwencyjnego programowania kwadratowego. Rozważane zadania optymalizacji można zatem sformułować w postaci:

$$MinMax\,\psi(\mathbf{b}) \tag{5.4}$$

Rozpoczynając obliczenia, nie wiadomo, w którym kroku obliczeń pojawią się wartości maksymalne. W każdej iteracji należy zatem najpierw znaleźć wartość maksymalną, a następnie optymalne wartości zmiennych decyzyjnych.

5.1. METODY PROGRAMOWANIA MATEMATYCZNEGO

Wyniki zastosowań metod optymalizacyjnych do rozwiązywania wyżej opisanych zagadnień wskazują na wysoką efektywność metod sekwencyjnego programowania kwadratowego [1,11,99] i sekwencyjnego programowania liniowego z ruchomymi ograniczeniami [47,95,116]. Metody i sposób formułowania zadania optymalizacji omówione zostaną pokrótce w następnych podrozdziałach.

5.1.1. Metoda sekwencyjnego programowania liniowego

Jednym ze sposobów rozwiązania zadania optymalizacji typu *MinMax* jest przekształcenie go w zagadnienie typu *Min*. Zmienną ψ_{max} traktuje się wtedy jako dodatkową niewiadomą [116] poddaną dodatkowym ograniczeniom. Najważniejsze ograniczenie polega na tym, że wartość funkcji celu w każdym kroku obliczeń nie może przekraczać ψ_{max}. Jednocześnie dla bardzo małego przyrostu parametru można założyć liniowy przyrost funkcji celu w otoczeniu **b**. W ten sposób zadanie optymalizacji zostanie zamienione w sekwencję zadań optymalizacji liniowej

$$\mathbf{b}^{(i+1)} = \mathbf{b}^{(i)} + \Delta\mathbf{b}^{(i)} \tag{5.5}$$

gdzie: $\mathbf{b}^{(i)}$ - wektor parametrów po i sekwencjach optymalizacji, $\Delta\mathbf{b}^{(i)}$ - zmiana **b** w każdej sekwencji.

Linearyzując funkcję celu za pomocą gradientu, zadanie optymalizacji (5.4) można zapisać w postaci:

$$\begin{gathered} \operatorname{Min} \psi_{\max} \\ \psi_j + \nabla\psi_j \Delta\mathbf{b} - \psi_{\max} \le 0 \\ j = 1..k \end{gathered} \tag{5.6}$$

gdzie: k - liczba analizowanych wartości maksymalnych funkcji celu, ψ_j - wartość funkcji celu

dla *j-tego* maksimum, $\nabla\psi_j$ - gradient ψ_j względem zmiennych decyzyjnych, $\Delta\mathbf{b}$ - przyrost $\mathbf{b}$ ograniczony przez:

$$0 \geq \Delta\mathbf{b}_{min} \leq \Delta\mathbf{b} \leq \Delta\mathbf{b}_{max} \geq 0 \tag{5.7}$$

Aby uniknąć ujemnych wartości $\Delta\mathbf{b}$, wprowadza się nieujemną zmienną $\Delta\mathbf{b}^+$, zdefiniowaną w sposób następujący:

$$\Delta\mathbf{b}^+ = \Delta\mathbf{b} - \Delta\mathbf{b}_{min} \tag{5.8}$$

Wstawiając (5.8) do (5.7) i (5.6), otrzymano wyrażenia określające ograniczenia:

$$-\nabla\psi_j \Delta\mathbf{b}^+ \geq \psi_j + \nabla\psi_j \Delta\mathbf{b}_{min} - \psi_{max} \tag{5.9}$$

$$\Delta\mathbf{b}^+ \leq \Delta\mathbf{b}_{max} - \Delta\mathbf{b}_{min} \tag{5.10}$$

Tak sformułowane zadanie optymalizacji liniowej można rozwiązać za pomocą metody *SIMPLEX* [117].

5.1.2. Metoda sekwencyjnego programowania kwadratowego

W metodzie sekwencyjnego programowania kwadratowego funkcję celu przybliża się funkcją kwadratową, wykorzystując jej gradient oraz Hesjan. Zadanie optymalizacji można zapisać następująco:

$$\text{Min}\ \frac{1}{2}\mathbf{d}^T\mathbf{H}_k\mathbf{d} + \nabla\psi(\mathbf{b}_k)^T\mathbf{d} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned} &\nabla\mathbf{g}_i(\mathbf{b}_k)^T \cdot \mathbf{d} + \mathbf{g}_i(\mathbf{b}_k) = 0 \\ &i=1,\ldots m_e \end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned} &\nabla\mathbf{g}_i(\mathbf{b}_k)^T \cdot \mathbf{d} + \mathbf{g}_i(\mathbf{b}_k) \leq 0 \\ &i=m_e+1,\ldots m \end{aligned}$$

gdzie: $\mathbf{g}_i$ - funkcja ograniczeń, $\mathbf{H}_k$ - Hesjan funkcji celu, $\mathbf{d}$ - kierunek poszukiwań.

Ze względu na trudności wyznaczania Hesjanu obecnie stosuje się metody zmiennej metryki, w których macierz ta (lub macierz do niej odwrotna) przybliżana jest w kolejnych krokach iteracji. Do rozwiązywania omawianych zagadnień stosowano algorytm BFGS, który cechuje się dobrą zbieżnością i efektywnością numeryczną [117].

5.2. ALGORYTMY GENETYCZNE

W ostatnim okresie można zaobserwować szybki rozwój metod sztucznej inteligencji i ich zastosowań w procesie optymalizacji. Spośród nich na szczególną uwagę zasługują algorytmy genetyczne i ewolucyjne. Głównymi zaletami tych metod, wskazywanymi przez użytkowników, są:

- prostota zastosowania,
- możliwość prowadzenia optymalizacji przy znajomości jedynie wartości funkcji celu, co pozwala uniknąć złożonej analizy wrażliwości,
- wysokie prawdopodobieństwo osiągnięcia optimum globalnego,
- prosta postać funkcji celu, gdyż nie musi mieć ciągłych pochodnych,
- prostota łączenia zadań optymalizacji ciągłej i dyskretnej.

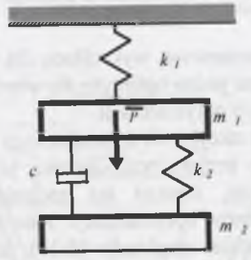
Spośród wad takiego podejścia wymienia się najczęściej:

- brak matematycznego dowodu, że osiągnięte rozwiązanie jest rozwiązaniem optymalnym,
- długi czas obliczeń,
- niemożność dokładnego wyznaczenia wartości optymalnej.

Poszczególne algorytmy różnią się między sobą sposobem reprezentacji zmiennych, stosowanymi operatorami genetycznymi oraz sposobem przeprowadzania operacji genetycznych. Aby poprawić skuteczność i dokładność algorytmów genetycznych, wprowadza się ich hybrydyzację poprzez łączenie ich z algorytmami gradientowymi. Konieczne jest wtedy przeprowadzenie analizy wrażliwości i wyznaczenie pochodnych funkcji celu względem zmiennych decyzyjnych.

5.3. PORÓWNANIE PRZYDATNOŚCI METOD OPTYMALIZACJI

Badania porównawcze przeprowadzono na przykładzie minimalizacji maksymalnych amplitud krzywej rezonansowej modelu układu o dwóch stopniach swobody. Wybrano prosty układ drgający o jednym stopniu swobody z dołączonym dynamicznym tłumikiem drgań. Schemat badanego układu przedstawiono na rysunku 5.2. Zadanie optymalizacji dotyczyło doboru parametrów określających bezwładność, sztywność i tłumienie dynamicznego tłumika drgań.



Rys. 5.2. Układ drgający z dynamicznym tłumikiem drgań wzbudzany siłą harmoniczną $P=P_o\sin\omega t$

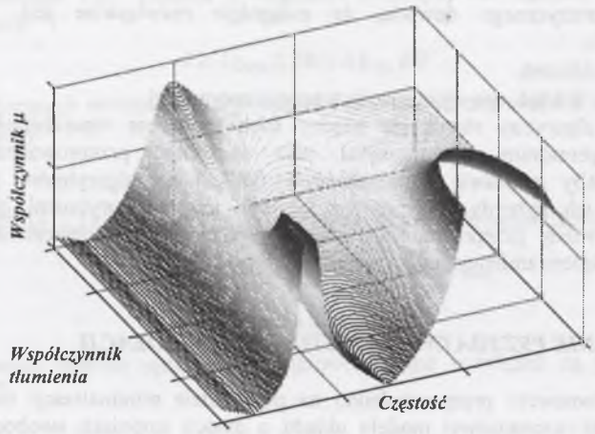
Fig. 5.2. Vibrating system with a dynamic vibration damper excited by a harmonic function $P=P_o\sin\omega t$

Współczynnik wzmocnienia amplitudy pierwszej masy określa zależność:

$$\psi(b,\omega) = \mu_1 = \frac{A}{\frac{P_0}{k_1}} = \sqrt{\frac{(2a_1d_1)^2 + \left(a_1^2 - d_2^2\right)^2}{(2a_1d_1)^2\left(a_1^2 - 1 + \beta\, a_1^2\right)^2 + \left[\beta\, d^2{}_2 a_1^2 - \left(a_1^2 - 1\right)\left(a_1^2 - d_2^2\right)\right]^2}} \tag{5.13}$$

$$\omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1},\ \omega_2^2 = \frac{k_2}{m_2},\ \beta = \frac{m_2}{m_1},\ h_2 = \frac{c}{2m_2},\ a_1 = \frac{\nu}{\omega_1},\quad a_2 = \frac{\nu}{\omega_2},\ d_1 = \frac{h_2}{\omega_1},\ d_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

gdzie: A - amplituda drgań ciała pierwszego, ν - częstość wymuszenia.



Rys. 5.3. Charakterystyki rezonansowe układu z dynamicznym tłumikiem drgań w funkcji wartości współczynnika tłumienia

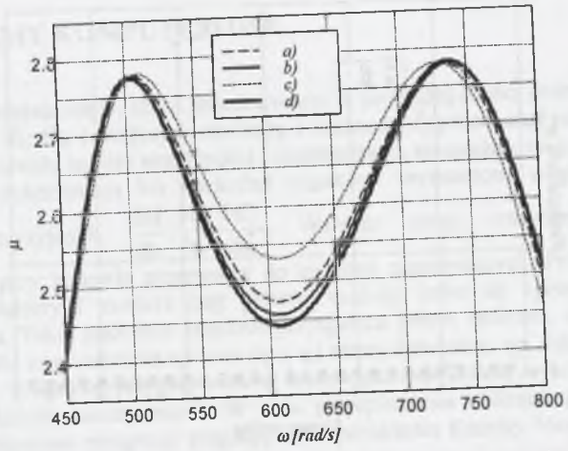
Fig. 5.3. Resonance characteristic of a system with a dynamic vibration damper versus damping coefficient

Analizując charakterystyki rezonansowe, wykreślone dla różnych wartości współczynnika tłumienia (rys. 5.3), można wskazać jedno optimum dla obydwu pików, zatem zagadnienie to nadaje się do rozwiązania metodami optymalizacji.

Zagadnienie doboru cech konstrukcyjnych dynamicznego tłumika drgań jest dobrze znane i opisane w literaturze. Zarówno krzywą rezonansową, jak i funkcje wrażliwości można wyznaczyć w sposób analityczny, dlatego też zadanie to posłużyło do testowania efektywności omawianych algorytmów optymalizacji. Jako funkcję celu przyjęto największą wartość współczynnika wzmocnienia amplitudy (5.13) przy ograniczeniu, że w każdej sekwencji optymalizacji pozostałe wartości maksymalne nie będą od niej większe. Ponadto nałożono ograniczenia na wartości zmiennych decyzyjnych. Zagadnienie kształtowania charakterystyki rezonansowej zostanie szczegółowo omówione w rozdziale 7.2.6.

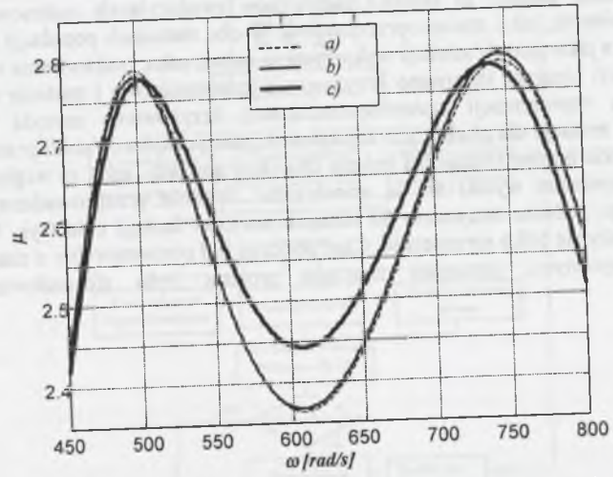
Porównanie rezultatów obliczeń metodami sekwencyjnymi z rozwiązaniem ścisłym wskazuje na dużą dokładność wyników otrzymanych w procesie optymalizacji. Niewątpliwą zaletą metody sekwencyjnego programowania liniowego jest prostota algorytmu. Wyniki uzyskane metodą sekwencyjnego programowania kwadratowego są natomiast dokładniejsze (rys. 5.4). Wiąże się to z ogólną cechą algorytmów newtonowskich i quasi-newtonowskich, które wykazują się lepszą zbieżnością w pobliżu optimum niż algorytmy gradientowe.

Przydatność algorytmów ewolucyjnych badano wykorzystując takie samo zadanie testowe. Zagadnienie sformułowano jako minimalizację największej wartości współczynnika wzmocnienia amplitudy (5.13). Jedyne ograniczenia dotyczyły wartości zmiennych decyzyjnych. Zapisana w ten sposób funkcja celu nie ma ciągłych pochodnych w pobliżu optimum. Występują wtedy dwie zbliżone wartości maksymalne mające różne pochodne, a wybierana jest ta wartość, która w danej sekwencji jest większa. Zastosowanie takiej funkcji celu dla metod programowania matematycznego powoduje zatrzymanie obliczeń przed osiągnięciem optimum.



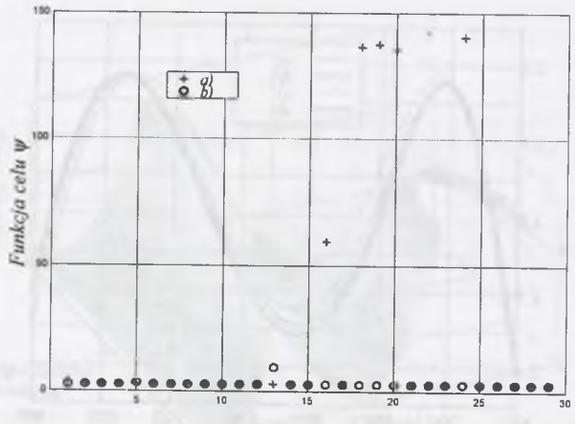
Rys. 5.4. Wyniki optymalizacji charakterystyki rezonansowej za pomocą metod: a) sekwencyjnego programowania liniowego, b) sekwencyjnego programowania kwadratowego, c) algorytmu genetycznego oraz d) rozwiązanie analityczne

Fig. 5.4. Results of optimization of a resonance characteristic by using: a) sequential linear programming method, b) sequential quadratic programming method, c) genetic algorithm and d) analytical solution



Rys. 5.5. Wyniki optymalizacji krzywej rezonansowej za pomocą algorytmów ewolucyjnych z zastosowaniem: a) reprezentacji binarnej, b) zmiennoprzecinkowej oraz c) rozwiązanie analityczne

Fig. 5.5. Results of optimization of a resonance curve by using evolutionary algorithms with: a) binary and b) real value representation and c) analytical solution



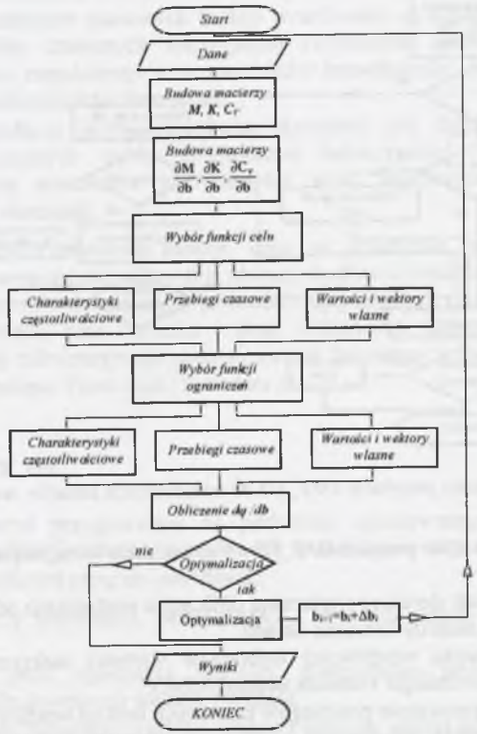
Rys. 5.6. Wyniki 30 prób optymalizacji krzywej rezonansowej za pomocą algorytmów ewolucyjnych otrzymane dla tych samych parametrów metody i zadania: a) reprezentacja binarna, b) zmiennoprzecinkowa

Fig. 5.6. Results of 30 trials of optimization of a resonance curve by using evolutionary algorithms obtained for the same parameters of the method and the task: a) binary and b) real value representation

Do rozwiązania zadania za pomocą algorytmów ewolucyjnych zastosowano zarówno reprezentację binarną, jak i zmiennoprzecinkową. W obu metodach populacja składała się z 25 osobników, a jako metodę selekcji wykorzystano uniwersalne próbkowanie stochastyczne. Dla reprezentacji binarnej stosowano krzyżowanie jednopunktowe i mutację równomierną, natomiast przy reprezentacji zmiennoprzecinkowej krzyżowanie metodą rekombinacji dyskretnej oraz mutację dla płodzących algorytmów genetycznych. Wyniki przedstawiono na rysunku 5.5. Takie porównywanie ma jedynie charakter umowny, gdyż ze względu na sposób poszukiwania optimum wyniki nie są powtarzalne. Spośród przeprowadzonych 30 prób rozwiązania tego zadania otrzymano 30 różnych wartości funkcji celu (rys. 5.6), które w większości różniły się tylko nieznacznie. Czas obliczeń był porównywalny z czasem obliczeń metodami klasycznymi, natomiast znacznie prostsze było sformułowanie zadania optymalizacji.

6. PROGRAMY KOMPUTEROWE

Algorytmy modelowania, które przedstawiono w pierwszej części pracy, opierają się na macierzach **M**, **K**, $\mathbf{C}_v$, opisujących strukturę i własności fizyczne analizowanych układów. Prezentowane metody analizy wrażliwości i optymalizacji, niezależnie od postaci funkcji celu i ograniczeń, wykorzystują ich pochodne cząstkowe wyznaczone względem wybranych zmiennych decyzyjnych $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{b}}, \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{b}}, \frac{\partial \mathbf{C}_v}{\partial \mathbf{b}}$. Wspólne cechy omawianych algorytmów wykorzystano przy budowie programów do obliczeń numerycznych. Program główny ma charakter modułowy i zawiera trzy główne moduły, które są opisane w następnych podrozdziałach. Takie podejście znacznie przyśpiesza proces obliczeń, szczególnie wtedy, gdy funkcje celu i ograniczenia opisane są w tej samej dziedzinie, np. dziedzinie czasu bądź częstotliwości. Programy przygotowano w środowisku MATLAB, wykorzystując wydajne procedury obliczeń numerycznych. W celu przyśpieszenia obliczeń programy poddano kompilacji. Omawiane programy znajdują się w posiadaniu Katedry Mechaniki Stosowanej Politechniki Śląskiej.

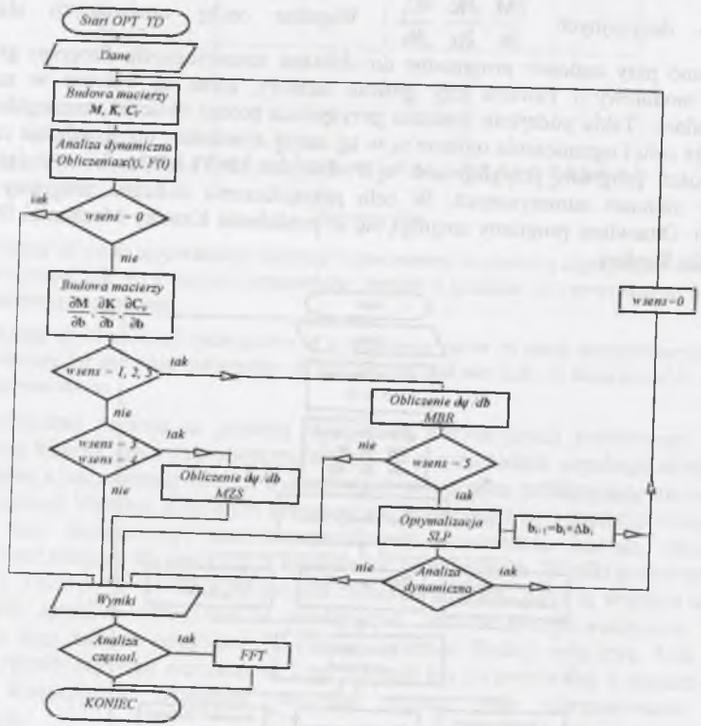


Rys. 6.1. Schemat blokowy algorytmu optymalizacji charakterystyk dynamicznych

Fig. 6.1. Block diagram of the algorithm of a dynamic characteristic optimization

6.1. PROGRAM OPT_TD

Przedstawiony algorytm analizy wrażliwości elektromechanicznych układów napędowych metodami bezpośredniego różniczkowania i zmiennych sprzężonych oraz optymalizacji metodą sekwencyjnego programowania liniowego zaprogramowano na komputer klasy PC. Schemat blokowy programu przedstawiono na rysunku 6.2.



Rys. 6.2. Schemat blokowy programu OPT_TD do optymalizacji układów napędowych w dziedzinie czasu

Fig. 6.2. Block diagram of the program OPT_FD for optimization in the frequency domain

gdzie: wsens - parametr sterujący wariantami obliczeń o wartościach odpowiednio:
wsens = 0 - analiza dynamiczna układu,
wsens = 1 - analiza wrażliwości wybranych wartości maksymalnych funkcji celu metodą bezpośredniego różniczkowania (MBR),
wsens = 2 - wyznaczanie przebiegów czasowych funkcji wrażliwości (MBR),
wsens = 3 - analiza wrażliwości wybranych wartości maksymalnych funkcji celu metodą zmiennych sprzężonych (MZS),
wsens = 4 - wyznaczanie przebiegów czasowych funkcji wrażliwości (MZS),
wsens = 5 - optymalizacja układu.

W zależności od zadanego wariantu obliczeń program umożliwia:

- tworzenie macierzy sztywności, bezwładności i tłumienia części mechanicznej układu napędowego,
- generowanie równań modelu indukcyjnego silnika napędowego w układzie współrzędnych *(1,2)*, bądź *(x,y)*,
- symulację stanu obciążenia wału głównego maszyny,
- wyznaczenie oddziaływań dynamicznych w parach kinematycznych poprzez rozwiązanie układu równań różniczkowych opisujących model fizyczny układu,
- przedstawienie przebiegów czasowych w dziedzinie częstotliwości za pomocą szybkiej transformaty Fouriera (FFT),
- wybór funkcji celu opisującej siły dynamiczne w dowolnie wybranej parze kinematycznej,
- wybór funkcji ograniczeń na wartości maksymalne oddziaływań dynamicznych w dowolnej parze kinematycznej,
- analizę wrażliwości zadanej liczby maksimów dowolnej siły dynamicznej ze względu na dowolny zbiór zmiennych decyzyjnych (wybranych spośród indukcyjności i rezystancji silnika napędowego oraz momentów bezwładności, mas, współczynników sztywności i współczynników tłumienia części mechanicznej),
- wyznaczanie przebiegów czasowych funkcji wrażliwości sił dynamicznych ze względu na dowolny zbiór zmiennych decyzyjnych (wybranych spośród indukcyjności i rezystancji silnika napędowego oraz momentów bezwładności, mas, współczynników sztywności i współczynników tłumienia),
- minimalizację zadanej liczby maksimów dowolnej siły dynamicznej dla zbioru zmiennych decyzyjnych wybranych spośród indukcyjności i rezystancji silnika napędowego oraz momentów bezwładności, mas, współczynników sztywności i współczynników tłumienia.

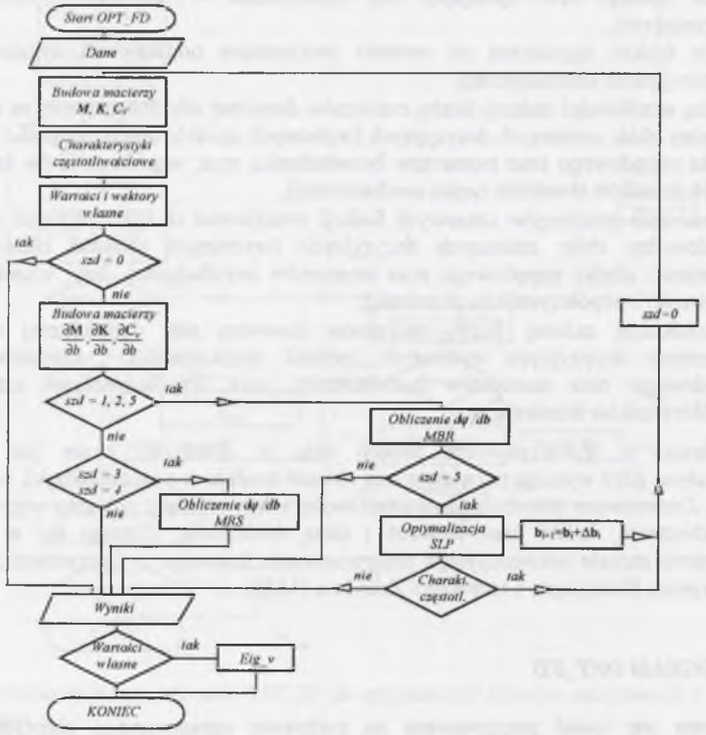
Optymalizacja z wykorzystaniem funkcji celu w dziedzinie czasu jest procesem długotrwałym, gdyż wymaga rozwiązywania równań modelu w poszczególnych sekwencjach obliczeń. Zastosowane metody analizy wrażliwości i optymalizacji powinny więc zapewniać szybką zbieżność, krótki czas obliczeń i dużą dokładność. Dlatego też w programie wykorzystano metodę sekwencyjnego programowania liniowego z algorytmem SIMPLEX, podanym przez Kuenziego, Tzschacha i Zehndera [117].

6.2. PROGRAM OPT_FD

Program ten został przygotowany na podstawie opracowanego algorytmu analizy wrażliwości i optymalizacji układów napędowych w dziedzinie częstości. W zależności od zadanego wariantu obliczeń program umożliwia:

- tworzenie macierzy sztywności, bezwładności i tłumienia części mechanicznej układu napędowego,
- wybór funkcji celu opisującej wartości maksymalne amplitud charakterystyk rezonansowych dla dowolnego wejścia i wyjścia,
- wybór funkcji celu opisującej wartości własne i wektory własne układu bez tłumienia i z tłumieniem,
- wybór funkcji ograniczających maksymalne wartości amplitud charakterystyk rezonansowych dla dowolnego wejścia i wyjścia,

- analizę wrażliwości zadanej liczby maksimów charakterystyk rezonansowych ze względu na dowolny zbiór zmiennych decyzyjnych wybranych spośród momentów bezwładności, mas, współczynników sztywności i współczynników tłumienia części mechanicznej,
- wyznaczanie przebiegów częstotliwościowych funkcji wrażliwości dowolnej charakterystyki rezonansowej ze względu na dowolny zbiór zmiennych decyzyjnych wybranych spośród momentów bezwładności, mas, współczynników sztywności i współczynników tłumienia,
- optymalizację dowolnego zbioru zmiennych decyzyjnych (wybranych spośród momentów bezwładności, mas, współczynników sztywności i współczynników tłumienia) dla zadanej funkcji celu.



Rys. 6.3. Schemat blokowy programu OPT_FD do optymalizacji w dziedzinie częstości

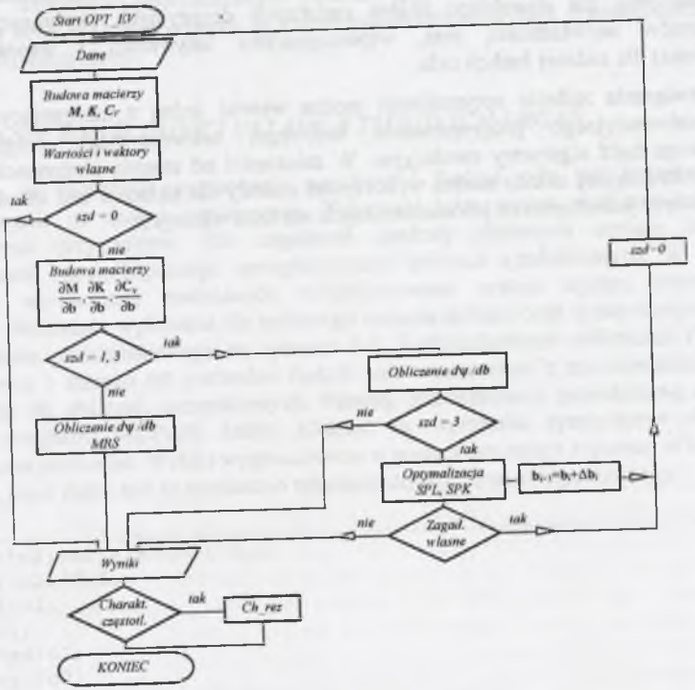
Fig. 6.3. Block diagram of the program OPT_FD for optimization in the frequency domain

gdzie: szd - parametr sterujący wariantami obliczeń o wartościach odpowiednio:
szd = 0 - analiza dynamiczna układu,
szd = 1 - analiza wrażliwości wybranych maksimów funkcji celu metodą bezpośredniego różniczkowania (MBR),
szd = 2 - wyznaczanie przebiegów częstotliwościowych funkcji wrażliwości (MBR),
szd = 3 - analiza wrażliwości wybranych maksimów funkcji celu metodą różnic skończonych (MRS),
szd = 4 - wyznaczanie przebiegów częstotliwościowych funkcji wrażliwości (MRS),
szd = 5 - optymalizacja funkcji celu.

Do rozwiązania zadania optymalizacji zastosowano metody sekwencyjnego programowania liniowego, sekwencyjnego programowania kwadratowego oraz algorytmy ewolucyjne.

6.3. PROGRAM OPT_EV

Algorytmy analizy wrażliwości i optymalizacji wartości własnych oraz wektorów własnych posłużyły do przygotowania programu, którego schemat blokowy przedstawiono na rysunku 6.4.



Rys. 6.4. Schemat blokowy programu OPT_EV do optymalizacji wartości własnych

Fig. 6.4. Block diagram of the program OPT_EV for eigenvalues optimization

gdzie: szd - parametr sterujący wariantami obliczeń o wartościach odpowiednio:
szd = 0 - analiza modalna układu,
szd = 1 - analiza wrażliwości zadanych wartości własnych i wektorów własnych wybraną metodą,
szd = 2 - analiza wrażliwości zadanych wartości własnych i wektorów własnych metodą różnic skończonych (MRS),
szd = 3 - optymalizacja funkcji celu.

W zależności od zadanego wariantu obliczeń program umożliwia:

- tworzenie macierzy sztywności, bezwładności i tłumienia części mechanicznej układu napędowego,
- wybór funkcji celu opisującej wartości własne i wektory własne układów z tłumieniem i wartościami wielokrotnymi,
- wybór funkcji ograniczeń na wybrane wartości własne oraz odstęp pomiędzy wybranymi wartościami własnymi,
- analizę wrażliwości zadanej liczby wartości własnych i wektorów własnych ze względu na dowolny zbiór zmiennych decyzyjnych wybranych spośród momentów bezwładności, mas, współczynników sztywności i współczynników tłumienia części mechanicznej,
- optymalizację dla dowolnego zbioru zmiennych decyzyjnych (wybranych spośród momentów bezwładności, mas, współczynników sztywności i współczynników tłumienia) dla zadanej funkcji celu.

Do rozwiązania zadania optymalizacji można wybrać jedną z następujących metod: metodę sekwencyjnego programowania liniowego, sekwencyjnego programowania kwadratowego bądź algorytmy ewolucyjne. W zależności od stopnia złożoności zadania i postaci konstrukcyjnej układu można wykorzystać metody dla układów bez tłumienia lub z tłumieniem oraz jednokrotnych lub wielokrotnych wartości własnych.

7. BADANIA SYMULACYJNE DYNAMIKI UKŁADÓW NAPĘDOWYCH

Przedstawione algorytmy analizy wrażliwości i optymalizacji opierają się na założeniu, że model matematyczny opisany jest układem równań różniczkowych zwyczajnych. Przyjęcie takiego założenia, w przypadku układów napędowych, wynika głównie z postaci konstrukcyjnej samego układu (występowania wyraźnych punktów skupienia masy w postaci kół zębatych, tarcz sprzęgieł itp.). Sposób dyskretyzacji zależał będzie od celu prowadzonych badań. W kolejnych podrozdziałach podano przykłady zastosowań prezentowanych programów obliczeń numerycznych do kształtowania charakterystyk dynamicznych układów napędowych dużej mocy.

7.1. BADANIE WRAŻLIWOŚCI UKŁADU Z TŁUMIKIEM DRGAŃ

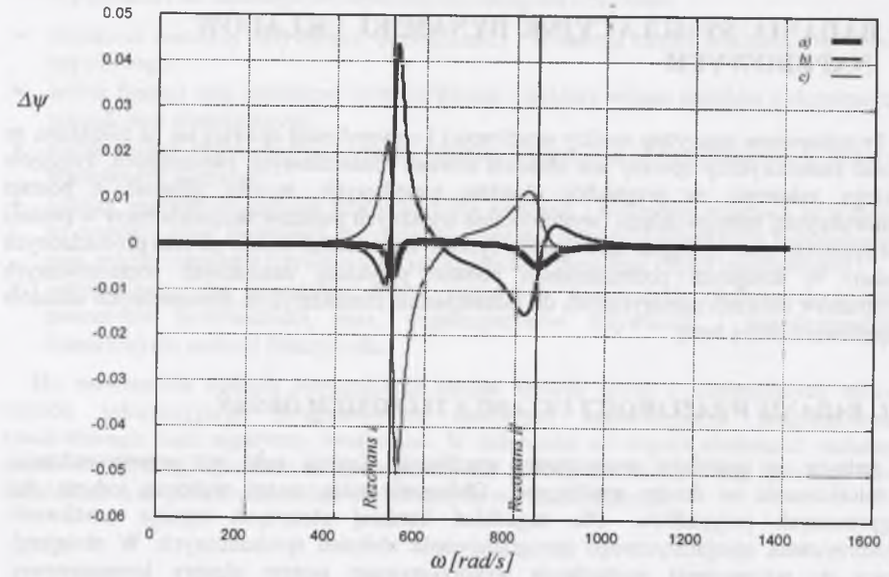
Jednym ze sposobów wyznaczenia wrażliwości funkcji celu jest przeprowadzenie różniczkowania na drodze analitycznej. Obliczenia takie można wykonać jedynie dla najprostszych przypadków. Dla zagadnień bardziej złożonych istnieje możliwość wykorzystania specjalistycznego oprogramowania obliczeń symbolicznych. W niniejszej pracy do wyznaczenia pochodnych wykorzystywano system algebry komputerowej MUPAD. Obliczenia wykonano dla testowego zadania doboru cech dynamicznych tłumika drgań układu przedstawionego na rysunku 5.2. Różniczkowanie zależności (5.13) jest pracochłonne i dlatego też pochodne funkcji celu wyznaczono z zastosowaniem pakietu programów do obliczeń symbolicznych. Poniżej przedstawiono przykładową sekwencję poleceń programu MUPAD, której efektem są wyrażenia symboliczne określające poszukiwane pochodne. Wyniki wygenerowano w postaci procedury zapisanej w formacie w języku C, która może być bezpośrednio włączona do programu komputerowego.

```
h:=c/(2*m2);o1:=(k1/m1)^0.5;
o2:=(k2/m2)^0.5;
o21:=o2/o1;
b:=m2/m1;
a1:=omega/o1;
a2:=omega/o2;

cc:=(2*h*a1/o1)^2*(a1*a1-1+b*a1*a1)^2+(b*(a1*o21)^2\
-(a1*a1-1)*(a1*a1-o21*o21))^2;wsp_mi:=(((2*h*a1/o1)^2+(a1*a1-
o21*o21)^2)/cc)^0.5;
m_po_c:=diff(wsp_mi,c);m_po_k:=diff(wsp_mi,k2);m_po_m:=diff(wsp_mi,m
2);
fprint(Unquoted,Text,"Wyn",generate::C(optimize(mi =\
wsp_mi)),generate::C(optimize(mc =\ m_po_c)),generate::C(optimize(mk
=m_po_k)),generate::C(optimize(mm = m_po_m)));
```

Rys. 7.1. Procedura wyznaczania pochodnych w systemie MUPAD

Fig. 7.1. Procedure of derivatives calculation in MUPAD system



Rys. 7.2. Przewidywany przebieg zmian wartości funkcji celu ze względu na przyrost wartości poszczególnych zmiennych decyzyjnych: a) współczynnika tłumienia c, b) współczynnika sztywności k_2, c) masy m_2

Fig. 7.2. Predicted change of values of the objective function with respect to change of particular design parameters: a) damping coefficient c, b) stiffness coefficient k_2, c) mass m_2

W pracy nie zamieszczono otrzymanych zależności, gdyż program obliczeń symbolicznych nie umożliwiał upraszczania wyrażeń i wygenerowane procedury są rozbudowane. Obliczenia przeprowadzono, przyjmując trzy zmienne decyzyjne (masa m_2, współczynnik sztywności k_2 oraz współczynnik tłumienia c). Otrzymane wyrażenia symboliczne, określające pochodne współczynnika wzmocnienia amplitudy, wykorzystano do analizy wpływu parametrów tłumika na przyrost wartości funkcji celu, a w dalszej kolejności - do ich optymalizacji. Na rysunku 7.2 przedstawiono przewidywane przebiegi zmian współczynnika przy zmianie każdego z parametrów o 0.001 jego wartości początkowej. Wyniki te otrzymano z wykorzystaniem liniowej aproksymacji opartej na gradientach. Analiza wyników wskazuje, że charakterystyka częstościowa cechuje się dużą wrażliwością na zmiany wartości współczynnika sztywności i masy tłumika w zakresie częstości pomiędzy *I* i *II* rezonansem. Zatem niedokładności oszacowania tych parametrów bądź też błędy wykonania tłumika mogą powodować zwiększenie amplitud drgań układu wymuszanego siłą o częstości w rozpatrywanym zakresie. Wpływ niedokładności wyznaczenia wartości parametrów tłumika na przebieg charakterystyki rezonansowej można zaobserwować na rysunku 5.4 (rozdział 5.3, str. 57). W wyniku zastosowania różnych algorytmów doboru tłumika otrzymano wartości poszczególnych parametrów różniące się nieznacznie pomiędzy sobą. Wyznaczone charakterystyki mają zbliżone wartości maksymalne, natomiast znacznie różnią się w rozpatrywanym zakresie pomiędzy *I* i *II* rezonansem.

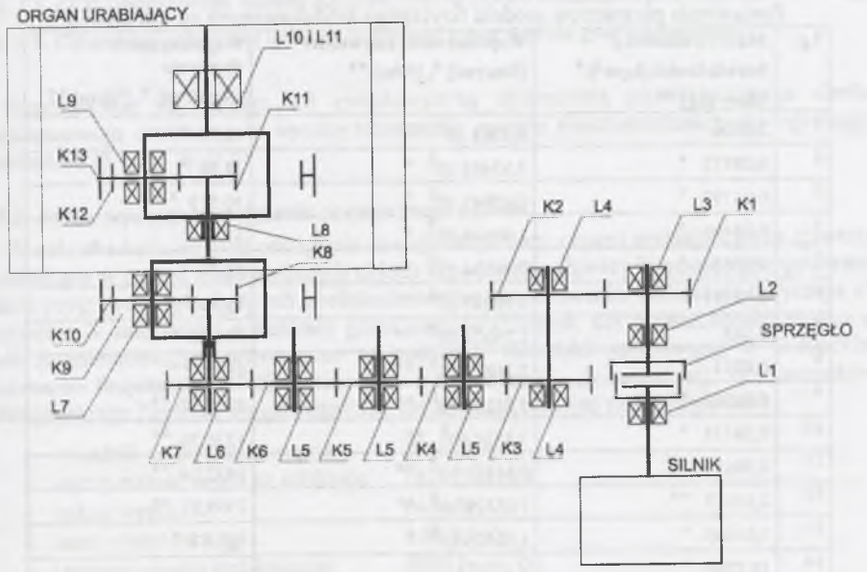
7.2. ANALIZA DYNAMIKI UKŁADU NAPĘDOWEGO KOMBAJNU WĘGLOWEGO

Przykładem zastosowania opracowanych metod modelowania, analizy wrażliwości i optymalizacji może być dobór cech dynamicznych układu napędowego głowicy kombajnu węglowego. Badania prowadzono na etapie projektowania i budowy prototypu. W kolejnych podrozdziałach omówione zostaną opracowane modele, sposoby symulacji obciążenia, badania wrażliwości i optymalizacja wybranych parametrów układu.

7.2.1. Analiza postaci konstrukcyjnej i model fizyczny układu

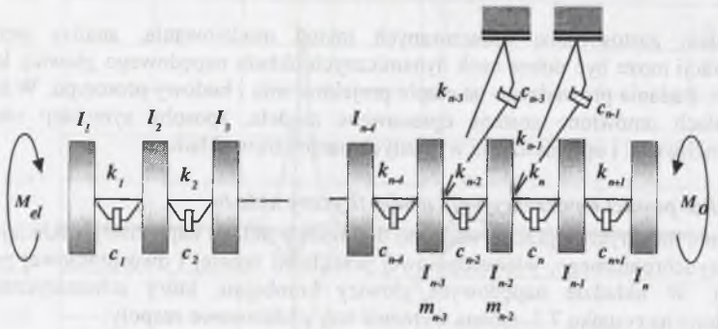
Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla modelu układu napędowego składającego się z silnika asynchronicznego, wielostopniowej przekładni zębatej i dwustopniowej przekładni planetarnej. W układzie napędowym głowicy kombajnu, który schematycznie został przedstawiony na rysunku 7.3, można wyróżnić trzy podstawowe zespoły:

- silnik elektryczny napędzający układ (silnik indukcyjny trójfazowy do maszyn górniczych typu SGR 250 L4),
- łańcuch kinematyczny przenoszący napęd składający się z kilku stopni przekładni zębatych oraz dwóch przekładni planetarnych o całkowitym przełożeniu pomiędzy wirnikiem silnika a organem urabiającym $u = 38{,}3$,
- organ urabiający o średnicy od *1150 mm* do *1500 mm*.



Rys. 7.3. Schemat kinematyczny układu napędowego głowicy kombajnu ścianowego

Fig. 7.3. Kinematic scheme of a shearer loader's head driving system



Rys. 7.4. Model fizyczny analizowanego układu napędowego z dwustopniową przekładnią planetarną

Fig. 7.4. Physical model of the analysed drive system with a two stage planetary gear

Analizę prowadzono, wykorzystując dyskretny model drgań skrętnych (rys. 7.4). W tabeli 7.1 zestawiono parametry modelu układu napędowego zredukowane na wał silnika, które określono na podstawie dokumentacji konstrukcyjnej.

Tabela 7.1

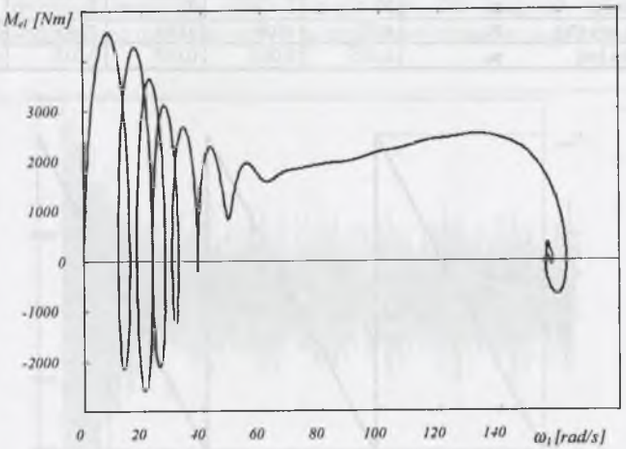
Zestawienie parametrów modelu fizycznego zredukowanych na wał silnika

Lp.	Masowe momenty bezwładności [kgm^2] * Masy [kg] **	Współczynniki sztywności [Nm/rad] *, [N/m] **	Współczynniki tłumienia [Nms/rad] *, [Ns/m] **
1	2,0204 *	$8{,}3203 \cdot 10^6$ *	42,76 *
2	0,09777 *	$7{,}57488 \cdot 10^6$ *	24,88 *
3	0,21197 *	$7{,}15945 \cdot 10^6$ *	30,513 *
4	0,08495 *	$1{,}00846 \cdot 10^7$ *	31,11 *
5	0,06624 *	$7{,}10034 \cdot 10^6$ *	23,57 *
6	0,07231 *	$4{,}20241 \cdot 10^6$ *	15,52 *
7	0,165 *	$1{,}75024 \cdot 10^8$ **	575,26 **
8	0,0214 *	$2{,}16817 \cdot 10^8$ **	683,6 **
9	0,86007 **	$2{,}21295 \cdot 10^8$ **	1327,77 **
10	0,24737 *	$3{,}8574 \cdot 10^8$ **	1336,56 **
11	0,08613 *	$3{,}81883 \cdot 10^8$ **	1432,69 **
12	2,19317 **	$7{,}05828 \cdot 10^8$ **	2399,82 **
13	1,64849 *	$1{,}52805 \cdot 10^8$ *	737,87 *
14	18,2799 *	0	0

7.2.2. Określenie elektromagnetycznego momentu napędowego asynchronicznego silnika dwuklatkowego

Układ napędzany jest silnikiem asynchronicznym dwuklatkowym o mocy *250 kW*. Ze względu na złożoność zjawisk dynamicznych oraz wzajemne sprzężenia występujące w tego typu układach zdecydowano się zamodelować napęd jako układ elektromechaniczny z wzajemnym sprzężeniem pomiędzy częścią mechaniczna i elektryczną. Model silnika

napędowego opisano w układzie dwuosiowym *(1,2)*, wykorzystując schemat z dwoma obwodami zastępczymi w wirniku. Wyznaczono wartości zespolonych prądów, które posłużyły do określenia momentu elektromechanicznego, wchodzącego w skład macierzy sił uogólnionych działających na część mechaniczną napędu.



Rys. 7.5. Elektromagnetyczny moment napędowy silnika asynchronicznego z przekładnią mechaniczną

Fig. 7.5. Electromagnetic torque of the asynchronous motor with the gear transmission

Przedstawioną na rysunku 7.5 charakterystykę dynamiczną asynchronicznego silnika dwuklatkowego otrzymano w wyniku rozwiązania modelu elektromechanicznego opisanego równaniami (3.1), (3.7), (3.8).

7.2.3. Symulacja stanu obciążenia zewnętrznego układu

W celu zbadania wpływu obciążenia zewnętrznego noży organu urabiającego na zjawiska dynamiczne w parach kinematycznych układu napędowego głowicy kombajnu przygotowano pakiet programów symulujących obciążenie momentem skrawania. Obliczenia dotyczące sił skrawania w założonych warunkach górniczo-geologicznych, dla organu wyposażonego w noże promieniowe, przeprowadzono na podstawie metodyki opracowanej w Donieckim Instytucie Projektowania Kompleksowej Mechanizacji, dostosowanej do warunków Górnośląskiego Zagłębia Węglowego [59]. Do obliczeń przyjęto następujące dane:

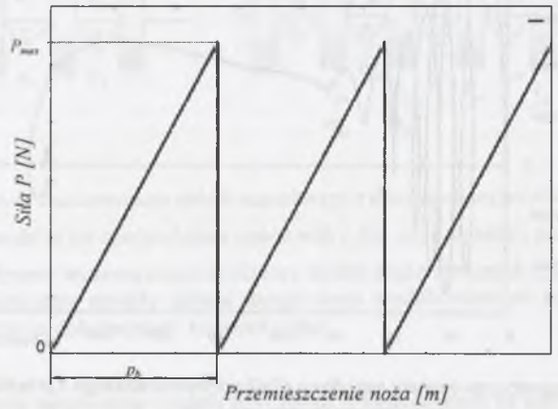
- wskaźnik skrawalności węgla 2300 [N/cm]
- wytrzymałość węgla na ściskanie 1820 [N/cm^2]
- rodzaj węgla zwięzły
- masa właściwa węgla 1,40 [t/m^3]
- średnica organu urabiającego 1000 [mm]
- rodzaj noży stożkowe
- liczba noży na płatach 24
- liczba noży na tarczy odcinającej 12

Noże podzielono na 5 grup ze względu na wartości sił skrawania i podziałkę. Parametry dla każdej z grup podano w tabeli 7.2. Przebieg siły dla każdego z noży pokazano na rysunku 7.6.

Tabela 7.2

Obciążenie poszczególnych grup noży organu urabiającego

Nr grupy		1	2	3	4	5
Liczba noży	n	20	2	2	2	10
Wartość siły [N]	P_{max}	4100	4100	3850	2700	2500
Podziałka [m]	p_b	0,055	0,055	0,055	0,035	0,024



Rys. 7.6. Charakterystyka obciążenia noża organu urabiającego w funkcji przemieszczenia

Fig. 7.6. Load characteristic of a cutting tool of a cutting unit versus displacement

Wartość momentu skrawania wyznaczana jest z następującej zależności:

$$M_{op} = \frac{d}{2} \cdot \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} P_{ij} \right) \tag{7.1}$$

gdzie: d - średnica organu urabiającego,
P_{ij} - aktualna wartość siły obciążającej nóż (rys. 7.6),
m - liczba grup noży,
n - liczba noży w każdej grupie.

7.2.4. Badanie wpływu postaci konstrukcyjnej organu urabiającego na dynamikę przekładni

Wykorzystując elektromechaniczny model drgań skrętnych układu napędowego głowicy kombajnu, przeprowadzono dwa warianty obliczeń numerycznych:

- rozruch układu bez obciążenia zewnętrznego, a następnie po czasie $t=0,4$ *s* obciążenie układu stałym momentem oporu skrawania $M_{op}=16000$ *Nm*,
- rozruch układu bez obciążenia zewnętrznego, po czasie $t=0,4$ *s* symulacja momentu oporu skrawania dla przypadku kontaktu organu połową obwodu z urabianą calizną.

Obliczenia numeryczne wykonano z wykorzystaniem programu OPT_TD, a wyniki zestawiono w postaci przebiegów czasowych i charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych na rysunkach 7.7÷7.18. Częstości drgań swobodnych układu zamieszczono w tabeli 7.3.

Rysunek 7.7 przedstawia przebieg momentu obciążenia organu urabiającego, symulowany zgodnie z zależnością (7.1). Założono najbardziej niekorzystny wariant obciążenia, polegający na tym, że w chwili początkowej wszystkie noże na połowie obwodu organu mają

kontakt z urabianą calizną. Po pierwszej fazie rozruchu, gdy moment obciążenia osiąga wartości dochodzące do *28000 Nm*, następuje ustabilizowanie się przebiegu. Średnia wartość momentu oporu w warunkach ustalonych wynosi około $M_{op}=16000$ *Nm*, co przy średniej prędkości kątowej organu $\omega=4,12$ *rad/s* daje średnią moc $N=66$ *kW*. Na rysunku 7.8 zilustrowano przebieg momentu silnika napędowego dla drugiego wariantu obliczeń. Obciążenie zewnętrzne ma niewielki wpływ na drganiowy charakter tego sygnału.

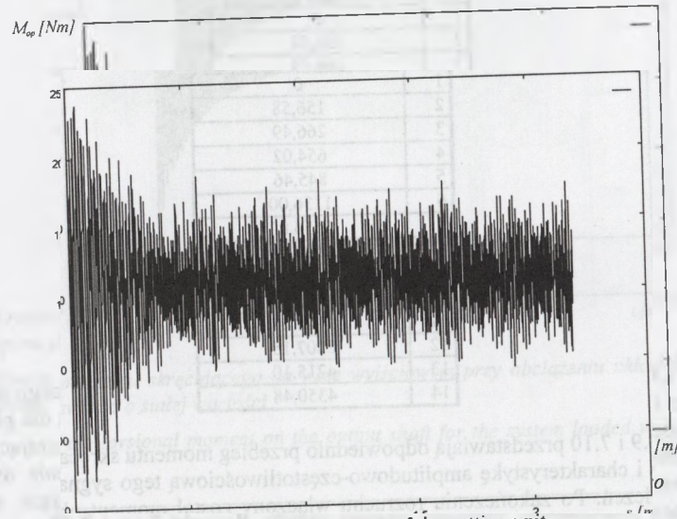
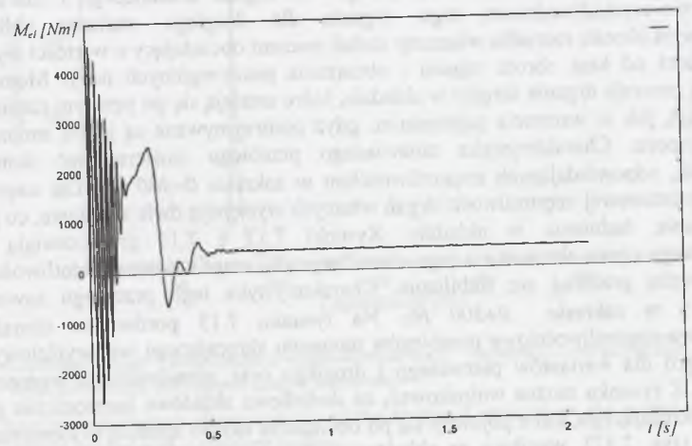


Fig. 7.7. Simulated load torque of the cutting unit



Rys. 7.8. Elektromagnetyczny moment silnika napędowego $M_{el}(t)$

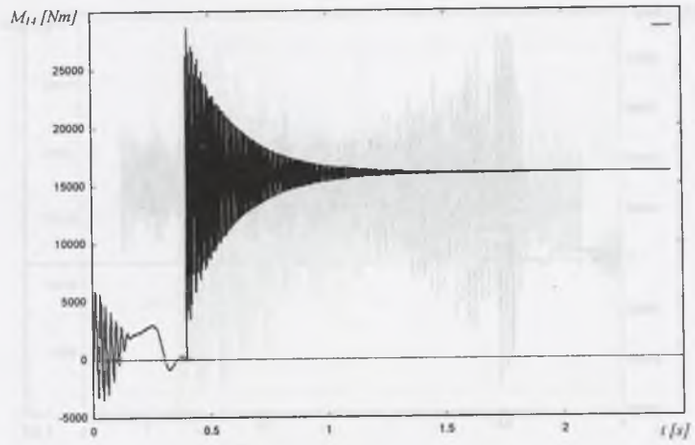
Fig. 7.8. Electromagnetic torque of a driving motor $M_{el}(t)$

Tabela 7.3

Częstotliwości drgań własnych układu

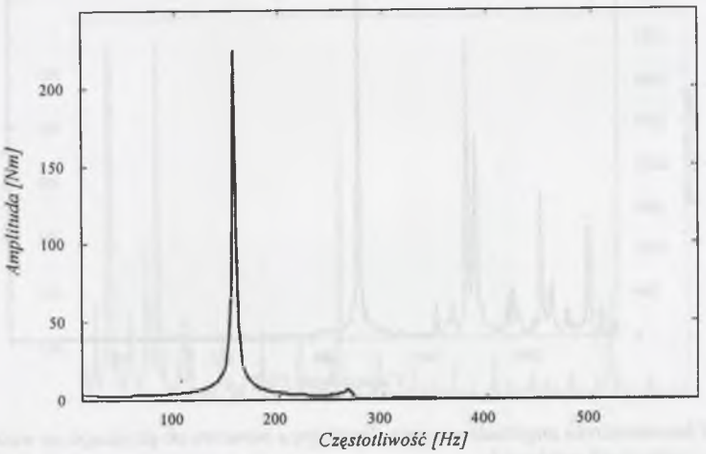
Lp.	Częstotliwości własne układu [Hz]
1	0
2	156,58
3	266,49
4	654,02
5	845,46
6	1136,00
7	1554,82
8	1588,40
9	1752,38
10	1780,82
11	2196,87
12	2507,15
13	4215,10
14	4350,48

Rysunki 7.9 i 7.10 przedstawiają odpowiednio przebieg momentu skręcającego wał organu urabiającego i charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową tego sygnału dla pierwszego wariantu obliczeń. Po zakończeniu rozruchu włączony został moment obciążający o stałej wartości, który powoduje drgania skrętne w układzie. W wyniku tłumienia drgania po pewnym czasie zanikają. Charakterystyka tego przebiegu ma dominującą składową, odpowiadającą podstawowej częstości własnej układu. Rysunki 7.11 i 7.12 przedstawiają odpowiednio przebieg momentu skręcającego wał organu urabiającego i charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową tego sygnału dla drugiego wariantu obliczeń. Po początkowym okresie rozruchu włączony został moment obciążający o wartości wyznaczanej w zależności od kąta obrotu organu i obciążenia poszczególnych noży. Moment oporu skrawania generuje drgania skrętne w układzie, które ustalają się po pewnym czasie. Drgania nie zanikają, jak w wariancie poprzednim, gdyż podtrzymywane są przez zmieniający się moment oporu. Charakterystyka omawianego przebiegu zawiera pięć dominujących składowych, odpowiadających częstotliwościom w zakresie *0÷300 Hz*. Dla częstotliwości bliskich podstawowej częstotliwości drgań własnych występują dwie składowe, co powoduje występowanie dudnienia w układzie. Rysunki 7.13 i 7.14 przedstawiają przebieg symulowanego oporu skrawania i jego charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową. Po fazie rozruchu przebieg się stabilizuje. Charakterystyka tego przebiegu zawiera wiele składowych w zakresie *0÷300 Hz*. Na rysunku 7.15 porównano charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe przebiegów momentu skręcającego wał wyjściowy (organu urabiającego) dla wariantów pierwszego i drugiego oraz symulowanego momentu oporu skrawania. Z rysunku można wnioskować, że dodatkowe składowe harmoniczne przebiegu momentu skręcającego, które pojawiły się po obciążeniu układu zmiennym momentem oporu skrawania (rys. 7.12), wynikają ze składowych tego momentu. Jedna z nich jest bliska częstości własnej układu, co powoduje występowanie dudnienia. Rysunki 7.16, 7.17 i 7.18 przedstawiają wpływ zmiennego momentu obciążającego organ urabiający na przebiegi momentu skręcającego wał silnika napędowego, prędkości kątowej organu oraz mocy pobieranej przez układ.



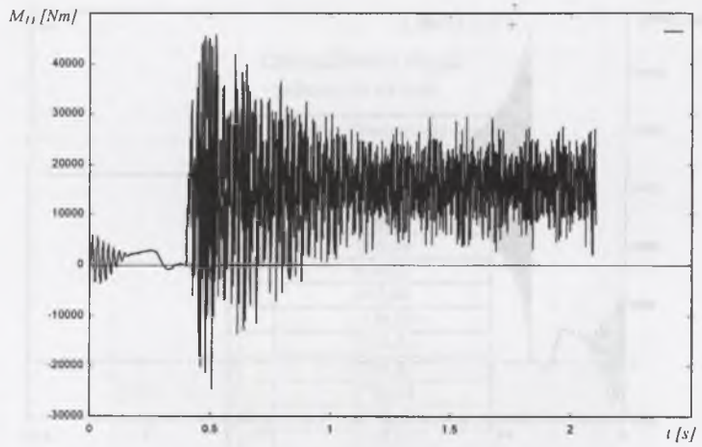
Rys. 7.9. Przebieg momentu skręcającego na wale wyjściowym przy obciążeniu układu momentem oporu skrawania o stałej wartości

Fig. 7.9. Course of the torsional moment on the output shaft for the system loaded with a constant torque



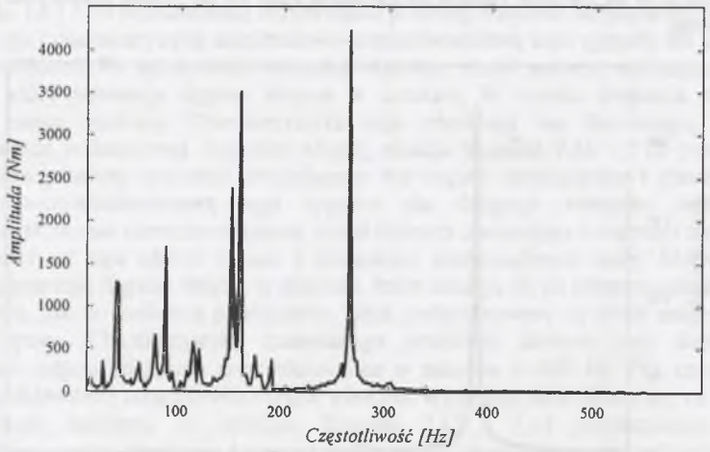
Rys. 7.10. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa momentu skręcającego na wale wyjściowym dla obciążenia stałym momentem

Fig. 7.10. Amplitude-frequency characteristics of the torsional moment on the output shaft for the system loaded with a constant torque



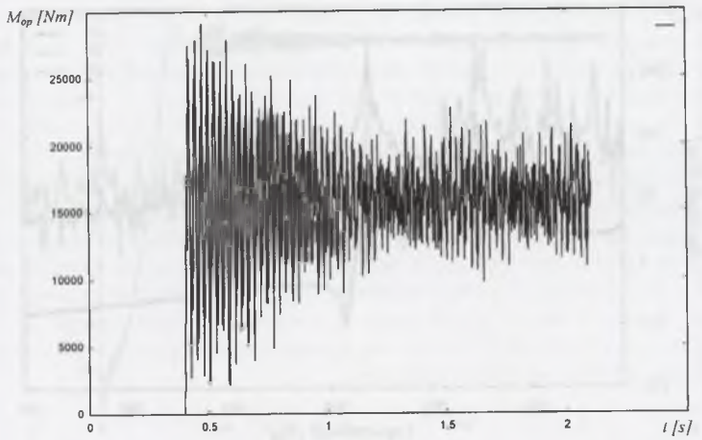
Rys. 7.11. Moment skręcający na wale organu urabiającego

Fig. 7.11. Torsional moment on the shaft of a cutting unit



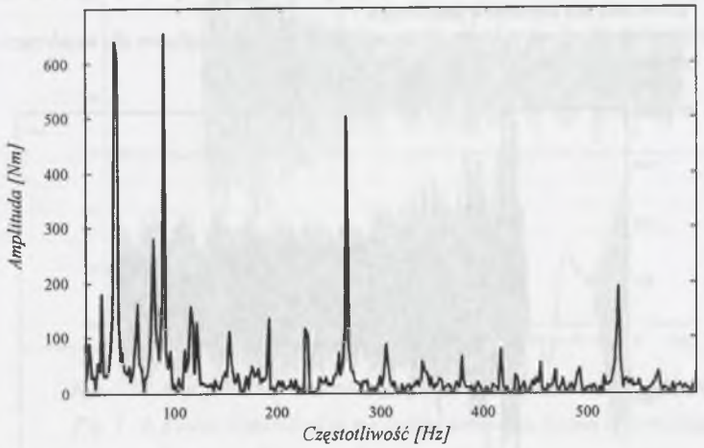
Rys. 7.12. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa momentu skręcającego na wale głównym w warunkach ustalonych

Fig. 7.12. Amplitude - frequency characteristic of torsional moment on the main shaft for steady-state conditions



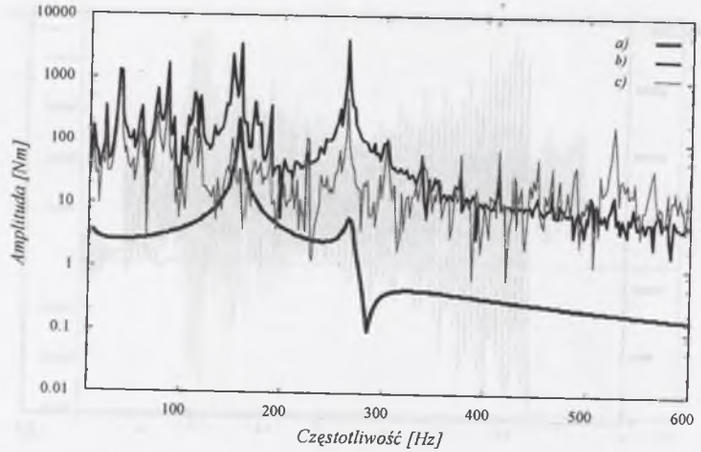
Rys. 7.13. Symulowany moment oporu skrawania

Fig. 7.13. Simulated resistance torque



Rys. 7.14. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa symulowanego momentu oporu skrawania w warunkach ustalonych

Fig. 7.14. Amplitude-frequency characteristics of the simulated resistance torque during steady-state conditions



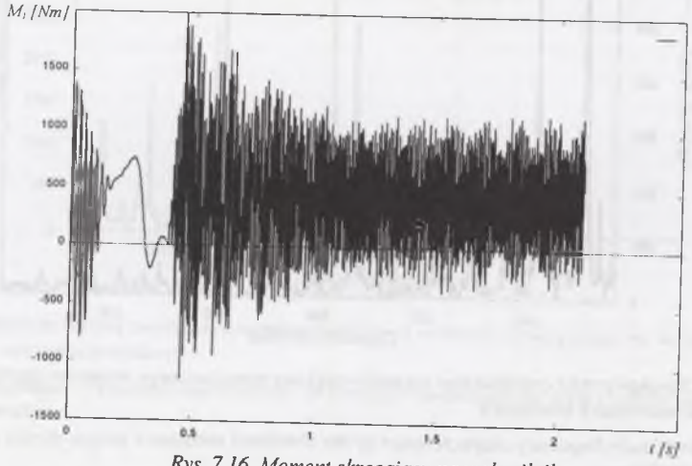
Rys. 7.15. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe w układzie logarytmicznym osi amplitudy

Fig. 7.15. Amplitude-frequency characteristics using the logarithmic amplitude axis

gdzie: a) moment skręcający na wale wyjściowym przy obciążeniu stałym momentem oporu skrawania,

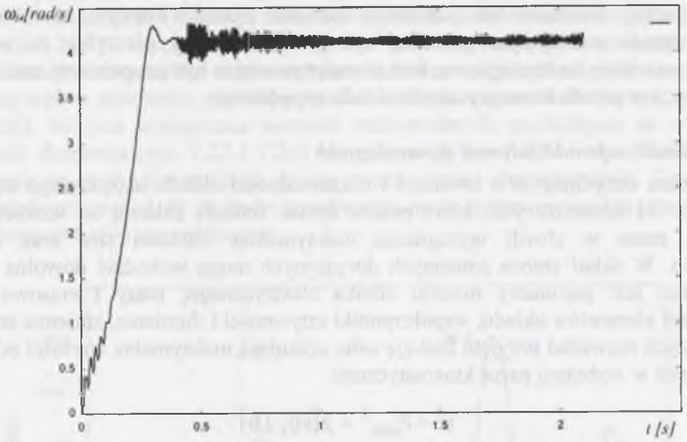
b) moment skręcający na wale wyjściowym przy obciążeniu symulowanym momentem oporu skrawania dla warunków ustalonych,

c) symulowany moment oporu skrawania na organie urabiającym dla ustalonych warunków pracy.



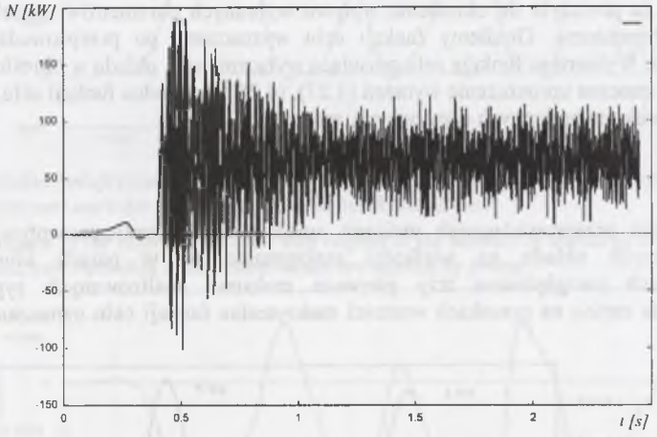
Rys. 7.16. Moment skręcający na wale silnika

Fig. 7.16. Torsional moment on the motor shaft



Rys. 7.17. Prędkość kątowa organu urabiającego

Fig. 7.17. Angular velocity of a cutting unit



Rys. 7.18. Moc przekazywana na organ urabiający podczas pracy układu

Fig. 7.18. Power transmitted to the cutting unit when system is operating

Przedstawiony sposób symulacji obciążenia organu urabiającego umożliwia badanie wpływu rozmieszczenia noży organu urabiającego na zjawiska dynamiczne w parach kinematycznych układu napędowego. Z przeprowadzonych symulacji wynika, że rozkład noży na organie urabiającym ma znaczący wpływ na przebiegi oddziaływań dynamicznych w parach kinematycznych. Powstały w wyniku symulacji charakter obciążenia jest zgodny z dostępnymi w literaturze wynikami pomiarów doświadczalnych. Zawiera wiele harmonicznych o niskich częstościach, które mogą być zbliżone do częstości własnych układu i powodować rezonanse lub dudnienia. Szczegółowa analiza otrzymanych wyników oraz wyciągnięcie wniosków konstrukcyjnych wymagają jednak wnikliwego rozpatrzenia przyjętych założeń upraszczających. Pominięcie np. zmiennej sztywności zazębienia, luzów, niedoskonały opis tłumienia, założenie stałego sortymentu urobku powodują, że układ jest

wyidealizowany i mogą się pojawiać w nim pewne zjawiska, nie występujące w układzie rzeczywistym (np. rezonanse lub dudnienia). Jednakże można stwierdzić, że dobór rozkładu noży na organie urabiającym powinien być przeprowadzany nie tylko ze względu na optymalne parametry technologiczne, lecz również powinien być uzupełniony analizą zjawisk dynamicznych w parach kinematycznych układu napędowego.

7.2.5. Minimalizacja oddziaływań dynamicznych

Czynnikiem decydującym o trwałości i niezawodności układu napędowego są wielkości maksymalne sił dynamicznych, które można opisać funkcją zależną od wartości wektora zmiennych stanu w chwili wystąpienia maksymalnej wartości siły oraz zmiennych decyzyjnych. W skład zbioru zmiennych decyzyjnych mogą wchodzić dowolne parametry układu, takie jak: parametry modelu silnika elektrycznego, masy i masowe momenty bezwładności elementów układu, współczynniki sztywności i tłumienia, zmienne stanu itp.

Do dalszych rozważań przyjęto funkcję celu, opisującą maksymalne wartości oddziaływań dynamicznych w wybranej parze kinematycznej:

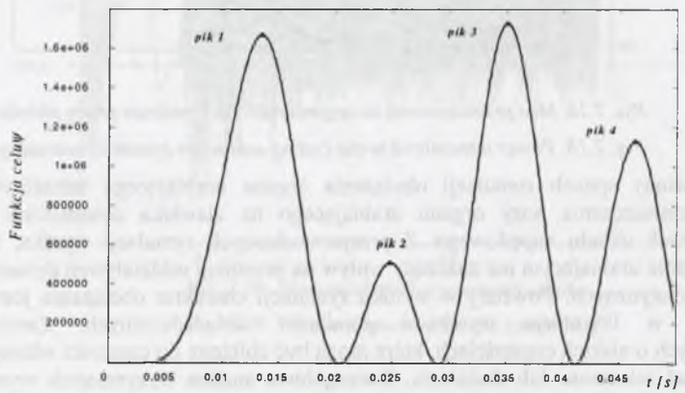
$$\psi = P_{\max}{}^2 = g[\mathbf{x}(t_k),\mathbf{b}] \tag{7.2}$$

gdzie: P_{max} - wartość maksymalna siły dynamicznej w wybranej parze kinematycznej, t_k - czas, w którym wystąpi wartość maksymalna siły.

Funkcja ta posłużyła do określenia wpływu wybranych parametrów modelu na badane zjawiska dynamiczne. Gradienty funkcji celu wyznaczono po przeprowadzeniu analizy wrażliwości. Wybierając funkcję celu opisującą wyłącznie stan układu w określonej chwili t_k, zyskuje się znaczne uproszczenie wyrażeń (4.27), (4.28). Pochodna funkcji celu, wyznaczona względem wektora zmiennych decyzyjnych, ma postać:

$$\frac{d\psi}{d\mathbf{b}} = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{b}} - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(t_k)\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{b}}(t_k) \tag{7.3}$$

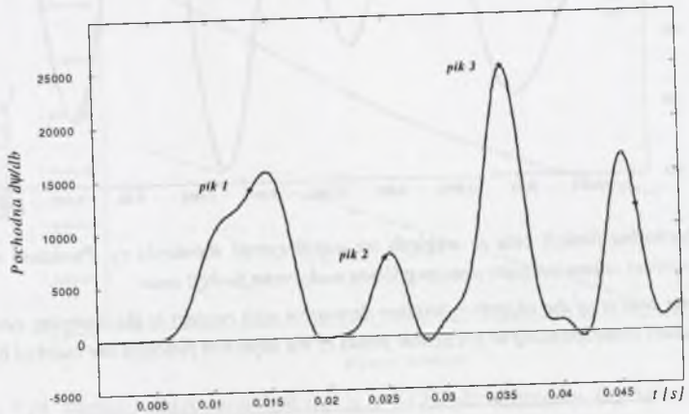
W wyniku przeprowadzonych obliczeń numerycznych określono wpływ parametrów konstrukcyjnych układu na wielkości maksymalne sił w parach kinematycznych. W badaniach uwzględniano trzy pierwsze maksima analizowanych sygnałów. Dla uproszczenia zapisu na rysunkach wartości maksymalne funkcji celu oznaczane są słowem „*pik*".



Rys. 7.19. Wykres funkcji $\psi(t)=P_l^2$. Zaznaczono wartości maksymalne

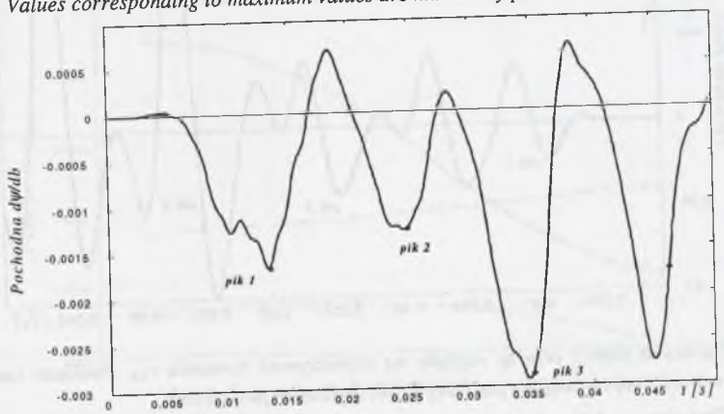
Fig. 7.19. Plot of the objective function $\psi(t)=P_l^2$. The extreme values were marked

Na podstawie otrzymanych wyników analizy wrażliwości do optymalizacji wybrano pięć parametrów konstrukcyjnych i funkcję celu, odpowiadającą sile w pierwszej parze (rys. 7.19). Na rysunkach 7.20÷7.23 przedstawiono wybrane przebiegi zmian pochodnych w funkcji czasu oraz zaznaczono wartości odpowiadające maksimom funkcji celu. Można zauważyć jednoznaczny wpływ parametru, określającego bezwładność organu urabiającego, na wartości sił (rys. 7.20). Miejsca wystąpienia wartości maksymalnych pochodnych ze względu na współczynniki tłumienia (rys. 7.22 i 7.23) nie pokrywają się z maksimami funkcji celu, a odpowiadające im pochodne znajdują się na stromej części charakterystyki. Zastosowanie niezbyt dokładnych metod do badania wrażliwości może zatem prowadzić do znacznych błędów podczas obliczeń numerycznych.



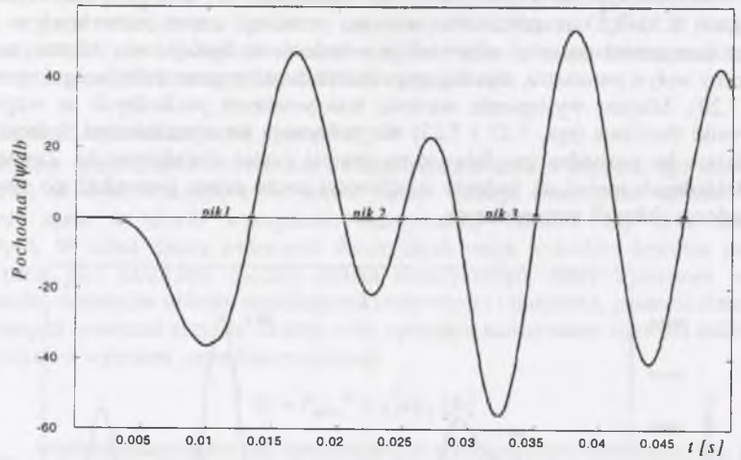
Rys. 7.20. Pochodna funkcji celu ze względu na moment bezwładności organu urabiającego. Punktami zaznaczono wartości odpowiadające maksimom funkcji celu

Fig. 7.20. Derivative of the objective function with respect to the moment of inertia of a cutting unit. Values corresponding to maximum values are marked by points



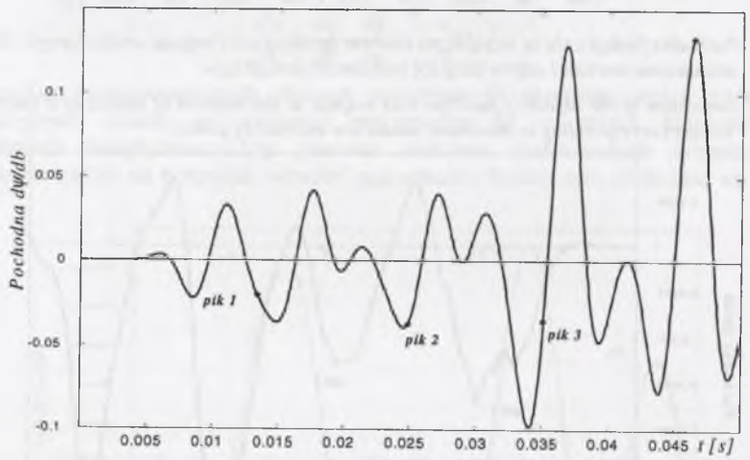
Rys. 7.21. Pochodna funkcji celu ze względu na współczynnik sztywności k_1. Punktami zaznaczono wartości odpowiadające poszczególnym maksimom funkcji celu

Fig. 7.21. Derivative of the objective function with respect to the stiffness coefficient k_1. Values corresponding to maximum of the objective function are marked by points



Rys. 7.22. Pochodna funkcji celu ze względu na współczynnik tłumienia c_1. Punktami zaznaczono wartości odpowiadające poszczególnym maksimom funkcji celu

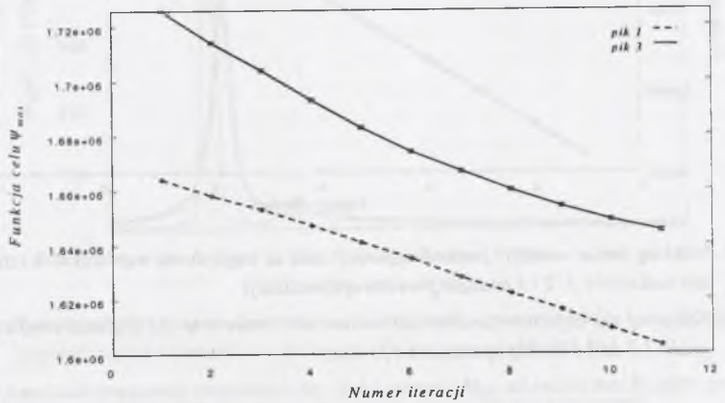
Fig. 7.22. Time course of the objective function derivative with respect to the damping coefficient c_1. Values corresponding to particular peaks of the objective function are marked by points



Rys. 7.23. Pochodna funkcji celu ze względu na współczynnik tłumienia c_{13}. Punktami zaznaczono wartości odpowiadające poszczególnym maksimom funkcji celu

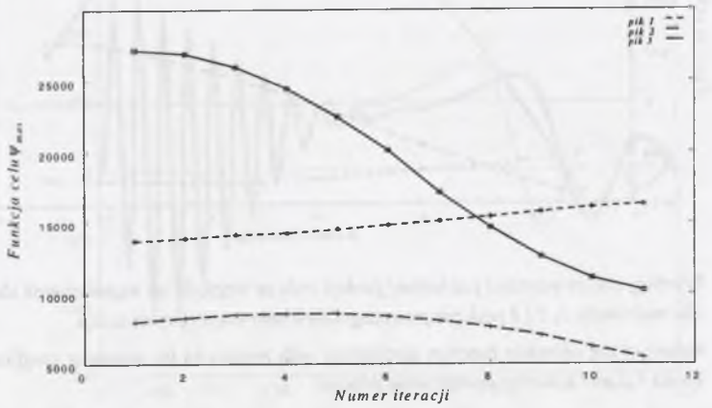
Fig. 7.23. Time course of the objective function derivative with respect to the damping coefficient c_{13}. Values corresponding to particular peaks of the objective function are marked by points

Kolejnym etapem badań była optymalizacja wybranych parametrów układu. W celu przyspieszenia procesu optymalizacji zastosowano procedury wykorzystujące gradient funkcji celu w przestrzeni zmiennych stanu. Wyznaczone funkcje wrażliwości układu napędowego zastosowano do optymalnego doboru niektórych jego cech konstrukcyjnych. Do optymalizacji przyjęto również prezentowany wcześniej elektromechaniczny model układu napędowego, złożonego z asynchronicznego silnika dwuklatkowego, szeregowej przekładni zębatej oraz dwustopniowej przekładni planetarnej (rys. 7.4). W badaniach optymalizacyjnych pominięto wpływ luzów i zmiennych sztywności zazębień.



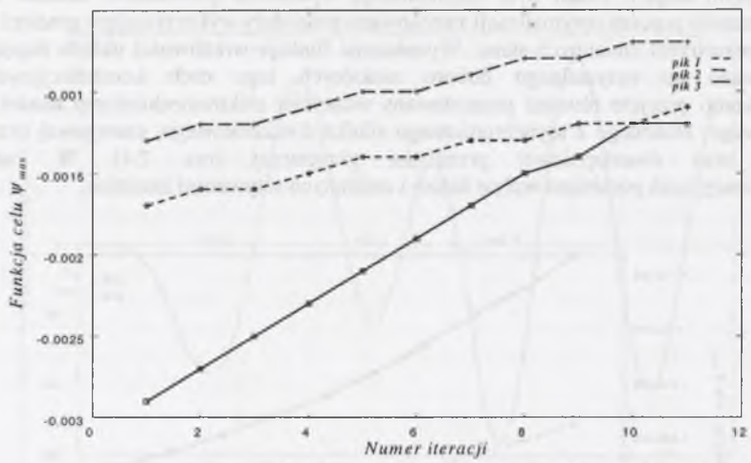
Rys. 7.24. Wartości maksymalne funkcji celu nr 1 i 3 podczas procesu optymalizacji

Fig. 7.24. Maximum values of the objective function No 1 and 3 during optimization process



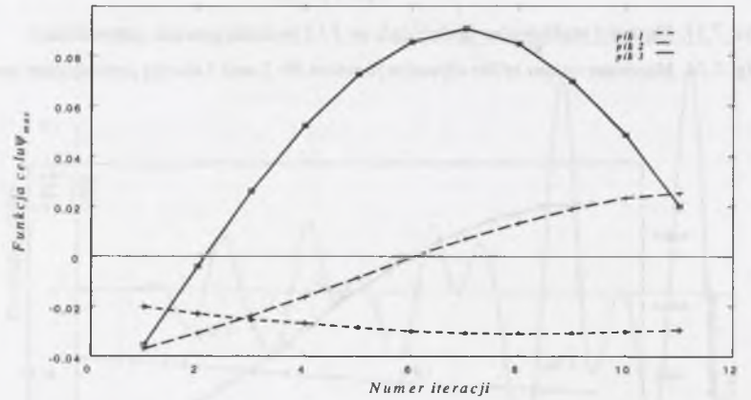
Rys. 7.25. Wartości pochodnej funkcji celu ze względu na moment bezwładności I_{12} dla maksimów 1, 2 i 3 podczas procesu optymalizacji

Fig. 7.25. Values of the objective function derivatives with respect to the moment of inertia I_{12} for maximum values 1,2 and 3 during optimization process



Rys. 7.26. Przebieg zmian wartości pochodnej funkcji celu ze względu na współczynnik sztywności k_1 dla maksimów 1, 2 i 3 podczas procesu optymalizacji

Fig. 7.26. Values of the objective function derivatives with respect to the stiffness coefficient k_1 for peaks 1,2 and 3 during optimization process

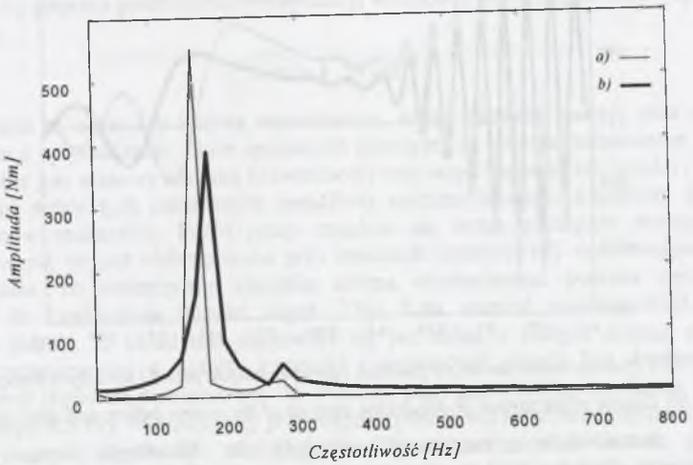


Rys. 7.27. Przebieg zmian wartości pochodnej funkcji celu ze względu na współczynnik tłumienia c_{13} dla maksimów 1, 2 i 3 podczas poszczególnych sekwencji optymalizacji

Fig. 7.27. Values of the objective function derivatives with respect to the damping coefficient c_{13} for peaks 1,2 and 3 during optimization process

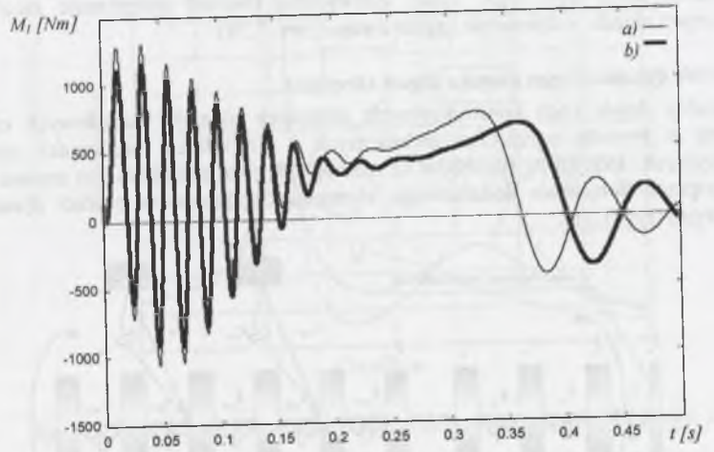
Przebieg procesu optymalizacji przedstawiono na rysunkach 7.24÷7.27. Przyjęta funkcja celu jest nieliniową funkcją czasu i zmiennych decyzyjnych. Dodatkowo należy zauważyć znaczne zmiany wrażliwości podczas procesu optymalizacji, szczególnie widoczne na rysunku 7.27. Można stwierdzić, że stosowanie wyników wrażliwości do wyboru zmiennych decyzyjnych powinno być uzupełnione o dodatkowe analizy w trakcie i po zakończeniu

procesu optymalizacji, zwłaszcza w przypadku znacznych zmian wartości zmiennych decyzyjnych.



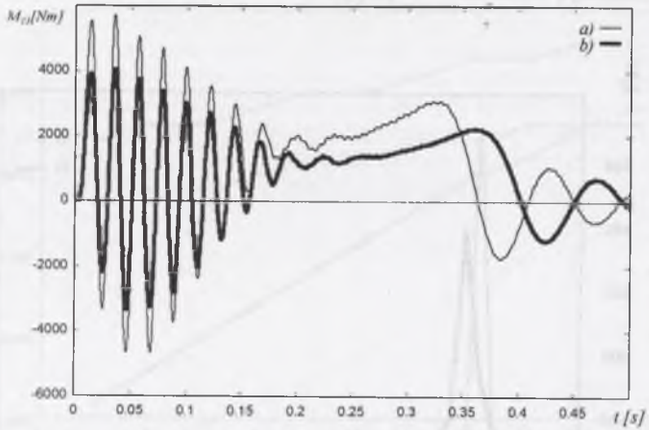
Rys. 7.28. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowych momentu M_{13}: a) przed, b) po optymalizacji dla warunków ustalonych. (Zakres częstości 5-800 Hz)

Fig. 7.28. Amplitude-frequency characteristics of the moment M_{13}: a) before and b) after optimization for steady-state conditions. (Frequency range 5-800 Hz)



Rys. 7.29. Przebiegi momentu $M_1(t)$ podczas rozruchu układu przed i po optymalizacji

Fig. 7.29. Course of the torque $M_1(t)$ during start up of the system before and after optimization



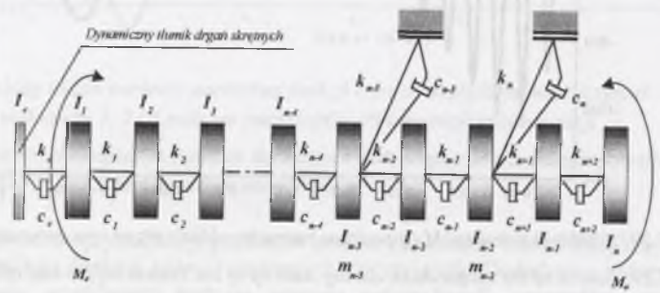
Rys. 7.30. Przebiegi momentu $M_{13}(t)$ podczas rozruchu układu przed i po optymalizacji

Fig. 7.30. Course of the torque $M_{13}(t)$ during start up of the system before and after optimization

Wyniki zastosowania opracowanej metodyki do określenia wybranych cech konstrukcyjnych układu przedstawiono na rysunkach 7.28÷7.30. Zbiór zmiennych decyzyjnych zawierał momenty bezwładności I_1, I_{12}, współczynnik sztywności k_1 i współczynniki tłumienia c_1 i c_{13} (tabela 7.1). Dopuszczalny zakres zmian parametrów wynosił ±20% ich wartości. W wyniku procesu optymalizacji zmienione zostały jedynie wartości momentów bezwładności i współczynnika sztywności. Symulacje komputerowe układu z parametrami wyznaczonymi w procesie optymalizacji wskazują na redukcję wartości maksymalnych sił dynamicznych podczas rozruchu układu od 10 do 30% w zależności od pary kinematycznej (rys. 7.29, 7.30). Zauważono również polepszenie charakterystyk dynamicznych układu w dziedzinie częstotliwości (rys. 7.28).

7.2.6. Dobór dynamicznego tłumika drgań skrętnych

Optymalny dobór cech konstrukcyjnych złożonych układów napędowych często jest utrudniony z powodu ograniczeń technicznych i niewielkich możliwości zmian cech konstrukcyjnych. Jednym ze sposobów na rozwiązanie tego problemu jest zmiana struktury układu poprzez dołączenie dodatkowego elementu drgającego w postaci dynamicznego tłumika drgań (rys. 7.31).



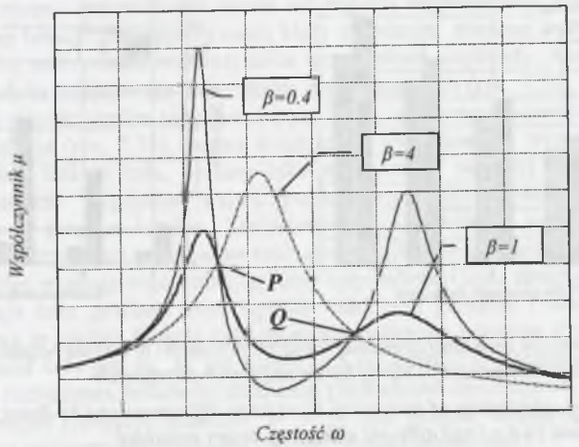
Rys. 7.31. Model dynamiczny układu z dynamicznym tłumikiem drgań skrętnych

Fig. 7.31. Dynamic model of a system with a dynamic damper of torsional vibrations

Odpowiedź badanego układu na wymuszenie harmoniczne opisuje transmitancja widmowa (widmowa funkcja przejścia). Dla analizy charakterystyk rezonansowych zazwyczaj wprowadza się jednak bezwymiarowy współczynnik wzmocnienia amplitudy, który otrzymuje się poprzez pomnożenie transmitancji widmowej przez odpowiedni współczynnik sztywności:

$$\mu(\omega) = k \cdot |H(j\omega)| \tag{7.4}$$

Współczynnik μ, opisujący krzywą rezonansową, może stanowić funkcję celu do analizy wrażliwości i optymalizacji. Zbiór zmiennych decyzyjnych zawiera podstawowe parametry tłumika, takie jak: masowy moment bezwładności oraz współczynniki sztywności i tłumienia. Odpowiedni dobór tych parametrów umożliwia zminimalizowanie amplitudy drgań ciała pierwszego w rezonansie. Punkt pracy znajduje się wtedy pomiędzy dwoma strefami rezonansowymi, co jest niebezpieczne przy zmianach częstości siły wymuszającej podczas pracy układu. To niekorzystne zjawisko można wyeliminować poprzez wprowadzenie tłumienia do zawieszenia tłumika drgań. Zbyt duża wartość współczynnika tłumienia powoduje jednak, że układ taki zachowuje się jak układ o jednym stopniu swobody o częstości rezonansowej w pobliżu częstości rezonansowej układu bez tłumienia. Zatem współczynnik tłumienia powinien być tak dobrany, żeby zapewniał pracę układu w pewnym zakresie częstości siły wymuszającej przy współczynniku wzmocnienia amplitudy większym od zera. Najmniejszą wartość współczynnik wzmocnienia uzyskuje wtedy, gdy punkty charakterystyczne P i Q (punkty przecięcia się wykresów wykreślonych dla różnych wartości tłumienia) znajdują się na tej samej wysokości. Wykreślając krzywe rezonansowe dla różnych wartości współczynnika tłumienia (rys. 7.32), można zauważyć, że ich położenie zależy jedynie od wartości momentu bezwładności i sztywności zamocowania tłumika.

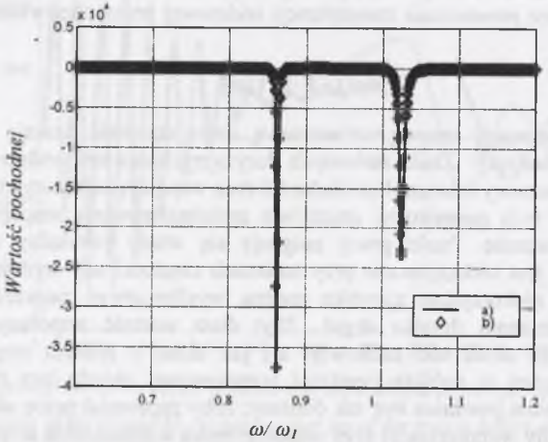


Rys. 7.32. Krzywe rezonansowe układu dla różnych wartości współczynnika $\beta = \frac{c}{c_0}$

Fig. 7.32. Resonance curves obtained for different values of coefficient $\beta = \frac{c}{c_0}$

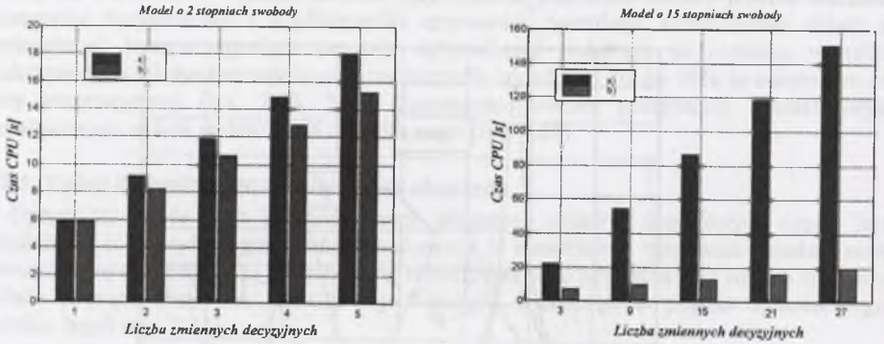
Określenie wpływu parametrów tłumika na kształt krzywej rezonansowej możliwe jest dzięki zastosowaniu analizy wrażliwości. Metody obliczania pochodnych funkcji celu w dziedzinie częstości przedstawiono w rozdziale 4.4. Badania porównawcze wykazały, że dla rozpatrywanej klasy zagadnień dokładność metody bezpośredniej i różnic skończonych jest

zbliżona (rys. 7.33). Pierwsza z metod cechuje się jednak krótszym czasem obliczeń (rys. 7.34), szczególnie dla rozbudowanych modeli i dużej liczby zmiennych decyzyjnych.



Rys. 7.33. Wyniki obliczeń pochodnej funkcji celu ze względu na współczynnik tłumienia dla: a) metody bezpośredniej, b) metody różnic skończonych

Fig. 7.33. Results of calculations of the objective function derivatives with respect to the damping coefficient for: a) direct method, b) finite differences method

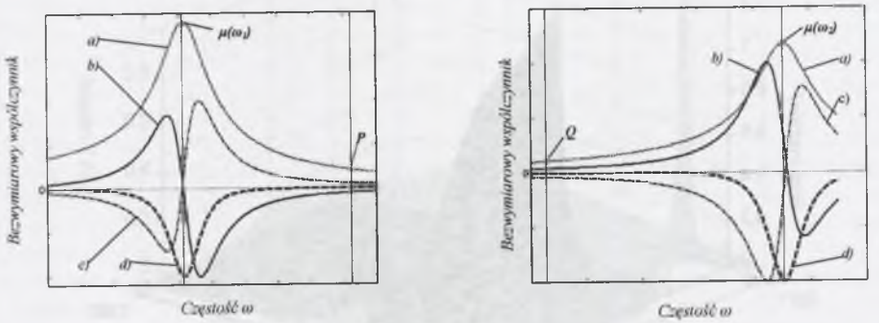


Rys. 7.34. Czas obliczeń pochodnej a) metodą różnic skończonych i b) metodą bezpośrednią dla modelu o 2 i 15 stopniach swobody i różnej liczbie zmiennych decyzyjnych

Fig. 7.34. Time of calculations of derivatives by a) finite differences and b) direct method for models with 2 and 15 d.o.f and different number of design variables

W celu określenia wytycznych do optymalizacji cech dynamicznych tłumika porównano przebiegi pochodnych względem poszczególnych parametrów w pobliżu punktów charakterystycznych krzywej rezonansowej (rys. 7.35). Analizując otrzymane przebiegi, stwierdzono, że w otoczeniu wartości maksymalnych pochodne funkcji celu ze względu na masowy moment bezwładności i współczynnik sztywności zmieniają znak. Parametry te zatem nie będą przydatne przy minimalizacji funkcji celu opisującej wartość maksymalną funkcji celu. Można zauważyć również, że pochodna ze względu na współczynnik tłumienia osiąga ekstremum w otoczeniu tego punktu. Parametr ten może być zatem wykorzystywany w procesie optymalizacji. Jednocześnie w otoczeniu punktów P i Q pochodne masowego

momentu bezwładności współczynnika sztywności są niezerowe, zerują się natomiast pochodne ze względu na współczynnik tłumienia. Potwierdza to fakt, że wszystkie krzywe wykreślone dla różnych współczynników tłumienia przechodzą przez te punkty.



Rys. 7.35. Krzywa rezonansowa i bezwymiarowe pochodne w otoczeniu wartości maksymalnych oraz punktów charakterystycznych P i Q, gdzie: a) krzywa rezonansowa, b) pochodna ze względu na moment bezwładności, c) pochodna ze względu na współczynnik sztywności, d) pochodna ze względu na współczynnik tłumienia

Fig. 7.35. Resonance curve and nondimensional derivatives in the neighborhood of peak values and characteristic points P and Q, where: a) resonance curve, b) derivative with respect to moment of inertia, c) derivative with respect to stiffness coefficient, d) derivative with respect to damping coefficient

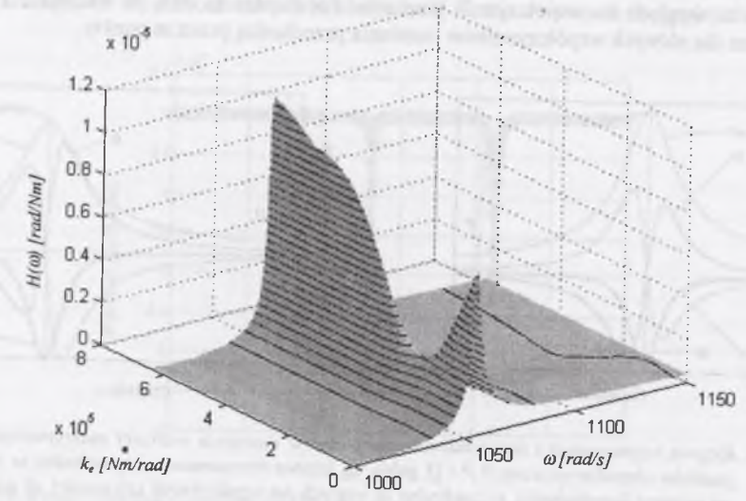
Powodzenie procesu optymalizacji zależy od wyboru odpowiedniej funkcji celu. Aby określić postać tej funkcji dla rozpatrywanej klasy zagadnień, zbadano wpływ parametrów tłumika na wartości maksymalne współczynnika wzmocnienia amplitudy. Analizując funkcje przejścia $H(\omega)$ układu napędowego z tłumikiem drgań skrętnych (rys. 7.31), wykreślone dla różnych wartości współczynnika sztywności (rys. 7.36), masowego momentu bezwładności (rys. 7.37) i tłumienia (rys. 7.38), można wskazać na występowanie wyraźnych minimów globalnych. Jednak funkcje celu, opisane jako maksymalne wartości widmowej funkcji przejścia, wyznaczane względem współczynnika sztywności i masowego momentu bezwładności, mają minima lokalne. Zastosowanie gradientowych metod optymalizacji spowoduje zatem zatrzymanie procesu po znalezieniu najbliższego minimum. Wyznaczenie optimum globalnego wymaga więc zmiany metody optymalizacji bądź zmiany postaci funkcji celu. Taka funkcja celu powinna mieć wyraźne minimum globalne i stosunkowo prostą formę. Wymagania te spełnia funkcja celu opisująca położenie punktów P i Q. Dodatkową zaletą takiej funkcji celu jest to, że nie zależy ona od parametrów tłumienia. Biorąc pod uwagę powyższe rozważania, proces optymalizacji prowadzono dwuetapowo:

- minimalizacja rzędnych punktów P i Q dla dwóch zmiennych decyzyjnych (masowego momentu bezwładności i współczynnika sztywności)

$$Min\ \mu(\omega_{P,Q}) \tag{7.5}$$

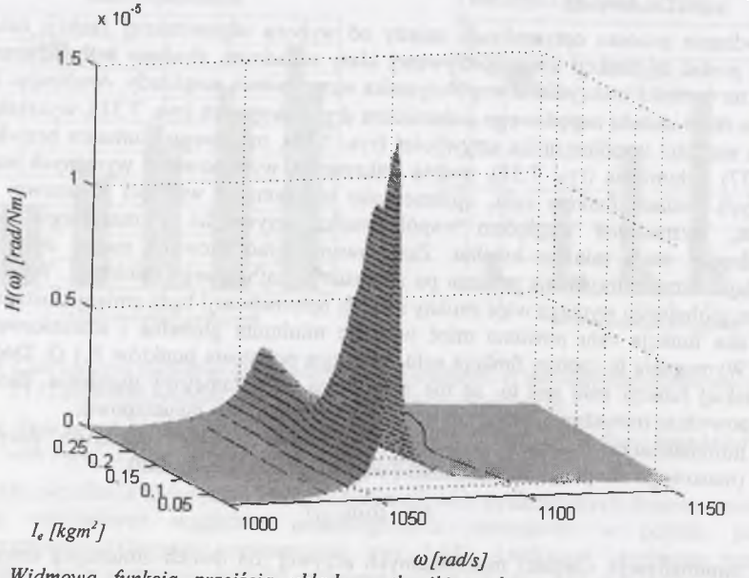
- minimalizacja wartości maksymalnych krzywej dla dwóch zmiennych decyzyjnych (współczynników sztywności i tłumienia)

$$MinMax\ \mu(\omega) \tag{7.6}$$



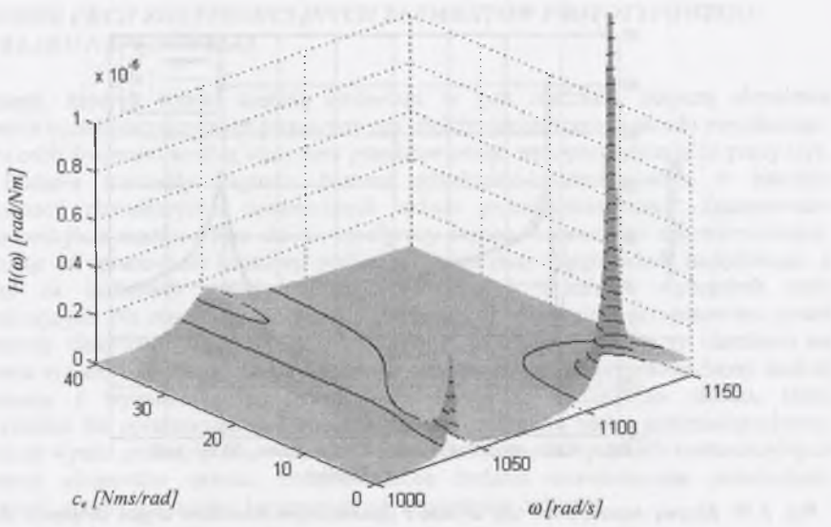
Rys. 7.36. Widmowa funkcja przejścia układu z tłumikiem dynamicznym w funkcji współczynnika sztywności

Fig. 7.36. Spectral transfer function of the system with a dynamic damper versus stiffness coefficient



Rys. 7.37. Widmowa funkcja przejścia układu z tłumikiem dynamicznym w funkcji momentu bezwładności tłumika

Fig. 7.37. Spectral transfer function of the system with a dynamic damper versus inertia moment of the damper



Rys. 7.38. Widmowa funkcja przejścia układu z tłumikiem dynamicznym w funkcji współczynnika tłumienia

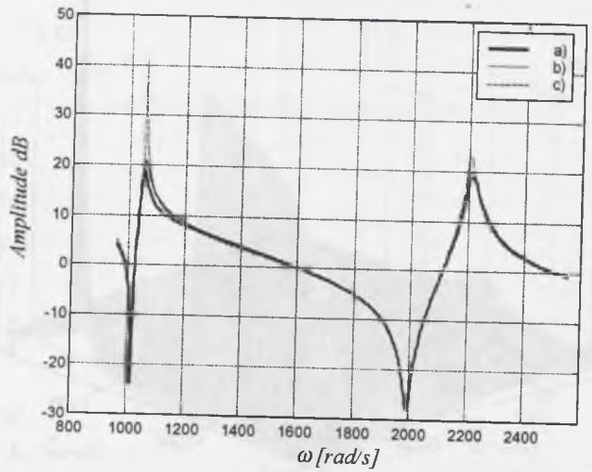
Fig. 7.38. Spectral transfer function of the system with a dynamic damper versus damping coefficient

Przeprowadzono dwa warianty obliczeń numerycznych, odnoszące się do różnego stopnia uproszczenia modelu rozpatrywanego układu:

- optymalizacja krzywej rezonansowej układu z dynamicznym tłumikiem drgań skrętnych dla zredukowanego modelu dynamicznego o dwóch stopniach swobody. Redukcję przeprowadzono z wykorzystaniem metody syntezy modalnej,
- optymalizacja krzywej rezonansowej układu z tłumikiem dla modelu dynamicznego układu o 15 stopniach swobody.

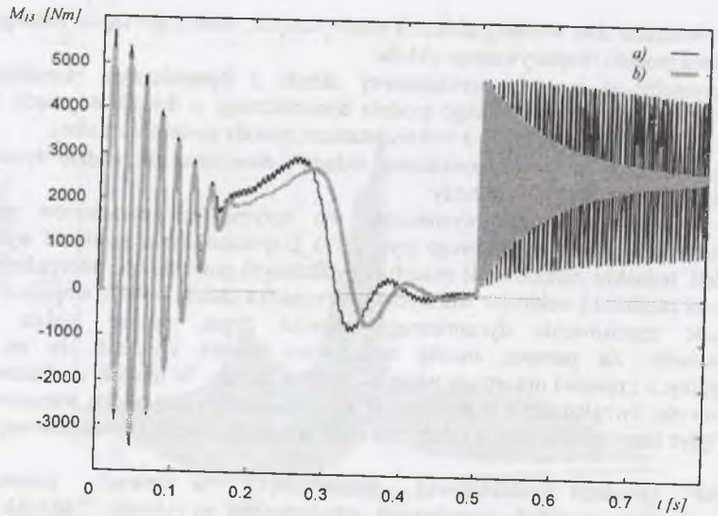
Krzywe rezonansowe układu wyznaczone dla optymalnych parametrów porównano z charakterystyką układu wyjściowego (rys. 7.39). Uzyskano dobrą zgodność wyników dla obu modeli. Jednakże zastosowanie modeli uproszczonych powinno być poprzedzone analizą wrażliwości częstości i wektorów własnych. W przypadku układu o wielu stopniach swobody skuteczność zastosowania dynamicznego tłumika drgań zależeć będzie od jego umiejscowienia. Za pomocą analizy wrażliwości można wykazać, że na wartości poszczególnych częstości ma wpływ wiele elementów układu. W modelu zredukowanym nie ma możliwości uwzględnienia tego faktu. W przedstawionym przypadku otrzymano wyniki zgodne, gdyż tłumik dołączono do elementu decydującego o wartości podstawowej częstości własnej.

Wyniki symulacji oddziaływań dynamicznych w parach kinematycznych elektromechanicznego układu napędowego przedstawiono na rysunku 7.40. Jak wykazały wyniki symulacji numerycznych, układ z dynamicznym tłumikiem drgań, dobranym z wykorzystaniem metod optymalizacji, cechuje się niską wartością współczynnika wzmocnienia amplitudy drgań w szerokim zakresie częstości. Maksymalne wartości współczynnika dla pierwszego rezonansu zmniejszono o około 20 dB (rys. 7.39). Efektem tego jest zmniejszenie maksymalnych wartości sił w parach kinematycznych (rys. 7.40).



Rys. 7.39. Krzywe rezonansowe dla układu z dynamicznym tłumikiem drgań skrętnych dobranym w procesie optymalizacji dla modelu układu: a) o 15 stopniach swobody, b) o 2 stopniach swobody oraz c) układu wyjściowego bez tłumika

Fig. 7.39. Resonance curves of the system with a damper chosen in the optimization process for a model of the system: a) with 15 degrees of freedom, b) with 2 degree of freedom, c) without damper



Rys. 7.40. Symulacja przebiegów momentu dynamicznego dla układu: a) bez tłumika oraz b) z tłumikiem

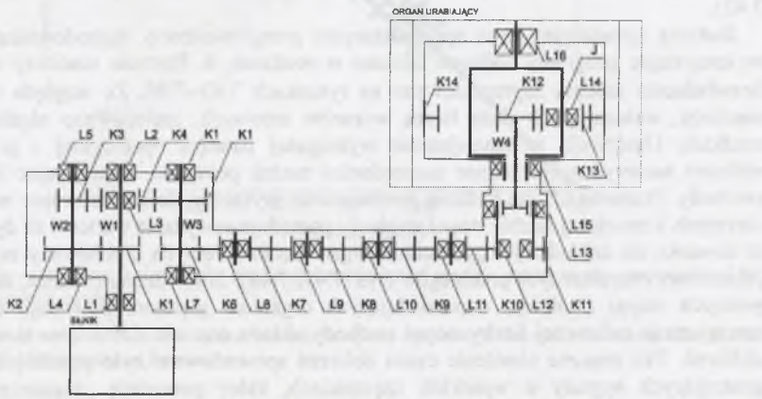
Fig. 7.40. Simulated dynamic torque in one of kinematic pairs of the electromechanical system: a) without damper, b) with a damper

7.3. DOBÓR CECH KONSTRUKCYJNYCH ELEMENTÓW PROTOTYPOWEGO UKŁADU NAPĘDOWEGO

Badania, których wyniki zostaną omówione w tym rozdziale, dotyczą określenia wybranych cech konstrukcyjnych prototypowego, elektromechanicznego układu napędowego. Doboru cech dokonano według algorytmu przedstawionego we wprowadzeniu do pracy (rys. 1.1). Badania stanowiły fragment procesu projektowo-konstrukcyjnego, w zakresie optymalizacji charakterystyk dynamicznych układu przeniesienia mocy. Zastosowanie takiego podejścia możliwe było dzięki współpracy zespołu badawczego z konstruktorami, poczynając od opracowania koncepcji postaci konstrukcyjnej całego układu napędowego, a kończąc na badaniach doświadczalnych prototypu i określeniu wybranych cech konstrukcyjnych. Na etapie opracowania dokumentacji konstrukcyjnej przygotowano model dynamiczny elektromechanicznego układu napędowego, którego parametry określono na podstawie rysunków wykonawczych elementów napędu. Następnie przeprowadzono analizę dynamiczną i wyznaczono podstawowe charakterystyki dynamiczne układu, które wykorzystano do opracowania funkcji celu i przeprowadzenia badań optymalizacyjnych. Otrzymane wyniki posłużyły jako wytyczne do określenia optymalnych cech konstrukcyjnych wybranych elementów układu. Przeprowadzone badania doświadczalne potwierdziły poprawność przyjętych założeń i opracowanych algorytmów obliczeń.

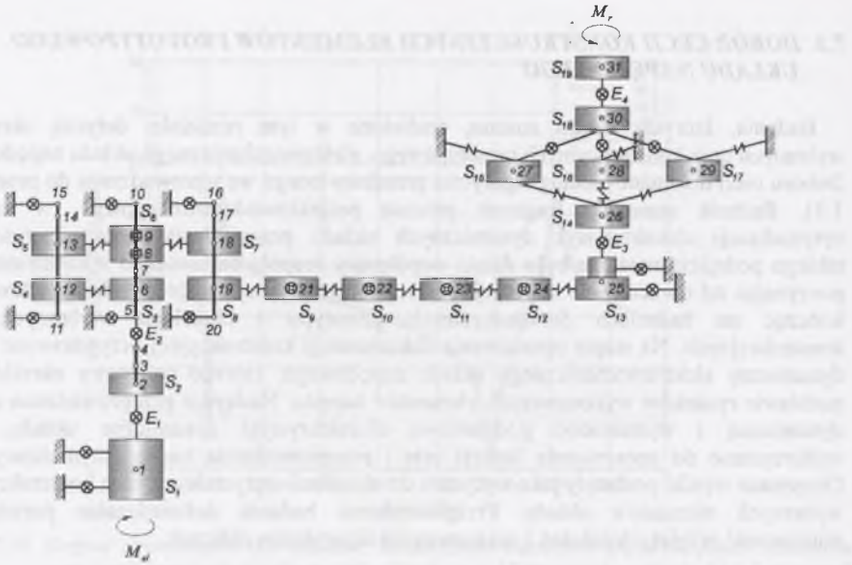
7.3.1. Model drgań giętno-skrętnych układu

Zastosowanie wyników badań modelowych do wspomagania procesu projektowania oraz wnioskowania diagnostycznego wymaga opracowania bardziej złożonych modeli uwzględniających wzajemne oddziaływanie na siebie podukładów tworzących złożony system dynamiczny. Takimi podukładami mogą być: silnik napędowy, przekładnie zębate oraz korpus. Budowane modele muszą zatem mieć węzły, umożliwiające realizację sprzężenia dynamicznego pomiędzy nimi. W przypadku przekładni zębatej konieczne staje się więc opracowanie modelu drgań giętno-skrętnych z możliwością uwzględnienia sztywności podparć wałów. Najczęściej stosuje się metodę hybrydową, będącą połączeniem metody elementów skończonych (MES) i sztywnych elementów skończonych (SES). Metoda ta została zastosowana również w niniejszej pracy.



Rys. 7.41. Schemat kinematyczny układu napędowego

Fig. 7.41. Kinematic scheme of the transmission system



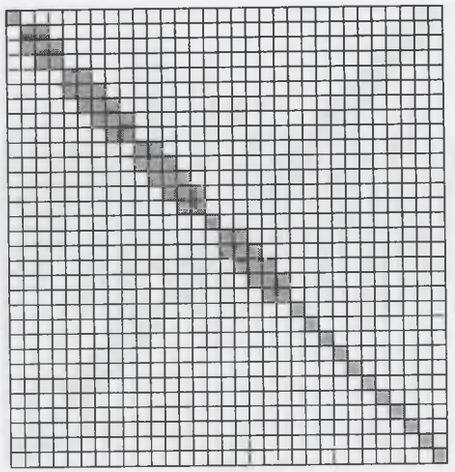
Rys. 7.42. Model dynamiczny drgań giętno-skrętnych układu napędowego

Fig. 7.42. Dynamical model of transverse torsional vibrations of the transmission system

Na rysunku 7.42 zastosowano następujące oznaczenia: 1..31 - numery węzłów podziału na elementy skończone, E1-E4 - elementy sprężysto-tłumiące, modelujące fragmenty wałów, S1-S19 - sztywne elementy skończone.

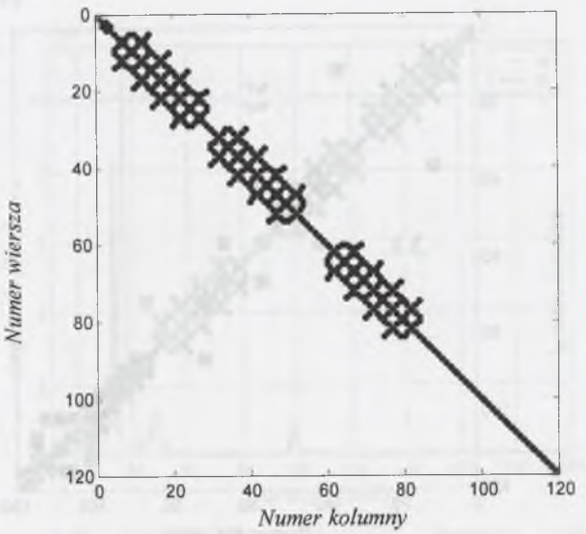
Opracowany przestrzenny model dynamiczny części mechanicznej napędu ma 119 stopni swobody. Model ten umożliwia analizę sygnałów generowanych w łożyskach przekładni. Strukturę modelu i jego parametry określono na podstawie dokumentacji konstrukcyjnej prototypu układu napędowego. Wyboru liczby stopni swobody oraz podziału na elementy skończone dokonano, analizując postać konstrukcyjną i dominujące postacie drgań (rys. 7.41, 7.42).

Badania symulacyjne oraz optymalizacyjne przeprowadzono w środowisku MATLAB, wykorzystując programy obliczeń opisane w rozdziale 6. Postacie macierzy sztywności i bezwładności modelu zaprezentowano na rysunkach 7.43÷7.46. Ze względu na charakter macierzy, wykazujących dużą liczbę wyrazów zerowych, zastosowano algebrę macierzy rzadkich. Umożliwia to zmniejszenie wymaganej pamięci operacyjnej i przyspieszenie obliczeń numerycznych. Dalsze oszczędności można poczynić, zmniejszając liczbę stopni swobody. Przeprowadzone badania porównawcze wykazały, że zastosowanie modelu drgań skrętnych o mniejszej liczbie stopni swobody powoduje zawyżanie wartości sił dynamicznych w stosunku do dokładniejszego modelu drgań giętno-skrętnych. Zachowany zostaje jednak jakościowy charakter tych przebiegów (rys. 7.47, 7.48). Stwierdzono również, że pominięcie pewnych stopni swobody, odpowiadających drganiom giętnym, powoduje ok. *3-krotne* zmniejszenie całkowitej liczby stopni swobody układu oraz ok. *150-krotne* skrócenie czasu obliczeń. Tak znaczne obniżenie czasu obliczeń spowodowane było pominięciem członów generujących sygnały o wysokich częstościach, które powodują „zagęszczanie" kroku obliczeń podczas numerycznego całkowania równań ruchu.



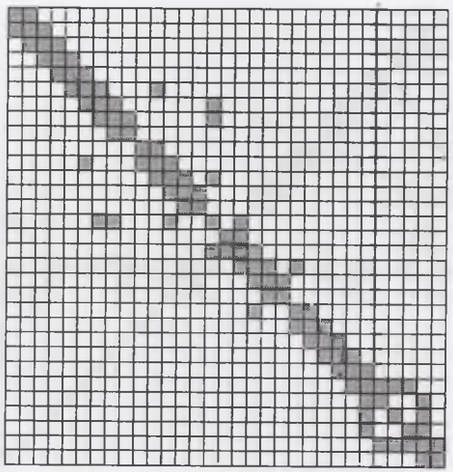
Rys. 7.43. Niezerowe bloki macierzy bezwładności odpowiadające poszczególnym węzłom modelu

Fig. 7.43. Nonzero blocks of the inertia matrix referring to particular nodes of the model



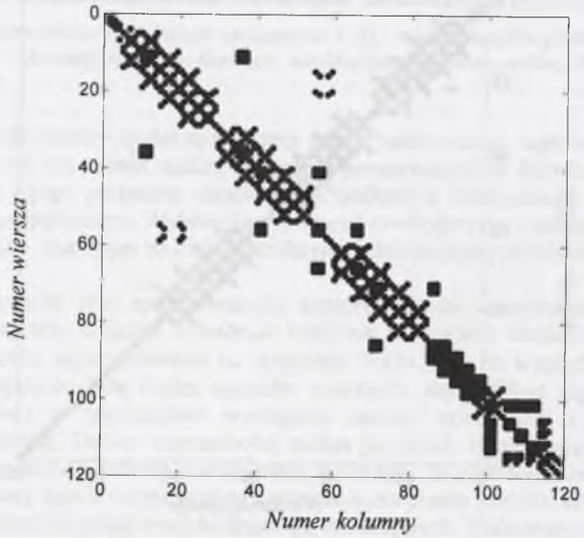
Rys. 7.44. Mapa niezerowych elementów macierzy bezwładności modelu drgań giętno-skrętnych o 119 stopniach swobody

Fig. 7.44. Map of nonzero elements of inertia matrix of the model of transverse-torsional vibrations with 119 degrees of freedom



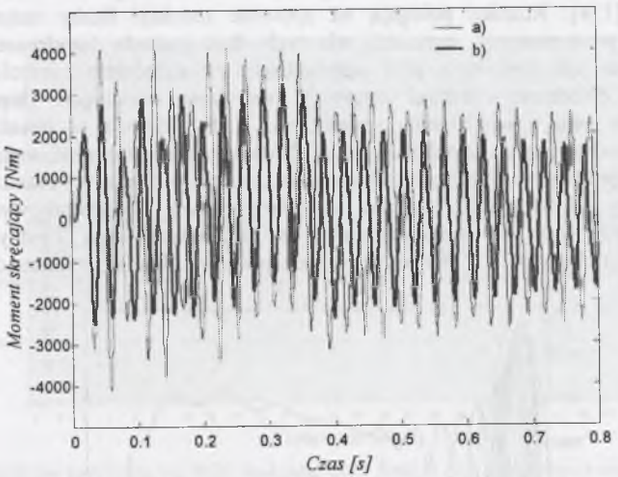
Rys. 7.45. Niezerowe bloki macierzy sztywności odpowiadające poszczególnym węzłom modelu

Fig. 7.45. Nonzero blocks of the stiffness matrix referring to particular nodes of the model



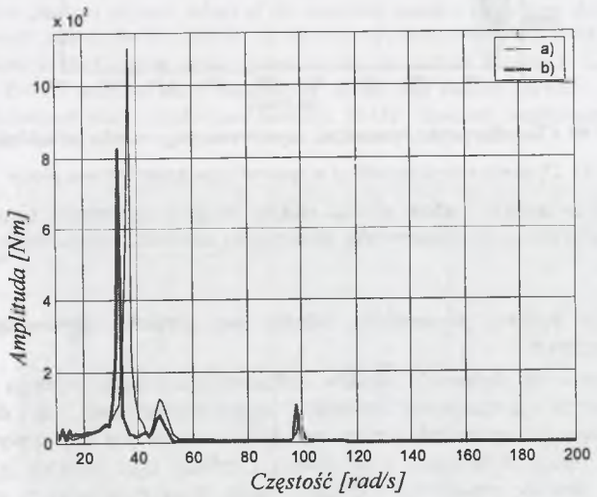
Rys. 7.46. Mapa niezerowych elementów macierzy sztywności modelu drgań giętno-skrętnych o 119 stopniach swobody

Fig. 7.46. Map of nonzero elements of stiffness matrix of the model of transverse-torsional vibrations with 119 degrees of freedom



Rys. 7.47. Przebiegi momentu skręcającego wałek bezpieczeństwa dla modelu: a) o 37 stopniach swobody, b) o 119 stopniach swobody

Fig. 7.47. Torsional moment in a safety shaft obtained when using the model: a) with 37 d.o.f, b) with 119 d.o.f



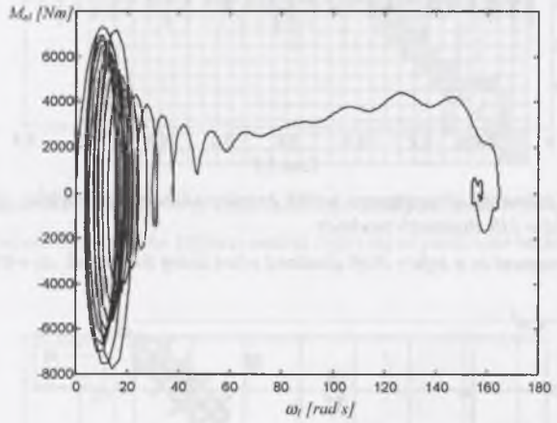
Rys. 7.48. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe momentu skręcającego wałek bezpieczeństwa dla modelu: a) o 37 stopniach swobody, b) o 119 stopniach swobody

Fig. 7.48. Amplitude-frequency characteristics of the torque in a safety shaft obtained when using the model: a) with 37 d.o.f, b) with 119 d.o.f

Uwzględniając powyższe uwagi, zdecydowano, aby do badań optymalizacyjnych wykorzystywać modele o mniejszej liczbie stopni swobody. Model drgań giętno-skrętnych służył natomiast do sprawdzania wpływu parametrów, otrzymanych w procesie optymalizacji,

na charakterystyki dynamiczne układu. Takie podejście stosowane jest również przez innych badaczy, np. [174]. Różnice polegają na sposobie redukcji liczby stopni swobody. Dokładniejsze odwzorowanie częstości własnych daje metoda kondensacji modalnej [172,173], która jest stosowana przy optymalizacji w dziedzinie częstości. Mniejszą dokładność w dziedzinie częstości otrzymuje się przez pominięcie stopni swobody nieistotnych dla celu prowadzonych badań (rys. 7.48). Metoda ta umożliwia jednak zachowanie sensu fizycznego współrzędnych uogólnionych modelu zredukowanego oraz jego parametrów, co jest bardzo ważne przy wyborze funkcji celu w dziedzinie czasu.

Rozpatrywany układ napędzany jest asynchronicznym, jednoklatkowym silnikiem elektrycznym, który zamodelowano za pomocą modelu obwodowego z jednym obwodem zastępczym w wirniku (rys. 3.3). Równania ruchu zapisano w układzie współrzędnych *(x,y)*.



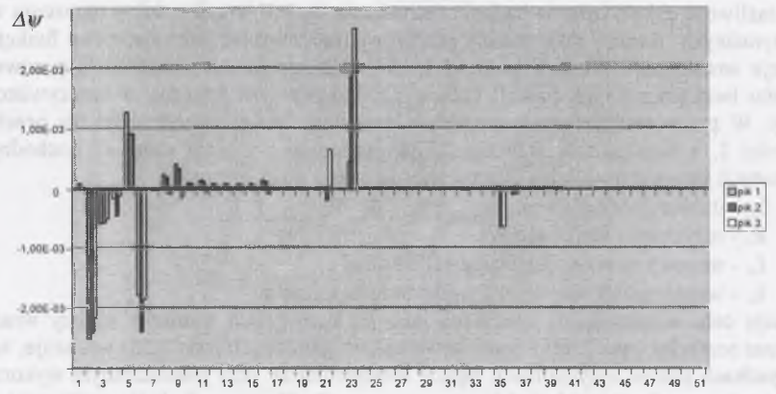
Rys. 7.49. Charakterystyka dynamiczna asynchronicznego silnika jednoklatkowego

Fig. 7.49. Dynamic characteristic of a squirrel cage asynchronous motor

W wyniku rozwiązania modelu silnika elektrycznego połączonego z modelem układu mechanicznego otrzymano charakterystykę dynamiczną momentu napędowego, przedstawioną na rysunku 7.49.

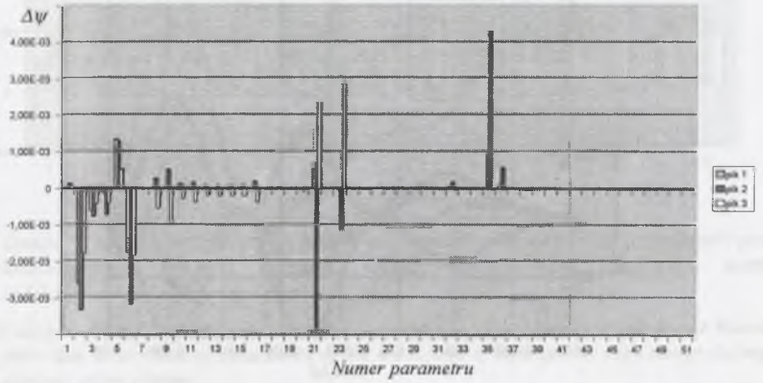
7.3.2. Określenie wpływu parametrów silnika na zjawiska dynamiczne w parach kinematycznych

Analiza dynamiczna złożonych układów elektromechanicznych wymaga jednoczesnego rozpatrzenia zjawisk dynamicznych zarówno w części mechanicznej, jak i elektrycznej. Ze względu na występujące sprzężenia parametry części mechanicznej mają wpływ na wielkości dynamiczne w części elektrycznej i odwrotnie. Zbadanie tego wpływu jest możliwe za pomocą metod analizy wrażliwości. Badania takie przeprowadzono z wykorzystaniem modelu dynamicznego badanego układu. Określono wpływ najważniejszych parametrów silnika jednoklatkowego, takich jak: indukcyjność główna, indukcyjności rozproszenia, rezystancja fazy stojana oraz rezystancja klatki wirnika, na wartości oddziaływań dynamicznych (rys. 7.50, 7.51) w poszczególnych parach kinematycznych układu mechanicznego. Wyniki takie wykorzystuje się zarówno do optymalizacji i wzajemnego „dostrojenia" podukładów, jak również do zwiększenia dokładności modelu dynamicznego. Analizując wpływ poszczególnych parametrów na badane zjawiska dynamiczne, można wskazać te parametry, które należy szczególnie dokładnie wyznaczyć, gdyż decydują one o jakości i wiarygodności otrzymanych wyników symulacji komputerowych.



Rys. 7.50. Względne przyrosty wartości maksymalnych funkcji celu opisujących moment w pierwszej parze kinematycznej podczas rozruchu układu, spowodowane przyrostem wartości parametrów modelu części elektrycznej (1÷5) i mechanicznej (6÷51), gdzie: 1- L_m, 2-L_s, 3-L_r, 4-R_s, 5-R_r, 6÷21 – masowe momenty bezwładności i masy, 22÷36 – wybrane współczynniki sztywności wałków, zazębień i łożysk, 37÷51 – współczynniki tłumienia

Fig. 7.50. Relative changes of peak values of the objective function describing the torque on the 1st kinematic pair of the machine due to increase of some parameters of the electric (1-5) and mechanical (6÷51) parts of the system during the start-up, where: 1- L_m, 2-L_s, 3-L_r, 4-R_s, 5-R_r, 6÷21 - selected mass moments of inertia and masses, 22÷36 - selected stiffness coefficients of shafts, meshes and bearings, 37÷51 - damping coefficients



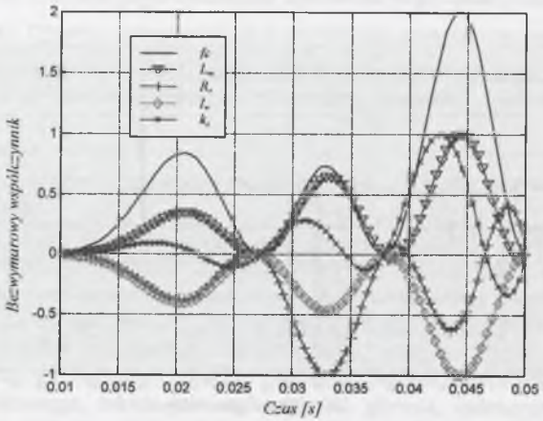
Rys. 7.51. Względne zmiany wartości maksymalnych funkcji celu opisujących moment na wale głównym maszyny podczas rozruchu układu, spowodowane przyrostem wartości niektórych parametrów modelu części elektrycznej i mechanicznej

Fig. 7.51. Relative changes of peak values of the objective function describing the torque on the output shaft of the machine due to increase of some parameters of the electromagnetic and mechanical parts of the system during the start-up

Z punktu widzenia efektywności procesu optymalizacji istotnych informacji dostarcza analiza czasowych przebiegów pochodnych funkcji celu. Umożliwia ona szersze spojrzenie na wrażliwość układu oraz na badanie zachowania funkcji wrażliwości w otoczeniu wartości maksymalnych. Analizy takie można przeprowadzać, stosując bezwymiarowe funkcje celu i funkcje wrażliwości układu (rys. 7.52 i 7.53). Istnieje również możliwość porównywania kształtu bezwymiarowych funkcji czasowych, których sens fizyczny w rzeczywistości jest różny. W pracy zastosowano następujące kryterium: funkcje wrażliwości nie przekraczają wartości 1, a funkcja celu wartości 2. Zamieszczono przebiegi czasowe pochodnych dla wybranych parametrów silnika elektrycznego i części mechanicznej:

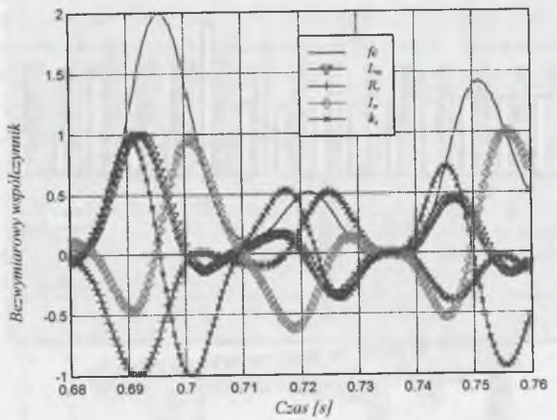
- L_m - indukcyjność główna,
- R_r - rezystancja klatki wirnika,
- I_w - masowy moment bezwładności wirnika,
- k_s - współczynnik sztywności wałka bezpieczeństwa.

Funkcję celu oznaczono na rysunkach jako *fc*. Porównanie wyników analizy wrażliwości podczas rozruchu (rys. 7.52) i pracy w warunkach ustalonych (rys. 7.53) wskazuje, że w obu przypadkach proces optymalizacji będzie efektywniejszy przy jednoczesnym wykorzystaniu parametrów mechanicznych i elektromagnetycznych. Ekstrema funkcji wrażliwości na ogół układają się w różny sposób w stosunku do wartości maksymalnych. Przykładowo, sztywność wałka bezpieczeństwa wywiera znaczny wpływ na wartości maksymalne funkcji celu podczas rozruchu, a bardzo mały w warunkach ustalonych. Natomiast parametry elektryczne w znaczny sposób oddziałują na wartości maksymalne sił w pierwszym i ostatnim wałku przekładni zarówno podczas rozruchu, jak i pracy pod obciążeniem (rys. 7.50, 7.51). Jednocześnie znak pochodnej, ze względu na rozpatrywane parametry elektromagnetyczne, określający ich jakościowy wpływ, jest jednakowy prawie dla wszystkich maksimów (rys. 7.54, 7.55). Dzięki temu parametry te podobnie wpływają na badane funkcje i nadają się do wykorzystania zarówno w procesie optymalizacji, jak i aktywnego sterowania poziomem drgań.



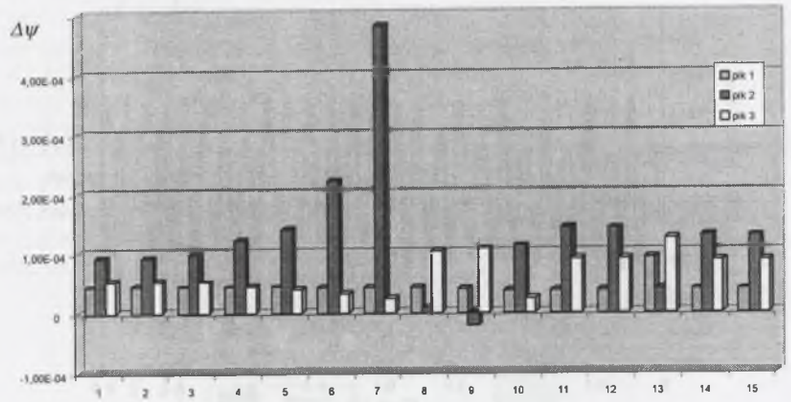
Rys. 7.52. Przebiegi bezwymiarowych funkcji celu i wrażliwości ze względu na wybrane parametry silnika i przekładni podczas rozruchu układu

Fig. 7.52. Changes of normalized objective and sensitivity functions due to selected parameters of the motor and gearbox during start up



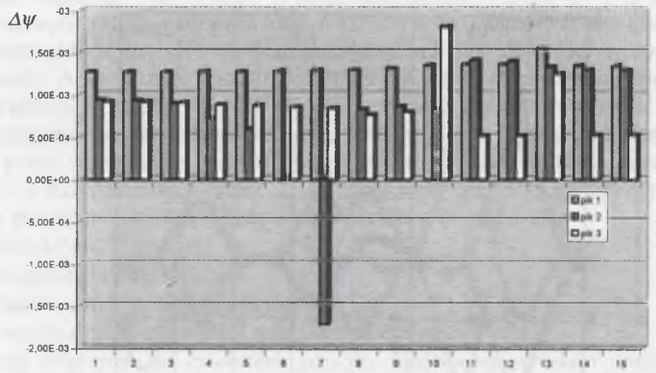
Rys. 7.53. Przebiegi bezwymiarowych funkcji celu i wrażliwości ze względu na wybrane parametry silnika i przekładni w warunkach ustalonych

Fig. 7.53. Changes of normalized objective and sensitivity functions due to selected parameters of the motor and gearbox during steady-state conditions



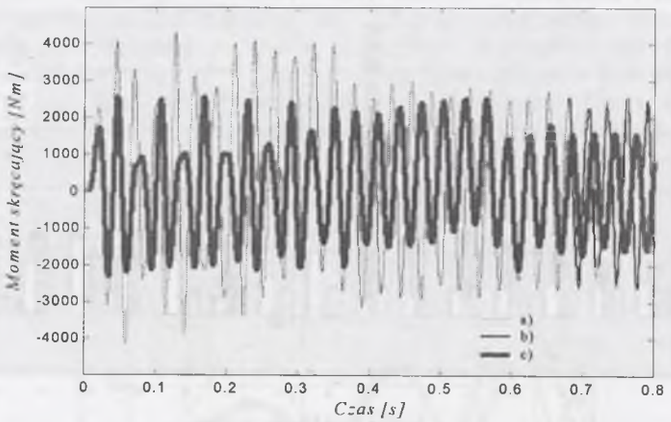
Rys. 7.54. Zmiany wartości maksymalnych funkcji celu opisujących siły w poszczególnych parach kinematycznych podczas rozruchu układu, spowodowane przyrostem wartości indukcyjności pola głównego silnika

Fig. 7.54. Changes of peak values of the objective function describing forces in particular kinematic pairs due to increase of inductance of the main field of the squirrel cage motor during the start-up of the system



Rys. 7.55. Zmiany wartości funkcji celu opisujących siły w parach kinematycznych podczas rozruchu układu, spowodowane przyrostem wartości rezystancji wirnika silnika klatkowego

Fig. 7.55. Changes of peak values of the objective function describing forces in kinematic pairs due to increase of resistance of the rotor of the squirrel cage motor during the start-up



Rys. 7.56. Przebiegi momentu skręcającego wałek bezpieczeństwa dla układu: a) przed optymalizacją, b) po optymalizacji wybranych parametrów silnika napędowego, c) po optymalizacji silnika oraz sztywności wałka

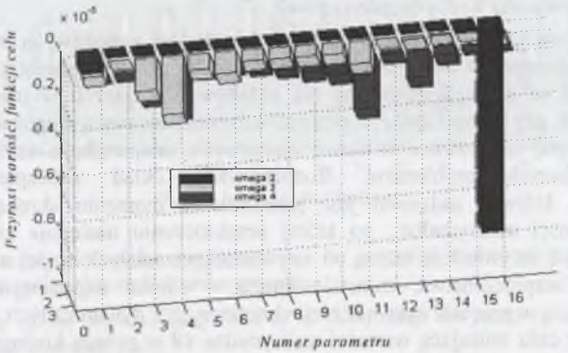
Fig. 7.56. Torsional moment in a safety shaft: a) before optimization, b) after optimization of selected parameters of an electric motor, c) after optimization of the electric motor and stiffness of the shaft

Duża wrażliwość maksymalnych wartości sił w części mechanicznej na parametry elektromagnetyczne (rys. 7.54, 7.55) wskazuje, że pominięcie zjawisk dynamicznych w silniku napędowym może prowadzić do znacznych błędów w otrzymanych wynikach symulacji komputerowych, szczególnie w stanach nieustalonych. Zamieszczone wyniki obliczeń numerycznych wskazują, że najbardziej efektywnym podejściem do zagadnień optymalizacji cech dynamicznych elektromechanicznych układów napędowych jest wzajemne

dostrojenie części elektromagnetycznej i mechanicznej poprzez odpowiedni dobór ich parametrów konstrukcyjnych. Jednoczesne zastosowanie parametrów mechanicznych i elektrycznych zapewnia uzyskanie najmniejszych wartości maksymalnych oddziaływań dynamicznych w parach kinematycznych układu, co przedstawiono na rysunku 7.56.

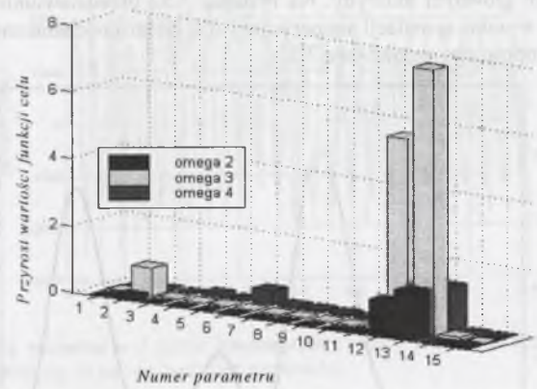
7.3.3. Badanie wrażliwości wartości własnych

Wyniki analizy wrażliwości stosowane są jako narzędzie wspomagające proces doboru zmiennych decyzyjnych do badań optymalizacyjnych. Podczas optymalizacji charakterystyk dynamicznych, opisanych zarówno w dziedzinie czasu, jak i częstotliwości, należy uwzględnić również zmiany wartości własnych i wektorów własnych, wynikające ze zmian wartości parametrów modelu.



Rys. 7.57. Przewidywane przyrosty wartości własnych ze względu na przyrost poszczególnych parametrów bezwładności

Fig. 7.57. Predicted increments of eigenvalues due to increase of particular inertia parameters



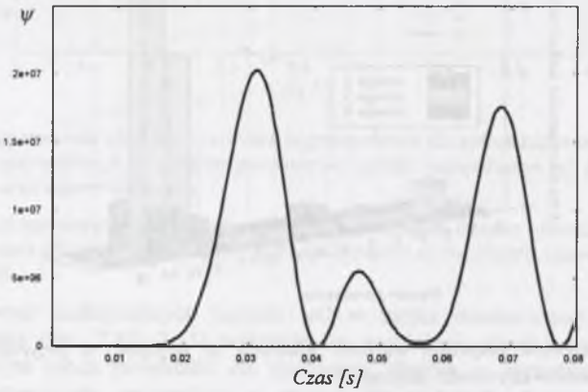
Rys. 7.58. Przewidywane przyrosty wartości własnych ze względu na przyrost poszczególnych parametrów sztywności skrętnej

Fig. 7.58. Predicted increments of eigenvalues due to increase of particular torsional stiffness coefficients

Zbiór zmiennych decyzyjnych do optymalizacji określono uwzględniając wyniki analizy wrażliwości wartości własnych. Ze względu na brak szczegółowych informacji dotyczących zjawisk rozpraszania energii w układzie, badania przeprowadzono jedynie dla wybranych parametrów określających sztywności i bezwładności elementów układu napędowego (rys. 7.57, 7.58). Analizowano trzy najniższe, niezerowe wartości własne. Analizę wrażliwości przeprowadzono metodą sprzężoną, która może być stosowana również do układów z wielokrotnymi wartościami własnymi. Wyniki obliczeń wskazują, że współczynnik sztywności wałka bezpieczeństwa (parametr nr 2 na rysunku 7.58) ma niewielki wpływ na podstawową niezerową częstość własną i stosunkowo duży wpływ na drugą częstość. Można zatem założyć, że zmiany wartości parametru w procesie optymalizacji nie powinny powodować znacznych zmian podstawowej częstości własnej układu.

7.3.4. Dobór sztywności wałka bezpieczeństwa

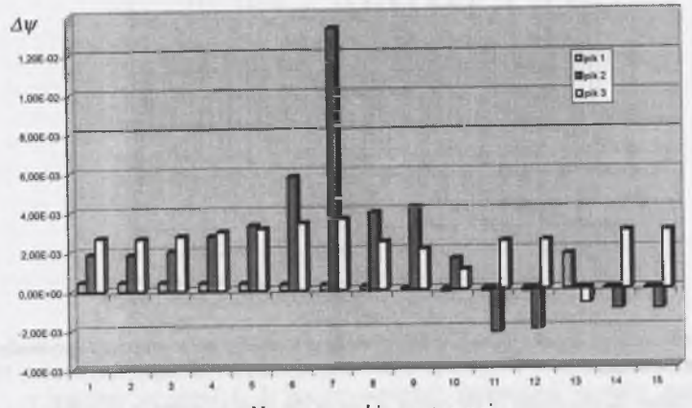
Jednym ze sposobów zabezpieczenia drogich układów napędowych o dużej mocy jest wprowadzenie elementu o mniejszej wytrzymałości, który ulega zniszczeniu w sytuacjach awaryjnych. Jest to szczególnie ważne dla układów pracujących w trudnych warunkach eksploatacyjnych, gdy niemożliwe jest przeprowadzenie naprawy w miejscu awarii. Elementy takie są zazwyczaj montowane w łatwo dostępnych miejscach, a szybka wymiana nie nastręcza większych problemów. Rozpatrywany układ zabezpieczono wałkiem bezpieczeństwa, którego zadaniem jest przeniesienie momentu skręcającego tylko do określonej wartości maksymalnej, po której przekroczeniu następuje zniszczenie wałka. Wałek cechuje się sztywnością niższą od sztywności pozostałych części układu. Sztywność skrętną wałka bezpieczeństwa, zainstalowanego w silniku napędowym, wybrano jako zmienną decyzyjną w procesie optymalizacji charakterystyk dynamicznych układu. Do badań przyjęto funkcję celu opisującą wartości maksymalne sił w parach kinematycznych układu. Przeprowadzono analizę wrażliwości sił dynamicznych w 15 wybranych parach kinematycznych na wartość współczynnika sztywności wałka (rys. 7.60). Na tej podstawie stwierdzono, że parametr nadaje się do badań optymalizacyjnych, gdyż wywiera jednakowy wpływ na większość wartości maksymalnych. Do określenia funkcji celu wybrano moment dynamiczny na wale głównym maszyny. Na rysunku 7.59 przedstawiono przebieg funkcji celu otrzymanej w wyniku symulacji numerycznej dla elektromechanicznego modelu o 37 stopniach swobody opisanego w rozdziale 7.3.1.



Rys. 7.59. Funkcja celu $\psi(t)=M_{15}^2(t)$

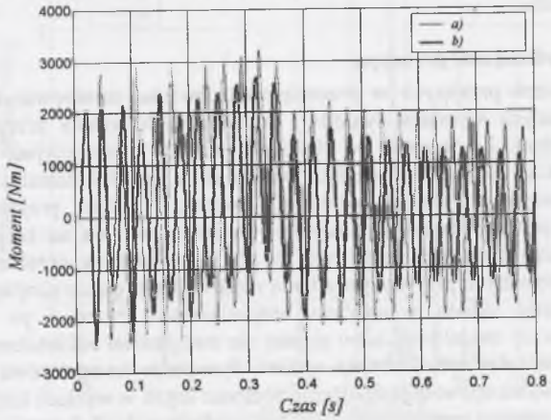
Fig. 7.59. Objective function $\psi(t)=M_{15}^2(t)$

W wyniku prowadzonego procesu optymalizacji określono optymalną wartość współczynnika sztywności. Wyznaczony parametr wprowadzono do modelu dynamicznego i przeprowadzono symulacje numeryczne celem porównania oddziaływań dynamicznych w układzie przed optymalizacją i po optymalizacji.



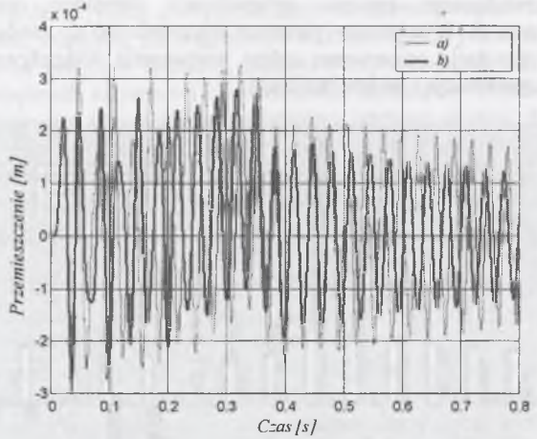
Rys. 7.60. Wpływ sztywności wałka bezpieczeństwa na wartości maksymalne sił dynamicznych w poszczególnych parach kinematycznych

Fig. 7.60. Influence of the stiffness coefficient of a safety shaft on peaks of dynamic forces in particular kinematic pairs



Rys. 7.61. Przebieg momentu w 1 parze kinematycznej układu z wałkiem bezpieczeństwa: a) przed optymalizacją, b) po optymalizacji sztywności

Fig. 7.61. Dynamic torsional moment in the 1st kinematic pair with a safety shaft: a) before and b) after optimization



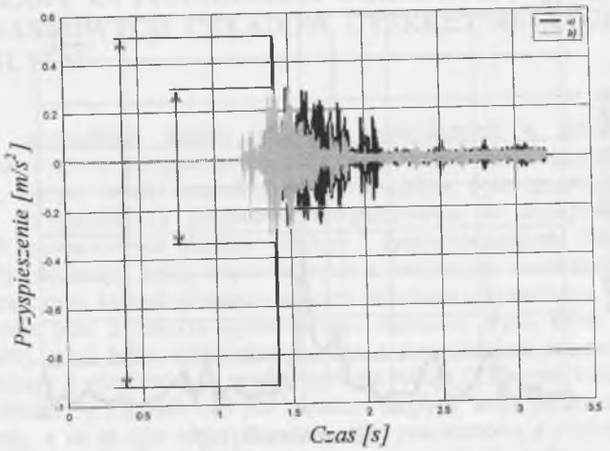
Rys. 7.62. Przemieszczenie środka jednego z łożysk wału w kierunku osi x: a) przed optymalizacją, b) po optymalizacji

Fig. 7.62. Translation displacement of the centre of one of the shaft bearings in direction of x-axis: a) before optimisation and b) after optimisation

Wyniki symulacji numerycznych dla wybranej pary kinematycznej przedstawiono na rysunkach 7.61 i 7.62. Wykazano, że właściwy dobór sztywności omawianego wałka powoduje zmniejszenie zarówno momentów skręcających w parach kinematycznych układu (rys. 7.61), jak również oddziaływań w punktach podparcia wałów (rys. 7.62). Zostało to potwierdzone podczas badań doświadczalnych, polegających na pomiarze przyspieszeń drgań na korpusie przekładni.

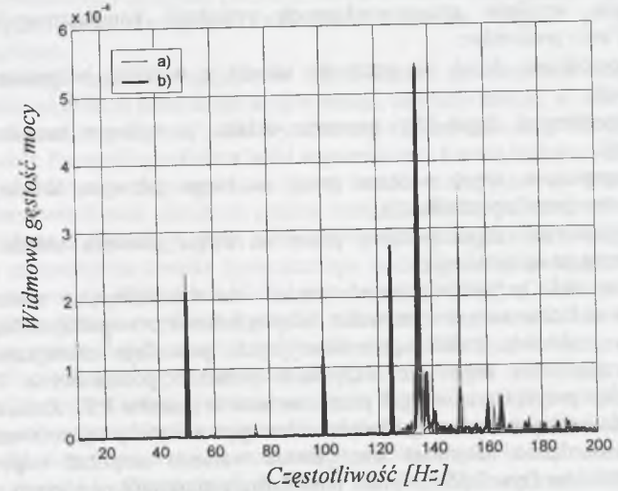
7.3.5. Badania doświadczalne prototypu

Weryfikacja założeń przyjętych w procesie modelowania, zastosowanych algorytmów obliczeń i otrzymanych wyników symulacji numerycznych została przeprowadzona na drodze doświadczalnej. Ze względu na złożoność postaci konstrukcyjnej analizowanego układu nie było możliwości bezpośredniego pomiaru sił w parach kinematycznych. Dlatego też przeprowadzono weryfikację pośrednią, poprzez pomiar przyśpieszeń drgań, rejestrowanych za pomocą dziesięciu czujników rozmieszczonych na korpusie maszyny. Miejsca zamocowania czujników określono na podstawie analizy przebiegów sygnałów drganiowych, symulowanych przy wykorzystaniu modelu drgań giętno-skrętnych (rys. 7.42). Rozpatrzono warianty układu z wałkiem bezpieczeństwa przed i po optymalizacji. Wprawdzie opracowany model przekładni zębatej nie uwzględniał odkształceń korpusu, lecz zamodelowano podatności łożyskowania wałów. Symulacje komputerowe wykazały, że zmiana sztywności wałka spowoduje obniżenie poziomu drgań w węzłach łożyskowych (rys. 7.62). Stwierdzono również zmniejszenie amplitud uogólnionych sił dynamicznych w parach kinematycznych układu (rys. 7.61), powodujące zmniejszenie amplitud momentu napędowego silnika. Ze względu na to, że korpus silnika zamocowano do korpusu przekładni za pomocą połączenia kołnierzowego, zmienny moment napędowy wywołuje dynamiczny moment reakcji oddziałujący na korpus maszyny. Drgania węzłów łożyskowych oraz dynamiczny moment reakcji są zatem głównymi źródłami generowania drgań rejestrowanych na korpusie zarówno podczas rozruchu, jak i biegu jałowego.



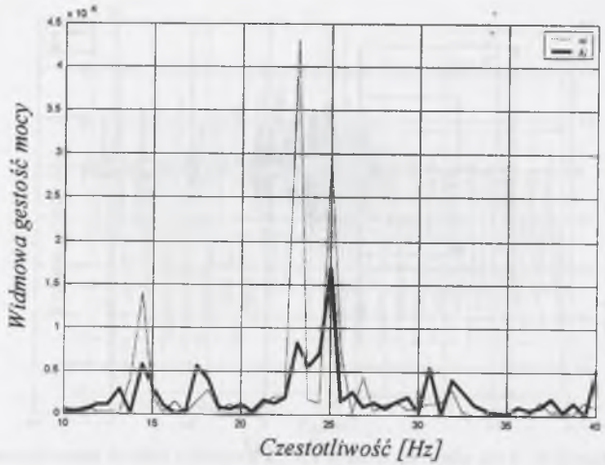
Rys. 7.63. Przebiegi przyspieszeń drgań zarejestrowane na korpusie maszyny podczas rozruchu układu z wałkiem: a) przed i b) po optymalizacji. Zaznaczono wartości szczytowe dla obu przebiegów

Fig. 7.63. Acceleration of vibrations measured on the housing of the machine during the start of the system with the shaft: a) before and b) after optimization. The peak to peak values for both signals are marked



Rys. 7.64. Widmowa gęstość mocy sygnału przyspieszenia drgań, zarejestrowanego na korpusie maszyny podczas biegu jałowego, dla układu z wałkiem: a) przed i b) po optymalizacji (zakres 10-200 Hz)

Fig. 7.64. Power spectral density of the acceleration of vibrations signal measured on the housing of the machine during idle running of the system with the shaft: a) before and b) after optimization (frequency range 10-200 Hz)



Rys. 7.65. Widmowa gęstość mocy sygnału przyspieszenia drgań, zarejestrowanego na korpusie maszyny podczas biegu jałowego, dla układu z wałkiem: a) przed i b) po optymalizacji (zakres 10-40 Hz)

Fig. 7.65. Power spectral density of the acceleration of vibrations signal measured on the housing of the machine during idle running of the system with the shaft: a) before and b) after optimization (frequency range 10-40 Hz)

Na podstawie wyników przeprowadzonych symulacji komputerowych określono następujące warianty pomiarów:

- pomiar przyspieszeń drgań dla rozruchu układu z wałkiem bezpieczeństwa przed optymalizacją,
- pomiar przyspieszeń drgań dla rozruchu układu z wałkiem bezpieczeństwa po optymalizacji,
- pomiar przyspieszeń drgań podczas pracy na biegu jałowym układu z wałkiem bezpieczeństwa przed optymalizacją,
- pomiar przyspieszeń drgań podczas pracy na biegu jałowym układu z wałkiem bezpieczeństwa po optymalizacji.

Analizując wyniki przeprowadzonych badań doświadczalnych, stwierdzono, że zastosowanie w układzie napędowym wałka bezpieczeństwa o współczynniku sztywności określonym na podstawie badań optymalizacyjnych, powoduje zmniejszenie wartości chwilowych przyśpieszeń drgań we wszystkich punktach pomiarowych. Przykładowe przebiegi sygnałów przyśpieszenia drgań przedstawiono na rysunku 7.63. Zmiana sztywności nie spowodowała istotnych zmian w składzie widma gęstości mocy rejestrowanego sygnału (rys. 7.64). Stwierdzono natomiast zmniejszenie wartości amplitud odpowiadających niektórym częstościom (rys. 7.65). Wyniki potwierdzają słuszność przyjętych założeń oraz poprawność opracowanych algorytmów obliczeń numerycznych, gdyż model prawidłowo opisuje jakościowy wpływ cech konstrukcyjnych na zjawiska dynamiczne w parach kinematycznych. Weryfikacja ilościowa nie jest możliwa ze względu trudności pomiaru sygnałów generowanych w procesie symulacji numerycznej. Ponadto stwierdza się, że wprowadzenie do układu elementu zabezpieczającego o stosunkowo niskiej sztywności może być tanim i szybkim sposobem oddziaływania na charakterystyki dynamiczne. Jest to szczególnie ważne w przypadku wielowariantowej konfiguracji układu napędowego.

8. PRZYKŁADY OPTYMALIZACJI CHARAKTERYSTYK REZONANSOWYCH UKŁADÓW DYSKRETNO-CIĄGŁYCH I CIĄGŁYCH

Algorytmy optymalnego doboru własności dynamicznych w dziedzinie częstości i przygotowane programy komputerowe, które opisano w rozdziale 6, mają charakter ogólny. Celem badań, których wyniki omówiono w tym rozdziale, było sprawdzenie możliwości zastosowania przygotowanych programów komputerowych do zagadnień kształtowania charakterystyk rezonansowych układów ciągłych i dyskretno-ciągłych. Omówione zostaną dwa przykłady, dotyczące belek wspornikowych z pasywnymi tłumikami drgań o różnej postaci konstrukcyjnej, których parametry dobrano metodami optymalizacji.

Istnieje wiele prac z zakresu dynamicznego tłumienia drgań belek [7,21,42,58,63, 68,127,167,169], gdyż belka wspornikowa może z powodzeniem stanowić model wielu elementów maszyn i urządzeń (np. model ramienia robota [21], zęba koła zębatego [56], korpusu przekładni itp.). Układ taki jest układem ciągłym, mającym nieskończenie wiele stopni swobody, a co za tym idzie, charakterystykę rezonansową z wieloma składowymi. Zastosowanie dynamicznego tłumika drgań o jednym stopniu swobody do eliminacji drgań takiego układu może się okazać nieefektywne. Jednym ze sposobów rozwiązania tego problemu jest wprowadzenie kilku tłumików dynamicznych, np. typu masa-sprężyna [58] lub bezmasowych elementów sprężyna-tłumik [169]. Układy takie analizuje się, wykorzystując wyniki analizy modalnej. Zbadanie wpływu wartości tłumienia każdego z elementów typu sprężyna-masa-tłumienie na wartości własne i drgania wymuszone umożliwia optymalny dobór cech konstrukcyjnych układu [58,169]. Zastosowanie wielu tłumików drgań o szerokim zakresie częstotliwości zwiększa zdolności tłumienia drgań przy wzbudzeniu szerokopasmowym.

Metodę redukcji drgań, polegającą na odpowiednim umieszczeniu dodatkowej masy, której położenie określano technikami optymalizacji, zaprezentowano w pracy [68]. Badania prowadzono dla prosto podpartej belki wymuszanej siłą harmoniczną. Wrażliwość wartości własnych modelu Bernoulliego-Eulera belki wspornikowej z masą na końcu badano natomiast w artykule [42]. Drgania tłumiono za pomocą tłumika umieszczonego pomiędzy końcami belki. Określono wrażliwość układu na zmiany stałej tłumienia i położenia tłumika

Bardzo efektywną eliminację drgań rezonansowych złożonych układów drgających można uzyskać przy zastosowaniu tłumika dynamicznego, będącego układem ciągłym, np. w postaci płyty pierścieniowej [6,108] lub belki wspornikowej [21,109]. Celem takich badań jest zazwyczaj minimalizacja amplitud drgań dla pierwszego rezonansu. Jednakże porównanie wyników eksperymentalnych z wynikami badań optymalizacyjnych wskazuje na znacznie większe możliwości tego typu tłumików [6,21]. Przykładem może być ramię robota o strukturze belki wspornikowej, poruszające się z dużymi prędkościami pomiędzy dwoma stanowiskami roboczymi. Nagłe zatrzymanie ramienia generuje nadmierne drgania. Badania zachowania układu z tłumikiem konwencjonalnym wskazują, że istnieje zależność pomiędzy położeniem ramienia i efektywnością działania tłumika. Wprowadzenie tłumika w postaci belki wspornikowej powoduje, że efektywność eliminacji drgań nie zależy od orientacji układu [21]. Inne badania wskazują natomiast na możliwość rozstrojenia większej liczby rezonansów za pomocą jednego tłumika ciągłego [108,109].

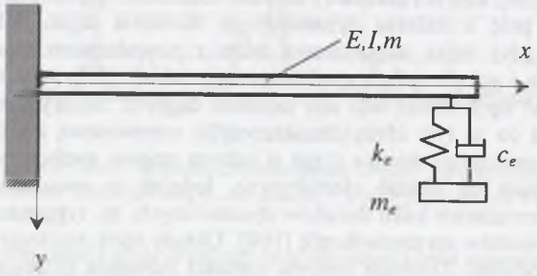
8.1. OPTYMALIZACJA CHARAKTERYSTYKI REZONANSOWEJ UKŁADU CIĄGŁEGO Z DYSKRETNYM TŁUMIKIEM DRGAŃ

Jako przykład układu dyskretno-ciągłego wybrano belkę utwierdzoną z tłumikiem w postaci masy zawieszonej na sprężynie, z dołączonym elementem tłumiącym (rys. 8.1). Dla belki zginanej równanie ruchu przyjmie postać:

$$EI\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4}+m\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}=F_e(t) \tag{8.1}$$

Równanie ruchu tłumika jest następujące:

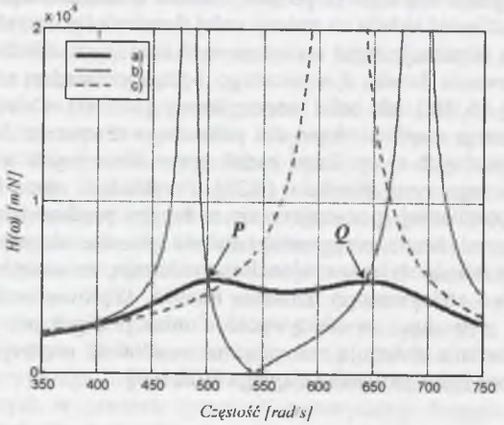
$$F_e(t)=-m_e\ddot{y}_e(t)=c_e(\dot{y}_e-\dot{y}_z)+k_e(y_e-y_z) \tag{8.2}$$



Rys. 8.1. Model belki z dynamicznym tłumikiem o jednym stopniu swobody

Fig. 8.1. Model of a cantilever beam with one degree of freedom dynamic vibration damper

Analityczne rozwiązanie zagadnienia doboru cech dynamicznych powyższego układu z tłumikiem można uzyskać np. poprzez rozwinięcie w szereg funkcji własnych. Jednakże niedogodnością takiego podejścia jest mała uniwersalność, ponieważ ogranicza się ono do prostych układów, a każda zmiana postaci konstrukcyjnej wymaga przeprowadzenia wielu operacji matematycznych.



Rys. 8.2. Funkcje przejścia belki utwierdzonej: a) z tłumikiem zawierającym element dyssypacyjny, b) z tłumikiem bez elementu dyssypacyjnego, c) bez tłumika

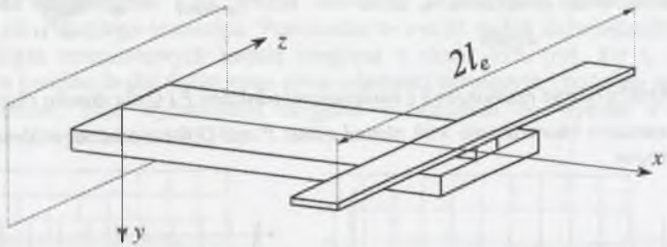
Fig. 8.2. Transfer functions of a cantilever beam: a) with a dynamic damper, b) with a damper without damping, c) without damper

Bardziej ogólnym sposobem rozwiązania tego zagadnienia jest dyskretyzacja z wykorzystaniem metody sztywnych bądź odkształcalnych elementów skończonych, a następnie zastosowanie metod optymalizacji do doboru cech dynamicznych tłumika. Badania takie przeprowadzono z wykorzystaniem wcześniej przedstawionego algorytmu. Belkę podzielono na 8 sztywnych elementów skończonych. Model belki z tłumikiem posiadał 49 stopni swobody, a wyniki doboru cech dynamicznych tłumika przedstawiono na rysunku 8.2.

Belka z dynamicznym tłumikiem drgań, dobranym w procesie optymalizacji, wykazuje znaczne zmniejszenie amplitud przemieszczeń w zakresie pierwszego rezonansu (rys. 8.2 a). Porównując przebiegi charakterystyk rezonansowych układu z tłumieniem i bez tłumienia przedstawione na rysunku 8.2 a i b, można stwierdzić, że wartości maksymalne amplitud dla przypadku tłumienia odpowiadają punktom charakterystycznym *P* i *Q*, zatem znalezione optimum jest optimum globalnym.

8.2. OPTYMALIZACJA CHARAKTERYSTYK DYNAMICZNYCH UKŁADU CIĄGŁEGO Z TŁUMIKIEM CIĄGŁYM

Zastosowanie tłumika drgań w postaci masy skupionej do układu o wielu stopniach swobody umożliwia skuteczne eliminowanie tylko jednego rezonansu. Może to się okazać niewystarczające, szczególnie wtedy, gdy zależy nam na obniżeniu zarówno poziomu drgań, jak i hałasu. Badania doświadczalne [108,109] wykazały, że dołączenie tłumika ciągłego, o postaci konstrukcyjnej zbliżonej do układu wyjściowego, umożliwia jednoczesne rozstrojenie kilku rezonansów. Jednakże dobór metodą doświadczalną cech konstrukcyjnych takiego tłumika jest procesem złożonym. Badania są kosztowne i pracochłonne, dlatego też przeprowadzono próby określenia długości tłumika metodami optymalizacji. Rozpatrywano przypadek belki o wymiarach *0,019 x 0,1 x 0,4 m* z tłumikiem o przekroju poprzecznym *0,002 x 0,03 m* (rys. 8.3), gdyż dla takich wartości dysponowano wynikami doświadczalnymi, pochodzącymi z testów modalnych [109].

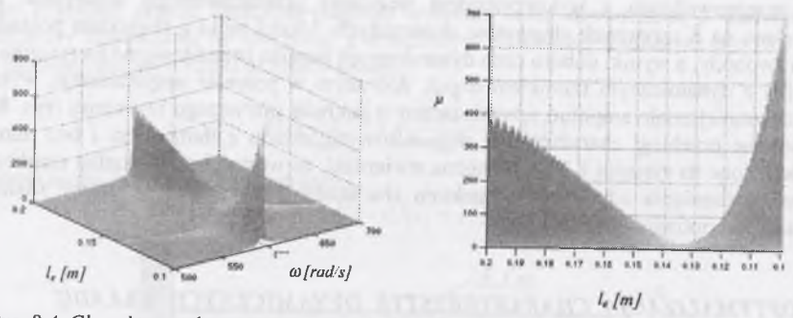


Rys. 8.3. Belka utwierdzona z ciągłym, dynamicznym tłumikiem drgań

Fig. 8.3. Cantilever beam with a continuous dynamic vibration damper

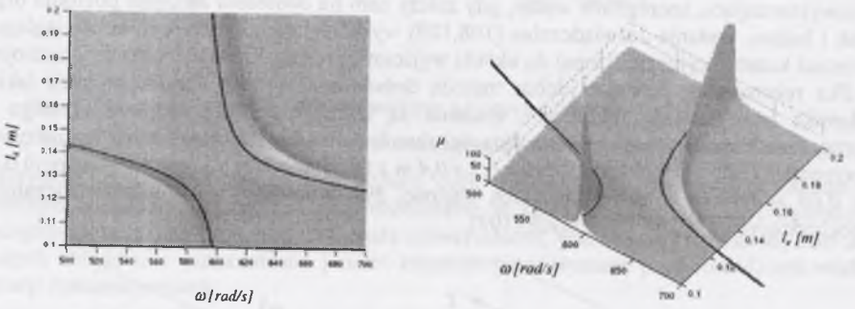
Porównując charakterystyki rezonansowe układu otrzymane dla różnych długości tłumika (rys. 8.4) można stwierdzić, że w zakresie długości l_e=*0,1÷0,2 m* istnieje wyraźne minimum globalne dla wartości około *0,134 m*. Jednakże minimalizacja amplitud drgań, przy wykorzystaniu funkcji celu opisującej wartości maksymalne w strefie rezonansu, wymaga zastosowania metod poszukiwania minimum globalnego, gdyż dla tak wybranej funkcji celu istnieje wiele minimów lokalnych. W takim przypadku bardzo efektywna okazuje się optymalizacja prowadzona według schematu opisanego w podrozdziale 7.2.6, gdyż krzywe, opisujące położenie punktów P i Q, dla pierwszego rezonansu, mają tylko jedno minimum, odpowiadające wartości około *0,134 m* (rys. 8.5 i 8.6). Wyznaczone w ten sposób optimum

jest niezależne od opisu własności tłumiących w układzie. Szczególnie ta ostatnia cecha jest bardzo ważna z punktu widzenia dokładności przyjętego modelu układu i braku możliwości precyzyjnego opisu własności tłumiących.



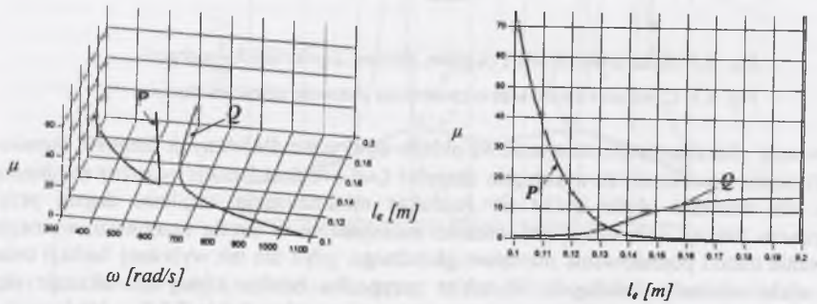
Rys. 8.4. Charakterystyka rezonansowa w funkcji długości tłumika ciągłego

Fig. 8.4. Resonance characteristic versus the length of a continuous dynamic vibration damper



Rys. 8.5. Charakterystyka rezonansowa z naniesionymi punktami P i Q dla tłumika ciągłego

Fig. 8.5. Resonance characteristic with plotted points P and Q for a continuous dynamic vibration damper



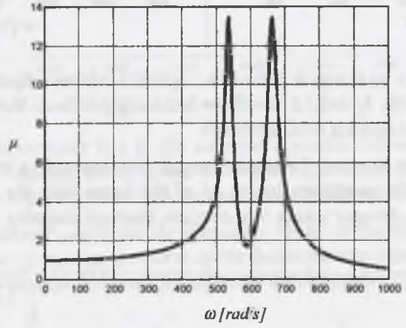
Rys. 8.6. Krzywe położeń punktów P i Q w funkcji długości tłumika

Fig. 8.6. Curves of positions of points P and Q versus the dynamic damper`s length

Analizowany układ zamodelowano z wykorzystaniem metody sztywnych elementów skończonych i dokonano następującego podziału na elementy skończone:

- belka - 8 elementów,
- tłumik - 8 elementów.

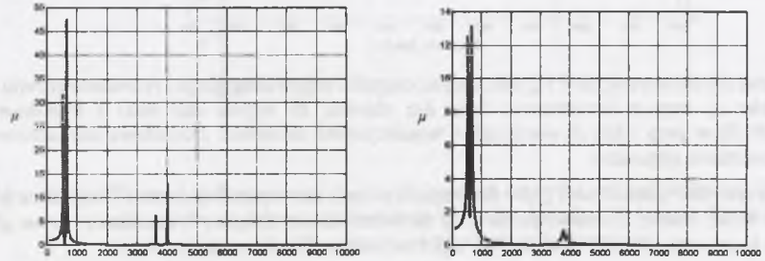
Tak przygotowany model o 96 stopniach swobody opisano układem równań różniczkowych (3.1) i wyznaczono widmową funkcję przejścia (4.50). Następnie przeprowadzono badania optymalizacyjne dla jednej zmiennej decyzyjnej, opisującej długość jednej gałęzi tłumika. Optymalizację przeprowadzono według schematu opisanego w podrozdziale 7.2.6. W wyniku obliczeń, prowadzonych dla pierwszej częstości rezonansowej układu, wyznaczono długość tłumika, który umożliwia rozstrojenie tej częstości (rys. 8.7).



Rys. 8.7. Pierwszy rezonans belki rozstrojony przez optymalny tłumik drgań

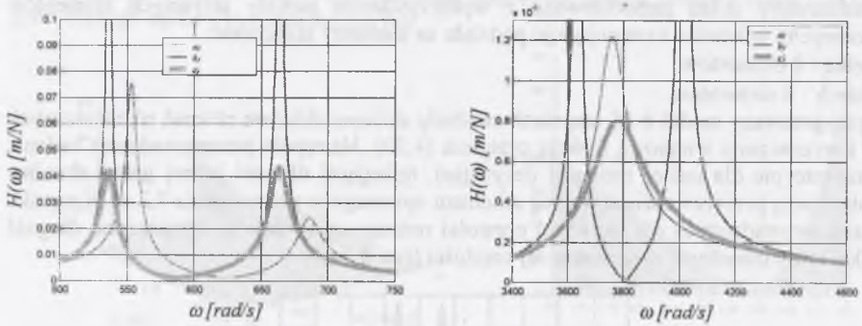
Fig. 8.7. First resonance of the system detuned with a dynamic damper after optimization

Analizując otrzymane wyniki obliczeń dla układu z tłumikiem po optymalizacji (przedstawione na rysunku 8.8), można zauważyć jednoczesne rozstrojenie zarówno pierwszego, jak i drugiego rezonansu. Potwierdza to wyniki badań doświadczalnych [109]. Amplituda drgań rezonansowych została obniżona o około 45% (rys. 8.9 a, c). Należy podkreślić, że pomimo braku dokładnego opisu własności tłumiących i podziału na niewielką liczbę elementów, błąd wyznaczenia długości w stosunku do wyniku z pomiarów doświadczalnych wyniósł około 0,5%.



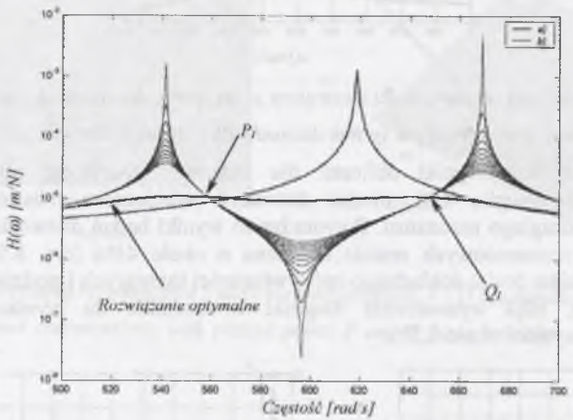
Rys. 8.8. Charakterystyki rezonansowe układu z dynamicznym tłumikiem drgań: a) bez tłumienia oraz b) z tłumieniem

Fig. 8.8. Resonance curves of the system with a dynamic vibration damper: a) without damping, b) with damping



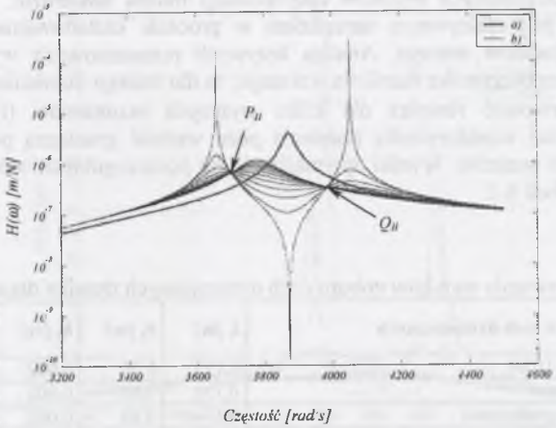
Rys. 8.9. Charakterystyki dla wybranych zakresów częstości odpowiadające pierwszemu i drugiemu rezonansowi: a) belki, b) belki z tłumikiem bez uwzględniania tłumienia, c) belki z tłumikiem z uwzględnieniem tłumienia wewnętrznego

Fig. 8.9. Characteristics for selected frequency ranges corresponding to the first and the second resonance: a) of the cantilever beam, b) of the beam with the damper without damping, c) of the beam with damper taking into account internal damping



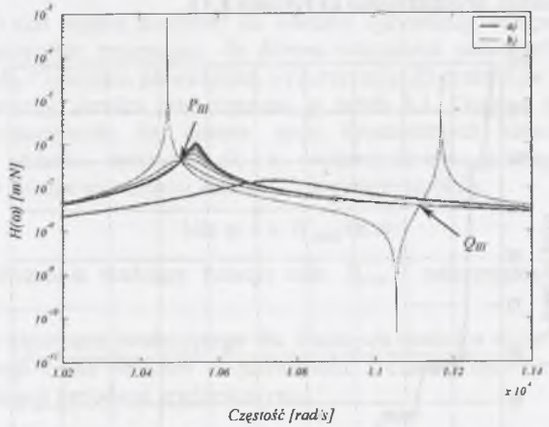
Rys. 8.10. Punkty charakterystyczne P i Q dla zakresu częstości odpowiadającego I rezonansowi belki, gdzie: a) krzywa rezonansowa belki bez tłumika, b) krzywe dla belki z tłumikiem wykreślone przy różnych wartościach współczynnika tłumienia. Dodatkowo zaznaczono rozwiązanie optymalne

Fig. 8.10. Characteristic points P and Q for the frequency range corresponding to the 1st resonance of the beam, where: a) resonance curve of the beam without damper, b) resonance curves of the beam with a damper obtained for different values of its internal damping



Rys. 8.11. Punkty charakterystyczne P i Q dla zakresu częstości odpowiadającego II rezonansowi belki, gdzie: a) krzywa rezonansowa belki bez tłumika, b) krzywe dla belki z tłumikiem wykreślone przy różnych wartościach współczynnika tłumienia

Fig. 8.11. Characteristic points P and Q for the frequency range corresponding to the 2nd resonance of the beam, where: a) resonance curve of the beam without damper, b) resonance curves of the beam with a damper obtained for different values of its internal damping



Rys. 8.12. Punkty charakterystyczne P i Q dla zakresu częstości odpowiadającego III rezonansowi belki, gdzie: a) krzywa rezonansowa belki bez tłumika, b) krzywe dla belki z tłumikiem wykreślone przy różnych wartościach współczynnika tłumienia

Fig. 8.12. Characteristic points P and Q for the frequency range corresponding to the 3rd resonance of the beam, where: a) resonance curve of the beam without damper, b) resonance curves of the beam with a damper obtained for different values of its internal damping

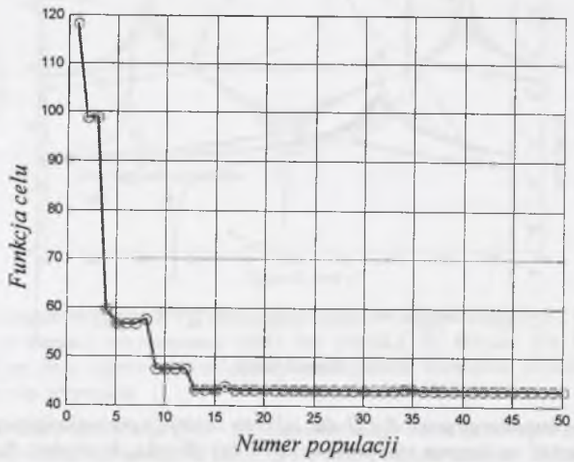
Na podstawie otrzymanych wyników optymalizacji można stwierdzić, że zastosowany schemat obliczeń jest efektywnym narzędziem w procesie kształtowania charakterystyk dynamicznych elementów maszyn. Analiza krzywych rezonansowych wykreślonych dla różnych wartości współczynnika tłumienia wskazuje, że dla małego tłumienia stałe punkty P i Q można zaobserwować również dla kilku wyższych rezonansów (rys. 8.10÷8.12). Zwiększanie wartości współczynnika tłumienia poza wartość graniczną powoduje jednak „rozmycie się" tych punktów. Wyniki optymalizacji dla poszczególnych wariantów obliczeń zamieszczono w tabeli 8.1.

Tabela 8.1

Zestawienie wyników doboru cech dynamicznych tłumika drgań

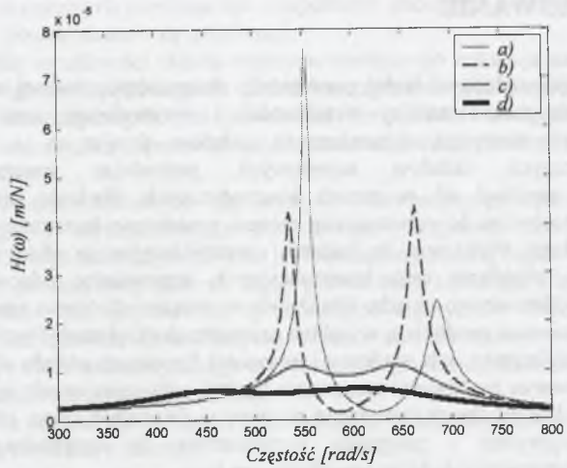
Lp.	Metoda doboru cech dynamicznych	l_e [m]	b_e [m]	h_e [m]	c_e [Ns/m]
1	Doświadczalna [109]	0,135	0,03	0,002	materiałowe
2	Odczyt z wykresu	0,134	0,03	0,002	materiałowe
3	Optymalizacja gradientowa	0,1348	0,03	0,002	materiałowe
4	Optymalizacja AG	0,1341	0,03	0,002	materiałowe
		0,1348			$3{,}736 \cdot 10^5$
5	Optymalizacja wszystkich parametrów (AG)	0,2	0,0426	0,0037	$1{,}019 \cdot 10^6$

Długości gałęzi tłumika wyznaczone różnymi metodami mają zbliżone wartości. Badania optymalizacyjne prowadzono również, wykorzystując algorytm ewolucyjny z reprezentacją zmiennoprzecinkową. Przebieg zmian funkcji celu opisującej wartość największej amplitudy krzywej rezonansowej w poszczególnych generacjach, podczas optymalizacji długości i współczynnika tłumienia, przedstawiono na rysunku 8.13.



Rys. 8.13. Przebieg zmian wartości funkcji celu najlepszego osobnika w poszczególnych pokoleniach. Zastosowano reprezentację zmiennoprzecinkową

Fig. 8.13. Changes of the objective function of the best individual in particular generations. The real value representation has been applied



Rys. 8.14. Charakterystyki rezonansowe układu z dynamicznym tłumikiem drgań: a) model początkowy, b) po optymalizacji długości, c) z dodatkowym tłumieniem, d) po optymalizacji wszystkich parametrów tłumika

Fig. 8.14. Resonance curves of the system with a dynamic damper: a) initial model, b) after optimization of the length, c) with additional damping, d) after optimization of all design parameters

Algorytm wykazał szybką zbieżność do wartości optymalnej. Przeprowadzono również badania optymalizacyjne zmierzające do doboru wszystkich parametrów konstrukcyjnych tłumika (rys. 8.14). Obliczenia prowadzono, wykorzystując 25 osobników w każdej populacji. Otrzymane parametry tłumika zamieszczono w tabeli 8.1. Główną zaletą zastosowania algorytmów ewolucyjnych do doboru cech dynamicznych tłumika była łatwość sformułowania zadania optymalizacji, z wykorzystaniem nieciągłej funkcji celu i ograniczeniami jedynie na wartości zmiennych decyzyjnych (8.3):

$$\operatorname{Min} \psi = a \cdot H_{\max}(\mathbf{b}, \omega) \tag{8.3}$$

gdzie: a - współczynnik skalujący funkcję celu, $H_{\max}$ - maksymalna wartość widmowej funkcji przejścia.

Zastosowanie algorytmu ewolucyjnego dla złożonych modeli o wielu stopniach swobody wymaga dłuższego czasu obliczeń w porównaniu z czasem rozwiązania analogicznego zadania optymalizacji metodami gradientowymi.

9. PODSUMOWANIE

Wyniki przeprowadzonych badań potwierdziły słuszność postawionej tezy. Dowiedziono, że zastosowanie metod analizy wrażliwości i optymalizacji umożliwia efektywne kształtowanie charakterystyk dynamicznych układów drgających, a w szczególności elektromechanicznych układów napędowych, powodując znaczne zmniejszenie maksymalnych amplitud sił w parach kinematycznych. Badania takie mogą być z powodzeniem stosowane do wspomagania procesu projektowo-konstrukcyjnego prototypów maszyn i urządzeń. Wykazano, że badania optymalizacyjne są efektywnym narzędziem wspomagającym określanie cech konstrukcyjnych, zapewniając odpowiednie własności dynamiczne projektowanego układu. Umożliwia to znaczne skrócenie czasu oraz obniżenie kosztów przygotowania produktu o wysokich parametrach eksploatacyjnych.

Jednolity, macierzowy opis struktury i własności fizycznych układu ułatwia uogólnienie algorytmów i stwarza możliwości stosowania funkcji celu opisujących jego własności oraz charakterystyki dynamiczne rozpatrywane zarówno w dziedzinie czasu, jak i częstotliwości. Opracowano algorytmy i programy komputerowe do optymalnego kształtowanie charakterystyk dynamicznych, które umożliwiają m.in.:

- analizę dynamiczną elektromechanicznych układów napędowych maszyn roboczych dużej mocy,
- ocenę wpływu poszczególnych parametrów modelu fizycznego na wartości sił dynamicznych w parach kinematycznych i na wybrane charakterystyki częstotliwościowe,
- optymalizację własności dynamicznych układu.

Prezentowane wyniki symulacji komputerowych, przeprowadzanych dla układów dynamicznych, pozwalają na wyciągnięcie następujących wniosków:

- opracowane algorytmy i programy komputerowe mają charakter ogólny i mogą być z powodzeniem stosowane do określania cech konstrukcyjnych układów elektromechanicznych o podobnej postaci konstrukcyjnej,
- zamieszczone wyniki badań potwierdziły, że prezentowane algorytmy mogą być zastosowane do badania układów dyskretnych, dyskretno-ciągłych oraz ciągłych,
- zaproponowane modele dynamiczne elektromechanicznych układów napędowych uwzględniają najważniejsze zjawiska decydujące o ich własnościach dynamicznych,
- wyniki optymalizacji cech dynamicznych układów napędowych potwierdziły utylitarny charakter opracowanej metodyki,
- przedstawione funkcje celu prawidłowo opisują zjawiska dynamiczne w parach kinematycznych i mogą być stosowane do doboru własności dynamicznych układów,
- metody optymalizacji umożliwiają odpowiedni dobór cech konstrukcyjnych układu, zapewniających minimalizację poziomu drgań,
- efektywnymi metodami optymalizacji dla rozpatrywanej klasy zagadnień są metody sekwencyjnego programowania liniowego i kwadratowego oraz, dla pewnej grupy zadań, algorytmy ewolucyjne,
- analiza wrażliwości może wspomagać budowę efektywnych i wiarygodnych modeli dynamicznych, uwzględniających te czynniki, które mają decydujący wpływ na dynamikę złożonych układów fizycznych,
- porównując wrażliwość badanych zjawisk na poszczególne parametry układu, można wskazać, które z parametrów modelu zasadniczo oddziałują na przyjętą funkcję celu i powinny być wyznaczane ze zwiększoną dokładnością,
- znaczne zmiany wartości współczynników wrażliwości w poszczególnych sekwencjach optymalizacji wskazują, że stosowanie metod analizy wrażliwości do wyboru zmiennych decyzyjnych powinno być uzupełnione badaniami wrażliwości wszystkich parametrów po zakończeniu optymalizacji,
- wyniki analizy wrażliwości układu elektromechanicznego wskazują na znaczny wpływ parametrów silnika napędowego na wartości maksymalne i przebiegi sił dynamicznych w parach kinematycznych, co potwierdza konieczność uwzględniania sprzężeń elektromechanicznych w opracowywanych modelach, szczególnie przy analizie stanów nieustalonych,
- przyjęcie zbioru zmiennych decyzyjnych, zawierającego parametry modelu elektrycznego i mechanicznego, pozwala na wzajemne dostrojenie obydwu podukładów, czego końcowym efektem jest obniżenie poziomu drgań.

Doświadczalne pomiary przyspieszeń drgań potwierdziły założenia przyjęte w procesie modelowania układu oraz poprawność opracowanych algorytmów obliczeń w zakresie jakościowego opisu zjawisk dynamicznych. Wyniki dotychczasowych badań świadczą o wysokiej efektywności matematycznego modelowania zjawisk dynamicznych, jak również metod analizy wrażliwości oraz optymalizacji.

Przeprowadzone badania teoretyczne i doświadczalne oraz analiza ich wyników wskazują na potrzebę dalszych badań w zakresie:

- rozbudowy nieliniowych modeli układów elektromechanicznych z uwzględnieniem losowych odchyłek parametrów i ich wpływu na zjawiska dynamiczne oraz z uwzględnieniem stochastycznego charakteru wymuszeń zewnętrznych,
- opracowania algorytmów modelowania drgań giętno-skrętnych układu napędowego wraz z korpusem,
- opracowania modeli układów elektromechanicznych z układami sterowania i aktywnej eliminacji drgań,
- dalszego rozwoju algorytmów analizy wrażliwości i optymalizacji cech dynamicznych układów napędowych,
- opracowania funkcji celu opisujących zjawiska, decydujące o trwałości i niezawodności układu.

LITERATURA

1. Abramson M.A., Chrissis J.W.: Sequential quadratic programming and the ASTROS structural optimization system. Structural Optimization, Vol. 15, pp. 24-32, Springer Verlag 1998.
2. Adams E., Keppler H., Schulte U.: On the simulation of vibrations of industrial gear drives (Complex interactions of physics, mathematics, numerics, and experiments). Archive of Applied Mechanics, Springer Verlag, Volume 65, Issue 3 (1995), pp. 142-160.
3. Amabili M., Fregolent A.: A method to identify modal parameters and gear errors by vibrations of a spur gear pair. Journal of Sound and Vibration, Vol. 214, No. 2, July 1998, pp. 339-357.
4. Andersson A.: An analytical study of the effect of the contact ratio on the spur gear dynamic response. ASME Journal of Mechanical Design, Volume 122, Issue 4 pp. 508-514.
5. Anthony D.K.: Robustness of optimal design solutions to reduce vibration transmission in a lightweight 2-d structure, Part III: Using both geometric redesign and the application of active vibration control. Journal of Sound and Vibration, August 2001, Vol. 245, No. 3, pp. 417-431.
6. Arpaci A.: Annular plate dampers attached to continuous systems. Journal of Sound and Vibration, Vol. 191, No. 5, April 1996, pp. 781-793.
7. Banerjee J.R.: Explicit frequency equation and mode shapes of a cantilever beam coupled in bending and torsion. Journal of Sound and Vibration, July 1999, Vol. 224, No. 2, pp. 267-281.
8. Bartelmus W.: Transformation of gear inter-teeth forces into acceleration and velocity. International Journal of Rotating Machinery, Gordon and Breach Publishing Group, November 1998, vol. 1, no. 11, pp. 1-16.
9. Berczyński S., Marchelek K.: Naukowe podstawy kształtowania właściwości dynamicznych obrabiarek. Szczecińskie Roczniki Naukowe, t. II, z.1, Szczecin 1987, s. 75-91.
10. Bessac F., Gagliardini L., Guyader J.-L.: Coupling eigenvalues and eigenvectors: a tool for investigating the vibroacoustic behavior of coupled vibrating systems. Journal of Sound and Vibration, Vol. 191, No. 5, Apr 1996, pp. 881-899.
11. Bestle D., Eberhard P.: Analyzing and optimizing multibody systems. Mech. Struct. and Mach. 20(1), 67-92, 1992.
12. Biechl H., Koch A., Matt A.: Simulation of the transient operational behaviour of a novel electromechanical vibration exciter for rock drills. Mathematics and Computers in Simulation. Elsevier Science. 1 May 1998, vol. 46, no. 3, pp. 397-411.
13. Bizoń K.: Dynamika stanów nieustalonych elektromechanicznych układów napędowych. Rozprawa doktorska. Politechnika Śląska, Gliwice 2000.
14. Blankenship G.W., Singh R.: Dynamic force transmissibility in helical gear pairs. Mechanism and Machine Theory, Elsevier Science, April 1995, vol. 30, no. 3, pp. 323-339(17).

15. Bouhaddi N., Fillod R.: Model reduction by a simplified variant of dynamic condensation. Journal of Sound and Vibration, Vol. 191, No. 2, Mar 1996, pp. 233-250.
16. Brotchie J.F.: Optimization and robustness of structural engineering systems. Engineering Structures, Elsevier Science, April 1997, vol. 19, no. 4, pp. 289-292.
17. Bucher I., Braun S.: Efficient optimization procedure for minimizing vibratory response via redesign or modification, Part II: Examples. Journal of Sound and Vibration No 175(4) 1994, pp.455-473.
18. Bucher I., Braun S.: Efficient optimization procedure for minimizing vibratory response via redesign or modification, Part I: Theory. Journal of Sound and Vibration, Vol. 175, No. 4, Aug 1994, pp. 433-453.
19. Carrol R.K., Johnson G.E.: Optimal design of compact spur gear sets. Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Transactions of ASME Vol.106, 1984.
20. Cempel C.: Optimization of lifetime of mechanical systems by vibration dampers. Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences -1995 nr 4 s. 401-411.
21. Chen L.A., Semercigil S.E.: A beam-like damper for attenuating transient vibrations of light structures. Journal of Sound and Vibration, Vol. 164, No. 1, June 1993, pp. 53-65.
22. Cheng G, Kang Z., Wang G.: Dynamic optimization of a turbine foundation. Structural Optimization, Vol.13, pp.244-249, Springer Verlag 1997.
23. Choi B., Yang B.: Optimal Design of Rotor-Bearing Systems Using Immune-Genetic Algorithm, ASME Journal of Vibration and Acoustics, July 2001, Volume 123, Issue 3 pp. 398-401.
24. Dąbrowski M.: Projektowanie maszyn elektrycznych prądu przemiennego. WNT, Warszawa 1994.
25. Dailey R.L.: Eigenvector derivatives with repeated eigenvalues. AIAA Journal, April 1989, Vol.27, No.4, pp.486-491.
26. Dalpiaz G., Rivola A., Rubini R.: Effectiveness and sensitivity of vibration processing techniques for local fault detection in gears. Mechanical Systems and Signal Processing, Academic Press, May 2000, vol. 14, no. 3, pp. 387-412.
27. Dems M.: Symulacja komputerowa przebiegów elektromechanicznych w silnikach indukcyjnych klatkowych. Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej nr 745, Rozprawy Naukowe z.229, 1996.
28. Doughty S.: Eigenvalue derivatives for damped torsional vibrations. Journal of Mechanical Design, April 1982, Vol 104, pp. 463-465.
29. Du S., Randall R.B., Kelly D.W.: Modelling of spur gear mesh stiffness and static transmission error. Journal of Mechanical Engineering Science, Professional Engineering Publishing, June 1998, Vol. 212, No. 4, pp. 287-297.
30. Duda S.: Modelowanie zjawisk dynamicznych elektromechanicznych układów napędowych. Rozprawa doktorska. Politechnika Śląska, Gliwice 1998.
31. El Beheiry E.M.: A method for preview vibration control of systems having forcing inputs and rapidly-switched dampers. Journal of Sound and Vibration, Vol. 214, No. 2, July 1998, pp. 269-283.

32. Eriksson P., Friberg O.: Ride comfort optimization of a city bus. Structural Optimization, Springer Verlag 2000, Vol. 20, pp. 67-75.

33. Esat I. I., Bahai H.: Vibratory system synthesis for multi-body systems based on Genetic Algorithm. Journal of Sound and Vibration, Vol. 230, No. 4, Mar 2000, pp. 933-948.

34. Feng Z., Liao X., Unbehauen R.: A real-time digital simulation model of the electromagnetic transients in power transmission systems by parallel processing using multiple modules. Electrical Engineering, Springer Verlag, Volume 81, Issue 2 (1998), pp 121-127.

35. Giergiel J.: Drgania mechaniczne. Wydawnictwo AGH, Kraków 2000.

36. Giergiel J.: Tłumienie drgań mechanicznych. Tłumienie drgań mechanicznych. PWN, Warszawa 1990.

37. Giergiel J., Uhl T.: Identyfikacja układów mechanicznych. PWN, Warszawa 1990.

38. Gill P.E., Murray W., Wright M.: Practical optimization. Academic Press 1981.

39. Ginsberg J.H.: Mechanical and structural vibrations. Theory and applications. Willey 2001.

40. Górecki H.: Optymalizacja systemów dynamicznych. PWN, Warszawa 1993.

41. Grandhi R.: Structural optimization with frequency constraints - A review. AIAA Journal. Vol 31, No 12, December 1993, pp. 2296-2303.

42. Gurgoze M.: On the sensitivities of the eigenvalues of a viscously damped cantilever carrying a tip mass. Journal of Sound and Vibration, Vol. 216, No. 2, September 1998, pp. 215-225.

43. Gutkowski W., Marenholtz G., Pyrz M.: Minimum-weight design of structures under non-conservative forces in optimization of large structural systems. N. Rozvany Ed. NATO ASI Series, Kluwer Academic Publishers, 1993.

44. Gutkowski W., Bauer J., Iwanow Z.: Optimum support of large span structures. Biulletin of IASS, vol.36 No 3, 1995, p.183-190.

45. Gutkowski W.: Optimization in modern design of spatial structures. Proceedings of IASS Symposium 2-6 September 1991, Copenhagen, Denmark, Vol. II p.91-96.

46. Hadwich V., Pfeiffer F.: The principle of virtual work in mechanical and electromechanical systems. Archive of Applied Mechanics, Springer Verlag, Volume 65, Issue 6 (1995), pp. 390-400.

47. Haftka R.T., Gürdal Z., Kamat M.P.: Elements of structural optimization. Kluwer 1990, 396 p.

48. Hara S., Yoshida K.: Simultaneous optimization of positioning and vibration control using a time-varying frequency-shaped criterion function. Control Engineering Practice, Elsevier Science, April 1996, vol. 4, no. 4, pp. 553-561.

49. Hassan G.A.: New approach for computer-aided static and dynamic balancing of rigid rotors. Journal of Sound and Vibration, 1995, Vol. 179, No. 5, pp. 749-761.

50. Haug E.J., Choi K.K., Komkov V.: Design sensitivity analysis of structural systems. Academic Press, Inc. 1986.

51. Haug E.J., Wehage R.A., Barman N.C.: Design sensitivity analysis of planar mechanism and machine dynamics. Transactions of ASME. Journal of Mechanical Design v.103, 1981.

52. Haug E.J., Wehage R.A., Mani N.K.: Design sensitivity analysis of large-scale constrained dynamic mechanical systems. Transactions of ASME. Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, v.106, 1984.

53. Haug J.E., Arora J.S.: Applied optimal design. Mechanical and structural systems. John Wiley& Sons, New York 1979.

54. Hernot X., Sartor M., Guillot J.: Calculation of the stiffness matrix of angular contact ball bearings by using the analytical approach. ASME Journal of Mechanical Design, 2000, Volume 122, Issue 1 pp. 83-90.

55. Holtz D., Arora J.S.: An efficient implementation of adjoint sensitivity analysis for optimal control problems. Structural Optimization, Vol.13, pp. 223-229, Springer Verlag 1997.

56. Huang K. J., Liu T. S.: Dynamic analysis of a spur gear by the dynamic stiffness method. Journal of Sound and Vibration, Vol. 234, No. 2, Jul 2000, pp. 311-329.

57. Hwang K.-H., Lee K.-W., Park G.-J.: Robust optimization of an automobile rearview mirror for vibration reduction. Structural and Multidisciplinary Optimization, Springer Verlag, Volume 21, Issue 4 (2001), pp 300-308.

58. Igusa T., Xu K.: Vibration control using multiple tuned mass dampers. Journal of Sound and Vibration No 175(4) 1994, pp.491-503.

59. Jaszczuk M., Chodura J., Siwiec J.: Obliczanie parametrów pracy ścianowych maszyn urabiających. Skrypt Nr 1785. Politechnika Śląska, Gliwice 1993.

60. Jalili N., Olgac N.: Identification and retuning of optimum delayed feedback vibration absorber. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1 November 2000, vol. 23, no. 6, pp. 961-970(10). American Institute of Aeronautics and Astronautics.

61. Jiang J. S., Tong W. H.: How many modes are acceptable and how do people improve the modes? Journal of Sound and Vibration, Vol. 228, No. 3, Dec 1999, pp. 559-567.

62. Johnson R.C.: Optimum design of mechanical elements. Wiley, New York, 1980.

63. Joshi A. S., Jangid R. S.: Optimum parameters of multiple tuned mass dampers for base-excited damped systems. Journal of Sound and Vibration, Vol. 202, No. 5, May 1997, pp. 657-667.

64. Kahraman A.: Natural modes of planetary gear trains. Journal of Sound and Vibration, Vol. 173, No. 1, May 1994, pp. 125-130.

65. Kasturi P., Dupont P.: Constrained optimal control of vibration dampers. Journal of Sound and Vibration, August 1998, vol. 215, no. 3, pp. 499-509.

66. Keane A.J., Bright A.P.: Passive vibration control via unusual geometries: Experiments on model aerospace structures. Journal of Sound and Vibration, Vol. 190, No. 4, March 1996, pp. 713-719.

67. Keane A.J.: Passive vibration control via unusual geometries: The application of Genetic Algorithm optimization to structural design. Journal of Sound and Vibration, Vol. 185, No. 3, Aug 1995, pp. 441-453.

68. Keltie R. F., Cheng C. C.: Vibration reduction of a mass-loaded beam. Journal of Sound and Vibration, Vol. 187, No. 2, Oct 1995, pp. 213-228.

69. Kleiber M. i inni: Komputerowe metody mechaniki ciał stałych. Mechanika Techniczna. PWN, Warszawa 1995.

70. Kopylov I.P.: Mathematical models of electric machines. Mir Publishers Moscow 1984.

71. Kosmol J.: Serwonapędy obrabiarek sterowanych numerycznie. WNT, Warszawa 1998.

72. Kruszewski J. i inni: Metoda elementów skończonych w dynamice konstrukcji. Arkady, Warszawa 1984.

73. Kruszewski J., Sawiak S., Wittbrodt E.: Metoda sztywnych elementów skończonych w dynamice konstrukcji. WNT, Warszawa 1999.

74. Kuang J. H. and Lin A. D.: The effect of tooth wear on the vibration spectrum of a spur gear pair. ASME Journal of Vibration and Acoustics, July 2001, Volume 123, Issue 3, pp. 311-317.

75. Kudła J., Mężyk A., Świtoński E.: Modelling of nonlinear vibrations of longwall shearerdriving system. Proceedings of International Scientific Conference, Ostrava 12-15.09.1995.

76. Kurz S., Becker U., Maisch H.: Dynamic simulation of electromechanical systems: from Maxwell's theory to common-rail diesel injection. Naturwissenschaften, Springer Verlag, Volume 88, Issue 5 (2001), pp. 183-192.

77. Lasdon L.S., Waren A.D.: Large scale nonlinear programing. Computers and Mechanical Engineering, 7(5), 1983.

78. Lee I.-W., Jung G.-H., Lee J.-W.: Numerical method for sensitivity analysis of eigensystems with non-repeated and repeated eigenvalues. Journal of Sound and Vibration, Vol. 195, No. 1, Aug 1996, pp. 17-32.

79. Lee I.-W., Kim D.-O., Jung G.-H.: natural frequency and mode shape sensitivities of damped systems: Part II, Multiple natural frequencies. Journal of Sound and Vibration, Vol. 223, No. 3, Jun 1999, pp. 413-424.

80. Lee I.-W., Kim D.-O., Jung G.-H.: Natural frequency and mode shape sensitivities of damped systems: Part I, Distinct natural frequencies. Journal of Sound and Vibration, Vol. 223, No. 3, Jun 1999, pp. 399-412.

81. Lee Y-S.: Transient vibration suppression of synchronous motor driving system with field circuit control. Electric Power Components and Systems, Taylor and Francis Ltd,1 February 2001, vol. 29, no. 2, pp. 131-143.

82. Leo D. J., Inman D. J.: A quadratic programming approach to the design of active-passive vibration isolation systems. Journal of Sound and Vibration, Vol. 220, No. 5, Mar 1999, pp. 807-825.

83. Li Y.Y., Yam L.H.: A robust design method of active controller for uncertain vibration systems. Journal of Vibration and Control, March 2001, vol. 7, no. 3, pp. 453-466.

84. Liao N. T., Lin J. F.: A new method for the analysis of deformation and load in a ball bearing with variable contact angle. ASME Journal of Mechanical Design, 2000,Volume 123, Issue 2 pp. 304-312.

85. Lin J., Parker R.G.: Sensitivity of planetary gear natural frequencies and vibration modes to model parameters. Journal of Sound and Vibration, Vol. 228, No. 1, Nov 1999, pp. 109-128.

86. Lin J., Parker R.G.: Structured vibration characteristics of planetary gears with unequally spaced planets. Journal of Sound and Vibration, Vol. 233, No. 5, Jun 2000, pp. 921-928.

87. Lin R.M., Lim M.K.: Derivation of structural design sensitivities from vibration test data. Journal of Sound and Vibration, April 1997, vol. 201, no. 5, pp. 613-631.

88. Lloyd G. M., Wang M. L., Satpathi D.: The role of eigenparameter gradients in the detection of perturbations in discrete linear systems. Journal of Sound and Vibration, Vol. 235, No. 2, Aug 2000, pp. 299-316.

89. Locascio A., Thurston D.L.: Transforming the house of quality to a multiobjective optimization formulation. Structural Optimization. Springer Verlag, Volume 16, Issue 2/3 (1998), pp. 136-146.

90. Ma S., Semercigil E.: A modified passive tuned absorber for secondary system under random excitation. Journal of Sound and Vibration, Vol. 208, No. 3, Dec 1997, pp. 349-366.

91. Marchelek K., Powałka B.: Sensitivity of vibrostability limit to the change of structural parameters. Postępy Technologii Maszyn i Urządzeń, 1998, Vol. 22, Zeszyt nr 2, s. 73-88.

92. Marchelek K., Tomków J.: Vibrostability of a multidimensional machine tool-workpiece-tool system, Part I: Modelling the mechanical structure and cutting process. Journal of Vibration and Control, USA, 1998, Vol. 4, s. 99-112.

93. Marchelek K.: Dynamika obrabiarek. WNT, Warszawa 1991.

94. Marchelek K.: Kształtowanie wibrostabilności systemu obrabiarka - proces skrawania. Część II: Algorytm kształtowania wibrostabilności systemu obrabiarka - proces skrawania. Archiwum Technologii Maszyn i Automatyzacji, KBM PAN - Oddział w Poznaniu, 1998, Vol. 18, Zeszyt nr 2, s. 189-211.

95. Mężyk A.: Dynamika elektromechanicznych układów napędowych. Rozprawa doktorska. Politechnika Śląska, Gliwice 1994.

96. Mężyk A.: Minimization of transient forces in an electromechanical system. Structural Optimization, Vol.8, pp.251-256, Springer Verlag 1994.

97. Mężyk A.: Ograniczanie drgań układów napędowych w stanach nieustalonych. Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej, nr 8/1998, 43-48, Gliwice 1998.

98. Mężyk A.: Sensitivity analysis of electromechanical systems. Proceedings of the XI Polish Conference on Computer Methods in Mechanics. Kielce-Cedzyna, Poland, 11-14 May, 1993.

99. Mężyk A., Świtoński E.: Optimizing dynamic characteristics of machinery. Proceedings of European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering. ECCOMAS 2000. Barcelona, 11-14 September 2000.

100. Mężyk A., Świtoński E.: Optymalizacja cech dynamicznych tłumika drgań układu napędowego. Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej, nr 7/1998, Gliwice 1998.

101. Mężyk A., Świtoński E.: Sensitivity analysis and optimisation of dynamic characteristics of vibrating systems. Proceedings of 2nd European Conference on computational mechanics. Kraków 26-29.06.2001.

102. Michalewicz Z.: Algorytmy genetyczne + struktury danych = programy ewolucyjne. WNT, Warszawa 1999.

103. Moshrefi-Torbati M., Simonis de Cloke C., Keane A.J.: Vibrational optimization of a mass-loaded stepped plate. Journal of Sound and Vibration, Vol. 213, No. 5, Jun 1998, pp. 865-887.

104. Müller L.: Przekładnie zębate – Dynamika. WNT, Warszawa 1986.

105. Nadolski W., Pielorz A.: The influence of variable stiffness of teeth on dynamic loads in single-gear transmission. Archive of Applied Mechanics, Springer Verlag, Volume 68, Issue 3/4 (1998), pp. 185-194.

106. Nagem R.J., Madanshetty S.I., Medhi G.: An electromechanical vibration absorber. Journal of Sound and Vibration, 1997, vol. 200, no. 4, pp. 551-556.

107. Nguyen P.H., Ginsberg J.H.: Vibration control using parametric excitation. ASME Journal of Vibration and Acoustics, July 2001, Volume 123, Issue 3 pp. 359-364.

108. Ondrouch J., Bilosova A.: Assessment of vibration dampers efficiency based on experimental research. Proceedings of IIIrd International Seminar of Applied Mechanics, Wisła 1999, Poland (In English), pp.51-56. ISBN 83-911764-0-1.

109. Ondrouch J., Kanak J.: Assessment of dynamic vibration dampers efficiency from the point of view of acoustic emission. Engineering Mechanics, No 2, Vol. 7, 2000, pp. 135-139, ISSN 1210-2717.

110. Osiński Z.: Tłumienie drgań mechanicznych. PWN, Warszawa 1986.

111. Osiński Z., Wróbel J.: Teoria konstrukcji maszyn. PWN, Warszawa 1982.

112. Parker R. G., Vijayakar S. M., Imajo T.: Non-linear dynamic response of a spur gear pair: Modelling and experimental comparisons. Journal of Sound and Vibration, Vol. 237, No. 3, Oct 2000, pp. 435-455.

113. Parker R. G.: A physical explanation for the effectiveness of planet phasing to suppress planetary gear vibration. Journal of Sound and Vibration, Vol. 236, No. 4, Sep 2000, pp. 561-573.

114. Parker R.G., Vinayak A. and Sandeep M.: Dynamic response of a planetary gear system using a finite element/contact mechanics model. ASME Journal of Mechanical Design. 2000, Volume 122, Issue 3 pp. 304-310.

115. Paszek W.: Dynamika maszyn elektrycznych prądu przemiennego. HELION, Gliwice 1998.

116. Pedersen P., Laursen C.L.: Design for minimum stress concentration by finite elements and linear programming. J. Struct. Mech. 10, 243-271, 1982-83.

117. Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A., Vetterling W.T.: Numerical recipes in C. The art of scientific computing. Cambridge University Press 1986.

118. Puchała A.: Dynamika maszyn i układów elektromechanicznych. PWN, Warszawa 1977.

119. Qu Z.-Q.: Hybrid expansion method for frequency responses and their sensitivities, Part I: Undamped systems. Journal of Sound and Vibration, Vol. 231, No. 1, March 2000, pp. 175-193.

120. Qu Z.-Q., Selvam R. P.: Hybrid expansion method for frequency responses and their sensitivities, Part II: Viscously damped systems. Journal of Sound and Vibration, Vol. 238, No. 3, Nov 2000, pp. 369-388.

121. Raclot J.P., Velex P.: Simulation of the dynamic behaviour of single and multi-stage geared systems with shape deviations and mounting errors by using a spectral method. Journal of Sound and Vibration, Vol. 220, No. 5, Mar 1999, pp. 861-903.

122. Raghothama A., Narayanan S.: Bifurcation and chaos in geared rotor bearing system by incremental harmonic balance method. Journal of Sound and Vibration, Vol. 226, No. 3, Sep 1999, pp. 469-492.

123. Rak Z.: Modelowanie drgań giętno-skrętnych elektromechanicznych układów napędowych. Rozprawa doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice 1995.

124. Rao A. C.: A Genetic Algorithm for topological characteristics of kinematic chains. Journal of Mechanical Design, 2000, Volume 122, Issue 2 pp. 228-231.

125. Rao S.S.: Multistage multiobjective optimization of gearboxes. Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Transactions of ASME vol.108, 1986.

126. Root R.R., Ragsdell K.M.: A survey of optimization methods applied to the design of mechanisms. Transactions of ASME. Journal of Engineering for Industry, August 1976.

127. Ryaboy V.M.: Limiting performance estimates for the active vibration isolation in multi-degree-of-freedom mechanical systems. Journal of Sound and Vibration, Vol. 186, No. 1, Sep 1995, pp. 1-21.

128. Sado D.: Dynamika odśrodkowego eliminatora drgań skrętnych w układzie napędowym z elementem sprężystym. Prace Instytutu Podstaw Budowy Maszyn, Politechnika Warszawska, z. 17 (1996), s. 39-50.

129. Savage M., Coy J.J., Townsend D.P.: Optimal tooth numbers for compact standard spur gear sets. Transactions of the ASME. Journal of Mechanical Design vol.104, 1982.

130. Schulz M. J., Inman D. J.: Vibration suppression by eigenstructure optimization. Journal of Sound and Vibration, Vol. 182, No. 2, Apr 1995, pp. 259-282.

131. Schulz W. J., Inman D. J.: Model updating using constrained eigenstructure assignment. Journal of Sound and Vibration, Vol. 178, No. 1, Nov 1994, pp. 113-130.

132. Scott D.A., Karr C.L., Schinstock D.E.: Genetic algorithm frequency-domain optimization of an anti-resonant electromechanical controller. Engineering Applications of Artificial Intelligence. Elsevier Science. April 1999, vol. 12, no. 2, pp. 201-211.

133. Sener Ö. S., Özgüven H. N.: Dynamic analysis of geared shaft systems by using a continuous system model. Journal of Sound and Vibration, Vol. 166, No. 3, Sep 1993, pp. 539-556.

134. Shankar K., Keane A. J.: Vibrational energy flow analysis using a substructure approach: The application of receptance theory to FEA and SEA. Journal of Sound and Vibration, Vol. 201, No. 4, Apr 1997, pp. 491-513.

135. Singh K. V., Ram Y. M.: dynamic absorption by passive and active control. ASME Journal of Vibration and Acoustics, 2000, Volume 122, Issue 4 pp. 429-433.

136. Singh R.: Dynamic analysis of a reverse-idler gear pair with concurrent clearances. Journal of Sound and Vibration, Vol. 182, No. 2, Apr 1995, pp. 303-322.

137. Skoć A.: Dynamika przekładni zębatych stożkowych maszyn górniczych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Górnictwo nr 226, Gliwice 1996.

138. Sobieszczański-Sobieski J., Haftka R.T.: Multidisciplinary aerospace design optimization: Survey of recent developments. Structural Optimization, Vol.14, pp.1-23, Springer Verlag 1997.

139. Spillers W.R., Rashidi S.: Design for dynamic loads: lack of uniqueness. Structural and Multidisciplinary Optimization, Springer Verlag, Volume 20, Issue 3 (2000), pp. 242-246.

140. Stelmack M.A., Batill S.M. and Beck B.C.: Design of an aircraft brake component using an interactive multidisciplinary design optimization framework. ASME Journal of Mechanical Design, 2000, Volume 122, Issue 1 pp. 70-76.

141. Sun T.C., Luo A.C., Hamidzadeh H.R.: Dynamic response and optimization for suspension systems with non-linear viscous damping. Journal of Multi-Body Dynamics. Professional Engineering Publishing. September 2000, vol. 214, no. 3, pp. 181-187.

142. Świtoński E., Mężyk A.: Dynamical analysis and optimisation of electromechanical machinery drives. Proceedings of 2nd International Seminar on Vibrations and Acoustic Noise of Electric Machinery. Łódź 1-3.06.2000.

143. Świtoński E.: Optymalizacja cech dynamicznych prototypowego kombajnu KGS-345. Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej nr 8/1998, Gliwice 1998, s. 75-80.

144. Tai K., Chee T.H.: Design of structures and compliant mechanisms by evolutionary optimization of morphological representations of topology. Journal of Mechanical Design, 2000, Volume 122, Issue 4 pp. 560-566.

145. Takewaki I.: An approach to stiffness-damping simultaneous optimization. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Elsevier Science. 1 September 2000, vol. 189, no. 2, pp. 641-650.

146. Tang J., Wang W. L.: Perturbation method for determining eigensolutions of weakly damped systems. Journal of Sound and Vibration, Vol. 187, No. 4, Nov 1995, pp. 671-681.

147. Tang J., Wang W.-L: On calculation of sensitivity for non-defective eigenproblems with repeated roots. Journal of Sound and Vibration, Vol. 225, No. 4, Aug 1999, pp. 611-631.

148. Tarnowski W.: Optymalizacja welokryterialna i polioptymalizacja z wykorzystaniem pakietu MATLAB. Materiały II Wiosennej Szkoły "Komputerowe wspomaganie projektowania, wytwarzania i eksploatacji". Żegiestów 11-15 maja 1998.

149. Theodossiades S., Natsiavas S.: Non-linear dynamics of gear-pair systems with periodic stiffness and backlash. Journal of Sound and Vibration, Vol. 229, No. 2, Jan 2000, pp. 287-310.

150. Tong, Jiang, Liu: Dynamic design of structures under random excitation. Computational Mechanics, Springer Verlag, Volume 22, Issue 5(1998), pp. 388-394.

151. Uhl T., Kowal J., Salamon T., Korendo Z., Kamisiński T.: Aktywne metody redukcji drgań. Mechanika, 1997 z. 2 s. 281-291.

152. Uhl T.: Komputerowo wspomagana identyfikacja modeli konstrukcji mechanicznych. WNT, Warszawa 1997.

153. Vaishya M., Singh R.: Analysis of periodically varying gear mesh systems with Coulomb friction using Floquet theory. Journal of Sound and Vibration, Vol. 243, No. 3, Jun 2001, pp. 525-545.

154. Van Dooren R.: Comments on "Non-linear dynamics of gear-pair systems with periodic stiffness and backlash". Journal of Sound and Vibration, Vol. 244, No. 5, July 2001, pp. 899-903.

155. Vas P.: Electrical machines and drives. A space theory approach. Oxford University Press 1992.

156. Velex P. and Cahouet V.: Experimental and numerical investigations on the influence of tooth friction in spur and helical gear dynamics. ASME Journal of Mechanical Design 2000, Volume 122, Issue 4 pp. 515-522.

157. Velex P., Maatar M.: A mathematical model for analyzing the influence of shape deviations and mounting errors on gear dynamic behaviour. Journal of Sound and Vibration, Vol. 191, No. 5, Apr 1996, pp. 629-660.

158. Vinayak H., Singh R., Padmanabhan C.: Linear dynamic analysis of multi-mesh transmissions containing external, rigid gears. Journal of Sound and Vibration, Vol. 185, No. 1, Aug 1995, pp. 1-32.

159. Vinayak H., Singh R.: Multi-body dynamics and modal analysis of compliant gear bodies. Journal of Sound and Vibration, Vol. 210, No. 2, Feb 1998, pp. 171-214.

160. Wang B.P.: Improved approximate method for computing eigenvector derivatives in structural dynamics. AIAA Journal, vol 29, no. 6, 1990, pp. 1018-1020.

161. Wang Y., Zhang W.J., Cheung H.M.E.: A finite element approach to dynamic modeling of flexible spatial compound bar-gear systems. Mechanism and Machine Theory, 1 April 2001, vol. 36, no. 4, pp. 469-487(19), Elsevier Science.

162. Wilk A., Olejek G.: Zastosowanie metod komputerowych do polioptymalizacji przekładni zębatych wielostopniowych. Proceedings of Theory, Design and Exploitation of Gear and Gearboxes Conference. VSB Technical University, Ostrawa 1994.

163. Wilk A.: Wpływ parametrów technologicznych i konstrukcyjnych na dynamikę przekładni o zębach prostych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Mechanika nr 72, Gliwice 1981.

164. Witczak P.: Influence of mounting conditions on forced vibrations of induction motors. Proceedings of 2nd International Seminar on Vibrations and Acoustic Noise of Electric Machinery. Łódź 1-3.06.2000.

165. Wojnarowski J.: The graph method of determining the loads in complex gear trains. Journal of Mechanism and Machine Theory. Vol.11, 1976.

166. Woodhouse J.: Linear damping models for structural vibration. Journal of Sound and Vibration, Vol. 215, No. 3, 1998, pp. 547-569.

167. Wu C.J., White R.G.: Reduction of vibrational power in periodically supported beams by use of a neutralizer. Journal of Sound and Vibration No 187 (2) 1995, pp.329-338.

168. Wu J.-S., Chen C.-H.: Torsional vibration analysis of gear-branched systems by Finite Element Method. Journal of Sound and Vibration, Vol. 240, No. 1, Feb 2001, pp. 159-182.

169. Wu J.-S., Chen D.-W.: Dynamic analysis of a uniform cantilever beam carrying a number of elastically mounted point masses with dampers. Journal of Sound and Vibration, Vol. 229, No. 3, Jan 2000, pp. 549-578.

170. Wu W.-T., Wickert J. A., Griffin H.: Modal analysis of the steady state response of a driven periodic linear system. Journal of Sound and Vibration, Vol. 183, No. 2, Jun 1995, pp. 297-308.

171. Zaremba A., Hampo R., Hrovat D.: Optimal active suspension design using constrained optimization. Journal of Sound and Vibration, Vol. 207, No. 3, Oct 1997, pp. 351-364.

172. Zeman V., Kovar L.: Modelling of dynamic properties of shaft and rotating systems. Engineering Mechanics, Vol.1, Issue 6,1999, pp 45-61 (in Czech).

173. Zeman V., Nemecek J.: Modelling of high speed shaft system vibration. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Mechanika, z.122, Gliwice 1995.

174. Zeman V., Hlaváč Z.: Vibration analysis and parametric optimization of the gearbox. Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej Politechniki Śląskiej, z.16, Gliwice 2001, pp.161-166.

Optymalizacja własności dynamicznych układów napędowych maszyn

Streszczenie

W pracy przedstawiono algorytmy modelowania, analizy wrażliwości i optymalizacji własności dynamicznych w zastosowaniu do wspomagania procesu konstrukcyjnego elektromechanicznych układów napędowych dużej mocy. Celem pracy było przygotowanie algorytmów doboru cech konstrukcyjnych układów fizycznych, umożliwiających optymalne kształtowanie charakterystyk dynamicznych, opisanych zarówno w dziedzinie czasu, jak i częstotliwości. Zamieszczono ogólne wprowadzenie do omawianych zagadnień, poparte analizą publikowanych wyników badań z zakresu tematyki pracy. Omówiono podstawy modelowania elektromechanicznych układów napędowych z silnikami asynchronicznymi i przekładniami zębatymi. Rozpatrzono modele obwodowe dwuklatkowych i jednoklatkowych silników elektrycznych. Szczególną uwagę zwrócono na przestrzenne modele dynamiczne przekładni zębatych oraz przekładni planetarnych, uwzględniające nieliniowe charakterystyki sztywności zazębień. Omówione modele stanowiły podstawę opracowania algorytmów analizy wrażliwości charakterystyk dynamicznych układów, których konfiguracje opisano za pomocą macierzy bezwładności, sztywności i tłumienia. Opracowane algorytmy kształtowania charakterystyk dynamicznych umożliwiają sformułowanie zadania optymalizacji wykorzystując funkcje celu i ograniczeń opisane w przestrzeni zmiennych decyzyjnych, dziedzinie czasu lub częstotliwości.

Zastosowane funkcje celu umożliwiają badanie wrażliwości wartości i wektorów własnych oraz charakterystyk dynamicznych. Analiza wrażliwości traktowana jest jako wstęp do dalszych badań optymalizacyjnych. Przedstawiono i porównano metody optymalizacji przydatne do rozpatrywanych funkcji celu, zarówno z zakresu metod programowania matematycznego, jak i algorytmy ewolucyjne.

Badania przeprowadzono z wykorzystaniem dyskretnych i dyskretno-ciągłych modeli dynamicznych elektromechanicznych układów maszynowych. Dla wybranych zagadnień optymalizacji zbiór zmiennych decyzyjnych zawierał zarówno wielkości opisujące model układu mechanicznego, jak również parametry elektryczne silnika napędowego. Tak postawione zadanie optymalizacji umożliwiło dostrojenie części mechanicznej i elektrycznej napędu poprzez dobór parametrów modelu. W procesie optymalizacji zastosowano metody gradientowe. Dla zagadnień optymalizacji charakterystyk dynamicznych w dziedzinie częstotliwości sprawdzono również przydatność metod ewolucyjnych.

Algorytmy obliczeń numerycznych posłużyły do przygotowania programów komputerowych. Programy optymalizacji własności dynamicznych układów drgających zastosowano do kształtowania charakterystyk dynamicznych dwóch, prototypowych, elektromechanicznych układów napędowych dużej mocy. Zjawiska dynamiczne badano z wykorzystaniem modeli drgań skrętnych i giętno-skrętnych. Przeprowadzono również optymalizację charakterystyk rezonansowych układów dyskretno-ciągłego i ciągłego na przykładzie belek wspornikowych z dynamicznymi tłumikami drgań o różnej postaci konstrukcyjnej. Opracowana metodyka badań oraz programy komputerowe zostały zweryfikowane przez doświadczalne pomiary charakterystyk dynamicznych na obiektach rzeczywistych. Otrzymane wyniki badań symulacyjnych i doświadczalnych potwierdzają słuszność przyjętej tezy, co zawarto w podsumowaniu pracy.

167. Wu C.J., White R.G.: Reduction of vibrational power in periodically supported beams by use of a neutralizer. Journal of Sound and Vibration No 187 (2) 1995, pp.329-338.

168. Wu J.-S., Chen C.-H.: Torsional vibration analysis of gear-branched systems by Finite Element Method. Journal of Sound and Vibration, Vol. 240, No. 1, Feb 2001, pp. 159-182.

169. Wu J.-S., Chen D.-W.: Dynamic analysis of a uniform cantilever beam carrying a number of elastically mounted point masses with dampers. Journal of Sound and Vibration, Vol. 229, No. 3, Jan 2000, pp. 549-578.

170. Wu W.-T., Wickert J. A., Griffin H.: Modal analysis of the steady state response of a driven periodic linear system. Journal of Sound and Vibration, Vol. 183, No. 2, Jun 1995, pp. 297-308.

171. Zaremba A., Hampo R., Hrovat D.: Optimal active suspension design using constrained optimization. Journal of Sound and Vibration, Vol. 207, No. 3, Oct 1997, pp. 351-364.

172. Zeman V., Kovar L.: Modelling of dynamic properties of shaft and rotating systems. Engineering Mechanics, Vol.1, Issue 6,1999, pp 45-61 (in Czech).

173. Zeman V., Nemecek J.: Modelling of high speed shaft system vibration. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Mechanika, z.122, Gliwice 1995.

174. Zeman V., Hlaváč Z.: Vibration analysis and parametric optimization of the gearbox. Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej Politechniki Śląskiej, z.16, Gliwice 2001, pp.161-166.

Optymalizacja własności dynamicznych układów napędowych maszyn

Streszczenie

W pracy przedstawiono algorytmy modelowania, analizy wrażliwości i optymalizacji własności dynamicznych w zastosowaniu do wspomagania procesu konstrukcyjnego elektromechanicznych układów napędowych dużej mocy. Celem pracy było przygotowanie algorytmów doboru cech konstrukcyjnych układów fizycznych, umożliwiających optymalne kształtowanie charakterystyk dynamicznych, opisanych zarówno w dziedzinie czasu, jak i częstotliwości. Zamieszczono ogólne wprowadzenie do omawianych zagadnień, poparte analizą publikowanych wyników badań z zakresu tematyki pracy. Omówiono podstawy modelowania elektromechanicznych układów napędowych z silnikami asynchronicznymi i przekładniami zębatymi. Rozpatrzono modele obwodowe dwuklatkowych i jednoklatkowych silników elektrycznych. Szczególną uwagę zwrócono na przestrzenne modele dynamiczne przekładni zębatych oraz przekładni planetarnych, uwzględniające nieliniowe charakterystyki sztywności zazębień. Omówione modele stanowiły podstawę opracowania algorytmów analizy wrażliwości charakterystyk dynamicznych układów, których konfiguracje opisano za pomocą macierzy bezwładności, sztywności i tłumienia. Opracowane algorytmy kształtowania charakterystyk dynamicznych umożliwiają sformułowanie zadania optymalizacji wykorzystując funkcje celu i ograniczeń opisane w przestrzeni zmiennych decyzyjnych, dziedzinie czasu lub częstotliwości.

Zastosowane funkcje celu umożliwiają badanie wrażliwości wartości i wektorów własnych oraz charakterystyk dynamicznych. Analiza wrażliwości traktowana jest jako wstęp do dalszych badań optymalizacyjnych. Przedstawiono i porównano metody optymalizacji przydatne do rozpatrywanych funkcji celu, zarówno z zakresu metod programowania matematycznego, jak i algorytmy ewolucyjne.

Badania przeprowadzono z wykorzystaniem dyskretnych i dyskretno-ciągłych modeli dynamicznych elektromechanicznych układów maszynowych. Dla wybranych zagadnień optymalizacji zbiór zmiennych decyzyjnych zawierał zarówno wielkości opisujące model układu mechanicznego, jak również parametry elektryczne silnika napędowego. Tak postawione zadanie optymalizacji umożliwiło dostrojenie części mechanicznej i elektrycznej napędu poprzez dobór parametrów modelu. W procesie optymalizacji zastosowano metody gradientowe. Dla zagadnień optymalizacji charakterystyk dynamicznych w dziedzinie częstotliwości sprawdzono również przydatność metod ewolucyjnych.

Algorytmy obliczeń numerycznych posłużyły do przygotowania programów komputerowych. Programy optymalizacji własności dynamicznych układów drgających zastosowano do kształtowania charakterystyk dynamicznych dwóch, prototypowych, elektromechanicznych układów napędowych dużej mocy. Zjawiska dynamiczne badano z wykorzystaniem modeli drgań skrętnych i giętno-skrętnych. Przeprowadzono również optymalizację charakterystyk rezonansowych układów dyskretno-ciągłego i ciągłego na przykładzie belek wspornikowych z dynamicznymi tłumikami drgań o różnej postaci konstrukcyjnej. Opracowana metodyka badań oraz programy komputerowe zostały zweryfikowane przez doświadczalne pomiary charakterystyk dynamicznych na obiektach rzeczywistych. Otrzymane wyniki badań symulacyjnych i doświadczalnych potwierdzają słuszność przyjętej tezy, co zawarto w podsumowaniu pracy.

Optimization of dynamic properties of machine driving systems

Abstract

The paper presents algorithms of modelling, sensitivity analysis and optimization of dynamic characteristics applicable for aiding the process of designing of high-power electromechanical driving systems. The objective of the paper was to develop algorithms for selecting of design features of physical systems so that dynamic characteristics described both in the time domain and in the frequency domain might be shaped in the best possible manner. A general introductory presentation of problems under consideration, backed by an analysis of the published results of investigations involved in the subject matter of the paper is also contained there. Essentials of modelling of electromechanical driving systems provided with asynchronous motors and toothed gears are dealt with. The investigations cover circuit models of double squirrel-cage motors and single squirrel-cage ones. A special attention is paid to spatial dynamic models of toothed gears and planetary gears, with nonlinear characteristics of the mesh stiffness being taken into account. The described models served as the basis for evolving the algorithms of the analysis of sensitivity of dynamic systems, the configurations of which are expressed by means of matrices of inertia, stiffness and damping. The developed algorithms of shaping of the dynamic characteristics make it possible to formulate the problems of optimization when making use of the objective functions and constraints described in the space of decision variables.

The applied objective functions allow the sensitivity of eigenvalues and eigenvectors as well as of dynamic characteristics to be examined. The analysis of sensitivity is regarded as an introduction to further optimization oriented investigations. Methods for optimization applicable for the objective functions under consideration, covering both methods of the mathematical programming and evolution algorithms, are presented and compared.

Discrete as well as discrete and continuous dynamic models of electromechanical systems of the machines have been utilized in the course of investigations. For the selected problems of optimization, the set of decision variables contained both quantities describing a model of a mechanical system and electric parameters of a driving motor. The so formulated task of optimization made it possible to tune the mechanical part and the electrical one of a drive by selecting of parameters of the model. The applicability of evolution methods for optimization of dynamic characteristics in the field of frequency has been proved as well.

Computer programs have been developed with the aid of algorithms of numerical calculations. Programs aimed at the optimization of dynamic characteristics of vibrating systems allowed dynamic characteristics of two prototypes of high-power electromechanical driving systems to be shaped. Investigations of dynamic phenomena were carried out when using models of torsional and of transverse-torsional vibrations. The optimization of resonance characteristics of a discrete and continuous system as well as of a continuous system was also performed. Cantilever beams with dynamic dampers of vibration of different design form served as an example. The developed methodology of investigations and computer programs have been verified by experimental measurements of dynamic characteristics as taken on real objects. From the results obtained during simulations and experiments it is evident, that the assumption made is proper and this is indicated in the conclusions of the dissertation.

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
Politechniki Śląskiej
P.3361/02/139

Druk: Drukarnia Gliwice, ul. Zwycięstwa 27, tel. 230 49 60