

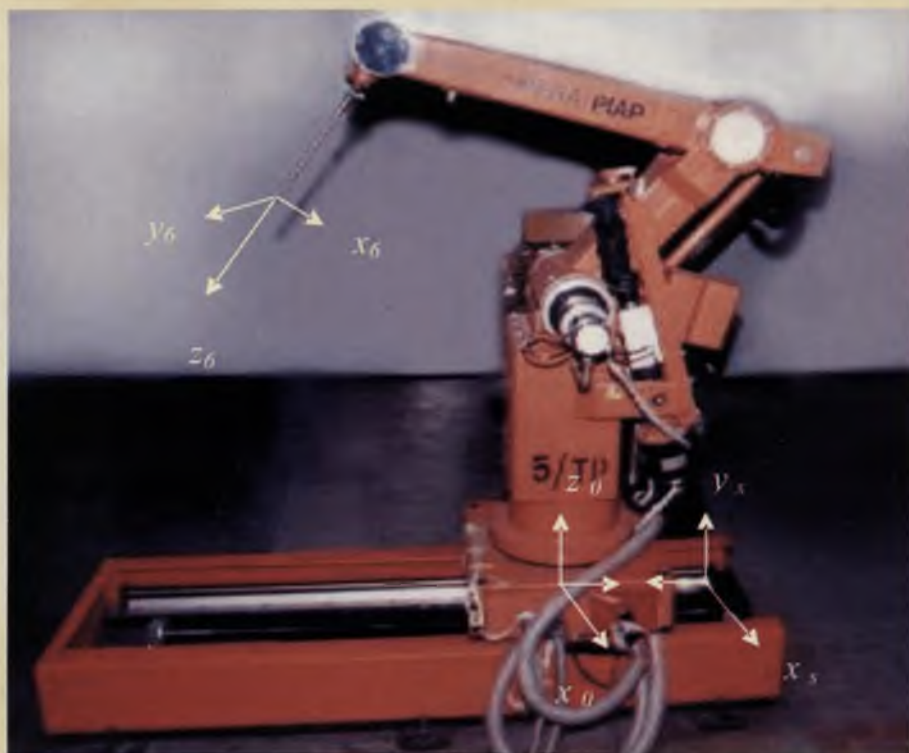
ZESZYTY NAUKOWE
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

P. 3341/04



Tadeusz SZKODNY

MODELOWANIE I SYMULACJA RUCHU MANIPULATORÓW ROBOTÓW PRZEMYSŁOWYCH



Gliwice 2004

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
ZESZYTY NAUKOWE
Nr 1647

P.3341/04



Tadeusz SZKODNY

**MODELOWANIE I SYMULACJA RUCHU
MANIPULATORÓW ROBOTÓW PRZEMYSŁOWYCH**

GLIWICE

2004

Opiniodawcy

Prof. zw. dr hab. inż. Józef WOJNAROWSKI, Dr h.c.
Prof. dr hab. inż. Leszek TRYBUS

Kolegium redakcyjne

Redaktor naczelny — Prof. dr hab. inż. Andrzej BUCHACZ
Redaktor działu — Dr inż. Krzysztof SIMEK
Sekretarz redakcji — Mgr Elżbieta LEŚKO

Redakcja

Mgr Aleksandra KŁOBUSZOWSKA

Redakcja techniczna

Alicja NOWACKA

Wydano za zgodą

Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0434-0760

© Copyright by
Tadeusz SZKODNY
Gliwice 2004

SPIS TREŚCI

WSTĘP	9
1. WPROWADZENIE	10
1.1. Główna treść	11
1.2. Zakres	12
1.3. Składowe części	13
1.4. Cel i zakres	14
1.5. Zakres i zakres	15
2. KROKOWA PRACA	16
2.1. Krokowa praca	17
2.1.1. Opis procesu w postaci logicznej	18
2.1.2. Budowa graficzna i techniczna (budowa) w postaci logicznej	19
2.1.3. Budowa graficzna i techniczna (budowa) w postaci logicznej	20
2.1.4. Budowa graficzna i techniczna (budowa) w postaci logicznej	21
2.2. Krokowa praca	22
2.2.1. Budowa logiczna	23
2.2.2. Budowa techniczna	24
2.2.3. Budowa graficzna i techniczna	25
2.3. Podsumowanie	26
2.3.1. Budowa graficzna	27
2.3.2. Budowa techniczna	28
2.3.3. Budowa graficzna i techniczna	29
2.3.4. Budowa graficzna i techniczna	30
3. WYKONANIE SYMULACJI	31
3.1. Analiza	32
3.1.1. Analiza	33
3.1.2. Analiza	34
3.2. Analiza	35
3.2.1. Analiza	36
3.2.2. Analiza	37
3.2.3. Analiza	38
3.2.4. Analiza	39
3.2.5. Analiza	40
3.3. Podsumowanie	41
3.3.1. Podsumowanie	42
3.3.2. Podsumowanie	43
3.3.3. Podsumowanie	44
3.3.4. Podsumowanie	45
3.3.5. Podsumowanie	46
3.3.6. Podsumowanie	47
3.3.7. Podsumowanie	48
3.3.8. Podsumowanie	49
3.3.9. Podsumowanie	50
3.3.10. Podsumowanie	51
3.3.11. Podsumowanie	52
3.3.12. Podsumowanie	53
3.3.13. Podsumowanie	54
3.3.14. Podsumowanie	55
3.3.15. Podsumowanie	56
3.3.16. Podsumowanie	57
3.3.17. Podsumowanie	58
3.3.18. Podsumowanie	59
3.3.19. Podsumowanie	60
3.3.20. Podsumowanie	61
3.3.21. Podsumowanie	62
3.3.22. Podsumowanie	63
3.3.23. Podsumowanie	64
3.3.24. Podsumowanie	65
3.3.25. Podsumowanie	66
3.3.26. Podsumowanie	67
3.3.27. Podsumowanie	68
3.3.28. Podsumowanie	69
3.3.29. Podsumowanie	70
3.3.30. Podsumowanie	71
3.3.31. Podsumowanie	72
3.3.32. Podsumowanie	73
3.3.33. Podsumowanie	74
3.3.34. Podsumowanie	75
3.3.35. Podsumowanie	76
3.3.36. Podsumowanie	77
3.3.37. Podsumowanie	78
3.3.38. Podsumowanie	79
3.3.39. Podsumowanie	80
3.3.40. Podsumowanie	81
3.3.41. Podsumowanie	82
3.3.42. Podsumowanie	83
3.3.43. Podsumowanie	84
3.3.44. Podsumowanie	85
3.3.45. Podsumowanie	86
3.3.46. Podsumowanie	87
3.3.47. Podsumowanie	88
3.3.48. Podsumowanie	89
3.3.49. Podsumowanie	90
3.3.50. Podsumowanie	91
3.3.51. Podsumowanie	92
3.3.52. Podsumowanie	93
3.3.53. Podsumowanie	94
3.3.54. Podsumowanie	95
3.3.55. Podsumowanie	96
3.3.56. Podsumowanie	97
3.3.57. Podsumowanie	98
3.3.58. Podsumowanie	99
3.3.59. Podsumowanie	100
3.3.60. Podsumowanie	101
3.3.61. Podsumowanie	102
3.3.62. Podsumowanie	103
3.3.63. Podsumowanie	104
3.3.64. Podsumowanie	105
3.3.65. Podsumowanie	106
3.3.66. Podsumowanie	107
3.3.67. Podsumowanie	108
3.3.68. Podsumowanie	109
3.3.69. Podsumowanie	110
3.3.70. Podsumowanie	111
3.3.71. Podsumowanie	112
3.3.72. Podsumowanie	113
3.3.73. Podsumowanie	114
3.3.74. Podsumowanie	115
3.3.75. Podsumowanie	116
3.3.76. Podsumowanie	117
3.3.77. Podsumowanie	118
3.3.78. Podsumowanie	119
3.3.79. Podsumowanie	120
3.3.80. Podsumowanie	121
3.3.81. Podsumowanie	122
3.3.82. Podsumowanie	123
3.3.83. Podsumowanie	124
3.3.84. Podsumowanie	125
3.3.85. Podsumowanie	126
3.3.86. Podsumowanie	127
3.3.87. Podsumowanie	128
3.3.88. Podsumowanie	129
3.3.89. Podsumowanie	130
3.3.90. Podsumowanie	131
3.3.91. Podsumowanie	132
3.3.92. Podsumowanie	133
3.3.93. Podsumowanie	134
3.3.94. Podsumowanie	135
3.3.95. Podsumowanie	136
3.3.96. Podsumowanie	137
3.3.97. Podsumowanie	138
3.3.98. Podsumowanie	139
3.3.99. Podsumowanie	140
3.3.100. Podsumowanie	141

Mojej Żonie

© 2004

SPIS TREŚCI

WAŻNIEJSZE OZNACZENIA

1. WPROWADZENIE

- 1.1. Geneza rozprawy
- 1.2. Obiekt badań
- 1.3. Literatura przedmiotu
- 1.4. Cel i zakres rozprawy
- 1.5. Zadania robotyki

2. MODELE RUCHU MRP

2.1. Kinematyka MRP

- 2.1.1. Opis ruchu w postaci ciągłej
- 2.1.2. Zadanie proste i odwrotne kinematyki w postaci ciągłej
- 2.1.3. Równania ruchu w postaci różniczkowej
- 2.1.4. Zadanie proste i odwrotne kinematyki w postaci różniczkowej

2.2. Dynamika MRP

- 2.2.1. Równania Lagrange'a
- 2.2.2. Równania Newtona-Eulera
- 2.2.3. Zadanie odwrotne i proste dynamiki

2.3. Podsumowanie

- 2.3.1. Zadanie proste kinematyki
- 2.3.2. Zadanie odwrotne kinematyki
- 2.3.3. Warunki kinematyczne osiągnięcia punktów trajektorii zadanej
- 2.3.4. Dynamika
- 2.3.5. Zagadnienia obliczeniowe dynamiki
- 2.3.6. Warunki dynamiczne i ogólne realizacji trajektorii zadanej

3. MODELOWANIE I SYMULACJA RUCHU ROBOTA AS

3.1. Modele MRP AS

- 3.1.1. Kinematyka MRP AS
- 3.1.2. Dynamika MRP AS

3.2. Modele robota AS w środowisku programowym Simulinka

- 3.2.1. Model robota AS
- 3.2.2. Model manipulatora
- 3.2.3. Modele serwomechanizmów
- 3.2.4. Modele siłowników
- 3.2.5. Modele regulatorów prądu siłowników

3.3. Przykłady symulacji ruchu robota AS

- 3.3.1. Trajektorie zadane
- 3.3.2. Symulacja ruchu

3.4. Uproszczenia modeli

3.5. Podsumowanie

4. MODELOWANIE I SYMULACJA RUCHU ROBOTA L-1

4.1. Modele MRP L-1

- 4.1.1. Kinematyka MRP L-1
- 4.1.2. Dynamika MRP L-1

4.2. Modele robota L-1 w środowisku programowym Simulinka

7

11

11

12

16

18

19

23

24

24

26

36

44

45

46

63

70

71

72

72

72

73

73

74

76

76

76

82

83

83

84

85

86

88

88

89

90

93

97

99

99

99

105

105

4.2.1. Model robota L-1	105
4.2.2. Model manipulatora	106
4.2.3. Modele siłowników	107
4.3. Przykłady symulacji ruchu robota L-1	110
4.3.1. Trajektorie zadane	110
4.3.2. Symulacja ruchu	111
4.4. Uproszczenia modeli	114
4.5. Podsumowanie	118
5. MODELOWANIE I SYMULACJA RUCHU ROBOTA EKSPERYMENTALNEGO	119
5.1. Modele MRP IRb-6	119
5.1.1. Kinematyka MRP IRb-6	119
5.1.2. Dynamika MRP IRb-6	131
5.2. Modele MRE	131
5.2.1. Kinematyka MRE	131
5.2.2. Dynamika MRE	137
5.3. Modele robota eksperymentalnego w środowisku programowym Simulinka	138
5.3.1. Model robota eksperymentalnego	138
5.3.2. Model manipulatora	139
5.3.3. Modele serwomechanizmów	139
5.3.4. Modele sterowników	140
5.3.5. Modele siłowników	141
5.3.6. Modele regulatorów prądu siłowników	142
5.4. Przykłady symulacji ruchu robota eksperymentalnego	142
5.4.1. Trajektorie zadane	142
5.4.2. Symulacja ruchu	144
5.5. Uproszczenia modeli	149
5.6. Porównanie badań eksperymentalnych i symulacyjnych	153
5.7. Podsumowanie rozdziału 5	155
5.8. Podsumowanie metod przyspieszania symulacji	156
6. KALIBRACJA MODELI RUCHU MRP	158
6.1. Funkcje regresji	158
6.2. Funkcja regresji kinematyki MRP	159
6.3. Funkcja regresji dynamiki MRP	163
6.4. Podsumowanie	171
7. WNIOSKI KOŃCOWE	173
UZUPEŁNIENIA	175
A. Forma liniowa równań dynamiki MRP względem parametrów masowych	177
B. Wykaz ważniejszych programów komputerowych	184
C. Postać analityczna jawna przykładowego współczynnika dynamiki	188
LITERATURA	190
STRESZCZENIE	195

CONTENTS

SYMBOLS OF MAJOR NOTATIONS

7

1. INTRODUCTION

11

1.1. Genesis of the dissertation

11

1.2. Research object

12

1.3. Literature of the subject

16

1.4. Aim and field of the dissertation

18

1.5. Problems of robotics

19

2. MODELS OF IRM MOTION

23

2.1. Kinematics of IRM

24

2.1.1. Continuous description of motion

24

2.1.2. Continuous form of direct and inverse kinematic problem

26

2.1.3. Differential description of motion

36

2.1.4. Differential form of direct and inverse kinematic problem

44

2.2. Dynamics of IRM

45

2.2.1. Lagrange equations

46

2.2.2. Newton-Euler equations

63

2.2.3. Direct and inverse dynamic problem

70

2.3. Summary

71

2.3.1. Direct kinematic problem

72

2.3.2. Inverse kinematic problem

72

2.3.3. Kinematic conditions of achievement of desired trajectory points

72

2.3.4. Dynamics

73

2.3.5. Computation Problems of Dynamics

73

2.3.6. Dynamic and general conditions of realization of desired trajectory

74

3. MODELLING AND SIMULATION OF AS ROBOT

76

3.1. AS IRM models

76

3.1.1. AS IRM kinematics

76

3.1.2. AS IRM dynamics

82

3.2. Models of AS robot in Simulink environment

83

3.2.1. AS robot model

83

3.2.2. Manipulator model

84

3.2.3. Servo models

85

3.2.4. Actuator models

86

3.2.5. Current actuator controller models

88

3.3. Examples of AS robot motion simulation

88

3.3.1. Desired trajectories

89

3.3.2. Simulation of motion

90

3.4. Simplification of models

93

3.5. Summary

97

4. MODELLING AND SIMULATION OF L-1 ROBOT

99

4.1. L-1 IRM models

99

4.1.1. L-1 IRM kinematics

99

4.1.2. L-1 IRM dynamics

105

4.2. Models of L-1 robot in Simulink environment

105

4.2.1. L-1 robot model	105
4.2.2. Manipulator model	106
4.2.3. Actuator models	107
4.3. Examples of L-1 robot motion simulation	110
4.3.1. Desired trajectories	110
4.3.2. Simulation of experimental robot motion	111
4.4. Simplification of models	114
4.5. Summary	118
5. MODELLING AND SIMULATION OF EXPERIMENTAL ROBOT	119
5.1. IRb-6 IRM models	119
5.1.1. IRb-6 IRM kinematics	119
5.1.2. IRb-6 IRM dynamics	131
5.2. Experimental manipulator models	131
5.2.1. Experimental manipulator kinematics	131
5.2.2. Experimental manipulator dynamics	137
5.3. Models of experimental robot in Simulink environment	138
5.3.1. Experimental robot model	138
5.3.2. Manipulator model	139
5.3.3. Servo models	139
5.3.4. Controller models	140
5.3.5. Actuator models	141
5.3.6. Current actuator controller models	142
5.4. Examples of experimental robot motion simulation	142
5.4.1. Desired trajectories	142
5.4.2. Simulation of motion	144
5.5. Simplification of models	149
5.6. Comparison between experimental and simulation results	153
5.7. Summary of chapter 5	155
5.8. Summary of simulation accelerate methods	156
6. CALIBRATION OF IRM MOTION MODELS	158
6.1. Regression functions	158
6.2. Regression function of IRM kinematics	159
6.3. Regression function of IRM dynamics	163
6.4. Summary	171
7. FINAL CONCLUSIONS	173
APPENDICES	175
A. Linear form of IRM dynamics equation in relation to mass parameters	177
B. List of more valid computer programs	184
C. Closed form of exemplary dynamics coefficient	188
REFERENCES	190
SUMMARY	195

Ważniejsze oznaczenia

Wielkości wektorowe oznaczono strzałką np. \vec{r} , \vec{d} itp. Macierze oznaczono tłustym drukiem, np. **A**, **B** itp.

\vec{a}	- wersor osi x przekształconego układu współrzędnych
a_x, a_y, a_z	- współrzędne wersora \vec{a}
A_i	- macierz przekształceń jednorodnych układu współrzędnych skojarzonego z członem i -tym względem układu współrzędnych skojarzonego z członem 1 -szym
\vec{b}	- wersor osi y przekształconego układu współrzędnych
b_x, b_y, b_z	- współrzędne wersora \vec{b}
\vec{c}	- wersor osi z układu przekształconego
c_x, c_y, c_z	- współrzędne wersora \vec{c}
\vec{d}	- wektor przemieszczenia początku przekształconego układu współrzędnych
d_x, d_y, d_z	- współrzędne wektora \vec{d}
$d\vec{r}$	- wektor przemieszczenia różniczkowego
dx, dy, dz	- współrzędne $d\vec{r}$
$d\vec{r}_{Tj}$	- wektor przemieszczenia różniczkowego układu współrzędnych x_j, y_j, z_j względem układu współrzędnych bazowych
${}^j dx, {}^j dy, {}^j dz$	- współrzędne $d\vec{r}_{Tj}$ w układzie współrzędnych x_j, y_j, z_j
dT	- różniczka macierzy przekształceń T
E	- macierz przekształceń jednorodnych opisująca element wykonawczy manipulatora względem członu roboczego
E_μ	- macierz przekształceń jednorodnych opisująca obiekt manipulacji względem elementu wykonawczego MRP
eqsl	- błąd współrzędnej naturalnej siłownika l -tego
evsl	- błąd prędkości zmian współrzędnej naturalnej siłownika l -tego
F_i	- niepotencjalna siła uogólniona członu i -tego
F_{ai}	- niepotencjalna siła uogólniona siłownika i -tego
F_{sin}	- siła napędowa wytwarzana przez siłownik i -ty
F_{sits}	- startowa siła tarcia suchego siłownika i -tego
F_{sitr}	- ruchowa siła tarcia suchego siłownika i -tego
\vec{g}	- wektor przyspieszenia grawitacyjnego Ziemi
g	- postać jednorodna \vec{g}
h_i	- skok przekładni śrubowej i -tej
\vec{i}	- wersor osi x
\vec{i}_{Tj}	- wersor osi x_j
irl	- sygnał sterujący regulatorów serwomechanizmu l -tego
irlz	- sygnał sterujący siłownikiem l -tym
irlmax	- maksymalny sygnał sterujący siłownikiem l -tym
I_{uv}	- (u, v) element macierzy pseudobezwładności członu i -tego
I_i	- macierz tensora bezwładności
\vec{j}	- wersor osi y

\bar{J}_{Tj}	- wersor osi y_j
J_i	- macierz pseudobezwładności członu i -tego
J_{ii}	- macierz pseudobezwładności elementu wykonawczego siłownika i -tego
${}^j J_j$	- macierz jacobianowa członu j -tego
\bar{k}	- wersor osi z
\bar{k}_{Tj}	- wersor osi z_j
k_i	- 1) przełożenie przekładni i -tej, 2) wzmocnienie części całkującej regulatorów serwomechanizmów siłownika i -tego
kp	- wzmocnienie części proporcjonalnej regulatorów serwomechanizmów
ks	- wzmocnienie siłownika
kz	- wzmocnienie zadajnika prędkości serwomechanizmu
\bar{K}_i	- wektor krętu członu i -tego
K_i	- macierz kolumnowa krętu \bar{K}_i
l_i	- przemieszczenie wzdłuż osi x_i - parametr Hartenberga-Denavita
m	- liczba współrzędnych zewnętrznych niezależnych opisujących trajektorię zadaną
m_i	- masa członu i -tego z elementami przymocowanymi do niego
m_{pl}	- masa elementu l -tego zespołu napędowego członu p -tego
\bar{M}	- wektor momentu
M	- macierz kolumnowa momentu \bar{M}
N	- liczba stopni swobody MRP
\bar{P}_i	- wektor siły działającej na człon i -ty
P_i	- macierz kolumnowa siły \bar{P}_i
\bar{p}_i	- wektor pędu członu i -tego
p_i	- macierz kolumnowa pędu \bar{p}_i
q_i	- współrzędna naturalna członu i -tego
q_{si}, q_{si}	- współrzędna naturalna siłownika i -tego
Q	- macierz kolumnowa członów
\bar{r}	- wektor położenia
\bar{r}_i	- postać jednorodna wektora opisującego środek masy członu i -tego
\bar{R}	- wektor sił reakcji
R	- macierz kolumnowa sił \bar{R}
t	- czas
T_i	- 1) macierz przekształceń jednorodnych układu współrzędnych $x_i y_i z_i$, 2) postać jednorodna układu współrzędnych $x_i y_i z_i$
T_{ij}	- macierz przekształceń jednorodnych układu współrzędnych elementu j -tego względem układu współrzędnych $x_i y_i z_i$
T_N	- macierz przekształceń jednorodnych układu współrzędnych członu roboczego
${}^i T_{Ni}$	- macierz przekształceń jednorodnych układu współrzędnych członu roboczego względem układu współrzędnych $x_i y_i z_i$
T_{Nzad}	- macierz przekształceń jednorodnych opisująca trajektorię zadaną członu roboczego

T_{ii}	- macierz przekształceń jednorodnych elementu wykonawczego siłownika i -tego względem układu współrzędnych $x_i y_i z_i$
$Trans(x, y, z)$	- macierz jednorodna przesunięcia o x, y, z wzdłuż osi układu odniesienia
v_{0i}	- macierz kolumnowa prędkości początku układu współrzędnych $x_i y_i z_i$
vslz	- wartość zadana vsl
$x_0 y_0 z_0$	- układ współrzędnych bazowy
$x_i y_i z_i$	- układ współrzędnych członu i -tego
X	- macierz przekształceń jednorodnych opisująca człon roboczy w układzie współrzędnych bazowym
X_M	- macierz przekształceń jednorodnych opisująca obiekt manipulacji w układzie współrzędnych bazowym
X_{zad}	- macierz przekształceń jednorodnych opisująca trajektorię zadaną elementu wykonawczego w układzie współrzędnych bazowym
${}^j \Delta_i$	- macierz jednorodna przekształceń różniczkowych układu współrzędnych $x_j y_j z_j$ spowodowanego różniczkową zmianą współrzędnej naturalnej dq_i
${}^{i-1} \Delta_i$	- macierz jednorodna przekształceń różniczkowych układu współrzędnych skojarzonego z członem i -tym, który pokrywa się z układem współrzędnych skojarzonym z członem $i-1$ -szym przy $dq_i = 0$, spowodowanych różniczkową zmianą współrzędnej naturalnej dq_i
${}^j \Delta$	- macierz jednorodnych przekształceń różniczkowych układu współrzędnych $x_j y_j z_j$
ω_{sl}, vsl	- szybkość zmian współrzędnej naturalnej siłownika l -tego
Θ_i	- 1) kąt obrotu, 2) kąt obrotu wokół osi z_{i-1} - parametr Hartenberga-Denavita
Θ_i	- kąt obrotu członu i względem członu $i-1$ -szego
Θ_{si}	- kąty obrotu elementu wykonawczego siłownika i -tego
α_i	- kąt obrotu wokół osi x_i - parametr Hartenberga-Denavita
λ_i	- przemieszczenie wzdłuż osi z_i - parametr Hartenberga-Denavita
$d\bar{\varphi}_{Tj}$	- wektor obrotu różniczkowego układu współrzędnych $x_j y_j z_j$ względem układu współrzędnych bazowych
${}^j d\varphi_x, {}^j d\varphi_y, {}^j d\varphi_z$	- współrzędne $d\bar{\varphi}_{Tj}$ w układzie współrzędnych $x_j y_j z_j$
${}^j d\varphi_{xi}, {}^j d\varphi_{yi}, {}^j d\varphi_{zi}$	- współrzędne $d\bar{\varphi}_{Tj}$ wynikające z różniczkowej zmiany współrzędnej naturalnej dq_i
$\bar{\omega}_{0i}$	- wektor prędkości kątowej układu współrzędnych $x_j y_j z_j$

1. WPROWADZENIE

1.1. Geneza rozprawy

Historia rozwoju mechanizmów i maszyn potwierdza ciągle dążenie człowieka do tworzenia coraz nowszych i doskonalszych maszyn sterowanych automatycznie. Twórcy od początku rozwoju mechanizmów i maszyn myśleli o budowie maszyny wykonującej funkcje użyteczne organizmów żywych, takich jak ludzie i zwierzęta. W końcu XIX w. i w pierwszej połowie XX w. zbudowano wiele mechanizmów podobnych do człowieka. Rozwój mechanizmów i pojawienie się elementów elektrycznych, hydraulicznych i pneumatycznych umożliwiło budowę maszyn zwanych **manipulatorami**, realizujących czynności ręki. Dzięki postępowi technicznemu i naukowemu w wielu różnych dziedzinach techniki-mechanice, inżynierii materiałowej, elektronice i informatyce poczyniono duży krok w kierunku automatyzacji czynności manipulacyjnych. Opracowano maszyny manipulacyjne zwane robotami. Termin **robot** został użyty po raz pierwszy przez czeskiego pisarza Karola Čapka w sztuce (Rossums Universal Robots) w 1920 r. [96].

Początek rozwoju współczesnych robotów datuje się od 1950 r., kiedy w USA rozpoczęto prace naukowo-badawcze nad manipulatorami budowanymi dla przemysłu nuklearnego. W 1954 r. Georg Devol zaprojektował pierwszego programowalnego robota. W 1956 r. student fizyki na Uniwersytecie Columbia Joseph Engelberg wykupił prawa autorskie robota Devola i założył firmę Unimation Company. W 1961 r. zainstalowano pierwszego robota Unimate w fabryce General Motors w Trenton w stanie New Jersey [51].

W ostatnich latach nastąpił szybki rozwój robotów przemysłowych, które znajdują szczególnie zastosowanie w pracach spawalniczych, malarskich, montażowych oraz do obsługi pras i obróbek wykończeniowych, takich jak szlifowanie i polerowanie.

W wielu publikacjach, w tym w Raporcie Biura Polityki Narodowej i Technicznej USA [24], wyróżnia się dwadzieścia kilka dziedzin nauki i techniki jako istotnych dla rozwoju gospodarki, a także bezpieczeństwa kraju. Z zestawienia według ważności 6 grup tych dziedzin wynika, że wytwarzanie zajmuje bardzo ważną, bo drugą pozycję, a pojęcie takie jak systemy komputerowo zintegrowanej produkcji CIM (computer integrated manufacturing) [24] stało się powszechnym w wielu dziedzinach przemysłowych. Istotnym elementem tych systemów są roboty przemysłowe. Roboty przemysłowe mogą współpracować z komputerowymi systemami wspomagania projektowania CAD (*computer aided design*) i komputerowymi systemami wspomagania produkcji CAM (*computer aided manufacturing*), charakteryzującymi najnowsze trendy w automatyzacji procesów produkcyjnych [10]. Technologie te umożliwiają projektowanie systemów sterowania komputerowo zintegrowanej produkcji CIM [24]. Systemy CIM współtworzą elastyczne systemy produkcji ESP [26,46]. Celem elastycznych i komputerowo zintegrowanych systemów produkcji jest: wzrost wydajności, skrócenie czasu produkcji, wzrost jakości.

W ostatnim dziesięcioleciu rozwój rynku robotów przemysłowych był szybki, ale znacznie wolniejszy niż przewidywały prognozy. Jedną z przyczyn tego zjawiska jest fakt, że roboty są nadal zbyt drogie i trudne do programowania. Jednym z czynników ułatwiających ich stosowanie są systemy programowania autonomicznego *off-line* [10]. Systemy te czynią roboty przemysłowe przyjaznymi dla użytkowników, gdyż umożliwiają programowanie na poziomie zadań za pomocą prostych poleceń typu **włóż wałek** lub nawet **zbuduj piecyk**. Języki programowania robotów na poziomie zadań istnieją, lecz są ciągle w fazie rozwojowej.

Prace nad robotami w Polsce rozpoczęto na początku lat 70. Po raz pierwszy zastosowano z powodzeniem roboty w 1976 r. w Olkuskiej Fabryce Naczyn Emaliowanych, gdzie zainstalowano roboty firmy De Vilbiss Trallfa oraz w FSO Żerań, Warszawa, gdzie zastosowano roboty UNIMATION. W latach 70. nastąpił znaczący rozwój robotów

przemysłowych w Polsce. Zakupiono licencję firmy ASEA na roboty przemysłowe IRb-6 i IRb-60, których produkcję podjął PIAP. Roboty własnej konstrukcji produkował Instytut Mechaniki Precyzyjnej oraz Centrum Obrabiarkowe w Pruszkowie [101].

Pod koniec lat 80. podjęto działania zmierzające do intensyfikacji rozwoju robotów przemysłowych. W ZAP, Ostrów Wielkopolski, wyprodukowano roboty IRp-6 i IRp-60, w PIAP, Warszawa, wyprodukowano między innymi roboty przemysłowe URP-6 i URP-60. Manipulatory tych robotów są identyczne z manipulatorami licencyjnymi serii IRb.

Z pracy [37] wynika, że sytuacja robotyki w Polsce wygląda niekorzystnie na tle świata. Zasób pracujących w Polsce robotów przemysłowych kształtował się w 1993 r. na poziomie 648 szt., w 1994 - 660 szt., a w 1995 - 675 szt. Najwięcej robotów zainstalowano w Polsce w latach 1991-1995 w branży motoryzacyjnej - 300 szt. i w branży maszynowej - 213 szt. Łącznie w tych latach zainstalowano w Polsce 792 robotów przemysłowych. Nowoczesna linia dużych pras zainstalowana w Zakładach FIAT Auto Poland - fabryce samochodów osobowych jest obsługiwana przez różne roboty przemysłowe, w tym przez roboty IRb-60. W 1993 r. w Zakładach Thomson Polkolor zainstalowano trzy zrobotyzowane linie do pokrywania grafitem i lakierem fragmentów lamp kineskopowych. W latach 2002-2003 zbudowano w tych zakładach osiem zrobotyzowanych stanowisk. Zastosowano roboty przemysłowe IRb1-500, IRb1400 oraz IRb4400 firmy ABB. W PIAP, Warszawa, w 2000 r., wyprodukowano robot pirotechniczny SR-10 INSPEKTOR dla polskiej policji. Obecnie trwają prace doskonalące konstrukcję tego robota. Na liniach produkcyjnych Philips-Lighting w Pile wdrożono manipulatory przemysłowe wyprodukowane w PIAP, Warszawa. Zrobotyzowany system do inspekcji i badań instalacji przemysłowych współpracujący z robotem mobilnym opracowano w też w PIAP, Warszawa. Trwają prace konstrukcyjne nad polskim robotem kardiochirurgicznym Robin Heart. Bardziej szczegółowe informacje o stanie robotyzacji i badań naukowych z zakresu robotyki w Polsce zawiera praca [99]. Teraz w niemal każdej fabryce samochodów stosuje się zrobotyzowane linie montażowe.

Potrzeba nadążania za światowymi trendami rozwojowymi w dziedzinie rozwiązań technicznych robotów przemysłowych wskazała na konieczność powołania w Polsce nowego kierunku kształcenia - automatyki i robotyki. Kierunek ten powołano w roku akademickim 1987/1988. Politechnika Śląska w Gliwicach była jedną z dziewięciu uczelni w kraju, gdzie rozpoczęto kształcenie absolwentów na tym kierunku.

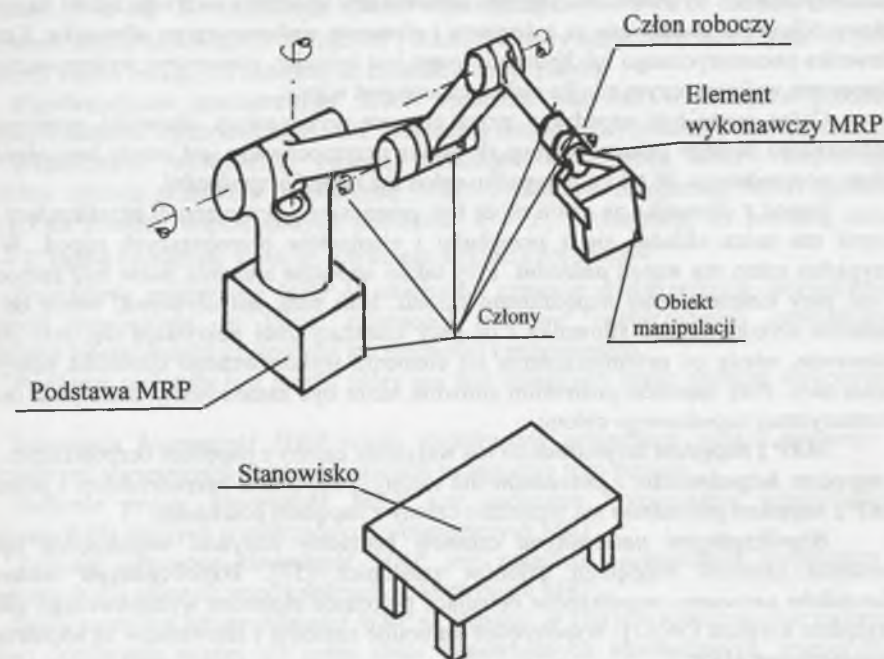
Dzięki staraniom kierownika Zakładu Robotyki i Automatyzacji Procesów Dyskretnych prof. dr inż. Henryka Kowalowskiego laboratoria dydaktyczne Zakładu zostały wyposażone w roboty przemysłowe, między innymi w robot L-1 i w najnowocześniejszy w latach osiemdziesiątych w kraju robot przemysłowy IRb-6. Roboty stały się obiektem badań pracowników Zakładu Robotyki i Automatyzacji Procesów Dyskretnych. Do laboratorium Zakładu zakupiono następny robot przemysłowy IRb-6 oraz tor jezdny LP-1. Manipulator tego robota zamontowano na torze jezdny LP-1 i zastąpiono fabryczne rezolwery enkoderami optycznymi. Modernizacja miała na celu dostosowanie robota do systemu sterowania zaprojektowanego i uruchomionego w tym Zakładzie. Dalej w rozprawie robot ten będzie nazywany eksperymentalnym. System sterowania robota jest ciągle przedmiotem prac badawczych mających na celu jego rozwój. Równocześnie z pracami projektowymi prowadzone są prace badawcze poświęcone: systemom sensorycznym robotów, modelowaniu, symulacji i planowaniu ruchu manipulatorów, w tym także manipulatorów L-1, IRb-6. Jednym z rezultatów tych badań jest niniejsza rozprawa.

1.2. Obiekt badań

W robotach przemysłowych można wyróżnić dwa zasadnicze zespoły - sterowniczy i manipulacyjny. Zespół manipulacyjny stanowią człony połączone parami kinematycznymi,

siłowniki, zespoły przekazywania napędów z siłowników na człony, czujniki oraz elementy wykonawcze konieczne do obsługi procesów technologicznych. Zespoły manipulacyjne powszechnie nazywa się manipulatorami. Dalej będziemy stosować skrót MRP-manipulator robota przemysłowego oraz MRE - manipulator robota eksperymentalnego. Wersją angielską skrótu MRP jest IRM - *industrial robot manipulator*. Wersją angielską skrótu MRE jest ERM - *experimental robot manipulator*.

W rozprawie skupimy się na MRP w postaci łańcuchów kinematycznych szeregowych otwartych [40]. Rys. 1.1 ilustruje taki MRP. Początkowym członem jest *podstawa MRP*, a końcowym *człon roboczy*, do którego jest przymocowany *element wykonawczy MRP*. Elementem wykonawczym może być chwytak, szczęki obejmujące elektrodę spawalniczą itp. *Obiektem manipulacji* jest przedmiot obejmowany przez chwytak (jak na rys. 1.1).



Rys. 1.1. MRP w postaci szeregowego otwartego łańcucha kinematycznego
Fig. 1.1. IRM in form of open serial kinematic chain

Dwa sąsiednie człony połączone przegubem tworzą *parę kinematyczną*. We współczesnych MRP stosuje się wyłącznie pary kinematyczne V klasy [40], tzn. połączenia umożliwiające ruch względny łączonych członów tylko z jednym stopniem swobody. Dwa człony połączone przegubem pozwalającym na ruch obrotowy tworzą *parę kinematyczną obrotową*. Dwa człony połączone przegubem pozwalającym na ruch postępowy tworzą *parę kinematyczną przesuwną*. W rozprawie skupimy się tylko na takich parach kinematycznych. Do opisu ruchu MRP będziemy stosować przekształcenia jednorodne [40,41,56].

Ruchliwość członu roboczego MRP względem podstawy jest liczbą W , którą obliczamy ze wzoru

$$W = 6(n-1) - \sum_{i=1}^5 i \cdot p_i,$$

gdzie

n - liczba członów,

i - klasa pary kinematycznej,

p_i - liczba par kinematycznych klasy i .

We wzorze tym pomijamy pomocnicze pary kinematyczne elementu wykonawczego MRP umożliwiające jego funkcjonowanie, np. ruch chwytaka w cyklu zamknięcie, podanie przedmiotu i otwarcie. Dla tego uproszczenia $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0$, $p_5 = N$, $n = N + 1$, $W = N$. N jest liczbą par kinematycznych klasy V. Ruchliwość W jest też liczbą stopni swobody członu roboczego obliczoną względem członu nieruchomego tj. podstawy [40]. Zatem liczbą stopni swobody MRP względem podstawy lub krótko, liczbą stopni swobody MRP jest N .

Poszczególne człony MRP mogą być napędzane przez silniki elektryczne, siłowniki pneumatyczne lub hydrauliczne. Ogólnie *siłownikami* będziemy nazywać silniki napędzające człony. Siłowniki zbudowane są z *korpusu* i *elementu wykonawczego siłownika*. Korpusem siłownika pneumatycznego lub hydraulicznego jest cylinder, elementem wykonawczym tłok. Elementem wykonawczym silnika elektrycznego jest wirnik.

Człon może być napędzany przez element wykonawczy siłownika przymocowany bezpośrednio do tego członu. Korpus siłownika przymocowany jest wtedy bezpośrednio do członu poprzedniego. W takim przypadku człon ma *napęd bezpośredni*.

Napęd z siłownika na człon może być przenoszony przez *zespół przekazujący napęd*. Zespół ten może składać się z przekładni i elementów przenoszących napęd. W takim przypadku człon ma *napęd pośredni*. Przy takim napędzie siłownik może być zamocowany w osi pary kinematycznej napędzanego członu. Jeśli para jest obrotowa, wtedy oś obrotu elementu wykonawczego siłownika i oś pary kinematycznej pokrywają się. Jeśli para jest przesuwna, wtedy oś przemieszczania się elementu wykonawczego siłownika pokrywa się z osią pary. Przy napędzie pośrednim siłownik może być zamocowany także poza osią pary kinematycznej napędzanego członu.

MRP z napędem bezpośrednim ma wszystkie człony z napędem bezpośrednim. *MRP z napędem bezpośrednim i pośrednim* ma człony z napędami bezpośrednimi i pośrednimi. *MRP z napędem pośrednim* ma wszystkie człony z napędem pośrednim.

Współrzednymi naturalnymi członów będziemy nazywać współrzedne opisujące położenie członów względem członów sąsiednich [57]. *Współrzednymi naturalnymi siłowników* nazwiemy współrzedne opisujące położenie elementu wykonawczego siłownika względem korpusu [56,57]. Współrzedne naturalne członów i siłowników są *współrzednymi wewnętrznymi MRP*.

Trajektoria wewnętrzna MRP, to zależności czasowe współrzednych wewnętrznych MRP. Trajektorię wewnętrzną mogą być także zależności czasowe współrzednych wewnętrznych uzupełnione zależnościami czasowymi ich prędkości i przyspieszeń.

Do opisu położenia i orientacji obiektu manipulacji zastosujemy współrzedne wewnętrzne. Opis taki wynika ze struktury kinematycznej MRP.

Zbiór wszystkich możliwych położeń i orientacji wynikający z długości członów i zakresu zmian współrzednych wewnętrznych tworzy *przestrzeń roboczą MRP*. Dla MRP o liczbie stopni swobody $N < 6$ przestrzeń ta jest częścią *podprzestrzeni* o N stopniach swobody [10]. Na przykład podprzestrzeń dwuczłonowego manipulatora płaskiego jest płaszczyzna, w której poruszają się człony. Przestrzeń roboczą jest fragment tej płaszczyzny osiągalny przez element wykonawczy.

Położenie i orientację obiektu manipulacji możemy opisać niezależnie od struktury kinematycznej MRP. Opis zadań dla robotów wynika z potrzeb technologicznych i nie uwzględnia struktury kinematycznej MRP. Na przykład możemy zadać położenie i orientację, jakie ma osiągnąć prostopadłościan po położeniu go przez robot na stoliku pokazanym na rys. 1.1. Na rysunku tym stolik jest elementem stanowiska technologicznego. Dla technologa obojętne jest, jaki MRP będzie przenosił przedmiot. W takich przypadkach zadajemy

położenie i orientację obiektu manipulacji za pomocą współrzednych zewnętrznych. *Współrzednymi zewnętrznymi obiektu manipulacji* nazwiemy współrzedne położenia i orientacji obiektu manipulacji MRP względem nieruchomej podstawy lub stanowiska.

Najczęściej do opisu położenia i orientacji obiektu manipulacji stosuje się współrzedne zewnętrzne. *Współrzednymi zewnętrznymi* będą wzajemnie prostopadłe współrzedne położenia x, y, z i układ $Z-Y-Z$ kątów bieżących Φ, Θ, Ψ lub inny układ trzech kątów bieżących. Zmianę orientacji układu współrzednych $x''y''z''$ względem układu xyz za pomocą układu $Z-Y-Z$ kątów bieżących Φ, Θ, Ψ otrzymujemy przez następujące obroty: układu współrzednych xyz wokół osi z o kąt Φ otrzymując układ $x'y'z'$, układu $x'y'z'$ wokół osi y' o kąt Θ otrzymując układ $x''y''z''$, układu $x''y''z''$ wokół osi z'' o kąt Ψ otrzymując układ współrzednych $x'''y'''z'''$. Zmiany orientacji dokonujemy wokół osi układów bieżących i dlatego te kąty nazywamy bieżącymi. W pracy [10] układy kątów bieżących nazwane są zbiorami kątów Eulera.

Współrzednymi zewnętrznymi MRP będziemy nazywać współrzedne położenia i orientacji elementu wykonawczego MRP względem nieruchomej podstawy lub stanowiska.

Współrzedne wewnętrzne opisują *przestrzeń wewnętrzną MRP*. Współrzedne zewnętrzne opisują *przestrzeń zewnętrzną MRP*. Przestrzeń zewnętrzną MRP będziemy opisywać za pomocą współrzednych położenia x, y, z , a orientację za pomocą układu $Z-Y-Z$ kątów bieżących Φ, Θ, Ψ lub innego układu trzech kątów.

Trajektorię zewnętrzną MRP są zależności czasowe współrzednych zewnętrznych. Trajektorię zewnętrzną są także zależności czasowe współrzednych zewnętrznych uzupełnione zależnościami czasowymi ich prędkości i przyspieszeń.

Punktem zadaniem jest punkt, który ma być osiągnięty przez element wykonawczy MRP.

Równania kinematyki MRP wiążą współrzedne zewnętrzne punktu zadanego ze współrzednymi wewnętrznymi zapewniającymi osiągnięcie tego punktu.

Zadanie proste kinematyki MRP jest zadaniem wyznaczania współrzednych zewnętrznych dla znanych współrzednych wewnętrznych MRP.

Zadanie odwrotne kinematyki MRP jest zadaniem wyznaczania współrzednych wewnętrznych dla znanych współrzednych zewnętrznych MRP.

Stany osobliwe lub *osobliwości MRP* są stanami, w których jednoznacznie zadanemu punktowi odpowiada więcej niż jeden zbiór współrzednych wewnętrznych, stanowiących rozwiązanie zadania odwrotnego kinematyki [10,56,57]. Na ogół jeśli liczba stopni swobody MRP jest większa od liczby współrzednych zewnętrznych niezależnych opisujących trajektorię zadaną, pojawiają się osobliwości MRP. Dla *manipulatora redundantnego* liczba jego stopni swobody jest większa od liczby współrzednych zewnętrznych niezależnych, dla *manipulatora nieredundantnego* liczba jego stopni swobody jest nie większa od liczby współrzednych zewnętrznych niezależnych.

Równaniami dynamiki MRP będziemy nazywać równania wiążące siły i momenty napędowe siłowników ze współrzednymi wewnętrznymi wraz z ich pierwszymi i drugimi pochodnymi po czasie.

Zadanie proste dynamiki MRP jest zadaniem wyznaczania współrzednych wewnętrznych dla znanych momentów i sił napędowych siłowników.

Zadanie odwrotne dynamiki MRP jest zadaniem wyznaczania momentów i sił oddziaływania członów, siłowników i elementów składowych zespołów przekazujących napędy dla znanych współrzednych wewnętrznych.

Obiektami badań w rozprawie są manipulatory nieredundantne IRb-6 o pięciu stopniach swobody oraz roboty AS [2], L-1 [3,15] i eksperymentalny, z manipulatorami o sześciu stopniach swobody.

1.3. Literatura przedmiotu

Standardowe problemy modelowania robotów znajdowały się w centrum uwagi ok. 10 lat temu, ale niektóre problemy pozostały jeszcze nie rozwiązane. Dlatego w spisie literatury dominują pozycje z tego okresu.

Ostatnio ukazało się wiele bardzo dobrych prac, w których przedstawiono problemy kinematyki, dynamiki, planowania trajektorii i symulacji ruchu MRP [10,23,32,37,48,51,100,107]. Oprócz wymienionych prac pojawiło się bardzo dużo artykułów w czasopismach poświęconych problemom kinematyki, dynamiki, planowania trajektorii i symulacji ruchu MRP.

Problemy kinematyki MRP obejmują rozwiązania zadania prostego i odwrotnego. Do zadania prostego najczęściej stosuje się metodę macierzową [37,40,41,48,51,55,56,57,61,63,66,69,107]. W metodzie tej wykorzystuje się macierze przekształceń jednorodnych.

Z literatury [10,32,37] wynika, że zadanie odwrotne kinematyki można rozwiązywać metodami numerycznymi lub analitycznymi. W metodach numerycznych wyznaczenie współrzędnych naturalnych, odpowiadających współrzędnym zewnętrznym punktu zadanego, odbywa się w kolejnych krokach obliczeń iteracyjnych. Krok dyskretyzacji współrzędnych naturalnych w kolejnych krokach obliczeń iteracyjnych zależy od błędu współrzędnych zewnętrznych w poprzednim kroku iteracji. W metodach tych błąd położenia i orientacji można zmniejszać, ale zwiększa to liczbę kroków obliczeń iteracyjnych. Zaletą metod numerycznych jest prostota obliczeń, wynikająca ze stosowania tylko równań kinematyki prostej MRP. Wadą tych metod jest konieczność wielokrotnych obliczeń iteracyjnych, co czyni je wolniejszymi od metod analitycznych. Stosowanie metod numerycznych łączy się z niebezpieczeństwem pominięcia rozwiązań wielokrotnych zadania odwrotnego kinematyki MRP, co należy uznać za kolejną ich wadę.

Metody analityczne pozwalają otrzymać rozwiązania zadania odwrotnego kinematyki w postaci formuł analitycznych. Rozwiązania takie umożliwiają obliczanie współrzędnych naturalnych punktu zadanego, w jednym kroku, z dokładnością wynikającą z długości rejestrów komputera użytej do reprezentacji liczbowej. Wyrażenia te pozwalają wyznaczyć rozwiązanie wielokrotne, czyli stany osobliwe MRP. Zaleca się stosowanie algorytmów rozwiązywania zadania odwrotnego kinematyki w postaci analitycznej, jako szybszych od metod numerycznych. Przyspieszenie rozwiązywania zadania odwrotnego kinematyki przez zastosowanie obliczeń równoległych [27,29,44,103] jest łatwiejsze przy zastosowaniu formuł analitycznych, niż w przypadku stosowania metod numerycznych.

Metody analityczne dla MRP o 6 stopniach swobody przedstawia literatura [32,37,40,41,48,51,55,56,57,61,66,71,100,107]. MRP o liczbie stopni swobody mniejszej niż 6 mogą osiągać położenia i orientacje tylko z ich podprzestrzeni. Pojęcie podprzestrzeni manipulatorów wprowadzono w pracy [10]. Zaproponowano w nim ogólną metodę sprawdzania przynależności zadanego punktu do podprzestrzeni, opierającą się na sprawdzaniu 12 proporcji liczbowych. Warunkiem koniecznym istnienia rozwiązań zadania odwrotnego kinematyki manipulatorów, z liczbą stopni swobody mniejszą niż 6, jest przynależność zadanych punktów do ich podprzestrzeni. Analityczne rozwiązania zadania odwrotnego kinematyki takich manipulatorów przedstawiają prace [10,23,32,37,40,48,51,56,57,61,66,100,107].

W pracach [23,32,37,40,48,100,107] nie badano przynależności zadanych punktów do podprzestrzeni manipulatorów. W pracach [23,32,48,100,107] rozwiązano analitycznie zadanie odwrotne kinematyki manipulatorów o 3 stopniach swobody dla jednoznacznie zdefiniowanego położenia zadanego chwytaka i dowolnej orientacji. W pracach [32,37,40] rozwiązano zadanie odwrotne kinematyki manipulatorów

o 5 stopniach swobody dla jednoznacznie zdefiniowanego położenia i orientacji zadanej chwytaka.

W MRP z napędami bezpośrednimi korpusy siłowników i ich elementy wykonawcze są przymocowane do członów. Zatem w modelach dynamiki takich MRP uwzględnia się tylko oddziaływanie członów. Oczywiście, członzy te zawierają w sobie masy przymocowanych korpusów i wirników siłowników. W MRP z napędami pośrednimi członzy napędzane są przez siłowniki za pomocą zespołów przekazujących napęd. W modelach dynamiki takich MRP należy uwzględnić oddzielnie oddziaływanie członów, siłowników i zespołów przekazujących napędy.

Modele dynamiki MRP wynikające z równań dynamiki Newtona, uwzględniające tylko rozkład mas członów, przedstawiono w pracach [10,37,40,51,107]. W pracy [32] przedstawiono ogólny model dynamiki manipulatorów napędzanych bezpośrednio i pośrednio, uwzględniający oddziaływanie członów i siłowników, z korpusami siłowników zamocowanymi do członów poprzedzających członzy napędzane.

Ogólne modele dynamiki MRP wynikające z równań Lagrange'a, uwzględniające rozkład mas, przedstawiono w pracach [10,23,32,37,40,48,51,107]. W pracach [10,32,37,40,51] modele ogólne uwzględniają tylko rozkład mas członów. W pracach [23,40,48] uwzględniono jednocześnie oddziaływanie członów i siłowników. W pracach [10,23,37,40,51] uwzględniono oddziaływanie siłowników w uproszczonych modelach dynamiki pojedynczych stopni swobody. Uproszczenie to polega na pominięciu energii kinetycznej wirników siłowników ruchu wokół osi innych niż oś ich obrotu. Jest to równoznaczne z założeniem, że osie obrotu wirników są nieruchome, pomimo ruchu MRP. Takie same założenia upraszczające przyjęto w ogólnym modelu dynamiki w pracy [41]. Skutki takich założeń przeanalizowano w pracach [56,57,59,62,64].

Do opisu kinematyki i dynamiki manipulatorów robotów zastosowano w pracy [105] formalizm motorów i skrętników, a w pracy [32] operatory przestrzenne. W pracy [8] do opisu kinematyki manipulatorów zastosowano hipergrafy.

Planowanie trajektorii MRP we współrzędnych wewnętrznych i zewnętrznych przedstawiono w pracach [32,37,48]. W pracach [10,23,37,48] przedstawiono ogólnie ideę planowania trajektorii z uwzględnieniem dynamiki MRP i możliwości napędowych siłowników. Problemy symulacji ruchu MRP przedstawiono w pracach [40]. Nakład obliczeniowy przy symulacji dynamiki MRP zależy od zastosowanego formalizmu oraz geometrii napędu. Dla MRP z napędem bezpośrednim formalizm Newtona-Eulera wymaga mniej obliczeń niż formalizm Lagrange'a [10,107]. Dla MRP z napędem pośrednim geometria napędu jest bardziej złożona niż z napędem bezpośrednim i dlatego łatwiejsze jest stosowanie formalizmu Lagrange'a [57,64]. Jednak wiadomo z mechaniki analitycznej [16,50], że oba formalizmy dają tę samą postać analityczną opisu dynamiki MRP. Z rozważań w pracy [10] wynika, że najbardziej pożądaną do obliczeń dynamiki MRP jest właśnie postać analityczna jawna, gdyż umożliwia ona ocenę wpływu poszczególnych parametrów modelu na interesujące nas parametry charakterystyk MRP. Postać analityczna jest niezbędna do projektowania algorytmów komputerowych obliczeń równoległych [27,29,44,103].

Opracowanie języka programowania na poziomie zadań wymaga opracowania algorytmów planowania trajektorii we współrzędnych zewnętrznych. Podstawą planowania są modele kinematyki i dynamiki manipulatorów tych robotów.

Stosowane w kraju modele dynamiki MRP IRb-6 i IRb-60 są uproszczone [30,95]. Uproszczenia te polegają na pominięciu ostatnich dwóch członów i włączeniu ich mas do masy trzeciego członu. Inne uproszczenia to skupienie mas członu drugiego i trzeciego w punktach ciężkości przy obliczaniu momentu bezwładności tych członów względem ich osi obrotu oraz przyjęcie liniowego rozkładu masy trzeciego członu przy obliczaniu jego energii kinetycznej.

Autor rozprawy przedstawił w pracach [55÷57,61,66,77] postaci analityczne rozwiązań zadania odwrotnego kinematyki MRP IRb-6 z 5 stopniami swobody i IRb-60 z 6 stopniami swobody. Do opisu podprzestrzeni MRP IRb-6 zastosował równania kluczowe. Metodę opisu podprzestrzeni MRP za pomocą równań kluczowych przedstawiają prace [58,67,70,72,74]. Równania kluczowe pozwalają sprawdzić przynależność punktów zadanych do podprzestrzeni MRP, bez konieczności sprawdzania 12 proporcji liczbowych, jak to proponuje praca [10].

W pracach [56,67,70,77] zaproponował różniczkowy opis podprzestrzeni MRP za pomocą różniczkowych równań kluczowych. W pracach tych zaproponował metody tworzenia równań kluczowych.

W pracach [56,57,59,64] przedstawił ogólne modele dynamiki MRP, uwzględniające rozkłady mas członów, siłowników i zespołów przekazujących napędy. Modele te uwzględniają rozkład masy obiektu manipulacji i ruch osi obrotów siłowników. Są słuszne dla dowolnego sposobu napędu, tj. dla bezpośredniego i pośredniego, z siłownikami zamocowanymi do dowolnych członów (niekoniecznie do członów poprzedzających człony napędzane). Uwzględnienie rozkładu mas siłowników wymaga dokładniejszego opisu kinematyki elementów wykonawczych siłowników i innych elementów stanowiących zespoły przekazywania napędu. Opis taki zaproponował autor w pracach [57,61,66,68].

Autor pragnie w tym miejscu wyrazić serdeczne podziękowania prof. zw. dr inż. Henrykowi Kowalowskiemu za wskazówki, przekonywanie i zachętę do zainteresowania się tą problematyką. Za słowa zachęty autor dziękuje prof. zw. dr inż. Stefanowi Węgrzynowi. Za opiekę i wskazówki autor dziękuje prof. zw. dr hab. inż. Ryszardowi Gessingowi.

Dziękuje opiniodawcom niniejszej rozprawy prof. zw. dr hab. inż. Józefowi Wojnarowskiemu i prof. dr hab. inż. Leszkowi Trybusowi za opracowanie wnikliwych recenzji, wiele ważnych uwag merytorycznych, zwrócenie uwagi na nieznane wcześniej autorowi pozycje literaturowe, a także zwrócenie uwagi na szereg niejasności w pierwszej wersji rozprawy.

Wyraża również wdzięczność śp. prof. dr hab. inż. Ernestowi Czogale za prace związane z mechaniką manipulatorów. Autor dziękuje prof. dr hab. inż. Edwardowi Hryniewiczowi za pomoc przy analizie układów elektronicznych robota eksperymentalnego. Dr inż. Zbigniewowi Bortliczkowi dziękuje za wskazówki redakcyjne przy pisaniu rozprawy.

1.4. Cel i zakres rozprawy

Celem rozprawy jest sformułowanie modeli matematycznych i symulacyjnych ruchu MRP z liczbą stopni swobody $N \leq 6$ i dowolnym sposobem napędu członów (z siłownikami zamocowanymi w osi par kinematycznych łączących człony i poza tymi osiami), zastosowanie metod uproszczeń modeli matematycznych robotów, przedstawienie wyników symulacji ruchu robotów za pomocą Simulinka, z rozszerzeniem Real Time Workshop, a także sformułowanie funkcji regresji na potrzeby kalibracji MRP.

Ze względu na obszerność i złożoność tematu poczyniono założenia definiujące zakres rozważań w rozprawie. Są one następujące:

1. Człony MRP tworzą łańcuchy kinematyczne szeregowo otwarte.
2. Pary kinematyczne łączące człony MRP są klasy V.
3. Wszystkie pary kinematyczne MRP są doskonałe, tzn. nie mają luzów.
4. Liczba stopni swobody MRP jest nie większa niż 6.
5. Wszystkie elementy składowe MRP są doskonale sztywne.
6. Współrzędne naturalne członów q_i i siłowników q_{si} nie zależą jawnie od czasu, tzn. $q_i = q_i(q_{s1}, q_{s2}, \dots, q_{sN})$.

Rozdział 2 przedstawia modele matematyczne kinematyki i dynamiki MRP. W znacznej mierze nawiązują do prac [54,56÷59,61,64,66,67,72,77]. Rozdziały 3, 4 i 5 zawierają: opis modeli kinematyki i dynamiki MRP AS, L-1, IRb-6, MRE. Zawierają także modele matematyczne siłowników, wzmacniaczy mocy, regulatorów prądów siłowników oraz serwo mechanizmów robotów AS, L-1 i eksperymentalnego. Przedstawiają programy symulacji tych robotów, opracowanych w środowisku programowym Simulinka, krótkie charakterystyki programów komputerowego planowania kinematyki robotów, przykłady planowania, przykłady symulacji, metody uproszczeń modeli matematycznych robotów, porównanie wyników symulacji robota eksperymentalnego z wynikami pomiarów oraz podsumowanie rezultatów badań przedstawionych w tym rozdziale. Do badań MRP AS w rozdziale 3 wykorzystano parametry kinematyki i dynamiki z pracy [2]. Do badań MRP L-1, IRb-6 i MRE w rozdziałach 4 i 5 zastosowano parametry kinematyki, które zostały zmierzone lub odczytane z rysunków dokumentacji technicznej. Parametry dynamiki MRP L-1, IRb-6 i MRE obliczono uwzględniając rozkłady mas i rozmiary członów i siłowników. Rozdział 6 zawiera ogólne formuły na funkcje regresji potrzebne do kalibracji parametrów modeli ruchu MRP, wcześniej odczytanych, zmierzonych lub obliczonych oraz wyszczególnienie parametrów kinematyki i dynamiki robotów AS, L-1 i eksperymentalnego. W rozdziale 7 sformułowano wnioski i uwagi końcowe. W uzupełnieniu A wyprowadzono formę liniową równań dynamiki MRP względem parametrów masowych. W uzupełnieniu B wymieniono najważniejsze programy stosowane do badań przedstawionych w rozprawie. W uzupełnieniu C przedstawiono postać analityczną jawną jednego ze współczynników dynamiki.

Wszystkie wspomniane wyżej programy zostały napisane w MATLAB-ie i języku C. Program planowania kinematyki MRE został napisany w języku C i zainstalowany w sterowniku nadrzędnym robota eksperymentalnego.

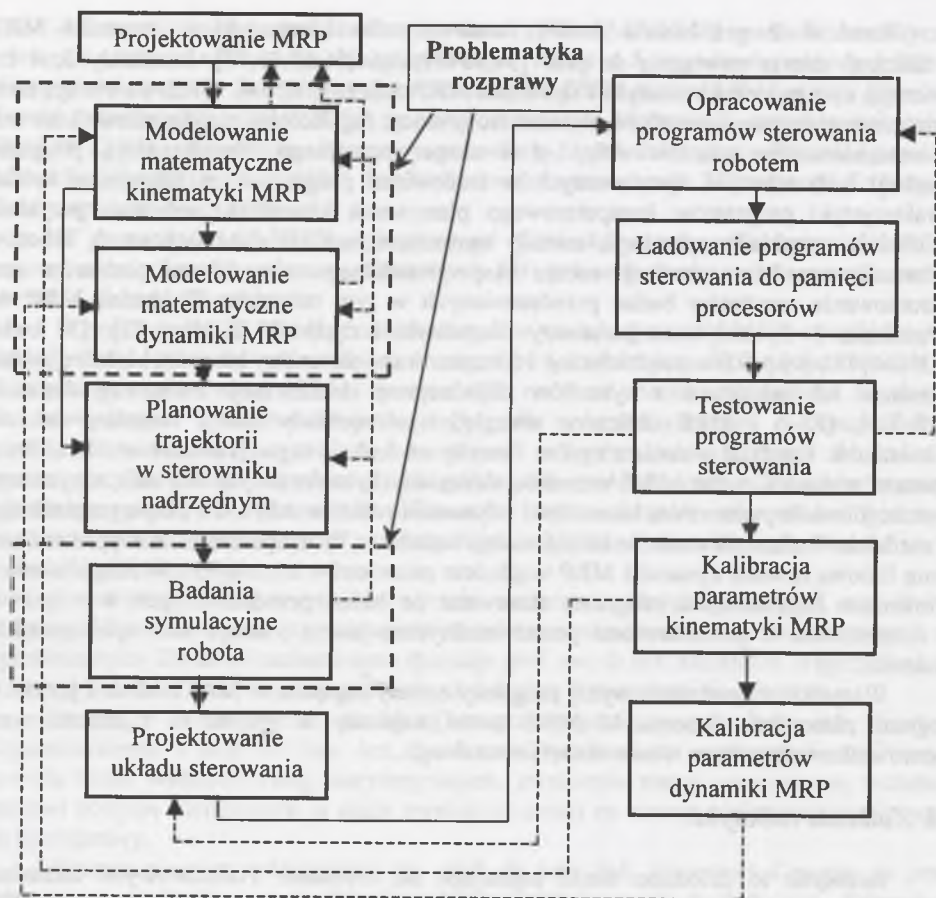
1.5. Zadania robotyki

Robotyka to dziedzina nauki zajmująca się robotami. Podstawowymi zadaniami robotyki są: projektowanie MRP, modelowanie matematyczne kinematyki i dynamiki MRP, planowanie trajektorii w przestrzeni zewnętrznej, badania symulacyjne robota, projektowanie układów sterowania, opracowanie programów sterowania. Zadania te ilustruje rys. 1.2. Na rysunku zaznaczono linią przerywaną problematykę badań tej rozprawy.

Pierwszym i niezbędnym zadaniem do powstania robota jest zaprojektowanie MRP. Modelowanie kinematyki MRP jest niezbędne do modelowania jego dynamiki. Modele matematyczne kinematyki i dynamiki MRP są potrzebne do planowania trajektorii.

Planowanie trajektorii MRP w sterowniku nadrzędnym polega na obliczaniu przebiegów czasowych współrzędnych wewnętrznych, zapewniających zadany ruch obiektu manipulacji lub elementu wykonawczego w przestrzeni zewnętrznej. Badania symulacyjne są konieczne do sprawdzenia poprawności i ewentualnej korekty modeli matematycznych robota. Skorygowane modele matematyczne są podstawą do projektowania układu sterowania. Projektowanie obejmuje określenie struktury układu sterowania, dobór nastaw regulatorów i parametrów współpracy między sterownikiem nadrzędnym i sterownikami podrzędnymi, zapewniających poprawną pracę robota.

Po zaprojektowaniu układu sterowania opracowywane są programy sterowania robotem. W programach sterowania między innymi planuje się trajektorię. Planowanie bazuje na formułach stanowiących rozwiązanie zadania prostego i odwrotnego kinematyki oraz odwrotnego dynamiki MRP. Przy planowaniu z pominięciem dynamiki i charakterystyk napędowych siłowników nie stosuje się formuł stanowiących rozwiązanie zadania odwrotnego dynamiki MRP. Programy te są pisane w językach wyższego poziomu (*high level*



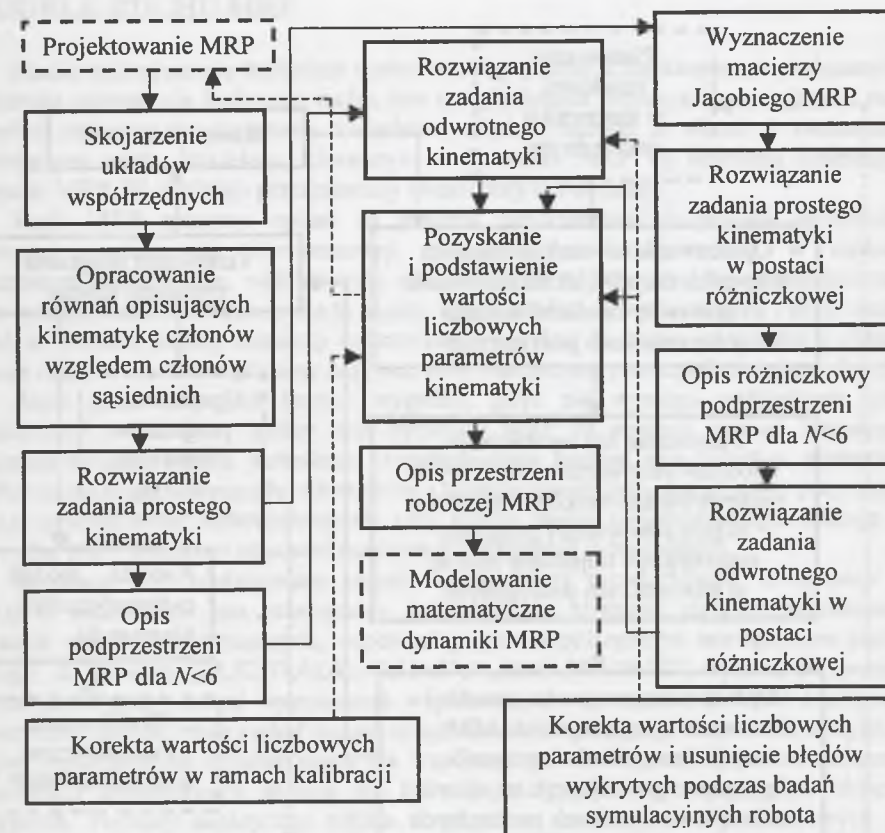
Rys. 1.2. Zadania robotyki
Fig. 1.2. Problems of robotics

language –HLL), np. C lub C++. Następnie programy te muszą być załadowane do pamięci procesorów za pomocą kompilatorów. W przypadku badań symulacyjnych za pomocą Simulinka z rozszerzeniem Real Time Workshop (RTW) nie trzeba pisać programów sterujących w językach wyższego poziomu. Rozszerzenie Real Time Workshop kompiluje automatycznie modele graficzne Simulinka na kod języka C lub assembler różnych procesorów. Modele symulacyjne robotów można za pomocą rozszerzenia RTW oraz pakietu Real Time Interface [32] w prosty sposób przekształcić w programy sterowania rzeczywistych robotów. W miejscu bloku reprezentującego opis matematyczny obiektu rzeczywistego wstawiamy odpowiednie bloki karty DSP, które umożliwiają współpracę programu z obiektem rzeczywistym [32].

Programy sterowania rzeczywistych robotów muszą być testowane. Umożliwia to wykrycie błędów i ewentualną korektę układu sterowania robota.

Kalibracja parametrów kinematyki i dynamiki polega na korekcie ich wartości liczbowych. Korekta ma na celu zmniejszenie błędów realizacji zadanych trajektorii MRP.

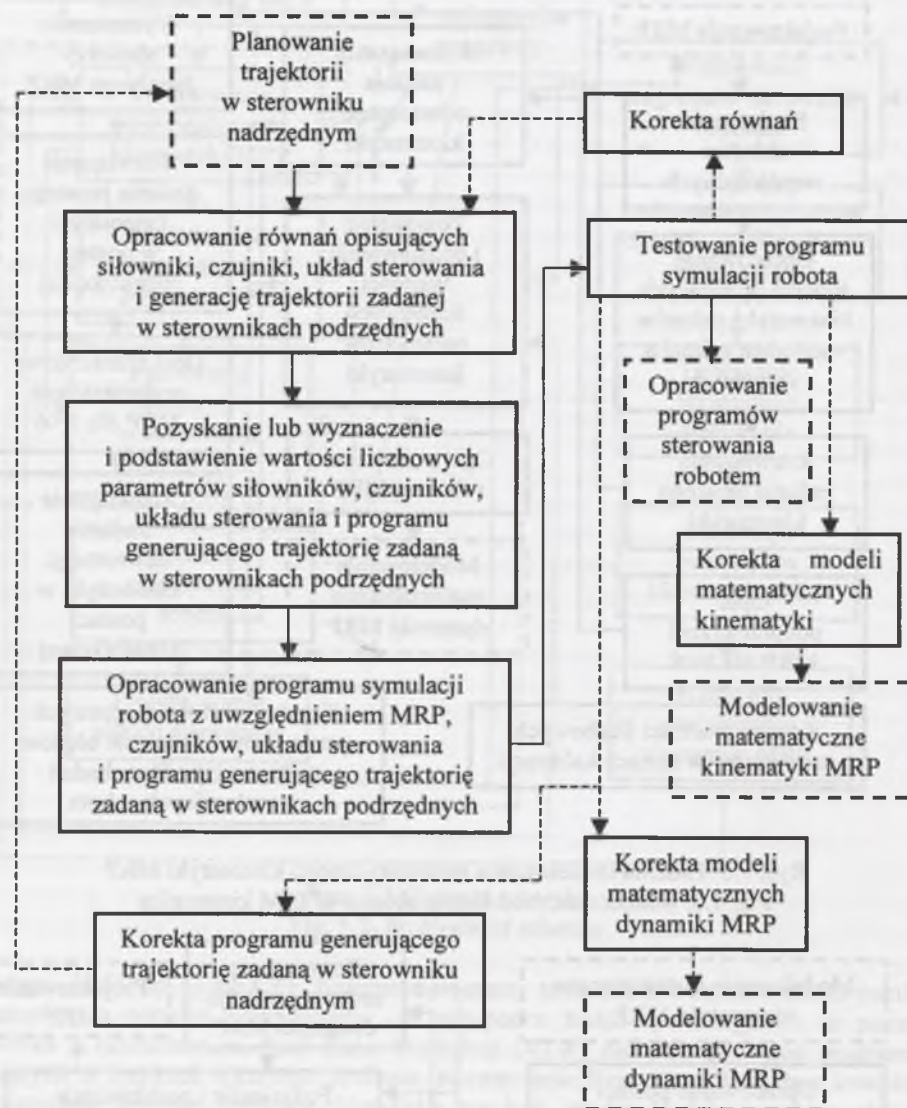
Problematyka modelowania matematycznego kinematyki MRP jest przedstawiona dokładniej na rys. 1.3.



Rys. 1.3. Zadania modelowania matematycznego kinematyki MRP
Fig. 1.3. Mathematic modeling problems of IRM kinematics



Rys. 1.4. Zadania modelowania matematycznego dynamiki MRP
Fig. 1.4. Mathematic modeling problems of IRM dynamics



Rys. 1.5. Zadania badań symulacyjnych robota
Fig. 1.5. Problems of robot simulation researches

Problematyka modelowania matematycznego dynamiki MRP jest przedstawiona dokładniej na rys. 1.4, a problematyka badań symulacyjnych robota na rys. 1.5.

2. MODELE RUCHU MRP

Naukę zajmującą się badaniem ruchu możemy podzielić na kinematykę i dynamikę. Kinematyka zajmuje się badaniem ruchu, bez uwzględniania przyczyn wywołujących ruch. Dynamika zajmuje się badaniem związków między ruchem a siłami i momentami wywołującymi ruch. Modelami kinematyki i dynamiki MRP są równania kinematyki i dynamiki MRP. W rozdziale przedstawimy i omówimy te równania.

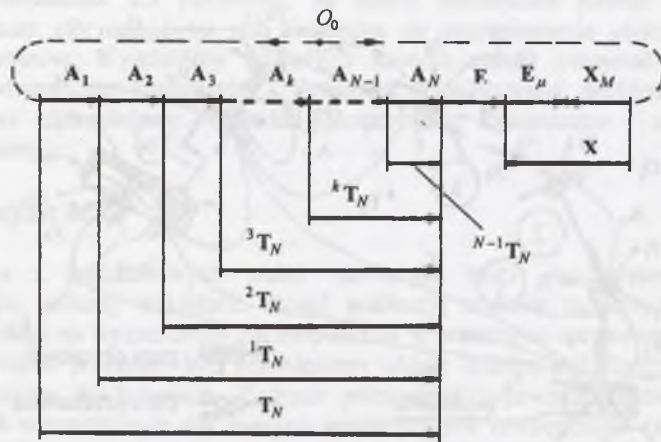
Ruch MRP możemy opisać za pomocą przekształceń w postaci: tensorowej, wektorowej, macierzowej trójwierszowej, macierzowej czterowierszowej. W zapisach przekształceń: tensorowym, wektorowym, macierzowym trójwierszowym, przemieszczenie i obrót opisują oddzielne formuły. Są to zapisy niejednorodny. Przemieszczenie i obrót można zapisać za pomocą jednej macierzy czterowierszowej. Jest to zapis jednorodny i dlatego macierze czterowierszowe będziemy nazywać dalej macierzami przekształceń jednorodnych.

Zapis jednorodny jest bardzo wygodny, gdyż nie wymaga oddzielnego opisu przemieszczeń i obrotów. Ogólny opis dynamiki MRP za pomocą równań Lagrange'a z napędem bezpośrednim i pośrednim; uwzględniający rozkład mas członów, elementów zespołów przekazujących napędy, siłowników i obiektu manipulacji, jest prostszy przy użyciu macierzy przekształceń jednorodnych niż przy użyciu zapisu niejednorodnego. Dlatego do opisu ruchu MRP będziemy stosować macierze przekształceń jednorodnych.

W pracy [10] zdefiniowano pojęcie manipulatora rozwiązalnego. Z definicji tej wynika, że manipulator jest rozwiązalny, jeśli możemy utworzyć algorytm wyznaczania *wszystkich* zbiorów współrzędnych, odpowiadających współrzędnym zewnętrznym punktu zadanego. Z literatury [23,32,37,40,41,48,55÷57,61,66,69,98,100,107] wynika, że możemy stosować dwie grupy metod wyznaczania współrzędnych wewnętrznych MRP analityczne i numeryczne. Istotną wadą metod numerycznych jest brak gwarancji otrzymania wszystkich zbiorów współrzędnych wewnętrznych dla współrzędnych zewnętrznym punktu zadanego. W metodach analitycznych stosuje się formuły analityczne nie wymagające obliczeń iteracyjnych. Formuły analityczne można otrzymać za pomocą metod wektorowych lub metod macierzowych. W metodach macierzowych najczęściej wykorzystuje się równania kinematyki zapisane za pomocą macierzy przekształceń jednorodnych. Macierze jednorodne ułatwiają interpretację geometryczną otrzymanych formuł analitycznych na współrzędne wewnętrzne MRP. Interpretacja geometryczna formuł umożliwia znalezienie wielokrotnych rozwiązań zadania odwrotnego kinematyki MRP. Analiza ta jest niezbędna do zapewnienia rozwiązalności MRP. W tym rozdziale przy omawianiu wyznaczania współrzędnych wewnętrznych MRP wykorzystamy równania kinematyki zapisane za pomocą macierzy przekształceń jednorodnych.

W podrozdziale 2.1 przedstawimy równania kinematyki MRP. Opiszemy własności geometryczne ruchu MRP takie, jak położenie i orientację członów i elementu wykonawczego oraz zdefiniujemy przestrzeń roboczą właściwą i rozszerzoną MRP. Przedstawimy równania kinematyki w postaci ciągłej i różniczkowej. Zilustrujemy opis podprzestrzeni położenia i orientacji podstawowych układów współrzędnych. Przedstawimy opis ciągły i różniczkowy podprzestrzeni MRP na przykładach. Zdefiniujemy zadanie proste i odwrotne kinematyki MRP w postaci ciągłej i różniczkowej oraz omówimy rozwiązywanie tych zadań. Przedstawimy problemy związane z istnieniem rozwiązań zadań odwrotnych kinematyki MRP. Także zdefiniujemy i sklasyfikujemy osobliwości kinematyczne MRP.

W podrozdziale 2.2 przedstawimy ogólną postać równań Lagrange'a oraz Newtona-Eulera dla MRP. Uwzględnimy rozkłady mas członów, zespołów przekazywania napędów i siłowników, obiektu manipulacji, tarcie i oddziaływanie statyczne MRP na otoczenie. Zdefiniujemy zadanie odwrotne i proste dynamiki MRP oraz omówimy rozwiązywanie tych zadań. Przeanalizujemy wpływ poszczególnych elementów składowych MRP na dynamikę.



Rys. 2.2. Graf przekształceń MRP o N stopniach swobody
Fig. 2.2. N degrees of freedom IRM transform graph

Równania (2.1)÷(2.5) są równaniami kinematyki MRP. Można je zilustrować za pomocą grafu przekształceń MRP [41,55÷57,61,66,69] jak na rys. 2.2.

Układy współrzędnych opisujące człony kojarzymy zgodnie z zapisem Hartenberga-Denavita. Macierz A_i opisują cztery parametry Hartenberga-Denavita- $\alpha_i, l_i, \lambda_i, \Theta_i$. Zaletą takiego usytuowania układów współrzędnych jest to, że tylko jeden z tych parametrów jest zmienny i odpowiada współrzędnej naturalnej i -tej, a pozostałe są stałe. Jeśli człon i -1 łączy z członem i -tym para obrotowa, to zmienny jest kąt obrotu Θ_i , jeśli para jest przesuwana, to zmienne jest przesunięcie λ_i .

Znając zakresy zmian współrzędnych naturalnych członów, można z równań kinematyki wyznaczyć przestrzeń roboczą właściwą i rozszerzoną MRP. **Przestrzeń roboczą właściwą MRP** jest to zbiór punktów, które może osiągnąć początek układu współrzędnych $x_N y_N z_N$ (opisany macierzą T_N). **Przestrzeń roboczą rozszerzoną MRP** jest to zbiór punktów, które może osiągnąć początek układu współrzędnych $x_{N+1} y_{N+1} z_{N+1}$ (opisany macierzą X).

2.1.2. Zadanie proste i odwrotne kinematyki w postaci ciągłej

Macierz E opisują tylko znane stałe parametry konstrukcyjne elementu wykonawczego MRP. Macierz E_μ opisują współrzędne położenia i orientacji obiektu manipulacji względem elementu wykonawczego MRP. Współrzędne te mogą być stałe bądź zmieniać się. Zmiana tych współrzędnych może być pożądana (wynikająca z procesu technologicznego) bądź niepożądana (np. wysuwanie się obiektu manipulacji z palców chwytaka, wynikające z niewystarczającej siły obejmowania). W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że macierz E_μ jest znana.

Zadanie proste

Zadanie proste kinematyki MRP polega na wyznaczeniu współrzędnych zewnętrznych elementu wykonawczego (opisujących macierz X) dla znanych współrzędnych wewnętrznych, np. współrzędnych naturalnych członów $q_1 \div q_N$.

Po wyznaczeniu macierzy $A_1 \div A_N$ możemy za pomocą równań (2.3) i (2.4) wyznaczyć macierz X . Niech tak wyznaczona macierz ma ogólną postać:

$$X = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x & d_x \\ a_y & b_y & c_y & d_y \\ a_z & b_z & c_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Do opisu położenia i orientacji elementu wykonawczego w przestrzeni zewnętrznej będziemy stosować współrzędne zewnętrzne x, y, z oraz układ Z-Y-Z kątów bieżących Φ, Θ, Ψ . Macierz X ma postać:

$$X = \text{Trans}(x, y, z) \text{Rot}(z, \Phi) \text{Rot}(y, \Theta) \text{Rot}(z, \Psi) \\ = \begin{bmatrix} C_\Phi C_\Theta C_\Psi - S_\Phi S_\Psi & -C_\Phi C_\Theta S_\Psi - S_\Phi C_\Psi & C_\Phi S_\Theta & x \\ S_\Phi C_\Theta C_\Psi + C_\Phi S_\Psi & -S_\Phi C_\Theta S_\Psi + C_\Phi C_\Psi & S_\Phi S_\Theta & y \\ -S_\Theta C_\Psi & S_\Theta S_\Psi & C_\Theta & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

gdzie:

$$S_u, C_u = \sin u, \cos u; \quad u = \Phi, \Theta, \Psi.$$

Po porównaniu formuł (2.6) i (2.7), przekształceniach i przyjęciu, że $0^\circ \leq \Phi, \Psi \leq 360^\circ$, $0^\circ \leq \Theta \leq 180^\circ$, otrzymujemy następujące formuły dla szukanych współrzędnych zewnętrznych:

$$x = d_x, y = d_y, z = d_z; \quad (2.8a)$$

oraz

$$1) \text{ dla } c_x^2 + c_y^2 > 0 \\ \Phi = \begin{cases} \Phi^* & \text{dla } c_x \geq 0 \text{ i } c_y \geq 0, \\ \Phi^* + 180^\circ & \text{dla } c_x < 0, \\ \Phi^* + 360^\circ & \text{dla } c_x \geq 0 \text{ i } c_y \leq 0, \end{cases} \\ \Phi^* = \arctg \frac{c_y}{c_x}; \quad (2.8b)$$

$$\Theta = \begin{cases} \Theta^* & \text{dla } c_z \geq 0, \\ \Theta^* + 180^\circ & \text{dla } c_z < 0, \end{cases} \\ \Theta^* = \arctg \frac{c_x \cos \Phi + c_y \sin \Phi}{c_z}; \quad (2.8c)$$

$$\Psi = \begin{cases} \Psi^* & \text{dla } L \geq 0 \text{ i } M \geq 0, \\ \Psi^* + 180^\circ & \text{dla } M < 0, \\ \Psi^* + 360^\circ & \text{dla } L \leq 0 \text{ i } M \geq 0, \end{cases} \\ \Psi^* = \arctg \frac{L}{M}, \quad L = -a_x \sin \Phi + a_y \cos \Phi, \quad M = -b_x \sin \Phi + b_y \cos \Phi; \quad (2.8d)$$

$$2) \text{ dla } c_x^2 + c_y^2 = 0 \\ \Theta = \begin{cases} 0^\circ & \text{dla } c_z > 0, \\ 180^\circ & \text{dla } c_z < 0, \end{cases} \quad (2.8e)$$

$$\Phi + \text{sgn}(c_z)\Psi = \begin{cases} \delta^* & \text{dla } b_x \leq 0 \text{ i } b_y \geq 0, \\ \delta^* + 180^\circ & \text{dla } b_y < 0, \\ \delta^* + 360^\circ & \text{dla } b_x \geq 0 \text{ i } b_y \geq 0, \end{cases}$$

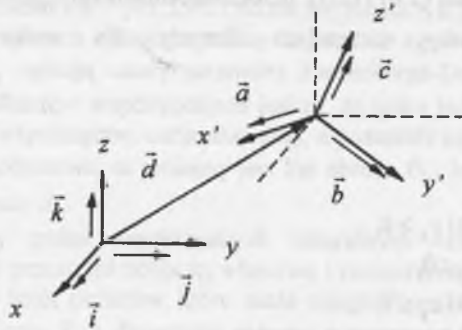
$$\delta^* = \arctan \frac{-b_x}{b_y}. \quad (2.8f)$$

Z wyrażenia $c_x^2 + c_y^2 = 0$ wynika $c_x = c_y = 0$, wobec czego z kolei na podstawie (2.8b) otrzymujemy niejednoznaczność dla Ψ . Formuły (2.8f) pozwalają wyznaczyć sumę lub różnicę kątów Φ i Ψ przy $c_x^2 + c_y^2 = 0$.

Formuły (2.8a)+(2.8f) są rozwiązaniem zadania prostego kinematyki MRP.

Podprzestrzeń podstawowych układów współrzędnych

Przestrzeń położeń i orientacji możemy opisać za pomocą 6 współrzędnych niezależnych. W dalszych rozważaniach zastosujemy do opisu tej przestrzeni współrzędne zewnętrzne x, y, z oraz układ Z-Y-Z kątów bieżących Φ, Θ, Ψ . Prostokątny prawoskrętny układ współrzędnych $x'y'z'$ przemieszczony i przeorientowany względem prostokątnego



Rys. 2.3. Układy współrzędnych xyz i $x'y'z'$

Fig. 2.3. The xyz and $x'y'z'$ frames

prawoskrętnego układu współrzędnych xyz będziemy opisywać za pomocą macierzy przekształceń jednorodnych T . Macierz ta ma postać identyczną z macierzą X z formuły (2.6). Wersory $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ opisują kierunki osi x, y i z . Wersory $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ opisują kierunki osi x', y' i z' . Elementy a_x, a_y, a_z są rzutami wersora \bar{a} , elementy b_x, b_y, b_z - rzutami wersora \bar{b} , elementy c_x, c_y, c_z - rzutami wersora \bar{c} , elementy d_x, d_y, d_z - rzutami wektora \bar{d} , na osie układu odniesienia xyz . Elementy macierzy T spełniają następujące 6 równań:

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1, \quad (2.9a)$$

$$b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 = 1, \quad (2.9b)$$

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0, \quad (2.9c)$$

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y, \quad (2.9d)$$

$$c_y = a_z b_x - a_x b_z, \quad (2.9e)$$

$$c_z = a_x b_y - a_y b_x. \quad (2.9f)$$

Każda macierz przekształceń jednorodnych musi spełniać równania (2.9). Każdą przestrzeń położeń i orientacji opisaną liczbą współrzędnych niezależnych m mniejszą niż 6 będziemy nazywać **podprzestrzenią**. Podprzestrzeń można opisać za pomocą 6- m lub mniej równań. Równania te pełnią rolę „kluczy” do podprzestrzeni. Dlatego będziemy je nazywać **równaniami kluczowymi**. Położenia i orientacje opisane za pomocą współrzędnych kartezjańskich, cylindrycznych i sferycznych są odpowiednio z podprzestrzeni kartezjańskiej, cylindrycznej i sferycznej. Podprzestrzeń te opisują po 3 współrzędne niezależne.

Podprzestrzeń kartezjańska

Podprzestrzeń kartezjańską opisują 3 współrzędne x, y i z . Współrzędne te opisują tylko położenie. Postać jednorodna takiego przekształcenia jest następująca:

$$T = \text{Trans}(x, y, z) \text{Rot}(z, 0) \text{Rot}(y, 0) \text{Rot}(z, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Macierz (2.10) opisuje podprzestrzeń kartezjańską. Każdy układ współrzędnych opisany względem układu odniesienia za pomocą macierzy przekształceń jednorodnych o podobnej postaci jest z podprzestrzeni kartezjańskiej. Podobieństwo to polega na zerowych wartościach elementów a_y, a_z, b_x, b_z, c_x i c_y oraz jedynkowych wartościach elementów a_x, b_y i c_z . Zamiast badać wartości tych 9 elementów, możemy zbadać, czy spełnione są 2 równania kluczowe. Wystarczy zbadać, czy np. wersory \bar{j} i \bar{b} oraz \bar{k} i \bar{c} są równoległe. Równoległości wersorów \bar{i} i \bar{a} nie trzeba sprawdzać, bo wynikają z równań (2.9), które spełnia każda macierz przekształcenia jednorodnego. Jeśli wersory \bar{k} i \bar{c} są równoległe, to kąt między nimi musi być zerowy i dlatego $|\bar{k} \times \bar{c}| = |\bar{j} c_y - \bar{i} c_x| = (c_x^2 + c_y^2)^{1/2} = 0$ oraz $\bar{k} \cdot \bar{c} = c_z = 1$. Zatem

$$\arctan \frac{(c_x^2 + c_y^2)^{1/2}}{c_z} = 0 \quad \text{dla } c_z > 0. \quad (2.11a)$$

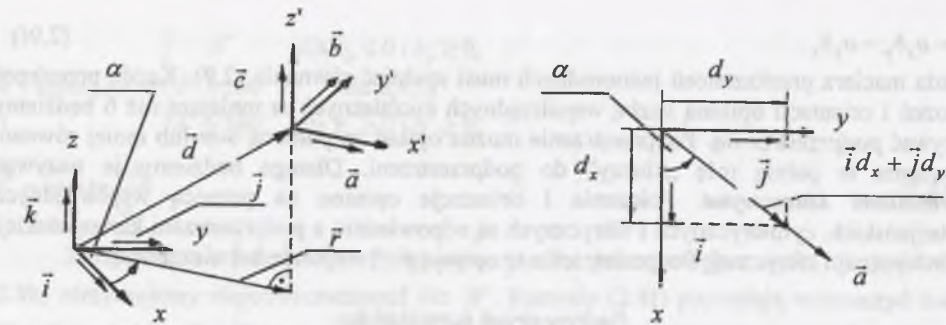
Jeśli wersory \bar{j} i \bar{b} są równoległe, to kąt między nimi musi być zerowy, czyli

$$\arctan \frac{(b_x^2 + b_z^2)^{1/2}}{b_y} = 0 \quad \text{dla } b_y > 0. \quad (2.11b)$$

Formuły (2.11a i 2.11b) są równaniami kluczowymi podprzestrzeni kartezjańskiej.

Podprzestrzeń cylindryczna

Podprzestrzeń cylindryczną opisują 3 współrzędne cylindryczne α, r, z . Współrzędne te opisują położenie i orientację. Układ współrzędnych $x'y'z'$ przemieszczony i zorientowany za pomocą tych współrzędnych ilustruje rys. 2.4. Układ ten opisuje macierz



Rys. 2.4. Układ współrzędnych cylindryczny
Fig. 2.4. Cylindrical frame

$$\mathbf{T} = \text{Trans}(r \cos \alpha, r \sin \alpha, z) \text{Rot}(z, \alpha) \text{Rot}(y, 0) \text{Rot}(z, 0) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & r \cos \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & r \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Macierz (2.12) opisuje podprzestrzeń cylindryczną. Każdy układ współrzędnych opisany za pomocą macierzy jednorodnej o podobnej postaci jest z podprzestrzeni cylindrycznej. Podobieństwo to polega na spełnieniu następujących równań (proporcji liczbowych) wynikających z rys. 2.4: $a_z = 0$, $b_z = 0$, $c_z = 1$, $a_x = b_y$, $a_y = -b_x$, $b_y(d_x^2 + d_y^2)^{1/2} = d_x$, $a_y(d_x^2 + d_y^2)^{1/2} = d_y$. Zamiast tych równań możemy napisać 2 równania kluczowe wynikające z równoległości wektorów \vec{a} i $\vec{i}d_x + \vec{j}d_y$ oraz wersorów \vec{c} i \vec{k} . Z równoległości wektorów \vec{a} i $\vec{i}d_x + \vec{j}d_y$ wynika

$$\arctg \frac{|\vec{a} \times (\vec{i}d_x + \vec{j}d_y)|}{\vec{a} \cdot (\vec{i}d_x + \vec{j}d_y)} = 0 \text{ i } \vec{a} \cdot (\vec{i}d_x + \vec{j}d_y) > 0. \quad (2.13a)$$

Z równoległości wersorów \vec{c} i \vec{k} wynika

$$\arctg \frac{(c_x^2 + c_y^2)^{1/2}}{c_z} = 0 \text{ i } c_z > 0. \quad (2.13b)$$

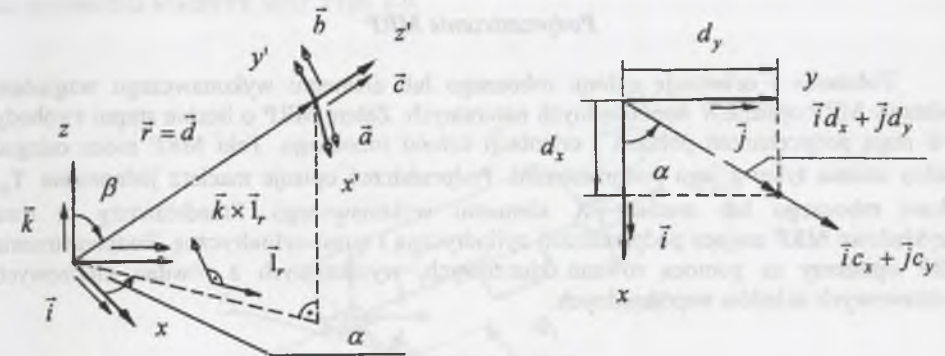
Formuły (2.13a) i (2.13b) są równaniami kluczowymi podprzestrzeni cylindrycznej. Są użyteczne dla $d_x^2 + d_y^2 > 0$. Dla $d_x^2 + d_y^2 = 0$ w liczniku i mianowniku równania (2.13a) pojawia się zero. Wtedy podprzestrzeń cylindryczną opisuje tylko równanie (2.13b).

Podprzestrzeń sferyczna

Podprzestrzeń sferyczną opisują 3 współrzędne sferyczne α , β , r . Współrzędne te opisują położenie i orientację. Układ $x'y'z'$ przemieszczony i zorientowany za pomocą tych współrzędnych ilustruje rys. 2.5. Opisuje go następująca macierz jednorodna:

$$\mathbf{T} = \text{Trans}(r \cos \alpha \sin \beta, r \sin \alpha \sin \beta, r \cos \beta) \text{Rot}(z, \alpha) \text{Rot}(y, \beta) \text{Rot}(z, 0)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\sin \alpha & \cos \alpha \sin \beta & r \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha & \sin \alpha \sin \beta & r \sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta & r \cos \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$



Rys. 2.5. Układ współrzędnych sferyczny
Fig. 2.5. Spherical frame

Macierz (2.14) opisuje podprzestrzeń sferyczną. Każdy układ współrzędnych opisany za pomocą macierzy jednorodnej o podobnej postaci jest z podprzestrzeni sferycznej. Podobieństwo polega na spełnieniu następujących równań (proporcji liczbowych): $a_x(d_x^2 + d_y^2)^{1/2}(d_x^2 + d_y^2 + d_z^2)^{1/2} = d_x d_z$, $a_y(d_x^2 + d_y^2)^{1/2}(d_x^2 + d_y^2 + d_z^2)^{1/2} = d_y d_z$, $a_z(d_x^2 + d_y^2 + d_z^2)^{1/2} = -(d_x^2 + d_y^2)^{1/2}$, $b_x(d_x^2 + d_y^2)^{1/2} = -d_y$, $b_y(d_x^2 + d_y^2)^{1/2} = d_x$, $b_z = 0$, $c_x(d_x^2 + d_y^2)^{1/2}(d_x^2 + d_y^2 + d_z^2)^{1/2} = d_x(d_x^2 + d_y^2)^{1/2}$, $c_y(d_x^2 + d_y^2)^{1/2}(d_x^2 + d_y^2 + d_z^2)^{1/2} = d_y(d_x^2 + d_y^2)^{1/2}$, $c_z(d_x^2 + d_y^2 + d_z^2)^{1/2} = d_z$. Zamiast tych równań możemy napisać 2 równania kluczowe wynikające z równoległości wektorów \vec{c} i \vec{d} oraz wersorów \vec{b} i \vec{l}_r . Wersor $\vec{l}_r = (\vec{i}d_x + \vec{j}d_y)/(d_x^2 + d_y^2)^{1/2}$.

Z równoległości wektorów \vec{c} i \vec{d} wynika

$$\arctg \frac{|\vec{c} \times \vec{d}|}{\vec{c} \cdot \vec{d}} = 0. \quad (2.15a)$$

Z równoległości wersorów \vec{b} i \vec{l}_r wynika

$$\arctg \frac{|\vec{b} \times \vec{l}_r|}{\vec{b} \cdot \vec{l}_r} = 0. \quad (2.15b)$$

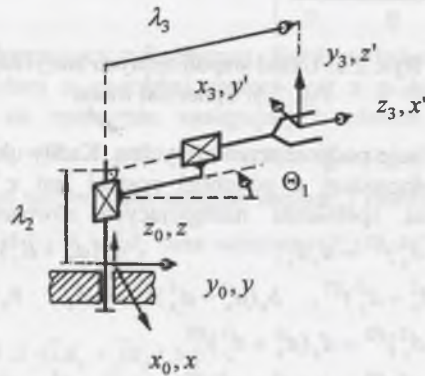
Formuły (2.15a) i (2.15b) są równaniami kluczowymi podprzestrzeni sferycznej. Są użyteczne dla $d_x^2 + d_y^2 > 0$. Dla $d_x^2 + d_y^2 = 0$ nie możemy obliczyć wersora \vec{l}_r i wtedy podprzestrzeń sferyczną opisuje tylko równanie (2.15a). Dla $d_x^2 + d_y^2 + d_z^2 = 0$ w licznikach i mianownikach równań (2.15a) i (2.15b) pojawiają się zera. Wtedy tworzymy równanie

kluczowe wynikające z prostokątności wektorów \bar{b} i \bar{k} . Z prostokątności tych wektorów wynika $\bar{b} \cdot \bar{k} = b_z = 0$, $|\bar{b} \times \bar{k}| = (b_x^2 + b_y^2)^{1/2} = 1$. Zatem

$$\arctg \frac{b_z}{(b_x^2 + b_y^2)^{1/2}} = 0. \quad (2.15c)$$

Podprzestrzeń MRP

Położenie i orientację członu roboczego lub elementu wykonawczego względem podstawy MRP opisuje N współrzędnych naturalnych. Zatem MRP o liczbie stopni swobody $N < 6$ mają podprzestrzeń położeń i orientacji członu roboczego. Taki MRP może osiągać punkty zadane tylko z jego podprzestrzeni. Podprzestrzeń opisuje macierz jednorodna T_N członu roboczego lub macierz X elementu wykonawczego. Przedstawimy tu dwa przykładowe MRP mające podprzestrzeń cylindryczną i quasi-cylindryczną. Podprzestrzeń MRP opiszemy za pomocą równań kluczowych, wynikających z równań kluczowych podstawowych układów współrzędnych.



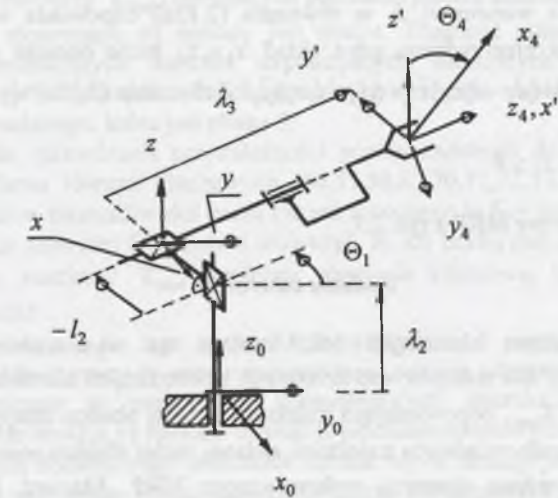
Rys. 2.6. MRP z 3 stopniami swobody. λ_2 , λ_3 , Θ_1 - parametry Hartenberga-Denavita
Fig. 2.6. IRM with 3 degrees of freedom. λ_2 , λ_3 , Θ_1 - Hartenberg-Denavit parameters

Rys. 2.6 przedstawia schemat kinematyczny MRP o 3 stopniach swobody. Z MRP skojarzono układy współrzędnych pomocnicze $x'y'z'$ i xyz . Osie układu xyz pokrywają się z układem bazowym $x_0y_0z_0$, oś x' pokrywa się z osią z_3 , oś y' z osią x_3 , oś z' z osią y_3 . Początki układów xyz i $x_0y_0z_0$ pokrywają się. Również początki układów $x'y'z'$ i $x_3y_3z_3$ pokrywają się. Ze struktury kinematycznej wynika, że MRP ma podprzestrzeń cylindryczną. Dlatego podprzestrzeń położeń i orientacji układu $x'y'z'$ względem układu xyz możemy opisać za pomocą równań kluczowych (2.13a) i (2.13b). Położenie i orientacja układu $x_3y_3z_3$ względem układu $x_0y_0z_0$ jest z podprzestrzeni MRP. Po zastąpieniu w równaniach (2.13a) i (2.13b) współrzędnych wektora \bar{a} odpowiednimi współrzędnymi wektora \bar{c} (oś x' pokrywa się z osią z_3) i współrzędnych wektora \bar{c} odpowiednimi współrzędnymi wektora \bar{b} (oś z' pokrywa się z osią y_3) otrzymamy równania

$$\arctg \frac{|\bar{c} \times (\bar{i}d_x + \bar{j}d_y)|}{\bar{c} \cdot (\bar{i}d_x + \bar{j}d_y)} = 0 \text{ i } \bar{c} \cdot (\bar{i}d_x + \bar{j}d_y) > 0, \quad (2.16a)$$

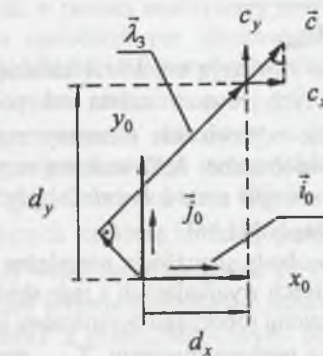
$$\arctg \frac{(b_x^2 + b_y^2)^{1/2}}{b_z} = 0 \text{ i } b_z > 0. \quad (2.16b)$$

Są to równania kluczowe MRP z rys. 2.6.



Rys. 2.7. MRP z 4 stopniami swobody. λ_2 , λ_3 , Θ_1 , Θ_4 - parametry Hartenberga-Denavita
Fig. 2.7. IRM with 4 degrees of freedom. λ_2 , λ_3 , Θ_1 , Θ_4 - Hartenberg-Denavit parameters

Rys. 2.7 przedstawia schemat kinematyczny MRP o 4 stopniach swobody. Z MRP skojarzono układy współrzędnych pomocnicze $x'y'z'$ i xyz . Osie układu xyz są równoległe do odpowiednich osi układu bazowego $x_0y_0z_0$. Początek układu xyz może poruszać się po



Rys. 2.8. Wektor $\bar{\lambda}_3$ MRP z rys. 2.7

Fig. 2.8. The vector $\bar{\lambda}_3$ of IRM from Fig. 2.7

powierzchni bocznej walca o promieniu $-l_2$ ($l_2 < 0$) i osi pokrywającej się z osią z_0 . Początki układów $x'y'z'$ i $x_4y_4z_4$ pokrywają się. Oś x' pokrywa się z osią z_4 , oś y' jest równoległa do płaszczyzny xy , oś z' jest równoległa do osi z . Ze struktury kinematycznej wynika, że MRP ma podprzestrzeń podobną do cylindrycznej. Z rys. 2.7 wynika, że układ $x'y'z'$ może być opisany za pomocą współrzędnych cylindrycznych względem układu xyz . Układ $x_4y_4z_4$ może obracać się wokół osi x' i dlatego podprzestrzeń MRP nazwiemy quasi-cylindryczną. Z rys. 2.8 widać, że wektor $\bar{\lambda}_3$ pełni rolę wektora \bar{d} w równaniu (2.13a). Z rys. 2.7 wynika, że wersorowi \bar{a} w równaniu (2.13a) odpowiada wersor \bar{c} osi z_4 . Równanie (2.13b) jest nieprzydatne, gdyż układ $x_4y_4z_4$ może obracać się wokół osi x' . Z rys. 2.8 wynika $\bar{\lambda}_3 = (d_x - l_2 c_y)\bar{i}_0 + (d_y + l_2 c_x)\bar{j}_0$. Z równania (2.13a) wynika

$$\arctg \frac{|\bar{c} \times \bar{\lambda}_3|}{\bar{c} \cdot \bar{\lambda}_3} = 0 \text{ i } \bar{c} \cdot \bar{\lambda}_3 > 0. \quad (2.17)$$

Jest to równanie kluczowe MRP z rys. 2.7.

Zadanie odwrotne

Zadanie odwrotne kinematyki MRP polega na wyznaczeniu współrzędnych wewnętrznych $q_1 \div q_N$ dla znanych współrzędnych zewnętrznych elementu wykonawczego (opisujących macierz \mathbf{X}_{Nzad} , odpowiadającą trajektorii zadanej obiektu manipulacji).

Macierz \mathbf{X}_{Nzad} odpowiadającą trajektorii zadanej ruchu obiektu manipulacji będziemy nazywać trajektorią zadaną elementu wykonawczego MRP. Macierz \mathbf{E} nie zależy od współrzędnych naturalnych członów i dlatego w dalszych rozważaniach będziemy posługiwać się macierzą $\mathbf{T}_{Nzad} = \mathbf{X}_{Nzad} \mathbf{E}^{-1}$, opisującą człon roboczy.

Z równań (2.3) i (2.4) wynika N następujących równań macierzowych:

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \dots \mathbf{A}_i \dots \mathbf{A}_N = \mathbf{T}_{Nzad}, \quad (2.18-1)$$

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \dots \mathbf{A}_i \dots \mathbf{A}_N = \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{T}_{Nzad}, \quad (2.18-2)$$

$$\dots \mathbf{A}_k \dots \mathbf{A}_i \dots \mathbf{A}_N = \mathbf{A}_{k-1}^{-1} \mathbf{A}_{k-2}^{-1} \dots \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{T}_{Nzad}, \quad (2.18-k)$$

$$\dots \mathbf{A}_N = \mathbf{A}_{N-1}^{-1} \mathbf{A}_{N-2}^{-1} \dots \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{T}_{Nzad}. \quad (2.18-N)$$

Prawe strony tych równań zawierają trajektorię zadaną członu roboczego w postaci macierzy \mathbf{T}_{Nzad} . Lewe strony tych równań zależą od poszukiwanych współrzędnych naturalnych członów. Porównując odpowiednie elementy macierzy tych równań po obu stronach, znajdujemy szukane współrzędne. Jeśli szukaną współrzędną jest kąt Θ , należy dążyć do obliczenia go z funkcji $\arctg \Theta$ a nie z $\arcsin \Theta$, gdyż ta ostatnia może w pewnych przypadkach dawać bardzo duże błędy [41,56].

MRP o $N=6$ stopniach swobody umożliwia niezależne przemieszczanie i orientację obiektu manipulowanego, w granicach wynikających z jego struktury kinematycznej. W MRP o $N < 6$ stopniach swobody, ruch członu roboczego ograniczony jest w $6-N$ stopniach swobody. Dlatego punkt zadany opisany za pomocą macierzy \mathbf{T}_{Nzad} musi należeć do podprzestrzeni MRP. Przynależność tę możemy sprawdzić przez zbadanie 12 proporcji liczbowych elementów macierzy \mathbf{T}_{Nzad} [10]. W metodzie tej zakłada się, że współrzędne naturalne zapewniają położenie zadane, opisane elementami czwartej kolumny macierzy \mathbf{T}_{Nzad} . Przy

tym założeniu wyznaczamy współrzędne naturalne, a następnie obliczamy elementy pierwszych trzech kolumn macierzy \mathbf{T}_N . Macierz \mathbf{T}_N opisuje kinematykę MRP (równanie (2.3)) i zależy od współrzędnych naturalnych wyznaczonych z położenia punktu zadanego. Następnie porównujemy obliczone wartości 12 elementów macierzy \mathbf{T}_N z wartościami odpowiednich elementów macierzy \mathbf{T}_{Nzad} . Są to elementy pierwszych trzech wierszy tych macierzy. Jeśli elementy te są równe, to punkt zadany jest z podprzestrzeni MRP. Dla MRP z liczbą stopni swobody $N \leq 3$ możemy wyznaczyć współrzędne naturalne z elementów czwartej kolumny macierzy \mathbf{T}_{Nzad} , opisujących położenie punktu zadanego. Jeśli liczba stopni swobody $3 < N < 6$, stosowanie tej metody jest trudne. Trudność polega na niemożliwości wyznaczenia jednoznacznych wartości współrzędnych naturalnych. Niejednoznaczności wynikają z większej liczby współrzędnych naturalnych niż liczba współrzędnych opisujących położenie punktu zadanego, która jest równa 3.

Inna metoda sprawdzania przynależności punktu zadanego do podprzestrzeni MRP opiera się na badaniu równań kluczowych [56,57,58,67,70,71,72,73,77]. Równania te są analitycznym zapisem niemożliwości ruchu członu roboczego w $6-N$ stopniach swobody i ich liczba jest równa co najwyżej $6-N$. Łatwo zauważyć, że ich liczba maleje ze wzrostem liczby N . Jeśli elementy macierzy \mathbf{T}_{Nzad} spełniają równania kluczowe, to punkt zadany jest z podprzestrzeni MRP.

We wprowadzeniu do tego rozdziału przytoczyliśmy z pracy [10] definicję MRP rozwiązalnego. Także w pracy tej przy rozwiązywaniu zadania odwrotnego kinematyki MRP zaleca się stosowanie w programach komputerowych instrukcji obliczania funkcji dwuargumentowych $\text{atan2}(x,y)$ zamiast instrukcji jednoargumentowych $\text{atan}(x/y)$. Uzasadnia się to koniecznością dodatkowego obliczania ilorazu x/y w funkcji jednoargumentowej, co czyni tę instrukcję wolniejszą. Przeciwdziałaniem funkcji dwuargumentowej jest kąt z zakresu $[-180^\circ, 180^\circ]$. Dla argumentów $x=0$ i $y=-1$ funkcja ta staje się niejednoznaczna, gdyż $\text{atan2}(0,-1) = \pm 180^\circ$. Aby zapewnić jednoznaczność, autorzy oprogramowania arbitralnie odrzucają jedno z tych rozwiązań granicznych. Komputerowy algorytm rozwiązywania zadania odwrotnego kinematyki MRP, wykorzystujący tak zmodyfikowane instrukcje obliczeń funkcji dwuargumentowej, może gubić niektóre zbiory rozwiązań. Dlatego przed pisaniem takich algorytmów komputerowych należy sprawdzić działanie instrukcji obliczania funkcji $\text{atan2}(x,y)$ i zabezpieczyć programowo uwzględnianie obu rozwiązań granicznych.

Warunkiem wystarczającym, aby MRP o sześciu parach obrotowych miał rozwiązanie zadania odwrotnego kinematyki w postaci analitycznej jawnej, jest przecinanie się w jednym punkcie ostatnich trzech osi sąsiednich par obrotowych. W takich przypadkach łatwo zastosować metodę Piepera [10,51,68,107] rozwiązywania zadania odwrotnego kinematyki MRP. W metodzie tej współrzędne naturalne $q_1 \div q_3$ oblicza się z porównania położenia układu współrzędnych skojarzonego z czwartym członem (będącego funkcją tych współrzędnych naturalnych) z położeniem tego samego układu współrzędnych wynikającego z macierzy \mathbf{T}_{Nzad} . Przy odpowiednim doborze układów kątów biejących, opisujących orientację \mathbf{T}_{Nzad} , uwzględniających strukturę kinematyczną trzech ostatnich członów, można łatwo wyznaczyć pozostałe trzy współrzędne naturalne $q_4 \div q_6$.

Z równań (2.18) możemy wyprowadzić ogólne rozwiązania analityczne jawne zadania odwrotnego kinematyki dla MRP z osiami obrotowymi par kinematycznych równoległymi i prostopadłymi do siebie. Rozwiązaniami tymi są formuły analityczne na współrzędne wewnętrzne, zależne jawnie od współrzędnych zewnętrznych. Rozwiązania są słuszne dla dowolnego sposobu opisu orientacji zadanej, niezależnego od struktury kinematycznej ostatnich trzech członów (jak w metodzie Piepera).

W ogólnym przypadku dla MRP o $N \leq 6$ stopniach swobody rozwiązaniem będzie wektor członów $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, \dots, q_N]^T$ [10]. Mogą pojawić się także stany MRP, w których jednoznacznie zdefiniowanej macierzy \mathbf{T}_{zad} odpowiada więcej niż jeden wektor $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, \dots, q_N]^T$, przy $N \leq 6$. Stany te będziemy nazywać *osobliwościami kinematycznymi MRP* [56,57]. Osobliwości te możemy podzielić na dwa rodzaje:

- osobliwości kinematyczne pierwszego rodzaju*, przy których liczba rozwiązań w postaci wektorów $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, \dots, q_N]^T$ jest skończona;
- osobliwości kinematyczne drugiego rodzaju*, przy których liczba rozwiązań w postaci wektorów $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, \dots, q_N]^T$ jest nieskończona.

Osobliwości kinematyczne drugiego rodzaju będziemy nazywać krótko degeneracją [41,56,57].

Sposób wyznaczania współrzędnych naturalnych członów zależy od sposobu opisu trajektorii zadanej. Obrót i przemieszczenie obiektu manipulacji możemy opisać za pomocą $m \leq 6$ niezależnych współrzędnych zewnętrznych. Przykładowo, przemieszczenie obiektu manipulacji z jednego punktu do innego z dowolną orientacją można opisać za pomocą 3 niezależnych współrzędnych zewnętrznych. Wtedy elementy pierwszych trzech kolumn macierzy \mathbf{X}_{zad} , opisujące orientację, są niejednoznaczne i mogą zmieniać się w pewnych granicach. W formułach analitycznych jawnych na współrzędne naturalne członów, stanowiących rozwiązanie zadania odwrotnego kinematyki MRP, mogą pojawić się elementy pierwszych trzech kolumn macierzy \mathbf{X}_{zad} . Elementy te mogą przyjmować nieskończenie wiele wartości z pewnego zakresu, dla pojedynczego punktu trajektorii \mathbf{X}_{zad} z dowolną orientacją. Może to dawać skończoną lub nieskończoną liczbę wektorów członów $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, \dots, q_N]^T$, odpowiadających pojedynczym punktom trajektorii \mathbf{X}_{zad} . Analizę wielokrotności rozwiązań zadania odwrotnego kinematyki MRP ułatwiają interpretacje geometryczne formuł na współrzędne naturalne członów [56,57]. W przypadku nieskończonej liczby rozwiązań wektorów członów stosuje się kryteria wyboru [23,32,48,107].

2.1.3. Równania ruchu w postaci różniczkowej

Małe zmiany położenia i orientacji członów MRP można opisać stosując macierze przekształceń różniczkowych [41,56,57]. Różniczka $d\mathbf{T} = (\mathbf{T} + d\mathbf{T}) - \mathbf{T}$, gdzie $(\mathbf{T} + d\mathbf{T})$ jest macierzą opisującą układ współrzędnych $x''y''z''$ względem układu odniesienia xyz . Układ $x''y''z''$ powstał przez różniczkowe przemieszczenie i przeorientowanie układu $x'y'z'$. \mathbf{T} jest macierzą opisującą układ $x'y'z'$ względem układu odniesienia xyz przed różniczkowymi zmianami. Przyjmijmy, że mamy sztywny pręt i z pierwszym końcem skojarzymy układ współrzędnych, pokrywający się z układem odniesienia przed zmianami różniczkowymi położenia i orientacji pręta. Z drugim końcem skojarzymy układ $x'y'z'$, który będzie opisany względem układu współrzędnych pierwszego końca za pomocą macierzy \mathbf{T} , niezależnie od ruchu pręta. Wtedy zmiany położenia i orientacji układu skojarzonego z pierwszym końcem będą powodować zmiany położenia i orientacji układu skojarzonego z drugim końcem. Zmiany różniczkowe układu $x'y'z'$ mogą być opisane za pomocą przemieszczenia o dx wzdłuż osi x , o dy wzdłuż osi y , o dz wzdłuż osi z oraz obrotów o kąt $d\varphi_x$ wokół osi x , o kąt $d\varphi_y$ wokół osi y , o kąt $d\varphi_z$ wokół osi z . Również zmiany różniczkowe układu $x'y'z'$ mogą być opisane za pomocą przemieszczenia o $'dx$ wzdłuż osi x' , o $'dy$ wzdłuż osi y' , o $'dz$ wzdłuż osi z' oraz obrotów o kąt $'d\varphi_x$ wokół osi x' , o kąt

$'d\varphi_y$ wokół osi y' , o kąt $'d\varphi_z$ wokół osi z' . Do opisu zmian orientacji zastosujemy układ $X - Y - Z$ kątów bieżących $d\varphi_x, d\varphi_y, d\varphi_z$.

Opis macierzy $d\mathbf{T}$ za pomocą różniczkowych zmian względem układu odniesienia ma postać

$$d\mathbf{T} = (\mathbf{T} + d\mathbf{T}) - \mathbf{T} = \text{Trans}(dx, dy, dz) \text{Rot}(x, d\varphi_x) \text{Rot}(y, d\varphi_y) \text{Rot}(z, d\varphi_z) \mathbf{T} - \mathbf{T} \\ = [\text{Trans}(dx, dy, dz) \text{Rot}(x, d\varphi_x) \text{Rot}(y, d\varphi_y) \text{Rot}(z, d\varphi_z) - \mathbf{I}] \mathbf{T} = \Delta \mathbf{T}.$$

Macierz Δ jest różnicą macierzy w nawiasie kwadratowym i będziemy nazywać ją *macierzą przekształceń różniczkowych*. Opis macierzy $d\mathbf{T}$ za pomocą różniczkowych zmian względem układu $x'y'z'$ ma postać

$$d\mathbf{T} = (\mathbf{T} + d\mathbf{T}) - \mathbf{T} = \mathbf{T} \text{Trans}(dx, dy, dz) \text{Rot}(x, d\varphi_x) \text{Rot}(y, d\varphi_y) \text{Rot}(z, d\varphi_z) - \mathbf{T} \\ = \mathbf{T} [\text{Trans}(dx, dy, dz) \text{Rot}(x, d\varphi_x) \text{Rot}(y, d\varphi_y) \text{Rot}(z, d\varphi_z) - \mathbf{I}] = \mathbf{T} \Delta.$$

Macierz Δ ma postać:

$$\Delta = [\text{Trans}(dx, dy, dz) \text{Rot}(x, d\varphi_x) \text{Rot}(y, d\varphi_y) \text{Rot}(z, d\varphi_z) - \mathbf{I}] \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos d\varphi_x & -\sin d\varphi_x & 0 \\ 0 & \sin d\varphi_x & \cos d\varphi_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos d\varphi_y & 0 & \sin d\varphi_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin d\varphi_y & 0 & \cos d\varphi_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \cos d\varphi_z & -\sin d\varphi_z & 0 & 0 \\ \sin d\varphi_z & \cos d\varphi_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Po przyjęciu $\sin d\varphi \approx d\varphi$, $\cos d\varphi \approx 1$ oraz pominięciu iloczynów zawierających przynajmniej dwie różniczki otrzymujemy następujące postacie macierzy przekształceń różniczkowych:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -d\varphi_z & d\varphi_y & dx \\ d\varphi_z & 0 & -d\varphi_x & dy \\ -d\varphi_y & d\varphi_x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad {}^j\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -'d\varphi_z & 'd\varphi_y & 'dx \\ 'd\varphi_z & 0 & -'d\varphi_x & 'dy \\ -'d\varphi_y & 'd\varphi_x & 0 & 'dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

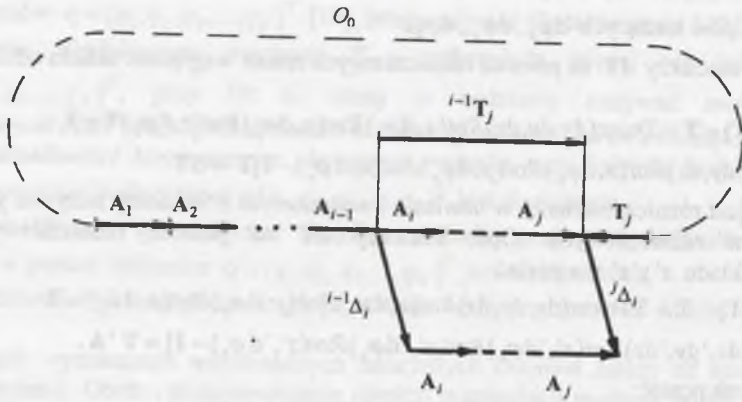
Rozważmy teraz zmiany różniczkowe położenia i orientacji członu j -tego (opisanego macierzą $\mathbf{T}_j = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_j$), wywołane przyrostem różniczkowym dq_i współrzędnej naturalnej członu i -tego. Spowodują one przyrost różniczkowy $d\mathbf{T}_j$ wyrażony za pomocą macierzy przekształceń różniczkowych ${}^{i-1}\Delta_i$. Macierz ta opisuje przemieszczenie i przeorientowanie różniczkowe układu skojarzonego z członem i -tym i pokrywającym się z układem $x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ przy $dq_i = 0$. Przemieszczenie i przeorientowanie różniczkowe są względem układu $x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ i opisane w układzie $x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$. Z rys. 2.9 wynika, że

$$d\mathbf{T}_j = \mathbf{T}_j {}^j\Delta_i = \mathbf{T}_{i-1} {}^{i-1}\Delta_i {}^{i-1}\mathbf{T}_j, \quad (2.19)$$

gdzie:

$$i \leq j,$$

${}^j\Delta_i$ - macierz przekształceń różniczkowych układu $x_jy_jz_j$ względem układu bazowego opisanych w układzie $x_jy_jz_j$, a spowodowanych zmianą dq_i .



Rys. 2.9. Graf zmian różniczkowych MRP, spowodowanych zmianą różniczkową dq_i współrzędnej naturalnej członu i -tego

Fig. 2.9. Graph of differential displacements of IRM, caused by differential changes dq_i of i -th link natural coordinate

Jeśli pojawią się zmiany różniczkowe współrzędnych naturalnych $dq_1 + dq_j$, wtedy zmiany dT_j będą sumą zmian różniczkowych

$$dT_j = T_j \Delta = \sum_{i=1}^j T_j \Delta_i = \sum_{i=1}^j T_{i-1} \Delta_i T_j^{-1} T_j, \quad (2.20a)$$

gdzie:

$$\Delta_i = \sum_{j=i}^j T_j^{-1} T_{i-1} \Delta_i T_j = \sum_{j=i}^j T_j^{-1} T_{i-1} \Delta_i T_j. \quad (2.20b)$$

Δ jest macierzą przekształceń różniczkowych układu współrzędnych $x_j y_j z_j$ względem układu bazowego, opisanych w układzie $x_j y_j z_j$, a spowodowanych zmianami różniczkowymi $dq_1 + dq_j$. Macierz ta ma postać

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -^j d\varphi_z & ^j d\varphi_y & ^j dx \\ ^j d\varphi_z & 0 & -^j d\varphi_x & ^j dy \\ -^j d\varphi_y & ^j d\varphi_x & 0 & ^j dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

gdzie:

$^j d\varphi_x + ^j d\varphi_z$ - kąty obrotów różniczkowych układu współrzędnych $x_j y_j z_j$ względem układu bazowego, opisanych w układzie $x_j y_j z_j$,

$^j dx + ^j dz$ - przemieszczenia różniczkowe układu współrzędnych $x_j y_j z_j$ względem układu bazowego, opisanych w układzie $x_j y_j z_j$.

Macierz Δ można zatem opisać za pomocą wektorów

$$d\vec{r}_{T_j} = \vec{i}_{T_j} ^j dx + \vec{j}_{T_j} ^j dy + \vec{k}_{T_j} ^j dz, \quad (2.22)$$

oraz

$$d\vec{\varphi}_{T_j} = \vec{i}_{T_j} ^j d\varphi_x + \vec{j}_{T_j} ^j d\varphi_y + \vec{k}_{T_j} ^j d\varphi_z. \quad (2.23)$$

gdzie:

$\vec{i}_{T_j}, \vec{j}_{T_j}, \vec{k}_{T_j}$ - wersory układu współrzędnych $x_j y_j z_j$ opisane w tym samym układzie współrzędnych.

W ogólnym przypadku przemieszczenia i obroty różniczkowe układu współrzędnych $x_j y_j z_j$ względem układu bazowego, spowodowane różniczkowymi przyrostami $dq_1 + dq_j$, można przedstawić w postaci następujących sum:

$$^j dx = \sum_{i=1}^j ^j dx_i, \quad ^j dy = \sum_{i=1}^j ^j dy_i, \quad ^j dz = \sum_{i=1}^j ^j dz_i,$$

$$^j d\varphi_x = \sum_{i=1}^j ^j d\varphi_{xi}, \quad ^j d\varphi_y = \sum_{i=1}^j ^j d\varphi_{yi}, \quad ^j d\varphi_z = \sum_{i=1}^j ^j d\varphi_{zi},$$

gdzie:

$^j dx_i + ^j dz_i$ - przemieszczenia różniczkowe układu współrzędnych $x_j y_j z_j$ względem układu bazowego, opisanych w układzie $x_j y_j z_j$, spowodowane różniczkową zmianą dq_i współrzędnej naturalnej członu i -tego;

$^j d\varphi_{xi} + ^j d\varphi_{zi}$ - obroty różniczkowe układu współrzędnych $x_j y_j z_j$ względem układu bazowego, opisanych w układzie $x_j y_j z_j$, spowodowane różniczkową zmianą dq_i współrzędnej naturalnej członu i -tego.

Stosując formuły wyprowadzone w pracach [41,56], możemy $^j dx_i + ^j dz_i$ oraz $^j d\varphi_{xi} + ^j d\varphi_{zi}$ wyrazić poprzez wektory $d\vec{r}_{i,i-1}$ i $d\vec{\varphi}_{i,i-1}$. Wektory te są odpowiednio przemieszczeniem i obrotem różniczkowym układu współrzędnych skojarzonego z członem i -tym i pokrywającym się z układem $x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$ przy $dq_i = 0$, względem układu $x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$, opisanym w układzie $x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$ i wynoszą:

$$^j dx_i = \vec{a}_i \cdot ((d\vec{\varphi}_{i,i-1} \times \vec{a}_i) + d\vec{r}_{i,i-1}), \quad (2.24a)$$

$$^j dy_i = \vec{b}_i \cdot ((d\vec{\varphi}_{i,i-1} \times \vec{b}_i) + d\vec{r}_{i,i-1}), \quad (2.24b)$$

$$^j dz_i = \vec{c}_i \cdot ((d\vec{\varphi}_{i,i-1} \times \vec{c}_i) + d\vec{r}_{i,i-1}), \quad (2.24c)$$

$$^j d\varphi_{xi} = \vec{a}_i \cdot d\vec{\varphi}_{i,i-1}, \quad (2.24d)$$

$$^j d\varphi_{yi} = \vec{b}_i \cdot d\vec{\varphi}_{i,i-1}, \quad (2.24e)$$

$$^j d\varphi_{zi} = \vec{c}_i \cdot d\vec{\varphi}_{i,i-1}, \quad (2.24f)$$

gdzie:

$\vec{a}_i, \vec{b}_i, \vec{c}_i$ - wersory odpowiadające pierwszym trzem kolumnom macierzy $^{i-1}T_j$,

\vec{d}_i - wektor odpowiadający czwartej kolumnie tej macierzy.

Przypomnijmy, że macierz jednorodna $^{i-1}T_j$ opisuje położenie i orientację układu współrzędnych $x_j y_j z_j$ względem układu współrzędnych $x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$.

Układy współrzędnych $x_i y_i z_i$ opisujące człony MRP skojarzone są zgodnie z zapisem Hartenberga-Denavita i dlatego w przypadku, gdy człony i z $i-1$ łączy para obrotowa, to

$d\vec{r}_{i,i-1} = 0, d\vec{\varphi}_{i,i-1} = \vec{k}_{i-1}dq_i$, gdy para przesuwna, to $d\vec{r}_{i,i-1} = \vec{k}_{i-1}dq_i, d\vec{\varphi}_{i,i-1} = 0$, gdzie \vec{k}_{i-1} - wektor osi z_{i-1} .

Ogólnie możemy zapisać

$$\begin{bmatrix} {}^j dx \\ {}^j dy \\ {}^j dz \\ {}^j d\varphi_x \\ {}^j d\varphi_y \\ {}^j d\varphi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{{}^j \partial x}{\partial q_1} & \dots & \frac{{}^j \partial x}{\partial q_j} \\ \frac{{}^j \partial y}{\partial q_1} & \dots & \frac{{}^j \partial y}{\partial q_j} \\ \frac{{}^j \partial z}{\partial q_1} & \dots & \frac{{}^j \partial z}{\partial q_j} \\ \frac{{}^j \partial \varphi_x}{\partial q_1} & \dots & \frac{{}^j \partial \varphi_x}{\partial q_j} \\ \frac{{}^j \partial \varphi_y}{\partial q_1} & \dots & \frac{{}^j \partial \varphi_y}{\partial q_j} \\ \frac{{}^j \partial \varphi_z}{\partial q_1} & \dots & \frac{{}^j \partial \varphi_z}{\partial q_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ \vdots \\ dq_j \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Macierz ${}^j J_j$ będziemy nazywać macierzą Jacobiego członu j -tego. Dla $j=N$ równanie (2.25) opisuje zmiany różniczkowe układu współrzędnych $x_N y_N z_N$, czyli członu roboczego, względem układu bazowego w układzie $x_N y_N z_N$. Zmiany różniczkowe układu współrzędnych $x_N y_N z_N$ implikują zmiany różniczkowe ruchu elementu wykonawczego opisane równaniem (2.26).

$$d\mathbf{X} = \mathbf{T}_N^N \Delta \mathbf{E} \quad (2.26)$$

Równania (2.25) i (2.26) są równaniami kinematyki w postaci różniczkowej.

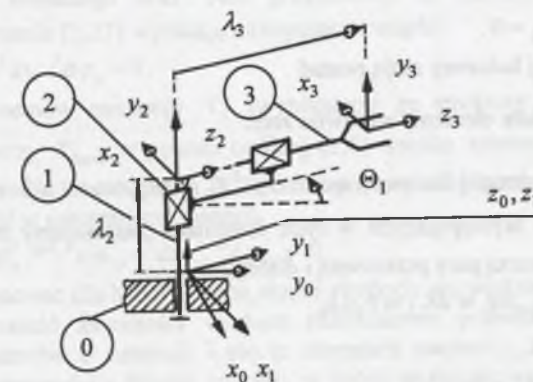
Wyznamy dla przykładu macierz Jacobiego ${}^N J_N$ MRP z 3 stopniami swobody przedstawionego na rys. 2.10. Człony oznaczono numerami w kółkach. Macierze opisujące układy współrzędnych skojarzone z członami mają postacie

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^2 \mathbf{T}_3 = \mathbf{A}_3, {}^1 \mathbf{T}_3 = \mathbf{A}_2 {}^2 \mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_2 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_3 = \mathbf{A}_1 {}^1 \mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} -C_1 & 0 & -S_1 & -\lambda_3 C_1 \\ -S_1 & 0 & C_1 & \lambda_3 S_1 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie: $S_1 = \sin \Theta_1$, $C_1 = \cos \Theta_1$. Współrzędnymi naturalnymi członów są $q_1 = \Theta_1$, $q_2 = \lambda_2$, $q_3 = \lambda_3$. Do obliczenia macierzy Jacobiego ${}^3 J_3$ skorzystamy z formuł (2.24) i (2.25). Dla elementów pierwszej kolumny macierzy ${}^3 J_3$ $j=3$ oraz $i=1$. Wielkości występujące w formułach (2.24) wyznaczmy z macierzy ${}^{i-1} \mathbf{T}_j = {}^0 \mathbf{T}_3 = \mathbf{T}_3$. Człony zerowy i pierwszy tworzą parę obrotową i dlatego

$$d\vec{\varphi}_{i,i-1} = \vec{k}_{i-1}dq_i \equiv d\vec{\varphi}_{1,0} = \vec{k}_0 d\Theta_1, \quad d\vec{r}_{i,i-1} = 0.$$



Rys. 2.10. MRP z 3 stopniami swobody. λ_2 , λ_3 , Θ_1 - parametry Hartenberga-Denavita
Fig. 2.10. IRM with 3 degrees of freedom. λ_2 , λ_3 , Θ_1 - Hartenberg-Denavit parameters

Z macierzy \mathbf{T}_3 wynika

$$\vec{a}_1 = -C_1 \vec{k}_0 - S_1 \vec{j}_0, \quad \vec{b}_1 = \vec{k}_0, \quad \vec{c}_1 = -S_1 \vec{k}_0 + C_1 \vec{j}_0, \quad \vec{d}_1 = -\lambda_3 S_1 \vec{i}_0 + \lambda_3 C_1 \vec{j}_0 + \lambda_2 \vec{k}_0.$$

Zatem

$$d\vec{\varphi}_{1,0} \times \vec{d}_1 = -\lambda_3 (C_1 \vec{i}_0 + S_1 \vec{j}_0) d\Theta_1.$$

Z formuł (2.24) wynika

$${}^3 dx_1 = \vec{a}_1 \cdot (d\vec{\varphi}_{1,0} \times \vec{d}_1) = \lambda_3 d\Theta_1,$$

$${}^3 dy_1 = \vec{b}_1 \cdot (d\vec{\varphi}_{1,0} \times \vec{d}_1) = 0,$$

$${}^3 dz_1 = \vec{c}_1 \cdot (d\vec{\varphi}_{1,0} \times \vec{d}_1) = 0,$$

$${}^3 d\varphi_{x1} = \vec{a}_1 \cdot d\vec{\varphi}_{1,0} = 0,$$

$${}^3 d\varphi_{y1} = \vec{b}_1 \cdot d\vec{\varphi}_{1,0} = d\Theta_1,$$

$${}^3 d\varphi_{z1} = \vec{c}_1 \cdot d\vec{\varphi}_{1,0} = 0.$$

Zatem elementy pierwszej kolumny mają postać

$$\frac{{}^3 \partial x}{\partial \Theta_1} = \frac{{}^3 \partial x_1}{\partial \Theta_1} = \lambda_3, \quad \frac{{}^3 \partial \varphi_y}{\partial \Theta_1} = \frac{{}^3 \partial \varphi_{y1}}{\partial \Theta_1} = 1, \text{ pozostałe elementy są równe zeru.}$$

Dla elementów drugiej kolumny macierzy ${}^3 J_3$ $j=3$ oraz $i=2$. Wielkości występujące w formułach (2.24) wyznaczmy z macierzy ${}^{i-1} \mathbf{T}_j = {}^1 \mathbf{T}_3$. Człony pierwszy i drugi tworzą parę przesuwną i dlatego

$$d\vec{\varphi}_{i,i-1} = 0, \quad d\vec{r}_{i,i-1} = \vec{k}_{i-1}dq_i \equiv d\vec{r}_{2,1} = \vec{k}_1 d\lambda_2.$$

Z macierzy ${}^1 \mathbf{T}_3$ wynika

$$\vec{a}_2 = -\vec{i}_1, \quad \vec{b}_2 = \vec{k}_1, \quad \vec{c}_2 = \vec{j}_1, \quad \vec{d}_2 = \lambda_3 \vec{j}_1 + \lambda_2 \vec{k}_1.$$

Z formuł (2.24) wynika

$${}^3 dx_2 = \vec{a}_2 \cdot d\vec{r}_{2,1} = 0,$$

$${}^3dy_2 = \bar{b}_2 \cdot d\bar{r}_{2,1} = d\lambda_2,$$

$${}^3dz_2 = \bar{c}_2 \cdot d\bar{r}_{2,1} = 0,$$

$${}^3d\varphi_{x2} = {}^3d\varphi_{y2} = {}^3d\varphi_{z2} = 0.$$

Zatem elementy drugiej kolumny mają postać

$$\frac{{}^3\partial y}{\partial \lambda_2} = \frac{{}^3\partial y_2}{\partial \lambda_2} = 1, \text{ pozostałe elementy są równe zeru.}$$

Dla elementów drugiej kolumny macierzy 3J_3 $j=3$ oraz $i=3$ w formułach (2.24).

Do obliczeń wielkości występujących w tych formułach zastosujemy macierz ${}^{i-1}T_j = {}^2T_3$.

Człony drugi i trzeci tworzą parę przesuwną i dlatego

$$d\bar{r}_{i,i-1} = 0, \quad d\bar{r}_{i,i-1} = \bar{k}_{i-1}dq_i = d\bar{r}_{3,2} = \bar{k}_2d\lambda_3.$$

Z macierzy 2T_3 wynika

$$\bar{a}_3 = \bar{i}_2, \quad \bar{b}_3 = \bar{j}_2, \quad \bar{c}_3 = \bar{k}_2, \quad \bar{d}_3 = \lambda_3\bar{k}_2.$$

Z formuł (2.24) wynika

$${}^3dx_3 = \bar{a}_3 \cdot d\bar{r}_{3,2} = 0,$$

$${}^3dy_3 = \bar{b}_2 \cdot d\bar{r}_{3,2} = 0,$$

$${}^3dz_3 = \bar{c}_3 \cdot \bar{r}_{3,2} = d\lambda_3,$$

$${}^3d\varphi_{x3} = {}^3d\varphi_{y3} = {}^3d\varphi_{z3} = 0.$$

Zatem elementy trzeciej kolumny mają postać

$$\frac{{}^3\partial z}{\partial \lambda_3} = \frac{{}^3\partial z_3}{\partial \lambda_3} = 1, \text{ pozostałe elementy są równe zeru.}$$

Równanie kinematyki w postaci różniczkowej (2.25) dla MRP z rys. 2.10 ma postać

$$\begin{bmatrix} {}^3dx \\ {}^3dy \\ {}^3dz \\ {}^3d\varphi_x \\ {}^3d\varphi_y \\ {}^3d\varphi_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{{}^3J_3} \begin{bmatrix} d\Theta_1 \\ d\lambda_2 \\ d\lambda_3 \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Podprzestrzeń MRP

Po podstawieniu $j=N$ w formule (2.25) otrzymujemy opis ruchu w postaci różniczkowej członu roboczego MRP. W formule występuje 6 różniczek współrzędnych zewnętrznych członu roboczego ${}^Ndx, {}^Ndy, {}^Ndz, {}^Nd\varphi_x, {}^Nd\varphi_y, {}^Nd\varphi_z$. Jeśli liczba stopni swobody $N < 6$, to położenie i orientacja członu roboczego jest z podprzestrzeni MRP. Spośród 6 tych różniczek N jest niezależnych i $6-N$ zależnych. Równania opisujące zależności różniczek współrzędnych zewnętrznych członu roboczego zależnych od niezależnych pełnią rolę klucza do podprzestrzeni MRP. Dlatego będziemy nazywać je **różniczkowymi równaniami kluczowymi**. Przedstawimy 2 metody tworzenia różniczkowych równań kluczowych na przykładzie MRP z rys. 2.10 i rys. 2.7.

W pierwszej metodzie korzystamy z różniczkowego równania kinematyki członu roboczego. Zilustrujemy ją na przykładzie MRP z rys. 2.10. Równanie (2.27) opisuje kinematykę członu roboczego MRP. Jeśli przyjmujemy, że różniczki ${}^3dx, {}^3dy, {}^3dz$ są niezależne, to z równania (2.27) wynikają następujące związki:

$${}^3d\varphi_x = 0, \quad {}^3d\varphi_y\lambda_3 = {}^3dx, \quad {}^3d\varphi_z = 0. \quad (2.28a)$$

Z porównania elementów macierzy T_3 (wynikającej ze struktury kinematycznej MRP) z elementami macierzy T_{3aad} w postaci ogólnej (2.6) wynika zależność $\lambda_3 = (d_x^2 + d_y^2)^{1/2}$. Wstawiając tę zależność do równania (2.28a) otrzymamy różniczkowe równania kluczowe tego MRP z rys. 2.10 w następującej postaci:

$${}^3d\varphi_{3x} = 0, \quad (d_x^2 + d_y^2)^{1/2} \cdot {}^3d\varphi_{3y} = {}^3dx, \quad {}^3d\varphi_{3z} = 0. \quad (2.28b)$$

Metodę tę łatwo stosować dla MRP z liczbą stopni swobody nie większą niż 3.

Trudniej znaleźć zależności wiążące różniczkowe przemieszczenie i orientację chwytaka manipulatorów o czterech i pięciu stopniach swobody. Zależności te możemy otrzymać przez zastosowanie drugiej metody, w której różniczkujemy równania kluczowe MRP. Zilustrujemy ją na przykładzie MRP z czterema stopniami swobody z rys. 2.7. Podprzestrzeń MRP opisuje równanie kluczowe (2.17). Równanie może być przedstawione w postaci dwóch równań wynikających z zerowania się licznika $\bar{c} \times \bar{\lambda}_3 = 0$. Wektor $\bar{\lambda}_3 = (d_x - l_2c_y)\bar{i}_0 + (d_y + l_2c_x)\bar{j}_0$ jest równoległy do płaszczyzny x_0y_0 . Iloczyn $\bar{c} \times \bar{\lambda}_3$ jest zerowy, gdy wektor \bar{c} jest również równoległy do płaszczyzny x_0y_0 . Zatem możemy napisać dwa następujące równania:

$$c_z = 0, \quad (2.29a)$$

$$\bar{c} \times \bar{\lambda}_3 = (c_x\bar{i}_0 + c_y\bar{j}_0) \times [(d_x - l_2c_y)\bar{i}_0 + (d_y + l_2c_x)\bar{j}_0] = 0 \Rightarrow$$

$$c_xd_y - c_yd_x + l_2^2 = 0, \quad (2.29b)$$

gdzie l_2, λ_3 - parametry Hartenberga-Denavita, $l_2 = \text{const}$. Równania (2.29a) i (2.29b) „zatrzymują” dwa stopnie swobody ruchu członu roboczego. Po zróżniczkowaniu tych równań względem układu współrzędnych bazowego $x_0y_0z_0$ otrzymujemy

$$d(c_z) = 0,$$

$$d(c_xd_y - c_yd_x) = d(c_x)d_y + c_xd(d_y) - d(c_y)d_x - c_yd(d_x) = 0. \quad (2.30)$$

Różniczkowe równania kinematyki członu roboczego MRP wynikające z formuł (2.21) i (2.26) mają postać:

$$dT_4 = \begin{bmatrix} d(a_x) & d(b_x) & d(c_x) & d(d_x) \\ d(a_y) & d(b_y) & d(c_y) & d(d_y) \\ d(a_z) & d(b_z) & d(c_z) & d(d_z) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= T_4^4 \Delta = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x & d_x \\ a_y & b_y & c_y & d_y \\ a_z & b_z & c_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -{}^4d\varphi_z & {}^4d\varphi_y & {}^4dx \\ {}^4d\varphi_z & 0 & -{}^4d\varphi_x & {}^4dy \\ -{}^4d\varphi_y & {}^4d\varphi_x & 0 & {}^4dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_x^4 d\varphi_z - c_x^4 d\varphi_y & -a_x^4 d\varphi_z + c_x^4 d\varphi_x & a_x^4 d\varphi_y - b_x^4 d\varphi_x & a_x^4 dx + b_x^4 dy + c_x^4 dz \\ b_y^4 d\varphi_z - c_y^4 d\varphi_y & -a_y^4 d\varphi_z + c_y^4 d\varphi_x & a_y^4 d\varphi_y - b_y^4 d\varphi_x & a_y^4 dx + b_y^4 dy + c_y^4 dz \\ b_z^4 d\varphi_z - c_z^4 d\varphi_y & -a_z^4 d\varphi_z + c_z^4 d\varphi_x & a_z^4 d\varphi_y - b_z^4 d\varphi_x & a_z^4 dx + b_z^4 dy + c_z^4 dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Różniczki występujące w formułach (2.30) możemy wyrazić przez odpowiednie elementy macierzy (2.31).

$${}^4d(c_z) = a_z \cdot {}^4d\varphi_y - b_z \cdot {}^4d\varphi_x = 0, \quad (2.32a)$$

$$\begin{aligned} {}^4(c_x d_y - c_y d_x) &= (a_x \cdot {}^4d\varphi_y - b_x \cdot {}^4d\varphi_x) d_y + c_x (a_y \cdot {}^4dx + b_y \cdot {}^4dy + c_y \cdot {}^4dz) \\ &- (a_y \cdot {}^4d\varphi_y - b_y \cdot {}^4d\varphi_x) d_x - c_y (a_x \cdot {}^4dx + b_x \cdot {}^4dy + c_x \cdot {}^4dz) = 0. \end{aligned} \quad (2.32b)$$

Po przekształceniu równania (2.32b) otrzymamy

$$\begin{aligned} &(-b_x d_y + b_y d_x) \cdot {}^4d\varphi_x + (a_x d_y - a_y d_x) \cdot {}^4d\varphi_y + (c_x a_y - c_y a_x) \cdot {}^4dx \\ &+ (c_x b_y - c_y b_x) \cdot {}^4dy = 0. \end{aligned}$$

Współrzędne wersorów \bar{a} , \bar{b} i \bar{c} opisujących osie układu $x_4 y_4 z_4$ spełniają równania (2.9).

Łatwo zauważyć, że $\bar{a} = \bar{b} \times \bar{c}$, $\bar{b} = \bar{c} \times \bar{a}$. Z równań tych wynika $b_z = c_x a_y - c_y a_x$, $-a_z = c_x b_y - c_y b_x$. Po podstawieniu tych zależności do równania (2.32b) otrzymamy

$$(b_x d_y - b_y d_x) \cdot {}^4d\varphi_x - (a_x d_y - a_y d_x) \cdot {}^4d\varphi_y - b_z \cdot {}^4dx + a_z \cdot {}^4dy = 0. \quad (2.32c)$$

Po pomnożeniu obu stron równania (2.32c) przez b_z i wykorzystaniu równania (2.32a) w postaci $a_z \cdot {}^4d\varphi_y = b_z \cdot {}^4d\varphi_x$ otrzymamy

$$[(a_y b_z - a_z b_y) d_x + (a_z b_x - a_x b_z) d_y] \cdot {}^4d\varphi_x - a_z (b_z \cdot {}^4dx - a_z \cdot {}^4dy) = 0. \quad (2.32d)$$

Z równań (2.9) wynika $c_x = a_y b_z - a_z b_y$ i $c_y = a_z b_x - a_x b_z$. Po podstawieniu tych zależności do równania (2.32d) otrzymamy równanie (2.33a).

$$(c_x d_x + c_y d_y) \cdot {}^4d\varphi_x - a_z (b_z \cdot {}^4dx - a_z \cdot {}^4dy) = 0. \quad (2.33a)$$

$$a_z \cdot {}^4d\varphi_y - b_z \cdot {}^4d\varphi_x = 0. \quad (2.33b)$$

Formuły (2.33a) (2.33b) są różniczkowymi równaniami kluczowymi MRP z rys. 2.7.

2.1.4. Zadanie proste i odwrotne kinematyki w postaci różniczkowej

Zadanie proste kinematyki w postaci różniczkowej polega na wyznaczeniu przyrostów różniczkowych współrzędnych zewnętrznych elementu wykonawczego MRP (opisujących macierz \mathbf{X}) dla znanych przyrostów różniczkowych współrzędnych wewnętrznych $dq_1 \div dq_N$. W celu rozwiązania tego zadania z równań kinematyki (2.1) i formuł (2.24) wyznaczamy macierz Jacobiego członu roboczego ${}^N\mathbf{J}_N$. Następnie z równania (2.25) wyznaczamy przyrosty różniczkowe układu współrzędnych $x_N y_N z_N$, tworzymy macierz przekształceń różniczkowych ${}^N\Delta$ (opisaną formułą (2.21)) i obliczamy macierz $d\mathbf{X}$ z równania (2.26). Po zróżniczkowaniu formuł (2.8) i wykorzystaniu macierzy $d\mathbf{X}$ - wyznaczamy szukane różniczki współrzędnych zewnętrznych $dx, dy, dz, d\Phi, d\Theta, d\Psi$.

Zadanie odwrotne kinematyki w postaci różniczkowej polega na wyznaczeniu przyrostów różniczkowych współrzędnych wewnętrznych $dq_1 \div dq_N$ dla znanych przyrostów różniczkowych współrzędnych zewnętrznych elementu wykonawczego (opisujących macierz

$d\mathbf{X}_{zad}$ odpowiadającą zadanemu przyrostowi ruchu obiektu manipulacji). Po zróżniczkowaniu równania (2.7) i podstawieniu znanych różniczek $dx, dy, dz, d\Phi, d\Theta, d\Psi$ otrzymamy macierz $d\mathbf{X}_{zad}$. Dalej będziemy korzystać z elementów macierzy ${}^N\Delta$, którą otrzymamy z równania (2.26) za pomocą formuły

$${}^N\Delta = \mathbf{T}_N^{-1} d\mathbf{X}_{zad} \mathbf{E}^{-1}. \quad (2.34)$$

Dla MRP o $N < 6$ elementy macierzy ${}^N\Delta$ odpowiadające macierzy $d\mathbf{X}_{zad}$ muszą spełniać 6- N lub mniej różniczkowych równań kluczowych [67,70]. W przeciwnym przypadku $d\mathbf{X}_{zad}$ nie będzie z podprzestrzeni MRP i nie będzie mogło być zrealizowane. Po wyznaczeniu macierzy Jacobiego członu roboczego ${}^N\mathbf{J}_N$ rozwiązujemy układ równań liniowych (2.25) dla szukanych $dq_1 \div dq_N$. Znana macierz jednokolumnowa z lewej strony równania (2.25) zawiera 6 wierszy 3 współrzędne wektora przemieszczenia różniczkowego $d\vec{r}_{TN}$ i 3 współrzędne wektora obrotu różniczkowego $d\vec{\varphi}_{TN}$. Dla MRP o $N < 6$ stopniach swobody, N współrzędnych jest niezależnych i 6- N współrzędnych zależnych [56,57]. Współrzędne zależne można wyznaczyć z różniczkowych równań kluczowych lub z macierzy Jacobiego ${}^N\mathbf{J}_N$ [67,70,76]. Po odrzuceniu z równania macierzowego (2.25) 6- N wierszy odpowiadających współrzędnym zależnym otrzymujemy układ N równań o N nieznanach $dq_1 \div dq_N$.

2.2. Dynamika MRP

Podstawowym zadaniem stawianym siłownikom MRP jest wytwarzanie takich sił bądź momentów w parach kinematycznych, które zapewnią realizację trajektorii zadanej \mathbf{X}_M obiektu manipulacji, z zadaną prędkością i przyspieszeniem w przestrzeni zewnętrznej. Zadanej prędkości i przyspieszeniu w przestrzeni zewnętrznej odpowiadają zadane prędkości i przyspieszenia współrzędnych wewnętrznych. Można obliczyć momenty bądź siły napędowe potrzebne do spowodowania zadanej dynamiki MRP. Może zdarzyć się, że obliczone momenty bądź siły napędowe są większe niż maksymalne lub mniejsze niż minimalne momenty bądź siły napędowe, możliwe do wytworzenia przez siłowniki. W takim przypadku rzeczywiste prędkości i przyspieszenia współrzędnych wewnętrznych będą się różniły od zadanych. Wtedy rzeczywisty ruch MRP będzie wolniejszy od zadanego. Aby zmniejszyć te rozbieżności, celowe jest planowanie trajektorii \mathbf{X}_M z uwzględnieniem dynamiki MRP i możliwości napędowych siłowników. Planowanie to polega na wyznaczeniu zbioru punktów w przestrzeni wewnętrznej MRP i odpowiadających im momentów bądź sił napędowych. Wyznaczanie punktu w przestrzeni wewnętrznej MRP oznacza tu obliczenie współrzędnych wewnętrznych oraz ich prędkości i przyspieszeń. Podczas planowania dynamiki MRP pojawia się potrzeba obliczania momentów bądź sił napędowych dla zadanych współrzędnych wewnętrznych oraz ich prędkości i przyspieszeń (zadanie odwrotne dynamiki napędów MRP). Pojawia się także potrzeba obliczania współrzędnych wewnętrznych MRP, ich prędkości i przyspieszeń dla znanych momentów bądź sił napędowych (zadanie proste dynamiki MRP). Obliczenia te umożliwiają równania dynamiki MRP.

Równania dynamiki MRP wynikające z równań Newtona-Eulera i Lagrange'a przedstawiają prace [10,23,37,40,48,51,107]. W równaniach dynamiki MRP wynikających z równań Lagrange'a pominięto energię kinetyczną wirników siłowników i elementów przymocowanych do nich wokół osi innych niż osie ich obrotu. Założenia te czynią osie obrotu wirników nieruchome. Na ogół osie wirników siłowników poruszają się podczas ruchu

MRP. W równaniach dynamiki MRP z napędem pośrednim należy uwzględnić oprócz rozkładów mas członów i siłowników rozkłady mas elementów zespołów przekazujących napędy. Należy także uwzględnić ruch osi obrotów wirników siłowników. W pracy [32] uwzględniono te czynniki do opisu dynamiki manipulatorów napędzanych bezpośrednio i pośrednio, z siłownikami zamocowanymi tylko w osiach par kinematycznych. Roboty L-1, IRb-6, IRp-6, URP-6, IRb-60, IRp-60, URP-60 produkowane w kraju mają napędy pośrednie z siłownikami umieszczonymi poza osiami par kinematycznych członów. Dla MRP rodziny IRb opracowano uproszczone równania dynamiki wynikające z równań Lagrange'a [30,94]. Uproszczenia te polegają między innymi na pominięciu dwóch ostatnich członów i włączeniu ich mas do masy trzeciego członu, skupieniu mas członu drugiego i trzeciego w punktach ciężkości oraz przyjęciu liniowego rozkładu masy trzeciego członu przy obliczaniu jego energii kinetycznej. Prace autora rozprawy [56,57,59,64] przedstawiają ogólne równania dynamiki MRP wynikające z równań Lagrange'a, uwzględniające przestrzenne rozkłady mas: członów, siłowników i elementów zespołów przekazujących napędy, ruch osi wirników siłowników. Równania te są słuszne dla MRP z dowolnym sposobem napędów, tj. bezpośrednim i pośrednim, z siłownikami umieszczonymi w osiach i poza osiami par kinematycznych członów. Do uwzględnienia w równaniach dynamiki MRP ruchu osi wirników oraz elementów zespołów przekazujących napędy jest potrzebny dokładniejszy niż stosowany w pracach [10,23,37,40,41,51,107] opis kinematyki. Równania te i sposoby opisu kinematyki wirników oraz elementów zespołów przekazujących napędy przedstawimy w podrozdziale 2.2.1.

W dalszych rozważaniach momenty obrotowe lub siły wytwarzane przez siłowniki będziemy nazywać siłami napędowymi siłowników. Odpowiadające im siły lub momenty działające na człony nazywać będziemy siłami napędowymi członów.

W podrozdziale tym przedstawimy równania dynamiki MRP. Do wyznaczenia tych równań zastosujemy metody mechaniki analitycznej bazujące na:

- a) równaniach Lagrange'a,
 - b) równaniach Newtona-Eulera.
- Metody te są równoważne [16,50].

Rozważymy:

- a) MRP z siłownikami zamocowanymi poza parami członów,
- b) MRP z siłownikami zamocowanymi w parach członów z napędem pośrednim,
- c) MRP z siłownikami zamocowanymi w parach członów z napędem bezpośrednim.

W przypadku napędu bezpośredniego siłowniki są mocowane w osiach par kinematycznych członów. Człony te są napędzane bezpośrednio przez siłowniki. W przypadku napędu pośredniego siłowniki mogą być mocowane w osiach par kinematycznych członów lub poza nimi. Wtedy napęd z siłowników jest przekazywany na człony odpowiednio poprzez zespoły przekazujące napędy.

2.2.1. Równania Lagrange'a

Rozważane w rozprawie MRP stanowią łańcuchy kinematyczne otwarte z członami tworzącymi tylko pary kinematyczne V klasy. Liczba stopni swobody takich MRP jest równa liczbie współrzędnych naturalnych członów. Współrzędnymi uogólnionymi MRP są współrzędne naturalne członów lub siłowników. Zatem MRP są układami mechanicznymi holonomicznymi [50,51]. Ruch takich układów mechanicznych można opisać za pomocą równań Lagrange'a II rodzaju. W równaniach tych musimy obliczyć potencjał kinetyczny Lagrange'a $L = E_k - E_p$, gdzie E_k jest energią kinetyczną, a E_p - energią potencjalną MRP.

Równania Lagrange'a pozwalają wyznaczyć siły lub momenty napędowe członów, które należy przyłożyć w parach kinematycznych członów. Bardzo ważną zaletą równań Lagrange'a jest możliwość otrzymania z nich ogólnych formuł wiążących bezpośrednio uogólnione siły niepotencjalne F_i [106] ze współrzędnymi naturalnymi członów MRP oraz ich prędkościami i przyspieszeniami. Siły F_i są siłami lub momentami reakcji członu $i-1$ na człon i -ty, skierowane wzdłuż osi par kinematycznych łączących te człony. Wyznaczamy je z równań Lagrange'a

$$F_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}; \quad i = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (2.35)$$

Wyznaczanie sił napędowych członów lub siłowników za pomocą równań Lagrange'a nie wymaga wyznaczania wszystkich sił i momentów reakcji elementów składowych MRP, tak jak w równaniach Newtona-Eulera.

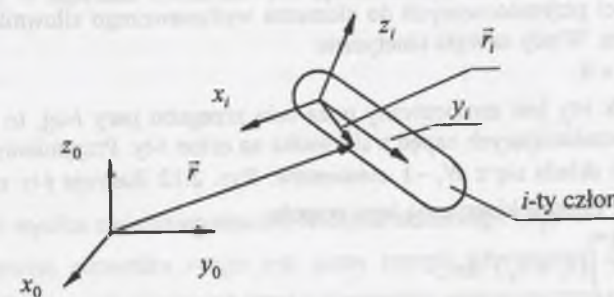
Poniżej przedstawiono równania dynamiki MRP uwzględniające oddziaływanie: członów i siłowników, zespołów przekazujących napędy, obiektu manipulacji, otoczenia, tarcia, ruchu podstawy.

Energia kinetyczna

Całkowita energia kinetyczna E_k jest sumą energii kinetycznych E_{ki} związanych z poszczególnymi członami. E_{ki} jest sumą energii kinetycznej E_{kci} członu i -tego wraz z elementami przymocowanymi i nieruchomymi względem niego, energii kinetycznej E_{kcsi} zespołu elementów przekazujących napęd z siłownika i -tego na człon i -ty oraz energii kinetycznej E_{ksi} elementu wykonawczego siłownika i -tego.

$$E_{ki} = E_{kci} + E_{kcsi} + E_{ksi}. \quad (2.36)$$

Niech położenie punktów materialnych członu i -tego względem układu bazowego x_0, y_0, z_0 opisuje postać jednorodna r wektora \vec{r} , a względem układu współrzędnych x_i, y_i, z_i skojarzonego z tym członem postać jednorodna \vec{r}_i wektora \vec{r}_i . Układy te ilustruje rys. 2.11.



Rys. 2.11. Układy współrzędnych x_0, y_0, z_0 i x_i, y_i, z_i

Fig. 2.11. The x_0, y_0, z_0 and x_i, y_i, z_i frames

Prędkość punktów materialnych członu i -tego względem układu bazowego opisuje formuła

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{T}_i}{dt} \vec{r}_i. \quad (2.37)$$

T_i jest macierzą jednorodną opisującą układ $x_i y_i z_i$ względem układu bazowego. Energię kinetyczną członu i -tego opisuje całka

$$E_{kci} = \frac{1}{2} \int_0^{m_i} \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \right)^2 dm.$$

Iloczyn skalarny $(d\bar{r}/dt)^2$ można wyrazić za pomocą pochodnej $\dot{\bar{r}}$.

$$\left(\frac{d\bar{r}}{dt} \right)^2 = \text{Trace}(\dot{\bar{r}}\dot{\bar{r}}^T). \quad (2.38)$$

Po uwzględnieniu formuły (2.37) i (2.38) otrzymamy

$$E_{kci} = \frac{1}{2} \text{Trace} \left(\frac{dT_i}{dt} J_i \frac{dT_i^T}{dt} \right). \quad (2.39)$$

J_i jest macierzą pseudobezwładności członu i -tego obliczoną w układzie $x_i y_i z_i$.

$$J_i = \int_0^{m_i} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i^T dm = \begin{bmatrix} I_{ixx} & I_{iyx} & I_{izx} & m_i \bar{x}_i \\ I_{ixy} & I_{iyy} & I_{izy} & m_i \bar{y}_i \\ I_{ixz} & I_{iyz} & I_{izz} & m_i \bar{z}_i \\ m_i \bar{x}_i & m_i \bar{y}_i & m_i \bar{z}_i & m_i \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

gdzie

$$I_{uvv} = \int_0^{m_i} uv dm; \quad m_i \bar{u}_i = \int_0^{m_i} u dm; \quad u, v = x, y, z.$$

m_i jest masą członu i -tego i wszystkich elementów przymocowanych do niego. Jeśli siłownik i -ty jest zamocowany w osi przegubu pary kinematycznej i -tej, to masę korpusu tego siłownika, przymocowanego do członu $i-1$ -szego, włączamy do masy m_{i-1} .

Jeśli siłownik i -ty jest zamocowany w przegubie pary i -tej, to jedynym elementem przekazującym napęd na człon jest przekładnia. W przekładni możemy rozróżnić części przymocowane do korpusu i części przymocowane do elementu wykonawczego siłownika i -tego. Masy części przekładni przymocowane do korpusu siłownika włączamy do masy m_{i-1} , a masy części przymocowanych do elementu wykonawczego siłownika włączamy do masy tego elementu. Wtedy energia kinetyczna

$$E_{kcsi} = 0.$$

Jeśli siłownik i -ty jest zamocowany poza osią przegubu pary i -tej, to konieczny jest zespół elementów przekazujących napęd z siłownika na człon i -ty. Przyjmujemy, że zespół napędowy członu i -tego składa się z $N_i - 1$ elementów. Rys. 2.12 ilustruje j -ty element i -tego zespołu napędowego. Energia kinetyczna tego zespołu

$$E_{kcsi} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_i-1} \int_0^{m_j} (\bar{v}_i + \bar{v}_{ij})^2 dm, \quad (2.41)$$

gdzie:

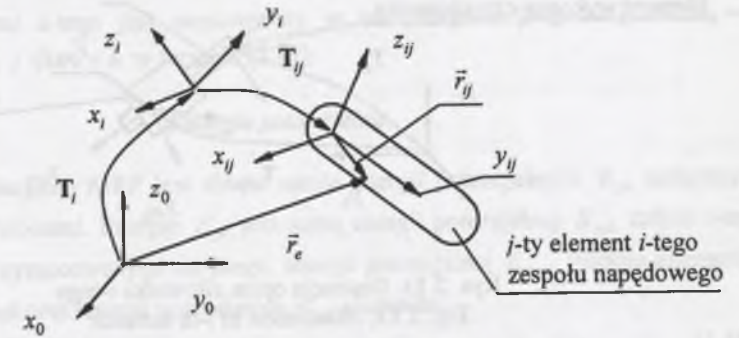
m_j - masa elementu j -tego,

\bar{v}_i - prędkość początku układu współrzędnych $x_i y_i z_i$ względem układu bazowego,

\bar{v}_{ij} - prędkość punktów materialnych elementu j -tego względem układu $x_i y_i z_i$.

Macierz przekształceń opisującą układ współrzędnych $x_{ij} y_{ij} z_{ij}$ skojarzony z elementem j -tym względem układu $x_i y_i z_i$ oznaczmy przez T_{ij} . Położenie punktów

materialnych elementu j -tego względem układu $x_{ij} y_{ij} z_{ij}$ opiszemy za pomocą postaci jednorodnej \mathbf{r}_{ij} wektora $\bar{\mathbf{r}}_{ij}$. Położenie tych punktów materialnych względem układu bazowego opiszemy za pomocą postaci jednorodnej $\mathbf{r}_e = T_i T_{ij} \mathbf{r}_{ij}$ wektora $\bar{\mathbf{r}}_e$. Zatem prędkości $\bar{\mathbf{v}}_i + \bar{\mathbf{v}}_{ij}$ odpowiada następująca postać jednorodna:



Rys. 2.12. Ilustracja opisu elementu zespołu przekazu napędu

Fig. 2.12. Illustration of drive unit element

$$\frac{d\mathbf{r}_e}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_e = \frac{dT_i}{dt} T_{ij} \mathbf{r}_{ij} + T_i \frac{dT_{ij}}{dt} \mathbf{r}_{ij}. \quad (2.42)$$

Korzystając z formuły (2.38), (2.41) i (2.42) możemy napisać:

$$E_{kcsi} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_i-1} \left[\text{Trace} \left(\frac{dT_i}{dt} T_{ij} J_{ij} T_{ij}^T \frac{dT_i^T}{dt} \right) + 2 \text{Trace} \left(\frac{dT_i}{dt} T_{ij} J_{ij} \frac{dT_{ij}^T}{dt} T_i^T \right) + \text{Trace} \left(\frac{dT_{ij}}{dt} J_{ij} \frac{dT_{ij}^T}{dt} \right) \right]. \quad (2.43)$$

J_{ij} jest macierzą pseudobezwładności j -tego elementu o masie m_{ij} , obliczoną w układzie $x_{ij} y_{ij} z_{ij}$. Trzeci wyraz w nawiasie kwadratowym uprościliśmy, korzystając z następującej zależności:

$$T_i \mathbf{v}_{ij} (T_i \mathbf{v}_{ij})^T = \mathbf{v}_{ij} \mathbf{v}_{ij}^T, \quad (2.44)$$

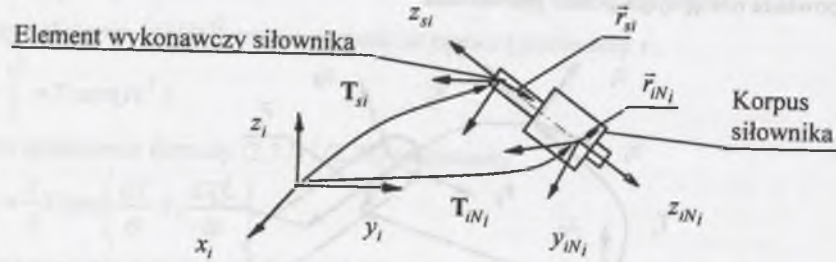
gdzie

$$\mathbf{v}_{ij} = \frac{dT_{ij}}{dt} \mathbf{r}_{ij}.$$

Formuła (2.44) wynika z niezmienniczości iloczynu skalarnego $(\bar{\mathbf{v}}_{ij})^2$.

Energia kinetyczna siłownika i -tego jest sumą energii kinetycznej E_{kksi} korpusu i energii kinetycznej E_{kwsi} części wirujących wraz z elementem wykonawczym siłownika. Do obliczenia tych energii zastosujemy układ współrzędnych $x_{iN_i} y_{iN_i} z_{iN_i}$ skojarzony z korpusem oraz układ $x_{si} y_{si} z_{si}$ skojarzony wirującym elementem wykonawczym siłownika. Układy te przedstawione są na rys. 2.13. Macierz T_{iN_i} opisuje układ $x_{iN_i} y_{iN_i} z_{iN_i}$ względem układu $x_i y_i z_i$. Macierz T_{si} opisuje układ $x_{si} y_{si} z_{si}$ względem układu $x_i y_i z_i$. Położenie punktów materialnych części wirujących w układzie $x_{si} y_{si} z_{si}$ opiszemy za pomocą postaci jednorodnej

\mathbf{r}_{si} wektora $\bar{\mathbf{r}}_{si}$. Energia kinetyczna siłownika zamocowanego w osi przegubu pary kinematycznej i -tej jest równa tylko energii kinetycznej części wirujących. Energia korpusu



Rys. 2.13. Ilustracja opisu siłownika i -tego
Fig. 2.13. Illustration of i -th actuator

jest uwzględniona w formule (2.39). W takim przypadku

$$E_{ksi} = E_{kvisi} = \frac{1}{2} \int_0^{m_{si}} (\bar{\mathbf{v}}_i + \bar{\mathbf{v}}_{si})^2 dm = \frac{1}{2} \left[\text{Trace} \left(\frac{d\mathbf{T}_i}{dt} \mathbf{T}_{si} \mathbf{J}_{si} \mathbf{T}_{si}^T \frac{d\mathbf{T}_i^T}{dt} \right) + 2 \text{Trace} \left(\frac{d\mathbf{T}_i}{dt} \mathbf{T}_{si} \mathbf{J}_{si} \frac{d\mathbf{T}_{si}^T}{dt} \mathbf{T}_i^T \right) + \text{Trace} \left(\frac{d\mathbf{T}_{si}}{dt} \mathbf{J}_{si} \frac{d\mathbf{T}_{si}^T}{dt} \right) \right], \quad (2.45)$$

gdzie:

$\bar{\mathbf{v}}_{si}$ - prędkość punktów materialnych części wirujących względem układu $x_{si}y_{si}z_{si}$,
 \mathbf{J}_{si} - macierz pseudobezwładności części wirujących obliczona w układzie $x_{si}y_{si}z_{si}$,
 m_{si} - masa części wirujących.

Gdy siłownik i -ty jest zamocowany poza osią przegubu pary i -tej i jego korpus jest ruchomy względem członów, musimy uwzględnić energię korpusu. W takim przypadku

$$E_{ksi} = \frac{1}{2} \left[\text{Trace} \left(\frac{d\mathbf{T}_i}{dt} \mathbf{T}_{iN_i} \mathbf{J}_{iN_i} \mathbf{T}_{iN_i}^T \frac{d\mathbf{T}_i^T}{dt} \right) + 2 \text{Trace} \left(\frac{d\mathbf{T}_i}{dt} \mathbf{T}_{iN_i} \mathbf{J}_{iN_i} \frac{d\mathbf{T}_{iN_i}^T}{dt} \mathbf{T}_i^T \right) + \text{Trace} \left(\frac{d\mathbf{T}_{iN_i}}{dt} \mathbf{J}_{iN_i} \frac{d\mathbf{T}_{iN_i}^T}{dt} \right) \right] + E_{kvisi}, \quad (2.46)$$

gdzie:

\mathbf{J}_{iN_i} - macierz pseudobezwładności korpusu obliczona w układzie $x_{iN_i}y_{iN_i}z_{iN_i}$,
 m_{iN_i} - masa korpusu.

Całkowita energia kinetyczna MRP E_k jest sumą energii kinetycznych członów, zespołów elementów przekazujących napędy i siłowników. Z formuł (2.36), (2.39), (2.43), (2.45) i (2.46) wynika

$$E_k = \sum_{i=1}^N E_{ki} = \sum_{i=1}^N (E_{kci} + E_{kvisi} + E_{ksi}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left\{ \text{Trace} \left(\frac{d\mathbf{T}_i}{dt} \mathbf{J}_i \frac{d\mathbf{T}_i^T}{dt} \right) + \sum_{j=1}^{N_i} \left[\text{Trace} \left(\frac{d\mathbf{T}_i}{dt} \mathbf{T}_{ij} \mathbf{J}_{ij} \mathbf{T}_{ij}^T \frac{d\mathbf{T}_i^T}{dt} \right) + 2 \text{Trace} \left(\frac{d\mathbf{T}_i}{dt} \mathbf{T}_{ij} \mathbf{J}_{ij} \frac{d\mathbf{T}_{ij}^T}{dt} \mathbf{T}_i^T \right) \right] \right\}$$

$$+ \text{Trace} \left(\frac{d\mathbf{T}_{ij}}{dt} \mathbf{J}_{ij} \frac{d\mathbf{T}_{ij}^T}{dt} \right) + \text{Trace} \left(\frac{d\mathbf{T}_i}{dt} \mathbf{T}_{si} \mathbf{J}_{si} \mathbf{T}_{si}^T \frac{d\mathbf{T}_i^T}{dt} \right) + 2 \text{Trace} \left(\frac{d\mathbf{T}_i}{dt} \mathbf{T}_{si} \mathbf{J}_{si} \frac{d\mathbf{T}_{si}^T}{dt} \mathbf{T}_i^T \right) + \text{Trace} \left(\frac{d\mathbf{T}_{si}}{dt} \mathbf{J}_{si} \frac{d\mathbf{T}_{si}^T}{dt} \right) \}. \quad (2.47)$$

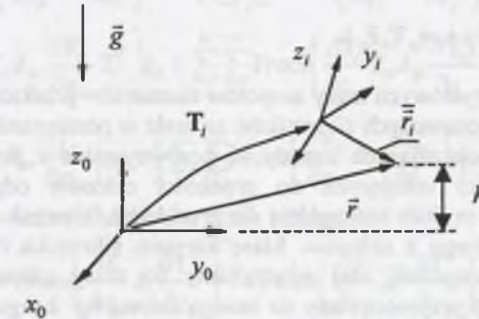
Jeśli siłownik członu k -tego jest zamocowany w osi przegubu pary k -tej, to $N_k = 0$ i pomijamy sumę po j dla $i = k$ w formule (2.47).

Energia potencjalna

Energia potencjalna MRP jest równa sumie energii potencjalnych E_{pi} związanych z poszczególnymi członami. Energia E_{pi} jest sumą energii potencjalnej E_{pci} członu i -tego wraz elementami przymocowanymi do niego, energii potencjalnej E_{pcsi} zespołu elementów przekazujących napęd oraz energii potencjalnej E_{psi} siłownika.

$$E_{pi} = E_{pci} + E_{pcsi} + E_{psi}. \quad (2.48)$$

Poszczególne energie obliczamy z takim samym przyporządkowaniem mas korpusów siłowników i części wirujących przekładni, jak przy obliczaniu energii kinetycznej.



Rys. 2.14. Ilustracja opisu środka ciężkości członu i -tego
Fig. 2.14. Illustration of gravity center of i -th link

Energię potencjalną członu i -tego w układzie bazowym można przedstawić następująco:

$$E_{pci} = m_i g h = -m_i \bar{\mathbf{g}} \cdot \bar{\mathbf{r}} = -m_i \bar{\mathbf{g}}^T \mathbf{T}_i \bar{\mathbf{r}}_i, \quad (2.49)$$

gdzie:

$\bar{\mathbf{r}}_i$ - postać jednorodna wektora $\bar{\mathbf{r}}_i$ opisującego środek ciężkości członu i -tego w układzie $x_iy_iz_i$ jak na rys. 2.14,

\mathbf{g} - postać jednorodna przyspieszenia grawitacji $\mathbf{g} = [g_x \ g_y \ g_z \ 0]^T$ w układzie bazowym.

Formuły opisujące energie E_{pcsi} i E_{psi} mają postacie podobne do formuły (2.49).

Całkowita energia potencjalna MRP ma postać

$$E_p = \sum_{i=1}^N E_{pi} = \sum_{i=1}^N (E_{pci} + E_{pcsi} + E_{psi}) = -\mathbf{g}^T \sum_{i=1}^N \mathbf{T}_i (m_i \bar{\mathbf{r}}_i + \sum_{j=1}^{N_j} m_{ij} \mathbf{T}_{ij} \bar{\mathbf{r}}_{ij} + m_{si} \mathbf{T}_{si} \bar{\mathbf{r}}_{si}). \quad (2.50)$$

Gdy siłownik członu k -tego jest zamocowany w osi przegubu pary k -tej, wtedy $N_k = 0$ i pomijamy sumę po j dla $i = k$ w formule (2.50).

Potencjał kinetyczny Lagrange'a L

Potencjał kinetyczny Lagrange'a L przedstawia formuła

$$L = E_k - E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left\{ \text{Trace} \left(\frac{d\mathbf{T}_i}{dt} \mathbf{J}_i \frac{d\mathbf{T}_i^T}{dt} \right) + \sum_{j=1}^{N_j} \left[\text{Trace} \left(\frac{d\mathbf{T}_i}{dt} \mathbf{T}_{ij} \mathbf{J}_{ij} \mathbf{T}_{ij}^T \frac{d\mathbf{T}_i^T}{dt} \right) + 2 \text{Trace} \left(\frac{d\mathbf{T}_i}{dt} \mathbf{T}_{ij} \mathbf{J}_{ij} \frac{d\mathbf{T}_i^T}{dt} \mathbf{T}_{ij}^T \right) + \text{Trace} \left(\frac{d\mathbf{T}_{ij}}{dt} \mathbf{J}_{ij} \frac{d\mathbf{T}_{ij}^T}{dt} \right) \right] + \text{Trace} \left(\frac{d\mathbf{T}_i}{dt} \mathbf{T}_{si} \mathbf{J}_{si} \mathbf{T}_{si}^T \frac{d\mathbf{T}_i^T}{dt} \right) + 2 \text{Trace} \left(\frac{d\mathbf{T}_i}{dt} \mathbf{T}_{si} \mathbf{J}_{si} \frac{d\mathbf{T}_i^T}{dt} \mathbf{T}_{si}^T \right) + \text{Trace} \left(\frac{d\mathbf{T}_{si}}{dt} \mathbf{J}_{si} \frac{d\mathbf{T}_{si}^T}{dt} \right) \right\} + \mathbf{g}^T \sum_{i=1}^N \mathbf{T}_i (m_i \bar{\mathbf{r}}_i + \sum_{j=1}^{N_j} m_{ij} \mathbf{T}_{ij} \bar{\mathbf{r}}_{ij} + m_{si} \mathbf{T}_{si} \bar{\mathbf{r}}_{si}).$$

Na ogół w robotach przemysłowych masy zespołów elementów przekazujących napędy wraz z masami elementów wykonawczych siłowników są małe w porównaniu z masami członów. Prędkości elementów przekazujących napędy są porównywalne z prędkościami członów. Stosunek prędkości części wirujących do prędkości członów odpowiada przełożeniu przekładni. Przełożenia te są duże szczególnie dla przekładni falowych. Korpusy siłowników są przymocowane do jednego z członów. Masę korpusu siłownika i -tego zamocowanego w przegubie pary kinematycznej i -tej włączyliśmy do masy członu i -tego. Korpus siłownika i -tego może być przymocowany do innego członu np. k -tego ($k \neq i$). Wtedy jego masę włączamy do masy członu k -tego.

Z powyższego wynika, że możemy uprościć dalsze rozważania przez pominięcie energii zespołów elementów przekazujących napędy, energii korpusów i składników energii kinetycznej elementów wykonawczych siłowników nie zawierających pochodnych $d\mathbf{T}_{si}/dt$. Po tych uproszczeniach otrzymamy:

$$L = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} \text{Trace} \left(\frac{d\mathbf{T}_i}{dt} \mathbf{J}_i \frac{d\mathbf{T}_i^T}{dt} \right) + \text{Trace} \left(\frac{d\mathbf{T}_i}{dt} \mathbf{T}_{si} \mathbf{J}_{si} \frac{d\mathbf{T}_i^T}{dt} \mathbf{T}_{si}^T \right) + \frac{1}{2} \text{Trace} \left(\frac{d\mathbf{T}_{si}}{dt} \mathbf{J}_{si} \frac{d\mathbf{T}_{si}^T}{dt} \right) + m_i \mathbf{g}^T \mathbf{T}_i \bar{\mathbf{r}}_i \right]. \quad (2.51)$$

Przed wyznaczeniem równań sił uogólnionych przedstawimy formuły różniczkowania po czasie macierzy przekształceń. I tak:

$$\frac{d\mathbf{T}_i}{dt} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^i \frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j, \quad (2.52)$$

$$\frac{d\mathbf{T}_{si}}{dt} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathbf{T}_{si}}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (2.53)$$

Macierz \mathbf{T}_i zależy od współrzędnych naturalnych członów $q_1 \div q_i$, gdyż jest iloczynem macierzy $\mathbf{A}_1 \div \mathbf{A}_i$, opisujących położenie i orientację członów. Macierz \mathbf{A}_k jest zależna tylko od współrzędnej q_k . Po uwzględnieniu formuł (2.52) i (2.53) otrzymamy:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_j} \mathbf{J}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_j} \mathbf{T}_{si} \mathbf{J}_{si} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k} \mathbf{T}_i^T \right) \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_{si}}{\partial q_j} \mathbf{J}_{si} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{g}^T \mathbf{T}_i \bar{\mathbf{r}}_i. \quad (2.54)$$

Uogólnione siły członów i siłowników

Wyprowadzimy formuły na siły uogólnione członów i siłowników z potencjału kinetycznego L opisanego formułą (2.54).

Pochodne $\partial L / \partial \dot{q}_p$ mają postać

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p} \mathbf{J}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_j} \mathbf{J}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_p} \right) \dot{q}_j + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p} \mathbf{T}_{si} \mathbf{J}_{si} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k} \mathbf{T}_i^T \right) \dot{q}_k + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_j} \mathbf{T}_{si} \mathbf{J}_{si} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_p} \mathbf{T}_i^T \right) \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_{si}}{\partial q_p} \mathbf{J}_{si} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_{si}}{\partial q_j} \mathbf{J}_{si} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_p} \right) \dot{q}_j.$$

Macierze pseudobezwładności są symetryczne i dlatego

$$\text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_j} \mathbf{J}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_p} \right) = \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_j} \mathbf{J}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_p} \right)^T = \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p} \mathbf{J}_i^T \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_j} \right) = \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p} \mathbf{J}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_j} \right).$$

Po zamianie j na k otrzymamy

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p} \mathbf{J}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p} \mathbf{T}_{si} \mathbf{J}_{si} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k} \mathbf{T}_i^T \right) \dot{q}_k + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k} \mathbf{T}_{si} \mathbf{J}_{si} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_p} \mathbf{T}_i^T \right) \dot{q}_k + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_{si}}{\partial q_p} \mathbf{J}_{si} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k.$$

Pochodne $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} \right)$ mają postać

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p} \mathbf{J}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_k} \right) \ddot{q}_k + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p} \mathbf{T}_{si} \mathbf{J}_{si} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k} \mathbf{T}_i^T \right) \ddot{q}_k + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k} \mathbf{T}_{si} \mathbf{J}_{si} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_p} \mathbf{T}_i^T \right) \ddot{q}_k + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_{si}}{\partial q_p} \mathbf{J}_{si} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k} \right) \ddot{q}_k.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_i}{\partial q_j \partial q_k} \mathbf{J}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_p} \right) \dot{q}_k \dot{q}_j + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \left\{ \text{Trace} \left[\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p} \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\mathbf{T}_{si} \mathbf{J}_{si} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k} \mathbf{T}_i^T \right) \right] \right. \\
& - \text{Trace} \left[\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial q_p} \left(\mathbf{T}_{si} \mathbf{J}_{si} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_j} \mathbf{T}_i^T \right) \right] + \frac{\partial}{\partial q_j} \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k} \mathbf{T}_{si} \mathbf{J}_{si} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_p} \mathbf{T}_i^T \right) \Big\} \dot{q}_k \dot{q}_j \\
& + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_{si}}{\partial q_j \partial q_k} \mathbf{J}_{si} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_p} \right) \dot{q}_k \dot{q}_j - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p} \bar{\mathbf{r}}_i.
\end{aligned}$$

Uogólnione siły możemy przedstawić w następującej postaci:

$$F_p = \sum_{k=1}^N D_{pk} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N D_{pkj} \dot{q}_k \dot{q}_j + D_p,$$

gdzie

$$\begin{aligned}
D_{pk} &= \sum_{i=1}^N \left[\text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p} \mathbf{J}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_k} \right) + \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p} \mathbf{T}_{si} \mathbf{J}_{si} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k} \mathbf{T}_i^T \right) + \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k} \mathbf{T}_{si} \mathbf{J}_{si} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_p} \mathbf{T}_i^T \right) \right. \\
& \left. + \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_{si}}{\partial q_p} \mathbf{J}_{si} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k} \right) \right].
\end{aligned}$$

$$D_p = - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p} \bar{\mathbf{r}}_i.$$

$$\begin{aligned}
D_{pkj} &= \sum_{i=1}^N \left[\text{Trace} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_i}{\partial q_j \partial q_k} \mathbf{J}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_p} \right) + \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}}{\partial q_j} \mathbf{J}_{si} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k} \mathbf{T}_i^T \right) \right. \\
& + \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p} \mathbf{T}_{si} \mathbf{J}_{si} \frac{\partial^2 \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_j \partial q_k} \mathbf{T}_i^T \right) + \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p} \mathbf{T}_{si} \mathbf{J}_{si} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_k} \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_j} \right) \\
& - \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}}{\partial q_p} \mathbf{J}_{si} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_j} \mathbf{T}_i^T \right) - \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k} \mathbf{T}_{si} \mathbf{J}_{si} \frac{\partial^2 \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_j \partial q_p} \mathbf{T}_i^T \right) \\
& - \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k} \mathbf{T}_{si} \mathbf{J}_{si} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_p} \right) + \text{Trace} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_i}{\partial q_k \partial q_j} \mathbf{T}_{si} \mathbf{J}_{si} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_p} \mathbf{T}_i^T \right) \\
& + \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}}{\partial q_j} \mathbf{J}_{si} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_p} \mathbf{T}_i^T \right) + \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k} \mathbf{T}_{si} \mathbf{J}_{si} \frac{\partial^2 \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_j \partial q_p} \mathbf{T}_i^T \right) \\
& + \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k} \mathbf{T}_{si} \mathbf{J}_{si} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_p} \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_j} \right) + \text{Trace} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_{si}}{\partial q_j \partial q_k} \mathbf{J}_{si} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_p} \right) \Big].
\end{aligned}$$

Po redukcji wyrażen identycznych z przeciwnymi znakami oraz zamianie p na i , k na j , j na k , i na p i uwzględnieniu $\partial \mathbf{T}_i / \partial q_j = 0$ dla $i < j$ otrzymamy

$$F_i = \sum_{j=1}^N D_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N D_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k + D_i \quad (2.55)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
D_{ij} &= \sum_{p=\max(i,j)}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_i} \mathbf{J}_p \frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_j} \right) + \sum_{p=i}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_i} \mathbf{T}_{sp} \mathbf{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_j} \mathbf{T}_p^T \right) \\
& + \sum_{p=j}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j} \mathbf{T}_{sp} \mathbf{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_i} \mathbf{T}_p^T \right) + \sum_{p=i}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_i} \mathbf{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_j} \right), \\
D_i &= - \sum_{p=i}^N m_p \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_i} \bar{\mathbf{r}}_p,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{ijk} &= \sum_{p=\max(i,j,k)}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_p}{\partial q_j \partial q_k} \mathbf{J}_p \frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_i} \right) + \sum_{p=i}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_k} \mathbf{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_j} \mathbf{T}_p^T \right) \\
& + \sum_{p=i}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_i} \mathbf{T}_{sp} \mathbf{J}_{sp} \frac{\partial^2 \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_j \partial q_k} \mathbf{T}_p^T \right) + \sum_{p=\max(i,k)}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_i} \mathbf{T}_{sp} \mathbf{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_k} \right) \\
& - \sum_{p=j}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_i} \mathbf{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_k} \mathbf{T}_p^T \right) - \sum_{p=\max(i,j)}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j} \mathbf{T}_{sp} \mathbf{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_k} \frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_i} \right) \\
& + \sum_{p=\max(j,k)}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_p}{\partial q_j \partial q_k} \mathbf{T}_{sp} \mathbf{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_i} \mathbf{T}_p^T \right) + \sum_{p=j}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_k} \mathbf{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_i} \mathbf{T}_p^T \right) \\
& + \sum_{p=\max(j,k)}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j} \mathbf{T}_{sp} \mathbf{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_k} \right) + \sum_{p=i}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_j \partial q_k} \mathbf{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_i} \right).
\end{aligned}$$

Na ogół masy elementów wykonawczych siłowników z przymocowanymi do nich częściami przekładni są małe w porównaniu z masami członów. Dlatego elementy macierzy pseudobezwładności elementów wykonawczych siłowników \mathbf{J}_{sp} są małe w porównaniu z macierzami pseudobezwładności członów \mathbf{J}_p . Z dużej wartości przełożeń wynikają duże wartości pochodnych $\partial \mathbf{T}_{sp} / \partial q_j$. Dlatego w powyższych wyrażeniach pominiemy wyrazy z \mathbf{J}_{sp} , które nie zawierają dwóch pochodnych $\partial \mathbf{T}_{sp} / \partial q_j$. Po tych uproszczeniach otrzymamy następujące postacie współczynników:

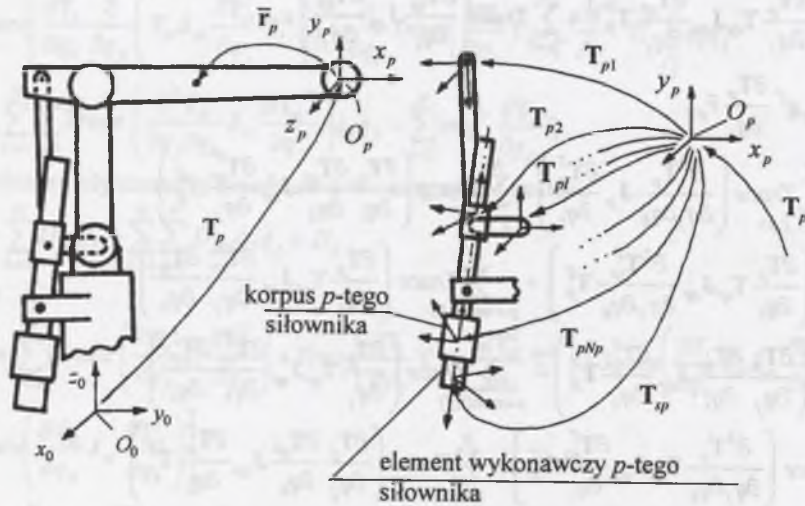
$$D_{ij} = \sum_{p=\max(i,j)}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_i} \mathbf{J}_p \frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_j} \right) + \sum_{p=i}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_i} \mathbf{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_j} \right), \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned}
D_{ijk} &= \sum_{p=\max(i,j,k)}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_p}{\partial q_j \partial q_k} \mathbf{J}_p \frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_i} \right) + \sum_{p=i}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_k} \mathbf{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_j} \mathbf{T}_p^T \right) \\
& + \sum_{p=j}^N \left[\text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_k} \mathbf{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_i} \mathbf{T}_p^T \right) - \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_i} \mathbf{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_k} \mathbf{T}_p^T \right) \right], \quad (2.57)
\end{aligned}$$

$$D_i = - \sum_{p=i}^N m_p \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_i} \bar{\mathbf{r}}_p. \quad (2.58)$$

W formułach (2.55)÷(2.58) występują współczynniki D_{ij} oddziaływania sił bezwładności pochodzących od przyspieszenia \ddot{q}_j na człon i -ty, współczynniki D_{ijk} oddziaływania siły Coriolisa wynikającej z ruchu względnego członów j -tego i k -tego na człon i -ty dla $j \neq k$ lub współczynniki oddziaływania siły dośrodkowej członu j -tego na człon i -ty dla $j=k$ oraz

współczynniki D_i , oddziaływania sił grawitacji na człon i -ty. Układ współrzędnych $x_p y_p z_p$ skojarzony z członem p -tym oraz zespół napędowy tego członu przedstawia rys. 2.15.



Rys. 2.15. Zespół napędowy członu p -tego MRP
Fig. 2.15. Drive unit of IRM p -th link

Formuły (2.56÷2.58) upraszczają się dla siłowników zamocowanych w parach kinematycznych tak, że $\partial \mathbf{T}_{sp} / \partial q_k = (\partial \mathbf{T}_{sp} / \partial q_k) \delta_{pk}$. Wtedy

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{p=1}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_k} \mathbf{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_i} \mathbf{T}_p^T \right) &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{p=1}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_k} \delta_{pk} \mathbf{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_i} \delta_{pi} \mathbf{T}_p^T \right) \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_k}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{T}_{sk}}{\partial q_k} \mathbf{J}_{sk} \frac{\partial \mathbf{T}_{sk}^T}{\partial q_i} \delta_{ki} \mathbf{T}_k^T \right) = \sum_{j=1}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}}{\partial q_i} \mathbf{J}_{si} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_i} \mathbf{T}_i^T \right). \\ \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{p=1}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_i} \mathbf{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_k} \mathbf{T}_p^T \right) &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{p=1}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_i} \delta_{pi} \mathbf{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_k} \delta_{pk} \mathbf{T}_p^T \right) \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_k}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{T}_{sk}}{\partial q_i} \delta_{ki} \mathbf{J}_{sk} \frac{\partial \mathbf{T}_{sk}^T}{\partial q_k} \mathbf{T}_k^T \right) = \sum_{j=1}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}}{\partial q_i} \mathbf{J}_{si} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_i} \mathbf{T}_i^T \right). \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu powyższych związków otrzymujemy następujące formuły na współczynniki dynamiki D_{ij} i D_{ijk} :

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \sum_{p=\max(i,j)}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_i} \mathbf{J}_p \frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_j} \right) + \delta_{ij} \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_{si}}{\partial q_i} \mathbf{J}_{si} \frac{\partial \mathbf{T}_{si}^T}{\partial q_i} \right), \\ D_{ijk} &= \sum_{p=\max(i,j,k)}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_p}{\partial q_j \partial q_k} \mathbf{J}_p \frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_i} \right) \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$+ \delta_{jk} \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{T}_{sj}}{\partial q_j} \mathbf{J}_{sj} \frac{\partial \mathbf{T}_{sj}^T}{\partial q_j} \mathbf{T}_j^T \right), \quad (2.60)$$

gdzie:

δ_{ij}, δ_{jk} - symbole Kroneckera.

Współczynniki D_i nadal opisuje formuła (2.58). Drugi składnik sumy w formule (2.59), mnożony przez δ_{ij} , jest stały dla danego siłownika i niezależny od współrzędnych naturalnych [41,56,57,64].

Dla napędu bezpośredniego członu i -tego macierz pseudobezwładności \mathbf{J}_{si} jest równa zeru, gdyż w takim przypadku elementem wykonawczym siłownika i -tego jest napędzany człon. Parametry masowe tego członu uwzględnia jego macierz pseudobezwładności \mathbf{J}_i .

Uogólnionym siłom członów F_j odpowiadają uogólnione niepotencjalne siły siłowników F_{si} , które opisuje formuła (2.61).

$$\begin{aligned} F_{si} &= \sum_{j=1}^N F_j \frac{\partial q_j}{\partial q_{si}} = \sum_{j=1}^N D_{sij} \ddot{q}_{sj} + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N D_{sjk} \dot{q}_{sj} \dot{q}_{sk} + D_{si}, \\ D_{sij} &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N D_{kl} \frac{\partial q_k}{\partial q_{si}} \frac{\partial q_l}{\partial q_j}, \quad D_{sijk} = \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N D_{lmn} \frac{\partial q_l}{\partial q_{si}} \frac{\partial q_m}{\partial q_{sj}} \frac{\partial q_n}{\partial q_{sk}}, \quad D_{si} = \sum_{l=1}^N D_l \frac{\partial q_l}{\partial q_{si}}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

gdzie:

q_{si} - współrzędna naturalna siłownika i -tego, opisująca układ współrzędnych $x_{si} y_{si} z_{si}$ (związany z elementem wykonawczym siłownika i -tego) względem układu współrzędnych $x_{Ni} y_{Ni} z_{Ni}$ (skojarzonego z korpusem siłownika i -tego).

Dla siłowników zamocowanych tak, że $\partial q_j / \partial q_{si} = (\partial q_j / \partial q_{si}) \delta_{ij} = \partial q_i / \partial q_{si}$

$$F_{si} = F_i \frac{\partial q_i}{\partial q_{si}}. \quad (2.62)$$

Pochodne $\partial q_{si} / \partial q_j$ odpowiadają przełożeniom przekładni, które mają duże wartości. Z formuły (2.61) wynika, że siły F_{si} są odwrotnie proporcjonalne do $\partial q_{si} / \partial q_j$ i wprost proporcjonalne do sił F_j . W formule (2.55) opisującej F_j występują wyrazy z \mathbf{J}_i - reprezentujące siły bezwładności wynikające z ruchu członów oraz wyrazy z \mathbf{J}_{si} - reprezentujące siły bezwładności wynikające z ruchu elementów wykonawczych siłowników. Wyrazy z \mathbf{J}_{si} zawierają pochodne $\partial \mathbf{T}_{si} / \partial q_j$ proporcjonalne do przełożeń przekładni. Zatem przy wzrastającym przełożeniu oddziaływanie sił bezwładności od ruchu członów i grawitacji na siłę F_{si} maleje. Przy dużych wartościach przełożeń przekładni oddziaływanie sił od ruchu elementów wykonawczych siłowników na siłę F_{si} może być niezależne od przełożenia (dla wyrazów z \mathbf{J}_{si} , które mają tylko jeden czynnik z pochodną $\partial \mathbf{T}_{si} / \partial q_j$) bądź dominujące (dla wyrazów z \mathbf{J}_{si} , które mają dwa czynniki z pochodną $\partial \mathbf{T}_{si} / \partial q_j$).

Duże wartości przełożeń przekładni minimalizują wpływ sił bezwładności ruchu członów wraz z obiektem manipulacji na obciążenie siłowników. Przy dużych wartościach przełożeń dominujące znaczenie we współczynnikach D_{ij} i D_{ijk} mają wyrazy z \mathbf{J}_{si} [56,57,59].

W pracy [41] we współczynnikach D_{ijk} nie występują wyrazy z \mathbf{J}_{si} . W tej samej pracy na str.180 w tablicach 6.5 i 6.6 przytoczono momenty bezwładności dla manipulatora

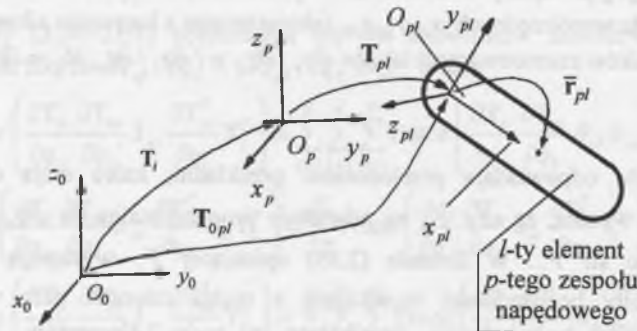
Stanford. Z tabeli 6.6 wynika, że w większości stopni swobody momenty bezwładności elementów wykonawczych siłowników są o rząd większe od zredukowanych momentów bezwładności członów. Zredukowanym momentem bezwładności członu nazywamy moment bezwładności członu, przeliczony przed przekładnią redukującą obroty siłownika. Momenty bezwładności członów opisują wyrazy z macierzami pseudobezwładności J_i , a momenty bezwładności elementów wykonawczych siłowników wyrazy z macierzami pseudobezwładności J_{si} . Dla czwartego stopnia swobody manipulatora Stanford moment bezwładności elementu wykonawczego siłownika jest nawet 100 razy większy niż zredukowany moment bezwładności członu. Zatem pominięcie we współczynnikach D_{ijk} wyrazów z J_{si} jest błędem. Te same błędy popełniono w pracy [42].

Z prac [57,59,65] wynika, że wyrazy z J_{si} mogą stanowić 97% efektywnych momentów bezwładności siłowników MRP IRb-6. Efektywnym momentem bezwładności siłownika jest suma zredukowanego momentu bezwładności członu i momentu bezwładności siłownika.

Dla napędu bezpośredniego członu i -tego $\partial q_i / \partial q_{sj} = \delta_{ij}$, a dla $i=j$ $F_{si} = F_i$ (wynika to z formuły (2.62)).

Oddziaływanie zespołów przekazujących napęd

Jeśli uwzględnimy oddziaływanie elementów zespołu przekazującego napęd, to współczynniki D_{ij} , D_{ijk} , D_i muszą być uzupełnione następującymi poprawkami:



Rys. 2.16. Opis elementu l -tego zespołu napędowego członu p -tego
Fig. 2.16. Description of the l -th element of the p -th link drive unit

$$\Delta D_{ij} = \sum_{p=1}^N \sum_{l=1}^{N_p} \text{Trace} \left(\frac{\partial T_{0pl}}{\partial q_i} J_{pl} \frac{\partial T_{0pl}^T}{\partial q_j} \right), \quad (2.63a)$$

$$\Delta D_{ijk} = \sum_{p=1}^N \sum_{l=1}^{N_p} \text{Trace} \left(\frac{\partial^2 T_{0pl}}{\partial q_j \partial q_k} J_{pl} \frac{\partial T_{0pl}^T}{\partial q_i} \right), \quad (2.63b)$$

$$\Delta D_i = - \sum_{p=1}^N \sum_{l=1}^{N_p} g^T \frac{\partial T_{0pl}}{\partial q_i} m_{pl} \bar{r}_{ple}, \quad (2.63c)$$

gdzie:

T_{0pl} - macierz opisująca układ współrzędnych skojarzony z elementem l -tym zespołu przekazującego napęd na człon p -ty względem układu współrzędnych bazowego,

J_{pl} - macierz pseudobezwładności tego elementu,

\bar{r}_{ple} - postać jednorodna wektora opisującego środek ciężkości tego elementu względem układu współrzędnych $x_{pl}y_{pl}z_{pl}$ skojarzonego z tym elementem,

m_{pl} - masa tego elementu (patrz rys. 2.16).

Oddziaływanie obiektu manipulacji

Uchwycenie obiektu manipulacji przez chwytak powoduje zmiany współczynników równań dynamiki (2.55). Powoduje zmianę macierzy pseudobezwładności członu roboczego o ΔJ_N i zmiany współczynników równań sił.

$$\Delta D_{ij} = \text{Trace} \left(\frac{\partial T_N}{\partial q_i} \Delta J_N \frac{\partial T_N^T}{\partial q_j} \right), \quad (2.64a)$$

$$\Delta D_{ijk} = \text{Trace} \left(\frac{\partial^2 T_N}{\partial q_j \partial q_k} \Delta J_N \frac{\partial T_N^T}{\partial q_i} \right), \quad (2.64b)$$

$$\Delta D_i = -m_p g^T \frac{\partial T_N}{\partial q_i} \bar{r}_p, \quad (2.64c)$$

gdzie:

m_p - masa obiektu manipulacji,

\bar{r}_p - postać jednorodna wektora opisującego środek ciężkości względem układu współrzędnych $x_N y_N z_N$.

Oddziaływanie otoczenia

Jeśli elementem wykonawczym jest np. śrubokręt, tarcza szlifierska lub inne narzędzie przymocowane do członu roboczego MRP, to w czasie wkręcania, szlifowania, itp. otoczenie oddziałuje na element wykonawczy. Oddziaływanie otoczenia jest równoważone przez przeciwnie skierowane siły i momenty oddziaływania elementu wykonawczego na otoczenie.

Oddziaływanie elementu wykonawczego opiszemy za pomocą macierzy ${}^N F_{od}$

$${}^N F_{od} = \begin{bmatrix} {}^N F_x \\ {}^N F_y \\ {}^N F_z \\ {}^N M_x \\ {}^N M_y \\ {}^N M_z \end{bmatrix}, \quad (2.65)$$

gdzie:

${}^N F_x \div {}^N F_z$ - siły oddziaływania elementu wykonawczego na otoczenie, opisane w układzie współrzędnych $x_N y_N z_N$,

${}^N M_x \div {}^N M_z$ - momenty oddziaływania elementu wykonawczego na otoczenie, opisane w układzie współrzędnych $x_N y_N z_N$.

Oddziaływaniu temu odpowiadają przyrosty sił reakcji ΔF_i na człony i przyrosty sił reakcji ΔF_{si} na siłowniki. Przyrosty te możemy wyznaczyć z następujących formuł [10,37,41,107]:

$$\Delta \mathbf{F} = {}^N \mathbf{J}_N^T {}^N \mathbf{F}_{od}, \quad (2.66)$$

gdzie:

$$\Delta \mathbf{F} = [\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3, \dots, \Delta F_N]^T,$$

${}^N \mathbf{J}_N^T$ - transponowana macierz Jacobiego członu roboczego w układzie współrzędnych $x_N y_N z_N$ (patrz formuła (2.25)).

$$\Delta F_{si} = \sum_{j=1}^N \Delta F_j \frac{\partial q_j}{\partial q_{si}}. \quad (2.67)$$

Oddziaływanie tarcia

W dotychczasowych rozważaniach pominęliśmy tarcie. Opis analityczny energii rozproszonej w wyniku tarcia jest trudny. Oddziaływanie sił tarcia sprowadzimy na elementy wykonawcze siłowników MRP. Wypadkowa siła napędowa siłownika i -tego F_{siw} jest różnicą siły napędowej F_{sin} wytwarzanej przez niego i siły tarcia. Siły tarcia pochodzą od tarcia suchego i lepkiego. Zatem

$$F_{siw} = \begin{cases} 0 & \text{dla } \dot{q}_{si} = 0 \text{ i } |F_{sin}| \leq F_{sits}, \\ F_{sin} - F_{sits} \operatorname{sgn}(F_{sin}) & \text{dla } \dot{q}_{si} = 0 \text{ i } |F_{sin}| > F_{sits}, \\ F_{sin} - F_{sitr} \operatorname{sgn}(\dot{q}_{si}) - k_{vsi} \dot{q}_{si} & \text{dla } \dot{q}_{si} \neq 0. \end{cases} \quad (2.68a)$$

Formuła (2.68a) stanowi przybliżony opis sił tarcia od strony siłownika [57,64,107]. F_{sits} i F_{sitr} są odpowiednio tarcie suchym startowym i tarcie suchym ruchowym siłownika i -tego. k_{vsi} jest współczynnikiem tarcia lepkiego siłownika. Parametry te można oszacować eksperymentalnie [28,41,57]. W przypadku gdy $\dot{q}_{si} = 0$, początek ruchu ($\dot{q}_{si} \neq 0$) zależy od relacji między wartościami siły napędowej F_{sin} i siły tarcia startowego F_{sits} . Straty energii spowodowane tarcie lepkiem występują przede wszystkim przy współpracy elementów poruszających się z dużymi prędkościami, np. w przekładniach falowych.

Z formuły (2.68a) wynika następująca formuła dla sił napędowych siłowników:

$$F_{sin} = \begin{cases} F_{siw} + F_{sit} \operatorname{sgn}(F_{siw}) & \text{dla } \dot{q}_{si} = 0 \text{ i } |F_{siw}| \leq F_{sits}, |F_{sit}| \leq F_{sits}, \\ F_{siw} + F_{sits} \operatorname{sgn}(F_{siw}) & \text{dla } \dot{q}_{si} = 0 \text{ i } |F_{siw}| > F_{sits}, \\ F_{siw} + F_{sitr} \operatorname{sgn}(\dot{q}_{si}) + k_{vsi} \dot{q}_{si} & \text{dla } \dot{q}_{si} \neq 0. \end{cases} \quad (2.68b)$$

Oddziaływanie ruchu podstawy

W dotychczasowych rozważaniach przyjmowaliśmy milcząco, że układ bazowy $x_0 y_0 z_0$ skojarzony z podstawą MRP jest nieruchomy, a ściślej, inercjalny lub galileuszowy [16,50]. Tylko w takim układzie współrzędnych słuszne są powyższe formuły opisujące potencjał kinetyczny L . Dla MRP z ruchomą podstawą dynamikę jego musimy opisać

względem innego inercjalnego (lub galileuszowego) układu odniesienia. Jeśli układ bazowy można opisać względem inercjalnego układu odniesienia za pomocą jednej współrzędnej q_0 , to tworzymy dodatkową macierz $\mathbf{T}_0 = \mathbf{A}_0$, wyznaczamy $\mathbf{T}_{,0}$ i $\mathbf{J}_{,0}$ siłownika napędzającego podstawę, modyfikujemy macierze \mathbf{T}_{0il} w formułach (2.63a÷2.63c) i możemy stosować dotychczasowe formuły. Oczywiście, wskaźniki sumowania będą zmieniać się od zera, a nie od jedynki.

2.2.2. Równania Newtona-Eulera

Równania dynamiki MRP przedstawione w podrozdziale 2.2.1 umożliwiają obliczanie tylko sił napędowych członów i siłowników. W równaniach tych nie pojawiają się siły i momenty reakcji inne niż uogólnione siły F_j i F_{si} oraz siły napędowe F_{sin} . Analiza naprężeń i odkształceń MRP wymaga znajomości sił i momentów reakcji każdego elementu składowego MRP na inne elementy. Równania Newtona pozwalają wyznaczyć siły i momenty reakcji każdego elementu składowego MRP.

Stosując zasady pędu i krętu mechaniki klasycznej [16,50], wyznaczmy w tym podrozdziale siły i momenty reakcji na dowolny element składowy MRP. Wyznaczmy tu także równania wiążące te wielkości ze współrzędnymi naturalnymi oraz z ich prędkościami i przyspieszeniami.

Równaniami tymi należy opisać wszystkie elementy składowe MRP, tzn. elementy wykonawcze siłowników, człony i elementy zespołów przekazujących napędy. Sposób tworzenia tych równań pokażemy na przykładzie członu i -tego.

Poniżej omówiono oddziaływanie członów, siłowników, zespołów przekazujących napędy, obiektu manipulacji, otoczenia, tarcia oraz ruchu podstawy.

Oddziaływanie członów, siłowników i zespołów przekazujących napędy

Przyjmujemy, że układ bazowy jest inercjalny. Ruch członu i -tego opisują wektor jego prędkości kątowej $\bar{\omega}_{0i}$ oraz wektor prędkości postępowej \bar{v}_{0i} początku układu współrzędnych $x_i y_i z_i$, związanego z tym członem. Wektory te wyrazimy w układzie współrzędnych $x_i y_i z_i$ za pomocą macierzy [10,107]:

$$\mathbf{v}_{0i} = \begin{bmatrix} {}^i v_{0ix} \\ {}^i v_{0iy} \\ {}^i v_{0iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{{}^i dx}{dt} \\ \frac{{}^i dy}{dt} \\ \frac{{}^i dz}{dt} \end{bmatrix}, \quad {}^i \omega_{0i} = \begin{bmatrix} {}^i \omega_{0ix} \\ {}^i \omega_{0iy} \\ {}^i \omega_{0iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{{}^i d\varphi_x}{dt} \\ \frac{{}^i d\varphi_y}{dt} \\ \frac{{}^i d\varphi_z}{dt} \end{bmatrix}, \quad (2.69)$$

gdzie:

${}^i dx \div {}^i dz$ - przemieszczenia różniczkowe układu współrzędnych $x_i y_i z_i$ względem układu bazowego, opisane w układzie współrzędnych $x_i y_i z_i$;

${}^i d\varphi_x \div {}^i d\varphi_z$ - różniczkowe zmiany orientacji układu współrzędnych $x_i y_i z_i$ względem układu bazowego, opisane w układzie współrzędnych $x_i y_i z_i$ za pomocą układu X-Y-Z kątów bieżących $d\varphi_x, d\varphi_y, d\varphi_z$.

Składowe macierzy ${}^i\mathbf{v}_{0i}$ i ${}^i\boldsymbol{\omega}_{0i}$ możemy wyrazić poprzez pochodne $\dot{q}_1 \div \dot{q}_i$ współrzędnych naturalnych członów MRP korzystając z równania (2.25). Otrzymamy następującą formułę:

$$\begin{bmatrix} {}^i\mathbf{v}_{0ix} \\ {}^i\mathbf{v}_{0iy} \\ {}^i\mathbf{v}_{0iz} \\ {}^i\boldsymbol{\omega}_{0ix} \\ {}^i\boldsymbol{\omega}_{0iy} \\ {}^i\boldsymbol{\omega}_{0iz} \end{bmatrix} = {}^i\mathbf{J}_i \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

Pochodne współrzędnych naturalnych członów z pochodnymi współrzędnych naturalnych siłowników wiąże następująca formuła:

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^N \frac{\partial q_i}{\partial q_{sj}} \dot{q}_{sj} \quad (2.71)$$

Wektor pędu względem układu bazowego i wektor krętu członu i -tego względem początku O_i układu $x_i y_i z_i$ możemy wyrazić za pomocą macierzy jednokolumnowych trójkwierszowych ${}^i\mathbf{p}_i$ i ${}^i\mathbf{K}_i$ w następujący sposób [57]:

$${}^i\mathbf{p}_i = m_i ({}^i\mathbf{v}_{0i} + {}^i\boldsymbol{\omega}_{0i} \times {}^i\mathbf{r}_{Si}), \quad (2.72)$$

$${}^i\mathbf{K}_i = m_i {}^i\mathbf{r}_S \times {}^i\mathbf{v}_{0i} + {}^i\mathbf{I}_i {}^i\boldsymbol{\omega}_{0i}. \quad (2.73)$$

$${}^i\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} {}^i p_{ix} \\ {}^i p_{iy} \\ {}^i p_{iz} \end{bmatrix}^T, \quad {}^i\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} {}^i K_{ix} & {}^i K_{iy} & {}^i K_{iz} \end{bmatrix}^T,$$

$${}^i\mathbf{r}_{Si} = \begin{bmatrix} {}^i r_{Six} & {}^i r_{Siy} & {}^i r_{Siz} \end{bmatrix}^T,$$

$${}^i\mathbf{I}_i = \begin{bmatrix} {}^i I_{iyy} + {}^i I_{izz} & -{}^i I_{ixy} & -{}^i I_{izx} \\ -{}^i I_{ixy} & {}^i I_{ixx} + {}^i I_{izz} & -{}^i I_{izy} \\ -{}^i I_{izx} & -{}^i I_{izy} & {}^i I_{ixx} + {}^i I_{iyy} \end{bmatrix},$$

gdzie:

${}^i p_{ix} \div {}^i p_{iz}$ - współrzędne wektorów pędu $\bar{\mathbf{p}}_i$ w układzie $x_i y_i z_i$,

${}^i K_{ix} \div {}^i K_{iz}$ - współrzędne krętu $\bar{\mathbf{K}}_i$ w układzie $x_i y_i z_i$,

${}^i r_{Six} \div {}^i r_{Siz}$ - współrzędne wektora $\bar{\mathbf{r}}_{Si}$ środka masy członu i -tego w układzie $x_i y_i z_i$,

m_i - masa członu i -tego,

${}^i\mathbf{I}_i$ - macierz tensora bezwładności [16,50] członu i -tego, obliczona w układzie $x_i y_i z_i$.

W formułach (2.72) i (2.73) zastosowaliśmy iloczyn wektorowy dwóch macierzy jednokolumnowych trójkwierszowych. Iloczyn ten zdefiniujemy dla dwóch przykładowych macierzy $\mathbf{a} = [a_x \ a_y \ a_z]^T$ i $\mathbf{b} = [b_x \ b_y \ b_z]^T$,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}. \quad (2.74)$$

Z praw zmienności pędu i krętu [37,40,57] wynikają następujące równania dynamiki członu i -tego w układzie $x_i y_i z_i$:

$${}^i\dot{\mathbf{p}}_i = \begin{bmatrix} {}^i \dot{p}_{ix} \\ {}^i \dot{p}_{iy} \\ {}^i \dot{p}_{iz} \end{bmatrix} + {}^i\boldsymbol{\omega}_{0i} \times {}^i\mathbf{p}_i = {}^i\dot{\mathbf{P}}_i, \quad {}^i\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} {}^i P_{ix} \\ {}^i P_{iy} \\ {}^i P_{iz} \end{bmatrix}, \quad (2.75)$$

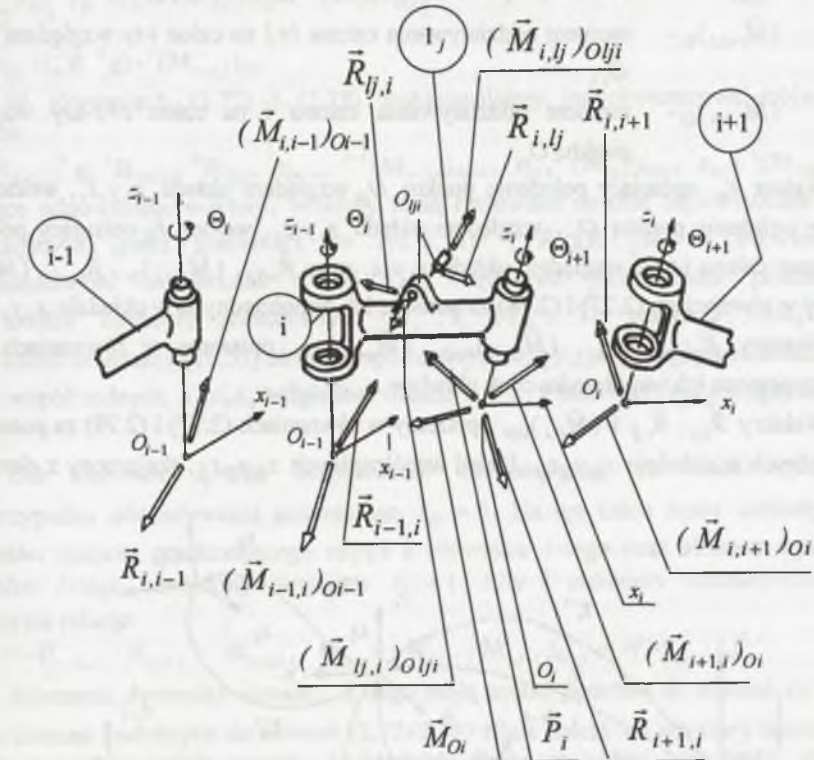
$${}^i\dot{\mathbf{K}}_i = \begin{bmatrix} {}^i \dot{K}_{ix} \\ {}^i \dot{K}_{iy} \\ {}^i \dot{K}_{iz} \end{bmatrix} + {}^i\boldsymbol{\omega}_{0i} \times {}^i\mathbf{K}_i = {}^i\dot{\mathbf{M}}_{0i}, \quad {}^i\mathbf{M}_{0i} = \begin{bmatrix} {}^i M_{0ix} \\ {}^i M_{0iy} \\ {}^i M_{0iz} \end{bmatrix}, \quad (2.76)$$

gdzie:

${}^i P_{ix} \div {}^i P_{iz}$ - współrzędne wektora wypadkowej siły zewnętrznej $\bar{\mathbf{P}}_i$ w układzie $x_i y_i z_i$,

${}^i M_{0ix} \div {}^i M_{0iz}$ - współrzędne wektora wypadkowego momentu zewnętrznego $\bar{\mathbf{M}}_{0i}$ względem początku O_i układu $x_i y_i z_i$.

Wszystkie współrzędne tych wektorów są rzutami na osie układu $x_i y_i z_i$.



Rys. 2.17. Schemat rozkładu sił i momentów działających na człon i -ty
Fig. 2.17. Diagram of resolve forces and torques acting on the i -th link

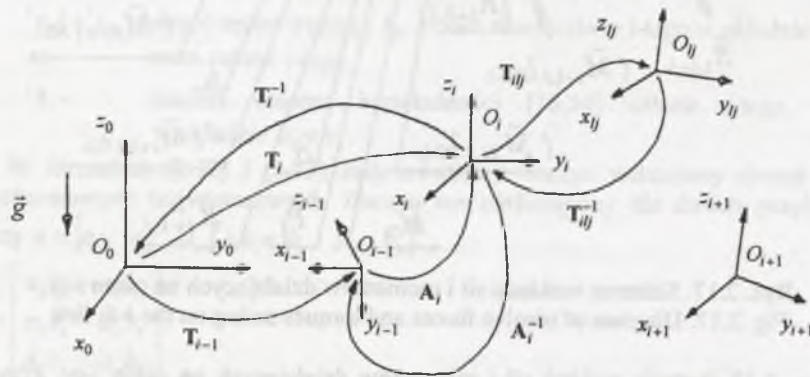
Rys. 2.17 ilustruje rozkład sił i momentów działających na człon i -ty. Przyjęto tu następujące oznaczenia:

- $\bar{R}_{i-1,i}$ - siła oddziaływania członu $i-1$ na człon i -ty,
 $(\bar{M}_{i-1,i})_{0i-1}$ - moment oddziaływania członu $i-1$ na człon i -ty względem punktu O_{i-1} ,
 $(\bar{M}_{i,i-1})_{0i-1}$ - moment oddziaływania członu i na człon $i-1$ -szy względem punktu O_{i-1} ,
 $\bar{R}_{i,i-1}$ - siła oddziaływania członu i na człon $i-1$ -szy,
 $\bar{R}_{lj,i}$ - siła oddziaływania elementu l_j na człon i -ty,
 $\bar{R}_{i,lj}$ - siła oddziaływania członu i na element l_j -ty,
 $(\bar{M}_{lj,i})_{0ji}$ - moment oddziaływania elementu l_j na człon i -ty względem punktu O_{ji} ,
 $\bar{R}_{i,i+1}$ - siła oddziaływania członu $i+1$ na człon i -ty,
 $\bar{R}_{i,i+1}$ - siła oddziaływania członu i na człon $i+1$ -szy,
 $(\bar{M}_{i+1,i})_{0i}$ - moment oddziaływania członu $i+1$ na człon i -ty względem punktu O_i ,
 $(\bar{M}_{i,i+1})_{0i}$ - moment oddziaływania członu i na człon $i+1$ -szy względem punktu O_i .

Wektor \bar{r}_{ji} opisujący położenie punktu O_{ji} względem układu $x_i y_i z_i$, wektor \bar{r}_{0i-1} opisujący położenie punktu O_{i-1} względem układu $x_i y_i z_i$, wektor \bar{r}_{Si} opisujący położenie środka masy członu i -tego względem układu $x_i y_i z_i$ oraz $\bar{R}_{i+1,i}$, $(\bar{M}_{i+1,i})_{0i}$, $\bar{R}_{i,i+1}$, $(\bar{M}_{i,i+1})_{0i}$ wyrazimy w równaniach (2.77) i (2.78) za pomocą ich współrzędnych w układzie $x_i y_i z_i$.

Wektory $\bar{R}_{i,i-1}$, $\bar{R}_{i-1,i}$, $(\bar{M}_{i,i-1})_{0i-1}$, $(\bar{M}_{i-1,i})_{0i-1}$ opiszemy w równaniach (2.77) i (2.78) za pomocą ich współrzędnych w układzie $x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$.

Wektory $\bar{R}_{lj,i}$, $\bar{R}_{i,lj}$ i $(\bar{M}_{lj,i})_{0ji}$ opiszemy w równaniach (2.77) i (2.78) za pomocą ich współrzędnych w układzie $x_{lj} y_{lj} z_{lj}$. Układ współrzędnych $x_{lj} y_{lj} z_{lj}$, skojarzony z elementem



Rys. 2.18. Opis układów współrzędnych skojarzonych z elementami oddziałującymi bezpośrednio na i -ty człon

Fig. 2.18. Description of frames associated with elements direct acting on i -th link

l_j -tym, opisuje względem układu $x_i y_i z_i$ macierz T_{lj} (patrz rys. 2.18). Dla $l=i$ $T_{lij} = T_{ij} = T_j$. Macierz ta opisuje układ współrzędnych skojarzony z elementem j -tym zespołu przekazującego napęd na człon i -ty (patrz rys. 2.16). Wektor grawitacji \bar{g} opisany jest w równaniach (2.77) i (2.78) przez jego współrzędne w układzie bazowym.

Tak opisanym wektorom odpowiadają macierze jednokolumnowe trójwierszowe. Macierze te zastosujemy w równaniach (2.77) i (2.78) do wyznaczenia sumarycznej siły zewnętrznej iP_i i sumarycznego momentu zewnętrznego ${}^iM_{0i}$ (względem początku układu $x_i y_i z_i$) działających na człon i -ty. Wyznamy je z równań równowagi dynamicznej w postaci:

$${}^iP_i = {}^iR_{i-1,i} {}^{i-1}R_{i-1,i} + m_i ({}^iR_{0i} {}^0g) + {}^iR_{i+1,i} + \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^{N+1} k_{lj} ({}^iR_{lj} {}^jR_{lj,i}), \quad (2.77)$$

$${}^iM_{0i} = {}^iR_{0i-1} \times ({}^{i-1}R_{i-1,i} {}^{i-1}R_{i-1,i}) + {}^{i-1}R_{i-1,i} ({}^iM_{i-1,i})_{0i-1} + \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^{N+1} k_{lj} [{}^iR_{lj} \times ({}^jR_{lj,i} {}^jR_{lj,i}) + {}^jR_{lj,i} ({}^iM_{lj,i})_{0ji}] + m_i {}^iR_{Si} \times ({}^iR_{0i} {}^0g) + {}^i(M_{i+1,i})_{0i}. \quad (2.78)$$

W równaniach (2.77) i (2.78) zastosowaliśmy jednokolumnowe trójwierszowe macierze

${}^{i-1}R_{i-1,i}$, 0g , ${}^iR_{i+1,i}$, ${}^jR_{lj,i}$, ${}^iR_{0i-1}$, ${}^{i-1}(M_{i-1,i})_{0i-1}$, ${}^iR_{lj}$, ${}^j(M_{lj,i})_{0ji}$, ${}^iR_{Si}$ i ${}^i(M_{i+1,i})_{0i}$, opisujące odpowiednie wektory. Wektory te są rzutowane na osie odpowiednich układów współrzędnych (patrz komentarz do rys. 2.18). ${}^{i-1}R_{i-1,i}$, 0g i ${}^jR_{lj,i}$ są trójwierszowymi trójkolumnowymi macierzami rotacji [10], będącymi jednocześnie podmacierzami odpowiednich macierzy jednorodnych A_i^{-1} , T_i^{-1} i T_{lj}^{-1} . Te macierze rotacji opisują odpowiednio orientację [10,57] układu współrzędnych $x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$ względem układu $x_i y_i z_i$, układu współrzędnych $x_0 y_0 z_0$ względem układu $x_i y_i z_i$ i układu $x_{lj} y_{lj} z_{lj}$ względem układu $x_i y_i z_i$.

Dla elementu l_j -tego bezpośrednio oddziałującego na człon i -ty $k_{lj} = 1$, a w przypadku oddziaływania pośredniego $k_{lj} = 0$. Na ten człon może oddziaływać N_i elementów zespołu przekazującego napęd z siłownika l -tego oraz element wykonawczy siłownika l -tego oznaczony numerem $N_i + 1$. Siły i momenty oddziaływania wiążą następujące relacje:

$$R_{i,j-1} = -R_{i-1,i}, \quad R_{i,j+1} = -R_{i+1,i}, \quad R_{lj,i} = -R_{i,lj}, \quad (M_{i,i-1})_{0i-1} = -(M_{i-1,i})_{0i-1}. \quad (2.79)$$

Równania dynamiki elementu l_j -tego mają postać podobną do równań (2.75÷2.79). Liczba równań podobnych do równań (2.77÷2.79) silnie zależy od struktury kinematycznej zespołów przekazujących napędy. Dokładniej, liczba ta zależy od liczby elementów składowych MRP. Liczba elementów składowych MRP jest równa

$$2N + \sum_{p=1}^N N_p,$$

gdzie: $2N$ - liczba członów i elementów wykonawczych siłowników,

N_p - liczba elementów zespołu przekazującego napęd na p -ty człon.

Zatem liczba równań ruchu i równowagi dynamicznej elementów składowych MRP jest równa

$$4(2N + \sum_{p=1}^N N_p).$$

Równania te są w postaci macierzowej i dlatego każdemu równaniu odpowiadają 3 równania w postaci skalarnej opisujące trzy współrzędne odpowiednich reakcji, w odpowiednich układach współrzędnych. Zatem liczba równań dynamiki i równowagi dynamicznej MRP jest równa

$$12(2N + \sum_{p=1}^N N_p).$$

Siły napędowe członów lub siłowników to N sił lub momentów reakcji spośród wszystkich współrzędnych reakcji elementów składowych MRP występujących w równaniach równowagi dynamicznej. Siły napędowe członów lub siłowników występują w tych równaniach w postaci uwikłanej. Postać ta nie pozwala analizować wpływu poszczególnych elementów składowych MRP na siły napędowe siłowników, tak jak w podrozdziale 2.2.1.

Dla MRP z napędem bezpośrednim w równaniach równowagi dynamicznej (2.77÷2.78) macierze sił ${}^B\mathbf{R}_{ji} = \mathbf{0}$ oraz macierze momentów ${}^B(\mathbf{M}_{ji})_{0ji} = \mathbf{0}$. Zatem dla MRP z napędami bezpośrednimi równania równowagi dynamicznej upraszczają się. Znikają w tych równaniach macierze sił i momentów reakcji elementów wykonawczych siłowników i elementów przekazujących napęd. Znikają także równania dynamiki i równania równowagi dynamicznej tych elementów. To znakomicie upraszcza opis dynamiki MRP, gdyż stanowią go równania dynamiki i równowagi dynamicznej tylko członów.

Jeśli para kinematyczna łącząca człony $i-1$ z i – tym jest obrotowa, to współrzędna momentu $M_{i-1,i,z}$ skierowana wzdłuż osi pary jest równa wartości siły F_i (opisanej formułami (2.55÷2.60)). Dla pary kinematycznej przesuwnej współrzędna reakcji $R_{i-1,i,z}$ skierowana wzdłuż osi przesuwu jest równa też wartości siły F_i (opisanej formułami (2.55÷2.60)). Wartości wypadkowe sił lub momentów napędowych F_{siw} są tymi samymi współrzędnymi sił lub momentów reakcji korpusu na element wykonawczy i – tego siłownika (formuły (2.68)).

Oddziaływanie obiektu manipulacji

Uchwycony obiekt manipulacji oddziałuje na element wykonawczy. Pojawiają się siły i momenty reakcji elementu wykonawczego na obiekt manipulacji. Aby uwzględnić oddziaływanie obiektu manipulacji, należy skojarzyć z nim układ współrzędnych i obliczyć macierz tensora bezwładności w tym układzie. Następnie należy napisać równania dynamiki i równania równowagi dynamicznej obiektu manipulacji. W równaniach równowagi dynamicznej należy uwzględnić siły i momenty reakcji elementu wykonawczego na obiekt manipulacji. Równania dynamiki i równowagi dynamicznej obiektu manipulacji należy dołączyć do równań dynamiki i równowagi dynamicznej pozostałych elementów składowych MRP.

Oddziaływanie otoczenia

Jeśli elementem wykonawczym jest śrubokręt lub inne narzędzie przmocowane do członu roboczego, to w czasie wykonywania operacji technologicznych pojawia się oddziaływanie członu roboczego na otoczenie MRP. Do opisu tego oddziaływania

zastosowaliśmy macierz \mathbf{F}_{ot} w podrozdziale 2.2.1. Oddziaływanie otoczenia na człon roboczy jest skierowane przeciwnie do oddziaływania członu roboczego na otoczenie. Dlatego siły i momenty reakcji otoczenia na człon roboczy są równe ujemnym siłom i momentom reakcji członu roboczego na otoczenie.

Aby opisać oddziaływanie otoczenia, należy uwzględnić siły i momenty reakcji otoczenia w równaniach równowagi dynamicznej członu roboczego.

Oddziaływanie tarcia

W podrozdziale 2.2.1 uwzględniliśmy tarcie elementów wykonawczych siłowników w formułach (2.68). Opis sił tarcia w tej formule jest przybliżony. Siły i momenty sił tarcia towarzyszą ruchom względnym w parach kinematycznych wszystkich elementów składowych MRP.

O problemach opisu tarcia w mechanizmach wspomniano w podręczniku [40]. Według tego podręcznika, zagadnienia związane z tarcie należą do fizyki ciała stałego. Ścisły opis tych sił jest trudny. W wielu przypadkach wystarcza uwzględnienie klasycznych praw dotyczących tarcia [40]. Dlatego przyjmujemy tu, że siły i momenty sił tarcia dwóch sąsiednich elementów MRP, tworzących parę kinematyczną, zależą od sił i momentów reakcji tych elementów oraz od ich prędkości względnej. Opis sił i momentów sił tarcia przedstawimy na przykładzie pary kinematycznej utworzonej przez człon $i-1$ oraz i -ty. Po uwzględnieniu tarcia równania (2.79) dla tej pary kinematycznej mają następującą postać:

$$\begin{aligned} -\mathbf{R}_{i,j-1} - \mathbf{T}_{i-1,i}(\mathbf{R}_{i,j-1}, \dot{\mathbf{q}}_i) &= \mathbf{R}_{i-1,i}, \\ -(\mathbf{M}_{i,j-1})_{0i-1} - (\mathbf{M}_{T-1,i}((\mathbf{M}_{i,j-1})_{0i-1}, \dot{\mathbf{q}}_i))_{0i-1} &= (\mathbf{M}_{i-1,i})_{0i-1}, \end{aligned} \quad (2.80)$$

gdzie:

$\mathbf{T}_{i-1,i}$ - macierze sił tarcia oddziałujące na człon i – ty,

$\mathbf{M}_{T-1,i}$ - macierze momentów sił tarcia oddziałujące na człon i – ty,

$\dot{\mathbf{q}}_i$ - prędkość zmian współrzędnej naturalnej członu i -tego.

Opory tarcia spowodowane są tarcie suche i lepkie. Można je opisać formułami podobnymi do (2.68).

Oddziaływanie ruchu podstawy

Powyżej przedstawiliśmy sposób tworzenia równań dynamiki i równań równowagi dynamicznej MRP na przykładzie członu i -tego. W równaniach dynamiki stosowaliśmy pęd i kręt obliczany w układzie bazowym. Równania te wynikają z II prawa Newtona. Prawo to jest ważne dla ruchu w układach współrzędnych inercjalnych. Zatem równania dynamiki są ważne, gdy układ bazowy jest inercjalny. Układ ten możemy uznać za inercjalny, gdy podstawa MRP jest nieruchoma względem Ziemi.

Jeśli podstawa MRP może poruszać się względem Ziemi, to układ bazowy jest inercjalny tylko w przypadku spoczynku lub ruchu podstawy MRP prostoliniowego ze stałą prędkością. W przypadku ruchu podstawy MRP krzywoliniowego lub prostoliniowego ze zmienną prędkością układ bazowy nie jest inercjalny. Dlatego w przypadku możliwości ruchu podstawy MRP względem Ziemi powinniśmy obrać układ odniesienia inercjalny. Takim układem odniesienia może być układ współrzędnych skojarzony ze stanowiskiem technologicznym, nieruchomym względem Ziemi.

Aby opisać oddziaływanie ruchu podstawy MRP, należy obliczać pęd i kręt podstawy i wszystkich pozostałych elementów składowych MRP w układzie odniesienia inercjalnym. Tak obliczone pędy i kręty należy stosować w równaniach dynamiki elementów składowych

MRP. Należy równania dynamiki elementów składowych MRP uzupełnić równaniem dynamiki podstawy MRP. Równania równowagi dynamicznej elementów składowych MRP należy także uzupełnić równaniem równowagi dynamicznej podstawy MRP.

2.2.3. Zadanie odwrotne i proste dynamiki

Jak już wspomnieliśmy na początku podrozdziału 2.2, potrzeba rozwiązywania zadania odwrotnego i prostego dynamiki MRP pojawia się przy planowaniu trajektorii obiektu manipulacji z uwzględnieniem dynamiki MRP i możliwości napędowych siłowników. Z podrozdziału 2.2.2 wynika, że rozwiązywanie tych zadań jest niezbędne do analizy naprężeń i odkształceń MRP. Rozwiązywanie zadania prostego dynamiki MRP jest także niezbędne do symulacji jego ruchu [10,41,107].

W podrozdziale 2.2.3 zdefiniujemy zadanie odwrotne i proste dynamiki MRP oraz przedstawimy algorytmy rozwiązywania tych zadań. Podstawą tych algorytmów są równania opisujące dynamikę MRP, przedstawione w podrozdziałach 2.2.1 oraz 2.2.2.

Podobnie jak w podrozdziale 2.1.2, przyjmujemy, że macierz \mathbf{E}_μ opisująca obiekt manipulacji względem elementu wykonawczego jest znana. Założymy ponadto, że obiekt manipulacji jest nieruchomy względem elementu wykonawczego w czasie manipulacji.

W tym podrozdziale skupimy się na relacjach między dynamiką zmian współrzędnych naturalnych i sił napędowych.

Zadanie odwrotne

Zadanie odwrotne dynamiki MRP polega na wyznaczeniu sił i momentów, z jakimi oddziałują na siebie elementy dla znanych przebiegów czasowych współrzędnych naturalnych siłowników. Zadanie odwrotne dynamiki napędów MRP to zadanie odwrotne dynamiki MRP dotyczące tylko sił napędowych siłowników F_{sin} .

Współrzędne naturalne siłowników q_{si} i członów q_i wiążą następujące formuły:

$$q_{si} = \varphi_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_N), \quad (2.81a)$$

$$q_i = \psi_i(q_{s1}, q_{s2}, q_{s3}, \dots, q_{sN}), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.81b)$$

Stosując formułę (2.81b), możemy wyznaczyć przebiegi czasowe współrzędnych naturalnych członów. Prędkości współrzędnych naturalnych członów możemy obliczyć z formuły (2.71). Przyspieszenia tych współrzędnych możemy obliczyć z formuły (2.81c).

$$\ddot{q}_i = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 q_i}{\partial q_{sj} \partial q_{sk}} \dot{q}_{sj} \dot{q}_{sk} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial q_i}{\partial q_{sj}} \ddot{q}_{sj}. \quad (2.81c)$$

Prędkości i przyspieszenia współrzędnych naturalnych siłowników możemy obliczyć z formuły (2.81d) i (2.81e).

$$\dot{q}_{si} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial q_{si}}{\partial q_j} \dot{q}_j. \quad (2.81d)$$

$$\ddot{q}_{si} = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 q_{si}}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j=1}^N \frac{\partial q_{si}}{\partial q_j} \ddot{q}_j. \quad (2.81e)$$

Zadanie odwrotne dynamiki napędów MRP rozwiązujemy stosując formuły (2.55÷2.61). Zadanie odwrotne dynamiki MRP rozwiązujemy stosując formuły (2.69÷2.80). Najpierw obliczamy wektory pędów i krętów w układach współrzędnych skojarzonych z poszczególnymi elementami MRP, a następnie obliczamy ich pochodne i rozwiązujemy układ równań sił i momentów (2.77)÷(2.79). Jeśli chcemy uwzględnić tarcie, to musimy stosować formuły (2.68) i (2.80).

Zadanie proste

Zadanie proste dynamiki MRP polega na wyznaczaniu przebiegów czasowych współrzędnych naturalnych siłowników dla znanych przebiegów czasowych sił napędowych F_{sin} . Zadanie to rozwiązujemy następująco:

- dla znanych wartości początkowych współrzędnych naturalnych siłowników i ich prędkości wyznaczamy wypadkowe siły napędowe siłowników F_{sjw} z formuły (2.68a),
- dla zadanych wartości początkowych współrzędnych naturalnych i ich prędkości wyznaczamy z równań (2.61) przebiegi czasowe współrzędnych naturalnych siłowników.

Równania (2.61) przekształcamy do postaci macierzowej

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{V}_s + \mathbf{G}_s, \quad (2.82)$$

$$\mathbf{u} = [F_{s1w}, \dots, F_{sNw}]^T, \quad \mathbf{M}_s = \begin{bmatrix} D_{s11} & \dots & D_{s1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{sN1} & \dots & D_{sNN} \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{q}}_s = [\ddot{q}_{s1}, \dots, \ddot{q}_{sN}]^T,$$

$$\mathbf{V}_s = \left[\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N D_{s1jk} \dot{q}_{sj} \dot{q}_{sk}, \dots, \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N D_{sNjk} \dot{q}_{sj} \dot{q}_{sk} \right]^T, \quad \mathbf{G}_s = [D_{s1}, \dots, D_{sN}]^T. \quad (2.83)$$

Dla znanych współrzędnych naturalnych i ich prędkości w chwili początkowej możemy wyznaczyć współczynniki D_{sij} , D_{sijk} i D_{si} występujące w równaniach (2.82) i (2.83). Rozwiązując układ równań (2.82) ze względu przyspieszenia współrzędnych naturalnych siłowników, otrzymujemy:

$$\ddot{\mathbf{q}}_s = \mathbf{M}_s^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{V}_s - \mathbf{G}_s). \quad (2.84)$$

Po dyskretyzacji równania (2.84) możemy wyznaczyć współrzędne naturalne.

Uwzględnienie sił tarcia we wzorach opisanych przez formułę (2.68a) czyni rozwiązania zadań prostych dynamiki MRP rozwiązaniami niejednoznacznymi.

2.3. Podsumowanie

Przy pracy nad programami sterowania robotów (rys. 1.2) pojawia się między innymi potrzeba planowania trajektorii. Planowanie wymaga rozwiązywania zadania prostego i odwrotnego kinematyki oraz zadania odwrotnego dynamiki napędów MRP. Im krótszy czas rozwiązywania tych zadań, tym szybciej może być planowana trajektoria. Czas obliczeń zależy od metod rozwiązywania tych zadań i mocy obliczeniowej systemów obliczeniowych. Należy unikać obliczeń korzystających z opisu kinematyki w postaci różniczkowej, gdyż są one na ogół wolniejsze od obliczeń za pomocą opisu kinematyki w postaci ciągłej. Jednym z czynników zwiększających moc obliczeniową systemów obliczeniowych są obliczenia równoległe. Metody przyspieszania obliczeń w systemach równoległych, sterowanych przepływem argumentów, przedstawia praca [103]. Z pracy tej wynika, że podstawą do przyspieszenia obliczeń w systemach równoległych jest postać analityczna obliczanej funkcji. Postać ta powinna być jawna, tzn. funkcja powinna zależeć jawnie od argumentów. Dlatego do obliczeń zadania prostego i odwrotnego kinematyki oraz zadania odwrotnego dynamiki napędów MRP za pomocą systemów równoległych powinniśmy stosować postacie analityczne jawne formuł stanowiących rozwiązanie tych zadań.

Dalej w ramach podsumowania przedstawimy sposób wykorzystania formuł z rozdziału drugiego opisujących ruch do rozwiązania zadania prostego i odwrotnego kinematyki, warunków kinematycznych osiągnięcia punktów trajektorii zadanej, charakterystyki problemów związanych z dynamiką oraz warunków dynamicznych i ogólnych realizacji trajektorii zadanej.

2.3.1. Zadanie proste kinematyki

Formuły (2.8) na współrzędne zewnętrzne są rozwiązaniem zadania prostego MRP w postaci analitycznej jawnej. Argumentami formuł (2.8) są współrzędne wewnętrzne. Współrzędne zewnętrzne w tych formułach zależą jawnie od elementów macierzy \mathbf{X} , opisanej przez równanie (2.4). Z kolei elementy macierzy \mathbf{X} można wyrazić w postaci zależności analitycznych jawnych od współrzędnych wewnętrznych za pomocą równania (2.3). Współrzędnymi zewnętrznymi są współrzędne położenia początku i współrzędne orientacji układu współrzędnych $x_{N+1}, y_{N+1}, z_{N+1}$. Współrzędnymi wewnętrznymi są współrzędne naturalne członów. Równania (2.3) i (2.4) pozwalają wyznaczyć analityczny opis przestrzeni roboczych, wynikający ze znanych zakresów zmian współrzędnych naturalnych członów.

2.3.2. Zadanie odwrotne kinematyki

Z rozważań zamieszczonych w pracach [10,57,63], dotyczących rozwiązania zadania odwrotnego kinematyki MRP, wynika, że najbardziej i najszybsze są algorytmy wykorzystujące postacie analityczne jawne tych rozwiązań. Postać analityczna jawna rozwiązania zadania odwrotnego kinematyki MRP oznacza tu postać analityczną współrzędnych wewnętrznych, zależną jawnie od współrzędnych zewnętrznych. Współrzędne zewnętrzne są tu argumentami współrzędnych wewnętrznych. Postać tę otrzymujemy za pomocą metod analitycznych rozwiązywania zadania odwrotnego kinematyki MRP. Do metod analitycznych rozwiązywania zadania odwrotnego kinematyki MRP zalicza się metody wektorowe [37,40] i metody macierzowe [10,23,32,37,40,41,48,51,55,56,57,61,66,69,100,107]. Metoda macierzowa wykorzystująca równania kinematyki (2.1)÷(2.4) pozwala w sposób formalny otrzymać formuły analityczne jawne na współrzędne wewnętrzne, zależne jawnie od współrzędnych zewnętrznych. Tak otrzymane formuły mają interpretację geometryczną. Jeśli trajektorię zadaną opisuje jednoznacznie tylko położenie, a orientacja jest dowolna, to łatwiej stosować metody geometryczne [10,32,48,51,107]. Formuły analityczne otrzymane za pomocą metody geometrycznej są identyczne z formułami otrzymanymi za pomocą metody macierzowej.

Rozwiązania zadań odwrotnych kinematyki w postaci ciągłej i różniczkowej dla MRP produkcji krajowej przedstawiają prace [37,56].

2.3.3. Warunki kinematyczne osiągnięcia punktów trajektorii zadanej

Przy badaniu możliwości realizacji \mathbf{X}_{zad} (opisanej za pomocą m niezależnych współrzędnych zewnętrznych) przez MRP o N stopniach swobody wygodnie jest stosować pojęcie zapasu ruchliwości MRP lub stopnia redundancji MRP względem trajektorii zadanej $W_W = N - m$ [56,57].

Jeśli $W_W > 0$, to MRP nazywamy redundantnym względem trajektorii zadanej. Jeśli $W_W = 0$, to MRP nazywamy nieredundantnym dla tej trajektorii [39]. Jeśli $W_W < 0$, to na pewno MRP nie będzie mógł zrealizować trajektorii zadanej. Jednak nieujemność stopnia

redundancji MRP względem trajektorii zadanej nie gwarantuje jej realizacji. Osiągnięcie przez MRP punktów trajektorii zadanej wymaga spełnienia następujących **warunków kinematycznych osiągnięcia punktów trajektorii zadanej** [56,57]:

- zadane położenie członu roboczego, wynikające z $\mathbf{X}_{zad}\mathbf{E}^{-1}$ jest zanurzone w przestrzeni roboczej właściwej MRP;
- zapas ruchliwości $W_W \geq 0$;
- dla $N < 6$ elementy macierzy $\mathbf{X}_{zad}\mathbf{E}^{-1}$ są z podprzestrzeni MRP, czyli spełniają równania kluczowe MRP [58,72];
- wartości elementów macierzy \mathbf{X}_{zad} opisujących zadaną trajektorię są takie, że odpowiadają im wartości współrzędnych naturalnych członów z zakresu ich zmienności.

Warunki a), b), c) są konieczne, a warunek d) jest konieczny i wystarczający osiągnięcia punktów trajektorii zadanej.

Realizację kinematyki zadanego przyrostu różniczkowego trajektorii $d\mathbf{X}_{zad}$ warunkuje spełnienie przez elementy macierzy $\mathbf{T}_N^{-1}d\mathbf{X}_{zad}\mathbf{E}^{-1}$ różniczkowych równań kluczowych.

2.3.4. Dynamika

Równania dynamiki (2.55)÷(2.58) z podrozdziału 2.2.1 opisują wprost siły napędowe członów. W równaniach występują macierze pseudobezwładności członów, siłowników i elementów zespołów przekazujących napędy. Macierze opisują rozkład mas poszczególnych elementów składowych MRP. Uwzględnienie elementów wykonawczych siłowników i elementów zespołów przekazujących napędy było możliwe dzięki opisowi ich kinematyki za pomocą macierzy przekształceń jednorodnych \mathbf{T}_{si} oraz \mathbf{T}_{ij} , zilustrowanych na rys. 2.15 i 2.16. Postać analityczna równań (2.55)÷(2.61) umożliwia analizę wpływu poszczególnych wyrazów na siły napędowe siłowników. W zakończeniu podrozdziału 2.2.1 przeanalizowaliśmy wpływ poszczególnych wyrazów na siły napędowe. Z analizy tej wynika, że przy dużych przełożeniach dominujące znaczenie we współczynnikach D_{ij} i D_{jk} (opisanych formułami (2.59)÷(2.60)) mają wyrazy z macierzami pseudobezwładności siłowników \mathbf{J}_{si} .

2.3.5. Zagadnienia obliczeniowe dynamiki

W programach sterowania robotów (rys. 1.2) pojawia się między innymi potrzeba rozwiązywania zadania odwrotnego dynamiki napędów MRP w jak najkrótszym czasie. Z rozważań przytoczonych w podręcznikach [10,107] wynika, że dla MRP z napędami bezpośrednimi obliczenie sił napędowych siłowników z równań dynamiki Newtona-Eulera jest korzystniejsze niż z równań Lagrange'a. Korzyść ta wynika z mniejszego nakładu obliczeniowego, który jest zależny od liczby członów N . Dla równań Newtona-Eulera nakład obliczeniowy jest proporcjonalny do N , a dla równań Lagrange'a proporcjonalny do N^4 . Porównania te są ważne tylko dla MRP z napędami bezpośrednimi. Wiemy, że MRP z napędami pośrednimi mają oprócz członów dodatkowo N elementów wykonawczych siłowników oraz $\sum_{p=1}^N N_p$ elementów przekazujących napędy. Dodatkowe elementy składowe zwiększają nakład obliczeniowy.

Czas obliczeń sił napędowych siłowników zależy od nakładu obliczeniowego i przede wszystkim od systemów komputerowych. Podstawą do przyspieszenia obliczeń w systemach równoległych jest postać analityczna obliczanej funkcji, jawnie zależnej od argumentów [73]. Dlatego podstawą do projektowania algorytmów obliczeń równoległych sił napędowych siłowników powinna być postać analityczna jawna tych sił. Argumentami są tu współrzędne naturalne siłowników oraz ich pierwsze i drugie pochodne po czasie. W podręczniku [10] postacią jawną równań dynamiki MRP nazywa się zależności analityczne jawne sił napędowych od współrzędnych naturalnych, ich pierwszych i drugich pochodnych oraz parametrów geometrycznych i masowych elementów składowych MRP. Postać jawna równań dynamiki MRP jest bardzo pożądana nie tylko ze względu na obliczenia równoległe. Postać ta umożliwia analizę ilościową wpływu poszczególnych wyrazów na siły napędowe siłowników. Dzięki tej analizie możliwe jest określenie wyrazów, które mogą przyjmować wartości małe w porównaniu z innymi wyrazami. Pominięcie takich wyrazów jest tym bardziej pożądane, im większy jest nakład obliczeniowy potrzebny do wyznaczenia ich wartości. Uproszczenia takie pozwalają zmniejszyć nakład obliczeniowy bez większego wpływu na wartość obliczanych sił napędowych siłowników. **Dlatego przed projektowaniem algorytmów obliczeń równoległych powinniśmy przeanalizować i uprościć postać jawną równań dynamiki MRP.**

Postać jawną równań dynamiki MRP można otrzymać za pomocą wyspecjalizowanych języków programowania wykonujących działania symboliczne [38], np. za pomocą biblioteki MATLAB-a Math Symbolic Toolbox. Równanie dynamiki MRP wynikające z równań Newtona-Eulera dają taką samą postać jawną, jak równania dynamiki MRP wynikające z równań Lagrange'a. W pracy [38] przedstawiono postać jawną równań dynamiki MRP Puma z sześcioma członami połączonymi przegubami obrotowymi. Na rys. 8.21 w podręczniku [10] oraz na rys. 3.3 i 3.4 w podręczniku [32] widać, że manipulatory te mają napędy pośrednie. W pracy [38] pominięto wpływ elementów wykonawczych siłowników i elementów zespołów przekazujących napędy. Jednak z analizy przedstawionej w zakończeniu podrozdziału 2.2.1 wynika, że elementy wykonawcze siłowników mają dominujący wpływ na siły napędowe w MRP z napędami pośrednimi. Potwierdzają to prace [57,59,65] dla MRP IRb-6. Zatem postać jawną równań dynamiki MRP Puma w pracy [38] jest błędna, gdyż nie uwzględnia elementów wykonawczych siłowników. Postać ta uwzględnia tylko oddziaływanie członów na siły napędowe siłowników, które jest redukowane przez przekładnię.

2.3.6. Warunki dynamiczne i ogólne realizacji trajektorii zadanej

Warunki kinematyczne osiągnięcia punktów trajektorii zadanej dotyczą tylko jej kinematyki (profilu położenia). Oprócz geometrii trajektoria zadana ma na ogół także zadane zależności elementów macierzy X_{zad} od czasu (profil prędkości). Z równań (2.4) i (2.5) wynika, że macierz

$$X_{zad} = X_{Mzad} E_{\mu}^{-1},$$

gdzie:

X_{Mzad} - macierz opisująca trajektorię zadaną obiektu manipulacji.

Po rozwiązaniu zadania odwrotnego kinematyki otrzymujemy zależności współrzędnych naturalnych siłowników od czasu. Są to zależności kinematyczne, nie uwzględniające możliwości siłowników w postaci ograniczonych prędkości zmian współrzędnych naturalnych oraz ograniczonych sił napędowych. Z charakterystyk napędowych rzeczywistych siłowników wynika, że zakresy prędkości ich współrzędnych naturalnych oraz zakresy sił napędowych są skończone. Dla konkretnej struktury

kinematycznej, rozkładu mas MRP oraz charakterystyk napędowych siłowników możemy ocenić zakresy możliwych do osiągnięcia prędkości i przyspieszeń współrzędnych naturalnych siłowników. Dla realizacji zadanej zależności geometrii od czasu trajektorii obiektu manipulacji muszą być spełnione **warunki dynamiczne realizacji trajektorii zadanej** [56,57]. Przyjmując, że obiekt manipulacji w czasie ruchu po trajektorii zadanej jest nieruchomy względem elementu wykonawczego (wystarczająca siła obejmowania palców chwytaka), warunki te można wyrazić następująco:

- a) zadane prędkości współrzędnych naturalnych siłowników są z zakresów możliwych do osiągnięcia przez siłowniki;
- b) zadane przyspieszenia współrzędnych naturalnych siłowników są z zakresów możliwych do osiągnięcia przez siłowniki;
- c) zadanym prędkościom i przyspieszeniom współrzędnych naturalnych siłowników odpowiadają żądane siły napędowe z zakresów możliwych do osiągnięcia przez siłowniki.

Warunki a) i b) są konieczne, a warunek c) konieczny i wystarczający do realizacji zadanej dynamiki trajektorii [56,57].

Jednoczesne spełnienie wszystkich warunków kinematycznych osiągnięcia punktów zadanej trajektorii i dynamicznych realizacji trajektorii zadanej jest **ogólnym warunkiem jej realizacji** [56,57]. Warunek ten powinien być sprawdzany przy planowaniu trajektorii (rys. 1.2).

3. MODELOWANIE I SYMULACJA RUCHU ROBOTA AS

Rozdział ten ilustruje zastosowanie niektórych fragmentów rozdziału drugiego do opisu robota AS. Charakterystykę robota przedstawia praca [2]. Manipulator stanowi siedem członów połączonych parami kinematycznymi obrotowymi. Podstawa tego manipulatora jest nieruchoma, pozostałe człony napędzane są bezpośrednio. Manipulatorem sterują serwomechanizmy. Siłownikami są silniki elektryczne prądu stałego ze sterowanymi prądami tworników. Opis robota był niezbędny do opracowania programów komputerowych umożliwiających: badanie zakresów zmian efektywnych momentów bezwładności siłowników, planowanie trajektorii zadanych ruchu, wyznaczanie nastaw regulatorów w serwomechanizmach sterujących ruchem manipulatora, badanie układów sterowania tym manipulatorem, badanie skuteczności planowania ruchu, badanie wrażliwości układów sterowania na zmiany dowolnych parametrów masowych występujących w opisie robota [57,59,62,64,65,86].

W podrozdziale 3.1 skupimy uwagę na równaniach kinematyki członów w postaci ciągłej i różniczkowej. Pokażemy algorytm numerycznego rozwiązywania zadania odwrotnego kinematyki, wykorzystujący postać różniczkową równań kinematyki. Także omówimy sposoby obliczeń współczynników dynamiki manipulatora AS.

W podrozdziale 3.2 omówimy modele graficzne robota AS, utworzone z bloków biblioteki Simulinka. Simulink to pakiet zintegrowany z MATLAB-em. Modele graficzne zostaną wykorzystane do automatycznego utworzenia programów symulacji robota AS w języku C. Zostaną utworzone za pomocą rozszerzenia Real Time Workshop.

W podrozdziale 3.3 przedstawimy przykłady symulacji ruchu robota AS za pomocą programów z podrozdziału 3.2. Symulację przeprowadzimy dla dwóch rodzajów trajektorii zadanych. W pierwszym rodzaju trajektorie zdefiniujemy za pomocą współrzędnych zewnętrznych punktu początkowego i końcowego. Współrzędne te będą zmieniać się skokowo w chwili $t=0$ sek. W drugim rodzaju trajektorie zadane zdefiniujemy za pomocą współrzędnych zewnętrznych punktów tworzących linię prostą. Współrzędne zewnętrzne położenia i orientacji punktów będą zmieniać się liniowo z długością trajektorii. Każdemu punktowi trajektorii zostanie przypisany odpowiedni czas, w którym powinien być osiągnięty przez robot.

W podrozdziale 3.4 proponujemy metody tworzenia modeli uproszczonych robota AS i przebadamy za pomocą symulacji skutki uproszczeń.

W podrozdziale 3.5 podsumujemy wyniki badań z podrozdziałów 3.1÷3.4.

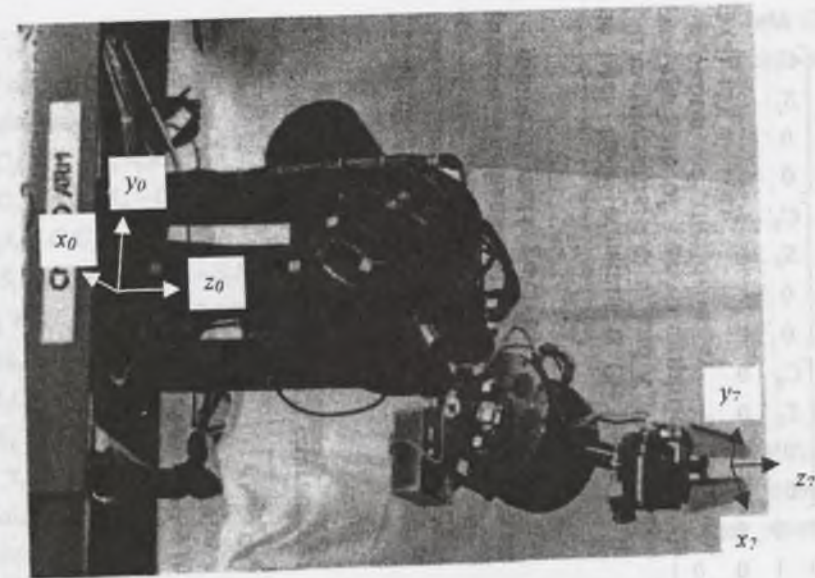
3.1. Modele MRP AS

3.1.1. Kinematyka MRP AS

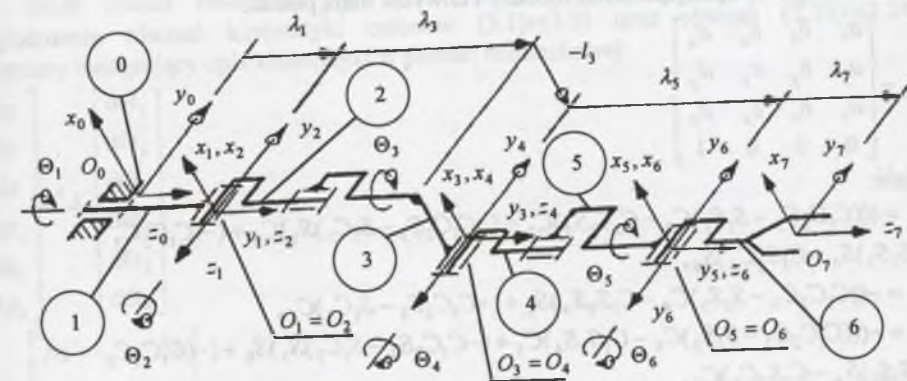
Kinematyka członów

Manipulator robota AS przedstawiony na rys. 3.1a posiada 7 członów połączonych parami obrotowymi. Numery członów na rys. 3.1b otoczono kółkami. Układy współrzędnych skojarzono zgodnie z zapisem Hartenberga-Denavita. Parametry zapisu przedstawia tabela 3.1. W celu uproszczenia zapisu zastosujemy oznaczenia $\sin \Theta_i = S_i$, $\cos \Theta_i = C_i$, $\sin(\Theta_i + \Theta_j) = S_{ij}$, $\cos(\Theta_i + \Theta_j) = C_{ij}$ itp.

W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że kąty $\Theta_1 \div \Theta_6$ są współrzędnymi naturalnymi członów.



Rys. 3.1a. Ilustracja MRP AS
Fig. 3.1a. Illustration of AS IRM



Rys. 3.1b. Schemat kinematyczny MRP AS
Fig. 3.1b. Kinematic scheme of AS IRM

Tabela 3.1

Parametry Hartenberga-Denavita manipulatora AS				
Nr członu	$\alpha_i [^\circ]$	$l_i [m]$	$\lambda_i [m]$	$\Theta_i [^\circ]$
1	90	0	0.765	0÷330
2	-90	0	0	-90÷90
3	90	-0.035	0.510	-90÷90
4	-90	0	0	-90÷90
5	90	0	0.315	0÷330
6	-90	0	0	-90÷90

Macierze przekształceń $A_1 \div A_6$ i E mają następujące postacie:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} C_3 & 0 & S_3 & l_3 C_3 \\ S_3 & 0 & -C_3 & l_3 S_3 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
 A_5 &= \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_6 = \begin{bmatrix} C_6 & 0 & -S_6 & 0 \\ S_6 & 0 & C_6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
 E &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Macierze T_6 i X opisujące człon roboczy i chwytak mają postać:

$$T_6 = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x & d_x \\ a_y & b_y & c_y & d_y \\ a_z & b_z & c_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 a_x &= (((C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3) C_4 - C_1 S_2 S_4) C_5 + (-C_1 C_2 S_3 - S_1 C_3) S_5) C_6 + (-C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3) S_4 - C_1 S_2 C_4) S_6, \\
 b_x &= -((C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3) C_4 - C_1 S_2 S_4) S_5 + (-C_1 C_2 S_3 - S_1 C_3) C_5, \\
 c_x &= -(((C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3) C_4 - C_1 S_2 S_4) C_5 + (-C_1 C_2 S_3 - S_1 C_3) S_5) S_6 + (-C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3) S_4 - C_1 S_2 C_4) C_6, \\
 d_x &= (-C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3) S_4 - C_1 S_2 C_4) \lambda_5 + C_1 C_2 C_3 l_3 - S_1 S_3 l_3 - C_1 S_2 \lambda_3, \\
 a_y &= (((S_1 C_2 C_3 + C_1 S_3) C_4 - S_1 S_2 S_4) C_5 + (-S_1 C_2 S_3 + C_1 C_3) S_5) C_6 + (-S_1 C_2 C_3 + C_1 S_3) S_4 - S_1 S_2 C_4) S_6, \\
 b_y &= -((S_1 C_2 C_3 + C_1 S_3) C_4 - S_1 S_2 S_4) S_5 + (-S_1 C_2 S_3 + C_1 C_3) C_5, \\
 c_y &= -(((S_1 C_2 C_3 + C_1 S_3) C_4 - S_1 S_2 S_4) C_5 + (-S_1 C_2 S_3 + C_1 C_3) S_5) S_6 + (-S_1 C_2 C_3 + C_1 S_3) S_4 - S_1 S_2 C_4) C_6, \\
 d_y &= (-S_1 C_2 C_3 + C_1 S_3) S_4 - S_1 S_2 C_4) \lambda_5 + S_1 C_2 C_3 l_3 + C_1 S_3 l_3 - S_1 S_2 \lambda_3, \\
 a_z &= ((S_2 C_3 C_4 + C_2 S_4) C_5 - S_2 S_3 S_5) C_6 + (-S_2 C_3 S_4 + C_2 C_4) S_6, \\
 b_z &= -((S_2 C_3 C_4 + C_2 S_4) C_5 - S_2 S_3 S_5) S_6 + (-S_2 C_3 S_4 + C_2 C_4) C_6, \\
 c_z &= -((S_2 C_3 C_4 + C_2 S_4) C_5 - S_2 S_3 S_5) S_6 + (-S_2 C_3 S_4 + C_2 C_4) C_6,
 \end{aligned}$$

$$d_z = (-S_2 C_3 S_4 + C_2 C_4) \lambda_5 + S_2 C_3 l_3 + C_2 \lambda_3 + \lambda_1. \quad (3.2)$$

Macierz X opisująca chwytak ma postać identyczną z macierzą T_6 z wyjątkiem elementów $d_x + d_z$, które mają postać:

$$\begin{aligned}
 d_x &= -(((C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3) C_4 - C_1 S_2 S_4) C_5 + (-C_1 C_2 S_3 - S_1 C_3) S_5) S_6 \\
 &+ (-C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3) S_4 - C_1 S_2 C_4) C_6) \lambda_7 + (-C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3) S_4 \\
 &- C_1 S_2 C_4) \lambda_5 + C_1 C_2 C_3 l_3 - S_1 S_3 l_3 - C_1 S_2 \lambda_3, \\
 d_y &= -(((S_1 C_2 C_3 + C_1 S_3) C_4 - S_1 S_2 S_4) C_5 + (-S_1 C_2 S_3 + C_1 C_3) S_5) S_6 \\
 &+ (-S_1 C_2 C_3 + C_1 S_3) S_4 - S_1 S_2 C_4) C_6) \lambda_7 + (-S_1 C_2 C_3 + C_1 S_3) S_4 \\
 &- S_1 S_2 C_4) \lambda_5 + S_1 C_2 C_3 l_3 + C_1 S_3 l_3 - S_1 S_2 \lambda_3, \\
 d_z &= -((S_2 C_3 C_4 + C_2 S_4) C_5 - S_2 S_3 S_5) S_6 + (-S_2 C_3 S_4 + C_2 C_4) C_6) \lambda_7 \\
 &+ (-S_2 C_3 S_4 + C_2 C_4) \lambda_5 + S_2 C_3 l_3 + C_2 \lambda_3 + \lambda_1.
 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Macierze T_6 i X są niezbędne do rozwiązania zadania prostego kinematyki MRP AS oraz wyznaczenia przestrzeni roboczej właściwej. Postać analityczna macierzy T_6 jest złożona. Próby rozwiązania zadania odwrotnego kinematyki w postaci analitycznej jawnej nie powiodły się.

Kinematyka członów w postaci różniczkowej

Ruch członu roboczego MRP AS opiszemy stosując równanie (2.25). Po uwzględnieniu równań kinematyki członów (3.1)÷(3.3) oraz równań (2.19)÷(2.24f) otrzymamy następujący opis kinematyki w postaci różniczkowej:

$$\begin{bmatrix} {}^6 dx \\ {}^6 dy \\ {}^6 dz \\ {}^6 d\varphi_x \\ {}^6 d\varphi_y \\ {}^6 d\varphi_z \end{bmatrix} = {}^6 J_6 \begin{bmatrix} d\Theta_1 \\ d\Theta_2 \\ d\Theta_3 \\ d\Theta_4 \\ d\Theta_5 \\ d\Theta_6 \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

$${}^6 J_6 = \begin{bmatrix} j_{11} & \dots & j_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ j_{61} & \dots & j_{66} \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned}
 j_{11} &= (((C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3) C_4 - C_1 S_2 S_4) C_5 - (-C_1 C_2 S_3 - S_1 C_3) S_5) C_6 \\
 &- ((-C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3) S_4 - C_1 S_2 C_4) S_6) \cdot (((-S_1 C_2 C_3 - C_1 S_3) S_4 - S_1 S_2 C_4) \lambda_5 \\
 &+ S_1 C_2 C_3 l_3 + C_1 S_3 l_3 - S_1 S_2 \lambda_3) + (((S_1 C_2 C_3 + C_1 S_3) C_4 - S_1 S_2 S_4) C_5 \\
 &+ (-S_1 C_2 S_3 + C_1 C_3) S_5) C_6 + ((-S_1 C_2 C_3 - C_1 S_3) S_4 - S_1 S_2 C_4) S_6) \\
 &(((C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3) S_4 - C_1 S_2 C_4) \lambda_5 + C_1 C_2 C_3 l_3 - S_1 S_3 l_3 - C_1 S_2 \lambda_3, \\
 j_{21} &= (((C_1 C_2 C_3 - S_1 S_3) C_4 - C_1 S_2 S_4) S_5 - (-C_1 C_2 S_3 - S_1 C_3) C_5) \cdot (((-S_1 C_2 C_3 \\
 &- C_1 S_3) S_4 - S_1 S_2 C_4) \lambda_5 + S_1 C_2 C_3 l_3 + C_1 S_3 l_3 - S_1 S_2 \lambda_3) + ((-S_1 C_2 C_3 + C_1 S_3) C_4 \\
 &+ S_1 S_2 S_4) S_5 + (-S_1 C_2 S_3 + C_1 C_3) C_5) \cdot (((-C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3) S_4 - C_1 S_2 C_4) \lambda_5 \\
 &+ C_1 C_2 C_3 l_3 - S_1 S_3 l_3 - C_1 S_2 \lambda_3,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j_{31} &= (((C_1C_2C_3 - S_1S_3)C_4 - C_1S_2S_4)C_5 + (-C_1C_2S_3 - S_1C_3)S_5)S_6 - ((-C_1C_2C_3 \\
&+ S_1S_3)S_4 - C_1S_2C_4)C_6) \cdot (((-S_1C_2C_3 - C_1S_3)S_4 - S_1S_2C_4)\lambda_5 + S_1C_2C_3l_3 \\
&+ C_1S_3l_3 - S_1S_2\lambda_3) + (((-S_1C_2C_3 + C_1S_3)C_4 - S_1S_2S_4)C_5 - (-S_1C_2S_3 \\
&+ C_1C_3)S_5)S_6 + ((-S_1C_2C_3 - C_1S_3)S_4 - S_1S_2C_4)C_6) \cdot (((-C_1C_2C_3 + S_1S_3)S_4 \\
&- C_1S_2C_4)\lambda_5 + C_1C_2C_3l_3 - S_1S_3l_3 - C_1S_2\lambda_3), \\
j_{41} &= ((S_2C_3C_4 + C_2S_4)C_5 - S_2S_3S_5)C_6 + (-S_2C_3S_4 + C_2C_4)S_6, \\
j_{51} &= (-S_2C_3C_4 - C_2S_4)S_5 - S_2S_3C_5, \\
j_{61} &= (-S_2C_3C_4 + C_2S_4)C_5 + S_2S_3S_5)S_6 + (-S_2C_3S_4 + C_2C_4)C_6, \\
j_{12} &= ((-C_2C_3C_4 - S_2S_4)C_5 + C_2S_3S_5)C_6 - (-C_2C_3S_4 - S_2C_4)S_6) \cdot ((-S_2C_3S_4 \\
&+ C_2C_4)\lambda_5 + S_2C_3l_3 + C_2\lambda_3) + (((S_2C_3C_4 + C_2S_4)C_5 - S_2S_3S_5)C_6 \\
&+ (-S_2C_3S_4 + C_2C_4)S_6) \cdot ((-C_2C_3S_4 - S_2C_4)\lambda_5 + C_2C_3l_3 - S_2\lambda_3), \\
j_{22} &= ((C_2C_3C_4 - S_2S_4)S_5 + C_2S_3C_5) \cdot ((-S_2C_3S_4 + C_2C_4)\lambda_5 + S_2C_3l_3 \\
&+ C_2\lambda_3) + ((-S_2C_3C_4 - C_2S_4)S_5 - S_2S_3C_5) \cdot ((-C_2C_3S_4 - S_2C_4)\lambda_5 \\
&+ C_2C_3l_3 - S_2\lambda_3), \\
j_{32} &= (((C_2C_3C_4 - S_2S_4)C_5 - C_2S_3S_5)S_6 - (-C_2C_3S_4 - S_2C_4)C_6) \cdot ((-S_2C_3S_4 \\
&+ C_2C_4)\lambda_5 + S_2C_3l_3 + C_2\lambda_3) + ((-S_2C_3C_4 + C_2S_4)C_5 + S_2S_3S_5)S_6 + (-S_2C_3S_4 \\
&+ C_2C_4)C_6 \cdot ((-C_2C_3S_4 - S_2C_4)\lambda_5 + C_2C_3l_3 - S_2\lambda_3), \\
j_{42} &= (-S_3C_4C_5 - C_3S_5)C_6 + S_3S_4S_6, \\
j_{52} &= S_3C_4S_5 - C_3C_5, \\
j_{62} &= (S_3C_4C_5 + C_3S_5)S_6 + S_3S_4C_6, \\
j_{13} &= ((-C_3C_4C_5 + S_3S_5)C_6 + C_3S_4S_6) \cdot (-S_3S_4\lambda_5 + S_3l_3) + ((S_3C_4C_5 + C_3S_5)C_6 \\
&- S_3S_4S_6) \cdot (-C_3S_4\lambda_5 + C_3l_3), \\
j_{23} &= (C_3C_4S_5 + S_3C_5) \cdot (-S_3S_4\lambda_5 + l_3S_3) + (-S_3C_4S_5 + C_3C_5) \cdot (-C_3S_4\lambda_5 + l_3C_3), \\
j_{33} &= ((C_3C_4C_5 - S_3S_5)S_6 + C_3S_4C_6) \cdot (-S_3S_4\lambda_5 + S_3l_3) + ((-S_3C_4C_5 - C_3S_5)S_6 \\
&- S_3S_4C_6) \cdot (-C_3S_4\lambda_5 + C_3l_3), \\
j_{43} &= S_4C_5C_6 + C_4S_6, \\
j_{53} &= -S_4S_5, \\
j_{63} &= -S_4C_5S_6 + C_4C_6, \\
j_{14} &= -\lambda_5C_5C_6, \\
j_{24} &= S_5\lambda_5, \\
j_{34} &= C_5S_6\lambda_5, \\
j_{44} &= -S_5C_6, \\
j_{54} &= -C_5, \\
j_{64} &= S_5S_6, \\
j_{15} + j_{35} &= 0, \\
j_{45} &= S_6, \\
j_{55} &= 0, \\
j_{65} &= C_6,
\end{aligned}$$

$$j_{16} + j_{46} = 0,$$

$$j_{56} = -1,$$

$$j_{66} = 0,$$

gdzie:

${}^6dx \div {}^6dz$ oraz ${}^6d\varphi_x \div {}^6d\varphi_z$ - różniczkowe przemieszczenia i obroty układu współrzędnych $x_6y_6z_6$ względem układu bazowego, opisane w układzie współrzędnych $x_6y_6z_6$, spowodowane różniczkowymi przyrostami współrzędnych naturalnych członów $d\Theta_1 \div d\Theta_6$;

przy czym

$$\det {}^6J_6 = -\lambda_5S_2(\lambda_3S_4 + l_3C_4)^2C_5. \quad (3.6)$$

$$\det {}^6J_6 = 0 \text{ dla } \Theta_2 = 0^\circ, \Theta_4 = -\arctg(l_3 / \lambda_3) = 3.926^\circ \text{ i } \Theta_5 = 90^\circ \text{ lub } 270^\circ.$$

Zadanie odwrotne kinematyki członów w postaci różniczkowej

Zadanie odwrotne kinematyki członów w postaci różniczkowej rozwiążemy opierając się na równaniu (2.34) i (3.4). Różniczkowe przemieszczenia i obroty ${}^6dx \div {}^6dz$ oraz ${}^6d\varphi_x \div {}^6d\varphi_z$ opisane równaniem (3.4) występują w macierzy przekształceń różniczkowych ${}^6\Delta$ układu współrzędnych $x_6y_6z_6$. Równanie (2.34) dla manipulatora AS ma następującą postać:

$${}^6\Delta_{zad} = T_6^{-1}dX_{zad}E^{-1} = T_6^{-1}dT_{6zad}. \quad (3.7)$$

W celu uproszczenia opisu algorytmu rozwiązania zadania odwrotnego kinematyki wykorzystamy macierze ${}^6Y_{zad}$ i q .

$${}^6Y_{zad} = \begin{bmatrix} {}^6dx_{zad} & {}^6dy_{zad} & {}^6dz_{zad} & {}^6d\varphi_{xzad} & {}^6d\varphi_{yzad} & {}^6d\varphi_{zzad} \end{bmatrix}^T,$$

$$q = [\Theta_1 \quad \Theta_2 \quad \Theta_3 \quad \Theta_4 \quad \Theta_5 \quad \Theta_6]^T,$$

gdzie:

$${}^6dx_{zad} \div {}^6dz_{zad} - \text{zadane różniczkowe przemieszczenia } {}^6dx \div {}^6dz,$$

$${}^6d\varphi_{xzad} \div {}^6d\varphi_{zzad} - \text{zadane różniczkowe obroty } {}^6d\varphi_x \div {}^6d\varphi_z.$$

Macierzy X_{zad} odpowiada macierz $T_{6zad} = X_{zad}E^{-1}$.

Do obliczeń współrzędnych naturalnych członów odpowiadających macierzy X_{zad} zastosujemy algorytm *kinodwr*, opisany poniżej w postaci krokowej.

Krok 1: Przypisujemy dowolne wartości współrzędnym naturalnym, które opisuje macierz q_k .

Krok 2: Obliczamy z równań kinematyki (3.2) i (3.5) macierze $T_6(q_k)$ i ${}^6J_6(q_k)$.

Krok 3: Obliczamy macierz ${}^6\Delta_{zad}$ z równania (3.7)

$${}^6\Delta_{zad} = T_6^{-1}(q_k)[T_{6zad} - T_6(q_k)] = T_6^{-1}(q_k)T_{6zad} - I,$$

tworzymy macierz ${}^6Y_{zad}$ i obliczamy macierz q_{k+1} z równania

$$q_{k+1} = {}^6J_6^{-1}(q_k){}^6Y_{zad} + q_k.$$

Krok 4: Obliczamy macierz $T_6(q_{k+1})$ i normę Δ_{k+1}

$$\Delta_{k+1} = \max_{i,j} [T_6(q_{k+1}) - T_{6zad}]_{ij}.$$

Krok 5: Porównujemy normę Δ_{k+1} z zadaniem błędem obliczeń Δ_{zad} . Dla $\Delta_{k+1} > \Delta_{zad}$ przypisujemy macierzy q_k macierz q_{k+1} i wracamy do kroku 2. Dla $\Delta_{k+1} \leq \Delta_{zad}$ przyjmujemy elementy macierzy q_{k+1} jako rozwiązanie zadania odwrotnego kinematyki i kończymy obliczenia.

3.1.2. Dynamika MRP AS

Dynamikę MRP AS opiszemy za pomocą formuł (2.55)÷(2.62). Napędy manipulatora są bezpośrednio i dlatego współrzędne naturalne członów są współrzędnymi naturalnymi siłowników. W równaniach dynamiki uwzględnimy zmiany współczynników ΔD_{ij} , ΔD_{ijk} , ΔD_i spowodowane obiektem manipulacji, opisane formułami (2.64). Uwzględnimy także tarcie opisane formułami (2.68). Przyjmujemy, że tarcie suche startowe i ruchowe poszczególnych siłowników jest następujące: $F_{s1ls}=0.0011Nm$, $F_{s1lr}=0.00094Nm$, $F_{s2ls}=0.0147Nm$, $F_{s2lr}=0.0143Nm$, $F_{s3ls}=0.0012Nm$, $F_{s3lr}=0.00062Nm$, $F_{s4ls}=0.0009Nm$, $F_{s4lr}=0.0009Nm$, $F_{s5ls}=0.0014Nm$, $F_{s5lr}=0.0014Nm$, $F_{s6ls}=0.0007Nm$, $F_{s6lr}=0.0007Nm$. Przyjmujemy, że nie występuje tarcie lepkie, czyli współczynniki $k_{vsl} \div k_{vsl}$ występujące w formule (2.68a) są zerowe.

Macierze pseudobezwładności $J_1 \div J_6$ zaczerpnięto z pracy [2]. Macierze $A_1 \div A_6$ opisane w podrozdziale 3.1.1 pozwalają wyznaczyć wszystkie pochodne macierzy T_i występujące w równaniach dynamiki. Wprowadźmy oznaczenia:

$$B_i = \frac{\partial A_i}{\partial \Theta_i}, \quad C_i = \frac{\partial^2 A_i}{\partial \Theta_i^2}. \quad (3.8)$$

Z rozdziału drugiego wynika, że macierze A_i zależą tylko od współrzędnej naturalnej członu i -tego. Dlatego z formuły (2.1) wynikają następujące związki dla pochodnych macierzy T_p :

$$\frac{\partial T_p}{\partial \Theta_j} = \begin{cases} 0 & \text{dla } p < j, \\ A_1 A_2 \dots A_{j-1} B_j A_{j+1} \dots A_p & \text{dla } p \geq j. \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial^2 T_p}{\partial \Theta_j^2} = \begin{cases} 0 & \text{dla } p < j, \\ A_1 A_2 \dots A_{j-1} C_j A_{j+1} \dots A_p & \text{dla } p \geq j. \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\text{Dla } j < k \quad \frac{\partial^2 T_p}{\partial \Theta_j \partial \Theta_k} = \begin{cases} 0 & \text{dla } \max(j, k) > p, \\ A_1 A_2 \dots A_{j-1} B_j A_{j+1} \dots A_{k-1} B_k A_{k+1} \dots A_p & \text{dla } \max(j, k) \leq p. \end{cases} \quad (3.11)$$

Z formuły (3.11) wynika

$$\frac{\partial^2 T_p}{\partial \Theta_k \partial \Theta_j} = \frac{\partial^2 T_p}{\partial \Theta_j \partial \Theta_k}.$$

Formuły (3.8)÷(3.11) zostały zastosowane do obliczeń pochodnych macierzy T_i za pomocą programów komputerowych wykorzystujących bibliotekę MATLAB-a Symbolic Math Toolbox. Biblioteka ta została wykorzystana do utworzenia postaci analitycznej jawnej (closed form) współczynników D_{sij} , D_{sijk} , D_{si} występujących w równaniach (2.61), (2.82) i (2.83).

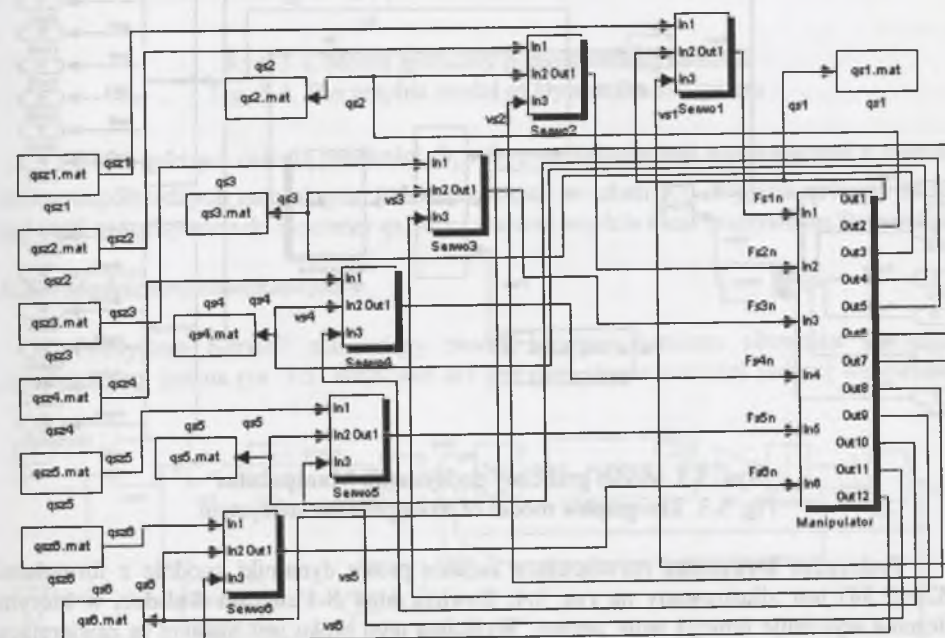
3.2. Modele robota AS w środowisku programowym Simulinka

Simulink jest interaktywnym pakietem przeznaczonym do modelowania, symulacji i analizy układów ciągłych, układów dyskretnych w czasie oraz mieszanych tzn. dyskretno-ciągłych. Pakiet jest zintegrowany z MATLAB-em. Modelowanie w Simulinku polega na wyborze i łączeniu bloków z biblioteki Simulinka. Modele takie będziemy nazywać graficznymi. Bloki realizują obliczenia i operacje odczytu ze wskazanych zbiorów, zapisu do wskazanych zbiorów itp. Można tworzyć bloki typu podsystemy, które zawierają pewną liczbę bloków. Bloki typu podsystem będziemy nazywać podsystemami.

W podrozdziale tym przedstawimy model graficzny robota AS. Model robota zawiera modele manipulatora, serwomechanizmów, siłowników i układów regulacji prądu siłowników.

3.2.1. Model robota AS

Model graficzny robota AS przedstawiony jest na rys. 3.2. Zawiera 7 podsystemów Servo1÷Servo6 i Manipulator, które są modelami 6 serwomechanizmów i manipulatora.



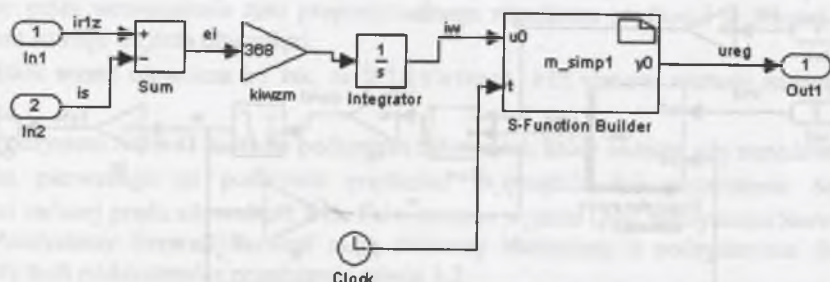
Rys. 3.2. Model graficzny robota AS
Fig. 3.2. The graphic model of AS robot

Bloki qsz1÷qsz6 wczytują zadane współrzędne naturalne siłowników $\Theta_{1z} \div \Theta_{6z}$ ze zbiorów qsz1.mat÷qsz6.mat. Bloki qs1÷qs6 zapisują $\Theta_1 \div \Theta_6$ do zbiorów o tych samych nazwach z rozszerzeniem mat.

Podsystemy **Silownik2+Silownik6** mają identyczną strukturę z podsystemem **Silownik1**. Parametry tych podsystemów przyjęte na podstawie prac [1,2] przedstawia tabela 3.3.

3.2.5. Modele regulatorów prądu silowników

Podsystem **Regulator prądu silownika 1** stanowiący model regulatora prądu silownika 1 przedstawiony jest na rys. 3.7. Wejściem In1 jest prąd zadany silownika 1 i_{r1z} , In2 – prąd silownika 1 i_s . Blok **Sum** oblicza błąd prądu silownika 1 e_i , który jest mnożony przez wzmacnienie $kiwzm$ wzmacniacza regulatora prądu, a następnie całkowany w bloku **Integrator**. Wyjście iw bloku **Integrator** stanowi wejście bloku **S-Function Builder**, który symuluje impulsator bipolarny z modulowaną szerokością. Wyjście ureg bloku **S-Function Builder** jest równe napięciu przełączanemu impulsowo, z częstotliwością 8 kHz, z amplitudą $ur1max$. ureg jest obliczane za pomocą funkcji m_simp1 . ureg stanowi wyjście Out 1 podsystemu **Regulator prądu silownika 1**.



Rys. 3.7. Model graficzny podsystemu Regulator prądu silownika 1
Fig. 3.7. The graphic model of Actuator 1 Current Controller

Pozostałe podsystemy **Regulator prądu silownika2+6** mają identyczną strukturę z podsystemem **Regulator prądu silownika 1**. Amplitudy $ur1max+ur6max$ przedstawia tabela 3.4.

Tabela 3.4

Amplitudy $urmax$						
Nr. silown.	1	2	3	4	5	6
$urmax$ [V]	370	300	350	370	186	186

Wartości $kiwzm$ i $urmax$ przyjęto na podstawie prac [1,2]. Struktura podsystemów **Regulator prądu silownika 1+6** jest podobna do struktury odpowiednich regulatorów w sterownikach napędów SUN-XXX-1. Wzmocnienia regulatorów prądu $kiwzm=386$ w każdym podsystemie **Regulator prądu silownika 1+6**. Wartość tę wyznaczono na podstawie analizy układów elektronicznych stanowiących regulator prądu silowników w sterownikach SUN-XXX-1.

3.3. Przykłady symulacji ruchu robota AS

W podrozdziale tym przedstawimy wyniki symulacji ruchu robota AS. Do symulacji zastosowano program **AS** w języku C, utworzony automatycznie za pomocą rozszerzenia RTW z modelu graficznego z rys. 3.2. Symulacje przeprowadzono dla dwóch rodzajów trajektorii zadanych. W pierwszym rodzaju trajektorie zdefiniowane są za pomocą współrzędnych zewnętrznych punktu początkowego i końcowego. Współrzędne te zmieniają

się skokowo w chwili $t=0$ sek. W drugim rodzaju trajektorie zadane zdefiniowane są za pomocą współrzędnych zewnętrznych punktów tworzących linię prostą. Przedstawimy wyniki symulacji ruchu MRP podwieszonego. Wektor grawitacji Ziemi jest skierowany wzdłuż osi z_0 układu bazowego z rys. 3.1b. Przyjęto wartości początkowe współrzędnych naturalnych równe współrzędnym punktu początkowego trajektorii zadanej. Symulację przeprowadzono ze stałym krokiem dyskretyzacji czasu równym $5 \cdot 10^{-6}$ sek. Wartość ta jest o rząd wielkości mniejsza od stałej czasowej regulatora prądu pierwszego silownika. Prąd ten może zmieniać się najszybciej spośród sygnałów wyjściowych wszystkich podsystemów modelu graficznego robota AS. Na rysunkach $qsz1+qsz6$ oznaczają współrzędne naturalne zadane $\Theta_{1zad} + \Theta_{6zad}$, $qsl+qs6$ współrzędne naturalne $\Theta_1 + \Theta_6$, $eqsi=qszi-qi$ błędy regulacji $\Theta_{1zad} - \Theta_1$.

3.3.1. Trajektorie zadane

Trajektorie zadane MRP AS w przestrzeni zewnętrznej opisujemy za pomocą formuły:

$$X_{zad} = Trans(x_{zad}, y_{zad}, z_{zad}) Rot(x, \alpha_{zad}) Rot(y, \beta_{zad}) Rot(z, \gamma_{zad}). \quad (3.15)$$

Trajektorię zadaną zmieniającą się skokowo w chwili $t=0$ sek. opisują współrzędne punktu początkowego P i końcowego K. Współrzędne punktu P mają wartości:

$$x_{zad} = 0 \text{ m.}, y_{zad} = -0.92 \text{ m.}, z_{zad} = 1.10 \text{ m.}, \alpha_{zad} = 0.5\pi \text{ rad.}, \beta_{zad} = 0 \text{ rad.}, \gamma_{zad} = 1.5\pi \text{ rad.} \quad (3.16a)$$

Współrzędne punktu K są następujące:

$$x_{zad} = -0.05 \text{ m.}, y_{zad} = -0.90 \text{ m.}, z_{zad} = 1.12 \text{ m.}, \alpha_{zad} = 0.25\pi \text{ rad.}, \beta_{zad} = 0 \text{ rad.}, \gamma_{zad} = 1.5\pi \text{ rad.} \quad (3.16b)$$

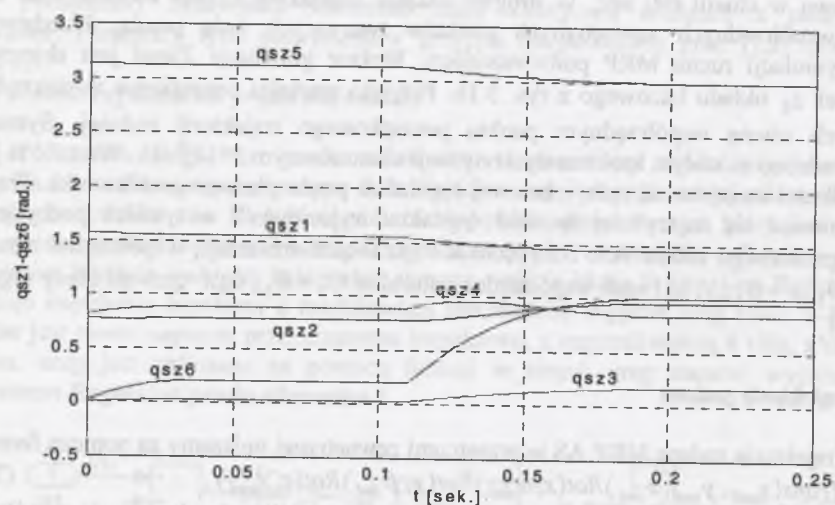
Do obliczeń współrzędnych naturalnych zastosowano algorytm iteracyjny *kinodwr*, przedstawiony w podrozdziale 3.1.1. W algorytmie tym w kroku 1 przyjęto $q_k = [0.5\pi, 0.25\pi, 0, 0.25\pi, \pi, 0]$, w kroku 5 błąd obliczeń $\Delta_{zad} = 0.00001$. Obliczone współrzędne naturalne punktu P mają następujące wartości:

$$\Theta_{1zad} = 1.5708 \text{ rad.}, \Theta_{2zad} = 0.7741 \text{ rad.}, \Theta_{3zad} = 0 \text{ rad.}, \Theta_{4zad} = 0.8133 \text{ rad.}, \Theta_{5zad} = 3.1416 \text{ rad.}, \Theta_{6zad} = 0.0166 \text{ rad.} \quad (3.17a)$$

Współrzędne naturalne punktu K są następujące:

$$\Theta_{1zad} = 1.4428 \text{ rad.}, \Theta_{2zad} = 0.9586 \text{ rad.}, \Theta_{3zad} = 0.1685 \text{ rad.}, \Theta_{4zad} = 0.8383 \text{ rad.}, \Theta_{5zad} = 3.0006 \text{ rad.}, \Theta_{6zad} = 1.0027 \text{ rad.} \quad (3.17b)$$

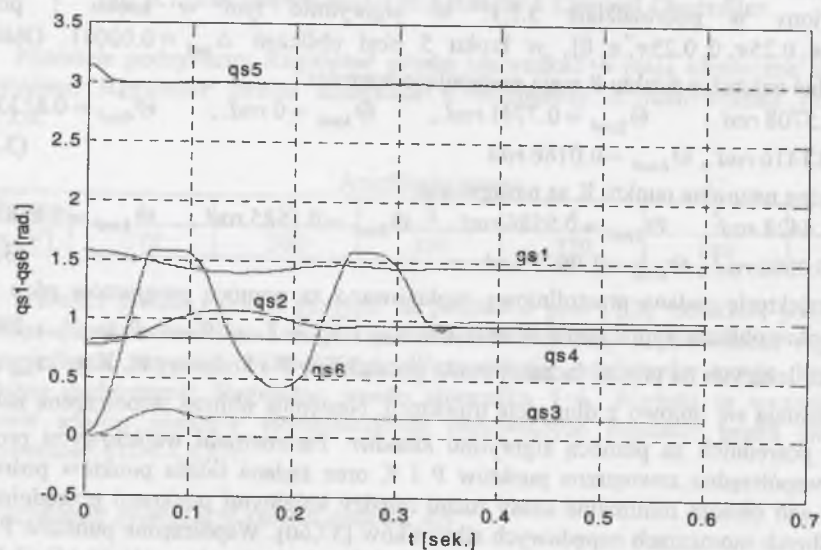
Trajektorię zadaną prostoliniową zaplanowano za pomocą programów *plan* i *optt*. Program *plan* oblicza współrzędne zewnętrzne $x_{zad}, y_{zad}, z_{zad}, \alpha_{zad}, \beta_{zad}, \gamma_{zad}$ punktów pośrednich leżących na prostej łączącej punkt początkowy P i końcowy K. Kąty $\alpha_{zad}, \beta_{zad}, \gamma_{zad}$ zmieniają się liniowo z długością trajektorii. Następnie oblicza współrzędne naturalne punktów pośrednich za pomocą algorytmu *kinodwr*. Parametrami wejściowymi programu *plan* są współrzędne zewnętrzne punktów P i K oraz żądana liczba punktów pośrednich. Program *optt* oblicza minimalne czasy ruchu między kolejnymi punktami pośrednimi przy ekstremalnych momentach napędowych silowników [57,60]. Współrzędne punktów P i K są identyczne z przyjętymi dla trajektorii skokowej i opisują je równania (3.16)-(3.17). Po zadeklarowaniu 1000 punktów pośrednich między punktami P i K zaplanowano trajektorię zadaną. Tak zaplanowaną trajektorię można potraktować jako testującą pozycjonowanie MRP po linii prostej PK, z liniowo zmieniającą się orientacją, w warunkach ekstremalnych. Trajektorię ilustruje rys. 3.8. Planowany czas ruchu jest równy 0.1955 sek.



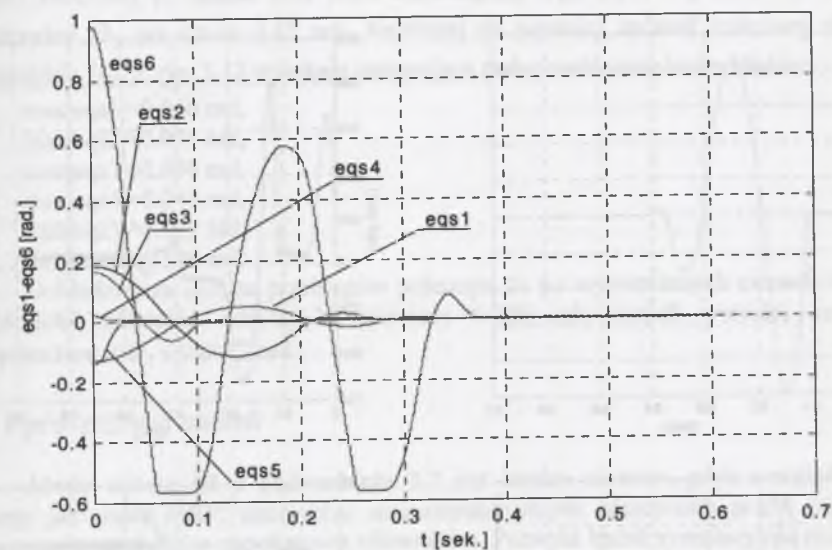
Rys. 3.8. Współrzędne naturalne zadane $qsz1÷qsz6$
Fig. 3.8. Required natural coordinates $qsz1÷qsz6$

3.3.2. Symulacja ruchu

Do symulacji ruchu wykorzystujemy model graficzny robota AS. Symulację przeprowadzono dla trajektorii zadanej skokowej opisanej formułami (3.16)÷(3.17) oraz dla trajektorii zadanej zilustrowanej na rys. 3.8.

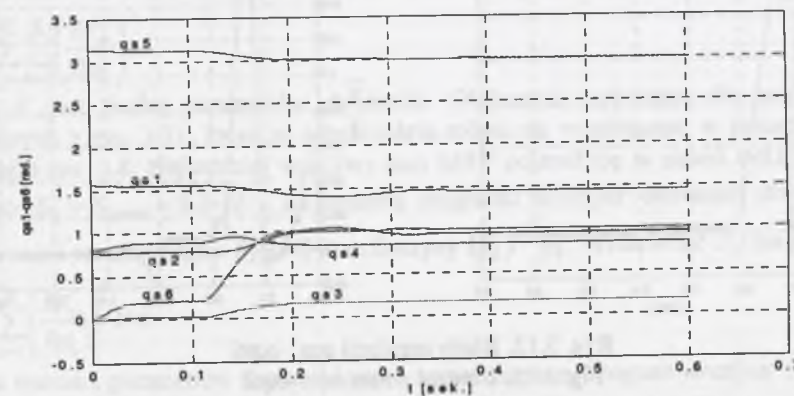


Rys. 3.9. Współrzędne naturalne $qs1÷qs6$
Fig. 3.9. Natural coordinates $qs1÷qs6$

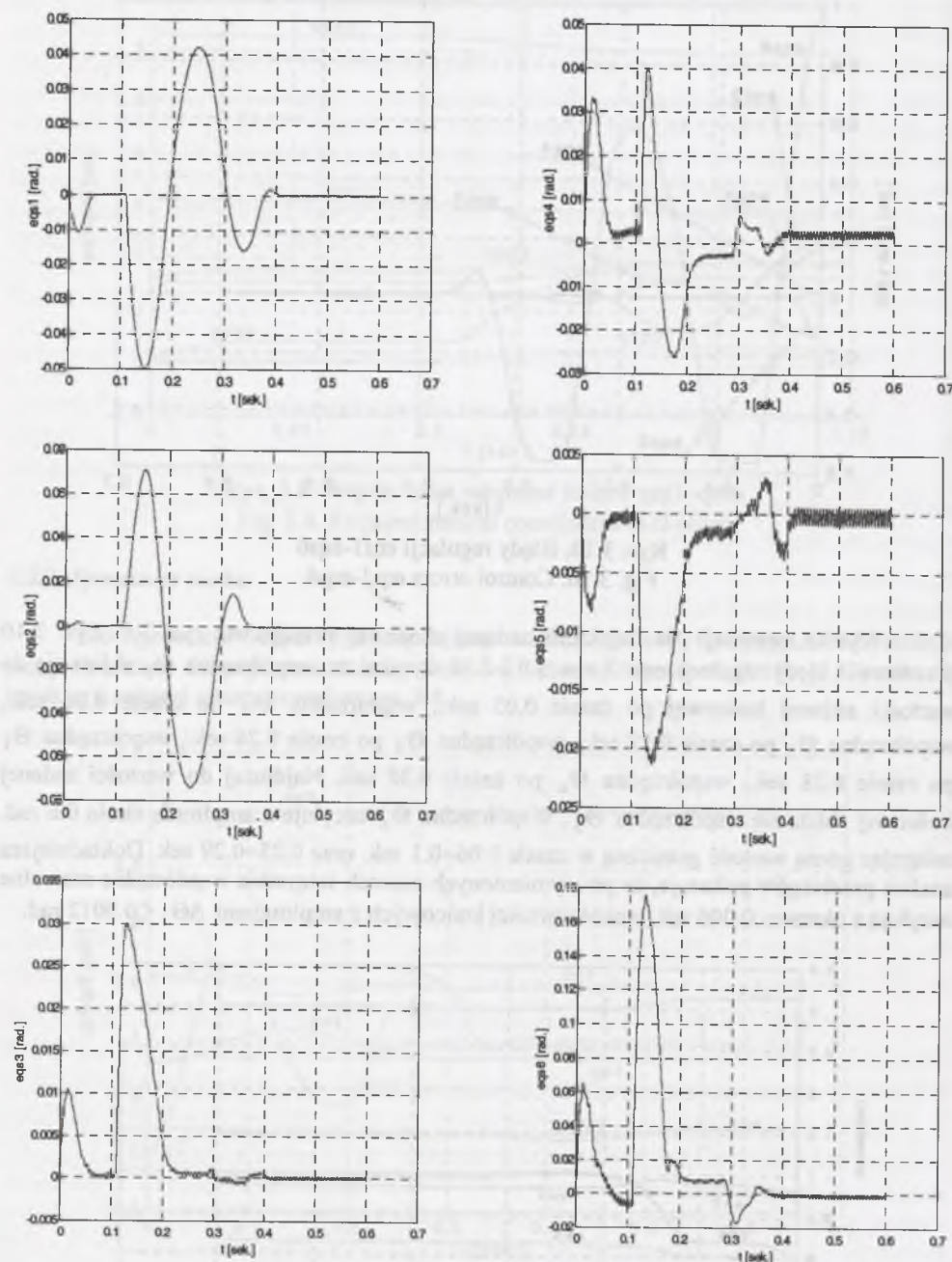


Rys. 3.10. Błędy regulacji $eqs1÷eqs6$
Fig. 3.10. Control errors $eqs1÷eqs6$

Wyniki symulacji dla trajektorii zadanej skokowej przedstawia rys. 3.9. Rys. 3.10 przedstawia błędy regulacji eqs. Z rys. 3.9 i 3.10 wynika, że: współrzędna Θ_5 zbliża się do wartości zadanej końcowej po czasie 0.05 sek., współrzędna Θ_4 po czasie 0.06 sek., współrzędna Θ_3 po czasie 0.12 sek., współrzędna Θ_2 po czasie 0.26 sek., współrzędna Θ_1 po czasie 0.28 sek., współrzędna Θ_6 po czasie 0.38 sek. Najdłużej do wartości zadanej końcowej zbliża się współrzędna Θ_6 . Współrzędna Θ_6 oscyluje z amplitudą około 0.6 rad. osiągając górną wartość graniczną w czasie $0.06÷0.1$ sek. oraz $0.25÷0.29$ sek. Dokładniejsza analiza przebiegów pokazuje, że po wymienionych czasach wszystkie współrzędne naturalne oscylują z okresem 0.006 sek. wokół wartości końcowych z amplitudami $\Delta\Theta_i \leq 0.0012$ rad.



Rys. 3.11. Współrzędne naturalne $qs1÷qs6$
Fig. 3.11. Natural coordinates $qs1÷qs6$



Rys. 3.12. Błędy regulacji eqs1-eqs6
Fig. 3.12. Control errors eqs1-eqs6

Wyniki symulacji dla trajektorii zadanej w postaci linii prostej z rys. 3.8 przedstawiają rys. 3.11 i 3.12. Z rysunków wynika, że współrzędne Θ_2 i Θ_6 zbliżają się do wartości

zadanej końcowej po czasie 0.38 sek., współrzędne Θ_1 , Θ_3 i Θ_4 po czasie 0.4 sek., współrzędna Θ_5 po czasie 0.41 sek. Najdłużej do wartości zadanej końcowej zbliża się współrzędna Θ_6 . Z rys. 3.12 wynikają następujące maksymalne amplitudy błędów:

$$\begin{aligned} \max|eqs1| &= 0.050 \text{ rad,} \\ \max|eqs2| &= 0.075 \text{ rad,} \\ \max|eqs3| &= 0.030 \text{ rad,} \\ \max|eqs4| &= 0.040 \text{ rad,} \\ \max|eqs5| &= 0.021 \text{ rad,} \\ \max|eqs6| &= 0.176 \text{ rad.} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Dokładniejsza analiza przebiegów pokazuje, że po wymienionych czasach wszystkie współrzędne naturalne oscylują z okresem 0.006 sek. wokół wartości końcowych z amplitudami $\Delta\Theta_i \leq 0.0012$ rad.

3.4. Uproszczenia modeli

Model robota AS z podrozdziału 3.2 jest bardzo złożony, gdyż uwzględnia takie procesy jak: ruch MRP, sterowanie serwomechanizmów, sterowanie prądu siłowników, wytwarzanie momentów napędowych siłowników. Pozwala badać symulacyjnie pracę robota z jednoczesnym uwzględnieniem wymienionych procesów i ich oddziaływania na siebie. Badania te umożliwiają analizę praw sterowania serwomechanizmów złożonym obiektem w postaci MRP. Analizę poprzedza synteza praw sterowania serwomechanizmów. Do syntezy potrzebny jest model uproszczony robota. Każde uproszczenie modelu robota zmniejsza czas obliczeń, ale też zwiększa błędy symulacji. Na etapie syntezy istotna jest prostota modelu, a nie błędy uproszczeń.

Uproszczenie modelu dynamiki MRP polega na pomijaniu niektórych parametrów dynamiki p_k , co jest równoważne przypisywaniu im wartości zerowych. Powoduje to błędy sił F_{si} opisanych formułą (2.61). Parametrami dynamiki są elementy macierzy pseudobezwładności członów. Sposób ich numeracji przedstawiają formuły (6.14). MRP AS posiada 60 parametrów dynamiki. Przed uproszczeniami przebadano wrażliwość sił F_{si} na błędy tych parametrów. Za pomocą programu *swrazlcalc* obliczono wrażliwość S_g [86] sił F_{si} na błędy wszystkich 60 parametrów p_k . Wrażliwość S_g ma postać

$$S_g = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial F_{si}}{\partial p_k} \right)^2.$$

K jest liczbą parametrów dynamiki. Obliczenia wykonano dla współrzędnych naturalnych z rys. 3.11, które są odpowiedzią robota na wymuszenie w postaci trajektorii zadanej z rys. 3.8. Najbardziej wrażliwy stan MRP pojawił się w chwili $t \approx 0.016$ sek., dla którego $S_g = S_{g\max} = 5.3 \cdot 10^7$. Za pomocą programu *wrazlpar* obliczono dla tego stanu wrażliwości parametryczne S_k [86] oraz iloczyny $(S_k)^{1/2} p_k$. Wrażliwość S_k ma postać

$$S_k = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F_{si}}{\partial p_k} \right)^2.$$

p_k to wartości parametrów dynamiki przed uproszczeniem. Program *wrazlpar* utworzył 60-elementowy zbiór uporządkowany według malejącej wartości $|(S_k)^{1/2} p_k|$. Wartości tych elementów przyjęto jako miary błędów sił F_{si} spowodowanych pominięciem odpowiedniego

parametru dynamiki. Im większe wartości $|(S_k)^{1/2} p_k|$, tym większy wpływ pominięcia parametru p_k na siły F_{si} . Zatem przy upraszczaniu modelu dynamiki MRP należy pomijać najpierw parametry dla których te wartości są najmniejsze. Dziesięć parametrów najbardziej wpływających na siły F_{si} to:

$$\begin{aligned} p_{23} &= m_3 \bar{y}_3, p_{21} = m_3, p_{26} = I_{3yy}, p_{31} = m_4, p_{17} = I_{2zz}, \\ p_{43} &= m_5 \bar{y}_5, p_{14} = m_1 \bar{z}_1, p_{41} = m_5, p_{15} = I_{2xx}, p_{51} = m_6. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Tabela 3.5. przedstawia wartości $|(S_k)^{1/2} p_k|$ dla parametrów (3.19).

Zbiór największych wartości $ (S_k)^{1/2} p_k $										
L.p.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k	23	21	26	31	17	43	14	41	15	51
$ \sqrt{S_k} p_k \cdot 10^3$	9.75	5.40	2.45	1.36	0.96	0.72	0.69	0.32	0.19	0.19

Przedstawimy tu trzy metody upraszczania modelu robota AS na potrzeby przyspieszenia symulacji [92] i metodę upraszczania na potrzeby syntezy praw sterowania serwomechanizmów.

- W metodzie pierwszej upuszczamy model przez pominięcie wszystkich współczynników D_{sijk} oraz D_{sij} dla $i \neq j$.
- W metodzie drugiej korzystamy z uproszczeń metody pierwszej, przyjmujemy stałe współczynniki D_{sii} równe średnim arytmetycznym ich wartości ekstremalnych i uwzględniamy we współczynnikach D_{si} tylko 10 parametrów dynamiki z tabeli 3.5.
- W metodzie trzeciej wykorzystujemy uproszczenia z metody drugiej i przyjmujemy prądy siłowników równe ich wartościom zadany.

Do syntezy praw sterowania serwomechanizmów [21,58] stosujemy uproszczenia polegające na pominięciu sił tarcia i grawitacji, współczynników D_{sijk} , współczynników D_{sij} dla $i \neq j$, przyjęciu stałości współczynników D_{sii} oraz równości prądów siłowników z ich wartościami zadanymi.

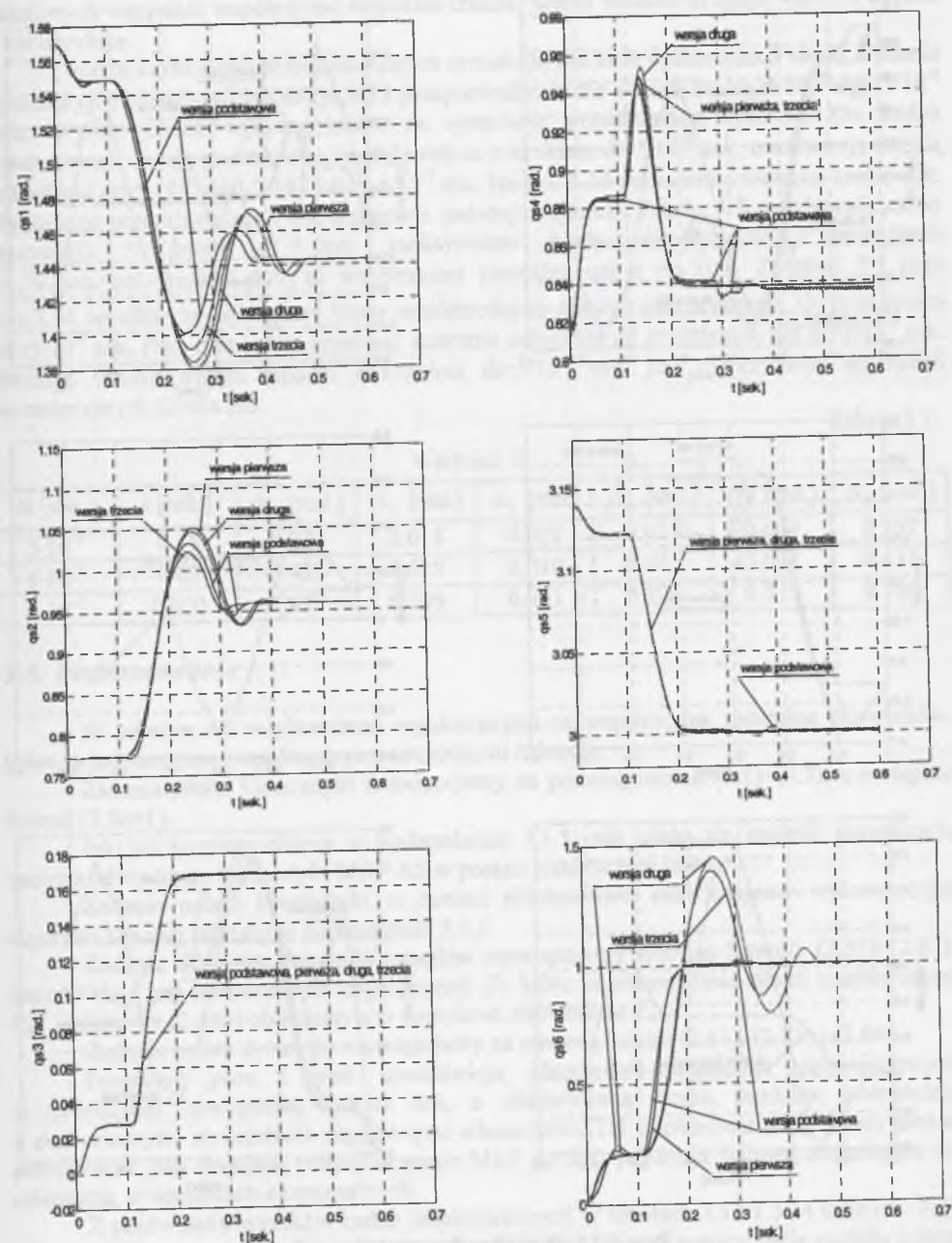
Przyjmujemy, że numery kolejnych wersji modeli uproszczonych robota odpowiadają numerowi metody ich tworzenia, tzn. wersja pierwsza odpowiada metodzie pierwszej itp. Wersją podstawową będziemy nazywać model przed uproszczeniem.

Wyniki symulacji robota AS z wykorzystaniem wersji modelu podstawowej, pierwszej, drugiej i trzeciej przedstawiają rys. 3.13. Symulacje przeprowadzono dla trajektorii zadanej z rys. 3.8. Tabela 3.6 przedstawia czasy symulacji t oraz maksymalne błędy współrzędnych naturalnych $\Delta_i = \max |q_{si} - q_{si0}|$. q_{si0} to współrzędna naturalna q_{si} z rys. 3.11. Czas symulacji za pomocą wersji podstawowej modelu wynosi 420 sek., przy częstotliwości procesora 2.4 GHz.

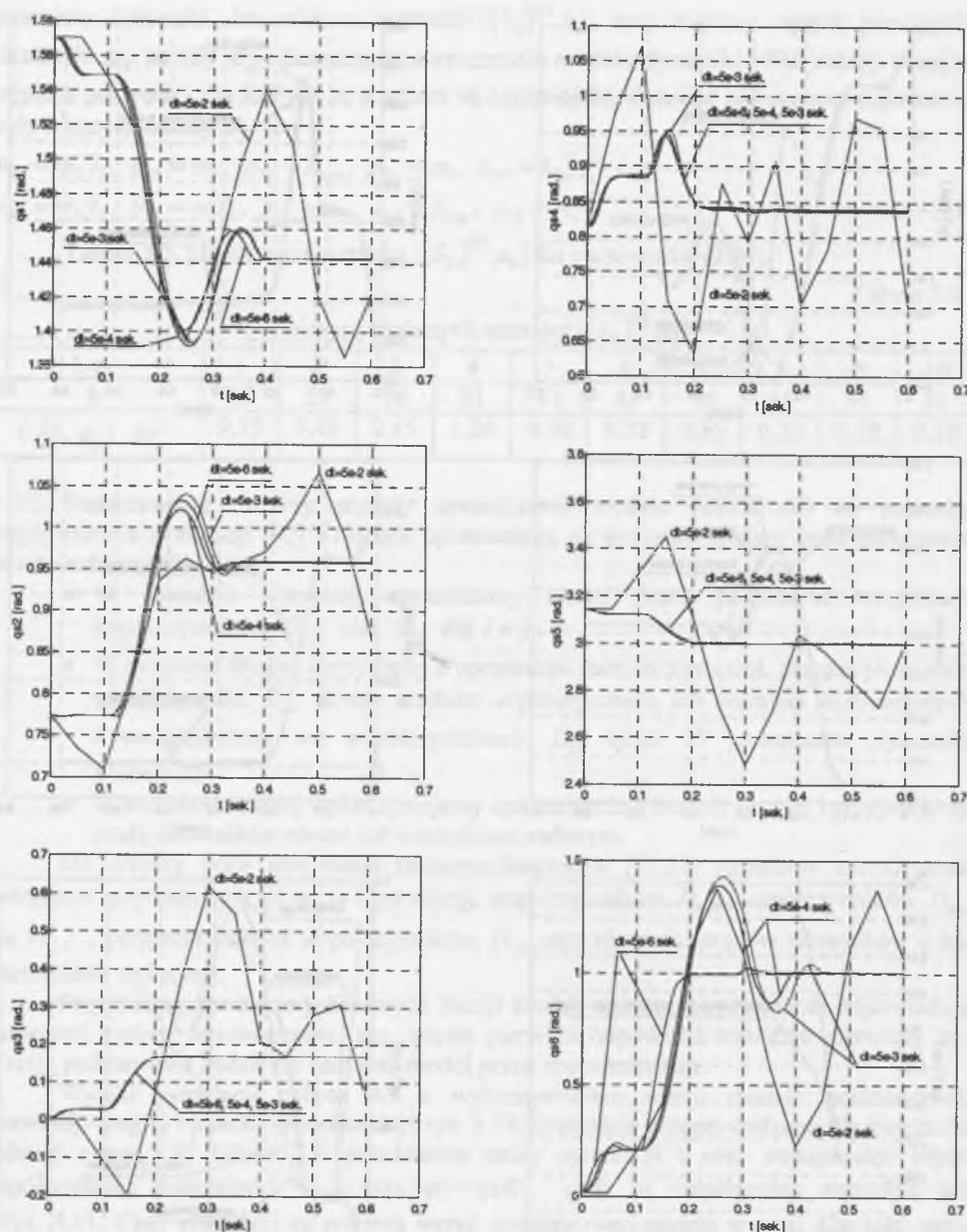
Tabela 3.6

Wartości Δ_i

Nr wersji	t [sek.]	Δ_1 [rad.]	Δ_2 [rad.]	Δ_3 [rad.]	Δ_4 [rad.]	Δ_5 [rad.]	Δ_6 [rad.]
1	28	0.041	0.023	0.002	0.013	0.004	0.105
2	19	0.032	0.020	0.0007	0.016	0.004	0.357
3	14	0.020	0.018	0.001	0.013	0.004	0.335

Rys. 3.13. Współrzędne naturalne $q_{s1} \div q_{s6}$ Fig. 3.13. Natural coordinates $q_{s1} \div q_{s6}$

Z rys. 3.13 i tabeli 3.6 wynika, że kolejne uroszczenia modeli powodują największe błędy współrzędnej q_{s6} . Dokładniejsza analiza przebiegów pokazuje, że w stanach ustalonych

Rys. 3.14. Współrzędne naturalne q_{s6}Fig. 3.14. Natural coordinates q_{s6}

wszystkie współrzędne naturalne pierwszej i drugiej wersji modelu oscylują z okresem 0.006 sek. wokół wartości końcowych z amplitudami $\Delta\Theta_i \leq 0.00028$ rad. W stanach

ustalonych wszystkie współrzędne naturalne trzeciej wersji modelu osiągają wartości zadane i nie oscylują.

Innym czynnikiem przyspieszającym symulację jest krok dyskretyzacji czasu. Badania symulacyjne przedstawione na rys.3.13 przeprowadzono dla stałego kroku dt równego $5 \cdot 10^{-6}$ sek. Wyniki badań wpływu kroku na symulacje przedstawiają rys.3.14. Do badań zastosowano wersję podstawową modelu robota z krokiem $dt=5 \cdot 10^{-6}$ sek. oraz wersję trzecią z krokami $dt=5 \cdot 10^{-4}$ sek., $5 \cdot 10^{-3}$ sek. i $5 \cdot 10^{-2}$ sek. Na rys. 3.14 zaznaczono wartości kroków dt . Symulacje przeprowadzono dla trajektorii zadanej z rys.3.8. Tabela 3.7 przedstawia czasy symulacji t , kroki dt oraz maksymalne błędy współrzędnych naturalnych $\Delta_i = \max |q_{si} - q_{si0}|$. q_{si0} to współrzędna naturalna q_{si} z rys.3.11. Z tabeli 3.7 oraz rys.3.14 wynika, że największe błędy współrzędnych naturalnych pojawiają się przy kroku $dt=5 \cdot 10^{-2}$ sek. Przy tym kroku przebiegi znacznie odbiegają od przebiegów dla $dt=5 \cdot 10^{-6}$ sek. Dlatego trzecia wersja modelu z krokiem $dt=5 \cdot 10^{-2}$ sek. jest nieprzydatna do badań symulacyjnych robota AS.

Tabela 3.7

Wartości Δ_i							
dt [sek.]	t [sek.]	Δ_1 [rad.]	Δ_2 [rad.]	Δ_3 [rad.]	Δ_4 [rad.]	Δ_5 [rad.]	Δ_6 [rad.]
$5 \cdot 10^{-4}$	0.18	0.020	0.018	0.002	0.014	0.004	0.397
$5 \cdot 10^{-3}$	0.02	0.023	0.020	0.010	0.023	0.007	0.437
$5 \cdot 10^{-2}$	0.002	0.097	0.109	0.451	0.231	0.521	0.780

3.5. Podsumowanie

W robocie AS wielkościami regulowanymi są współrzędne naturalne siłowników, które są jednocześnie współrzędnymi naturalnymi członów.

Zadania proste kinematyki rozwiązujemy za pomocą formuł (3.1)÷(3.3), a następnie formuł (2.8a÷f).

Jak już wspomnieliśmy w podrozdziale 3.1.1, nie udało się znaleźć rozwiązania zadania odwrotnego kinematyki MRP AS w postaci analitycznej jawnej.

Zadanie proste kinematyki w postaci różniczkowej rozwiązujemy wykorzystując algorytm *kinodwr* opisany w podrozdziale 3.1.1.

Zadanie odwrotne dynamiki napędów rozwiązujemy stosując formuły (2.55)÷(2.67). Umożliwiają one obliczenie sił uogólnionych F_i , które są jednocześnie siłami uogólnionymi F_{siw} . Z formuły (2.68b) obliczamy siły napędowe siłowników F_{sin} .

Zadanie proste dynamiki rozwiązujemy za pomocą formuł (2.61), (2.83) i (2.84).

Programy *plan* i *opt* umożliwiają planowanie trajektorii prostoliniowych w przestrzeni zewnętrznej robota AS, z deklarowaną liczbą punktów pośrednich, z ekstremalnymi momentami napędowymi siłowników. Tak zaplanowaną trajektorię można potraktować jako testującą pozycjonowanie MRP po linii prostej, z liniowo zmieniającą się orientacją, w warunkach ekstremalnych.

Z porównania wyników badań zamieszczonych w tabelach 3.13 i 3.14 oraz rys. 3.27 i 3.28 wynika, że współrzędna q_{s6} jest najbardziej wrażliwa na uproszczenia modelu robota AS i wydłużenie kroku dyskretyzacji dt . Można przypuszczać, że w pierwszej i drugiej wersji modelu przyczyną oscylacji $\Delta\Theta_i$ i odchyłek $\Theta_{ik} - \Theta_{izad}$ od wartości zadanych końcowych jest impulsowe zasilanie siłowników przez regulatory prądów. Uproszczenia modelu robota i wydłużenie kroku przyspieszyły symulację ruchu, dla trajektorii zadanej jak na rys.3.22. Miarą przyspieszeń może być stosunek p czasu obliczeń za pomocą wersji podstawowej modelu z krokiem dyskretyzacji $dt=5 \cdot 10^{-6}$ sek. do czasu obliczeń za pomocą wersji

uproszczonej modelu. Wartości przyspieszeń dla poszczególnych wersji uproszczeń dla kroków dt są następujące:

- wersja pierwsza, $dt=5 \cdot 10^{-6}$ sek. $p=420$ sek./28 sek.=15;
- wersja druga, $dt=5 \cdot 10^{-6}$ sek. $p=420$ sek./19 sek.=22.1;
- wersja trzecia, $dt=5 \cdot 10^{-6}$ sek. $p=420$ sek./14 sek.=30.0;
- wersja trzecia, $dt=5 \cdot 10^{-4}$ sek. $p=420$ sek./0.18 sek.=2333.3;
- wersja trzecia, $dt=5 \cdot 10^{-3}$ sek. $p=420$ sek./0.02 sek.=21000.

W zależności od maksymalnego dopuszczalnego błędu symulacji współrzędnych naturalnych $\Delta_{i\max}$ mogą być użyteczne różne wersje modelu. Dla $\Delta_{i\max}=0.105$ rad. jest przydatna pierwsza wersja modelu z krokiem $dt=5 \cdot 10^{-6}$ sek., *która przyspieszy obliczenia 15 razy*; dla $\Delta_{i\max}=0.397$ rad.-trzecia wersja modelu z krokiem $dt=5 \cdot 10^{-4}$ sek., *która przyspieszy obliczenia 2333.3 razy*; dla $\Delta_{i\max}=0.437$ rad.-trzecia wersja modelu z krokiem $dt=5 \cdot 10^{-3}$ sek., *która przyspieszy obliczenia 21 000 razy*.

Symulacja 0.6 sek. ruchu za pomocą trzeciej wersji modelu z krokami $dt=5 \cdot 10^{-4}$ sek. i $5 \cdot 10^{-3}$ sek. trwa odpowiednio 0.18 sek. i 0.02 sek. *Zatem czas symulacji ruchu dla trajektorii zadanej jak na rys.3.22. za pomocą tej wersji modelu i tych kroków dyskretyzacji jest krótszy niż symulowany czas.*

4. MODELOWANIE I SYMULACJA RUCHU ROBOTA L-1

Rozdział ten ilustruje zastosowanie niektórych fragmentów rozdziału drugiego do opisu robota L-1. Charakterystykę robota przedstawiają prace [3,15]. Manipulator stanowi siedem członów połączonych parami kinematycznymi przesuwными i obrotowymi. Pierwsze trzy człony połączone są parami przesuwными. Człony czwarty, piąty i szósty połączone są parami obrotowymi. Podstawa manipulatora jest nieruchoma, pozostałe człony napędzane są pośrednio. Manipulator sterowany jest przez sterowniki bez sprzężenia zwrotnego od położenia członów. Siłownikami są silniki elektryczne skokowe.

Opis robota był niezbędny do opracowania programów komputerowych umożliwiających badanie zakresów zmian efektywnych momentów bezwładności siłowników, planowanie trajektorii zadanych ruchu, badanie układów sterowania tym manipulatorem, badanie skuteczności planowania ruchu i badanie wrażliwości układów sterowania na zmiany dowolnych parametrów masowych występujących w opisie robota [57,59,64,86].

W podrozdziale 4.1 skupimy uwagę na równaniach kinematyki członów w postaci ciągłej i różniczkowej oraz równaniach kinematyki siłowników. Zastosujemy metodę Piepera do rozwiązywania zadania odwrotnego kinematyki. Omówimy sposoby obliczeń współczynników dynamiki manipulatora L-1.

W podrozdziale 4.2 omówimy modele graficzne robota L-1, utworzone z bloków biblioteki Simulinka. Modele graficzne zostaną wykorzystane do automatycznego utworzenia programów symulacji robota L-1 w języku C. Zostaną utworzone za pomocą rozszerzenia Real Time Workshop.

W podrozdziale 4.3 omówimy przykłady symulacji ruchu robota L-1 za pomocą programów z podrozdziału 4.2. Symulację przeprowadzimy dla trajektorii zadanej skokowej i liniowej, zdefiniowanych podobnie jak w podrozdziale 3.3.

W podrozdziale 4.4 proponujemy metody tworzenia modeli uproszczonych manipulatora L-1 i przebadamy za pomocą symulacji skutki uproszczeń.

W podrozdziale 4.5 podsumujemy wyniki badań z podrozdziałów 4.1÷4.4.

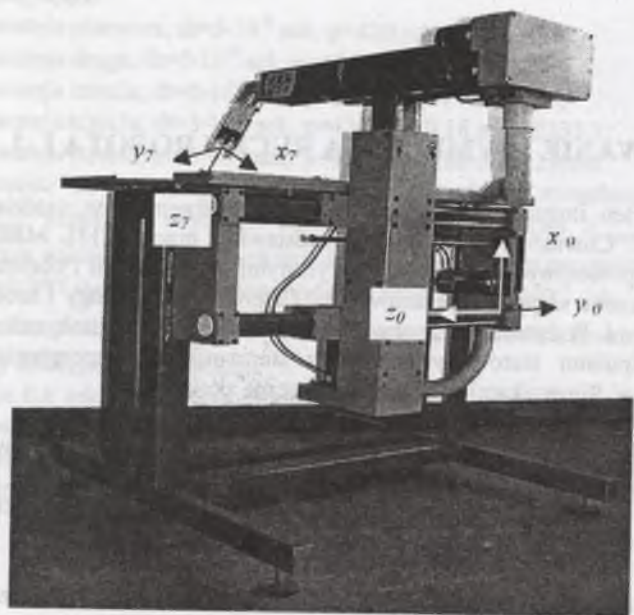
4.1. Modele MRP L-1

4.1.1. Kinematyka MRP L-1

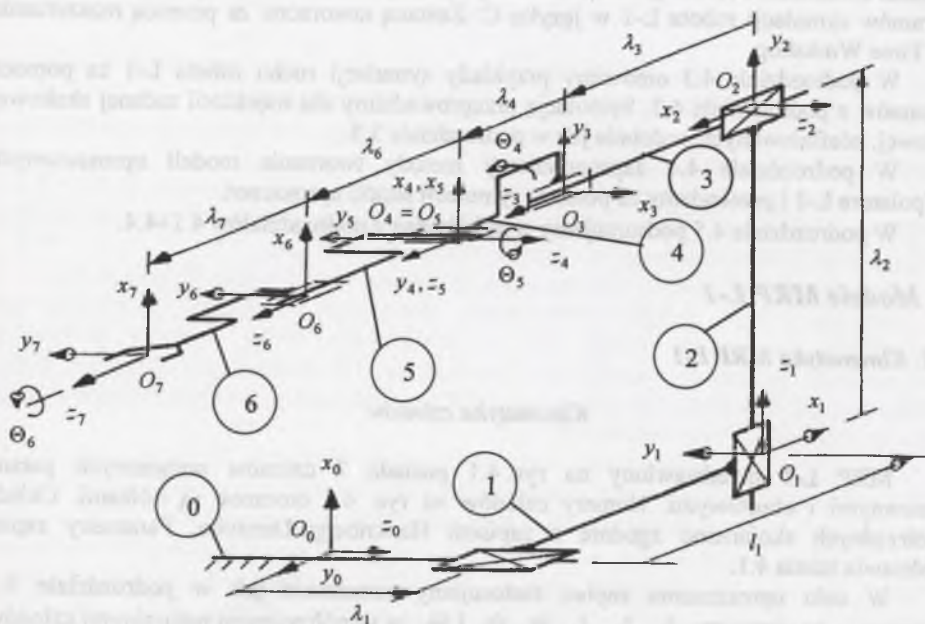
Kinematyka członów

MRP L-1 przedstawiony na rys.4.1 posiada 7 członów połączonych parami przesuwными i obrotowymi. Numery członów na rys. 4.1 otoczone są kółkami. Układy współrzędnych skojarzono zgodnie z zapisem Hartenberga-Denavita. Parametry zapisu przedstawia tabela 4.1.

W celu uproszczenia zapisu zastosujemy oznaczenia jak w podrozdziale 3.1. Przyjmujemy, że parametry $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \Theta_4, \Theta_5$ i Θ_6 są współrzędnymi naturalnymi członów. Macierze przekształceń $A_1 \div A_6$ i E mają następujące postacie:



Rys. 4.1a. Ilustracja MRP L-1
Fig. 4.1a. Illustration of L-1 IRM



Rys. 4.1b. Schemat kinematyczny MRP L-1
Fig. 4.1b. Kinematic scheme of L-1 IRM

Tabela 4.1

Parametry Hartenberga-Denavita MRP L-1

Nr członu	$\alpha_i [^\circ]$	$l_i [m]$	$\lambda_i [m]$	$\Theta_i [^\circ]$
1	-90	0.051	0÷0.420	-90
2	90	0	0.182÷0.399	-90
3	0	0	0.185÷0.490	0
4	0	0	0.055	0÷360
5	-90	0	0	-90÷90
6	0	0	0.040	0÷360

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -l_1 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
 A_4 &= \begin{bmatrix} S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ C_4 & 0 & S_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & -S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & C_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
 E &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Macierze T_6 i X opisujące człon roboczy i chwytak mają postać:

$$T_6 = \begin{bmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & -C_4 S_5 & -C_4 S_5 \lambda_6 + \lambda_2 \\ S_5 C_6 & -S_5 S_6 & C_5 & C_5 \lambda_6 + \lambda_4 + \lambda_3 - l_1 \\ -S_4 C_5 C_6 - C_4 S_6 & S_4 C_5 S_6 - C_4 C_6 & S_4 S_5 & S_4 S_5 \lambda_6 + \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.2a}$$

$$X = \begin{bmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & -C_4 S_5 & d_x \\ S_5 C_6 & -S_5 S_6 & C_5 & d_y \\ -S_4 C_5 C_6 - C_4 S_6 & S_4 C_5 S_6 - C_4 C_6 & S_4 S_5 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.2b}$$

$$\begin{aligned}
 d_x &= -C_4 S_5 \lambda_7 - C_4 S_5 \lambda_6 + \lambda_2, \quad d_y = C_5 \lambda_7 + C_5 \lambda_6 + \lambda_4 + \lambda_3 - l_1, \\
 d_z &= S_4 S_5 \lambda_7 + S_4 S_5 \lambda_6 + \lambda_1.
 \end{aligned} \tag{4.2c}$$

Macierz X możemy przedstawić w postaci

$$X = \text{Trans}(\lambda_2, \lambda_3 + \lambda_4 - l_1, \lambda_1) \text{Rot}(x, -90^\circ) \text{Rot}(z, \Theta_4) \text{Rot}(y, -\Theta_5) \text{Rot}(z, \Theta_6) \text{Trans}(0, 0, \lambda_6 + \lambda_7). \tag{4.2d}$$

Macierze T_6 i X są niezbędne do rozwiązania zadania prostego kinematyki MRP L-1 oraz wyznaczenia przestrzeni roboczej właściwej.

Zadanie odwrotne kinematyki

Zadanie odwrotne kinematyki opiszemy za pomocą współrzędnych zewnętrznych x, y, z, Φ, Θ i Ψ . Macierz \mathbf{X}_{zad} opisana za pomocą tych współrzędnych ma postać

$$\mathbf{X}_{zad} = \text{Trans}(x, y, z) \text{Rot}(x, -90^\circ) \text{Rot}(z, \Phi) \text{Rot}(y, \Theta) \text{Rot}(z, \Psi). \quad (4.3)$$

Z formuł (4.2d) i (4.3) wynikają następujące równania

$$\mathbf{X}_{zad} \text{Trans}(0, 0, -\lambda_6 - \lambda_7)$$

$$= \text{Trans}[x - (\lambda_6 + \lambda_7) \cos \Phi \sin \Theta, y - (\lambda_6 + \lambda_7) \cos \Theta, z + (\lambda_6 + \lambda_7) \sin \Phi \sin \Theta]$$

$$\text{Rot}(x, -90^\circ) \text{Rot}(z, \Phi) \text{Rot}(y, \Theta) \text{Rot}(z, \Psi)$$

$$= \text{Trans}(\lambda_2, \lambda_3 + \lambda_4 - l_1, \lambda_1) \text{Rot}(x, -90^\circ) \text{Rot}(z, \Theta_4) \text{Rot}(y, -\Theta_5) \text{Rot}(z, \Theta_6).$$

Równania te są równoważne 2 następującym równaniom opisującym tylko przemieszczenia i tylko orientacje:

$$\text{Trans}[x - (\lambda_6 + \lambda_7) \cos \Phi \sin \Theta, y - (\lambda_6 + \lambda_7) \cos \Theta, z + (\lambda_6 + \lambda_7) \sin \Phi \sin \Theta]$$

$$= \text{Trans}(\lambda_2, \lambda_3 + \lambda_4 - l_1, \lambda_1).$$

$$\text{Rot}(x, -90^\circ) \text{Rot}(z, \Phi) \text{Rot}(y, \Theta) \text{Rot}(z, \Psi)$$

$$= \text{Rot}(x, -90^\circ) \text{Rot}(z, \Theta_4) \text{Rot}(y, -\Theta_5) \text{Rot}(z, \Theta_6).$$

Równanie opisujące tylko przemieszczenia pozwala obliczyć współrzędne naturalne λ_1, λ_2 i λ_3 . Równanie opisujące tylko orientacje pozwala obliczyć współrzędne naturalne Θ_4, Θ_5 i Θ_6 . Równania te pozwoliły rozdzielić opis przemieszczenia od opisu orientacji chwytaka. Z równań tych wynikają bardzo proste formuły stanowiące rozwiązanie zadania odwrotnego kinematyki i mają postać:

$$\lambda_1 = z + (\lambda_6 + \lambda_7) \sin \Phi \sin \Theta, \quad (4.4a)$$

$$\lambda_2 = x - (\lambda_6 + \lambda_7) \cos \Phi \sin \Theta, \quad (4.4b)$$

$$\lambda_3 = y - (\lambda_6 + \lambda_7) \cos \Theta + l_1, \quad (4.4c)$$

$$\Theta_4 = \Phi, \quad (4.4d)$$

$$\Theta_5 = -\Theta, \quad (4.4e)$$

$$\Theta_6 = \Psi. \quad (4.4f)$$

Przyjmijmy granice kątów $0^\circ \leq \Phi, \Psi \leq 360^\circ$ i $-90^\circ \leq \Theta \leq 90^\circ$. Jest to idea metody Piepera, którą zastosowano w pracy [68] do rozwiązania zadania odwrotnego kinematyki MRP L-1.

Kinematyka członów w postaci różniczkowej

Ruch członu roboczego MRP L-1 opiszemy stosując formułę (2.25). Po uwzględnieniu formuł (4.1)÷(4.2) oraz (2.19) ÷ (2.24f) otrzymamy następujący opis kinematyki w postaci różniczkowej:

$$\begin{bmatrix} {}^6dx \\ {}^6dy \\ {}^6dz \\ {}^6d\varphi_x \\ {}^6d\varphi_y \\ {}^6d\varphi_z \end{bmatrix} = {}^6\mathbf{J}_6 \begin{bmatrix} d\lambda_1 \\ d\lambda_2 \\ d\lambda_3 \\ d\Theta_4 \\ d\Theta_5 \\ d\Theta_6 \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

$${}^6\mathbf{J}_6 = \begin{bmatrix} j_{11} & \dots & j_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ j_{61} & \dots & j_{66} \end{bmatrix},$$

$$j_{11} = -S_4 C_5 C_6 - C_4 S_6, \quad j_{21} = S_4 C_5 S_6 - C_4 C_6, \quad j_{31} = S_4 S_5, \quad j_{41} + j_{61} = 0,$$

$$j_{12} = C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6, \quad j_{22} = -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6, \quad j_{32} = -C_4 S_5, \quad j_{42} + j_{62} = 0,$$

$$j_{13} = S_5 C_6, \quad j_{23} = -S_5 S_6, \quad j_{33} = C_5, \quad j_{43} + j_{63} = 0,$$

$$j_{14} = -S_5 S_6 \lambda_6, \quad j_{24} = -S_5 C_6 \lambda_6, \quad j_{34} = 0, \quad j_{44} = S_5 C_6, \quad j_{54} = -S_5 S_6, \quad j_{64} = C_5,$$

$$j_{15} = -C_6 \lambda_6, \quad j_{25} = S_6 \lambda_6, \quad j_{35} = 0, \quad j_{45} = -S_6, \quad j_{55} = -C_6, \quad j_{65} = 0,$$

$$j_{16} + j_{56} = 0, \quad j_{66} = 1,$$

gdzie:

$${}^6dx \div {}^6dz \text{ oraz } {}^6d\varphi_x \div {}^6d\varphi_z \text{ jak w formule (3.5),}$$

przy czym

$$\det {}^6\mathbf{J}_6 = -S_5. \quad (4.6)$$

$$\det {}^6\mathbf{J}_6 = 0 \text{ dla } \Theta_5 = 0^\circ.$$

Współrzędne naturalne siłowników

Napędy z siłowników na poszczególne człony MRP L-1 przekazywane są przez odpowiednie zespoły napędowe. Zależności wiążące współrzędne naturalne członów $\lambda_1 \div \lambda_3$ oraz $\Theta_4 \div \Theta_6$ ze współrzędnymi naturalnymi siłowników $\Theta_{s1} \div \Theta_{s6}$ opisują formuły:

$$\lambda_1 = k_1^{-1} \Theta_{s1}, \quad \lambda_2 = k_2^{-1} \Theta_{s2}, \quad \lambda_3 = k_3^{-1} \Theta_{s3}, \quad \Theta_4 = k_4^{-1} \Theta_{s4}, \quad \Theta_5 = k_5^{-1} \Theta_{s5} + 0.5 \Theta_4, \quad (4.7)$$

$$\Theta_6 = k_6^{-1} \Theta_{s6} + 2 \Theta_5.$$

Formuły odwrotne są następujące:

$$\Theta_{s1} = k_1 \lambda_1, \quad \Theta_{s2} = k_2 \lambda_2, \quad \Theta_{s3} = k_3 \lambda_3, \quad \Theta_{s4} = k_4 \Theta_4, \quad \Theta_{s5} = k_5 \Theta_5 - 0.5 k_5 \Theta_4, \quad (4.8)$$

$$\Theta_{s6} = k_6 \Theta_6 - 2 k_6 \Theta_5.$$

W formułach (4.7) i (4.8) $k_1 \div k_6$ są przełożeniami przekładni zespołów napędowych odpowiednich członów.

Kinematyka siłowników i zespołów przekazujących napędy

Kinematykę siłowników opisują macierze jednorodne $\mathbf{T}_{s1} \div \mathbf{T}_{s6}$.

$$\mathbf{T}_{s1} = \begin{bmatrix} S_{s1} & C_{s1} & 0 & -FG1 - BC1 \\ 0 & 0 & 1 & -GH1 + CDI(\lambda_1) + DE1 \\ C_{s1} & -S_{s1} & 0 & -EF1 - AB1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

$$CDI(\lambda_1) = 420 - \lambda_1 [mm],$$

$$T_{s2} = \begin{bmatrix} S_{s2} & C_{s2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & DE2 - AB2(\lambda_2) - BC2 \\ -C_{s2} & S_{s2} & 0 & CD2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$AB2(\lambda_2) = \lambda_2 - 182[mm], \quad (4.10)$$

$$T_{s3} = \begin{bmatrix} S_{s3} & C_{s3} & 0 & -DE3 - CD3 \\ C_{s3} & -S_{s3} & 0 & -BC3 \\ 0 & 0 & -1 & EF3 - AB3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

$$T_{s4} = \begin{bmatrix} C_{s4} & -S_{s4} & 0 & BC4 \\ 0 & 0 & -1 & -AB4 \\ S_{s4} & C_{s4} & 0 & -CD4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

$$T_{s5} = \begin{bmatrix} C_{45}C_5 & -S_{45}C_5 & -S_5 & BC5 \cdot C_4C_5 + CD5 \cdot S_4C_5 + (-AB5 + DE5)S_5 \\ -S_{45} & -C_{45} & 0 & BC5 \cdot S_4 - CD5 \cdot C_4 \\ -C_{45}S_5 & S_{45}S_5 & -C_5 & -BC5 \cdot C_4S_5 - CD5 \cdot S_4S_5 + (-AB5 + DE5)C_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$S_{45} = \sin(\Theta_{s5} - \Theta_4), \quad C_{45} = \cos(\Theta_{s5} - \Theta_4), \quad (4.13)$$

$$T_{s6} = \begin{bmatrix} C_{46}C_5C_6 - S_{46}S_6 & -S_{46}C_5C_6 - C_{46}S_6 & -S_5C_6 & d_x \\ -C_{46}C_5S_6 - S_{46}C_6 & S_{46}C_5S_6 - C_{46}C_6 & S_5S_6 & d_y \\ -C_{46}S_5 & S_{46}S_5 & -C_5 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$d_x = -CD6(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - DE6(S_4C_5C_6 + C_4S_6) - BC6 \cdot S_5C_6,$$

$$d_y = CD6(C_4C_5S_6 + S_4C_6) + DE6(S_4C_5S_6 - C_4C_6) + BC6 \cdot S_5S_6,$$

$$d_z = CD6 \cdot C_4S_5 + DE6 \cdot S_4S_5 - BC6 \cdot C_5 - AB6,$$

$$S_{46} = \sin(\Theta_4 + \Theta_{s6}), \quad C_{46} = \cos(\Theta_4 + \Theta_{s6}), \quad (4.14)$$

gdzie:

$AB1, AB3+AB6, BC1+BC6, CD2+CD6, DE1+DE6, EF1+EF6, FG1+FG6, GH1+GH6$
– parametry geometryczne,

$S_{si} = \sin \Theta_{si}, \quad C_{si} = \cos \Theta_{si}, \quad i=1,2,3,4.$

Z analizy w pracy [15] wynika, że w równaniach dynamiki MRP L-1 należy uwzględnić pierwszy element zespołu napędowego członu 5 oraz drugi element zespołu napędowego członu 6. Pierwszy element zespołu napędowego członu 5 ma masę porównywalną z masą członu 5. Drugi element zespołu napędowego członu 6 ma masę porównywalną z masą członu 6. Kinematykę elementu pierwszego opisuje macierz T_{051} .

$$T_{051} = \begin{bmatrix} C_{25} & -S_{25} & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & -1 & -AB - l_1 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ S_{25} & C_{25} & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$S_{25} = \sin 2\Theta_5, \quad C_{25} = \cos 2\Theta_5. \quad (4.15)$$

Kinematykę elementu drugiego opisuje macierz T_{062}

$$T_{062} = \begin{bmatrix} C_{56} & -S_{56} & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 1 & -l_1 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ -S_{56} & -C_{56} & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$S_{56} = \sin(\Theta_6 - 2\Theta_5), \quad C_{56} = \cos(\Theta_6 - 2\Theta_5). \quad (4.16)$$

4.1.2. Dynamika MRP L-1

Dynamikę MRP L-1 opiszemy za pomocą formuł (2.55)÷(2.62). Napędy manipulatora są pośrednie i w równaniach dynamiki należy dodatkowo uwzględnić elementy zespołów napędowych opisanych macierzami T_{051} i T_{062} . Parametry masowe tych elementów opisują macierze J_{51} i J_{62} . Uwzględnimy także tarcie opisane formułami (2.68). Z badań eksperymentalnych wynikają siły tarcia jak dla MRP AS, przedstawione w podrozdziale 3.1.2.

Na podstawie modeli kinematyki z podrozdziału 4.1 wyznaczono pochodne macierzy $T_i, T_{si}, T_{051}, T_{062}$ i $\partial q_i / \partial q_{sj}$ występujące w równaniach dynamiki.

Macierze pseudobezwładności $J_1 + J_6, J_{51}$ i J_{62} wyznaczono za pomocą programu komputerowego *pseudo* [15].

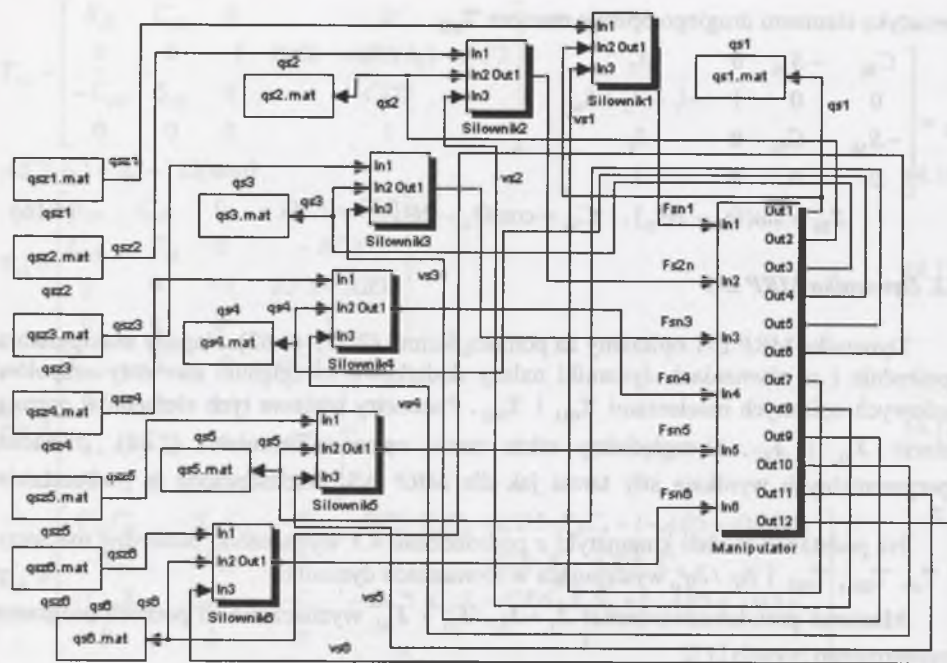
Postać analityczna pochodnych macierzy $T_i, T_{si}, T_{051}, T_{062}$ została wyznaczona za pomocą biblioteki MATLAB-a Symbolic Math Toolbox. Biblioteka ta została wykorzystana do utworzenia postaci analitycznej jawnej współczynników $D_{sij}, D_{sijk}, D_{si}$ występujących w formułach (2.61), (2.82) i (2.83). Postacie te uwzględniają zmiany współczynników spowodowane obiektem manipulacji i elementami zespołów napędowych opisanymi macierzami pseudobezwładności J_{51} i J_{62} .

4.2. Modele robota L-1 w środowisku programowym Simulinka

W podrozdziale tym przedstawimy model graficzny robota L-1. Model robota zawiera modele manipulatora i siłowników.

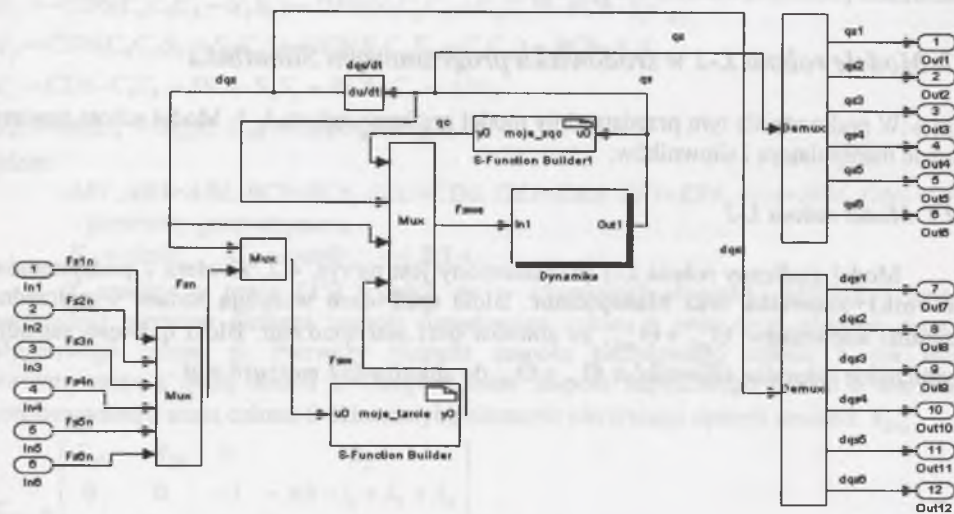
4.2.1. Model robota L-1

Model graficzny robota L-1 przedstawiony jest na rys. 4.2. Zawiera 7 podsystemów **Siłownik1+Siłownik6** oraz **Manipulator**. Bloki **qs1÷qs6** wczytują zadane współrzędne naturalne siłowników $\Theta_{s21} \div \Theta_{s26}$, ze zbiorów **qs1.mat÷qs6.mat**. Bloki **qs1÷qs6** zapisują współrzędne naturalne siłowników $\Theta_{s1} \div \Theta_{s6}$ do zbiorów **qs1.mat÷qs6.mat**.



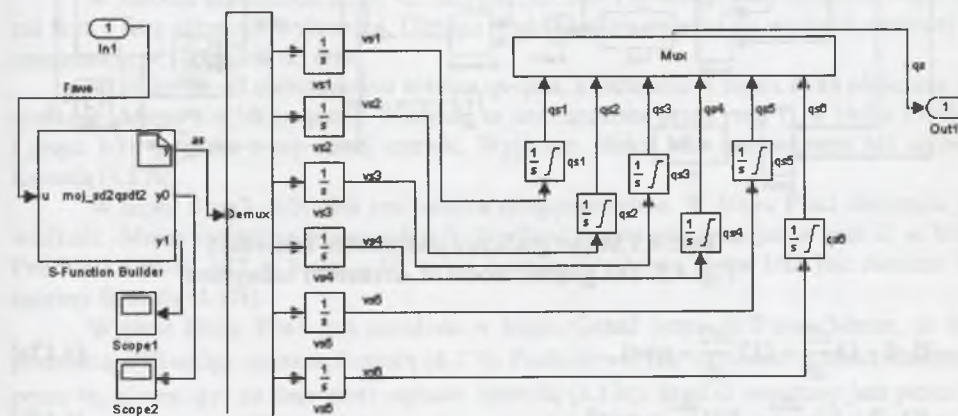
Rys. 4.2. Model graficzny robota L-1
Fig. 4.2. The graphic model of L-1 robot

4.2.2. Model manipulatora



Rys. 4.3. Model graficzny podsystemu Manipulator
Fig. 4.3. The graphic model of Manipulator subsystem

Model graficzny manipulatora L-1 przedstawiony jest na rys. 4.3. Jest podobny do modelu manipulatora AS z rys. 3.3. Blok **S-Function Builder 1** oblicza współrzędne naturalne członów qc, równe $\lambda_1 + \lambda_3$ oraz $\Theta_4 + \Theta_6$. Oblicza za pomocą funkcji *moje_sqc*. Wyjście qs podsystemu **Dynamika** zawiera współrzędne siłowników $\Theta_{s1} + \Theta_{s6}$. Wyjścia qs1÷qs6 oraz dqsl÷dqss6 podsystemu **Manipulator** są odpowiednio współrzędnymi naturalnymi $\Theta_{s1} + \Theta_{s6}$ i prędkościami $\dot{\Theta}_{s1} + \dot{\Theta}_{s6}$. Blok **S-Function Builder** oblicza wypadkowe siły napędowe $F_{slw} + F_{s6w}$ za pomocą funkcji *moje_tarcie*. Pozostałe bloki i wielkości są takie same jak w modelu graficznym manipulatora AS z rys. 3.3.

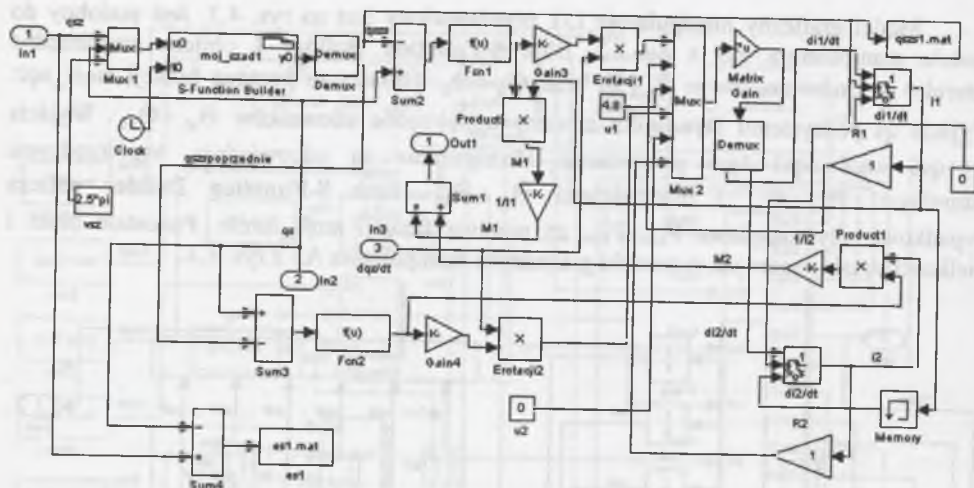


Rys. 4.4. Model graficzny podsystemu Dynamika
Fig. 4.4. The graphic model of Dynamics subsystem

4.2.3. Modele siłowników

Model graficzny siłownika 1 przedstawiony jest na rys. 4.5. Symuluje pracę sterownika i silnika skokowego napędzającego człon pierwszy MRP L-1. Wejściami In1÷In3 podsystemu **Siłownik1** są qsz, qs i vs. qsz to zadana współrzędna naturalna Θ_{s1z} , qs – współrzędna naturalna Θ_{s1} i vs – prędkość $\dot{\Theta}_{s1}$. Blok vsz zadaje częstotliwość przełączania faz silnika skokowego przez sterownik. Częstotliwość jest równa wyjściu bloku vsz podzielonemu przez skok silnika. Wyjście qs bloku vsz i qsz stanowią wejście bloku **S-Function Builder**, symulującego sterownik. W bloku tym funkcja *moj_szadl* oblicza zadany kąt strumienia qszs i qszspz. qszspz jest równe qszs w poprzednim przełączeniu faz. qszs jest całkowitą krotnością skoku silnika, równego 1.8° , zmieniającą się z częstotliwością przełączania faz o wartość jednego skoku silnika, aż do chwili osiągnięcia wartości odpowiadającej qsz.

Na podstawie danych technicznych z prac [1,3] przyjęto, że silniki skokowe napędzające człony MRP L-1 mają 8 biegunów, a wirnik 50 zębów. Zęby są biegunami magnesów trwałych. Formuły (4.17a÷i) opisują działanie silników skokowych uwzględniające: bezwładności elektryczne, sprzężenie magnetyczne fazy 1 i fazy 2, oddziaływanie mechaniczne zanikającego prądu w fazie 2 [1,25]. Faza 1 jest aktualnie włączona, faza 2 poprzednio włączona, aktualnie wyłączona.



Rys. 4.5. Model graficzny podsystemu Silownik1
Fig. 4.5. The graphic model of Actuator1 subsystem

$$u1 = R1 \cdot i1 + L1 \frac{di1}{dt} + L12 \frac{di2}{dt} + erot1, \quad (4.17a)$$

$$u2 = R2 \cdot i2 + L2 \frac{di2}{dt} + L21 \frac{di1}{dt} + erot2, \quad (4.17b)$$

$$erot1 = \frac{\partial \Psi_{1m}}{\partial q_s} \dot{q}_s, \quad (4.17c)$$

$$erot2 = \frac{\partial \Psi_{2m}}{\partial q_s} \dot{q}_s, \quad (4.17d)$$

$$M1(q_s) + M2(q_s) = F_{sn}, \quad (4.17e)$$

$$\frac{\partial \Psi_{1m}}{\partial q_s} = -50 \Psi_{\max} \cdot \sin[50(q_s - q_{szs})], \quad (4.17f)$$

$$\frac{\partial \Psi_{2m}}{\partial q_s} = -50 \Psi_{\max} \cdot \sin[50(q_s - q_{szs_poprzednie})], \quad (4.17g)$$

$$M1(q_s) = -\frac{i1}{I1} M_{\max} \cdot \sin[50(q_s - q_{szs})], \quad (4.17h)$$

$$M2(q_s) = -\frac{i2}{I2} M_{\max} \cdot \sin[50(q_s - q_{szs_poprzednie})], \quad (4.17i)$$

gdzie:

$u1$ - napięcie fazy 1,

$u2$ - napięcie fazy 2,

$R1, L1, L12$ - opór, indukcyjność własna i wzajemna fazy 1,

$R2, L2, L21$ - opór, indukcyjność własna i wzajemna fazy 2,

$i1, i2$ - prąd fazy 1, 2,

$I1, I2$ - prądy ustalone faz włączonych 1, 2,

Ψ_{1m}, Ψ_{2m} - strumienie magnetyczne skojarzone z fazą 1, 2,

q_s, \dot{q}_s - kąt i prędkość obrotowa wirnika,

Ψ_{\max} - maksymalna wartość Ψ_{1m} i Ψ_{2m} ,

M_{\max} - maksymalna wartość momentu napędowego silownika.

Formuły (4.17a) i (4.17b) możemy przekształcić do postaci:

$$\begin{bmatrix} \frac{di1}{dt} \\ \frac{di2}{dt} \end{bmatrix} = KC, \quad K = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} -L2 & -L2 & L2 & L12 & -L12 & L12 \\ L21 & L21 & -L21 & -L1 & L1 & -L1 \end{bmatrix},$$

$$\Delta = L1 \cdot L2 - L12 \cdot L21, \quad C = [\text{erot1} \quad i1 \cdot R1 \quad u1 \quad \text{erot2} \quad u2 \quad i2 \cdot R2]^T. \quad (4.18)$$

W modelu graficznym z rys. 4.5 przyjęto, że faza 1 symuluje fazę aktualnie włączoną, zaś faza 2 fazę aktualnie wyłączoną. Dlatego prąd $i1$ będzie narastał do wartości ustalonej $I1$, natomiast prąd $i2$ zanikał do zera.

W bloku **Sum2** obliczana jest różnica $q_s - q_{szs}$, a następnie w bloku **Fcn1** obliczana jest wielkość $-M_{\max} \cdot \sin[50(q_s - q_{szs})]$. Wielkość ta jest mnożona przez prąd $i1$ w bloku **Product** i przez $1/I1$ w bloku o tej samej nazwie. Wyjściem bloku $1/I1$ jest moment $M1$ opisany formułą (4.17h).

W bloku **Sum3** obliczana jest różnica $q_s - q_{szs_poprzednie}$. W bloku **Fcn2** obliczana jest wielkość $-M_{\max} \cdot \sin[50(q_s - q_{szs_poprzednie})]$. Wielkość ta jest mnożona przez prąd $i2$ w bloku **Product1** i przez $1/I2$ w bloku o tej samej nazwie. Wyjściem bloku $1/I2$ jest moment $M2$ opisany formułą (4.17i).

Wyjście bloku **Fcn1** jest mnożone w bloku **Gain3** przez $50 \Psi_{\max} / M_{\max}$, co daje pochodną $\partial \Psi_{1m} / \partial q_s$ opisaną formułą (4.17f). Pochodna ta jest mnożona w bloku **Erotacji1** przez \dot{q}_s , równe \dot{q}_s , co daje erot1 opisaną formułą (4.17c). Prąd $i1$ mnożony jest przez $R1$ w bloku **R1**. Wyjście bloku **Fcn2** jest mnożone w bloku **Gain4** przez $50 \Psi_{\max} / M_{\max}$, co daje pochodną $\partial \Psi_{2m} / \partial q_s$ opisaną formułą (4.17g). Pochodna ta jest mnożona w bloku **Erotacji2** przez \dot{q}_s , równe \dot{q}_s , co daje erot2 opisaną formułą (4.17d). W bloku **Mux2** utworzona jest macierz **C** z równania (4.18). Blok **Matrix Gain** mnoży macierz **C** przez macierz **K** z równania (4.18). Wyjście tego bloku jest dekomponowane na pochodne $di1/dt$ oraz $di2/dt$. Blok całkujący $di1/dt$ oblicza prąd $i1$. Na wejście bloku $di1/dt$ przesyłane są q_{szs} i stała wartość zerowa z bloku typu **constans**. W chwili zmiany wartości q_{szs} następuje ustawienie zerowej wartości początkowej całkowania w bloku $di1/dt$. Jest to równoważne przełączeniu faz. Blok całkujący $di2/dt$ oblicza prąd $i2$. Na wejście bloku $di2/dt$ przesyłane są q_{szs} i prąd $i1$ z poprzedniego kroku symulacji. Blok **Memory** zapamiętuje wartości $i1$ z poprzedniego kroku symulacji. W chwili zmiany wartości q_{szs} następuje ustawienie warunku początkowego całkowania w bloku $di2/dt$, równego prądowi $i1$ z poprzedniego kroku symulacji. Jest to równoważne przełączeniu faz.

Wielkość q_{szs} jest zapisywana w bloku o tej samej nazwie do zbioru o tej samej nazwie z rozszerzeniem **mat**. W bloku **Sum4** obliczana jest różnica $q_{szs} - q_s$, która jest zapisywana przez blok **es1** do zbioru o tej samej nazwie z rozszerzeniem **mat**. Blok **Sum1** sumuje momenty $M1$ i $M2$ dając moment napędowy silownika 1 F_{s1n} . F_{s1n} jest wyjściem **Out1** podsystemu **Silownik1**.

Tabela 4.2

Parametry silowników							
Nr silownika	$R1, R2 [\Omega]$	$L1, L2$ [mH]	$L12, L21$ [mH]	Ψ_{\max} [mWb]	$I1$ [A]	$I2$ [A]	M_{\max} [Nm]
1,2,3	1	2.2	1.97	6.3	4.8	4.8	1.5
4,5,6	1	1.8	1.60	5.5	4.0	4.0	1.1

Podsystemy **Silownik2+Silownik6** mają identyczną strukturę z podsystemem **Silownik1**. Parametry tych podsystemów przedstawia tabela 4.2. Parametry w tabeli 4.2 przyjęto opierając się na pracy [1,3].

4.3. Przykłady symulacji ruchu robota L-1

Przedstawimy wyniki symulacji ruchu MRP L-1 ustawionego tak, że wektor grawitacji Ziemi jest skierowany przeciwnie do osi x_0 układu bazowego z rys. 4.1. Do symulacji zastosowano program *L-1* w języku C. Program został utworzony automatycznie za pomocą rozszerzenia RTW z modelu graficznego przedstawionego na rys. 4.2. Przyjęto wartości początkowe współrzędnych naturalnych równe współrzędnym punktu początkowego trajektorii zadanej. Symulację przeprowadzono ze stałym krokiem dyskretyzacji równym $2 \cdot 10^{-4}$ sek. Wartość ta jest o rząd wielkości mniejsza od stałej czasowej prądów silników napędzających czwarty, piąty i szósty człon. Prądy te mogą zmieniać się najszybciej spośród sygnałów wyjściowych wszystkich podsystemów modelu graficznego robota L-1. Zadana prędkość kątowa przełączanego strumienia magnetycznego silników $vsz=2.5\pi$ rad./sek. (wyjście bloku *vsz* na rys. 4.5). Na rysunkach *qs1÷qs6* oznaczają współrzędne naturalne siłowników zadane $\Theta_{s1zad} \div \Theta_{s6zad}$, $q_{s1} \div q_{s6}$ współrzędne naturalne siłowników $\Theta_{s1} \div \Theta_{s6}$, $eqsi=qszi-qi$ błędy regulacji $\Theta_{si} - \Theta_{si}$.

4.3.1. Trajektorie zadane

Trajektorie zadane MRP L-1 w przestrzeni zewnętrznej opiszemy za pomocą formuły:

$$X_{zad} = Trans(x_{zad}, y_{zad}, z_{zad}) Rot(x, -0.5\pi) Rot(z, \Phi_{zad}) Rot(y, \Theta_{zad}) Rot(z, \Psi_{zad}). \quad (4.19)$$

Trajektorię zadaną zmieniającą się skokowo w chwili $t=0$ sek. opisują współrzędne punktu początkowego P i końcowego K. Współrzędne punktu P mają wartości:

$$x_{zad} = 0.10 \text{ m.}, \quad y_{zad} = 0.40 \text{ m.}, \quad z_{zad} = 0.20 \text{ m.}, \quad \Phi_{zad} = 0 \text{ rad.}, \quad \Theta_{zad} = -0.5\pi \text{ rad.}, \quad \Psi_{zad} = 0 \text{ rad.} \quad (4.20a)$$

Współrzędne punktu K są następujące:

$$x_{zad} = 0.15 \text{ m.}, \quad y_{zad} = 0.45 \text{ m.}, \quad z_{zad} = 0.25 \text{ m.}, \quad \Phi_{zad} = 0.25\pi \text{ rad.}, \quad \Theta_{zad} = -0.25\pi \text{ rad.}, \quad \Psi_{zad} = 0.25\pi \text{ rad.} \quad (4.20b)$$

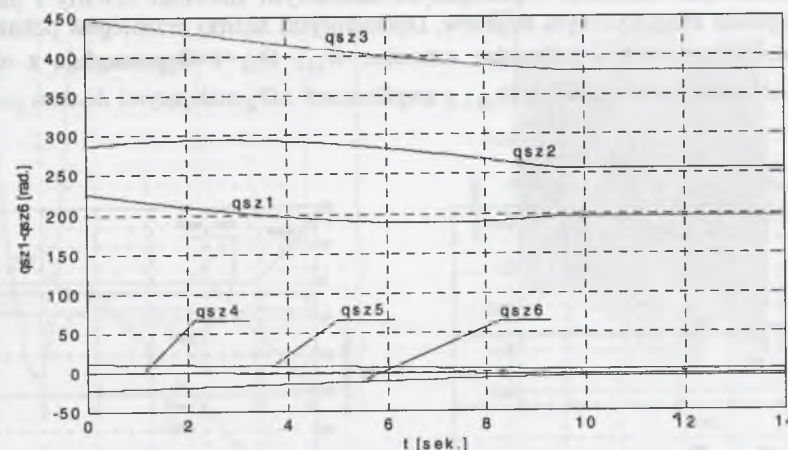
Współrzędne naturalne członów obliczono za pomocą programu *kinodwr*, w którym zastosowano formuły (4.4). Następnie obliczono współrzędne naturalne siłowników za pomocą programu *qs*, w którym zastosowano formuły (4.8). Obliczone współrzędne naturalne punktu P mają wartości:

$$\Theta_{s1zad} = 226.1947 \text{ rad.}, \quad \Theta_{s2zad} = 286.7017 \text{ rad.}, \quad \Theta_{s3zad} = 447.8654 \text{ rad.}, \quad \Theta_{s4zad} = 0 \text{ rad.}, \quad \Theta_{s5zad} = 11.3097 \text{ rad.}, \quad \Theta_{s6zad} = -22.6195 \text{ rad.} \quad (4.21a)$$

Współrzędne naturalne punktu K są następujące:

$$\Theta_{s1zad} = 195.9411 \text{ rad.}, \quad \Theta_{s2zad} = 256.4482 \text{ rad.}, \quad \Theta_{s3zad} = 381.6573 \text{ rad.}, \quad \Theta_{s4zad} = -2.8274 \text{ rad.}, \quad \Theta_{s5zad} = 2.8274 \text{ rad.}, \quad \Theta_{s6zad} = -5.6549 \text{ rad.} \quad (4.21b)$$

Trajektorię zadaną prostoliniową zaplanowano za pomocą programu *plan*. Program *plan* oblicza współrzędne zewnętrzne x_{zad} , y_{zad} , z_{zad} , Φ_{zad} , Θ_{zad} , Ψ_{zad} punktów pośrednich leżących na prostej łączącej punkt początkowy P i końcowy K. Kąty Φ_{zad} , Θ_{zad} ,



Rys. 4.6. Współrzędne naturalne $qs1 \div qs6$
Fig. 4.6. Required natural coordinates $qs1 \div qs6$

Ψ_{zad} zmieniają się liniowo z długością trajektorii. Parametrami wejściowymi programu *plan* są współrzędne zewnętrzne punktów P i K oraz żądana liczba punktów pośrednich. Po zadeklarowaniu 100 punktów pośrednich między punktami P i K zaplanowano w przestrzeni zewnętrznej trajektorię zadaną. Następnie obliczono współrzędne naturalne siłowników w punktach pośrednich za pomocą programu *kinodwr* i *qs*. Współrzędne punktów P i K są identyczne ze współrzędnymi trajektorii skokowej i opisują je równania (4.20) i (4.21). Planowany czas przyjęto w oparciu o czasy Δt_k , potrzebne do zmiany współrzędnych naturalnych siłowników między punktami P i K, z prędkością zadawania strumienia magnetycznego $vsz=2.5\pi$ rad./sek. Czasy Δt_k mają następujące wartości:

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 = 3.852 \text{ sek.}, \quad \Delta t_3 = 8.4299 \text{ sek.}, \quad \Delta t_4 = 0.36 \text{ sek.}, \quad \Delta t_5 = 1.08 \text{ sek.}, \quad \Delta t_6 = 2.16 \text{ sek.} \quad (4.22)$$

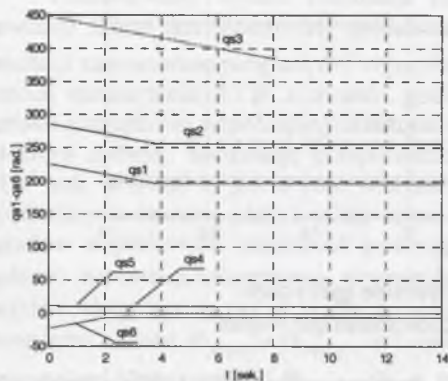
Dla uniknięcia gubienia skoków przez silniki w czasie ruchu planowany czas ruchu powinien być większy od $\Delta t_{kmax} = \Delta t_3 = 8.4299 \text{ sek.}$ Przyjęto planowany czas ruchu 9.5 sek., czyli o blisko 1 sek. większy od Δt_{kmax} . Planowane czasy ruchu między sąsiednimi punktami są jednakowe i równe $9.5/101=0.094$ sek. 101 to liczba odcinków trajektorii. Trajektorie ilustruje rys. 4.6.

4.3.2. Symulacja ruchu

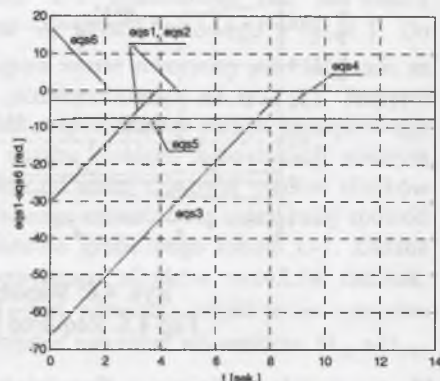
Do symulacji ruchu wykorzystujemy model graficzny robota L-1 z rys. 4.2. Symulację przeprowadzono dla trajektorii zadanej skokowej opisanej formułami (4.20)÷(4.21) oraz dla trajektorii zadanej zilustrowanej na rys. 4.6.

Wyniki symulacji dla trajektorii zadanej skokowej przedstawiają rys. 4.7 i 4.8. Rys. 4.8 przedstawia błędy regulacji eqs. Z rys. 4.7 i 4.8 wynika, że: współrzędna Θ_{s6} zbliża się do wartości zadanej końcowej po czasie około 2 sek., współrzędne Θ_{s1} i Θ_{s2} po czasie około 3.8 sek., współrzędna Θ_{s3} po czasie 8.2 sek. Współrzędne Θ_{s4} i Θ_{s5} nie osiągają wartości zadanych końcowych. Ustalono wartości błędów $eqs4=-2.7644$ rad.(=-87.9947 skoków) i $eqs5=-7.5400$ rad.(=-240.0065 skoków). Przypomnijmy, że skok jest równy $\pi/100$

rad. Przy skokowych zmianach współrzędnych naturalnych siłowniki czwarty i piąty nie nadążają za polem magnetycznym stojanów. Dokładniejsza analiza przebiegów pokazuje, że po wymienionych czasach współrzędne naturalne Θ_{s4} , Θ_{s5} i Θ_{s6} oscylują z okresem 0.2 sek. wokół wartości końcowych Θ_{sik} , z amplitudami $\Delta\Theta_{si}$ malejącymi do zera po czasie $t > 8.45$ sek.



Rys. 4.7. Współrzędne naturalne qs1-qs6
Fig. 4.7. Natural coordinates qs1-qs6

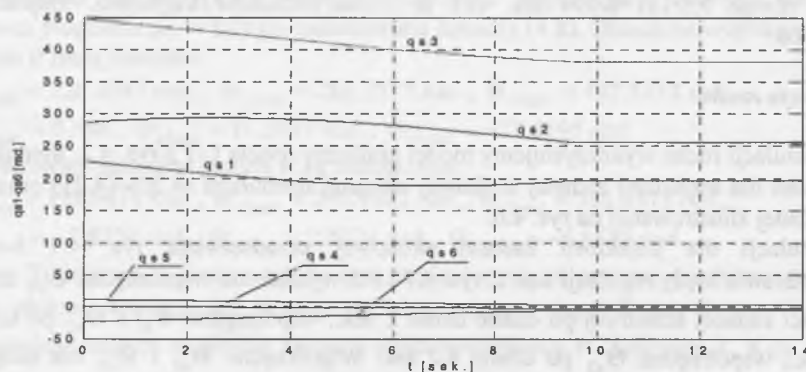


Rys. 4.8. Błędy regulacji eqs1-eqs6
Fig. 4.8. Control errors eqs1-eqs6

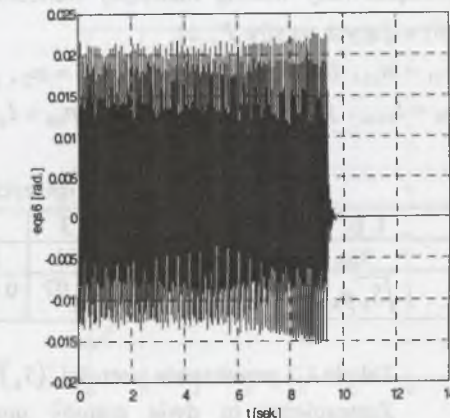
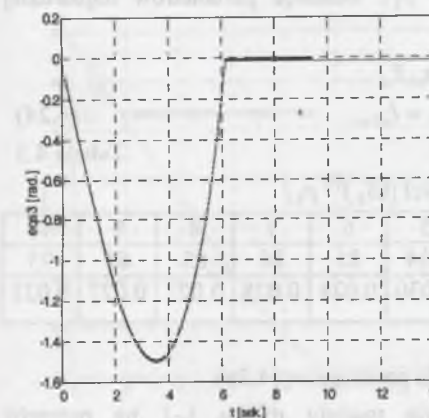
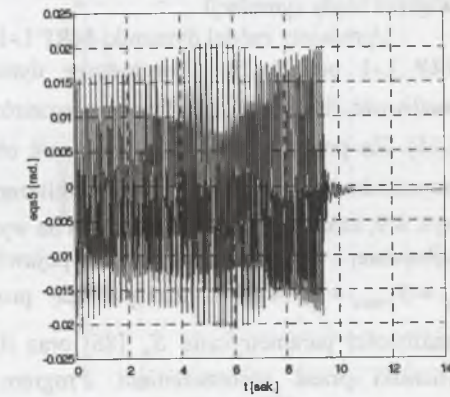
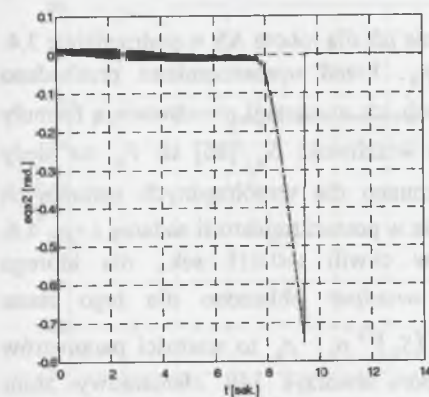
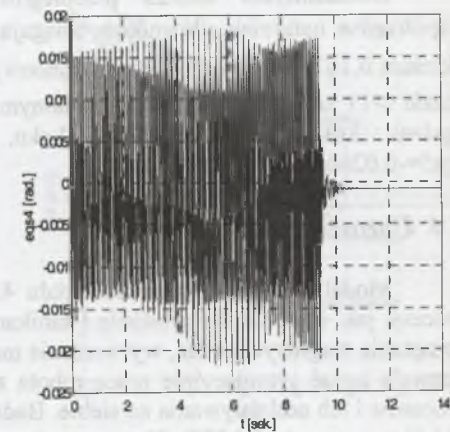
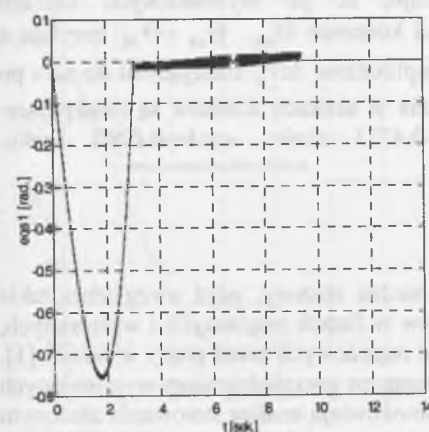
Wyniki symulacji dla trajektorii zadanej w postaci linii prostej z rys. 4.6 przedstawiają rys. 4.9 i 4.10. Z rysunków wynika, że współrzędne $\Theta_{s1} \div \Theta_{s3}$ zbliżają się do wartości zadanych końcowych po czasie około 9.4 sek., a współrzędne $\Theta_{s4} \div \Theta_{s6}$ po czasie 9.7 sek. Dłużej do wartości zadanych końcowych zbliżają się współrzędne $\Theta_{s4} \div \Theta_{s6}$. Z rys. 4.10 wynikają następujące maksymalne amplitudy błędów:

$$\begin{aligned} \max|eqs1| &= 0.76 \text{ rad}, \\ \max|eqs2| &= 0.76 \text{ rad}, \\ \max|eqs3| &= 1.50 \text{ rad}, \\ \max|eqs4| &= 0.022 \text{ rad}, \\ \max|eqs5| &= 0.021 \text{ rad}, \\ \max|eqs6| &= 0.023 \text{ rad}. \end{aligned}$$

(4.23)



Rys. 4.9. Współrzędne naturalne qs1-qs6
Fig. 4.9. Natural coordinates qs1-qs6



Rys. 4.10. Błędy regulacji eqs1-eqs6
Fig. 4.10. Control errors eqs1-eqs6

Wszystkie współrzędne zmieniają się skokowo z oscylacjami wokół kolejnych położań stabilnych wirników. Zmiana położań stabilnych następuje na skutek zmieniającego się skokowo kierunku strumienia magnetycznego, pochodzącego od prądów fazowych.

Dokładniejsza analiza przebiegów pokazuje, że po wymienionych czasach współrzędne naturalne siłowników osiągają wartości końcowe Θ_{sik} . $\Theta_{s4} + \Theta_{s6}$ oscylują z okresem 0.167 sek. wokół wartości końcowych z amplitudami $\Delta\Theta_{si}$ malejącymi do zera po czasie $t > 11$ sek. Błędy w stanie ustalonym wyrażone w skokach siłowników są następujące: eqs1=0 skoku, eqs2=0.0584 skoku, eqs3=-0.4721 skoku, eqs4=-0.0262 skoku, eqs5=-0.0266 skoku, eqs6=0 skoku.

4.4. Uproszczenia modeli

Model robota L-1 z podrozdziału 4.2. jest bardzo złożony, gdyż uwzględnia takie procesy, jak: ruch MRP, narastanie i zanikanie prądów w fazach włączanych i wyłączanych, sprzężenie magnetyczne faz, wytwarzanie momentów napędowych przez prądy w fazach [1]. Pozwala badać symulacyjnie pracę robota z jednoczesnym uwzględnieniem wymienionych procesów i ich oddziaływania na siebie. Badania te umożliwiają analizę sterowania złożonym obiektem w postaci MRP. Uproszczenie modelu robota zmniejsza czas obliczeń, ale też zwiększa błędy symulacji.

Uprościmy model dynamiki MRP L-1 podobnie jak dla robota AS w podrozdziale 3.4. MRP L-1 posiada 140 parametrów dynamiki p_k . Przed uproszczeniami przebadano wrażliwość sił F_{si} na błędy tych parametrów. Sposób ich numeracji przedstawiają formuły (6.15). Za pomocą programu *swrazlcalc* obliczono wrażliwość S_g [86] sił F_{si} na błędy wszystkich 140 parametrów p_k . Obliczenia wykonano dla współrzędnych naturalnych z rys. 4.9, które są odpowiedzią robota na wymuszenie w postaci trajektorii zadanej z rys. 4.6. Najbardziej wrażliwy stan MRP pojawił się w chwili $t \approx 0.011$ sek., dla którego $S_g = S_{gmax} = 1.614 \cdot 10^7$. Za pomocą programu *wrazlpar* obliczono dla tego stanu wrażliwości parametryczne S_k [86] oraz iloczyny $(S_k)^{1/2} p_k$. p_k to wartości parametrów dynamiki przed uproszczeniem. Program *wrazlpar* utworzył 140 elementowy zbiór uporządkowany według malejącej wartości $|(S_k)^{1/2} p_k|$. Dziesięć parametrów najbardziej wpływających na siły F_{si} to:

$$\begin{aligned} p_{111} &= m_{s6}, p_{101} = m_{s5}, p_{21} = m_3, p_{11} = m_2, p_{114} = m_{s6} \bar{z}_{s6}, \\ p_{85} &= I_{s3xx}, p_{86} = I_{s3yy}, p_{65} = I_{s1xx}, p_{66} = I_{s1yy}, p_{75} = I_{s2xx}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

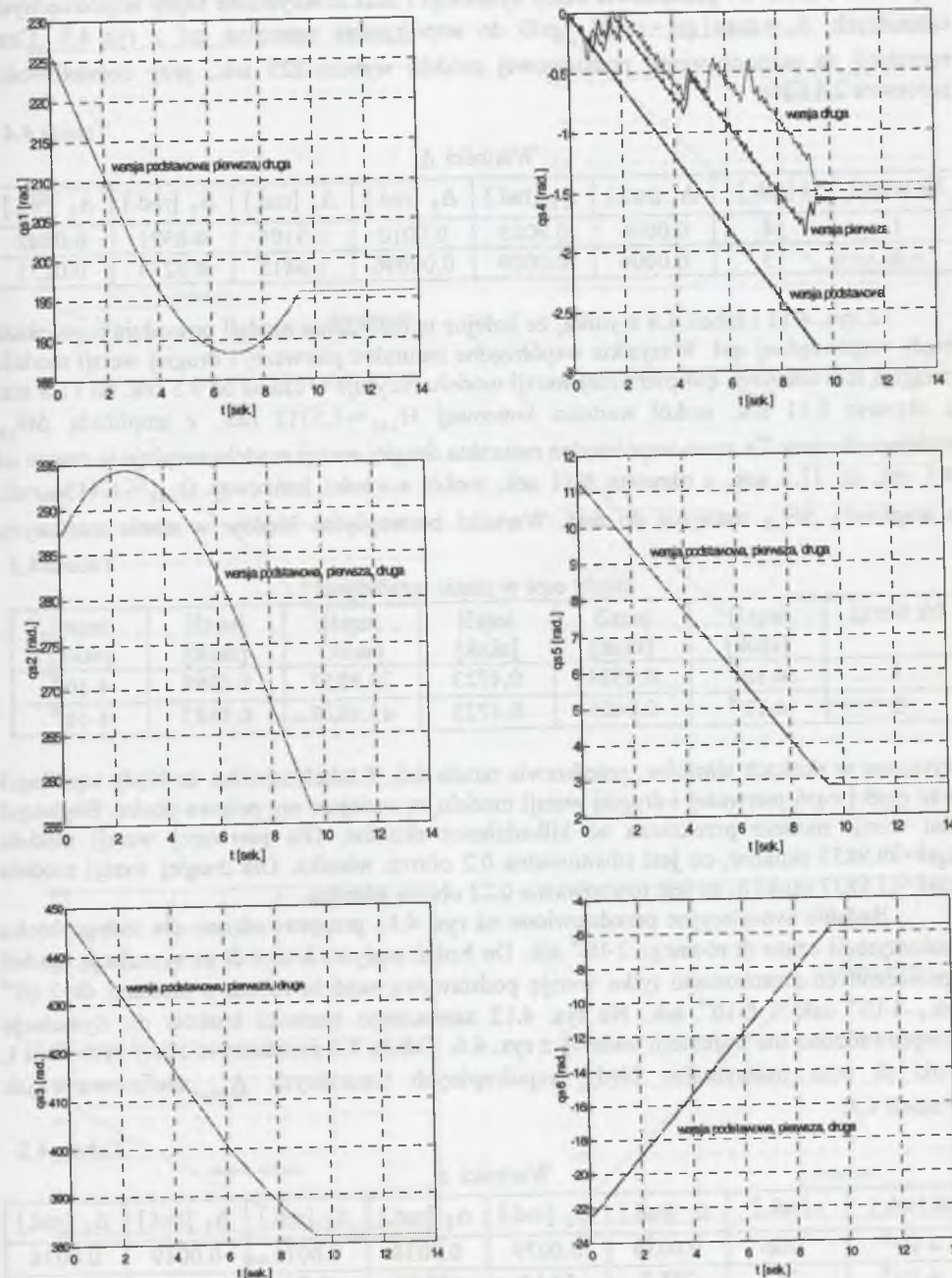
Tabela 4.3

Zbiór największych wartości $|(S_k)^{1/2} p_k|$

L p.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k	111	101	21	11	114	85	86	65	66	75
$ \sqrt{S_k} p_k $	1.64	0.12	0.07	0.038	0.030	0.028	0.028	0.027	0.027	0.021

Tabela 4.3 przedstawia wartości $|(S_k)^{1/2} p_k|$ dla parametrów (4.24).

Zastosujemy tu dwie metody upraszczania modelu robota L-1 na potrzeby przyspieszenia symulacji. Są to metody pierwsza i druga, takie jak dla robota AS, przedstawione w podrozdziale 3.4. W metodzie drugiej uwzględniamy we współczynnikach D_{si} tylko 10 parametrów dynamiki (4.24). Przyjmujemy, że numery kolejnych wersji modeli uproszczonych robota odpowiadają numerowi metody ich tworzenia, tzn. wersja pierwsza odpowiada metodzie pierwszej itp. Wersją podstawową będziemy nazywać model przed uproszczeniem.



Rys. 4.11. Współrzędne naturalne q1-q6
Fig. 4.11. Natural coordinates q1-q6

Wyniki symulacji robota L-1 z wykorzystaniem wersji modelu podstawowej, pierwszej i drugiej przedstawiają rys. 4.11. Symulacje przeprowadzono dla trajektorii zadanej

z rys. 4.6. Tabela 4.4 przedstawia czasy symulacji t oraz maksymalne błędy współrzędnych naturalnych $\Delta_i = \max |q_{si} - q_{si0}|$. q_{si0} to współrzędna naturalna q_{si} z rys. 4.9. Czas symulacji za pomocą wersji podstawowej modelu wynosi 223 sek., przy częstotliwości procesora 2.4 GHz.

Tabela 4.4

Wartości Δ_i

Nr wersji	t [sek.]	Δ_1 [rad.]	Δ_2 [rad.]	Δ_3 [rad.]	Δ_4 [rad.]	Δ_5 [rad.]	Δ_6 [rad.]
1	14	0.0006	0.0005	0.0010	1.3101	0.0321	0.0282
2	13	0.0006	0.0009	0.00096	1.6815	0.0274	0.0275

Z rys. 4.11 i tabeli 4.4 wynika, że kolejne uproszczenia modeli powodują największe błędy współrzędnej q_{s4} . Wszystkie współrzędne naturalne pierwszej i drugiej wersji modelu osiągają stan ustalony. q_{s4} pierwszej wersji modelu oscyluje w czasie od 9.5 sek. do 11.8 sek. z okresem 0.11 sek. wokół wartości końcowej $\Theta_{s4k} = -1.5712$ rad., z amplitudą $\Delta\Theta_{s4}$ malejącą do zera. Ta sama współrzędna naturalna drugiej wersji modelu oscyluje w czasie od 9.5 sek. do 11.6 sek. z okresem 0.11 sek. wokół wartości końcowej $\Theta_{s4k} = -1.4456$ rad., z amplitudą $\Delta\Theta_{s4}$ malejącą do zera. Wartości bezwzględne błędów w stanie ustalonym,

Tabela 4.5

Błędy e_{qs} w stanie ustalonym

Nr wersji	$ e_{qs1} $ [skok]	$ e_{qs2} $ [skok]	$ e_{qs3} $ [skok]	$ e_{qs4} $ [skok]	$ e_{qs5} $ [skok]	$ e_{qs6} $ [skok]
1	$4 \cdot 10^{-4}$	0.0584	0.4723	39.9857	0.0398	$4 \cdot 10^{-6}$
2	$4 \cdot 10^{-4}$	0.0485	0.4723	43.9837	0.0383	$4 \cdot 10^{-6}$

wyrażone w skokach silników, przedstawia tabela 4.5. Z tabeli wynika, że błędy e_{qs1} - e_{qs3} oraz e_{qs5} i e_{qs6} pierwszej i drugiej wersji modelu są mniejsze niż połowa skoku. Błąd e_{qs4} obu wersji modelu przekracza aż kilkadziesiąt skoków. Dla pierwszej wersji modelu $e_{qs4} = 39.9857$ skoków, co jest równoważne 0.2 obrotu wirnika. Dla drugiej wersji modelu $e_{qs4} = 43.9837$ skoków, co jest równoważne 0.22 obrotu wirnika.

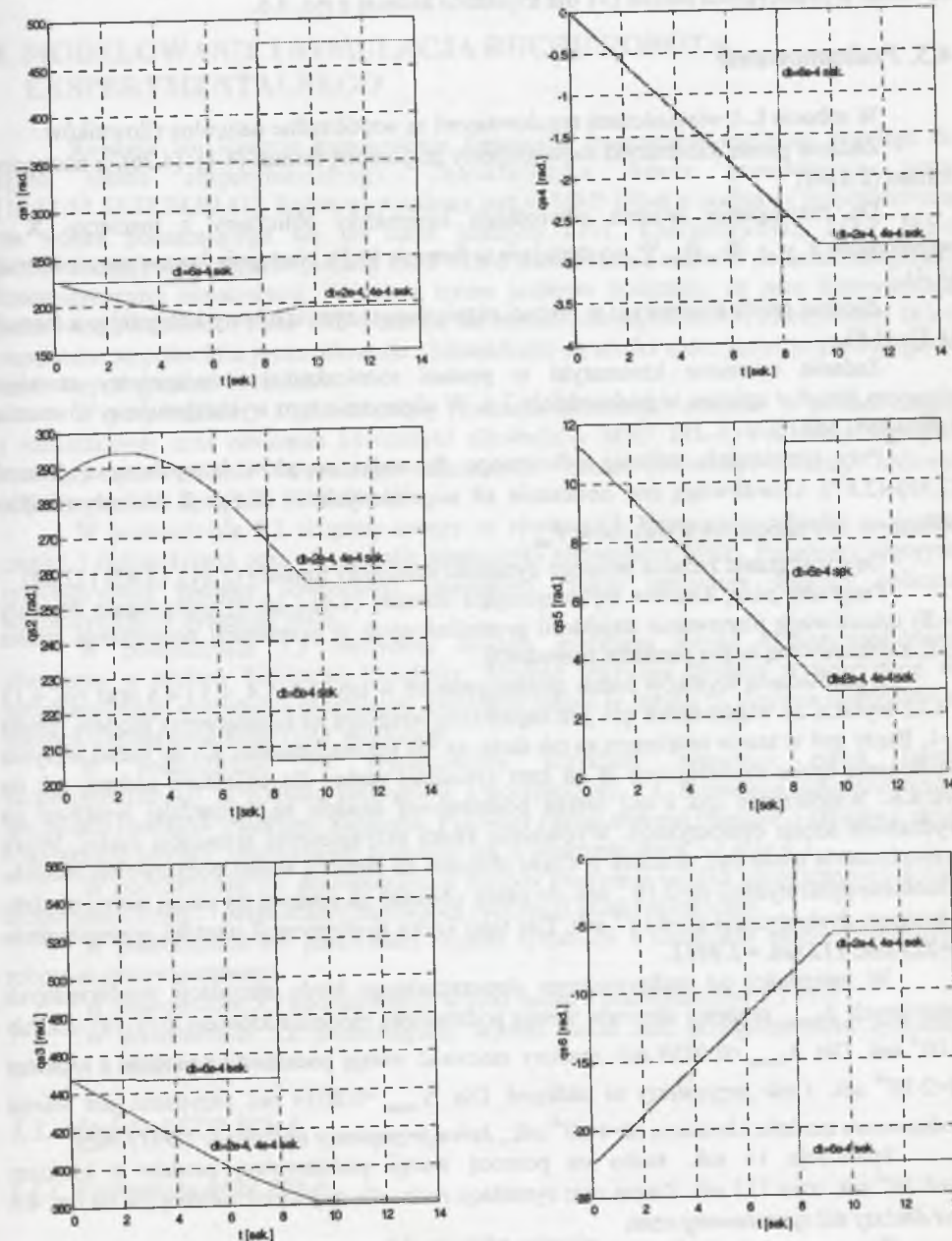
Badania symulacyjne przedstawione na rys. 4.11 przeprowadzono dla stałego kroku dyskretyzacji czasu dt równego $2 \cdot 10^{-4}$ sek. Do badań wpływu kroku dt na symulację modeli uproszczonych zastosowano tylko wersję podstawową modelu robota z krokami $dt = 2 \cdot 10^{-4}$ sek., $4 \cdot 10^{-4}$ sek. i $6 \cdot 10^{-4}$ sek. Na rys. 4.12 zaznaczono wartości kroków dt . Symulacje przeprowadzono dla trajektorii zadanej z rys. 4.6. Tabela 4.6 przedstawia czasy symulacji t , kroki dt oraz maksymalne błędy współrzędnych naturalnych Δ_i , zdefiniowane jak w tabeli 4.4.

Tabela 4.6

Wartości Δ_i

dt [sek.]	t [sek.]	Δ_1 [rad.]	Δ_2 [rad.]	Δ_3 [rad.]	Δ_4 [rad.]	Δ_5 [rad.]	Δ_6 [rad.]
$4 \cdot 10^{-4}$	112	0.0036	0.0039	0.0038	0.0011	0.0019	0.0034
$6 \cdot 10^{-4}$	75	285.2	62.67	172.50	2.84	8.49	16.97

Z tabeli 4.6 oraz rys. 4.12 wynika, że dla kroku $dt = 4 \cdot 10^{-4}$ sek. największy błąd współrzędnych naturalnych $\Delta_{i\max} = 0.0039$ rad., który odpowiada 0.1241 skoku silnika. Dla kroku $dt = 6 \cdot 10^{-4}$ sek. największy błąd współrzędnych naturalnych $\Delta_{i\max} = 285.20$ rad., który

Rys. 4.12. Współrzędne naturalne q_{s1} - q_{s6} Fig. 4.12. Natural coordinates q_{s1} - q_{s6}

odpowiada 9078.2 skokom silnika. Największe błędy współrzędnych naturalnych pojawiają się przy kroku $dt = 6 \cdot 10^{-4}$ sek. Przy tym kroku przebiegi znacznie odbiegają od przebiegów dla

$dt=2 \cdot 10^{-4}$ sek. Dlatego wersja podstawowa modelu z krokiem $dt=6 \cdot 10^{-4}$ sek. jest nieprzydatna do badań symulacyjnych robota L-1 dla trajektorii zadanej z rys. 4.6.

4.5. Podsumowanie

W robocie L-1 wielkościami regulowanymi są współrzędne naturalne siłowników.

Zadanie proste kinematyki rozwiązujemy za pomocą formuł (4.1)÷(4.2c), a następnie formuł (2.8a÷f).

Do rozwiązania zadania odwrotnego kinematyki obliczamy z macierzy X_{zad} współrzędne $x, y, z, \Phi, \Theta, \Psi$ występujące w formule (4.3). Następnie korzystamy z formuł (4.4).

Zadanie proste kinematyki w postaci różniczkowej rozwiązujemy korzystając z formuł (4.5)÷(4.6).

Zadanie odwrotne kinematyki w postaci różniczkowej rozwiązujemy stosując algorytm *kinodwr* opisany w podrozdziale 3.1. W algorytmie tym wykorzystujemy równania kinematyki MRP L-1.

Przy rozwiązaniu zadania odwrotnego dynamiki napędów korzystamy z formuł (2.55)÷(2.67). Umożliwiają one obliczenie sił uogólnionych F_i i F_{si} . Z formuły (2.68b) obliczamy siły napędowe siłowników F_{sin} .

Do rozwiązania zadania prostego dynamiki stosujemy formuły (2.61), (2.83) i (2.84).

Programy *plan*, *kinodwr* wykorzystujące formuły (4.4) i *qs* wykorzystujący formuły (4.8) umożliwiają planowanie trajektorii prostoliniowych w przestrzeni zewnętrznej robota L-1, z deklarowaną liczbą punktów pośrednich.

Z porównania wyników badań zamieszczonych w tabelach 4.4, 4.5 i 4.6 oraz rys. 4.11 i 4.12 wynika, że współrzędna $qs4$ jest najbardziej wrażliwa na uproszczenia modelu robota L-1. Błędy $qs4$ w stanie ustalonym są tak duże, że nie można stosować ich do badań wpływu wydłużenia kroku dyskretyzacji dt na czas symulacji ruchu, dla trajektorii zadanej jak na rys. 4.6. Współrzędne $qs2$ i $qs3$ wersji podstawowej modelu są najbardziej wrażliwe na wydłużenie kroku dyskretyzacji. Wydłużenie kroku przyspieszyło symulację ruchu. Miarą przyspieszenia może być stosunek p czasu obliczeń za pomocą wersji podstawowej modelu z krokiem dyskretyzacji $dt=2 \cdot 10^{-4}$ sek. do czasu obliczeń za pomocą tej samej wersji modelu z krokiem dyskretyzacji $dt=4 \cdot 10^{-4}$ sek. Dla tego kroku dyskretyzacji wartość przyspieszenia $p=223 \text{ sek.}/112 \text{ sek.} = 1.9911$.

W zależności od maksymalnego dopuszczalnego błędu symulacji współrzędnych naturalnych $\Delta_{i,max}$ możemy stosować wersję podstawową modelu z krokiem $dt=2 \cdot 10^{-4}$ sek lub $4 \cdot 10^{-4}$ sek. Dla $\Delta_{i,max} < 0.0039$ rad. musimy stosować wersję podstawową modelu z krokiem $dt=2 \cdot 10^{-4}$ sek. i **nie przyspieszy to obliczeń**. Dla $\Delta_{i,max} = 0.0039$ rad. przydatna jest wersja podstawowa modelu z krokiem $dt=4 \cdot 10^{-4}$ sek., **która przyspieszy obliczenia 1.9911 razy**.

Symulacja 14 sek. ruchu za pomocą wersji podstawowej modelu z krokiem $dt=4 \cdot 10^{-4}$ sek. trwa 112 sek. Zatem czas symulacji ruchu dla trajektorii zadanej jak na rys. 4.6 **jest dłuższy niż symulowany czas**.

Do wyznaczenia kroku dyskretyzacji czasu dt w wersji podstawowej modelu należało oszacować najszybsze sygnały wyjściowe podsystemów modelu graficznego robota L-1 z rys. 4.2. Wymagało to między innymi oszacowania maksymalnych częstotliwości oscylacji silników skokowych, które zależą od minimalnych wartości współczynników dynamiki D_{sii} . Minimalne wartości tych współczynników obliczono za pomocą programu *szacow*.

5. MODELOWANIE I SYMULACJA RUCHU ROBOTA EKSPERYMENTALNEGO

Rozdział ten ilustruje zastosowanie niektórych fragmentów rozdziału drugiego do opisu robota eksperymentalnego. Charakterystykę robota przedstawiają prace [18,33,52,53,73,74,80,81]. Robot wyposażony jest w MRP IRb-6 z podstawą przymocowaną do wózka poruszającego się po torze jezdny LP-1. Charakterystykę MRP IRb-6 przedstawiają prace [56,57,61,64,65]. MRP IRb-6 stanowi sześć członów połączonych parami kinematycznymi obrotowymi. Wózek z torem jezdny połączone są parą kinematyczną przesuwną. Wózkiem i MRP IRb-6 sterują serwomechanizmy. Wózek i człon MRP IRb-6 napędzane są pośrednio przez siłowniki. Siłownikami są silniki elektryczne prądu stałego ze sterowanymi prądami tworników.

W podrozdziale 5.1 przedstawimy równania kinematyki członów w postaci ciągłej i różniczkowej oraz równania kinematyki siłowników MRP IRb-6. Pokażemy algorytm rozwiązywania zadania odwrotnego kinematyki. Także omówimy sposoby obliczeń współczynników dynamiki MRP IRb-6.

W podrozdziale 5.2 skupimy uwagę na równaniach kinematyki członów w postaci ciągłej i różniczkowej oraz równaniach kinematyki siłowników MRE. Pokażemy algorytm rozwiązywania zadania odwrotnego kinematyki. Także omówimy sposoby obliczeń współczynników dynamiki MRE.

W podrozdziale 5.3 omówimy modele graficzne robota eksperymentalnego, utworzone z bloków biblioteki Simulinka. Modele graficzne zostaną wykorzystane do automatycznego utworzenia programów symulacji robota w języku C. Zostaną utworzone za pomocą rozszerzenia Real Time Workshop.

W podrozdziale 5.4 przedstawimy przykłady symulacji ruchu robota eksperymentalnego za pomocą programów z podrozdziału 5.3. Symulację przeprowadzimy dla dwóch rodzajów trajektorii zadanych. Pierwszy rodzaj stanowi trajektoria skokowa, drugi – trajektorie liniowe, zdefiniowane podobnie jak w podrozdziałach 3.3 oraz 4.3.

W podrozdziale 5.5 proponujemy metody tworzenia modeli uproszczonych robota eksperymentalnego i przebadamy za pomocą symulacji skutki uproszczeń.

W podrozdziale 5.6 porównamy wyniki symulacji z badaniami eksperymentalnymi robota eksperymentalnego.

W podrozdziale 5.7 podsumujemy wyniki badań z podrozdziałów 5.1÷5.6.

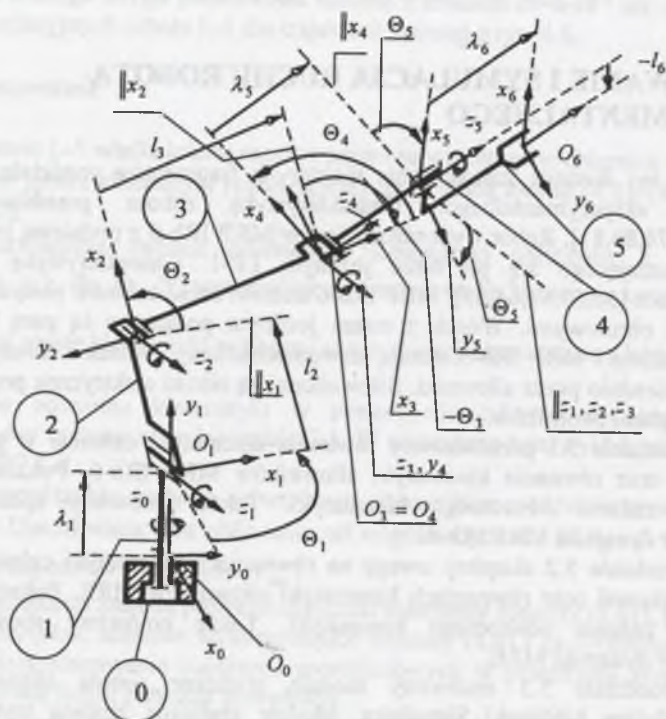
W podrozdziale 5.8 podsumujemy wyniki badań nad przyspieszeniem symulacji robotów z rozdziałów 3÷5.

5.1. Modele MRP IRb-6

5.1.1. Kinematyka MRP IRb-6

Kinematyka członów

Schemat kinematyczny MRP IRb-6 przedstawiony na rys. 5.1 posiada 6 członów połączonych parami obrotowymi. Numery członów otoczono kółkami. Układy współrzędnych skojarzono zgodnie z zapisem Hartenberga-Denavita. Parametry zapisu przedstawia tabela 5.1 [56,57,61,66]. Rysunek 5.2a ilustruje MRP IRb-6 na torze jezdny LP-1.



Rys. 5.1. Schemat kinematyczny manipulatora IRb-6
Fig. 5.1. Kinematic scheme of IRb-6 IRM

Tabela 5.1

Parametry Hartenberga-Denavita				
Nr członu	$\alpha_i [^\circ]$	$l_i [m]$	$\lambda_i [m]$	$\Theta_i [^\circ]$
1	90	0	0.70	90÷430
2	0	0.45	0	50÷130
3	0	0.67	0	-130÷-50
4	90	0	0	-220÷-25
5	0	0	0.095	$\Delta\Theta_5 = 360$

W celu ułatwienia rozwiązania zadania odwrotnego kinematyki w postaci analitycznej jawnej wprowadzimy następującą modyfikację kątów:

$$\Theta_1 = \Theta_1 - 90^\circ, \Theta_2 = \Theta_2 - 90^\circ, \Theta_3 = \Theta_3 + 90^\circ, \Theta_4 = \Theta_4 - 90^\circ, \Theta_5 = \Theta_5. \quad (5.1a)$$

Zakresy zmian tych kątów są następujące:

$$0^\circ \leq \Theta_1 \leq 340^\circ,$$

$$-40^\circ \leq \Theta_2 \leq 40^\circ,$$

$$-40^\circ - \Theta_2 \leq \Theta_3 \leq 40^\circ, \quad \text{dla } -40^\circ \leq \Theta_2 \leq -15^\circ,$$

$$-40^\circ - \Theta_2 \leq \Theta_3 \leq 25^\circ - \Theta_2, \quad \text{dla } -15^\circ \leq \Theta_2 \leq 0^\circ,$$

$$-40^\circ \leq \Theta_3 \leq 25^\circ - \Theta_2, \quad \text{dla } 0^\circ \leq \Theta_2 \leq 40^\circ,$$

$$-90^\circ - \Theta_2 - \Theta_3 \leq \Theta_4 \leq 90^\circ - \Theta_2 - \Theta_3,$$

$$-270^\circ + k_5^{-1}(\Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4) \leq \Theta_5 \leq 90^\circ + k_5^{-1}(\Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4). \quad (5.1b)$$

W celu uproszczenia zapisu zastosujemy następujące oznaczenia jak w rozdziale drugim.

$$\sin \Theta_i = S_i, \cos \Theta_i = C_i, \sin(\Theta_i + \Theta_j) = S_{ij}, \cos(\Theta_i + \Theta_j) = C_{ij} \text{ itp.}$$

W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że kąty $\Theta_1 + \Theta_5$ są współzrędnymi naturalnymi członów.

Macierze przekształceń $A_1 \div A_5$ i E mają następujące postacie:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -S_2 & -C_2 & 0 & -l_2 S_2 \\ C_2 & -S_2 & 0 & l_2 C_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} S_3 & C_3 & 0 & l_3 S_3 \\ -C_3 & S_3 & 0 & -l_3 C_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} -S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ C_4 & 0 & S_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} C_5 & -S_5 & 0 & 0 \\ S_5 & C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Macierze T_5 i X opisujące człon roboczy i chwytak przedstawiony na rys. 5.1 mają postać:

$$T_5 = \begin{bmatrix} S_1 S_{234} C_5 + C_1 S_5 & -S_1 S_{234} S_5 + C_1 C_5 & -S_1 C_{234} & l_2 S_1 S_2 - l_3 S_1 C_{23} - \lambda_5 S_1 C_{234} \\ -C_1 S_{234} C_5 + S_1 S_5 & C_1 S_{234} S_5 + S_1 C_5 & C_1 C_{234} & -l_2 C_1 S_2 + l_3 C_1 C_{23} + \lambda_5 C_1 C_{234} \\ C_{234} C_5 & -C_{234} S_5 & S_{234} & \lambda_1 + l_2 C_2 + l_3 S_{23} + \lambda_5 S_{234} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.3a)$$

$$X = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x & d_x \\ a_y & b_y & c_y & d_y \\ a_z & b_z & c_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.3b)$$

gdzie: $a_x \div a_z, b_x \div b_z, c_x \div c_z$ są takie jak w macierzy T_5 , zaś elementy ostatniej kolumny:

$$d_x = l_2 S_1 S_2 - l_3 S_1 C_{23} - \lambda_5 S_1 C_{234} + l_6 (S_1 S_{234} C_5 + C_1 S_5) - \lambda_6 S_1 C_{234},$$

$$d_y = -l_2 C_1 S_2 + l_3 C_1 C_{23} + \lambda_5 C_1 C_{234} + l_6 (-C_1 S_{234} C_5 + S_1 S_5) + \lambda_6 C_1 C_{234},$$

$$d_z = \lambda_1 + l_2 C_2 + l_3 S_{23} + \lambda_5 S_{234} + l_6 C_{234} C_5 + \lambda_6 S_{234}. \quad (5.3c)$$

Macierze T_5 i X umożliwiają rozwiązanie zadania prostego kinematyki MRP IRb-6 oraz wyznaczenie przestrzeni roboczej właściwej [39,56,57].

Zadanie odwrotne kinematyki

Rozwiązanie zadania odwrotnego kinematyki MRP IRb-6 przedstawimy za pomocą elementów macierzy $T_{szad} = X_{szad} E^{-1}$, która ma postać:

$$\mathbf{T}_{5\text{zad}} = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x & d_x \\ a_y & b_y & c_y & d_y \\ a_z & b_z & c_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Manipulator IRb-6 ma 5 stopni swobody i w związku z tym ma podprzestrzeń położeń i orientacji. Oś z_5 opisuje wersor \vec{c} , a położenie początku układu $x_5y_5z_5$ względem początku układu bazowego $x_0y_0z_0$ opisuje wektor \vec{d} . Z rys. 5.1 wynika, że \vec{c} i \vec{d} leżą w płaszczyźnie przechodzącej przez oś z_0 . Dlatego rzuty tych wektorów na płaszczyznę x_0y_0 są równoległe lub skierowane przeciwnie. Zatem

$$(\vec{i}_0c_x + \vec{j}_0c_y) \times (\vec{i}_0d_x + \vec{j}_0d_y) = \vec{k}_0(c_xd_y - c_yd_x) = 0.$$

Implikuje to jedno równanie kluczowe [58,72] w postaci:

$$\arctg \frac{(\vec{i}_0c_x + \vec{j}_0c_y) \times (\vec{i}_0d_x + \vec{j}_0d_y)}{(\vec{i}_0c_x + \vec{j}_0c_y) \cdot (\vec{i}_0d_x + \vec{j}_0d_y)} = 0.$$

Dla $c_x^2 + c_y^2 = 0$ lub $d_x^2 + d_y^2 = 0$ licznik i mianownik zerują się i nie można stosować tego równania. W takich przypadkach wektory \vec{c} i \vec{d} leżą także w płaszczyźnie przechodzącej przez oś z_0 i pomijamy to równanie. Równanie to może być zapisane w postaci

$$c_xd_y - c_yd_x = 0. \quad (5.5)$$

Równanie (5.5) możemy stosować dla $c_x^2 + c_y^2 = 0$ lub $d_x^2 + d_y^2 = 0$. Musi być spełnione przez wszystkie elementy macierzy $\mathbf{T}_{5\text{zad}}$ we wszystkich punktach trajektorii zadanej, jest to jeden z warunków koniecznych realizacji trajektorii zadanej. Równanie to opisuje podprzestrzeń położeń i orientacji członu roboczego o 5 stopniach swobody.

Do wyznaczenia postaci analitycznej jawnej formuły na Θ_1 porównamy macierz \mathbf{T}_5 w postaci (5.3a) z macierzą $\mathbf{T}_{5\text{zad}}$ w postaci (5.4). Z porównania otrzymujemy równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} S_1S_{234}C_5 + C_1S_5 & -S_1S_{234}S_5 + C_1C_5 & -S_1C_{234} & l_2S_1S_2 - l_3S_1C_{23} - \lambda_5S_1C_{234} \\ -C_1S_{234}C_5 + S_1S_5 & C_1S_{234}S_5 + S_1C_5 & C_1C_{234} & -l_2C_1S_2 + l_3C_1C_{23} + \lambda_5C_1C_{234} \\ C_{234}C_5 & -C_{234}S_5 & S_{234} & \lambda_1 + l_2C_2 + l_3S_{23} + \lambda_5S_{234} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x & d_x \\ a_y & b_y & c_y & d_y \\ a_z & b_z & c_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Z równania tego wynika

$$C_1d_x + S_1d_y = C_1(l_2S_1S_2 - l_3S_1C_{23} - \lambda_5S_1C_{234}) + S_1(-l_2C_1S_2 + l_3C_1C_{23} + \lambda_5C_1C_{234}) = 0.$$

Stąd po uwzględnieniu zakresu zmian Θ_1 wynika

$$\Theta_1 = \begin{cases} \Theta_1^* & \text{dla } d_x \leq 0 \text{ i } d_y \geq 0, \\ \Theta_1^* + 180^\circ & \text{dla } d_y < 0, \\ \Theta_1^* + 360^\circ & \text{dla } d_x > 0 \text{ i } d_y \geq 0, \end{cases}$$

$$\Theta_1^* = \arctg \frac{-d_x}{d_y}. \quad (5.6a)$$

Do wyznaczenia postaci analitycznej jawnej formuły na Θ_3 i Θ_2 zastosujemy równanie macierzowe w postaci

$$\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4\mathbf{A}_5 = \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{T}_{5\text{zad}}.$$

Po podstawieniu formuły (5.2) oraz formuły (5.4) równanie to ma postać:

$$\begin{bmatrix} -S_{234}C_5 & S_{234}S_5 & C_{234} & -l_2S_2 + l_3C_{23} + \lambda_5C_{234} \\ C_{234}C_5 & -C_{234}S_5 & S_{234} & l_2C_2 + l_3S_{23} + \lambda_5S_{234} \\ S_5 & C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\vec{a}) & f_1(\vec{b}) & f_1(\vec{c}) & f_1(\vec{d}) \\ f_2(\vec{a}) & f_2(\vec{b}) & f_2(\vec{c}) & f_2(\vec{d}) - \lambda_1 \\ f_3(\vec{a}) & f_3(\vec{b}) & f_3(\vec{c}) & f_3(\vec{d}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Elementy macierzy po prawej stronie tego równania opisują iloczyny skalarne funkcji wektorowych i ich argumentów. Na przykład $f_1(\vec{a}) = \vec{f}_1 \cdot \vec{a} = (-S_1\vec{i}_0 + C_1\vec{j}_0) \cdot \vec{a} = -S_1a_x + C_1a_y$. Funkcje wektorowe występujące w macierzy mają postacie $\vec{f}_1 = -S_1\vec{i}_0 + C_1\vec{j}_0$, $\vec{f}_2 = \vec{k}_0$, $\vec{f}_3 = C_1\vec{i}_0 + S_1\vec{j}_0$. Z powyższego równania macierzowego wynikają równania skalarnie

$$f_1(\vec{d}) - \lambda_5 f_1(\vec{c}) = w_1 = -l_2S_2 + l_3C_{23},$$

$$f_2(\vec{d}) - \lambda_1 - \lambda_5 f_2(\vec{c}) = w_2 = l_2C_2 + l_3S_{23},$$

gdzie:

$$w_1 = -S_1d_x + C_1d_y + \lambda_5S_1c_x - \lambda_5C_1c_y, \quad w_2 = d_z - \lambda_1 - \lambda_5c_z.$$

Po podniesieniu do kwadratu obu stron tych równań otrzymamy

$$l_2^2S_2^2 + l_3^2C_{23}^2 - 2l_2l_3S_2C_{23} = w_1^2,$$

$$l_2^2C_2^2 + l_3^2S_{23}^2 + 2l_2l_3C_2S_{23} = w_2^2.$$

Po zsumowaniu tych równań stronami i zastosowaniu wzoru $S_{23}C_2 - C_{23}S_2 = S_3$ otrzymamy

$$l_2^2 + l_3^2 + 2l_2l_3S_3 = w_1^2 + w_2^2.$$

Uwzględniając zakres zmienności Θ_3 i powyższe równania otrzymamy

$$\Theta_3 = \arctg \frac{S_3}{C_3}, \quad S_3 = \frac{w_1^2 + w_2^2 - (l_2^2 + l_3^2)}{2l_2l_3}, \quad C_3 = (1 - S_3^2)^{1/2}. \quad (5.6b)$$

Dzięki formule (5.6b) kąt Θ_3 jest już znany. Stosując wzory $S_{23} = S_2C_3 + C_2S_3$ oraz $C_{23} = C_2C_3 - S_2S_3$ możemy z powyższych równań napisać 2 kolejne następujące równania:

$$-l_2S_2 + l_3C_2C_3 - l_3S_2S_3 = w_1,$$

$$l_2C_2 + l_3S_2C_3 + l_3C_2S_3 = w_2.$$

Rozwiązaniem tego układu równań są formuły

$$S_2 = \frac{w_2l_3C_3 - w_1(l_3S_3 + l_2)}{l_3^2C_3^2 + (l_3S_3 + l_2)^2}, \quad C_2 = \frac{w_1l_3C_3 + w_2(l_3S_3 + l_2)}{l_3^2C_3^2 + (l_3S_3 + l_2)^2}$$

Stąd po uwzględnieniu zakresu zmian Θ_2 wynika

$$\Theta_2 = \arctg \frac{S_2}{C_2} \quad (5.6c)$$

Do wyznaczenia postaci analitycznej jawnej formuł na Θ_4 zastosujemy równanie macierzowe w postaci

$$\mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4 \mathbf{A}_5 = \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{T}_{5zad}.$$

Po podstawieniu formuł (5.2) oraz formuły (5.4) równanie to ma postać:

$$\begin{bmatrix} C_{34}C_5 & -C_{34}S_5 & S_{34} & l_3S_{23} + \lambda_5S_{34} \\ S_{34}C_5 & -S_{34}S_5 & -C_{34} & -l_3C_3 - \lambda_5C_{34} \\ S_5 & C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\bar{a}) & f_1(\bar{b}) & f_1(\bar{c}) & f_1(\bar{d}) - \lambda_1C_2 - l_2 \\ f_2(\bar{a}) & f_2(\bar{b}) & f_2(\bar{c}) & f_2(\bar{d}) + \lambda_1S_2 \\ f_3(\bar{a}) & f_3(\bar{b}) & f_3(\bar{c}) & f_3(\bar{d}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie: $\bar{f}_1 = S_1S_2\bar{i}_0 - C_1S_2\bar{j}_0 + C_2\bar{k}_0$, $\bar{f}_2 = S_1C_2\bar{i}_0 - C_1C_2\bar{j}_0 - S_2\bar{k}_0$, $\bar{f}_3 = C_1\bar{i}_0 + S_1\bar{j}_0$.

Z porównania elementów pierwszego wiersza czwartej kolumny i drugiego wiersza czwartej kolumny obu stron równania wynika

$$f_1(\bar{d}) - \lambda_1C_2 - l_2 = l_3S_3 + \lambda_5S_{34},$$

$$f_2(\bar{d}) + \lambda_1S_2 = -l_3C_3 - \lambda_5C_{34}.$$

Z równań tych wynika

$$\lambda_5S_{34} = S_1S_2d_x - C_1S_2d_y + C_2d_z - \lambda_1C_2 - l_2 - l_3S_3,$$

$$\lambda_5C_{34} = -S_1C_2d_x + C_1C_2d_y + S_2d_z - \lambda_1S_2 - l_3C_3.$$

Uwzględniając zakres zmienności Θ_3 i Θ_4 oraz powyższe równania otrzymamy

$$\Theta_{34}^* = \begin{cases} \Theta_{34}^* & \text{dla } \lambda_5C_{34} \geq 0, \\ \Theta_{34}^* + 180^\circ & \text{dla } \lambda_5S_{34} > 0 \text{ i } \lambda_5C_{34} < 0, \\ \Theta_{34}^* - 180^\circ & \text{dla } \lambda_5S_{34} < 0 \text{ i } \lambda_5C_{34} < 0, \end{cases}$$

$$\Theta_{34}^* = \arctg \frac{\lambda_5S_{34}}{\lambda_5C_{34}}; \quad (5.6d)$$

$$\Theta_4 = \Theta_{34} - \Theta_3. \quad (5.6e)$$

Do wyznaczenia postaci analitycznej jawnej formuły na Θ_3 porównamy macierz \mathbf{T}_5 w postaci (5.3a) z macierzą \mathbf{T}_{5zad} w postaci (5.4). Z porównania otrzymujemy równanie macierzowe jak przy wyznaczaniu formuły (5.6a) na Θ_1 . Z równania tego wynika

$$C_1a_x + S_1a_y = C_1(S_1S_{234}C_5 + C_1S_5) + S_1(-C_1S_{234}C_5 + S_1S_5) = (C_1^2 + S_1^2)S_5 = S_5,$$

$$C_1b_x + S_1b_y = C_1(-S_1S_{234}S_5 + C_1C_5) + S_1(C_1S_{234}S_5 + S_1C_5) = (C_1^2 + S_1^2)C_5 = C_5.$$

Stąd

$$S_5 = C_1a_x + S_1a_y, \quad C_5 = C_1b_x + S_1b_y,$$

$$\Theta_5 = \arctg \frac{S_5}{C_5}. \quad (5.6f)$$

Graniczne kąty Θ_{5min} i Θ_{5max} zależą od kątów $\Theta_2 + \Theta_4$ oraz $\Theta_{5max} - \Theta_{5min} = 360^\circ$ (patrz (5.1b)) i dlatego do określenia kąta Θ_5 musimy badać znaki S_5 i C_5 . Z analizy powyższych formuł w [56,57] wynika, że dla jednoznacznie określonych elementów macierzy \mathbf{T}_{5zad} , Θ_5 może mieć podwójne rozwiązanie $\Theta_5 = \Theta_{5min}$ lub $\Theta_5 = \Theta_{5max}$. Jest to osobliwość kinematyczna drugiego rodzaju [56,57].

Z rys. 5.1 wynika, że orientację układu współrzędnych $x_5y_5z_5$ względem układu współrzędnych $x_0y_0z_0$ możemy łatwo opisać za pomocą układu Z-Y-Z kątów bieżących Φ, Θ, Ψ . Macierz \mathbf{T}_{5zad} możemy opisać za pomocą zadanych współrzędnych zewnętrznych położenia $d_x + d_z$ i układu Z-Y-Z kątów bieżących. Opis ten jest następujący:

$$\mathbf{T}_{5zad} = \text{Trans}(d_x, d_y, d_z) \text{Rot}(z, \Phi) \text{Rot}(y, \Theta) \text{Rot}(z, \Psi). \quad (5.7)$$

Zadane współrzędne zewnętrzne $d_x + d_z$ i układ Z-Y-Z kątów bieżących muszą spełniać równanie kluczowe (5.5). Pierwsze trzy kolumny macierzy \mathbf{T}_{5zad} , opisanej równaniem (5.7), są takie same jak pierwsze trzy kolumny macierzy \mathbf{X} , opisanej równaniem (2.7). Stąd wynika, że w równaniu kluczowym (5.5) możemy zastosować podstawienia:

$$c_x = C_\Phi S_\Theta, \quad c_y = S_\Phi S_\Theta.$$

Po tych podstawieniach otrzymamy równanie kluczowe w następującej postaci:

$$C_\Phi S_\Theta d_y - S_\Phi S_\Theta d_x = 0, \quad (5.8)$$

gdzie: $S_u, C_u = \sin u, \cos u; u = \Phi, \Theta$.

Z rys. 5.1 wynika, że kąty bieżące możemy wyrazić poprzez współrzędne naturalne członów następująco:

$$\Phi = 90^\circ + \Theta_1, \quad \Theta = 90^\circ - \Theta_{234}, \quad \Psi = 180^\circ + \Theta_5. \quad (5.9)$$

W formułach tych

$$\Theta_{234} = \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4.$$

Z porównania macierzy \mathbf{T}_5 opisanej formułą (5.3a) z macierzą \mathbf{T}_{5zad} opisaną formułą (5.7) oraz po uwzględnieniu formuł (5.9) otrzymujemy następujące zależności:

$$\Theta_1 = -90^\circ + \Phi, \quad (5.10a)$$

$$\Theta_{234} = 90^\circ - \Theta, \quad (5.10b)$$

$$\Theta_5 = -180^\circ + \Psi, \quad (5.10c)$$

$$l_2S_1S_2 - l_3S_1C_{234} - \lambda_5S_1C_{234} = d_x, \quad (5.11a)$$

$$-l_2C_1S_2 + l_3C_1C_{234} + \lambda_5C_1C_{234} = d_y, \quad (5.11b)$$

$$\lambda_1 + l_2C_2 + l_3S_2 + \lambda_5S_{234} = d_z. \quad (5.11c)$$

W formułach tych

$$S_{234}, C_{234} = \sin(\Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4), \quad \cos(\Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4).$$

Z równań (5.10a) i (5.10c) otrzymujemy Θ_1 i Θ_5 bezpośrednio z kątów Φ i Ψ . Z równania (5.10b) otrzymujemy sumę kątów $\Theta_{234} = \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4$. Z równań (5.11a)-(5.11c) wynikają rozwiązania dla Θ_2 i Θ_3 takie jak równania (5.6b) i (5.6c). Kąt Θ_4 jest równy różnicy

sumy kątów Θ_{234} (wynikającej z równania (5.10b)) i kątów Θ_2 i Θ_3 (wynikających z równań (5.6b) i (5.6c)), czyli $\Theta_4 = \Theta_{234} - \Theta_2 - \Theta_3$.

Kinematyka członów w postaci różniczkowej

Ruch członu roboczego manipulatora IRb-6 opiszemy stosując równanie (2.25). Po uwzględnieniu równań kinematyki członów (5.2), (5.3a) oraz równań (2.19)+(2.24f) otrzymamy następujący opis kinematyki tego członu roboczego w postaci różniczkowej [56,77]:

$$\begin{bmatrix} {}^5dx \\ {}^5dy \\ {}^5dz \\ {}^5d\varphi_x \\ {}^5d\varphi_y \\ {}^5d\varphi_z \end{bmatrix} = {}^5J_5 \begin{bmatrix} d\Theta_1 \\ d\Theta_2 \\ d\Theta_3 \\ d\Theta_4 \\ d\Theta_5 \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

$${}^5J_5 = \begin{bmatrix} (l_2S_2 - l_3C_{23} - \lambda_5C_{234})S_5 & (l_2S_{34} + l_3C_4 + \lambda_5)C_5 & (l_3C_4 + \lambda_5)C_5 & \lambda_5C_5 & 0 \\ (l_2S_2 - l_3C_{23} - \lambda_5C_{234})C_5 & -(l_2S_{34} + l_3C_4 + \lambda_5)S_5 & -(l_3C_4 + \lambda_5)S_5 & -\lambda_5S_5 & 0 \\ 0 & -l_2C_{34} + l_3S_4 & l_3S_4 & 0 & 0 \\ C_{234}C_5 & S_5 & S_5 & S_5 & 0 \\ -C_{234}S_5 & C_5 & C_5 & C_5 & 0 \\ S_{234} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

gdzie:

${}^5dx \div {}^5dz$ oraz ${}^5d\varphi_x \div {}^5d\varphi_z$ - różniczkowe przemieszczenia oraz różniczkowe obroty układu współrzędnych $x_5y_5z_5$ względem układu bazowego, opisane w układzie współrzędnych $x_5y_5z_5$, a spowodowane różniczkowymi przyrostami współrzędnych naturalnych członów $d\Theta_1 \div d\Theta_5$.

Spośród tych sześciu różniczek jedna jest zależna od pięciu różniczek niezależnych. Równanie wiążące tę jedną różniczkę zależną możemy otrzymać przez zróżniczkowanie równania kluczowego (5.5). Po zróżniczkowaniu otrzymujemy różniczkowe równanie kluczowe w następującej postaci [79,82]:

$$d(c_x d_y - c_y d_x) = d(c_x) d_y + c_x d(d_y) - d(c_y) d_x - c_y d(d_x) = 0.$$

Różniczkowe równania kinematyki członu roboczego MRP IRb-6 wynikające z formuł (2.21) i (2.26), mają postać podobną do równań (2.31). Po podstawieniach

$$d(c_x) = a_x {}^5d\varphi_y - b_x {}^5d\varphi_x, \quad d(c_y) = a_y {}^5d\varphi_y - b_y {}^5d\varphi_x,$$

$$d(d_x) = a_x {}^5dx + b_x {}^5dy + c_x {}^5dz, \quad d(d_y) = a_y {}^5dx + b_y {}^5dy + c_y {}^5dz,$$

otrzymamy równanie

$${}^5d\varphi_x (b_y d_x - b_x d_y) - {}^5dy (c_y b_x - c_x b_y) + {}^5dx (c_x a_y - c_y a_x) - {}^5d\varphi_y (a_y d_x - a_x d_y) = 0.$$

Po uwzględnieniu zależności $c_y b_x - c_x b_y = a_z$, wynikającej z iloczynu wektorowego $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$ oraz zależności $c_x a_y - c_y a_x = b_z$, wynikającej z iloczynu wektorowego $\vec{b} = \vec{c} \times \vec{a}$, otrzymamy różniczkowe równanie kluczowe

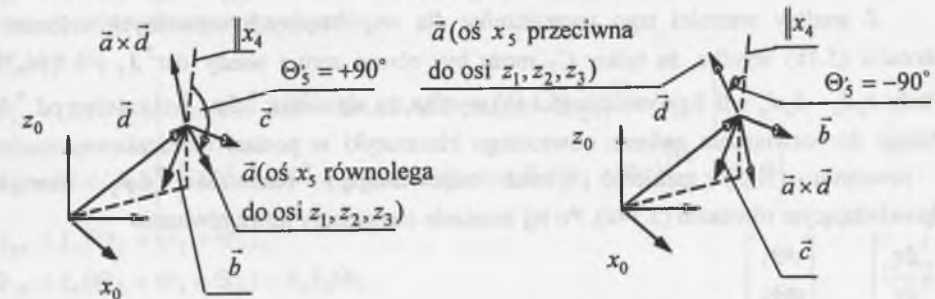
$${}^5d\varphi_x (b_y d_x - b_x d_y) - {}^5dy a_z + {}^5dx b_z - {}^5d\varphi_y (a_y d_x - a_x d_y) = 0 \quad \text{dla } b_y d_x - b_x d_y \neq 0, \quad (5.14a)$$

$${}^5dy a_z - {}^5dx b_z + {}^5d\varphi_y (a_y d_x - a_x d_y) = 0 \quad \text{dla } b_y d_x - b_x d_y = 0, \quad (5.14b)$$

gdzie:

$a_x \div a_z, b_x \div b_z, d_x, d_y$ - elementy macierzy T_5 lub T_{5aad} (porównaj równanie (5.4)).

Różnica $b_y d_x - b_x d_y = \vec{k}_0 \cdot (\vec{d} \times \vec{b})$ jest równa zero gdy, iloczyn $\vec{d} \times \vec{b}$ jest prostopadły do osi z_0 , czyli do wersora \vec{k}_0 . W płaszczyźnie przechodzącej przez oś z_0 i początek układu $x_5y_5z_5$ leży wektor \vec{d} i wersor \vec{c} osi z_5 . Zatem $b_y d_x - b_x d_y = 0$ dla wersora \vec{b} osi y_5 leżącego też w tej płaszczyźnie, czyli wersora \vec{a} osi x_5 prostopadłego do tej płaszczyzny. Wtedy oś x_5 może być równoległa lub przeciwna do osi z_1, z_2 i z_3 . W takich przypadkach oś x_5 jest prostopadła do osi z_0 i $\Theta_5 = \pm 90^\circ$, czyli $a_z = C_{234}C_5 = 0$. Jeśli ta oś jest równoległa do osi z_1, z_2 i z_3 , to ${}^5d\varphi_x = d\Theta_2 + d\Theta_3 + d\Theta_4$, jeśli przeciwna, to



Rys. 5.2. Wektor $\vec{a} \times \vec{d}$

Fig. 5.2. Vector $\vec{a} \times \vec{d}$

${}^5d\varphi_x = -(d\Theta_2 + d\Theta_3 + d\Theta_4)$. Z rys. 5.2 wynika, że jeśli oś x_5 jest równoległa do tych osi, to $\Theta_5 = +90^\circ$ i $(\vec{a} \times \vec{d}) \cdot \vec{k}_0 = (a_x d_y - a_y d_x) > 0$. Jeśli oś x_5 jest przeciwna do tych osi, to $\Theta_5 = -90^\circ$ i $(a_x d_y - a_y d_x) < 0$. Dlatego przy $b_y d_x - b_x d_y = 0$ słuszne są następujące równania:

$${}^5d\varphi_x = \text{sgn}(a_x d_y - a_y d_x) \cdot (d\Theta_2 + d\Theta_3 + d\Theta_4), \quad (5.14c)$$

$$\text{sgn}(a_x d_y - a_y d_x) = \text{sgn}(S_5).$$

Z równania (5.14c) wynika, że dla $b_y d_x - b_x d_y = 0$ kąt ${}^5d\varphi_x$ jest sumą kątów $d\Theta_2 + d\Theta_3 + d\Theta_4$ pomnożoną przez znak różnicy $a_x d_y - a_y d_x$, równy znakowi S_5 .

Dla $b_y d_x - b_x d_y \neq 0$ możemy przyjąć różniczkę ${}^5dx \div {}^5dz$ oraz ${}^5d\varphi_y$ i ${}^5d\varphi_z$ jako niezależne. Dlatego z równania (5.12) możemy usunąć wiersz odpowiadający różniczce zależnej, czyli ${}^5d\varphi_x$ w wyniku czego otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} {}^5dx \\ {}^5dy \\ {}^5dz \\ {}^5d\varphi_y \\ {}^5d\varphi_z \end{bmatrix} = {}^5\mathbf{J}_5 \begin{bmatrix} d\Theta_1 \\ d\Theta_2 \\ d\Theta_3 \\ d\Theta_4 \\ d\Theta_5 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

gdzie:

${}^5\mathbf{J}_5$ -jacobian członu roboczego o postaci

$${}^5\mathbf{J}_5 = \begin{bmatrix} (l_2S_2 - l_3C_{23} - \lambda_5C_{234})S_5 & (l_2S_{34} + l_3C_4 + \lambda_5)C_5 & (l_3C_4 + \lambda_5)C_5 & \lambda_5C_5 & 0 \\ (l_2S_2 - l_3C_{23} - \lambda_5C_{234})C_5 & -(l_2S_{34} + l_3C_4 + \lambda_5)S_5 & -(l_3C_4 + \lambda_5)S_5 & -\lambda_5S_5 & 0 \\ 0 & -l_2C_{34} + l_3S_4 & l_3S_4 & 0 & 0 \\ -C_{234}S_5 & C_5 & C_5 & C_5 & 0 \\ S_{234} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

przy czym

$$\det {}^5\mathbf{J}_5 = l_2l_3(-l_2S_2 + l_3C_{23} + \lambda_5C_{234})C_3C_5. \quad (5.17)$$

Z analizy wartości tego wyznacznika dla współrzędnych naturalnych członów z zakresów (5.1b) wynika, że tylko C_5 może być równe zero i wtedy $\det {}^5\mathbf{J}_5 = 0$ [56,77]. Wtedy $b_yd_x - b_xd_y = 0$ i z równania (5.14b) wynika, że różniczka ${}^5d\varphi_y$ jest zależna od 5dy . Dlatego do rozwiązywania zadania odwrotnego kinematyki w postaci różniczkowej musimy w równaniu (5.15) zamienić wiersz odpowiadający różniczce ${}^5d\varphi_y$ wierszem odpowiadającym równaniu (5.14c). Po tej zmianie otrzymamy nowe równanie

$$\begin{bmatrix} {}^5dx \\ {}^5dy \\ {}^5dz \\ {}^5d\varphi_x \\ {}^5d\varphi_z \end{bmatrix} = {}^5\mathbf{J}_5' \begin{bmatrix} d\Theta_1 \\ d\Theta_2 \\ d\Theta_3 \\ d\Theta_4 \\ d\Theta_5 \end{bmatrix}, \quad (5.18)$$

gdzie dla $S_5 = \pm 1 = \text{sgn}(a_xd_y - a_yd_x)$

$${}^5\mathbf{J}_5' = \begin{bmatrix} \pm(l_2S_2 - l_3C_{23} - \lambda_5C_{234}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mp(l_2S_{34} + l_3C_4 + \lambda_5) & \mp(l_3C_4 + \lambda_5) & \mp\lambda_5 & 0 \\ 0 & -l_2C_{34} + l_3S_4 & l_3S_4 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 & 0 \\ S_{234} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

przy czym

$$\det {}^5\mathbf{J}_5' = \pm l_2l_3(-l_2S_2 + l_3C_{23} + \lambda_5C_{234})C_3 \quad (5.20)$$

Dla $S_5 = \pm 1$ wartość tego wyznacznika zawsze będzie różna od zera.

Przy rozwiązywaniu zadania odwrotnego kinematyki członów manipulatora IRb-6 w postaci różniczkowej możemy stosować równanie (5.15) dla $b_yd_x - b_xd_y \neq 0$ lub równanie (5.18) dla $b_yd_x - b_xd_y = 0$.

Współrzędne naturalne siłowników

Napędy z siłowników na poszczególne człony manipulatora IRb-6 przekazywane są przez odpowiednie zespoły napędowe. Zależności wiążące współrzędne naturalne członów $\Theta_1 \div \Theta_5$ ze współrzędnymi naturalnymi siłowników $\Theta_{s1} \div \Theta_{s5}$ opisują formuły [56,57,61,66]:

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= k_1^{-1}\Theta_{s1}, \\ \Theta_2 &= -\arccos \frac{AB^2 + BC^2 - [A_0C - (h_2/2\pi)\Theta_{s2}]^2}{2 \cdot AB \cdot BC} + \alpha, \\ \Theta_3 &= -\arccos \frac{DE^2 + EF^2 - [D_0F - (h_3/2\pi)\Theta_{s3}]^2}{2 \cdot DE \cdot EF} + \beta - \Theta_2, \\ \Theta_4 &= k_4^{-1}\Theta_{s4} - (\Theta_2 + \Theta_3), \\ \Theta_5 &= k_4^{-1}k_5^{-1}(\Theta_{s4} - \Theta_{s5}). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Formuły odwrotne są następujące:

$$\begin{aligned} \Theta_{s1} &= k_1\Theta_1, \\ \Theta_{s2} &= (2\pi/h_2) \left\{ -[AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(\alpha - \Theta_2)]^{1/2} + A_0C \right\}, \\ \Theta_{s3} &= (2\pi/h_3) \left\{ -[DE^2 + EF^2 - 2 \cdot DE \cdot EF \cdot \cos(\beta - \Theta_2 - \Theta_3)]^{1/2} + D_0F \right\}, \\ \Theta_{s4} &= k_4(\Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4), \\ \Theta_{s5} &= k_4(\Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4) - k_4k_5\Theta_5, \end{aligned} \quad (5.22)$$

gdzie:

$$\alpha = \arccos \frac{AB^2 + BC^2 - A_0C^2}{2 \cdot AB \cdot BC}, \quad \beta = \arccos \frac{DE^2 + EF^2 - D_0F^2}{2 \cdot DE \cdot EF}.$$

W formułach (5.21) i (5.22) k_1, k_4 i k_5 są przełożeniami przekładni falowych zespołów napędowych pierwszego, czwartego i piątego członu MRP IRb-6. h_2 i h_3 są skokami śrub w zespołach przekazujących napędy drugiego i trzeciego członu. Pozostałe parametry konstrukcyjne przedstawia praca [57].

Kinematyka siłowników i zespołów przekazujących napędy

Do opisu kinematyki siłowników wykorzystujemy macierze jednorodne $\mathbf{T}_{s1} \div \mathbf{T}_{s5}$. Po przekształceniach otrzymujemy [57,61,66]:

$$\mathbf{T}_{s1} = \begin{bmatrix} -S_\varphi & C_\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda_{11} \\ C_\varphi & S_\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.23)$$

gdzie:

$$T_{s2} = \begin{bmatrix} S_\varphi & C_\varphi & 0 & -l_{22} - \lambda_{s2} S_\varphi \\ C_\varphi & S_\varphi & 0 & l_{21} + \lambda_{s2} C_\varphi \\ S_\varphi & C_\varphi & 0 & -\lambda_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.24)$$

gdzie:

$$S_s = \sin \Theta_{s2}, C_s = \cos \Theta_{s2}, S_\varphi = \sin \varphi, C_\varphi = \cos \varphi, \varphi = \varphi_2 - \Theta_{s2};$$

$$\varphi_2 = \arctg \frac{b_2 + a_2 C_2 - l_{21} S_2}{d_2 - l_{21} C_2 - a_2 S_2}, \lambda_{s2} = \left[(b_2 + a_2 C_2 - l_{21} S_2)^2 + (d_2 - l_{21} C_2 - a_2 S_2)^2 \right]^{1/2};$$

$$T_{s3} = \begin{bmatrix} C_s S_\varphi & -S_s S_\varphi & C_\varphi & -l_{32} - l_{31} S_3 - \lambda_{s3} C_\varphi \\ C_s C_\varphi & -S_s C_\varphi & -S_\varphi & -l_{31} C_3 + \lambda_{s3} S_\varphi \\ S_s & C_s & 0 & -(\lambda_{31} + \lambda_{32}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.25)$$

gdzie:

$$S_s = \sin \Theta_{s3}, C_s = \cos \Theta_{s3}, S_\varphi = \sin \varphi, C_\varphi = \cos \varphi, \varphi = \Theta_2 + \Theta_3 - \varphi_3;$$

$$\varphi_3 = \arctg \frac{b_3 - a_3 S_{23}}{d_3 - a_3 C_{23}}, \lambda_{s3} = \left[(d_3 - a_3 C_{23})^2 + (b_3 - a_3 S_{23})^2 \right]^{1/2};$$

$$T_{s4} = \begin{bmatrix} -S_\varphi & C_\varphi & 0 & l_{43} S_4 - l_{42} C_{34} \\ 0 & 0 & 1 & -(\lambda_{41} + \lambda_{42}) \\ C_\varphi & S_\varphi & 0 & -l_{43} C_4 - l_{42} S_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.26)$$

gdzie:

$$S_\varphi = \sin \varphi, C_\varphi = \cos \varphi, \varphi = \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 - \Theta_{s4};$$

$$T_{s5} = \begin{bmatrix} -C_s S_\varphi & C_s C_\varphi & S_s & l_{53} S_4 C_5 - l_{52} C_{34} C_5 - (\lambda_{51} + \lambda_{52}) S_5 \\ S_s S_\varphi & -S_s C_\varphi & C_s & -l_{53} S_4 S_5 + l_{52} C_{34} S_5 - (\lambda_{51} + \lambda_{52}) C_5 \\ C_\varphi & S_\varphi & 0 & -l_{53} C_4 - l_{52} S_{34} - \lambda_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.27)$$

gdzie:

$$S_\varphi = \sin \varphi, C_\varphi = \cos \varphi, \varphi = \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 - \Theta_{s5};$$

$$\lambda_{11}, a_2, c_2, d_2, l_{21}, l_{22}, \lambda_{21}, a_3, b_3, d_3, l_{31}, l_{32}, \lambda_{31}, \lambda_{32}, l_{42}, l_{43}, \lambda_{41}, \lambda_{42},$$

$$l_{52}, l_{53}, \lambda_{51}, \lambda_{52} - \text{parametry konstrukcyjne [57].}$$

Macierz T_{031} opisująca układ współrzędnych elementu równoważącego trzeci człon względem układu bazowego ma postać:

$$T_{031} = \begin{bmatrix} -S_1 C_{23} & S_1 S_{23} & C_1 & 0 \\ C_1 C_{23} & -C_1 S_{23} & S_1 & 0 \\ S_{23} & C_{23} & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.28)$$

Wartości liczbowe parametrów kinematycznych manipulatora IRb-6, występujących w formułach (5.1b)-(5.28) można znaleźć w pracy [54].

5.1.2. Dynamika MRP IRb-6

Dynamikę MRP IRb-6 opiszemy za pomocą formuł (2.55)-(2.62). Uwzględnimy oddziaływanie elementu równoważającego trzeci człon stosując formuły (2.63). Jego kinematykę opisuje macierz T_{031} , a parametry masowe - macierz pseudobezwładności J_{31} . W równaniach dynamiki uwzględnimy też zmiany współczynników ΔD_{ij} , ΔD_{ijk} i ΔD_i , spowodowane obiektem manipulacji (powodującym przyrost macierzy J_s o ΔJ_s) opisane formułami (2.64). Uwzględnimy także tarcie opisane formułami (2.68). Z pracy [57] wynika, że tarcia suche startowe i ruchowe w poszczególnych stopniach swobody mają następujące wartości:

$$F_{s1ts} = F_{s1tr} = 0.07 \text{ Nm}, F_{s2ts} = F_{s3ts} = 0.33 \text{ Nm}, F_{s2tr} = F_{s3tr} = 0.28 \text{ Nm},$$

$$F_{s4ts} = F_{s4tr} = F_{s5ts} = F_{s5tr} = 0.06 \text{ Nm}.$$

Uwzględnimy także tarcie lepkie opisane w formule (2.68a). Tarcie lepkie występuje w przekładniach falowych zespołu napędowego pierwszego, czwartego i piątego członu MRP IRb-6. Z pracy [57] wynikają następujące wartości współczynników tego tarcia:

$$k_{vs1} = 1.51 \cdot 10^{-4} \text{ Nm} \cdot \text{sek} \cdot \text{rad}^{-1}, k_{vs4} = k_{vs5} = 3.23 \cdot 10^{-5} \text{ Nm} \cdot \text{sek} \cdot \text{rad}^{-1}.$$

Modele kinematyki z podrozdziału 5.1 pozwalają wyznaczyć wszystkie pochodne macierzy T_i , T_{si} , T_{031} i $\partial q_i / \partial q_j$ występujące w równaniach dynamiki.

Macierze pseudobezwładności $J_1 \div J_5, J_{s1} \div J_{s5}$ i J_{31} wyznaczono za pomocą programu komputerowego *pseudo* [34].

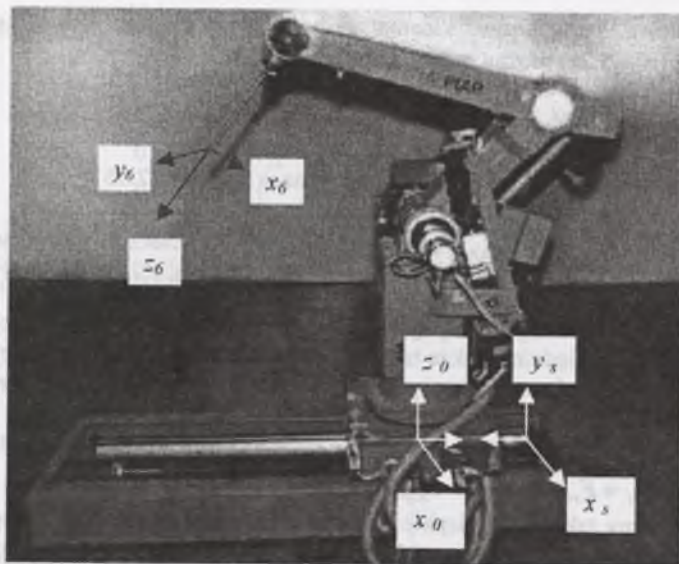
Postać analityczna pochodnych macierzy T_i , T_{si} i T_{031} została wyznaczona za pomocą biblioteki MATLAB-a Symbolic Math Toolbox. Biblioteka ta została wykorzystana do utworzenia postaci analitycznej jawnej współczynników D_{sij} , D_{sijk} , D_{si} występujących w formułach (2.61), (2.82) i (2.83). Postacie te uwzględniają zmiany współczynników spowodowane obiektem manipulacji i elementami zespołów napędowych opisanymi macierzami pseudobezwładności J_{31} .

5.2. Modele MRE

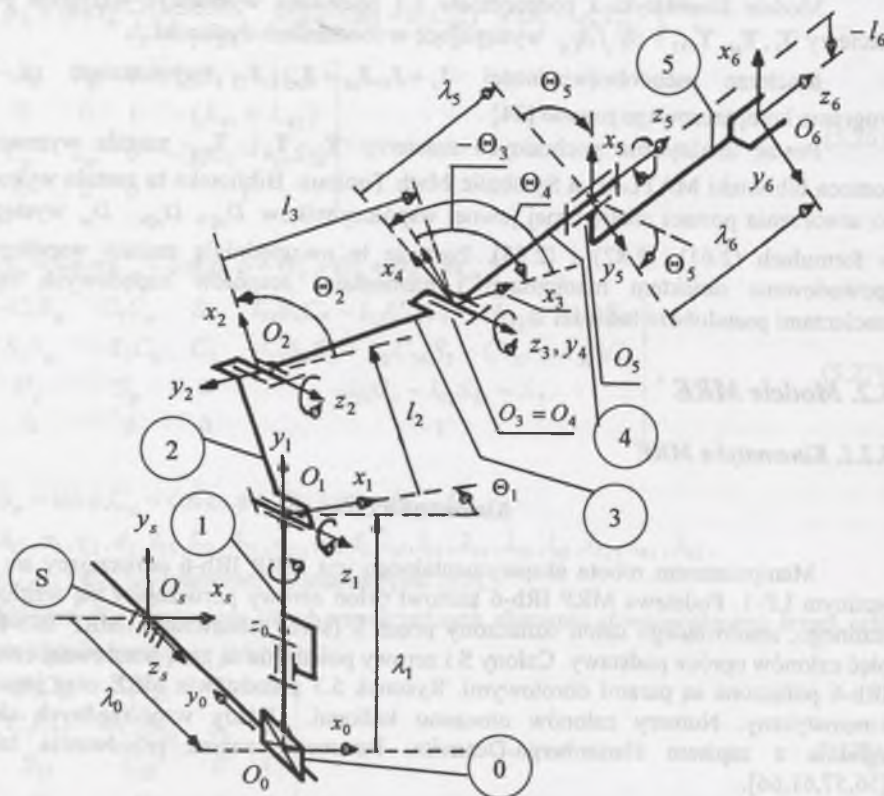
5.2.1. Kinematyka MRE

Kinematyka członów

Manipulatorem robota eksperymentalnego jest MRP IRb-6 poruszający się po torze jezdny LP-1. Podstawa MRP IRb-6 stanowi człon zerowy poruszający się względem toru jezdny, stanowiącego człon oznaczony przez S (skrót stanowisko). MRP IRb-6 posiada pięć członów oprócz podstawy. Człony S i zerowy połączone są parą przesuwną, człony MRP IRb-6 połączone są parami obrotowymi. Rysunek 5.3 przedstawia MRE oraz jego schemat kinematyczny. Numery członów otoczono kółkami. Układy współrzędnych skojarzono zgodnie z zapisem Hartenberga-Denavita. Parametry zapisu przedstawia tabela 5.2 [56,57,61,66].



Rys. 5.3a. Ilustracja manipulatora robota eksperymentalnego
Fig. 5.3a. Illustration of robot experimental manipulator



Rys. 5.3b. Schemat kinematyczny manipulatora robota eksperymentalnego
Fig. 5.3b. Kinematic scheme of robot experimental manipulator

Tabela 5.2

Parametry Hartenberga-Denavita				
Nr członu	$\alpha_i [^\circ]$	$l_i [m]$	$\lambda_i [m]$	$\Theta_i [^\circ]$
0	-90	0	$0 \div 0.851$	0
1	90	0	0.70	$20 \div 360$
2	0	0.45	0	$50 \div 130$
3	0	0.67	0	$-130 \div -50$
4	90	0	0	$-220 \div -25$
5	0	0	0.095	$\Delta\Theta_5 = 360$

W celu ułatwienia rozwiązania zadania odwrotnej kinematyki w postaci analitycznej jawnej wprowadzimy modyfikację kątów $\Theta_1 \div \Theta_5$ taką jak dla MRP IRb-6. Modyfikację opisują równania (5.1a).

Zakres zmian kąta Θ_i

$$-70^\circ \leq \Theta_i \leq 270^\circ. \quad (5.29)$$

Pozostałe kąty zmieniają się tak jak dla MRP IRb-6 i opisane są nierównościami (5.1b). W celu uproszczenia zapisu zastosujemy oznaczenia jak dla opisu kinematyki MRP IRb-6 tj.

$$\sin \Theta_i = S_i, \cos \Theta_i = C_i, \sin(\Theta_i + \Theta'_j) = S_{ij}, \cos(\Theta_i + \Theta'_j) = C_{ij} \text{ itp.}$$

W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że λ_0 oraz kąty $\Theta_1 \div \Theta_5$ są współzrzednymi naturalnymi członów.

Macierz przekształceń A_0 opisuje układ bazowy $x_0 y_0 z_0$ względem układu stanowiska $x_s y_s z_s$ i ma następującą postać:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.30)$$

Macierze przekształceń $A_1 \div A_5$ i E są takie jak dla MRP IRb-6 i opisują je równania (5.2).

Macierze sT_5 i sX opisujące człon roboczy i chwytak przedstawiony na rys. 5.3b względem układu stanowiska $x_s y_s z_s$ mają postać:

$${}^sT_5 = \begin{bmatrix} S_1 S_{234} C_5 + C_1 S_5 & -S_1 S_{234} S_5 + C_1 C_5 & -S_1 C_{234} & l_2 S_1 S_2 - l_3 S_1 C_{23} - \lambda_5 S_1 C_{234} \\ C_{234} C_5 & -C_{234} S_5 & S_{234} & \lambda_1 + l_2 C_2 + l_3 S_{23} + \lambda_5 S_{234} \\ C_1 S_{234} C_5 - S_1 S_5 & -C_1 S_{234} S_5 - S_1 C_5 & -C_1 C_{234} & \lambda_0 + l_2 C_1 S_2 - l_3 C_1 C_{23} - \lambda_5 C_1 C_{234} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.31a)$$

$${}^s\mathbf{X} = \begin{bmatrix} {}^sa_x & {}^sb_x & {}^sc_x & {}^sd_x \\ {}^sa_y & {}^sb_y & {}^sc_y & {}^sd_y \\ {}^sa_z & {}^sb_z & {}^sc_z & {}^sd_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.31b)$$

gdzie: ${}^sa_x \div {}^sa_z$, ${}^sb_x \div {}^sb_z$, ${}^sc_x \div {}^sc_z$ są takie jak w macierzy ${}^s\mathbf{T}_5$, zaś elementy ostatniej kolumny:

$$\begin{aligned} {}^sd_x &= l_2 S_1 S_2 - l_3 S_1 C_{23} - l_5 S_1 C_{234} + l_6 (S_1 S_{234} C_5 + C_1 S_5) - l_6 S_1 C_{234}, \\ {}^sd_y &= l_1 + l_2 C_2 + l_3 S_{23} + l_5 S_{234} + l_6 C_{234} C_5 + l_6 S_{234}, \\ {}^sd_z &= \lambda_0 + l_2 C_1 S_2 - l_3 C_1 C_{23} - l_5 C_1 C_{234} - l_6 (-C_1 S_{234} C_5 + S_1 S_5) - l_6 C_1 C_{234}. \end{aligned} \quad (5.31c)$$

Macierze ${}^s\mathbf{T}_5$ i ${}^s\mathbf{X}$ umożliwiają rozwiązanie zadania prostego kinematyki MRE oraz wyznaczenie przestrzeni roboczej właściwej [73].

Zadanie odwrotne kinematyki

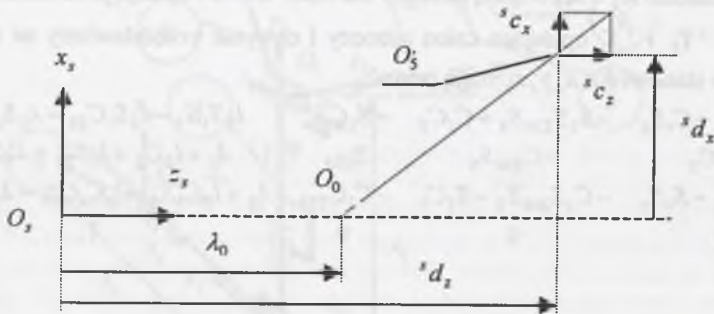
Rozwiązanie zadania odwrotnego kinematyki MRE przedstawimy za pomocą elementów macierzy ${}^s\mathbf{T}_{5zad} = {}^s\mathbf{X}_{zad} \mathbf{E}^{-1}$, która ma postać:

$${}^s\mathbf{T}_{5zad} = \begin{bmatrix} {}^sa_x & {}^sb_x & {}^sc_x & {}^sd_x \\ {}^sa_y & {}^sb_y & {}^sc_y & {}^sd_y \\ {}^sa_z & {}^sb_z & {}^sc_z & {}^sd_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

Z porównania macierzy ${}^s\mathbf{T}_5$ w postaci (5.31a) z macierzą ${}^s\mathbf{T}_{5zad}$ w postaci (5.32), otrzymujemy formuły stanowiące rozwiązanie zadania odwrotnego kinematyki w postaci analitycznej jawnej.

Dla ${}^sc_x^2 + {}^sc_y^2 > 0$ i ${}^sc_x \neq 0$

$$\lambda_0 = {}^sd_z - {}^sd_x \frac{{}^sc_z}{{}^sc_x}. \quad (5.33a)$$



Rys. 5.4. Współrzędne sd_x i sd_z punktu O_5

Fig. 5.4. The coordinates sd_x and sd_z of point O_5

Rzut punktu O_5 z rys. 5.3b na płaszczyznę $x_s z_s$ oznaczmy przez O_5' . Współrzedną x_s punktu O_5' jest sd_x , a współrzedną z_s jest sd_z . Współrzedne te przedstawia rys. 5.4. Z przesłanek geometrycznych wynikają rozwiązania λ_0 dla pozostałych przypadków.

Dla ${}^sc_x^2 + {}^sc_z^2 > 0$ i ${}^sc_x = 0$ i ${}^sd_x = 0$ lub ${}^sc_x^2 + {}^sc_y^2 = 0$ lub dowolnej orientacji macierzy ${}^s\mathbf{T}_{5zad}$ (dowolne wartości elementów pierwszych trzech kolumn w pierwszych trzech wierszach). W takich przypadkach może zmieniać się położenie początku układu bazowego O_0 względem punktu O_5 oraz położenie punktu O_5 względem punktu O_0 . Zatem

- możliwe jest nieskończenie wiele rozwiązań λ_0 . (5.33b)

Dla ${}^sc_x^2 + {}^sc_z^2 > 0$ i ${}^sc_x = 0$ i ${}^sd_x \neq 0$

- nie ma rozwiązań λ_0 . (5.33c)

W pracy [73] przedstawiono kryterium wyboru rozwiązań λ_0 dla przypadków (5.33b). Po wyznaczeniu λ_0 możemy obliczyć macierz ${}^0\mathbf{T}_{5zad} = \mathbf{A}_0^{-1} {}^s\mathbf{T}_{5zad}$.

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{T}_{5zad} &= \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x & d_x \\ a_y & b_y & c_y & d_y \\ a_z & b_z & c_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^sa_x & {}^sb_x & {}^sc_x & {}^sd_x \\ {}^sa_y & {}^sb_y & {}^sc_y & {}^sd_y \\ {}^sa_z & {}^sb_z & {}^sc_z & {}^sd_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} {}^sa_x & {}^sb_x & {}^sc_x & {}^sd_x \\ -{}^sa_z & -{}^sb_z & -{}^sc_z & -{}^sd_z + \lambda_0 \\ {}^sa_y & {}^sb_y & {}^sc_y & {}^sd_y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Macierz ${}^0\mathbf{T}_{5zad}$ opisuje układ współrzędnych $x_5 y_5 z_5$ względem układu bazowego MRP IRb-6. Dlatego można ją zastosować do obliczeń pozostałych współrzędnych naturalnych $\Theta_1 \div \Theta_5$. Po podstawieniu elementów ${}^sa_x \div {}^sd_z$ macierzy ${}^s\mathbf{T}_{5zad}$ i λ_0 do równania (5.34) otrzymamy elementy $a_x \div d_z$ macierzy ${}^0\mathbf{T}_{5zad}$.

Współrzedną Θ_1 otrzymamy z formuły (5.35).

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \begin{cases} \Theta_1^* & \text{dla } d_y > 0 \text{ i } d_x \geq 0 \text{ lub } d_y \geq 0 \text{ i } d_x < 0, \\ \Theta_1^* + 180^\circ & \text{dla } d_y < 0 \text{ i } d_x \leq 0 \text{ lub } d_y \leq 0 \text{ i } d_x > 0. \end{cases} \\ \Theta_1^* &= \arctg \frac{-d_x}{d_y}; \end{aligned} \quad (5.35)$$

Pozostałe współrzędne naturalne $\Theta_2 \div \Theta_5$ wyznaczamy z formuł (5.6b-5.6f).

Do opisu zadanego położenia i orientacji układu współrzędnych $x_5 y_5 z_5$ możemy zastosować współrzędne zewnętrzne położenia ${}^sd_x \div {}^sd_z$ oraz kąty Φ , Θ i Ψ takie, że

$${}^s\mathbf{T}_{5zad} = \text{Trans}({}^sd_x, {}^sd_y, {}^sd_z) \text{Rot}(y, \Phi) \text{Rot}(-z, \Theta) \text{Rot}(y, \Psi). \quad (5.36)$$

Wtedy po obliczeniu λ_0 z formuł (5.33) oraz elementów macierzy ${}^0\mathbf{T}_{5zad}$ z równania (5.34) możemy obliczyć współrzędne naturalne $\Theta_2 \div \Theta_5$ z formuł (5.10a÷c) oraz (5.11a÷c).

Kinematyka członów w postaci różniczkowej

Ruch członu roboczego MRE opiszemy stosując równanie (2.25). Po uwzględnieniu równań kinematyki członów (5.2), (5.30), (5.31a) oraz równań (2.19)+(2.24f) otrzymamy następujący opis kinematyki tego członu roboczego w postaci różniczkowej:

$$\begin{bmatrix} {}^5dx \\ {}^5dy \\ {}^5dz \\ {}^5d\varphi_x \\ {}^5d\varphi_y \\ {}^5d\varphi_z \end{bmatrix} = {}^5J_5 \begin{bmatrix} d\lambda_0 \\ d\Theta_1 \\ d\Theta_2 \\ d\Theta_3 \\ d\Theta_4 \\ d\Theta_5 \end{bmatrix}, \quad (5.37)$$

$${}^5J_5 = \begin{bmatrix} C_1S_{234}C_5 - S_1S_5 & (l_2S_2 - l_3C_{23} - \lambda_5C_{234})S_5 & (l_2S_{34} + l_3C_4 + \lambda_5)C_5 \\ -C_1S_{234}S_5 - S_1S_5 & (l_2S_2 - l_3C_{23} - \lambda_5C_{234})C_5 & -(l_2S_{34} + l_3C_4 + \lambda_5)S_5 \\ -C_1C_{234} & 0 & -l_2C_{34} + l_3S_4 \\ 0 & C_{234}C_5 & S_5 \\ 0 & -C_{234}S_5 & C_5 \\ 0 & S_{234} & 0 \\ (l_3C_4 + \lambda_5)C_5 & \lambda_5C_5 & 0 \\ -(l_3C_4 + \lambda_5)S_5 & -\lambda_5S_5 & 0 \\ l_3S_4 & 0 & 0 \\ S_5 & S_5 & 0 \\ C_5 & C_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.38)$$

gdzie:

${}^5dx + {}^5dz$ oraz ${}^5d\varphi_x + {}^5d\varphi_z$ - różniczkowe przemieszczenia oraz różniczkowe obroty układu współrzędnych $x_5y_5z_5$ względem układu stanowiska x,y,z , opisane w układzie współrzędnych $x_5y_5z_5$, a spowodowane różniczkowymi przyrostami współrzędnych naturalnych członów $d\lambda_0 + d\Theta_1 + d\Theta_5$.

Wyznacznik jacobianu z formuły (5.38) ma postać:

$$\det {}^5J_5 = l_2l_3S_1C_3S_5(S_5 + C_5). \quad (5.39)$$

$\det {}^5J_5 = 0$ dla $S_1 = 0$ lub $S_5 = 0$ lub $S_5 = -C_5$.

Do rozwiązywania zadania odwrotnego kinematyki członów MRE w postaci różniczkowej możemy zastosować równanie (5.38).

Współrzędne naturalne siłowników

Napędy z siłowników przekazywane są przez odpowiednie zespoły napędowe na podstawę MRP IRb-6 oraz na człony MRP IRb-6. Formuła (5.40) opisuje współrzędną naturalną λ_0 za pomocą współrzędnej naturalnej siłownika zerowego Θ_{s0} [33].

$$\lambda_0 = \frac{k_0^{-1}h_0}{2\pi} \Theta_{s0}, \quad (5.40)$$

gdzie:

k_0 - przełożenie przekładni cięgnowej, h_0 - skok śruby napędowej podstawy MRP IRb-6.

Formuły (5.21) opisują współrzędne naturalne członów $\Theta_1 + \Theta_5$ za pomocą współrzędnych naturalnych siłowników $\Theta_{s1} + \Theta_{s5}$.

Formuła opisująca współrzędną naturalną Θ_{s0} za pomocą współrzędnej naturalnej λ_0 ma postać:

$$\Theta_{s0} = 2\pi(k_0\lambda_0 / h_0). \quad (5.41)$$

Formuły (5.22) opisują współrzędne naturalne $\Theta_{s1} + \Theta_{s5}$ za pomocą współrzędnych naturalnych $\Theta_1 + \Theta_5$.

Kinematyka siłowników i zespołów przekazujących napędy

Do opisu kinematyki siłowników zastosujemy macierze jednorodne $T_{s0} + T_{s5}$. Macierz T_{s0} opisująca kinematykę siłownika zerowego ma postać [33]:

$$T_{s0} = \begin{bmatrix} C_{s0} & -S_{s0} & 0 & -l_{01} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S_{s0} & C_{s0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.42)$$

gdzie:

l_{01} - parametr konstrukcyjny; $S_{s0}, C_{s0} = \sin \Theta_{s0}, \cos \Theta_{s0}$.

Macierze $T_{s1} + T_{s5}$ opisują formuły (3.50)+(3.54). Macierz T_{031} opisującą układ współrzędnych elementu równoważającego trzeci człon względem układu bazowego przedstawia formuła (5.28).

5.2.2. Dynamika MRE

Do opisu dynamiki MRE zastosujemy te same formuły, co do opisu dynamiki MRP IRb-6. W formułach tych wskaźniki sumowania zmieniają się od 0 do 5. Uwzględnimy także tarcie opisane formułami (2.68). Siła tarcia suchego zerowego siłownika wynosi

$$F_{s0ts} = F_{s0tr} = 0.07 Nm.$$

Współczynnik tarcia lepkiego zerowego siłownika wynosi

$$k_{vs0} = 1.51 \cdot 10^{-4} Nm \cdot sek \cdot rad^{-1}.$$

Siły tarcia pozostałych siłowników są takie jak dla MRP IRb-6 (podrozdział 5.1.2).

Modele kinematyki z podrozdziałów 5.1.1 i 5.2.1 pozwalają wyznaczyć wszystkie pochodne macierzy T_i, T_{si}, T_{031} i $\partial q_i / \partial q_j$ występujące w równaniach dynamiki.

Macierze pseudobezwładności podstawy MRP IRb-6 J_0 oraz J_{s0} wyznaczono z rozkładu mas w pracy [33]. Macierze $J_1 + J_5, J_{s1} + J_{s5}$ i J_{31} wyznaczono za pomocą programu komputerowego *pseudo* [35].

Postać analityczna pochodnych macierzy T_i, T_{si}, T_{031} została wyznaczona za pomocą biblioteki MATLAB-a Symbolic Math Toolbox. Biblioteka ta została wykorzystana do

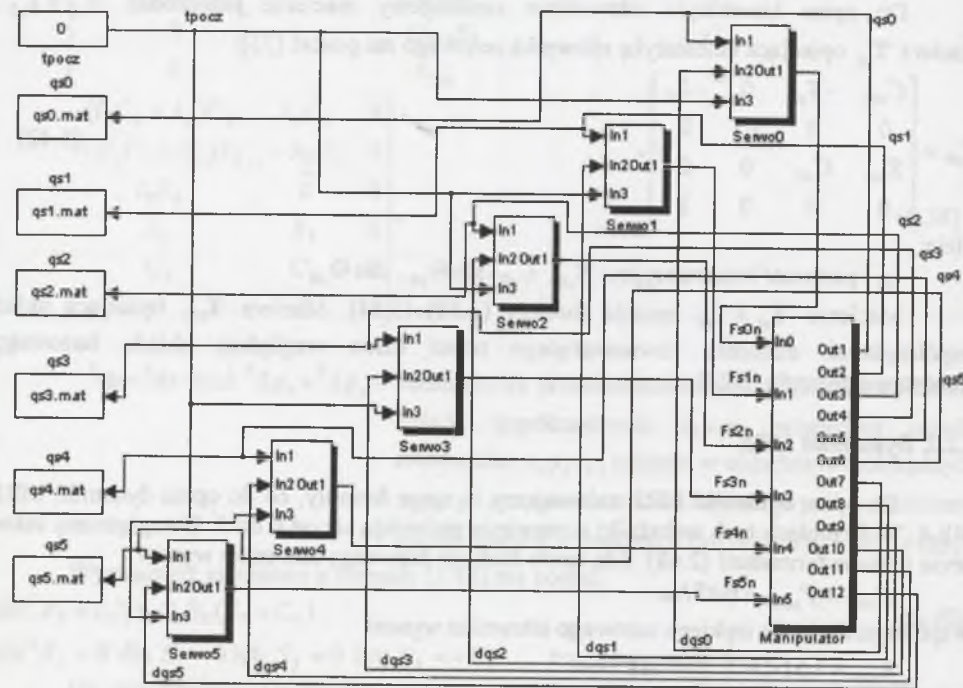
utworzenia postaci analitycznej jawnej współczynników D_{sij} , D_{sijk} , D_{si} występujących w formułach (2.61), (2.82) i (2.83). Postacie te uwzględniają zmiany współczynników spowodowane obiektem manipulacji i elementami zespołów napędowych opisanymi macierzami pseudobezwładności J_{31} .

5.3. Modele robota eksperymentalnego w środowisku programowym Simulinka

W podrozdziale tym przedstawimy model graficzny robota eksperymentalnego. Model robota zawiera modele manipulatora, serwomechanizmów, sterowników, siłowników i regulatorów prądu siłowników.

5.3.1. Model robota eksperymentalnego

Model graficzny robota eksperymentalnego przedstawiony jest na rys. 5.5. Zawiera 7 podsystemów **Servo0+Servo5** i **Manipulator**, które są modelami 6 serwomechanizmów i manipulatora.

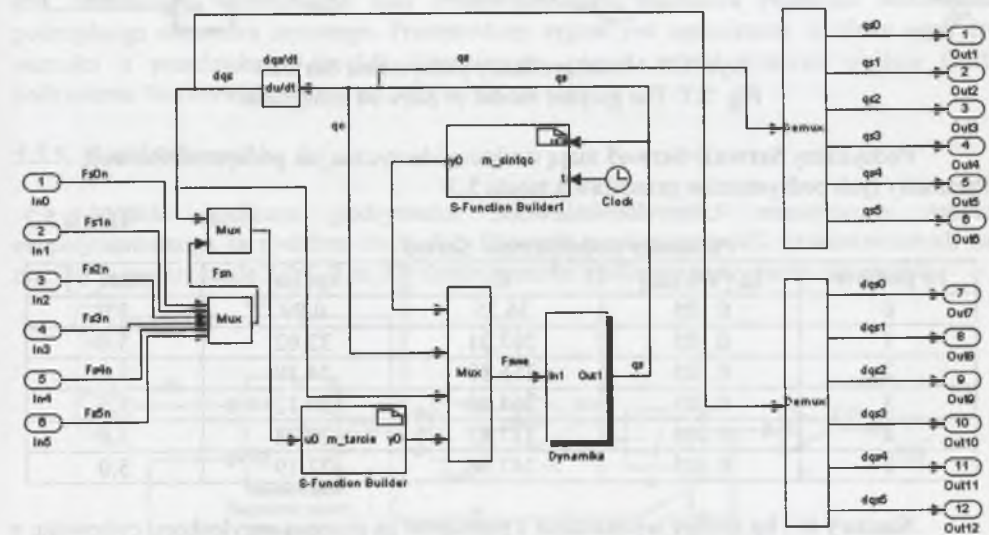


Rys. 5.5. Model graficzny robota eksperymentalnego
Fig. 5.5. The graphic model of experimental robot

Bloki **qs0+qs5** zapisują $\Theta_{s0} \div \Theta_{s5}$ do zbiorów o tych samych nazwach z rozszerzeniem mat. Wyjściem bloku **tpocz** jest stała wartość równa czasowi początkowemu symulacji.

5.3.2. Model manipulatora

Rys. 5.6 przedstawia model graficzny **Manipulator**. W bloku **S-Function Builder 1** obliczane są współrzędne naturalne członów $\Theta_1 \div \Theta_3$ za pomocą funkcji **m_sintqc**. Funkcja ta wykorzystuje wyniki pomiarów eksperymentalnych współrzędnych naturalnych członów i siłowników [80,81]. Obliczanie współrzędnych naturalnych członów polega na interpolacji. Wyjściem tego bloku jest macierz **qc**. Bardziej szczegółowa charakterystyka modelu z rys. 5.6 jest podobna do charakterystyki modelu manipulatora AS, przedstawionej w podrozdziale 3.2.2.



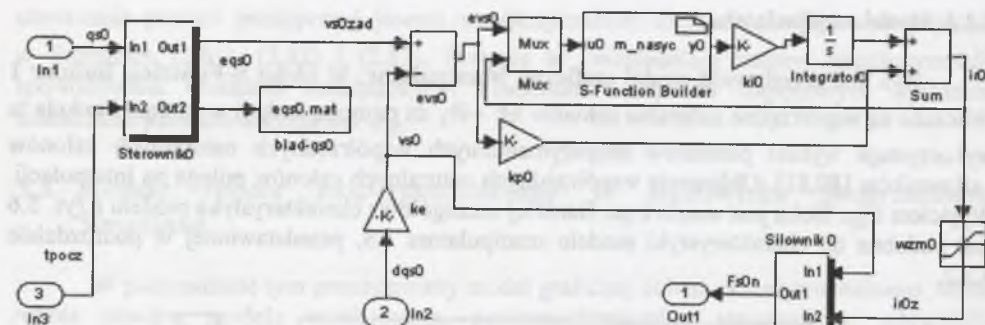
Rys. 5.6. Model graficzny podsystemu **Manipulator**
Fig. 5.6. The graphic model of **Manipulator** subsystem

5.3.3. Modele serwomechanizmów

Podsystem **Servo0** stanowiący model serwomechanizmu siłownika zerowego przedstawiony jest na rys. 5.7. Wejściem **In1** jest q_{s0} równe współrzędnej naturalnej Θ_{s0} , wejściem **In2-dqs0** równe prędkości $\dot{\Theta}_{s0}$, wejściem **In3**-czas początkowy symulacji **tpocz**.

Wejścia **In1** i **In3** są odpowiednio wejściami **In1** i **In2** podsystemu **Sterownik0**. Wyjściami podsystemu **Sterownik0** są prędkość zadana **vs0zad** oraz błąd **eqs0** współrzędnej Θ_{s0} . Blok **bład-qs0** zapisuje błąd **eqs0** do zbioru o tej samej nazwie z rozszerzeniem mat.

Wejście **dqs0** jest mnożone przez współczynnik **ke** w bloku o tej samej nazwie. **ke** jest wzmocnieniem prądnicy tachometrycznej. Wyjście **vs0** bloku **ke** jest odejmowane od **vs0zad** w bloku **evs0**. Pozostała część podsystemu **Servo0** jest podobna do odpowiedniej części podsystemu **Servo1** MRP AS, przedstawionej w podrozdziale 3.2.3 na rys. 3.5. W podsystemie **Servo0** nazwy sygnałów i bloków mają indeksy zero, a nie jeden, jak w podsystemie **Servo1** z rys. 3.5. W bloku **wzm0** sygnał **ir0** jest ograniczony do wartości z zakresu $-5V \div +5V$. W bloku **S-Function Builder** w funkcji **m_snasyc** występuje parametr **irmax**.



Rys. 5.7. Model graficzny podsystemu Serwo0
Fig. 5.7. The graphic model of the **Serwo0** subsystem

Podsystemy **Serwo1**÷**Serwo5** mają strukturę identyczną jak podsystem **Serwo0**. Parametry tych podsystemów przedstawia tabela 5.3.

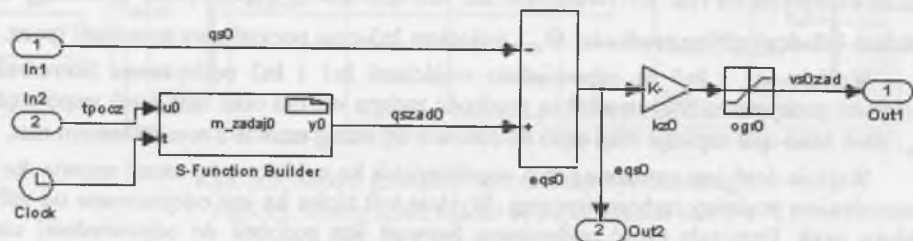
Tabela 5.3

Parametry podsystemów Serwo				
Nr podsystem.	ke [V·s/rad]	ki	kp[1/s]	irmax[V]
0	0.105	36.25	0.99	5.0
1	0.105	267.01	32.02	5.0
2	0.105	256.80	24.29	5.0
3	0.105	264.40	29.12	5.0
4	0.105	237.82	28.78	5.0
5	0.105	247.96	27.19	5.0

Nastawy k_i i k_p zostały wyznaczone z pomiarów za pomocą oscyloskopu cyfrowego z pamięcią.

5.3.4. Modele sterowników

Model graficzny podsystemu **Sterownik0**, stanowiącego model sterownika podrzędnego zerowego siłownika [52], jest zilustrowany na rys. 5.8. $tpocz$ jest wejściem bloku **S-Function Builder**.



Rys. 5.8. Model graficzny podsystemu Sterownik0
Fig. 5.8. The graphic model of the **Controller0** subsystem

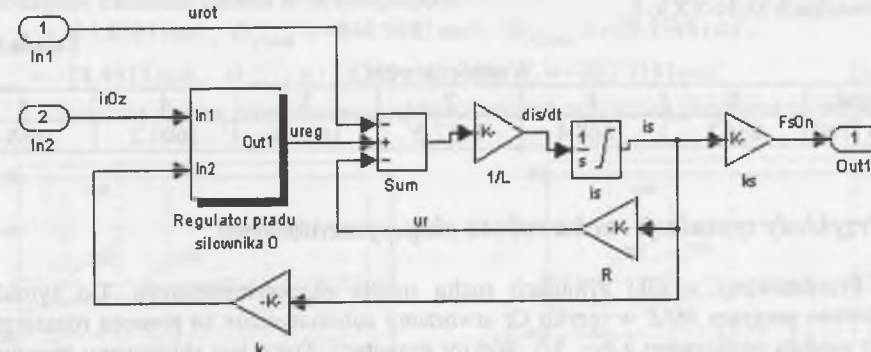
W bloku **tym** funkcja m_zadaj0 oblicza wartość zadaną współrzędnej naturalnej siłownika zerowego $qsad0$, stanowiącej wyjście tego bloku. Funkcja wczytuje zbiór $qs0.mat$ w początkowej chwili symulacji. Zbiór ten opisuje współrzędną naturalną zadaną

zerowego siłownika, obliczoną w sterowniku nadrzędnym, przesyłaną do sterownika podrzędnego z okresem próbkowania T_{pr} . Okres ten jest parametrem wejściowym programu **PLAN IRb-6** [52]. $qsad0$ jest funkcją czasu liniową z parabolicznymi odcinkami krzywoliniowymi [10]. Maksymalną wartość bezwzględną prędkości zmian tej funkcji opisuje parametr v_{zmax} , a maksymalną wartość bezwzględną przyspieszenia parametr a_{zmax} . Wartości tych parametrów wpisywane są do odpowiednich rejestrów sterowników podrzędnych robota eksperymentalnego.

W bloku **eqs0** od wyjścia $qsad0$ odejmowane jest $qs0$. Różnica tych sygnałów stanowi wyjście **Out2** podsystemu **Sterownik0**. $eqs0$ jest też mnożone przez współczynnik $kz0$, stanowiący wzmocnienie toru proporcjonalnego regulatora prędkości sterownika podrzędnego siłownika zerowego. Przemnożony sygnał jest ograniczany w bloku **ogr0** do wartości z przedziału $-5.0 \div +5.0$. Ograniczony sygnał $v0zad$ stanowi wyjście **Out1** podsystemu **Sterownik0**.

5.3.5. Modele siłowników

Modele graficzne podsystemu **Silownik0**÷**Silownik5** manipulatora robota eksperymentalnego są podobne do modeli **Silownik** manipulatora AS, przedstawionych na rys. 3.6 w podrozdziale 3.2.4. Rys. 5.9 ilustruje model graficzny podsystemu **Silownik0**.



Rys. 5.9. Model graficzny podsystemu Silownik0
Fig. 5.9. The graphic model of the **Actuator0** subsystem

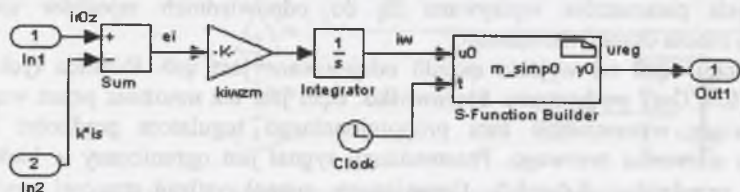
W modelach graficznych robota eksperymentalnego nie występują bloki k_e . Blok k mnoży prąd siłownika przez współczynnik k sprzężenia prądu. Parametry elektryczne siłowników manipulatora robota eksperymentalnego są $k_s=0.105$ [H] i $L=2.3$ [mH]. Zmierzone wartości oporności R siłowników i współczynniki sprzężenia k przedstawione są w tabeli 5.4. W bloku całkowania is występuje ograniczenie sygnału is do zakresu -10.0 [A]÷ $+10.0$ [A].

Tabela 5.4

Oporności R i współczynniki sprzężenia k siłowników						
Nr siłown.	0	1	2	3	4	5
R [Ω]	2.549	3.053	2.824	2.780	4.140	4.129
k [Ω]	0.42	0.42	0.38	0.42	0.40	0.42

5.3.6. Modele regulatorów prądu silowników

Modele graficzne podsystemów **Regulator prądu silownika0÷5** manipulatora robota eksperymentalnego są podobne do modelu graficznego regulatora z rys. 3.7 w podrozdziale 3.2.5. Rys. 5.10 ilustruje model graficzny podsystemu **Regulator prądu silownika0**. Blok

Rys. 5.10. Model graficzny podsystemu **Regulator prądu silownika 0**Fig. 5.10. The graphic model of the **Actuator 0 Current Controller** subsystem

S-Function Builder za pomocą funkcji *m_simp0* symuluje impulsator bipolarny, z modulacją szerokości i częstotliwością 8 kHz. Amplituda impulsów dla robota eksperymentalnego jest równa 50 [V]. Wartości *kiwzm* przedstawia tabela 5.5. Wartości tę wyznaczono na podstawie pomiarów oraz analizy układów elektronicznych stanowiących regulator prądu silowników w sterownikach SUN-XXX-1.

Tabela 5.5

Wartości *kiwzm*

Nr regul.	0	1	2	3	4	5
<i>kiwzm</i> [1/s]	834.8	1668.4	1462.0	1668.4	1601.2	1668.4

5.4. Przykłady symulacji ruchu robota eksperymentalnego

Przedstawimy wyniki symulacji ruchu robota eksperymentalnego. Do symulacji zastosowano program *MRE* w języku C, utworzony automatycznie za pomocą rozszerzenia RTW z modelu graficznego z rys. 5.5. Wektor grawitacji Ziemi jest skierowany przeciwnie do osi y_s układu stanowiska z rys. 5.3b. Przyjęto wartości początkowe współrzędnych naturalnych równe współrzędnym punktu początkowego trajektorii zadanej. Symulację przeprowadzono ze stałym krokiem dyskretyzacji czasu równym $0.125 \cdot 10^{-4}$ sek. Wartość ta jest o rząd wielkości mniejsza od okresu impulsowania impulsatorów w regulatorach prądów silowników. Napięcie wyjściowe z tych impulsatorów może zmieniać się najszybciej spośród sygnałów wyjściowych wszystkich podsystemów modelu graficznego robota eksperymentalnego z rys. 5.5. Parametry bloków **S-Function Builder** symulujących zadajniki współrzędnych naturalnych silowników w podsystemach **Sterownik0-5** (rys. 5.8) są takie same i równe $T_{pr} = 0.04$ sek., $v_{zmax} = 47.9369$ rad/sek., $a_{zmax} = 137.1486$ rad/sek². Na rysunkach *qs0÷qs5* oznaczają współrzędne naturalne zadane $\Theta_{s0zad} \div \Theta_{s5zad}$, *qs0÷qs5* współrzędne naturalne $\Theta_{s0} \div \Theta_{s5}$, *eqsi=qszi-qs* błędy regulacji $\Theta_{siazad} - \Theta_{si}$.

5.4.1. Trajektorie zadane

Trajektorie zadane MRE w przestrzeni zewnętrznej opiszemy w układzie współrzędnych tachimetrów [18,80]. Elementem wykonawczym będzie wskaźnik zilustrowany na rys. 5.3a. Z końcem wskaźnika skojarzymy układ współrzędnych $x_6y_6z_6$.

Trajektorie zadane układu współrzędnych $x_6y_6z_6$ względem układu współrzędnych tachimetrów opiszemy za pomocą formuły:

$${}^tX_{zad} = Trans({}^t x_{zad}, {}^t y_{zad}, {}^t z_{zad}) Rot(z, {}^t \Phi_{zad}) Rot(y, {}^t \Theta_{zad}) Rot(z, {}^t \Psi_{zad}). \quad (5.43)$$

Trajektorię zadaną zmieniającą się skokowo w chwili $t=0$ sek. opisują współrzędne punktu początkowego P i końcowego K. Współrzędne punktu P mają wartości:

$$\begin{aligned} {}^t x_{zad} &= 3.100 \text{ m.}, {}^t y_{zad} = 1.200 \text{ m.}, {}^t z_{zad} = 0.100 \text{ m.}, {}^t \Phi_{zad} = 225.74^\circ, \\ {}^t \Theta_{zad} &= 42.00^\circ, {}^t \Psi_{zad} = 170.98^\circ. \end{aligned} \quad (5.44a)$$

Współrzędne punktu K są następujące:

$$\begin{aligned} {}^t x_{zad} &= 3.100 \text{ m.}, {}^t y_{zad} = 1.200 \text{ m.}, {}^t z_{zad} = -0.350 \text{ m.}, {}^t \Phi_{zad} = 225.74^\circ, \\ {}^t \Theta_{zad} &= 98.00^\circ, {}^t \Psi_{zad} = 89.49^\circ. \end{aligned} \quad (5.44b)$$

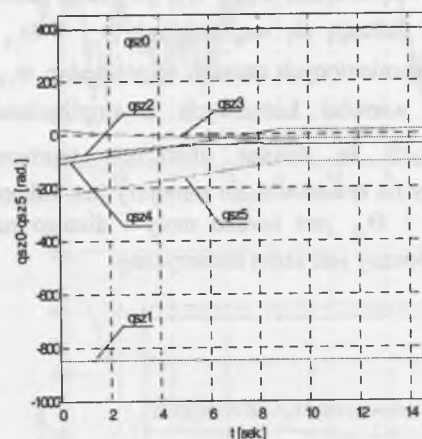
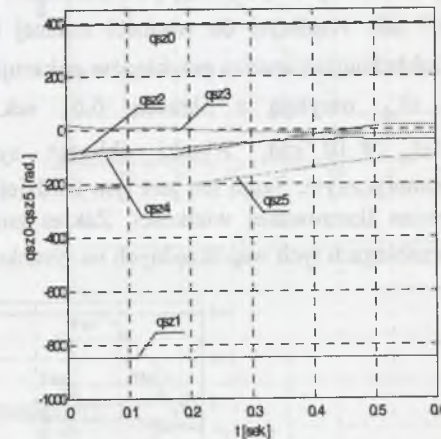
Współrzędne naturalne członów i silowników obliczono za pomocą programu *plan2_irb6*, przedstawionego w pracach [18,53]. Program jest zaimplementowany na stacji roboczej Motorola MVME 167, stanowiącej sterownik nadrzędny robota eksperymentalnego. Obliczone współrzędne naturalne punktu P mają wartości:

$$\begin{aligned} \Theta_{s0zad} &= 395.8163 \text{ rad.}, \Theta_{s1zad} = -844.9485 \text{ rad.}, \Theta_{s2zad} = -87.8119 \text{ rad.}, \\ \Theta_{s3zad} &= 18.4240 \text{ rad.}, \Theta_{s4zad} = -108.0758 \text{ rad.}, \Theta_{s5zad} = -227.6985 \text{ rad.} \end{aligned} \quad (5.45a)$$

Współrzędne naturalne punktu K są następujące:

$$\begin{aligned} \Theta_{s0zad} &= 395.8163 \text{ rad.}, \Theta_{s1zad} = -844.9485 \text{ rad.}, \Theta_{s2zad} = -38.3696 \text{ rad.}, \\ \Theta_{s3zad} &= -18.4913 \text{ rad.}, \Theta_{s4zad} = 17.8399 \text{ rad.}, \Theta_{s5zad} = -103.7191 \text{ rad.} \end{aligned} \quad (5.45b)$$

Trajektorię zadaną prostoliniową zaplanowano też za pomocą programu *plan2_irb6*.

Rys. 5.11. Współrzędne naturalne *qs0÷qs5*Fig. 5.11. Required natural coordinates *qs0÷qs5*Rys. 5.12. Współrzędne naturalne *qs0÷qs5*Fig. 5.12. Required natural coordinates *qs0÷qs5*

Program obliczył współrzędne zewnętrzne ${}^t x_{zad}$, ${}^t y_{zad}$, ${}^t z_{zad}$, ${}^t \Phi_{zad}$, ${}^t \Theta_{zad}$, ${}^t \Psi_{zad}$ punktów pośrednich leżących na prostej łączącej punkt początkowy P i końcowy K. Liczba punktów pośrednich jest równa 89. Następnie obliczył współrzędne naturalne silowników punktu P, K i pośrednich oraz przypisał im czasy. Czasy te wynikają z warunku poprawnej transmisji sygnałów między sterownikiem nadrzędnym i sterownikami podrzędnymi, różnic

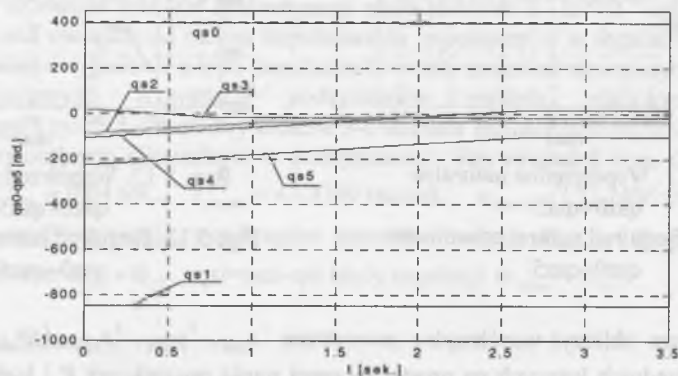
współrzędnych naturalnych siłowników między sąsiednimi punktami pośrednimi i prędkości zadanych $v_{z,max} = 47.9369$ rad/sek. zadajników [52]. Zadajniki symulowane są przez bloki **S-Function Builder** w podsystemach **Sterownik0-5** (rys. 5.8). Planowany czas ruchu jest równy 9.0167 sek. Trajektorię ilustruje rys. 5.11.

Trajektorię zadaną prostoliniową zaplanowano też za pomocą programu *optt*. Program *optt* oblicza minimalne czasy ruchu między kolejnymi punktami pośrednimi przy ekstremalnych momentach napędowych siłowników [57,60]. Współrzędne naturalne siłowników punktów P, K i pośrednich są takie jak dla trajektorii z rys. 5.11. Tak zaplanowaną trajektorię można potraktować jako testującą pozycjonowanie MRP po linii prostej PK w warunkach ekstremalnych. Trajektorię ilustruje rys. 5.12. Planowany czas ruchu jest równy 0.5474 sek.

5.4.2. Symulacja ruchu

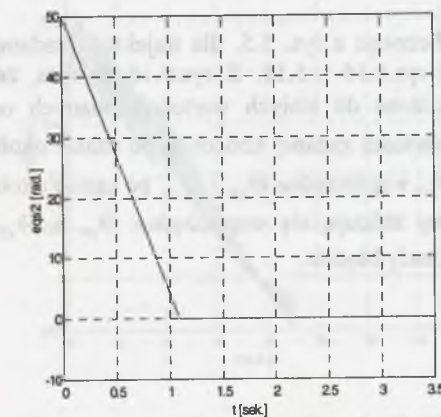
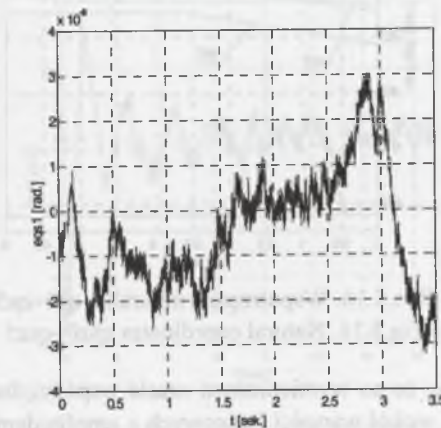
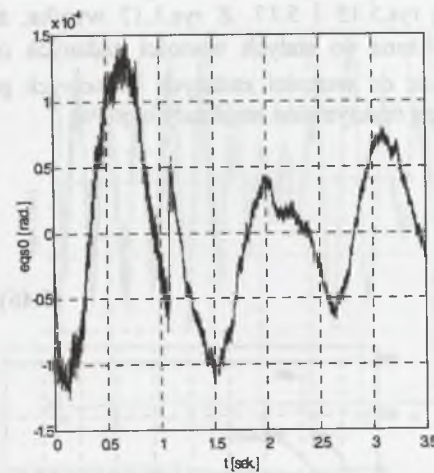
Do symulacji ruchu wykorzystujemy model graficzny MRE z rys. 5.5. Symulację przeprowadzono dla trajektorii zadanej skokowej opisanej formułami (5.44) oraz dla trajektorii zadanych zilustrowanych na rys. 5.11 i 5.12.

Do symulacji ruchu dla trajektorii zadanej skokowej zastosowano model graficzny MRE z uproszczonymi podsystemami **Sterownik0+5**. Uproszczenia polegają na pominięciu bloków **S-Function Builder**. Wyniki symulacji dla trajektorii zadanej skokowej przedstawia rys. 5.13. Rys. 5.14 przedstawia błędy regulacji eqs. Z rys. 5.13 i 5.14 wynika, że współrzędne Θ_{s0} i Θ_{s1} przyjmują wartości zbliżone do stałych wartości zadanych od początku ruchu. Współrzędna Θ_{s3} zbliża się do wartości zadanej końcowej po czasie około 0.9 sek., współrzędna Θ_{s2} po czasie około 1.2 sek., współrzędne Θ_{s4} i Θ_{s5} po czasie około 2.7 sek. Najdłużej do wartości zadanej końcowej zbliżają się współrzędne Θ_{s4} i Θ_{s5} . Dokładniejsza analiza przebiegów pokazuje, że po wymienionych czasach współrzędne Θ_{s4} i Θ_{s5} oscylują z okresem 0.01 sek. wokół wartości końcowych z amplitudami $\Delta\Theta_{si} \leq 8 \cdot 10^{-3}$ rad. Wyniki obliczeń symulacyjnych są zawsze obarczone szumem numerycznym. Szum ten jest tym bardziej widoczny na rysunkach, im mniejszy jest zakres zmian ilustrowanej wielkości. Zakres zmian Θ_{s0} i Θ_{s1} jest bardzo mały i dlatego na przebiegach tych współrzędnych na rysunku 5.14 widoczny jest szum numeryczny.



Rys. 5.13. Współrzędne naturalne $qs_0 \div qs_5$

Fig. 5.13. Natural coordinates $qs_0 \div qs_5$



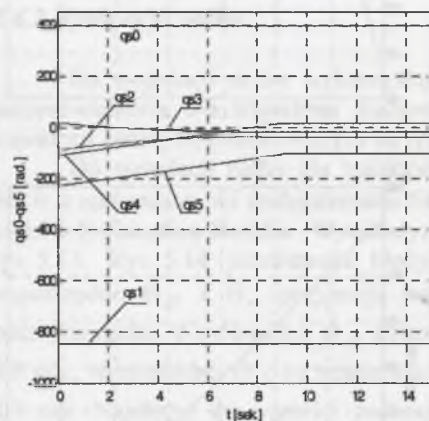
Rys. 5.14. Błędy regulacji $eqs_0 \div eqs_5$

Fig. 5.14. Control errors $eqs_0 \div eqs_5$

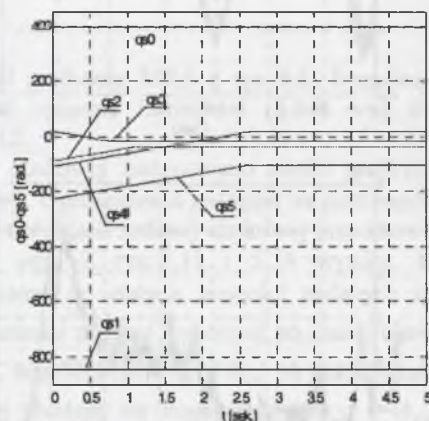
Wyniki symulacji za pomocą modelu graficznego z rys. 5.5, dla trajektorii zadanej w postaci linii prostej z rys.5.11, przedstawiają rys.5.15 i 5.17. Z rys.5.17 wynika, że współrzędne Θ_{s0} i Θ_{s1} przyjmują wartości zbliżone do stałych wartości zadanych od początku ruchu. Pozostałe współrzędne zbliżają się do wartości zadanych końcowych po czasie około 9.2 sek. Z rys.5.17 wynikają następujące maksymalne amplitudy błędów:

$$\begin{aligned} \max|eqs0| &= 1.0 \cdot 10^{-4} \text{ rad.}, \\ \max|eqs1| &= 1.43 \cdot 10^{-5} \text{ rad.}, \\ \max|eqs2| &= 0.26 \text{ rad.}, \\ \max|eqs3| &= 0.20 \text{ rad.}, \\ \max|eqs4| &= 0.25 \text{ rad.}, \\ \max|eqs5| &= 0.26 \text{ rad.} \end{aligned}$$

(5.46)



Rys.5.15. Współrzędne naturalne $qs0 \div qs5$
Fig.5.15. Natural coordinates $qs0 \div qs5$



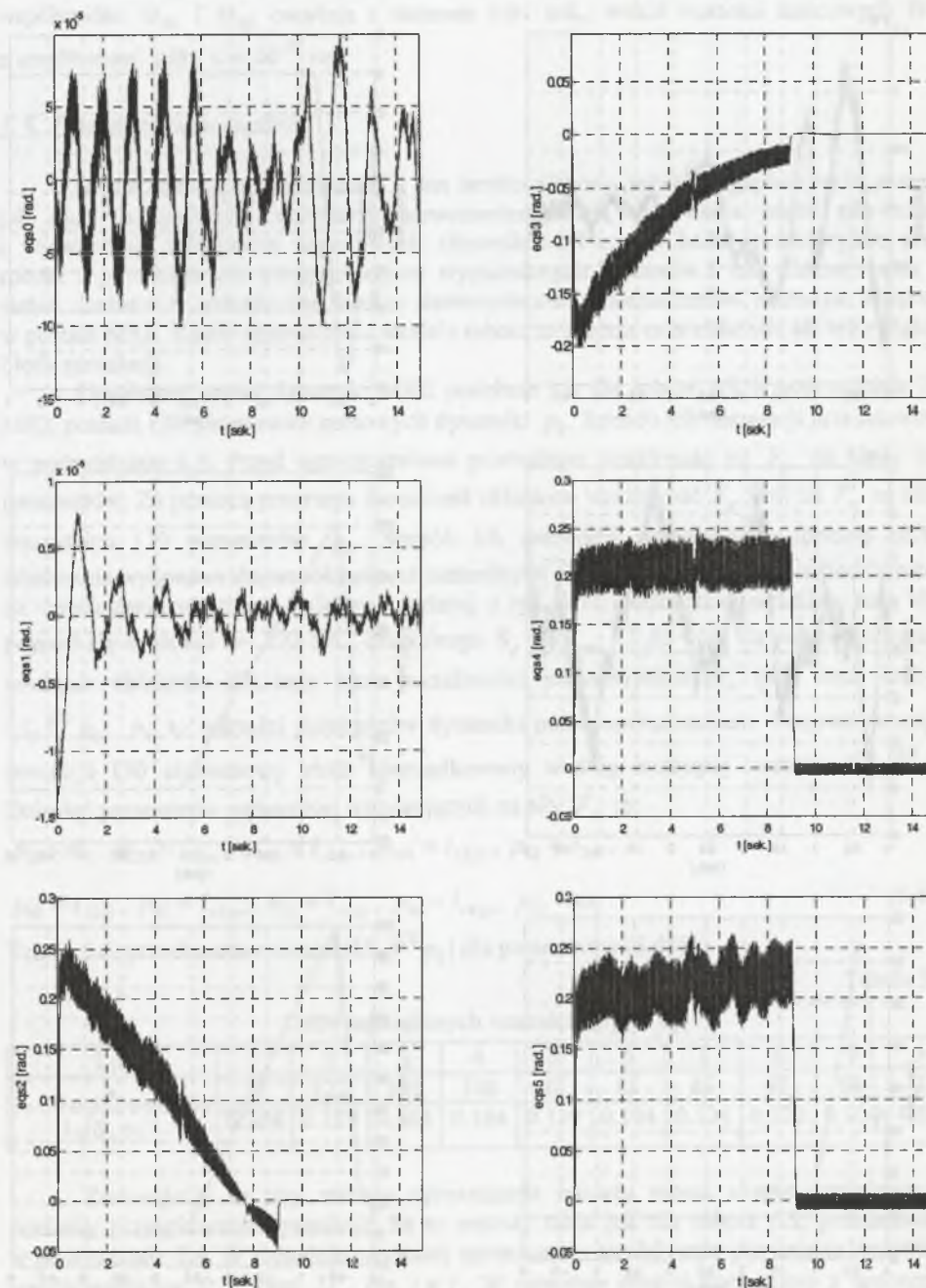
Rys.5.16. Współrzędne naturalne $qs0 \div qs5$
Fig.5.16. Natural coordinates $qs0 \div qs5$

Dokładniejsza analiza przebiegów pokazuje, że po wymienionym czasie współrzędne naturalne Θ_{s4} i Θ_{s5} oscylują z okresem 0.01 sek. wokół wartości końcowych z amplitudami $\Delta\Theta_{si} \leq 7.5 \cdot 10^{-3}$ rad.

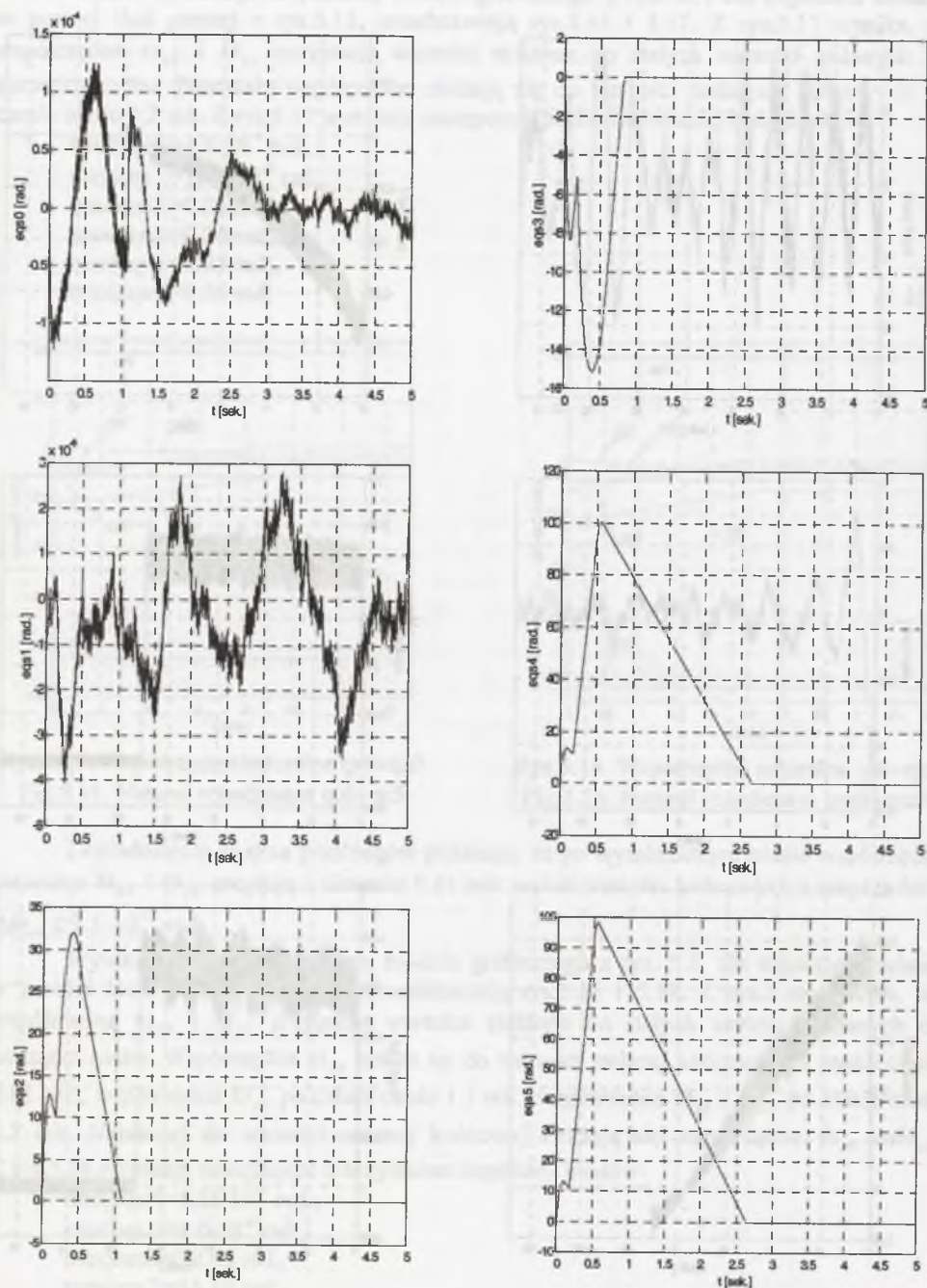
Wyniki symulacji za pomocą modelu graficznego z rys. 5.5, dla trajektorii zadanej w postaci linii prostej z rys.5.12, przedstawiają rys.5.16 i 5.18. Z rys.5.16 wynika, że: współrzędne Θ_{s0} i Θ_{s1} przyjmują wartości zbliżone do stałych wartości zadanych od początku ruchu. Współrzędna Θ_{s3} zbliża się do wartości zadanej końcowej po czasie około 0.81 sek., współrzędna Θ_{s2} po czasie około 1.1 sek., współrzędne Θ_{s4} i Θ_{s5} po czasie około 2.7 sek. Najdłużej do wartości zadanej końcowej zbliżają się współrzędne Θ_{s4} i Θ_{s5} . Z rys.5.18 wynikają następujące maksymalne amplitudy błędów:

$$\begin{aligned} \max|eqs0| &= 1.25 \cdot 10^{-4} \text{ rad.}, \\ \max|eqs1| &= 4.0 \cdot 10^{-6} \text{ rad.}, \\ \max|eqs2| &= 32.08 \text{ rad.}, \\ \max|eqs3| &= 15.16 \text{ rad.}, \\ \max|eqs4| &= 100.32 \text{ rad.}, \\ \max|eqs5| &= 98.43 \text{ rad.} \end{aligned}$$

(5.47)



Rys. 5.17. Błędy regulacji $eqs0-eqs5$
Fig. 5.17. Control errors $eqs0-eqs5$



Rys. 5.18. Błąd regulacji eqs0-eqs5
Fig. 5.18. Control errors eqs0-eqs5

Dokładniejsza analiza przebiegów pokazuje, że po wymienionych czasach współrzędne Θ_{s4} i Θ_{s5} oscylują z okresem 0.01 sek., wokół wartości końcowych Θ_{sik} z amplitudami $\Delta\Theta_{si} \leq 6 \cdot 10^{-3}$ rad.

5.5. Uproszczenia modeli

Model MRE z podrozdziału 5.3 jest bardzo złożony, gdyż uwzględnia takie procesy, jak ruch manipulatora, sterowanie serwomechanizmów, sterowanie prądu siłowników i wytwarzanie momentów napędowych siłowników. Pozwala badać symulacyjnie pracę robota z jednoczesnym uwzględnieniem wymienionych procesów i ich oddziaływania na siebie. Badania te umożliwiają analizę sterowania serwomechanizmów złożonym obiektem w postaci MRP. Każde uproszczenie modelu robota zmniejsza czas obliczeń, ale też zwiększa błąd symulacji.

Uprościmy model dynamiki MRE podobnie jak dla robota AS w podrozdziale 3.4. MRE posiada 130 parametrów masowych dynamiki p_k . Sposób ich numeracji przedstawiono w podrozdziale 6.3. Przed uproszczeniami przebadano wrażliwość sił F_{si} na błędy tych parametrów. Za pomocą programu *swrazlcalk* obliczono wrażliwość S_g [86] sił F_{si} na błędy wszystkich 130 parametrów p_k . Sposób ich numeracji przedstawiają formuły (6.17). Obliczenia wykonano dla współrzędnych naturalnych z rys. 5.15, które są odpowiedzią robota na wymuszenie w postaci trajektorii zadanej z rys. 5.11. Najbardziej wrażliwy stan MRP pojawił się w chwili $t \approx 1.272$ sek., dla którego $S_g = S_{g\max} = 2.85 \cdot 10^7$. Za pomocą programu *wrazlpar* obliczono dla tego stanu wrażliwości parametryczne S_k [86] oraz iloczyny $(S_k)^{1/2} p_k$. p_k to wartości parametrów dynamiki przed uproszczeniem. Program *wrazlpar* utworzył 130 elementowy zbiór uporządkowany według malejącej wartości $|(S_k)^{1/2} p_k|$. Dziesięć parametrów najbardziej wpływających na siły F_{si} to:

$$p_{31} = m_3, p_{122} = I_{31xx}, p_{105} = I_{s5xx}, p_{106} = I_{s5yy}, p_{32} = I_{3xx},$$

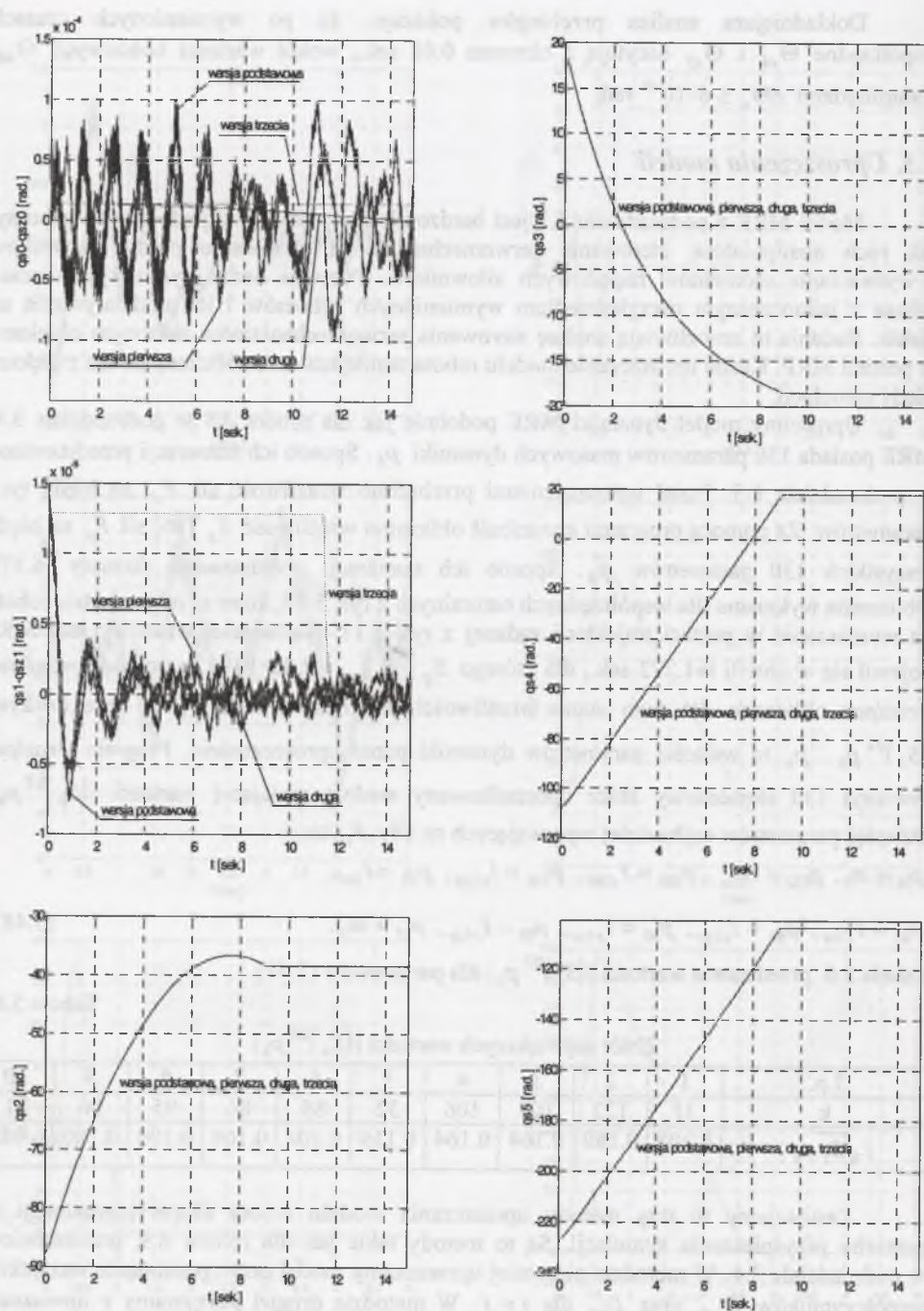
$$p_{85} = I_{s3xx}, p_{86} = I_{s3yy}, p_{95} = I_{s4xx}, p_{96} = I_{s4yy}, p_{21} = m_2. \quad (5.48)$$

Tabela 5.6. przedstawia wartości $|(S_k)^{1/2} p_k|$ dla parametrów (5.48).

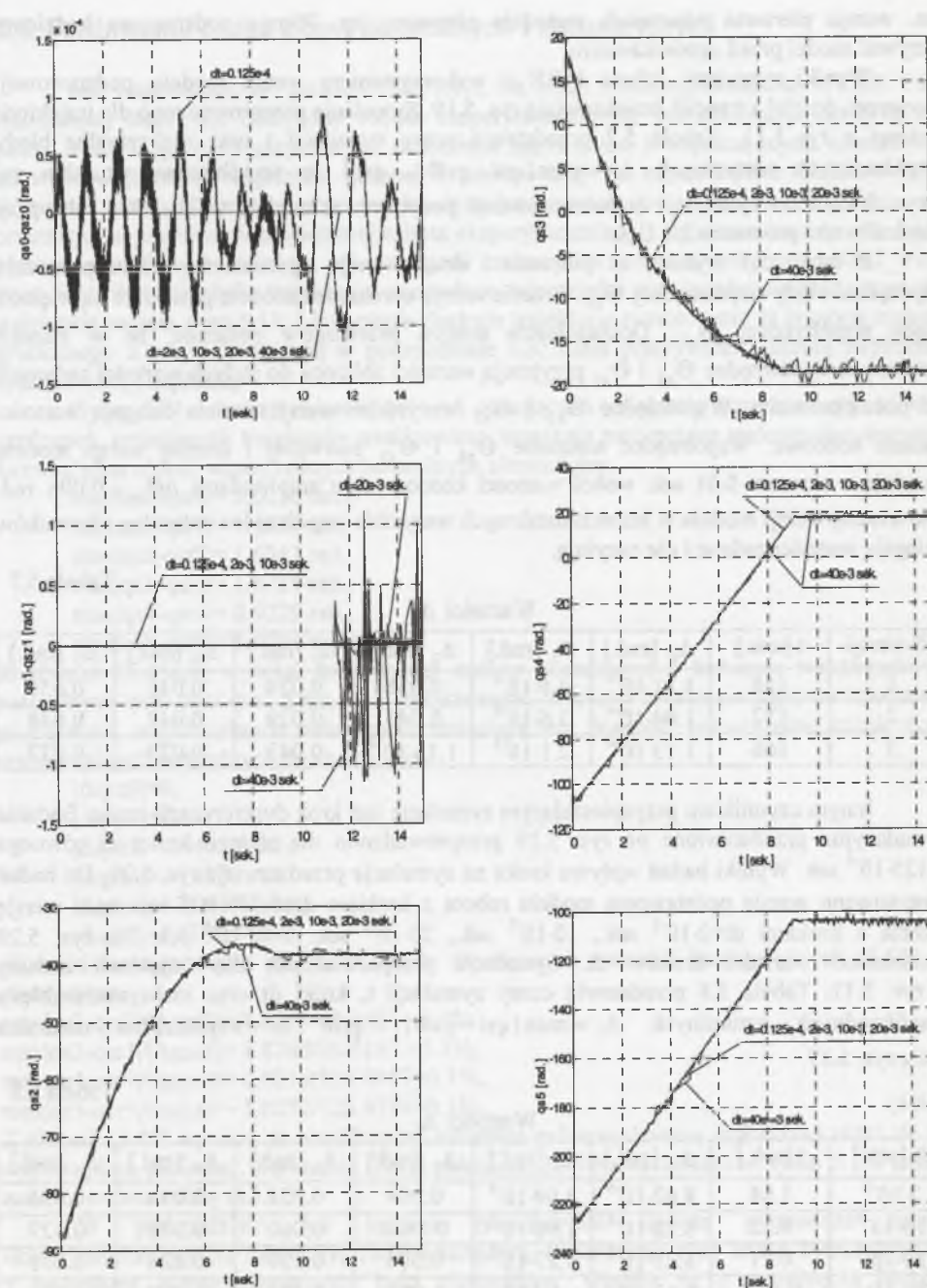
Tabela 5.6

Zbiór największych wartości $ (S_k)^{1/2} p_k $										
Lp.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k	31	122	105	106	32	85	86	95	96	21
$ \sqrt{S_k} p_k $	0.204	0.189	0.164	0.164	0.119	0.104	0.104	0.100	0.100	0.088

Zastosujemy tu trzy metody upraszczania modelu robota eksperymentalnego na potrzeby przyspieszenia symulacji. Są to metody takie jak dla robota AS, przedstawione w podrozdziale 3.4. W metodzie pierwszej upraszczamy model przez pominięcie wszystkich współczynników D_{sijk} oraz D_{sij} dla $i \neq j$. W metodzie drugiej korzystamy z uproszczeń metody pierwszej, przyjmujemy stałe współczynniki D_{sii} równe średnim arytmetycznym ich wartości ekstremalnych i uwzględniamy we współczynnikach D_{si} tylko 10 parametrów dynamiki (5.48). W metodzie trzeciej wykorzystujemy uproszczenia z metody drugiej



Rys. 5.19. Współrzędne naturalne q_0 - q_5
Fig. 5.19. Natural coordinates q_0 - q_5



Rys. 5.20. Współrzędne naturalne q_0 - q_5
Fig. 5.20. Natural coordinates q_0 - q_5

i przyjmujemy prądy siłowników równe ich wartościom zadany. Przyjmiemy, że numery kolejnych wersji modeli uproszczonych robota odpowiadają numerowi metody ich tworzenia,

tn. wersja pierwsza odpowiada metodzie pierwszej itp. Wersją podstawową będziemy nazywać model przed uproszczeniem.

Wyniki symulacji robota MRE z wykorzystaniem wersji modelu podstawowej, pierwszej, drugiej i trzeciej przedstawiają rys. 5.19. Symulacje przeprowadzono dla trajektorii zadanej z rys. 5.11. Tabela 5.7 przedstawia czasy symulacji t oraz maksymalne błędy współrzędnych naturalnych $\Delta_i = \max |q_{si} - q_{si0}|$. q_{si0} to współrzędna naturalna q_{si} z rys. 5.15. Czas symulacji za pomocą wersji podstawowej modelu wynosi 322 sek., przy częstotliwości procesora 2.4 GHz.

Z tabeli 5.7 wynika, że pierwsza i druga wersja uproszczeń modelu powodują największe błędy współrzędnej Θ_{s5} . Trzecia wersja uproszczeń modelu powoduje największe błędy współrzędnej Θ_{s3} . Dokładniejsza analiza przebiegów pokazuje, że w stanach ustalonych współrzędne Θ_{s0} i Θ_{s1} przyjmują wartości zbliżone do stałych wartości zadanych od początku ruchu. Współrzędne Θ_{s2} i Θ_{s3} wszystkich wersji modelu osiągają wartości zadane końcowe. Współrzędne naturalne Θ_{s4} i Θ_{s5} pierwszej i drugiej wersji modelu oscylują z okresem 0.01 sek. wokół wartości końcowych z amplitudami $\Delta\Theta_{si} = 0.006$ rad. Dla trzeciej wersji modelu w stanach ustalonych wszystkie współrzędne naturalne siłowników osiągają wartości zadane i nie oscylują.

Tabela 5.7

Wartości Δ_i

Nr wersji	t [sek.]	Δ_0 [rad.]	Δ_1 [rad.]	Δ_2 [rad.]	Δ_3 [rad.]	Δ_4 [rad.]	Δ_5 [rad.]
1	158	$1.31 \cdot 10^{-4}$	$4.5 \cdot 10^{-6}$	0.038	0.029	0.045	0.050
2	152	$1.04 \cdot 10^{-4}$	$3.6 \cdot 10^{-6}$	0.046	0.029	0.042	0.048
3	166	$1.13 \cdot 10^{-4}$	$2.1 \cdot 10^{-5}$	$1.13 \cdot 10^{-4}$	0.043	0.029	0.037

Innym czynnikiem przyspieszającym symulację jest krok dyskretyzacji czasu. Badania symulacyjne przedstawione na rys. 5.19 przeprowadzono dla stałego kroku dt równego $0.125 \cdot 10^{-4}$ sek. Wyniki badań wpływu kroku na symulacje przedstawiają rys. 5.20. Do badań zastosowano wersję podstawową modelu robota z krokiem $dt = 0.125 \cdot 10^{-4}$ sek. oraz wersję trzecią z krokami $dt = 2 \cdot 10^{-3}$ sek., $10 \cdot 10^{-3}$ sek., $20 \cdot 10^{-3}$ sek. i $40 \cdot 10^{-3}$ sek. Na rys. 5.20 zaznaczono wartości kroków dt . Symulacje przeprowadzono dla trajektorii zadanej z rys. 5.11. Tabela 5.8 przedstawia czasy symulacji t , kroki dt oraz maksymalne błędy współrzędnych naturalnych $\Delta_i = \max |q_{si} - q_{si0}|$. q_{si0} to współrzędna naturalna q_{si} z rys. 5.17.

Tabela 5.8

Wartości Δ_i

dt [sek.]	t [sek.]	Δ_0 [rad.]	Δ_1 [rad.]	Δ_2 [rad.]	Δ_3 [rad.]	Δ_4 [rad.]	Δ_5 [rad.]
$2 \cdot 10^{-3}$	1.04	$8.62 \cdot 10^{-5}$	$5.94 \cdot 10^{-4}$	0.084	0.028	0.034	0.036
$10 \cdot 10^{-3}$	0.22	$8.28 \cdot 10^{-5}$	$1.96 \cdot 10^{-2}$	0.1620	0.060	0.278	0.329
$20 \cdot 10^{-3}$	0.11	$8.21 \cdot 10^{-5}$	$9.87 \cdot 10^{-2}$	0.504	0.299	0.826	1.071
$40 \cdot 10^{-3}$	0.055	$8.13 \cdot 10^{-5}$	1.152	1.980	1.436	3.402	4.474

Z tabeli 5.8 oraz rys. 5.20 wynika, że największe błędy współrzędnych naturalnych pojawiają dla $dt = 40 \cdot 10^{-3}$ sek. Dlatego trzecia wersja modelu z krokiem $dt = 40 \cdot 10^{-3}$ sek. jest nieprzydatna do badań symulacyjnych robota eksperymentalnego.

5.6. Porównanie badań eksperymentalnych i symulacyjnych

Jak wspomniano w podrozdziale 5.4.1, na stacji roboczej Motorola MVME 167, stanowiącej sterownik nadrzędny robota eksperymentalnego, zainstalowany jest program *plan2_irb6*. Program między innymi umożliwia zapis czasu i współrzędnych naturalnych siłowników punktów trajektorii zadanej i realizowanej do odpowiednich zbiorów [53]. W ramach pracy [53] zaplanowano trajektorię zadaną prostoliniową z liniowo zmieniającą się orientacją, w przestrzeni zewnętrznej robota eksperymentalnego, przedstawioną na rys. 5.11. Następnie zapisano realizację tej trajektorii zadanej za pomocą programu *plan2_irb6*. Rys. 5.21 ilustrują dwie trajektorie stanowiące odpowiedź robota eksperymentalnego na trajektorię zadaną z rys. 5.11. Linie ciągłe ilustrują trajektorię symulowaną za pomocą modelu graficznego z rys. 5.5, opisaną w podrozdziale 5.3. Linie przerywane ilustrują trajektorię zrealizowaną i zapisaną.

Z rys. 5.21 i analizy zbiorów $qs0 \div qs5$ opisujących trajektorię symulowaną i zbiorów $qsr0 \div qsr5$, opisujących trajektorię zrealizowaną, wynikają następujące maksymalne wartości bezwzględne różnic współrzędnych naturalnych siłowników:

$$\begin{aligned} \max |qs0 - qsr0| &= 0.0016 \text{ rad.}, \\ \max |qs1 - qsr1| &= 1.4557 \text{ rad.}, \\ \max |qs2 - qsr2| &= 1.6847 \text{ rad.}, \\ \max |qs3 - qsr3| &= 1.8756 \text{ rad.}, \\ \max |qs4 - qsr4| &= 0.9229 \text{ rad.}, \\ \max |qs5 - qsr5| &= 1.0264 \text{ rad.} \end{aligned} \quad (5.49)$$

Z równań (5.45a,b) wynika, że wartości zadane początkowe i końcowe współrzędnych naturalnych $qs0$ oraz $qs1$ z rys. 5.11 są takie same. Wartości zadane początkowe i końcowe pozostałych współrzędnych naturalnych zmieniają się. Wartości bezwzględne różnic tych współrzędnych naturalnych są następujące:

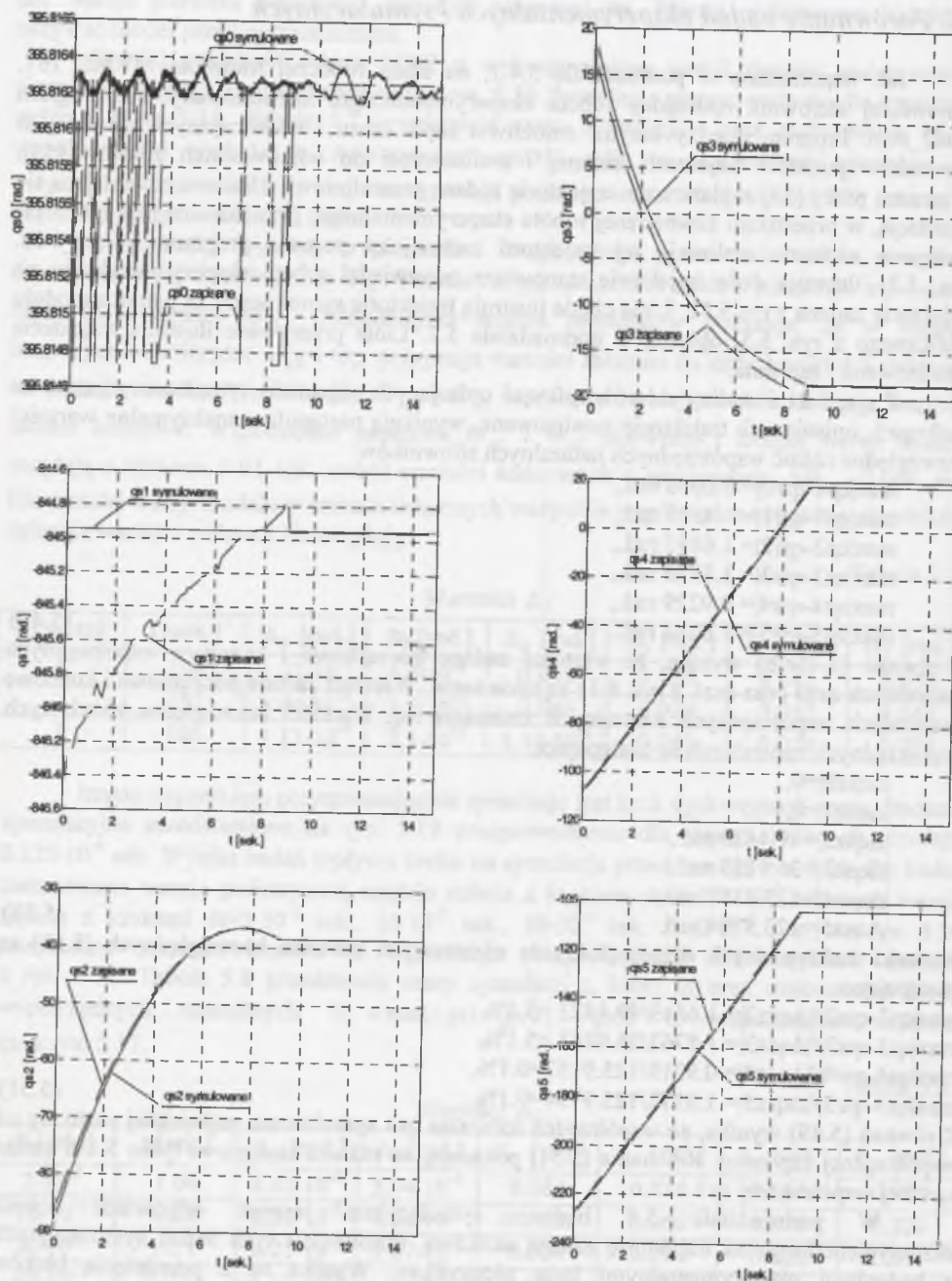
$$\begin{aligned} |\Delta qs0| &= 0, \\ |\Delta qs1| &= 0, \\ |\Delta qs2| &= 49.4423 \text{ rad.}, \\ |\Delta qs3| &= 36.9153 \text{ rad.}, \\ |\Delta qs4| &= 125.9157 \text{ rad.}, \\ |\Delta qs5| &= 123.9794 \text{ rad.} \end{aligned} \quad (5.50)$$

Stosunki maksymalnych różnic (5.49) do niezerowych wartości bezwzględnych (5.50) są następujące:

$$\begin{aligned} \max |qs2 - qsr2| / |\Delta qs2| &= 1.6849 / 49.4423 = 3.4\%, \\ \max |qs3 - qsr3| / |\Delta qs3| &= 1.8762 / 36.9153 = 5.1\%, \\ \max |qs4 - qsr4| / |\Delta qs4| &= 0.9219 / 125.9157 = 0.1\%, \\ \max |qs5 - qsr5| / |\Delta qs5| &= 1.0272 / 123.9794 = 0.1\%. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Z równań (5.49) wynika, że współrzędna naturalna $qs3$ symulowana najbardziej różni się od współrzędnej zapisanej. Równania (5.51) pokazują, że różnica ta stanowi tylko 5.1% zmian zadanej współrzędnej $qs3$.

W podrozdziale 5.4 badano symulacyjnie jeszcze odpowiedź robota eksperymentalnego na trajektorię zadaną skokową. Porównanie tych badań symulacyjnych z badaniami eksperymentalnymi było niemożliwe. Wynika to z pominięcia bloków **S-Function Builder** w modelu graficznym z rys. 5.8. W robocie eksperymentalnym nie można usunąć ze sterowników podrzędnych zadajników współrzędnych naturalnych siłowników, symulowanych przez bloki **S-Function Builder**. Badania symulacyjne odpowiedzi robota eksperymentalnego na trajektorię zadaną z rys. 5.12 także nie mogły być porównane z badaniami eksperymentalnymi. Czasy między kolejnymi punktami pośrednimi



Rys. 5.21. Współrzędne naturalne q_1 - q_5 symulowane i zapisane
Fig. 5.21. Simulated and recorded natural coordinates q_0 - q_5

są zbyt małe i niemożliwa jest poprawna transmisja sygnałów między sterownikiem nadrzędnym i sterownikami podrzędnymi.

5.7. Podsumowanie rozdziału 5

Zadanie proste kinematyki MRP IRb-6 rozwiązujemy stosując formuły (5.1)-(5.3b), a następnie formuły (2.8a-f).

Przed rozwiązaniem zadania odwrotnego kinematyki MRP IRb-6 musimy sprawdzić, czy jest spełnione równanie kluczowe (5.5). Jeśli jest spełnione, możemy rozwiązać zadanie odwrotne kinematyki. Wykorzystujemy wtedy formuły (5.5) i (5.6a-f) lub (5.10a)-(5.11c). W przypadku gdy równanie kluczowe nie jest spełnione, nie można rozwiązać zadania odwrotnego kinematyki.

Zadanie proste kinematyki MRP IRb-6 w postaci różniczkowej rozwiązujemy wykorzystując formuły (5.12)-(5.13).

W robocie eksperymentalnym wielkościami regulowanymi są współrzędne naturalne siłowników.

Zadanie proste kinematyki MRE rozwiązujemy stosując formuły (5.1)-(5.2), (5.30), (5.31), a następnie formuły (2.8a-f).

Zadanie odwrotne kinematyki MRE można rozwiązać za pomocą formuł (5.6a-f) i (5.33)-(5.35) lub (5.10a)-(5.11c) i (5.36).

Przy rozwiązywaniu zadania prostego kinematyki MRE w postaci różniczkowej korzystamy z formuł (5.37)-(5.38).

Zadanie odwrotne kinematyki w postaci różniczkowej rozwiązujemy stosując algorytm *kinodwr* opisany w podrozdziale 3.1. W algorytmie tym korzystamy z równań kinematyki MRE.

Program *plan2_irb6* zaimplementowany na stacji roboczej Motorola MVME 167 umożliwia planowanie trajektorii prostoliniowych w przestrzeni zewnętrznej robota eksperymentalnego. Program *optt* umożliwia planowanie trajektorii z ekstremalnymi momentami napędowymi siłowników. Tak zaplanowaną trajektorię można potraktować jako testującą pozycjonowanie MRE po linii prostej, w warunkach ekstremalnych.

Z analizy wyników symulacji przedstawionych w podrozdziale 5.4 wynika, że zastosowanie programu *optt* do planowania trajektorii znacznie skraca jej realizację, ale zwiększa błędy sterowania.

Z porównania wyników badań zamieszczonych w tabeli 5.7 oraz rys. 5.19 wynika, że współrzędne Θ_{s3} i Θ_{s5} są najbardziej wrażliwe na uproszczenia modelu robota eksperymentalnego. Z tabeli 5.8 oraz rys. 5.20 wynika, że współrzędne Θ_{s2} i Θ_{s5} są najbardziej wrażliwe na wydłużenie kroku dyskretyzacji dt . Można przypuszczać, że w pierwszej i drugiej wersji modelu przyczyną oscylacji $\Delta\Theta_{si}$ i odchyłek $\Theta_{sik} - \Theta_{siazad}$ od wartości zadanych końcowych jest impulsowe zasilanie siłowników przez regulatory prądów. Uproszczenia modelu robota i wydłużenie kroku przyspieszyły symulację ruchu dla trajektorii zadanej jak na rys. 5.11. Miara przyspieszeń może być stosunek p czasu obliczeń za pomocą wersji podstawowej modelu z krokiem dyskretyzacji $dt=0.125 \cdot 10^{-4}$ sek. do czasu obliczeń za pomocą wersji uproszczonej modelu. Wartości przyspieszeń dla poszczególnych wersji uproszczeń dla kroków dt są następujące:

- wersja pierwsza, $dt=0.125 \cdot 10^{-4}$ sek. $p=322$ sek./ 158 sek.= 2.04;
- wersja druga, $dt=0.125 \cdot 10^{-4}$ sek. $p=322$ sek./ 152 sek.= 2.12;
- wersja trzecia, $dt=0.125 \cdot 10^{-4}$ sek. $p=322$ sek./ 166 sek.= 1.94;
- wersja trzecia, $dt=2 \cdot 10^{-3}$ sek. $p=322$ sek./ 1.04 sek.= 309.61;
- wersja trzecia, $dt=10 \cdot 10^{-3}$ sek. $p=322$ sek./ 0.22 sek.= 1463.6;
- wersja trzecia, $dt=20 \cdot 10^{-3}$ sek. $p=322$ sek./ 0.11 sek.= 2927.3.

W zależności od maksymalnego dopuszczalnego błędu symulacji współrzędnych naturalnych $\Delta_{i\max}$ możemy stosować różne wersje modelu. Dla $\Delta_{i\max}=0.084$ rad. przydatna jest trzecia wersja modelu z krokiem $dt=2\cdot 10^{-3}$ sek., *która przyspieszy obliczenia 309.61 razy*; dla $\Delta_{i\max}=0.329$ rad. trzecia wersja modelu z krokiem $dt=10\cdot 10^{-3}$ sek., *która przyspieszy obliczenia 1463.6 razy*; dla $\Delta_{i\max}=1.071$ rad. trzecia wersja modelu z krokiem $dt=20\cdot 10^{-3}$ sek., *która przyspieszy obliczenia 2927.3 razy*.

Symulacja 15 sek. ruchu za pomocą trzeciej wersji modelu z krokami $dt=2\cdot 10^{-3}$ sek., $10\cdot 10^{-3}$ sek. i $20\cdot 10^{-3}$ sek. trwa odpowiednio 1.04 sek., 0.22 sek. i 0.11 sek. *Zatem czas symulacji ruchu dla trajektorii zadanej jak na rys. 5.11 za pomocą tej wersji modelu i tych kroków dyskretyzacji jest krótszy niż symulowany czas.*

Wersja podstawowa modelu robota jest niezbędna do oceny badań symulacyjnych z eksperymentalnymi. Z porównania badań eksperymentalnych i symulacyjnych robota eksperymentalnego przedstawionych w podrozdziale 5.6 wynika, że współrzędne naturalne siłowników, symulowane za pomocą modelu podstawowego, różnią się od wartości zmierzonych o co najwyżej 5.1% zadanego zakresu zmian.

5.8. Podsumowanie metod przyspieszania symulacji

Rozdział trzeci, czwarty i piąty zawierają formuły umożliwiające opracowanie programów symulacji ruchu robotów AS, L-1 i eksperymentalnego. Zawierają także modele graficzne tych robotów.

W podrozdziałach 3.3, 4.3 i 5.4 przedstawiono badania symulacyjne robotów za pomocą programów w języku C. Programy zostały utworzone automatycznie za pomocą rozszerzenia Real Time Workshop (RTW) z modeli graficznych robotów. Dzięki zastosowaniu tego rozszerzenia symulacje zostały znacznie przyspieszone. Symulacje przeprowadzono ze stałymi krokami dyskretyzacji czasu dt . Do wyznaczenia wartości dt potrzebny był parametr czasowy tm , opisujący najszybsze sygnały wyjściowe spośród sygnałów wyjściowych wszystkich podsystemów modelu graficznego robota. Dla robota AS parametrem tm jest stała czasowa sygnału wyjściowego regulatora prądu pierwszego siłownika. Dla robota L-1 parametrem tm jest stała czasowa prądów siłowników napędzających czwarty, piąty i szósty człon. Dla robota eksperymentalnego parametrem tm jest okres impulsatora w regulatorach prądu siłowników. *Wartość kroku dt jest o rząd wielkości mniejsza od parametru tm .*

Tabela 5.9

Wyniki symulacji za pomocą modeli podstawowych

Robot	Czas symulowany	Czas symulacji t_b	Czas symulacji t_z	Przyspieszenie t_b/t_z
AS	0.6 sek.	49.1882 godz.	420 sek.	422
L-1	14 sek.	50.1719 godz.	223 sek.	810
Eksperymentalny	15 sek.	259.3514 godz.	258 sek.	3624

Tabela 5.9 przedstawia czasy symulacji ruchu robotów za pomocą modeli matematycznych podstawowych (nie uproszczonych). t_b jest czasem symulacji za pomocą modeli graficznych zawierających bloki S-Function [91] zamiast bloków S-Function Builder. Zamiast bloków S-Function blokami S-Function Builder umożliwiła automatyczne utworzenie programów symulacji w języku C przez rozszerzenie RTW. t_z jest czasem symulacji za pomocą programów utworzonych przez rozszerzenie RTW. Z tabeli 5.9 wynikają następujące przyspieszenia symulacji:

- 422 dla robota AS, - 810 dla robota L-1, - 3624 dla robota eksperymentalnego.

Podrozdziały 3.4, 4.4 i 5.5 przedstawiają także trzy metody uproszczeń modeli matematycznych, przyspieszających symulację robotów. W pierwszej metodzie pomijamy wszystkie współczynniki dynamiki D_{sijk} oraz D_{sij} dla $i \neq j$. W drugiej metodzie też pomijamy wszystkie współczynniki D_{sijk} , stosujemy stałe współczynniki D_{sii} równe średnim arytmetycznym ich wartości ekstremalnych i uwzględniamy we współczynnikach D_{si} tylko 10 parametrów masowych najbardziej wpływających na siły F_{si} . W trzeciej metodzie korzystamy z uproszczeń metody drugiej i przyjmujemy prądy siłowników równe ich wartościom zadany.

W podrozdziałach 3.4, 4.4 i 5.5 zaproponowano przyspieszenie symulacji robotów przez zwiększenie kroku dt . Gdyby przyjąć, że jedynym kryterium użyteczności programów symulacji jest szybkość działania, to może to doprowadzić do bardzo krótkich czasów symulacji, ale i do bardzo dużych błędów. *Ocena skutków uproszczeń zapobiega uczynieniu z programów symulacji generatorów błędów.*

Do oceny uproszczeń jest potrzebny model matematyczny podstawowy, uwzględniający fizykę oddziaływania manipulatora, siłowników i układów sterowania. Dzięki ocenie skutków uproszczeń możemy stwierdzić, że nie można stosować uproszczonych wersji modelu robota L-1 z rys. 4.2 do symulacji ruchu, dla trajektorii zadanej z rys. 4.6. Dzięki ocenie możemy określić granice uproszczeń modelu na potrzeby przyspieszenia symulacji.

Ocena uproszczeń pozwala wybrać jedną z trzech metod uproszczeń modelu, zwiększoną wartość kroku dt i wyznaczyć błąd symulacji współrzędnych naturalnych $\Delta_{i\max}$, przy którym czas symulacji jest mniejszy od czasu symulowanego. Tabela 5.10 przedstawia wyniki symulacji ze zwiększonym krokiem dt .

Tabela 5.10

Wyniki symulacji dla zwiększonych kroków dt

Robot	Numer metody uproszczenia	Krok dt [sek.]	$\Delta_{i\max}$ [rad.]	Czas symulowany t_1 [sek.]	Czas symulacji t_2 [sek.]	t_1/t_2
AS	trzecia	$5\cdot 10^{-4}$	0.397	0.6	0.18	3.33
AS	trzecia	$5\cdot 10^{-3}$	0.437	0.6	0.02	30
L-1	bez uproszczeń	$4\cdot 10^{-4}$	0.0039	14	112	0.125
Eksperyment.	trzecia	$2\cdot 10^{-3}$	0.084	15	1.04	14.42
Eksperyment.	trzecia	10^{-2}	0.329	15	0.22	68.18
Eksperyment.	trzecia	$2\cdot 10^{-2}$	1.071	15	0.11	136.36

Z tabeli 5.10 wynika, że dla robotów AS i eksperymentalnego możliwe są czasy symulacji mniejsze od czasu symulowanego. *Dla robota AS przy krokach $dt=5\cdot 10^{-4}$ sek. i $5\cdot 10^{-3}$ sek. czas symulacji jest mniejszy od czasu symulowanego odpowiednio 3.33 i 30 razy. Dla robota eksperymentalnego przy krokach $dt=2\cdot 10^{-3}$ sek., 10^{-2} sek. i $2\cdot 10^{-2}$ sek. czas symulacji jest mniejszy od czasu symulowanego odpowiednio 14.42, 68.18 i 136.36 razy. Dla robota L-1 czas symulacji jest większy od czasu symulowanego.*

Innym oczywistym sposobem przyspieszenia symulacji robotów jest stosowanie komputerów o jak największej mocy obliczeniowej. Symulację można przyspieszyć także dzięki zastosowaniu systemów obliczeniowych równoległych [27,29,73].

6. KALIBRACJA MODELI RUCHU MRP

Przedstawimy krótki przegląd literatury poświęconej kalibracji modeli ruchu manipulatorów i ogólne formuły na funkcję regresji, wynikające z przedstawionych w rozdziale drugim modeli matematycznych kinematyki i dynamiki MRP. Funkcje te mogą być wykorzystane do kalibracji parametrów kinematyki i dynamiki tych modeli matematycznych.

MRP są złożonymi układami mechanicznymi, stanowiącymi obiekty sterowania ich serwomechanizmów. Są to obiekty nieliniowe wielowymiarowe, na które działają zakłócenia. Zakłóceniami są luzy, błędy przełożeń przekładni, tarcie, rozrzut wymiarów elementów składowych (w tym długości członów), skończona sztywność mechaniczna [5,7,19,22,43,45,49,96,101,104] i inne nieznanne czynniki. Zakłócenia te są niemierzalne i podlegają ciągłym nieprzewidywanym zmianom. Skutkiem ich działania są różnice między rzeczywistymi charakterystykami i modelami matematycznymi MRP. Różnice te można próbować zmniejszyć przez kalibrację modeli matematycznych MRP. Może ona polegać na uaktualnianiu parametrów tych modeli. Kalibrację przeprowadzić można dla modeli kinematyki i dynamiki MRP.

Typowy problem kalibracji dzieli się na cztery zadania: a) wyznaczenie analitycznego opisu błędów modelowania, b) pomiary, c) identyfikację, d) korektę [19,45,96].

Do kalibracji parametrów geometrycznych i masowych MRP możemy stosować funkcję regresji minimalizującą sumę kwadratów błędów [14,23,102,107].

W podrozdziale 6.1 przedstawimy funkcję regresji w ogólnej postaci ze współczynnikami estymowanymi według najmniejszych kwadratów. W podrozdziale 6.2 przedstawimy funkcję regresji kinematyki MRP w postaci ogólnej. Zdefiniujemy także parametry kinematyki i funkcje regresji kinematyki MRP AS, L-1, IRb-6 i MRE. W podrozdziale 6.3 przedstawimy funkcję regresji dynamiki MRP w postaci ogólnej. Przedstawimy także parametry dynamiki i funkcje regresji dynamiki MRP AS, L-1, IRb-6 i MRE. W podrozdziale 6.4 przedstawimy podsumowanie.

6.1. Funkcje regresji

Potraktujmy MRP jako obiekt sterowania o S wejściach $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_S)$, R wyjściach $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_R)$ i P nieznanymi zakłóceniami z_1, z_2, \dots, z_P . Przyjmijmy, że w M chwilach znane są wartości wielkości wejściowych $u_1 \div u_S$ oraz wielkości x_i MRP. Przyjmijmy, że model matematyczny MRP dla wyjścia x_i ma postać

$$\hat{x}_i = f_i(u_1, u_2, \dots, u_S, b_1, \dots, b_K), \quad \hat{\mathbf{x}} = [\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_R]^T \quad (6.1)$$

gdzie: b_k są nieznanymi różnicami między wartościami aktualnymi p_{ak} i znanymi wartościami parametrów kinematyki lub dynamiki p_{0k} . Zatem

$$p_{ak} = p_{0k} + b_k, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (6.2)$$

Przyjmijmy funkcję regresji [14,102] w postaci

$$\hat{\mathbf{x}} = \varphi_0(\mathbf{u}) + \sum_{k=1}^K b_k \varphi_k(\mathbf{u}), \quad \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{b} = \mathbf{0}) = \varphi_0(\mathbf{u}), \quad (6.3)$$

przy czym $\varphi_k(\mathbf{u})$ dla $k = 1, 2, \dots, K$ powinny być funkcjami liniowo niezależnymi argumentu $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_S)$. $\varphi_0(\mathbf{u}) = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{b} = \mathbf{0})$ jest funkcją $\hat{\mathbf{x}}$ dla wszystkich współczynników b_k zerowych. Funkcja $\hat{\mathbf{x}}$ w równaniu (6.3) jest macierzą wyjść opisaną równaniem (6.4c). $\hat{\mathbf{x}}$ jest macierzą wyjść opisaną formułą (6.4c). Na podstawie znanych wielkości wejściowych możemy obliczyć macierz:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \varphi_1(\mathbf{u}_1) & \varphi_2(\mathbf{u}_1) & \dots & \varphi_K(\mathbf{u}_1) \\ \varphi_1(\mathbf{u}_2) & \varphi_2(\mathbf{u}_2) & \dots & \varphi_K(\mathbf{u}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(\mathbf{u}_M) & \varphi_2(\mathbf{u}_M) & \dots & \varphi_K(\mathbf{u}_M) \end{bmatrix}, \quad (6.4a)$$

przy czym $\mathbf{u}_n = (u_{n1}, u_{n2}, \dots, u_{nS})$ są wielkościami wejściowymi \mathbf{u} w chwili n -tej. Macierz danych wyjściowych w kolejnych chwilach $n = 1, 2, \dots, M$ ma postać:

$$\mathbf{x}^T = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \dots \quad \mathbf{x}_M]^T. \quad (6.4b)$$

Macierz wyjść modelu w kolejnych chwilach $n = 1, 2, \dots, M$ ma postać

$$\hat{\mathbf{x}}^T = [\hat{\mathbf{x}}_1 \quad \hat{\mathbf{x}}_2 \quad \dots \quad \hat{\mathbf{x}}_M]^T. \quad (6.4c)$$

Macierz nieznanymi współczynników regresji ma postać

$$\mathbf{b}^T = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_K]^T. \quad (6.4d)$$

Z [14,102] wynika, że macierz \mathbf{b} minimalizująca sumę

$$S_R = \sum_{n=1}^{M \times R} (x_n - \hat{x}_n)^2$$

ma znaną postać

$$\mathbf{b} = (\mathbf{U}\mathbf{U}^T)^{-1} \mathbf{U}^T (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{b} = \mathbf{0})). \quad (6.5)$$

Z równania (6.5) wynika, że $\det(\mathbf{U}\mathbf{U}^T)$ musi być różny od zera. Oznacza to, że w macierzy danych wejściowych \mathbf{U} kolumny nie mogą być liniowo zależne od innych kolumn i jednocześnie liczba wierszy liniowo niezależnych powinna być nie mniejsza niż liczba K nieznanymi współczynników regresji b_k . Do eksperymentu identyfikacji tych współczynników należy zaplanować takie stany MRP, przy których $|\det(\mathbf{U}\mathbf{U}^T)|$ ma jak największą wartość.

6.2. Funkcja regresji kinematyki MRP

Literatura [6,9,11,17,20,22,35,43,47,49,95,101] proponuje szereg praktycznych metod kalibracji modeli kinematyki. W [5,7,19,22,37,43,101] wykorzystuje się zlinearyzowany różniczkowy błąd modelu, opierający się na macierzy Jakobiego czułości modelu kinematyki względem parametrów geometrycznych [66,90]. Błędy modelowania kinematyki spowodowane luzami, podatnością członów i par oraz niedokładnościami przekładni rozważono w pracach [50,104]. W [5,9,19,45,47] stosuje się identyfikację minimalnokwadratową parametrów kinematyki. W pracy [43] zaproponowano do kalibracji estymator maksymalnego prawdopodobieństwa błędów geometrycznych. W pracach [96÷98] zaproponowano kalibrację parametrów kinematyki za pomocą dyfeomorfizmów.

W metodach kalibracji parametrów kinematyki wartości nominalne parametrów geometrycznych są znane (np. odczytane z rysunków), a szukanymi są ich wartości aktualne. Położenie i orientacja elementu wykonawczego, obliczone dla wartości aktualnych parametrów kinematyki, powinny być bliższe rzeczywistemu położeniu i orientacji tego elementu niż dla wartości nominalnych tych parametrów.

Pomiary na potrzeby kalibracji modelu kinematyki przeprowadza się przy nieruchomym manipulatorze. Do kalibracji możemy wykorzystać formuły analityczne stanowiące rozwiązanie zadania prostego lub odwrotnego kinematyki. W tym podrozdziale wykorzystamy formuły stanowiące rozwiązanie zadania prostego kinematyki. Przyjmijmy, że

wyjściem $\hat{\mathbf{x}}$ są współrzędne zewnętrzne położenia $x_{N+1}, y_{N+1}, z_{N+1}$ i orientacji $\Phi_{N+1}, \Theta_{N+1}, \Psi_{N+1}$ układu współrzędnych elementu wykonawczego względem układu bazowego x_0, y_0, z_0 lub tachimetrów x_i, y_i, z_i . N jest liczbą stopni swobody MRP.

$$\hat{\mathbf{x}} = [x_{N+1}, y_{N+1}, z_{N+1}, \Phi_{N+1}, \Theta_{N+1}, \Psi_{N+1}]^T. \quad (6.6)$$

Wielkościami wejściowymi są współrzędne naturalne siłowników $\mathbf{u} = \mathbf{q}_s = (q_{s1}, \dots, q_{sN})$. Współczynnikom regresji b_k odpowiadają różnice między nieznanymi wartościami aktualnymi p_{ak} i znanymi wartościami p_{0k} parametrów kinematyki. Parametry te są wymiarami geometrycznymi występującymi w formułach opisujących wielkość wyjściową $\hat{\mathbf{x}}$, zdefiniowaną równaniem (6.6). Znanne parametry p_{0k} są pozyskiwane z rysunków dokumentacji technicznej lub są zmierzone. Często nazywa się je nominalnymi [96].

Z rozdziału 2 i prac [56, 57, 66, 96] wynika, że funkcje $\hat{\mathbf{x}}_i = f_i(\mathbf{q}_s, \mathbf{b})$ są nieliniowe względem współczynników regresji. Po zastosowaniu rozwinięcia tych funkcji w szereg Taylora [47] wokół znanych wartości nominalnych parametrów p_{0k} i pominięciu wyrazów z b_k w potęgę drugiej i większych otrzymamy:

$$\hat{\mathbf{x}} \approx \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{q}_s, \mathbf{0}) + \sum_{k=1}^K \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{q}_s, \mathbf{b})}{\partial b_k} \bigg|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}} b_k. \quad (6.7)$$

Model matematyczny w postaci (6.3) otrzymamy, gdy

$$\varphi_0(\mathbf{u}) = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{q}_s, \mathbf{0}), \quad \varphi_k^*(\mathbf{q}_s) = \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{q}_s, \mathbf{b})}{\partial b_k} \bigg|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}}. \quad (6.8)$$

Jeśli któraś kolumna macierzy \mathbf{U} (opisanej formułą 6.4a) opowiadająca funkcji φ_k^* zależy od m innych kolumn funkcji, to tworzymy dla tych m kolumn i kolumny odpowiadającej funkcji φ_k^* nową kolumnę odpowiadającą funkcji φ_k^* . Funkcji φ_k^* odpowiada współczynnik b_k^* , będący kombinacją liniową współczynników stojących przy funkcji φ_i^* i przy m innych funkcjach, od których zależy funkcja φ_k^* . Funkcja ta wynika z formuły (6.8). Po takiej modyfikacji dla każdej liniowo zależnej funkcji otrzymujemy niezależne liniowo funkcje φ_k^* i funkcje φ_k^* , które stanowią kolejne funkcje φ_l w formule (6.3). Podobnie współczynniki b_k i kombinacje liniowe b_k^* stanowią współczynniki b_l w formule (6.3). Wtedy liczba funkcji φ_l i możliwych do obliczenia współczynników b_l ulega zmniejszeniu i $1 \leq l \leq L < K$. Jeśli wszystkie funkcje φ_k^* są liniowo niezależne, to $\varphi_k = \varphi_k^*$ i $1 \leq k \leq K$ w formule (6.3).

Ze znanych wartości \mathbf{q}_s w M chwilach możemy wyznaczyć z formuły (6.5) macierz $\mathbf{b} = [b_0, \dots, b_l, \dots, b_L]^T$. Korekta nominalnych wartości parametrów $p_{0l} + b_l$ lub ich kombinacji liniowych kończy kalibrację parametrów kinematyki.

Z równania (6.5) wynika, że $\det(\mathbf{U}\mathbf{U}^T)$ musi być różne od zera. Najlepiej, gdy ten wyznacznik ma jak największą wartość bezwzględną. W pracy [79] autor rozprawy zaproponował miarę dobroci uwarunkowania zbiorów stanów MRP na potrzeby kalibracji parametrów kinematyki MRP. Miara ta uwzględnia między innymi wartość bezwzględną $\det(\mathbf{U}\mathbf{U}^T)$.

MRP AS

Parametry kinematyki MRP AS wynikają z formuł (3.1) i (3.2). $p_1 = \lambda_1$, $p_2 = l_3$, $p_3 = \lambda_3$, $p_4 = \lambda_5$, $p_5 = \lambda_7$. Wyjściem $\hat{\mathbf{x}}$ są współrzędne zewnętrzne elementu wykonawczego x, y, z, α, β i γ występujące w formule (3.15). Współrzędne te opisują element wykonawczy względem układu bazowego x_0, y_0, z_0 . Z formuł (3.2) i (3.15) można wyznaczyć zależności współrzędnych zewnętrznych w funkcji współrzędnych naturalnych siłowników. Zatem $x_{N+1} = x$, $y_{N+1} = y$, $z_{N+1} = z$, $\Phi_{N+1} = \alpha$, $\Theta_{N+1} = \beta$, $\Psi_{N+1} = \gamma$. Wejściem \mathbf{q}_s są współrzędne naturalne siłowników $\Theta_1 \div \Theta_6$.

Z formuły (6.8) wynika,

$$\varphi_k^*(\mathbf{q}_s) = \left[\frac{\partial x(\mathbf{q}_s, \mathbf{b})}{\partial b_k} \bigg|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}}, \frac{\partial y(\mathbf{q}_s, \mathbf{b})}{\partial b_k} \bigg|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}}, \frac{\partial z(\mathbf{q}_s, \mathbf{b})}{\partial b_k} \bigg|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}}, \frac{\partial \alpha(\mathbf{q}_s, \mathbf{b})}{\partial b_k} \bigg|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}}, \frac{\partial \beta(\mathbf{q}_s, \mathbf{b})}{\partial b_k} \bigg|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}}, \frac{\partial \gamma(\mathbf{q}_s, \mathbf{b})}{\partial b_k} \bigg|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}} \right]^T.$$

Przed utworzeniem funkcji regresji (6.3) musimy przebadac liniową niezależność wszystkich funkcji φ_k^* względem współrzędnych $\Theta_1 \div \Theta_6$.

Wartości nominalne parametrów kinematyki MRP AS przedstawia praca [2].

MRP L-1

Parametry kinematyki MRP L-1 wynikają z formuł (4.1), (4.2) i (4.7). $p_1 = l_1$, $p_2 = \lambda_4$, $p_3 = \lambda_6$, $p_4 = \lambda_7$, $p_5 = k_1$, $p_6 = k_2$, $p_7 = k_3$, $p_8 = k_4$, $p_9 = k_5$, $p_{10} = k_6$. Wyjściem $\hat{\mathbf{x}}$ są współrzędne zewnętrzne elementu wykonawczego x, y, z, Φ, Θ i Ψ występujące w formule (3.81). Współrzędne te opisują element wykonawczy względem układu bazowego x_0, y_0, z_0 . Z formuł (4.4), (4.19) i (4.8) można wyznaczyć zależności współrzędnych zewnętrznych w funkcji współrzędnych naturalnych siłowników. Zatem $x_{N+1} = x$, $y_{N+1} = y$, $z_{N+1} = z$, $\Phi_{N+1} = \Phi$, $\Theta_{N+1} = \Theta$, $\Psi_{N+1} = \Psi$. Wejściem \mathbf{q}_s są współrzędne naturalne siłowników $\Theta_{s1} \div \Theta_{s6}$.

Z formuły (6.8) wynika,

$$\varphi_k^*(\mathbf{q}_s) = \left[\frac{\partial x(\mathbf{q}_s, \mathbf{b})}{\partial b_k} \bigg|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}}, \frac{\partial y(\mathbf{q}_s, \mathbf{b})}{\partial b_k} \bigg|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}}, \frac{\partial z(\mathbf{q}_s, \mathbf{b})}{\partial b_k} \bigg|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}}, \frac{\partial \Phi(\mathbf{q}_s, \mathbf{b})}{\partial b_k} \bigg|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}}, \frac{\partial \Theta(\mathbf{q}_s, \mathbf{b})}{\partial b_k} \bigg|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}}, \frac{\partial \Psi(\mathbf{q}_s, \mathbf{b})}{\partial b_k} \bigg|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}} \right]^T.$$

Przed utworzeniem funkcji regresji (6.3) musimy przebadac liniową niezależność wszystkich funkcji φ_k^* względem współrzędnych $\Theta_{s1} \div \Theta_{s6}$.

Wartości nominalne parametrów kinematyki MRP L-1 zostały wyznaczone w pracy [3].

MRP IRb-6

Parametry kinematyki MRP IRb-6 wynikają z formuł (5.2), (5.3) i (5.21). $p_1 = \lambda_1$, $p_2 = l_2$, $p_3 = l_3$, $p_4 = \lambda_5$, $p_5 = \lambda_6$, $p_6 = k_1$, $p_7 = AB$, $p_8 = BC$, $p_9 = A_0C$, $p_{10} = DE$, $p_{11} = EF$, $p_{12} = D_0F$, $p_{13} = h_2$, $p_{14} = h_3$, $p_{15} = k_4$, $p_{16} = k_5$, $p_{17} = l_6$. Wyjściem \hat{x} są współrzędne zewnętrzne elementu wykonawczego x , y , z , Φ , Θ i Ψ występujące w formule (5.7). Współrzędne te opisują element wykonawczy względem układu bazowego $x_0y_0z_0$. Z formuł (5.10), (5.11) i (5.21) można wyznaczyć zależności współrzędnych zewnętrznych od współrzędnych naturalnych siłowników. Wejściem q , są współrzędne naturalne siłowników $\Theta_{s0} \div \Theta_{s5}$.

Z formuły (6.8) wynika,

$$\varphi_k^*(q_s) = \left[\frac{\partial x(q_s, b)}{\partial b_k} \bigg|_{b=0}, \frac{\partial y(q_s, b)}{\partial b_k} \bigg|_{b=0}, \frac{\partial z(q_s, b)}{\partial b_k} \bigg|_{b=0}, \frac{\partial \Phi(q_s, b)}{\partial b_k} \bigg|_{b=0}, \frac{\partial \Theta(q_s, b)}{\partial b_k} \bigg|_{b=0}, \frac{\partial \Psi(q_s, b)}{\partial b_k} \bigg|_{b=0} \right]^T.$$

Przed utworzeniem funkcji regresji (6.3) musimy przebadac linową niezależność wszystkich funkcji φ_k^* względem współrzędnych $\Theta_{s1} \div \Theta_{s5}$.

Wartości nominalne parametrów kinematyki MRP IRb-6 zostały zidentyfikowane na podstawie pomiarów optycznych [81].

MRE

Parametry kinematyki MRE wynikają z formuł (5.2), (5.3), (5.21), (5.31) i (5.40). $p_1 = \lambda_0$, $p_2 = \lambda_1$, $p_3 = l_2$, $p_4 = l_3$, $p_5 = \lambda_5$, $p_6 = \lambda_6$, $p_7 = k_0$, $p_8 = h_0$, $p_9 = k_1$, $p_{10} = AB$, $p_{11} = BC$, $p_{12} = A_0C$, $p_{13} = DE$, $p_{14} = EF$, $p_{15} = D_0F$, $p_{16} = h_2$, $p_{17} = h_3$, $p_{18} = k_4$, $p_{19} = k_5$, $p_{20} = l_6$. Wyjściem \hat{x} są współrzędne zewnętrzne elementu wykonawczego $'x$, $'y$, $'z$, $'\Phi$, $'\Theta$ i $'\Psi$ występujące w formule (5.43). Współrzędne te opisują element wykonawczy względem układu tachimetrów $x_iy_iz_i$. Po przeliczeniu współrzędnych $'x$, $'y$, $'z$, $'\Phi$, $'\Theta$ i $'\Psi$ na współrzędne sx , sy , sz , $^s\Phi$, $^s\Theta$ i $^s\Psi$ względem układu stanowiska $x_sy_sz_s$ i wykorzystaniu formuł (5.10), (5.11) i (5.21), można wyznaczyć zależności współrzędnych $'x$, $'y$, $'z$, $'\Phi$, $'\Theta$ i $'\Psi$ w funkcji współrzędnych naturalnych siłowników. Wejściem q , są współrzędne naturalne siłowników $\Theta_{s0} \div \Theta_{s5}$.

W pracach [80,101] autor rozprawy zaproponował metodę pomiarów optycznych położenia MRE. Pomiary te posłużyły autorowi rozprawy do identyfikacji wartości nominalnych parametrów kinematyki MRE. Identyfikację przeprowadzono opierając się na pomiarach około 1500 współrzędnych położenia MRP IRb-6. W pracy [81] przebadano proces identyfikacji za pomocą analizy statystycznej, przez obliczenie stosunków korelacyjnych η_i^2 , wariancji resztkowych σ_i^2 oraz odchyleń standartowych σ_i poszczególnych współrzędnych naturalnych członów $\lambda_0, \Theta_1 \div \Theta_5$. Wyniki tych obliczeń przedstawia tabela 6.1.

W przypadku idealnym $\eta^2 = 1.0$, $\sigma^2 = 0$, $\sigma = 0$. Z tabeli 6.1 wynika, że model kinematyki czwartego stopnia swobody jest najlepszy, a model piątego stopnia swobody

najgorszy. Jednak w każdym stopniu swobody η^2 jest bliskie jedności. Tak otrzymane parametry wartości nominalne parametrów kinematyki posłużyły autorowi rozprawy do wyznaczenia zbioru konfiguracji najlepiej uwarunkowanych do ich kalibracji. Zbiór ten przedstawia praca [78].

Tabela 6.1
Parametry oceny pomiarów

Nr wsp. nat. członu	η_i^2	$\sigma_i^2 \left[\sigma^2 \right]$	$\sigma_i \left[\sigma \right]$
0	0.9999882	0.7395	0.85996
1	0.9999778	0.2260	0.4758
2	0.9997335	0.1395	0.3735
3	0.999738	0.0970	0.3115
4	0.9999786	0.0869	0.2948
5	0.9998142	3.211	1.7919

6.3. Funkcja regresji dynamiki MRP

Parametrami modelu dynamiki są między innymi elementy macierzy pseudobezwładności członów, siłowników i elementów zespołów przekazujących napędy. Literatura [12,13,23,30,31,32,94,107] przedstawia metody identyfikacji parametrów dynamiki manipulatorów. W metodach tych wyznacza się wartości aktualne parametrów. Na ogół przed identyfikacją tych parametrów dokonuje się uproszczeń modeli dynamiki. W tak uproszczonych modelach parametrami są współczynniki wygodne do identyfikacji, nie mające interpretacji fizycznej. W monografii [107] opracowano ogólne modele dynamiki w postaci formy liniowej uogólnionych sił niepotencjalnych względem parametrów masowych członów manipulatora. Taka postać modelu dynamiki nadaje się do identyfikacji minimalnkwadratowej elementów macierzy pseudobezwładności członów. Identyfikacja ta nie wymaga uproszczeń proponowanych w pracach [12,13,30,31,32,94]. Z prac [23,32,107] wynika, że identyfikacja pozwala wyznaczyć tylko niektóre parametry masowe członów. Modele dynamiki zaprezentowane w [107] są słuszne tylko dla MRP z napędem bezpośrednim [56,57,64]. W ogólnych modelach dynamiki MRP z napędem pośrednim występują parametry masowe członów, siłowników i elementów przekazujących napędy. W pracy [57,59] pokazano, że wpływ parametrów masowych członów i elementów przekazujących napędy na efektywną bezwładność siłowników może być dominujący. Uwzględnienie w identyfikacji parametrów masowych członów i siłowników zwiększa liczbę wyznaczanych parametrów. Komplikuje to obliczenia i można przypuszczać, że wyznaczenie większej liczby parametrów nie będzie możliwe. Jednak parametry masowe stanowiące elementy macierzy pseudobezwładności wszystkich elementów składowych MRP, czyli członów, siłowników i elementów zespołów przekazujących napędy, można obliczyć z wymiarów i gęstości mas. Jest to sposób czasochłonny, lecz pozwalający wyznaczyć parametry masowe wszystkich elementów składowych MRP. Wartości obliczone parametrów masowych będziemy nazywać nominalnymi. W pracach [57,59,64] obliczono macierze pseudobezwładności z wymiarów i gęstości mas elementów MRP. Obliczenia te wykonano za pomocą programu komputerowego *pseudo* [57].

Pomiary na potrzeby kalibracji modelu dynamiki przeprowadza się przy ruchomym manipulatorze. Do kalibracji wykorzystujemy formuły opisujące dynamikę MRP. Przyjmujemy, że wyjściem \hat{x} są efektywne siły napędowe siłowników F_{siv} . Siły te są siłami

napędowymi rozwijanymi przez siłowniki, pomniejszonymi o siły tarcia opisane w pracach [57,64].

$$\hat{\mathbf{x}} = [F_{s1w}, F_{s2w}, \dots, F_{sNw}]^T. \quad (6.9)$$

Wielkościami wejściowymi są współrzędne naturalne siłowników oraz ich prędkości i przyspieszenia $\mathbf{u} = (\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s, \ddot{\mathbf{q}}_s) = (q_{s1}, \dots, q_{sN}, \dot{q}_{s1}, \dots, \dot{q}_{sN}, \ddot{q}_{s1}, \dots, \ddot{q}_{sN})$. Współczynnikiem regresji b_k odpowiadają różnicom między nieznanymi wartościami aktualnymi p_{ak} i znanymi wartościami nominalnymi p_{0k} parametrów dynamiki. Parametrami tymi jest po 10 elementów macierzy pseudobezwładności. Macierze pseudobezwładności opisują parametry masowe: członów, siłowników i elementów przekazujących napędy [57,64]. W uzupełnieniu A wykazano, że F_{siw} są formą liniową względem elementów tych macierzy pseudobezwładności. Forma ta ma postać:

$$\hat{\mathbf{x}}_i = F_{siw} = \mathbf{K}_i \mathbf{f}, \text{ lub}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{K} \mathbf{f}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{K}_N \end{bmatrix}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (6.10a)$$

$$\mathbf{f} = [\mathbf{f}_1^T, \mathbf{f}_2^T, \dots, \mathbf{f}_N^T]^T, \quad n = 2N + \sum_{p=1}^N N_p, \quad (6.10b)$$

gdzie N_p jest liczbą elementów zespołu przekazującego napęd na człon p -ty.

$$\mathbf{f}_i = [m_i, m_i \bar{x}_i, m_i \bar{y}_i, m_i \bar{z}_i, I_{ixx}, I_{iyy}, I_{izz}, I_{ixy}, I_{iyz}, I_{izx}]^T, \quad (6.10c)$$

gdzie: m_i -masa elementu i -tego MRP (członu, siłownika, elementu przekazującego napęd); $\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i$ -współrzędne środka masy elementu i -tego MRP w układzie współrzędnych skojarzonym z tym elementem;

$$I_{iuv} = \int_{m_i} u v d m, \quad u, v = x, y, z.$$

$$\mathbf{K}_i = [\mathbf{K}_{i1}, \mathbf{K}_{i2}, \dots, \mathbf{K}_{in}],$$

$$\mathbf{K}_{ij} = [K_{ij1}, K_{ij2}, \dots, K_{ij10}]. \quad (6.10d)$$

Elementy macierzy \mathbf{K}_i są przedstawione w uzupełnieniu A. Elementy te zależą tylko od współrzędnych naturalnych siłowników \mathbf{q}_i oraz od ich prędkości $\dot{\mathbf{q}}_i$ i przyspieszeń $\ddot{\mathbf{q}}_i$. Z formuł (6.9) i (6.10a÷10c) wynika, że $p_{ak} = f_{ak}$ i $p_{0k} = f_{0k}$. Zatem

$$b_k = p_{ak} - p_{0k} = f_{ak} - f_{0k}. \quad (6.11)$$

$p_{0k} = f_{0k}$ są elementami macierzy pseudobezwładności, obliczonymi np. za pomocą programu komputerowego *pseudo* [34,57]. Zatem wielkość wyjściową możemy wyrazić w postaci:

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \sum_{k=1}^K K_{ik} f_{0k} + \sum_{k=1}^K K_{ik} b_k. \quad (6.12)$$

K_{ik} są kolejnymi elementami macierzy \mathbf{K}_i z formuły (6.10d). Model matematyczny w postaci (6.3) otrzymamy gdy

$$\varphi_0(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^K \mathbf{K}_k(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s, \ddot{\mathbf{q}}_s) f_{0k},$$

$$\varphi_k^* = \mathbf{K}_k(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s, \ddot{\mathbf{q}}_s), \quad (6.13)$$

gdzie \mathbf{K}_k jest k -tą kolumną macierzy \mathbf{K} z formuły (6.10a). Spośród funkcji $\varphi_k^*(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s, \ddot{\mathbf{q}}_s)$ wybieramy tylko niezależne od siebie. Gdyby pojawiły się w macierzy \mathbf{U} (opisanej formułą (6.4a)) kolumny liniowo zależne od siebie, to zastępujemy je jedną kolumną, podobnie jak przy tworzeniu funkcji regresji dla kalibracji parametrów kinematyki. Również podobnie tworzymy nowe współczynniki regresji, będące kombinacją liniową współczynników przy odpowiednich funkcjach $\varphi_l^*(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s, \ddot{\mathbf{q}}_s)$ zależnych od siebie. Po tej modyfikacji mamy tylko liniowo niezależne funkcje $\varphi_l^*(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s, \ddot{\mathbf{q}}_s)$. Indeks l może zmieniać się w granicach $1 \leq l \leq L \leq K$, L jest liczbą możliwych do obliczenia współczynników regresji, a tym samym górną granicą sumowania w formule (6.3). Ze znanych wartości \mathbf{q}_s , $\dot{\mathbf{q}}_s$ i $\ddot{\mathbf{q}}_s$ w $n = 1, 2, \dots, M$ chwilach możemy wyznaczyć macierz $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_l, \dots, b_L)$ z formuły (6.5). Korekta obliczonych wcześniej wartości lub ich kombinacji liniowej $p_{0l} + b_l = f_{0l} + b_l$ kończy kalibrację parametrów dynamiki.

MRP AS

Parametry dynamiki MRP AS wynikają z formuł (2.55)÷(2.63) oraz (3.1)÷(3.2). Są to parametry kinematyki wymienione w podrozdziale 6.2 oraz parametry masowe. W celu uproszczenia kalibracji parametrów dynamiki założymy, że parametry kinematyki wymienione w podrozdziale 6.2 mają wartości nominalne. Pozostałymi parametrami dynamiki są parametry masowe (6.10c). Występują w macierzach pseudobezwładności członów $\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_6$. Parametrami masowymi występującymi w macierzy \mathbf{J}_1 są:

$$p_1 = m_1, \quad p_2 = m_1 \bar{x}_1, \quad p_3 = m_1 \bar{y}_1, \quad p_4 = m_1 \bar{z}_1, \quad p_5 = I_{1xx},$$

$$p_6 = I_{1yy}, \quad p_7 = I_{1zz}, \quad p_8 = I_{1xy}, \quad p_9 = I_{1yz}, \quad p_{10} = I_{1xz};$$

w macierzy \mathbf{J}_2 :

$$p_{11} = m_2, \quad p_{12} = m_2 \bar{x}_2, \quad p_{13} = m_2 \bar{y}_2, \quad p_{14} = m_2 \bar{z}_2, \quad p_{15} = I_{2xx},$$

$$p_{16} = I_{2yy}, \quad p_{17} = I_{2zz}, \quad p_{18} = I_{2xy}, \quad p_{19} = I_{2yz}, \quad p_{20} = I_{2xz};$$

w macierzy \mathbf{J}_3 :

$$p_{21} = m_3, \quad p_{22} = m_3 \bar{x}_3, \quad p_{23} = m_3 \bar{y}_3, \quad p_{24} = m_3 \bar{z}_3, \quad p_{25} = I_{3xx},$$

$$p_{26} = I_{3yy}, \quad p_{27} = I_{3zz}, \quad p_{28} = I_{3xy}, \quad p_{29} = I_{3yz}, \quad p_{30} = I_{3xz};$$

w macierzy \mathbf{J}_4 :

$$p_{31} = m_4, \quad p_{32} = m_4 \bar{x}_4, \quad p_{33} = m_4 \bar{y}_4, \quad p_{34} = m_4 \bar{z}_4, \quad p_{35} = I_{4xx},$$

$$p_{36} = I_{4yy}, \quad p_{37} = I_{4zz}, \quad p_{38} = I_{4xy}, \quad p_{39} = I_{4yz}, \quad p_{40} = I_{4xz};$$

w macierzy \mathbf{J}_5 :

$$p_{41} = m_5, \quad p_{42} = m_5 \bar{x}_5, \quad p_{43} = m_5 \bar{y}_5, \quad p_{44} = m_5 \bar{z}_5, \quad p_{45} = I_{5xx},$$

$$p_{46} = I_{5yy}, \quad p_{47} = I_{5zz}, \quad p_{48} = I_{5xy}, \quad p_{49} = I_{5yz}, \quad p_{50} = I_{5xz};$$

w macierzy \mathbf{J}_6 :

$$p_{51} = m_6, \quad p_{52} = m_6 \bar{x}_6, \quad p_{53} = m_6 \bar{y}_6, \quad p_{54} = m_6 \bar{z}_6, \quad p_{55} = I_{6xx},$$

$$p_{56} = I_{6yy}, \quad p_{57} = I_{6zz}, \quad p_{58} = I_{6xy}, \quad p_{59} = I_{6yz}, \quad p_{60} = I_{6xz}. \quad (6.14)$$

Wielkościami wyjściowymi są efektywne siły napędowe siłowników $F_{s1w} \div F_{s6w}$. Wielkościami wejściowymi są współrzędne naturalne siłowników oraz ich prędkości i przyspieszenia $\mathbf{u} = (\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s, \ddot{\mathbf{q}}_s) = (\Theta_{s1}, \dots, \Theta_{s6}, \dot{\Theta}_{s1}, \dots, \dot{\Theta}_{s6}, \ddot{\Theta}_{s1}, \dots, \ddot{\Theta}_{s6})$.

W formułach na elementy macierzy K_{ij} w formule (6.10d) (opisanych w uzupełnieniu A) $N = 6$, $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = N_5 = N_6 = 0$. Przed utworzeniem funkcji regresji (6.12) musimy przebadać linową niezależność wszystkich funkcji $\phi_k^* = K_k(q_s, \dot{q}_s, \ddot{q}_s)$ względem współrzędnych wielkości wejściowych.

Wartości nominalne 60 elementów macierzy pseudobezwładności $J_1 \div J_6$ przedstawia praca [2].

MRP L-1

Parametry dynamiki MRP L-1 wynikają z formuł (2.55)÷(2.63) oraz (4.9)÷(4.16). Są to parametry kinematyki wymienione w podrozdziale 6.2, parametry występujące w macierzach $T_{s1} \div T_{s6}$, T_{051} , T_{062} oraz parametry masowe. Parametry występujące w macierzach $T_{s1} \div T_{s6}$, T_{051} , T_{062} to: $AB1$, $AB3+AB6$, $BC1+BC6$, $CD2+CD6$, $DE1+DE6$, $EF1+EF6$, $FG1+FG6$, $GH1+GH6$. W celu uproszczenia kalibracji parametrów dynamiki założymy, że parametry kinematyki wymienione w podrozdziale 6.2 i parametry występujące w macierzach $T_{s1} \div T_{s6}$, T_{051} , T_{062} mają wartości nominalne. Pozostałymi parametrami dynamiki są parametry masowe (6.10c). Występują w macierzach pseudobezwładności członów $J_1 \div J_6$, siłowników $J_{s1} \div J_{s6}$ oraz elementów zespołów napędowych J_{s1} i J_{62} . Parametrami masowymi występującymi w macierzy J_1 są:

$$p_1 = m_1, p_2 = m_1 \bar{x}_1, p_3 = m_1 \bar{y}_1, p_4 = m_1 \bar{z}_1, p_5 = I_{1xx}, \\ p_6 = I_{1yy}, p_7 = I_{1zz}, p_8 = I_{1xy}, p_9 = I_{1yz}, p_{10} = I_{1xz};$$

w macierzy J_2 :

$$p_{11} = m_2, p_{12} = m_2 \bar{x}_2, p_{13} = m_2 \bar{y}_2, p_{14} = m_2 \bar{z}_2, p_{15} = I_{2xx}, \\ p_{16} = I_{2yy}, p_{17} = I_{2zz}, p_{18} = I_{2xy}, p_{19} = I_{2yz}, p_{20} = I_{2xz};$$

w macierzy J_3 :

$$p_{21} = m_3, p_{22} = m_3 \bar{x}_3, p_{23} = m_3 \bar{y}_3, p_{24} = m_3 \bar{z}_3, p_{25} = I_{3xx}, \\ p_{26} = I_{3yy}, p_{27} = I_{3zz}, p_{28} = I_{3xy}, p_{29} = I_{3yz}, p_{30} = I_{3xz};$$

w macierzy J_4 :

$$p_{31} = m_4, p_{32} = m_4 \bar{x}_4, p_{33} = m_4 \bar{y}_4, p_{34} = m_4 \bar{z}_4, p_{35} = I_{4xx}, \\ p_{36} = I_{4yy}, p_{37} = I_{4zz}, p_{38} = I_{4xy}, p_{39} = I_{4yz}, p_{40} = I_{4xz};$$

w macierzy J_5 :

$$p_{41} = m_5, p_{42} = m_5 \bar{x}_5, p_{43} = m_5 \bar{y}_5, p_{44} = m_5 \bar{z}_5, p_{45} = I_{5xx}, \\ p_{46} = I_{5yy}, p_{47} = I_{5zz}, p_{48} = I_{5xy}, p_{49} = I_{5yz}, p_{50} = I_{5xz};$$

w macierzy J_6 :

$$p_{51} = m_6, p_{52} = m_6 \bar{x}_6, p_{53} = m_6 \bar{y}_6, p_{54} = m_6 \bar{z}_6, p_{55} = I_{6xx}, \\ p_{56} = I_{6yy}, p_{57} = I_{6zz}, p_{58} = I_{6xy}, p_{59} = I_{6yz}, p_{60} = I_{6xz};$$

w macierzy J_{s1} :

$$p_{61} = m_{s1}, p_{62} = m_{s1} \bar{x}_{s1}, p_{63} = m_{s1} \bar{y}_{s1}, p_{64} = m_{s1} \bar{z}_{s1}, p_{65} = I_{s1xx}, \\ p_{66} = I_{s1yy}, p_{67} = I_{s1zz}, p_{68} = I_{s1xy}, p_{69} = I_{s1yz}, p_{70} = I_{s1xz};$$

w macierzy J_{s2} :

$$p_{71} = m_{s2}, p_{72} = m_{s2} \bar{x}_{s2}, p_{73} = m_{s2} \bar{y}_{s2}, p_{74} = m_{s2} \bar{z}_{s2}, p_{75} = I_{s2xx}, \\ p_{76} = I_{s2yy}, p_{77} = I_{s2zz}, p_{78} = I_{s2xy}, p_{79} = I_{s2yz}, p_{80} = I_{s2xz};$$

w macierzy J_{s3} :

$$p_{81} = m_{s3}, p_{82} = m_{s3} \bar{x}_{s3}, p_{83} = m_{s3} \bar{y}_{s3}, p_{84} = m_{s3} \bar{z}_{s3}, p_{85} = I_{s3xx}, \\ p_{86} = I_{s3yy}, p_{87} = I_{s3zz}, p_{88} = I_{s3xy}, p_{89} = I_{s3yz}, p_{90} = I_{s3xz};$$

w macierzy J_{s4} :

$$p_{91} = m_{s4}, p_{92} = m_{s4} \bar{x}_{s4}, p_{93} = m_{s4} \bar{y}_{s4}, p_{94} = m_{s4} \bar{z}_{s4}, p_{95} = I_{s4xx}, \\ p_{96} = I_{s4yy}, p_{97} = I_{s4zz}, p_{98} = I_{s4xy}, p_{99} = I_{s4yz}, p_{100} = I_{s4xz};$$

w macierzy J_{s5} :

$$p_{101} = m_{s5}, p_{102} = m_{s5} \bar{x}_{s5}, p_{103} = m_{s5} \bar{y}_{s5}, p_{104} = m_{s5} \bar{z}_{s5}, p_{105} = I_{s5xx}, \\ p_{106} = I_{s5yy}, p_{107} = I_{s5zz}, p_{108} = I_{s5xy}, p_{109} = I_{s5yz}, p_{110} = I_{s5xz};$$

w macierzy J_{s6} :

$$p_{111} = m_{s6}, p_{112} = m_{s6} \bar{x}_{s6}, p_{113} = m_{s6} \bar{y}_{s6}, p_{114} = m_{s6} \bar{z}_{s6}, p_{115} = I_{s6xx}, \\ p_{116} = I_{s6yy}, p_{117} = I_{s6zz}, p_{118} = I_{s6xy}, p_{119} = I_{s6yz}, p_{120} = I_{s6xz};$$

w macierzy J_{s1} :

$$p_{121} = m_{s1}, p_{122} = m_{s1} \bar{x}_{s1}, p_{123} = m_{s1} \bar{y}_{s1}, p_{124} = m_{s1} \bar{z}_{s1}, p_{125} = I_{s1xx}, \\ p_{126} = I_{s1yy}, p_{127} = I_{s1zz}, p_{128} = I_{s1xy}, p_{129} = I_{s1yz}, p_{130} = I_{s1xz};$$

w macierzy J_{62} :

$$p_{131} = m_{62}, p_{132} = m_{62} \bar{x}_{62}, p_{133} = m_{62} \bar{y}_{62}, p_{134} = m_{62} \bar{z}_{62}, p_{135} = I_{62xx}, \\ p_{136} = I_{62yy}, p_{137} = I_{62zz}, p_{138} = I_{62xy}, p_{139} = I_{62yz}, p_{140} = I_{62xz}. \quad (6.15)$$

Wielkościami wyjściowymi są efektywne siły napędowe siłowników $F_{s1w} \div F_{s6w}$. Wielkościami wejściowymi są współrzędne naturalne siłowników oraz ich prędkości i przyspieszenia $u = (q_s, \dot{q}_s, \ddot{q}_s) = (\theta_{s1}, \dots, \theta_{s6}, \dot{\theta}_{s1}, \dots, \dot{\theta}_{s6}, \ddot{\theta}_{s1}, \dots, \ddot{\theta}_{s6})$.

W formułach na elementy macierzy K_{ij} w formule (6.10d) (opisanych w uzupełnieniu A) $N = 6$, $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = 0$, $N_5 = 1$, $N_6 = 1$. Przed utworzeniem funkcji regresji (6.12) musimy przebadać linową niezależność wszystkich funkcji $\phi_k^* = K_k(q_s, \dot{q}_s, \ddot{q}_s)$ względem współrzędnych wielkości wejściowych. Wartości nominalne parametrów kinematyki z podrozdziału 6.2 oraz $AB1$, $AB3+AB6$, $BC1+BC6$, $CD2+CD6$, $DE1+DE6$, $EF1+EF6$, $FG1+FG6$, $GH1+GH6$ przedstawiają prace [3,15]. Wartości nominalne 140 elementów macierzy pseudobezwładności $J_1 \div J_6$, $J_{s1} \div J_{s6}$, J_{s1} oraz J_{62} obliczono z rozkładów masy i wymiarów za pomocą programu komputerowego *pseudo* [15].

MRP IRb-6

Parametry dynamiki MRP IRb-6 wynikają z formuł (2.55)÷(2.63) oraz (3.50)÷(3.55). Są to parametry kinematyki wymienione w podrozdziale 6.2, parametry występujące

w macierzach $T_{s1} \div T_{s5}$, T_{031} oraz parametry masowe. Parametry występujące w macierzach T_{031} i $T_{s1} \div T_{s5}$ to: λ_{11} , l_{21} , l_{22} , a_2 , b_2 , d_2 , l_{32} , l_{31} , λ_{31} , λ_{32} , a_3 , b_3 , d_3 , l_{42} , l_{43} , λ_{41} , λ_{42} , l_{52} , l_{53} , λ_{51} , λ_{52} . W celu uproszczenia kalibracji parametrów dynamiki założymy, że wartości nominalne mają parametry kinematyki wymienione w podrozdziale 6.2 i parametry występujące w macierzach T_{031} i $T_{s1} \div T_{s5}$. Pozostałymi parametrami dynamiki są parametry masowe (6.10c). Występują w macierzach pseudobezwładności członów $J_1 \div J_5$, siłowników $J_{s1} \div J_{s5}$ oraz elementu równoważącego trzeci człon J_{31} . Parametrami masowymi występującymi w macierzy J_1 są:

$$p_1 = m_1, p_2 = m_1 \bar{x}_1, p_3 = m_1 \bar{y}_1, p_4 = m_1 \bar{z}_1, p_5 = I_{1xx}, \\ p_6 = I_{1yy}, p_7 = I_{1zz}, p_8 = I_{1xy}, p_9 = I_{1yz}, p_{10} = I_{1xz};$$

w macierzy J_2 :

$$p_{11} = m_2, p_{12} = m_2 \bar{x}_2, p_{13} = m_2 \bar{y}_2, p_{14} = m_2 \bar{z}_2, p_{15} = I_{2xx}, \\ p_{16} = I_{2yy}, p_{17} = I_{2zz}, p_{18} = I_{2xy}, p_{19} = I_{2yz}, p_{20} = I_{2xz};$$

w macierzy J_3 :

$$p_{21} = m_3, p_{22} = m_3 \bar{x}_3, p_{23} = m_3 \bar{y}_3, p_{24} = m_3 \bar{z}_3, p_{25} = I_{3xx}, \\ p_{26} = I_{3yy}, p_{27} = I_{3zz}, p_{28} = I_{3xy}, p_{29} = I_{3yz}, p_{30} = I_{3xz};$$

w macierzy J_4 :

$$p_{31} = m_4, p_{32} = m_4 \bar{x}_4, p_{33} = m_4 \bar{y}_4, p_{34} = m_4 \bar{z}_4, p_{35} = I_{4xx}, \\ p_{36} = I_{4yy}, p_{37} = I_{4zz}, p_{38} = I_{4xy}, p_{39} = I_{4yz}, p_{40} = I_{4xz};$$

w macierzy J_5 :

$$p_{41} = m_5, p_{42} = m_5 \bar{x}_5, p_{43} = m_5 \bar{y}_5, p_{44} = m_5 \bar{z}_5, p_{45} = I_{5xx}, \\ p_{46} = I_{5yy}, p_{47} = I_{5zz}, p_{48} = I_{5xy}, p_{49} = I_{5yz}, p_{50} = I_{5xz};$$

w macierzy J_{s1} :

$$p_{51} = m_{s1}, p_{52} = m_{s1} \bar{x}_{s1}, p_{53} = m_{s1} \bar{y}_{s1}, p_{54} = m_{s1} \bar{z}_{s1}, p_{55} = I_{s1xx}, \\ p_{56} = I_{s1yy}, p_{57} = I_{s1zz}, p_{58} = I_{s1xy}, p_{59} = I_{s1yz}, p_{60} = I_{s1xz};$$

w macierzy J_{s2} :

$$p_{61} = m_{s2}, p_{62} = m_{s2} \bar{x}_{s2}, p_{63} = m_{s2} \bar{y}_{s2}, p_{64} = m_{s2} \bar{z}_{s2}, p_{65} = I_{s2xx}, \\ p_{66} = I_{s2yy}, p_{67} = I_{s2zz}, p_{68} = I_{s2xy}, p_{69} = I_{s2yz}, p_{70} = I_{s2xz};$$

w macierzy J_{s3} :

$$p_{71} = m_{s3}, p_{72} = m_{s3} \bar{x}_{s3}, p_{73} = m_{s3} \bar{y}_{s3}, p_{74} = m_{s3} \bar{z}_{s3}, p_{75} = I_{s3xx}, \\ p_{76} = I_{s3yy}, p_{77} = I_{s3zz}, p_{78} = I_{s3xy}, p_{79} = I_{s3yz}, p_{80} = I_{s3xz};$$

w macierzy J_{s4} :

$$p_{81} = m_{s4}, p_{82} = m_{s4} \bar{x}_{s4}, p_{83} = m_{s4} \bar{y}_{s4}, p_{84} = m_{s4} \bar{z}_{s4}, p_{85} = I_{s4xx}, \\ p_{86} = I_{s4yy}, p_{87} = I_{s4zz}, p_{88} = I_{s4xy}, p_{89} = I_{s4yz}, p_{90} = I_{s4xz};$$

w macierzy J_{s5} :

$$p_{91} = m_{s5}, p_{92} = m_{s5} \bar{x}_{s5}, p_{93} = m_{s5} \bar{y}_{s5}, p_{94} = m_{s5} \bar{z}_{s5}, p_{95} = I_{s5xx}, \\ p_{96} = I_{s5yy}, p_{97} = I_{s5zz}, p_{98} = I_{s5xy}, p_{99} = I_{s5yz}, p_{100} = I_{s5xz};$$

w macierzy J_{31} :

$$p_{101} = m_{31}, p_{102} = m_{31} \bar{x}_{31}, p_{103} = m_{31} \bar{y}_{31}, p_{104} = m_{31} \bar{z}_{31}, p_{105} = I_{31xx}, \\ p_{106} = I_{31yy}, p_{107} = I_{31zz}, p_{108} = I_{31xy}, p_{109} = I_{31yz}, p_{110} = I_{31xz}. \quad (6.16)$$

Wielkościami wyjściowymi są efektywne siły napędowe siłowników $F_{s1w} \div F_{s5w}$. Wielkościami wejściowymi są współrzędne naturalne siłowników oraz ich prędkości i przyspieszenia $u = (q_s, \dot{q}_s, \ddot{q}_s) = (\Theta_{s1}, \dots, \Theta_{s5}, \dot{\Theta}_{s1}, \dots, \dot{\Theta}_{s5}, \ddot{\Theta}_{s1}, \dots, \ddot{\Theta}_{s5})$.

W formułach na elementy macierzy K_y w formule (6.10d) (opisanych w uzupełnieniu A) $N = 5$, $N_1 = N_2 = N_4 = N_5 = 0$, $N_3 = 1$. Przed utworzeniem funkcji regresji (6.12) musimy przebadać liniową niezależność wszystkich funkcji $\phi_k^* = K_k(q_s, \dot{q}_s, \ddot{q}_s)$ względem współrzędnych wielkości wejściowych.

Wartości nominalne parametrów λ_{11} , l_{21} , l_{22} , a_2 , b_2 , d_2 , l_{32} , l_{31} , λ_{31} , λ_{32} , a_3 , b_3 , d_3 , l_{42} , l_{43} , λ_{41} , λ_{42} , l_{52} , l_{53} , λ_{51} i λ_{52} odczytano z rysunków dokumentacji MRP IRb-6. Wartości nominalne 110 elementów macierzy pseudobezwładności $J_1 \div J_5$, $J_{s1} \div J_{s5}$ oraz J_{31} obliczono z rozkładów masy i wymiarów za pomocą programu komputerowego *pseudo* [34,57].

MRE

Parametry dynamiki MRE wynikają z formuł (2.55)+(2.63), (5.23)+(5.28), (5.30)+(5.31) oraz (5.42). Są to parametry dynamiki MRP IRb-6 z podrozdziału 6.3 oraz parametry występujące w macierzy T_{s0} oraz w macierzach pseudobezwładności J_0 i J_{s0} . Parametrem występującym w macierzy T_{s0} jest l_{01} . W celu uproszczenia kalibracji parametrów dynamiki założymy, że wartości nominalne mają parametry kinematyki wymienione w podrozdziale 6.2 i parametry występujące w macierzach T_{s0} , $T_{s1} \div T_{s5}$ i T_{031} . Pozostałymi parametrami dynamiki są parametry masowe (6.10c). Występują w macierzach pseudobezwładności członów $J_0 \div J_5$, siłowników $J_{s0} \div J_{s5}$ oraz elementu równoważącego trzeci człon J_{31} . Parametrami masowymi występującymi w macierzy J_0 są:

$$p_1 = m_0, p_2 = m_0 \bar{x}_0, p_3 = m_0 \bar{y}_0, p_4 = m_0 \bar{z}_0, p_5 = I_{0xx}, \\ p_6 = I_{0yy}, p_7 = I_{0zz}, p_8 = I_{0xy}, p_9 = I_{0yz}, p_{10} = I_{0xz};$$

w macierzy J_1 :

$$p_{11} = m_1, p_{12} = m_1 \bar{x}_1, p_{13} = m_1 \bar{y}_1, p_{14} = m_1 \bar{z}_1, p_{15} = I_{1xx}, \\ p_{16} = I_{1yy}, p_{17} = I_{1zz}, p_{18} = I_{1xy}, p_{19} = I_{1yz}, p_{20} = I_{1xz};$$

w macierzy J_2 :

$$p_{21} = m_2, p_{22} = m_2 \bar{x}_2, p_{23} = m_2 \bar{y}_2, p_{24} = m_2 \bar{z}_2, p_{25} = I_{2xx}, \\ p_{26} = I_{2yy}, p_{27} = I_{2zz}, p_{28} = I_{2xy}, p_{29} = I_{2yz}, p_{30} = I_{2xz};$$

w macierzy J_3 :

$$p_{31} = m_3, p_{32} = m_3 \bar{x}_3, p_{33} = m_3 \bar{y}_3, p_{34} = m_3 \bar{z}_3, p_{35} = I_{3xx}, \\ p_{36} = I_{3yy}, p_{37} = I_{3zz}, p_{38} = I_{3xy}, p_{39} = I_{3yz}, p_{40} = I_{3xz};$$

w macierzy J_4 :

$$p_{41} = m_4, p_{42} = m_4 \bar{x}_4, p_{43} = m_4 \bar{y}_4, p_{44} = m_4 \bar{z}_4, p_{45} = I_{4xx},$$

$$p_{46} = I_{4yy}, p_{47} = I_{4zz}, p_{48} = I_{4xy}, p_{49} = I_{4yz}, p_{50} = I_{4xz};$$

w macierzy J_5 :

$$p_{51} = m_5, p_{52} = m_5 \bar{x}_5, p_{53} = m_5 \bar{y}_5, p_{54} = m_5 \bar{z}_5, p_{55} = I_{5xx},$$

$$p_{56} = I_{5yy}, p_{57} = I_{5zz}, p_{58} = I_{5xy}, p_{59} = I_{5yz}, p_{60} = I_{5xz};$$

w macierzy J_{s0} :

$$p_{61} = m_{s0}, p_{62} = m_{s0} \bar{x}_{s0}, p_{63} = m_{s0} \bar{y}_{s0}, p_{64} = m_{s0} \bar{z}_{s0}, p_{65} = I_{s0xx},$$

$$p_{66} = I_{s0yy}, p_{67} = I_{s0zz}, p_{68} = I_{s0xy}, p_{69} = I_{s0yz}, p_{70} = I_{s0xz};$$

w macierzy J_{s1} :

$$p_{71} = m_{s1}, p_{72} = m_{s1} \bar{x}_{s1}, p_{73} = m_{s1} \bar{y}_{s1}, p_{74} = m_{s1} \bar{z}_{s1}, p_{75} = I_{s1xx},$$

$$p_{76} = I_{s1yy}, p_{77} = I_{s1zz}, p_{78} = I_{s1xy}, p_{79} = I_{s1yz}, p_{80} = I_{s1xz};$$

w macierzy J_{s2} :

$$p_{81} = m_{s2}, p_{82} = m_{s2} \bar{x}_{s2}, p_{83} = m_{s2} \bar{y}_{s2}, p_{84} = m_{s2} \bar{z}_{s2}, p_{85} = I_{s2xx},$$

$$p_{86} = I_{s2yy}, p_{87} = I_{s2zz}, p_{88} = I_{s2xy}, p_{89} = I_{s2yz}, p_{90} = I_{s2xz};$$

w macierzy J_{s3} :

$$p_{91} = m_{s3}, p_{92} = m_{s3} \bar{x}_{s3}, p_{93} = m_{s3} \bar{y}_{s3}, p_{94} = m_{s3} \bar{z}_{s3}, p_{95} = I_{s3xx},$$

$$p_{96} = I_{s3yy}, p_{97} = I_{s3zz}, p_{98} = I_{s3xy}, p_{99} = I_{s3yz}, p_{100} = I_{s3xz};$$

w macierzy J_{s4} :

$$p_{101} = m_{s4}, p_{102} = m_{s4} \bar{x}_{s4}, p_{103} = m_{s4} \bar{y}_{s4}, p_{104} = m_{s4} \bar{z}_{s4}, p_{105} = I_{s4xx},$$

$$p_{106} = I_{s4yy}, p_{107} = I_{s4zz}, p_{108} = I_{s4xy}, p_{109} = I_{s4yz}, p_{110} = I_{s4xz};$$

w macierzy J_{s5} :

$$p_{111} = m_{s5}, p_{112} = m_{s5} \bar{x}_{s5}, p_{113} = m_{s5} \bar{y}_{s5}, p_{114} = m_{s5} \bar{z}_{s5}, p_{115} = I_{s5xx},$$

$$p_{116} = I_{s5yy}, p_{117} = I_{s5zz}, p_{118} = I_{s5xy}, p_{119} = I_{s5yz}, p_{120} = I_{s5xz};$$

w macierzy J_{31} :

$$p_{121} = m_{31}, p_{122} = m_{31} \bar{x}_{31}, p_{123} = m_{31} \bar{y}_{31}, p_{124} = m_{31} \bar{z}_{31}, p_{125} = I_{31xx},$$

$$p_{126} = I_{31yy}, p_{127} = I_{31zz}, p_{128} = I_{31xy}, p_{129} = I_{31yz}, p_{130} = I_{31xz}. \quad (6.17)$$

Wielkościami wyjściowymi są efektywne siły napędowe siłowników $F_{s0w} \div F_{s5w}$. Wielkościami wejściowymi są współrzędne naturalne siłowników oraz ich prędkości i przyspieszenia $u = (q_s, \dot{q}_s, \ddot{q}_s) = (\Theta_{s0}, \dots, \Theta_{s5}, \dot{\Theta}_{s0}, \dots, \dot{\Theta}_{s5}, \ddot{\Theta}_{s0}, \dots, \ddot{\Theta}_{s5})$.

W formułach na elementy macierzy K_j w formule (6.10d) (opisanych w uzupełnieniu A) $N = 5$, $N_0 = N_1 = N_2 = N_4 = N_5 = 0$, $N_3 = 1$. Przed utworzeniem funkcji regresji (6.12) musimy przebadać linową niezależność wszystkich funkcji $\varphi_k^* = K_k(q_s, \dot{q}_s, \ddot{q}_s)$ względem współrzędnych wielkości wejściowych.

Wartości nominalne parametrów kinematyki z podrozdziału 6.2 zostały zmierzone [81]. Wartości nominalne parametrów $l_{01}, \lambda_{11}, l_{21}, l_{22}, a_2, b_2, d_2, l_{32}, l_{31}, \lambda_{31}, \lambda_{32}, a_3, b_3, d_3, l_{42}, l_{43}, \lambda_{41}, \lambda_{42}, l_{52}, l_{53}, \lambda_{51}, \lambda_{52}$ zmierzono [81] lub odczytano z rysunków dokumentacji MRP IRb-6. Wartości nominalne 130 elementów macierzy pseudobezwładności $J_0 \div J_5$, $J_{s0} \div J_{s5}$ oraz J_{31} obliczono z rozkładów masy i wymiarów za pomocą programu komputerowego *pseudo* [34,57].

6.4. Podsumowanie

Na etapie planowania eksperymentu identyfikacji na potrzeby kalibracji, należy przebadac symulacyjnie wrażliwość odpowiednich parametrów ruchu na poszczególne parametry modelu MRP. Symulację komputerową przeprowadzamy dla znanych przed kalibracją wartości nominalnych parametrów kinematyki i dynamiki. **Na potrzeby kalibracji parametrów kinematyki należy przebadac wrażliwość położenia i orientacji elementu wykonawczego. Na potrzeby kalibracji parametrów masowych należy przebadac wrażliwość sił reakcji F_{si} manipulatora na siłowniki (sił masowych siłowników).** Badania te muszą być poprzedzone zdefiniowaniem miary wrażliwości. Miary wrażliwości położenia i orientacji MRP na parametry kinematyki zaproponował autor rozprawy w pracy [78]. Miary wrażliwości sił F_{si} na parametry masowe zaproponował autor rozprawy w pracy [86]. Celem tych badań jest uszeregowanie parametrów modelu, od największego do najmniejszego wpływu ich błędów na odpowiednie parametry ruchu. Innym celem jest wyznaczenie zbioru stanów MRP najbardziej wrażliwych na błędy parametrów. Zbiory stanów, w których położenie i orientacja MRP IRb-6 są najbardziej wrażliwe na błędy parametrów kinematyki, wyznaczył autor rozprawy w pracy [78]. Zbiory stanów, w których siły F_{si} MRP AS, MRP L-1, MRE są najbardziej wrażliwe na błędy parametrów masowych na odpowiednich trajektoriach, zostały wyznaczone przed uproszczeniami modeli robotów w podrozdziale 3.3.

Wartości nominalne parametrów kinematyki możemy otrzymać przez odczyt z rysunków dokumentacji technicznej lub z pomiarów. Można otrzymać je także za pomocą identyfikacji wykorzystującej pomiary optyczne położenia MRP [9,80,81]. Wartości nominalne parametrów masowych możemy otrzymać z obliczeń uwzględniających kształt i rozkład masy elementów składowych MRP (np. za pomocą programu *pseudo* [57]).

Jeśli liczba kalibrowanych parametrów jest zbyt duża, to możemy pominąć błędy parametrów modelu najmniej wpływających na odpowiednie parametry ruchu i przyjąć odpowiadające im współczynniki regresji b_k jako zerowe.

Po tych uproszczeniach powinniśmy:

- a) zdefiniować miarę uwarunkowania zbioru stanów MRP na potrzeby kalibracji parametrów,
- b) wyznaczyć zbiór stanów MRP najlepiej uwarunkowany dla kalibracji parametrów,
- c) przeprowadzić kalibrację parametrów w stanach MRP ze zbioru wyznaczonego w poprzednim punkcie b),
- d) sprawdzić skuteczność kalibracji w stanach najbardziej wrażliwych na błędy modeli ruchu.

Miara uwarunkowania zbioru stanów MRP na potrzeby kalibracji umożliwia wyznaczenie zbioru najlepiej uwarunkowanego. Miarę uwarunkowania zbiorów stanów MRP na potrzeby kalibracji parametrów kinematyki zdefiniował autor rozprawy w pracy [79]. Do obliczenia miary potrzebna jest wrażliwość położenia i orientacji MRP na parametry kinematyki. Na podstawie tej miary wyznaczył zbiór stanów MRP IRb-6 najlepiej uwarunkowany dla kalibracji parametrów kinematyki. Podobnie możemy zdefiniować miarę uwarunkowania zbioru stanów MRP na potrzeby kalibracji parametrów masowych i wyznaczyć zbiór najlepiej uwarunkowany dla kalibracji tych parametrów.

Przy kalibracji parametrów kinematyki z wykorzystaniem formuł stanowiących rozwiązanie zadania prostego kinematyki wielkościami wejściowymi są współrzędne naturalne siłowników $u = q_s = (q_{s1}, \dots, q_{sN})$, a przy kalibracji parametrów masowych współrzędne naturalne siłowników oraz ich prędkości i przyspieszenia $u = (q_s, \dot{q}_s, \ddot{q}_s) = (q_{s1}, \dots, q_{sN}, \dot{q}_{s1}, \dots, \dot{q}_{sN}, \ddot{q}_{s1}, \dots, \ddot{q}_{sN})$. Przy kalibracji parametrów

masowych liczba współrzędnych opisujących wielkości u jest trzykrotnie większa od liczby tych współrzędnych przy kalibracji parametrów kinematyki. Również na ogół liczba parametrów masowych jest znacznie większa od liczby parametrów kinematyki. Dlatego kalibrację parametrów masowych przeprowadza się nie na całej przestrzeni $(q_{s1}, \dots, q_{sN}, \dot{q}_{s1}, \dots, \dot{q}_{sN}, \ddot{q}_{s1}, \dots, \ddot{q}_{sN})$, możliwej do osiągnięcia przez MRP, tylko na zbiorze opisującym wybraną trajektorię ruchu.

7. WNIOSKI KOŃCOWE

Z analiz i badań przedstawionych w rozdziałach 2÷6 wynika następujący podstawowy wniosek końcowy:

Modelowanie i symulacja ruchu złożonych systemów robotów na potrzeby programowania wymaga ścisłej analizy matematycznej zjawisk fizycznych występujących w tych maszynowych systemach.

W rozprawie udowodniono, że modelowanie i symulacja ruchu złożonych układów mechanicznych stanowiących MRP, sterowanych serwomechanizmami ze znaną strukturą, w torach otwartych i zamkniętych - wymaga ścisłego przestrzegania modeli matematycznych MRP.

Wnioski szczegółowe

- Modele matematyczne MRP są bardzo złożone i opisane dużą liczbą parametrów.
- Zaproponowane przez autora rozprawy równania kluczowe umożliwiają opis podprzestrzeni roboczej MRP, prostszy niż w podręczniku [10].
- Równania dynamiki przedstawione w rozprawie pozwalają opisać dynamikę MRP z uwzględnieniem rozkładów mas członów, siłowników i zespołów przekazujących napędy. Umożliwiają opis ruchu wirników siłowników (wraz z elementami przymocowanymi do nich) wokół osi innych niż oś ich obrotu. Równania te można stosować dla dowolnego sposobu napędu, tj. dla bezpośredniego i pośredniego, z siłownikami zamocowanymi w osiach par kinematycznych członów i poza nimi. W literaturze [10,23,37,40,51] pomija się energię związaną z ruchem wirników siłowników (wraz z elementami przymocowanymi do nich) wokół osi innych niż oś ich obrotu.
- Metody uproszczeń modeli matematycznych robotów przedstawione w rozprawie mogą być wykorzystane do przyspieszenia symulacji ruchu. Metody pozwalają racjonalnie upraszczać, tzn. z oceną skutków uproszczeń.
- Te metody uproszczeń umożliwiają określenie numeru wersji uproszczenia modelu, wartości kroku dyskretyzacji czasu i błędy symulacji, przy których symulacja jest szybsza od symulowanego ruchu robota (symulacja *on-line*).
- Przedstawione w rozprawie funkcje regresji mogą być stosowane do kalibracji parametrów modeli MRP.
- Badania wrażliwości poszczególnych parametrów modeli można wykonać za pomocą programów *wrazl*, *swrazlcalc* i *wrazlpar*. Pozwalają one uporządkować parametry od największego do najmniejszego wpływu błędów tych parametrów na wybrane parametry ruchu. Współczynniki regresji parametrów najmniej wpływających można przyjąć zerowe. Zmniejsza to liczbę kalibrowanych parametrów.
- Programy *plan*, *kinodwr*, *optt*, *qs*, *plan2_irb6* oraz modele graficzne umożliwiają planowanie trajektorii w przestrzeni zewnętrznej i symulację ich przyszłej realizacji przez roboty AS, L-1 i eksperymentalny.
- Programy *plan*, *plan2_irb6* i *optt* umożliwiają planowanie trajektorii testujących pozycjonowanie w warunkach ekstremalnych. Trajektorie te są ekstremalne, bo wynikają z ekstremalnych momentów napędowych siłowników między kolejnymi punktami pośrednimi trajektorii. Przy symulacyjnym testowaniu robotów musimy uwzględnić warunek poprawnej szybkości transmisji sygnałów między sterownikiem nadrzędnym i sterownikami podrzędnymi.
- Programy *pseudo*, *szac* i modele graficzne są pomocne przy projektowaniu serwomechanizmów robotów AS, L-1 i eksperymentalnego.

Wnioski ogólne

Biblioteka Symbolic Math Toolbox pozwala automatycznie tworzyć postać analityczną jawną współczynników dynamiki. Niektóre z tych postaci zapisane za pomocą czcionki Courier New 10 pkt. zajmują po około 14 stron A4. Pakiet Simulink jest bardzo wygodnym narzędziem do modelowania i symulacji robotów z uwzględnieniem oddziaływania na siebie ruchu manipulatora, serwomechanizmów, regulatorów prądów siłowników, siłowników i obiektu manipulacji. Zastosowanie rozszerzenia Real Time Workshop (RTW) do modeli graficznych robotów, utworzonych w środowisku programowym Simulinka, umożliwia automatyczne utworzenie kodu źródłowego programów w języku C lub assemblerze różnych procesorów. Mogą to być między innymi procesory sygnałowe kart DSP [32,93] lub Motoroli [35]. Programy symulacji utworzone za pomocą rozszerzenia RTW są znacznie szybsze niż modele graficzne bez tego rozszerzenia i bez bloków typu S-Function Builder. Przykładowo dla robota eksperymentalnego symulacja jest szybsza aż 3624 razy! Redukuje to czasy obliczeń z godzin do sekund. Modele graficzne robotów przedstawione w rozprawie można za pomocą rozszerzenia RTW oraz pakietu Real Time Interface [32] w prosty sposób przekształcić w programy sterowania rzeczywistych robotów AS, L-1 i eksperymentalnego. W miejscu bloku reprezentującego opis matematyczny obiektu rzeczywistego wstawiamy odpowiednie bloki karty DSP, które umożliwiają współpracę programu z obiektem rzeczywistym [32].

UZUPEŁNIENIA

A. Forma liniowa równań dynamiki MRP względem parametrów masowych

Z prac [56,63] wynika następujące równanie MRP z N stopniami swobody:

$$\mathbf{F}_{\text{sw}} = \mathbf{F}_{\text{si}} = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j \frac{\partial \mathbf{q}_j}{\partial \mathbf{q}_{\text{si}}}, \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{F}_j = \sum_{l=1}^N D_{jl} \ddot{\mathbf{q}}_l + \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^N D_{jlk} \dot{\mathbf{q}}_l \dot{\mathbf{q}}_k + D_j, \quad (\text{A.2a})$$

$$D_{jk} = \sum_{p=\max(j,k)}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial \mathbf{q}_j} \mathbf{J}_p \frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial \mathbf{q}_k} \right) + \sum_{p=1}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial \mathbf{q}_j} \mathbf{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial \mathbf{q}_k} \right) + \sum_{p=1}^N \sum_{l=1}^{N_p} \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_{0pl}}{\partial \mathbf{q}_j} \mathbf{J}_{pl} \frac{\partial \mathbf{T}_{0pl}^T}{\partial \mathbf{q}_k} \right), \quad (\text{A.2b})$$

$$D_{jkl} = \sum_{p=\max(j,k,l)}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_p}{\partial \mathbf{q}_k \partial \mathbf{q}_l} \mathbf{J}_p \frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial \mathbf{q}_j} \right) + \sum_{p=j}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial \mathbf{q}_j} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial \mathbf{q}_l} \mathbf{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial \mathbf{q}_k} \mathbf{T}_p^T \right) + \sum_{p=k}^N \left[\text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial \mathbf{q}_k} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial \mathbf{q}_l} \mathbf{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial \mathbf{q}_j} \mathbf{T}_p^T \right) - \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial \mathbf{q}_k} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial \mathbf{q}_j} \mathbf{J}_{sp} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial \mathbf{q}_l} \mathbf{T}_p^T \right) \right] + \sum_{p=1}^N \sum_{m=1}^{N_p} \text{Trace} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_{0pm}}{\partial \mathbf{q}_k \partial \mathbf{q}_l} \mathbf{J}_{pm} \frac{\partial \mathbf{T}_{0pm}^T}{\partial \mathbf{q}_j} \right), \quad (\text{A.2c})$$

$$D_j = - \sum_{p=j}^N m_p \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial \mathbf{q}_j} \bar{\mathbf{r}}_p - \sum_{p=1}^N \sum_{m=1}^{N_p} m_{pm} \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{T}_{0pm}}{\partial \mathbf{q}_j} \bar{\mathbf{r}}_{pme}. \quad (\text{A.2d})$$

N_p jest liczą elementów zespołu przekazującego napęd członu p -tego. \mathbf{T}_p jest macierzą jednorodną opisującą ruch członu p -tego względem bazowego układu współrzędnych, skojarzonego z nieruchomą podstawą MRP. \mathbf{T}_{sp} jest macierzą jednorodną opisującą ruch elementu wykonawczego siłownika p -tego względem członu p -tego. \mathbf{T}_{0pm} jest macierzą jednorodną opisującą ruch elementu m -tego zespołu przekazującego napęd członu p -tego względem układu bazowego. $\bar{\mathbf{r}}_p, \bar{\mathbf{r}}_{pme}$ są postaciami jednorodnymi odpowiednio wektora położenia opisującego środek masy członu p -tego względem układu współrzędnych tego członu oraz wektora położenia opisującego środek masy elementu m -tego zespołu przekazującego napęd członu p -tego względem układu współrzędnych skojarzonego z tym elementem. $\bar{\mathbf{r}}_p, \bar{\mathbf{r}}_{pme}$ są macierzami jednokolumnowymi czterowierszowymi. m_j, m_{pm} są odpowiednio masą członu j -tego i elementu m -tego zespołu przekazującego napęd członu p -tego.

$$\mathbf{g} = [g_x, g_y, g_z, 0]^T. \quad (\text{A.3})$$

W formule (A.3) kolejne elementy macierzy \mathbf{g} są współrzędnymi przyspieszenia grawitacji w układzie bazowym, skojarzonym z nieruchomą podstawą MRP. $\mathbf{J}_p, \mathbf{J}_{pm}$ są macierzami pseudobezwładności odpowiednio członu p -tego i elementu m -tego zespołu przekazującego napęd członu p -tego. Macierze te obliczane są w układach współrzędnych skojarzonych

z tym członem oraz z tym elementem. \mathbf{J}_{sp} jest macierzą pseudobezwładności elementu wykonawczego siłownika p -tego, obliczoną względem układu współrzędnych skojarzonego z tym elementem. Macierze te mają następującą postać:

$$\mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} I_{pxx} & I_{pyx} & I_{pzx} & m_p \bar{x}_p \\ I_{pxy} & I_{pyy} & I_{pzy} & m_p \bar{y}_p \\ I_{pxz} & I_{pyz} & I_{pzz} & m_p \bar{z}_p \\ m_p \bar{x}_p & m_p \bar{y}_p & m_p \bar{z}_p & m_p \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Elementy tej macierzy zdefiniowane są w komentarzu do formuły (6.10c). Podobną strukturę ma macierz \mathbf{J}_{pm} . q_j są współrzędnymi naturalnymi członów zależnymi od współrzędnych naturalnych siłowników q_{si} . F_j to siła lub moment oddziaływania członu $j-1$ na człon j -ty, wzdłuż osi z_{j-1} układu współrzędnych, skojarzonego z członem $j-1$ -szym, zgodnie z zapisem Hartenberga-Denavita. F_j zależą od wypadkowych sił napędowych siłowników F_{siw} , opisanych przez formułę (2.68a). F_{siw} są równe siłom F_{si} , opisanym przez formułę (2.61). Jeśli człony $j-1$ -szy i j -ty łączy para obrotowa, to F_j jest momentem obrotowym; jeśli człony te łączy para przesuwna, to F_j jest siłą. Podobnie jest dla F_{si} i F_{siw} .

Z formuł (A.1) i (A.2) wynika

$$F_{si} = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{\partial q_j}{\partial q_{si}} D_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \frac{\partial q_j}{\partial q_{si}} D_{jkl} \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{j=1}^N \frac{\partial q_j}{\partial q_{si}} D_j, \quad (\text{A.5})$$

Łatwo wykazać, że [107]

$$\text{Trace}(\mathbf{AB}) = \text{Trace}(\mathbf{BA}) \text{ dla } \dim \mathbf{A} = n \times m \text{ i } \dim \mathbf{B} = m \times n. \quad (\text{A.6})$$

Pochodne

$$\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j} = \mathbf{0} \text{ dla } j > p. \quad (\text{A.7})$$

Dlatego w formułach (A.2b)÷(A.2d) dolne granice wskaźników j oraz k sum składników zawierających pochodne $\partial \mathbf{T}_p / \partial q_j$ oraz $\partial^2 \mathbf{T}_p / \partial q_j \partial q_k$ mogą być jedynkami. Składniki występujące w formule (A.2d) możemy przekształcić jak poniżej [107].

$$\sum_{p=j}^N m_p \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j} \bar{\mathbf{r}}_p = \sum_{p=j}^N \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j} m_p \bar{\mathbf{r}}_p = \sum_{p=j}^N \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j} \mathbf{J}_p [0,0,0,1]^T. \quad (\text{A.8})$$

Z pracy [56] (formuła 1.19) wynika, że dla dwóch macierzy jednokolumnowych czterowierszowych \mathbf{r}_1 i \mathbf{r}_2 słuszna jest następująca zależność:

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_2 - w_1 w_2 = \text{Trace}(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2^T) - w_1 w_2, \quad (\text{A.9})$$

W formule (A.9) w_1 i w_2 są czwartymi wierszami macierzy \mathbf{r}_1 i \mathbf{r}_2 . Jeśli przyjmiemy $\mathbf{r}_1 = \mathbf{g}$ z formuły (A.3), to $w_1 = 0$. Przyjmijmy

$$\mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j} \mathbf{J}_p [0,0,0,1]^T. \quad (\text{A.10})$$

Wykorzystując zależności (A.6), (A.9) i (A.10) możemy wyrazy sumy (A.8) przekształcić do postaci

$$\begin{aligned} \sum_{p=j}^N \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j} \mathbf{J}_p [0,0,0,1]^T &= \sum_{p=j}^N \text{Trace} \left\{ \mathbf{g} [0,0,0,1] \mathbf{J}_p \frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_j} \right\} \\ &= \sum_{p=j}^N \text{Trace} \left\{ \frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_j} \mathbf{g} [0,0,0,1] \mathbf{J}_p \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Tak samo można przekształcić drugą sumę w formule (A.2d), pochodzącą od mas m_{pm} . Po przegrupowaniu wykorzystującym formuły (A.6), (A.7) i (A.10) otrzymamy nowe wyrażenia na współczynniki równania (A.2a).

$$\begin{aligned} D_{jk} &= \sum_{p=1}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_k} \frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j} \mathbf{J}_p \right) + \sum_{p=1}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_k} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_j} \mathbf{J}_{sp} \right) \\ &+ \sum_{p=1}^N \sum_{m=1}^{N_p} \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_{0pm}^T}{\partial q_k} \frac{\partial \mathbf{T}_{0pm}}{\partial q_j} \mathbf{J}_{pm} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} D_{jkl} &= \sum_{p=1}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_j} \frac{\partial^2 \mathbf{T}_p}{\partial q_k \partial q_l} \mathbf{J}_p \right) + \sum_{p=1}^N \text{Trace} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_k} \mathbf{T}_p^T \frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_l} \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_j} \mathbf{T}_p^T \frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_k} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_l} - \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}^T}{\partial q_l} \mathbf{T}_p^T \frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_k} \frac{\partial \mathbf{T}_{sp}}{\partial q_j} \right) \mathbf{J}_{sp} \right\} + \sum_{p=1}^N \sum_{m=1}^{N_p} \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_{0pm}^T}{\partial q_j} \frac{\partial^2 \mathbf{T}_{0pm}}{\partial q_k \partial q_l} \mathbf{J}_{pm} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$D_j = - \sum_{p=1}^N \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_j} \mathbf{g} [0,0,0,1] \mathbf{J}_p \right) - \sum_{p=1}^N \sum_{m=1}^{N_p} \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_{0pm}^T}{\partial q_j} \mathbf{g} [0,0,0,1] \mathbf{J}_{pm} \right). \quad (\text{A.14})$$

Z formuł (A.12)÷(A.13) wynika następujące wyrażenie na siły F_{si}

$$F_{si} = \sum_{p=1}^N \text{Trace} (\mathbf{E}_{ip}^{(1)} \mathbf{J}_p + \mathbf{E}_{ip}^{(2)} \mathbf{J}_{sp} + \sum_{m=1}^{N_p} \mathbf{E}_{ipm} \mathbf{J}_{pm}). \quad (\text{A.15})$$

Z formuł (A.12)÷(A.14) wynika wyrażenie na macierze $\mathbf{E}_p^{(1)}$ jak poniżej.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{ip}^{(1)} &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \ddot{q}_k \frac{\partial q_j}{\partial q_{si}} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_k} \frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j} \right) + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \dot{q}_k \dot{q}_l \frac{\partial q_j}{\partial q_{si}} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_k} \frac{\partial^2 \mathbf{T}_p}{\partial q_l \partial q_j} \right) \\ &- \sum_{j=1}^N \frac{\partial q_j}{\partial q_{si}} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_j} \mathbf{g} [0,0,0,1] \right). \end{aligned}$$

Po zamianie w pierwszym składniku indeksu k na j oraz j na k otrzymamy

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{ip}^{(1)} &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \ddot{q}_j \frac{\partial q_k}{\partial q_{si}} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_k} \right) + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \dot{q}_k \dot{q}_l \frac{\partial q_j}{\partial q_{si}} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_k} \frac{\partial^2 \mathbf{T}_p}{\partial q_l \partial q_j} \right) \\ &- \sum_{j=1}^N \frac{\partial q_j}{\partial q_{si}} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_j} \mathbf{g} [0,0,0,1] \right). \end{aligned}$$

Stąd

$$\mathbf{E}_{ip}^{(1)} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_j} \left\{ \sum_{k=1}^N \left(\ddot{q}_j \frac{\partial q_k}{\partial q_{si}} \frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_k} + \sum_{l=1}^N \dot{q}_k \dot{q}_l \frac{\partial q_j}{\partial q_{si}} \frac{\partial^2 \mathbf{T}_p}{\partial q_k \partial q_l} \right) - \frac{\partial q_j}{\partial q_{si}} \mathbf{g} [0,0,0,1] \right\}, \quad (\text{A.16})$$

Z formuł (A.12)÷(A.14) wynika wyrażenie na macierze $\mathbf{E}_{ip}^{(2)}$ jak poniżej.

Do tworzenia funkcji regresji (6.12) potrzebny jest opis macierzy K_i za pomocą jej kolejnych elementów K_{ij} . Elementy te można wyrazić za pomocą wyrazów K_{ijr} , jak w formułach (A22)÷(A24). Indeksy j oraz r zależą od indeksu l kolejnego elementu K_{il} jak poniżej.

Dla $1 \leq l \leq 10N$ słuszne są nierówności $10(j-1)+1 \leq l \leq 10j$, które pozwalają wyznaczyć $j \in [1, N]$. Następnie obliczamy $r = l - 10(j-1)$, gdzie $1 \leq r \leq 10$. Dla takich indeksów j oraz r otrzymujemy

$$\begin{aligned} K_{ij1} &= (E_{ij}^{(1)})_{44}, \\ K_{ij2} &= (E_{ij}^{(1)})_{14} + (E_{ij}^{(1)})_{41}, \\ K_{ij3} &= (E_{ij}^{(1)})_{24} + (E_{ij}^{(1)})_{42}, \\ K_{ij4} &= (E_{ij}^{(1)})_{34} + (E_{ij}^{(1)})_{43}, \\ K_{ij5} &= (E_{ij}^{(1)})_{11}, \\ K_{ij6} &= (E_{ij}^{(1)})_{22}, \\ K_{ij7} &= (E_{ij}^{(1)})_{33}, \\ K_{ij8} &= (E_{ij}^{(1)})_{12} + (E_{ij}^{(1)})_{21}, \\ K_{ij9} &= (E_{ij}^{(1)})_{23} + (E_{ij}^{(1)})_{32}, \\ K_{ij10} &= (E_{ij}^{(1)})_{13} + (E_{ij}^{(1)})_{31}. \end{aligned} \quad (A.22)$$

Dla $10N+1 \leq l \leq 20N$ ważne są nierówności $10(j+N-1)+1 \leq l \leq 10(j+N)$, które pozwalają wyznaczyć $j \in [1, N]$ i $r = l - 10(N+j-1)$, gdzie $1 \leq r \leq 10$. Dla takich indeksów j oraz r otrzymujemy

$$\begin{aligned} K_{ij1} &= (E_{ij}^{(2)})_{44}, \\ K_{ij2} &= (E_{ij}^{(2)})_{14} + (E_{ij}^{(2)})_{41}, \\ K_{ij3} &= (E_{ij}^{(2)})_{24} + (E_{ij}^{(2)})_{42}, \\ K_{ij4} &= (E_{ij}^{(2)})_{34} + (E_{ij}^{(2)})_{43}, \\ K_{ij5} &= (E_{ij}^{(2)})_{11}, \\ K_{ij6} &= (E_{ij}^{(2)})_{22}, \\ K_{ij7} &= (E_{ij}^{(2)})_{33}, \\ K_{ij8} &= (E_{ij}^{(2)})_{12} + (E_{ij}^{(2)})_{21}, \\ K_{ij9} &= (E_{ij}^{(2)})_{23} + (E_{ij}^{(2)})_{32}, \\ K_{ij10} &= (E_{ij}^{(2)})_{13} + (E_{ij}^{(2)})_{31}. \end{aligned} \quad (A.23)$$

Dla nierówności $10(2N + \sum_{k=1}^{p-1} N_k) + 1 \leq l \leq 10(2N + \sum_{k=1}^p N_k)$ obliczamy $p \in [1, N]$. Dla

tego indeksu są ważne nierówności $2N+1 + \sum_{k=1}^{p-1} N_k \leq j \leq 2N + \sum_{k=1}^p N_k$. Z nierówności tych

wyznaczamy indeks j . Dla tych indeksów j oraz p obliczamy indeks $m = j - 2N - \sum_{k=1}^{p-1} N_k$.

Dla tych indeksów l, m oraz p obliczamy indeks $r = l - 10(2N + m - 1 + \sum_{k=1}^{p-1} N_k)$, gdzie

$1 \leq r \leq 10$. Dla tych indeksów p oraz m otrzymujemy

$$\begin{aligned} K_{ij1} &= (E_{ipm})_{44}, \\ K_{ij2} &= (E_{ipm})_{14} + (E_{ipm})_{41}, \\ K_{ij3} &= (E_{ipm})_{24} + (E_{ipm})_{42}, \\ K_{ij4} &= (E_{ipm})_{34} + (E_{ipm})_{43}, \\ K_{ij5} &= (E_{ipm})_{11}, \\ K_{ij6} &= (E_{ipm})_{22}, \\ K_{ij7} &= (E_{ipm})_{33}, \\ K_{ij8} &= (E_{ipm})_{12} + (E_{ipm})_{21}, \\ K_{ij9} &= (E_{ipm})_{23} + (E_{ipm})_{32}, \\ K_{ij10} &= (E_{ipm})_{13} + (E_{ipm})_{31}. \end{aligned} \quad (A.24)$$

B. Wykaz ważniejszych programów komputerowych

Wymienimy tu ważniejsze programy komputerowe z krótkimi charakterystykami, stosowane do badań zamieszczonych w rozprawie. Są to programy napisane przez autora rozprawy.

Program obliczeń numerycznych *pseudo*, napisany w języku C, oblicza elementy macierzy pseudobezwładności. Był zastosowany do obliczeń macierzy pseudobezwładności członów i siłowników robotów L-1 i eksperymentalnego.

Pozostałe programy pogrupujemy na programy obliczeń symbolicznych i numerycznych dla robotów AS, L-1 i eksperymentalnego. Programy zostały napisane w MATLAB-ie i języku C lub tylko w MATLAB-ie. Programy napisane w języku C mają obok nazwy nawias z literą C. Obok obliczanych wyrażeń umieszczono nawiasy z informacjami. Informacjami są numery formuł, rozdziałów bądź rysunków.

B.1. Programy dla robota AS

B.1.1. Programy obliczeń symbolicznych

A - wyznacza macierze A_i (3.1).

B - wyznacza macierze B_i (3.8).

C - wyznacza macierze C_i (3.8).

T - wyznacza macierze T_i (2.1).

DT - wyznacza macierze $\frac{\partial T_p}{\partial \Theta_j}$ (3.9).

D2T - wyznacza macierze $\frac{\partial^2 T_p}{\partial \Theta_j \partial \Theta_k}$ (3.10), (3.11).

Jakobian66 - wyznacza macierz 6J_6 (3.5).

JC - wyznacza macierze pseudobezwładności członów J_p (2.56), (2.57).

Job - wyznacza macierz pseudobezwładności obiektu manipulacji.

DI - wyznacza współczynniki D_i (2.58).

DIJ - wyznacza współczynniki D_{ij} (2.56).

DIJK - wyznacza współczynniki D_{ijk} (2.57).

B.1.2. Programy obliczeń numerycznych

kinodwr - oblicza iteracyjnie zadanie odwrotne kinematyki (podrozdział 3.1.1).

optt - oblicza minimalne czasy ruchu między kolejnymi punktami pośrednimi trajektorii, przy ekstremalnych momentach napędowych siłowników.

plan - planuje trajektorię prostoliniową z liniowo zmieniającą się orientacją elementu wykonawczego w przestrzeni zewnętrznej.

moje_przysp (C) - oblicza zadanie proste dynamiki (2.84).

m_simpl1÷6 (C) - symulują impulsatory w regulatorach prądu siłowników (rys. 3.7).

moj_tarcie (C) - oblicza momenty tarcia i wypadkowe siły napędowe siłowników F_{siw} (2.68a).

nastawy - oblicza nastawy regulatorów serwomechanizmów.

swrazlcalc - oblicza wrażliwość S_g [86] sił F_{si} na błędy 60 parametrów masowych (podrozdział 3.4).

szacow - oblicza minimalne i maksymalne wartości współczynników D_{sit} (2.56).

wrazlpar - oblicza wrażliwości parametryczne S_k [86] oraz iloczyny $(S_k)^{1/2} p_k$ (podrozdział 3.4).

B.2. Programy dla robota L-1

B.2.1. Programy obliczeń symbolicznych

A - wyznacza macierze A_i (4.1).

T - wyznacza macierze T_i (2.1).

DT - wyznacza macierze $\frac{\partial T_p}{\partial q_j}$ (2.56)÷(2.58).

DTS - wyznacza macierze $\frac{\partial T_{sp}}{\partial q_j}$ z formuł (4.9)÷(4.14).

D2T - wyznacza macierze $\frac{\partial^2 T_p}{\partial q_j \partial q_k}$ (2.57).

DT051 - wyznacza macierze $\frac{\partial T_{051}}{\partial q_j}$ elementu piątego zespołu napędowego z formuły (4.15).

DT062 - wyznacza macierze $\frac{\partial T_{062}}{\partial q_j}$ elementu szóstego zespołu napędowego z formuły (4.16).

D2T051 - wyznacza macierze $\frac{\partial^2 T_{051}}{\partial q_j \partial q_k}$ elementu piątego zespołu napędowego z formuły (4.15).

D2T062 - wyznacza macierze $\frac{\partial^2 T_{062}}{\partial q_j \partial q_k}$ elementu szóstego zespołu napędowego z formuły (4.16).

dqdq_s - wyznacza pochodne $\partial \Theta_i / \partial \Theta_{sj}$ z formuł (4.7).

Jakobian66 - wyznacza macierz 6J_6 (4.5).

JC - wyznacza macierze pseudobezwładności członów J_p (2.56), (2.57).

JS - wyznacza macierze pseudobezwładności siłowników J_{sp} (2.56), (2.57).

Job - wyznacza macierz pseudobezwładności obiektu manipulacji.

J51 - wyznacza macierz pseudobezwładności elementu piątego zespołu napędowego (podrozdział 4.1.2).

J62 - wyznacza macierz pseudobezwładności elementu szóstego zespołu napędowego (podrozdział 4.1.2).

DSI - wyznacza współczynniki D_{si} (2.61).

DSIJ - wyznacza współczynniki D_{sij} (2.61).

DSIJK - wyznacza współczynniki D_{sijk} (2.61).

B.2.2. Programy obliczeń numerycznych

Kinodwr - oblicza zadanie odwrotne kinematyki (4.4).

Plan - planuje trajektorię prostoliniową z liniowo zmieniającą się orientacją elementu wykonawczego w przestrzeni zewnętrznej.

moj_sd2qsdt2 (C) - oblicza zadanie proste dynamiki (2.84).

moj_tarcie (C) - oblicza momenty tarcia i wypadkowe siły napędowe siłowników F_{siw} (2.68a).

moje_sqc (C) - oblicza współrzędne naturalne członów (rys. 4.3).

swrazlcalk - oblicza wrażliwość S_g [86] sił F_{si} na błędy 140 parametrów masowych (podrozdział 4.4).

szacow - oblicza minimalne i maksymalne wartości współczynników D_{sij} (2.61).

moj_szadl÷6 (C) - symulują sterowanie silników skokowych (rys. 4.5).

wrazlpar - oblicza wrażliwości parametryczne S_k [86] oraz iloczyny $(S_k)^{1/2} p_k$ (podrozdz.4.4).

B.3. Programy dla robota eksperymentalnego

B.3.1. Programy obliczeń symbolicznych

A - wyznacza macierze A_i (5.2), (5.30).

T - wyznacza macierze T_i (2.1).

T031 - wyznacza macierz T_{031} (5.28).

DT - wyznacza macierze $\frac{\partial T_p}{\partial q_j}$ (2.56)÷(2.58).

DT031 - wyznacza macierze $\frac{\partial T_{031}}{\partial q_j}$ z formuły (5.28).

DTS - wyznacza macierze $\frac{\partial T_{sp}}{\partial q_j}$ z formuł (5.23) ÷ (5.27) i (5.42).

D2T - wyznacza macierze $\frac{\partial^2 T_p}{\partial q_j \partial q_k}$ (2.57).

D2T031 - wyznacza macierze $\frac{\partial^2 T_{031}}{\partial q_j \partial q_k}$ z formuły (5.28).

dqdq - wyznacza pochodne $\partial \Theta_i / \partial \Theta_{sj}$ z formuł (5.21) i (5.40).

Jakobian - wyznacza macierz 5J_5 (5.38).

JC - wyznacza macierze pseudobezwładności członów J_p (2.56), (2.57).

JS - wyznacza macierze pseudobezwładności siłowników J_{sp} (2.56), (2.57).

Job - wyznacza macierz pseudobezwładności obiektu manipulacji.

J31 - wyznacza macierz pseudobezwładności elementu równoważającego trzeci człon (podrozdz. 5.1.2, 5.2.2).

B.3.2. Programy obliczeń numerycznych

plan2_irb6 (napisany tylko w języku C) - planuje trajektorie w przestrzeni zewnętrznej, zaimplementowany na sterowniku nadrzędnym robota eksperymentalnego.

optt - oblicza minimalne czasy ruchu między kolejnymi punktami pośrednimi trajektorii, przy ekstremalnych momentach napędowych siłowników.

moje_przysp (C) - oblicza zadanie proste dynamiki (2.84).

m_simp0÷5 (C) - symulują impulsatory w regulatorach prądu siłowników (rys. 5.10).

m_sintqc (C) - oblicza współrzędne naturalne członów za pomocą interpolacji (rys. 5.6).

m_tarcie (C) - oblicza momenty tarcia i wypadkowe siły napędowe siłowników F_{siw} (2.68a).

swrazlcalk - oblicza wrażliwość S_g [86] sił F_{si} na błędy 130 parametrów masowych (podrozdz.5.5).

m_zadaj0÷5 (C) - symulują zadajniki sterowników podrzędnych robota eksperymentalnego (rys. 5.8).

wrazlpar - oblicza wrażliwości parametryczne S_k [86] oraz iloczyny $(S_k)^{1/2} p_k$ (podrozdz.5.5).

C. Postać analityczna jawna przykładowego współczynnika dynamiki

Przedstawiono tu postać analityczną jawną (closed form) przykładowego współczynnika dynamiki. Postacie jawne współczynników dynamiki D_{sij} , D_{sijk} , D_{si} występujących w formułach (2.61), (2.82) i (2.83) otrzymano za pomocą programów obliczeń symbolicznych *DSI*, *DSIJ*, *DSIJK*. Programy te wymieniono w uzupełnieniu B. Postacie współczynników są bardzo złożone i do ich zapisu potrzebnych jest kilka lub nawet kilkanaście stron. Złożoność współczynników dynamiki manipulatora Puma pokazuje praca [38]. Dla porównania złożoności współczynników dynamiki manipulatorów AS, L-1 i eksperymentalnego zapisano je w zbiorach czcionką Courier New 10 pkt. z pojedynczym odstępem między wierszami. Tabela C1 przedstawia „liczbę stron” tak zapisanych najbardziej złożonych (najdłuższych) współczynników D_{sij} , D_{sijk} , D_{si} .

Tabela C1

Najdłuższe współczynniki dynamiki

Manipulator	D_{sij}	D_{sijk}	D_{si}
AS	D_{s11} , 4 strony	D_{s121} , 4 strony	D_{s2} , 13 wierszy
L-1	D_{s44} , 32 wiersze	D_{s454} , 14 stron	D_{s4} , 4 wiersze
eksperymentalny	D_{s44} , 41 wierszy	D_{s411} , 26 wierszy	D_{s4} , 3 wiersze

Z tabeli C1 wynika, że najbardziej złożonym jest współczynnik D_{s454} , zajmujący aż 14 stron. Poniżej przedstawimy jako przykładowy współczynnik D_{s44} robota eksperymentalnego.

$DS44=dq4dqs4^2*S234^2*Iobzz+dq4dqs4^2*S234^2*1a5^2*m5+dq4dqs4^2*S234^2*I5zz+2*dq4dqs4^2*C234^2*1a5*I5sz+2*dq4dqs4^2*C234^2*1a5*Iobsz+2*dq4dqs4^2*S234^2*1a5*Iobsz+2*dq4dqs4^2*S234^2*1a5*I5sz-2*dq5dqs5^2*Iobxy*S5^2+C5+dq5dqs5^2*Iobxx*C5^2+dq4dqs4^2*S234^2*1a5^2*mob+2*dq4dqs4^2*C234^2*I5zz+2*dq5dqs5^2*Iobyy*S234^2*C5^2+dq4dqs4^2*df5^2*Sf5^2*Is5xx+2*dq4dqs4^2*C234^2*I4xx+2*dq4dqs4^2*C234^2*C5^2*I5xx+2*dq4dqs4^2*S234^2*I4zz+2*dq4dqs4^2*C234^2*C5^2*Iobxx+2*dq4dqs4^2*C234^2*Iobzz+2*dq4dqs4^2*C234^2*I4zz+2*dq5dqs5^2*I5yy+S234^2*C5^2+dq4dqs4^2*S234^2*I4xx+2*dq4dqs4^2*S234^2*C5^2*I5xx+2*dq5dqs5^2*C234^2*C5^2*Iobyy+2*dq5dqs5^2*I5xx+C5^2+2*dq4dqs4*dq5dqs5*S234^2*1a5*Iobsx+S5+2*dq4dqs4*dq5dqs5*S234^2*1a5*Iobsy+C5+2*dq5dqs5^2*C234^2*S5^2*C5*Iobxy+2*dq4dqs4*dq5dqs5*C234^2*C5^2*Iobyz+2*dq4dqs4*dq5dqs5*C234^2*S5^2*Iobxz-2*dq4dqs4^2*S234^2*S5^2*C5*Iobxy-2*dq4dqs4^2*C234^2*C5^2*S5^2*Iobxy+2*dq4dqs4*dq5dqs5*S234^2*Iobxz+S5+2*dq4dqs4*dq5dqs5*S234^2*Iobyz+C5+2*dq5dqs5^2*Iobxy+S234^2*C5^2*S5+2*dq4dqs4^2*1a5^2*mob+2*dq4dqs4^2*ms4*143^2*S4^2+dq4dqs4^2*ms5*153^2*S4^2+dq5dqs5^2*k4^2*k5^2*Sf5^2*Is5xx+2*dq5dqs5^2*k4^2*k5^2*Cf5^2*Is5yy+2*dq4dqs4^2*df5^2*Cf5^2*Is5yy+dq5dqs5^2*C234^2*C5^2*I5yy+2*dq4dqs4^2*S234^2*C5^2*Iobxx+2*dq4dqs4^2*ms4*143^2*C4^2+2*dq4dqs4*dq5dqs5*S234^2*S5^2*1a5*Iobsx+2*dq4dqs4*dq5dqs5*C234^2*C5^2*1a5*Iobsy-2*dq4dqs4^2*ms4*142^2*C34^2*143^2*S4-2*dq4dqs4^2*ms5*152^2*C34^2*153^2*S4+2*dq4dqs4^2*ms4*142^2*S34*143^2*C4+dq4dqs4^2*S234^2*Iobyy+2*dq4dqs4^2*C234^2*Iobyy+2*dq4dqs4^2*S234^2*I5yy+2*dq4dqs4^2*C234^2*I5yy+2*dq5dqs5^2*C234^2*Iobxx+2*dq5dqs5^2*Iobxx+S234^2+dq5dqs5^2*I5xx*S234^2+dq4dqs4^2*ms5*152^2+dq4dqs4^2*C234^2*1a5^2*m5-2*dq5dqs5^2*Is5sz*1a52-dq5dqs5^2*I5yy*C5^2-dq5dqs5^2*Iobyy*C5^2-2*dq4dqs4*dq5dqs5*k4*k5*Cf5^2*Is5yy+2*dq4dqs4^2*ms4*142^2-2*dq4dqs4*dq5dqs5*k4*k5*Sf5^2*Is5xx+2*dq4dqs4^2*df4^2*Is4xx+2*dq4dqs4^2*df4^2*Is4yy+2*dq5dqs5^2*ms5*1a52^2+dq5dqs5^2*Is5yy+Cf5^2+dq5dqs5^2*Is5xx+Sf5^2+dq5dqs5^2*Is5zz+2*dq4dqs4*dq5dqs5*ms5*153^2*C4*1a51+2*dq4dqs4*dq5dqs5*ms5*152^2*S34*1a52+2*dq5dqs5^2*ms5*1a51*1a52-2*dq5dqs5^2*Is5sz*1a51+dq5dqs5^2*ms5*1a51^2-dq4dqs4^2*S234^2*Iobyy*C5^2-$

$$dq4dqs4^2*C234^2*Iobyy*C5^2-dq4dqs4^2*S234^2*I5yy*C5^2-dq4dqs4^2*C234^2*I5yy*C5^2-dq5dqs5^2*C234^2*Iobxx*C5^2-dq5dqs5^2*Iobxx*S234^2*C5^2-dq5dqs5^2*I5xx*S234^2*C5^2-dq5dqs5^2*C234^2*I5xx*C5^2+dq5dqs5^2*Iobyy+2*dq4dqs4^2*df5^2*Sf5^2*Is5yy+2*dq5dqs5^2*C234^2*I5xx+C5^2+dq5dqs5^2*Is5xx+2*dq5dqs5^2*Is5yy*k4^2*k5^2*Sf5^2+dq5dqs5^2*I5yy+2*dq5dqs5^2*ms5*153^2*S4^2+dq5dqs5^2*Is5xx*k4^2*k5^2*Cf5^2+dq4dqs4^2*ms5*153^2*C4^2+dq5dqs5^2*C234^2*I5xx+2*dq4dqs4*dq5dqs5*ms5*153^2*C4*1a52-2*dq4dqs4*dq5dqs5*Is5yy+2*dq5dqs5^2*Sf5^2*k4*k5-2*dq5dqs5^2*ms5*153^2*S4*152^2*C34-2*dq4dqs4*dq5dqs5*Is5sz*152^2*S34-2*dq4dqs4*dq5dqs5*Is5xx+2*dq5dqs5^2*k4*k5+2*dq4dqs4*dq5dqs5*ms5*152^2*S34*1a51-2*dq4dqs4*dq5dqs5*Is5sz*153^2*C4+2*dq4dqs4^2*ms5*152^2*S34*153^2*C4;$$

(C1)

W formule (C1) wielkości $dq4dqs4$ odpowiadają pochodnym $\partial\Theta_i/\partial\Theta_{sj}$, k_i - przelazom k_i występującym w formułach (5.21) i (5.40), S_i -sin Θ_i , C_i -cos Θ_i , S_{ij} - sin $(\Theta_i + \Theta_j)$ itp. Wielkości m_i odpowiadają masom członów m_i , I_{ixx} -elementom macierzy pseudobezwładności I_{ixx} itp. Wielkości I_{obxx} odpowiadają elementom macierzy pseudobezwładności obiektu manipulacji I_{obxx} itp., l_{s2} - parametrowi l_{s2} występującemu w opisie kinematyki siłowników w formule (5.27). Podobnie wielkości w formule (C1) odpowiadają pozostałym parametrom kinematyki w formułach (5.23)-(5.27), (5.42). $Ss2$, $Cs2$, $Cf2$, $Sf2$, $df2$, $las2$, $dls2$, $ds3$, $Ss3$, $Sf3$, $df3$, $Cs3$, $Cf3$, $dls3$, $las3$, $Sf4$, $Cf4$, $Cf5$ i $Sf5$ to wielkości pomocnicze, obliczone przed obliczaniem współczynników dynamiki.

LITERATURA

1. Andre P., Kaufmann J.M., Lhote F., Taillard J.P.: Les Robots t.4. Constituansts Technologiques, Hermes Publ., France 1983 (tłum w jęz. ros.).
2. Asada H., Kanade T., Takeyama I.: Control of a Direct-Drive Arm. Journ. of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol. 105, pp.136-142, Sept. 1983.
3. Baluch M.: Parametry kinematyki manipulatora L-1. Praca dypl. Instytut Automatyki Pol.Śl., Gliwice 1994.
4. Baraniec T.: Planowanie trajektorii minimalnoczasowych z dowolną kinematyką dla robota IRb-6. Praca dypl. Instytut Automatyki Pol. Śl., Gliwice 1991.
5. Bennett D.J., Hollerbach J.M.: Autonomous Calibration of Single Loop Closed Kinematic Chains Formed by Manipulators with Passive Endpoint Constraints. IEEE Trans. Robotics Automat., vol. RA-7, no.5, pp.597-606, 1991.
6. Borm J.H., Menq C.H.: Experimental Study of Observability of Parameter Errors in Robot Calibration. Proc. Intern. Conf. on Robotics and Automation, vol. 1, pp. 587-592, IEEE, 1989.
7. Borm J.H., Menq C.H.: Determination of Optimal Measurement Configurations for Robot Calibration Based on Observability Measure. Int. J. Robotics Res., vol. 10, no. 1, pp. 51- 63 , 1991.
8. Buchacz A., Pasek M., Wojnarowski J.: Hipergrafy jako modele maszyn roboczych. Problemy Maszyn Roboczych. Komitet Budowy Maszyn PAN. Z.5, vol.5, Warszawa 1995.
9. Buško Z, Frączek J.: Kalibracja układu wieloobrotowego z zastosowaniem teodolitów elektronicznych. Materiały Konf. Nauk.-Techn. AUTOMATION'97, t.2 s.413-419, Warszawa 1997.
10. Craig J.J.: Wprowadzenie do robotyki (tłum. z angielskiego). WNT, Warszawa 1993.
11. Davies B.R., Red W.E., Lawson J.S.: The local calibration method for robot inaccuracy compensation. J. Robotics Res., vol. 7, no. 6, pp. 833-864, 1990.
12. Dutkiewicz P., Kozłowski K., Wróblewski W.: Eksperymentalna identyfikacja parametrów dynamicznych robota IRp-6. Materiały IV K. K. Robotyki, t. 1, s. 77-84, Wrocław 1993.
13. Dutkiewicz P., Kozłowski K.: Identification of Robot Dynamics with Exciting Trajectories. Proc. Int. Symp. MMAR'94, pp. 368-372, Międzyzdroje 1994.
14. Findeisen W.: Poradnik inżyniera automatyka, WNT, Warszawa 1973.
15. Gajerska K. Modele ruchu manipulatora L-1. Praca dypl. Instytut Automatyki Pol. Śl., Gliwice 1995.
16. Gantmacher F.: Lectures in Analitical Mechanics. MIR Publ., Moscow 1970.
17. Goswami A., Quaid A., Peshkin M.: Complete Parameter Identification of Robot from Artrial Pose Information, Proc. Intern. Conf. on Robotics and Automation, vol. 1, pp. 68-173, IEEE, 1992.
18. Heller A. : Kalibracja parametrów kinematyki robota eksperymentalnego. Praca dypl. Instytut Automatyki Pol.Śl., Gliwice 2000.
19. Hollerbach J.M., A Review of Kinematic Calibration, The Robotics Review1, Khatib O., Lozano-Perez T., Eds. MIT Press, Cambridge, MA, 1989, pp.207-242.
20. Hollerbach J.M., Lokhorst D.M.: Closed-Loop Kinematic Calibration of the Rsi 6-DOF Hand Controller. Proc. of Int. Conf. on Robotics and Automation, vol. 2, pp. 142-148, IEEE, 1992.
21. Irzeński W., Trybus L.: Fixed Gain PID Class Servo for Industrial Robots. Archives of Control Science, vol.1, No. 3-4, Warsaw 1992.
22. Khalil W., Gautier M., Enguehard C.: Identifiable Parameters and Optimum Configurations for Calibration. Robotica, vol. 9, pp.63-70, 1991.
23. Khalil W., Dombre E.: Modelling, Identification & Control of Robots. Hermes Penton Science, London 2002.
24. Koch J., Chlebus E., Koch T.: Automatyzacja w technikach wytwarzania, Materiały IV K.K.Robotyki, t.2, s. 9-34, Wrocław 1993.
25. Kowalowski H.: Maszyny i napęd elektryczny. PWN, Warszawa 1983.
26. Kowalowski H.: Automatyzacja dyskretnych procesów przemysłowych. WNT, Warszawa 1984.
27. Kozielski S., Szczerbiński Z.: Komputery równoległe. Architektura, elementy programowania. WNT, Warszawa 1993.
28. Kozłowski K., Dutkiewicz P.: An Experimental Study on a One Link Geared Robot. Proc. Int. Symp. MMAR'95, pp. 585-590, Międzyzdroje 1995.
29. Kozłowski K.: Selected Algorithms for Parallel Computations of Robot Dynamics. Proc. 3-rd Int. Symp. on Methods and Models in Automation and Robotics MMAR'96. pp. 981-986, Międzyzdroje 1996.
30. Kozłowski K., Dutkiewicz P.: Eksperyment identyfikacji parametrów dynamicznych robota IRp-6, Materiały V K.K. Robotyki, Prace Naukowe ICT Pol. Wrocławskiej, nr 42, s. 50-57, Świeradów 1996.
31. Kozłowski K.: Optimal Trajectory Design for Identification Purposes in Robotics. Proc. Int Symp. MMAR'96, vol. 3, pp. 871-877, Międzyzdroje 1996.
32. Kozłowski K., Dutkiewicz P., Wróblewski W.: Modelowanie i sterowanie robotów PWN, Warszawa 2003.
33. Kubiak D. Adaptacyjny algorytm sterowania robotem eksperymentalnym. Praca dypl. Instytut Automatyki Pol. Śl., Gliwice 2000.
34. Kwiska B.: Komputerowy algorytm obliczania macierzy pseudobezwładności. Praca dypl. Instytut Automatyki, Pol. Śl., Gliwice 1996.
35. Materiały z internetu <http://www.ont.pl>
36. Mooring B.W., Pack T.J: Calibration Procedure for an Industrial Robot, Proc. Int. Intern. Conf. on Robotics and Automation, pp. 786-791, IEEE, 1988.
37. Morecki A., Knapczyk J., Kędzior K.: Teoria mechanizmów i manipulatorów: podstawy i przykłady zastosowań w praktyce. WNT, Warszawa 2002.
38. Neuman C. P., Murray J.J.: The Complete Dynamic Model and Customized Algorithms of Puma Robot. IEEE Trans. On Systems, Man, and Cybernetics, vol.SMC-17, no.4, 1987.
39. Niederliński A.: Roboty przemysłowe, Wyd. Sz. i P., Warszawa 1981.
40. Olędzki A.: Podstawy teorii maszyn i mechanizmów. PWN, Warszawa 1987.
41. Paul R.P.: Robot Manipulators. MIT Press, London 1983.
42. Ranky P.G., Ho C.Y.: Robot Modelling Control and Applications with Software. IFS. Spinger-Verlag, Berlin 1985.
43. Renders J.M., at al.: Kinematic Calibration and Geometrical Parameter Identification for Robots. IEEE Trans. Robotics Automat., vol. RA-7, no. 6, pp. 721-731, 1991.
44. Romanowski K., Warczyński J.: Paralelizacja obliczeń kinematyki i dynamiki manipulatora. Materiały IV K.K. Robotyki. t.1, s. 202-209, Wrocław 1993.
45. Roth Z.S., Mooring B.W., Ravani B.: An overview of robot calibration IEEE J. Robotics Automat., vol. RA-3, no. 5, pp.377-384, 1987.
46. Sawik T.: Optymalizacja dyskretna w elastycznych systemach produkcji. WNT, Warszawa 1992.

47. Sayech S., Newman W.S.: A New Technique for Solving Robot Calibration Equations with Partially Known Constraints. Proc. Int. Intern. Conf. on Robotics and Automation, pp. 387-392, IEEE, 1994.
48. Sciacivco L., Siciliano B.: Modelling and Control of Robot Manipulators, Springer - Verlag, London 2000.
49. Shamma J.S., Whitney D.E.: A Method for Inverse Robot Calibration, ASME J. Dynam. Syst. Meas. Contr., vol.109, no.1, pp.36-43, 1987.
50. Skalmierski B.: Mechanika z wytrzymałością materiałów. PWN, Warszawa 1983.
51. Spong M.W., Vidyasagar M.: Dynamika i sterowanie robotów. WNT, Warszawa 1997.
52. Strzępka M. Algorytm planowania kinematyki trajektorii robota eksperymentalnego. Praca dypl. Instytut Automatyki Pol.Śl., Gliwice 1999.
53. Styburski S. Badanie serwomechanizmów robota eksperymentalnego. Praca dypl. Instytut Automatyki Pol.Śl., Gliwice 2002.
54. Szkodny T.: Dynamika manipulatora IRb-6, praca nie publikowana.
55. Szkodny T.: Kinematyczna dekompozycja ruchu członu roboczego robota IRb-60. Materiały III K.K.Robotyki, t.2, s. 247-254, Wrocław 1990.
56. Szkodny T.: Manipulatory robotów przemysłowych-Modele matematyczne. Skrypt Pol. Śl. nr 1530, Gliwice 1990.
57. Szkodny T.: Modele matematyczne ruchu manipulatorów robotów przemysłowych na potrzeby sterowania. ZN Pol.Śl., s. Automatyka, z. 112, Gliwice 1993.
58. Szkodny T.: Podprzestrzenie manipulatorów. ZN Pol. Śl., s. Automatyka, z. 115, s. 391-403, Gliwice 1994.
59. Szkodny T.: Dynamics of Industrial Robot Manipulators. Proc. Int. Symp. MMAR'94, pp. 381-385, Międzyzdroje 1994.
60. Szkodny T.: Planning of Minimum-time Control and Trajectories for Industrial Robot Manipulators. Proc. 10-th ISPE/IEEE/IFAC Int. Conf. on CAD/CAM Robotics and Factories of the Future'94, pp.632-637, Ottawa 1994.
61. Szkodny T.: Forward and Inverse Kinematics of IRb-6 Manipulator, Mech. Mach. Theory, vol. 30, no.7, pp.1039-1056, Pergamon Press, London 1995.
62. Szkodny T., Grzechca W., Bereska D.: A Choice of Servo Settings of Industrial Robots. Proc. The 11-th ISPE/IEEE/IFAC Int. Conf. on CAD/CAM Robotics and Factories of the Future'95, pp. 916-921, Colombia, Pereira 1995.
63. Szkodny T.: Generating a Reference Trajectory with Defined Kinematics for the IRb-6 Manipulator, Comput. Modelling, vol. 21, no. 5, pp 105-115, Pergamon Press, London 1995.
64. Szkodny T.: Dynamics of Industrial Robot Manipulators, Mech. Mach. Theory, vol. 30.,no.7, pp. 1057-1072, Pergamon Press, London 1995.
65. Szkodny T., Grzechca W., Bereska D.: Basic Problem of Servo Setting of Industrial Robots. Proc. Second Int. Symp. on Methods and Models in Automation and Robotics MMAR'95. pp. 597-671, Międzyzdroje 1995.
66. Szkodny T.: Modelling of Kinematics of IRb-6 Manipulator. Comp. Math.Applic. vol.9, no.9, pp. 77-94, Pergamon Press, London 1995.
67. Szkodny T., Bereska D., Grzechca W.: Differential Description of Manipulators' Subspace. Proc. III-rd Intern. Symp. on Methods and Models in Automation and Robotics MMAR'96, pp. 937-942, Międzyzdroje 1996.
68. Szkodny T.: Kinematyka napędów manipulatora L-1. Materiały V K. K. Robotyki, t.1, s.66-78, Świeradów 1996.
69. Szkodny T., Jagodziński M., Legieć P., Pietrek K.: Kinematyka członów manipulatora ROBKO-01. ZN Pol. Śl., s. Automatyka z. 119, s.192-205, Gliwice 1996.

70. Szkodny T., Bereska D., Grzechca W.: Differential Description of Manipulators' Subspace. Proc. 12-th Int. Conf. on CAD/CAM Robotics and Factories of the Future. pp. 187-192, Middlessex Univ. London 1996.
71. Szkodny T.: Podprzestrzenie manipulatorów. Prace Instytutu Automatyki Pol. Śl. BW-404/Rau1/96, t.9, Gliwice 1996.
72. Szkodny T., Grzechca W., Bereska D.: Key-equations Method of Description of Manipulators' Subspaces. Elsevier Science. Proc. 5-th IFAC Symposium on Robot Control. Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Nantes 1997.
73. Szkodny T.: Przestrzeń robocza robota eksperymentalnego. Materiały Konf. Nauk.-Techn. AUTOMATION'97, t.1, s. 165-172, Warszawa 1997.
74. Szkodny T.: Przestrzeń robocza manipulatora IRb-6 na torze jezdny LP-1, Pomiary, Automatyka, Robotyka, nr 9, Warszawa 1997.
75. Szkodny T.: Calibration of Dynamics Models of Industrial Robots Manipulators. Proc. 13-th ISPE/IEEE Int. Conf. on CAD/CAM, Robotics & Factories of the Future, Colombia, Pereira, December 1997.
76. Szkodny T.: Modelowanie różniczkowe podprzestrzeni manipulatorów. Prace Instytutu Automatyki Pol. Śl. BW-421/Rau1/97, t.12, Gliwice 1997.
77. Szkodny T.: Kinematyczna dekompozycja różniczkowa ruchu członu roboczego robota IRb-6. ZN Pol. Śl., s. Automatyka z. 96, s. 231-242, Gliwice 1988.
78. Szkodny T.: Wrażliwość pozycjonowania chwytaka na błędy parametrów kinematyki manipulatorów rodziny IR-b-6, Z.N. Pol. Śl., s. Automatyka, nr. 125, Gliwice 1998.
79. Szkodny T.: Well-conditioned Sets of Configurations for Calibration of Kinematics' Parameters of IRb-6, IRp-6 and URP-6 Manipulators. Systems Science, vol.24, no. 4, 1998.
80. Szkodny T.: Robot inteligentny - interfejsy, planowanie zadań, badanie sterowań. Rozdz.2 Pomiar położenia manipulatora robota eksperymentalnego z zastosowaniem tachimetrów. Prace Instytutu Automatyki Pol. Śl. BK-201/Rau-1/98/7, Gliwice 1998.
81. Szkodny T.: Modele kinematyki robota eksperymentalnego we współrzędnych enkoderów. Prace Instytutu Automatyki Pol. Śl. BW-406/Rau-1/1998/temat 15, Gliwice 1998.
82. Szkodny T.: Linear Form of Dynamics Model in Relation to Mass Parameters of Industrial Robots. Proc. Int. Conf. on Contribution of Cognition to Modelling CCM'98. International Association for Advancement of Modelling and Simulation. France, Lyon, July 1998.
83. Szkodny T.: Dynamics Model of Industrial Robots Manipulators for Calibration Mass Parameters. Proc. Int. Conf. on Advanced Robotics, Intelligent Automation and Active Systems. European Center for Peace and Development. Russia, Moscow, August 1998.
84. Szkodny T.: Programy badań symulacyjnych ruchu manipulatorów rodziny IRb-6. Prace Instytutu Automatyki Pol. Śl. BW-412/Rau1/99, t.13, Gliwice 1999.
85. Szkodny T.: Programy badań symulacyjnych ruchu manipulatorów rodziny IRb-6. Prace Instytutu Automatyki Pol. Śl. BW-403/Rau1/00, t.13, Gliwice 2000.
86. Szkodny T. The Sensitivities of Industrial Robot Manipulators to Errors of Motion Models' Parameters. Mech. Mach. Theory vol. 36, no.6, pp. 673-683, Pergamon Press, London 2001.
87. Szkodny T.: Programy badań symulacyjnych ruchu manipulatorów rodziny IRb-6. Prace Instytutu Automatyki Pol. Śl. BW-494/Rau1/01, t.18, Gliwice 2001.
88. Szkodny T. Modelowanie i symulacja robota L-1, Z.N. Pol. Śl., s. Automatyka, z. 136, Gliwice 2002.

89. Szkodny T.: Identyfikacja parametrów kinematyki robota eksperymentalnego, ZN Pol. Śl., s. Automatyka, z. 136, Gliwice 2002.
90. Szkodny T.: Programy badań symulacyjnych ruchu manipulatorów rodziny IRb-6. Prace Instytutu Automatyki Pol. Śl. BW-428/Rau1/02, t.26, Gliwice 2002.
91. Szkodny T.: Modelling and Simulation of Experimental Robot. Systems Science, vol.29, no.3, 2004.
92. Szkodny T.: Reducing of Simulation Time of Robot Systems. XV Int. Conf. on Systems Science, Wrocław 2004.
93. Szymkat M., Uhl T.: Komputerowe wspomaganie inżynierskich prac projektowych. CCATIE: Cracow Center for Advanced Training in Information Technology, 1995.
94. Szynkiewicz W., Gosiewski A.: Weryfikacja doświadczalna modelu dynamiki manipulatora IRb-6. Materiały III K.K. Robotyki, Prace Naukowe ICT Pol. Wrocławskiej, nr 37, s.255-260, Wrocław 1990.
95. Tang G.R., Liu L.S.: Robot Calibration Based on a Single Laser Displacement Meter. Proc. Int. Robotics & Vision Automation Conf., pp. 926-931, Int. Federation of Robotics, 1991.
96. Tchoń K.: Calibration of Manipulator Kinematics. A Singularity Theory Approach, IEEE Trans. Robotics Automat., vol. RA-8, no. 5, pp. 671-678, 1992.
97. Tchoń K.: O kalibracji kinematyk osobiowych, Materiały IV K. K. Robotyki, t. 1, s. 210-216, Wrocław 1993.
98. Tchoń K., Mazur A., Dulęba I., Hossa R., Muszyński R.: Manipulatory i roboty mobilne - Modele, planowanie ruchu, sterowanie Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa 2000.
99. Tchoń K., Muszyński R., Muszyński W., Jakubiak J.: Materiały VIII K.K. Robotyki, Polanica Zdrój 2004.
100. Tomaszewski K.: Roboty przemysłowe. WNT, Warszawa 1993.
101. Veitschegger W.K., Wu C.H.: Robot Calibration and Compensation, IEEE J. Robotics Automat., vol. 4, no. 6, pp. 643-656, 1988.
102. Węgrzyn S.: Podstawy automatyki. PWN, Warszawa 1978.
103. Węgrzyn S.: Przyspieszenie realizacji algorytmów w systemach sterowanych przepływem argumentów. Z N Pol. Śl., s. Informatyka z. 26, s. 58-67, Gliwice 1994.
104. Whitnet D.E., Lozinski C.A., Rourke J.M.: Industrial robot calibration method and results. ASME J. Dynam. Syst. Meas. Contr., vol. 108, no.1, pp.1-8, 1986.
105. Wojnarowski J., Nowak A.: Mechanika manipulatorów w opisie motorów. Wyd. Pol. Śl., Gliwice 1992.
106. Praca zbiorowa pod redakcją Józefa Wojnarowskiego.: Model komputerowy przecinarek z piłami taśmowymi bez końca w badaniu zjawisk dynamicznych w procesie cięcia. Katedra Mechaniki, Robotów i Maszyn. ZN Pol. Śl., s. Mechanika z. 10, Gliwice 2002.
107. Yoshikawa T.: Foundations of Robotics. Analysis and Control. MIT Press., London 1990.
108. Zmilczak P.: Dobór nastaw regulatorów serwomechanizmów sterujących manipulatorem IRb-6, Praca dypl. Instytut Automatyki Pol. Śl., Gliwice 1991.

MODELOWANIE I SYMULACJA RUCHU MANIPULATORÓW ROBOTÓW PRZEMYSŁOWYCH

Streszczenie

W rozprawie przedstawiono modele matematyczne ruchu robotów przemysłowych, z manipulatorami tworzącymi szeregowo otwarte łańcuchy kinematyczne. Przeanalizowano aktualny stan opisu kinematyki i dynamiki manipulatorów ze szczególnym uwzględnieniem skutków stosowanych uproszczeń.

Sformułowano modele opisujące proste i odwrotne zadanie kinematyki w postaci ciągłej i różniczkowej w podprzestrzeni manipulatorów. Zaproponowano opis podprzestrzeni manipulatorów za pomocą równań kluczowych. Równania kluczowe pozwalają sprawdzić przynależność punktów zadanych do podprzestrzeni manipulatorów, bez konieczności sprawdzania 12 proporcji liczbowych, jak to ujęto w pracy Craiga [10]. Różniczkowe równania kluczowe umożliwiają sprawdzenie przynależności zadanych przyrostów różniczkowych położenia i orientacji elementu wykonawczego do podprzestrzeni manipulatora.

Opracowano ogólne modele dynamiki manipulatorów, uwzględniające rozkłady mas: członów, obiektu manipulacji, siłowników i zespołów przekazujących napędy. Przedstawiono ogólne postacie równań Newtona – Eulera i Lagrange’a. W równaniach uwzględniono ruch osi obrotów siłowników oraz elementów zespołów przekazujących napędy. Modele te są słuszne dla dowolnego sposobu napędu, tj. dla bezpośredniego i pośredniego. Uwzględnienie rozkładu mas siłowników wymagało dokładniejszego niż w dotychczasowej literaturze opisu kinematyki elementów wykonawczych siłowników i elementów stanowiących zespoły przekazywania napędu. Przedstawiono sposoby opisu kinematyki siłowników oraz elementów zespołów przekazujących napędy.

Ogólne modele kinematyki i dynamiki zastosowano do opisu ruchu manipulatorów AS, L-1, IRb-6 i eksperymentalnego. Opracowano także modele matematyczne siłowników, wzmacniaczy mocy, regulatorów prądów siłowników oraz serwomechanizmów robotów AS, L-1 i eksperymentalnego. Zastosowano programy symulacji tych robotów w środowisku programowym Simulinka, krótkie charakterystyki programów komputerowego planowania ruchu robotów, przykłady planowania, przykłady symulacji, metody uproszczeń modeli matematycznych robotów, porównanie wyników symulacji robota eksperymentalnego z wynikami pomiarów oraz podsumowanie rezultatów badań.

Wyprowadzono formę liniową równań dynamiki manipulatorów względem parametrów masowych. Podano ogólne formuły opisujące funkcje regresji potrzebne do kalibracji parametrów modeli ruchu manipulatorów, wcześniej odczytanych, zmierzonych lub obliczonych, oraz wyszczególnienie parametrów kinematyki i dynamiki robotów AS, L-1 i eksperymentalnego.

W sformułowanych wnioskach i uwagach końcowych stwierdzono konieczność ścisłej analizy matematycznej zjawisk fizycznych w złożonych systemach robotów na potrzeby modelowania, symulacji i programowania.

Programy komputerowego planowania i symulacji ruchu robotów AS, L-1 oraz program symulacji ruchu robota eksperymentalnego opracowano w MATLAB-ie i utworzono w Simulinku. Program planowania ruchu robota eksperymentalnego został napisany w języku C i zainstalowany w sterowniku nadrzędnym tego robota.

MODELLING AND SIMULATION OF INDUSTRIAL ROBOT MANIPULATOR MOTION

Summary

Mathematic models of motion of industrial robots equipped with manipulators in a form of an open kinematic chain are in focus of the dissertation. The actual state of manipulator kinematics and dynamics description was analyzed, with particular consideration of results of used simplifications.

Direct and inverse kinematics models in continuous and differential forms were proposed, with taking into consideration manipulator subspace description. The description by means of key equations was proposed. The key equations allow to check if desired point belongs to manipulator subspace, without necessity of checking 12 numerical proportions, as proposed in [10]. Differential key equations allow to check if desired differential changes of effector position and orientation belong to manipulator subspace.

General models of manipulator dynamics accounting mass distribution of links, manipulation object, actuators and drive units were proposed. General forms of Newton – Euler and Lagrange equations were presented. In these equations an actuator axis motion and drive units motion were taken into consideration. These models are valid for direct and indirect drive of manipulators. Taking into consideration mass distribution of actuators required more precise than in hitherto literature description of actuators and drive units kinematics. Description of drive units and actuators kinematics was presented.

The general models of kinematics and dynamics were used for description of motion of AS, L-1, IRb-6 and experimental manipulators. Mathematical models of actuators, power amplifiers, actuator current controllers and servos of AS, L-1 and experimental robots were proposed too. Computer programs for simulation of these robots in Simulink environment, short characteristics of computer planning of robot motion, examples of planning, examples of simulations, simplification methods of mathematic models of robots, comparison between simulation of experimental robot and experimental results and summary of research results were presented.

Linear form of manipulator dynamics equations with respect to mass parameters was derived. General forms of regression functions necessary to calibration of parameters of manipulator motion models (which were earlier read, measured or computed) were derived. The kinematics and dynamics parameters of AS, L-1 and experimental robots were also specified.

In final conclusions the necessity of strict mathematic analysis of phenomenones physic in complex robot systems for robot modeling, simulation and programming were professed.

Planning and simulation computer programs of AS and L-1 robot motion and simulation computer program of experimental robot were written in MATLAB and created in Simulink. Planning computer program of experimental robot was written in language C and implemented to master controller of this robot.

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ
ul. Akademicka 5, 44-100 Gliwice, tel. (0-32) 237-13-81
<http://wydawnictwo.polsl.pl>

Sprzedaż i Marketing
tel. (0-32) 237-18-48
wydawnictwo_mark@polsl.pl

Nakł. 100+50	Ark. wyd. 16	Ark. druk. 12,375	Papier offset. 70x100, 80 g
Oddano do druku 03.11.2004 r.	Podpisano do druku 03.11.2004 r.		Druk ukończ. w listopadzie 2004 r.

Druk wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach, ul. Kujawska 1
zam. 380/04

Książki Wydawnictwa można nabyć w księgarniach

GLIWICE

- ♦ Punkt Sprzedaży – ul. Akademicka 2 (237-17-87)
- ♦ „FORMAT” – Akademicka 5 (architektura i budownictwo)
- ♦ „LAMBDA” – ul. Akademicka 2 (237-21-40)
- ♦ Punkt Sprzedaży – ul. Akademicka 16 (automatyka, elektronika, informatyka)
- ♦ „ŻAK” – ul. Kaszubska

RYBNIK

- ♦ „ORBITA” – ul. Rynek 12
- ♦ „NEMEZIS” – ul. Hallera 26

ŁÓDŹ

- ♦ „POLITECHNIKA 100” – ul. Żeromskiego 116 PŁ.
- ♦ Hurtownia „BIBLIOFIL” – ul. Jędrzejowska 9a (042) 679-26-77

KATOWICE

- ♦ Punkt Sprzedaży – ul. Krasińskiego 8
- ♦ Hurtownia „DIK” – ul. Dulęby 7 (032) 204-82-30
- ♦ Hurtownia „JERZY” – ul. Słoneczna 24 (258-99-58)

TYCHY

- ♦ „I Ja Tours” – ul. Piłsudskiego 10 (217-00-91 w.130)

ZABRZE

- ♦ Punkt Sprzedaży – ul. Roosevelta 26

KRAKÓW

- ♦ Techniczna – ul. Podwale 4 (012) 422-48-09
- ♦ Punkt Sprzedaży WND – AGH, Al. Mickiewicza 30

GDAŃSK

- ♦ EKO-BIS – ul. Dyrekcyjna 6 (058) 305-28-53

WARSZAWA

- ♦ Studencka – Pl. Politechniki 1 (022) 628-77-58
- ♦ Techniczna – ul. Kaliskiego 15 (022) 666-98-02
- ♦ Techniczna – ul. Świętokrzyska 14
- ♦ MDM – ul. Piękna 31

BIAŁYSTOK

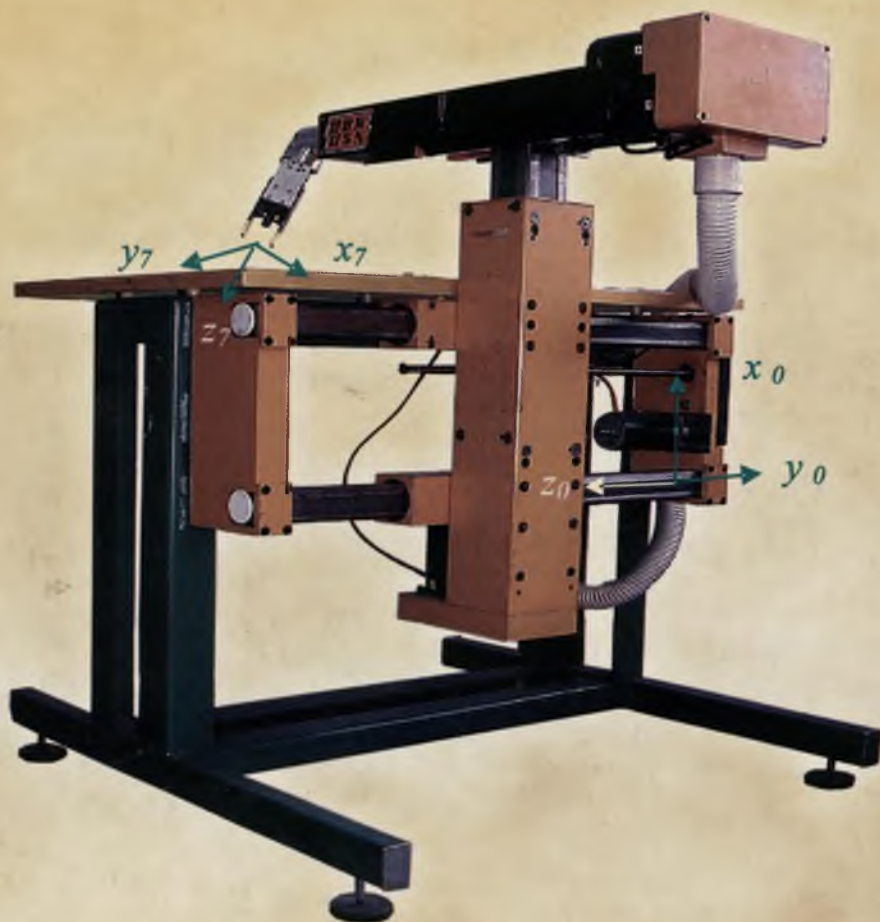
- ♦ Dom Książki (Księgarnia 84) – ul. Wiejska 45 c

POZNAŃ

- ♦ Księgarnia „POLITECHNIK” – ul. Piotrowo 3 (061) 665-23-24
- ♦ Księgarnia Techniczna – ul. Półwiejska 28 (061) 659-00-38

NOWY SĄCZ

- ♦ Księgarnia „ATOM” – ul. Hoffmanowej 3 (018) 446-08-72



Wydawnictwo Politechniki Śląskiej
44-100 Gliwice, ul. Akademicka 5
tel./fax (0-32) 237-13-81
<http://wydawnictwo.polsl.pl>
Sprzedaż i Marketing:
tel. (0-32) 237-18-48,
e-mail: wydawnictwo_mark@polsl.pl