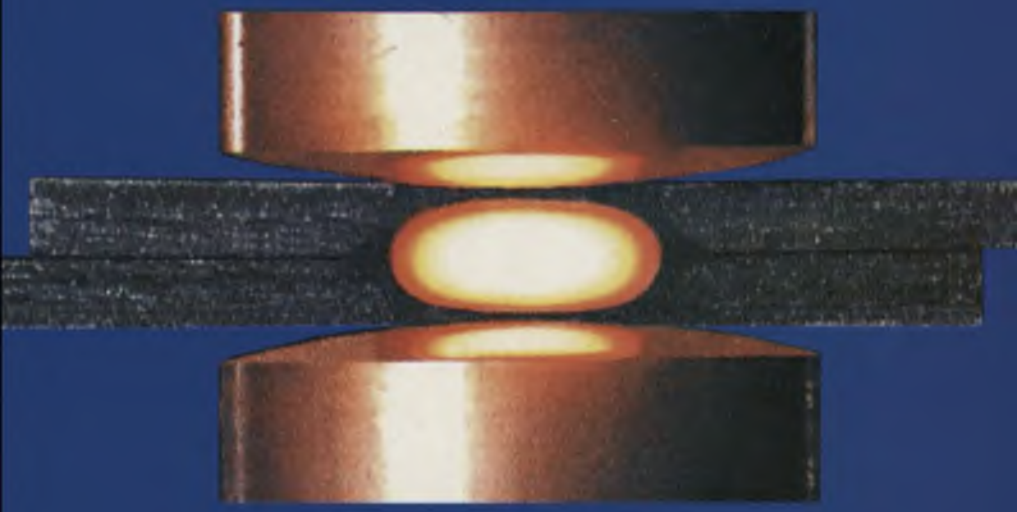
ZESZYTY NAUKOWE
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Andrzej SZYMAŃSKI

MODELOWANIE PROCESU ZGRZEWANIA OPOROWEGO PUNKTOWEGO



WYDAWNICTWO
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
ZESZYTY NAUKOWE
Nr 1631

Andrzej SZYMAŃSKI

MODELOWANIE PROCESU ZGRZEWANIA OPOROWEGO PUNKTOWEGO

Gliwice 2004

PL ISSN 0434-0817

Wnuczce Maji

Spis treści

Contents

Wykaz ważniejszych oznaczeń

$\mathcal{A}$ - składowa rzeczywista potencjału zespolonego $\overline{\mathbf{A}}$,
$\underline{\mathcal{A}}$ - składowa urojona potencjału zespolonego $\overline{\mathbf{A}}$,
$\mathbf{B}$ - pole wektorowe indukcji magnetycznej ośrodka pozostającego w stanie spoczynku; T,
$\mathbf{B}^\star$ - pole wektorowe indukcji magnetycznej w układzie odniesienia poruszającym się z lokalną prędkością $\boldsymbol{v}$;T,
$\mathbf{B}_k$ - indukcja magnetyczna k-tej fazy,
c - prędkość propagacji fali elektromagnetycznej (prędkość światła w próżni)
c^β - udział masowy (koncentracja) składników β w mieszaninie heterogenicznej,
$\overline{c}_k^\beta$ - gęstość masowa składnika β w fazie k,
c_v - ciepło właściwe przy $v = idem$,
D - współczynnik dyfuzji,
$\mathbf{D}$ - pole wektorowe indukcji elektrycznej ośrodka pozostającego w stanie spoczynku; C/m^2,
$\mathbf{D}^\star$ - pole wektorowe indukcji elektrycznej w układzie odniesienia poruszającym się z lokalną prędkością $\boldsymbol{v}$; C/m^2,
$\mathbf{D}_k$ - indukcja elektryczna k-tej fazy,
D_k^β - współczynnik stężeniowej dyfuzji izotermicznej składnika β w k-tej fazie,
$[d_{ij}]_k$ - dewiator tensora prędkości odkształcenia metalu w k-tej fazie,
$[d_{ij}]$ - dewiator tensora prędkości odkształcenia,
$\mathbf{E}$ - pole wektorowe natężenia pola elektrycznego ośrodka pozostającego w stanie spoczynku; V/m,
$\mathbf{E}^\star$ - pole wektorowe natężenia pola elektrycznego w układzie odniesienia poruszającym się z lokalną prędkością $\boldsymbol{v}$; V/m,
$\overline{\mathbf{E}}$ - zespolona amplituda początkowa wektora natężenia pola elektrycznego,
$\mathbf{E}_k$ - natężenie pola elektrycznego k-tej fazy,
$[e_{ij}]_S$ - dewiator tensora odkształceń fazy stałej,
f - częstotliwość prądu zgrzewania,
$\mathbf{f}$ - ujednolicony wektor wypadkowy gęstości sił oddziaływania pola elektromagnetycznego,

$\mathbf{f}^*$ - wypadkowy wektor gęstości wymiany pędu z uwagi na oddziaływania międzyfazowe,
$\mathbf{f}_k$ - wektor gęstości sił oddziaływania przyłożonego pola elektromagnetycznego,
g_k - objętościowy udział k-tej fazy (4.169),
$\mathbf{H}$ - pole wektorowe natężenia pola magnetycznego; A/m,
$\mathbf{H}^*$ - pole wektorowe natężenia pola magnetycznego w układzie odniesienia poruszającym się z lokalną prędkością $\boldsymbol{v}$; A/m,
$\overline{\mathbf{H}}$ - zespolona amplituda początkowa wektora natężenia pola magnetycznego,
$\mathbf{H}_k$ - natężenie pola magnetycznego k-tej fazy,
$\mathbf{j}$ - pole wektorowe gęstości prądu przewodzenia; A/m^2,
$\mathbf{j}^*$ - pole wektorowe gęstości prądu przewodzenia w układzie odniesienia poruszającym się z lokalną prędkością $\boldsymbol{v}$; A/m^2,
$\mathbf{j}_k$ - jednostkowy strumień dyfuzujny wielkości ekstensywnych $\rho_k \Phi_k$ przez powierzchnię S_k,
k - współczynnik równowagowy podziału składników stopu,
L_{ki} - współczynnik przewodzenia składnika k,
n - wskaźnik lub kierunek normalnej,
N - liczba zarodków w objętości elementarnej,
$\dot{\mathbf{n}}_k$ - wektor zmian pędu k-tej fazy ze względu na oddziaływania międzyfazowe,
p - homogeniczne (ujednolicone) ciśnienie nieściśliwej mieszaniny heterogenicznej,
P - moc dostarczana przez doprowadzone pole (zewnętrzne) elektromagnetyczne,
p_k - ciśnienie hydrostatyczne k-tej fazy,
p_s - ciśnienie w fazie stałej,
$\mathbf{P}(\mathbf{r})$ - gęstość czynnej mocy pola elektromagnetycznego,
q - gęstość właściwa ładunków elektrycznych,
$q_0(\mathbf{r})$ - początkowy rozkład gęstości ładunków,
$\mathbf{Q}(\mathbf{r})$ - gęstość biernej mocy pola elektromagnetycznego,
$\mathbf{r}$ - wektor położenia punktu materialnego,
$\mathbf{s}_k$ - gęstość powierzchniowa mocy przenoszonej przez pole elektromagnetyczne k-tej fazy - wektor Poyntinga k-tej fazy,
T - temperatura,
T_S - temperatura topnienia (linia solidus),
u^o - stała całkowania,
u_k - energia wewnętrzna k-tej fazy,
$u(T)$ - energia wewnętrzna,
$\boldsymbol{v}$ - pole prędkości ośrodka -($|\boldsymbol{v}| \ll c$), m/s,
$\boldsymbol{v}_k$ - prędkość k-tej fazy,
w - gęstość objętościowa energii pola elektromagnetycznego,
$\dot{w}$ - gęstość objętościowa mocy pola elektromagnetycznego,
w_k - energia (odniesiona do jednostki objętości k-tej fazy) zmagazynowana w polu elektromagnetycznym ośrodka izotropowego,

α - współczynnik wymiany ciepła,
β - parametr określający szybkość krystalizacji objętościowej,
ΔT - przechłodzenie,
δ_{ij} - tensor jednostkowy,
ε - przenikalność elektryczna ośrodka; F/m,
ε_k - przenikalność elektryczna k-tej fazy,
ε_r - względna przenikalność elektryczna ośrodka,
$[\varepsilon]_S$ - intensywność odkształceń liniowych (liniowe odkształcenie zastępcze) dla fazy stałej,
$[\dot{\varepsilon}]_S$ - intensywność prędkości odkształcenia liniowego (zastępcza prędkość odkształcenia liniowego) fazy stałej,
$[\varepsilon_{ij}]_S$ - parcjalny tensor odkształceń fazy stałej,
η - lepkość fazy stałej,
$\eta(T)$ - lepkość dynamiczna fazy ciekłej w funkcji temperatury,
ϑ - bezywymiarowa temperatura homogeniczna fazy stałej,
λ - współczynnik przewodnictwa ciepła,
λ_k - współczynnik przewodzenia ciepła k-tej fazy ($\lambda_k = \lambda_k(T)$),
μ - przenikalność magnetyczna ośrodka; H/m,
μ_k - przenikalność magnetyczna k-tej fazy,
μ_r - względna przenikalność magnetyczna ośrodka,
ρ - gęstość (masa właściwa) ośrodka; kg/m^3,
$\overline{\rho}_k$ - gęstość cząstkowa k-tej fazy (4.173),
σ - przewodność właściwa (konduktywność skrośna) ośrodka; S/m,
$\overline{\sigma}_0$ - normalne naprężenia uplastyczniające fazę stałą,
$[\sigma_{ij}]_k$ - symetryczny tensor naprężeń k-tej fazy,
σ_k - przewodność k-tej fazy,
$[\sigma]_S$ - intensywność parcjalnych naprężeń normalnych (naprężenie zastępcze normalne) fazy stałej,
$[\sigma_{ij}]_k$ - symetryczny tensor naprężeń k-tej fazy mieszaniny heterogenicznej,
$[\sigma_{ij}]_S$ - symetryczny tensor naprężeń fazy stałej,
τ - współczynnik relaksacji, s,
$[\tau_{ij}]$ - homogeniczny dewiator naprężeń w materiale,
$[\tau_{ij}]_k$ - dewiator tensora naprężeń k-tej fazy mieszaniny heterogenicznej,
$[\tau_{ij}]_L$ - dewiator tensora naprężeń parcjalnych w ciekłym metalu,
$[\tau_{ij}]_S$ - dewiator tensora naprężeń parcjalnych fazy stałej,
$[\overline{\tau}_{ij}]$ - dewiator parcjalnych naprężeń w materiale,
ϕ - składowa rzeczywista zespolonego potencjału elektrodynamicznego $\overline{\Phi}$,
$\underline{\phi}$ - składowa urojona zespolonego potencjału elektrodynamicznego $\overline{\Phi}$,
ψ_{ki} - parametry intensywne wielkości ekstensywnych $\rho_k \Phi_k$,
ω - częstość kołowa oscylacji analizowanych pól,
ω - częstość kołowa oscylacji prądu zgrzewania ($\omega = 2\pi f$).

1. Wprowadzenie

Zgrzewanie oporowe punktowe znajduje coraz większe zastosowanie przemysłowe do miejscowego łączenia konstrukcji metalowych, wykonywanych głównie ze stali niskowęglowej o normalnej i podwyższonej wytrzymałości. Przede wszystkim zgrzewanie to stosuje się w wielkoseryjnej i wielooperacyjnej produkcji lekkich elementów i konstrukcji przestrzennych, występujących głównie w przemyśle samochodowym, lotniczym, a także do produkcji artykułów gospodarstwa domowego i konstrukcji budowlanych (belki, dźwigary, słupy, kratownice).

Grubość zgrzewanych elementów jest zwykle ograniczona mocą posiadanych zgrzewarek i zależy głównie od rodzaju materiału oraz sposobu doprowadzenia do nich prądu zgrzewania. Metoda zgrzewania punktowego jest bardzo wydajna i łatwa do zautomatyzowania i zrobotyzowania. Nowoczesne automatyczne zgrzewarki punktowe pracują z szybkością do 200 zgrzein punktowych na minutę, zgrzewając jednocześnie kilkadziesiąt, a nawet kilkaset punktów.

W celu otrzymania powtarzalności wyników i uzyskania zgrzein o wysokiej jakości konieczne jest dobranie odpowiednich parametrów technologicznych procesu i poznanie mechanizmów tworzenia się zgrzeiny. Badanie procesu, jak i dobór optymalnych parametrów wymaga zastosowania specjalistycznej aparatury sterująco - pomiarowej.

Sprzężenia elektrotermomechaniczne w procesie zgrzewania oporowego punktowego są skomplikowanymi zjawiskami, wiążącymi czynniki mechaniczne, elektryczne, cieplne i metalurgiczne. Czynniki te, oddzielnie lub w połączeniu ze sobą, mają wielki wpływ na stan naprężeń powstałych w poszczególnych fazach zgrzewania punktowego, jak i na formowanie jądra zgrzeiny oraz jego końcową geometrię. Aby rozwinąć odpowiednie sposoby mechanizacji zgrzewania punktowego niezbędna jest dokładna wcześniejsza analiza i poznanie tak skomplikowanych zjawisk. Do analizy procesu zgrzewania oporowego punktowego można zastosować modelowanie matematyczne, wykorzystując możliwości obliczeniowe współczesnych komputerów tak aby wykonać symulacji procesów zgrzewania zgodnie z prawami fizycznymi. Po zweryfikowaniu, modele mogą służyć do wyjaśniania zjawisk obserwowanych przy użyciu metod doświadczalnych.

Zasadniczy przełom w poprawie jakości procesu zgrzewania stanowiło wprowadzenie inwertorowych źródeł prądu z przemiennikiem średniej częstotliwości (1000-1200Hz) i stałoprądowym obwodem wtórnym. Zmniejszenie gabarytów transformatora, symetryczne obciążenie sieci, wysoka sprawność i możliwość precyzyjnego sterowania czasem zgrzewania (ok. 20-krotnie szybsza możliwość reakcji w porównaniu ze zgrzewaniem konwencjonalnym) powodują, że źródła

inwertorowe znajdują zastosowanie w nowych urządzeniach i liniach produkcyjnych zgrzewania oporowego punktowego.

Zastosowanie zgrzewarek inwertorowych ponadto zwiększa żywotność elektrod i daje złącza lepszej jakości.

Wprowadzenie napędu elektrycznego, pozwalającego programować pozycje wstępne i robocze elektrod, wielkość siły docisku i jej zmiany oraz uzyskiwać łagodne zamykanie elektrod, wzrost trwałości elektrod i podzespołów mechanicznych, kontrolę uszkodzenia elektrod i grubości zgrzewanych elementów, stanowi kolejny skok jakościowy technologii zgrzewania oporowego punktowego. Dochodzą do tego korzyści z oszczędności mediów (np. powietrza lub płynów hydraulicznych).

Odrębnym problemem jest rozwój urządzeń sterujących i kontrolno-pomiarowych. Współczesne sterowniki zgrzewarek oporowych punktowych są podzespołami mikroprocesorowymi pozwalającymi na precyzyjne sterowanie wartościami prądu i czasami zgrzewania we wszystkich rodzajach zgrzewarek. Układy sterowania pozwalają sterować całym programem zgrzewarki z uwzględnienim czasu zgrzewania, wartości natężenia prądu, liczby impulsów czy regulować skokowo siłę docisku elektrod. Niektóre ze sterowników umożliwiają nastawianie stabilizowanego prądu zgrzewania, niezależnie od indukcyjności obwodu wtórnego i rodzaju materiału, a także programowanie algorytmu wzrostu natężenia prądu w miarę wzrostu liczby zgrzein.

2. Stan dotychczasowy zagadnienia

Modelowanie i symulacja procesu zgrzewania oporowego punktowego od dawna przyciągały uwagę wielu badaczy. We wczesnych etapach badań modelowanie matematyczne było nieprzystosowane do osiągnięcia wszechstronnej analizy procesu, ze względu na jego złożoność wywołaną występowaniem wzajemnie powiązanych zjawisk mechanicznych, elektrycznych, cieplnych i metalurgicznych. Większość przeprowadzonych prób symulacji procesu przy zastosowaniu modeli matematycznych i teoretycznych była skierowana głównie na problemy przepływu ciepła i zjawiska powierzchniowe bez ujęcia zjawisk termomechanicznych. Greenwood i Wiliamson [72] przeprowadzili badania teoretyczne i doświadczalne w celu ustalenia rozkładu temperatury na małym obszarze pomiędzy stykającymi się półnieskończonymi ciałami stałymi. Stwierdzili szczególny rozkład gęstości prądu na obrzeżu powierzchni styku i porównali to zjawisko z wynikami badań doświadczalnych, potwierdzając koncentrację ciepła na obrzeżu powierzchni styku. Wywnioskowali, że masa materiału w pobliżu obszaru styku nie jest nagrzana dostrzegalnie przez przepływający przez nią prąd. Jest ona nagrzana drogą przewodzenia ciepła od zewnętrznego obszaru styku. Archer w 1960 r. [10] podał matematyczne zależności dotyczące rozkładu temperatury w zgrzeinach punktowych pod kątem sterowania procesem. Zrobił on kilka przesadnie upraszczających założeń, które ułatwiły rozwiązanie problemu i dały wgląd w reakcję dynamiczną materiału na przewodzenie ciepła. W 1961 roku Greenwood [71] wprowadził pierwszy model przewodzenia ciepła, wykorzystując metodę różnic skończonych do symulacji procesu zgrzewania oporowego punktowego. Praca ta wniosła duży wkład do analitycznego modelowania procesu. Greenwood opracował osiowosymetryczny model przewodzenia ciepła i uwzględnił nagrzewanie wewnętrzne ciepłem Joule'a, chociaż jego model nie uwzględnia wytwarzania ciepła na oporze styku, a także pominął utajone ciepła topnienia powstałe w czasie przemian fazowych. Rozpatrywał też własności materiału jako niezależne od temperatury. Uzyskał przestrzenne rozkłady temperatury przez cały okres trwania cyklu zgrzewania. Wyniki te pokazują, że koncentracja temperatury na peryferiach styku elektrody z materiałem ma miejsce we wcześniejszym stadium cyklu zgrzewania. Przy dłuższym czasie zgrzewania rozkład temperatury wzdłuż powierzchni styku jest podobny do kształtu eliptycznego jądra. Następnie Bentley i inni [20] badali teoretycznie i eksperymentalnie wpływ oporu styku na rozkład temperatury przy różnych czasach trwania cyklu zgrzewania podczas formowania się zgrzeiny punktowej w próbkach ze stali niskowęglowej. Model opracowany wcześniej przez Greenwooda [71] był zastosowany do porównania przewidywanego rozkładu temperatury z rzeczywistymi wynikami badań. Wyciągnięte z badań

wnioski wskazują, że opór styku odgrywał główną rolę jedynie w pierwszym etapie wytwarzania ciepła, a stawał się mniej istotny w późniejszym stadium formowania jądra zgrzeiny punktowej. Model Greenwooda nie uwzględniał jednakże oporu styku i tym samym nie uwzględniał rzeczywistego przebiegu we wcześniejszych stadiach, ale dostarczył dobrych wskazań ukształtowania rzeczywistej temperatury w późniejszych stadiach zgrzewania. W roku 1967 Rice i Funk [145] badali analitycznie rozkłady temperatur w czasie zgrzewania materiałów złożonych (kompozytowych) i powiązali wpływ oporu styku z rozkładem temperatur. Sformułowali jednowymiarowy wielowarstwowy model przepływu ciepła, wykorzystując metodę analizy równaniami różnicowymi. Model opracowano z uwzględnieniem własności materiałów zależnych od temperatury, wytwarzania ciepła Joule'a w masie materiału przewodzącego prąd elektryczny oraz oporności styku. Model nie uwzględniał jednakże ukrytego ciepła topnienia. Otrzymane wyniki pokazywały, że oporność styku w niewielkim stopniu wpływa na wydzielanie ciepła we wcześniejszych stadiach cyklu zgrzewania. Jednocześnie doszli do wniosku, że w całym cyklu zgrzewania oporność styku jest bliska wartości końcowej. Gould [67] badał rozwój jądra zgrzeiny podczas zgrzewania punktowego trzech różnych grubości blach ze stali typu AISI 1008, wykorzystując zarówno badanie eksperymentalne, jak i techniki analityczne. Zastosował on jednowymiarowy model przewodnictwa ciepła. Jego model uwzględniał następujące elementy: geometrię elektrod, własności materiału zależne od temperatury, topnienie, wewnętrzne wytwarzanie ciepła, oraz oporności styku. Zastosowano metodę elementów skończonych do otrzymania rozwiązań dla nieliniowych równań cząstkowych. Porównanie pomiędzy wynikami badań analitycznych i badaniami metalograficznymi elementów o dużej grubości pokazało, że model przewidywał wymiary jądra zgrzeiny znacznie większe od tych, które zaobserwowano w eksperymencie. W powyżej wymienionych publikacjach pominięto oczywiste sprzężenie termomechaniczne występujące w procesie zgrzewania punktowego. Wszystkie modele matematyczne opisywane przez cytowanych autorów były poświęcone analizie procesów cieplnych w funkcji nastawionych parametrów zgrzewania, ale nie uwzględniały naprężeń mechanicznych i cieplnych. W 1984 Nied [121] wykorzystując program ANSYS opracował model osiowosymetryczny, który uwzględniał geometrię elektrod i elementów zgrzewanych i brał pod uwagę własności cieplne zależne od temperatury oraz nagrzewanie ciepłem Joule'a. W rezultacie uzyskał rozkład odkształceń elektrody i elementów zgrzewanych oraz rozkład naprężeń wzdłuż powierzchni styku. Analiza termiczna dostarczyła rozkładu temperatury, pokazując charakterystyczne izotermy jądra zgrzeiny o kształcie elipsoidy. Chociaż model pozwalał na uzyskanie mechanicznych i cieplnych odpowiedzi procesu zgrzewania, symulacja oporu styku i sprzężenia termomechanicznego nie były jasno określone.

Wśród ważnych dostępnych publikacji, odwierciedlających stan badań nad fenomenologicznym modelowaniem matematycznym stopów binarnych z uwzględnieniem przemiany fazowej likwidus-solidus, traktowanych jako mieszaniny wieloskładnikowe należy wymienić [17, 18]. Zaproponowany tam model rozwiązano numerycznie i przeanalizowano dla przypadku krzepnięcia chlorku amonu w prostokątnej kokili. Publikacje te wskazują na możliwość i celowość tego typu postępowania mimo licznych uproszczeń i uzupełniających założeń. Adaptację modelu z [17, 18] do warunków fizycznych powstawania ciekłego jądra zgrzeiny punktowej można znaleźć w [192] i [190]. Adaptacja polegała na uzupełnieniu równań ruchu o składowe sił oddziaływania pola elektromagnetycznego, a równania zachowania energii o człon źródłowy opisujący wydzielające się ciepło Joule'a-Lenza na stykach materiałów oraz na skutek oporu przewodzenia prądu. Człon ten zapisano z dużym uproszczeniem, nie rozwiązując zadania propagacji pola elektromagnetycznego. W modelu nie uwzględniono ponadto występującej niejednorodności własności fizycznych materiałów uczestniczących w procesie zgrzewania, wywołanej zmianami temperatury oraz założono hipotezę "filtracyjnego" modelu przenikania fazy ciekłej przez fazę stałą (prawo Darcy'ego). Przy tym obliczenia wykonano przykładowo dla hipotetycznego materiału i założonych wartości liczb kryterialnych (równania podano w postaci bezwymiarowej).

W publikacjach [121, 183] autorzy stosują wprost pakiet komercyjny ANSYS bez stawiania w sposób jawny (explicite) zadania modelującego zjawiska punktowego zgrzewania oporowego.

Współczesny przemysł wdraża materiały o podwyższonej i wysokiej wytrzymałości (DP600, TMS1200), zwiększa zastosowanie aluminium i jego stopów oraz blach warstwowych (typu sandwich) i pokrytych powłokami. Nowe materiały stwarzają wyzwania dla technologów, użytkowników i konstruktorów sprzętu zgrzewalniczego. Stosowanie blach o wysokiej wytrzymałości stwarza problemy związane między innymi z koniecznością stosowania większych sił docisku zgrzewania i zawężenia zakresu parametrów zgrzewania. Skłonności do powstawania struktur hartowniczych zapobiega się częściowo przez zastosowanie cykli zgrzewania z obróbką cieplną zgrzeiny dodatkowym impulsem prądu. Zgrzewanie aluminium wymaga stosowania odpowiedniego przygotowania powierzchni blach oraz zastosowania różnych materiałów na elektrody zgrzewarek, np. stopu CuCrZr dla blach AlMg lub CuAg dla stopów odlewniczych AlSiCu.

Parametry technologiczne zgrzewania oporowego zależą od właściwości fizycznych zgrzewanych materiałów. Świadczyć mogą o tym istotne różnice w wartościach tych parametrów, jakie wynikają z zaleceń literatury dla różnych grup materiałów. Nie dla wszystkich metali i stopów technicznych można ustalić potrzebne dane w postaci tabel i wykresów. W dostępnej literaturze nie podaje się ogólnych zależności ani metod postępowania, które umożliwiałyby sposób ustalenia prawidłowej technologii zgrzewania oporowego dla każdego dowolnego materiału.

Próby uogólnienia zaleceń technologicznych, zwłaszcza w odniesieniu do zgrzewania punktowego, podejmowano od dawna. Opierały się one zazwyczaj na rozpatrywaniu bilansu cieplnego procesu zgrzewania i ustaleniu wynikających zależności, które mogłyby umożliwić obliczenie właściwych dla danego metalu

parametrów zgrzewania. Zależności te są jednak na tyle skomplikowane, że nie znalazły szerszego zastosowania w praktyce.

3. Teza i przedmiot pracy

W pracy przedstawiono opis matematyczny i analizę fizycznych zjawisk stanowiących istotę zgrzewania oporowego punktowego.

W oparciu o przegląd publikacji dotyczących problematyki przedstawionej rozprawy oraz prac własnych sformułowano tezę pracy:

Spośród wielu zjawisk fizycznych zachodzących w procesie zgrzewania oporowego punktowego dominującą rolę w procesie tworzenia złącza odgrywają:

- ***przewodzenie prądu przez zgrzewane materiały i ich styki oraz styki materiałów zgrzewanych i elektrod, zależność oporności przewodzenia prądu od temperatury oraz siły docisku elektrod, a w związku z tym wydzielające się ciepło Joule'a - Lenza,***
- ***transport ciepła wydzielającego się w trakcie przepływu prądu zgrzewania w obszarze zgrzewania między elektrodami,***
- ***zmiany stanu skupienia jądra zgrzeiny (solidus - likwidus - solidus) w cyklu zgrzewania,***
- ***transport materii i pędu w obszarze tworzonego jądra zgrzeiny w obecności sił pola elektromagnetycznego.***

Przedstawiona rozprawa obejmuje:

- opracowanie modeli matematycznych istotnych fizycznie zjawisk zachodzących podczas zgrzewania oporowego punktowego. *Opracowanie dotyczy zagadnień naukowych wpisujących się w przedmiot prowadzonych w Polsce i na świecie intensywnych badań dotyczących modelowania pól sprzężonych. Procesy zgrzewania oporowego punktowego charakteryzują się wieloma cechami uwzględnionymi w modelowaniu:*
  - *niejednorodnością cieplną materiałów, w tym własności elektromagnetycznych, stosowanych do zgrzewania ze względu na niejednorodny rozkład temperatury,*
  - *dużymi trudnościami z dokładnym sformułowaniem w modelu matematycznym warunków granicznych, dotyczących zwłaszcza pola temperatury; stąd przeprowadzono rejestrację pól temperatury metodą termograficzną z jednoczesną weryfikacją pomiaru temperatury innymi metodami (np. przy zastosowaniu termopar),*
  - *silnym sprzężeniem ze sobą pól fizycznych (np. temperatury, elektromagnetycznymi i mechanicznymi),*

- *istnieniem pól nieliniowych, a w przypadku materiałów ferromagnetycznych występowaniem silnego nasycenia magnetycznego.*

W opracowanym modelu matematycznym procesu zgrzewania oporowego punktowego przyjęto następujące założenia:

- *praktycznie nie występują zewnętrzne źródła pola magnetycznego oddziałujące przez indukcję na obwód wtórny zgrzewania,*
- *w przypadku zgrzewania prądem przemiennym pominięto podobnie jak w przypadku prądu stałego stany przejściowe (nieustalone) i ograniczono się do quasi-statycznego przybliżenia równań elektrodynamiki Maxwella,*
- *ograniczono się do przypadku jaki zachodzi, kiedy ośrodek w którym propaguje się pole elektromagnetyczne jest izotropowym i liniowym z uwagi na własności elektromagnetyczne, ale niejednorodnym przewodnikiem elektrycznym; nie występuje zewnętrzne pole magnetyczne, ale jest wytwarzane wyłącznie przez samoindukcję, pominięto zjawisko Halla,*
- *uzyskano ogólny opis matematyczny procesu zgrzewania oporowego punktowego, uwzględniający opis pola elektromagnetycznego zarówno dla stanu ciekłego, jak i stałego;*

- obliczenia numeryczne wybranego modelu zrealizowane przy zastosowaniu komercyjnego kodu ANSYS Inc. (wersja akademicka),
- badania doświadczalne obejmujące: próby zgrzewania elementów z wybranych materiałów z jednoczesnym pomiarem rozkładu temperatury stosując metodę termograficzną; pomiary temperatury w wybranych punktach przy zastosowaniu termopar; pomiar kształtu i wymiarów zgrzein oraz pomiar przemieszczeń ruchomej elektrody zgrzewarki oraz parametrów dynamicznych zgrzewania.

Przedstawione badania prowadzone były przez autora, głównie w ramach projektów badawczych nr 7 S201 044 04 i 7 T08C 051 19, finansowanych przez Komitet Badań Naukowych.

Modele matematyczne zjawisk fizycznych zachodzących podczas zgrzewania oporowego punktowego

Transport materii, pędu i energii w procesach zgrzewania oporowego punktowego

Pakiet kodów programowych ANSYS zastosowany do obliczeń metodą elementów skończonych

Układ równań rozwiązywanego modelu procesu zgrzewania oporowego punktowego

4. Modele matematyczne zjawisk fizycznych zachodzących podczas punktowego zgrzewania oporowego

4.1. Wstęp

W cyklu zgrzewania oporowego punktowego materiałów można wyróżnić następujące fazy procesu:

- docisku zgrzewanych materiałów za pośrednictwem elektrod,
- przepływu prądu elektrycznego doprowadzonego przez elektrody,
- krzepnięcia i krystalizacji (zestalania się ciekłego jądra zgrzeiny).

W fazie przepływu prądu obserwuje się dwa okresy, podczas których pod wpływem przepływającego prądu w obwodzie elektroda-materiały-elektroda wydziela się ciepło:

- na występujących stykach:
  - elektroda-materiał,
  - materiał-materiał,
- oporu przewodzenia w elektrodach i zgrzewanych elementach.

Część wydzielonego ciepła odprowadzana jest na zewnątrz za pośrednictwem chłodzonych elektrod oraz jego wymiany z otoczeniem. Znacząca jednak część powoduje lokalny wzrost temperatury aż do powstania ciekłego jądra, w którym obserwuje się płynięcie materiałów pod działaniem sił przyłożonego pola elektrycznego oraz wymianę ciepła z tą częścią zgrzewanych materiałów, która pozostaje w fazie stałej. Między fazami (stałą (S) i ciekłą (L)) występuje dwufazowa strefa przejściowa (L+S). Odłączenie zasilania prądem początkuje krzepnięcie i krystalizację ciekłego jądra aż do całkowitego ostygnięcia. W ten sposób powstaje trwałe połączenie zgrzewanych materiałów.

Występujące zjawiska są wzajemnie powiązane, a ich opis matematyczny jest niezwykle skomplikowany, nawet jeśli pominąć przemiany fazowe w stałym stanie skupienia. Opis ten, w ujęciu fenomenologicznym przedstawiony we współrzędnych Eulera, jak zaproponowano w dalszej części pracy, prowadzi do układu sprzężonych nieliniowych cząstkowych równań różniczkowych o zmiennych współczynnikach. Są to okoliczności, z którymi do tej pory nie uporała się współczesna matematyka. Dlatego w pracy starano się doprowadzić do racjonalnych uproszczeń, pozwalających

na uzyskiwanie przybliżonych rozwiązań numerycznych, bazujących na metodzie elementów skończonych, w oparciu o dostępny profesjonalny kod znanego pakietu programów ANSYS Inc.

Obok ograniczeń klasy rozwiązywalnych zadań (zagadnień brzegowych i początkowych) narzucanych przez ANSYS, poważnym ograniczeniem były warunki, czy też możliwości techniczne dostępnego sprzętu, nie pozwalającego na tak poważne obliczenia.

4.2. Pole elektromagnetyczne w procesie punktowego zgrzewania oporowego

4.2.1. Wstęp

W przypadku zgrzewania oporowego metali zachodzi potrzeba opisu propagacji pola elektromagnetycznego towarzyszącego przepływowi prądu stałego i zmiennego, o niskiej częstotliwości (zgrzewanie prądem stałym i przemiennym harmonicznie o częstotliwości 50 Hz) w ośrodkach przewodzących (elektrody, zgrzewane elementy) o zróżnicowanych własnościach magnetycznych. W obwodach elektrycznych prądu stałego i zmiennego o niskiej częstotliwości pobierana ze źródła energia elektryczna kierowana jest do odbiornika, jakim są zgrzewane materiały, za pośrednictwem przewodnika w postaci elektrod. Występujące pola elektryczne oraz stowarzyszone magnetyczne (indukowane przez przepływający prąd) w zasadzie nie wychodzą poza niewielki obszar powietrza atmosferycznego wokół elektrod i zgrzewanych materiałów. W trakcie zgrzewania oporowego za pośrednictwem elektrod przykładane jest zewnętrzne źródło pola elektrycznego i praktycznie nie ma zewnętrznego źródła pola magnetycznego, oddziałującego na powstały obwód. Przy tym znacząca część zaangażowanej w proces energii elektrycznej wydziela się w postaci ciepła Joule'a-Lenza na stykach oraz w przewodzącej objętości zgrzewanych materiałów, a tylko w niewielkim stopniu w objętości elektrod, dzięki właściwemu doborowi ich materiałów. Energię wypromieniowywaną do otoczenia przez pole elektromagnetyczne w stanach przejściowych (nieustalonych), zgrzewania prądem stałym i przemiennym oraz przy przepływie prądu harmonicznego o niskiej częstotliwości, chociażby ze względu na mały zasięg i moc pola elektromagnetycznego oraz własności otaczającego powietrza (dobry dielektryk i diamagnetyk), zaniedbano, np. [200]. Natomiast wypromieniowywaną energię cieplną pominięto z uwagi na krótki czas zgrzewania i osiągane temperatury na powierzchniach zgrzewanych elementów. Z punktu widzenia teorii obwodów elektrycznych zgrzewanie oporowe jest kontrolowanym stanem zwarcia przepływowego pola elektrycznego o niskim (bezpiecznym) napięciu 1÷15 V i prądzie przewodzenia rzędu 1÷30 kA, zlokalizowanym, w tym przypadku, "punktowo". Z powodu znacznie wyższej inercji sprzężonych pól mechanicznych oraz pola temperatury, przy niemal "impulsowym charakterze" prądowego źródła

ciepła, dochodzi do lokalnego wzrostu temperatury (powyżej temperatury topnienia) w tworzącym się jądrze zgrzeiny, a po ostygnięciu do trwałego połączenia zgrzewanych elementów. Mimo bardzo krótkiego kontrolowanego czasu zgrzewania rzędu 0,02÷3 s jest on i tak dostatecznie duży w porównaniu do wspomnianego dalej współczynnika relaksacji (4.25), charakteryzującego czas ustalania się stanów przejściowych (w przypadku metali około $10^{-18} \div 10^{-19}$ s).

Dlatego zarówno w przypadku zgrzewania prądem stałym, jak i przemiennym zaniedbano stany przejściowe, ograniczając się do quasi-statycznego przybliżenia makroskopowych równań elektrodynamicznych Maxwella w ośrodku materialnym.

Dalej ograniczono się do okoliczności, jakie w rzeczywistości mają miejsce, kiedy ośrodek, w którym propaguje się pole elektromagnetyczne, jest izotropowy i liniowy z uwagi na własności elektromagnetyczne, lecz niejednorodnym termicznie przewodnikiem elektrycznym, a pole magnetyczne powstaje wyłącznie przez samoindukcję (indukcję własną).

Uczestniczące w procesie zgrzewania metale:

- elektrody ze stopów miedzi,
- zgrzewane elementy (stale, metale nieżelazne itp.),

są bardzo dobrymi lub dobrymi przewodnikami pierwszego rodzaju, np. [112, 144], ale mają bardziej zróżnicowane własności magnetyczne.

Interesującym nas dalej ośrodkiem materialnym będą wyłącznie przewodzące tworzywa metaliczne, zwane potocznie metalami, tzn. pierwiastki metaliczne i ich stopy. Pojęcie metalu jest w tym przypadku pewnym skrótem myślowym, przez który należy rozumieć substancję występującą w danych warunkach w stanie metalicznym, wynikającym ze szczególnej budowy elektronowej i krystalicznej charakteryzującej się [137]:

- elektronowym charakterem przewodnictwa elektrycznego z ujemnym współczynnikiem temperatury,
- występowaniem wiązań metalicznych jako jedynych lub współistniejących z innymi typami wiązań.

Ze względu na potoczne rozumienie pojęcia metali ograniczono się dalej do przewodników, dla których pasma energetyczne ich elektronów: pasmo przewodnictwa i pasmo walencyjne nakładają się, tworząc strefy niecałkowicie zajętych stanów, łatwo dostępnych dla elektronów. W stanie metalicznym obok pierwiastków metalicznych występują również ich stopy, tzn. połączenia o określonym składzie dwóch lub więcej pierwiastków, spośród których przynajmniej jeden jest metalem. Dzięki temu stopy mają również cechy metaliczne. Metale w stanie stałym wykazują określoną mikrostrukturę, z wyjątkiem specjalnie otrzymywanych stopów amorficznych. W opisie pola elektromagnetycznego z konieczności pominięto obecność i wpływ mikrostruktury. Jak to zostanie przedstawione w dalszej części pracy, pominięto ją również w odniesieniu do pozostałych pól fizycznych. Ten obszar badań nad zachowaniem się pola

elektromagnetycznego w tego typu ośrodkach dotychczas nie został wystarczająco dobrze poznany i udokumentowany.

Własności elektryczne materiałów charakteryzuje przewodność elektryczna σ oraz przenikalność ε. Przewodność elektryczna charakteryzuje zdolność materiału do przewodzenia prądu elektrycznego dzięki ruchowi nośników ładunków elektrycznych - elektronów. Natomiast przenikalność elektryczna jest miarą zdolności osłabienia wpływu zewnętrznego pola elektrycznego, a także zdolności do koncentracji energii w materiale. Łącznie obie własności elektryczne materiałów charakteryzują:

- współczynnik relaksacji τ (4.25),
- współczynnik stratności elektrycznej $tg\delta$, charakteryzujący zdolność do wydzielania ciepła w określonym materiale [144].

Z powyższego wynika, że współczynnik stratności elektrycznej jest ważną miarą zdolności materiałów do tworzenia połączeń zgrzewanych elektrycznie.

Elektrody najczęściej wykonywane są z typowych diamagnetyków, natomiast zgrzewane elementy są ferromagnetykami lub rzadziej paramagnetykami, czy też diamagnetykami.

W zależności od wartości względnej przenikalności magnetycznej (4.21) μ_r materiały dzielą się na trzy grupy [111, 144]:

1. diamagnetyki - dla których μ_r jest nieznacznie mniejsze 1 ($\mu_r < 1$),
2. paramagnetyki - dla których μ_r jest nieznacznie większe 1 ($\mu_r > 1$),
3. ferromagnetyki - dla których μ_r jest znacznie większe 1 ($\mu_r >> 1$).

Dla niektórych ferromagnetyków μ_r osiąga wartości nawet rzędu 10^4 w przypadku czystego Fe (0,01% domieszek), podczas gdy w przypadku dia- i paramagnetyków przenikalność magnetyczna μ tych materiałów nieznacznie różni się od przenikalności magnetycznej próżni μ_0. Na przykład, stosowane na elektrody stopy miedzi są typowymi diamagnetykami (dla Cu $\mu_r = 0,999968$), a najczęściej zgrzewane stopy żelaza (stale) są lepszymi lub gorszymi ferromagnetykami, w zależności od rodzaju i udziału dodatków stopowych. Do ciał ferromagnetycznych należą metale Fe, Co, Ni oraz ich stopy z Mn, Al, Cr, Si, stopy Henslera zawierające Cu, Mn, Al i inne. Dla odmiany, zgrzewane aluminium ($\mu_r = 1,000021$) i jego stopy są typowymi paramagnetykami. W przypadku ferromagnetyków dodatkowymi utrudnieniami są:

- niejednoznaczność zależności $\mathbf{B}(\mathbf{H}, T)$ opisywana jako tzw. "pętla histerezy" o nieskończenie wielu postaciach,
- istnienie możliwości trwałego namagnesowania,
- możliwość wystąpienia anizotropii i magnetostrykcji,
- utrata własności magnetycznych powyżej temperatury Curie T_C (w przypadku stali $T_C = 768^oC$).

Mimo możliwości wystąpienia znacznych gradientów temperatury, zachodzące zjawisko termoelektryczne pominięto, ponieważ towarzysząca mu siła elektromotoryczna jest znacznie mniejsza od występującego natężenia pola

elektrycznego (różnica wielkości rzędu $\sim 10^3$), wywołanego przyłożeniem napięcia zewnętrznego.

W ogólnym przypadku niejednorodnego pola elektromagnetycznego zachodzą następujące związki fizyczne:

- dla wartości natężenia pola elektrycznego $\mathbf{E}$, jakie występuje przy zgrzewaniu:

$$\varepsilon_r(\mathbf{r}) = \varepsilon_r(\mathbf{E}, T) \simeq \varepsilon_r(T)\,,$$

$$\sigma(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{E}, T) \simeq \sigma(T)\,,$$

- w odniesieniu do zgrzewania dia- i paramagnetyków:

$$\mu_r(\mathbf{r}) = \mu_r(\mathbf{H}, T) \simeq \mu_r(T)\,,$$

- w odniesieniu do ferromagnetyków:

$$\mu_r(\mathbf{r}) = \mu_r(\mathbf{H}, T)\,,$$

w których dalej pominięto wpływ natężenia pól elektromagnetycznych $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ w procesie zgrzewania oporowego, ze względu na zbyt małe ich wartości, aby mogły mieć, obok temperatury T, wpływ na własności materiałów.

W dalszych rozważaniach ograniczono się zatem do występującej niejednorodności z uwagi na pole temperatury $T(\mathbf{r})$ ośrodka (niejednorodność termiczna). Niejednorodność tę uwzględniono w wykonanych obliczeniach na tyle, na ile pozwala na to dostępność odpowiednich danych materiałowych. Anizotropia praktycznie nie występuje.

W liniowym, elektromagnetycznie niejednorodnym, izotropowym przewodzącym ośrodku materialnym, poruszającym się z prędkością $\boldsymbol{v}$, niestacjonarne zjawiska elektromagnetyczne opisuje układ równań makroskopowych Maxwella [93, 101, 144, 156, 159, 200], przystosowanych przez Hertza [93] do ośrodków znajdujących się w ruchu ze stałą prędkością. Wyłącznie w tym przypadku równania można otrzymać formalnie, zastępując w nich pochodną cząstkową po czasie $\frac{\partial}{\partial t}$ pełną pochodną substancjonalną (materialną) [110, 149, 156]:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{v}^T \cdot grad) = \frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{v}^T \cdot \nabla^T) \tag{4.1}$$

i korzystając z dodatkowej tożsamości wektorowej (A27). Ogólniejszy opis dla dowolnego pola prędkości $\boldsymbol{v}$ można uzyskać wychodząc z całkowej postaci zapisu makroskopowych równań Maxwella, np. [93, 144, 149, 200] oraz zależności na pochodną materialną całki powierzchniowej pola wektorowego i objętościowej pola skalarnego [149]:

- prawo przepływu Ampere'a z poprawką Maxwella na prąd przesunięcia (II prawo Maxwella):

$$\oint_C \mathbf{H}^\star \cdot d\mathbf{x} = \int_{S(C)} \mathbf{j}^\star \cdot d\mathbf{s} + \frac{d}{dt} \int_{S(C)} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}\,, \tag{4.2}$$

- prawo indukcji Faradaya - Maxwella (I prawo Maxwella) :

$$\oint_C \mathbf{E}^\star \cdot d\mathbf{x} = -\frac{d}{dt}\int_{S(C)} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}\,, \tag{4.3}$$

- I prawo Gaussa:

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s} = \int_V q\,dV\,, \tag{4.4}$$

- II prawo Gaussa:

$$\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = 0\,, \tag{4.5}$$

- prawo zachowania ładunku (równanie ciągłości prądu) [93, 200] w alternatywnych postaciach:

$$\oint_S \mathbf{j}^\star \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt}\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s} \tag{4.6}$$

lub

$$\oint_S \mathbf{j}^\star \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt}\int_V q\,dV \tag{4.7}$$

oraz wykorzystując użyteczne definicje pochodnych całek:

- pochodna substancjonalna (materialna) całki powierzchniowej w ośrodku poruszającym się z prędkością $\boldsymbol{v}$, strumienia pola wektorowego $\mathbf{A}$ przez powierzchnię S rozpiętą na konturze materialnym (zamkniętej krzywej materialnej) C [149]:

$$\frac{d}{dt}\int_{S(C)} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = \int_{S(C)} [\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{A}\,div\,\boldsymbol{v} - (\mathbf{A}^T\cdot grad)\,\boldsymbol{v}]\cdot d\mathbf{s} =$$

$$= \int_{S(C)} [\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}^T\cdot\nabla^T)\mathbf{A} + \mathbf{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) - (\mathbf{A}^T\cdot\nabla^T)\boldsymbol{v}]\cdot d\mathbf{s} =$$

$$= \int_{S(C)} [\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \boldsymbol{v}(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla\times(\boldsymbol{v}\times\mathbf{A})]\cdot d\mathbf{s}$$

a ponadto dla pola bezźródłowego $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$ i dlatego:

$$\frac{d}{dt}\int_{S(C)} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = \int_{S(C)} [\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\times(\boldsymbol{v}\times\mathbf{A})]\cdot d\mathbf{s}\,, \tag{4.8}$$

- pochodna substancjonalna całki objętościowej w ośrodku poruszającym się z prędkością $\boldsymbol{v}$ pola skalarnego a [110, 149] po zastosowaniu twierdzenia Gaussa - Ostrogradskiego:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} a\,dV = \int_{V(t)} (\frac{da}{dt} + a\,\nabla\cdot\boldsymbol{v}^T)dV = \int_{V(t)} [\frac{\partial a}{\partial t} + \nabla\cdot(a\,\boldsymbol{v}^T)]dV\,. \tag{4.9}$$

Należy przy tym pamiętać, że pola wektorowe indukcji $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ oraz gęstości prądu $\mathbf{j}$ i ładunku q są materialne, np. [149].

Korzystając z twierdzenia Stokesa np. [93, 144, 149, 200] oraz zależności (4.8 ÷ 4.9), po uwzględnieniu praw Gaussa (4.12) i bezźródłowości pola magnetycznego (4.13), otrzymano zapisaną niżej postać różniczkową układu równań Maxwella. Należy przy tym zauważyć, że w literaturze przedmiotu (modelowania matematycznego procesów punktowego zgrzewania oporowego) stosowany jest opis wyłącznie w oparciu o równanie Maxwella dla ośrodka pozostającego w stanie spoczynku ("model ciała stałego"). Podejście takie formalnie błędne daje poprawny opis pola elektromagnetycznego w obszarze fazy stałej (ciała stałego), gdzie $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Co do konsekwencji takiego uproszczenia opisu w obszarze występowania fazy ciekłej (L) i mieszaniny faz stałej i ciekłej (L+S) (ciekłe jądro zgrzeiny) trudno jest obecnie wypowiadać się bez odpowiednich badań porównawczych.

W równoważnej postaci różniczkowej, równania (4.2÷4.7) można zapisać następująco:

- prawo przepływu Ampere'a z poprawką Maxwella na prąd przesunięcia (II prawo Maxwella) :

$$rot\,(\mathbf{H}^\star + \boldsymbol{v}\times\mathbf{D}) = \mathbf{j}^\star + q\boldsymbol{v} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\,, \tag{4.10}$$

- prawo indukcji Faradaya - Maxwella (I prawo Maxwella):

$$rot\,(\mathbf{E}^\star - \boldsymbol{v}\times\mathbf{B}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,, \tag{4.11}$$

- I prawo Gaussa (źródłem pola elektrycznego są ładunki elektryczne):

$$div\,\mathbf{D} = q\,, \tag{4.12}$$

- II prawo Gaussa (pole magnetyczne jest bezźródłowe):

$$div\,\mathbf{B} = 0\,, \tag{4.13}$$

- pierwsze prawo Kirchhoffa zapisane lokalnie (równanie ciągłości prądu):

$$div\,(\mathbf{j}^\star + q\boldsymbol{v} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) = 0 \tag{4.14}$$

lub

$$div\,(\mathbf{j}^\star + q\boldsymbol{v}) = -\frac{\partial q}{\partial t}\,, \tag{4.15}$$

uzupełnione o konstytutywne równania materiałowe [93, 101, 144, 149, 156, 200] w spoczynkowym układzie odniesienia, odpowiednio:

$$\mathbf{D} = \varepsilon(T)\mathbf{E} \tag{4.16}$$

oraz jeśli chodzi o własności magnetyczne:

$$\mathbf{B} = \mu(T)\mathbf{H} \tag{4.17}$$

dla dia- i paramagnetyków, a także słabych pól magnetycznych w ferromagnetykach, wygenerowanych przez samoindukcję (dopuszczalna linearyzacja) i:

$$\mathbf{B} = \mu(\mathbf{H}, T)\mathbf{H}, \tag{4.18}$$

w przypadku typowych ferromagnetyków.
Ponadto równania (4.10÷4.18) uzupełniono o prawo Ohma dla pola elektrycznego w ośrodku poruszającym się z lokalną prędkością $\boldsymbol{v}$:

$$\mathbf{j}^{\star} = \sigma\mathbf{E}^{\star}, \tag{4.19}$$

przy braku prądów i ładunków wzbudzających oraz braku prądu konwekcji, zaniedbaniu zjawiska termoelektrycznego oraz pominięciu efektu Thomsona i zjawiska Peltiera - ponieważ mają niewielki wpływ na wielkość wypadkowego prądu, a tym samym na ilość ciepła generowanego w jednostce objętości ośrodka i odpowiednio na styku metali [101], gdzie:

t - czas; s,

$\boldsymbol{v}$ - pole prędkości ośrodka ($|\boldsymbol{v}| \ll c$); m/s,

$\mathbf{E}$ - pole wektorowe natężenia pola elektrycznego ośrodka pozostającego w stanie spoczynku; V/m,

$\mathbf{E}^{\star}$ - pole wektorowe natężenia pola elektrycznego w układzie odniesienia poruszającym się z lokalną prędkością $\boldsymbol{v}$; V/m,

$\mathbf{D}$ - pole wektorowe indukcji elektrycznej ośrodka pozostającego w stanie spoczynku; C/m^2,

$\mathbf{D}^{\star}$ - pole wektorowe indukcji elektrycznej w układzie odniesienia poruszającym się z lokalną prędkością $\boldsymbol{v}$; C/m^2,

$\mathbf{H}$ - pole wektorowe natężenia pola magnetycznego ośrodka pozostającego w stanie spoczynku; A/m,

$\mathbf{H}^{\star}$ - pole wektorowe natężenia pola magnetycznego w układzie odniesienia poruszającym się z lokalną prędkością $\boldsymbol{v}$; A/m,

$\mathbf{B}$ - pole wektorowe indukcji magnetycznej ośrodka pozostającego w stanie spoczynku; T,

$\mathbf{B}^{\star}$ - pole wektorowe indukcji magnetycznej w układzie odniesienia poruszającym się z lokalną prędkością $\boldsymbol{v}$; T,

$\mathbf{j}$ - pole wektorowe gęstości prądu przewodzenia ośrodka pozostającego w stanie spoczynku; A/m^2,

$\mathbf{j}^{\star}$ - pole wektorowe gęstości prądu przewodzenia w układzie odniesienia poruszającym się z lokalną prędkością $\boldsymbol{v}$; A/m^2,

ε - przenikalność elektryczna ośrodka; F/m,

μ - przenikalność magnetyczna ośrodka; H/m,

σ - przewodność elektryczna (konduktywność skrośna) ośrodka; $S/m(\frac{1}{\Omega m})$,

q - wypadkowa gęstość swobodnych ładunków elektrycznych (elektronów swobodnych oraz uwolnionych wskutek elektryzacji); C.

Jak zapisano powyżej, w ośrodku poruszającym się z prędkością $\boldsymbol{v}$, natężenie pola elektrycznego zawiera dodatkowo składową pochodzącą, w naszym przypadku, od pola samoindukcji magnetycznej: $(\boldsymbol{v} \times \mathbf{B})$ [144, 159, 200]. Odosobniony przewodnik wiodący prąd elektryczny indukuje pole magnetyczne, którego indukcja własna $\mathbf{B}$ ma na jego powierzchni jedynie składową styczną. Dlatego gęstość siły działającej na znajdujący się w ruchu ośrodek jest skierowana do wnętrza przewodnika. Zatem własne pole magnetyczne przewodnika wytwarza siły ściskające, utrzymujące ładunki w jego wnętrzu - przeciwdziałając między innymi siłom kulombowskim [144]. Jest to znane zjawisko samoskurczu (pinch effect), nie mające większego znaczenia dla fazy stałej, ale istotne w obszarze płynnego jądra zgrzeiny. Zjawisko to, będące efektem dodatkowej składowej pola elektrycznego $(\boldsymbol{v} \times \mathbf{B}) = (\boldsymbol{v} \times \mu\mathbf{H})$, nazywanej polem Halla [144], przy małych prędkościach płynięcia $\boldsymbol{v}$ jądra zgrzeiny i małej indukcji magnetycznej $\mathbf{B}$ w dia- i paramagnetykach, a nawet przy małym natężeniu pola magnetycznego $\mathbf{H}$ samoindukcji w ferromagnetykach, można również pominąć, gdyż nie wnosi istotnego udziału w bilansie mocy wydzielanego ciepła Joule'a-Lenza. Wpływa natomiast na kształtowanie się ciekłego jądra zgrzeiny oraz transport składników stopowych.

Przenikalność elektryczną ośrodka ε i jego przenikalność magnetyczną μ można wyrazić przez odpowiednie wartości ε_0 i μ_0 w próżni, wprowadzając wartości względne:

$$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r, \tag{4.20}$$

$$\mu = \mu_0\mu_r. \tag{4.21}$$

Przy tym:

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}, \tag{4.22}$$

gdzie:

$\mu_0 \simeq 4\pi \cdot 10^{-7}$; H/m, - w próżni,

$\varepsilon_0 \simeq \frac{1}{36}\pi 10^{-9}$; F/m, - w próżni,

c - prędkość propagacji fali elektromagnetycznej w próżni
$c \simeq (2,997925 + 0,000003) \cdot 10^8$; m/s,

ε_r - względna przenikalność elektryczna ośrodka,

μ_r - względna przenikalność magnetyczna ośrodka.

Własności materialne konkretnego ośrodka, obok względnych przenikalności ε_r i μ_r opisywane są również przez podanie podatności elektrycznej:

$$\kappa_e = \varepsilon_r - 1 \tag{4.23}$$

oraz podatności magnetycznej:

$$\kappa_m = \mu_r - 1\,, \tag{4.24}$$

jako miary jego zdolności do polaryzacji oraz magnetyzacji.

Ważną wielkością charakteryzującą własności elektryczne ośrodka jest współczynnik relaksacji:

$$\tau = (\frac{\varepsilon}{\sigma})\,, \tag{4.25}$$

będący w przewodniku miarą szybkości zaniku lub narastania pola elektromagnetycznego (np. w przypadku dobrego przewodnika, jakim jest miedź $\tau_{Cu} \simeq 10^{-19}$ s).

Współczynnik relaksacji (4.25) jest bowiem miarą przemieszczania się ku powierzchni niezrównoważonych ładunków elektrycznych. W przewodnikach metalicznych proces wypierania nadmiarowego ładunku ku powierzchni jest praktycznie natychmiastowy. Wynika to wprost z postaci równania ustalania się stanu przejściowego rozkładu gęstości ładunków swobodnych, np. [144]:

$$q(\mathbf{r}, t) = q_0(\mathbf{r})\, e^{-t/\tau}\,,$$

gdzie:

$\mathbf{r}$ - wektor położenia punktu materialnego,

$q_0(\mathbf{r})$ - początkowy rozkład gęstości ładunków ($q_0(\mathbf{r}) = q(\mathbf{r}, 0)$).

Dlatego pominięcie w rozważaniach stanów przejściowych pola elektromagnetycznego, nawet w przypadku zgrzewania prądem zmiennym, jest w pełni uzasadnione.

W spoczynkowym układzie odniesienia równania (4.10÷4.15) oraz (4.19) przyjmują znaną z literatury postać [93, 95, 144, 156, 159], [200]:

$$rot\,\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\,, \tag{4.26}$$

$$rot\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,, \tag{4.27}$$

$$div\,\mathbf{D} = q\,, \tag{4.28}$$

$$div\,\mathbf{B} = 0\,, \tag{4.29}$$

$$div\,(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) = 0 \tag{4.30}$$

lub

$$div\,\mathbf{j} = -\frac{\partial q}{\partial t} \tag{4.31}$$

oraz:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}\,. \tag{4.32}$$

Z porównania postaci pierwszego i drugiego równania Maxwella (4.10, 4.11) oraz (4.26, 4.27) wynika, że zachodzą związki:

$$\mathbf{H}^\star + \boldsymbol{v} \times \mathbf{D} = \mathbf{H}\,, \tag{4.33}$$

$$\mathbf{E}^\star - \boldsymbol{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{E}\,, \tag{4.34}$$

$$\mathbf{j}^\star + q\boldsymbol{v} = \mathbf{j}\,, \tag{4.35}$$

z których obliczono:

$$\mathbf{H}^\star = \mathbf{H} - \boldsymbol{v} \times \mathbf{D}\,, \tag{4.36}$$

$$\mathbf{E}^\star = \mathbf{E} + \boldsymbol{v} \times \mathbf{B}\,, \tag{4.37}$$

$$\mathbf{j}^\star = \mathbf{j} - q\boldsymbol{v}\,. \tag{4.38}$$

Ponieważ zachodzi (4.19) i spełnione są zależności (4.37÷4.38), więc:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \boldsymbol{v} \times \mathbf{B}) + q\boldsymbol{v}. \tag{4.39}$$

Jest to znana z literatury [93, 101, 144, 156, 159, 200] postać uogólnionego prawa Ohma, które po uwzględnieniu równania (4.17) oraz faktu, że dla interesujących nas temperatur w przewodnikach metalowych nie występuje prąd konwekcyjny ($q\boldsymbol{v} = 0$), można zapisać w postaci równania:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \boldsymbol{v} \times \mu\mathbf{H}). \tag{4.40}$$

Uwzględniając powyższe, zapisano układ równań przepływowego pola elektromagnetycznego względem równań odniesionych do układu spoczynkowego: natężenia pola elektrycznego $\mathbf{E}$ i natężenia pola magnetycznego $\mathbf{H}$ indukcji własnej, w postaci:

$$rot\,\mathbf{H} = \sigma(\mathbf{E} + \boldsymbol{v} \times \mu\mathbf{H}) + \varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{4.41}$$

$$rot\,\mathbf{E} = -\mu\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{4.42}$$

$$div(\mu\mathbf{H}) = 0, \tag{4.43}$$

$$div\,[\sigma(\mathbf{E} + \boldsymbol{v} \times \mu\mathbf{H}) + \varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}] = 0. \tag{4.44}$$

Zmienność pola elektromagnetycznego w czasie uwzględniono przy zgrzewaniu prądem zmiennym harmonicznie o niskiej częstotliwości $f = 50$ Hz. Mamy tu do czynienia z sytuacją, kiedy z powodu niskiej częstotliwości, długości odpowiadających jej fal elektromagnetycznych są znacznie większe od rozmiarów obwodu zgrzewania (elektrody - zgrzewane elementy). Ponadto, z podobnych jak w przypadku prądu stałego względów, pominięto w opisie zgrzewania prądem harmonicznym stany przejściowe. Dla takiego quasi-stacjonarnego przypadku pola elektromagnetycznego o zmienności cosinusoidalnej układ makroskopowych równań Maxwella (4.41÷4.44) można zapisać w postaci [95, 116, 144, 200]:

$$rot\,\overline{\mathbf{H}} = \sigma(\overline{\mathbf{E}} + \boldsymbol{v} \times \mu\overline{\mathbf{H}}) + i\omega\varepsilon\overline{\mathbf{E}}, \tag{4.45}$$

$$rot\,\overline{\mathbf{E}} = -i\omega\mu\overline{\mathbf{H}}, \tag{4.46}$$

$$div\,(\mu\overline{\mathbf{H}}) = 0, \tag{4.47}$$

$$div\,[\sigma(\overline{\mathbf{E}} + \boldsymbol{v} \times \mu\overline{\mathbf{H}}) + i\omega\varepsilon\overline{\mathbf{E}}] = 0, \tag{4.48}$$

gdzie oznaczono:

ω - częstość kołowa oscylacji prądu zgrzewania ($\omega = 2\pi f$),

i - jednostka urojona ($i = \sqrt{-1}$),

f - częstotliwość prądu zgrzewania

oraz przedstawiono odpowiednie pola wektorowe natężeń w postaci składowej rzeczywistej wektorów wirujących:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})cos[i\omega t + \phi_E(\mathbf{r})] = Re\{\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})exp[i\omega t + \phi_E(\mathbf{r})]\} = \\ &= Re\{[\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})exp\,\phi_E(\mathbf{r})]e^{i\omega t}\} = Re[\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{i\omega t}],\end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{r},t) &= \widehat{\mathbf{D}}(\mathbf{r})cos[i\omega t + \phi_D(\mathbf{r})] = Re\{\widehat{\mathbf{D}}(\mathbf{r})exp[i\omega t + \phi_D(\mathbf{r})]\} = \\ &= Re\{[\widehat{\mathbf{D}}(\mathbf{r})exp\,\phi_D(\mathbf{r})]e^{i\omega t}\} = Re[\overline{\mathbf{D}}(\mathbf{r})e^{i\omega t}],\end{aligned} \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\mathbf{r},t) &= \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r})cos[i\omega t + \phi_H(\mathbf{r})] = Re\{\widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r})exp[i\omega t + \phi_H(\mathbf{r})]\} = \\ &= Re\{[\widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{r})exp\,\phi_H(\mathbf{r})]e^{i\omega t}\} = Re[\overline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})e^{i\omega t}],\end{aligned} \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \widehat{\mathbf{B}}(\mathbf{r})cos[i\omega t + \phi_B(\mathbf{r})] = Re\{\widehat{\mathbf{B}}(\mathbf{r})exp[i\omega t + \phi_B(\mathbf{r})]\} = \\ &= Re\{[\widehat{\mathbf{B}}(\mathbf{r})exp\,\phi_B(\mathbf{r})]e^{i\omega t}\} = Re[\overline{\mathbf{B}}(\mathbf{r})e^{i\omega t}].\end{aligned} \tag{4.52}$$

Przy tym oznaczono przez $\phi_E(\mathbf{r})$, $\phi_D(\mathbf{r}), \ldots$ itd. odpowiednie fazy początkowe ($t = 0$) oraz $\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})exp\,\phi_E(\mathbf{r})$, $\overline{\mathbf{D}}(\mathbf{r}) = \ldots$ itd. odpowiednie zespolone amplitudy początkowe (tzn. odpowiadające chwili $t = 0$). Natomiast symbolem $Re(\ldots)$ zaznaczono składowe rzeczywiste zespolonych wartości wektorów wirujących.

Układ równań (4.41÷4.44) oraz pochodny względem niego układ (4.45÷4.48) - dla pola elektromagnetycznego zmiennego harmonicznie, odnoszą się do bardzo ogólnego przypadku materiałów zgrzewalnych elektrycznie, zarówno przewodników, jak i przewodzących dielektryków. W dalszej części pracy uwagę skoncentrowano na dominującym obszarze zastosowań, tzn. zgrzewania oporowego punktowego przewodzących metali.

Ze względu na potwierdzoną eksperymentalnie wyraźną zależność elektromagnetycznych własności zgrzewanych materiałów od temperatury:

$\sigma(T), \varepsilon(T)$ i $\mu(T)$ (np. [160, 166]), wzięto ją pod uwagę w modelu pola elektromagnetycznego oraz wykonanych obliczeniach. Było to również niezbędne ze względu na "problem styku" materiałów w czasie zgrzewania. Problem ten można bowiem rozpatrywać jako szczególny rodzaj "zlokalizowanej" (miejscowej) niejednorodności albo jako zadanie (zagadnienie) z "wewnętrznymi" warunkami brzegowymi.

4.2.2. Równania opisujące proces zgrzewania prądem stałym

Pomijając stany przejściowe pola elektromagnetycznego, z uwagi na bardzo krótki czas ich zanikania w stosunku do czasu trwania procesu zgrzewania, można przepisać układ równań, opisujących zjawiska elektromagnetyczne związane z przepływem prądu stałego, (4.10, 4.11, 4.13, 4.14) w postaci równań statycznego przepływowego pola elektromagnetycznego [144, 159] prądu stałego z samoindukcją magnetyczną:

$$rot\,\mathbf{H} = \sigma(\mathbf{E} + \boldsymbol{v} \times \mu\mathbf{H}), \tag{4.53}$$

$$rot\,\mathbf{E} = \mathbf{0}, \tag{4.54}$$

$$div\,(\mu\mathbf{H}) = 0, \tag{4.55}$$

$$div\,[\sigma(\mathbf{E} + \boldsymbol{v} \times \mu\mathbf{H})] = 0. \tag{4.56}$$

Jak to można zauważyć, równania (4.53) i (4.56) są sprzężone z powodu obecności składnika $(\boldsymbol{v} \times \mu\mathbf{H})$ związanego z efektem Halla.

Równanie (4.56) można przepisać w postaci:

$$div\,(\sigma\mathbf{E}) + div[\sigma(\boldsymbol{v} \times \mu\mathbf{H})] = 0. \tag{4.57}$$

Z uwagi na (A23) mamy:

$$div[\sigma(\boldsymbol{v} \times \mu\mathbf{H})] = \sigma div\,(\boldsymbol{v} \times \mu\mathbf{H}) + (\boldsymbol{v} \times \mu\mathbf{H}) \cdot grad\,\sigma. \tag{4.58}$$

Ponadto ze względu na (A26) oraz (A27):

$$div\,(\boldsymbol{v}\times\mu\mathbf{H}) = \mu\mathbf{H}\cdot rot\,\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\cdot rot\,(\mu\mathbf{H}) = \mu\mathbf{H}\cdot rot\,\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\cdot(grad\,\mu\times\mathbf{H} + \mu\,rot\,\mathbf{H}), \tag{4.59}$$

a po uwzględnieniu (4.53) otrzymano:

$$div\,(\boldsymbol{v} \times \mu\mathbf{H}) = \mu\mathbf{H} \cdot rot\,\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \cdot [\frac{1}{\mu} grad\,\mu \times \mu\mathbf{H} + (\sigma\,\mu)(\mathbf{E} + \boldsymbol{v} \times \mu\mathbf{H})]. \tag{4.60}$$

Ponieważ: $\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{v} \times \mu\mathbf{H}) = 0$, gdyż: $(\boldsymbol{v} \perp (\boldsymbol{v} \times \mu\mathbf{H}))$, można więc ostatecznie napisać:

$$div[\sigma(\boldsymbol{v}\times\mu\mathbf{H})] = \sigma[\mu\mathbf{H}\cdot rot\,\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\cdot(\frac{1}{\mu} grad\,\mu\times\mu\mathbf{H} + \sigma\mu\mathbf{E})] + (\boldsymbol{v}\times\mu\mathbf{H})\cdot grad\,\sigma. \tag{4.61}$$

Na tej podstawie przekształcono równanie (4.57) do postaci:

$$div\,(\sigma\mathbf{E}) + \sigma[\mu\mathbf{H}\cdot rot\,\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\cdot(\frac{1}{\mu} grad\,\mu\times\mu\mathbf{H} + \sigma\mu\mathbf{E})] + (\boldsymbol{v}\times\mu\mathbf{H})\cdot grad\,\sigma = 0. \tag{4.62}$$

Z równania (4.54) wynika, że natężenie pola elektrycznego $\mathbf{E}$ posiada elektrostatyczny potencjał skalarny Φ, taki że:

$$\mathbf{E} = -grad\,\Phi = -\nabla^T\,\Phi. \tag{4.63}$$

Wprowadzając do równania (4.62) tak zdefiniowany potencjał Φ, po przekształceniach zapisano je w postaci:

$$div\,(\sigma grad\,\Phi) - \sigma^2\mu\boldsymbol{v}\cdot grad\,\Phi = \\ = \sigma[\mu\mathbf{H}\cdot rot\,\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\cdot(\frac{1}{\mu} grad\,\mu\times\mu\mathbf{H})] + (\boldsymbol{v}\times\mu\mathbf{H})\cdot grad\,\sigma \tag{4.64}$$

a po wprowadzeniu niżej zdefiniowanego wektora potencjału pola magnetycznego (4.66) oraz uwzględnieniu tożsamości (A23) uzyskano następującą postać równania:

$$div\,grad\,\Phi + (\frac{1}{\sigma} grad\,\sigma - \sigma\mu\boldsymbol{v})\cdot grad\,\Phi = \\ = rot\,\mathbf{A}\cdot rot\,\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\cdot(\frac{1}{\mu} grad\,\mu\times rot\,\mathbf{A}) + (\boldsymbol{v}\times rot\,\mathbf{A})\cdot\frac{1}{\sigma} grad\,\sigma. \tag{4.65}$$

Z równania (4.55) wynika bowiem, że istnieje wektorowy potencjał pola magnetycznego $\mathbf{A}$, taki że:

$$\mu\mathbf{H} = rot\,\mathbf{A} \tag{4.66}$$

i jak to okaże się niżej, celowe jest, aby potencjał $\mathbf{A}$ był kalibrowanym potencjałem kulombowskim - solenoidalnym, tzn. aby:

$$div\,\mathbf{A} = 0. \tag{4.67}$$

Wprowadzony potencjał $\mathbf{A}$ pozwala przepisać równanie (4.53), z uwzględnieniem potencjału skalarnego (4.63), w postaci:

$$rot\,(\frac{1}{\mu} rot\,\mathbf{A}) - \sigma\boldsymbol{v}\times rot\,\mathbf{A} = -\sigma grad\,\Phi. \tag{4.68}$$

W oparciu o tożsamości (A26 i A32) obliczono:

$$rot\,(\frac{1}{\mu}rot\,\mathbf{A}) = \frac{1}{\mu}(grad\,div\,\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A}) + grad\,(\frac{1}{\mu}) \times rot\,\mathbf{A}\,, \tag{4.69}$$

skąd z uwagi na warunek kalibracji (4.67):

$$rot\,(\frac{1}{\mu}rot\,\mathbf{A}) = -\frac{1}{\mu}\nabla^2\mathbf{A} + grad\,(\frac{1}{\mu}) \times rot\,\mathbf{A}\,. \tag{4.70}$$

Po podstawieniu do (4.68) otrzymano następującą jego postać:

$$\nabla^2\mathbf{A} + \mu[\sigma\boldsymbol{v} - grad\,(\frac{1}{\mu})] \times rot\,\mathbf{A} = \sigma\mu grad\,\Phi\,. \tag{4.71}$$

Ponieważ:

$$\frac{1}{\sigma}grad\,\sigma = \frac{1}{\sigma}(\frac{d\sigma}{dT})grad\,T = (\frac{dln\sigma}{dT})grad\,T$$

oraz:

$$\mu grad\,(\frac{1}{\mu}) = \frac{1}{(\frac{1}{\mu})}grad\,(\frac{1}{\mu}) = [\frac{dln(\frac{1}{\mu})}{dT}]grad\,T = -(\frac{dln\mu}{dT})grad\,T\,,$$

można więc ostatecznie zapisać (4.65) i (4.71) w postaci:

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{A} + [\sigma(T)\mu(T)\boldsymbol{v} + (\frac{dln\mu}{dT})(\nabla^T T)] \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \sigma(T)\mu(T)(\nabla^T\Phi)\,,} \tag{4.72}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla^2\Phi + [(\frac{dln\sigma}{dT})(\nabla^T T) - \sigma(T)\mu(T)\boldsymbol{v}]\cdot(\nabla^T\Phi) = \\ = (\nabla \times \mathbf{A})\cdot(\nabla \times \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}\cdot(\frac{dln\mu}{dT})(\nabla^T T) \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \\ + [\boldsymbol{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})]\cdot(\frac{dln\sigma}{dT})(\nabla^T T)\,.\end{aligned}} \tag{4.73}$$

Układ równań (4.72) i (4.73) opisuje zjawiska elektromagnetyczne przy zgrzewaniu prądem stałym za pomocą potencjałów. Wyjściowy układ czterech równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu (4.53÷4.56) względem pól fizycznych **H** i **E**, łącznie o sześciu składowych w przestrzeni trójwymiarowej, zastąpiono układem dwóch równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu (4.72÷4.73) względem potencjałów **A** i Φ, łącznie tylko o czterech składowych. W ten sposób kosztem podniesienia rzędu układu równań ograniczono rozmiar zadania, co w przypadku obliczeń jest bardzo ważne.

Pierwsze z równań (4.72) opisuje potencjał wektorowy pola magnetycznego samoindukcji wymuszonego przepływem prądu (człon źródłowy po prawej stronie równania). W równaniu tym uwzględniono zarówno niejednorodność termiczną zgrzewanego materiału (wpływ temperatury na własności magnetyczne i elektryczne), jak i wpływ płynięcia materiału w obszarze uplastycznienia fazy stałej i ciekłego jądra zgrzeiny ($\boldsymbol{v}$) oraz gradientów temperatury ($\nabla^T T$) - unoszenie pól potencjałów **A** i Φ przez pole prędkości $\boldsymbol{v}$.

Natomiast drugie z równań (4.73) opisuje sumaryczny potencjał elektrostatyczny pola elektrycznego w zgrzewanych materiałach i elektrodach jako skutek przyłożenia napięcia ze źródła zewnętrznego oraz wskutek wpływu pola samoindukcji magnetycznej (prawa strona równania). Podobnie jak wyżej, również w tym równaniu uwzględniono wpływ niejednorodności termicznej oraz płynięcie materiału.

"Model ciała stałego" pola elektromagnetycznego prądu stałego

Z powodu małych wartości prędkości płynięcia materiału $\boldsymbol{v}$ w jądrze zgrzeiny punktowej [192] (rzędu $0,005\ m/s$), w trakcie obliczeń numerycznych w pierwszym przybliżeniu można pominąć unoszenie pól potencjałów, czyli te wyrazy równań (4.72÷4.73), w których występuje $\boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{v} \approx \mathbf{0}$). W ten sposób otrzymano następujące równania:

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{A} + (\frac{dln\mu}{dT})(\nabla^T T) \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \sigma(T)\mu(T)(\nabla^T\Phi)\,,} \tag{4.74}$$

$$\boxed{\nabla^2\Phi + (\frac{dln\sigma}{dT})(\nabla^T T)\cdot(\nabla^T\Phi) = 0\,.} \tag{4.75}$$

Równania te są identyczne z tymi, jakie opisują izotropowe niejednorodne ciało stałe. Uproszczenie to pozwala na niezależne i samodzielne rozwiązywanie zagadnienia wyłącznie dla pola elektromagnetycznego, rozsprzęgając równania dla potencjałów **A** i Φ.

Bardzo użyteczną właściwością tak uproszczonych równań (4.74÷4.75) jest możliwość niezależnego rozwiązania równania dla potencjału elektrostatycznego (4.75), a następnie (4.74). Potencjał wektorowy pola samoindukcji magnetycznej **A** ma w naszym przypadku drugorzędne znaczenie, jeśli chodzi o efekt energetyczny przepływu prądu. Jest natomiast niezbędny do określenia siły oddziaływania pola elektromagnetycznego na zgrzewane materiały.

4.2.3. Równania opisujące proces zgrzewania prądem zmiennym harmonicznie

W odróżnieniu od przepływu prądu stałego, w przypadku prądu przemiennego występuje zjawisko jego "naskórkowości", np. [80], charakteryzujące się nierównomiernym jego rozkładem i przewodzeniem go tuż przy powierzchni zewnętrznej przewodnika. Przy tym głębokość wnikania prądu w głąb zgrzewanych materiałów określa zależność:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}, \tag{4.76}$$

z której widać, że jest ona tym mniejsza, im wyższa jest częstotliwość prądu, lepsza przewodność oraz lepsza przenikalność magnetyczna. Szczególnie dotyczy to przewodzących ferromagnetyków.

Zjawisko to powoduje nierównomierny, w porównaniu do obrazu przepływu prądu stałego, rozkład gęstości objętościowej mocy źródeł ciepła. Prąd kieruje się (płynie) po drodze najmniejszej impedancji, czyli po zewnętrznych powierzchniach zgrzewanych elementów. Efekt ten sprawia, że zwiększa się rezystancja zgrzewanych elementów w stosunku do rezystancji, jaka wystąpiłaby przy przepływie prądu stałego. Oznacza to również większy, niż w przypadku zgrzewania prądem stałym, wpływ oporu stykowego między:

- powierzchniami roboczymi elektrod a zgrzewanymi elementami,
- zgrzewanymi elementami,

na przebieg i sposób kształtowania się zgrzeiny.

Równania przepływowego wolnozmiennego harmonicznego pola elektromagnetycznego [144, 159], opisujące przebieg zjawisk przy zgrzewaniu prądem zmiennym harmonicznie (f=50 Hz), dla przypadku quasi-stacjonarnego (pominięto stany przejściowe) (4.45÷4.48) można przepisać w postaci:

$$rot\,\overline{\mathbf{H}} = (\sigma + i\omega\varepsilon)\overline{\mathbf{E}} + \sigma(\boldsymbol{v} \times \mu\overline{\mathbf{H}}), \tag{4.77}$$

$$rot\,\overline{\mathbf{E}} = -i\omega\mu\overline{\mathbf{H}}, \tag{4.78}$$

$$div\,(\mu\overline{\mathbf{H}}) = 0, \tag{4.79}$$

$$div\,[(\sigma + i\omega\varepsilon)\overline{\mathbf{E}} + \sigma(\boldsymbol{v} \times \mu\overline{\mathbf{H}})] = 0, \tag{4.80}$$

gdzie:

$\overline{\mathbf{E}}$ - zespolona amplituda początkowa wektora natężenia pola elektrycznego,

$\overline{\mathbf{H}}$ - zespolona amplituda początkowa wektora natężenia pola magnetycznego,

ω - częstość kołowa oscylacji cosinusoidalnych analizowanych pól.

Z równania (4.79) wynika wprost istnienie wektorowego potencjału pola magnetycznego, analogicznie jak w przypadku zgrzewania prądem stałym (4.66), tym razem jednak zespolonego dynamicznego potencjału wektorowego $\overline{\mathbf{A}}$ (4.106) pola magnetycznego:

$$\mu\overline{\mathbf{H}} = rot\,\overline{\mathbf{A}}. \tag{4.81}$$

Podobnie jak wyżej założono, że jest to potencjał kulombowski (pole bezźródłowe), spełniający warunek kalibracji analogiczny do (4.67):

$$div\,\overline{\mathbf{A}} = 0. \tag{4.82}$$

Podstawiając (4.81) do (4.78), po przekształceniach otrzymano:

$$rot\,(\overline{\mathbf{E}} + i\omega\overline{\mathbf{A}}) = 0. \tag{4.83}$$

Skąd wprost wynika istnienie dynamicznego potencjału harmonicznego pola elektrycznego $\overline{\Phi}$:

$$\overline{\mathbf{E}} = -[(i\omega\overline{\mathbf{A}} + (\nabla^T\overline{\Phi})]. \tag{4.84}$$

Jak widać, amplituda $\overline{\mathbf{E}}$ natężenia pola elektrycznego jest sumą dynamicznego potencjału wektorowego pola magnetycznego $\overline{\mathbf{A}}$ samoindukcji oraz dynamicznego elektrycznego potencjału skalarnego $\overline{\Phi}$. W odróżnieniu od potencjału statycznego skalarny potencjał dynamiczny $\overline{\Phi}$ pola elektrycznego na ogół jest funkcją czasu, np. [144] lub odpowiednio częstotliwości. Zależność taka dla dynamicznego potencjału magnetycznego $\overline{\mathbf{A}}$ jest oczywista.

Wprowadzając potencjały (4.81) i (4.84) do równań (4.77) i (4.80), otrzymano:

$$rot\,(\frac{1}{\mu}rot\,\overline{\mathbf{A}}) = -(\sigma + i\omega\varepsilon)[(i\omega\overline{\mathbf{A}} + (\nabla^T\overline{\Phi})] + \sigma(\boldsymbol{v} \times rot\,\overline{\mathbf{A}}), \tag{4.85}$$

$$div\,\{-(\sigma + i\omega\varepsilon)[(i\omega\overline{\mathbf{A}} + (\nabla^T\overline{\Phi})] + \sigma(\boldsymbol{v} \times rot\,\overline{\mathbf{A}})\} = 0. \tag{4.86}$$

Lewą stronę równania (4.85) przekształcono, biorąc pod uwagę zależność analogiczną do (4.70), lecz dla potencjału $\overline{\mathbf{A}}$, a następnie przepisano w postaci:

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla^2\overline{\mathbf{A}} + [\sigma(T)\mu(T)\boldsymbol{v} + (\frac{dln\mu}{dT})(\nabla^T T)] \times (\nabla \times \overline{\mathbf{A}}) - i\omega[\sigma(T) + i\omega\varepsilon(T)]\mu(T)\overline{\mathbf{A}} = \\ = [\sigma(T) + i\omega\varepsilon(T)]\mu(T)(\nabla^T\overline{\Phi}).\end{aligned}} \tag{4.87}$$

Rozdzielając wyrazy zawierające różne potencjały, równanie (4.86) zapisano w postaci:

$$div\,[(\sigma + i\omega\varepsilon)(\nabla^T\overline{\Phi})] = div\,[(\sigma \boldsymbol{v} \times rot\,\overline{\mathbf{A}}) - (\sigma + i\omega\varepsilon)i\omega\overline{\mathbf{A}}]\,. \tag{4.88}$$

Z uwagi na (A23), lewą stronę równania (4.88) przekształcono do postaci:

$$div\,[(\sigma+i\omega\varepsilon)(\nabla^T\overline{\Phi})] = (\sigma+i\omega\varepsilon)[div\,grad\,\overline{\Phi}+\frac{1}{(\sigma+i\omega\varepsilon)}grad\,(\sigma+i\omega\varepsilon)\cdot grad\,\overline{\Phi}]\,, \tag{4.89}$$

natomiast prawą stronę, po uwzględnieniu tożsamości analogicznej do (4.61), lecz zapisanej tym razem dla $\overline{\mathbf{E}}$ i $\overline{\mathbf{H}}$ oraz (4.81÷4.84), przedstawiono w postaci:

$$\begin{aligned} &div\,[(\sigma \boldsymbol{v} \times rot\,\overline{\mathbf{A}}) - (\sigma + i\omega\varepsilon)i\omega\overline{\mathbf{A}}] = \\ &= \sigma\{rot\,\overline{\mathbf{A}}\cdot rot\,\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\cdot[\frac{1}{\mu}grad\,\mu \times rot\,\overline{\mathbf{A}} - \sigma\mu(i\omega\overline{\mathbf{A}} + grad\,\overline{\Phi})]\}+ \\ &\qquad + (\boldsymbol{v} \times rot\,\overline{\mathbf{A}})\cdot grad\,\sigma - i\omega\overline{\mathbf{A}}\cdot grad\,(\sigma + i\omega\varepsilon)\,. \end{aligned} \tag{4.90}$$

Uporządkowanie pozwala zapisać zespolone równanie (4.88) w ostatecznej postaci :

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla^2\overline{\Phi} + \{[\frac{dLn(\sigma + i\omega\varepsilon)}{dT}](\nabla^T T - [\frac{\sigma(T)}{\sigma(T) + i\omega\varepsilon(T)}]\sigma(T)\mu(T)\boldsymbol{v}\}\cdot(\nabla^T\overline{\Phi}) = \\ &= \frac{\sigma(T)}{\sigma(T) + i\omega\varepsilon(T)}\{(\nabla \times \overline{\mathbf{A}})\cdot(\nabla \times \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}\cdot[(\frac{dln\mu}{dT})(\nabla^T T) \times (\nabla \times \overline{\mathbf{A}})+ \\ &+ i\omega\sigma(T)\mu(T)\overline{\mathbf{A}}]+[\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\overline{\mathbf{A}})]\cdot(\frac{dln\sigma}{dT})(\nabla^T T\} - i\omega\overline{\mathbf{A}}\cdot[\frac{dLn(\sigma + i\omega\varepsilon)}{dT}](\nabla^T T)\,. \end{aligned}} \tag{4.91}$$

Otrzymany wyżej układ równań (4.87) i (4.91) opisuje zjawiska elektromagnetyczne przy zgrzewaniu prądem zmiennym harmonicznie przy użyciu potencjałów zespolonych: $\overline{\Phi}$ - zespolony dynamiczny skalarny potencjał elektryczny i $\overline{\mathbf{A}}$-zespolony dynamiczny potencjał wektorowy samoindukcji magnetycznej. Jeśli porównać ten układ równań z analogicznym dla zgrzewania prądem stałym (4.72÷4.73), to można zauważyć obecność dodatkowych składników ze współczynnikami zespolonymi oraz występowanie współczynników zespolonych, w miejscu gdzie w poprzednich równaniach występowały rzeczywiste. Ponieważ w tym przypadku mamy do czynienia z układem zespolonych równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu względem zespolonych potencjałów, więc liczba zmiennych wrosła dwukrotnie (do ośmiu).

Zakładając $\omega = 0$, można otrzymać odpowiednie równania dla prądu stałego (4.72÷4.73) wprost z równań (4.87) i (4.91).

Równania opisujące proces zgrzewania prądem zmiennym harmonicznie w dobrze przewodzącym ośrodku przy niskich częstotliwościach

Pole elektromagnetyczne w przewodnikach ulega silnemu tłumieniu. Powoduje to straty mocy (wydzielanie się ciepła) i nierównomierny rozkład pola, który wywołuje prądy wirowe, również silnie tłumione.

W dobrze przewodzącym ośrodku (przewodniku) σ jest bardzo duże w porównaniu z $\omega\varepsilon$ ($\sigma \gg \omega\varepsilon$) [116], szczególnie przy niższych częstotliwościach ($f = 50Hz$). Pozwala to pominąć wpływ gęstości prądu przesunięcia $\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = i\omega\varepsilon\overline{\mathbf{E}}$ w porównaniu do gęstości prądu przewodzenia $\sigma\overline{\mathbf{E}}$, tzn. pominąć wyraz $i\omega\varepsilon\overline{\mathbf{E}}$ w równaniu (4.77). Spełniona jest bowiem [80, 159] nierówność: $\sigma\mathbf{E} \gg \varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$, z której dla pola zmiennego harmonicznie wynika wprost: $\sigma \gg \omega\varepsilon$. Równanie (4.77) dla tego przypadku przyjmie postać:

$$rot\,\overline{\mathbf{H}} = \sigma(\overline{\mathbf{E}} + \boldsymbol{v} \times \mu\overline{\mathbf{H}})\,. \tag{4.92}$$

Natomiast równanie (4.80) uprości się do postaci:

$$div\,[\sigma(\overline{\mathbf{E}} + \boldsymbol{v} \times \mu\overline{\mathbf{H}})] = 0\,. \tag{4.93}$$

Również w tym przypadku ze względu na niezmienioną postać pozostałych równań (4.78÷4.79) istnieje odpowiedni dynamiczny potencjał wektorowy $\overline{\mathbf{A}}$ bezźródłowego pola magnetycznego oraz dynamiczny potencjał pola elektrycznego $\overline{\Phi}$.

Wprowadzając kulombowski potencjał wektorowy pola magnetycznego (4.81), do równań (4.92÷4.93) można przepisać je w postaci:

$$rot(\frac{1}{\mu}rot\,\overline{\mathbf{A}}) = \sigma(\overline{\mathbf{E}} + \boldsymbol{v} \times rot\,\overline{\mathbf{A}})\,, \tag{4.94}$$

$$div\,[\sigma(\overline{\mathbf{E}} + \boldsymbol{v} \times rot\,\overline{\mathbf{A}})] = 0\,, \tag{4.95}$$

a po wprowadzeniu dynamicznego potencjału pola elektrycznego (4.84):

$$rot(\frac{1}{\mu}rot\,\overline{\mathbf{A}}) = -\sigma(grad\overline{\Phi} + i\omega\overline{\mathbf{A}} - \boldsymbol{v} \times rot\,\overline{\mathbf{A}})\,, \tag{4.96}$$

$$div\,[\sigma(grad\overline{\Phi} + i\omega\overline{\mathbf{A}} - \boldsymbol{v} \times rot\,\overline{\mathbf{A}})] = 0\,. \tag{4.97}$$

Przez analogię do równania (4.70) można zespolone równanie (4.96) przepisać w postaci:

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla^2\overline{\mathbf{A}} + [\sigma(T)\mu(T)\boldsymbol{v} + (\frac{dln\mu}{dT})(\nabla^T T)] \times (\nabla \times \overline{\mathbf{A}}) - i\omega\sigma(T)\mu(T)\overline{\mathbf{A}} = \\ &\qquad = \sigma(T)\mu(T)(\nabla^T\Phi)\,. \end{aligned}} \tag{4.98}$$

Równanie to można było otrzymać wprost z (4.87), podstawiając $\omega\varepsilon(T) \approx 0$. Podobnie jak w przypadku równania (4.98) można otrzymać równanie analogiczne do (4.91) dla ośrodka dobrze przewodzącego przy niskich częstotliwościach zmian pola elektromagnetycznego. Równanie to przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}&\nabla^2\overline{\Phi} + [(\frac{dln\sigma}{dT})(\nabla^T T) - \sigma(T)\mu(T)\boldsymbol{v}]\cdot(\nabla^T\overline{\Phi}) = \\ &= (\nabla\times\overline{\mathbf{A}})\cdot(\nabla\times\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}\cdot[(\frac{dln\mu}{dT})(\nabla^T T)\times(\nabla\times\overline{\mathbf{A}}) + \\ &+ i\omega\sigma(T)\mu(T)\overline{\mathbf{A}}] + [\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\overline{\mathbf{A}})]\cdot(\frac{dln\sigma}{dT})(\nabla^T T) - i\omega\overline{\mathbf{A}}\cdot(\frac{dln\sigma}{dT})(\nabla^T T)\,. \end{aligned} \tag{4.99}$$

Analogicznie jak w podrozdziale 4.2.3. i w tym przypadku zachowują aktualność odpowiednie uwagi względem układu równań opisującego zgrzewanie prądem stałym, poza jednym wyjątkiem - powyższe równania są sprzężone, a dynamiczne potencjały zespolone.

"Model ciała stałego" dla pola elektromagnetycznego prądu przemiennego

Jeśli, podobnie jak w przypadku zgrzewania prądem stałym (podrozdział 4.2.2.), przyjąć w pierwszym przybliżeniu "model niejednorodnego ciała stałego" ($\boldsymbol{v} \approx \mathbf{0}$), to zespolone równania (4.87) i (4.91) uproszczą się do postaci:

$$\begin{aligned}&\nabla^2\overline{\mathbf{A}} + (\frac{dln\mu}{dT})(\nabla^T T)\times(\nabla\times\overline{\mathbf{A}}) - i\omega[\sigma(T) + i\omega\varepsilon(T)]\mu(T)\overline{\mathbf{A}} = \\ &= [\sigma(T) + i\omega\varepsilon(T)]\mu(T)(\nabla^T\overline{\Phi})\,, \end{aligned} \tag{4.100}$$

$$\begin{aligned}&\nabla^2\overline{\Phi} + [\frac{dLn(\sigma + i\omega\,\varepsilon)}{dT}](\nabla^T T)\cdot(\nabla^T\overline{\Phi}) = \\ &= -i\omega\overline{\mathbf{A}}\cdot[\frac{dLn(\sigma + i\omega\,\varepsilon)}{dT}](\nabla^T T)\,. \end{aligned} \tag{4.101}$$

Niżej zapisano układ równań zespolonych (4.100÷4.101) "modelu ciała stałego" w postaci równoważnego układu równań rzeczywistych: - dla części rzeczywistej:

$$\begin{aligned}&\nabla^2\mathcal{A} + (\frac{dln\mu}{dT})(\nabla^T T)\times(\nabla\times\mathcal{A}) + \omega^2\,\varepsilon(T)\mu(T)\mathcal{A} + \omega\sigma(T)\mu(T)\underline{\mathcal{A}} \\ &= \sigma(T)\mu(T)(\nabla^T\phi) - \omega\varepsilon(T)\mu(T)(\nabla^T\underline{\phi})\,, \end{aligned} \tag{4.102}$$

$$\begin{aligned}&\nabla^2\phi + Re[\frac{dLn(\sigma + i\omega\,\varepsilon)}{dT}](\nabla^T T)\cdot(\nabla^T\phi) - Im[\frac{dLn(\sigma + i\omega\,\varepsilon)}{dT}](\nabla^T T)\cdot \\ &(\nabla^T\underline{\phi}) = \omega\{Im[\frac{dLn(\sigma + i\omega\varepsilon)}{dT}]\mathcal{A} + Re[\frac{dLn(\sigma + i\omega\varepsilon)}{dT}]\underline{\mathcal{A}}\}\cdot(\nabla^T T) \end{aligned} \tag{4.103}$$

- oraz odpowiednio dla części urojonej:

$$\begin{aligned}&\nabla^2\underline{\mathcal{A}} + (\frac{dln\mu}{dT})(\nabla^T T)\times(\nabla\times\underline{\mathcal{A}}) + \omega^2\,\varepsilon(T)\mu(T)\underline{\mathcal{A}} - \omega\sigma(T)\mu(T)\mathcal{A} \\ &= \sigma(T)\mu(T)(\nabla^T\underline{\phi}) + \omega\varepsilon(T)\mu(T)(\nabla^T\phi)\,, \end{aligned} \tag{4.104}$$

$$\begin{aligned}&\nabla^2\underline{\phi} + Re[\frac{dLn(\sigma + i\omega\,\varepsilon)}{dT}](\nabla^T T)\cdot(\nabla^T\underline{\phi}) + \\ &+ Im[\frac{dLn(\sigma + i\omega\,\varepsilon)}{dT}](\nabla^T T)\cdot(\nabla^T\phi) = \\ &\omega\{Im[\frac{dLn(\sigma + i\omega\varepsilon)}{dT}]\underline{\mathcal{A}} - Re[\frac{dLn(\sigma + i\omega\varepsilon)}{dT}]\mathcal{A}\}\cdot(\nabla^T T)\,, \end{aligned} \tag{4.105}$$

ponieważ:

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathcal{A} + i\underline{\mathcal{A}}\,, \tag{4.106}$$

$$\overline{\Phi} = \phi + i\underline{\phi}\,, \tag{4.107}$$

$$[\frac{dLn(\sigma + i\omega\,\varepsilon)}{dT}] = Re[\frac{dLn(\sigma + i\omega\,\varepsilon)}{dT}] + i\,Im[\frac{dLn(\sigma + i\omega\,\varepsilon)}{dT}]\,,$$

gdzie:

$Ln(\sigma + i\omega\,\varepsilon)$ - wartość główna zespolonej funkcji logarytmicznej,

$Re(\ldots)$ - składowa rzeczywista funkcji zespolonej,

$Im(\ldots)$ - składowa urojona funkcji zespolonej,

$\mathcal{A}$ - składowa rzeczywista zespolonego potencjału wektorowego $\overline{\mathbf{A}}$ pola magnetycznego,

$\underline{\mathcal{A}}$ - składowa urojona zespolonego potencjału wektorowego $\overline{\mathbf{A}}$ pola magnetycznego,

ϕ - składowa rzeczywista zespolonego skalarnego dynamicznego potencjału elektrycznego $\overline{\Phi}$,

$\underline{\phi}$ - składowa urojona zespolonego skalarnego dynamicznego potencjału elektrycznego $\overline{\Phi}$.

"Model ciała stałego" dla pola elektromagnetycznego prądu przemiennego o niskiej częstotliwości w dobrze przewodzącym ośrodku

Analogicznie jak wyżej w tym przypadku zespolone równania (4.98÷4.99) przyjmą postać:

$$\nabla^2\overline{\mathbf{A}} + (\frac{dln\mu}{dT})(\nabla^T T) \times (\nabla \times \overline{\mathbf{A}}) - i\omega\sigma(T)\mu(T)\overline{\mathbf{A}} = \\ = \sigma(T)\mu(T)(\nabla^T\overline{\Phi}) . \quad (4.108)$$

$$\nabla^2\overline{\Phi} + (\frac{dln\sigma}{dT})(\nabla^T T) \cdot (\nabla^T\overline{\Phi}) = -i\omega\overline{\mathbf{A}} \cdot (\frac{dln\sigma}{dT})(\nabla^T T) . \quad (4.109)$$

Równoważny im układ równań rzeczywistych ma postać:
- dla części rzeczywistej:

$$\nabla^2\mathcal{A} + (\frac{dln\mu}{dT})(\nabla^T T) \times (\nabla \times \mathcal{A}) + \omega\sigma(T)\mu(T)\underline{\mathcal{A}} = \\ = \sigma(T)\mu(T)(\nabla^T\phi) , \quad (4.110)$$

$$\nabla^2\phi + (\frac{dln\sigma}{dT})(\nabla^T T) \cdot (\nabla^T\phi) = \omega(\frac{dln\sigma}{dT})\underline{\mathcal{A}} \cdot (\nabla^T T) , \quad (4.111)$$

- dla części urojonej:

$$\nabla^2\underline{\mathcal{A}} + (\frac{dln\mu}{dT})(\nabla^T T) \times (\nabla \times \underline{\mathcal{A}}) - \omega\sigma(T)\mu(T)\mathcal{A} = \\ = \sigma(T)\mu(T)(\nabla^T\underline{\phi}) , \quad (4.112)$$

$$\nabla^2\underline{\phi} + (\frac{dln\sigma}{dT})(\nabla^T T) \cdot (\nabla^T\underline{\phi}) = -\omega(\frac{dln\sigma}{dT})\mathcal{A} \cdot (\nabla^T T) . \quad (4.113)$$

Jak widać z powyższego, nawet tak racjonalnie uproszczony opis jest zbyt złożony, aby można było dostępnymi metodami i środkami technicznymi uzyskać rozwiązanie otrzymanych układów równań. Mogą być one jednak przydatne w analizie jakościowej zjawisk zachodzących w procesie zgrzewania metali.

Z punktu widzenia technologii interesuje nas nie tyle samo pole elektromagnetyczne, lecz przede wszystkim skutki energetyczne jego obecności, tzn. generowane w wyniku przepływu prądu zgrzewania ciepło Joule'a - Lenza, wydzielające się w objętości metali oraz na ich stykach.

Zadowalające wyniki ilościowe, z technicznego punktu widzenia, można uzyskać wprowadzając skuteczne wartości prądu i napięcia przemiennego [111, 144, 200] jako równoważne pod względem energetycznym wartości prądu i napięcia hipotetycznego stałego pola elektromagnetycznego, które wydzieli taką samą ilość ciepła co odpowiednie zmienne pole harmonicznie. Zagadnienie to szerzej opisano w następnym podrozdziale (4.2.4.), wprowadzając skuteczną wartość natężenia pola elektrycznego (4.142) oraz odpowiednie równania definiujące średnią wydajność źródeł ciepła (4.143). Należy przy tym pamiętać, że rzeczywisty obraz pola elektromagnetycznego prądu przemiennego o niskiej częstotliwości będzie różny od wprowadzonego niżej hipotetycznego pola wartości skutecznej, równoważnego jedynie co do ilości wydzielonego ciepła ze źródeł wewnętrznych, lecz o zupełnie innym rozkładzie, jak to stwierdzono na wstępie podrozdziału 4.2.3. Przyjęcie takiego uproszczenia, wobec wystąpienia wspomnianego efektu "naskórkowości" przewodzenia, będzie miało również wpływ na rozkład temperatury, szczególnie w obszarze fazy stałej. W obszarze płynnego jądra zgrzeiny można spodziewać się pewnego ujednorodnienia wyniku, obserwowanego w warunkach eksperymentu, skutkiem intensywnego mieszania pod wpływem sił pola elektromagnetycznego.

Niżej formalnie zapisano równanie dla hipotetycznego skutecznego potencjału elektrostatycznego $\tilde{\Phi}$ skutecznego natężenia pola elektrycznego $\tilde{\mathbf{E}}$:

$$\tilde{\mathbf{E}} = -grad\,\tilde{\Phi} = -\nabla^T\tilde{\Phi} \quad (z\ definicji) , \quad (4.114)$$

$$\nabla^2\tilde{\Phi} + (\frac{dln\sigma}{dT})(\nabla^T T) \cdot (\nabla^T\tilde{\Phi}) = 0, \quad (4.115)$$

analogicznie do (4.75), a których znajomość jest niezbędna do obliczenia wyrazu określającego moc źródła wydzielającego się ciepła Joule'a-Lenza w (4.145÷4.146).

4.2.4. Przemiany energetyczne w polu elektromagnetycznym podczas zgrzewania oporowego

W przestrzeni zajętej przez pole elektromagnetyczne zgromadzona jest jego energia. Jednocześnie zachodzą przemiany energii tego pola w inne jej formy [144, 200], np. podczas zgrzewania bardzo ważna przemiana w ciepło. Pomijalna część energii jest wypromieniowywana ze strefy zgrzewania do otoczenia.

Występująca podczas przepływu prądu indukcja własna powoduje, że po doprowadzeniu do obwodu (elektroda - zgrzewane materiały - elektroda) zewnętrznego źródła siły elektromotorycznej (SEM), natężenie prądu nie osiąga

natychmiast wartości końcowej, lecz narasta od zera aż do osiągnięcia tej wartości. Podobnie, po wyłączeniu zewnętrznego źródła SEM natężenie prądu nie maleje natychmiast do zera. Dzieje się tak pod wpływem siły elektromotorycznej samoindukcji. Jeśli w obwodzie wzrasta natężenie prądu, to powstająca w nim SEM samoindukcji "sprzeciwia się" zachodzącej zmianie. W rezultacie natężenie prądu jest chwilowo mniejsze, niż należałoby tego oczekiwać i tylko część dostarczonej z zewnętrznego źródła SEM energii wydziela się w postaci ciepła Joule'a - Lenza. Analogicznie, jeżeli natężenie prądu w obwodzie zmniejsza się, to powstająca SEM indukcji własnej o takim samym kierunku jak SEM zewnętrznego źródła dąży do podtrzymania prądu. W tym przypadku wydziela się więcej ciepła Joule'a - Lenza, niż gdyby w obwodzie działała tylko zewnętrzna SEM.

Wynika stąd, że przy narastaniu prądu część energii dostarczanej przez SEM zewnętrznego źródła zamienia się na energię pola magnetycznego. Energia ta, przy zmniejszającym się prądzie, wydziela się następnie w obwodzie zgrzewania w postaci ciepła. Z drugiej bowiem strony wiadomo, że wzrost natężenia prądu powoduje wzrost natężenia pola indukcji własnej. Analogicznie przebiega zjawisko przy spadku natężenia prądu, kiedy kosztem energii "zmagazynowanej" w polu magnetycznym somoindukcji możliwe jest wspomniane wyżej wydzielenie się równoważnego ciepła.

W przypadku zgrzewania prądem stałym przedstawione wyżej zjawisko występuje jedynie w opisanych wcześniej stanach przejściowych. Natomiast w przypadku zgrzewania prądem przemiennym o niskiej częstotliwości dodatkowo w każdym okresie $\Theta = (\frac{2\pi}{\omega})$ następuje wspomniany przepływ energii w sprzężonych polach: elektrycznym i magnetycznym.

Dostarczoną moc (szybkość zmian w czasie całkowitej energii zmagazynowanej w obszarze V) przez doprowadzone pole elektromagnetyczne można zapisać w następującej postaci całkowej [200]:

$$P = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V w\,dV - \int_V (\mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t})dV = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})dV\,, \quad (4.116)$$

gdzie:

P - moc dostarczana przez doprowadzone (zewnętrzne) pole elektromagnetyczne,

$w = \frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B})$ - gęstość objętościowa energii pola elektromagnetycznego,

$\mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ - gęstość objętościowa mocy pola elektrycznego,

$\mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ - gęstość objętościowa mocy pola magnetycznego,

$\dot{w}$ - gęstość objętościowa mocy pola elektromagnetycznego (szybkość zmian gęstości energii pola elektromagnetycznego zmagazynowanej w danym punkcie przestrzeni):

$$\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t} = (\mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t})\,.$$

Gęstość strumienia przenoszonej mocy przenikającej przez powierzchnię otaczającą wyróżnioną objętość kontrolną dV określa wektor Poyntinga [93, 144, 200]

(gęstość powierzchniowa mocy doprowadzonego pola elektromagnetycznego):

$$\mathbf{s} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}\,, \quad (4.117)$$

a całkowitą moc przenikającą w tej postaci przez powierzchnię A do objętości V można wyrazić całką:

$$w^o = \oint_A \mathbf{s}\cdot d\mathbf{a} = \oint_A (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{a} = \int_V div\,(\mathbf{E}\times\mathbf{H})dV \quad (4.118)$$

na mocy twierdzenia Gaussa (A37).

Natomiast całkowitą traconą moc pola elektrycznego, zamienianą (rozpraszaną) na ciepło w objętości V wyraża całka [93, 144, 200]:

$$w^d = \int_V \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}dV = \int_V \sigma(\mathbf{E}+\boldsymbol{v}\times\mu\mathbf{H})\cdot\mathbf{E}dV = \int_V \sigma\mathbf{E}\cdot(\mathbf{E}+\boldsymbol{v}\times\mu\mathbf{H})dV\,. \quad (4.119)$$

W opisie punktowego zgrzewania oporowego pominięto wypromieniowywanie energii ze względu na znikomy wpływ tego typu strat energii doprowadzonej za pośrednictwem pola elektromagnetycznego. Pominięto również jako nieznaczące straty [116]:

- związane z opóźnieniem polaryzacji elektrycznej,
- związane z opóźnieniem wektora magnetyzacji.

Dla takiego przypadku równanie zachowania energii w polu elektromagnetycznym ma postać całkową twierdzenia Poyntinga [200]:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w^o + w^d = \int_V (\mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t})dV + \oint_A (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{a} + \int_V \sigma\mathbf{E}\cdot(\mathbf{E}+\boldsymbol{v}\times\mu\mathbf{H})dV = 0 \quad (4.120)$$

lub równoważną postać różniczkową:

$$(\mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}) + div\,(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) + \sigma\mathbf{E}\cdot(\mathbf{E}+\boldsymbol{v}\times\mu\mathbf{H}) = 0\,. \quad (4.121)$$

Równanie (4.121) dla ośrodka izotropowego można przepisać, po uwzględnieniu (4.16÷4.18), w postaci:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\,|\mathbf{E}|^2 + \mu\,|\mathbf{H}|^2) + div\,(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) + \sigma\mathbf{E}\cdot(\mathbf{E}+\boldsymbol{v}\times\mu\mathbf{H}) = 0\,. \quad (4.122)$$

Wprowadzając dla wygody do równania (4.122) wektor Poyntinga (4.117) oraz uwzględniając tożsamość (A5), można następnie zapisać równanie zachowania energii pola elektromagnetycznego w następującej postaci:

$$\boxed{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\,|\mathbf{E}|^2 + \mu\,|\mathbf{H}|^2) + \nabla\cdot\mathbf{s} + \sigma(|\mathbf{E}|^2 - \mu\,\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{v}) = 0\,, \quad (4.123)}$$

ponieważ:

$$\mathbf{E}\cdot(\boldsymbol{v}\times\mu\mathbf{H}) = \mu(\mathbf{H}\times\mathbf{E})\cdot\boldsymbol{v} = -\mu(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot\boldsymbol{v} = -\mu\,\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{v} \tag{4.124}$$

z uwagi na (A5) i (4.122).

Stąd można wnioskować, że energia pola elektromagnetycznego wydziela się głównie jako ciepło Joule'a-Lenza, wskutek oporu przewodzenia prądu elektrycznego w zgrzewanych materiałach oraz na ich styku, a tylko nieznaczna jej część jest unoszona w wyniku adwekcji przez pole prędkości $\boldsymbol{v}$ oraz wypromieniowywana do otoczenia.

W przypadku zgrzewania prądem stałym równanie (4.123) przyjmuje dla stanu ustalonego (jak założono na wstępie - pominięto stany przejściowe) postać:

$$\boxed{-\nabla\cdot\mathbf{s} = \sigma(T)(|\mathbf{E}|^2 - \mu\,\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{v})\,.} \tag{4.125}$$

W podrozdziale 4.2.2. zwrócono uwagę na małe wartości prędkości płynięcia materiałów $\boldsymbol{v}$ przy zgrzewaniu, co szczególnie w przypadku małej lub umiarkowanej indukcji $\mu\mathbf{H}$ uprawnia do przyjęcia w pierwszym przybliżeniu "modelu ciała stałego" dla pola elektromagnetycznego (równania (4.74÷4.75)). Zastosowanie tego przybliżenia w odniesieniu do równania (4.125), po ewentualnym uwzględnieniu definicji potencjału elektrostatycznego (4.63), pozwala dla zgrzewania prądem stałym napisać:

$$\boxed{-\nabla\cdot\mathbf{s} = \sigma(T)(\nabla^T\Phi)^2\,.} \tag{4.126}$$

Takie przybliżenie wydajności źródła ciepła, z powodu pominięcia stanów przejściowych oraz z uwagi na przeprowadzoną wyżej dyskusję wpływu samoindukcji, podaje ją z pewnym nadmiarem. Wynika to wprost z drugiej postaci równania (4.125). Przyjęte założenie odpowiada jednocześnie sytuacji ($\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{v} = 0$), kiedy wektory $\mathbf{s}$ i $\boldsymbol{v}$ są prostopadłe ($\mathbf{s}\perp\boldsymbol{v}$). W pozostałych przypadkach część strumienia gęstości powierzchniowej mocy pola elektromagnetycznego jest unoszona wskutek adwekcji przez pole prędkości w inny obszar płynnego jądra zgrzeiny. Przy tym jakość przybliżenia zależy przede wszystkim od własności magnetycznych elektrod i zgrzewanych materiałów ($\mu(T)$ lub $\mu(T,\mathbf{H})$-ferromagnetyki). W rzeczywistości, moc źródła ciepła zależy od samej temperatury T, również ze względu na $\sigma(T)$ oraz jakości styków: (materiał - materiał) i (elektroda - materiał).

Natomiast w przypadku zgrzewania prądem przemiennym, ze względu na postać równań pola elektromagnetycznego (4.49÷4.52), twierdzenie Poyntinga (4.122) można zapisać jako zespolone [116, 200] równanie różniczkowe zachowania energii:

$$i\,\omega(\mu\overline{\mathbf{H}}^*\cdot\overline{\mathbf{H}} - \varepsilon\overline{\mathbf{E}}\cdot\overline{\mathbf{E}}^*) + div\,(\overline{\mathbf{E}}\times\overline{\mathbf{H}}^*) + \sigma\overline{\mathbf{E}}\cdot(\overline{\mathbf{E}}^* + \boldsymbol{v}\times\mu\overline{\mathbf{H}}^*) = 0\,, \tag{4.127}$$

gdzie: * - oznacza wielkość zespoloną sprzężoną.

W ośrodku izotropowym bez strat związanych z opóźnieniem polaryzacji elektrycznej oraz opóźnieniem wektora magnetyzacji, jak to założono wyżej, a w którym ε i μ są rzeczywistymi skalarami, równanie to można zastąpić odpowiednio dwoma równaniami rzeczywistymi:

- dla części rzeczywistej:

$$div\,[Re(\overline{\mathbf{E}}\times\overline{\mathbf{H}}^*)] + \sigma Re[\overline{\mathbf{E}}\cdot(\overline{\mathbf{E}}^* + \boldsymbol{v}\times\mu\overline{\mathbf{H}}^*)] = 0\,, \tag{4.128}$$

- dla części urojonej:

$$\omega(\mu\overline{\mathbf{H}}^*\cdot\overline{\mathbf{H}} - \varepsilon\overline{\mathbf{E}}\cdot\overline{\mathbf{E}}^*) + div\,[Im(\overline{\mathbf{E}}\times\overline{\mathbf{H}}^*)] + Im[\overline{\mathbf{E}}\cdot(\overline{\mathbf{E}}^* + \boldsymbol{v}\times\mu\overline{\mathbf{H}}^*)] = 0\,. \tag{4.129}$$

Pierwsze równanie jest bilansem mocy wydzielonej w modelowanym obszarze, a drugie wyraża równość urojonej składowej strumienia wektora Poyntinga i szybkości zmian różnicy energii elektrycznej i magnetycznej nagromadzonej w tym obszarze. Na pierwszy rzut oka, jeśli przyjrzeć się równaniom (4.128÷4.129), to wniosek ten nie jest taki oczywisty, a zacytowany za literaturą układ równań nie jest bezpośrednio użyteczny na potrzeby postawionego zadania modelowania.

Wprowadzając zespolony wektor gęstości mocy Poyntinga (4.139), można równanie (4.128) przepisać w postaci:

$$-div\,[Re(\hat{\mathbf{s}})] = \frac{1}{2}\sigma(T)Re[(\overline{\mathbf{E}}\cdot\overline{\mathbf{E}}^*) - \mu(\hat{\mathbf{s}}\cdot\boldsymbol{v})]\,, \tag{4.130}$$

ponieważ ma miejsce zależność analogiczna do (4.124).

Dalej po uwzględnieniu (4.84) obliczono:

$$(\overline{\mathbf{E}}\cdot\overline{\mathbf{E}}^*) = [i\omega\overline{\mathbf{A}} + (\nabla^T\overline{\Phi})]\cdot[i\omega\overline{\mathbf{A}} - (\nabla^T\overline{\Phi})] = -[\omega^2\overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{A}} + (\nabla^T\overline{\Phi})\cdot(\nabla^T,\overline{\Phi})]\,. \tag{4.131}$$

Mając na względzie (4.106÷4.107), można napisać:

$$\overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{A}} = (\mathcal{A} + i\underline{\mathcal{A}})\cdot(\mathcal{A} + i\underline{\mathcal{A}}) = (\mathcal{A}^2 - \underline{\mathcal{A}}^2) + i\,2\,\mathcal{A}\cdot\underline{\mathcal{A}}\,,$$

$$(\nabla^T\overline{\Phi})\cdot(\nabla^T\overline{\Phi}) = [(\nabla^T\phi) + i(\nabla^T\underline{\phi})]\cdot[(\nabla^T\phi) + i(\nabla^T\underline{\phi})] = \\ = [(\nabla^T\phi)^2 - (\nabla^T\underline{\phi})^2] + i\,2(\nabla^T\phi)\cdot(\nabla^T\underline{\phi})\,.$$

Więc ostatecznie:

$$(\overline{\mathbf{E}}\cdot\overline{\mathbf{E}}^*) = \{\omega^2(\mathcal{A}^2 - \underline{\mathcal{A}}^2) + [(\nabla^T\phi)^2 - (\nabla^T\underline{\phi})^2]\} + i\{2[\omega^2\mathcal{A}\cdot\underline{\mathcal{A}} + (\nabla^T\phi)\cdot(\nabla^T\underline{\phi})]\}\,. \tag{4.132}$$

Skąd wprost po uwzględnieniu (A4÷A6) widać, jak dalece złożoną postać ma prawa strona równania (4.130) wyrażona przez potencjały $\mathcal{A}$ i $\underline{\mathcal{A}}$ oraz ϕ i $\underline{\phi}$:

$$\boxed{\begin{aligned} -\,div\,[Re(\hat{\mathbf{s}})] = \frac{1}{2}\sigma(T)\{&\omega^2(\mathcal{A}^2 - \underline{\mathcal{A}}^2) + \\ &+ [(\nabla^T\phi)^2 - (\nabla^T\underline{\phi})^2 - \mu Re(\hat{\mathbf{s}})\cdot\boldsymbol{v}]\}\,, \end{aligned}} \tag{4.133}$$

nawet w przypadku przyjęcia "modelu ciała stałego" dla równania zachowania energii pola elektromagnetycznego ($\boldsymbol{v} \approx 0$ w obszarze ciekłego jądra zgrzeiny):

$$\boxed{-div\,[Re(\hat{\mathbf{s}})] = \frac{1}{2}\sigma(T)\{\omega^2(\mathcal{A}^2 - \underline{\mathcal{A}}^2) + [(\nabla^T\phi)^2 - (\nabla^T\underline{\phi})^2]\}. \qquad (4.134)}$$

Zważywszy na to, że $Re(\hat{\mathbf{s}})$ na mocy równania (4.140) jest gęstością czynnej mocy pola elektromagnetycznego $\mathbf{P}(\mathbf{r})$, która wydziela się w czasie zgrzewania jako gęstość mocy lokalnego źródła ciepła, niżej zapisano równanie (4.134) także w postaci dogodnej ze względów technologicznych:

$$\boxed{-\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\sigma(T)\{\omega^2(\mathcal{A}^2 - \underline{\mathcal{A}}^2) + [(\nabla^T\phi)^2 - (\nabla^T\underline{\phi})^2]\}. \qquad (4.135)}$$

Z powodu złożoności takiego sformułowania poniżej - w poszukiwaniu dopuszczalnego przybliżenia - bezpośrednio uśredniono równanie zachowania energii (4.123).

Można bowiem wykazać, że w przypadku funkcji okresowej średnia całkowa w przedziale czasowym, będącym wielokrotnością okresu funkcji podcałkowej równa jest jej średniej za jeden okres. W szczególności dla przedziału czasu $\tau = N\Theta$ będącego wielokrotnością (N-krotnością) okresu Θ funkcji uśrednianej $F(t)$ mamy bowiem:

$$< F(t) >= \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} F(t)dt = \frac{1}{N\Theta}\int_0^{N\Theta} F(t)dt =$$

$$= \frac{1}{N\Theta}\{\int_0^{\Theta} F(t)dt + \int_{\Theta}^{2\Theta} F(t+\Theta)dt + \cdots + \int_{(N-1)\Theta}^{N\Theta} F[t+(N-1)\Theta]dt\} =$$

$$= \frac{1}{N\Theta}\sum_{k=1}^{N}\int_{(k-1)\Theta}^{k\Theta} F[t+(k-1)\Theta]dt = \frac{1}{\Theta}\int_0^{\Theta} F(t)dt, \qquad (4.136)$$

gdzie z uwagi na okresowość funkcji:

$$F(t) = F(t+\Theta) = F(t+2\Theta) = \cdots = F(t+N\Theta).$$

Dzięki temu, ograniczając się do uśredniania (4.123) za jeden okres Θ, obliczono kolejno:

$$< \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon|\mathbf{E}|^2 + \mu|\mathbf{H}|^2) >= \frac{1}{\Theta}\int_0^{\Theta}[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon|\mathbf{E}|^2 + \mu|\mathbf{H}|^2)]dt =$$

$$= \frac{1}{\Theta}\int_0^{\Theta}(\varepsilon\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mu\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t})dt = \cdots$$

$$\cdots = \frac{i\omega}{\Theta}\int_0^{\Theta}[\frac{\varepsilon}{4}(\overline{\mathbf{E}}e^{i\omega t} + \overline{\mathbf{E}}^* e^{-i\omega t})\cdot(\overline{\mathbf{E}}e^{i\omega t} - \overline{\mathbf{E}}^* e^{-i\omega t}) + \cdots$$

$$+ \frac{\mu}{4}(\overline{\mathbf{H}}e^{i\omega t} + \overline{\mathbf{H}}^* e^{-i\omega t})\cdot(\overline{\mathbf{H}}e^{i\omega t} - \overline{\mathbf{H}}^* e^{-i\omega t})]dt = \cdots$$

$$\cdots = \frac{i\omega^2}{8\pi}\int_0^{(\frac{2\pi}{\omega})}\{\varepsilon[(Re(\overline{\mathbf{E}}\cdot\overline{\mathbf{E}}) + iIm(\overline{\mathbf{E}}\cdot\overline{\mathbf{E}}))e^{2i\omega t} - (Re(\overline{\mathbf{E}}\cdot\overline{\mathbf{E}}) - iIm(\overline{\mathbf{E}}\cdot\overline{\mathbf{E}}))e^{-2i\omega t}] + \cdots$$

$$+\mu[(Re(\overline{\mathbf{H}}\cdot\overline{\mathbf{H}}) + iIm(\overline{\mathbf{H}}\cdot\overline{\mathbf{H}}))e^{2i\omega t} - (Re(\overline{\mathbf{H}}\cdot\overline{\mathbf{H}}) - iIm(\overline{\mathbf{H}}\cdot\overline{\mathbf{H}}))e^{-2i\omega t}]\}dt = \cdots$$

$$\cdots = \frac{\omega^2}{4\pi}\{[\varepsilon Re(\overline{\mathbf{E}}\cdot\overline{\mathbf{E}}) + \mu Re(\overline{\mathbf{H}}\cdot\overline{\mathbf{H}})]\int_0^{(\frac{2\pi}{\omega})}\frac{(e^{2i\omega t} - e^{-2i\omega t})}{2i}dt + i[\varepsilon Im(\overline{\mathbf{E}}\cdot\overline{\mathbf{E}}) + \cdots$$

$$+ \mu Im(\overline{\mathbf{H}}\cdot\overline{\mathbf{H}})]\int_0^{(\frac{2\pi}{\omega})}\frac{(e^{2i\omega t} + e^{-2i\omega t})}{2}dt\} = \cdots$$

$$\cdots = -\frac{\omega}{8\pi}\{[\varepsilon Re(\overline{\mathbf{E}}\cdot\overline{\mathbf{E}}) + \mu Re(\overline{\mathbf{H}}\cdot\overline{\mathbf{H}})]\int_0^{(\frac{2\pi}{\omega})}\sin 2\omega t d(2\omega t) + i[\varepsilon Im(\overline{\mathbf{E}}\cdot\overline{\mathbf{E}}) + \cdots$$

$$+ \mu Im(\overline{\mathbf{H}}\cdot\overline{\mathbf{H}})]\int_0^{(\frac{2\pi}{\omega})}\cos 2\omega t d(2\omega t)\} = 0,$$

biorąc pod uwagę (A1÷A18) oraz to, że: $\Theta = (\frac{2\pi}{\omega})$.

Następnie obliczono:

$$< div\,\mathbf{s} >= \frac{1}{\Theta}\int_0^{\Theta} div\,\mathbf{s}dt = div(\frac{1}{\Theta}\int_0^{\Theta}\mathbf{s}(\mathbf{r},t)dt) = div < \mathbf{s} >, \qquad (4.137)$$

gdzie gęstość mocy (4.117) pola cosinusoidalnego wyrażona przez wektor Poyntinga wynosi:

$$\mathbf{s}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4}[\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\,e^{i\omega t}+\overline{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r})\,e^{-i\omega t}]\times[\overline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})\,e^{i\omega t}+\overline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})\,e^{-i\omega t}] =$$
$$= \frac{1}{4}\{\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\times\overline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})\,e^{2i\omega t}+[\overline{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r})\times\overline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})+\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\times\overline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})]+\overline{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r})\times\overline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})\,e^{-2i\omega t}\}$$

a uśredniona w czasie, za jeden okres $\Theta = (\frac{2\pi}{\omega})$, wartość gęstości mocy równa jest:

$$< \mathbf{s} >= \frac{1}{\Theta}\int_0^{\Theta}\mathbf{s}(\mathbf{r},t)dt = \frac{1}{4}[\overline{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r})\times\overline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})+\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\times\overline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})] =$$
$$= Re\{\frac{1}{2}[\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\times\overline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})]\}, \quad (4.138)$$

gdzie:

* - oznacza wielkość zespoloną sprzężoną,

gdyż średnia czasowa zespolonych wyrazów wykładniczych $e^{\pm 2i\omega t}$ za jeden okres Θ równa jest zeru, a wyrażenie $[\overline{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r})\times\overline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})+\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\times\overline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})]$ jest sumą funkcji zespolonej i funkcji z nią sprzężonej. Pozwala to wykorzystać tożsamość (A11).

Opierając się na [80, 116, 144, 200], wprowadzono zespolony wektor mocy Poyntinga, będący powierzchniową gęstością mocy pozornej:

$$\hat{\mathbf{s}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}[\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\times\overline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})] = \mathbf{P}(\mathbf{r}) + i\,\mathbf{Q}(\mathbf{r}), \quad (4.139)$$

którego część rzeczywista jest uśrednioną w czasie gęstością czynnej mocy pola (4.138), tzn.:

$$Re(\hat{\mathbf{s}}) = \mathbf{P}(\mathbf{r}) =< \mathbf{s} >= Re\{\frac{1}{2}[\overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\times\overline{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})]\}, \quad (4.140)$$

gdzie:

$\mathbf{P}(\mathbf{r})$ - gęstość czynnej mocy pola elektromagnetycznego (wartość czynna zespolonego wektora Poyntinga $\hat{\mathbf{s}}$),

$\mathbf{Q}(\mathbf{r})$ - gęstość biernej mocy pola elektromagnetycznego (wartość bierna zespolonego wektora Poyntinga $\hat{\mathbf{s}}$),

i reprezentuje powierzchniową gęstość czynnej mocy pola elektromagnetycznego $\mathbf{P}(\mathbf{r})$, wydzielającej się w czasie zgrzewania jako gęstość mocy lokalnego źródła ciepła.

Natomiast:

$$< \sigma(|\mathbf{E}|^2-\mu\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{v}) >= \frac{1}{\Theta}\int_0^{\Theta}\frac{\sigma}{4}(\overline{\mathbf{E}}e^{i\omega t}+\overline{\mathbf{E}}^*e^{-i\omega t})\cdot(\overline{\mathbf{E}}e^{i\omega t}+\overline{\mathbf{E}}^*e^{-i\omega t})dt-\sigma\mu < \mathbf{s} > \cdot\boldsymbol{v} =$$
$$= \frac{\sigma\omega}{8\pi}\int_0^{(\frac{2\pi}{\omega})}(\overline{\mathbf{E}}\cdot\overline{\mathbf{E}}e^{2i\omega t}+\overline{\mathbf{E}}^*\cdot\overline{\mathbf{E}}^*e^{-2i\omega t}+2\left|\overline{\mathbf{E}}\cdot\overline{\mathbf{E}}^*\right|)dt-\sigma\mu < \mathbf{s} > \cdot\boldsymbol{v} =$$
$$= \frac{\sigma\omega}{4\pi}[Re(\overline{\mathbf{E}}\cdot\overline{\mathbf{E}})\int_0^{(\frac{2\pi}{\omega})}\frac{(e^{2i\omega t}+e^{-2i\omega t})}{2}dt - Im(\overline{\mathbf{E}}\cdot\overline{\mathbf{E}})\int_0^{(\frac{2\pi}{\omega})}\frac{(e^{2i\omega t}-e^{-2i\omega t})}{2i}dt+\ldots$$
$$+2\left|\overline{\mathbf{E}}\right|^2\int_0^{(\frac{2\pi}{\omega})}dt]-\sigma\mu < \mathbf{s} > \cdot\boldsymbol{v} = \frac{\sigma}{2}(\left|\overline{\mathbf{E}}\right|^2-2\mu < \mathbf{s} > \cdot\boldsymbol{v})$$

obliczono podobnie jak wyżej, biorąc w szczególności pod uwagę (A7, A13÷A14 oraz A17).

Ostatecznie, uśrednione w ten sposób równanie zachowania energii (4.123) można zapisać w postaci:

$$-div < \mathbf{s} >= \frac{\sigma(T)}{2}(\left|\overline{\mathbf{E}}\right|^2-2\mu < \mathbf{s} > \cdot\boldsymbol{v}) \quad (4.141)$$

będącej analogiem równania zachowania energii pola elektromagnetycznego przy przepływie prądu stałego (4.125). Wprowadzając do równania (4.141) napięcie skuteczne :

$$\tilde{\mathbf{E}} = (\frac{\overline{\mathbf{E}}}{\sqrt{2}}), \quad (4.142)$$

ze względu na (4.139) można zapisać je w równoważnych postaciach:

$$-\nabla\cdot < \mathbf{s} >= \sigma(T)(\left|\tilde{\mathbf{E}}\right|^2-\mu < \mathbf{s} > \cdot\boldsymbol{v}) \quad (4.143)$$

lub

$$-\nabla\cdot\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \sigma(T)(\left|\tilde{\mathbf{E}}\right|^2-\mu\mathbf{P}(\mathbf{r})\cdot\boldsymbol{v}), \quad (4.144)$$

z których widać lepiej nie tylko analogię, ale i sens techniczny z uwagi na wprowadzone napięcie skuteczne. Napięcie to odpowiada takiemu skutecznemu natężeniu hipotetycznego prądu stałego, który wydzieli w tym samym czasie tę samą ilość energii, co rzeczywiście przepływający prąd przemienny [111] i ma hipotetyczny potencjał skalarny $\tilde{\Phi}$ (4.114), spełniający równanie (4.115), analogicznie jak to miało miejsce w odniesieniu do prądu stałego.

Podobnie jak w przypadku zgrzewania prądem stałym w dalszych analizach ograniczono się do "modelu ciała stałego" w opisie harmonicznego pola

elektromagnetycznego ($v \approx 0$ w obszarze plastycznego płynięcia oraz ciekłego jądra zgrzeiny), wprowadzając hipotetyczny potencjał harmoniczny dla tego przypadku pola (4.114), taki że spełnia równanie (4.115). Prowadzi to do równoważnych postaci równań:

$$-\nabla \cdot < \mathbf{s} >= \sigma(T)(\nabla^T \tilde{\Phi})^2 \tag{4.145}$$

lub

$$-\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) = \sigma(T)(\nabla^T \tilde{\Phi})^2, \tag{4.146}$$

pozwalających wyznaczyć estymatę wydajności źródeł ciepła przy zgrzewaniu prądem przemiennym, podobnie jak to miało miejsce dla prądu stałego (4.126).

Jak widać z powyższego, uśrednione w czasie równanie zachowania energii zmiennego harmonicznie pola elektromagnetycznego, dzięki wprowadzeniu pojęcia napięcia i prądu skutecznego, pozwoliło na zbudowanie pewnego przybliżenia obrazu tego pola (równania (4.114÷4.115) oraz (4.145)) - równoważnego z uwagi na efekty energetyczne, co w naszym przypadku ma podstawowe znaczenie. Użyteczność takiego przybliżenia nie podlega dyskusji, zwłaszcza że rozwiązanie numeryczne nawet tak uproszczonego zadania jest niebanalnym i trudnym technicznie zagadnieniem.

Dyskusja równania dla części urojonej (4.129) zespolonego równania zachowania energii (4.138) jest w naszym przypadku niecelowa, ponieważ nie wnosi ono dodatkowych, istotnych z naszego punktu widzenia, informacji.

4.2.5. Gęstość sił w polu elektromagnetycznym

Wektor gęstości sił w polu elektromagnetycznym można zapisać w postaci [160]:

$$\mathbf{f} = (\mathbf{D} \cdot \nabla)\,\mathbf{E} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\,\mathbf{H} - \frac{1}{2}[grad\,(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) + grad\,(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})]\,. \tag{4.147}$$

Ale na podstawie (A22) i (A28) można otrzymać pomocniczą tożsamość:

$$\frac{1}{2}\,grad\,(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\,\mathbf{B} + \frac{1}{2}[\mathbf{A} \times rot\,\mathbf{B} + \mathbf{B} \times rot\,\mathbf{A} - \mathbf{A}\,div\,\mathbf{B} + \mathbf{B}\,div\,\mathbf{A} + rot\,(\mathbf{A} \times \mathbf{B})]\,. \tag{4.148}$$

Dlatego, z uwagi na (4.148), zależność (4.147) można przekształcić do postaci:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2}\,[rot\,\mathbf{E} \times \mathbf{D} + rot\,\mathbf{H} \times \mathbf{B} + rot\,\mathbf{D} \times \mathbf{E} + rot\,\mathbf{B} \times \mathbf{H} + rot\,(\mathbf{E} \times \mathbf{D}) + rot\,(\mathbf{H} \times \mathbf{B}) + \mathbf{D}\,div\,\mathbf{E} + \mathbf{B}\,div\,\mathbf{H} - \mathbf{E}\,div\,\mathbf{D} - \mathbf{H}\,div\,\mathbf{B}]\,. \tag{4.149}$$

Ze względu na (4.16÷4.17) oraz tożsamości (A23) i (A26), można napisać dla ośrodka niejednorodnego:

$$\mathbf{D}\,div\,\mathbf{E} = \varepsilon\,\mathbf{E}\,div\,\mathbf{E} = \mathbf{E}\,(\varepsilon\,div\,\mathbf{E}) = \mathbf{E}\,(div\,\mathbf{D} - \mathbf{E} \cdot grad\,\varepsilon) \tag{4.150}$$

i podobnie:

$$\mathbf{B}\,div\,\mathbf{H} = \mu\,\mathbf{H}\,div\,\mathbf{H} = \mathbf{H}\,(div\,\mathbf{B} - \mathbf{H}\,grad\,\mu) \tag{4.151}$$

oraz:

$$rot\,\mathbf{D} \times \mathbf{E} = rot\,(\varepsilon\,\mathbf{E}) \times \mathbf{E} = rot\,\mathbf{E} \times \varepsilon\,\mathbf{E} + grad\,\varepsilon \times (\mathbf{E} \times \mathbf{E}) = rot\,\mathbf{E} \times \mathbf{D}\,, \tag{4.152}$$

$$rot\,\mathbf{B} \times \mathbf{H} = rot\,(\mu\,\mathbf{H}) \times \mathbf{H} = rot\,\mathbf{H} \times \mu\,\mathbf{H} + grad\,\mu \times (\mathbf{H} \times \mathbf{H}) = rot\,\mathbf{H} \times \mathbf{B}\,. \tag{4.153}$$

Podstawiając (4.150)÷(4.153) do równania (4.149), po uwzględnieniu równań (4.26÷4.29) można zapisać dla niejednorodnych przewodzących magnetyków:

$$\mathbf{f} = \{[-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \times \mathbf{D} + (\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \times \mathbf{B}] - \frac{1}{2}\,[|\mathbf{E}|^2\,grad\,\varepsilon + |\mathbf{H}|^2\,grad\,\mu]\} \tag{4.154}$$

lub w znanej postaci, cytowanej np. przez [160]:

$$\mathbf{f} = \{\mathbf{j} \times \mathbf{B} + (-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \times \mathbf{D} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{2}\,[|\mathbf{E}|^2\,grad\,\varepsilon + |\mathbf{H}|^2\,grad\,\mu]\}\,. \tag{4.155}$$

Ponieważ:

$$(\mathbf{E} \times \mathbf{E}) = (\mathbf{H} \times \mathbf{H}) = \mathbf{0},$$

więc:

$$rot\,(\mathbf{E} \times \mathbf{D}) = rot\,(\mathbf{E} \times \varepsilon\,\mathbf{E}) = \varepsilon\,rot\,(\mathbf{E} \times \mathbf{E}) + grad\,\varepsilon \times (\mathbf{E} \times \mathbf{E}) = \mathbf{0},$$

$$rot\,(\mathbf{H} \times \mathbf{B}) = rot\,(\mathbf{H} \times \mu\,\mathbf{H}) = \mu\,rot\,(\mathbf{H} \times \mathbf{H}) + grad\,\mu \times (\mathbf{H} \times \mathbf{H}) = \mathbf{0}.$$

Natomiast sumę składników równania (4.155): $(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \times \mathbf{D} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B})$ można zapisać, po uwzględnieniu (4.117), w postaci:

$$(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \times \mathbf{D} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B}) = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) = \mu\,\varepsilon\,\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mu\,\varepsilon\,\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t}\,. \tag{4.156}$$

Podstawiając (4.156) do (4.155), otrzymano:

$$\mathbf{f} = \{\mu\,\varepsilon\,\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} + \mathbf{j} \times \mu\,\mathbf{H} - \frac{1}{2}\,[|\mathbf{E}|^2\,grad\,\varepsilon + |\mathbf{H}|^2\,grad\,\mu]\} \tag{4.157}$$

po uwzględnieniu (4.40), (4.117) oraz tego, że:

$$(\boldsymbol{v} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} = \boldsymbol{v} \times (\mathbf{H} \times \mathbf{H}) = \mathbf{0}.$$

Ze względu na (4.117)otrzymano:

$$\mathbf{f} = \{\mu\,\varepsilon\,\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} + \sigma\,(\mathbf{E} \times \mu\,\mathbf{H}) - \frac{1}{2}\,[|\mathbf{E}|^2\,(\frac{d\varepsilon}{dT}) + |\mathbf{H}|^2\,(\frac{d\mu}{dT})]\nabla\,T\}, \tag{4.158}$$

gdyż dla materiałów termicznie niejednorodnych zachodzą związki:

$$grad\,\varepsilon = (\frac{d\varepsilon}{dT})\,gradT \quad dla\ \ \varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon[T(\mathbf{r},t)],$$

$$grad\,\mu = (\frac{d\mu}{dT})\,gradT \quad dla\ \ \mu(\mathbf{r}) = \mu[T(\mathbf{r},t)].$$

Ponieważ zachodzi (4.117), więc ostatecznie:

$$\boxed{\mathbf{f} = \{\mu\,(\varepsilon\,\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} + \sigma\,\mathbf{s}) - \frac{1}{2}\,[|\mathbf{E}|^2\,(\frac{d\varepsilon}{dT}) + |\mathbf{H}|^2\,(\frac{d\mu}{dT})]\nabla^T T\}.} \tag{4.159}$$

W przypadkach zgrzewania prądem stałym oraz przemiennym o niskiej częstotliwości pomijając stany przejściowe można nadać równaniu (4.159) następujące postacie:

$$\mathbf{f} = \{(\mu\,\sigma\,\mathbf{s}) - \frac{1}{2}\,[|\mathbf{E}|^2\,(\frac{d\varepsilon}{dT}) + |\mathbf{H}|^2\,(\frac{d\mu}{dT})]\nabla^T T\}, \tag{4.160}$$

dla prądu stałego w ośrodku termicznie niejednorodnym oraz:

$$\bar{\mathbf{f}} = \{\mu\,(i\,\omega\,\varepsilon + \sigma)\bar{\mathbf{s}} - \frac{1}{2}\,[|\overline{\mathbf{E}}|^2\,(\frac{d\varepsilon}{dT}) + |\overline{\mathbf{H}}|^2\,(\frac{d\mu}{dT})]\nabla^T T\}, \tag{4.161}$$

dla prądu przemiennego w ośrodku termicznie niejednorodnym.

Po wprowadzeniu potencjałów (4.63) i (4.66) dla prądu stałego w ośrodku termicznie niejednorodnym otrzymano ostatecznie następującą postać równania (4.160):

$$\boxed{\mathbf{f} = -\{\mu\,\sigma\,\nabla^T\Phi \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \frac{1}{2}\,[(\nabla^T\Phi)^2\,(\frac{d\varepsilon}{dT}) + (\nabla \times \mathbf{A})^2\,(\frac{d\mu}{dT})]\nabla\,T\}.} \tag{4.162}$$

Jak już zauważono w podrozdziale 4.2.3., w dobrze przewodzącym materiale przy przepływie prądu przemiennego o niskiej częstotliwości mamy: $\sigma \gg \omega\varepsilon$. Dlatego zespolone równanie (4.161) można uprościć do postaci:

$$\bar{\mathbf{f}} \approx \{(\mu\,\sigma\,\bar{\mathbf{s}}) - \frac{1}{2}\,[|\overline{\mathbf{E}}|^2\,(\frac{d\varepsilon}{dT}) + |\overline{\mathbf{H}}|^2\,(\frac{d\mu}{dT})]\nabla^T T\}, \tag{4.163}$$

a następnie po wprowadzeniu potencjałów (4.81) i (4.84) zapisać jako:

$$\bar{\mathbf{f}} \approx -\{\mu\,\sigma\,(\nabla^T\overline{\Phi} + i\omega\overline{\mathbf{A}}) \times (\nabla \times \overline{\mathbf{A}}) + \\ + \frac{1}{2}\,[(\nabla^T\overline{\Phi} + i\omega\overline{\mathbf{A}})^2\,(\frac{d\varepsilon}{dT}) + (\nabla \times \overline{\mathbf{A}})^2\,(\frac{d\mu}{dT})]\nabla^T T\}. \tag{4.164}$$

Wyrażenie to po prostych przekształceniach można doprowadzić, dla niskich częstotliwości ω, do następującej przybliżonej postaci:

$$\boxed{\bar{\mathbf{f}} \approx -\{\mu\,\sigma\,\nabla^T\overline{\Phi} \times (\nabla \times \overline{\mathbf{A}}) + \\ + \frac{1}{2}\,[(\nabla^T\overline{\Phi})^2\,(\frac{d\varepsilon}{dT}) + (\nabla \times \overline{\mathbf{A}})^2\,(\frac{d\mu}{dT})]\nabla^T T\}.} \tag{4.165}$$

Zwraca uwagę podobieństwo postaci równań (4.162) i (4.165), chociaż to drugie jest zespolone. Jeśli ze względu na możliwość wykonania obliczeń przy użyciu pakietu ANSYS, przy małym wpływie własnej indukcji magnetycznej pominąć ją, to z (4.162) i (4.165) wynika, że jest to równoznaczne założeniu odpowiednio: $\mathbf{f} \approx \mathbf{0}$ i $\bar{\mathbf{f}} \approx \mathbf{0}$.

4.3. Transport materii, pędu i energii w procesach zgrzewania oporowego punktowego

Na wstępie celem uporządkowania i objaśnienia stosowanej terminologii oraz prezentacji fizycznych podstaw zaproponowanego opisu matematycznego zjawisk transportu materii, pędu i energii w procesach zgrzewania oporowego przypomniano za [1, 52, 86, 137] znane fakty i zjawiska.

O ile w obecnym stanie wiedzy matematyczny opis pola elektromagnetycznego nie pozwala na uwzględnienie takich zjawisk, jak np. mikrostruktura zgrzewanych materiałów, czy też przemiany fazowe (co z uwagi na efekt energetyczny oraz oddziaływanie siłowe pola elektromagnetycznego nie powinno mieć w naszym przypadku istotnego znaczenia), to nie mogą być one pominięte w opisie transportu materii, pędu i energii cieplnej oraz mechanicznej w trakcie zgrzewania materiałów metalicznych.

Materiały te, tzn. metale i stopy, stanowią wśród materiałów konstrukcyjnych znaczącą grupę. Czyste metale znajdują w technice stosunkowo nieliczne zastosowania, natomiast powszechnie stosowane są ich stopy - w wielu przypadkach wykazujące lepsze własności niż czyste metale. Użyte pojęcie metalu ma tu znaczenie potoczne i jest pewnym skrótem myślowym, przez który należy rozumieć pierwiastek, który w danych warunkach występuje w stanie metalicznym, charakteryzującym się:

- elektronowym charakterem przewodnictwa elektrycznego z ujemnym współczynnikiem temperaturowym,
- występowaniem wiązań metalicznych jako jedynych albo współistniejących z innym typem wiązań.

W pracy ograniczono się dalej do metali i ich stopów będących przewodnikami elektryczności. Przez stopy będziemy dalej rozumieć połączenia o określonym składzie dwóch lub więcej pierwiastków, wśród których przynajmniej jeden jest metalem. Dzięki temu stop ma własności metaliczne. Przy tym stopy charakteryzują się wiązaniem metalicznym jako jedynym lub współistniejącym z innymi rodzajami wiązań. Stopy są zatem substancjami dwu- lub wieloskładnikowymi, wykazującymi makroskopowo własności metaliczne. Prócz tego stopy mogą mieć strukturę jedno- lub wielofazową. Fazą nazywamy tu jednorodną lokalnie z uwagi na własności fizyczne część stopu, oddzieloną od pozostałych jego części wyraźną granicą międzyfazową. Oprócz pierwiastków celowo i w kontrolowany sposób wprowadzanych do stopów występują w nich tzw. domieszki, które dostają się przypadkowo w procesie wytwarzania lub pochodzą z surowców. Fazy jako elementy składowe (strukturalne) stopów w stanie stałym w najbardziej ogólnych rozważaniach dzieli się na:

- roztwory stałe,
- fazy międzymetaliczne.

Same zaś stopy krystalizują ze stanu ciekłego, będącego zwykle roztworem wszystkich składników stopu, a wtedy mogą powstać:

- roztwory stałe,
- fazy międzymetaliczne,
- mieszaniny faz.

Wspomniane materiały metaliczne mają lokalnie niejednorodną budowę krystaliczną w stałym stanie skupienia i nie w pełni poznaną budowę w stanie ciekłym. W stanie stałym pierwiastki metaliczne tworzą fazę prostą, natomiast stopy są najczęściej roztworami lub fazami międzymetalicznymi.

W układzie jednoskładnikowym złożonym z pierwiastka metalicznego pojęcia fazy i stanu skupienia są tożsame. W układach wieloskładnikowych, złożonych z dwóch lub więcej składników, nie można utożsamiać pojęć fazy i stanu skupienia. Czyni się to jednak powszechnie w odniesieniu do ciekłego stanu skupienia metali i ich stopów ze względu na niezadowalająco poznaną jego budowę. Z podobnych przyczyn podejście to stosuje się do obszarów przejściowych między stałym i ciekłym stanem skupienia, pomijając mikrostrukturę frakcji stałych w polu ciekłego metalu. W dalszej części pracy przyjęto przybliżony opis stałego stanu skupienia, zaniedbując mikrostrukturę zgrzewanych materiałów metalicznych w tym stanie.

I tylko w takich okolicznościach uprawnione jest utożsamianie, jak to uczyniono dalej, pojęć stanów skupienia i odpowiednich faz - uzasadnione w stosunku do tzw.

"fazy prostej", a także przyjętego w pracy modelu zgrzewanych materiałów jako ujednorodnionego dwuskładnikowego ośrodka heterogenicznego.

Podobnie jak w przypadku [17, 18, 123] zgrzewane materiały metaliczne traktowane są jako heterogeniczne mieszaniny oddziałujących ze sobą składników i faz, o własnościach odpowiednio zależnych od własności komponentów. Natomiast równania opisujące ich zachowanie są w "zupełności" podobne do równań opisujących zachowanie odrębnych składników i faz. W dalszym ciągu, aby uzyskać praktyczne wyniki, wybrano przybliżenie ograniczające się do stopów dwuskładnikowych, dopuszczając możliwość występowania zarówno fazy stałej, ciekłej oraz ich mieszaniny. Obszary występowania mieszaniny fazy stałej i ciekłej *(ang. mushy-zone)* w jądrze zgrzeiny nazwano obszarami dwufazowej strefy przejściowej (L+S). W tak ograniczonym sformułowaniu składniki stopowe i ich udziały reprezentują skład chemiczny, a fazy i ich udziały tę część ośrodka, która jest jednorodna ze względu na stan skupienia. Oznacza to również, że pomija się strukturę zgrzewanych materiałów znajdujących się w fazie stałej, ograniczając się do faz i przemian fazowych związanych ze zmianami stanów skupienia: topienia i krzepnięcia. Dalej mieszanina (L+S) traktowana jest jako heterogeniczny ośrodek ciągły, w którego dowolnym punkcie (wskazanym przez wektor położenia **r** - rys. 4.1) występują jednocześnie wszystkie wyróżnione składniki i fazy, a odpowiednie ich udziały przedstawiają prawdopodobieństwo ich wystąpienia. Jest to równoznaczne z założeniem istnienia odpowiednio ciągłych (dostatecznie "gładkich") funkcji rozkładu udziałów masowych i objętościowych, zarówno samych składników, jak i faz (stanów skupienia). Jak założono wcześniej, w tak ujednoliconej (uciąglonej) mieszaninie występują $\mathcal{B} = 2$ składniki oraz $\mathrm{K} = 2$ fazy. Mając to na uwadze, średnią prędkość k-tej fazy oznaczono jako $\boldsymbol{v}_k$, zaś przez $\boldsymbol{v}_k^\beta$ oznaczono oczekiwaną prędkość składnika β w fazie k. W konsekwencji różnica $\boldsymbol{w}_k^\beta = \boldsymbol{v}_k^\beta - \boldsymbol{v}_k$ przedstawia prędkość transportu składnika β w fazie k. Uśrednioną masową prędkość takiej mieszaniny faz (prędkość barycentryczną - środka jej masy (rys. 4.1)) oznaczono przez $\boldsymbol{v}$.

Gęstość udziału objętościowego składnika β w k-tej fazie można zdefiniować lokalnie jako:

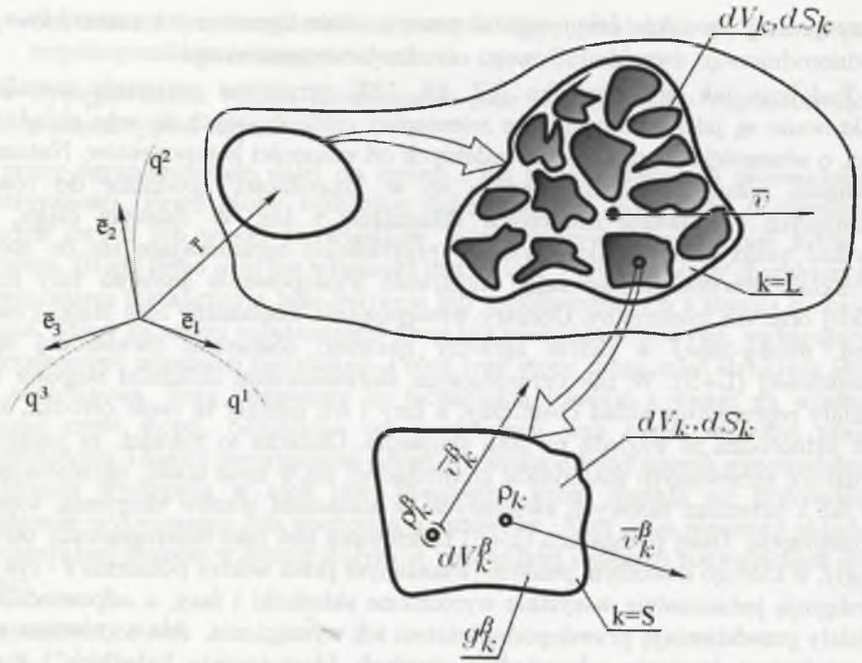
$$\overline{g}_k^\beta = \left(\frac{dV_k^\beta}{dV}\right) \tag{4.166}$$

a sam udział objętościowy składnika β w k-tej fazie:

$$g_k^\beta = \frac{\int_{V_k} dV_k^\beta}{V_k} = \frac{\int_{V_k} \overline{g}_k^\beta \, dV_k}{V_k}, \tag{4.167}$$

gdzie:

$$V_k = \int_V g_k \, dV \,. \tag{4.168}$$



Rys. 4.1. Ilustracja modelu wielofazowego i wieloskładnikowego ośrodka ciągłego
Fig. 4.1. Illustration of the model of a multiphase and muliticomponent continuum

Natomiast udział objętościowy fazy k w bilansowanej objętości kontrolnej (występujący pod całką równania (4.168)) można zdefiniować jako:

$$g_k = \frac{\int_V dV_k}{V} = \frac{\int_V \overline{g}_k \, dV}{V}, \tag{4.169}$$

gdzie gęstość udziału objętościowego k-tej fazy:

$$\overline{g}_k = \left(\frac{dV_k}{dV}\right) \tag{4.170}$$

oraz:

$$V = \int_V dV. \tag{4.171}$$

Jeśli ρ_k^β oraz g_k^β oznaczają odpowiednio rzeczywistą lokalną gęstość i udział objętościowy składnika β w k-tej fazie, to:

$$\overline{\rho}_k^\beta = g_k^\beta \, \rho_k^\beta \tag{4.172}$$

jest cząstkową gęstością składnika β w fazie k. Podobnie, jeśli ρ_k i g_k oznaczają rzeczywistą gęstość i udział objętościowy fazy k, to odpowiednią gęstość cząstkową fazy k można wyrazić przez:

$$\overline{\rho}_k = g_k \, \rho_k \,. \tag{4.173}$$

Następnie można zdefiniować masowy udział składnika β w fazie k jako:

$$c_k^\beta = \left(\frac{\overline{\rho}_k^\beta}{\overline{\rho}_k}\right) = \frac{g_k^\beta \rho_k^\beta}{g_k \, \rho_k} \tag{4.174}$$

oraz odpowiednio masowy udział fazy k:

$$c_k = \left(\frac{\overline{\rho}_k}{\rho}\right) = \frac{g_k \, \rho_k}{\rho}, \tag{4.175}$$

gdzie:

$$\rho = \sum_{k=1}^{K} \overline{\rho}_k = \sum_{k=1}^{K} g_k \, \rho_k \tag{4.176}$$

jest uśrednioną (homogeniczną) masową gęstością mieszaniny heterogenicznej.

Przy tym ze względu na (4.174÷4.176):

$$c_k^\beta = \frac{\left(\frac{\overline{\rho}_k^\beta}{\rho}\right)}{\left(\frac{\overline{\rho}_k}{\rho}\right)} = \frac{\overline{c}_k^\beta}{c_k}, \tag{4.177}$$

gdzie: $\overline{c}_k^\beta$ - gęstość masowa składnika β w fazie k:

$$\overline{c}_k^\beta = \left(\frac{\overline{\rho}_k^\beta}{\rho}\right) \tag{4.178}$$

oraz:

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{\beta=1}^{B} c_k^\beta = \sum_{k=1}^{K} c_k \sum_{\beta=1}^{B} \overline{\rho}_k^\beta = 1. \tag{4.179}$$

Z definicji, w dwufazowej strefie przejściowej $K = 2$:

$$\sum_{k=1}^{2} g_k = g_L + g_S = 1. \tag{4.180}$$

Podobnie, z uwagi na (4.180):

$$\sum_{k=1}^{2} c_k = c_L + c_S = 1. \tag{4.181}$$

Dla tak opisanego ośrodka ciągłego można podać równania bilansu wielkości ekstensywnych $\rho_k \varphi_k$ w odniesieniu do k-tej fazy w niejednorodnym polu prędkości $\boldsymbol{v}_k$ i parametrów intensywnych ψ_{ki}. W tym celu rozważono ruch obszaru w dowolnej konfiguracji $\mathcal{K}(t)$, jak na rys. 4.2, przy czym w konfiguracji początkowej $\mathcal{K}_0$ (t=0) powierzchnia kontrolna dS_{k0} wyróżnia pewną objętość kontrolną dV_{k0}, zaś w chwili t powierzchnia kontrolna $dS_k(t)$ wyróżnia w konfiguracji $\mathcal{K}(t)$ objętość $dV_k(t)$, poruszającą się z prędkością $\boldsymbol{v}_k$. Zmiany bilansowanych wielkości ekstensywnych o gęstości $\rho_k \varphi_k$ rozłożonych w sposób ciągły w obszarze ośrodka zamkniętym powierzchnią kontrolną $dS_k(t)$ i poruszających się z prędkością $\boldsymbol{v}_k$ przedstawia wzór Leibnitza :

$$\frac{d}{dt}\int_V (\rho_k \varphi_k)\, dV_k = \int_V \frac{\partial(\rho_k \varphi_k)}{\partial t}\, dV_k + \oint_S [(\rho_k \boldsymbol{v}_k^T \varphi_k)\cdot \mathbf{n}]\, dS_k\,, \tag{4.182}$$

ale na mocy twierdzenia Greena-Gaussa-Ostrogradskiego (A37):

$$\oint_S [(\rho_k \boldsymbol{v}_k^T \varphi_k)\cdot \mathbf{n}]\, dS_k = \int_V div\,(\overline{\rho}_k \boldsymbol{v}_k^T \varphi_k)\, dV\,, \tag{4.183}$$

z uwagi na (4.166) oraz $dV_k = g_k\, dV$ i ze względu na (4.173).
Skąd podobnie:

$$\frac{d}{dt}\int_V (\overline{\rho}_k \varphi_k)\, dV = \int_V [\frac{\partial(\overline{\rho}_k \varphi_k)}{\partial t} + div\,(\overline{\rho}_k \boldsymbol{v}_k^T \varphi_k)]\, dV\,. \tag{4.184}$$

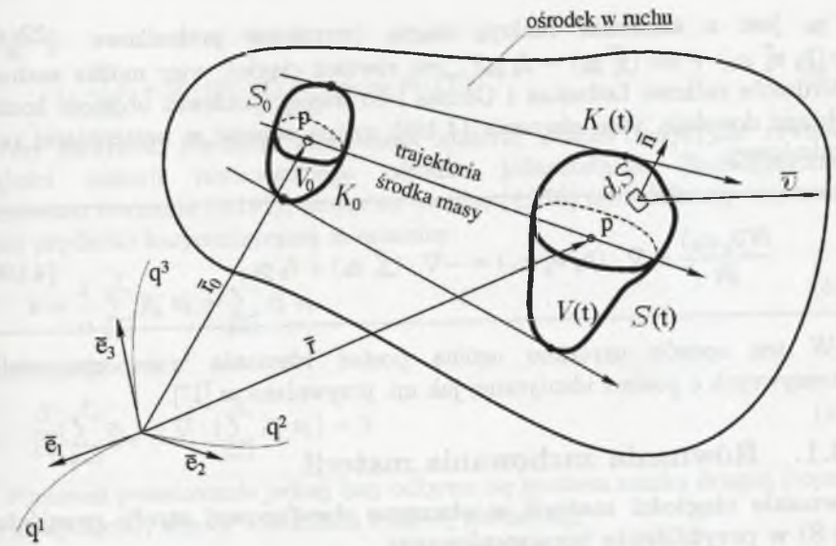
W objętości kontrolnej dV_k mogą występować źródła wielkości ekstensywnych lub mogą być one pochłaniane (upusty). Oznaczając przez I_k gęstość mocy źródła (upustu $-I_k$) wielkości ekstensywnych $\rho_k \varphi_k$ (wydajność źródła odniesiona do jednostki czasu i objętości), można ilość zanikającej / wydzielającej się wielkości ekstensywnej w objętości dV_k wyrazić całką:

$$\int_V I_k\, dV_k = \int_V I_k\, g_k\, dV\,, \tag{4.185}$$

z uwagi na (4.166): $dV_k = g_k\, dV$.
Natomiast molekularny transport wielkości ekstensywnych przez kontrolną powierzchnię bilansową można zapisać jako:

$$\oint_S (\boldsymbol{j}_k^T \cdot \mathbf{n})\, dS_k = \oint_S (\boldsymbol{j}_k^T \cdot \mathbf{n})\, g_k\, dS\,, \tag{4.186}$$

ponieważ wcześniej założono, że: $dS_k = g_k\, dS$,
gdzie:



Rys. 4.2. Ruch makroelementu objętości zawierającego mikroobjętości wielofazowe i wieloskładnikowe w odniesieniu do konfiguracji $\mathcal{K}(t)$
Fig. 4.2. The motion of the volume of the macroelement consisting of multiphase and multicomponent microvolume refers to configuration $\mathcal{K}(t)$

$\boldsymbol{j}_k^T$ - jednostkowy strumień dyfuzyjny wielkości ekstensywnych $\rho_k \varphi_k$ przez powierzchnię S_k:

$$\mathbf{j}_k^T = \sum_{i=1}^{N-1} L_{ki} \nabla^T \psi_{ki}\,, \tag{4.187}$$

zależnie od ilości N możliwych oddziaływań wzajemnych,

L_{ki} - współczynnik przewodzenia składnika k,

ψ_{ki} - parametry intensywne wielkości ekstensywnych $\rho_k \varphi_k$.

Bilans wielkości ekstensywnych w objętości kontrolnej ma postać:

$$\frac{d}{dt}\int_V (\overline{\rho}_k \varphi_k) dV = -\oint_S (\boldsymbol{j}_k^T \cdot \mathbf{n}) g_k\, dS + \int_V I_k\, g_k\, dV\,, \tag{4.188}$$

zaś po uwzględnieniu (4.184) i uporządkowaniu:

$$\int_V [\frac{\partial(\overline{\rho}_k \varphi_k)}{\partial t} + div\,(\overline{\rho}_k \boldsymbol{v}_k^T \varphi_k) + div\,(\boldsymbol{j}_k^T g_k) - I_k\, g_k]\, dV = 0\,, \tag{4.189}$$

ponieważ wcześniej założono że: $dS_k = g_k\, dS$.

g_k jest z założenia funkcją ciągłą (wyrażenie podcałkowe $[\frac{\partial(\overline{\rho}_k \varphi_k)}{\partial t} + div\,(\overline{\rho}_k \boldsymbol{v}_k^T \varphi_k) + div\,(\boldsymbol{j}_k^T g_k) - I_k g_k]$ jest również ciągłe), więc można zastosować twierdzenia całkowe Leibnitza i Gaussa i co więcej, ponieważ objętość kontrolną wybrano dowolnie, więc równanie (4.189) można zapisać w następującej postaci różniczkowej:

$$\boxed{\frac{\partial(\overline{\rho}_k \varphi_k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho}_k \boldsymbol{v}_k^T \varphi_k) = -\nabla \cdot (\boldsymbol{j}_k^T g_k) + I_k g_k \,. \qquad (4.190)}$$

W ten sposób uzyskano ogólną postać równania transportu wielkości ekstensywnych o postaci identycznej jak np. przywołana w [17].

4.3.1. Równania zachowania materii

Równanie ciągłości materii w obszarze dwufazowej strefy przejściowej (L+S) w przybliżeniu homogenicznym

Równanie zachowania materii dla k-tej fazy w mieszaninie faz (w tym przypadku ciekłej i stałej - $K = 2$ oraz $k = S, L$) można otrzymać wprost z równania (4.190), podstawiając odpowiednio:

$$\varphi_k = 1\,, \quad \boldsymbol{j}_k^T = \boldsymbol{0} \quad oraz \quad I_k = \pm \rho_k \dot{m}_k(T)\,,$$

co daje po uwzględnieniu tego, że $\nabla \cdot (\overline{\rho}_k \boldsymbol{v}_k^T) = \nabla \cdot (\overline{\rho}_k \boldsymbol{v}_k)$:

$$\frac{\partial \overline{\rho}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho}_k \boldsymbol{v}_k) = \pm g_k \rho_k \dot{m}_k(T)\,, \qquad (4.191)$$

gdzie $\dot{m}_k(T)$ opisuje wydajność wytwarzania (+) lub zaniku (−) odpowiedniej fazy k, odniesionej do jednostki objętości i jest funkcją temperatury T. Przy tym wybór znaków zależy od rodzaju przemiany fazowej (topienie albo krzepnięcie) w opisywanym obszarze jądra zgrzeiny.

W każdym z przypadków układ równań (4.191) można zapisać odpowiednio:

- dla każdej z faz podczas topienia:

$$\frac{\partial \overline{\rho}_L}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho}_L \boldsymbol{v}_L) = +g_L \rho_L \dot{m}_L(T)\,, \qquad (4.192)$$

$$\frac{\partial \overline{\rho}_S}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho}_S \boldsymbol{v}_S) = -g_S \rho_S \dot{m}_S(T)\,, \qquad (4.193)$$

- dla każdej z faz podczas krzepnięcia:

$$\frac{\partial \overline{\rho}_S}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho}_S \boldsymbol{v}_S) = +g_S \rho_S \dot{m}_S(T)\,, \qquad (4.194)$$

$$\frac{\partial \overline{\rho}_L}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho}_L \boldsymbol{v}_L) = -g_L \rho_L \dot{m}_L(T)\,. \qquad (4.195)$$

Aby otrzymać równanie zachowania materii, zwane tradycyjnie równaniem ciągłości materii równoważnego ośrodka jednorodnego (homogenicznego), zsumowano równania (4.191), mając na uwadze (4.176) oraz definicję wspomnianej wyżej prędkości barycentrycznej mieszaniny:

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^{2} \overline{\rho}_k \boldsymbol{v}_k = \sum_{k=1}^{2} c_k \boldsymbol{v}_k \qquad (4.196)$$

i otrzymano:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sum_{k=1}^{2} \overline{\rho}_k) + \nabla \cdot (\sum_{k=1}^{2} \overline{\rho}_k \boldsymbol{v}_k) = 0\,. \qquad (4.197)$$

Ponieważ powstawanie jednej fazy odbywa się kosztem zaniku drugiej (topnienie lub krzepnięcie), więc w warunkach lokalnej równowagi:

$$\sum_{k=1}^{2} g_k \dot{m}_k = 0\,. \qquad (4.198)$$

Ze względu na (4.176), (4.180) i (4.181) równanie ciągłości materii po homogenizacji przyjmie dla dwufazowej strefy przejściowej postać:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0\,, \qquad (4.199)$$

gdzie:

$$\rho = g_L \rho_L + g_S \rho_S = (1 - g_S)\rho_L + g_S \rho_S\,, \qquad (4.200)$$

a po uwzględnieniu (4.200) i (4.234÷4.235):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= c_L \boldsymbol{v}_L + c_S \boldsymbol{v}_S = (1 - c_S)\boldsymbol{v}_L + c_S \boldsymbol{v}_S = (1 - g_S)\boldsymbol{v}_L + g_S \boldsymbol{v}_S = \cdots \\ &= \frac{1}{1 - k_0}\{[\frac{T_m - T_L(c^B)}{T_m - T} - k_0]\boldsymbol{v}_L + [\frac{T_m - T_L(c^B)}{T_m - T}]\}\boldsymbol{v}_S \end{aligned} \qquad (4.201)$$

w materiałach nieściśliwych.

Ponieważ występujące w czasie zgrzewania naciski elektrod na zgrzewane materiały są rzędu $60 \div 5000\ daN$, tzn. są nieznaczne na tyle, że ze względów fizycznych deformacja objętościowa praktycznie nie występuje, więc w dalszych rozważaniach założono, że materiały te oraz materiał elektrod są nieściśliwe, tzn. założono, że $\rho = idem$. Implikuje to warunek: $\frac{d\rho}{dt} = 0$, a co za tym idzie warunek:

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0\,, \qquad (4.202)}$$

wynikający wprost z równania (4.199).

Równanie ciągłości materii w obszarze fazy ciekłej (L)

W tym przypadku $k = L$ i odpowiednie równanie można otrzymać wprost z (4.191):

$$\frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_L \, \boldsymbol{v}_L) = 0 \,, \tag{4.203}$$

ponieważ występuje wyłącznie jedna faza - faza ciekła ($K = 1$), a więc $g_L = 1$ i $\rho = \rho_L$ oraz $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_L$ (patrz (4.200) i (4.201)). Wskutek założonej nieściśliwości (4.202) przy $\rho_L = idem$ ma analogiczną postać w fazie ciekłej:

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{v}_L = 0 \,. \qquad (4.204)}$$

Równanie ciągłości materii w obszarze fazy stałej (S) w stanie plastycznego płynięcia (pełzania)

W tym przypadku $k = S$ i ze względu na założoną nieściśliwość fazy stałej równanie to można zapisać w postaci analogicznej do (4.204):

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{v}_S = 0 \,. \qquad (4.205)}$$

4.3.2. Równanie transportu składników

Równanie transportu składników w obszarze dwufazowej strefy przejściowej (L+S) w przybliżeniu homogenicznym

Równania te otrzymano dla składników β wprost z (4.190), podstawiając:

$$\varphi_k = c_k^\beta \,, \quad \boldsymbol{j}_k^T = -\rho_k \, D_k^\beta \, \nabla^T c_k^\beta \quad oraz \quad I_k = \pm \rho_k \, \dot{m}_k^\beta(T) \,,$$

co ze względu na postać $\boldsymbol{j}_k^T$ jest równoznaczne z uwzględnieniem stężeniowej dyfuzji składników β, spowodowanej niejednorodnością udziałów masowych ($\nabla^T c_k^\beta$) w odpowiednich fazach oraz pominięciem innych mechanizmów dyfuzji (przede wszystkim termodyfuzji, naprężeń oraz elektromigracji), w przybliżeniu liniowym Ficka. Innymi słowy, ograniczono się dalej do dominującej, szczególnie w fazie ciekłej (L), stężeniowej dyfuzji izotermicznej wywołanej różnicą koncentracji składników [12, 85]. Ponadto, $\dot{m}_k^\beta(T)$ opisuje wydajność wytwarzania (+) lub zaniku (−) każdego ze składników β w k-tej fazie wskutek zjawisk transportu między fazami oraz zachodzących reakcji chemicznych - w ogólnym przypadku.

Po podstawieniu do (4.190) i uwzględnieniu tego, że $\nabla \cdot (\overline{\rho}_k \, c_k^\beta \, \boldsymbol{v}_k^T) = \nabla \cdot (\overline{\rho}_k \, c_k^\beta \, \boldsymbol{v}_k)$ otrzymano:

$$\frac{\partial(\overline{\rho}_k \, c_k^\beta)}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho}_k \, c_k^\beta \, \boldsymbol{v}_k) = \nabla \cdot (g_k \, \rho_k \, D_k^\beta \, \nabla^T c_k^\beta) \pm g_k \, \rho_k \, \dot{m}_k^\beta(T) \,. \tag{4.206}$$

Z równania (4.175) wynika, że: $g_k \, \rho_k = \rho \, c_k$. Pozwala to przepisać równanie (4.206) w postaci:

$$\frac{\partial(\overline{\rho}_k \, c_k^\beta)}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho}_k \, c_k^\beta \, \boldsymbol{v}_k) = \nabla \cdot (\rho \, c_k \, D_k^\beta \, \nabla^T c_k^\beta) \pm \rho \, c_k \, \dot{m}_k^\beta(T) \,, \tag{4.207}$$

gdzie: D_k^β - współczynnik stężeniowej dyfuzji izotermicznej składnika β w k-tej fazie.

W dwufazowej strefie przejściowej układ równań (4.207) można zapisać dla składników β odpowiednio:

- dla każdej z faz podczas topienia:

$$\frac{\partial(\overline{\rho}_L \, c_L^\beta)}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho}_L \, c_L^\beta \, \boldsymbol{v}_L) = \nabla \cdot (\rho \, c_L \, D_L^\beta \, \nabla^T c_L^\beta) + \rho \, c_L \, \dot{m}_L^\beta(T) \,, \tag{4.208}$$

$$\frac{\partial(\overline{\rho}_S \, c_S^\beta)}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho}_S \, c_S^\beta \, \boldsymbol{v}_S) = \nabla \cdot (\rho \, c_S \, D_S^\beta \, \nabla^T c_S^\beta) - \rho \, c_S \, \dot{m}_S^\beta(T) \,, \tag{4.209}$$

- dla każdej z faz podczas krzepnięcia:

$$\frac{\partial(\overline{\rho}_S \, c_S^\beta)}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho}_S \, c_S^\beta \, \boldsymbol{v}_S) = \nabla \cdot (\rho \, c_S \, D_S^\beta \, \nabla^T c_S^\beta) + \rho \, c_S \, \dot{m}_S^\beta(T) \,, \tag{4.210}$$

$$\frac{\partial(\overline{\rho}_L \, c_L^\beta)}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho}_L \, c_L^\beta \, \boldsymbol{v}_L) = \nabla \cdot (\rho \, c_L \, D_L^\beta \, \nabla^T c_L^\beta) - \rho \, c_L \, \dot{m}_L^\beta(T) \,, \tag{4.211}$$

Sumując równania (4.207) podobnie jak wyżej, otrzymano, przy założeniu że między składnikami w poszczególnych fazach nie zachodzą reakcje chemiczne (tzn. że: $\sum_{k=1}^{2} \pm \rho \, c_k \, \dot{m}_k^\beta = \rho \, c_L \, \dot{m}_L^\beta - \rho \, c_S \, \dot{m}_S^\beta = \rho \, c_S \, \dot{m}_S^\beta - \rho \, c_L \, \dot{m}_L^\beta = 0$), następujące równanie:

$$\frac{\partial(\sum_{k=1}^{2} \overline{\rho}_k \, c_k^\beta)}{\partial t} + \nabla \cdot (\sum_{k=1}^{2} \overline{\rho}_k \, c_k^\beta \, \boldsymbol{v}_k) = \nabla \cdot (\rho \sum_{k=1}^{2} c_k \, D_k^\beta \, \nabla \, c_k^\beta) \,. \tag{4.212}$$

Podobnie jak w [17] składnik związany z adwekcją koncentracji rozłożono na dwie składowe, jedną związaną z ruchem mieszaniny heterogenicznej w całości (składowa homogeniczna) oraz odrębną składową ruchu względnego faz:

$$\sum_{k=1}^{2} \overline{\rho}_k \, c_k^\beta \, \boldsymbol{v}_k = \rho \, \boldsymbol{v} \, c^\beta + \sum_{k=1}^{2} \overline{\rho}_k \, (\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v})^T (c_k^\beta - c^\beta) \,, \tag{4.213}$$

gdzie udział masowy (koncentrację) składników β w mieszaninie heterogenicznej zdefiniowano i obliczono z (4.175) jako:

$$c^\beta = \frac{1}{\rho}\sum_{k=1}^{2}\overline{\rho}_k\, c_k^\beta = \sum_{k=1}^{2} c_k\, c_k^\beta\,. \tag{4.214}$$

W szczególności w dwufazowej strefie przejściowej jądra zgrzeiny mamy:

$$c^\beta = c_L\, c_L^\beta + c_S\, c_S^\beta\,, \tag{4.215}$$

przy tym ze względu na (4.181):

$$c^\beta = c_L^\beta - c_S(c_L^\beta - c_S^\beta) = c_S^\beta + c_L(c_L^\beta - c_S^\beta)\,. \tag{4.216}$$

Po podstawieniu zależności (4.213) i (4.214) do równań (4.212), z uwagi na (4.176), otrzymano po przekształceniach dla każdego ze składników β z uwzględnieniem wcześniej założonej nieściśliwości $\rho = idem$:

$$\frac{\partial c^\beta}{\partial t} + \nabla\cdot(\boldsymbol{v}c^\beta) = \nabla\cdot(\sum_{k=1}^{2} c_k\, D_k^\beta\, \nabla c_k^\beta) - \nabla\cdot[\sum_{k=1}^{2} c_k\,(\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v})(c_k^\beta - c^\beta)]\,. \tag{4.217}$$

W mieszaninie dwufazowej dyfuzję izotermiczną w fazie stałej można zaniedbać w porównaniu z efektami dyfuzji w fazie ciekłej ($D_L^\beta >> D_S^\beta$). Przyjmując takie uproszczenie oraz biorąc pod uwagę tożsamość:

$$\nabla^T c_L^\beta = \nabla^T c^\beta + \nabla^T(c_L^\beta - c^\beta) \tag{4.218}$$

i założoną wcześniej nieściśliwość $\rho = idem$, równanie (4.217) przekształcono do postaci:

$$\frac{\partial c^\beta}{\partial t} + \nabla\cdot(\boldsymbol{v}c^\beta) = \nabla\cdot(D^\beta\,\nabla^T c^\beta) + \cdots$$
$$+ \nabla\cdot[D^\beta\,\nabla^T(c_L^\beta - c^\beta)] - \nabla\cdot[c_S\,(c_L^\beta - c_S^\beta)(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_S)]\,, \tag{4.219}$$

gdzie oznaczono:

indeksem L - fazę ciekłą,

indeksem S - fazę stałą

oraz zdefiniowano współczynnik stężeniowej dyfuzji izotermicznej składnika β

$$D^\beta = c_L\, D_L^\beta\,. \tag{4.220}$$

Pierwsze dwa wyrazy po prawej stronie równań (4.219) reprezentują dyfuzję. Ostatni zaś wyraz reprezentuje przenoszenie składników w ruchu względnym faz. Jeśli zaniedbać efekty inercyjne (poślizg) i założyć, że prędkości faz są identyczne i równe prędkości barycentrycznej mieszaniny ($\boldsymbol{v}_L \approx \boldsymbol{v}_S \approx \boldsymbol{v}$) lub jeśli założyć, że

poszczególne fazy nieznacznie różnią się składem od ich mieszaniny ($c_L^\beta \approx c_S^\beta \approx c^\beta$), to wspomniany ostatni wyraz jest tożsamościowo równy 0.

Domknięcie układu równań zachowania wymaga wprowadzenia dodatkowych zależności dla udziałów masowych (stężeń) faz: c_k oraz ich składników β: c_k^β. W wielu zastosowaniach praktycznych związanych z topieniem i krzepnięciem stopów dwuskładnikowych można uzyskać zadowalający opis, zakładając lokalną równowagę termodynamiczną na granicy rozdziału faz w obszarze mieszaniny dwufazowej. Założenie to nie wyklucza możliwości występowania gradientów stężeń (koncentracji), a raczej powoduje, że można zaniedbać opory transportu atomów składników przez powierzchnie rozdziału faz.

Biorąc pod uwagę uproszczony wykres równowagi fazowej (w przybliżeniu dwuskładnikowy), np. dla stali (rys. 4.3), uzyskano równanie (4.215) jako warunek zachowania składnika β [17].

Równanie (4.216) w przypadku stopu binarnego, składającego się ze składników A i B, ma odpowiednio postać:

$$c^A = c_S\, c_S^A + c_L\, c_L^A = c_L^A - c_S(c_L^A - c_S^A) = c_S^A + c_L(c_L^A - c_S^A) \tag{4.221}$$

oraz:

$$c^B = c_S\, c_S^B + c_L\, c_L^B = c_L^B - c_S(c_L^B - c_S^B) = c_S^B + c_L(c_L^B - c_S^B)\,. \tag{4.222}$$

Ponadto, równanie (4.216) można przepisać w postaci opisującej udział każdej z faz:

- fazy stałej:

$$c_S = \frac{c_L^\beta - c^\beta}{c_L^\beta - c_S^\beta} \tag{4.223}$$

oraz odpowiednio:

- fazy ciekłej:

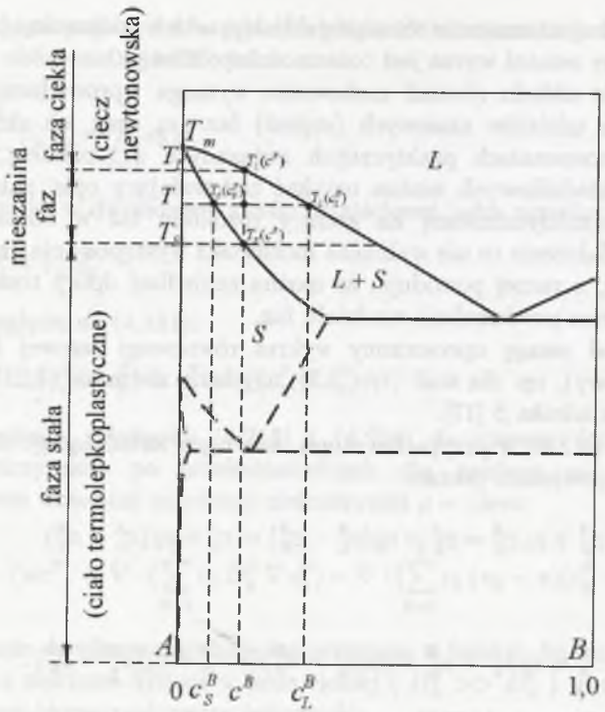
$$c_L = \frac{c^\beta - c_S^\beta}{c_L^\beta - c_S^\beta}\,. \tag{4.224}$$

Równania (4.223÷4.224) dla składnika B stopu dwuskładnikowego można odpowiednio zapisać jako:

$$c_S = \frac{c_L^B - c^B}{c_L^B - c_S^B} \tag{4.225}$$

oraz:

$$c_L = \frac{c^B - c_S^B}{c_L^B - c_S^B}\,. \tag{4.226}$$



Rys. 4.3. Wykres równowagi fazowej $Fe - Fe_3C$(w przybliżeniu binarnym)
Fig. 4.3. Phase equilibrium system $Fe - Fe_3C$ (in binary approximation)

Zauważmy, że (4.225) jako funkcja temperatury jest tożsama z cytowaną przez Mochnackiego [113] za J.A.Samojłowiczem ("Formirowanie slitka") funkcją o identycznej postaci, lecz innych oznaczeniach:

$$c_S(T) = \frac{c_L^B(T) - c^B}{c_L^B(T) - c_S^B(T)}. \tag{4.227}$$

Można również zauważyć, że równanie (4.223) jest znanym *prawem dźwigni* i w pewnym sensie umożliwia ilościową ocenę kinetyki przemiany fazowej [137].

Co więcej, można je otrzymać wprost z równania (4.215), niezależnie od wykresu równowagi fazowej. Zatem, wykres ten prezentuje graficznie warunek zachowania składników. Pozwala to na opis transportu składników w skali atomowej przy użyciu takich mierzalnych wielkości, jak: temperatura i skład.

Dla wygody definiuje się równowagowy współczynnik podziału k_0 składnika B (przyjmowany jako wartość stała dla danego stopu [25]) jako stosunek udziałów

masowych występujących faz:

$$k_0 = \left(\frac{c_S^B}{c_L^B}\right). \tag{4.228}$$

Jak pokazano niżej, $k_0 = const$ w przypadku liniowego przybliżenia linii likwidusu oraz solidusu.

W dwufazowej strefie przejściowej, stanowiącej obszar przejściowy między fazą stałą i ciekłą w procesach topienia i krzepnięcia obserwuje się różnicę stężeń składników stopu. W przypadku stopu dwuskładnikowego wzajemnie rozpuszczalnych składników A i B miarą tej różnicy jest zdefiniowany wyżej przez (4.228) współczynnik podziału (rozdziału). Jeżeli składnik B obniża temperaturę krzepnięcia stopu, to $k_0 < 1$ i stężenie składnika B w kryształach jest mniejsze niż w cieczy ($c_S^B < c_L^B$), a przemiana fazowa powoduje przemieszczanie się tego składnika do cieczy. Jeżeli natomiast składnik B podwyższa temperaturę krzepnięcia, to dzieje się odwrotnie, gdyż $k_0 > 1$. Na przebieg przemian fazowych $S \to L$ oraz $L \to S$ ma oprócz tego wpływ relacja szybkości przemian w stosunku do dyfuzyjnego transportu składnika [137]. W rzeczywistych warunkach współczynnik podziału nie osiąga wartości k_0, odpowiadającej warunkom równowagi.

W ogólnym przypadku $k_0(T)$ zależy od temperatury T i można go obliczyć wprost z wykresu równowagi fazowej. Ponieważ krzywizna linii solidusu i likwidusu jest niewielka, więc aproksymuje się je liniami prostymi. Wówczas współczynnik rozdziału można interpretować jako stosunek nachyleń linii likwidusu $T_L(c^B)$ oraz solidusu $T_S(c^B)$, a równanie (4.223) można zapisać następująco ([17, 155] - model krzepnięcia równowagowego):

$$c_S(T) = \frac{1}{(1-k_0)}\left[\frac{T - T_L(c^B)}{T - T_m}\right], \tag{4.229}$$

gdzie:

c^B - lokalny udział masowy składnika B,

T - temperatura lokalna,

$T_L(c^B)$ - temperatura likwidusu odpowiadająca stężeniu masowemu c^B,

T_m - temperatura topienia dla $c^B = 0$.

Niezależnie od [17] i [155] analogiczną do (4.229) zależność można uzyskać wprost przekształcając (4.225) i biorąc pod uwagę definicję (4.228):

$$c_S(T) = \frac{1 - (\frac{c^B}{c_L^B})}{1 - (\frac{c_S^B}{c_L^B})} = \frac{1}{1-k_0}\left[\frac{c_L^B - c^B}{c_L^B - 0}\right]. \tag{4.230}$$

Z drugiej strony, tangens nachylenia linii likwidusu $T_L(c^B)$ można obliczyć wprost z rys. 4.3:

$$\frac{T_m - T}{c_L^B - 0} = \frac{T_L(c^B) - T}{c_L^B - c^B} \tag{4.231}$$

a na tej podstawie wielkość:

$$[\frac{c_L^B - c^B}{c_L^B - 0}] = \frac{T_L(c^B) - T}{T_m - T}. \tag{4.232}$$

Podstawiając (4.232) do (4.231), otrzymuje się:

$$c_S(T) = \frac{1}{1-k_0}[\frac{T_L(c^B) - T}{T_m - T}]. \tag{4.233}$$

Skutkiem założonej nieściśliwości ośrodka (4.202) można wywnioskować z (4.175), że: $g_S = c_S$ oraz $g_L = c_L$, tzn.:

$$g_S(T) = \frac{1}{1-k_0}[\frac{T_L(c^B) - T}{T_m - T}], \tag{4.234}$$

$$g_L(T) = 1 - g_S(T) = \frac{1}{1-k_0}[\frac{T_m - T_L(c^B)}{T_m - T} - k_0]. \tag{4.235}$$

Ponadto można, użyć równań (4.223÷4.224) i (4.228) , w przypadku liniowego przybliżenia likwidusu i solidusu, do ustanowienia zależności między składem faz i mieszaniny, np. dla składnika B:

$$c_S^B(T) = [\frac{k_0}{1 + c_S(T)(k_0 - 1)}]c^B = \frac{k_0\, c^B(T_m - T)}{T_m - T_L}, \tag{4.236}$$

$$c_L^B(T) = [\frac{1}{1 + c_S(T)(k_0 - 1)}]c^B = \frac{c^B(T_m - T)}{T_m - T_L}, \tag{4.237}$$

po uwzględnieniu (4.233).

Ważne jest, aby zdawać sobie sprawę z tego, że założenie lokalnej równowagi nie wyklucza możliwości powstania warunków nierównowagi w skali makroskopowej. Makroskopową zmianę rozmieszczenia składników, spowodowaną adwekcją i dyfuzją opisuje równanie (4.219).

Z równań (4.229÷4.237) dla składnika B można obliczyć:

$$(c_L^B - c^B) = \left[\frac{T_L(c^B) - T}{T_m - T_L(c^B)}\right]c^B. \tag{4.238}$$

Ze względu na wcześniejsze spostrzeżenie, że prędkość faz:

$$\boldsymbol{v}_S \approx \boldsymbol{v}_L \approx \boldsymbol{v}$$

niewiele różni się od prędkości barycentrycznej mieszaniny $\boldsymbol{v}$, po wstawieniu (4.238) do równania (4.219) otrzymano dla składnika B stopu dwuskładnikowego ($\beta = B$):

$$\frac{\partial c^B}{\partial t} + \nabla\cdot(\boldsymbol{v}c^B) = \nabla\cdot(D^B\nabla^T c^B) + \nabla\cdot\{D^B\nabla^T\left[\frac{T_L(c^B) - T}{T_m - T_L(c^B)}\right]c^B\}, \tag{4.239}$$

gdzie z wykresu równowagi fazowej rys. 4.3: $T_L = T_L(c^B)$ i $T_S = T_S(c^B)$ oraz $T_m = T_L(c^B = 0) = T_S(c^B = 0)$.

Ponieważ założono wcześniej nieściśliwość (4.202)), więc po przekształceniach można zapisać równanie (4.239) w postaci:

$$\frac{\partial c^B}{\partial t} + \nabla\cdot\{\boldsymbol{v}c^B - D^B\nabla^T\left\{\left[\frac{T_m - T}{T_m - T_L(c^B)}\right]c^B\right\}\} = 0 \tag{4.240}$$

i następnie przepisać jako:

$$\frac{\partial c^B}{\partial t} + (\boldsymbol{v}^T\cdot\nabla^T)c^B = \nabla^T\left\{\left[\frac{T_m - T}{T_m - T_L(c^B)}\right]c^B\right\}\cdot(\frac{dD^B}{dT})\nabla^T T + \cdots$$
$$+ D^B\nabla^2\left\{\left[\frac{T_m - T}{T_m - T_L(c^B)}\right]c^B\right\}, \tag{4.241}$$

ponieważ: $\nabla D^B = (\frac{dD^B}{dT})\nabla^T T$. Zwykle zależność $D^B = D^B(T)$ wyznacza się doświadczalnie, nadając jej po uwzględnieniu (4.220), w oparciu o wzór Arrcheniusa [138] nową postać:

$$D^B(T) = D_0^B c_L^B(T) exp(-\frac{Q^B}{RT}), \tag{4.242}$$

gdzie:

$c_L^B(T)$ - udział masowy składnika B w fazie ciekłej,

Q^B - energia aktywacji dyfuzji składnika B,

R - stała gazowa,

D_0^B - stała.

Występującą po prawej stronie równania (4.241) pochodną $(\frac{dD^B}{dT})$ obliczono z (4.242), wykorzystując (4.237):

$$(\frac{dD^B}{dT}) = D_0 c_L^B[\frac{Q^B}{RT^2} + (\frac{dlnc_L^B}{dT})]exp(-\frac{Q^B}{RT}) = \cdots$$
$$= \frac{D_0^B c^B}{[1 + c_S(T)(k_0 - 1)]}\left\{\frac{Q^B}{RT^2} + [T_m - T_L(c^B)][(\frac{dlnc^B}{dT}) - \frac{1}{(T_m - T)}]\right\}exp(-\frac{Q^B}{RT}), \tag{4.243}$$

a następnie w oparciu o (4.233) przekształcono ją do postaci:

$$(\frac{dD^B}{dT}) = \frac{(T_m - T)D_0^B c^B}{[T_m - T_L(c^B)]}\cdots$$
$$\left\{\frac{Q^B}{RT^2} + [T_m - T_L(c^B)][(\frac{dlnc^B}{dT}) - \frac{1}{(T_m - T)}]\right\}exp(-\frac{Q^B}{RT}). \tag{4.244}$$

Ponadto obliczono:

$$\nabla^T\left\{\left[\frac{T_m - T}{T_m - T_L(c^B)}\right]c^B\right\} = \frac{1}{[T_m - T_L(c^B)]}[(T_m - T)\nabla^T c^B - c^B\nabla^T T] \quad (4.245)$$

oraz:

$$\nabla^2\left\{\left[\frac{T_m - T}{T_m - T_L(c^B)}\right]c^B\right\} = \frac{1}{[T_m - T_L(c^B)]}[(T_m - T)\nabla^2 c^B - c^B\nabla^2 T]. \quad (4.246)$$

Podstawiając (4.244÷4.246) do (4.241), zapisano ostatecznie równanie (4.241) w postaci:

$$\frac{\partial c^B}{\partial t} + (\boldsymbol{v}^T\cdot\nabla^T)c^B = \frac{D_0^B c^B(T_m - T)exp(-\frac{Q^B}{RT})}{[T_m - T_L(c^B)]^2}\Big\{\{\frac{Q^B}{RT^2} + [T_m - T_L(c^B)]\cdots$$
$$[(\frac{dlnc^B}{dT}) - \frac{1}{(T_m - T)}]\}[(T_m - T)\nabla^T c^B - c^B\nabla^T T]\cdot\nabla^T T + \cdots$$
$$+ [(T_m - T)\nabla^2 c^B - c^B\nabla^2 T]\Big\}. \quad (4.247)$$

Otrzymane równanie opisuje wymuszony transport składnika stopowego B w stopie dwuskładnikowym w dwufazowej strefie przejściowej materiału niejednorodnego termicznie w przybliżeniu homogenicznym wywołany:

- różnicą stężeń (dyfuzja stężeniowa),
- zmianą stanu skupienia,
- niejednorodnością,
- adwekcją po wpływem zewnętrznego pola prędkości $\boldsymbol{v}$,

przy zachowaniu opisanych założeń upraszczających. Ponieważ występuje w nim jawnie pole temperatury T oraz prędkości płynięcia $\boldsymbol{v}$, równanie to jest sprzężone z równaniami zachowania pędu i energii, opisanymi w dalszej części pracy. Z tych samych powodów jest ono również sprzężone z równaniami opisującymi występujące pole elektromagnetyczne opisane wcześniej.

Drugie z równań, jakie można otrzymać podobnie do (4.247), lecz dla $\beta = A$, jest spełnione tożsamościowo, ponieważ: $c^A = 1 - c^B$.

Warto jeszcze zauważyć, że przy małych prędkościach $\boldsymbol{v}$, jakie mają miejsce w ruchu o charakterze płynięcia "pełzającego" (podrozdział 4.3.1.), równanie (4.247) przyjmuje postać równania dyfuzji stężeniowej składnika stopowego B w niejednorodnym termicznie nieodkształconym ciele stałym ("model ciała stałego"

dla dwufazowej strefy przejściowej):

$$\frac{\partial c^B}{\partial t} = \frac{D_0^B c^B(T_m - T)exp(-\frac{Q^B}{RT})}{[T_m - T_L(c^B)]^2}\Big\{\{\frac{Q^B}{RT^2} + [T_m - T_L(c^B)]\cdots$$
$$[(\frac{dlnc^B}{dT}) - \frac{1}{(T_m - T)}]\}[(T_m - T)\nabla^T c^B - c^B\nabla^T T]\cdot\nabla^T T + \cdots$$
$$+ [(T_m - T)\nabla^2 c^B - c^B\nabla^2 T]\Big\}. \quad (4.248)$$

Równanie transportu składników w obszarze fazy ciekłej (L)

Ze względu na założoną nieściśliwość (4.205) równanie (4.217) zapisane dla składnika stopowego B po uwzględnieniu (4.220) przyjmuje postać:

$$\frac{\partial c_L^B}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_L^T\cdot\nabla^T)c_L^B = \nabla\cdot(D^B\nabla^T c_L^B) \quad (4.249)$$

opisującą transport składnika B w fazie ciekłej.

Jednocześnie można otrzymać podobne równanie dla składnika A, gdyż: $c^A = 1 - c^B$. Ponieważ mają miejsce zależności (A26) oraz (A33), więc:

$$\nabla\cdot(D^B\nabla^T c_L^B) = \nabla^T D^B\cdot\nabla^T c_L^B + D^B\nabla^2 c_L^B,$$

a jednocześnie ze względu na (4.242) mamy:

$$\nabla^T D^B = (\frac{dD^B}{dT})\nabla^T T = D_0^B[(\frac{dc_L^B}{dT}) + \frac{Q^B c_L^B}{RT^2}]exp(-\frac{Q^B}{RT})\nabla^T T,$$

to po przekształceniach i uwzględnieniu (4.220) otrzymano:

$$\frac{\partial c_L^B}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_L^T\cdot\nabla^T)c_L^B = D_0^B c_L^B(T)exp(-\frac{Q^B}{RT})\cdots$$
$$\{[(\frac{dlnc_L^B}{dT}) + \frac{Q^B c_L^B}{RT^2}]\nabla^T T\cdot\nabla^T c_L^B + \nabla^2 c_L^B\} \quad (4.250)$$

ostateczną postać równania transportu składnika B w fazie ciekłej materiału niejednorodnego termicznie.

Rozpatrywanie przybliżenia zaniedbującego transport adwekcyjny ze względu na małą wartość prędkości $\boldsymbol{v}_L \approx \mathbf{0}$ w warunkach przepływu, jaki ma miejsce w obszarze ciekłego jądra (podrozdz. 4.3.3.), nie ma większego sensu, gdyż znaczenie tego mechanizmu transportu jest większe niż dyfuzji stężeniowej.

Równanie transportu składników w obszarze fazy stałej (S)

W obszarze termolepkoplastycznego płynięcia ("pełzania" z prędkościa $\boldsymbol{v}_S$) w fazie stałej równanie transportu składnika B przyjmie analogiczną do (4.250) postać:

$$\frac{\partial c_S^B}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_S^T \cdot \nabla^T) c_S^B = D_0^B c_S^B(T) exp(-\frac{Q^B}{RT}) \cdots$$
$$\{[(\frac{dln c_S^B}{dT}) + \frac{Q^B c_S^B}{RT^2}] \nabla^T T \cdot \nabla^T c_S^B + \nabla^2 c_S^B\}. \quad (4.251)$$

Ze względu na przyjęty model zgrzewanych materiałów w fazie stałej (ciało sztywno-lepkoplastyczne - podrozdz. 4.3.3.) w obszarze nieodkształcalnym (sztywnym) będzie obowiązywało przybliżenie dyfuzyjne dla niejednorodnego termicznie ciała stałego ($\boldsymbol{v}_S = \mathbf{0}$), mające postać znaną z literatury [85, 138]:

$$\frac{\partial c_L^B}{\partial t} = D_0^B c_S^B(T) exp(-\frac{Q^B}{RT}) \cdots$$
$$\{[(\frac{dln c_S^B}{dT}) + \frac{Q^B c_S^B}{RT^2}] \nabla^T T \cdot \nabla^T c_S^B + \nabla^2 c_S^B\} \quad (4.252)$$

Przybliżenie to może być brane pod uwagę również dla obszaru "pełzania" termolepkoplastycznego. Wymaga to jednak pogłębionych analiz.

4.3.3. Równanie zachowania pędu

Jak już zauważono we wstępie, istotną fazą procesu zgrzewania jest powstanie ciekłego jądra o strukturze złożonej w przestrzeni i czasie. W pierwszym okresie pod wpływem nacisku elektrod i lokalnego wzrostu temperatury następuje "uplastycznienie" zgrzewanych materiałów w strefie styków - płynięcie termolepkoplastyczne fazy stałej, a następnie pojawia się faza ciekła z dwufazową strefą przejściową (o zmiennym zasięgu i strukturze), prowadząc do zaniku styku pomiędzy zgrzewanymi materiałami pod wpływem płynięcia. Płynięcie ustaje z chwilą całkowitego zestalenia się płynnego jądra zgrzeiny i zachodzi już bez oddziaływania sił odłączonego pola elektromagnetycznego, a więc bez intensywnego mieszania.

Tę fazę cyklu zgrzewania można opisać fenomenologicznie na gruncie mechaniki ośrodków plastycznych (w fazie stałej) i mechaniki płynów (w fazie ciekłej) za pośrednictwem pola przemieszczeń $\boldsymbol{u}_S$ oraz prędkości $\boldsymbol{v}_S$ zgrzewanych materiałów z naprężeniami wewnętrznymi $[\sigma_{ij}]$.

Należy przy tym mieć świadomość tego, że jest to opis uproszczony i niezadowalający ze względu na brak spójnej teorii ciekłego stanu materii, np. [60]. W odróżnieniu od gazów, zadowalająco opisywanych przez teorię kinetyczną, struktura cieczy jest bardziej złożona. Obok sił przyciągania na mniejszych odległościach między cząsteczkami cieczy występują siły wzajemnego odpychania. W wielu wypadkach mogą zachodzić dodatkowe oddziaływania wywołane np. polarnością cząstek. W wyniku złożonego działania sił międzycząsteczkowych w stanie ciekłym powstają większe zespoły cząstek - asocjaty lub kompleksy. Stopień asocjacji bywa na ogół różny i zmienny na skutek ciągłego rozpadu i łączenia się cząstek, wywołanych zderzeniami i wzrostem energii kinetycznej wraz ze wzrostem temperatury. Od kryształów w stanie stałym, ciecze (w tym ciekłe metale) różnią się zasadniczo tym, że w cieczy cząstki, ich asocjaty czy też kompleksy nie znajdują się w stałych uporządkowanych położeniach, lecz łatwo przechodzą z jednego w inne. Obserwuje się "pseudokrystaliczne" ich uporządkowanie. W związku z tym powstała teoria zakładająca podobieństwo wewnętrznej struktury cieczy do struktury substancji krystalicznych, rozwinięta głównie przez Frenkla. Syntetyczny przegląd innych nowszych teorii daje [60]. Dostarczają one niewystarczającego opisu zachowania się, w szczególności ciekłych metali, dając zadowalające wyniki jedynie w określonych sytuacjach.

Dlatego w przedstawionej pracy z konieczności oparto się na formalnym opisie fazy stałej i ciekłej, wykorzystującym dorobek mechaniki ośrodków ciągłych w zakresie termolepkoplastyczności oraz mechaniki płynięcia mieszaniny faza stała-ciecz newtonowska.

Zaproponowany niżej opis zachowania się materiałów, biorących udział w procesie zgrzewania, odrębnie modeluje zjawiska związane z transportem pędu i oddziaływaniami siłowymi (chwilowa równowaga ośrodka) w obszarze dwufazowej strefy przejściowej, w fazie ciekłej oraz w fazie stałej. Przy wyborze opisu matematycznego (modelu) nie bez znaczenia była świadomość ograniczonych możliwości rozwiązania go przy użyciu dostępnego pakietu programów ANSYS, który w pewnej mierze determinował przyjęte założenia oraz uproszczenia, a także sposób przeprowadzonej analizy.

Równanie zachowania pędu w obszarze dwufazowej strefy przejściowej (L+S) w przybliżeniu homogenicznym

Odpowiednie równanie dla symetrycznego tensora naprężeń otrzymano z (4.190), podstawiając dla k-tej fazy:

$$\varphi_k = \boldsymbol{v}_k, \quad \boldsymbol{j}_k^T = -[\sigma_{ij}]_k \quad oraz \quad I_k = \mathbf{f}_k + \dot{\mathbf{n}}_k.$$

Stąd układ równań dla każdej z $K = 2$ faz:

$$\frac{\partial(\overline{\rho}_k \boldsymbol{v}_k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho}_k \boldsymbol{v}_k^T \cdot \boldsymbol{v}_k) = \nabla \cdot (g_k [\sigma_{ij}]_k) + g_k \dot{\mathbf{n}}_k + g_k \mathbf{f}_k, \quad (4.253)$$

gdzie:

$[\sigma_{ij}]_k$ - symetryczny tensor naprężeń k-tej fazy w mieszaninie heterogenicznej,

$\dot{\mathbf{n}}_k$ - wektor zmian pędu k-tej fazy ze względu na oddziaływania międzyfazowe,

$\mathbf{f}_k$ - wektor gęstości sił zewnętrznych (w naszym przypadku gęstości sił oddziaływania przyłożonego pola elektromagnetycznego, bowiem wpływ pola grawitacyjnego pominięto) oddziałujących na k-tą fazę.

Sumując, jak poprzednio, równania dla faz (4.253), otrzymano:

$$\frac{\partial(\sum_{k=1}^{2}\overline{\rho}_k\,\boldsymbol{v}_k)}{\partial t}+\nabla\cdot(\sum_{k=1}^{2}\overline{\rho}_k\,\boldsymbol{v}_k^T\cdot\boldsymbol{v}_k)=\cdots$$
$$=\nabla\cdot(\sum_{k=1}^{2}g_k\,[\tau_{ij}]_k)-\nabla(\sum_{k=1}^{2}g_k\,p_k)\,[\delta_{ij}]+\mathbf{f}^*+\mathbf{f}, \quad (4.254)$$

przy jednoczesnej dekompozycji tensora naprężeń k-tej fazy $[\sigma_{ij}]_k$ na aksjator - część kulistą (ciśnienie) oraz składnik odpowiedzialny za deformację postaci elementarnej objętości ośrodka dV_k - dewiator:

$$[\sigma_{ij}]_k=-p_k\,[\delta_{ij}]+[\tau_{ij}]_k\,, \quad (4.255)$$

gdzie:

$[\delta_{ij}]$ - tensor jednostkowy,

p_k - ciśnienie hydrostatyczne k-tej fazy ($p_k=-\frac{1}{3}tr([\sigma_{ij}]_k)=-\frac{1}{3}\sum_{\alpha=1}^{3}[\sigma_{\alpha\alpha}]_k$) - średnie naprężenie normalne,

$[\tau_{ij}]_k$ - dewiator tensora naprężeń k-tej fazy mieszaniny heterogenicznej,

$\mathbf{f}^*$ - wypadkowy wektor gęstości wymiany pędu wywołany oddziaływaniami międzyfazowymi:

$$\mathbf{f}^*=\sum_{k=1}^{2}g_k\,\dot{\mathbf{n}}_k\,, \quad (4.256)$$

$\mathbf{f}$ - homogeniczny (ujednolicony) wypadkowy wektor gęstości sił oddziaływania pola elektromagnetycznego:

$$\mathbf{f}=\sum_{k=1}^{2}g_k\,\mathbf{f}_k\,. \quad (4.257)$$

Zgodnie z (4.159), wektor $\mathbf{f}_k$ można wyrazić w niejednorodnym przewodzącym magnetyku, jakim jest k-ta faza, za pośrednictwem gęstości mocy pola elektromagnetycznego $\mathbf{s}_k$ w ośrodku poruszającym się z prędkością $\boldsymbol{v}_k$ oraz wektora natężenia pola elektrycznego $\mathbf{E}_k$ i magnetycznego $\mathbf{H}_k$. Dla k-tej fazy, przy założeniu lokalnej równowagi termodynamicznej ($T=T_k$), można zapisać go następująco:

$$\mathbf{f}_k=\{(\mu_k\,\sigma_k\,\mathbf{s}_k)-\frac{1}{2}\,[|\mathbf{E}_k|^2\,(\frac{d\varepsilon_k}{dT})+|\mathbf{H}_k|^2\,(\frac{d\mu_k}{dT})]\nabla^T T\}\,, \quad (4.258)$$

gdyż odpowiednio:

$$grad\,\varepsilon_k=(\frac{d\varepsilon_k}{dT})grad\,T\,,$$
$$grad\,\mu_k=(\frac{d\mu_k}{dT})grad\,T\,.$$

Wprowadzając, w przypadku zgrzewania prądem stałym, potencjał skalarny pola elektrycznego (4.63) oraz wektorowy indukowanego pola magnetycznego (4.66), można po uwzględnieniu (4.117) zapisać gęstość sił masowych oddziaływania pola elektromagnetycznego prądu stałego k-tej fazy w postaci:

$$\mathbf{f}_k=-\{\mu_k\,\sigma_k\,(\nabla^T\Phi_k)\times(\nabla\times\mathbf{A}_k)+\frac{1}{2}\,[(\nabla^T\Phi_k)^2\,(\frac{d\varepsilon_k}{dT})+(\nabla\times\mathbf{A}_k)^2\,(\frac{d\mu_k}{dT})]\nabla^T T\}\,. \quad (4.259)$$

Natomiast w przypadku zgrzewania prądem przemiennym, zgodnie z (4.165) otrzymano dla k-tej fazy wyrażenie analogiczne do (4.259), lecz zapisane względem zespolonych amplitud potencjałów:

$$\overline{\mathbf{f}}_k=-\{\mu_k\,\sigma_k\,(\nabla^T\overline{\Phi}_k)\times(\nabla\times\overline{\mathbf{A}}_k)+$$
$$+\frac{1}{2}\,[(\nabla^T\overline{\Phi}_k)^2\,(\frac{d\varepsilon_k}{dT})+(\nabla\times\overline{\mathbf{A}}_k)^2\,(\frac{d\mu_k}{dT})]\nabla^T T\}\,. \quad (4.260)$$

Jeśli wziąć pod uwagę (4.257), to w każdym z powyższych przypadków otrzymano po ujednoliceniu następujące wartości homogenicznego wektora gęstości sił oddziaływania pola elektromagnetycznego:

- przypadek ogólny w oparciu o (4.258):

$$\mathbf{f}=\{(\mu\,\sigma\,\mathbf{s})-\frac{1}{2}\,[|\mathbf{E}|^2\,(\frac{d\varepsilon}{dT})+|\mathbf{H}|^2\,(\frac{d\mu}{dT})]\nabla^T T\}\,, \quad (4.261)$$

- przepływ prądu stałego na mocy (4.259):

$$\mathbf{f}=-\{\mu\,\sigma\,(\nabla^T\Phi)\times(\nabla\times\mathbf{A})+\frac{1}{2}\,[(\nabla^T\Phi)^2\,(\frac{d\varepsilon}{dT})+(\nabla\times\mathbf{A})^2\,(\frac{d\mu}{dT})]\nabla^T T\}\,, \quad (4.262)$$

- przepływ prądu przemiennego o niskiej częstotliwości na mocy (4.260):

$$\overline{\mathbf{f}}=-\{\mu\,\sigma\,(\nabla^T\overline{\Phi})\times(\nabla\times\overline{\mathbf{A}})+\frac{1}{2}\,[(\nabla^T\overline{\Phi})^2\,(\frac{d\varepsilon}{dT})+(\nabla\times\overline{\mathbf{A}})^2\,(\frac{d\mu}{dT})]\nabla^T T\}\,, \quad (4.263)$$

gdzie podobnie jak w przypadku temperatury T w warunkach lokalnej równowagi termodynamicznej dla $k=L,S$:

$$\mathbf{E}_k=\mathbf{E},\quad \mathbf{H}_k=\mathbf{H},\quad \Phi_k=\Phi,\quad \mathbf{A}_k=\mathbf{A},\quad \overline{\Phi}_k=\overline{\Phi},\quad \overline{\mathbf{A}}_k=\overline{\mathbf{A}}$$

oraz:

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^{2} g_k \varepsilon_k , \tag{4.264}$$

$$\mu = \sum_{k=1}^{2} g_k \mu_k , \tag{4.265}$$

$$\sigma = \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^{2} g_k \sigma_k \mu_k , \tag{4.266}$$

$$\mathbf{E} = \sum_{k=1}^{2} g_k \mathbf{E}_k , \tag{4.267}$$

$$\mathbf{H} = \sum_{k=1}^{2} g_k \mathbf{H}_k , \tag{4.268}$$

$$\Phi = \sum_{k=1}^{2} g_k \Phi_k , \tag{4.269}$$

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{2} g_k \mathbf{A}_k , \tag{4.270}$$

$$\overline{\Phi} = \sum_{k=1}^{2} g_k \overline{\Phi}_k , \tag{4.271}$$

$$\overline{\mathbf{A}} = \sum_{k=1}^{2} g_k \overline{\mathbf{A}}_k . \tag{4.272}$$

Ze względu na zdefiniowane wcześniej wielkości homogeniczne: gęstość (4.176) oraz prędkość (4.196), adwekcyjną zmianę pędu można rozłożyć na dwie składowe:

$$\sum_{k=1}^{2} \overline{\rho}_k \, \boldsymbol{v}_k^T \cdot \boldsymbol{v}_k = \rho \, \boldsymbol{v}^T \cdot \boldsymbol{v} + \sum_{k=1}^{2} \overline{\rho}_k (\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v})^T \cdot (\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}) \tag{4.273}$$

- pierwszą, związaną z ruchem mieszaniny w całości: $\rho \, \boldsymbol{v}^T \cdot \boldsymbol{v}$,

- drugą, opisującą względny ruch faz: $\sum_{k=1}^{2} \overline{\rho}_k (\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v})^T \cdot (\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v})$.

Małe wartości prędkości względnego ruchu faz $\mathbf{w}_k = (\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v})$, a tym bardziej ich iloczyny, upoważniają w dalszych analizach do pominięcia wpływu tego zjawiska w równaniu bilansu pędu, tzn. do założenia:

$$\sum_{k=1}^{2} \overline{\rho}_k (\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v})^T \cdot (\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}) \approx \mathbf{0} ,$$

tzn. założenia, że:

$$\boldsymbol{v}_S = \boldsymbol{v}_L = \boldsymbol{v} . \tag{4.274}$$

Założenie to pozwoliło uprościć postać uzyskanego równania zachowania pędu (4.275), otrzymanego po podstawieniu (4.257÷4.273) oraz do (4.254) i przekształceniach otrzymano równanie:

$$\frac{\partial(\rho \, \boldsymbol{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \, \boldsymbol{v}^T \cdot \boldsymbol{v}) = -\nabla^T p + \nabla \cdot [\tau_{ij}] + \mathbf{f}^* + \mathbf{f} , \tag{4.275}$$

gdzie:

p - homogeniczne (ujednolicone) ciśnienie nieściśliwej mieszaniny heterogenicznej:

$$p = \sum_{k=1}^{2} g_k p_k = \sum_{k=1}^{2} \overline{p}_k , \tag{4.276}$$

$\overline{p}_k$ - ciśnienie parcjalne (cząstkowe) k-tej fazy: $\overline{p}_k = \overline{\rho}_k \, p_k$.

Analogicznie do (4.276) zdefiniowano wprowadzony do (4.275) dewiator homogenicznych naprężeń mieszaniny heterogenicznej jako sumę dewiatorów parcjalnych $[\overline{\tau}_{ij}]_k$ naprężeń każdej z faz dwufazowej strefy przejściowej:

$$[\tau_{ij}] = \sum_{k=1}^{2} g_k [\tau_{ij}]_k = \sum_{k=1}^{2} [\overline{\tau}_{ij}]_k , \tag{4.277}$$

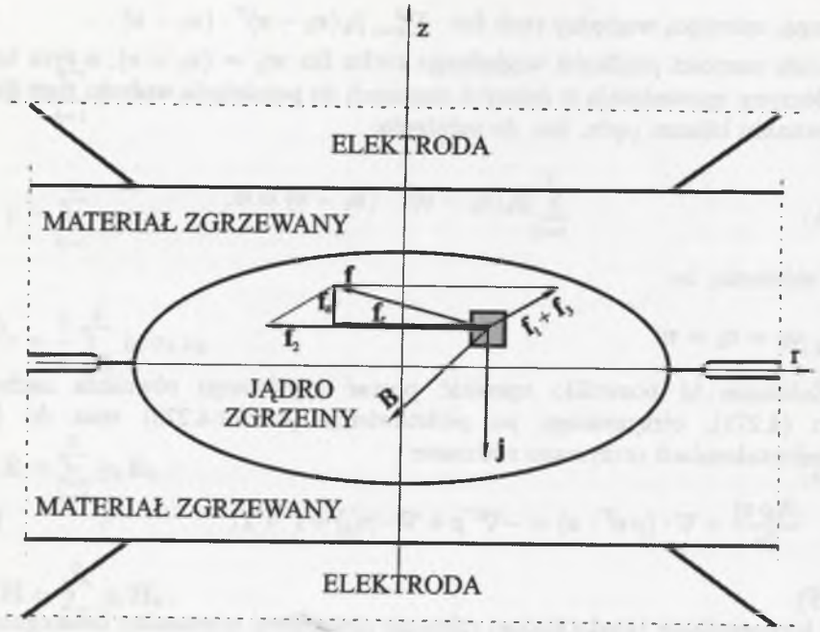
gdzie:

$[\tau_{ij}]$ - homogeniczny dewiator naprężeń w dwufazowej strefie przejściowej (homogeniczny tensor naprężeń stycznych),

$[\overline{\tau}_{ij}]$ - dewiator parcjalnych naprężeń w dwufazowej strefie przejściowej.

Na rysunku 4.4 przedstawiono oddziaływanie siłowe pola elektromagnetycznego na elementarną objętość jądra zgrzeiny.

Przyłożone pole elektromagnetyczne w obszarze łączenia metali powoduje, ze względu na wydzielające się ciepło, zmiany stanu skupienia. W związku z tym obserwujemy płynięcie wywołane działaniem występujących sił (nacisku elektrod oraz pola elektromagnetycznego). W odróżnieniu od dotychczasowych prób opisu tego zjawiska [17, 18] założono bardziej złożony, ale też bliższy rzeczywistości model płynięcia.



Rys. 4.4. Siły pola elektromagnetycznego działające na elementarną objętość w ciekłym jądrze zgrzeiny $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3$ (równanie - 4.157): $\mathbf{f}_1 = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \times \mathbf{D}$, $\mathbf{f}_2 = (\mathbf{j} \times \mathbf{B})$, $\mathbf{f}_3 = \frac{1}{2}(|\mathbf{E}|^2 \nabla^T \epsilon + |\mathbf{H}|^2 \nabla^T \mu)$ $\mathbf{f}_r$ - składowa promieniowa siły pola elektromagnetycznego działającej na element dV

Fig. 4.4. Forces of the electromagnetic field acting on the elementary volume in the liquid nugget $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3$ (equation - 4.157): $\mathbf{f}_1 = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \times \mathbf{D}$, $\mathbf{f}_2 = (\mathbf{j} \times \mathbf{B})$, $\mathbf{f}_3 = \frac{1}{2}(|\mathbf{E}|^2 \nabla^T \epsilon + |\mathbf{H}|^2 \nabla^T \mu)$, $\mathbf{f}_r$ - radius component of the force of the electromagnetic field affecting the element dV

Tensor prędkości odkształcenia k-tej fazy w dwufazowej strefie przejściowej $[\dot{\varepsilon}_{ij}]_k$ ma postać:

$$[\dot{\varepsilon}_{ij}]_k = \frac{1}{2}[(\nabla^T \boldsymbol{v}_k) + (\nabla^T \boldsymbol{v}_k)^T], \tag{4.278}$$

gdzie:

$\boldsymbol{v}_k$ - prędkość płynięcia k-tej fazy.

Natomiast dewiator $[d_{ij}]_k$ tensora prędkości odkształcenia $[\dot{\varepsilon}_{ij}]_k$ k-tej fazy w dwufazowej strefie przejściowej można zapisać w postaci:

$$[d_{ij}]_k = \frac{1}{2}[(\nabla^T \boldsymbol{v}_k) + (\nabla^T \boldsymbol{v}_k)^T] - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \boldsymbol{v}_k)[\delta_{ij}]. \tag{4.279}$$

Ponieważ założono nieściśliwość (4.202) i (4.204÷4.205), tensor prędkości odkształcenia $[\dot{\varepsilon}_{ij}]_k$ k-tej fazy jest równy swojemu dewiatorowi (4.279):

$$[\dot{\varepsilon}_{ij}]_k = [d_{ij}]_k = \frac{1}{2}[(\nabla^T \boldsymbol{v}_k) + (\nabla^T \boldsymbol{v}_k)^T]. \tag{4.280}$$

Dla obszaru jądra zgrzeiny, w którym metale występują w dwufazowej strefie przejściowej i w fazie ciekłej, przyjęto model reologiczny lepkiego niejednorodnego i nieściśliwego płynu [24, 110, 149, 156], którego równanie konstytutywne można zapisać w postaci:

$$[\tau_{ij}]_k = 2\,\eta_k(T)\,[d_{ij}]_k, \tag{4.281}$$

gdzie:

$\eta_k(T)$ - lepkość dynamiczna k-tej fazy w dwufazowej strefy przejściowej jako funkcja temperatury, gdzie przy tym lepkość dynamiczna dwufazowej strefy przejściowej $\eta(T)$:

$$\eta(T) = \sum_{k=1}^{2} g_k\,\eta_k = g_S\,\eta_S^{pl} + g_L\,\eta_L = g_S\,\eta_S^{pl} + (1 - g_S)\,\eta_L, \tag{4.282}$$

gdzie g_S określa (4.234) a $(1 - g_S)$ wzór (4.235), natomiast lepkość plastycznego płynięcia fazy stałej z umocnieniem η_S^{pl} zdefiniowano w dalszej części pracy (4.350),

$\eta_L(T)$ - lepkość dynamiczna fazy ciekłej będącej z założenia płynem newtonowskim.

Równanie to pozwala wyeliminować dewiator tensora naprężeń homogenicznych (4.277) $[\tau_{ij}]$ z (4.275) za pomocą równań (4.280÷4.281).

Jeśli jak wyżej, zaniedbać ruch względny (poślizg) faz to zgodnie z założeniem (4.274):

$$[\tau_{ij}] = \sum_{k=1}^{2} g_k\,\eta_k[(\nabla^T \boldsymbol{v}_k) + (\nabla^T \boldsymbol{v}_k)^T] = \eta(T)[(\nabla^T \boldsymbol{v}) + (\nabla^T \boldsymbol{v})^T]. \tag{4.283}$$

Podobnie jak w przypadku dewiatora tensora naprężeń homogenicznych (4.277) opisane wyżej postępowanie ujednoradniające pozwala wprowadzić homogeniczny tensor prędkości deformacji ośrodka nieściśliwego:

$$[\dot{\varepsilon}_{ij}] = [d_{ij}] = \frac{1}{2}[(\nabla^T \boldsymbol{v}) + (\nabla^T \boldsymbol{v})^T] \tag{4.284}$$

o budowie podobnej do (4.280).

Podstawiając (4.283) do (4.275), zapisano układ równań ruchu w postaci:

$$\rho\,[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}^T \cdot \nabla^T)\boldsymbol{v}] = -\nabla^T p + \nabla \cdot \{\eta(T)\,[(\nabla^T \boldsymbol{v}) + (\nabla^T \boldsymbol{v})^T]\} + \mathbf{f}, \tag{4.285}$$

ponieważ założono nieściśliwość (4.202) oraz pominięto mechaniczne oddziaływania międzyfazowe ($\mathbf{f}^* \approx \mathbf{0}$) jako nieznaczące.

Jednocześnie:

$$\nabla\cdot\{\eta(T)\,[(\nabla^T\boldsymbol{v})+(\nabla^T\boldsymbol{v})^T]\} = (\frac{\partial\eta}{\partial T})\nabla^T T\cdot[(\nabla^T\boldsymbol{v})+(\nabla^T\boldsymbol{v})^T]+\eta(T)\nabla^2\boldsymbol{v}, \quad (4.286)$$

na mocy (A23). Ponadto, przy założonej nieściśliwości (4.202) otrzymano z (A25):

$$\nabla\cdot(\nabla^T\boldsymbol{v})^T = \nabla^T(\nabla\cdot\boldsymbol{v}^T) = \mathbf{0} \quad (4.287)$$

i uwzględniono w (4.286).

Podstawiając (4.286) do (4.285), otrzymano:

$$\rho\,[\frac{\partial\boldsymbol{v}^T}{\partial t}+(\boldsymbol{v}^T\cdot\nabla^T)\boldsymbol{v}] = -\nabla^T p+(\frac{\partial\eta}{\partial T})\nabla^T T\cdot[(\nabla^T\boldsymbol{v})+(\nabla^T\boldsymbol{v})^T]+\eta(T)\nabla^2\boldsymbol{v}+\mathbf{f}. \quad (4.288)$$

Jeśli uwzględnić w równaniu (4.288) wyrażenia dla wektora gęstości sił oddziaływania pola elektromagnetycznego (4.261÷4.263), to otrzymamy odpowiednio w dwufazowej strefie przejściowej:

- w przypadku ogólnym:

$$\rho[\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}^T\cdot\nabla^T)\boldsymbol{v}] = -\nabla^T p+(\frac{\partial\eta}{\partial T})\nabla^T T\cdot[(\nabla^T\boldsymbol{v})+(\nabla^T\boldsymbol{v})^T]+\eta(T)\,\nabla^2\boldsymbol{v}+\cdots$$
$$+\{(\mu\,\sigma\,\mathbf{s})-\frac{1}{2}\,[|\mathbf{E}|^2\,(\frac{d\varepsilon}{dT})+|\mathbf{H}|^2\,(\frac{d\mu}{dT})]\nabla^T T\}, \quad (4.289)$$

- w polu elektromagnetycznym prądu stałego:

$$\rho[\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}^T\cdot\nabla^T)\boldsymbol{v}] = -\nabla^T p+(\frac{\partial\eta}{\partial T})\nabla^T T\cdot[(\nabla^T\boldsymbol{v})+(\nabla^T\boldsymbol{v})^T]+\eta(T)\,\nabla^2\boldsymbol{v}-\cdots$$
$$-\{\mu\,\sigma\,(\nabla^T\Phi)\times(\nabla\times\mathbf{A})+\frac{1}{2}\,[(\nabla^T\Phi)^2\,(\frac{d\varepsilon}{dT})+(\nabla\times\mathbf{A})^2\,(\frac{d\mu}{dT})]\nabla^T T\}, \quad (4.290)$$

- w polu elektromagnetycznym prądu przemiennego o niskiej częstotliwości:

$$\rho[\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}^T\cdot\nabla^T)\boldsymbol{v}] = -\nabla^T p+(\frac{\partial\eta}{\partial T})\nabla^T T\cdot[(\nabla^T\boldsymbol{v})+(\nabla^T\boldsymbol{v})^T]+\eta(T)\,\nabla^2\boldsymbol{v}-\cdots$$
$$-\{\mu\,\sigma\,(\nabla^T\overline{\Phi})\times(\nabla\times\overline{\mathbf{A}})+\frac{1}{2}\,[(\nabla^T\overline{\Phi})^2\,(\frac{d\varepsilon}{dT})+(\nabla\times\overline{\mathbf{A}})^2\,(\frac{d\mu}{dT})]\nabla^T T\}. \quad (4.291)$$

Dalsze uproszczenie równań (4.289÷4.291) jest możliwe i celowe, jeśli zauważyć, że w istocie mamy do czynienia z "pełzającym" płynięciem zgrzewanych materiałów

przy małych prędkościach rzędu $0,005\ m/s$ [192]. Jednocześnie występują znaczące naprężenia styczne przy istotnych gradientach prędkości ($\nabla^T\boldsymbol{v}$). Z tego powodu uzasadnione będzie przyjęcie założenia upraszczającego dla pochodnej substancjonalnej (4.1): $\frac{d}{dt}\approx\frac{\partial}{\partial t}$, które prowadzi do tzw. beztransportowej postaci równań zachowania pędu (pominięto adwekcję) (4.289÷4.291), ale i równania transportu składnika stopowego (4.247) do znanego z literatury dyfuzji stężeniowej tego składnika (4.248). W przybliżeniu "beztransportowym" równania (4.289÷4.291) można zapisać w postaciach:

- w przypadku ogólnym:

$$\rho\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} = -\nabla^T p+(\frac{\partial\eta}{\partial T})\nabla^T T\cdot[(\nabla^T\boldsymbol{v})+(\nabla^T\boldsymbol{v})^T]+\eta(T)\,\nabla^2\boldsymbol{v}+\cdots$$
$$+\{(\mu\,\sigma\,\mathbf{s})-\frac{1}{2}\,[|\mathbf{E}|^2\,(\frac{d\varepsilon}{dT})+|\mathbf{H}|^2\,(\frac{d\mu}{dT})]\nabla^T T\}, \quad (4.292)$$

- w polu elektromagnetycznym prądu stałego:

$$\rho\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} = -\nabla^T p+(\frac{\partial\eta}{\partial T})\nabla^T T\cdot[(\nabla^T\boldsymbol{v})+(\nabla^T\boldsymbol{v})^T]+\eta(T)\,\nabla^2\boldsymbol{v}-\cdots$$
$$-\{\mu\,\sigma\,(\nabla^T\Phi)\times(\nabla\times\mathbf{A})+\frac{1}{2}\,[(\nabla^T\Phi)^2\,(\frac{d\varepsilon}{dT})+(\nabla\times\mathbf{A})^2\,(\frac{d\mu}{dT})]\nabla^T T\}, \quad (4.293)$$

- w polu elektromagnetycznym prądu przemiennego o niskiej częstotliwości:

$$\rho\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} = -\nabla^T p+(\frac{\partial\eta}{\partial T})\nabla^T T\cdot[(\nabla^T\boldsymbol{v})+(\nabla^T\boldsymbol{v})^T]+\eta(T)\,\nabla^2\boldsymbol{v}-\cdots$$
$$-\{\mu\,\sigma\,(\nabla^T\overline{\Phi})\times(\nabla\times\overline{\mathbf{A}})+\frac{1}{2}\,[(\nabla^T\overline{\Phi})^2\,(\frac{d\varepsilon}{dT})+(\nabla\times\overline{\mathbf{A}})^2\,(\frac{d\mu}{dT})]\nabla^T T\}. \quad (4.294)$$

Dalej idącym uproszczeniem jest pominięcie sił bezwładności. Tego typu klasa przepływów lepkich cieczy z bardzo małymi liczbami Reynoldsa ($\mathcal{R}\approx 0$) znana jest w mechanice płynów jako przepływ Poiseuille'a i jest przydatna w opisie zagadnień stacjonarnych. Przybliżenie to jest szczególnym przypadkiem poprzedniego i pozwala zapisać wspomniane równania w postaciach:

- w przypadku ogólnym:

$$\nabla^T p = (\frac{\partial \eta}{\partial T})\nabla^T T \cdot [(\nabla^T \boldsymbol{v}) + (\nabla^T \boldsymbol{v})^T] + \eta(T)\,\nabla^2 \boldsymbol{v} + \cdots$$
$$+ \{(\mu\,\sigma\,\mathbf{s}) - \frac{1}{2}\,[|\mathbf{E}|^2\,(\frac{d\varepsilon}{dT}) + |\mathbf{H}|^2\,(\frac{d\mu}{dT})]\nabla^T T\}\,, \quad (4.295)$$

- w polu elektromagnetycznym prądu stałego:

$$\nabla^T p = (\frac{\partial \eta}{\partial T})\nabla^T T \cdot [(\nabla^T \boldsymbol{v}) + (\nabla^T \boldsymbol{v})^T] + \eta(T)\,\nabla^2 \boldsymbol{v} - \cdots$$
$$-\{\mu\,\sigma\,(\nabla^T\Phi)\times(\nabla\times\mathbf{A}) + \frac{1}{2}\,[(\nabla^T\Phi)^2\,(\frac{d\varepsilon}{dT}) + (\nabla\times\mathbf{A})^2\,(\frac{d\mu}{dT})]\nabla^T T\}\,, \quad (4.296)$$

- w polu elektromagnetycznym prądu przemiennego o niskiej częstotliwości:

$$\nabla^T p = (\frac{\partial \eta}{\partial T})\nabla^T T \cdot [(\nabla^T \boldsymbol{v}) + (\nabla^T \boldsymbol{v})^T] + \eta(T)\,\nabla^2 \boldsymbol{v} - \cdots$$
$$-\{\mu\,\sigma\,(\nabla^T\overline{\Phi})\times(\nabla\times\overline{\mathbf{A}}) + \frac{1}{2}\,[(\nabla\overline{\Phi})^2\,(\frac{d\varepsilon}{dT}) + (\nabla\times\overline{\mathbf{A}})^2\,(\frac{d\mu}{dT})]\nabla^T T\}\,. \quad (4.297)$$

Przy tym występująca w równaniach (4.285÷4.297) lepkość dynamiczna dwufazowej strefy przejściowej ma postać:

$$\eta(T) = \frac{1}{1-k_0}\{\rho\,\overline{\nu}_L(T)[\frac{T_m - T_L(c^B)}{T_m - T} - k_0] + \cdots$$
$$+ \eta_S^{pl}(T)[\frac{T_L(c^B) - T}{T_m - T}]\}\,, \quad (4.298)$$

a lepkość płynięcia fazy stałej z umocnieniem $\eta_S^{pl}(T)$ zdefiniowano w dalszej części pracy (4.350).

Równanie zachowania pędu w obszarze fazy ciekłej (L)

W tym przypadku $k = L$ i odpowiednie równanie można otrzymać analogicznie do (4.289÷4.291) wprost z (4.253), mając na uwadze, że $K = 1$, a więc, jak to wynika z (4.200÷4.201), (4.267÷4.272), (4.276), otrzymano je wprowadzając, przy $\rho = idem$, lepkość kinetyczną $\overline{\nu}_L(T)$ fazy ciekłej będącej płynem newtonowskim i zdefiniowane zależnością:

$$\eta_L(T) = \rho\,\overline{\nu}_L(T)\,, \quad (4.299)$$

- w przypadku ogólnym fazy ciekłej:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_L^T}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_L^T\cdot\nabla^T)\boldsymbol{v}_L = -\frac{1}{\rho}\nabla^T p_L + (\frac{\partial \overline{\nu}_L}{\partial T})\nabla^T T\cdot[(\nabla^T \boldsymbol{v}_L) + (\nabla^T \boldsymbol{v}_L)^T] + \cdots$$
$$+ \overline{\nu}_L(T)\,\nabla^2 \boldsymbol{v}_L + \frac{1}{\rho}\{(\mu_L\,\sigma_L\,\mathbf{s}_L) - \cdots$$
$$- \frac{1}{2}\,[|\mathbf{E}_L|^2\,(\frac{d\varepsilon_L}{dT}) + |\mathbf{H}_L|^2\,(\frac{d\mu_L}{dT})]\nabla^T T\}\,, \quad (4.300)$$

- w polu elektromagnetycznym prądu stałego fazy ciekłej:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_L^T}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_L^T\cdot\nabla^T)\boldsymbol{v}_L = -\frac{1}{\rho}\nabla^T p_L + (\frac{\partial \overline{\nu}_L}{\partial T})\nabla^T T\cdot[(\nabla^T \boldsymbol{v}_L) + (\nabla^T \boldsymbol{v}_L)^T] + \cdots$$
$$+ \overline{\nu}_L(T)\,\nabla^2 \boldsymbol{v}_L - \frac{1}{\rho}\{\mu_L\,\sigma_L\,(\nabla^T\Phi_L)\times(\nabla\times\mathbf{A}_L) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{2}\,[(\nabla^T\Phi_L)^2\,(\frac{d\varepsilon_L}{dT}) + (\nabla\times\mathbf{A}_L)^2\,(\frac{d\mu_L}{dT})]\nabla^T T\}\,, \quad (4.301)$$

- w polu elektromagnetycznym prądu przemiennego o niskiej częstotliwości w przypadku fazy ciekłej:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_L^T}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_L^T\cdot\nabla^T)\boldsymbol{v}_L = -\frac{1}{\rho}\nabla^T p_L + (\frac{\partial \overline{\nu}_L}{\partial T})\nabla^T T\cdot[(\nabla^T \boldsymbol{v}_L) + (\nabla^T \boldsymbol{v}_L)^T] + \cdots$$
$$+ \overline{\nu}_L(T)\,\nabla^2 \boldsymbol{v}_L - \frac{1}{\rho}\{\mu_L\,\sigma_L\,(\nabla^T\overline{\Phi}_L)\times(\nabla\times\overline{\mathbf{A}}_L) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{2}\,[(\nabla^T\overline{\Phi}_L)^2\,(\frac{d\varepsilon_L}{dT}) + (\nabla\times\overline{\mathbf{A}}_L)^2\,(\frac{d\mu_L}{dT})]\nabla^T T\}\,, \quad (4.302)$$

gdzie:

$\overline{\nu}_L$ - lepkość kinetyczna ciekłego metalu,

$\boldsymbol{v}_L$ - prędkość fazy ciekłej,

p_L - ciśnienie fazy ciekłej,
ε_L - przenikalność elektryczna fazy ciekłej,
μ_L - przenikalność magnetyczna fazy ciekłej,
σ_L - przewodność fazy ciekłej,
$\mathbf{s}_L$ - wektor Poyntinga fazy ciekłej ($\mathbf{s}_L = \mathbf{E}_L \times \mathbf{H}_L$),
$\mathbf{E}_L$ - natężenie pola elektrycznego fazy ciekłej,
$\mathbf{H}_L$ - natężenie pola magnetycznego fazy ciekłej,
Φ_L - potencjał skalarny pola elektrycznego fazy ciekłej,
$\mathbf{A}_L$ - potencjał wektorowy pola elektrycznego fazy ciekłej,
$\overline{\Phi}_L$ - dynamiczny potencjał skalarny pola elektrycznego fazy ciekłej,
$\overline{\mathbf{A}}_L$ - dynamiczny potencjał wektorowy pola elektrycznego fazy ciekłej.

Analogicznie jak w przypadku dwufazowej strefy przejściowej można tu podać "beztransportową" postać równań (4.300÷4.302) dla fazy ciekłej:

- w przypadku ogólnym fazy ciekłej:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_L}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla^T p_L + (\frac{\partial \overline{\nu}_L}{\partial T})\nabla^T T \cdot [(\nabla^T \boldsymbol{v}_L) + (\nabla^T \boldsymbol{v}_L)^T] + \overline{\nu}_L(T)\,\nabla^2 \boldsymbol{v}_L + \cdots$$
$$+ \frac{1}{\rho}\{(\mu_L\,\sigma_L\,\mathbf{s}_L) - \frac{1}{2}\,[|\mathbf{E}_L|^2\,(\frac{d\varepsilon_L}{dT}) + |\mathbf{H}_L|^2\,(\frac{d\mu_L}{dT})]\nabla^T T\}\,, \quad (4.303)$$

- w polu elektromagnetycznym prądu stałego fazy ciekłej:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_L}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla^T p_L + (\frac{\partial \overline{\nu}_L}{\partial T})\nabla^T T \cdot [(\nabla^T \boldsymbol{v}_L) + (\nabla^T \boldsymbol{v}_L)^T] + \cdots$$
$$+ \overline{\nu}_L(T)\,\nabla^2 \boldsymbol{v}_L - \frac{1}{\rho}\{\mu_L\,\sigma_L\,(\nabla^T \Phi_L) \times (\nabla \times \mathbf{A}_L) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{2}\,[(\nabla^T \Phi_L)^2\,(\frac{d\varepsilon_L}{dT}) + (\nabla \times \mathbf{A}_L)^2\,(\frac{d\mu_L}{dT})]\nabla^T T\}\,, \quad (4.304)$$

- w polu elektromagnetycznym prądu przemiennego o niskiej częstotliwości w przypadku fazy ciekłej:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_L}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla^T p_L + (\frac{\partial \overline{\nu}_L}{\partial T})\nabla^T T \cdot [(\nabla^T \boldsymbol{v}_L) + (\nabla^T \boldsymbol{v}_L)^T] + \cdots$$
$$+ \overline{\nu}_L(T)\,\nabla^2 \boldsymbol{v}_L - \frac{1}{\rho}\{\mu_L\,\sigma_L\,(\nabla^T \overline{\Phi}_L) \times (\nabla \times \overline{\mathbf{A}}_L) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{2}\,[(\nabla^T \overline{\Phi}_L)^2\,(\frac{d\varepsilon_L}{dT}) + (\nabla \times \overline{\mathbf{A}}_L)^2\,(\frac{d\mu_L}{dT})]\nabla^T T\}\,, \quad (4.305)$$

Jeśli podobnie jak w przypadku dwufazowej strefy przejściowej ograniczyć się do płynięcia "pełzającego", to równania (4.300÷4.302) upraszczają się do postaci wyrażonej przez lepkość kinetyczną:

- w przypadku ogólnym fazy ciekłej:

$$\frac{1}{\rho}\nabla^T p_L = (\frac{\partial \overline{\nu}_L}{\partial T})\nabla^T T \cdot [(\nabla^T \boldsymbol{v}_L) + (\nabla^T \boldsymbol{v}_L)^T] + \overline{\nu}_L(T)\,\nabla^2 \boldsymbol{v}_L + \cdots$$
$$+ \frac{1}{\rho}\{(\mu_L\,\sigma_L\,\mathbf{s}_L) - \frac{1}{2}\,[|\mathbf{E}_L|^2\,(\frac{d\varepsilon_L}{dT}) + |\mathbf{H}_L|^2\,(\frac{d\mu_L}{dT})]\nabla^T T\}\,, \quad (4.306)$$

- w polu elektromagnetycznym prądu stałego fazy ciekłej:

$$\frac{1}{\rho}\nabla^T p_L = (\frac{\partial \overline{\nu}_L}{\partial T})\nabla^T T \cdot [(\nabla^T \boldsymbol{v}_L) + (\nabla^T \boldsymbol{v}_L)^T] + \cdots$$
$$+ \overline{\nu}_L(T)\,\nabla^2 \boldsymbol{v}_L - \frac{1}{\rho}\{\mu_L\,\sigma_L\,(\nabla^T \Phi_L) \times (\nabla \times \mathbf{A}_L) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{2}\,[(\nabla^T \Phi_L)^2\,(\frac{d\varepsilon_L}{dT}) + (\nabla \times \mathbf{A}_L)^2\,(\frac{d\mu_L}{dT})]\nabla^T T\}\,, \quad (4.307)$$

- w polu elektromagnetycznym prądu przemiennego o niskiej częstotliwości w przypadku fazy ciekłej:

$$\frac{1}{\rho}\nabla^T p_L = (\frac{\partial \overline{\nu}_L}{\partial T})\nabla^T T \cdot [(\nabla^T \boldsymbol{v}_L) + (\nabla^T \boldsymbol{v}_L)^T] + \cdots$$
$$+ \overline{\nu}_L(T)\,\nabla^2 \boldsymbol{v}_L - \frac{1}{\rho}\{\mu_L\,\sigma_L\,(\nabla^T \overline{\Phi}_L) \times (\nabla \times \overline{\mathbf{A}}_L) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{2}\,[(\nabla^T \overline{\Phi}_L)^2\,(\frac{d\varepsilon_L}{dT}) + (\nabla \times \overline{\mathbf{A}}_L)^2\,(\frac{d\mu_L}{dT})]\nabla^T T\}\,. \quad (4.308)$$

Równanie zachowania pędu w obszarze fazy stałej (S)

W przypadku płynięcia plastycznego, $k = S$ i odpowiednie równanie można otrzymać z (4.253) dla $\rho = \rho_S$, $g_S = 1$ i $\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$ przy prędkości płynięcia $\boldsymbol{v}_S$ dla naprężeń $[\sigma_{ij}]_S$ i założonej nieściśliwości materiału:

$$\rho[\frac{\partial \boldsymbol{v}_S}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_S^T \cdot \nabla^T)\boldsymbol{v}_S] = \nabla \cdot [\sigma_{ij}]_S + \mathbf{f}_S\,, \quad (4.309)$$

przy tym, analogicznie do (4.255), mamy dla fazy stałej:

$$[\sigma_{ij}]_S = -p_S\,[\delta_{ij}] + [\tau_{ij}]_S\,, \quad (4.310)$$

gdzie:

$[\delta_{ij}]$ - tensor jednostkowy,

p_S - ciśnienie fazy stałej, ($p_S = -\frac{1}{3}tr([\sigma_{ij}]_S) = -\frac{1}{3}\sum_{\alpha=1}^{3}[\sigma_{\alpha\alpha}]_S$),

$[\tau_{ij}]_S$ - dewiator tensora naprężeń fazy stałej,

$[\sigma_{ij}]_S$ - tensor naprężeń materiału w fazie stałej,

$\mathbf{f}_S$ - wektor gęstości sił oddziaływania pola elektromagnetycznego określonego dla różnych przypadków przez (4.261÷4.263).

Jak zauważono wyżej, w obszarze kształtującego się i obserwowanego, w pewnym okresie cyklu technologicznego zgrzewania, płynnego jądra wraz z dwufazową strefą przejściową, ruch materiałów ma charakter przepływu "beztransportowego" lub "pełzającego" (Poiseuille'a). W przypadku płynięcia "beztransportowego" przy małych prędkościach ($\boldsymbol{v}_S \approx 0$) pomija się adwekcję (unoszenie), uzyskując równanie zachowania pędu użyteczne w zagadnieniach niestacjonarnych:

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}_S}{\partial t} = \nabla\cdot[\sigma_{ij}]_S + \mathbf{f}_S\,. \tag{4.311}$$

Natomiast w zagadnieniach stacjonarnych użyteczny staje się opis "pełzającego" płynięcia plastycznego fazy stałej, dla którego można podać następującą postać równania zachowania pędu ($\frac{d\mathbf{v}}{dt} \approx 0$):

$$\nabla\cdot[\sigma_{ij}]_S + \mathbf{f}_S = 0\,. \tag{4.312}$$

Jeśli uwzględnić rozkład tensora $[\sigma_{ij}]_S$ na dewiator i część kulistą (4.310), to dla każdego z przypadków doprowadzenia pola elektromagnetycznego otrzymamy odpowiednio:

- przypadek ogólny:
  - płynięcia plastycznego fazy stałej:

$$\rho[\frac{\partial \boldsymbol{v}_S}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_S^T\cdot\nabla^T)\boldsymbol{v}_S] = -\nabla^T p_S + \nabla\cdot[\tau_{ij}]_S + \cdots$$
$$+\{(\mu_S\,\sigma_S\,\mathbf{s}_S) - \frac{1}{2}[|\mathbf{E}_S|^2\,(\frac{d\varepsilon_S}{dT}) + |\mathbf{H}_S|^2\,(\frac{d\mu_S}{dT})]\nabla T\}\,, \tag{4.313}$$

  - płynięcia "beztransportowego" fazy stałej:

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}_S}{\partial t} = -\nabla^T p_S + \nabla\cdot[\tau_{ij}]_S + \{(\mu_S\,\sigma_S\,\mathbf{s}_S) - \frac{1}{2}[|\mathbf{E}_S|^2\,(\frac{d\varepsilon_S}{dT}) + |\mathbf{H}_S|^2\,(\frac{d\mu_S}{dT})]\nabla T\}\,, \tag{4.314}$$

  - płynięcia "pełzającego" fazy stałej:

$$\nabla^T p_S = \nabla\cdot[\tau_{ij}]_S + \{(\mu_S\,\sigma_S\,\mathbf{s}_S) - \frac{1}{2}[|\mathbf{E}_S|^2\,(\frac{d\varepsilon_S}{dT}) + |\mathbf{H}_S|^2\,(\frac{d\mu_S}{dT})]\nabla T\}\,, \tag{4.315}$$

- prąd stały:
  - płynięcie plastyczne fazy stałej:

$$\rho[\frac{\partial \boldsymbol{v}_S}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_S^T\cdot\nabla^T)\boldsymbol{v}_S] = -\nabla^T p_S + \nabla\cdot[\tau_{ij}]_S - \{\mu_S\,\sigma_S\,(\nabla^T\Phi_S)\times(\nabla\times\mathbf{A}_S) + \cdots$$
$$+\frac{1}{2}[(\nabla^T\Phi_S)^2\,(\frac{d\varepsilon_S}{dT}) + (\nabla\times\mathbf{A}_S)^2\,(\frac{d\mu_S}{dT})]\nabla^T T\}\,, \tag{4.316}$$

  - płynięcie "beztransportowe" fazy stałej:

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}_S}{\partial t} = -\nabla^T p_S + \nabla\cdot[\tau_{ij}]_S - \{\mu_S\,\sigma_S\,(\nabla^T\Phi_S)\times(\nabla\times\mathbf{A}_S) + \cdots$$
$$+\frac{1}{2}[(\nabla^T\Phi_S)^2\,(\frac{d\varepsilon_S}{dT}) + (\nabla\times\mathbf{A}_S)^2\,(\frac{d\mu_S}{dT})]\nabla^T T\}\,, \tag{4.317}$$

  - płynięcie "pełzające" fazy stałej:

$$\nabla^T p_S = \nabla\cdot[\tau_{ij}]_S - \{\mu_S\,\sigma_S\,(\nabla^T\Phi_S)\times(\nabla\times\mathbf{A}_S) + \cdots$$
$$+\frac{1}{2}[(\nabla^T\Phi_S)^2\,(\frac{d\varepsilon_S}{dT}) + (\nabla\times\mathbf{A}_S)^2\,(\frac{d\mu_S}{dT})]\nabla^T T\}\,, \tag{4.318}$$

- prąd przemienny o niskiej częstotliwości:
  - płynięcie plastyczne fazy stałej:

$$\rho[\frac{\partial \boldsymbol{v}_S}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_S^T\cdot\nabla^T)\boldsymbol{v}_S] = -\nabla^T p_S + \nabla\cdot[\tau_{ij}]_S - \{\mu_S\,\sigma_S\,(\nabla^T\overline{\Phi}_S)\times(\nabla\times\overline{\mathbf{A}}_S) + \cdots$$
$$+\frac{1}{2}[(\nabla^T\overline{\Phi}_S)^2\,(\frac{d\varepsilon_S}{dT}) + (\nabla\times\overline{\mathbf{A}}_S)^2\,(\frac{d\mu_S}{dT})]\nabla^T T\}\,, \tag{4.319}$$

  - płynięcie "beztransportowe" fazy stałej:

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}_S}{\partial t} = -\nabla^T p_S + \nabla\cdot[\tau_{ij}]_S - \{\mu_S\,\sigma_S\,(\nabla^T\overline{\Phi}_S)\times(\nabla\times\overline{\mathbf{A}}_S) + \cdots$$
$$+\frac{1}{2}[(\nabla^T\overline{\Phi}_S)^2\,(\frac{d\varepsilon_S}{dT}) + (\nabla\times\overline{\mathbf{A}}_S)^2\,(\frac{d\mu_S}{dT})]\nabla^T T\}\,, \tag{4.320}$$

  - płynięcie "pełzające" fazy stałej:

$$\nabla^T p_S = \nabla\cdot[\tau_{ij}]_S - \{\mu_S\,\sigma_S\,(\nabla^T\overline{\Phi}_S)\times(\nabla\times\overline{\mathbf{A}}_S) + \cdots$$
$$+\frac{1}{2}[(\nabla^T\overline{\Phi}_S)^2\,(\frac{d\varepsilon_S}{dT}) + (\nabla\times\overline{\mathbf{A}}_S)^2\,(\frac{d\mu_S}{dT})]\nabla^T T\}\,, \tag{4.321}$$

gdzie:

$\boldsymbol{v}_S$ - prędkość fazy stałej,

ε_S - przenikalność elektryczna fazy stałej,

μ_S - przenikalność magnetyczna fazy stałej,

σ_S - przewodność fazy stałej,

$\mathbf{s}_S$ - wektor Poyntinga fazy stałej ($\mathbf{s}_S = \mathbf{E}_S \times \mathbf{H}_S$),

$\mathbf{E}_S$ - natężenie pola elektrycznego fazy stałej,

$\mathbf{H}_S$ - natężenie pola magnetycznego fazy stałej,

Φ_S - potencjał skalarny pola elektrycznego fazy stałej,

$\mathbf{A}_S$ - potencjał wektorowy pola elektrycznego fazy stałej,

$\overline{\Phi}_S$ - dynamiczny potencjał skalarny pola elektrycznego fazy stałej,

$\overline{\mathbf{A}}_S$ - dynamiczny potencjał wektorowy pola elektrycznego fazy stałej.

Zamieszczone niżej rozważania dostarczają równanie konstytutywne dla przyjętego modelu zachowania się zgrzewanych materiałów jako ośrodka termolepkoplastycznego z umocnieniem izotropowym. Równanie to pozwala nadać równaniom płynięcia plastycznego (4.313÷4.321) końcową postać.

Znane teorie plastyczności, lepkoplastyczności itd. [16, 48, 84, 115, 134, 149, 161, 188] podają związki fizyczne (konstytutywne) między wielkościami charakteryzującymi stan odkształcenia i naprężenia poza przedziałem sprężystości, czy też termosprężystości, idealizując własności opisywanych materiałów (modele ciał, np. lepkoplastyczne, $\cdots$ itd.). Związki te formułowane są na podstawie badań doświadczalnych. Stosowane obecnie metody opisu stanu plastycznego można podzielić na dwie grupy:

- teorie plastycznego płynięcia, zwane również przyrostowymi (nieholonomicznymi),
- teorie odkształceniowe (deformacyjne, holonomiczne).

Podstawowym założeniem teorii odkształceniowej jest stwierdzenie, że podczas ciągłego obciążenia stan odkształcenia plastycznego jest jednoznacznie określony przez aktualny stan naprężenia, niezależnie od tego jak go osiągnięto (niezależnie od drogi w przestrzeni naprężeń, wzdłuż której był osiągany). Natomiast teoria plastycznego płynięcia wychodzi z założenia, że przyrost odkształcenia plastycznego jest jednoznacznie zdeterminowany przez stan naprężenia i jego przyrost. Poza tym teoria plastycznego płynięcia określa odkształcenie płynięcia nie tylko w zależności od aktualnego stanu naprężenia, ale i od całej historii obciążenia, tzn. od drogi w przestrzeni naprężeń - od stanu początkowego po końcowy.

Teorie plastycznego płynięcia wiążą składowe prędkości odkształcenia lub ich przyrostów z odpowiednimi składowymi naprężenia. W teorii plastycznego płynięcia odkształcenie traktowane jest jako stan ruchu. Natomiast z punktu widzenia teorii odkształceniowych, odkształcenie materiału rozpatruje się jako stan statyczny. Teorie te formułują związki fizyczne dla modeli materiałów sprężysto-plastycznych i materiałów sztywno-plastycznych. Teorie odkształceniowe wiążą ze sobą składowe odkształcenia ze składowymi naprężenia. Związki fizyczne

(konstytutywne) odkształceniowej teorii plastyczności są wyrażane bezpośrednio w składowych tensora naprężenia i tensora odkształcenia. Głównym powodem szerokiego stosowania odkształceniowej teorii plastyczności jest jej mniejsze skomplikowanie i podobieństwo do teorii sprężystości.

Istotnymi cechami modeli ciał przyjmowanych w teorii plastyczności - cechami równań konstytutywnych - jest ich niewrażliwość na prędkość zmian obciążenia oraz umożliwiający uwzględnienie historii obciążenia związek między prędkością odkształceń (4.333) a naprężeniami. Związek ten w najogólniejszym i najbardziej rozpowszechnionym przypadku opiera się na koncepcji (de Saint-Venanta, Levy'ego, Misesa) istnienia pewnej hiperpowierzchni, zwanej powierzchnią (potencjałem) plastyczności (w przypadku idealnej plastyczności - ciało doskonale plastyczne $F([\sigma_{ij}]_S) = 0$), a w przypadku materiałów wykazujących umocnienie - początkowej powierzchni plastyczności (4.322).

Druga z metod budowy równań konstytutywnych teorii plastyczności, alternatywna do koncepcji potencjału plastyczności, wykorzystuje do budowy funkcjonałów opisujących związki między naprężeniami a odkształceniami (Iljuszyn) twierdzenia geometrii różniczkowej. Koncepcja ta, zwana teorią małych odkształceń sprężysto-plastycznych (Nadai, Hencky, Iljuszyn), jest uogólnieniem prawa Hooke'a dla ośrodków sprężystych i, jak wykazano, jest szczególnym przypadkiem teorii płynięcia plastycznego. Obydwie teorie są równoważne przy prostym (proporcjonalnym) obciążeniu, tzn. przy takiej zmianie stanu naprężenia, podczas której wszystkie składowe tensora naprężeń wzrastają proporcjonalnie z upływem czasu.

Przejście materiału ze stanu sztywnego (nieodkształconego) bądź sprężystego w stan plastyczny nazwano uplastycznieniem. Większość metali wykazuje wrażliwość na prędkość odkształcenia. To zjawisko wrażliwości na prędkość odkształcenia w podwyższonych temperaturach nazywamy termolepkoplastycznością, a same materiały - termolepkoplastycznymi. Opis materiału termolepkoplastycznego wymaga uwzględnienia wpływu prędkości odkształcenia i temperatury na proces uplastycznienia i sam przebieg odkształcania. Opis ten powinien uwzględniać nie tylko własności plastyczne, zależne od drogi obciążenia, ale również właściwości reologiczne (lepkość), zależne od czasu. Taka podwójna parametryzacja jest powodem dużych trudności w opisie materiałów o własnościach lepkoplastycznych. Ponadto naprężenie uplastyczniające zależy od historii odkształcenia, czego jednym z przejawów jest tzw. "efekt Bauschingera" [55, 161, 188]. Jednak w naszym przypadku, ze względu na jednokrotny (jednostronny) przebieg obciążenia i uplastycznienia, zjawisko to nie musi być brane pod uwagę.

Aby uniknąć nadmiernej komplikacji obliczeń, zachowując jednolitość budowy modelu matematycznego, w dalszych rozważaniach ograniczono się do opisu zachowania się zgrzewanych materiałów jako izotropowych termicznie niejednorodnych ciał (ośrodków) sztywno-termolepkoplastycznych w ramach teorii płynięcia plastycznego z umocnieniem izotropowym. Odpowiada to charakterowi i przebiegowi zjawiska kształtowania się trwałego połączenia materiałów w procesie

zgrzewania w bezpośrednim "sąsiedztwie" elektrod pod wpływem ich nacisku - materiałów uplastycznionych głównie pod wpływem wzrostu temperatury, przy przepływie prądu elektrycznego w fazie poprzedzającej powstanie ciekłego jądra zgrzeiny, a następnie po jego zakrzepnięciu.

Materiały termolepkoplastyczne, jako pewna idealizacja zgrzewanych materiałów przy podwyższonej temperaturze, pozwalają opisywać wpływ temperatury i prędkości odkształcenia na przebieg procesu uplastyczniania oraz przebieg samego procesu odkształcania fazy stałej. Trudności sprawia fakt, że wrażliwość metali na odkształcanie z różnymi prędkościami nie wykazuje regularności ani powtarzalności. Ten sam materiał może okazywać w różnych zakresach prędkości odmienną wrażliwość na prędkość odkształcenia. Niektóre zaś metale, jak np. aluminium i jego stopy, są niewrażliwe na prędkość odkształcenia albo wykazują ujemną wrażliwość, przejawiającą się w zmniejszeniu naprężenia uplastyczniającego. Nie mniejsze znaczenie ma wpływ temperatury i warunków termicznych, w jakich przebiega proces odkształcania. Temperatura wpływa nie tylko na wartość naprężenia uplastyczniającego, ale również na zmianę charakteru tej zależności. Dotychczasowe badania zachowania się stali niskowęglowych, miedzi, aluminium oraz ich stopów i innych metali pozwoliły zaobserwować, że wrażliwość tych materiałów na prędkość odkształcenia jest różna w całym zakresie temperatur i prędkości odkształcania. Różnice te spowodowane są występowaniem w każdym z zakresów odrębnych mechanizmów odkształcania (wpływ mikrostruktury). Wpływ odkształcenia na naprężenie uplastyczniające przejawia się przede wszystkim przez zmianę gęstości dyslokacji. Może ono, zależnie od temperatury i prędkości odkształcenia, wywołać zarówno zwiększenie gęstości dyslokacji, jak i jej zmniejszenie wskutek zachodzących w czasie odkształcania procesów aktywowanych cieplnie, takich jak zdrowienie i rekrystalizacja dynamiczna. Sposób, w jaki temperatura wpływa na przebieg odkształcenia, odgrywa bardzo istotną rolę, ponieważ własności plastyczne metali i ich stopów zależą od niej w bardzo dużym stopniu. Ponadto, temperatura wpływa również przez zmiany struktury materiału. W stopach można obserwować niemonotoniczny wpływ temperatur na naprężenie uplastyczniające. Może to być spowodowane przemianami fazowymi. Wpływ prędkości odkształcenia na naprężenia uplastyczniające zależy w bardzo dużym stopniu od temperatury. Materiały w różnym stopniu reagują przy tym na prędkość odkształcenia. Zjawisko to charakteryzuje się za pomocą współczynnika czułości materiału jako funkcji temperatury $m(T)$ na prędkość odkształcenia plastycznego. Współczynnik ten zależy od temperatury, przyjmując w niskich temperaturach wartości poniżej 0,1, a w wysokich nawet 0,5 w przypadku niektórych metali. W stałej temperaturze i dla małego stopnia odkształcenia zachowuje w przybliżeniu stałą wartość.

W złożonych stanach naprężenia $[\sigma_{ij}]_S$ uplastycznienie jest możliwe tylko wtedy, kiedy składowe tensora naprężenia spełniają warunek plastyczności wyrażony w tym przypadku za pomocą potencjału termoplastycznego (4.322). Punkty leżące na hiperpowierzchni (4.322) określają bieżący stan uplastycznionego materiału. Uplastycznienie materiału termoplastycznego w złożonym stanie naprężenia

z odkształceniowym umocnieniem izotropowym następuje w chwili, kiedy składowe tensora naprężenia fazy stałej $[\sigma_{ij}]_S$ w stanie uplastycznienia spełniają statyczny warunek plastyczności zapisywany z uwzględnieniem wpływu temperatury T oraz intensywności odkształceń liniowych $[\varepsilon]_S$ na jego przebieg (wpływ umocnienia odkształceniowego), w postaci [16, 55, 84, 134, 161, 188]:

$$F([\sigma_{ij}]_S, [\varepsilon]_S, T) \begin{cases} < 0 & \textit{dla materiału sztywnego lub sprężystego}, \\ \geqslant 0 & \textit{dla materiału uplastycznionego}, \end{cases} \tag{4.322}$$

gdzie:

$F([\sigma_{ij}]_S, [\varepsilon]_S, T) = 0$ - powierzchnia plastyczności (potencjał termoplastyczny),

$[\varepsilon]_S$ - intensywność odkształcenia (odkształcenie zastępcze) fazy stałej:

$$[\varepsilon]_S = \sqrt{\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}[\varepsilon_{ij}]_S[\varepsilon_{ji}]_S} = \sqrt{\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}[e_{ij}]_S[e_{ji}]_S}\,, \tag{4.323}$$

$[\varepsilon_{ij}]_S$ - tensor odkształcenia fazy stałej,

$[e_{ij}]_S$ - dewiator tensora odkształcenia nieściśliwej fazy stałej, wyrażony przez składowe pola przemieszczeń sprężystych $\boldsymbol{u}_S$:

$$[e_{ji}]_S = \frac{1}{2}[(\nabla^T \boldsymbol{u}_S) + (\nabla^T \boldsymbol{u}_S)^T]\,. \tag{4.324}$$

W jednoosiowych stanach naprężenia uplastycznienie materiału określa fizyczna (wyraźna) lub umowna granica plastyczności, jaką np. otrzymujemy w standardowej próbie rozciągania $\overline{\sigma}_0([\varepsilon]_S, T)$. Przyjmując dla metali dobrze zbadaną i zweryfikowaną hipotezę Hubera-Misesa-Hencky'ego (energii odkształcenia postaciowego) przy założeniu izotropowego umocnienia odkształceniowego, warunek uplastycznienia (H-M-H) materiału termoplastycznego można zapisać w szczególnej postaci [16, 55, 84, 134, 161, 188]:

$$F([\sigma_{ij}]_S, [\varepsilon]_S, T) = \frac{1}{\sqrt{3}}[[\sigma]_S - \overline{\sigma}_0([\varepsilon]_S, T)] = 0\,, \tag{4.325}$$

ponieważ [16, 55, 84, 161, 188]:

$$[\tau]_S = \frac{[\sigma]_S}{\sqrt{3}}\,, \tag{4.326}$$

gdzie:

$[\sigma]_S$ - intensywność naprężeń normalnych (naprężenie uogólnione) fazy stałej:

$$[\sigma]_S = \sqrt{\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}[\sigma_{ij}]_S[\sigma_{ji}]_S}\,, \tag{4.327}$$

$[\tau]_S$ - intensywność naprężeń stycznych (naprężenie zastępcze styczne) fazy stałej:

$$[\tau]_S = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}[\tau_{ij}]_S[\tau_{ji}]_S}\,. \tag{4.328}$$

Równanie (4.325) wyrażone przez intensywność naprężeń można zapisać w następującej postaci bezwymiarowej:

$$\frac{[\sigma]_S}{\overline{\sigma}_0([\varepsilon]_S, T)} - 1 = 0\,, \tag{4.329}$$

gdzie:

$\overline{\sigma}_0([\varepsilon]_S, T)$ - zależność tę wyznacza się doświadczalnie w izotermicznych próbach jednoosiowego statycznego rozciągania znormalizowanych próbek materiału i często aproksymuje funkcją o postaci zaproponowanej przez Swifta [55]:

$$\overline{\sigma}_0([\varepsilon]_S, T) = C(T)\{[\varepsilon]_S^0 + [\varepsilon]_S\}^{n(T)}.$$

Przy tym w ogólnym przypadku $C(T)$ oraz $n(T)$ są materiałowymi funkcjami temperatury (T).

Możliwość uwzględnienia wpływu prędkości odkształcenia (płynięcia) fazy stałej dostarcza materiał termolepkoplastyczny, a właściwie szczególna jego postać [16, 55, 84, 134, 161, 188], kiedy warunek uplastycznienia można zapisać jako:

$$F([\sigma_{ij}]_S, [\varepsilon]_S, [\dot{\varepsilon}^{pl}]_S, T) = \frac{[\sigma]_S}{\overline{\sigma}_0([\varepsilon]_S, [\dot{\varepsilon}^{pl}]_S, T)} - 1 = 0\,, \tag{4.330}$$

gdzie w przypadku materiału sztywno-termolepkoplastycznego:

$[\dot{\varepsilon}^{pl}]_S$ - intensywność prędkości odkształcenia liniowego (zastępcza prędkość odkształcenia liniowego) fazy stałej:

$$[\dot{\varepsilon}^{pl}]_S = \sqrt{\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}[\dot{\varepsilon}^{pl}_{ij}]_S[\dot{\varepsilon}^{pl}_{ji}]_S}\,, \tag{4.331}$$

$[\dot{\varepsilon}^{pl}]_S$ - intensywność prędkości liniowego odkształcenia termolepkoplastycznego fazy stałej:

$$[\dot{\varepsilon}^{pl}]_S = \sqrt{\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}[d^{pl}_{ij}]_S[d^{pl}_{ji}]_S}\,. \tag{4.332}$$

Ponieważ założono nieściśliwość (4.202), więc tensor prędkości odkształcenia $[\dot{\varepsilon}^{pl}_{ij}]_S$ jest równy swojemu dewiatorowi $[d^{pl}_{ij}]_S$:

$$[\dot{\varepsilon}^{pl}_{ij}]_S = [d^{pl}_{ij}]_S = \frac{1}{2}[(\nabla^T \boldsymbol{v}_S) + (\nabla^T \boldsymbol{v}_S)^T]\,. \tag{4.333}$$

Założenie modelu ciała sztywno-termolepkoplastycznego pozwala ograniczyć zadanie wyłącznie do wyznaczenia pola prędkości $\boldsymbol{v}_S$ i jednocześnie pominąć

z założenia odkształcenia sprężyste $\boldsymbol{u}_S$. Odpowiada to dobrze sytuacji jaka występuje przy zgrzewaniu punktowym, kiedy sprężyste przemieszczenia $\boldsymbol{u}_S$ pod naciskiem elektrod zanikają po zdjęciu obciążenia w końcowej fazie zgrzewania oporowego punktowego.

W technologii obróbki plastycznej metali znane są zależności doświadczalne [32], określające naprężenia uplastyczniające w postaci funkcji: $\overline{\sigma}_0([\varepsilon]_S, [\dot{\varepsilon}^{pl}]_S, T) = f([\varepsilon]_S, [\dot{\varepsilon}^{pl}]_S, T)$.

Na nasze potrzeby można wykorzystać zależność [32]:

$$\overline{\sigma}_0([\varepsilon]_S, [\dot{\varepsilon}^{pl}]_S, T) = \sigma_0\,[\varepsilon]_S^{n(T)}\,[\dot{\varepsilon}^{pl}]_S^{m(T)}\,exp[-a(T - 273,15)]\,, \tag{4.334}$$

która w przypadku materiału termolepkoplastycznego ($n = 0$) przyjmuje postać:

$$\overline{\sigma}_0([\varepsilon]_S, [\dot{\varepsilon}^{pl}]_S, T) = \sigma_0\,[\dot{\varepsilon}^{pl}]_S^{m(T)}\,exp[-a(T - 273,15)]\,, \tag{4.335}$$

lub podobną, znaną jako zależność Inouye [55]:

$$\overline{\sigma}_0([\varepsilon]_S, [\dot{\varepsilon}^{pl}]_S, T) = C\,[\varepsilon]_S^{n(T)}\,[\dot{\varepsilon}^{pl}]_S^{m(T)}\,exp(\frac{Q}{kT})\,, \tag{4.336}$$

gdzie: $\overline{\sigma}_0([\varepsilon]_S, [\dot{\varepsilon}^{pl}]_S, T)$ - normalne naprężenia uplastyczniające fazę stałą,

σ_0, a, C, k, Q - stałe materiałowe,

$m(T)$ - współczynnik czułości materiału na prędkość odkształcenia,

$n(T)$ - stopień uplastycznienia.

Przebieg uplastycznienia materiału termolepkoplastycznego jest bardziej złożony niż termoplastycznego, ponieważ po osiągnięciu powierzchni plastyczności (4.325) nie pojawią się odkształcenia trwałe, lecz wystąpią dopiero po osiągnięciu powierzchni (4.330).

Na potrzeby zastosowanego modelu płynięcia termolepkoplastycznego fazy stałej, podobnie jak Prager i Perzyna, [16, 134], zaadoptowano (zweryfikowaną doświadczalnie) teorię płynięcia plastycznego Misesa, opierającą się na hipotezie istnienia potencjału plastycznego, a utożsamianego w szczególności z warunkiem plastyczności (4.330).

W takim przypadku równanie płynięcia termolepkoplastycznego można zapisać w postaci prawa płynięcia plastycznego:

$$[\dot{\varepsilon}^{pl}_{ij}]_S = \beta_0(T) < \Phi(F) > (\frac{\partial F}{\partial [\sigma^{pl}_{ij}]_S})\,, \tag{4.337}$$

gdzie:

$\beta_0(T)$ - parametr materiałowy będący w ogólnym przypadku funkcją temperatury (T),

$< \Phi(F) >$ - funkcja zależna od stanu naprężenia, odkształcenia, jego prędkości i temperatury oraz historii obciążenia w najogólniejszym przypadku (potencjał termolepkoplastyczny):

$$< \Phi(F) >= \begin{cases} 0 & dla\ F < 0 \quad dla\ materiału\ sztywnego, \\ \Phi(F) & dla\ F \geqslant 0 \quad dla\ materiału\ uplastycznionego, \end{cases} \tag{4.338}$$

$[\dot{\varepsilon}^{pl}_{ij}]_S$ - wektor prędkości odkształcenia prostopadły do powierzchni płynięcia (potencjału termolepkoplastycznego), jak to wynika z założonej postaci (4.337).

Przy tym, z uwagi na postać równania (4.334), dla wygody przyjęto często stosowaną postać potęgową [16, 55, 84, 161] funkcji $\Phi(F)$:

$$\Phi(F) = F^{\delta}. \tag{4.339}$$

Wykorzystując definicję intensywności naprężeń (4.327), obliczono z warunku uplastycznienia (4.330):

$$(\frac{\partial F}{\partial[\sigma^{pl}_{ij}]_S}) = (\frac{\partial[\sigma]_S}{\partial[\sigma^{pl}_{ij}]_S}) = \frac{\frac{1}{2}[\tau^{pl}_{ji}]_S}{(\frac{[\sigma]_S}{\sqrt{3}})} = (\frac{\sqrt{3}}{2})\frac{[\tau^{pl}_{ji}]_S}{[\sigma]_S} = (\frac{\sqrt{3}}{2})\frac{[\tau^{pl}_{ij}]_S}{[\sigma]_S}, \tag{4.340}$$

a także:

$$(\frac{\partial F}{\partial[\sigma^{pl}_{ji}]_S}) = (\frac{\partial F}{\partial[\sigma^{pl}_{ij}]_S}), \tag{4.341}$$

ponieważ zachodzi symetria: $[\tau^{pl}_{ij}]_S = [\tau^{pl}_{ji}]_S$.

W odróżnieniu od warunku uplastycznienia ciała termoplastycznego (4.325) - nazywanego warunkiem statycznym, warunek uplastycznienia ciała termolepkoplastycznego jest warunkiem dynamicznym (chwilowym). Podstawiając (4.340), po uwzględnieniu (4.339), uzyskano dla uplastycznionego materiału następującą postać prawa płynięcia termolepkoplastycznego:

$$[\dot{\varepsilon}^{pl}_{ij}] = (\frac{\sqrt{3}}{2})\beta_0(T)\{\frac{[\sigma]_S}{\overline{\sigma}_0([\varepsilon]_S, [\dot{\varepsilon}^{pl}]_S, T)} - 1\}^{\delta}\frac{[\tau^{pl}_{ji}]_S}{[\sigma]_S}. \tag{4.342}$$

Analogicznie można otrzymać postać sprzężoną (stowarzyszoną):

$$[\dot{\varepsilon}^{pl}_{ji}] = (\frac{\sqrt{3}}{2})\beta_0(T)\{\frac{[\sigma]_S}{\overline{\sigma}_0([\varepsilon]_S, [\dot{\varepsilon}^{pl}]_S, T)} - 1\}^{\delta}\frac{[\tau^{pl}_{ij}]_S}{[\sigma]_S}. \tag{4.343}$$

Tworząc równanie sprzężone (transponowane) do (4.337), po wymnożeniu ich stronami i zsumowaniu otrzymano, mając na uwadze (4.342 ÷ 4.343):

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}[\dot{\varepsilon}^{pl}_{ij}]_S[\dot{\varepsilon}^{pl}_{ji}]_S = \beta_0^2(T) < \Phi^2(F) > \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(\frac{\partial F}{\partial[\sigma^{pl}_{ij}]_S})(\frac{\partial F}{\partial[\sigma^{pl}_{ji}]_S}) = \cdots$$

$$= 3[\frac{\beta_0(T)}{2}]^2\{\frac{[\sigma]_S}{\overline{\sigma}_0([\varepsilon]_S, [\dot{\varepsilon}^{pl}]_S, T)} - 1\}^{2\delta}\frac{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}[\tau^{pl}_{ij}]_S[\tau^{pl}_{ji}]_S}{[\sigma]_S^2}. \tag{4.344}$$

Z uwagi na (4.332):

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}[\dot{\varepsilon}^{pl}_{ij}]_S[\dot{\varepsilon}^{pl}_{ji}]_S = \frac{3}{2}[\dot{\varepsilon}^{pl}]_S^2,$$

otrzymano:

$$\frac{3}{2}[\dot{\varepsilon}^{pl}]_S^2 = 3[\frac{\beta_0(T)}{2}]^2\{\frac{[\sigma]_S}{\overline{\sigma}_0([\varepsilon]_S, T)} - 1\}^{2\delta}\frac{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}[\tau_{ij}]^{pl}_S[\tau^{pl}_{ji}]_S}{[\sigma]_S^2}. \tag{4.345}$$

Na podstawie (4.329÷4.328) można obliczyć, że:

$$\frac{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}[\tau^{pl}_{ij}]_S[\tau^{pl}_{ji}]_S}{[\sigma]_S^2} = \frac{2}{3}, \tag{4.346}$$

co pozwala zapisać (4.345) po spierwiastkowaniu w postaci:

$$[\dot{\varepsilon}^{pl}]_S = \frac{\beta_0(T)}{\sqrt{3}}\{\frac{[\sigma]_S}{\overline{\sigma}_0([\varepsilon]_S, [\dot{\varepsilon}^{pl}]_S, T)} - 1\}^{\delta}. \tag{4.347}$$

Stąd po przekształceniach otrzymano końcową postać dynamicznego warunku uplastycznienia:

$$[\sigma]_S = \overline{\sigma}_0([\varepsilon]_S, [\dot{\varepsilon}^{pl}]_S, T)\{1 + [\frac{\sqrt{3}[\dot{\varepsilon}^{pl}]_S}{\beta_0(T)}]^{\frac{1}{\delta}}\}. \tag{4.348}$$

Stowarzyszone z warunkiem plastyczności (4.348) prawo płynięcia (4.342÷4.343) można następnie zapisać w postaci:

$$[\tau^{pl}_{ij}]_S = (\frac{2}{3})\frac{[\sigma]_S}{[\dot{\varepsilon}^{pl}]_S}[\dot{\varepsilon}^{pl}_{ij}]_S = \eta^{pl}_S(T)\cdot[\dot{\varepsilon}^{pl}_{ij}]_S, \tag{4.349}$$

otrzymanej po uwzględnieniu (4.332÷4.334) i mając na uwadze (4.333), gdzie dla ciała sztywno-termolepkoplastycznego ze względu na (4.335):

$$\eta^{pl}_S(T) = (\frac{1}{3})\frac{[\sigma]_S}{[\dot{\varepsilon}^{pl}_{ij}]_S} = \cdots$$

$$= (\frac{1}{3})\sigma_0\left\{\sqrt{\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}[\dot{\varepsilon}^{pl}_{ij}]_S[\dot{\varepsilon}^{pl}_{ji}]_S}\right\}^{(m-1)} exp[-a(T - 273,15)]. \tag{4.350}$$

4.3.4. Równanie zachowania energii

Równanie zachowania energii w obszarze dwufazowej strefy przejściowej (L+S) w przybliżeniu homogenicznym

Wychodząc z bilansu energii dwufazowej strefy przejściowej ciekłego jądra zgrzeiny (mieszanina faz: stałej i ciekłej), pozwalającego opisać za pomocą zmiennego pola temperatury T procesy powstawania i krzepnięcia jądra zgrzeiny, uzyskano uniwersalne równanie (4.381). Równanie to umożliwia jednolicie opisać przybliżony model zjawiska propagacji ciepła wydzielającego się na stykach

materiałów i wskutek oporności przewodzenia prądu elektrycznego, również w fazie stałej i ciekłej. Daje to możliwość obliczeń pola temperatury w różnych fazach cyklu zgrzewania od fazy nagrzewania przez fazę topienia i krzepnięcia aż do fazy stygnięcia.

Równanie zachowania energii (wyrażone przez energię wewnętrzną) k-tej fazy otrzymano, przy założonej wcześniej nieściśliwości, podstawiając do ogólnego równania zachowania (transportu) wielkości ekstensywnych (4.190):

$$\varphi_k = u_k + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_k^2 + \frac{1}{\rho_k} w_k\,; \quad \boldsymbol{j}_k^T = -(\lambda_k \nabla^T T - [\sigma_{ij}]_k \cdot \boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_k\, w_k + \mathbf{s}_k) \; oraz \; I_k = \dot{e}_k.$$

W ten sposób, pomijając energię "wypromieniowywaną", przy założeniu lokalnej równowagi termodynamicznej ($T = T_k$) oraz uwzględniając (4.173), otrzymano:

$$\frac{\partial[\overline{\rho}_k\,(u_k + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_k^2) + g_k\, w_k]}{\partial t} + \nabla \cdot \{\overline{\rho}_k \boldsymbol{v}_k\,[(u_k + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_k^2) + g_k\, w_k]\} =$$
$$= \nabla \cdot (g_k\, \lambda_k \nabla^T T) + \nabla \cdot (g_k\, [\sigma_{ij}]_k \cdot \boldsymbol{v}_k) - \nabla \cdot (g_k\, \mathbf{s}_k) + \nabla \cdot (\boldsymbol{v}_k\, g_k\, w_k) + g_k\, \dot{e}_k\,, \tag{4.351}$$

gdzie:

T - temperatura równowagowa,

u_k - energia wewnętrzna k-tej fazy,

$\overline{\rho}_k$ - gęstość cząstkowa k-tej fazy (4.173),

g_k - objętościowy udział k-tej fazy (4.169),

$\boldsymbol{v}_k$ - prędkość k-tej fazy,

$[\sigma_{ij}]_k$ - symetryczny tensor naprężeń k-tej fazy (4.255),

λ_k - współczynnik przewodzenia ciepła k-tej fazy ($\lambda_k = \lambda_k(T)$),

$g_k\, \dot{e}_k$ - składnik opisujący wytwarzanie/pochłanianie energii cieplnej w czasie (moc) z uwagi na przemiany fazowe,

σ_k - przewodność k-tej fazy,

ε_k - przenikalność elektryczna k-tej fazy,

μ_k - przenikalność magnetyczna k-tej fazy,

$\mathbf{E}_k$ - natężenie pola elektrycznego k-tej fazy,

$\mathbf{D}_k$ - indukcja elektryczna k-tej fazy,

$\mathbf{H}_k$ - natężenie pola magnetycznego k-tej fazy,

$\mathbf{B}_k$ - indukcja magnetyczna k-tej fazy,

w_k - energia właściwa (odniesiona do jednostki objętości) zmagazynowana w jej polu elektromagnetycznym:

$$w_k = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{D}_k + \mathbf{H}_k \cdot \mathbf{B}_k) = \frac{1}{2}(\varepsilon_k\, |\mathbf{E}_k|^2 + \mu_k\, |\mathbf{H}_k|^2)\,, \tag{4.352}$$

$\mathbf{s}_k$ - gęstość powierzchniowa mocy przenoszonej przez pole elektromagnetyczne w k-tej fazie - wektor Poyntinga k-tej fazy (4.117):

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{E}_k \times \mathbf{H}_k\,. \tag{4.353}$$

Sumując równania (4.351) względem k oraz uwzględniając (4.173) i (4.353), po przekształceniach zapisano:

$$\frac{\partial[\sum_{k=1}^2 \overline{\rho}_k\, u_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^2 \overline{\rho}_k \boldsymbol{v}_k^2 + \sum_{k=1}^2 g_k\, w_k]}{\partial t} + \nabla \cdot [(\sum_{k=1}^2 \overline{\rho}_k\, \boldsymbol{v}_k\, u_k) + \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^2 \overline{\rho}_k\, \boldsymbol{v}_k^T \cdot \boldsymbol{v}_k)] =$$
$$= \nabla \cdot (\sum_{k=1}^2 g_k\, \lambda_k \nabla^T T) + \nabla \cdot (\sum_{k=1}^2 g_k\, [\sigma_{ij}]_k \cdot \boldsymbol{v}_k) - \ldots$$
$$- \nabla \cdot [\sum_{k=1}^2 g_k\, (\mathbf{E}_k \times \mathbf{H}_k)] + \sum_{k=1}^2 g_k\, \dot{e}_k\,. \tag{4.354}$$

Homogeniczną energię wewnętrzną mieszaniny faz zdefiniowano jako:

$$u = \frac{1}{\rho}\sum_{k=1}^2 \overline{\rho}_k\, u_k = \sum_{k=1}^2 f_k\, u_k\,, \tag{4.355}$$

a homogeniczną gęstość powierzchniową mocy pola elektromagnetycznego - homogeniczny wektor Poyntinga:

$$\mathbf{s} = \sum_{k=1}^2 g_k\, \mathbf{s}_k = \sum_{k=1}^2 g_k\, (\mathbf{E}_k \times \mathbf{H}_k) = \mathbf{E} \times \mathbf{H}\,. \tag{4.356}$$

Ponadto zdefiniowano homogeniczną energię pola elektromagnetycznego:

$$w = \sum_{k=1}^2 g_k\, w_k = \frac{1}{2}(\varepsilon\, |\mathbf{E}|^2 + \mu\, |\mathbf{H}|^2) \tag{4.357}$$

oraz współczynnik przewodzenia ciepła $\lambda(T)$ i wydajność źródeł ciepła z uwagi na przemiany fazowe $\dot{e}(T)$ równoważnego ośrodka homogenicznego:

$$\lambda = \sum_{k=1}^2 g_k\, \lambda_k\,, \tag{4.358}$$

$$\dot{e} = \sum_{k=1}^2 g_k\, \dot{e}_k\,. \tag{4.359}$$

Jednocześnie można wykazać, że zachodzą równości:

$$\sum_{k=1}^2 \overline{\rho}_k\, \boldsymbol{v}_k\, u_k = \rho\, \boldsymbol{v}\, u + \sum_{k=1}^2 \overline{\rho}_k (\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v})(u_k - u)\,, \tag{4.360}$$

$$\sum_{k=1}^{2} \overline{\rho}_k \, (\boldsymbol{v}_k^T \cdot \boldsymbol{v}_k) = \sum_{k=1}^{2} \overline{\rho}_k \, \boldsymbol{v}_k^2 = \rho \, \boldsymbol{v}^2 + \sum_{k=1}^{2} \overline{\rho}_k (\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v})^2 \,, \tag{4.361}$$

$$\sum_{k=1}^{2} g_k \, \boldsymbol{v}_k \, w_k = \boldsymbol{v} w + \sum_{k=1}^{2} g_k (\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v})(w_k - w) \,, \tag{4.362}$$

$$\sum_{k=1}^{2} g_k \, [\sigma_{ij}]_k \cdot \boldsymbol{v}_k = [\sigma_{ij}] \cdot \boldsymbol{v} + \sum_{k=1}^{2} g_k ([\sigma_{ij}] - [\sigma_{ij}]_k) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_k) \,. \tag{4.363}$$

Podstawiając (4.355÷4.363) do (4.354) po przekształceniach i po odrzuceniu wyrazów opisujących względny ruch faz (stałej i ciekłej w dwufazowej strefie przejściowej), otrzymano w ośrodku nieściśliwym:

$$\rho \frac{\partial (u + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \, |\mathbf{E}|^2 + \mu \, |\mathbf{H}|^2) + \rho (\boldsymbol{v}^T \cdot \nabla^T)(u + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2) =$$
$$= \nabla \cdot (\lambda \nabla^T T) + \nabla \cdot ([\sigma_{ij}] \cdot \boldsymbol{v}) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \dot{e} \,. \tag{4.364}$$

W równaniu tym pominięto w strefie dwufazowej efekty związane z inercją względną faz w stosunku do ruchu ogólnego, jak również oddziaływania międzyfazowe prowadzące do zmian względnego pędu (przyspieszanie / opóźnianie), a także opory wzajemnego ich ruchu i traconą na te efekty energię, z uwagi na ich niewielki udział w ogólnym bilansie.

Posiłkując się równaniami (4.41÷4.44), wyraz: $-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ w równaniu (4.364) można w ogólnym przypadku przepisać w postaci:

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot [\sigma(\mathbf{E} + \mu \boldsymbol{v} \times \mathbf{H})] + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \, |\mathbf{E}|^2 + \mu \, |\mathbf{H}|^2) \,, \tag{4.365}$$

pamiętając o (A27). Identyczny wynik można również otrzymać wprost z równania zachowania energii izotropowego pola elektromagnetycznego (4.122).

Uwzględniając (4.365), równanie zachowania energii zapisano w postaci wyrażonej przez energię wewnętrzną ośrodka nieściśliwego:

$$\rho [\frac{\partial (u + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2)}{\partial t} + (\boldsymbol{v}^T \cdot \nabla^T)(u + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2)] =$$
$$= \nabla \cdot (\lambda \nabla^T T) + \nabla \cdot ([\sigma_{ij}] \cdot \boldsymbol{v}) + \mathbf{E} \cdot [\sigma(\mathbf{E} + \boldsymbol{v} \times \mu \mathbf{H})] + \dot{e} \,. \tag{4.366}$$

Drugi z wyrazów po prawej stronie równania (4.366) przedstawia pracę wykonaną w jednostce czasu (moc) przy deformacji i płynięciu materiału w obrębie zgrzeiny. Jako niewielki, w porównaniu z pozostałymi składnikami, w dalszych rozważaniach pominięto w równaniu bilansu energii, tzn. założono:

$$\nabla \cdot ([\sigma_{ij}] \cdot \boldsymbol{v}) \approx 0 \,.$$

Energię wewnętrzną $u(T)$ przedstawiono jako funkcję temperatury:

$$u(T) = \int_{T_o}^{T} c_v(T) dT + u^o \,, \tag{4.367}$$

gdzie:

$c_v(T)$ - ciepło właściwe przy $v = idem$ $(c_v(T) = (\frac{du}{dT})_v)$,

T_o - temperatura odniesienia,

u^o - stała całkowania.

Po wprowadzeniu, w przypadku zgrzewania prądem stałym, potencjałów pola elektromagnetycznego (skalarnego (4.63) oraz wektorowego (4.66)) równanie (4.366) można zapisać w postaci:

$$\rho [\frac{\partial (u + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2)}{\partial t} + (\boldsymbol{v}^T \cdot \nabla^T)(u + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2)] = \cdots$$
$$= \nabla \cdot (\lambda \nabla^T T) - \sigma \nabla^T \Phi \cdot (\boldsymbol{v} \times rot \mathbf{A} - \nabla^T \Phi) + \dot{e} \,. \tag{4.368}$$

W obszarze dwufazowej strefy przejściowej zależnie od zmian udziału objętościowego fazy stałej $g_S(T)$, rozpatrywanego jako funkcja temperatury:

$$(\frac{dg_S}{dt}) = \frac{\partial g_S(T)}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_S^T \cdot \nabla^T) g_S(T) = (\frac{\partial g_S}{\partial T})[\frac{\partial T}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_S^T \cdot \nabla^T) T] \,, \tag{4.369}$$

zmienia się moc źródeł ciepła $\dot{e}$ wywołanych zmianami stanu skupienia.

A mianowicie, przy topieniu prędkość ubywania fazy stałej określa pochodna $(\frac{dg_S}{dt})$. Jednocześnie pobierane jest utajone ciepło przemiany fazowej z intensywnością:

$$\dot{e}_S = \rho \, L (\frac{dg_S}{dt}) \,. \tag{4.370}$$

Podobnie w przypadku krzepnięcia ubywa fazy ciekłej z prędkością $(\frac{dg_L}{dt}) = -(\frac{dg_S}{dt})$, ponieważ zachodzi (4.180) i wydziela się utajone ciepło przemiany z intensywnością:

$$\dot{e}_L = \rho \, L (\frac{dg_L}{dt}) = -\rho \, L (\frac{dg_S}{dt}) \,. \tag{4.371}$$

Wypadkowa wydajność wewnętrznego źródła ciepła, z uwagi na przemiany fazowe (4.359), ma w dwufazowej strefie przejściowej wartość:

$$\dot{e} = g_S \dot{e}_S + (1 - g_S) \dot{e}_L = \rho \, L [g_S (\frac{dg_S}{dt}) - (1 - g_S)(\frac{dg_S}{dt})] = \cdots$$
$$= \rho \, L (2g_S - 1)(\frac{dg_S}{dt}) = \rho \, L (2g_S - 1)(\frac{\partial g_S}{\partial T})[\frac{\partial T}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_S^T \cdot \nabla^T) T] \,, \tag{4.372}$$

gdzie:

g_S - objętościowy udział fazy stałej,

L - ciepło właściwe przemiany fazowej,

ρL - objętościowe ciepło przemiany fazowej,

w tej strefie. Zaproponowane sformułowanie (4.372) jest uogólnieniem opisu stosowanego przez metalurgów i odlewników, np. [25, 113, 155], pozwalającym uwzględnić wpływ adwekcyjnych zmian udziału g_S (wskutek unoszenia przez pole prędkości w obszarze płynnego jądra zgrzeiny). Jeśli pominąć poślizg faz, jak to uczyniono w odniesieniu do (4.360÷ 4.363), tzn. założyć, że: $\boldsymbol{v}_S \approx \boldsymbol{v}$, wówczas można zapisać (4.372) w postaci:

$$\dot{e} = \rho L(2g_S - 1)(\frac{\partial g_S}{\partial T})[\frac{\partial T}{\partial t} + (\boldsymbol{v}^T \cdot \nabla^T)T] = \rho L(2g_S - 1)(\frac{\partial g_S}{\partial T})(\frac{dT}{dt}) . \quad (4.373)$$

Z drugiej strony, zaniedbując ściśliwość zgrzewanych metali (co ze względu na występujące naciski jest w danym przypadku w pełni uzasadnione), można zapisać równanie (4.368) w postaci:

$$\rho\{[c_v(T) - L(2g_S - 1)(\frac{\partial g_S}{\partial T})](\frac{dT}{dt}) + \boldsymbol{v}^T \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\} = \\ = \nabla \cdot (\lambda \nabla^T T) - \sigma \nabla^T \Phi \cdot (\boldsymbol{v} \times rot\mathbf{A} - \nabla^T \Phi) . \quad (4.374)$$

Analogicznie do [25, 113] wprowadzono pojęcie efektywnej (zastępczej) pojemności cieplnej przejściowej strefy dwufazowej i przekształcono do postaci:

$$c_e(T) = [c_v(T) - L(2g_S - 1)(\frac{\partial g_S}{\partial T})] , \quad (4.375)$$

po uwzględnieniu (4.180) i (4.200). Przy założeniu nieściśliwości z (4.175) wynika, że:

$$c_S = g_S(\frac{\rho_S}{\rho}) . \quad (4.376)$$

Dlatego:

$$(\frac{\partial g_S}{\partial T}) = (\frac{\partial c_S}{\partial T}) = \frac{T_m - T_L(c^B)}{(k_0 - 1)(T_m - T)^2} , \quad (4.377)$$

ze względu na (4.233). Pochodna $(\frac{\partial g_S}{\partial T})$ charakteryzuje prędkość i kierunek przemiany (znak pochodnej). Ponadto z (4.234) wynika że:

$$(2g_S - 1) = \frac{2}{1 - k_0}[\frac{T_L(c^B) - T}{T_m - T}] - 1 \quad (4.378)$$

i jest miarą zaawansowania przemiany fazowej zależnie od aktualnej temperatury T.

Podstawiając (4.377) do (4.375), otrzymano po uwzględnieniu (4.378) dla dwufazowej strefy przejściowej:

$$\boxed{c_e(T) = \left\{c_v(T) - \frac{L[T_m - T_L(c^B)]}{(k_0 - 1)(T_m - T)^2}\{\frac{2}{1 - k_0}[\frac{T_L(c^B) - T}{T_m - T}] - 1\}\right\} . \quad (4.379)}$$

Występujący po lewej stronie równania (4.374) składnik $\boldsymbol{v}^T \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ ma pomijalnie małe znaczenie w stosunku do pozostałych wartości ponieważ $\boldsymbol{v}^T \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \approx 0$ dla małych prędkości $\boldsymbol{v} \approx \mathbf{0}$ lub / i przyspieszeń $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \approx \mathbf{0}$. Ma to miejsce w ciekłym jądrze zgrzeiny, o którym wiadomo, że występujące w nim prędkości są rzędu $0,005\ m/s$ [192], a przyspieszenia są małe. Fakt ten oraz mały wpływ indukcji własnej ($rot\mathbf{A} \approx \mathbf{0}$) pozwalają uprościć równanie (4.374) do postaci odpowiadającej płynięciu "beztransportowemu" przy zgrzewaniu prądem stałym:

$$\rho c_e(T)\frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot [\lambda(T)\nabla^T T] = \sigma(T)(\nabla^T \Phi)^2 , \quad (4.380)$$

która stanowi model energetyczny zastępczego (równoważnego) ciała stałego, opisujący płynne jądro zgrzeiny. Równanie (4.380) można zapisać w rozwiniętej postaci homogenicznej, odpowiadającej płynięciu "beztransportowemu" przy zgrzewaniu prądem stałym:

$$\boxed{\rho c_e(T)\frac{\partial T}{\partial t} - \nabla^2 T - \nabla^T \lambda(T) \cdot \nabla^T T = \sigma(T)(\nabla^T \Phi)^2 . \quad (4.381)}$$

Równanie zachowania energii w obszarze fazy stałej (S) i ciekłej (L) dla przybliżenia "beztransportowego"

Olbrzymią zaletą równania (4.381) jest możliwość jednolitego opisu nie tylko płynnego jądra zgrzeiny w fazie jego powstawania, ale także zgrzewanych materiałów oraz elektrod przed i po ukształtowaniu się zgrzeiny. W tych przypadkach wystarczy przyjąć:

- ciało stałe (faza stała) $g_S = 1$ - przy zgrzewaniu prądem stałym:

$$c_e(T) = c_{vS}(T) \ oraz \ \lambda = \lambda_S(T) \ \ i \ \ \sigma = \sigma_S(T) \ \ dla \ \ T < T_S(c^B), \ skąd \ odpowiednio : \quad (4.382)$$

$$\boxed{\rho c_{vS}(T)\frac{\partial T}{\partial t} - \nabla^2 T - \nabla^T \lambda_S(T) \cdot \nabla^T T = \sigma_S(T)(\nabla^T \Phi)^2 , \quad (4.383)}$$

- ciecz (faza ciekła) $g_L = 1$ - przy zgrzewaniu prądem stałym:

$$c_e(T) = c_{vL}(T) \; oraz \; \lambda = \lambda_L(T) \; i \; \sigma = \sigma_L(T) \; dla \; T > T_L(c^B), \quad skąd \; odpowiednio: \tag{4.384}$$

$$\boxed{\rho c_{vL}(T)\frac{\partial T}{\partial t} - \nabla^2 T - \nabla^T \lambda_L(T) \cdot \nabla^T T = \sigma_L(T)(\nabla^T \Phi)^2, \tag{4.385}}$$

jak to wynika z równań (4.374÷4.375).

Prawa strona równania (4.381) ma charakter wyrazu źródłowego, wymuszającego pole temperatury w każdej fazie cyklu zgrzewania oporowego punktowego.

W przypadku zgrzewania prądem przemiennym w miejsce potencjału elektrostatycznego Φ należy wstawić zdefiniowany wcześniej skuteczny potencjał elektrostatyczny $\tilde{\Phi}$ (4.114) dla hipotetycznego (zastępczego) prądu stałego, którego przepływ daje ten sam efekt energetyczny co rzeczywiście przepływający prąd przemienny. Przy tym potencjały Φ i $\tilde{\Phi}$ spełniają analogiczne równania (4.75) i (4.115). Tak więc otrzymano przy zgrzewaniu prądem przemiennym niskiej częstotliwości:

$$\boxed{\rho c_e(T)\frac{\partial T}{\partial t} - \nabla^2 T - \nabla^T \lambda(T) \cdot \nabla^T T = \sigma(T)(\nabla^T \tilde{\Phi})^2. \tag{4.386}}$$

Analogicznie do (4.383÷4.385), w przypadku zgrzewania prądem przemiennym można napisać:

- ciało stałe (faza stała) $g_S = 1$:

$$c_e(T) = c_{vS}(T) \; oraz \; \lambda = \lambda_S(T) \; i \; \sigma = \sigma_S(T) \; dla \; T < T_S(c^B), \; skąd \; odpowiednio: \tag{4.387}$$

$$\boxed{\rho c_{vS}(T)\frac{\partial T}{\partial t} - \nabla^2 T - \nabla^T \lambda_S(T) \cdot \nabla^T T = \sigma_S(T)(\nabla^T \tilde{\Phi})^2. \tag{4.388}}$$

- ciecz (faza ciekła) $g_L = 1$:

$$c_e(T) = c_{vL}(T) \; oraz \; \lambda = \lambda_L(T) \; i \; \sigma = \sigma_L(T) \; dla \; T > T_L(c^B), \quad skąd \; odpowiednio: \tag{4.389}$$

$$\boxed{\rho c_{vL}(T)\frac{\partial T}{\partial t} - \nabla^2 T - \nabla^T \lambda_L(T) \cdot \nabla^T T = \sigma_L(T)(\nabla^T \tilde{\Phi})^2. \tag{4.390}}$$

5. Obliczenia numeryczne

Przykładowe obliczenia numeryczne wybranego i zapisanego niżej, w postaci układu równań (podrozdział 5.3.) wraz z warunkami brzegowymi (podrozdział 5.4.), modelu procesu zgrzewania oporowego punktowego wykonano w oparciu o pakiet profesjonalnych kodów programowych firmy ANSYS Inc., wykorzystujący metodę elementów skończonych.

5.1. Pakiet kodów programowych ANSYS zastosowany do obliczeń metodą elementów skończonych

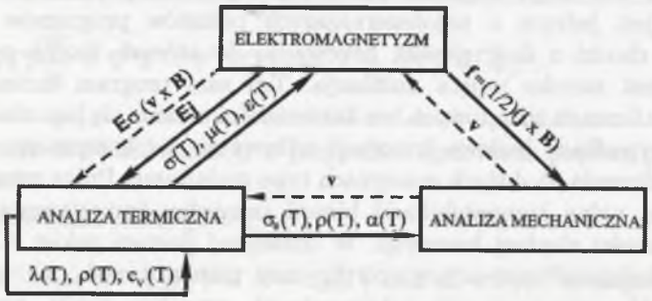
Program ten ulega ciągłemu rozwojowi od chwili powstania w roku 1970. Aktualnie jest jednym z najobszerniejszych pakietów programów dla obliczeń MES, jeśli chodzi o ilość zjawisk fizycznych, do których można go zastosować. Siłą jego jest szeroko pojęta unifikacja. Ten sam program można używać na różnych platformach sprzętowych bez konieczności uczenia się jego obsługi od nowa. W wielu wypadkach budowa koncepcji odbywa się na komputerze osobistym, a końcowe obliczenia na dużych maszynach typu mainframe. Prócz menu siłą pakietu ANSYS jest pełna kompatybilność binarii pomiędzy komputerami i systemami bez konieczności zbędnej konwersji. W dzisiejszej postaci pakiet ANSYS stosuje elementy skończone zawierające opis fizyczny takich zjawisk, jak: wytrzymałość, elektryczność, magnetyzm, piezoelektryczność, przepływ ciepła, przepływ cieczy i gazów, przepływy hipersoniczne i akustyka. Dodatkowo program posiada elementy pozwalające na opis zjawisk przez równania sprzężone. W programie można dokonywać obliczeń zarówno zagadnień stacjonarnych, jak i zmiennych w czasie. Opis materiałów stosowany do obliczenia może uwzględniać wiele różnego typu nieliniowości. Zależności charakterystyk materiałowych mogą być funkcjami temperatury i nie powoduje to wydłużenia procesu obliczeniowego. W obliczeniach inżynierskich, jak i w pracach badawczych bardzo dużą rolę przywiązuje się do powtarzalności wyników oraz ich dokładności. W swojej klasie, tak rozbudowanych pakietów MES, kod ANSYS posiada odpowiednie certyfikaty łącznie z normą ISO 9001. Certyfikat otrzymał jako pierwszy i ma do dzisiaj. Według zapewnień firma ANSYS nim dopuści do użytku nową wersję, poddaje ją minimum 20 tys. testów, porównując wyniki obliczeń z wynikami analitycznymi (zespoły uniwersyteckie) bądź z pomiarami rzeczywistego zjawiska (laboratoria badawcze). Program zawiera w swojej strukturze wewnętrzny język programowania (oparty

na składni języka FORTRAN), w którym użytkownik jest w stanie zarządzać obliczeniami, parametryzować odpowiednie wielkości, jak i uzupełniać obliczenia o własne funkcje i procedury.

5.2. Algorytm obliczeń numerycznych

Zaproponowane w rozdziale 4. przybliżone modele matematyczne zjawisk procesu zgrzewania oporowego punktowego opisują sprzężone układy równań różniczkowych cząstkowych. Rysunek 5.1 ilustruje charakter występujących sprzężeń, podając schemat współzależności głównych zjawisk fizycznych.

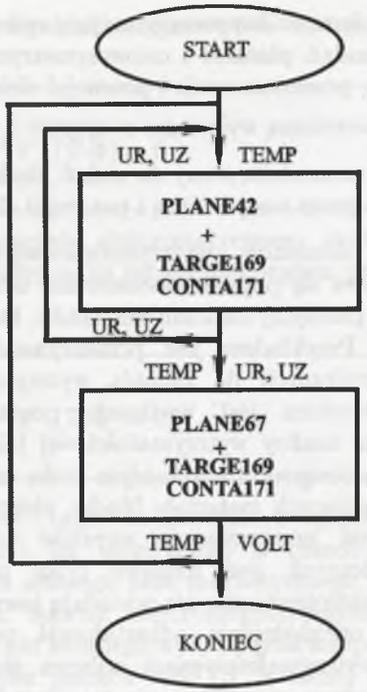
Mimo to kod ANSYS'a ma ograniczone możliwości, tzn. nie pozwala na tak szerokie potraktowanie zagadnienia, jak zaproponowano w rozdziale 4. pracy. Dlatego w przeprowadznych obliczeniach ograniczono się do tych, jakie są dostępne w kodzie ANSYS'a. Bardzo poważnym ograniczeniem jest dostęp do niezbędnych danych fizycznych oraz odpowiedniego sprzętu komputerowego. Pominięte sprzężenia, oznaczone na rys. 5.1 liniami przerywanymi, mają drugorzędne znaczenie i można byłoby je uwzględnić kontynuując obliczenia iteracyjne w drugiej warstwie przybliżenia.



Rys. 5.1. Współzależność zjawisk fizycznych zachodzących podczas zgrzewania oporowego punktowego przyjęta w rozpatrywanym przypadku
Fig. 5.1. Interrelated physical phenomena in resistance spot welding assumed in the considered case

Algorytm przeprowadzonych obliczeń numerycznych przy użyciu pakietu ANSYS przedstawiono na rys. 5.2.

Ze względu na przewidywany zakres symulacji opracowano parametryczne pliki wsadowe, pozwalające na kompleksowe przeprowadzenie analizy. Model numeryczny składa się z dwóch równoległych zadań liczonych przez kod ANSYS oraz wymiany wyników pomiędzy nimi. Budowa modeli numerycznych za pomocą elementów skończonych musi odbywać się w sposób jednoczesny, aby można było prowadzić w danym kroku czasowym równoczesną analizę wytrzymałościową i analizę termiczno-elektryczną, zmieniając każdorazowo i wzajemnie rodzaj analizowanego



Rys. 5.2. Algorytm obliczeń numerycznych
Fig. 5.2. Algorithm of numerical simulation

zadania (mechaniczny i termoelektryczny). Zachowana jest przy tym pozycja węzłów siatki elementów, jak i właściwości samych elementów skończonych.

Geometria. Ze względu na charakter opisywanych zjawisk zdecydowano się na zastosowanie elementów skończonych bazujących na opisie dwuwymiarowym płaskim z uwzględnieniem kołowej symetrii. Wielkości geometryczne, jak i cechy podziału na elementy powiązano ze sobą odpowiednimi zależnościami, tak aby spełnić wymagania wynikające z opisów zastosowanych elementów skończonych.

Podział na elementy skończone wykonano łącząc siatkę elementów wytrzymałościowych z siatką elementów elektrotermicznych na poziomie połączeń udostępnionych przez pakiet ANSYS.

Część wytrzymałościową wykonano w oparciu o elementy:

PLANE42 - element wytrzymałościowy, płaski osiowosymetryczny opisany w węzłach przez przemieszczenia;

TARGE169 - element kontaktowy uwzględniający opis wytrzymałościowy, cieplny i elektryczny do zadań płaskich i osiowosymetrycznych opisany w węzłach przez temperaturę, przemieszczenia i potencjał elektryczny;

CONTA171 - element kontaktowy uwzględniający opis wytrzymałościowy, cieplny i elektryczny do zadań płaskich i osiowosymetrycznych opisany w węzłach przez temperaturę, przemieszczenia i potencjał elektryczny;

natomiast część elektrotermiczną wykonano w oparciu o element:

PLANE67 - element termoelektryczny do zadań płaskich, osiowosymetrycznych opisany w węzłach przez temperaturę i potencjał elektryczny.

Powiązanie siatki elementów wytrzymałościowych z siatką elementów elektrotermicznych odbywa się poprzez zastosowanie udoskonalonego mechanizmu przekazywania wielkości pomiędzy siatkami elementów, które nie posiadają wyraźnie określonych związków. Przykładem jest przekazywanie rozkładu temperatury z elementów elektrotermicznych do zadania wytrzymałościowego. W analizie elektrotermicznej temperatura jest wielkością poszukiwaną i przekazywana jest w każdym kroku do analizy wytrzymałościowej jako wymuszenie termiczne. Dodatkowo uaktualniona temperatura w każdym kroku czasowym powoduje zmianę wielkości fizycznych opisujących materiały blachy, elektrody i samych elementów kontaktowych. Natomiast przekazywanie wyników analizy wytrzymałościowej elementów elektrotermicznych jest możliwe tylko poprzez zmianę kształtu elementów. Elementy elektrotermiczne nie posiadają jawnych wielkości związanych z geometrią, dlatego uwzględnienie odkształcenia poszczególnych elementów zgodnie z wynikami wytrzymałościowymi odbywa się poprzez proces "mesh morphingu", czyli ponownego wygenerowania macierzy kształtu wykorzystującego złożenie położenia początkowego i wyników w poszczególnych krokach czasowych w analizie wytrzymałościowej. Większość programów MES, jak i starsze wersje programu ANSYS nie potrafią zmieniać macierzy kształtu po rozpoczęciu procesu rozwiązywania w czasie. Rozszerzenie możliwości o funkcje "mesh morphingu" umożliwia rozwiązywanie problemów, które nie zostały wcześniej określone przez autorów programów MES, i pozwala użytkownikowi samodzielnie definiować problem poprzez superpozycję modeli MES.

5.3. Układ równań rozwiązywanego modelu procesu zgrzewania oporowego punktowego

Ograniczone możliwości wykonania obliczeń tak złożonego zadania, jakie jawią się z przedstawionej wyżej analizy, oraz bardzo duże wymagania sprzętowe spowodowały, że w praktyce skupiono się na najprostszych przypadkach przedstawionych równań modeli. Oznacza to, że zależnie od rodzaju prądu zgrzewania poprzestano na równaniach zarówno dla dwufazowej strefy przejściowej, jak i dla fazy stałej oraz ciekłej:

- (4.75) - dla potencjału elektrostatycznego Φ w przypadku zgrzewania prądem stałym:

$$\nabla^2\Phi + (\frac{dln\sigma}{dT})\nabla^T T \cdot (\nabla\,\Phi) = 0\,,$$

- (4.115) - dla potencjału elektrostatycznego skutecznego natężenia pola elektrycznego $\tilde{\Phi}$ w przypadku zgrzewania prądem przemiennym:

$$\nabla^2\tilde{\Phi} + (\frac{dln\sigma}{dT})\nabla^T T \cdot (\nabla\,\tilde{\Phi}) = 0,$$

czego konsekwencją jest brak możliwości uwzględnienia wpływu zjawisk mechanicznych (płynięcia) na elektryczne, a przede wszystkim konieczność pominięcia oddziaływania siłowego pola magnetycznego na płynięcie materiałów, tzn. pominięcia wpływu zjawisk elektromagnetycznych na mechaniczne przy jednoczesnym uwzględnieniu istotnego wpływu pola temperatury.

Możliwości obliczeniowe pakietu ANSYS, a raczej ich brak był przyczyną pominięcia w obliczeniach zagadnień transportu materii, poza faktem wykorzystania w obliczeniach założonej nieściśliwości materiałów, tzn. bezźródłowości pola prędkości. Z rozwiązywania dyfuzyjnego przybliżenia transportu składnika stopowego zrezygnowano ze względu na przekonanie, że w obszarze płynięcia materiału (jądro i strefa odkształceń plastycznych) należałoby wcześniej ocenić wpływ transportu adwekcyjnego w stosunku do dyfuzyjnego.

Równania opisujące mechaniczny aspekt procesu zgrzewania (płynięcie materiału w ciekłym jądrze (L), w dwufazowej strefie przejściowej (L+S) oraz w obszarze płynięcia plastycznego (S)) rozwiązywano w okrojonej postaci dla wersji "beztransportowej".

- (4.298) w dwufazowej strefie przejściowej (L+S):

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\nabla^T p + (\frac{\partial \eta}{\partial T})\nabla^T T \cdot [(\nabla^T \boldsymbol{v}) + (\nabla^T \boldsymbol{v})^T] + \eta(T)\,\nabla^2 \boldsymbol{v}\,,$$

dla $\eta(T)$ określonego przez (4.282) wraz z (4.234÷4.235) oraz (4.350),

- (4.304) lub (4.305) w obszarze ciekłego jądra:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_L}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla^T p_L + (\frac{\partial \overline{\nu}_L}{\partial T})\nabla^T T \cdot [(\nabla^T \boldsymbol{v}_L) + (\nabla^T \boldsymbol{v}_L)^T] + \overline{\nu}_L(T)\,\nabla^2 \boldsymbol{v}_L\,,$$

- (4.317) lub (4.320) w obszarze plastycznego płynięcia (S):

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}_S}{\partial t} = -\nabla^T p_S + \nabla \cdot [\tau_{ij}]_S\,,$$

z pominięciem sił oddziaływania pola elektromagnetycznego, z uwagi na przybliżenia dla pola elektrycznego (4.75) i (4.115). Oznacza to uwzględnienie wyłącznie naprężeń i płynięcia pod działaniem nacisku elektrod w materiale, którego własności kształtują się pod wpływem lokalnego pola temperatury.

Wreszcie najważniejsze dla opisu procesu zgrzewania, równanie opisujące homogeniczne pole temperatury w dwufazowej strefie przejściowej odpowiadające płynięciu "beztransportowemu":

- (4.381) - dla zgrzewania prądem stałym:

$$\rho\, c_e(T)\frac{\partial T}{\partial t} - \nabla^2 T - \nabla^T \lambda(T) \cdot \nabla^T T = \sigma(T)(\nabla\Phi)^2\,,$$

- (4.386) - dla zgrzewania prądem przemiennym o niskiej częstotliwości:

$$\rho\, c_e(T)\frac{\partial T}{\partial t} - \nabla^2 T - \nabla^T \lambda(T) \cdot \nabla^T T = \sigma(T)(\nabla\tilde{\Phi})^2\,,$$

uwzględniające przemiany fazowe, ale pomijające zjawiska mechaniczne (płynięcie oraz pracę odkształcenia materiału).

I dalej, odpowiednie równania w przybliżeniu "beztransportowym" dla fazy stałej:

- (4.383) - dla zgrzewania prądem stałym:

$$\rho\, c_{vS}(T)\frac{\partial T}{\partial t} - \nabla^2 T - \nabla^T \lambda_S(T) \cdot \nabla^T T = \sigma_S(T)(\nabla\Phi)^2\,,$$

- (4.388) - dla zgrzewania prądem przemiennym o niskiej częstotliwości:

$$\rho\, c_{vS}(T)\frac{\partial T}{\partial t} - \nabla^2 T - \nabla^T \lambda_S(T) \cdot \nabla^T T = \sigma_S(T)(\nabla\tilde{\Phi})^2\,,$$

oraz fazy ciekłej:

- (4.385) - dla zgrzewania prądem stałym:

$$\rho\, c_{vL}(T)\frac{\partial T}{\partial t} - \nabla^2 T - \nabla^T \lambda_L(T) \cdot \nabla^T T = \sigma_L(T)(\nabla\Phi)^2\,,$$

- (4.390) - dla zgrzewania prądem przemiennym o niskiej częstotliwości:

$$\rho\, c_{vL}(T)\frac{\partial T}{\partial t} - \nabla^2 T - \nabla^T \lambda_L(T) \cdot \nabla^T T = \sigma_L(T)(\nabla\tilde{\Phi})^2\,.$$

5.4. Warunki brzegowe rozwiązywanego modelu

Postawiono je przy następujących założeniach:

- zadanie jest osiowosymetryczne,
- nie oddziałuje zewnętrzne pole magnetyczne,
- na powierzchni stożkowej Ω_1 elektrody ruchomej **e1** zadano średnią gęstość powierzchniową prądu zasilania I,
- na powierzchni stożkowej Ω_2 elektrody nieruchomej **e2** skalibrowano potencjał elektrostatyczny, przyjmując jego wartość ($\Phi = 0$),
- powierzchnie boczne elektrod, z wyjątkiem kontaktu powierzchni roboczej Ω_7 ze zgrzewanym materiałem, są izolowane elektrycznie,
- powierzchnie brzegowe zgrzewanych elementów, z wyjątkiem powierzchni kontaktów Ω_7, Ω_8', Ω_9, są izolowane elektrycznie,
- siła docisku F_z elektrody ruchomej **e1** jest przekazywana za pośrednictwem zgrzewanych elementów, powodując przeciwnie skierowaną reakcję $-F_z$ ze strony elektrody nieruchomej,
- pominięto wpływ ciśnienia cieczy chłodzącej p_w w wewnętrznych kanałach elektrod ograniczonych powierzchniami Ω_3', Ω_3, przyjmując $p_w \approx p_o$ (p_o - ciśnienie otaczającego powietrza atmosferycznego), jak to ma miejsce na powierzchniach Ω_4' i Ω_4,
- powierzchnie boczne Ω_1, Ω_2, Ω_5', Ω_5, Ω_6 i Ω_8' są adiabatyczne,

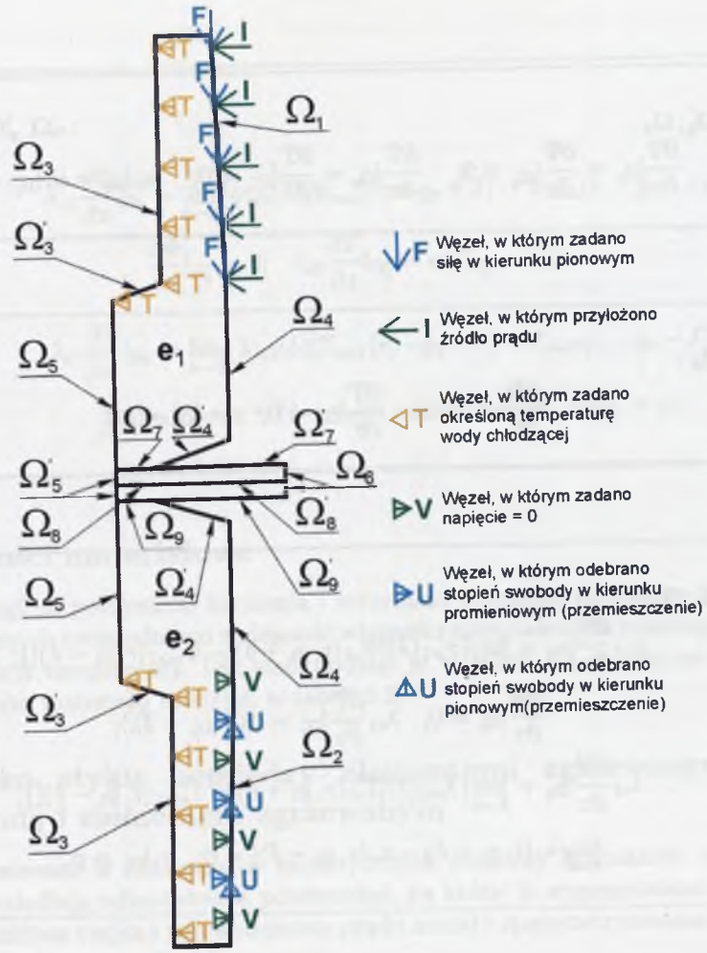
- powierzchnie boczne Ω_3' i Ω_3 kanałów chłodzących elektrody mają temperaturę T_w równą średniej temperaturze cieczy chłodzącej,
- między powierzchniami Ω_4', Ω_4, Ω_7' i Ω_9' a otaczającym powietrzem, o średniej temperaturze T_o, zachodzi konwekcyjna wymiana ciepła,
- na powierzchniach kontaktów Ω_7, Ω_8, Ω_9 (elektryczny, mechaniczny i cieplny), ze względu na nieciągłość funkcji opisujących, przyjęto model styków zaimplementowany w pakiecie ANSYS (podrozdz. 5.4.).

Warunki brzegowe dla potencjału skalarnego pola elektrycznego, wielkości mechanicznych oraz temperatury przedstawiono na rys. 5.4÷5.6. Poniżej zapisano je w odniesieniu do wyróżnionych powierzchni zewnętrznych $\Omega_1 \div \Omega_9$, zaznaczonych na rys 5.3. Mają one następującą postać:

$$\Omega_1: \quad \sigma_1 \frac{\partial \Phi}{\partial n}|_{\Omega_1} = \frac{I}{|\Omega_1|}; \quad \frac{\partial T}{\partial n}|_{\Omega_1} = 0; \quad \sigma_z|_{\Omega_1} = \frac{F_z}{|\Omega_1|}; \tag{5.1}$$

$$\Omega_2: \quad \Phi|_{\Omega_2} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial n}|_{\Omega_2} = 0; \quad \sigma_z|_{\Omega_2} = \frac{-F_z}{|\Omega_2|}; \tag{5.2}$$

$$\Omega_3', \Omega_3: \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n}|_{\Omega_3'} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}|_{\Omega_3} = 0; \quad T|_{\Omega_3'} = T|_{\Omega_3} = T_w; \quad \sigma_n|_{\Omega_3'} = \sigma_r|_{\Omega_3} = p_w \approx p_o; \tag{5.3}$$



Rys. 5.3. Oznaczenia brzegów przyjęte w obliczeniach numerycznych procesu zgrzewania oporowego punktowego i zadane obciążenia

Fig. 5.3. Boundary designation for numerical calculations of the resistance spot welding process and applied loading

$$\Omega_4', \Omega_4: \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n}|_{\Omega_4'} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}|_{\Omega_4} = 0; \quad \lambda_e \frac{\partial T}{\partial n}|_{\Omega_4'} = \alpha(T|_{\Omega_4'} - T_0); \quad \lambda_e \frac{\partial T}{\partial r}|_{\Omega_4} = \alpha(T|_{\Omega_4} - T_0); \quad \sigma_n|_{\Omega_4'} = \sigma_r|_{\Omega_4} = p_o; \tag{5.4}$$

$$\Omega_5', \Omega_5: \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r}|_{\Omega_5} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}|_{\Omega_5'} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial r}|_{\Omega_5} = \frac{\partial T}{\partial r}|_{\Omega_5'} = 0; \quad u_r|_{\Omega_5} = u_r|_{\Omega_5'} = 0; \tag{5.5}$$

$$\Omega_6: \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r}|_{\Omega_6} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial r}|_{\Omega_6} = 0; \quad \sigma_r|_{\Omega_6} = p_o; \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned} &\Omega_7', \Omega_7: \\ &\sigma_{e1}\frac{\partial \Phi}{\partial z}|_{\Omega_7} = \lim_{\delta\to 0}\{\sigma_{st1}(\delta)[\Phi_{e1}(r, g_1+\delta) - \Phi_{mz1}(r, g_1-\delta)]\}; \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial z}|_{\Omega_7'} = 0; \quad \lambda_{e1}\frac{\partial T}{\partial z}|_{\Omega_7'} = \alpha(T|_{\Omega_7'} - T_0); \\ &\lambda_{e1}\frac{\partial T}{\partial z}|_{\Omega_7} = \lim_{\delta\to 0}\{\lambda_{st1}(\delta)[T_{e1}(r, g_1+\delta) - T_{mz1}(r, g_1-\delta)]\}; \\ &\lim_{\delta\to 0}[u_z(r, g_1+\delta) - u_z(r, g_1-\delta)] = 0; \quad \sigma_z|_{\Omega_7'} = p_o \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned} &\Omega_8', \Omega_8: \\ &\sigma_{mz1}\frac{\partial \Phi}{\partial z}|_{\Omega_8'} = \lim_{\delta\to 0}\{\sigma_{st2}(\delta)[\Phi_{mz1}(r, 0+\delta) - \Phi_{mz2}(r, 0-\delta)]\}; \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial z}|_{\Omega_8} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial z}|_{\Omega_8} = 0; \\ &\lambda_{mz1}\frac{\partial T}{\partial z}|_{\Omega_8} = \lim_{\delta\to 0}\{\lambda_{st2}(\delta)[T_{mz1}(r, g_1+\delta) - T_{mz2}(r, g_1-\delta)]\}; \\ &\lim_{\delta\to 0}[u_z(r, \delta) - u_z(r, -\delta)] = 0; \quad \sigma_z|_{\Omega_8'} = p_o \end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned} &\Omega_9', \Omega_9: \\ &\sigma_{e2}\frac{\partial \Phi}{\partial z}|_{\Omega_9} = \lim_{\delta\to 0}\{\sigma_{st3}(\delta)[\Phi_{mz1}(r, -g_3+\delta) - \Phi_{mz2}(r, -g_3-\delta)]\} \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial z}|_{\Omega_9'} = 0; \quad \lambda_{e2}\frac{\partial T}{\partial z}|_{\Omega_9'} = \alpha(T_{\Omega_9'} - T_o); \\ &\lambda_{e2}\frac{\partial T}{\partial z}|_{\Omega_9} = \lim_{\delta\to 0}\{\lambda_{st3}(\delta)[T_{mz1}(r, -g_3+\delta) - T_{mz2}(r, -g_3-\delta)]\} \\ &\lim_{\delta\to 0}[u_z(r, -g_3+\delta) - u_z(r, -g_3-\delta)] = 0; \quad \sigma_z|_{\Omega_9'} = p_o \end{aligned} \tag{5.9}$$

Własności materiałowe

Z uwagi na poczynione założenia i otrzymane równania modeli, w obliczeniach numerycznych uwzględniono zmienność własności materiałowych poszczególnych pól jako funkcji temperatury. Dla stali podano je w tabeli 5.1, natomiast dla stopu miedzi, jako materiału elektrod, w tabeli 5.2.

Zjawisko styku pomiędzy elementami zgrzewanymi oraz elektrodą i elementem zgrzewanym

Zastosowane w obliczeniach numerycznych elementy kontaktowe są podatne i odzwierciedlają odkształcenia powierzchni, na której je wygenerowano. Równania przewodnictwa ciepła i przewodnictwa prądu zostały sparametryzowane za pomocą stanu kontaktu pomiędzy elementami.

Zastosowane w symulacji elementy kontaktowe pełnią funkcję powiązania obszarów elektrod oraz blach zgrzewanych. Ze względu na możliwości uzależnienia przewodności cieplnej i elektrycznej od temperatury i stanu kontaktu (elementy w kontakcie lub rozłączone) zastosowano tabele przewodności elektrycznej i przewodności cieplnej dla warstwy kontaktowej. Dodatkowo skorzystano z możliwości generacji ciepła Joule'a w samych elementach kontaktowych.

Elementy te pozwalają uniknąć identyfikacji, które elementy kontaktowe są w danej chwili (aktualnie) w kontakcie. Przewodzenie elektryczne i cieplne kontaktu jest uzależnione od stanu, w jakim są poszczególne elementy, jak i temperatury na powierzchni kontaktu. Odpowiednie funkcje opisujące te zależności wprowadza się do programu za pośrednictwem tabel wielkości charakterystycznych. Stosowanie wielu wielkości uzależnionych od temperatury, stanu kontaktu i ciśnienia w samym kontakcie powoduje konieczność uwzględniania tych zmian na każdym

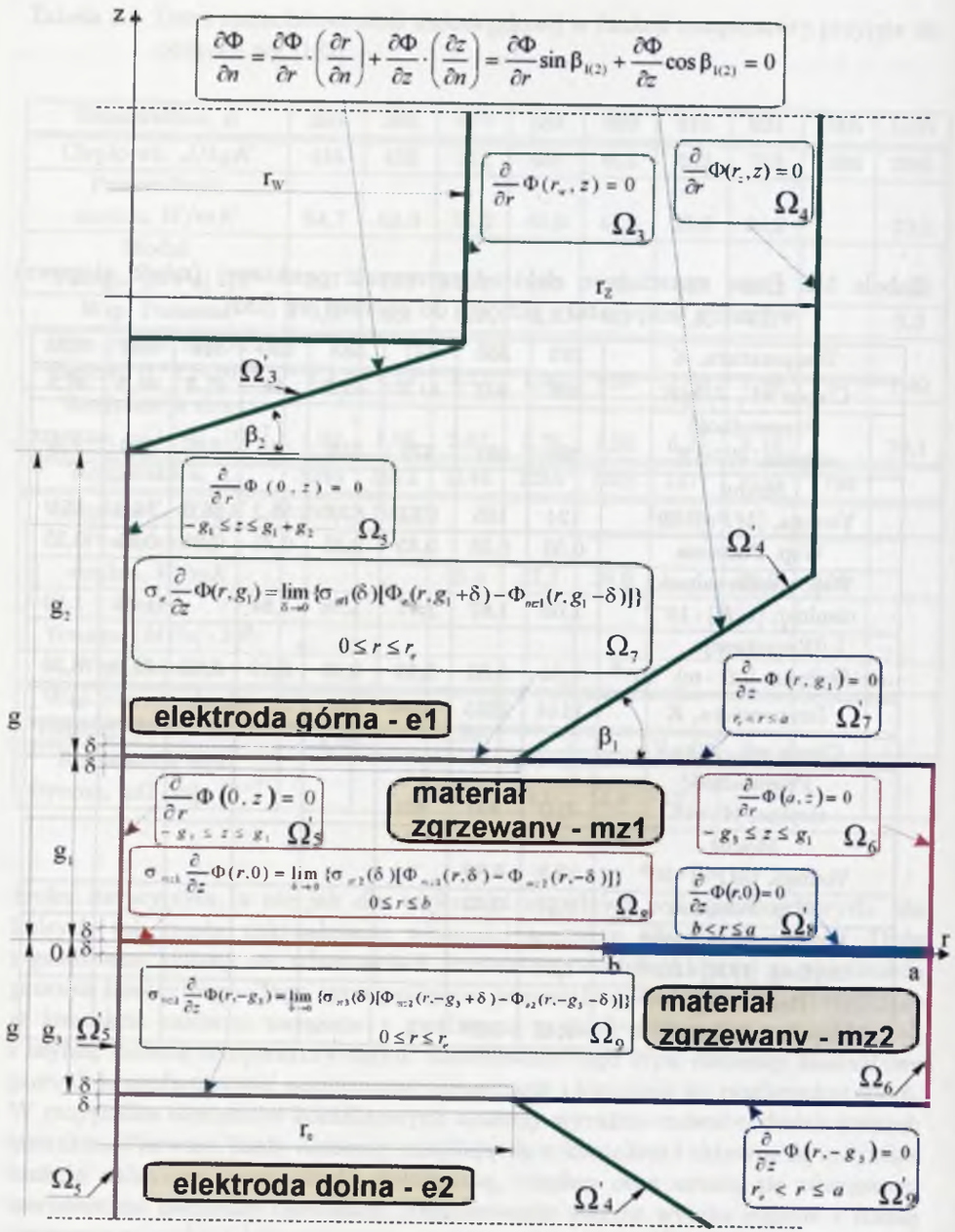
Tabela 5.1. Dane materiałowe stali niskowęglowej w funkcji temperatury przyjęte do obliczeń wg [182]

Temperatura, K	293	366	477	588	699	810	921	1005	1033
Ciepło wł., J/kgK	444	453	511	561	612	662	763	1006	2388
Przewodność cieplna, W/mK	64,7	63,3	55,3	49,9	44,9	39,8	34,9		30,5
Moduł Younga, $[MPa] \cdot 10^3$	207	197	194	186	169	117	55,2		6,89
Wsp. Poissona	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3		0,3
Wsp. rozszerzalności cieplnej, $[1/K] \cdot 10^{-5}$	1,1	1,15	1,22	1,30	1,35	1,40	1,46		1,40
Rezystancja elektryczna, $[\mu\Omega \cdot m] \cdot 10^{-7}$	1,42	1,86	2,67	3,76	4,95	6,48	8,18		10,1
Temperatura, K	1046	1072	1144	1255	1356	1477	1755	1794	
Ciepło wł., J/kgK	1006	1093				1190			
Przewodność cieplna, W/mK			28,4	27,7	28,6		29,0	100	
Moduł Younga, $[MPa] \cdot 10^3$								0,1	
Wsp. Poissona								0,48	
Wsp. rozszerzalności cieplnej, $[1/K] \cdot 10^{-5}$			1,35						
Rezystancja elektryczna, $[\mu\Omega \cdot m] \cdot 10^{-7}$			11,2	11,6	11,8	12,1			

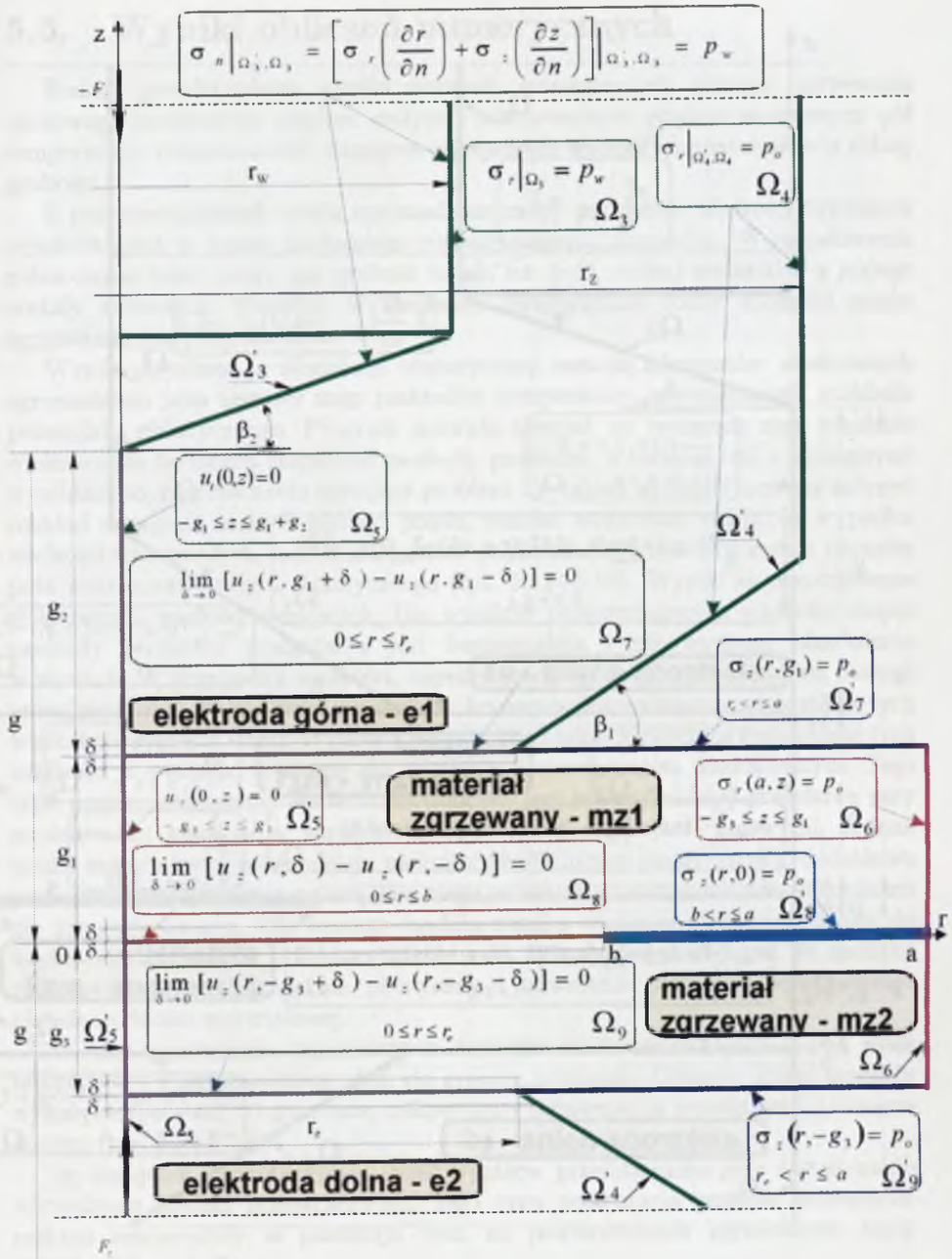
kroku iteracyjnym, a nie jak dla większości zagadnień wytrzymałościowych, dla których tak częste uaktualnianie własności kontaktu nie jest konieczne. Duże i gwałtowne zmiany we własnościach kontaktu powodują kłopoty ze zbieżnością procesu iteracyjnego. Tego typu podejście pozwalało opisać zjawiska występujące w kontakcie zarówno związane z gwałtowną zmianą sztywności materiału, jak i szybką zmianą temperatury styku. Zastosowane tego typu elementy kontaktowe pozwalają zaobserwować samoczynne rozszerzanie i kurczenie się powierzchni styku. W przypadku elementów kontaktowych możemy wyraźnie mówić o dwóch stanach kontaktu. Pierwszy, kiedy elementy znajdują się w kontakcie i aktywne są wszystkie funkcje opisujące przewodność elektryczną, cieplną oraz ustala się równowaga mechaniczna pomiędzy ośrodkami. Zróżnicowanie stanów wynika jedynie z różnej temperatury styku i jednostkowego nacisku w kontakcie. W drugim stanie mamy do czynienia z kontaktem otwartym, kiedy nie zachodzi przepływ prądu. W opisie mechanicznym występuje powierzchnia swobodna.

Tabela 5.2. Dane materiałowe elektrod zgrzewarki punktowej (miedź stopowa) w funkcji temperatury przyjęte do obliczeń wg [182]

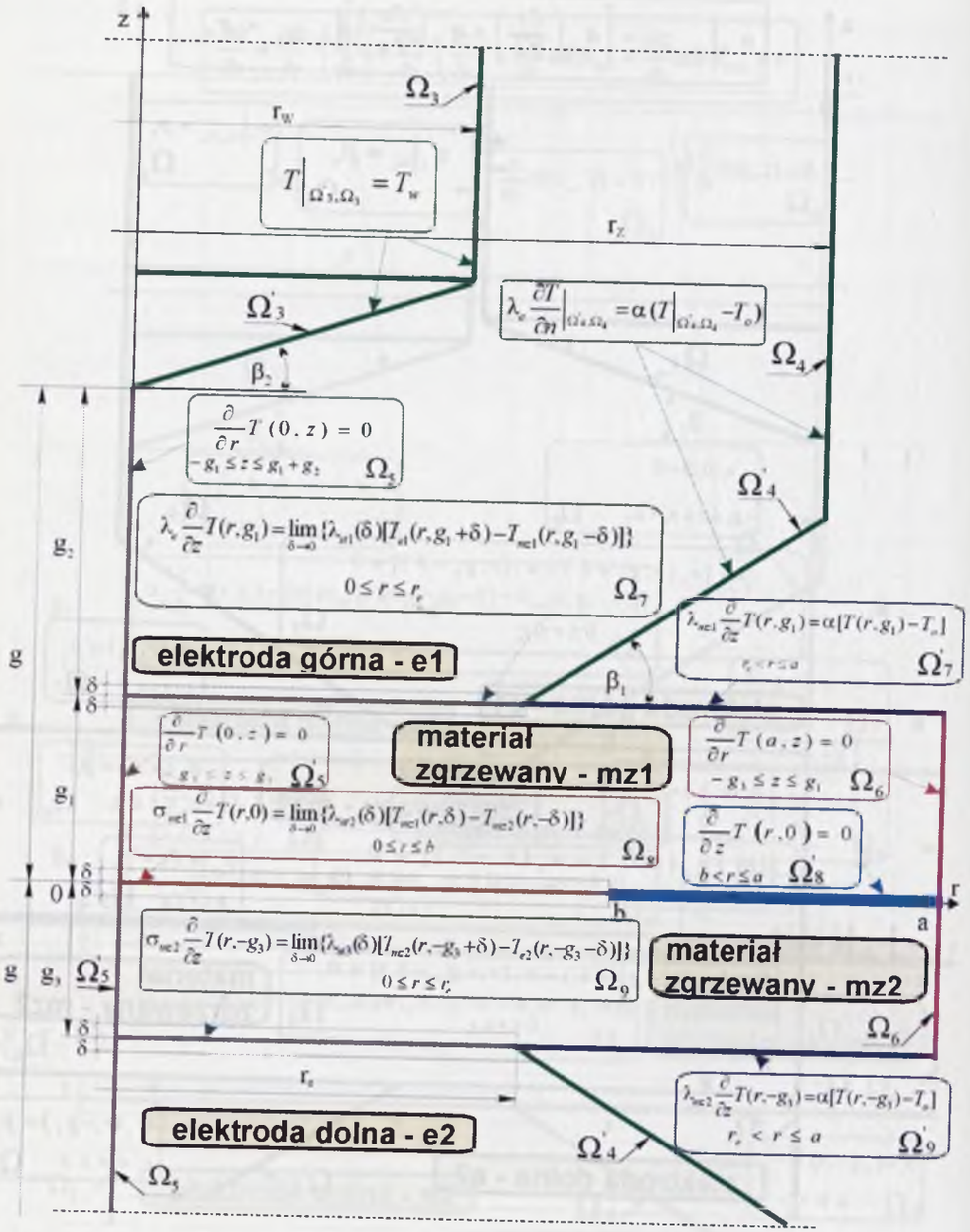
Temperatura, K	293	366	477	588	699	810	922	1033
Ciepło wł., J/kgK	398	402	41,9	43,2	44	45,3	46,5	47,8
Przewodność cieplna, W/mK	390	381	370	355	345	335	320	316
Moduł Younga, $[MPa] \cdot 10^3$	124	105	93,1	82,7	55,2	38,6	24,8	15,9
Wsp. Poissona	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35
Wsp. rozszerzalności cieplnej, $[1/K] \cdot 10^{-5}$	1,66	1,67	1,71	1,78	1,84		1,85	1,89
Rezystancja elektryczna, $[\mu\Omega \cdot m] \cdot 10^{-8}$	2,64	3,00	3,99	5,05	6,19	6,98	8,00	8,98
Temperatura, K	1144	1255	1356	1477				
Ciepło wł., J/kgK				50,3				
Przewodność cieplna, W/mK	310	305	301					
Moduł Younga, $[MPa] \cdot 10^3$	13,8	6,89						
Wsp. Poissona	0,35	0,35						
Wsp. rozszerzalności cieplnej, $[1/K] \cdot 10^{-5}$	1,93							
Rezystancja elektryczna, $[\mu\Omega \cdot m] \cdot 10^{-8}$	9,48	9,98						



Rys. 5.4. Warunki brzegowe dla potencjału skalarnego pola elektrycznego
Fig. 5.4. Boundary conditions for the potential of the electric scalar field



Rys. 5.5. Warunki brzegowe dla pola prędkości i przemieszczeń
Fig. 5.5. Boundary conditions for the velocity and displacements



Rys. 5.6. Warunki brzegowe dla pola temperatury
Fig. 5.6. Boundary conditions for the temperature field

5.5. Wyniki obliczeń numerycznych

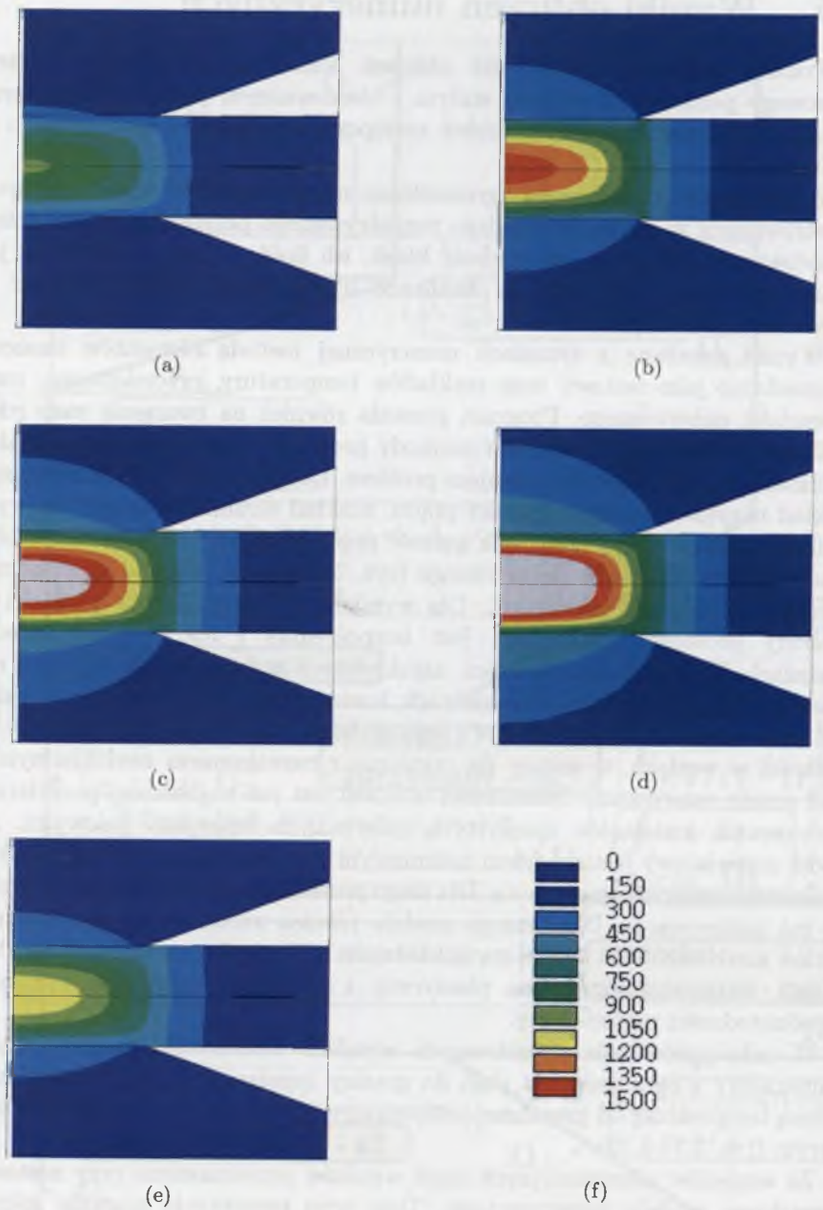
Poniżej przedstawiono wyniki obliczeń numerycznych procesu zgrzewania oporowego punktowego prądem stałym i równoważnym prądem skutecznym pól temperatury, przemieszczeń, naprężeń zastępczych wybranych materiałów o różnej grubości.

Z przeprowadzonych analiz zgromadzono mapy rozkładów wielkości fizycznych rejestrowanych w czasie dla każdego rozpatrywanego przypadku. W modelowaniu różnicowano takie cechy, jak grubość blach, ich ilość, rodzaj materiału, z jakiego zostały wykonane. Ponadto, w analizach uwzględniano różne wielkości prądu zgrzewania, jak i siły docisku.

Wyniki uzyskane z symulacji numerycznej metodą elementów skończonych zgromadzono jako zestawy map rozkładów temperatury, przemieszczeń, rozkładu potencjału elektrycznego. Program pozwala również na tworzenie map rozkładu wielkości nie będących stopniami swobody problemu, a związanymi z uzyskanymi wynikami poprzez równania opisujące problem. Do takich wielkości możemy zaliczyć rozkład naprężeń, rozkład gęstości prądu, rozkład strumienia ciepła. W wypadku wielkości wektorowych, takich jak gęstość prądu możliwe było stworzenie obrazów pola wektorowego prądu elektrycznego (rys. 5.12÷5.13). Wyniki są prezentowane w konwencji wartości węzłowych. Dla wyników reprezentujących wielkości stopni swobody problemu prezentacja jest bezpośrednia i nie wymaga uśredniania w węzłach. W przypadku wielkości, uzyskiwanych w wyniku przekształceń równań opisujących związki lokalne w elementach, konieczne jest wykonanie uśrednienia tych wielkości w węzłach siatki. Wynika z tego, że jeżeli istnieje znacząca rozbieżność tych wielkości w węzłach, to mamy do czynienia z rozwiązaniem niedokładnym. Tego typu proste oszacowanie dokładności obliczeń jest jak najbardziej prawdziwe przy modelowaniu materiałów sprężystych opisywanych funkcjami liniowymi. Jednak model materiałowy jest modelem nieliniowym (biliniowa plastyczność), dodatkowo parametryzowanym temperaturą. Dla niego proste oszacowanie dokładności obliczeń nie ma zastosowania. Dla naszego modelu różnica wielkości ekstrapolowanych do węzłów siatki nie może być miarą dokładności wykonywanych obliczeń. W dodatku zmiana stanu sprężystego na plastyczny i odwrotnie powoduje wprowadzenie niejednorodności materiałowej.

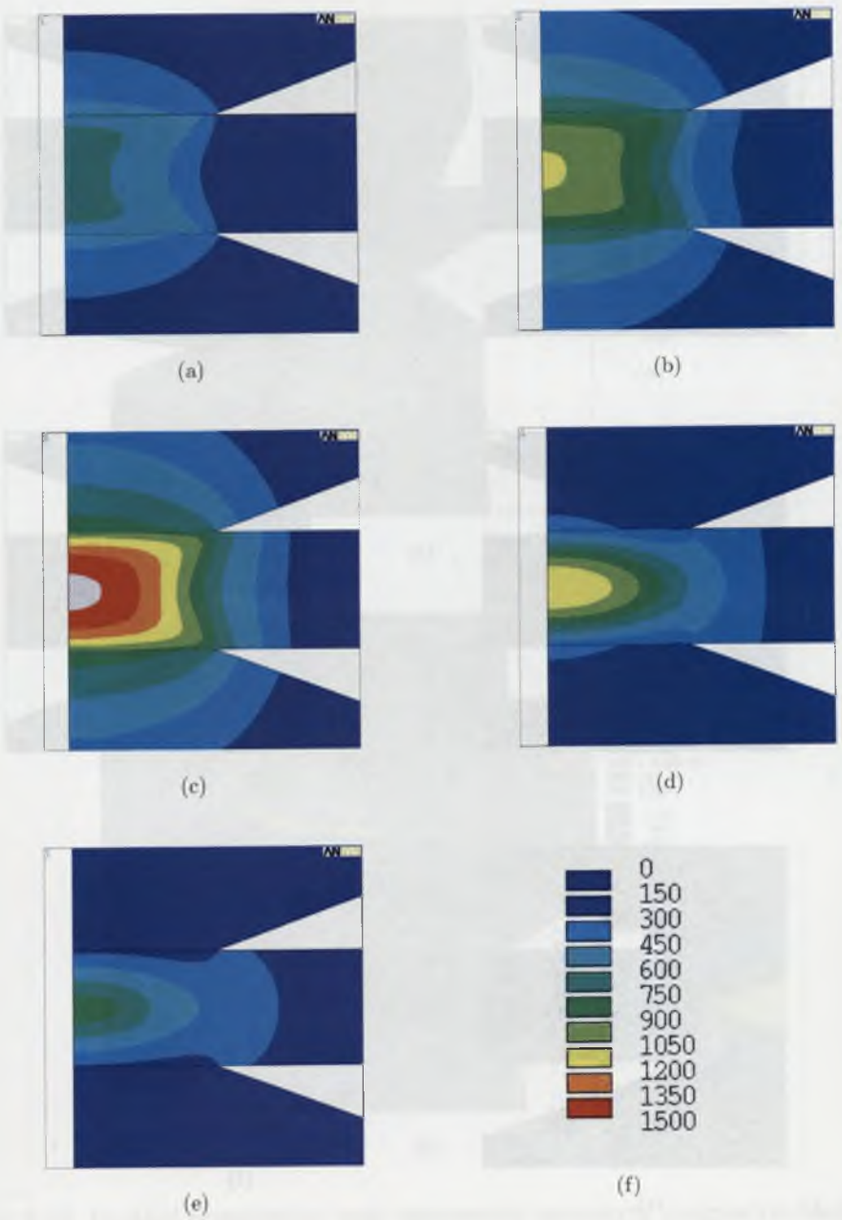
W celu porównania uzyskiwanych wyników zastosowano ujednoliconą skalę temperatury z ograniczeniem skali do granicy topnienia. Obszary, które uzyskały wyższą temperaturę od granicznej temperatury topnienia, są przedstawione kolorem szarym (rys. 5.7÷5.10).

Ze względów prezentacyjnych część wyników przedstawiono przy zastosowaniu wirtualnego modelu przestrzennego. Tego typu prezentacja pozwala zobrazować rozkład temperatury w przekroju oraz na powierzchniach zgrzewanych blach i elektrod (rys. 5.10).



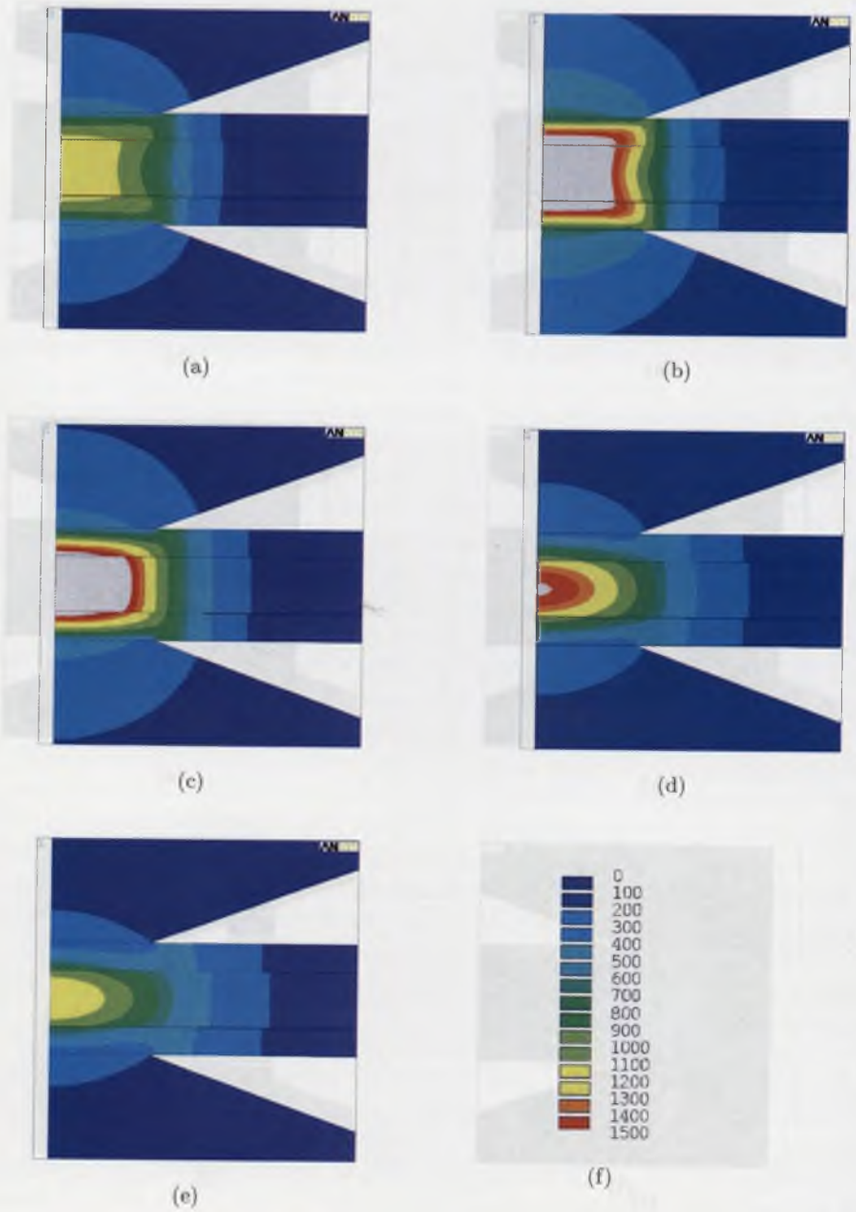
Rys. 5.7. Rozkład temperatury przy zgrzewaniu oporowym punktowym blach ze stali 08X o grubości 1+1 mm, w chwili czasowej: a) 260 ms, b) 360 ms, c) 410 ms, d) 460 ms, e) 510 ms, f) skala temperatury

Fig. 5.7. Distribution of temperature in the resistance spot welding of 08X steel sheets 1+1 mm thick, at the moment: a) 260 ms, b) 360 ms, c) 410 ms, d) 460 ms, e) 510 ms, f) temperature scale



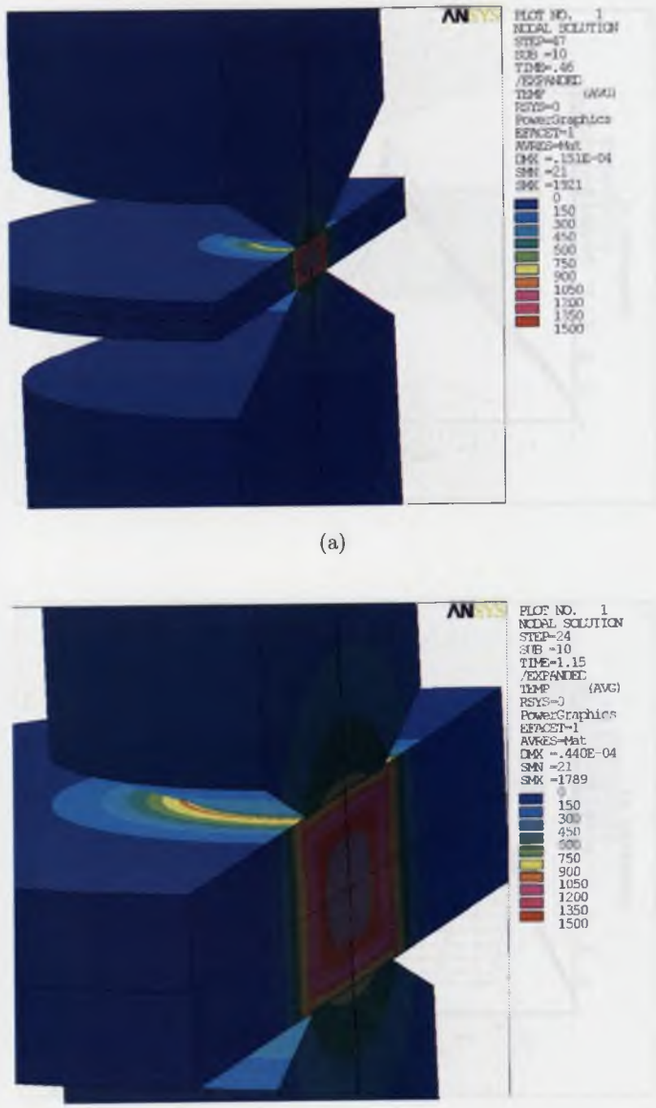
Rys. 5.8. Rozkład temperatury przy nagrzewaniu oporowym blachy ze stali 08X o grubości 2 mm w wybranych chwilach czasowych: a) 60 ms, b) 110 ms, c) 160 ms, d) 260 ms, e) 310 ms, f) skala temperatury

Fig. 5.8. Distribution of temperature during resistance heating of one 08X steel sheet 2 mm thick at the moment: a) 60 ms, b) 110 ms, c) 160 ms, d) 260 ms, e) 310 ms, f) temperature scale



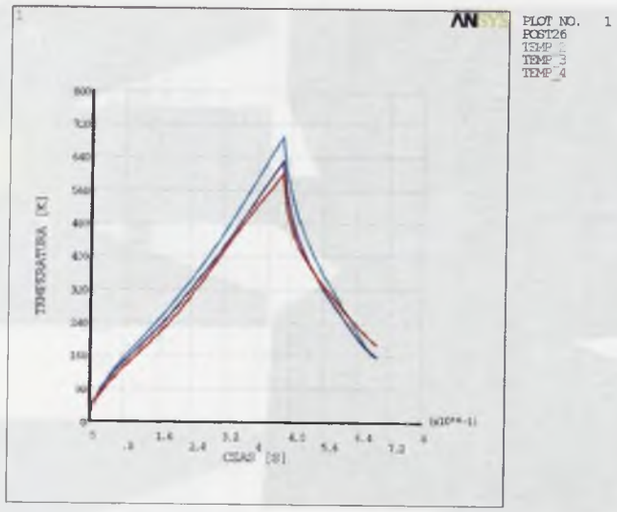
Rys. 5.9. Rozkład temperatury przy zgrzewaniu oporowym punktowym trzech blach ze stali 08X o grubości 1+2+1 mm w chwili: a) 0,3 s, b) 0,4 s, c) 0,5 s, d) 0,7 s, e) 0,8 s, f) skala temperatury

Fig. 5.9. Distribution of temperature in resistance spot welding of three 08X steel sheets 1+2+1 mm thick, at the moment: a) 0,3 s, b) 0,4 s, c) 0,5 s, d) 0,7 s, e) 0,8 s, f) temperature scale

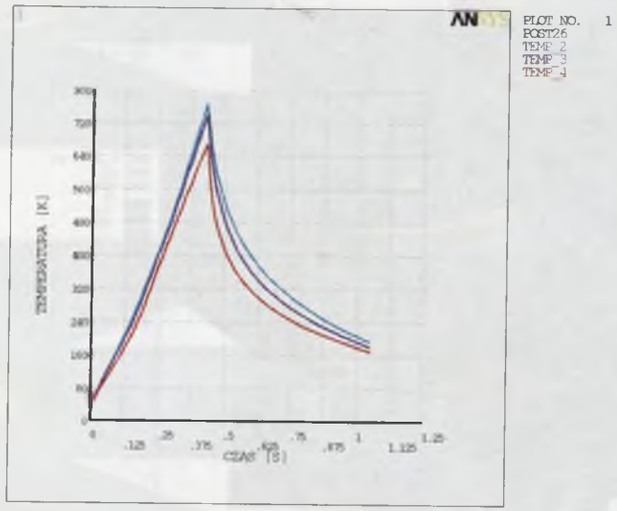


Rys. 5.10. Rozkład temperatury przy zgrzewaniu oporowym punktowym blach ze stali 08X: a) o grubości 1+1 mm w chwili 0,46 s, b) o grubości 5+5 mm w chwili 1,15 s

Fig. 5.10. Distribution of temperature in resistance spot welding of 08X steel sheets: a) 1+1 mm thick, at the moment 0.46 s, b) 5+5 mm thick, at the moment 1.15 s



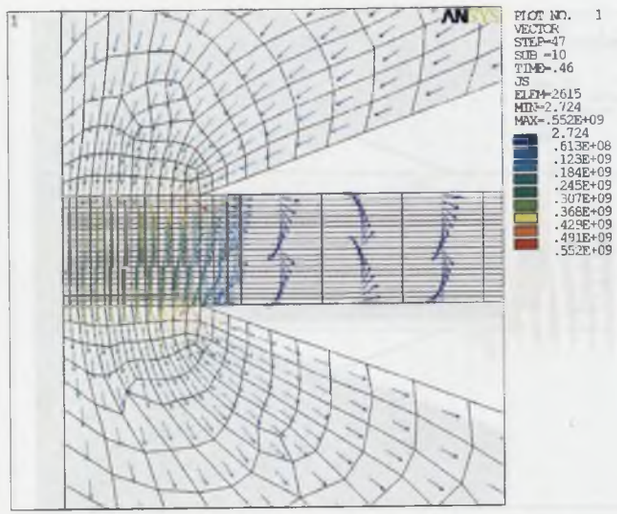
(a)



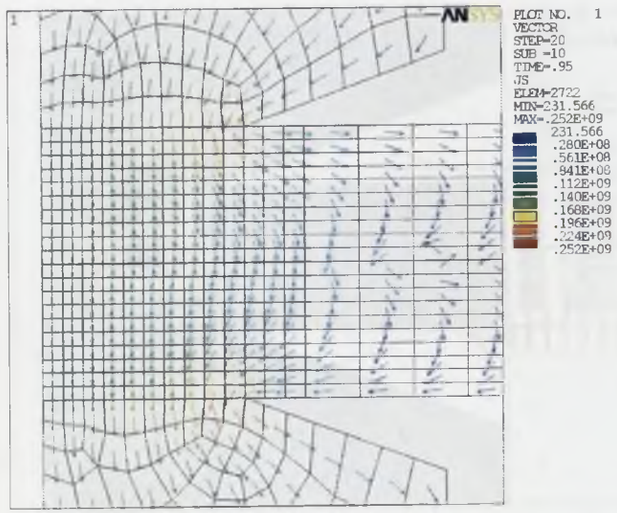
(b)

Rys. 5.11. Przebieg cyklu cieplnego w styku elektrody z materiałem zgrzewanym przy zgrzewaniu oporowym punktowym blach ze stali 08X: a) o grubości 1+1 mm, b) o grubości 5+5 mm

Fig. 5.11. Time history of temperature at the contact between electrode and welded sheet during resistance spot welding of 08X steel sheets: a) 1+1 mm thick, b) 5+5 mm thick



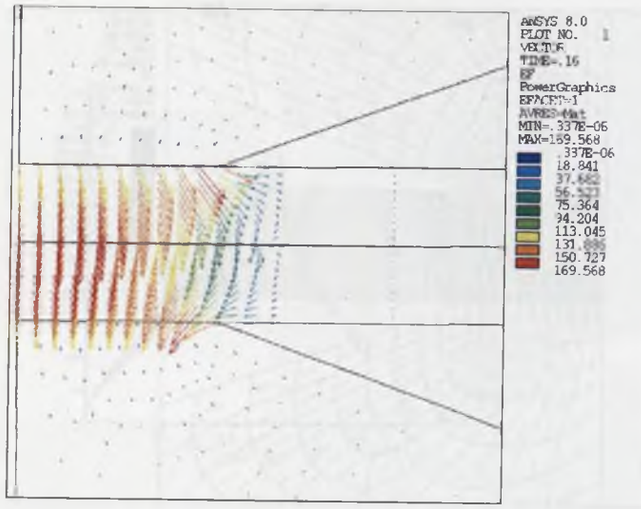
(a)



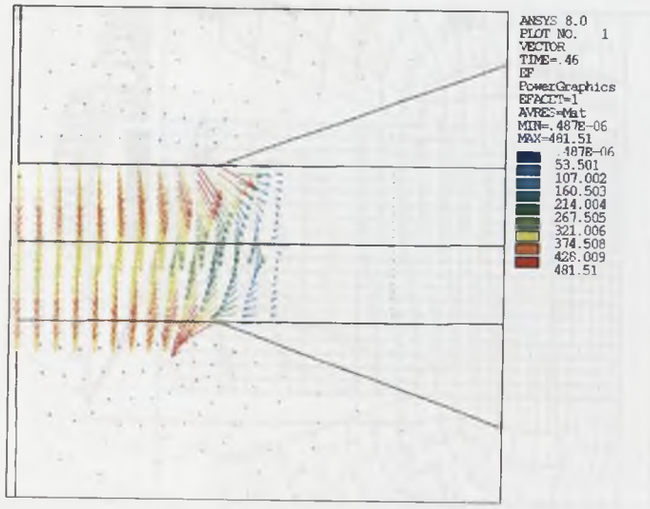
(b)

Rys. 5.12. Rozkład gęstości prądu przy zgrzewaniu oporowym punktowym blach ze stali 08X: a) o grubości 1+1 mm w chwili 0,46 s, b) o grubości 5+5 mm w chwili 0,95 s

Fig. 5.12. Distribution of the current density in resistance spot welding of 08X steel sheets: a) 1+1 mm thick, at the moment 0.46 s, b) 5+5 mm thick, at the moment 0.95 s



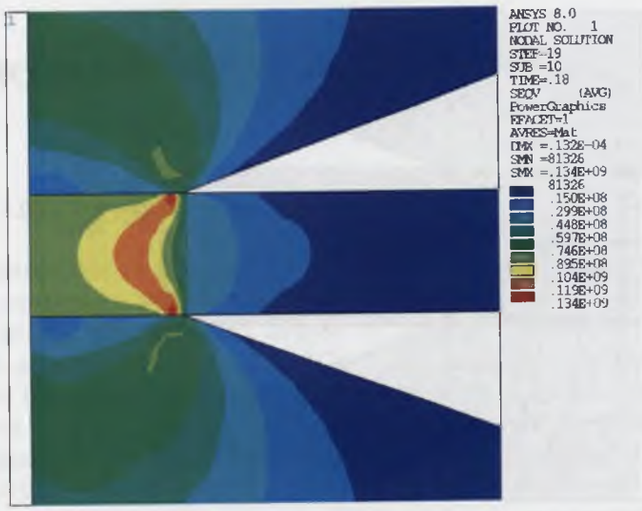
(a)



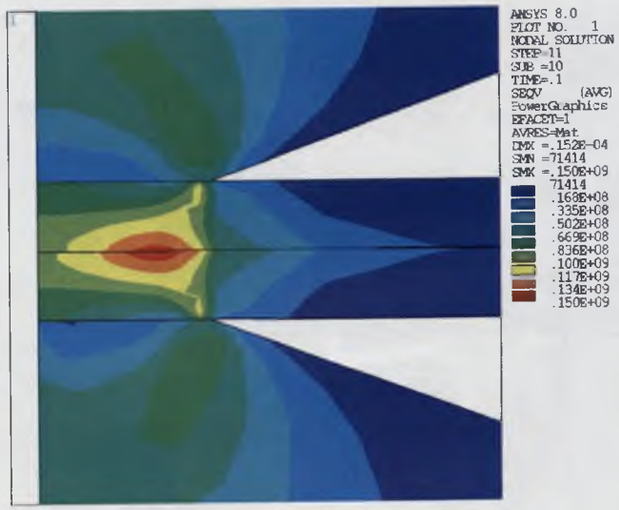
(b)

Rys. 5.13. Reprezentacja wektorowa pola elektrycznego przy zgrzewaniu oporowym punktowym blach ze stali 08X o grubości 1+1 mm : a) w chwili 0,16 s, b) w chwili 0,46 s

Fig. 5.13. Vector representation of the electric field in resistance spot welding of 08X steel sheets 1+1 mm thick: a) at the moment 0.16 s, b) at the moment 0.46 s



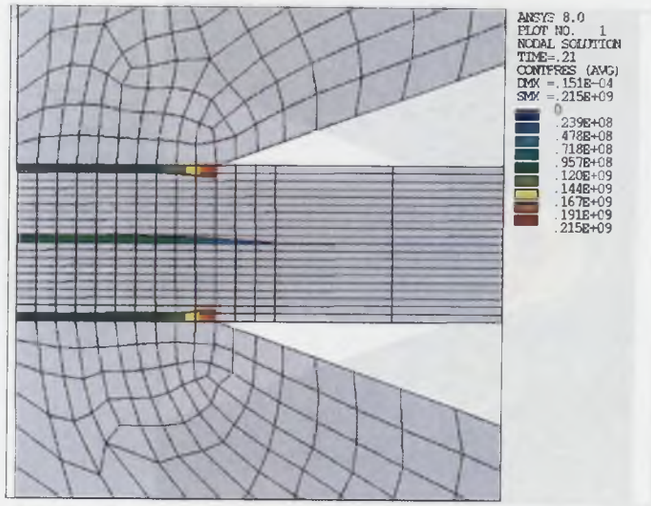
(a)



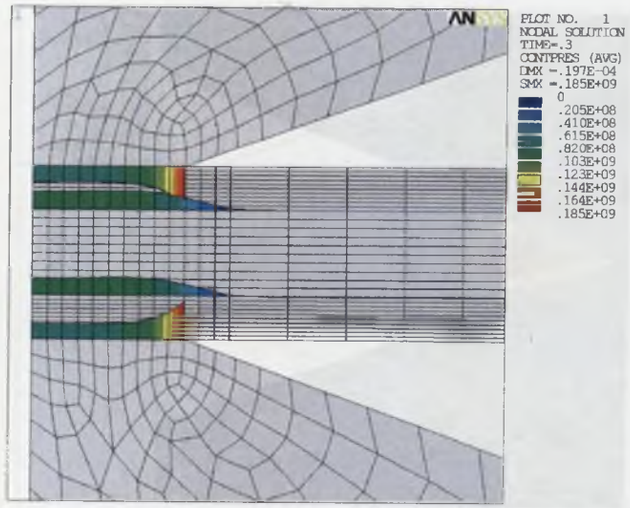
(b)

Rys. 5.14. Wyniki obliczeń numerycznych rozkładu naprężeń zastępczych HMH w różnych chwilach czasowych przy zgrzewaniu elementów ze stali 08X o grubości: a) 1x2 mm, b) 1+1 mm

Fig. 5.14. Results of numerical calculations of the distribution of reduced HMH stresses in the resistance spot welding of 08X steel sheets: a) 1x2 mm, b) 1+1 mm



(a)



(b)

Rys. 5.15. Rozkład nacisków jednostkowych w kontakcie przy zgrzewaniu oporowym punktowym w wybranych chwilach czasowych, blach ze stali 08X o grubości: a) 1+1 mm, b) 1+2+1 mm

Fig. 5.15. Distribution of unit pressure at the contact of the electrodes with the welded material and between the welded material itself: a) resistance spot welding of 08X steel sheets 1+1 mm thick, b) 1+2+1 mm thick

6. Badania doświadczalne

6.1. Stanowiska badawcze

Próby zgrzewania oporowego punktowego oraz badania termograficzne przy zgrzewaniu punktowym przeprowadzono na stanowisku wyposażonym w zgrzewarkę punktową prądu przemiennego ZPa-80 z mikroprocesorowym sterownikiem MUS-1521E, zgrzewarkę prądu stałego ZGa-160 i mikroprocesorowy przyrząd Pp-11 do pomiarów i rejestracji parametrów zgrzewania, rys. 6.1. Pomiary termograficzne wykonano za pomocą urządzenia INFRAMETRICS 760. W celu porównania wyników rejestracji i pomiarów temperatur za pomocą kamery termograficznej z rzeczywistymi temperaturami obszarów charakterystycznych dla procesu zgrzewania oporowego punktowego, w kilku punktach zamocowano termopary Ni-NiCr.

Rys. 6.1. Stanowisko badawcze

Fig. 6.1. A view of the test stand

Urządzenie termograficzne INFRAMETRICS 760 i jego oprogramowanie

Urządzenie INFRAMETRICS 760 jest w pełni mobilne i składa się z kamery termograficznej chłodzonej helem w obiegu Sterlinga, zapewniającej temperaturę pracy detektora na poziomie 77 K, jednostki centralnej, magnetowidu i układu zasilającego, rys. 6.2, tabl. infra.

Jednostkę centralną stanowi komputer wyposażony w ciekłokrystaliczny kolorowy monitor, stację dysków 1,44 MB, kartę multi I/O, oraz panelu sterującego na płycie czołowej.

Rys. 6.2. Kamera termograficzna INFRAMETRICS 760
Fig. 6.2. Infrared camera INFRAMETRICS 760

INFRAMETRICS 760 umożliwia zapisywanie danych w formacie TIFF na dysku, lub bezpośrednie przesłanie ich do komputera, na którym dokonuje się dalszej ich obróbki za pomocą odpowiedniego oprogramowania. Ponadto pozwala określić kilkanaście parametrów obserwowanego obiektu w czasie trwania sesji pomiarowej. Do najczęściej wykorzystywanych należą:

- średnia temperatura obrazu,
- profil temperaturowy wzdłuż wykreślonej poziomej lini,
- temperatura punktu.

Tabela 6.1. Dane techniczne urządzenia termograficznego *Inframetrics* 760

Zakres pomiarowy μm	Dokładność pomiaru $°C$
$3 \div 5$	0,2
$8 \div 12$	0,1
$3 \div 12$	0,1

6.2. Badania technologiczne procesu zgrzewania oporowego punktowego

Próby zgrzewania oporowego punktowego wykonano głównie dla złączy zakładkowych blach o grubości 1÷5 mm ze stali 08X. Aby umożliwić badania jakości złączy za pomocą próby krzyżowej wykonano próbki blach o wymiarach 150x150xg mm.

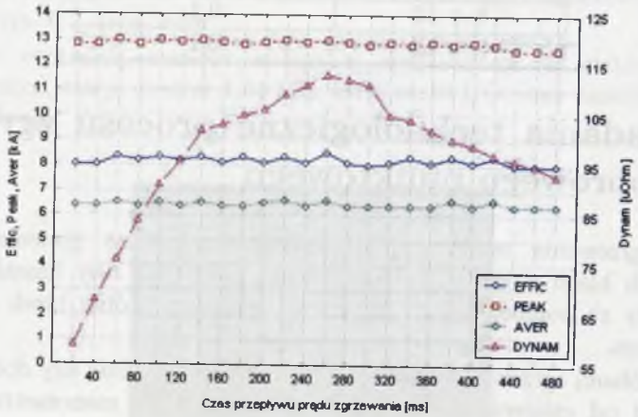
Przed próbami zgrzewania dokonano pomiaru rzeczywistej siły docisku elektrod w zależności od ciśnienia powietrza wskazywanego na manometrze zgrzewarki dynamometrem firmy A.S.Young & Co.Ltd.

Próby zgrzewania prowadzono na zgrzewarkach prądu stałego i przemiennego. Zastosowano elektrody kłowe proste klasy A3/1 wykonane z miedzi stopowej CuCrZr o płaskiej powierzchni roboczej o średnicy obliczonej wg wzoru $d_e = 5\sqrt{g}\ mm$. Średnia wartość przewodności właściwej materiału elektrod, mierzona przyrządem Sigmatest D.2068, w temperaturze otoczenia wyniosła 75%IACS. Elektrody chłodzono wewnętrznie wodą z wydajnością około $3l/min$.

W celu zabezpieczenia jednakowego oporu styku, próbki dokładnie oczyszczono osiągając wartość statycznej oporności stykowej ok. 110 $\mu\Omega$. Stan powierzchni zgrzewanych blach oceniano na podstawie pomiaru chropowatości. Pomiary przeprowadzono wykorzystując urządzenie Perthometer firmy Feinprüf Perthen GmbH. Uzyskano wartości R_a w zakresie 1,18÷1,49 $\mu\Omega$. W trakcie zgrzewania dokonywano również pomiarów parametrów elektrycznych przyrządem Pp-11. Przebiegi parametrów elektrycznych przy zgrzewaniu punktowym blach o grubości 1 mm i 3 mm podano na rys. 6.3÷6.4. Doboru parametrów zgrzewania dokonano na podstawie modelu eksperymentu wieloczynnikowego, biorąc za podstawę wyniki badań wstępnych. Zastosowany plan eksperymentu opracowano na podstawie programu ortogonalnego PS/DS-P:α. Program ten należy do grupy tzw. programów statystycznych zdeterminowanych selekcyjnie-wieloczynnikowo, których podstawową cechą jest zmiana wartości wielu czynników badanych podczas kolejnych pomiarów. Programy należące do tej grupy prowadzą do uzyskania jednej funkcji obiektu, w skład której wchodzą wszystkie istotne czynniki badane oraz czynniki wynikowe.

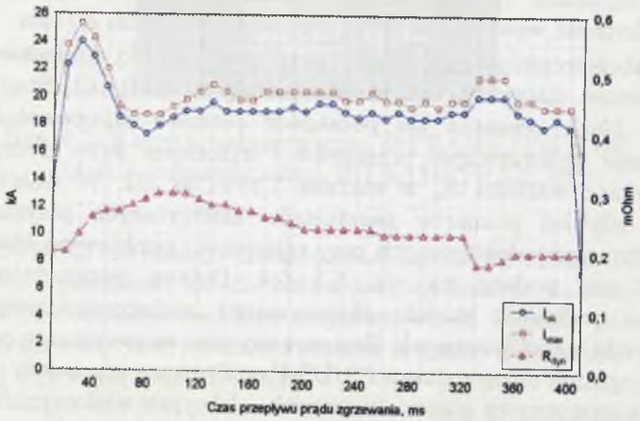
Jakość złączy oceniano na podstawie: przebiegu parametrów elektrycznych zgrzewania oporowego punktowego, wyglądu zewnętrznego, badań

wytrzymałościowych oraz badań metalograficznych. Ocenę wytrzymałości złączy punktowych przeprowadzono na podstawie próby krzyżowej rozciągania (wg Doc.IIW-628-79). Badania przeprowadzono na maszynie wytrzymałościowej typu ZDM-10 Rauensteins.



Rys. 6.3. Parametry zgrzewania oporowego punktowego złącza zakładkowego blach ze stali 08X o grubości 1 mm

Fig. 6.3. Parameters of resistance spot welding of 08X steel sheets 1 mm thick

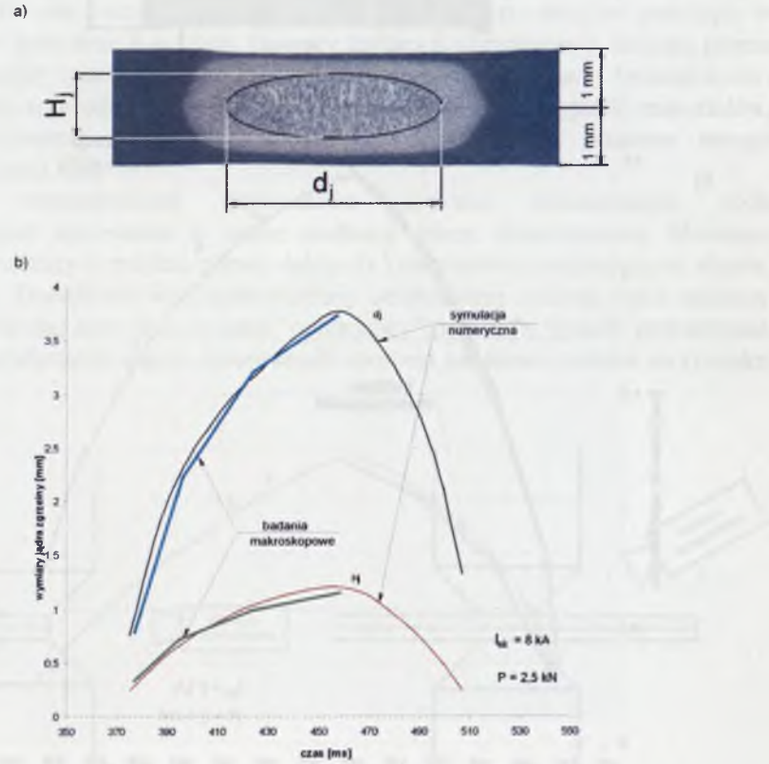


Rys. 6.4. Parametry zgrzewania oporowego punktowego złącza zakładkowego blach ze stali 08X o grubości 3 mm

Fig. 6.4. Parameters of resistance spot welding of 08X steel sheets 3 mm thick

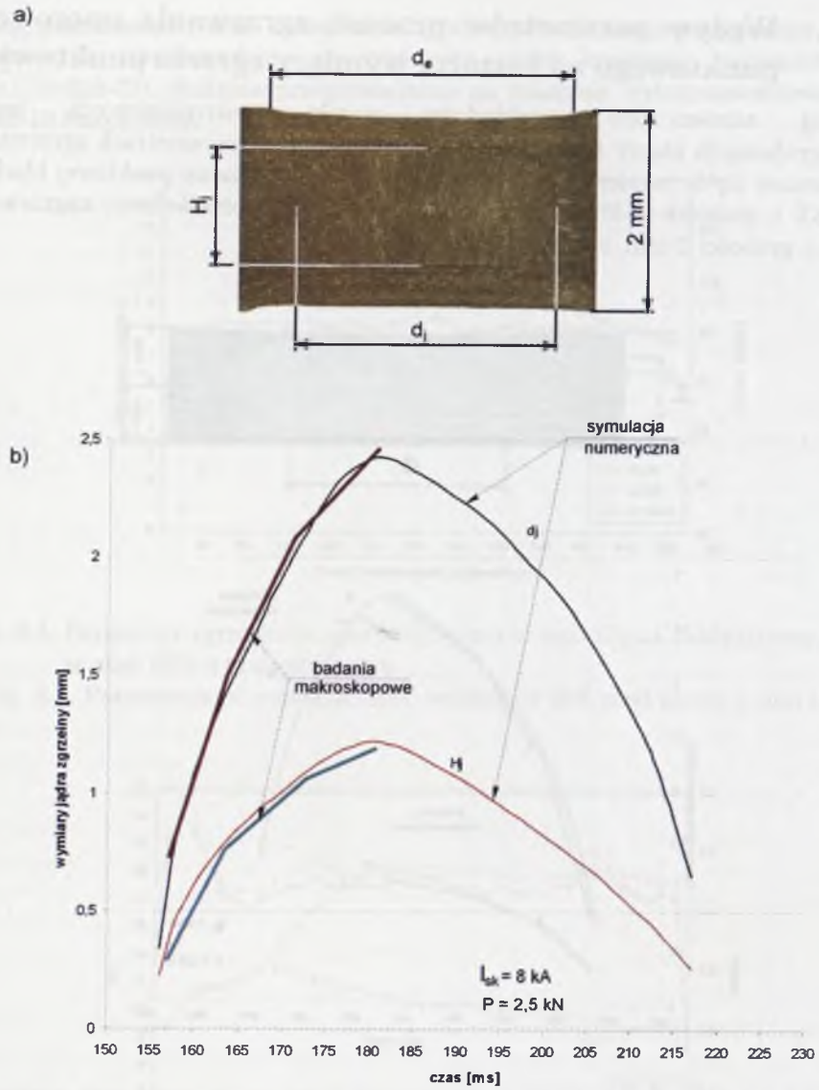
6.2.1. Wpływ parametrów procesu zgrzewania oporowego punktowego na kształt i wymiary zgrzein punktowych

Niżej zamieszczono przykładowe wyniki makroskopowych badań metalograficznych złączy wykonanych przy tych samych parametrach zgrzewania. Ograniczono się do zamieszczenia opisu rozwoju jądra zgrzeiny punktowej blach ze stali 08X o grubości 1+1 mm, rys. 6.5. Dla porównania prześledzono nagrzewanie blachy o grubości 2 mm, rys. 6.6.



Rys. 6.5. a) Kształt przekroju poprzecznego jądra uzyskanego przy zgrzewaniu oporowym punktowym blach ze stali 08X o grubości 1 mm b) wymiary ciekłego jądra zgrzeiny uzyskane na podstawie badań doświadczalnych i obliczeń numerycznych (por. rys. 5.7)

Fig. 6.5. a) Cross-section of the nugget obtained by resistance spot welding of 08X steel sheets, 1 mm thick b) dimensions of a weld nugget according to experimental investigations and numerical calculations (cf. fig. 5.7)



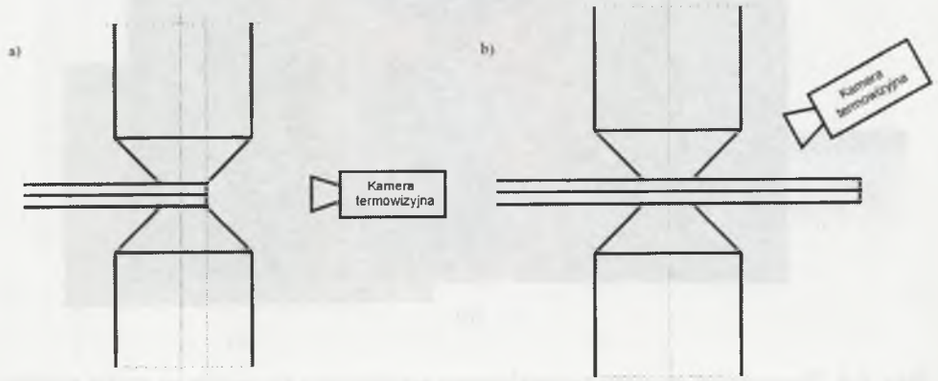
Rys. 6.6. a) Kształt przekroju poprzecznego jądra uzyskanego przez nagrzewanie blachy ze stali niskowęglowej o grubości 2 mm b) wymiary ciekłego jądra uzyskane z badań doświadczalnych i obliczeń numerycznych (por. rys. 5.8)

Fig. 6.6. a) Cross-section of the nugget obtained by resistance heating of low-carbon steel sheet, 2 mm thick b) dimensions of a nugget according to experimental investigations and numerical calculations (cf. fig. 5.8)

6.3. Badania termograficzne złączy zgrzewanych oporowo punktowo

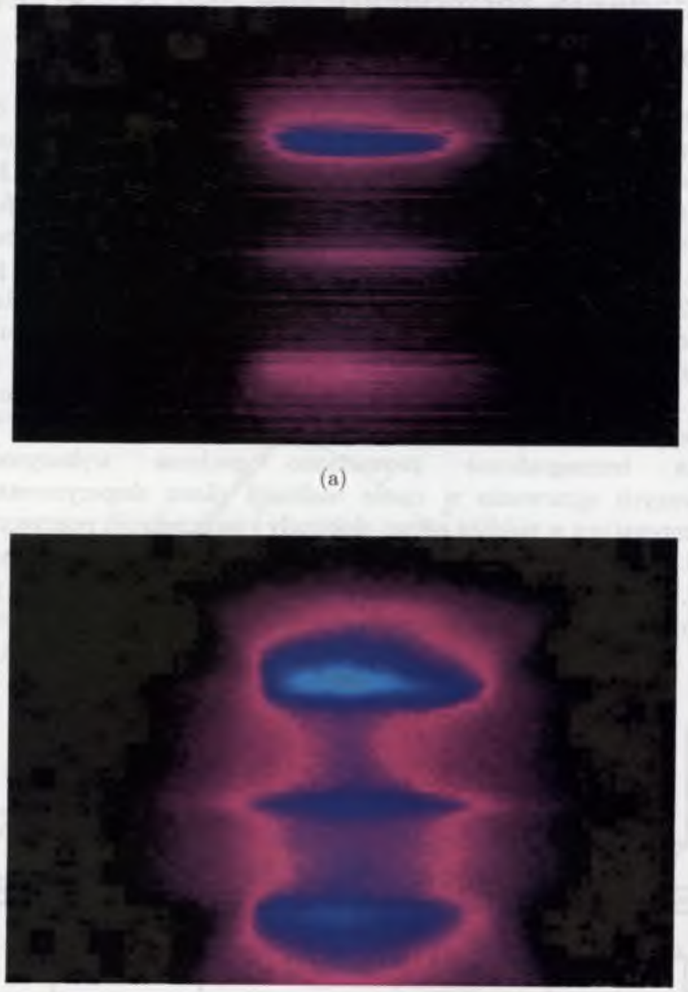
Promieniowanie podczerwone jako elektromagnetyczne, zależnie od długości fali dzieli się na bliską, średnią i daleką podczerwień. W badaniach termowizyjnych i termograficznych stosuje się promieniowanie o długości fali $3 \div 5 \mu m$ lub $8 \div 12(13) \mu m$, ze względu na dobrą jego transmisję przez atmosferę w tych przedziałach długości fali oraz ze względu na własności emisyjne badanych elementów. Obecnie termografia wykorzystuje kamery termowizyjne pracujące w zakresach $2 \div 5 \mu m$ oraz $8 \div 12 \mu m$ (kamery krótko- i długofalowe). Istnieją pewne różnice pomiędzy tymi kamerami, mające wpływ na interpretację termogramów. Różnice te są spowodowane wpływem długości fali na emisyjność materiałów, transmisję otoczenia i rozdzielczość kamery oraz dotyczą poziomu energii wykrywanej przez kamerę.

Badania termograficzne prowadzono podczas wykonywania prób technologicznych zgrzewania w czasie realizacji planu eksperymentu. Mierzono rozkład temperatury w pobliżu górnej elektrody i na przekroju poprzecznym złącza, rys. 6.8÷6.11. Dodatkowo wykonano pomiary temperatury ciekłego jądra zgrzeiny (rys. 6.12), stosując tzw. eksperyment "połówkowy", rys. 6.7a. Sposób prowadzenia badań termograficznych złączy zgrzewanych oporowo punktowo podano na rysunku 6.7.



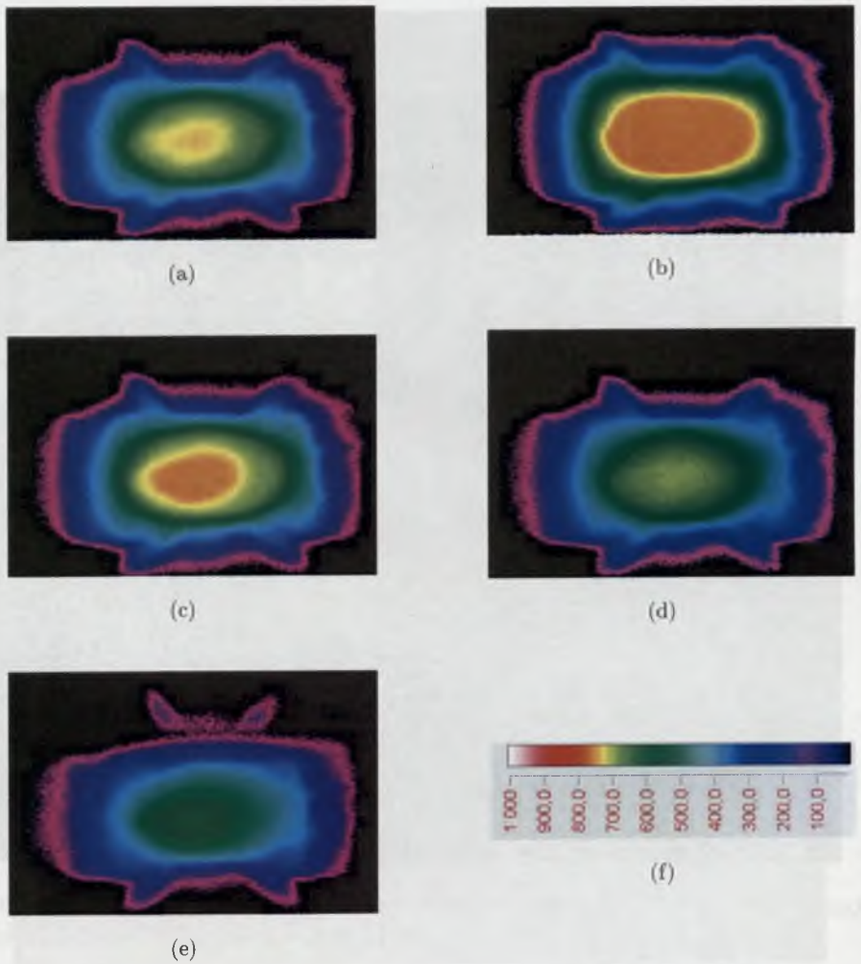
Rys. 6.7. Położenie kamery termograficznej w badaniach zgrzein punktowych

Fig. 6.7. Position of the infrared camera in investigations of resistance spot welds



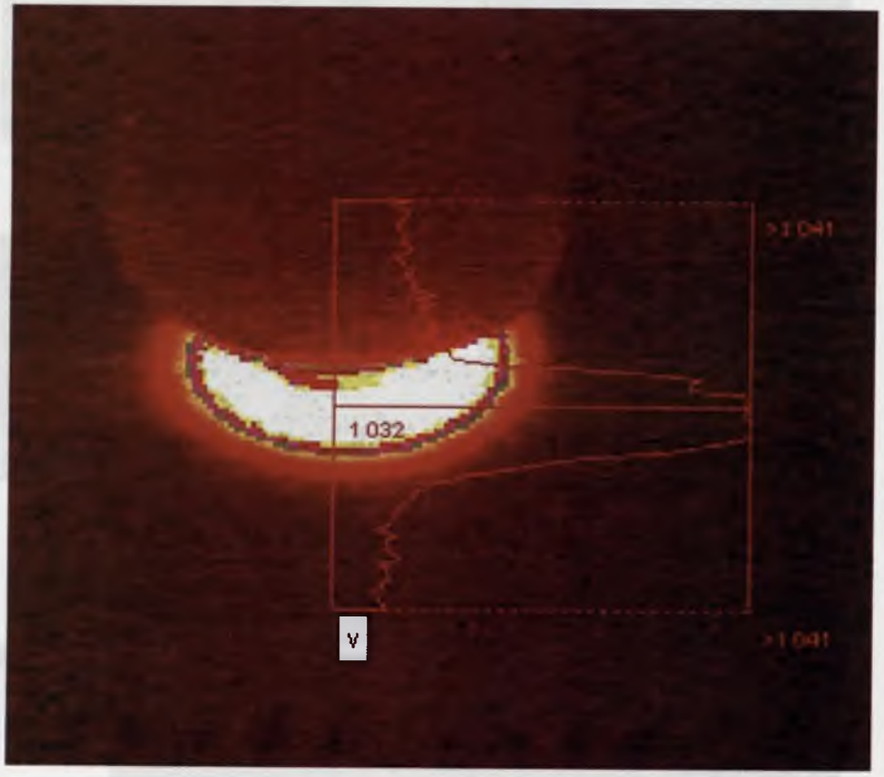
Rys. 6.8. Termogram stadium początkowego wydzielania się ciepła na styku między zgrzewanymi blachami oraz między elektrodami i powierzchnią blach

Fig. 6.8. Thermogram of initial phase of heat release at the contacts between welded sheets and between electrodes and resistance spot welded sheets



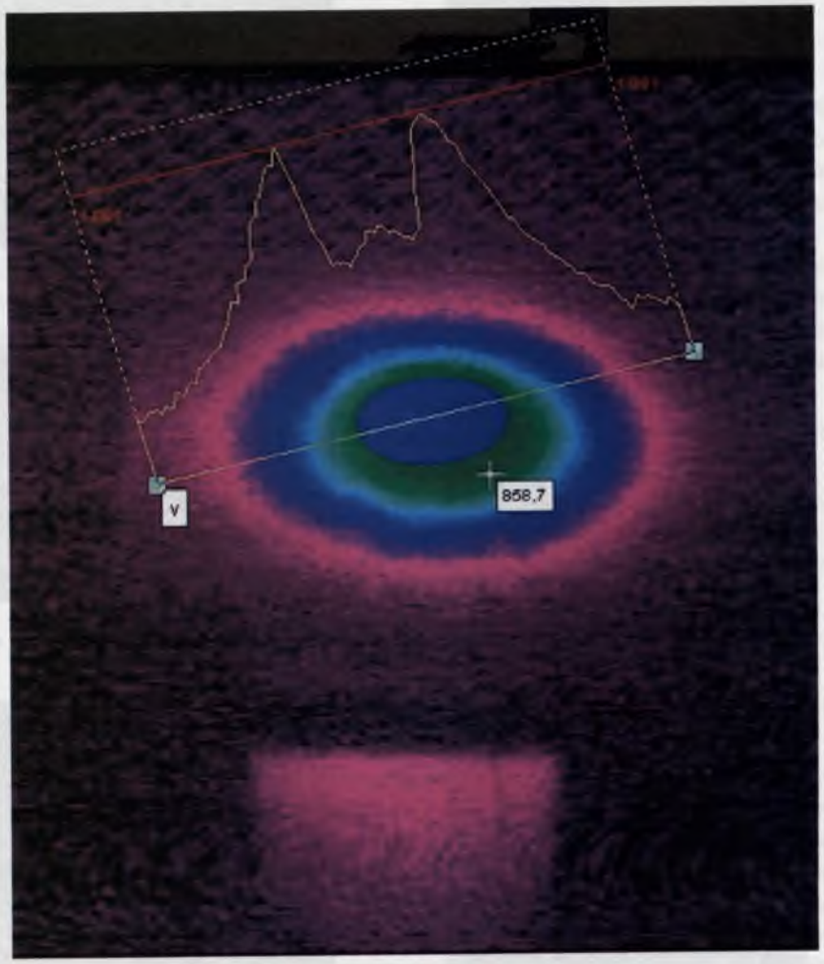
Rys. 6.9. Rozkład temperatury na przekroju poprzecznym złącza przy zgrzewaniu oporowym punktowym blach ze stali 08X o grubości 1,5+1,5 mm. Położenie kamery termograficznej, rys. 6.7a

Fig. 6.9. Temperature distribution in the cross-section of the joint at resistance spot welding of 08X steel sheets 1,5+1,5 mm thick. Position of the infrared camera, cf. fig. 6.7a



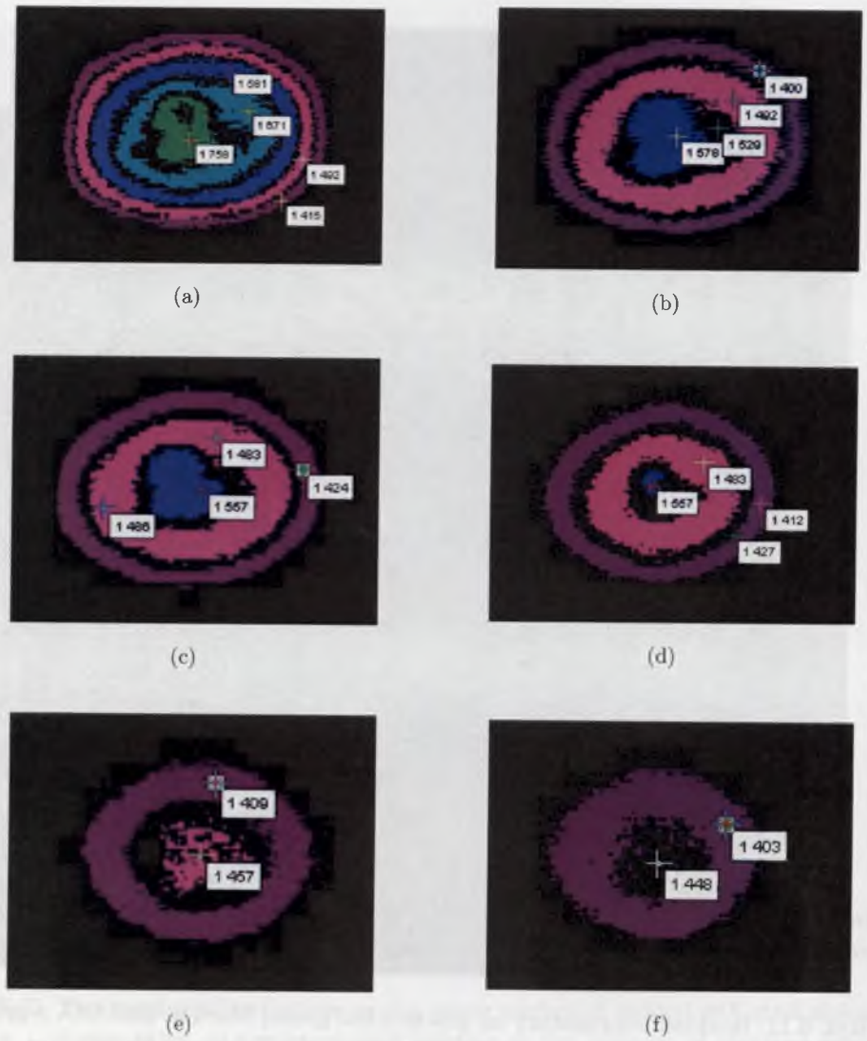
Rys. 6.10. Rozkład temperatury na górnej powierzchni zgrzewanych blach ze stali 08X o grubości 5+5 mm w chwili wyłączenia prądu zgrzewania. Położenie kamery, rys. 6.7b

Fig. 6.10. Temperature distribution on the upper surface of welded 08X steel sheets 5 mm thick, of resistance spot welding at the moment of shutting down the welding current. Position of the infrared camera, cf. fig. 6.7b



Rys. 6.11. Rozkład temperatury na powierzchni górnej blach ze stali 08X o grubości 5+5 mm, 5 ms po podniesieniu elektrody. Położenie kamery, rys. 6.7b

Fig. 6.11. Temperature distribution on the upper surface of welded 08X steel sheets in resistance spot welding 5 mm thick, 5 ms after lifting the electrode. Position of the infrared camera, cf. fig. 6.7b



Rys. 6.12. Rozkład temperatury w ciekłym jądrze zgrzeiny punktowej złącza blach ze stali 08X o grubości 5+5 mm. Położenie kamery, rys. 6.7a

Fig. 6.12. Temperature distribution in the liquid nugget of the joint of 08X steel sheets 5 mm thick. Position of the infrared camera, cf. fig. 6.7a

7. Podsumowanie

W pracy opisano podstawowe zjawiska fizyczne zachodzące w procesie zgrzewania oporowego punktowego. Zawarty w niej opis zachodzących w procesie technologicznym, podstawowych dla niego zjawisk fizycznych, pozwala na przewidywanie własności powstającego złącza oraz projektowanie warunków zgrzewania.

Zbudowano rodzinę modeli matematycznych, o różnym stopniu przybliżenia, zjawisk fizycznych stanowiących podstawę procesu zgrzewania oporowego punktowego. Osiągnięto to analizując warunki fizyczne towarzyszące wyróżnionym, podstawowym dla technologii zgrzewania zjawiskom. Szczególną uwagę zwrócono na następujące zjawiska:

- przewodzenie prądu przez zgrzewane materiały i ich styk oraz styki materiałów zgrzewanych z elektrodami,
- zależność parametrów fizycznych od temperatury oraz siły docisku elektrod, a w związku z tym ilości wydzielającego się ciepło Joule'a - Lenza i jego transportu w trakcie przepływu prądu zgrzewania w obszarze zgrzewania między elektrodami,
- zmiany stanu skupienia jądra zgrzeiny (solidus - likwidus - solidus) w cyklu zgrzewania,
- transport materii, pędu i energii w obszarze powstającego jądra zgrzeiny i jego otoczenia przy obecności sił pola elektromagnetycznego.

Zaproponowany model matematyczny zjawisk elektromagnetycznych zgrzewania oporowego punktowego dotyczy opisu propagacji pola elektromagnetycznego w ośrodku przewodzącym. Problem ten nie leży w obszarze zainteresowania elektrotechniki, elektrotermii i elektroenergetyki, ponieważ dotyczy stanów osobliwych z ich punktów widzenia (stan kontrolowanego zwarcia). Natomiast dla zagadnień związanych z transportem materii i energii oraz oddziaływań siłowych w zgrzewanych materiałach zaproponowano, wynikający z praw zachowania, opis zgrzewanych materiałów, modelowanych jako ośrodek ciągły, termicznie niejednorodny, znajdujący się, zależnie od warunków: w fazie stałej, w dwufazowej strefie przejściowej lub w fazie ciekłej z uwzględnieniem zmiany stanu skupienia. Dwufazową strefę przejściową w kształtującym się jądrze zgrzeiny opisano w postaci ujednorodnionej (homogenicznej).

W obszarze fazy stałej przyjęto opis stosowany w termomechanice, natomiast w fazie ciekłej model lepkiej cieczy newtonowskiej. W zastosowanym opisie transportu materii i energii oraz oddziaływań siłowych uwzględnione zostało oddziaływanie pola elektromagnetycznego. W efekcie powstał model

matematyczny sprzężonych pól fizycznych w postaci układów cząstkowych równań różniczkowych. Zaproponowane uproszczenia prowadzą do rozprzężenia tych równań i w ramach uzasadnionego przybliżenia, pozwalają na numeryczne rozwiązanie stawianych zagadnień brzegowych przy użyciu komercyjnego oprogramowania i na dostępnym autorowi sprzęcie. Odrębnym problemem, nadal niezadowalająco opisanym a istotnym z punktu widzenia technologicznego, jest zagadnienie styków: elektroda-materiał zgrzewany i materiał zgrzewany-materiał zgrzewany. W odróżnieniu do zaproponowanego opisu fenomenologicznego sprzężonych pól fizycznych, towarzyszących procesowi oporowego zgrzewania punktowego, występujące styki modelowano na poziomie obliczeń numerycznych w oparciu o dostępne elementy użytego do obliczeń pakietu programów ANSYS.

W pracy wykonano analizę i wyprowadzono równania opisujące, z różnym stopniem przybliżenia, pole elektromagnetyczne w zgrzewanych materiałach i elektrodach, posiadających zdolność przewodzenia prądu elektrycznego oraz określone własności magnetyczne. Uzyskane równania uwzględniają wpływ prędkości deformacji fazy stałej lub prędkości płynięcia fazy ciekłej, a także prędkości płynięcia ujednorodnionej mieszaniny dwufazowej w strefie przejściowej kształtującej się zgrzeiny, na zachowanie się pola elektromagnetycznego (sprzężenie pól: elektromagnetycznego i mechanicznego). Wyniki uzyskano dla prądu stałego oraz przemiennego o niskiej częstotliwości dla materiałów niejednorodnych termicznie. W swej istocie (naturze) proces zgrzewania oporowego punktowego jest kontrolowanym stanem zwarcia elektrycznego, w trakcie którego wydzielające się ciepło Joule'a-Lenza prowadzi do zlokalizowanych przemian fazowych. Podano równania transportu energii w polu elektromagnetycznym dla każdego z wymienionych rodzajów prądu, ze wskazaniem członu będącego źródłem generacji ciepła Joule'a-Lenza zależnie od rodzaju prądu. Równanie to ma podstawowe znaczenia przy modelowaniu procesu zgrzewania. Obecność członu źródłowego opisuje jednocześnie mechanizm wpływu pola elektromagnetycznego na pole temperatury, tzn. mechanizm sprzężenia tych pól. W pracy zamieszczono wyrażenia dla gęstości sił oddziaływania pola elektromagnetycznego z materią. Siły te występują dalej w równaniach zachowania pędu, jako wyrażenia źródłowe wpływu pola elektromagnetycznego na ruch ośrodka (kolejny mechanizm sprzężenia). Z tego widać, że oddziaływanie pól: elektromagnetycznego i mechanicznego jest wzajemne (obustronne), natomiast mechanizm oddziaływania pola temperatury na pole elektromagnetyczne jest bardziej złożony (pośredni), przez wpływ na stałe fizyczne tego pola (niejednorodność termiczna). Podobnie zresztą oddziałuje pole temperatury z polem mechanicznym, jeśli pominąć wpływ pracy odkształcenia i płynięcia pola mechanicznego. W podrozdziale 4.3., wychodząc z koncepcji wieloskładnikowej dwufazowej mieszaniny, jako modelu materiału w stanie dwufazowej strefy przejściowej kształtowanej zgrzeiny, po homogenizacji przy dodatkowym założeniu nieściśliwości ośrodka, uzyskano równania zachowania materii, pędu i energii. Ograniczając się do materiału dwuskładnikowego, uzyskano w ten sposób równania: bezźródłowości pola prędkości, dyfuzji składnika

stopowego w dwufazowej strefie przejściowej po homogenizacji oraz dyfuzji w fazie ciekłej (dyfuzję w fazie stałej ze względu na jej wielkość pominięto), równania ruchu (zachowania pędu) zgrzewanych materiałów i równanie transportu energii. W równaniach ruchu uwzględniono wspomnianą wyżej obecność sił oddziaływania pola elektromagnetycznego ze zgrzewanymi materiałami w różnych fazach kształtowania się zgrzeiny. W równaniu zachowania energii, obok oddziaływania pola elektromagnetycznego w postaci źródła ciepła Joule'a-Lenza, uwzględniono ciepło przemiany fazowej stosownie do udziału zanikającej lub wydzielającej się fazy stałej, zależnie od kierunku zmian pola temperatury w trakcie kształtowania się dwufazowej strefy przejściowej jądra zgrzeiny. W ten sposób uzyskano równanie pola temperatury, w którym kierunek przemiany fazowej (topnienie/krzepnięcie) jest kontrolowany przez zmiany udziału fazy stałej, w odróżnieniu do stosowanego dotychczas "modelu metalurgicznego" o zdeterminowanym kierunku przemiany związanym ze spadkiem temperatury podczas stygnięcia - krzepnięciem. W ten sposób ujawnione zostały kolejne sprzężenia pól opisujących proces zgrzewania oporowego punktowego. Wskazano racjonalne uproszczenia prowadzące do rozprzężenia otrzymanego układu cząstkowych równań różniczkowych, tak by możliwe było rozwiązywanie oddzielnych, uproszczonych równań przy użyciu komercyjnego pakietu programów ANSYS. Pakiet ten pozwala na rozwiązywanie postawionych zagadnień brzegowych metodą elementów skończonych.

Zastosowanie nieliniowych modeli materiałowych (niejednorodność termiczna) zapewniło wyniki symulacji zbliżone do rzeczywistych stanów uzyskanych z badań doświadczalnych. Niestety, wprowadzenie tak wielu własności fizycznych jako funkcji nieliniowych spowodowało konieczność zastosowania bardzo małego kroku czasowego całkowania numerycznego. Co za tym idzie, radykalnie wydłużyło czas pojedynczej symulacji. Planowane na wstępie szerokie spektrum modeli zostało częściowo ograniczone, aby móc skupić się na podstawowych przypadkach, pozwalających ocenić przyjęty tok postępowania.

Zastosowanie elementów stykowych z opisem przemieszczeniowym, termicznym i elektrycznym pozwoliło uzyskać o wiele większą dynamikę zmian występujących w kontakcie i w obszarach przylegających do miejsc styku. Modelowanie zjawiska tworzenia się obszaru płynnego na zasadzie przejścia w stan plastyczny powodowało trudności ze zbieżnością numeryczną. Tego typu problemy występują ponieważ mamy do czynienia z uplastycznieniem obszaru na granicy obiektu. Dla modelu z blachami o różnych grubościach lub posiadających różne własności materiałowe nie można stosować symetrii względem płaszczyzny styku. Symetria taka odbiera możliwość rotacji powierzchni styku, dlatego warunek równowagi ciśnienia w elementach stykowych jest warunkiem wystarczającym dla uzyskania zbieżnego rozwiązania.

Kolejnym rozwiązanym problemem jest uzyskany rozkład gęstości przepływającego prądu przez warstwy będące w styku a właściwie elementy będące na skraju obszaru przewodzenia. Trudności występowały ze względu na sam charakter modelu, jego dyskretną strukturę jak i charakter zjawiska styku

elektrycznego. Natężenie prądu a właściwie rozkład gęstości prądu jest wielkością uzyskiwaną na poziomie rozwiązania dla pojedynczego elementu, podobnie jak naprężenie w opisie mechanicznym. Takie rozwiązania modelu zawsze będzie obarczone pewnym błędem, bez względu na stopień zagęszczenia siatki elementów w miejscu zaniku kontaktu. Zastosowana gęstość podziału warstwy kontaktowej okazała się wystarczająca a dalsze zagęszczanie jej nie powodowało znaczącej poprawy uzyskiwanych wyników.

W symulacjach numerycznych udało się zauważyć zgodność z przebiegiem procesu zgrzewania oporowego punktowego z obserwowanym w eksperymencie. Model numeryczny nie zawsze odzwierciedlał poziom ilościowy mierzonej wielkości np. temperatury. Natomiast zawsze dawał zgodność jakościową uzyskiwanych wyników. Rozbieżność ta mogła być spowodowana niewystarczającym dopasowaniem nieliniowego modelu materiałowego do wyników badań doświadczalnych. Próby nawiązania do wyników uzyskiwanych przez innych autorów stosujących opis nieliniowy, wskazują na konieczność stworzenia własnej bazy charakterystyk materiałowych. Umożliwi to wykorzystanie tak ogólnego postawienia problemu i da możliwości wykorzystania dostępnego oprogramowania.

W celu porównania wyników analizy numerycznej z badaniami doświadczalnymi przeprowadzono próby zgrzewania oporowego punktowego blach ze stali 08X w zakresie grubości 1÷5 mm. W czasie prób rejestrowano przebieg dynamicznych parametrów elektrycznych oraz temperatury - urządzeniem termograficznym i za pomocą termopar. Na podstawie metalograficznych badań makroskopowych określono wymiary przekroju poprzecznego zgrzein punktowych. Wyniki potwierdziły poprawność założeń przyjętych w procesie modelowania oraz wystarczającą dla praktyki dokładność obliczeń numerycznych.

Wykonane badania teoretyczne i doświadczalne wskazują na potrzebę i celowość ich kontynuacji, a zwłaszcza w zakresie:

- uzupełnienia modelu matematycznego punktowego zgrzewania oporowego o przemiany fazowe w stałym stanie skupienia,
- udoskonalenia sposobu modelowania styków materiałów w procesie zgrzewania,
- zbudowania kompletnej bazy danych fizycznych obecnie zgrzewanych materiałów i materiałów elektrod,
- udoskonalenia metod numerycznego rozwiązywania zagadnień brzegowych modelujących proces punktowego zgrzewania oporowego, przez poszukiwanie nowych bardziej stosownych albo przez dalsze doskonalenie i rozszerzenie pakietu ANSYS;
- stworzenie dedykowanego pakietu programów zorientowanego na efektywne rozwiązanie wspomnianych wyżej zagadnień brzegowych.

A Dodatek

Niektóre użyteczne formuły

Tożsamości algebry oraz analizy funkcji i pól wektorowych np. [93, 144, 180, 200]:

$$\overline{\mathbf{A}} = Re(\overline{\mathbf{A}}) + i\,Im(\overline{\mathbf{A}}) \tag{A1}$$

$$\overline{\mathbf{A}}^* = Re(\overline{\mathbf{A}}) - i\,Im(\overline{\mathbf{A}}) \tag{A2}$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2 \tag{A3}$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A} \tag{A4}$$

$$[\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}] = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} \tag{A5}$$

$$[\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}] = [\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{A}] = [\mathbf{C},\mathbf{A},\mathbf{B}] = -[\mathbf{B},\mathbf{A},\mathbf{C}] = -[\mathbf{A},\mathbf{C},\mathbf{B}] = -[\mathbf{C},\mathbf{B},\mathbf{A}] \tag{A6}$$

$$\overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{A}}^* = \overline{\mathbf{A}}^*\cdot\overline{\mathbf{A}} = \left|\overline{\mathbf{A}}\right|^2 = \left|\overline{\mathbf{A}}^*\right|^2 = Re^2(\overline{\mathbf{A}}) + Im^2(\overline{\mathbf{A}}) = Re^2(\overline{\mathbf{A}}^*) + Im^2(\overline{\mathbf{A}}^*) \tag{A7}$$

$$\overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{A}} = Re(\overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{A}}) + i\,Im(\overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{A}}) = [Re^2(\overline{\mathbf{A}}) - Im^2(\overline{\mathbf{A}})] + i[2Re(\overline{\mathbf{A}})Im(\overline{\mathbf{A}})] \quad \text{(A8)}$$

$$(\overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{A}})^* = Re(\overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{A}}) - i\,Im(\overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{A}}) = [Re^2(\overline{\mathbf{A}}) + Im^2(\overline{\mathbf{A}})] - i[2Re(\overline{\mathbf{A}})Im(\overline{\mathbf{A}})] \quad \text{(A9)}$$

$$\overline{\mathbf{A}}\times\overline{\mathbf{A}}^* = 2Re(\overline{\mathbf{A}}) \quad \text{(A10)}$$

$$\mathbf{A} = Re(\overline{\mathbf{A}}) = \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{A}}^*) \quad \text{(A11)}$$

gdzie oznaczono:

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ - pole wektorowe,

Φ, Ψ - pole skalarne,

$\overline{\mathbf{A}}$ - pole wektorowe zespolone,

$\overline{\mathbf{A}}^*$ - pole wektorowe zespolone sprzężone,

i - jednostka urojona ($i = \sqrt{-1}$),

$Re(\overline{\mathbf{A}})$ - składowa rzeczywista wektora zespolonego,

$Im(\overline{\mathbf{A}})$ - składowa urojona wektora zespolonego.

$$e^{2\pi i} = e^0 = 1 \quad \text{(A12)}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) \quad \text{(A13)}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) \quad \text{(A14)}$$

$$\int \cos t dt = \sin t + C \quad \text{(A15)}$$

$$\int \sin t dt = -\cos t + C \quad \text{(A16)}$$

$$\int dt = t + C \quad \text{(A17)}$$

$$\int_a^b f(t)dt = F(t)|_a^b + C \qquad (gdzie: \frac{dF}{dt} = f(t)) \quad \text{(A18)}$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B} \quad \text{(A19)}$$

$$\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\mathbf{B} \quad \text{(A20)}$$

$$\nabla^T(\Phi\cdot\Psi) = \Phi\,\nabla^T\Psi + \Psi\,\nabla^T\Phi \quad \text{(A21)}$$

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) \quad \text{(A22)}$$

$$\nabla\cdot(\Phi\mathbf{A}) = \Phi\,\nabla\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla^T\Phi \quad \text{(A23)}$$

$$(\nabla\mathbf{A})^T = \mathbf{A}\,\nabla \quad \text{(A24)}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\mathbf{A})^T = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) \quad \text{(A25)}$$

$$\nabla\times(\Phi\,\mathbf{A}) = \Phi\,\nabla\times\mathbf{A} + \nabla^T\Phi\times\mathbf{A} \quad \text{(A26)}$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{B} \quad \text{(A27)}$$

$$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\,(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}\,(\nabla\cdot\mathbf{A}) + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} \quad \text{(A28)}$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{A}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \frac{1}{2}\nabla^T(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) \tag{A29}$$

przy czym:

$$\mathbf{A} \cdot \nabla = \sum_{\alpha} A_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \tag{A30}$$

oraz:

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} = \sum_{\beta} \sum_{\alpha} A_\alpha \frac{\partial \mathbf{B}_\beta}{\partial x_\alpha} \mathbf{e}_\beta \tag{A31}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \triangle \mathbf{A} \tag{A32}$$

$$\nabla \cdot (\nabla^T \Phi) = \nabla^2 \Phi \tag{A33}$$

$$\nabla \cdot \nabla(\times \mathbf{A}) = 0 \tag{A34}$$

$$\nabla \times (\nabla^T \Phi) = 0 \tag{A35}$$

Twierdzenia całkowe analizy pól wektorowych np. [93, 144, 180, 200]:

- Twierdzenie Stokesa - Ampere'a:

$$\oint_L \mathbf{A}\, d\mathbf{l} = \int_{S(L)} (\nabla \times \mathbf{A})\, d\mathbf{s} \tag{A36}$$

- Twierdzenie Greena - Gaussa - Ostrogradskiego:

$$\oint_S \mathbf{A}\, d\mathbf{s} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A})\, dV \tag{A37}$$

Literatura

1. Adamczyk J.: *Metaloznawstwo teoretyczne. Cz. 1 Struktura metali i stopów.* Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1991.
2. Adams C. M.: *Cooling Rates and Peak Temperatures in Fusion Welding.* Welding Journal, 37(5):p.71s–79s, May 1958.
3. Adrichem T., Kas J.: *Calculation, Measurement, and Simulation of Weld Thermal Cycles.* Smit-Weld N.V. Nijmegen, 1:2, June 1971.
4. Akbay T., Reed R. C., Atkinson C.: *Modelling reaustenisation from ferrite-cementite mixtures in Fe-C Steels.* Acta Metall. Mater., 47:p.1469–1480, 1994.
5. Alberny R., Perroy A., Amory D., Lahousse M.: *Optimisation du refroidissement secondaire en coulée continue de brames d'acier extra-doux.* Rev. Métall., 75:p.353–362, 1978.
6. Alcini W. V.: *Experimental Measurement of Liquid Nugget Heat Convection in Spot Welding.* Welding Journal, 69(4):p.177s–179s, April 1990.
7. Alcini W. V.: *A Measurement Window into Resistance Welding.* Welding Journal, 69(2):p.47–50, February 1990.
8. Alifanov O. M.: *Inverse Heat Transfer Problems.* Springer Verlag, Berlin 1994.
9. Andersson B. A. B.: *Thermal Stressess in a Submerged – Arc Welded Joint Considering Phase Transformations.* ASME, 100:p.356, 1978.
10. Archer G. R.: *Calculations for Temperature Response in Spot Welds.* Welding Journal, 39(8):p.327s–330s, August 1960.
11. Atthey D. R.: *A mathematical model for fluid flow in a weld pool at high currents.* J. Fluid Mech., 98:p.787–801, 1980.
12. Baranowski B.: *Nierównowagowa termodynamika w chemii fizycznej.* PWN, Warszawa 1974.
13. Bathe K. J.: *Finite Element Procedures in Engineering Analysis.* Prentice-Hall, New Jersey 1982.
14. Bathe K. J., Khoshgoftaar R. M.: *Finite Element Formulation and Solution of Nonlinear Heat Transfer.* Nuclear Engineering and Design, 1980.
15. Beckerman C., Viskanta R.: *Mathematical modeling of transport phenomena during alloy solidification.* Appl. Mech. Rev., 1:p.1s–27s, January 1993.

16. Bednarski T.: *Mechanika plastycznego płynięcia w zarysie.* PWN, Warszawa 1995.

17. Bennon W. D., Incropera F. P.: *A continuum model for momentum, heat and species transport in binary solid-liquid phase change systems - I. Model formulation.* Int. J. Heat and Mass Transfer, 30(10):p.2161–2170, October 1987.

18. Bennon W. D., Incropera F. P.: *A continuum model for momentum, heat and species transport in binary solid-liquid phase change systems - II. Application to solidification in a rectangular cavity.* Int. J. Heat and Mass Transfer, 30(10):p.2171–2187, 1987.

19. Bennon W. D.n, Incropera F. P.: *Numerical Analysis of Binary Solid-Liquid Phase Change Using a Continuum Model.* Numer. Heat Transf., 13:p.277 – 296, 1988.

20. Bentley K. P., Greenwood J. A., Knowlson P. McK., Baker R. G.: *Temperature Distributions in Spot Welds.* British Welding Journal, 10(12):p.613–619, December 1963.

21. Bhadeshia H. K. D. H., Svensson L. E.: *Modelling the Revolution of Microstructure in Steel Weld Metal.* Welding Journal, 70(12):p.613–619, December 1991.

22. Bhattacharya S., Andrews D. R.: *Significance of Dynamic Resistance Curves in the Theory and Practice of Spot Welding.* Welding and Metal Fabrication, September:p.296, 1974.

23. Białecki R., Nowak A. J.: *Zastosowanie metody brzegowych równań całkowych w teorii przewodnictwa ciepła.* Mechanika i Komputer, 6:s.154 – 205, 1981.

24. Bohme G.: *Non-newtonian fluid mechanics.* North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford-Tokyo 1987.

25. Bokota A.: *Modelowanie krzepnięcia i stygnięcia dwuskładnikowych stopów metali.* Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 2001.

26. Bokota A., Iskierka S.: *Modelisation de la trempe par induction des elements de machines.* Revue Generale de Thermique, 379:p.375 – 383, 1993.

27. Bokota A., Iskierka S.: *States of stresses resulting from thermal and phase changes obtained during the hardening of a eutectoid steel.* Materials Science and Engineering, A187:77–85, 1994.

28. Bokota A., Iskierka S., Parkitny R.: *Computer Simulation of Surface Induction Hardening of Steel Cylindrical Components.* A. Niku-Lari, editor, Computational Modelling of Free and Moving Boundary Problems. II, str. 141–146. Computational Mechanics Publications, 1991.

29. Bokota A., Iskierka S., Parkitny R., Raniecki B.: *Transient and residual stresses in progressive induction on hardening of infinite solid cylinder.* Archives of Mechanics, 1994.

30. Bolkowski S., *i inni*: *Komputerowe metody analizy pola elektromagnetycznego.* WNT, Warszawa 1993.

31. Bowers R. J., Sorensen C. D., Eagar T. W.: *Electrode Geometry in Resistance Spot Welding.* Welding Journal, 69(4):p.45–51, April 1990.

32. Browman M. J.: *Isledowanije plasticzeskoj defomacji pri wysokich temperaturach.* Problemy procznosti, (9):p.64–68, 1980.

33. Browne D. J., Chandler H. W., Evans J. T., James P. S., Wen J., Newton C. J.: *Computer Simulation of Resistance Spot Welding in Aluminium: Part I.* Welding Journal, 74(10):p.339–344, December 1995.

34. Browne D. J., Chandler H. W., Evans J. T., James P. S., Wen J., Newton C. J.: *Computer Simulation of Resistance Spot Welding in Aluminium: Part II.* Welding Journal, 74(12):p.417–422, December 1995.

35. Burmeister J., Weber G., Press H.: *Automated quality assessment in alternating current resistance spot welding by fuzzy classification.* IIW, Doc. III-1038-95, 1995.

36. Cacciatore P.: *Modelling of Heat Transfer in Welding Processes.* str. 113, New Hampshire, 1980. The Metallurgical Society of AIME.

37. Carslaw H.S., Jaeger J.C.: *Conduction of heat in solids.* Oxford University Press, 2, 1964.

38. Casse A.: *Etude parametrique sur la formation du point, en soudage par resistance, des asiers de construction.* Soudage et Techniques Connexes, (3/4):p.105–126, Mars-Avril 1981.

39. Chang H. S., Cho H. S.: *A Study on the Shunt Effect in Resistance Spot Welding.* Welding Journal, 69(8):p.308s–317s, August 1990.

40. Cho H. S., Y. J. Cho: *A Study of the Thermal Behaviour in Resistance Spot Welds.* Welding Journal, 68(4):p.236s–244s, April 1989.

41. ClyneT. W.: *Numerical Treatment of Rapid Solidification.* Metallurgical Transactions, B, 15B:p.369–381, 1984.

42. Collatz L.: *Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych.* PWN, Warszawa 1960.

43. Crank J.: *Free and moving boundary problems.* Clarendon Press, Oxford 1984.

44. Cydnik B. A., Iwanow A. B.: *Matematyczny model rozkładu ciepła przy spawaniu elektrodą w osłonie gazowej cz.I.* Svarocznoje Proizvodstwo, 1:s.3 – 9, 1998.

45. Czakalev A. A., Prochorov A. N.: *Soverszenstwowanije termodeformacijonnoj modeli kontaktnoj svarki.* Svarocznoje Proizvodstwo, 4:s.29–31, 1984.

46. Czakalev A. A., Viszniakov I. V.: *Upravlenije svojstvami sojedinienij pri kontaktnoj toczecznoj svarkie.* Svarocznoje Proizvodstwo, 1:s.26–30, 1984.

47. Danilov V. G., Maslov V. P., Volosov K. A.: *Mathematical modelling of heat and mass transfer processes.* Kluwer, Dordrecht 1995.

48. Derski W.: *Zarys mechaniki ośrodków ciągłych.* PWN, Warszawa 1975.

49. Dickinson B. W., Franklin J. E., Stanya A.: *Characterization of Spot Welding Behavior by Dynamic Parameter Monitoring.* Welding Journal, 59(6):p.170, June 1980.

50. Dilthey U., Bohlmann H., Sudnik W., Erofeew W., R. Kudinow: *Berechnung von Schweiss-bereichnen und numerische Simulation des Widerstandds-punktschweissprozesses.* Schweissen und Schneiden, 52(1):1p.8–23, 2000.

51. Dobaj E.: *Maszyny i urządzenia spawalnicze.* WNT, Warszawa 1994.

52. Dobrzański L. A.: *Podstawy nauki o materiałach i metaloznawstwo.* WNT, Warszawa 2002.

53. Easterling K. E.: *Solidification Microstructure of Fusion Welds.* Materials Science and Engineering, 65:p.191–198, 1984.

54. Friedman E.: *Thermo-mechanical Analysis of the Welding Process Using the Finite Element Method.* ASME (Journal of Pressure Vessel Technology), 97j:p.206, 1975.

55. Gabryszewski Z., Gronostajski J.: *Mechanika procesów obróbki plastycznej.* PWN, Warszawa 1991.

56. Gdula S. J.: *Przewodzenie ciepła.* PWN, Warszawa 1984.

57. Gedeon S. A., Eagar T. W.: *Resistance Spot Welding of Galvanized Steel: Part I. Material Variations and Process Modifications.* Metallurgical Transactions, B, 17B:p.879–885, 1986.

58. Gedeon S. A., Eagar T. W.: *Resistance Spot Welding of Galvanized Steel: Part II. Mechanisms of Spot Weld Nugget Formation.* Metallurgical Transactions, B, 17B:p.887–901, 1986.

59. Ghosh P. K., Gupta P. C., Jha B. K.: *Weldability of Intercritical Annealed Dual-Phase Steel with the Resistance Spot Welding Process.* Welding Journal, str. p.7s–14s, January 1991.

60. Gierek A., Mikuszewski T.: *Kształtowanie struktury pierwotnej metali i stopów.* Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1998.

61. Goldak J. A., *et al.*: *Coupling Heat Transfer, Microstructure Evolution and Thermal Stress Analysis in Welds Mechanics.* IUTAM Symposium Lulea, (1):p.1–30, 1991.

62. Goldak J. A., Chakravarti A., Bibby M. J.: *A New Finite Element Model for Welding Heat Sources.* Metallurgical Transactions, B, 15B:p.299–305, 1984.

63. Goldak J. A., Chakravarti A., Bibby M. J.: *A Double Ellipsoid Finite Element Model for Welding Heat Sources.* IIW Doc, No 212-603-85, 1985.

64. Goldak J.A., Bibby M. J., Moore J. E., House R., Patel B.: *Computer Modeling of Heat Flow in Welds.* Metallurgical Transactions, B, 17B:p.587–600, 1986.

65. GoldakJ . A., Patel B., Bibby M. J., Moor J. E.e: *A Review of Weld Mechanics.* AGARD presentation, September 1985.

66. Gould J. E.: *Detailing nugget development in spot welds.* IIW, Doc. IIW-821-85, 1985.

67. Gould J. E.: *An Examination of Nugget Development during Spot Welding, Using Both Experimental and Analitical Techniques.* Welding Journal, 66(1):p.1s–10s, January 1987.

68. Gould J. E.: *Modeling Primary Dendrite Arm Spacings in Resistance Spot Welds. Parts I - Modeling Studies.* Welding Journal, 73(4):p.67s–74s, April 1994.

69. Gould J. E.: *Modeling Primary Dendrite Arm Spacings in Resistance Spot Welds. Parts II - Experimental Studies.* Welding Journal, 73(5):p.91s–100, May 1994.

70. Gray T., Spence J., North T.: *Rational Welding Design.* Butterworths Publication, London 1975.

71. Greenwood J. A.: *Temperatures in Spot Welding.* Welding Journal, 40(6):p.316–332, June 1961.

72. Greenwood J. A., Williamson J. B.: *Electrical conduction in solid: theory of temperature-dependent conductors.* Proc. Roy. Soc. London, 1:p.13–31, 1958.

73. Greitmann M. J., Rauch R.: *Rechenprogramm zur numerischen Simulation.* Schweissen und Schneiden, 2:s.55 – 56, 1997.

74. Grysa K., Ciałkowski M. J.: *Zagadnienia odwrotne pól temperatury – przegląd literatury.* Mech. Teoret. Stos., 18:s.535–554, 1980.

75. Grysa K., Ciałkowski M. J.: *Zagadnienia odwrotne przewodnictwa cieplnego – przegląd literatury z lat 1989–1995.* Zeszyty Nauk. Pol. Śl. Ener., z.130:s.17–45, Gliwice 1996.

76. Hahn O., Kurzok J. N., Rohde A., T. Thesing: *Computer-aided dimensioning of resistance-spot-welded and mechanically joined components.* Schweissen und Schneiden, 1:s.13–16, 1999.

77. Han Z., Indacochea J. E., Chen C. H., Bhat S.: *Weld Nugget Development and Integrity in Resistance Spot Welding of High Strength Cold-Rolled Sheet Steels.* Welding Journal, 72(5):p.209s–216s, May 1993.

78. Han Z., Orozco J., Indacochea J. E., Chen C. H.: *Resistance Spot Welding: A Heat Transfer Study.* Welding Journal, 68(9):p.363s–371s, September 1989.

79. Hao M., Osman K. A., Boomer D. R., Newton C. J.: *Developments in Characterisation of Resistance Spot Welding of Aluminium.* Welding Journal, 75(1):p.1s–8s, January 1996.

80. Hering M.: *Podstawy elektrotermii.* WNT, Warszawa 1992.

81. Holm R.: *Electric Contacts.* Springer-Verlag, Berlin 1967.

82. Hsiao J. S.: *An Efficient Algorithm for Finite-Difference Analyses of Heat Transfer with Melting and Solidification.* Numer. Heat Transf., 8:p.653–666, 1985.

83. Hsu T. R.: *The Finite Element Method in Thermomechanics.* Allen-Unwin, Boston 1986.

84. Jakowluk A.: *Procesy pełzania i zmęczenia w materiałach.* WNT, Warszawa 1993.

85. Jarzębski Z. M.: *Dyfuzja w metalach i stopach.* Wydawnictwo "Śląsk", Katowice 1987.

86. Kaczyński J., Prowans S.: *Podstawy teoretyczne metaloznawstwa.* Wydawnictwo "Śląsk", Katowice 1972.

87. Kalinowski E.: *Termodynamika techniczna.* Wyd. Pol. Wrocł., Wrocław 1979.

88. Kalkan A. L., Talmage G.: *Heat transfer in liquid metals with electric currents and magnetic fields: the conduction case.* Int. J. Heat and Mass Transfer, 37:p.511–522, 1994.

89. Kim E. W., Eagar T. W.: *Measurement of Transient Temperature Response during Resistance Spot Welding.* Welding Journal, 68:p.303–312, 1989.

90. Kleiber M., *et all:* *Komputerowe metody mechaniki ciał stałych.* PWN, Warszawa 1995.

91. Klimpel A.: *Badanie i sterowanie jakością zgrzewania oporowego punktowego.* Przegląd Spawalnictwa, 3, 1988.

92. Klimpel A., Szymański A., Papkala H.: *The Technology of Resistance Seam Welding of Titanium-Alloy Sheets.* Proc. of the Int. Conference on the Joining of Materials JOM - 8, Holsingor, 1997.

93. Konorski B.: *Elementy teorii względności, relatywistycznej mechaniki i elektrodynamiki.* WNT, Warszawa 1976.

94. Kost A.: *Numerische Methoden in der Berechnung elektromagnetischer Felder.* Springer-Verlag, Berlin 1994.

95. Krawczyk A.: *Podstawy elektromagnetyzmu matematycznego.* Instytut Naukowo-Badawczy ZTUREK, 2001.

96. Krutz G. W., Segerlind L. J.: *Finite Element Analysis of Welded Structures.* Welding Journal, 57(7):p.211s–216s, July 1978.

97. Kuang J. H., Liu A. H.: *A Study of the Strees Concentration Factor on Spot Welds.* Welding Journal, 69(12):p.469s, December 1990.

98. Kubiszyn I.: *Sterowanie procesami zgrzewania.* Prace Instytutu Spawalnictwa, 5, 1979.

99. Kucharczyk P.: *Poradnik Inżyniera - matematyka,* tom I/II. PWT, Warszawa 1986.

100. Laczek S.: *Wprowadzenie do systemu elementów skończonych ANSYS (Ver. 5.0 i 5-ED).* Wyd. Pol. Krak., Kraków 1999.

101. Landau L., Lipszic E.: *Elektrodynamika ośrodków ciągłych.* PWN, Warszawa 1960.

102. Lei Y., Shi Y., Murakawa H., Ueda Y.: *Numerical analysis of the Effect of Sulfur Content upon Fluid Flow and Weld Pool Geometry for Type 304 Stainless Steel.* Trans. Jap. Weld. Res. Ins., 26:p.1–75, 1997.

103. Lewis R. W., Morgan K., Thomas H. R., Seetharamu K. N.: *The Finite Element Method in Heat Transfer Analysis.* John Wiley and Sons, Chichester-New York-Brisbane-Toronto-Singapore 1996.

104. Liang T. H., Tsai C. L., Prucher B., Dickinson D.: *Modeling of Contact Resistance Effect on Temperature Distribution in Resistance Spot Welding of Galvanized Steel Sheets.* 8-10:p.61–68, December 1993.

105. Lin C. J., Duh J. G., Liao M. T.: *Influence of weld parameters on the mechanical properties of spot-welded Fe-Mn-Al-Cr.* Journal of Material Science, 28:p.4767–4774, 1993.

106. Lin C. J., Liao M. T., Duh J. G.: *Effect of surface treatment on the spot weldability of Fe-Mn-Al-Cr.* 1993.

107. Majchrzak E.: *Zastosowanie metody elementów brzegowych w termodynamice procesów odlewniczych.* Zeszyty Nauk. Pol. Śl. Mech., z.102:s.607–612, 1991.

108. Majchrzak E., Mochnacki B.: *Metody numeryczne, podstawy teoretyczne, aspekty praktyczne i algorytmy.* Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1994.

109. Majchrzak E., Mochnacki B.: *Modelowanie krzepnięcia stopów metodą elementów brzegowych.* Archiwum Technologii Budowy Maszyn, Zeszyt 10, 1992.

110. Malczewski J., Piekarski M.: *Modele transportu masy, pędu i energii.* PWN, Warszawa 1992.

111. Massalski J., Massalska M.: *Fizyka dla inżynierów cz.1 Fizyka klasyczna.* Warszawa 1981.

112. Matusiak R.: *Elektrotechnika teoretyczna. Teoria pola elektromagnetycznego.* WNT, Warszawa 1982.

113. Mochnacki B., Suchy J.: *Modelowanie i symulacja krzepnięcia odlewów.* PWN, Warszawa 1996.

114. Moore J. E., Bibby M. J., Goldak J. A.: *The Significance of the Point Source Model Assumptions on Weld Cooling Times.* IIW, No. 212-604-85, 1985.

115. Morawiecki M., Sadok L., Wosiek E.: *Przeróbka plastyczna. Podstawy teoretyczne.* Wydawnictwo "Śląsk", Katowice 1986.

116. Morawski T., Gwarek W.: *Teoria pola elektromagnetycznego.* WNT, Warszawa 1978.

117. Myhr O. R., Grong O.: *Process modelling applied to 6082-T6 aluminium weldments - I. Reaction kinetics.* Acta Metall. Mater., 39:p.2693–2702, 1991.

118. Myhr O. R., Grong O.: *Process modelling applied to 6082-T6 aluminium weldments - II. Applications of model.* Acta Metall. Mater., 39:p.2693–2702, 1991.

119. Na S. J., Park S. W.: *A Theoretical Study on Electrical and Thermal Response in Resistance Spot Welding.* Welding Journal, 75(8):p.233–241, August 1996.

120. Nadkarni A. V., Weber E. P.: *A New Dimension in Resistance Welding Elektrode Materials.* Welding Journal, (5):p.331s–338s, May 1977.

121. Nied H. A.: *The Finite Element Modeling of the Resistance Spot Welding Process.* Welding Journal, 63(4):p.23–32, April 1984.

122. Nied H. A.: *The Finite Element Simulation of the Upset Welding Process.* Trans. of the ASME, J. of Eng. for Gas Turbines and Power, 115:p.184–192s, 1993.

123. Nigmatulin R. I.: *Osnowy mechaniki geterogennych sred.* Nauka, Moskwa 1978.

124. Orłoś Z.: *Naprężenia cieplne.* PWN, Warszawa 1991.

125. Paley Z., Hibbert P. D.: *Computation of Temperatures in Actual Weld Designs.* Welding Journal, 54(11):p.385s–392s, November 1975.

126. Paley Z., Lunch J. N., Adams C. M.: *Heat Flow in Welding Heavy Steel Plate.* Welding Journal, 43(2):p.71s–79s, February 1964.

127. Pan R., Watt D. F.: *Simulating Microstructure Development in High-Carbon Steel Cross-Wire Welding.* Welding Journal, 74(12):p.385s – 395s, December 1995.

128. Papkala H.: *Rozwój technologii zgrzewania oporowego metali.* Biuletyn Instytutu Spawalnictwa, 4:s.42 – 46, 1995.

129. Papkala H., Pietras A.: *Nowe możliwości badawcze w dziedzinie zgrzewania oporowego.* Biuletyn Instytutu Spawalnictwa, 2, 1992.

130. Parkitny R., Pawlak A., Piekarska W.: *Analysis of the Temperature Field and the Heat-Affected Zone in Single-V Butt Weld with Broad Root Face.* A.Niku-Lari, editor, Technology Transfer Series, Welding, 1991.

131. Parkitny R., Pawlak A., Piekarska W.: *Temperature Fields and Stress States in Welded Tubes of Rectangular Cross Section.* Mechanical Effects of Welding, 1991.

132. Parkitny R., Pawlak A., Piekarska W.: *Thermal model of submerged arc welding.* Materials Science and Technology, 8:p.841–843, 1992.

133. Perzyk M., Waszkiewicz S., Kaczorowski M., Jopkiewicz A.: *Odlewnictwo.* WNT, Warszawa 2000.

134. Perzyna P.: *Teoria lepkoplastyczności.* PWN, Warszawa 1966.

135. Potter D.: *Metody obliczeniowe fizyki.* PWN, Warszawa 1982.

136. Prochorov A. N., Czakajev A. A., Jurin O. G.: *Matematiczeskaja model' processa kontaktnoj toczecznoj svarki.* Svarocznoje Proizvodstwo, 4:s.39–44, 1991.

137. Prowans S.: *Struktura stopów.* PWN, Warszawa 2000.

138. Przybyłowicz K.: *Metaloznawstwo.* WNT, Warszawa 1992.

139. Radaj D.: *Heat Effects of Welding.* Springer-Verlag, Berlin 1992.

140. Radaj D., Giering A.: *Local stress of newly proposed spot-welded spesimens.* IIW, Doc. III-1012-93, 1993.

141. Radaj D., Zhang S.: *Geometrically nonlinear behaviour of spot welded joints.* IIW, Doc. III-1011-93, 1993.

142. Rammerstorfer F.G., Fischer D.F., Mitter W., Bathe K.J.: *On thermo-plastic analysis of heat-treatment processes including creep and phase changesOn thermo-plastic analysis of heat-treatment processes including creep and phase changes.* Computer and Structures, 13:p.771–779, 1981.

143. Rappaz M.: *Modelling of microstructure formation in solidification processes.* International Material Reviews, 34:p.93–123, 1989.

144. Rawa H.: *Elektryczność i magnetyzm w technice.* PWN, Warszawa 1994.

145. Rice W., Funk E. J.: *An Analytical Investigation of the Temperature Distributions During Resistance Welding.* Welding Journal, 46(4):p.175s–186s, April 1967.

146. Roswell S. L.: *Resistance welding of hot-dipped galvanised steel.* Metal Construction, April 1978.

147. Rykalin N. N.: *The Calculation of Thermal Processes in Welding.* Maszgiz, Moskwa 1951.

148. Rykalin R. R.: *Energy Sources for Welding.* International Institute of Welding, London 1974.

149. Rymarz Cz.: *Mechanika ośrodków ciągłych.* PWN, Warszawa 1993.

150. Sala A.: *Radiacyjna wymiana ciepła.* WNT, Warszawa 1982.

151. Sala A.: *Radiant properties of materials.* PWN-Elsevier, Warszawa 1986.

152. Satonaka S., Takashima T., Terada K., Nishiwaki T., Kohno Y.: *Ultrasonic Evaluation of Fusion and Solid-Phase Bonding in Spot Welds.* IIW, Doc. III-1045-95, 1995.

153. Savage W. F., Nippes E. F., Wassell F. A.: *Dynamic contact resistance of series spot welds.* Welding Journal, 57(2):p.43, February 1978.

154. Sawhill J. M., Baker J. C.: *Spot Weldability of High-Strength Sheet Steels.* Welding Journal, 59(1):p.19s–30s, January 1980.

155. Sczygiol N.: *Modelowanie numeryczne zjawisk termomechanicznych w krzepnącym odlewie i formie odlewniczej.* Wyd. Pol. Częstochowskiej, Częstochowa 2000.

156. Sedov L. I.: *Mechanika splosznoj sredy.* Nauka, Moskva 1983.

157. Senkara J., Zhang H.: *Cracking in Spot Welding Aluminium Alloy AA5754.* Welding Journal, 78:p.194s–201s, July 2000.

158. Siegel R., Howell J.: *Thermal radiation heat transfer.* Hemisphere Publishing Corp., New York 1989.

159. Sikora R.: *Teoria pola elektromagnetycznego.* WNT, Warszawa 1997.

160. Skoczkowski T.: *Modelowanie i symulacja sprzężonych zjawisk polowych w urządzeniach elektrotermicznych - Podstawy teoretyczne.* Instytut Naukowo-Badawczy ZTUREK, 2000.

161. Skrzypek J.: *Plastyczność i pełzanie.* PWN, Warszawa 1986.

162. Sobiś T.: *Zgrzewanie punktowe. Zależność od właściwości fizycznych metali i stopów.* Przegląd Spawalnictwa, (7-9):s.17–21, July 1991.

163. Sobotka Z.: *Tensorial Expansion in Non-Linear Mechanics.* Academia Praha, Praha 1984.

164. Stefaniak W.: *Numeryczne modelowanie krzepnięcia stopu z ujęciem struktury.* Konferencja Naukowa NOWOCZESNE OSIĄGNIĘCIA METALOZNAWSTWA, 2:s.211–222, 1992.

165. Szargut J., *i inni*: *Modelowanie numeryczne pól temperatury.* WNT, Warszawa 1992.

166. Szmatko O. A., Usow J. W.: *Struktura i swojstwa mietałłow i spławow - elektriczeskije i magnitnyje swojstwa mietałłow i spławow.* Naukowa Dumka, Kijew 1987.

167. Szymański A.: *Kontrola jakości w spawalnictwie*, tom 2. Wyd. Pol. Śl., Gliwice 1998.

168. Szymański A.: *Modelowanie procesu zgrzewania punktowego.* Materiały Konferencyjne Sympozjum Katedr i Zakładów Spawalnictwa, Gliwice, wrzesień 1994. Pol.Śl.

169. Szymański A.: *Rezystancja dynamiczna obszaru zgrzewania punktowego.* Achievements in the Mechanical and Material Engineering, tom December 5-7, 1994.

170. Szymański A.: *Nugget growth in resistance spot welding.* Achievements in the Mechanical and Material Engineering, May, 1995.

171. Szymański A.: *Numerical modelling of resistance spot welding with structure formation.* Proc. of the Int. Conference on the Joining of Materials, May 31th - June 2nd, 1995.

172. Szymański A.: *Badanie rozkładu temperatury przy zgrzewaniu punktowym z wykorzystaniem promieniowania podczerwonego.* Sympozjum Katedr i Zakładów Spawalnictwa, Gliwice, 1997.

173. Szymański A., Klimpel A., Stefaniak W.: *Symulacja numeryczna procesu zgrzewania punktowego.* Symulacja procesów dynamicznych, 13–17 czerwca, Polana Chochołowska 1994.

174. Tanaka S.: *Temperature Distribution in a Finite Thick Plate due to a Moving Heat Source.* Journal of Japan Welding Society, 13:347, 1943.

175. Taylor C., Hughens T.G.: *Finite Element Programming of the Navier - Stokes Equations.* Pineridge Press Limited, 1981.

176. Thomas B. G., Samarasekera I. V., Brimacombe J. K.: *Comparison od Numerical Modeling Techniques for Complex Two-Dimensional, Transient Heat-Conduction Problems.* Metallurgical Transactions, B, 15B:p.307–318, 1984.

177. Thompson R. G., Liu Y.: *Simulation of HAZ Grain Growth.* Metallurgical Transactions, B, 15B:p.314 – 320, 1984.

178. Thornton P. H., Krause A. R., Davies R. G.: *Contact Resistance in Spot Welding.* Welding Journal, 75(12):p.402s–412s, 1996.

179. Thornton P. H., Krause A. R., Davies R. G.: *Contact Resistance of Aluminium.* Welding Journal, 76(8):p.331s–341s, August 1997.

180. Trajdos T.: *Matematyka dla inżynierów.* WNT, Warszawa 1974.

181. Tretjakow A. W., Zjuzin W. I.: *Mechaniczeskoje swojstwa metałłow i spławow pri obrabotke dawleniem.* Metalurgija, Moskwa 1973.

182. Tsai C. L., Dai W. L., Dickinson D. W., Papritan J. C.: *Analysis and Development of a Real-Time Control Methodology in Resistance Spot Welding.* Welding Journal, 70(12):p.339s–351s, December 1991.

183. Tsai C. L., Jammal O. A., Papritan J. C., Dickinson D. W.: *Modeling of Resistance Spot Weld Nugget Growth.* Welding Journal, 71(2):p.47s–54s, February 1992.

184. Tsirelman N. M.: *The isotherms migration method in the theory and practice of heat and mass transfer investigation. Part I: Kinematics of temperature fields.* Int. J. Heat and Mass Transfer, 35:p.2983–2995, 1992.

185. Tsirelman N. M.: *The isotherms migration method in the theory and practice of heat and mass transfer investigation. Part II: Numerical-analytical determination of temperature fields.* Int. J. Heat and Mass Transfer, 35:p.2997–3008, 1992.

186. Vogler M., Sheppard S.: *Electrical Contact Resistance under High Loads and Elevated Temperatures.* Welding Journal, 72(6):p.231s–238s, June 1993.

187. Waiss D., Franz U., Schmidt J.: *A Model of Temperature Distribution and Weld Pool Deformation during Arc Welding.* Welding Journal, 72(1):p.1s – 18s, January 1993.

188. Wasiunyk P.: *Teoria procesów kucia i prasowania.* WNT, Warszawa 1982.

189. Weber G.: *Quality of welds and dynamic current-voltage response during resistance spot welding with alternating current.* Schweissen und Schneiden, 7:s.15–18, 1995.

190. Wei P.S., Wang S.C., Lin M.S.: *Transport Phenomena During Resistance Spot Welding.* Trans. of the ASME, J. of Heat Transfer, 118(8):p.762–773, August 1996.

191. Wei P. S., Ho C. Y.: *Axisymmetric Nugget Growth During Resistance Spot Welding.* Trans. of the ASME, J. of Heat Transfer, 112(6):p.309–315, May 1990.

192. Wei P. S., Yeh F. B.: *Factors Affecting Nugget Growth With Mushy-Zone Phase Change During Resistance Spot Welding.* Trans. of the ASME, J. of Heat Transfer, 113(8):p.643–649, August 1991.

193. Węgrzyn J.: *Fizyka i metalurgia spawania.* Wyd. Pol. Śl., Gliwice 1990.

194. Williams N. T.: *Metallurgical aspects of resistance spot welding of mild steel.* IIW, Doc. 111-656-80, 1980.

195. Wiśniewski S., Wiśniewski T. S.: *Wymiana ciepła.* WNT, Warszawa 1997.

196. Wituszkin W. C., Morgun A. A., Isajew A. P.: *Metodika razcziota termoelektryczeskich efektow pri kontaktnoj toczecznoj swarkie.* Svarocznoje Proizvodstwo, (4), April 1995.

197. Wituszkin W. C., Morgun A. A., Isajew A.P.: *Wlijanie effekta Peltie'ra na formirowanie litogo jadra pri kondensatornoj kondensatornoj swarke.* Svarocznoje Proizvodstwo, (4):s.10–11, April 1995.

198. Yamamoto T., Okuda T.: *A study of spot welding of heavy gauge mild steel.* Welding in the World, 9:p.234–255, 1991.

199. Yeung K. S., Thornton P. H.: *Transient Thermal Analysis of Spot Welding Electrodes.* Welding Journal, 78(3):p.1s–6s, January 1999.

200. Zahn M.: *Pole elektromagnetyczne.* PWN, Warszawa 1989.

201. Zajac J., Drabek D.: *Numerical Model of Resistance Spot Welding.* IIW, Doc. III-910-88, 1988.

202. Zhang H.: *Expulsion and Its Influence on Weld Quality.* Welding Journal, 78:p.373s–380, November 1999.

203. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L.: *The Finite Element Method.* Butterworth-Heinemann, Linacre House, Jordan Hill, Oxford OX2 8DP 2000.

Modelowanie procesu zgrzewania oporowego punktowego

Streszczenie

W pracy przeprowadzono analizę i wyprowadzono równania opisujące, z różnym stopniem przybliżenia, pole elektromagnetyczne w zgrzewanych materiałach i elektrodach, posiadających zdolność przewodzenia prądu elektrycznego oraz określone własności magnetyczne. Uzyskane równania uwzględniają wpływ prędkości deformacji fazy stałej lub prędkości płynięcia fazy ciekłej, a także prędkości płynięcia ujednorodnionej mieszaniny dwufazowej w strefie przejściowej kształtującej się zgrzeiny, na zachowanie się pola elektromagnetycznego (sprzężenie pól: elektromagnetycznego i mechanicznego). Wyniki uzyskano dla prądu stałego oraz przemiennego o niskiej częstotliwości dla materiałów niejednorodnych termicznie. Podano równania transportu energii w polu elektromagnetycznym dla każdego z wymienionych rodzajów prądu, ze wskazaniem członu będącego źródłem generacji ciepła Joule'a-Lenza zależnie od rodzaju prądu. Równania te mają podstawowe znaczenia przy modelowaniu procesu zgrzewania. Obecność członu źródłowego opisuje jednocześnie mechanizm wpływu pola elektromagnetycznego na pole temperatury, tzn. mechanizm sprzężenia tych pól. Wskazano racjonalne uproszczenia prowadzące do rozprzężenia otrzymanego układu cząstkowych równań różniczkowych, tak by możliwe było rozwiązywanie oddzielnych, uproszczonych równań przy użyciu komercyjnego pakietu programów ANSYS. Pakiet ten pozwala na rozwiązywanie tak postawionych zagadnień brzegowych metodą elementów skończonych. Zastosowanie nieliniowych modeli materiałowych (niejednorodność termiczna) spowodowało zbliżenie się z otrzymywanymi wynikami do rozkładów otrzymywanych z badań doświadczalnych. Kolejnym rozwiązanym problemem jest uzyskany rozkład gęstości przepływającego prądu przez warstwy będące w kontakcie, a właściwie elementy będące na skraju obszaru przewodzenia.

Badania doświadczalne, polegające na wykonaniu prób zgrzewania wybranych elementów o różnej grubości z jednoczesną rejestracją dynamicznych parametrów elektrycznych, z termograficznym pomiarem temperatury, pomiarem kształtu oraz wymiarów zgrzein głównie na podstawie badań metalograficznych, potwierdziły poprawność założeń przyjętych w procesie modelowania oraz wystarczającą dla praktyki dokładność obliczeń numerycznych.

Słowa i zwroty kluczowe: zgrzewanie oporowe punktowe, modelowanie matematyczne, symulacja numeryczna, metoda elementów skończonych

Dziedziny: inżynieria materiałowa, spawalnictwo, zgrzewanie oporowe

Modelling of resistance spot welding

Summary

This work presents an analysis and derived equations describing various degrees of approximation of the electromagnetic field in welded materials and electrodes, displaying the ability of conducting electric current as well as definite magnetic properties. The obtained equations take into account the effect of the rate of deformation of the solid phase or flow rate of the liquid phase and also the flow rate of the homogenous biphase mixture in the transient zone of the forming spot weld on the behaviour of the electromagnetic field (coupling of the electromagnetic and mechanical fields). The obtained results concern both direct and alternating currents of a low frequency for thermally heterogenous materials. Equations for the transport of energy in the electromagnetic field have been derived for each mentioned kind of current, indicating the element which is the source of Joule-lenz heat, depending on the kind of current. This equations are of fundamental importance when modelling the process of resistance spot welding. The presence of the source element describes also the mechanism of the influence of the electromagnetic field on the temperature field i.e. the mechanism of the coupling of these fields. Rational simplifications have been indicated, which lead to the uncoupling of the obtained system of partial differential equations, so that it has become possible to solve separate simplified equations by means the commercial software permits to solve such boundary problems applying the method of finite elements. The application of nonlinear material models (thermal heterogeneity leads to an approximation of the obtained results of calculations of the experimental results. Another problem is the obtained distribution of the density of the current flowing through the layers contacting the boundary of the conductive zone.

Experimental investigations consisting in carrying out resistance spot welding of selected materials of various thicknesses, recording at the same time the dynamic electric parameters and infrared measurements of temperature, measurements of the shape and dimensions of the resistance spot weld, particularly basing on metallographic tests have prooved the conformity of the assumptions concerning the modelling process and adequate correctness of numerical calculations.

Key words and phrases: resistance spot welding, mathematical modelling, numerical simulation, finite element method

Domains: physical metallurgy, welding, resistance welding

Skorowidz rzeczowy

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ
ul. Akademicka 5, 44-100 Gliwice; tel.(0-32) 237-13-81
http://loki.polsl.pl/wydawnictwo

Sprzedaż i Marketing
tel. (0-32) 237-18-48
wydawnictwo_mark@polsl.pl

Nakł. 100+50 Ark. wyd.10,5 Ark. druk.10,5 Papier offset. 70x100, 80 g
Oddano do druku 12.07.2004 r. Podpisano do druku 12.07.2004 r. Druk ukończ. w lipcu 2004 r.

Druk wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach, ul. Kujawska 1
zam. 254/04

Książki Wydawnictwa można nabyć w księgarniach

GLIWICE

- Punkt Sprzedaży – ul. Akademicka 2 (237-17-87)
- „FORMAT" – Akademicka 5 (architektura i budownictwo)
- „LAMBDA" – ul. Akademicka 2 (237-21-40)
- Punkt Sprzedaży – ul. Akademicka 16 (automatyka, elektronika, informatyka)
- „ŻAK" – ul. Kaszubska

RYBNIK

- „ORBITA" – ul. Rynek 12
- „NEMEZIS" – ul. Hallera 26

ŁÓDŹ

- „POLITECHNIKA 100" – ul. Żeromskiego 116 PŁ.
- Hurtownia „BIBLIOFIL" – ul. Jędrowizna 9a (042) 679-26-77

KATOWICE

- Punkt Sprzedaży – ul. Krasińskiego 8
- Hurtownia „DIK" – ul. Dulęby 7 (032) 204-82-30
- Hurtownia „JERZY" – ul. Słoneczna 24 (258-99-58)

TYCHY

- „I Ja Tours" - ul. Piłsudskiego 10 (217-00-91 w.130)

ZABRZE

- Punkt Sprzedaży – ul. Roosevelta 26

KRAKÓW

- Techniczna – ul. Podwale 4 (012) 422-48-09
- Punkt Sprzedaży WND – AGH, Al. Mickiewicza 30

GDAŃSK

- EKO-BIS – ul. Dyrekcyjna 6 (058) 305-28-53

WARSZAWA

- Studencka – Pl. Politechniki 1 (022) 628-77-58
- Techniczna - ul. Kaliskiego 15 (022) 666-98-02
- Techniczna – ul. Świętokrzyska 14
- MDM – ul. Piękna 31

BIAŁYSTOK

- Dom Książki (Księgarnia 84) – ul. Wiejska 45 c

POZNAŃ

- Księgarnia „POLITECHNIK" – ul. Piotrowo 3 (061) 665-23-24
- Księgarnia Techniczna – ul. Półwiejska 28 (061) 659-00-38

NOWY SĄCZ

- Księgarnia „ATOM" – ul. Hoffmanowej 3 (018) 446-08-72

Druk: Drukarnia Gliwice, ul. Zwycięstwa 27, tel. 230 49 50

/ydawnictwo Politechniki Śląskiej
4-100 Gliwice, ul. Akademicka 5
el./fax (0-prefiks-32) 237-13-81
ttp://loki.polsl.pl/wydawnictwo
przedaż i Marketing:
el. (0-prefiks-32) 237-18-48,