# BIBLIOTHECA MATHEMATICA.



## ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE
## DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN.

HERAUSGEGEBEN VON

GUSTAF ENESTRÖM
IN STOCKHOLM.

DRITTE FOLGE. SIEBENTER BAND.

MIT BILDNISSEN VON LEONHARD EULER ALS TITELBILD,
SOWIE 38 TEXTFIGUREN.



LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1906—1907.

# Inhaltsverzeichnis.

## Autoren-Register.



## Sach-Register.

## Allgemeines über Geschichte der Mathematik.



## Geschichte des Altertums.



## Geschichte des Mittelalters.

## Geschichte der neueren Zeit.

---


Das 1. Heft dieses Bandes (S. 1—112) wurde am 26. Juli 1906 ausgegeben
„ 2. „ „ „ (S. 113—224) „ „ 16. Oktober „ „
„ 3. „ „ „ (S. 225—320) „ „ 26. Februar 1907 „
„ 4. „ „ „ (S. 321—442) „ „ 25. Juni „ „


---

**Verbesserungen.**

Seite 118 Zeile 24 statt $3a^2 + 6ab + 3b^2$ lies $3a^2 + 3ab + b^2$
„ 219 „ 15 „ $\varphi(n) = n$ „ $\varphi(n) = n^2$

---

# Die Geschichte der Mathematik als Bestandteil der Geschichte der Wissenschaften.

Von G. Eneström in Stockholm.

In meinem Aufsatze *Die Geschichte der Mathematik und der Universitätsunterricht*[1]) hatte ich, unter Verweisung auf einen Artikel von Paul Tannery, hervorgehoben, daß man von einer allgemeinen Geschichte der Wissenschaften[2]) noch keine klare Vorstellung hat. Fast gleichzeitig mit dem Erscheinen meines Aufsatzes veröffentlichte Tannery eine kleine Arbeit,[3]) die ursprünglich dazu bestimmt war, die erste einer Reihe von Vorlesungen am „Collége de France" zu sein, worin er die allgemeine Geschichte der Wissenschaften zu behandeln beabsichtigte. In dieser Arbeit versuchte er einen Beitrag zur Klärung der betreffenden Vorstellung zu bieten und dabei auch die Stellung der Geschichte der besonderen Wissenschaften, (in erster Linie der Mathematik) zu dieser allgemeineren Geschichte zu bestimmen.

Tannery will zwei Arten der Geschichte der Wissenschaften unterscheiden, nämlich die allgemeine und die spezielle Geschichte. Die letztere besteht nach ihm nur aus einer Zusammenstellung der Geschichten der einzelnen Wissenschaften, und zwar soll die Behandlung jeder Wissenschaft von der Art sein, die ich in einem früheren Aufsatze[4]) „rein fachmäßig" genannt habe. Innerhalb der allgemeinen Geschichte der Wissenschaften soll dagegen nach Tannery die Geschichte der Mathematik keine besondere Abteilung bilden, und eine rein fachmäßige Darstellung soll auch nicht vorkommen. Nicht nur solche Gegenstände sind darin zu vermeiden, die von untergeordnetem Interesse sind, sondern auch solche, die dem gebildeten

---

1) G. Eneström, *Die Geschichte der Mathematik und der Universitätsunterricht*; Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, S. 65.

2) Ich brauche auch in diesem Artikel der Kürze halber das Wort „Wissenschaften" als Übersetzung des französischen „sciences".

3) P. Tannery, *De l'histoire des sciences;* Revue de synthese historique 8, 1904, S. 1—16.

4) G. Eneström, *Über kulturhistorische und rein fachmäßige Behandlung der Geschichte der Mathematik;* Biblioth. Mathem. $4_3$, 1903, S 1—6.

Publikum unverständlich sein würden. Folglich wird die allgemeine Geschichte der Wissenschaften in betreff der Mathematik eigentlich die kulturhistorischen und biographisch-literarischen Bestandteile und noch dazu die Elementarmathematik berücksichtigen. Diese Bestandteile, sowie die ähnlichen Bestandteile der Geschichte der anderen Wissenschaften, sollen in chronologischer Ordnungsfolge zusammengearbeitet werden, und dadurch entsteht nach Tannery die allgemeine Geschichte der Wissenschaften.

Tannery ist also der Ansicht, daß die zwei Arten von Geschichte der Wissenschaften, nämlich die allgemeine und die spezielle, sowohl in betreff des Inhaltes als hinsichtlich der Darstellungsweise wesentlich verschieden sein sollen. Ziehe ich zuerst in Betracht die Frage über den Inhalt, so geht unmittelbar aus meinem soeben zitierten Artikel *Über kulturhistorische und rein fachmäßige Behandlung der Geschichte der Mathematik* hervor, daß ich in betreff der speziellen Geschichte der Wissenschaften mit Tannery einig sein muß. Anders liegt dagegen die Sache, wenn es sich um den Inhalt der allgemeinen Geschichte der Wissenschaften handelt. Freilich sind diese Worte nicht so zu deuten, als ob Tannerys Ausführungen meines Erachtens unrichtig wären. Er hat selbst ausdrücklich darauf hingewiesen, daß es verschiedene Ansichten in betreff der allgemeinen Geschichte der Wissenschaften geben kann oder sogar geben muß, und in seiner Arbeit *De l'histoire des sciences* wollte er nur seine persönliche Ansicht darlegen. Er fügte hinzu, daß man augenblicklich, bevor eine allgemeine Geschichte der Wissenschaften wirklich vorhanden ist, nicht sagen darf: so und so *muß* die Geschichte beschaffen sein, sondern nur: so und so *kann* sie beschaffen sein. Nun bin ich selbst der Tanneryschen Meinung, und ich stelle mir also zunächst die vorliegende Frage unter der folgenden Form: Kann die allgemeine Geschichte der Wissenschaften einen anderen mathematischen Inhalt haben als den von Tannery angegebenen?

Zuerst will ich dann bemerken, daß ich sehr gut verstehe, nicht nur wie Tannery zu seiner Auffassung kam, sondern auch daß er von seinem Gesichtspunkte aus fast notwendigerweise zu dieser Auffassung kommen mußte. Wie schon erwähnt, beabsichtigte er als ordentlicher Professor der Geschichte der Wissenschaften am „Collége de France", wozu er allem Anschein nach als designiert betrachtet werden konnte, Vorlesungen zu halten, und seine kleine Arbeit *De l'histoire des sciences* war ursprünglich dazu bestimmt, die Eintrittsvorlesung zu sein. Will man aber als Universitätslehrer das Studium der Geschichte der Wissenschaften befördern, so ist es klar, daß man in erster Linie die allgemein verständlichen Bestandteile der Mathematik berücksichtigen muß, und dies um so mehr, wenn man der erste wirkliche Vertreter der Geschichte der Wissenschaften sein wird. Auf der anderen Seite ist offenbar, daß die Verständlichkeit eines gewissen mathematischen Begriffes oder Satzes nicht ein solches Merkmal ist, das unter allen Umständen entweder vorhanden ist oder durchaus fehlt, sondern daß es verschiedene Grade der Verständlichkeit gibt, und daß der Grad zuweilen nicht nur von den Kenntnissen, sondern auch von der Intelligenz des Schülers abhängig sein muß.

Aus dem Gesagten dürfte unmittelbar hervorgehen, daß die von mir oben gestellte Frage in betreff des Inhaltes der allgemeinen Geschichte der Wissenschaften bejahend beantwortet werden kann, auch wenn man großes Gewicht auf die Gemeinverständlichkeit dieses Inhaltes legt. In der Tat gibt es eine ganze Menge von Begriffen und Sätzen der höheren Mathematik, die fast ebenso leicht verständlich sind wie die der Elementarmathematik. Beispielsweise sind viele Sätze der Zahlentheorie dieser Art, und aus der Theorie der Kurven kann man beliebig viele Begriffe und Sätze entnehmen, die allgemein verständlich sind. Nun liegt es ja nahe zu bemerken, daß die fraglichen *Sätze* freilich leicht verständlich sind, daß aber die *Beweise* der Sätze nur von denen verstanden werden können, die höhere mathematische Kenntnisse besitzen. Die Bemerkung ist ohne Zweifel richtig, aber in einer allgemeinen Geschichte der Wissenschaften ist es wegen des ungeheueren Materials nur ausnahmsweise möglich, Beweise der Sätze zu bringen, und es ist wohl wenig angebracht, die verständlichen Sätze auszuschließen, nur weil die nicht mitgeteilten Beweise unverständlich wären. Übrigens gibt es gewisse mathematische Sätze, deren Richtigkeit mit einem sehr hohen Grade von Wahrscheinlichkeit ohne besondere mathematische Kenntnisse festgestellt werden kann, z. B. den WILSONschen Satz $1 . 2 . 3 . \cdots (p-1) + 1 \equiv 0 \pmod{p}$.

Wenn es also bewiesen ist, daß die mathematischen Bestandteile einer gemeinverständlichen allgemeinen Geschichte der Wissenschaften nicht nur aus der Elementarmathematik sondern auch aus der höheren Mathematik entnommen werden können, so hat man zu entscheiden, ob es zweckmäßig ist, in dieser Geschichte nur den von TANNERY angegebenen Inhalt zu berücksichtigen. Wie ich schon bemerkt habe, kann ein solches Verfahren ohne Zweifel berechtigt sein, wenn man zum erstenmal Universitätsvorlesungen über allgemeine Geschichte der Wissenschaften halten soll, aber meiner Meinung nach ist es *nur* in diesem Falle zu empfehlen. Offenbar verliert nämlich die Darstellung wesentlich an Interesse, wenn gerade die wichtigsten Errungenschaften der mathematischen Forschung stillschweigend übergangen werden müssen, und besonders muß der Zuhörer (oder Leser) eine verkehrte Vorstellung von der Entwickelung der Mathematik im 19. Jahrhundert bekommen, wenn alles, was sich auf die höhere Mathematik bezieht, ausgeschlossen wird. Ich bin also der Ansicht, daß eine Universitätsvorlesung über allgemeine Geschichte der Wissenschaften sich nicht auf die Elementarmathematik beschränken, sondern so viel als möglich von den wichtigsten Begriffen und Sätzen der höheren Mathematik mitnehmen soll.

Handelt es sich dagegen um eine Darstellung der allgemeinen Geschichte der Wissenschaften, die für das gebildete Publikum oder für die Gelehrtenwelt bearbeitet wird, möchte ich noch einen Schritt weiter gehen, so daß ich die Gemeinverständlichkeit der mathematischen Bestandteile als eine Nebensache betrachte. Gewiß wird dann der mathematische Inhalt vielen Lesern zum größten Teil unverständlich, aber auf der anderen Seite werden sehr viele Leser wenigstens eine allgemeine Vorstellung von der Bedeutung der mathematischen Forschungsarbeit unserer Zeit bekommen, und schon dies ist meines Erachtens ein großer Gewinn.

Vielleicht wird man geneigt sein, gegen das soeben angeführte einzuwenden, daß es auf diese Weise unmöglich werden wird, eine allgemeine Geschichte der Wissenschaften mit Sachkunde zu bearbeiten. Die Einwendung wäre ohne Zweifel begründet, wenn man voraussetzte, daß eine einzige Person das ganze bearbeiten würde, aber anders liegt die Sache, wenn eine Anzahl von Gelehrten sich zusammenschließen um die Arbeit auszuführen, und in unseren Tagen ist eine solche Anordnung gar nicht ungewöhnlich.

Ich gehe jetzt zu der Frage der Darstellungsweise über. In dieser Hinsicht bin ich mit Tannery darüber einig, daß die Bestandteile der allgemeinen Geschichte der Wissenschaften in chronologischer Ordnungsfolge zusammengearbeitet werden sollen. Ich verstehe auch sehr gut, warum Tannery nicht wagte, dieselbe Darstellungsweise für die spezielle Geschichte der Wissenschaften vorzuschlagen, sondern sich damit begnügte, eine Sammlung von Einzeldarstellungen zu empfehlen. Offenbar hat Tannery an das ungeheure Material gedacht, das eine Gesamtdarstellung umfassen würde, und noch dazu die überaus großen Schwierigkeiten in Betracht gezogen, die die Bearbeitung dieses Materials von rein technischem Gesichtspunkte aus darbieten würde; vielleicht bemerkte er auch, daß eine solche Gesamtdarstellung eigentlich auf keinen großen Leserkreis rechnen konnte. Aus genau denselben Gründen bin ich damit einverstanden, daß man zur Zeit von einer speziellen Gesamtgeschichte der Wissenschaften absieht. Dagegen wäre es wohl nicht ganz unmöglich, dieselbe schon jetzt bis zu einem gewissen Grade vorzubereiten, und zwar dadurch, daß man entweder für einzelne Völker oder für gewisse Zeitabschnitte ähnliche Arbeiten in Angriff nimmt.

Das Resultat der vorangehenden Ausführungen ist also:

1. Die Darstellung der allgemeinen Geschichte der Wissenschaften

soll die wichtigsten Errungenschaften der mathematischen Forschung berücksichtigen. Hat die Darstellung irgend einen sehr speziellen Zweck, z. B. für den Universitätsunterricht benutzt zu werden, so soll in jedem einzelnen Falle entschieden werden, in wie weit die Darstellung auf die allgemein verständlichen mathematischen Begriffe und Sätze zu beschränken ist.

2. Es ist zur Zeit angebracht, von der Bearbeitung einer speziellen Gesamtgeschichte der Wissenschaften abzusehen, aber um dieselbe vorzubereiten, könnte man versuchen, für gewisse Völker oder Zeitabschnitte solche Arbeiten herzustellen.

# Haben die alten Inder den Pythagoreischen Lehrsatz und das Irrationale gekannt?

Von HEINRICH VOGT in Breslau.

Die in den Jahren 1901 und 1902 erfolgte Veröffentlichung und Erläuterung des *APASTAMBA-Sulba-Sutra*,[1]) einer der drei Aufzeichnungen der ältesten geometrischen, kultischen Zwecken dienenden Konstruktionsmethoden der Inder, hat einen Umschwung in der Wertung der ältesten indischen Geometrie herbeigeführt, dem M. CANTOR im Archiv der Mathematik und Physik ($8_3$, 1905, S. 63—72) Ausdruck gegeben hat.

Gerade CANTOR hatte 30 Jahre lang durch sein großes Ansehen den Glauben an die Abhängigkeit der indischen Geometrie von der griechischen aufrecht erhalten. Er hatte sich seine Ansicht gebildet im Gegensatz gegen die von THIBAUT aufgestellte Schätzung der indischen Geometrie als eines selbständigen und uralten Ausflusses indischer Geistesart. THIBAUT hatte das *BAUDHAYANA-Sulvasutra* mit Übersetzung und Kommentar herausgegeben[2]) und aus allen drei *Sulbasutren*, deren Verfasser BAUDHAYANA, APASTAMPA, KATYAYANA heißen, einen vergleichenden, sehr eingehenden Auszug höchst planvoll und durchsichtig zusammengestellt,[3]) mit fortlaufendem Kommentar versehen und sein Urteil über das Alter und die Selbständigkeit der Geometrie der Inder aus inneren Gründen hergeleitet.

Weder THIBAUT noch der viel weiter gehende VON SCHROEDER[4]) drangen mit ihren Ansichten durch: den Umschwung herbeizuführen war erst BÜRK beschieden.

BÜRK veröffentlicht das *APASTAMBA-Sulba-Sutra* vollständig in Übersetzung,[5]) führt die innerlichen Gründe THIBAUTS weiter aus und fügt

1) ALBERT BÜRK, *Das APASTAMBA-Sulba-Sutra;* Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft 55, 1901, S. 543—591; **56**, 1902, S. 327—391.

2) The Pandit, a monthly journal of the Benares college devoted to Sanskrit literature (Benares), 9—10, 1875.

3) Journal of the asiatic society of Bengal (Calcutta), 44 : 1, 1875.

4) VON SCHROEDER, *PYTHAGORAS und die Inder* (Leipzig 1884).

5) a. a. O., 56.

ihnen neue, philologische Argumente hinzu.[1]) Er bestätigt und stützt seine Schlüsse, geht aber auch in wesentlichen Punkten über ihn hinaus in dem, was er den alten Indern zu- und den Griechen abspricht.

Die altindische Geometrie ist jetzt ihrer Art nach als selbständig, an Alter der griechischen überlegen erkannt. Die Blütezeit des Opferkults, an den sie geknüpft ist, schließt das 12. vorchristliche Jahrhundert ein ein Beispiel eines Pythagoreischen Dreiecks (15, 36, 39) ist aus dem 8. Jahrhundert überliefert; die *Sulbasutren* werden nicht später als in das 5. oder 4. vorchristliche Jahrhundert gesetzt.[2]) Also die Griechen sind bestimmt nicht, wie man bisher angenommen hatte, die Lehrmeister der Inder gewesen.

Können nun umgekehrt, was zeitlich nicht unmöglich wäre, die Griechen von den Indern gelernt haben? Können sie speziell den Pythagoreischen Lehrsatz und das Irrationale aus indischen Quellen geschöpft haben?

Diese Frage will ich im folgenden durch Untersuchung der Grenzen des altindischen geometrischen Wissens zu beantworten suchen.

## I.

### *Haben die alten Inder den Pythagoreischen Lehrsatz gekannt?*

*Apastamba-Sulba-Sutra* cap. I, 4 und 5 lauten:

1. „Die Diagonale eines Rechtecks bringt beides hervor, was die längere und die kürzere Seite desselben, jede für sich, hervorbringen."
2. „Die Diagonale eines Quadrats bringt eine doppelt so große Fläche hervor."

Wer diese beiden Sätze liest, wird nicht anstehen, die obige Frage zu bejahen.

Aber vertiefen wir die Frage: Welchen Grad von Einsicht in die Gültigkeit dieser Sätze haben die Inder besessen? Waren es empirische Regeln, von deren Gründen und deren Gültigkeitsbereich man keine Kenntnis besitzt, oder offenbart sich in ihnen ein auf Gründen der Anschauung oder des Denkens beruhendes, den Umfang der Gültigkeit nach dem Umfange der Erkenntnisgründe abgrenzendes Wissen?

Satz 2 ist selbst ein Einzelfall. Er ist vollständig erkennbar aus einer Figur wie der bekannten aus dem Platonischen Dialog *Menon*, wo 4 Quadrate zu einem großen Quadrate zusammengeschoben sind und in jedem Einzelquadrat diejenige Diagonale gezogen ist, welche nicht nach

1) a. a. O., 55. — 2) Bürk, a. a. O., 55, S. 544, 553, 556, 551.

der Mitte der ganzen Figur läuft. Bürk macht es durchaus wahrscheinlich, daß auch für die Inder die Anschauung dieser Figur ohne logische Deduktion die volle Einsicht in die Beziehung zwischen Quadrat über der Seite und Quadrat über der Diagonale geliefert hat.

Bedenkt man, was Hankel, Thibaut und Bürk überzeugend betonen, und was ein Blick in die *Sulbasutren* bestätigt, „das Vorwiegen der unmittelbaren Anschauung in der Entwickelung der Geometrie der Inder, welches einen so merkwürdigen Gegensatz bildet gegen die durch Begriffe vermittelte Konstruktion der Sätze bei den Griechen“;[1]) nimmt man hinzu, daß die *Sulbasutren* und die ihnen dienende Geometrie rein praktische Zwecke verfolgen, so wird man die Gedankengänge, die zur Auffindung des Satzes vom Quadrat über der Rechtecksdiagonale geführt haben, sich ganz empirisch und anschaulich denken müssen. Es dürfte deshalb der Bürksche Rekonstruktionsversuch, welcher in ausgiebiger Weise das Umlegen von Gnomonen um ein vorhandenes Quadrat mit ganzzahliger Seite benutzt, auf allgemeine Zustimmung rechnen.[2]) So können die Inder in Verbindung mit der vorher erkannten Eigenschaft der Quadratdiagonale und der vielleicht schon vorher bekannten Rechtwinkligkeit des Dreiecks 3, 4, 5 empirisch auf einen Zusammenhang zwischen der Rechtwinkligkeit gewisser ganzzahliger Dreiecke und der Tatsache gekommen sein, daß gerade in diesen Dreiecken das Quadrat über einer Seite gleich der Summe der Quadrate über den beiden andern ist. In den *Sulbasutren* finden sich im ganzen 8 solche Dreiecks- resp. Rechteckszahlen angeführt, nämlich 3, 4, 5; 5, 12, 13; 8, 15, 17; 12, 16, 20; 7, 24, 25; 15, 20, 25; 12, 35, 37; 15, 36, 39.

Wie wenig systematisch das Auffinden dieser Rechtecke erfolgt ist, läßt sich auch daraus ersehen, daß, wenn man bis zur größten benutzten Diagonale 39 gehen will, ein systematisches Verfahren im ganzen nicht 8, sondern 15 ganzzahlige Rechtecke liefern würde, nämlich außer den angegebenen noch 6, 8, 10; 9, 12, 15; 10, 24, 26; 20, 21, 29; 18, 24, 30; 16, 30, 34; 21, 28, 35. Gerade nach der von Bürk rekonstruierten geometrischen und abzählenden Methode ist Vollständigkeit keineswegs verbürgt und Übersehen mancher Fälle wohl möglich. Auch ist sehr einleuchend, daß die alten Inder Gnomonen von der Breite 6 (für 18, 24, 30), von der Breite 7 (für 21, 28, 35), von der Breite 8 (für 20, 21, 29) nicht erkannten, da sie eben nur bis zur Breite 5 (für 15, 20, 25) fortschritten. Auffällig dagegen und nur durch unsystematisches Verfahren und das rein praktische, nicht auf theoretische Vollständigkeit gerichtete

---

1) Hankel, *Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter*, S. 220.
2) Bürk, a. a. O. 55, S. 560—575. — Cantor, a. a. O. S. 67—69.

Interesse zu erklären ist, daß sie die schmäleren Gnonomen für 6, 8, 10; 10, 24, 25; 9, 12, 15, 16, 30, 34 übersahen.

Daß die Inder nicht noch andere, tiefer gehende Begründungen für ihren Rechteckssatz besaßen, scheint mir zweifellos aus *Baudhayana-Sulba-Sutra*[1]) hervorzugehen. Baudhayana, der von den drei Sutraverfassern am meisten Sinn für Begründung hat, der ungenaue, von den andern überlieferte Methoden nicht hat und genaue Methoden bevorzugt, der somit wohl am meisten mathematisch von den Dreien denkt, und den Thibaut[2]) nennt „entitled to the first place by a clearer and more extensive treatment of the topics in question", fügt allein von ihnen an den Rechteckssatz die Bemerkung: „This is seen in those oblongs the sides of which are three and four, twelve and five, fifteen and eight, seven and twenty-four, twelve and thirty-five, fifteen and thirty-six."

Cantor[3]) nennt dies „den Pythagoreischen Lehrsatz, erläutert an Zahlenbeispielen". Dem Wortlaut nach ist es mehr als eine „Erläuterung"; es ist, wenn man auch nach Bürk in den *Sulbasutren* einen Beweis nicht suchen darf,[4]) eben das, was Baudhayana als „Beweis" für den voraufgehenden Lehrsatz zu geben hat.

Das ist auch die Auffassung Thibauts. Im Anschluß an die Parallelstelle Apastambas: „So many cognizable measurements of the vedi (Altar) exist",[5]) sagt er:[6]) „In this manner Apastampa turns the Pythagorean triangles known to him to a practical use, but after all Baudhayana's way of mentioning these triangles as proving his proposition about the diagonal of an oblong is more judicious. It was no practical want which could have given the impulse to such a research — for right angles could be drawn as soon as one of the „vijneya"[7]) oblongs (for instance that of 3, 4, 5) was known — but the want of some proof which might establish a firm conviction of the truth of the proposition."

Wir sehen: Über gewisse Einzelfälle von ganzzahligen Rechtecken (auf einige mehr oder weniger kommt es nicht an) hat die indische Betrachtung nicht hinausgeführt und hat ihrer Natur nach nicht darüber hinaus führen können.

Auch der Umstand, daß die Sutren den Quadratsatz stets von dem Rechteckssatz trennen, in dem er bei allgemeiner Auffassung doch enthalten ist, hat wohl seine Ursache darin, daß die Erkenntnisgründe für beide Sätze ganz verschieden waren, daß also für den Rechteckssatz kein allgemeiner Anschauungsbeweis vorlag wie für den Quadratsatz.

---

1) Thibaut, Journal S. 235. — 2) Journal S. 228.

3) Cantor, *Geschichte der Mathem.* $1^2$, S. 598 (= $1^1$, S. 544).

4) Bürk, a. a. O. 55, 1901, S. 555. — 5) Vergl. Bürk, a. a. O. 56, 1902, S. 341.

6) Journal, S. 238. — 7) „erkennbare".

Nun könnte man meinen, die Inder haben den Rechteckssatz zwar formell allgemein ausgesprochen, inhaltlich aber darunter nur die bekannten ganzzahligen Fälle begriffen.

Das aber ist bestimmt nicht der Fall. Zwar werden zur Konstruktion des rechten Winkels nur die ganzzahligen Rechtecke benutzt, aber APASTAMPA fügt an die Aufzählung dieser Möglichkeiten die schon oben zitierte Bemerkung (cap. V, 6) „so viele erkennbare Konstruktionen der vedi (Altäre) gibt es“, d. h. so viele ganzzahlige Rechtecke sind vorhanden und können zur Konstruktion rechtwinkliger Altäre benutzt werden. Es liegt hierin erstens das Eingeständnis, daß der Verfasser mehr ganzzahlige Rechtecke nicht kennt, und zweitens setzt die Einschränkung der Brauchbarkeit des Rechteckssatzes zu Konstruktionen auf die „erkennbaren“ Rechtecke die Annahme voraus, daß der Satz auch für „nicht erkennbare“ Rechtecke“, d. h. Rechtecke mit nicht ganzzahligen Seiten und Diagonalen gilt.

Dies findet seine Unterstützung darin, daß der Rechteckssatz ganz geläufig zur Addition und Subtraktion von Quadraten ohne Rücksicht auf ihre Seitengrößen benutzt wird, und daß speziell die trikarani, d. h. die Seite eines Quadrats, welches 3 Flächeneinheiten enthält, hergestellt wird als Diagonale eines Rechtecks, dessen kürzere Seite die Einheit und dessen längere Seite die Diagonale des Einheitsquadrates ist.

Also die alten Inder haben den Rechteckssatz ganz allgemein und ohne Einschränkung ausgesprochen und verwendet; aber ihr Erkenntnisgrund ist kein anderer, als daß in einigen ganzzahligen Fällen Rechtwinkligkeit und Gleichheit zwischen der Quadratsumme der Seiten und dem Quadrat der Diagonale zusammentreffen. Hieraus wird durch unvollständige Induktion geschlossen, daß die Eigenschaft der Quadratsumme stets die Rechtwinkligkeit zur Folge hat, und umgekehrt.

Auch die Induktion und selbst die unvollständige Induktion hat ihren berechtigten Platz in der Geometrie, aber nur als Werkzeug der Erfindung, nicht als endgültiger Erkenntnisgrund. Sie kann auf Wahres wie auf Falsches führen und gibt einer Einsicht keine Notwendigkeit und Allgemeinheit. Das gesteht selbst SCHOPENHAUER zu, der Feind des griechischen diskursiven Denkens, der Freund der indischen Intuition, der stets angerufene Eideshelfer für die Inder gegen die Griechen:[1]) „Diese letztere Art der Erkenntnis ist immer nur Induktion, d. h. aus vielen Folgen, die auf einen Grund deuten, wird der Grund als gewiß angenommen; da die Fälle aber nie vollständig beisammen sein können, so ist die Wahrheit hier auch nie unbedingt gewiß. Diese Art von Wahrheit allein aber hat alle Erkenntnis durch sinnliche Anschauung und die allermeiste Erfahrung.“

---

1) SCHOPENHAUER, *Welt als Wille und Vorstellung* (Werke 1, Buch 1, § 15).

Der wahre Wert des Pythagoreischen Lehrsatzes bei den Indern ist der eines an einigen Einzelfällen glücklich erratenen Zusammenhanges. Wenn sie diesen Zusammenhang als allgemein gültig aussprechen und verwerten, so dürfen wir uns dadurch über die Tragweite ihrer Erkenntnis nicht täuschen lassen: wir erkennen daran nur, daß die alten Inder, mögen wir ihrem intuitiven Spürsinn mit SCHOPENHAUER, HANKEL und VON SCHROEDER jede Bewunderung zollen, doch vom Wesen des geometrischen Denkens und Erkennens sehr weit entfernt waren.

## II.

*Haben die alten Inder das Wesen des Irrationalen erkannt;* d. h. haben sie, wenn auch nur an *einer* Zahl oder *einem* Verhältnis erkannt, daß es durch ganze Zahlen und Brüche nicht genau ausgedrückt werden kann?

Den Weg zur Auffindung des Irrationalen schildert CANTOR folgendermaßen:[1] „Die Hypotenuse (des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks mit der Kathete 1) wurde gemessen. Sie war größer als eine, kleiner als zwei Längeneinheiten. Die mannigfaltigsten Versuche mögen darauf angestellt, andere und andere Zahlenwerte für die gleichen Katheten eingesetzt worden sein, um eine Zahl für die Hypotenuse zu erhalten. Vergebens. Man erhielt wahrscheinlich Zahlen, die dem gesuchten Maße der Hypotenuse nahe kamen; Näherungswerte von $\sqrt{2}$ würden wir sagen.“ Also der erste Schritt ist: man erhält Werte, deren Ungenauigkeit man sich bewußt ist.

CANTOR fährt fort: „Aber es war noch ein Riesenschritt, von der Fruchtlosigkeit der angestellten Versuche auf die aller Versuche überhaupt zu schließen“. Dieser zweite Schritt, in dem man aber statt „schließen“ „vermuten“ sagen sollte, ist gewiß der größte und der eigentliche schöpferische Gedanke, durch den die Idee des Irrationalen ins Bewußtsein tritt. Diesen Schritt hat z. B. ARCHIMEDES getan, indem er auf Grund der vorangegangenen verfehlten Versuche die genaue Rektifikation des Kreises für unmöglich hielt und sich systematisch auf Näherungswerte beschränkte. Aber dieser zweite Schritt ist doch noch nicht der letzte zur Erkenntnis des Irrationalen.

Die Fruchtlosigkeit noch so vieler Versuche kann die Unlösbarkeit eines Problems wohl vermuten, aber nicht sicher erkennen lassen. Auf dem Wege des Probierens kann überhaupt kein Unmöglichkeitsbeweis geliefert werden. Für das praktische Messen, welches, wie F. KLEIN es

---

1) *Geschichte der Mathematik* $1^2$, S. 169 (= $1^1$, S. 154).

glücklich ausdrückt,[1]) dem Bereiche der „Approximationsgeometrie“ angehört, gibt es überhaupt kein Irrationales; denn jedes praktische Messen kommt mit Erreichung der Genauigkeitsgrenze zu abgeschlossenen Maßzahlen. Das Irrationale entspringt erst auf dem Boden der „Präzisionsgeometrie“ (wieder nach KLEIN), und der Nachweis der Unmöglichkeit der Rationalität kann seiner Natur nach nicht anders geführt werden als durch Abstraktionen: entweder das Messen muß unendlich fortsetzbar gedacht werden, was es praktisch nicht ist (Schema des größten gemeinschaftlichen Teilers, Kettenbruch-Algorithmus), oder die Annahme der Rationalität muß durch indirekte Schlußweise auf einen Widerspruch mit Zahlengesetzen geführt werden (Pythagoreischer Nachweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$).[2]) Dieser Unmöglichkeitsbeweis ist der dritte Schritt; ihn hat für die Irrationalität von $\pi$ erst LAMBERT, für die Transszendenz erst LINDEMANN getan.

Wie einfach denkt sich hingegen BÜRK die Entdeckung des Irrationalen! Er sagt:[3]) „Man verglich die Diagonale mit der Seite (des Quadrats), nannte die Differenz visesa (Unterschied) und kam nach langen vergeblichen Versuchen zu der Überzeugung, daß sich eine genaue Zahl für die Diagonale nicht finden lasse. So begnügte man sich mit einem Näherungswert, dem savisesa“. Und noch deutlicher:[4]) „Die Inder haben im Anschluß an ihren 1. Unterfall (den Quadratsatz) für die dvikarani ($= \sqrt{2}$) einen Näherungswert (den savisesa) aufgestellt — offenbar, nachdem sie zuvor das Irrationale entdeckt hatten“.

In Wahrheit wird sich die Entdeckung der Irrationalität, etwa der Diagonale des Quadrats, in den oben entwickelten 3 Schritten vollziehen: 1. Die durch Messen direkt erhaltenen oder daraus abgeleiteten Werte werden als ungenau erkannt, 2. es taucht die Überzeugung von der Unmöglichkeit eines genauen Wertes auf, 3. es wird der Unmöglichkeitsbeweis für die Rationalität geliefert. Wie weit sind die Inder auf diesem Wege gekommen?

Wir müssen uns vor allem hüten, unser Wissen um die Irrationalität rückwärts auf die Inder zu übertragen: Finden wir bei den Indern Werte für die Quadratdiagonale, die wir heute Näherungswerte nennen, so berechtigt uns das keineswegs zu der Annahme, daß sie diese Werte ebenfalls als Näherungswerte einer nicht genau ausdrückbaren Größe erkannt haben. Wir haben zunächst zu untersuchen, ob sie diese Werte überhaupt

1) FELIX KLEIN, *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien* (Leipzig 1902).

2) CANTOR, *Geschichte der Mathematik* $1^2$, S. 170 ($= 1^1$, S. 155).

3) a. a. O. 55, S. 557, Anm. 1. — 4) a. a. O. 55, S. 575, Anm. 1.

für ungenau gehalten haben. Ist dies der Fall, so ist noch der Nachweis des zweiten und dritten Schrittes erforderlich. Sollten sie aber einen oder den andern Wert für genau gehalten haben, dann ist jede weitere Untersuchung überflüssig; dann haben sie das Wesen der Irrationalität bestimmt nicht erkannt.

Alle drei Sutrenverfasser geben für die Länge der Quadratdiagonale übereinstimmend an: „Man verlängere das Maß um seinen dritten Teil und diesen um seinen vierten Teil weniger $\frac{1}{34}$ dieses vierten Teils." Also die Diagonale $= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.34}$ Seite. Der Überschuß der Diagonale über die Seite, also die Größe $\frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.34}$ heißt visesha „Unterschied"; der ganze Ausdruck für die Diagonale heißt savisesha „mit dem Unterschied". Der savisesha ist eine sehr gute Annäherung an den wahren Wert der Diagonale; er ist gleichwertig mit $\frac{577}{408}$, dem 8ten Näherungswert der Kettenbruchsentwickelung von $\sqrt{2}$.

Die Genauigkeit des savisesha-Wertes ist zu groß und seine Form ist zu eigenartig, als daß er rein empirisch gefunden sein könnte. Den wahrscheinlichen Weg der Auffindung, der beide Eigenschaften in befriedigender Weise erklärt und nicht über das geometrische Können der Inder hinausgeht, hat Thibaut in folgender Weise rekonstruiert:[1]) Nimmt man an, daß die Inder auf irgend einem Wege bemerkt hatten, daß in einem Quadrat mit der Seite 12 sich die Summe der beiden Seitenquadrate $144 + 144 = 288$ d. h. das Quadrat der Diagonale nur um eine Einheit von 289, dem Quadrat von 17, unterscheidet, daß also die Diagonale annähernd $= 17$ ist,[2]) so lag es nahe, sich die Frage vorzulegen, um welche Größe die 17 zu verkleinern sei, damit das Quadrat über dieser verkleinerten Strecke genau $= 288$, also um 1 Einheit kleiner als 289 werde. Will man das Quadrat $17^2 = 289$ nach indischer Weise um einen Gnomon $= 1$ verkleinern, so muß man diesem Gnomon die Breite $\frac{1}{34}$ geben; denn ein solcher Gnomon besteht nahezu aus zwei Rechtecken, jedes von der Fläche $17 \times \frac{1}{34} = \frac{1}{2}$. Wan wird also für das Quadrat mit der Seite 12 die gesuchte Diagonalgröße $17 - \frac{1}{34} = 12 + 4 + 1 - \frac{1}{34}$ erhalten, welche Größe, auf die Einheit als Seite reduziert, nichts anderes ist als der savisesha $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.34}$.

1) Thibaut, Journal, S. 239—241.

2) Vergl. die ῥητὴ διάμητρος der Griechen; Fr. Hultsch, Biblioth. Mathem. $1_3$, 1900, S. 8—12.

Haben die Sutrenverfasser den savisesha für einen genauen oder einen ungenauen Wert der Diagonale gehalten?

Eine direkte Andeutung, daß savisesha in anderem Sinne ein Zahlenwert sei wie andere bestimmte Werte, findet sich in keiner der 3 Sutren. So stehen bei APASTAMBA vollständig gleichberechtigt, ohne Andeutung eines Gültigkeitsunterschiedes hintereinander die Sätze (I, 5 und 6): „Die Diagonale eines Quadrats bringt eine doppelt so große Fläche hervor. Das Quadrat dvikarani 'die das doppelte hervorbringende.'" Und „man verlängere das Maß um seinen dritten Teil und diesen um seinen vierten Teil, weniger $\frac{1}{34}$ dieses Teils. savisesha 'mit dem Unterschied'".

Woran will man erkennen, daß der erste Satz eine absolute Wahrheit, der zweite eine bewußte Annäherung ausdrückt?

Ja, wenn man für die Differenz zwischen Diagonale und Seite ein eigenes technisches Wort visesha, „Unterschied", und für die um diese Differenz vergrößerte Seite ein zweites savisesha, „mit dem Unterschied", prägte, so deutet dies wohl positiv auf das Bewußtsein einer genauen Erkenntnis hin. Wie sollte man eine ungenaue Hinzufügung, deren Ersetzbarkeit durch eine bessere man sich bewußt wäre, durch einen eigenen Namen fixieren? Weiter: Nach BAUDHAYANA[1]) wird die Längeneinheit pradesa in 12 anguli (Fingerbreiten) geteilt, 1 anguli aber in 8 yaasv (Gerstenkörner) oder auch in 34 tilas (Sesamkörner).[2]) Von dieser letzteren Teilung sagt THIBAUT:[3]) „I have no doubt that the second division which I have not elsewhere met, owns its origin to the savisesha". In der Tat: ist die Quadratseite 1 pradesa = 12 anguli, so ist die Diagonale nach der savisesha-Regel = 17 anguli weniger 1 tila = 16 anguli 33 tilas, also mit diesen Maßen ganzzahlig ausdrückbar. Ist es denkbar, daß man eine so dauernde Einrichtung, wie die Unterteilung der Maßeinheit und Benennung der Unterteile mit festen Namen, treffen sollte zu Liebe einer Ausmessung, die man selbst für ungenau und wandelbar hält?

Man könnte einwerfen: Die oben nach THIBAUT gegebene, sehr wahrscheinliche Herleitung des savisesha ist tatsächlich ungenau; sie setzt zwei Rechtecke von der Länge 17 und der Breite $\frac{1}{34}$, welche zusammen = 1 sind, gleich dem Gnomon von der äußeren Seite 17 und der Breite $\frac{1}{34}$, während tatsächlich dieser Gnomon um ein Quadrat von der Seitenlänge $\frac{1}{34}$, also der Fläche $\frac{1}{1156}$ kleiner ist als die Summe der

1) THIBAUT, Journal, S. 241. — 2) Pandit 9, S. 293.
3) a. a. O., S. 241.

beiden Rechtecke Waren die Meßmethoden und die Denkart der alten Inder so wenig scharf, daß sie diesen Unterschied gänzlich übersehen und den gefundenen savisesha-Wert für genau halten konnten?

Wir müssen unterscheiden: Wenn wirklich, was wahrscheinlich, aber doch nicht sicher ist, die savisesha-Regel auf dem oben nach THIBAUT gekennzeichneten Wege aufgefunden worden ist, so konnte der Entdecker sehr wohl bemerken, welche Vernachlässigung er beging; denn die genaue Auswertung eines Gnomon lag durchaus im Gesichtskreise altindischer Geometrie und wurde gewohnheitsmäßig ausgeübt.

THIBAUT sagt:[1]) „but we must remember that they were interested in geometrical truths only as far as they were of practical use, and that they accordingly gave to them the most practical expression“. So trieb auch den Entdecker des savisesha gewiß nicht theoretisches, sondern praktisches Interesse. Praktisch war die begangene Vernachlässigung gänzlich belanglos; so wurde der savisesha als strenge Regel überliefert; ob mit oder ohne Bewußtsein der Abweichung von der Genauigkeit, ist nicht zu entscheiden.[2]) Die späteren Geometer, welche nach dieser Regel arbeiteten, konnten nach ihrer Denkweise und nach den Genauigkeitsgrenzen ihrer Meßmethoden gar nicht auf den Gedanken kommen, daß hier eine Regel in anderem Sinne vorliege wie die übrigen Überlieferungen.

Die savisesha-Regel liefert bei einem Quadrat von 10 Metern Seitenlänge die Diagonale um $\frac{1}{50}$ Millimeter zu groß. Die Inder maßen auf dem Erdboden ihre Altäre mit eingeschlagenen Pflöcken und daran gespannten Seilen aus; schwerlich dürfte diese Methode eine größere Genauigkeit als allenfalls Zentimeter verbürgen. Wie sollten in ihnen Zweifel an der Genauigkeit des savisesha aufsteigen, deren theoretischer Fehler weit unterhalb der Grenzen ihrer Genauigkeit blieb?

Nur wenige ihrer Regeln, z. B. der Satz von der Diagonale des Quadrats, der Satz $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, der Gnomonsatz, das Senkrechteerrichten durch 2 gleichschenklige Dreiecke hatten einen allgemein anschaulichen Charakter; die allermeisten, z. B. wie oben nachgewiesen, der Satz von der Diagonale des Rechtecks beruhten auf Ausmessung in Einzelfällen und wurden für allgemein gültig gehalten, wenn die Messung keinen Fehler erkennen ließ. Warum sollten sie über savisesha anders denken? Wir können nicht erwarten, daß sie die Genauigkeit dieser Regel ausdrücklich versichern, wenn sie gar keinen Grund hatten, an ihr zu zweifeln.

---

1) a. a. O., S. 232.

2) Vergl. die unten (S. 17) zitierte Bemerkung BÜRKS zu der ungenauen Vergrößerung des $7\frac{1}{2}$ fachen Altars.

Sehen wir an einigen Beispielen zu, was für Regeln die alten Inder für genau halten konnten! Apastamba gibt cap. III, 1 die Vorschrift: „Wünscht man ein Quadrat in ein Rechteck zu verwandeln, so mache man eine Seite so lang, wie man das Rechteck wünscht. Darauf füge man den Rest hinzu, wie es paßt.“

Alle drei Sutrenverfasser verwandeln ein Quadrat in einen Kreis, indem sie um den Mittelpunkt einen Kreis schlagen, welcher zum Radius die halbe Seite hat, vermehrt um $\frac{1}{3}$ der Differenz zwischen der halben Diagonale und der halben Seite; also $r = \frac{a}{3} + \frac{a}{6}\sqrt{2}$. Apastamba (III, 2) fügt dieser Regel, welche nicht schlecht, aber doch viel ungenauer als die savisesha-Regel ist (es wird $\pi = 3{,}09$ gesetzt), die Versicherung der Genauigkeit bei: „Diese“ (Schnur) „gibt einen Kreis, genau. Soviel als“ (an den Ecken) „verloren geht, kommt“ (an den Seiten des Quadrats) „hinzu“.

Alle 3 Sutrenverfasser geben als Seite eines einem gegebenen Kreise flächengleichen Quadrats $\frac{13}{15}$ des Kreisdurchmessers an. Apastamba versichert wiederum für diese Quadratur (es ist $\pi = 3$ gesetzt!) die Genauigkeit (III, 3): „Die“ (Schnur) „gibt ein Quadrat, genau“ (so groß wie der Kreis).

Eine Hauptform der indischen Altäre ist der falkenförmige oder sogenannte siebenfache: Er besteht aus 7 ganzen Quadraten, von denen 4, zu einem größeren Quadrat zusammengefügt, den Körper des Falken bilden, je ein Quadrat einen Flügel und den Schwanz; jeder Flügel aber ist um $\frac{1}{5}$ Längeneinheit, der Schwanz um $\frac{1}{10}$ Längeneinheit verlängert, so daß zu den 7 ganzen Qnadraten noch 2 Fünftel und 1 Zehntel Einheitsquadrat, im ganzen also $\frac{1}{2}$ Quadrat hinzukommt, und der ganze Altar $7\frac{1}{2}$ Quadrateinheiten enthält. Es ist nun eine Fundamentalaufgabe, diesen Altar um 1 Quadrateinheit zu vergrößern, ohne seine Gestalt zu verändern. *Abastampa-Sulba-Sutra* III, 6: „Was beim 8fachen . . . von dem 7fachen verschieden ist, teile man in 7 Teile und lasse in jeden purusa“ (Quadrateinheit des 7fachen Altars) „1 Teil eingehen, weil eine Veränderung der Gestalt nicht schriftgemäß wäre“. Also es wird die hinzuzufügende Quadrateinheit in 7 gleiche Teile geteilt und neue Quadrate gebildet, von denen jedes $1\frac{1}{7}$ Einheiten enthält. 7 solche neue Quadrate bilden den Körper, den Stamm der Flügel und des Schwanzes für den neuen Falkenaltar und enthalten somit 8 Quadrateinheiten. Die Verlängerungen der Flügel und des Schwanzes aber bekamen die alte Breite von $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{10}$ ursprünglichen Längeneinheiten. So bleibt trotz der kultischen Vorschrift praktisch weder die Gestalt des Falkenaltars unverändert, noch ist die Flächengröße genau $8\frac{1}{2}$ Quadrateinheiten. Die Vernachlässigung beträgt

0,047 Quadrateinheiten, also wiederum viel mehr als der Fehler des savisesha. Bürk bemerkt[1]) hierzu: „Die Frage, wie groß der Inhalt eines vergrößerten agni (Altars) genau, d. h. alles — auch jene Verlängerungen — eingerechnet sei, hat unsern Sutra-Verfasser nicht beschäftigt“.

Bei dem Vorhandensein aller dieser groben Vernachlässigungen scheint es mir unmöglich, den alten Indern und speziell den Sutraverfassern gerade gegen den savisesha eine ganz unerhörte Feinfühligkeit zuzutrauen.

Doch ist nicht zu übersehen, daß die drei Sutrenverfasser sich ungenauen Konstruktionen gegenüber recht verschieden verhalten: besonders tritt der Unterschied zwischen Baudhayana und Apastamba auch hierin hervor.[2])

Baudhayana vermehrt den $7\frac{1}{2}$fachen Altar um 1 Einheit richtig mit voller Wahrung der Gestalt; indem er nämlich jedes der 7 Quadrate in Körper, Flügeln und Schwanz um $\frac{2}{15}$ Einheitsquadrat vergrößert und auf diese Weise $\frac{1}{15}$ der Vermehrung für die Verlängerungen von Flügeln und Schwanz übrig behält.[3]) Einen ganz besonderen Beweis seines kritischen Geistes gibt er, indem er die zur Quadratur des Kreises verwendeten $\frac{13}{15}$ des Durchmessers, deren Genauigkeit Apastamba versichert, „the gross side of the square“ nennt;[4]) eine Kritik, die in den *Sulbasutren* wohl einzig dastehen dürfte. Er allein gibt im Gegensatz zu dieser als „grob“ erkannten Quadratur des Kreises eine genauere Quadratseite an $= \frac{7}{8} + \frac{1}{8.29} - \frac{1}{8.29.6} + \frac{1}{8.29.6.8}$ des Durchmessers. Wie Thibaut überzeugend nachweist,[5]) ist diese Formel die Umkehrung der in allen 3 *Sulbasutren* enthaltenen, oben[6]) angegebenen Regel für Verwandlung des Quadrats in einen Kreis; und zwar hat Baudhayana für diese Umkehrung, welche nicht anders als rechnerisch gemacht werden konnte, nach Thibaut zum Ausdruck der Quadratdiagonale die savisesha-Regel benutzt.

Baudhayana benutzt den savisesha allein zu diesem Zweck; die anderen Sutrenverfasser zur Herstellung von rechten Winkeln und Quadraten, die Kommentatoren zur Berechnung von Diagonalen, „wo immer Diagonalen in Frage kommen“. Wenn Thibaut diese ausgedehntere Verwendung des savisesha vom Standpunkt der Genauigkeit verwirft,[7]) „this proceeding however, is not only useless, but positively wrong, as in all such cases calculation cannot vie in accuracy with geometrical construction“, so ist dem entgegenzuhalten, daß die mit savisesha berechnete

1) a. a. O 55, S. 357. — 2) Vergl. S. 9. — 3) Pandit 10, 73. 4) Pandit 10, 21; Journal, S. 254. — 5) Journal, S. 253, 254. 6) S. 16. — 7) Journal, S. 241.

Diagonale nur um $\frac{1}{500000}$ größer ist als die genaue, und der mit savisesha hergestellte rechte Winkel einen genauen rechten Winkel nur um $\frac{3}{50}$ Bogensekunden übertrifft. Diese durch die Rechnung verschuldeten Überschüsse sind weit kleiner als die unvermeidlichen Ausführungsfehler; ihr Vorhandensein wäre weder zu BAUDHAYANAS Zeit noch heute mit Meßinstrumenten festzustellen. Der Grund für den sparsamen Gebrauch des savisesha bei BAUDHAYANA kann also nicht der von THIBAUT vermutete sein. Vielleicht ist es der, daß die savisesha-Formel gerade zu dem Zwecke ersonnen ist, zu dem BAUDHAYANA sie unentbehrlich findet, nämlich zur Umrechnung der Zirkulatur des Quadrats in die Quadratur des Zirkels, und daß man erst später darauf verfallen ist, sie auch anderen Zwecken dienstbar zu machen. Es wäre dies eine Stütze der aus philologischen Gründen gemachten Annahme, daß BAUDHAYANA älter sei als APASTAMBA.[1])

BAUDHAYANA würde damit der Erfindung der savisesha-Regel näher gerückt werden als die anderen Sutrenverfasser. Sollte er aber, was nicht unmöglich genannt werden kann, selbst der Erfinder der Regel sein, ja, sollte er sogar ihre Ungenauigkeit erkannt haben, wogegen allerdings die gerade bei ihm sich findende Teilung der Längeneinheit in 34 Unterteile spricht, so hätte er zwar den ersten Schritt zur Entdeckung des Irrationalen getan; ihm aber auch den zweiten und dritten zuzutrauen, dafür liegt keine Spur einer Andeutung vor. Den anderen Sutrenverfassern aber dürfen wir aus der Häufung der oben dargelegten Gründe das Bewußtsein von der Ungenauigkeit des savisesha bestimmt absprechen. Ihnen ist nicht einmal jener erste Schritt geglückt. —

Die Rolle eines handgreiflichen Beweises für die Bekanntschaft der alten Inder mit dem Irrationalen haben im letzten Vierteljahrhundert die Worte dvikarani, trikarani usw. gespielt.

CANTOR sagt von den *Sulbasutren:*[2]) „Die Auffindung der Seite eines 2, 3, 10, 40mal so großen Quadrats, als ein gegebenes ist, geschieht durch allmähliche, sich wiederholende Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes ... Dabei erscheinen Namen für $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, usw. gebildet durch Zusammensetzung der Zahlwörter mit dem von uns früher (S. 581, 1. Aufl., S. 527) erörterten Worte karana (THIBAUT, S. 16),[3]) also dvikarani $= \sqrt{2}$, trikarani $= \sqrt{3}$, daçakarani $= \sqrt{10}$, catvarinçakarani $= \sqrt{40}$ usw.“. S. 581 (527) heißt es allgemein, ohne Beziehung auf die *Sulbasutren:* „Über die Potenzbezeichnung hinaus hat sich aber der Inder auch noch zu einer Bezeichnung der *irrationalen Quadratwurzel* einer Zahl mit Hilfe des Wortes karana, geschrieben ka, emporzuschwingen gewußt“. Im Anschluß

1) BÜRK, a. a. O. **55**, S. 552 (Hinweis auf BÜHLER).

2) *Geschichte der Mathematik* **1**$^2$, S. 599 (= **1**$^1$, S. 544).

3) Gemeint ist der Abdruck aus Journal of the Asiatic society, S. 242.

an die erste Stelle sagt von Schroeder:[1]) „Dies ist wiederum von höchstem Interesse, denn es tritt uns hier in den *Çulvasûtras* deutlich das *Irrationale* entgegen“.

Die Cantor-Schroedersche Beweisführung ist nicht stichhaltig; ihr Fehler liegt darin, daß Cantor und von Schroeder nicht zwischen dem Gebrauche der Worte dvikarani usw. in den *Sulbasutren* und in der späteren indischen mathematischen Literatur unterscheiden. Diese Verwechslung ist um so auffälliger, als Thibaut, der Gewährsmann beider, die Notwendigkeit dieser Unterscheidung sehr klar und überzeugend darlegt.

Die *Sulbasutren* gehen fast ausschließlich konstruierend und messend, nicht rechnend vor: „Nothing in the sutras would justify the assumption that they were expert in long calculations“.[2]) Dadurch unterscheiden sie sich vollständig von den späteren, 1000 bis 1500 Jahre jüngeren indischen Mathematikern, auch von ihren Kommentatoren, welche durchaus arithmetisch denken und sich bemühen, die alten geometrischen Wahrheiten, um sie sich und ihren Zeitgenossen verständlich und interessant zu machen, ins Arithmetische zu übersetzen. „A geometrical truth interests the later Indian mathematicians but in so far as it furnishes them with convenient examples for their arithmetical and algebraic rules; purely geometrical constructions, as the samása and nirhára (Addition und Subtraktion) of squares, described in the *Sulvasutras*, find no place in their writings.“[3])

Bei Bhaskara (im 12. Jahrhundert n. Chr.) heißt der spezielle Pythagoreische Lehrsatz: „Die Quadratwurzel der Quadratsumme der Seiten ist die Diagonale“. In den *Sulbasutren* aber heißt es: „Die Diagonale eines Quadrats bringt eine doppelt so große Fläche hervor“. (Die Diagonale) „des Quadrats“ (heißt darum seine) „dvikarani, die das doppelte Hervorbringende“. Das ist der rein geometrische Ausdruck derselben, von Bhaskara algebraisch ausgedrückten Tatsache: In den *Sulbasutren* bedeutet dvikarani nicht $\sqrt{2}$, sondern dvikarani ist die geometrisch konstruierte, nicht die durch Messen oder Rechnen bestimmte Seite eines Quadrats mit der Fläche 2. Jeder Zweifel ist ausgeschlossen durch die bei Katyayana hinzugefügte Erklärung:[4]) By the expressions: karani, karani of that (of any square) etc. we mean cords. Deshalb ist Thibauts Auseinandersetzung unanfechtbar:[5]) „rajja (cord = Seil) is to be supplied to karani“ und „The side of a square being called its karani, the side of a square of

1) *Pythagoras und die Inder*, S. 51. — 2) Thibaut, Journal, S. 238.

3) Thibaut, Journal, S. 271; ebenso das Folgende.

4) Thibaut, Journal, S. 233.

5) a. a. O., S. 233.

double the size was the 'dvikarani', the line producing the double (I shall for convenience sake often employ the terms „side“ or „line“ instead of „cord“); this was therefore the name for the diagonal of a square“.

Gerade weil dvikarani eine im Quadrat durch Konstruktion hergestellte Linie, ja das von Ecke zu Ecke gespannte Seil selbst war, deswegen brauchte man zur Unterscheidung für das Maß derselben Linie einen andern Ausdruck; das eben ist der oben behandelte savisesha.

Wenn nun in der späteren indischen Mathemathik „the word karani is invariably used to denote a surd or irrational number; as the commentators explain it, that of which when the square-root is to be taken, the root does not come out exact“,[1]) so hat sich hier im Laufe vieler Jahrhunderte ein Bedeutungswandel vollzogen: Von der konstruiert vorliegenden Quadratseite ging die Bezeichnung über auf die ausgemessene oder berechnete, und mit Verengerung des Begriffs auf diejenige Maßzahl, welche nicht in anderen Anwendungen, sondern allein als Maß einer Quadratseite auftrat, d. h. als irrationale Quadratwurzel. „And“, so schließt THIBAUT seine Abhandlung, „thus we see that the same word which expressed in later times the highly abstract idea of the surd number, originally denoted a cord made of reeds which the adhvaryu stretched out between two wooden poles when he wanted to please the Immortels by the perfectly symmetrical shape of their altar.“

## III.

Hätten die alten Inder das Wesen des Irrationalen erkannt, so dürfte man aus diesem einen Grunde trotz mancher entgegenstehender Bedenken ihrer Geometrie diejenige Abstraktion und Wissenschaftlichkeit nicht absprechen, ohne welche diese Erkenntnis ganz unmöglich ist. Mit dem Nachweis, daß sie diese Erkenntnis nicht besessen haben, fällt auch diese Nötigung weg.

Die altindische Geometrie war rein praktisch und empirisch, von Abstraktionen wie der Irrationalzahl weit entfernt; hat sie ja doch auch den Pythagoreischen Lehrsatz nur an Einzelfällen probierend erkannt und mit subjektiver Überzeugung ausgesprochen, aber nicht auf den Rang einer objektiv begründeten wissenschaftlichen Wahrheit zu erheben vermocht.

So können die alten Inder in der Geschichte der Mathematik auf keine andere Schätzung Anspruch erheben, als etwa die, welche bisher seit den Zeiten der Griechen die Ägypter genossen haben. Wie die Ägypter zum Zwecke der Feldmessung mancherlei geometrische Tatsachen empirisch bemerkten und praktisch verwendeten,[2]) so die Inder zum Zweck der Kon-

1) THIBAUT, Journal, S. 274.

2) Die Zeugnisse bei CANTOR, *Geschichte der Mathematik* 1², S. 53.

struktion ihrer Altäre. Mag auch ihr Wissen über das der Ägypter erheblich hinausgegangen sein, so können sie in der Geometrie als Wissenschaft die Lehrer der Griechen ebensowenig gewesen sein, wie die Ägypter; aus dem sehr einfachen Grunde, daß beide nicht geben konnten, was sie selbst nicht hatten. Mögen die Griechen stoffliche Anregungen, sozusagen geometrisches Rohmaterial den Völkern des Orients entlehnt haben; nach allem, was wir wissen, bleibt es wahr, wenn PROKLUS[1]) einem Griechen nachrühmt, daß er „*τὴν περὶ αὐτὴν φιλοσοφίαν εἰς σχῆμα παιδείας ἐλευθέρου μετέστησεν, ἄνωθεν τὰς ἀρχὰς αὐτῆς ἐπισκοπούμενος καὶ ἀΰλως καὶ νοερῶς τὰ θεωρήματα διερευνώμενος*". Nicht Orientalen, sondern Griechen haben diese weltgeschichtliche Leistung vollbracht; erst bei ihnen finden wir die Methoden und Theoreme „des immateriellen, abstrakten geometrischen Forschens", die ihnen die ganze vor ihnen und um sie herum existierende Welt nicht hatte geben können.

Mag der Pythagoreische Lehrsatz als empirische Erfahrung zuerst von Indern oder Ägyptern aufgestellt sein, oder mögen sich seine Anfänge im Urwissen der Menschheit verlieren, als wissenschaftliche Tatsache ist er griechisch ebenso wie die Erkenntnis des Irrationalen.

Wir sind meiner Ansicht nach nicht genau genug unterrichtet, um PYTHAGORAS selbst diese Entdeckungen mit Sicherheit zuschreiben zu können;[2]) aber in seiner Schule sind sie bestimmt gemacht worden. Das sehen wir daraus, daß sie zu PLATOs Zeit vorhanden waren und von PLATO und ARISTOTELES den Pythagoreern zugeschrieben werden. —

Wird neuerdings allgemein zugestanden, daß die Griechen nicht die Lehrmeister der alten Inder gewesen sein können; geht aus meinen Ausführungen hervor, daß die Griechen nicht umgekehrt ihre Geometrie aus indischer Quelle geschöpft haben können, so bleiben für den Ursprung der Geometrie drei Möglichkeiten.

Die erste spricht CANTOR aus:[3]) „Es kam mir der Gedanke, ob nicht in den Zeiten, welche wir als uralte zu bezeichnen pflegen, also rund ausgesprochen jetzt vor drei bis vier Jahrtausenden, schon ein dem ganzen damaligen Kulturgebiete, also Vorderasien und Ägypten gemeinsames nicht ganz unbedeutendes mathematisches Wissen" (z. B das rechtwinklige Dreieck 3, 4, 5) „vorhanden gewesen sein könnte, welches sich je nach der Begabung der einzelnen Völker bald nach der einen, bald nach der anderen Richtung weiter entwickelte?". Zweitens könnte in historischen Zeiten geometrisches Wissen an verschiedenen, voneinander unabhängigen

1) PROCLI *Commentarii in EUCLIDIS elem.* I. ed FRIEDLEIN (Leipzig 1873), p. 65.

2) Die älteren Forscher (ZELLER, HANKEL) sind mit Recht hierin zurückhaltender als manche Neueren.

3) CANTOR, Arch. der Mathem. $8_3$, 1905, S. 71.

Stellen entstanden sein. Diese Vorstellung ist zur Zeit die unbeliebteste, zumal bei den Erforschern des alten Orients. Aber ich meine, man hat doch kein Recht, sie mit WINDISCH und BÜRK[1]) als Glauben an „einen wunderbaren Fall von prästabilierter Harmonie" abzuweisen, zumal wenn man nicht nur die, zum Teil durch den gleichen Stoff bedingten, Übereinstimmungen, sondern auch die Unterschiede des Inhalts und der Methoden gebührend würdigt. Endlich könnten die Griechen die Regeln der ägyptischen Feldmeßkunst oder der indischen Altarbaukunst auf irgend einem Wege erhalten und als Grundlage und Rohmaterial für die Geometrie benutzt haben, die sie darauf in eigenem Geiste erbauten. Das ist die überlieferte, nicht erwiesene aber auch nicht widerlegte, Vorstellung, nur daß jetzt die Inder in Konkurrenz mit den Ägyptern treten.

Eine Entscheidung zwischen diesen drei Möglichkeiten dürfte zur Zeit wissenschaftlich nicht zu begründen sein.

## Nachtrag.

Durch die Güte des Herrn Herausgebers dieser Zeitschrift werde ich nach Vollendung meiner Arbeit auf einen sehr beachtenswerten Vortrag aufmerksam gemacht, den ZEUTHEN unter dem Titel *„Théorème de PYTHAGORE": origine de la géométrie scientifique* auf dem zweiten internationalen Kongreß für Philosophie zu Genf September 1904 gehalten hat (abgedruckt in den Comptes rendus du Congrès, Genève 1904).

Ich freue mich, in wesentlichen Punkten Übereinstimmung mit meinen Anschauungen feststellen zu können. Der Vortragende scheidet die empirischen Anfänge der Geometrie, welche auf „intuition simple" beruhen, von der „géométrie propre" oder „scientifique". Erstere findet er bei mehreren orientalischen Völkern, besonders bei Indern und Ägyptern; zur wissenschaftlichen Geometrie sind erst die Griechen vorgeschritten; und zwar war der entscheidende Schritt die Entdeckung des Irrationalen und Inkommensurablen (S. 852): „C'est à eux que se rattache la première connaissance de quantités incommensurables que nous rencontrions dans l'histoire, et cette connaissance a provoqué ensuite les démonstrations géométriques que nous devons aux Grecs". Die Inder haben sich zur Idee des Irrationalen nicht erhoben (S. 851 Ende): „Mais les Indiens ne se sont sans doute jamais posé la question plus abstraite de savoir s'il était en vérité absolument impossible de trouver une fraction numérique égale à $\sqrt{2}-1$"; savisesha haben sie vermutlich für genau gehalten (S. 851 Anfang): „et alors on aura pu regarder ces mesures comme exactes".

1) BÜRK, a. a. O. 55, S. 575.

Die Worte BAUDHAYANAS, „Das sieht man an den Rechtecken usw.“ (siehe oben S. 9) sieht ZEUTHEN wie THIBAUT und ich im Sinne ihres Urhebers „comme démonstration du théorème de PYTHAGORE“ an (S. 816); endlich (S. 850): „Nous ne savons pas si la connaissance du „théorème de PYTHAGORE“ a un origine unique, ou s'il y a eu plusieurs découvertes indépendantes ni, dans le dernier cas, si on y est parvenu de la même manière ou par des procédés différents“.

Dagegen scheint mir der Rekonstruktionsversuch, den BÜRK für die indische Herleitung des allgemeinen Pythagoreischen Lehrsatzes mit wesentlicher Ausnutzung des Gnomon gibt, festeren Anschluß an die Methoden der *Sulbasutren* zu haben als der BRETSCHNEIDERsche, auf den ZEUTHEN zurückgreift. Ähnliches dürfte für die beiden Versuche gelten, die savisesha-Regel herzuleiten (S. 850, 851). Der erste will diese Formel allein aus Messung hervorgehen lassen und dürfte damit weder ihrer Genauigkeit noch ihrer eigentümlichen Form gerecht werden; der zweite benutzt die Formel $2 = a^2 \pm 2ax + x^2$ zu einem rein rechnerischen Verfahren und traut damit den alten Indern eine Rechenkunst zu, welche nach dem Ausweis der Quellen und dem Zeugnis THIBAUTS erst ihre späteren Nachkommen besessen haben. THIBAUT, der in diesem besonderen Punkte wie im allgemeinen mehr Beachtung verdient, als er bisher gefunden hat, dürfte mit seinem Herleitungsversuche der Wahrheit wohl näher gekommen sein.

# Über die „Demonstratio Jordani de algorismo".

Von G. Eneström in Stockholm.

In meinem Aufsatze über den *Algorithmus demonstratus*[1]) wies ich im Vorübergehen darauf hin, daß der von Chasles erwähnte „Algorismus Jordani" kaum mit dem von Schöner 1534 herausgegebenen *Algorithmus demonstratus* identisch sein kann. Damals glaubte ich freilich nicht, daß ich irgend einen Anlaß bekommen würde, mich mit jener Algorismus-Schrift zu beschäftigen, und ich empfahl darum diese Frage meinen Fachgenossen. Indessen bin ich später durch gewisse Umstände angeregt worden, selbst einen Beitrag zu deren Erledigung zu liefern.

Kurze Zeit nach der Veröffentlichung meines soeben zitierten Aufsatzes erhielt ich von Herrn P. Duhem den Artikel *Sur l'Algorithmus demonstratus*, der im vorigen Jahrgange der Bibliotheca Mathematica zum Abdruck gebracht wurde,[2]) und hier fand ich[3]) die Bemerkung, daß die Anfangs- und Schlußworte der Algorismus-Schrift des Cod. Dresd. Db. 86, welche Schrift Curtze als eine Abschrift des *Algorithmus demonstratus* bezeichnet hatte,[4]) nicht mit denen der Schönerschen Druckausgabe übereinstimmen. Etwas später, aber jedenfalls vor dem Erscheinen des Duhemschen Artikels, teilte mir Herr A. A. Björnbo mit, daß der Cod. Dresd. Db. 86 in Wahrheit einen bisher fast unbekannten Text enthält, der gar nicht wörtlich mit dem *Algorithmus demonstratus* übereinstimmt. Der Umstand, daß Curtze die zwei Texte verwechselt hatte, veranlaßte mich dann zu der Vermutung, daß der Cod. Dresd. Db. 86 gerade den echten „Algorismus Jordani" enthält,[5]) und ich bekam recht bald zwei Stützen dieser Vermutung. Herr Björnbo teilte mir nämlich mit, daß er auch andere ältere Handschriften (d. h. aus dem 13. Jahrhundert)

---

1) G. Eneström, *Ist Jordanus Nemorarius Verfasser der Schrift „Algorithmus demonstratus"?*; Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, S. 13—14.

2) P. Duhem, *Sur l'Algorithmus demonstratus;* Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, S. 9—15.

3) P. Duhem, a. a. O. S. 12. — 4) Vgl. Eneström, a. a. O. S. 10.

5) G. Eneström, *Über die Bedeutung historischer Hypothesen für die mathematische Geschichtsschreibung;* Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, S. 2.

des Textes des Cod. Dresd Db. 86 aufgefunden hatte, und daß einige derselben ausdrücklich dem JORDANUS zugeschrieben waren; noch dazu bemerkte ich selbst,[1]) daß der von CANTOR erwähnte „Algorismus JORDANI" des Cod. Philipps 16345 offenbar dieselben Anfangsworte wie die Algorismus-Schrift des Cod. Dresd. Db. 86 hatte.

Dadurch war also konstatiert, daß es im 13. Jahrhundert eine ziemlich verbreitete, von dem *Algorithmus demonstratus* verschiedene Algorismus-Schrift gab, die schon damals dem JORDANUS zugeschrieben wurde. Auf der anderen Seite hatte ich selbst darauf hingewiesen,[2]) daß die von CHASLES und WAPPLER erwähnten Handschriften, die auch angeblich einen „Algorismus JORDANI" enthalten, sehr wohl einen anderen Text bringen konnten, und noch dazu wußte ich, daß der Cod. Ottobon. 309 der Vatikanischen Bibliothek in Rom eine Algorismus-Schrift enthält, die nach dem Handschriftenkataloge den Titel: „JORDANIS NEMORARII Tractatus duo de Numeris et de Minutiis" hat, und mit den Worten „Communis et consuetus" beginnt.[3]) Es zeigte sich also, daß die Frage: „Welche Algorismus-Schrift hat JORDANUS wirklich verfaßt?" sehr verwickelt ist; ich entschloß mich darum, vorläufig von jedem Versuche der endgültigen Erledigung dieser Frage abzusehen, und mich wesentlich auf eine nähere Untersuchung der Algorismus-Schrift, von der sich im Cod. Dresd. Db. 86 eine Abschrift findet, zu beschränken (im folgenden nenne ich sie zuweilen „Algorismus JORDANI", ohne dadurch zu behaupten, daß sie nachweislich von JORDANUS verfaßt ist). Ich habe mir darum eine photographische Kopie des oben erwähnten „Algorismus JORDANI" des früheren Cod. Philipps 16345, jetzt Cod. lat. 4° 510 der kgl. Bibliothek in Berlin verschafft. Freilich ist die Handschrift (Bl. $72^b$—$77^a$ der genannten Cod. lat. 4° 510) wegen der vielen Kompendien ziemlich schwer zu deuten, aber meine Lesung ist dadurch erleichtert worden, daß Herr BJÖRNBO mir seine Abschrift des Cod. Dresd. Db. 86 zur Verfügung stellte.

Die Algorismus-Schrift hat in der Berliner Handschrift den Titel: „Demonstratio magistri JORDANI de algorismo".[4]) Sie enthält zuerst einige Definitionen und dann 34 Sätze, und der Text ist, wie Herr BJÖRNBO

---

1) Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, S. 310—311.

2) Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, S. 2, 311.

3) Siehe B. BONCOMPAGNI, *Intorno ad un trattato d'aritmetica stampato nel 1478*: Atti dell' accademia pontificia de' nuovi Lincei 16, 1863, S. 754.

4) Unmittelbar nach dem „Demonstratio magistri JORDANI de algorismo" folgt im Cod. lat. Berol. 4° 510 (Bl. $77^a$—$81^b$) eine anonyme „Demonstratio de minuciis" in demselben Stile wie die „Demonstratio de algorismo". Diese „Demonstratio de minuciis" findet sich in den meisten Handschriften, die die „Demonstratio de algorismo" enthalten, und wird in einigen dem JORDANUS zugeschrieben.

richtig bemerkt hat, ein durchaus anderer als der des *Algorithmus demonstratus*, nicht nur in betreff des Wortlautes, sondern auch zum großen Teil hinsichtlich des Inhaltes. Im folgenden bringe ich zum Abdruck die Definitionen und die Sätze und füge die nötigen erläuternden Anmerkungen hinzu. In betreff des Abdruckes der Definitionen und der Sätze hebe ich hervor, daß ich keine textkritische Ausgabe zu bieten beabsichtige; nur an solchen Stellen, wo der Text offenbar keinen richtigen Sinn gibt, habe ich versucht, den Text zu verbessern. In den Erläuterungen bedeuten die Buchstaben $a$, $b$, $c$, $d$ überall ganze Zahlen kleiner als 10 und $m$, $n$ beliebige ganze Zahlen.

## Definitionen der „Demonstratio magistri JORDANI de algorismo".

1. *Figure*[1] *numerorum sunt novem* 1.2.3.4.5.6.7.8.9, *et est prima unitatis, secunda binarii et sic deinceps.*

*Ordo locorum figurarum a primo loco incipit in infinitum procedens, et a dextra incipiens terminum non accipit a sinistra.*

*Omnia loca prime differencie pro eodem sumuntur. Omnia a prima equidistancia pro eodem.*

„Differentia" ist bekanntlich bei den Algorithmikern der Term für Stelle oder Rangordnung der Ziffern.

2. *Numerus simplex est qui una sola representatur figura.*

3. *Digitus est numerus a quo figura denominatur sive quicumque primo loco una sola representatur figura.*

4. *Articulus*[2] *est numerus denarius vel qui precise constat ex denariis. Item articulus est numerus qui potest dividi in decem partes equales.*

5. *Compositus numerus est quem diverse representant figure vel una pluries sumpta.*

6. *Suplementum loci est sciffula vel scifula est signum loci vacui a figura.*

„Sciffula" ist vermutlich eine Verketzerung von „ciphre". Das *Zeichen* Null kommt in der „Demonstratio de algorismo" nicht vor.

7. *Numeri simplices a loco primo equidistantes dicuntur eiusdem numeri differencie.*

Die Zahlen $1.10^n$, $2.10^n$, ...., $9.10^n$ gehören also derselben „differentia" (vgl. Def. 1).

1) Im Cod. lat. Berol. 4° 510 fehlt das Wort „Figure". Der Abschreiber hat nämlich einen Raum offen gelassen, um das Wort später mit sehr großen Buchstaben einzutragen.

2) Die Definition 4, die im Cod. lat. Berol. 4° 510 fehlt, ist nach dem Cod. Dresd. Db. 86 ergänzt.

8. *Numeri prime differencie que dicitur differencia unitatum ab unitate secundum ipsius addicionem ordine naturali procedunt usque ad denarium.*

Die Zahlen 2, 3, . . . . , 9, sowie 10 werden durch sukzessive Addition von Einern erhalten.

9. *Omnis figura per se considerata aliquam simplicium numerorum prime differencie representat.*

Identisch mit Def. 2.

10. *Omnis differencia IX continet numeros secundum quantitatem primi ipsorum se transgredientes.*

11. *Omnis differencie numerus primus tociens sibi coacervatur, ut ex singulis coacervationibus singuli reliquorum eiusdem differencie numerorum et primus sequentis differencie fiant.*

Vgl. oben Def. 8.

12. *Numeri similes sunt quos eadem figura representat.*

Ähnliche Zahlen sind von der Form $a \cdot 10^n$ ($a$ gegeben, $n$ beliebig).

13. *Equidistantes numeri sunt inter quos continue se sequentes sunt differencie numero equales.*

Die Zahlen $a \cdot 10^m$, $b \cdot 10^n$ sind äquidistant, wenn $m - n$ nicht verändert wird.

14. *Idem est limes*[1]) *et differentia. Numeri similes in omnibus differenciis equidistant a primis.*

15. *Addere est duobus propositis numeris summam conjunctorum reperire.*

16. *Detrahere est superfluum maioris ad minorem extrahere.*

17. *Duplare est dati numeri duplum invenire.*

18. *Dimidiare est dati numeri paris dimidium sumere, et imparis tocius detracta unitate.*

19. *Multiplicare numerum est numerum producere qui tociens utrumlibet propositorum contineat quociens in reliquo unitas continetur.*

Das Produkt $p$ zweier Zahlen $m_1$ und $m_2$ ist so beschaffen, daß $p : m_1 = m_2 : 1$. — Vgl. Euklides, *Elementa* VII def. 15.

20. *Dividere est numerum maximum extrahere quem tociens dividendus contineat, quociens unitatem divisor.*

Der Quotient $q$ von $d_1$ durch $d_2$ ist so beschaffen, daß $d_1 : q = d_2 : 1$.

---

1) In der ganzen „Demonstratio de algorismo" wird das Wort „limes" sonst nie gebraucht.

21. *Radicem extrahere est subscribere numerum qui in se ipsum ductus dati numeri summam vicinius consumet.*

Die in den Definitionen angewendeten Kunstwörter sind also, abgesehen von den Namen der Rechenoperationen: „figurae numerorum“, „circulus“ (? „scifule“!), „differentia“ („limes“ nur im Vorübergehen), „digitus“, „articulus“, „compositus numerus“. Noch dazu werden als Kunstwörter aufgeführt: „supplementum loci“, „numerus simplex“, „numeri similes“, „numeri aequidistantes“.

## Sätze der „Demonstratio magistri JORDANI de algorismo“.

**1.** *Sumptis similibus numeris per singulas differencias, a prima, eos sibi continue secundum nomina multiplices esse conveniet.*

Wenn $a_1 = a \,.\, 10$, $a_2 = a \,.\, 100$, $a_3 = a \,.\, 1000$, ...., so ist $a_1 = 10a$, $a_2 = 10a_1$, $a_3 = 10a_2$, ....

**2.** *Numeri similes et eque ab invicem distantes sunt proportionales.*

Wenn $a_1 = a \,.\, 10$, $a_2 = a \,.\, 100$, $a_3 = a \,.\, 1000$, ...., so ist $a : a_1 = a_1 : a_2 = a_2 : a_3 = \ldots.$

**3.** *Si fuerit primus ad secundum sicut tercius ad quartum, si primo et tercio equales numero differencie addantur vel detrahantur, tum quoque eisdem eosdem proportionales esse necesse est.*

Wenn $a : b = c : d$, so ist $a \,.\, 10^n : b = c \,.\, 10^n : d$.

**4.** *Proportionales numeri, et sibi ab invicem equedistantes, similes erunt.*

Umkehrung des Satzes 2.

**5.** *Omnis numerus simplex extra differenciam primam par est.*

$a \,.\, 10^n$ $(n > 1)$ ist eine gerade Zahl.

**6.** *Numero composito per suas differencias disposito, si prima differencia vacua fuerit, totus erit par.*

$a \,.\, 10 + b \,.\, 100 + c \,.\, 1000 + \ldots.$ ist eine gerade Zahl.

**7.** *Disposito quolibet numero per suas differencias, si in prima differencia fuerit numerus impar, idem erit impar totus, si autem par, et idem totus par.*

$a + b \,.\, 10 + c \,.\, 100 + \ldots$ ist ungerade oder gerade, je nachdem $a$ ungerade oder gerade ist.

**8.** *Si fuerit numerus in prima differencia quadratus, similis ei tantum vel alii quadrato prime differencie in impari differencia quadratus est.*

Wenn $a^2$ eine Quadratzahl $< 10$ ist, so ist $a^2 \,.\, 10^{2n}$ eine Quadratzahl.

**9.** *Omnis numerus simplex fit ex ductu sui digiti in sue differencie numerum primum.*

$a \,.\, 10^n$ ist gleich $a \,.\, (1 \,.\, 10^n)$.

**10.** *In pari differencia non est numerus quadratus.*
$a \cdot 10^{2n+1}$ ist nie eine Quadratzahl.

**11.** *Omnis simplicis numeri radix est numerus simplex.*
Wenn $a \cdot 10^n$ eine Quadratzahl ist, so ist die Quadratwurzel dieser Zahl von der Form $b \cdot 10^m$.

**12.** *Omnis differencie primus et ultimus numerus sunt tanquam subsequentis immediate primus.*
$1 \cdot 10^n + 9 \cdot 10^n$ ist $= 1 \cdot 10^{n+1}$.

**13.** *Sumptis singulis numeris per omnes differencias eorum, omni numero subsequenti eas summam minorem esse necesse est.*
$9 + 9 \cdot 10 + 9 \cdot 10^2 + \ldots + 9 \cdot 10^{n-1}$ ist kleiner als $10^n$.

**14.** *Eundem numerum impossibile est diversis modis representari.*
Wenn $A = a + b \cdot 10 + c \cdot 100 + \ldots$, so sind die Zahlen $a$, $b$, $c$, .... eindeutig bestimmt, sobald $A$ bekannt ist.

**15.** *Omnis differencie quilibet numerus equatur suo digito, et omnium precedentium differenciarum maximis numeris tociens simul sumptis quociens unitas est in eodem digito.*
$a \cdot 10^n$ ist $= a + a\,(9 + 9 \cdot 10 + \ldots + 9 \cdot 10^{n-1})$.

**16.** *Omnes maximi differenciarum terciam partem habent.*
Jede Zahl von der Form $9 \cdot 10^n$ ist ein Multipel von 3.

**17.** *Cuiuscunque numeri digiti simul sumpti terciam partem habent, ipsum quoque terciam partem habere necesse est.*
Wenn die Ziffernsumme einer Zahl durch 3 teilbar ist, so ist auch die Zahl selbst durch 3 teilbar.

**18.** *In prima differencia eadem est addicio numerorum que figurarum denominantium.*
Der Satz, der nur besagt, daß $a + b = a + b$, ist offenbar nur wegen des folgenden Satzes aufgeführt.

**19.** *In omnia differencia articuli agregantur ratione digitorum addicione facta.*
$a \cdot 10^n + b \cdot 10^n$ ist $= (a + b) \cdot 10^n$.

**20.** *Si duo numeri eiusdem differencie sibi agregantur, compositus ad secundum numerum sequentis differencie non perveniet.*
$a \cdot 10^n + b \cdot 10^n$ ist kleiner als $2 \cdot 10^{n+1}$.

**21.** *Duobus numeris propositis alterum alteri addere.*
Das gewöhnliche Additionsverfahren ohne Zahlenbeispiel. Der kleinere Summand wird immer *unter* den größeren gesetzt. Keine Probe. Kunstwörter: „addere", „additio", „major numerus", „minor numerus", „summa", „additus", „aggregatus" (vgl. Def. 15).

**22.** *A numero maiore numerum minorem quemlibet detrahere.*

Das gewöhnliche Substraktionsverfahren ohne Zahlenbeispiel. Das Borgen nicht wie im *Liber algorismi de pratica arismetrice*[1]) und auch nicht wie bei Leonardo Pisano[2]) sondern wie es jetzt üblich ist, d. h. man entlehnt oben bei der nächsten Stelle, nimmt die Summe von 10 und der kleineren oberen Ziffer, und zieht davon die untere größere Ziffer ab. Probe durch Addition. Kunstwörter: „detrahere", „detractio", „major numerus", „residuum" (vgl. Def. 16).

**23.** *Numeri dati duplum assignare.*

Verdopplung; man beginnt *links*. Kein Zahlenbeispiel.

**24.** *Propositum numerum restat dimidiare.*

Halbierung; man beginnt *rechts*. Wenn die Zahl ungerade ist, wird 1 subtrahiert und statt derselben im Resultate $\frac{1}{2}$ hinzugefügt. Kein Zahlenbeispiel.

**25.** *Si proponantur duo numeri et alter per alterum multiplicetur, primique numeri circuli ad alterius principium tranferantur, ex ita sumptorum multiplicatione eundem provenire necesse est.*

Wenn $A$ und $B$ zwei beliebige ganze Zahlen sind, so ist

$$(A \,.\, 10^n) \,.\, B = A \,.\, (B \,.\, 10^n).$$

**26.** *De medio unius numeri ad alterius principium, ut producti equalitas servetur, non est transferre circulos.*

Im allgemeinen ist

$$(a \,.\, 100 + b)\ (c \,.\, 10 + d) \text{ nicht gleich } (a \,.\, 10 + b)\ (c \,.\, 100 + d \,.\, 10).$$

**27.** *Ad medium vero alterius translatis circulis in proportionalibus tantum numeris, eveniet equalitas productorum.*

Wenn $a : b = c : d$, so ist

$$(a \,.\, 100 + b)\ (c \,.\, 10 + d) = (a \,.\, 10 + b)\ (c \,.\, 100 + d).$$

**28.** *Datum numerum per se multiplicare vel per quemlibet alium.*

Multiplikationsverfahren wie im *Liber algorismi de pratica arismetrice.*[3]) Kein Zahlenbeispiel. Keine komplementäre Multiplikation. Keine Probe. Kunstwörter: „multiplicare", „multiplicatio", „multiplicatus" oder „numerus superior", multiplicans" oder „numerus inferior", „productus", „promovere ad dextram" (vgl. Def. 19).

**29.** *Numeris inequalibus si differencie numero equales preponantur, inter totos etiam erit inequalitas non permutata.*

Wenn $a < b$, so ist $10\,a + c < 10\,b + d$.

---

1) Siehe *Trattati d'aritmetica pubblicati da B. Boncompagni* II, Roma 1857, S. 33.

2) *Il liber abbaci di Leonardo Pisano, pubblicato da B Boncompagni*, Roma 1857, S. 22.

3) *Trattati d'aritmetica* II, S. 38—41.

**30.** *Si numero minori una versus dextram differencia adjiciatur, reliquus de ipso plus novies non detrahetur.*

Wenn $a < b$, so ist $\frac{10a+c}{b}$ höchstens gleich 9 und einem eigentlichem Bruche.

**31.** *Datum numerum per quemlibet minorem dividere.*

Division wie im *Liber algorismi de pratica arismetrice*[1]. Daß das Verfahren eine Überwärtsdivision ist, wird nur ganz beiläufig durch die Bemerkung „Numerus ille secundum quem facienda est detractio, *altius* ceteris statuendus erit" angedeutet. Kein Zahlenbeispiel. Probe durch Multiplikation im Vorübergehen angedeutet. Kunstwörter: „dividere", „dividendus" oder „numerus superior", „divisor" oder „numerus inferior", „versus dextram transferre"; kein Wort für Quotient (vgl. Def. 20).

**32.** *Equidistantia simplicium numerorum inter proximos productorum ex ipsis duplicata constabit.*

Wenn $a_1 = a \,.\, 10$, $a_2 = a \,.\, 100$, $a_3 = a \,.\, 1000$, so ist

$$\frac{a \,.\, a_1}{a^2} = \frac{a_1 \,.\, a_2}{a_1^2} = \frac{a_2 \,.\, a_3}{a_2^2} = \ldots\ldots$$

**33.** *Numerus differenciarum a quibus radix est extrahenda, duplum differenciarum radicis non excedet.*

Die Ziffernzahl einer Zahl ist höchstens das doppelte der Ziffernzahl ihrer Quadratwurzel.

**34.** *Propositi numeri radicem extrahere.*

Quadratwurzelausziehen (beinahe ein Drittel der ganzen Algorismus-Schrift) wie im *Liber algorismi de pratica arismetrice*,[2]) aber ohne Zahlenbeispiel. Nach der allgemeinen Regel ein langer Beweis derselben, wobei angenommen wird, daß die Zahl $a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e \,.\, f$ [d. h. $a \,.\, 100000 + b \,.\, 10000 + c \,.\, 1000 + d \,.\, 100 + e \,.\, 10 + f$], die Quadratwurzel $g \,.\, h \,.\, k$ [d. h. $g \,.\, 100 + h \,.\, 10 + k$] ist. Zuletzt der Satz $(a + b + c)^2 = a^2 + (b + c)^2 + 2a(b + c) = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$. Keine Probe. Kunstwörter: „radix", „extrahere", „quadratus", „versus dextram promovere" oder „transferre", „ducere numerum in se" (vgl. Def. 21). Hier kommt das Wort „scifule" (vgl. Def. 6) vielfach vor, aber als Zeichen desselben wird nicht Null sondern $p$, $q$, $r$ benutzt.

Wollte man auf Grund des vorhergehenden Berichtes die „Demonstratio de algorismo" kurz charakterisieren, so könnte man sagen, daß sie einen Versuch ist, das EUKLIDische Lehrgebäude unter Bezugnahme auf die

1) *Trattati d'aritmetica* II, S. 41—49. — 2) *Trattati d'aritmetica* II, S. 75—76.

arabische Rechenkunst zu ergänzen. Daß die Form durchaus Euklidisch ist, sieht man sofort aus den Sätzen, von denen sehr viele offenbar nur deshalb aufgeführt worden sind, weil sie nötig waren, um gewisse andere Sätze zu beweisen. Daß Euklides dem Verfasser als Muster gedient hat, sieht man noch deutlicher aus den Beweisen der Sätze, und als Beleg drucke ich hier den Beweis des 19 Satzes ab.

> Sint ergo *a* et *b* articuli quinte differentie et aggregentur sibi ratione digitorum; dico quod conveniens est addicio. Sit enim additus ex eis ratione digitorum *c* . *d* sit digitus *a* . *e* sit digitus *b* . *f* sit aggregatus ex *d* . *e* ut prius de prima docuimus differencia. Cum ergo eedem figure que representent *c* representent *f*, hoc est additionem fieri ratione digitorum per secundam, sicut est *c* ad *f*, ita est *a* ad *d* et *b* ad *e*. Ergo sicut est *c* ad *f*, ita sunt *a* et *b* ad *d* et *e*, ergo permutatim sicut est *c* ad *a* et *b*, ita *f* ad *d* et *e*. Sed *f* est equale *d* . *e* ergo *c* est equale *a* . *b* quare competens est addicio.

Will man den Beweis in unsere mathematische Sprache übersetzen, so kann man der Übersetzung folgende Form geben. Seien $a = m \,.\, 10^4$, $b = n \,.\, 10^4$ die zwei Zahlen. Wir setzen ferner $c = (m + n) \,.\, 10^4$, $d = m$, $e = n$, $f = m + n$. Dann ist $c : f = a : d = b : e$, also $c : f = (a + b) : (d + e)$, oder $c : (a + b) = f : (d + e)$. Aber $f = d + e$, also $c = a + b$, d. h. $m \,.\, 10^4 + n \,.\, 10^4 = (m + n) \,.\, 10^4$.

Hinsichtlich des Inhaltes sind natürlich die Sätze 21—24, 28, 31, 34 die wichtigsten, und man könnte sogar sagen, daß die übrigen 27 Sätze eigentlich nur deshalb aufgeführt sind, weil sie jene 7 Sätze vorbereiten. Daß man in betreff der Rechenoperationen nichts neues aus der „Demonstratio de algorismo“ lernt, ist selbstverständlich, da der Zweck der Abhandlung war, die Richtigkeit der damals gebräuchlichen Rechenoperationen zu beweisen. Wie gründlich der Verfasser der „Demonstratio“ dabei verfuhr, geht am deutlichsten aus dem 14. Satze hervor, der besagt, daß jede Zahl nur auf eine einzige Weise durch die neun Ziffern und Null dargestellt werden kann. Bemerkenswert ist, daß der Verfasser durch den 15. Satz die Neunerprobe vorbereitet, aber den Satz, der dieser Probe zugrunde liegt, nicht ausspricht, während er im 17. Satze ausdrücklich angibt, daß eine Zahl durch 3 teilbar ist, wenn ihre Ziffernsumme ein Multipel von 3 ist. Übrigens scheinen gewisse Sätze darauf hinzuweisen, daß der Verfasser der „Demonstratio“ mehr an die griechischen als an die arabischen Zahlzeichen dachte, als er seine Abhandlung redigierte (vgl. z. B. Satz 9).

Wie schon gesagt, ist der Zweck dieses Artikels wesentlich, Auskunft über den *Inhalt* der „Demonstratio de algorismo“ zu geben, aber es scheint mir nicht unangebracht, hier auch die Frage über den *Verfasser* dieser Schrift zu berühren. Daß dieselbe schon im 13. Jahrhundert dem Jordanus zugeschrieben wurde, ist ja ein nicht ganz unwichtiger Umstand, aber es wäre natürlich erwünscht zu wissen, teils ob es andere Umstände gibt, die bestätigen, daß JORDANUS wirklich der Verfasser ist, teils ob vielleicht Gründe aufgefunden werden können, aus denen man die Schrift dem JORDANUS aberkennen muß.

Zuerst möchte ich darauf hinweisen, daß M. CURTZE in der Einleitung zu seiner Ausgabe der *Geometria sive de triangulis libri quattuor* des JORDANUS gelegentlich eine Bemerkung einfügt, die anscheinend für die hier gestellte Frage von großer Bedeutung ist. CURTZE sagt nämlich in betreff des 3. Buches der *Geometria*, daß darin der „liber de similibus arcubus“ mehrfach zitiert wird, wie im 2. Buche die „Arithmetica“ und der „Algorithmus“.[1]) Leider muß ich konstatieren, daß diese Bemerkung inkorrekt ist, denn ich habe die ganze CURTZEsche Ausgabe der *Geometria* durchgesehen, ohne ein einziges Zitat zu entdecken, das sich auf eine Algorismus-Schrift bezieht; dagegen ist es durchaus richtig, daß JORDANUS mehrfach seine „Arithmetica“ zitiert, und zwar das 2. Buch, das bekanntlich von Verhältnissen handelt,[2]) möglicherweise einmal auch das 5. Buch.[3])

Ein anderer Umstand, der von Belang sein könnte, ist das Vorkommen eines Verweises im Beweise des 34. Satzes der „Demonstratio de algorismo“. Hier findet sich nämlich folgender Passus: „Hanc subtractionem docuimus in opere extrahendi radicem“, und aus diesen Worten könnte man folgern, daß der Verfasser der „Demonstratio de algorismo“ eine besondere Schrift über Wurzelausziehung geschrieben hat. Indessen ist der Verweis meines Erachtens ohne Bedeutung, denn teils kennen wir keine Schrift, die hier gemeint werden kann, teils kommen im Texte der „Demonstratio de algorismo“ Stellen vor, die allem Anschein nach ursprünglich Randnoten waren, und der jetzt zitierte Passus kann sehr wohl von derselben Art sein, also von einem Besitzer der Vorlage der von mir benutzten Handschrift hinzugefügt.

Zieht man dagegen in Betracht den Inhalt der „Demonstratio de algorismo“ so scheint es mir, als ob man dadurch geneigt werden muß, JORDANUS als Verfasser der Schrift anzusehen. Da nämlich die Kubikwurzelausziehung darin nicht gelehrt wird, und da diese Operation, abgesehen von LEONARDO PISANO, so weit jetzt bekannt ist im Abendlande

1) *Jordani Nemorarii Geometria vel de triangulis libri IV*. Herausgegeben von M. CURTZE (Thorn 1887), S. XIII.

2) I: 12; II: 6, 15, 16; III: 9 (= S. 9, 13, 16, 17, 25 der CURTZEschen Ausgabe).

3) Siehe I: 12 (= S. 9 der CURTZEschen Ausgabe), wo auf „16 quinti et 12 secundi arismetrice JORDANI“ verwiesen wird. Indessen geht aus dem Zusammenhange hervor, daß „16 quinti“ sich fast sicher auf V: 16 der *Elementa* bezieht.

zuerst bei Sacrobosco und dem Verfasser des „Carmen de algorismo" vorkommt,[1]) so ist es wahrscheinlich, daß die „Demonstratio de algorismo" vor diesen, also etwa am Anfange des 13. Jahrhunderts verfaßt wurde. Aber wenn dies der Fall ist, kann man aus guten Gründen annehmen, daß Jordanus der Verfasser der „Demonstratio de algorismo" ist, denn die Darstellungsweise ähnelt sehr der von ihm in seinen bisher bekannten Schriften angewendeten.[2]) So lange also keine andere Algorismus-Schrift dieser Art gefunden ist[3]), die aus ebenso guten oder noch besseren Gründen dem Jordanus zugeschrieben werden kann, dürfte es erlaubt sein zu behaupten, daß er höchst wahrscheinlich Verfasser der „Demonstratio de algorismo" ist. Unter allen Umständen scheint es mir schon jetzt festgestellt werden zu können, daß es durch die Auffindung der „Demonstratio de algorismo" fast sicher geworden ist, Jordanus habe den von Schöner 1534 herausgegebenen *Algorithmus demonstratus* nicht verfaßt,[4]) denn alle wirklichen Gründe, die bisher geltend gemacht worden sind, um diese Schrift dem Jordanus zu vindizieren, können mit noch größerem Rechte angewendet werden, wenn man die „Demonstratio de algorismo" statt des *Algorithmus demonstratus* in Betracht zieht.

Nun hat bekanntlich Cantor in seinen *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* aus dem, seiner Ansicht nach fast sicher gestellten Umstande, daß Jordanus den *Algorithmus demonstratus* verfaßt hat, ziemlich weitgehende Folgerungen gezogen, besonders in betreff der arabischen Quelle, aus welcher Jordanus seine Kenntnisse mehr oder weniger mittelbar

---

1) Siehe die Ausgabe von Curtze (Kopenhagen 1897), S. 18—19, und *Rara mathematica edited by J. O. Halliwell*, London 1839, S. 81—83.

2) Auch die Terminologie der „Demonstratio de algorismo" weist auf Jordanus hin. Beispielsweise kommt der darin benutzte Term „detrahere" für Subtrahieren auch in dem Traktate *De numeris datis* vor (siehe z. B. die Curtzesche Ausgabe in der Zeitschr. für Mathem. 36, 1891; Hist. Abth. S. 12, 13, 14, usw.). In den weiter unten (Fußnote 2 S. 35) zitierten Algorismus-Schriften wird nicht „detrahere", sondern „diminuere", „subtrahere" oder „minuere" benutzt.

3) Der Text: „Communis et consuetus" des Cod. Ottobon. 309 kommt dabei kaum in Betracht, weil er einen gewöhnlichen „Algorismus" zu enthalten scheint, und weil es sehr möglich ist, daß Jordanus sowohl einen solchen wie eine „Demonstratio de algorismo" verfaßt hat. Der von Chasles erwähnte „Algorismus Jordani" ist vermutlich der Cod. Mazarin. 1258, und dieser enthält, wie ich aus einer freundlichen Mitteilung des Herrn Björnbo erfahre, gerade den Text: „Communis et consuetus". Endlich behandelt die von Wappler zitierte Algorismus-Schrift nur die Bruchrechnung, und kann also nicht in Betracht kommen, wenn es sich darum handelt, einen Traktat über Rechnen mit ganzen Zahlen aufzufinden, der mit größerem Rechte als die „Demonstratio de algorismo" dem Jordanus beigelegt werden kann.

4) Vgl. hierüber noch Duhem, a. a. O. S. 13—15.

entnommen haben sollte,[1] und es dürfte nicht ohne Interesse sein, nachzusehen, wie die CANTORschen Folgerungen zu modifizieren sind, wenn man die sehr wahrscheinliche Hypothese, daß die „Demonstratio de algorismo" wirklich von JORDANUS herrührt, statt der von CANTOR benutzten wenig wahrscheinlichen Hypothese, daß JORDANUS den *Algorithmus demonstratus* verfaßt hat, einführt. Unter dieser Voraussetzung ist in betreff des CANTORschen Berichtes über den Inhalt der von JORDANUS verfaßten Algorismus-Schrift folgendes zu bemerken.

1) JORDANUS setzt seinen Lesern nicht das dekadische Zahlensystem mit seinen *zehn Zeichen* auseinander, denn er erwähnt nie das 10. Zeichen (Null), sondern benutzt nur den *Namen* „circulus". Er bedient sich nie der Benennung „figura nihili".

2) JORDANUS lehrt nicht die komplementäre Multiplikation. Er gibt auch nicht verschiedene spezielle Regeln für Multiplikation.

3) Das Überwärtsdividieren wird nur im Vorübergehen von JORDANUS *angedeutet.*

4) JORDANUS beschäftigt sich gar nicht mit der Ausziehung von Kubikwurzeln.

Diese Modifikationen der CANTORschen Darstellung sind ja anscheinend nicht sehr erheblich, aber in Wahrheit macht die letzte alle Schlußfolgerungen seiner Darstellung hinfällig. Die *einzige*, freilich sehr schwache Stütze, dieser Schlußfolgerungen ist nämlich der Umstand, daß der *Algorithmus demonstratus* die *Kubik*wurzelausziehung lehrt, und in der „Demonstratio JORDANI de algorismo" kommt nur *Quadrat*wurzelausziehung vor. Übrigens enthält diese Schrift gar nichts, das ihr Verfasser nicht aus den schon um 1200 vorhandenen[2] lateinischen Bearbeitungen arabischer Rechenbücher entnehmen konnte. Unter solchen Umständen ist es — ich will nicht sagen unrichtig, aber — wenigstens unnötig hervorzuheben,[3] daß JORDANUS „in arabischer Schulung zum Mathematiker geworden ist", denn ganz dasselbe könnte man von *allen* abendländischen Mathematikern des 12. und des 13. Jahrhunderts sagen, die Arbeiten über Rechenkunst und Algebra verfaßt haben; für JORDANUS

1) M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* $2^2$ (Leipzig 1900), S. 84—85.

2) Nachweislich vorhanden war am Anfange des 13. Jahrhunderts die von CURTZE herausgegebene Algorismus-Schrift (siehe Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, S. 312, 416). Höchst wahrscheinlich existierte damals auch der von CANTOR (Zeitschr. für Mathem. 10, 1865, S. 1—16) herausgegebene *Liber algorizmi*, und man nimmt allgemein an, daß die zwei von BONCOMPAGNI (*Trattati d'aritmetica,* Roma 1857) herausgegebenen Algorismus-Schriften auch aus dem 12. Jahrhundert herrühren.

3) Siehe CANTOR, a. a. O. S. 84, 85.

würde übrigens der Ausdruck „in Euklidischer Schulung zum Mathematiker geworden ist“ viel besser passen. Durchaus hinfällig wird dagegen meines Erachtens die Hypothese, die Herr Cantor durch die folgenden schwungvollen Worte ausspricht:[1])

„Wunderbarer Zufall! Im fernen Oriente ruft vielleicht religiöser und politischer Gegensatz zwei einander feindliche Schulen ins Leben. Ein Werk aus der Schule des Alkarchi fällt in die Hand eines geistvollen Kaufmanns, ein anderes aus der Schule des Alnasawi fällt in die Hand eines hochbegabten Mönches, und im christlichen Abendlande spiegelt sich ein Gegensatz wieder, der hier auch nicht den Schein einer Berechtigung besitzt!“

Ich habe schon früher Gelegenheit gehabt, darauf hinzuweisen,[2]) daß sich bei Leonardo Pisano auch solche Sachen finden, die er nicht aus Alkarchi, aber sehr gut aus anderen arabischen Mathematikern entnommen haben kann, und daß es darum weniger angebracht ist, besonders hervorzuheben, Leonardo Pisano sei ein mittelbarer Schüler von Alkarchi gewesen. Aus den Ausführungen dieses Artikels dürfte jetzt ersichtlich sein, daß man noch weniger Grund hat anzunehmen, Jordanus sei ein mittelbarer Schüler von Alnasawi gewesen, denn alles was in der „Demonstratio de algorismo“ steht und ursprünglich auf arabische Quellen zurückgeht, kann aus dem Rechenbuche des Alkhwarizmi entnommen worden sein.[3])

Es ist eine eigene Ironie des Schicksals, daß die Hypothese des Herrn Cantor in betreff der Einwirkung des Alnasawi auf Jordanus gerade durch die zwei ersten Worte des Cantorschen Ausspruches charakterisiert werden kann. Will man etwa wie Herr Cantor die Anwendung der zwei Worte motivieren, so kann man dem Ausspruche folgende Form geben: Wunderbarer Zufall! In Thorn beschäftigt sich Max Curtze eingehend mit dem Cod. Dresd. Db. 86. Er veröffentlicht einen ausführlichen Bericht über den Inhalt der Handschrift, und gibt dabei durch ein unerklärliches Übersehen an, daß die dort Bl. $169^a$—$175^a$ vorkommende Algorismusschrift mit dem gedruckten *Algorithmus demonstratus* identisch ist, obgleich die Anfangs- und Schlußworte ebenso wie der ganze Text der zwei Schriften durchaus verschieden sind, und obgleich die Schriften auch in betreff des Inhaltes wesentlich voneinander abweichen. Curtze benutzt später dieselbe Handschrift für seine Ausgaben der Jordanischen Arbeiten *De*

---

1) Cantor, a. a. O. S. 85.

2) Biblioth. Mathem. $2_3$, 1901, S. 351—352.

3) Freilich enthält die von Boncompagni herausgegebene lateinische Übersetzung nichts über Quadratwurzelausziehung, aber die von Boncompagni benutzte Handschrift ist unvollständig (vgl. Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, S. 408).

*triangulis* (1887) und *De numeris datis* (1891), ohne sein Übersehen zu entdecken, und noch 1899 gibt er ausdrücklich an, daß der Cod. Dresd. Db. 86 den Text des *Algorithmus demonstratus* enthält. Das unerklärliche Versehen von CURTZE verhindert einen geistvollen Geschichtsschreiber der Mathematik zu erkennen, daß der *Algorithmus demonstratus* nicht ohne ganz entscheidende Gründe dem JORDANUS beigelegt werden darf, und ermöglicht dadurch das Aufstellen einer Hypothese in betreff der Abhängigkeit des JORDANUS von ALNASAWI, welche Hypothese durch die zwei Auflagen der *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* in immer weiteren Kreisen verbreitet wird, obgleich sie kaum den Schein einer Berechtigung besitzt.

# Hat Tartaglia seine Lösung der kubischen Gleichung von Del Ferro entlehnt?

Von G. Eneström in Stockholm.

In der ersten Auflage (1892) des zweiten Bandes seiner *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* hatte Herr Cantor (S. 471—472) als von ihm begründet die Annahme bezeichnet, daß die Auflösungsmethode des Tartaglia genau mit der des Scipione del Ferro übereinstimmte, und er folgerte daraus, daß Tartaglia höchstwahrscheinlich seine Methode nicht selbständig erfand, sondern dieselbe unmittelbar oder mittelbar aus del Ferros Schrift entnahm. „Ist es", fragt Herr Cantor, „nur in einer Weise möglich, die kubischen Gleichungen aufzulösen?" und beantwortet seine Frage auf folgende Weise: „Die Geschichte hat diese Frage mit lautem Nein beantwortet. Eine 1615 gedruckte Auflösung von Vieta, . . . , eine 1683 veröffentlichte Auflösung von Tschirnhausen, Dutzende von späteren Auflösungen weichen alle untereinander und von der, wie wir begründet haben, Tartaglia und del Ferro gemeinschaftlichen ab". „Ist es nicht gestattet", schließt Herr Cantor, „Zweifel daran zu hegen, daß beide untereinander übereinstimmende Gedankenfolgen ganz unabhängig in zwei verschiedenen Köpfen sich bildeten?".

Etwa ein Jahr nach dem Erscheinen des zitierten Bandes der *Vorlesungen* veröffentlichte Herr Zeuthen eine Abhandlung mit dem Titel: *Tartalea contra Cardanum, réplique relative à la question de priorité sur la résolution des équations cubiques* (Bullet. de l'acad. d. sc. de Danemark 1893, S. 303—330), die sich gerade gegen einige Punkte der Cantorschen Darstellung der Geschichte der kubischen Gleichungen richtete. Hier wies Herr Zeuthen (S. 310—311) darauf hin, daß es sich in Wirklichkeit nicht um die Methode des Tartaglia (die ebenso wie die des del Ferro unbekannt ist), sondern um das von ihm hergeleitete Resultat handelte, und daß jede richtige Auflösungsmethode der kubischen Gleichung selbstverständlich zu demselben Resultate, möglicherweise unter etwas variierender Form, führen mußte. Aus dem von Herrn Cantor begründeten Umstande, daß das Resultat des Tartaglia mit dem des

DEL FERRO übereinstimmte, konnte man also nicht schließen, daß ihre Auflösungsmethoden identisch waren.

Bekanntlich erschien im Jahre 1900 eine neue Auflage des zweiten Bandes der CANTORschen *Vorlesungen*, und dort wurde im Vorübergehen (S. 530) die ZEUTHENsche Abhandlung zitiert, woraus erhellt, daß diese nicht Herrn CANTOR unbekannt geblieben war, aber der ganze Passus der *Vorlesungen*, um die es sich hier handelt, war in der neuen Auflage (S. 513) unverändert abgedruckt, und ich war darum überzeugt, daß Herr CANTOR der ZEUTHENschen Bemerkung keine eigentliche Bedeutung zuerkennen wollte. Freilich schien mir dieser Umstand etwas auffällig, aber da ich die Gegengründe des Herrn CANTOR gar nicht kannte, verzichtete ich darauf, die Frage in den „Kleinen Bemerkungen" der Bibliotheca Mathematica zu berühren, zumal da eine eingehende Behandlung derselben wenigstens ein paar Druckseiten in Anspruch nehmen würde, während die „Kleinen Bemerkungen", wenn irgend möglich, sehr kurz sein sollen.

Daß Herr ZEUTHEN durch den unveränderten Abdruck der CANTORschen Ausführungen vom Jahre 1892 nicht veranlaßt sein würde, seine Ansicht zu modifizieren, war leicht zu vermuten, und als im Jahre 1903 der zweite Teil seiner *Forelaesninger over Mathematikens Historie* erschien, fand man darin (S. 117—118) eine Bestätigung der Richtigkeit dieser Vermutung. Herr ZEUTHEN hob dort hervor (vergl. S. 84 der deutschen Übersetzung), daß es sich bei TARTAGLIA nur um ein Resultat handelte, das lediglich besagte, daß die Wurzel einer Gleichung dritten Grades als algebraische Summe der Kubikwurzeln der Wurzeln einer Gleichung zweiten Grades dargestellt werden kann, und endete mit folgenden Worten: „es wäre unberechtigt, aus der Übereinstimmung der Lösungen zu schließen, TARTAGLIA habe FERROS Auflösung selbst gekannt, denn, wenn sie überhaupt beide die Gleichungen lösen konnten, so ist diese Übereinstimmung eine Notwendigkeit".

Die soeben zitierte deutsche Übersetzung der ZEUTHENschen Arbeit wurde kurze Zeit nach ihrem Erscheinen von Herrn CANTOR im Archiv der Mathematik und Physik ($8_3$, 1905, S 248—252) besprochen, und hier erklärte sich Herr CANTOR wesentlich der Ansicht des Herrn ZEUTHEN zu sein; er bemerkte auch, daß er die „vorher von niemand beachtete Tatsache" [d. h. die Tatsache, worauf Herr ZEUTHEN sieben Jahre vor dem Erscheinen der zweiten Auflage des zweiten Bandes der *Vorlesungen* aufmerksam gemacht hatte] als Randbemerkung seinem 2. Bande beifügen würde, um bei einer Neubearbeitung benutzt zu werden.

Da die Herren CANTOR und ZEUTHEN jetzt in betreff des hier erwähnten Punktes einverstanden sind, könnte man versucht sein, jede weitere Behandlung desselben als durchaus unnütz zu betrachten. Indessen bin ich einer anderen Ansicht, freilich nicht in betreff der Frage, ob Tartaglia seine *Methode* von del Ferro entlehnt hat[1]), aber hinsichtlich der Frage, ob die beiden Mathematiker ihrer Lösung genau dieselbe Form gegeben haben. Diese Frage wird zwar sowohl von Herrn Cantor wie von Herrn Zeuthen mit Ja beantwortet, aber da Herr Cantor in seiner Besprechung der Zeuthenschen Arbeit die Bemerkung hinzugefügt hat: „ob die beiden Kubikwurzeln $u$ und $v$ notwendig nur mittelst $u + v$ und $uv$ gefunden werden können, wie es in Tartaglias Terzinen heißt, ist damit noch nicht gesagt. Das kann Tartaglia sehr gut von Ferro entlehnt haben", so scheint daraus hervorzugehen, daß auch Herr Cantor die letztere Frage nicht als vollständig erledigt betrachtet. Ich werde jetzt versuchen zu zeigen, daß man keinen gültigen Grund hat, diese Frage bejahend zu beantworten.

Wie oben berichtet worden ist, hat Herr Zeuthen darauf hingewiesen, daß die Wurzel der kubischen Gleichung[2]) $x^3 = ax + b$ immer als Summe der Kubikwurzeln der Wurzeln einer quadratischen Gleichung dargestellt werden kann, aber natürlich bedeutet dies nicht, daß das Resultat immer auf diese Weise ausgedrückt werden muß. Freilich hat der gebräuchliche explizite Ausdruck der Wurzel

$$\text{(A)} \qquad x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}}$$

---

1) Es ist mir nicht unbekannt, daß S. Gherardi versucht hat zu beweisen, daß del Ferro in der von Cardano eingesehenen Handschrift nicht nur die Wurzel der Gleichung $x^3 + ax = b$ angab, sondern auch die für diesen Zweck angewendete Methode auseinandersetzte (siehe *Einige Materialien zur Geschichte der mathematischen Fakultät in Bologna.* Übersetzt von M. Curtze, Berlin 1871, S. 76, 78—83, 104, 115). Gherardi stützt sich dabei auf den folgenden Passus des 2. „Cartello" des L. Ferrari: „Annibal de Nave . . nobis ostendit libellum manu Scipionis Ferrei soceri sui iam diu conscriptum, in quo istud inventum [= inventum cubi et laterum aequalium numero] eleganter et docte explicatum, tradebatur", und folgert aus den Worten „eleganter et docte explicatum", daß die Handschrift nicht nur das Endresultat, sondern auch die Herleitung desselben enthielt. Zieht man aber in Betracht, daß das „Cartello" den Zweck hatte, die Verdienste des del Ferro hervorzuheben, um dadurch die des Tartaglia möglichst zu verkleinern, so dürfte es klar sein, daß man dem fraglichen, ziemlich schwebenden Ausdrucke keine Bedeutung beimessen kann. Nur wenn Ferrari *ausdrücklich* behauptet hätte, daß del Ferro in der Handschrift auch die Methode angab, könnte man vielleicht Anlaß haben, mit Gherardi einig zu sein. Nimmt man noch hinzu, daß Tartaglia in seiner zweiten „Risposta" bestimmt verneinte, irgend eine Schrift eingesehen zu haben, wo die Lösung der kubischen Gleichung gelehrt worden war, so ist man wohl berechtigt, Gherardis durchaus unbegründete Behauptung, daß Tartaglia seine Methode von del Ferro entlehnt hat, als belanglos anzusehen.

2) Bekanntlich war die erste kubische Gleichung, die gelöst worden ist, von der Form $x^3 + ax = b$, aber ich wähle hier die Form $x^3 = ax + b$, um den Ausdruck „*Summe* von Kubikwurzeln" benutzen zu können.

diese Form, und dasselbe gilt von dem in TARTAGLIAS Terzinen angegebenen Resultate

$$\text{(B)}\qquad \begin{cases} x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}, \\ uv = \frac{a}{3}, \quad u + v = b. \end{cases}$$

Aber man kann natürlich die Lösung ebensogut entweder unter der Form

$$\text{(C)}\qquad \begin{cases} x = u_1 + v_1, \\ u_1^3 v_1^3 = \frac{a}{3}, \quad u_1^3 + v_1^3 = b, \end{cases}$$

oder unter der Form

$$\text{(D)}\qquad \begin{cases} x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + u_2} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} + v_2}, \\ u_2 v_2 = -\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}, \quad u_2 + v_2 = 0 \end{cases}$$

angeben. Im Falle (C) ist die Lösung nicht unmittelbar als Summe zweier *Kubikwurzeln*, im Falle (D) nicht unmittelbar als Summe der Kubikwurzeln der Wurzeln *einer quadratischen Gleichung* gegeben.

Die obige Bemerkung ist so selbstverständlich, daß sie leicht als durchaus unnötig erscheinen kann, aber es wird sich recht bald zeigen, daß sie für die gestellte Frage nicht ohne Belang ist. Sie führt übrigens sofort zu dem Resultate, daß Herr CANTOR Recht hat, wenn er bezweifelt, daß die beiden Kubikwurzeln nur mittelst der Gleichungen $u + v = b$, $uv = \frac{a}{3}$ gefunden werden können. Auch wenn man die Gleichung $x^3 = ax + b$ durch Zerlegung von $x$ in zwei Teile lösen will, kann man diese Teile explizit ausdrücken wie in (A); man kann sie aber ebensogut entweder mittelst $u_1$, $v_1$ oder mittelst $u_2$, $v_2$ finden.

Von Bedeutung für die vorgelegte Frage ist meines Erachtens auch der Umstand, daß es eine einfache *explizite* Form der Lösung der Gleichung $x^3 = ax + b$ gibt, die nicht unmittelbar durch die Summe zweier Kubikwurzeln repräsentiert wird. Zu dieser Form gelangt man durch eine einfache Methode, die schon im 16. Jahrhundert erfunden wurde, und zwar von VIETE.[1]) Bekanntlich besteht diese Methode darin, daß man

$$x = u_3 + \frac{a}{3u_3}$$

setzt, wodurch

$$u_3^3 + \frac{a^3}{27\,u_3^3} + a\left(u_3 + \frac{a}{3u_3}\right) = a\left(u_3 + \frac{a}{3u_3}\right) + b,$$

oder

$$u_3^3 + \frac{a^3}{27\,u_3^3} = b,$$

1) *De æquationum recognitione et emendatione tractatus duo; Opera mathematica*, ed. F. VAN SCHOOTEN, Leiden 1646, S. 150 (problema II).

folglich

$$u_3^3 = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}},$$

und

$$\text{(E)} \qquad x = u_3 + \frac{a}{3u_3} = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}} + \frac{a}{3\sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}}}.$$

Wir haben also fünf verschiedene Formen (A, B, C, D, E) der Lösung der kubischen Gleichung $x^3 = ax + b$, und es geht nicht an, ohne weiteres zu behaupten, daß del Ferro, dessen Lösung wir gar nicht kennen, genau die Form (B) angegeben hat. Freilich kann man im betreff der Form (D) bemerken, daß die quadratische Gleichung $u_2^2 = \frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}$ eine *negative* Wurzel hat, und hinsichtlich der Form (E), daß die Substitution

$$x = u_3 + \frac{a}{3u_3}$$

ziemlich schwierig aufzufinden ist, so daß es aus diesen Gründen weniger wahrscheinlich ist, del Ferro habe sich der Formen (D) oder (E) bedient, aber in jedem Falle kann del Ferro ebensowohl die Form (A) oder die Form (C) wie die Form (B) angegeben haben. Es erübrigt also zu untersuchen, ob man irgend einige besondere Gründe hat anzunehmen, daß die Lösung des del Ferro genau die Form (B) hatte. Meines Wissens sind nur zwei solche Gründe erwähnt worden, nämlich:

1. Ferrari wendet an einer Stelle seines sechsten „Cartello" eine Redeweise an, die darauf hindeutet, daß er an Tartaglias Erfinderrecht zweifelte;[1])

2. Wenn die zwei Lösungen nicht genau dieselben gewesen wären, so hätte Cardano gewiß die Lösung des del Ferro veröffentlicht, um dadurch zu vermeiden, den Eid der Verschwiegenheit zu brechen.[2])

Diese Gründe sind indessen meiner Ansicht nach für die Entscheidung der Frage ohne Bedeutung, denn

1. vorausgesetzt, dass del Ferro seine Lösung unter einer der Formen (A), (C), (D) gegeben hatte, so könnte Ferrari dennoch das Erfinderrecht des Tartaglia ebenso gut bezweifeln; hatte del Ferro dagegen die Form (E) benutzt, so wußte Ferrari sehr wohl aus der zweiten „Risposta" vom 21. Februar 1547, daß Tartaglia sich so eingehend mit Transformationen von irrationalen Ausdrücken beschäftigt hatte, daß er ohne Mühe aus dem Ausdrucke (E) den Ausdruck (A) herleiten konnte, und

---

1) Cantor, *Vorles. über Gesch. d. Mathem.* $2^2$, S. 512.

2) Zeuthen, Bullet. de l'acad. d. sc. de Danemark 1893, S. 310.

auch in diesem Fall konnte FERRARI, wenn er dazu geneigt war, an dem Erfinderrecht des TARTAGLIA zweifeln;

2. es ist gar nicht schwierig, verschiedene Umstände ausfindig zu machen, wodurch CARDANO aus rein sachlichen Gründen veranlaßt werden konnte, gerade die Lösung des TARTAGLIA zu veröffentlichen; ich nenne nur beispielsweise zwei solche Umstände:

a) DEL FERRO hatte lediglich die Gleichung $x^3 + ax = b$ behandelt;

b) DEL FERRO hatte keine allgemeine Regel angegeben, sondern nur sein Verfahren an einer bestimmten numerischen Gleichung erläutert.

Auf der anderen Seite konnte CARDANO sehr wohl glauben, daß sein Verfahren TARTAGLIA angenehm sein würde.[1]) Wenn TARTAGLIA nämlich im Voraus gewußt hätte, daß die *Ars magna* in jedem Falle eine Lösung der kubischen Gleichung bieten würde, so ist es nicht unmöglich, daß er lieber seine eigene Lösung zur Verfügung gestellt hätte, um dadurch seinen Namen mit der wichtigen Entdeckung in Verbindung zu bringen. Hätte dagegen CARDANO die Lösung des DEL FERRO veröffentlicht, könnte jener leicht veranlaßt worden sein, den Namen des TARTAGLIA gar nicht zu erwähnen.

Das Resultat der vorangehenden Untersuchung ist also:

1) man hat keinen bestimmten Anlaß anzunehmen, daß die Lösung des DEL FERRO genau mit der des TARTAGLIA übereinstimmte;

2) die Hypothese, daß TARTAGLIA auch nur einen Teil seiner Lösung von DEL FERRO entlehnt hat, ist folglich unbegründet.

1) Vgl. was FERRARI hierüber in seinem zweiten „Cartello" (S. 4) sagt.

# Le „De arte magna" de Guillaume Gosselin.

Par H. Bosmans à Bruxelles.

## I.

L'ouvrage qui fait l'objet de cette notice est un mince volume de format in 8⁰ de moins de 200 pages,[1]) intitulé:

Gvlielmi ‖ Gosselini Cadomen- ‖ sis Bellocasii de arte ‖ magna, seu de occulta parte nume- ‖ rorum, quae & Algebra, & Almuca- ‖ bala vulgo dicitur; ‖ libri qvatvor. ‖ *In quibus explicantur aequationes Diophanti, Regu- ‖ lae Quantitatis simplicis, & Quantitatis surdae.* ‖ Ad Reuerendissimum in Christo Patrem Reginaldvm Bealnaevm, ‖ Mandensem Episcopum, Illustrissimi ‖ Ducis Alenconij Cancellarium, Comi- ‖ tem Geuodanum, atque in sanctiori & ‖ interiori consilio Consiliarium. ‖ [Marque d'imprimeur de Gilles Beys. Une branche de lys, avec, en exergue, la devise:] Superis casta placent. ‖ Parisiis ‖ Apud Aegidium Beys, via Iacobaea, ‖ ad Insigne Lilij albi. ‖ M.D.LXXVII. ‖[2])

Guillaume Gosselin n'a guère laissé de souvenir. Il naquit à Caen, on ne sait au juste en quelle année, et on ne connaît pas davantage la date de sa mort.[3]) En 1577, lors de la publication de son *De arte magna*, il semble avoir été encore assez jeune. C'est ce qu'on peut conclure de l'en tête de la pièce de distiques latins qui, suivant l'usage, fait suite à la préface: „Ad Gul. Gosselinum Campodomensem Iuvenem Matheseos studiosissimvm"

L'année suivante, en 1578, Gosselin publia chez Gilles Beys, à Paris, une traduction française de l'*Arithmétique* de Tartaglia,[4]) que Kästner

1) Exactement: 86 feuillets paginés au recto seulement, précédés de 8 feuillets non paginés.

2) D'après Nesselmann, ce serait la dernière fois que le mot „Almucabala" paraîtrait en tête d'un volume pour désigner l'algèbre *(Die Algebra der Griechen*, Berlin 1842, p. 53).

3) *Les Origines de la ville de Caen. Revues, corrigées & augmentées* [par P. D. Huet évêque d'Avranche]. Seconde édition. Rouen M.DCC.VI., p. 350—351. (4) F⁰ (av) v⁰.

4) *L'Arithmetique de N. Tartaglia . . . recueillie et traduite d'Italien en François par G. Gosselin, avec toutes les demonstrations mathematiques et plusieurs inventions dudit Gosselin*, Paris, Gilles Beys, 1578. D'après le *British Museum Catalogue of printed Books.*

a sommairement analysée.[1]) Cette *Arithmétique* eut une réédition, à Paris, chez ADRIAN PÉRIER, en 1613.[2])

LA CROIX DU MAINE,[3]) BAYLE[4]) et beaucoup d'autres, signalent une édition de l'Arithmétique de TARTAGLIA par GOSSELIN, qui aurait paru à Anvers, en 1578, chez CHRISTOPHE PLANTIN. Enoncé en ces termes, le renseignement est erroné et doit provenir d'une équivoque.

GILLES BEYS avait épousé MADELEINE PLANTIN, fille de CHRISTOPHE,[5]) et l'on sait que le grand imprimeur anversois garda toujours un peu la haute main sur les succursales dirigées par ses gendres FRANÇOIS RAPHELENGIEN à Leyde, et GILLES BEYS à Paris. L'édition PLANTIN d'Anvers n'est probablement pas autre chose que l'édition GILLES BEYS de Paris. Quoiqu'il en soit, les *Annales Plantiniennes*[6]) ne la nomment pas, et les richissi-

---

1) *Geschichte der Mathematik* (Göttingen 1796), I p. 197—200.

2) *L'arithmetique* ‖ *de* NICOLAS ‖ TARTAGLIA *Brescian,* ‖ *grand mathematicien,* ‖ *et prince des praticiens.* ‖ *Divisee en deux parties.* ‖ *La declaration se verra en la page suyvante.* ‖ *Recueillie et traduite d'Italien en François par* ‖ GUILLAUME GOSSELIN *de Caen.* ‖ *Avec toutes les démonstrations mathématiques et plu-* ‖ *sieurs inventions dudit* GOSSELIN, *esparses* ‖ *chacune en son lieu.* ‖ *Première partie.* ‖ [Marque d'ADRIAN PÉRIER: Une main sortant des nuages tient un compas. Devise sur une banderolle:] *Labore et Constantia.* ‖ A Paris, ‖ Chez Adrian Périer, ruë sainct Jacques au Compas d'or. | M.DC.XIII.

La seconde partie a le même titre que la première.

L'ouvrage existe à la Bibliothèque Sainte Geneviève à Paris. Il est divisé en deux parties in 8⁰.

La 1re partie comprend 136 feuillets, paginés seulement au recto, plus en tête 8 feuillets non paginés (titre, préface et table) et un feuillet blanc au commencement.

La 2e partie comprend 122 feuillets également paginés au recto, plus en tête 8 feuillets non paginés (titre, courte préface pour la 2e partie et table) et un feuillet blanc à la fin.

Je dois ces renseignements à l'obligeance de M. LAMOUROUX, bibliothécaire à la Bibliothèque Sainte Geneviève.

La marque d'ADRIAN PÉRIER est celle de l'imprimerie PLANTIN. GILLES BEYS, gendre de PLANTIN était mort le 19 avril 1595. Sa veuve MADELEINE PLANTIN se remaria au mois d'août de l'année suivante à ADRIAN PÉRIER et mourut à Paris le 27 décembre 1599. PÉRIER employa la marque de PLANTIN jusqu'à sa mort, qui arriva probablement en 1616. Avec lui cessa l'Officine Plantinienne de Paris. Voir: M. ROOSES, *Christophe Plantin, imprimeur anversois. 2e édition* (Anvers 1890), p. 373.

3) *Les Bibliothèques Françoises de* LA CROIX DU MAINE *et de* DU VERDIER *sieur de Vauprivas. Nouvelle édition* (Paris M.DCC.LXXII), tom. I p. 327—328; tom. IV p. 83.

4) P. BAYLE, *Dictionnaire historique et critique.* 3e édit., tom. 2 (Rotterdam M.DCC.XX), p. 1826.

5) Sur GILLES BEYS voir: MAX ROOSES, o. c. aux endroits indiqués à la table alphabétique des noms propres. Entre les pages 220 et 221 il y a de beaux portraits, hors texte, de GILLES BEYS et de sa femme MADELEINE PLANTIN.

6) C. RUELENS et A. DE BACKER, *Annales Plantiniennes. Première partie.* CHRISTOPHE PLANTIN, *1555—1589* (Bruxelles 1865).

mes archives de Christophe Plantin conservées au Musée Plantin-Moretus à Anvers, n'en ont pas gardé de traces.[1])

L'abbé Goujet[2]) nous a conservé un fragment d'ode en mauvais vers français, dans lequel un ami de Gosselin, Jacques Courtin de Cissé, l'engage à abandonner les mathématiques pour s'adonner à la poésie. Voilà tout ce que j'ai pu découvrir sur notre auteur, c'est à dire, somme toute, fort peu de chose.

Gosselin méritait mieux cependant, car malgré l'oubli dans lequel il est tombé, son *De arte magna* est un ouvrage de valeur. Cantor[3]) ne l'a pas vu, mais Kästner[4]) qui l'a eu en mains dit, avec raison, qu'il est „sehr gut nur kurz".

A diverses reprises j'avais été frappé par ce fait que plusieurs auteurs de la fin du XVI$^e$ siècle, Adrien Romain notamment,[5]) parlent de ce petit volume presque à l'égal des algèbres les plus célèbres. J'étais donc, depuis longtemps, désireux de l'étudier, mais le *De arte magna* est devenu assez rare et la bibliothèque royale de Belgique ne le possède pas. On m'en avait cependant signalé plusieurs exemplaires dans les dépots Belges.[6]) La bibliothèque de l'université de Louvain a eu l'obligeance de mettre son exemplaire à ma disposition, à Bruxelles, pendant quelques semaines, et m'a permis ainsi d'approfondir à loisir le travail de Gosselin. Ce sont les conclusions de cette étude que je me propose de communiquer ici.

## II.

Le *De arte magna* débute par une dédicace de Gosselin „Reverendissimo in Christo Patri Reginaldo Bealnaeo[7]) Mandensi Episcopo",

1) Je dois ce renseignement à M. Max Rooses, conservateur au Musée Plantin-Moretus, qui a bien voulu faire à ma demande des recherches dans les archives de Christophe Plantin. Je l'en remercie vivement.

2) Goujet, *Bibliothèque françoise ou histoire de la littérature françoise.* Tom. 12 (Paris MDCCXLVIII), p. 302—307.

3) *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik,* $2^2$ (Leipzig 1900), p. 213.

4) O. c. p. 100.

5) Dans l'essai historique sur la résolution des équations, placé en tête de ses *In Mahumedis Algebram Prolegomena*, fragment imprimé d'un ouvrage inachevé, qui appartient à la Bibliothèque de l'Université de Louvain (Scienc. 1302). L'*In Mahumedis Algebram Prolegomena* n'a pas de titre. J'ai présenté récemment une analyse détaillée de cet important et très curieux commentaire d'Adrien Romain à la Société scientifique de Bruxelles, qui en a voté l'impression dans ses Annales, où il paraîtra incessamment.

6) Université de Louvain (Sciences 387); Bibl. des villes d'Anvers et de Tournai.

7) Renaud de Beaune, né à Tours en 1527, fut successivement évêque de Mende (1568—1581), archevêque de Bourges (1581—1602) et archevêque de Sens (1602—1606). Il mourut le 27 septembre 1606. Voir la collection: *Gallia Christiana ... Operâ &*

suivie d'unc pièce de vers latins,[1]) de la table des matières et d'un extrait du privilège en date de Paris le 17 septembre 1577. Puis vient le corps de l'ouvrage divisé en quatre livres.

Le premier livre comprend dix-sept chapitres. Transcrivons en d'abord les titres avec leurs numéros d'ordre, pour en prendre ainsi un coup d'oeil d'ensemble.

1. De quantitate.
2. De ratione numerandi.
3. Quid sit algebra?
4. Quis algebrae fuerit inventor?
5. Quis sit algebrae finis?
6. De numerorum nominibus.
7. De ratione vestigandi lateris cubici nostra. Nous en reparlerons.
8. De proportione in genere.
9. De proportione arithmetica.
10. De proportione geometrica.
11. De componendis rationibus.
12. De rationum deductione.
13. De rationum multiplicatione.
14. De rationum divisione et septem ad hanc problematis. A savoir insérer entre deux nombres donnés, une, deux, trois, quatre ou cinq moyennes proportionnelles continues; trouver deux nombres connaissant leur somme et leur moyenne proportionnelle; trouver une quatrième proportionnelle à trois nombres donnés.
15. De regula simplicis hypothesis, tribus ad hanc problematis et demonstratione nostra.
16. De regula duplicis hypothesis, duobus problematis et demonstratione nostra.
17. Regulae duplicis usus in quantitatibus continuis in quà cubi duplicandi ratio mathematica demonstratur, tribusque ad hanc problematis hucusque desideratis.

Nous aurons à approfondir tout à l'heure ces trois derniers chapitres. Mais pour épuiser immédiatement ce qui concerne les quatorze premiers voici les quelques remarques qu'ils appellent.

Et d'abord aux chapitres 3 et 4, qu'est-ce que l'algèbre?

L'algèbre, dit Gosselin, a pour but de déterminer la valeur des inconnues, ce qui se fait au moyen des équations; „finis hujus scientiae est

---

*studio monachorum congregationis S. Mauri ordinis S. Benedicti.* Tom. I col. 106; tom. 2 col. 99—102; tom. 12 col. 95—97.

1) Signée: Lud. Martellus *Rotomag.*

cognitio quantitatis ignotae quam ut eliciamur, utimur aequatione tanquam medio“.[1])

Dans ces équations jamais Gosselin ne représente les quantités connues pas des lettres, se sont toujours des chiffres. Il ne se sert pas non plus des signes + et —, d'un usage déjà courant en Allemagne et qui n'étaient même pas inconnus en France, comme le prouvent notamment les deux éditions de l'Algèbre de Scheubelius publiées, en 1551 et 1552, chez Guillaume Cavellat à Paris.[2]) Au lieu et place de ces signes il emploie les lettres majuscules $P$ et $M$. Quant aux inconnues, il les désigne par des lettres, chaque puissance ayant sa notation propre. Il définit lui-même les puissances par le tableau suivant:[3])

$$L \cdot 2 \cdot Q \cdot 4 \cdot C \cdot 8 \cdot QQ \cdot 16 \cdot RP \cdot 32 \cdot QC \cdot 64 \cdot RS \cdot 128 \cdot CC \cdot 512.$$

D'après cela l'équation[4])

$$12\,LM\,1\,QP\,48 \text{ aequalia } 144\,M\,24\,LP\,2\,Q$$

se transcrit en écriture moderne:

$$12x - x^2 + 48 = 144 - 24x + 2x^2.$$

Ces notations sont fort claires et on s'y habitue de suite. La clarté est d'ailleurs un des grands mérites de Gosselin. Ses démonstrations sont translucides, on aura l'occasion de s'en convaincre par les extraits que nous en donnerons.

Le chapitre 7 est consacré à l'extraction de la racine cubique des nombres. La méthode, cela va sans dire, repose sur la formule

$$(d + u)^3 = d^3 + 3d^2u + 3du^2 + u^3.$$

1) F° 4 r°.

2) *Algebrae compendiosa facilisque descriptio, qua depromuntur magna arithmetices miracula. Authore* Ioanne Scheubelio *Mathematicarum professore in academia Tvbingensi.* (Marque d'imprimeur de Cavellat.) Parisiis, Apud Gulielmum Cauellat, in Pingui Gallina, ex aduerso Collegii Cameracensis. 1551. Cvm Privilegio.

Même titre: Parisiis, Apud Gulielmum Cauellat... 1552...

L'ouvrage avait paru deux ans auparavant, à Bâle, sous le titre: *Evclidis Megarensis, philosophi & mathematici excellentissimi, sex libri priores de geometricis principiis, Graece & Latine, una cum demonstrationibus propositionum, absq; literarum notis, ueris ac proprijs, & alijs quibusdam usum earum continentibus, non citra maximum huius artis studiosorum emolumento adiectis. Algebrae porro regvlae, propter nvmerorvm exempla, passim propositionibus adiecta, his libris praemissae sunt, eaedemq; demonstratae. Avthore* Ioanne Scheubelio, *in inclyta academia Tvbingensi Euclidis professore ordinario.* (Marque d'imprimeur.) Cum gratia & priuilegio Caesario ad quinquennium. Basileae per Ioannem Heruagium.

La bibliothèque royale de Belgique possède les trois éditions, ce qui permet de constater que les deux éditions de Cavellat ne diffèrent que par le millésime du titre.

3) Ch VI, f° 5 r°. RP, RS signifient: *relatum primum, relatum secundum.*

4) Liv. III, ch. VI, f° 65 v°.

L'auteur en expose longuement l'emploi, mais tous ces développements peuvent être sans inconvénient passés ici sous silence et le tableau où se trouve résumé l'opération en fait suffisamment connaître le mécanisme. Il est intéressant de comparer ce tableau à ceux qui ont été publiés sur le même sujet par TREUTLEIN, dans son histoire du calcul au XVI^e^ siècle.[1] A l'exemple du professeur de Carlsruhe, je transcris en marge, en écriture algébrique moderne, la signification des opérations principales.

Le nombre sur lequel GOSSELIN opère est 10077696, dont la racine cubique est 216.[2])

| | | |
|---|---|---|
| | 2816 | |
| | 10077696 | |
| | 2 1 6 | |
| | 8 \| 63 | $d^3 \mid 3(d+u)$ |
| primum | 2 | $du$ |
| opus | 1261 | $3(d+u)du+u^3$ |
| | 638 | |
| | 1 | |
| | 648 | $3(D+U)$ |
| | 126 | $DU$ |
| | 3888 | |
| | 1296 | |
| | 648 | |
| secun- | 81648 | $3(D+U)DU$ |
| dum | 216 | $U^3$ |
| opus | 816696 | $(3D+U)DU+U^3$ |

On ne peut cependant passer outre, sans relever dans les explications de GOSSELIN une faute de plume étrange et qui s'y reproduit jusqu'à deux fois. Elle ne l'empêche pas de calculer, en fait, correctement, preuve évidente que c'est de sa part distraction pure.

L'auteur dit donc, que pour déterminer les chiffres des unités successives de la racine, il faut chaque fois diviser les restes par le triple du nombre déjà déterminé des dizaines de cette racine. C'est le triple du carré du nombre des dizaines de la racine qu'il fallait dire. „Jam sumo triplum summae notarum in latere inventarum, hoc est 21; triplum est 63 . . . . . inquiro quoties 63 in 8166 contineri possunt, at possunt sexies (*sic*)“[3]) $8166 : 63 = 6$ (!). Il suffit de refaire l'opération pour constater que c'est la division de 8166 par $1323 = 3 \times 21^2$ qui donne 6 pour quotient.

---

1) P. TREUTLEIN, *Das Rechnen im 16. Jahrhundert*; Abhandl. zur Gesch. der Mathem. 1, 1877, p. 71—75.

2) F° 8 v°. — 3) F° 8 r°.

Le chapitre 9 est intitulé: „De Proportione Arithmetica“. Sous ce nom Gosselin y traite le problème: Etant donné le côté d'un nombre polygonal, trouver ce nombre. Le très savant Maurice Bressieu, professeur de mathématiques, dit-il,[1]) „vir doctissimus M. Bressius, professor mathematicus,“[2]) a donné la formule suivante. Je la traduis en langage moderne:

Soit $n$ le nombre des angles du polygone,

$l$ la longueur de son côté,

$k$ la valeur du nombre polygone. On a

$$[(n-2)(l-1)+2]\frac{l}{2}=k,$$

la formule est donnée sans démonstration. Gosselin en fait deux applications:

1⁰, Quel est le nombre triangulaire dont le côté est 6?

*R.* On a, $n=3$, $l=6$, d'où $k=21$.

2⁰, Quel est le nombre pentagonal dont le côté est 6?

*R.* On a, $n=5$, $l=6$, d'où $k=51$.

Plus tard, au chapitre 15 du livre III, l'auteur reviendra sur la formule de Bressieu, pour traiter le problème inverse, en résolvant la formule par rapport à $l$, quand on connaît $k$.

Abordons enfin l'examen des trois derniers chapitres du livre I, les plus connus du *De arte magna*. C'est d'eux que Montucla avait gardé le souvenir lorsqu'il dit:[3])

„Pierre Josselin de Cahors[4]) publia, en 1576, un traité d'algèbre intitulé: *De occulta parte numerorum*, etc. J'ai idée d'y avoir vu anciennement des essais assez ingénieux d'application de l'algèbre à la géométrie, entr'autres à l'invention des deux moyennes proportionnelles continues, où il se trompe néanmoins, croyant avoir résolu par une équation du second degré, le problème qu'Apollonius[5]) résolvait au moyen d'une hyperbole“.

Ce problème était le suivant:[6])

1) Gosselin aurait pu tirer encore sa formule de *l'Arithmetica integra* (1544) de Stifel qui traite aussi, comme on sait, de la théorie des nombres polygonaux.

2) F⁰ 11 r⁰.

3) *Histoire des Mathématiques. Nouvelle édition* 1 (Paris An VII), p. 613.

4) Montucla a ici un défaut de mémoire en attribuant l'ouvrage à Pierre Josselin de Cahors et l'autorité du grand historien a induit beaucoup d'autres en erreur. Cantor, lui même, hésite dans ses *Vorlesungen* et ne sait à qui il faut attribuer le *De arte magna* ($2^2$, p. 613). J'ai résolu autrefois ce doute ici même, dans les „Kleine Mitteilungen“ (Biblioth. Mathem. $3_3$, 1902, p. 357).

5) On ignore où Apollonius s'est occupé de cette construction, dont Eutocius parle dans son commentaire sur le second livre d'Archimède *De sphaera et cylindro* (voir Archimedis *Opera*, éd. J. L. Heiberg, III, Lipsiae 1881, p. 76; Apollonii *Opera*, éd. J. L. Heiberg, II, Lipsiae 1893, p. 104). Gosselin avait peut-être tiré la connaissance de cette construction de l'édition des œuvres d'Archimède publiée à Bâle en 1544.

6) Ici Gosselin n'a pas moins de six figures différentes. Je n'ai fait aucune attention aux lettres qui y sont employées, pour m'attacher exclusivement au sens des constructions.

„Etant donné un rectangle $ABCD$, du centre $O$ du rectangle décrire une circonférence qui coupe les côtés $AB$ et $AC$ prolongés, respectivement en deux points $E$ et $F$, tels que la corde $EF$ passe par le quatrième sommet $D$ du rectangle.“

L'erreur de Gosselin provient de ce qu'il appelle quelque part la *Petitio prior.*[1]) On pourrait la résumer en ces termes:[2])

„Si au lieu de l'expression exacte d'un nombre on n'en prend qu'une valeur approchée, les différences accusées sur les résultats des opérations sont proportionnelles aux différences faites sur les hypothèses.“

Quant à Gosselin il est confirmé dans sa méprise par les applications qu'il fait de son postulat.

Il l'essaie sur plusieurs problèmes particuliers. Mais il a la main malheureuse, car les problèmes qu'il choisit sont d'une nature telle que le principe énoncé y est vrai, parce que ces problèmes eux-mêmes peuvent se résoudre par la méthode de fausse position. Voyant donc que le principe réussit, Gosselin en conclut, par des considérations embrouillées, qu'il est général. Ces considérations sont d'ailleurs purement arithmétiques et c'est ici que Montucla croyait se rappeler une tentative ingénieuse d'application de l'algèbre à la géométrie. Il est en effet curieux de voir comment Gosselin adapte son postulat au problème actuel.[3])

Du centre $O$ et avec un rayon arbitraire, décrivons une circonférence qui coupe les côtés $AB$ et $AC$ respectivement en $E^1$ et $F^1$. Menons la corde $E^1F^1$ et notons le point $G$ où cette corde coupe la côté $BD$ du rectangle ou son prolongement.

Faisons la même opération avec un rayon différent et notons le point $H$ où la nouvelle corde coupe $BD$.

La différence accusée sur les résultats est le segment $GH$ que le point $D$ (en fait, intérieur à $D$ et à $H$, dans les figures de Gosselin) divise dans un rapport donné $\frac{DG}{DH}$

---

1) Comparer sur ce sujet le chap. 30 de l'*Ars magna* de Cardano.

2) Voici l'un des passages où l'auteur s'exprime le plus clairement: „Si pro ignota quaestionis alicujus quantitate, duae quaelibet ejusdem generis assumantur, et ex utraque sigillatim quaestionis formula pertractetur, si quid vel supersit demum vel desit, cum nota redundantiae vel defectus ascribatur. Erit, sicut differentia errorum totius operis, ad utrumvis ipsorum errorum, sic differentia hypothesium ad errorem ejus hypothesis cujus erratum operis secundum proportionale est assumptum; quod hypothesis erratum, hypothesi vel additum siquidem hypothesis fuerit minor quam oportuit, vel deductum si major, quaesitam suppeditat quantitatem“ (F° 24 v° — 25 r°).

Le même principe est énoncé plus loin, mais sous une autre forme, dans la *Petitio prior* (F° 31 r° et v°).

3) F° 37 r°.

Or les différences faites sur les hypothèses, c'est à dire les différences des rayons, doivent être proportionnelles aux différences des résultats.

Soient donc $R$ et $r$ les rayons employés et $x$ le rayon cherché; on calculera $x$ par la proportion

$$\frac{R-x}{x-r} = \frac{DG}{DH}.$$

## III.

Le livre II, divisé en trois chapitres, est consacré au calcul algébrique. Nous en transcrivons de nouveau les titres, mais pour leur intelligence il faut savoir que les *nomina* sont les monômes, dans lesquels, je l'ai dit ci-dessus, seule l'inconnue est représentée par des lettres; les *integra* sont les polynômes rationnels par rapport à l'inconnue; les *particulae*, les expressions renfermant l'inconnue en dénominateur; les *latera*, les radicaux. Ces mots définis, le sens des titres n'offre plus guère de difficultés.

1. De valore nominum sive quantitatum hujus artis.
2. De additione et subductione nominum.
3. De nominum multiplicatione.
4. De nominum divisione.
5. De integrorum additione.
6. De integrorum deductione.
7. De integrorum multiplicatione et demonstratione nostra.
8. De integrorum divisione.
9. De particulis.
10. Quid sit latus et quotuplex.
11. De laterum multiplicatione.
12. De laterum additione.
13. De laterum deductione.
14. De laterum divisione.

La valeur des „nomina“ ou noms, dont il est question au Chapitre 1, est la valeur du chiffre du degré de l'inconnue. Exemple: $L$, $Q$, $C$, ont respectivement pour valeur 1, 2, 3.

D'après cela l'addition et la soustraction des noms de valeur différentes est impossible. Il faut se contenter d'indiquer l'opération par les signes $P$ ou $M$ (Chapitre 2).

Pour multiplier deux noms, on ajoute leurs valeurs et on multiplie leurs nombres, c'est à dire leurs coefficients (Chapitre 3). Exemple:[1])

„Placet multiplicare $3\,Q$ per $4\,C$; valor $Q$ est 2, valor $C$ 3, quae addita

1) F° 41 v°.

constituunt 5, cujus numeri quantitas est *RP*;[1]) multiplico 3 in 4, fiunt 12. Multiplicatis itaque 3 *Q* in 4 *C* exurgunt 12 *RP*.“

Pour diviser les noms on soustrait leurs valeurs et on divise leurs nombres. C'est la conséquence de la règle de la multiplication (Chapitre 4).

Les chapitres 5 à 9 exposent le calcul des polynômes entiers, comme on pourrait le faire encore aujourd'hui dans une algèbre élémentaire. Notons y, par exemple, la précision de la règle des signes de la divison.[2])

Regulae quatuor:

„*P* in *P* diviso quotus est *P*.
*M* in *M* quotus est *P*.
*M* in *P* diviso quotus est *M*.
*P* in *M* diviso quotus est *M*“.

La règle des signes de la multiplication est d'ailleurs formulée avec non moins de fermeté.[3])

Quant aux écritures, les calculs se disposent comme suit:

Multiplication (Chapitre 7):[4])

| | | |
|---|---|---|
| | $4\,L\,M\,6\,Q\,P\,7$ | $4x - 6x^2 + 7$ |
| | $3\,Q\,P\,4\,L\,M\,5$ | $3x^2 + 4x - 5$ |
| Producta | $12\,C\,M\,18\,Q\,Q\,P\,21\,Q$ | $12x^3 - 18x^4 + 21x^2$ |
| | $16\,Q\,M\,24\,C\,P\,28\,L$ | $16x^2 - 24x^3 + 28x$ |
| | $M\,20\,L\,P\,30\,Q\,M\,35$ | $-20x + 30x^2 - 35$ |
| Summa | $67\,Q\,P\,8\,L\,M\,12\,C\,M\,18\,Q\,Q\,M\,35$ | $67x^2 + 8x - 12x^3 - 18x^4 - 35$ |

Division (Chapitre 8):[5])

| | | |
|---|---|---|
| | $P\,8\,Q$ | $+8x^2$ |
| | $12\,C\,M\,10\,Q\,M\,12\,L$ | $12x^3 - 10x^2 - 12x$ |
| Quotus | $P\,6\,Q\,P\,4\,L$ | $+6x^2 + 4x$ |
| Divisor | $2\,L\,M\,3$ | $2x - 3$ |
| | $2\,L\,M\,3$ | $2x - 3$ |

L'habitude de biffer, au fur et à mesure, les éléments employés est empruntée aux usages de l'arithmétique; nous en avons vu un exemple, ci-dessus, à propos de l'extraction de la racine cubique. Le déplacement du diviseur à chaque nouveau terme était aussi fort usité. On croyait par là, et peut-être avec raison, garantir la sureté de l'opération en écartant les erreurs de distraction.[6])

1) *RP*, la 5e puissance de l'inconnue d'après le tableau donné ci-dessus.

2) Fo 45 vo (coté par erreur 25).

3) Fo 45 ro. — 4) Fo 45 vo. — 5) Fo 47 ro.

6) Voir mon mémoire: *La méthode d'Adrien Romain pour effectuer les calculs des grands nombres;* Annales de la société scientifique de Bruxelles, 28 : 2, 1904, p. 411—429.

Restent les cinq derniers chapitres du livre. Ils ont pour objet le calcul de la valeur arithmétique des radicaux.

Les radicaux sont simples ou composés:[1]) est autem laterum duplex genus simplicium et compositorum. Simplicia sunt ut $L\,9$, $LC\,8$, $LL\,16$, $LC\,12$, etc. Composita vero ut $LV24PL29$, $LV6PL8$. En d'autres termes: les radicaux simples sont des expressions telles que $\sqrt{9}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[3]{12}$ etc., les radicaux composés des expressions telles que $\sqrt{24+\sqrt{9}}$, $\sqrt{6+\sqrt{8}}$. L'algorithme $LV$ se lisait „Latus universale".

Il faut encore remarquer les radicaux composés[2]) $LVL10PL5$ et $LVCL5PLC10$, c'est à dire: $\sqrt{\sqrt{10}+\sqrt{5}}$, $\sqrt[3]{\sqrt{5}+\sqrt[3]{10}}$.

Un radical composé se nomme aussi „latus ligatum"[3]), racine liée.

Pour multiplier deux radicaux on les réduit au même nom (au même indice), puis on multiplie leurs nombres, c'est à dire les quantités sous le radical (Chapitre 1). Donnons à cette occasion une idée du style de l'auteur. Il s'agit de multiplier $\sqrt[3]{8}$ par $\sqrt{9}$.[4])

„Ut reducantur $LC8$ et $LQ9$ ad idem nomen, multiplicabimus 8, numerum unius lateris secundum nomen alterius, hoc est quadrate, existent 64; tum multiplicabimus 9 numerum alterius secundum nomen alterius, hoc est cubice, fient 729; deinde multiplicabimus valorem, hoc est 2, in valorem cubi, hoc est 3, exurgent 6, cujus valoris quantitas est $QC$. Dicemus ergo revocatis $LQ9$ et $LC8$ ad idem nomen existere $LQC64$ et $LQC729$ ... His ita constitutis, cum ambo latera constituta fuerint ad idem nomen eundemque valorem, multiplicabimus numerum unius in numerum, alterius et latus producti erit factus numerus ex uno latere in aliud."

Règle analogue pour la division des radicaux (Chapitre 14).

Quant à l'addition et à la soustraction des radicaux, elle n'est possible que si les radicaux son semblables; dans les autres cas il faut se contenter d'indiquer l'opération (Chapitres 12 et 13).

Tout cela est écrit en un style clair, bref, vif et précis, qui fait plaisir à lire, ce dont au surplus l'auteur a conscience. „Reliqua, dit-il au commencement du chapitre 10, en donnant le plan qu'il va suivre,[5]) quae a Stifelio,[6]) Cardano[7]) et Peletario[8]) plura multo proponuntur, missa

1) F° 47 v°. — 2) F° 48 r°. — 3) F° 48 r°. — 4) F° 48 v°—49 r° — 5) F° 47 v°.

6) M. Stifel, *Arithmetica integra*. Norimbergae M.D.XLIIII. L'exemplaire de l'Université de Louvain (Scienc. 244) que j'ai sous les yeux présente un intérêt particulier. Il a appartenu à Gemma Frisius et contient, en marge, de nombreuses notes et réflexions critiques écrites de sa main.

7) Hieronimi Cardani, *Practica arithmetice, & mensurandi singularis*. Mediolani M.D.XXXIX. Réédité dans: Hieronymi Cardani *Opervm Tomvs qvartvs* ... Lvgdvni M.DC.LXIII.

8) Iacobi Peletarii, *De occvlta parte nvmerorvm, qvam Algebram vocant, libri*

faciemus; sunt enim ejusmodi ut usum habeant nullum, obscuritatem singularem.“

IV.

Le livre III a pour objet la Théorie des équations, telle que ce mot eût pu être entendu par un algébriste du XVI$^e$ siècle. Il est divisé en 13 chapitres aux titres desquels l'auteur ajoute, quand il y a lieu, le nombre des problèmes résolus en exemples, dans chacun d'eux.

1° De aequatione.

2° Quotuplex sit aequatio.

3° De aequatione simplice (du 1$^r$ degré) duobus ad hanc problematis et demonstratione nostra.

4° De aequatione secunda (du 2$^d$ degré) et tribus canonibus cum demonstrationibus nostris et tribus ad hanc problematis.

5° De aequatione ad hanc proportionali et uno ad hanc problemate. Equation bicarrée et autres équations réductibles au second degré.

6° De reductione quadratorum ad unum quadratum. Des équations du 2$^d$ degré dans lesquelles le terme du 2$^d$ degré contient plusieurs carrés, c'est à dire est affecté d'un coefficient. On la ramène à un seul carré en divisant les deux membres par ce coefficient.

7° Quomodo revocantur quantitates ad minorem valorem et uno ad hanc problemate. De l'abaissement du degré des équations.

8° De infinito horum aequationum dignoscendis rationibus. Ecrit contre Nonius.[1])

9° Quomodo in particulis et lateribus fieri debeat aequatio.

10 De aequatione tertia seu cubica.

11 De fictitia Diophanti aequatione et quinque ad hanc problematis.

12 De duplicata Diophanti aequalitate et uno ad hanc problemate.

13 Dati cujuscunque polygoni lateris inquirendi generalis nostra ratio et facilis.

Au chapitre 1, Gosselin définit l'équation en ces termes:[2]) „Aequatio est duarum quantitatum diversi nominis et valoris ad unam aestimationem reductio; ut cum dicimus unum quadratum aequari quatuor lateribus, c. à d. $x^2 = 4x$.

Combien y a-t-il d'espèces d'équations (Chapitre 2)?

Quelques géomètres soutiennent, à tort, que le nombre des équations est illimité. Mais si on veut bien faire réflexion que toute quantité

---

*duo.* Parisiis 1560. Dans la préface du livre I, Peletier parle de l'édition française de son algèbre qui a pour titre: *L'algèbre de Jacques Peletier du Mans departie en deus livres.* A Lion, par Ian de Tournes, 1554. Je cite ce dernier titre d'après le *Manuel du libraire et de l'amateur de livres . . . par Jacques Charles Brunet,* tom. 4, Paris 1863, col. 475.

1) Nous y reviendrons plus loin. — 2) F° 53 r°.

continue est ligne, surface ou corps, on devra convenir qu'on ne peut raisonnablement admettre que trois espèces d'équations. L'auteur prévoit, semble-t-il, qu'une pareille affirmation ne restera pas sans soulever de protestations. On possédait la solution de l'équation du 4e degré! Aussi, „utut sit", ajoute-t-il,[1]) „nostra haec est sententia quam postea, juvante Deo, demonstrabimus".

Ainsi donc pour Gosselin l'équation du 4e degré est pur jeu de l'esprit n'ayant qu'un sens conventionnel, comme pour nous l'espace à 4 dimensions!

Cette idée ne lui est pas aussi personnelle qu'il veut bien le dire. Il l'avait empruntée à Cardan qui écrit, lui aussi, au Chapitre 1 de son *Artis magnae liber*:[2]) „Cum positio lineam, quadratum superficiem, cubus solidum referat, nae utique stultum fuerit, nos ultra progredi quo natura non licet".

Mais, comme Adrien Romain le fait très bien observer, dans son essai historique sur la résolution des équations,[3]) c'est la théorie des sections angulaires qui devait amener les géomètres à d'autres idées et leur montrer l'utilité pratique des équations de tous les degrés.[4])

Pour résoudre les équations, Gosselin emploie de prime abord de bien jolies méthodes. Impossible de les faire mieux connaître qu'en transcrivant une de ces solutions en entier, celle du problème 2 du chapitre 3, par exemple.[5]) Au surplus cela me permettra d'abréger en évitant les explications; je me contenterai d'ajouter au texte la traduction des formules en notations modernes.

„Duo habent ignotam mihi summam aureorum. Dixit primus secundo, si dederis latus quadratum tuorum aureorum possidebo tres plus quam tu; sed (dixit secundus) dato latus quadratum tuorum, habebo 5 plus quam tu. Quot aureos unusquisque possidebat in loculis?

„Fingamus secundum habuisse $1\,Q$ $\qquad x^2$.

„Det suum $L$ ($=x$) primo, reliquum erit illi $1\,Q\,M\,1\,L$ $\qquad x^2 - x$.

„Et quia primus debet habere 3 plus quam secundus, habebit igitur primus $1\,Q\,M\,1\,L\,P\,3$ $\qquad x^2 - x + 3$.

---

1) Ffo 53 vo—54 ro. — 2) *Opera*, cité ci-dessus, t. IV, p. 222.

3) Placé en tête de ses *In Mahumedis Algebram prolegomena*.

4) „Sed et aequationes quantitatum, non ad centesimum duntaxat, sed et millesimum gradum et ulterius, sunt in usu humano: saltem in sectionibus angulorum, sive (quod in idem incidit) lateribus polygonorum, cum in iis non centuplicata duntaxat, sed et millecuplicata, et ulterior in infinitum inveniatur ratio." *In Mahumedis Algebram Prolegomena*, p. 12.

5) Fo 56 ro—57 ro. Je dirai ici, une fois pour toutes, que la ponctuation de Gosselin est défectueuse et que je n'en tiens pas compte. Pour faciliter la lecture, j'ai aussi, conformément aux habitudes modernes, multiplié les alineas.

„Reddat jam $1L\,(=x)$ secundo quod ab eo accepit, restabunt illi $1\,QM2\,LP3$

$$x^2-2x+3,$$

„et secundus habebit $1\,Q$.

$$x^2.$$

„Sed et secundus, ex hypothesi, cum primi pecuniae latere habet 5 plus quam primus; det igitur primus suum $L$ secundo, hoc est $LV1\,QM2\,LP3$ $(=\sqrt{x^2-2x+3})$, habebit secundus $1\,QPLV1\,QM2\,LP3$

$$x^2+\sqrt{x^2-2x+3};$$

et restabunt primo $1\,QM2\,LP3\,MLV1\,QM2\,LP3$

$$x^2-2x+3-\sqrt{x^2-2x+3}.$$

„Verum et secundus cum latere primi debet habere 5 plus quam primus, quare primus minor secundo 5. Addamus igitur 5 primo, existit primus

$$1\,QM2\,LP8\,MLV1\,QM2\,LP3$$

et haec aequabuntur secundo, nimirum

$$1\,QPLV1\,QM2\,LP3$$

$$x^2-2x+8-\sqrt{x^2-2x+3}=x^2+\sqrt{x^2-2x+3}$$

„Et subducto utrinque $1\,Q\,(=x^2)$ restabit

$LV1\,QM2\,LP3$ aequale $8\,M2\,LMLV1\,QM2\,LP3$

$$\sqrt{x^2-2x+3}=8-2x-\sqrt{x^2-2x+3}$$

„Et addendo $LV$ (= le radical) quod deficit ex altera parte, ex 3 axiomate restabunt

$8\,M2\,L$ aequalia $2\,LV1\,QM2\,LP3$

$$8-2x=2\sqrt{x^2-2x+3}$$

„Duplicemus ergo $LV$, existet

$LV4\,QM8\,LP12$ aequale $8\,M2\,L$

$$\sqrt{4x^2-8x+12}=8-2x$$

et quadratis partibus

$4\,QM8\,LP12$ aequalia $64\,M32\,LP4\,Q$

$$4x^2-8x+12=64-32x+4x^2$$

„Deducamus utrinque $4\,Q$ et 12 $(=4x^2+12)$, restabunt

$52\,M32\,L$ aequalia $M8\,L$

$$52-32x=-8x$$

„Tollamus utrinque $M8\,L\,(=-8x)$, supererunt

$52\,M24\,L$ aequalia nihilo

$$52-24x=0$$

„Addamus utrinque $24\,L$, quae deficiunt in altera parte, existent

52 aequalia $24\,L$

$$52=24x$$

et sic stat aequatio. Partiemur 52 in 24, quotus erit $2\frac{1}{6}$, valor scilicet $L\,(x=2^1/_6)$. Secundus ergo quem fecimus habuisse $1\,Q$, habuit quadratum

$2\frac{1}{6}$, hoc est $4\frac{25}{36}$ $[x^2 = (2\frac{1}{6})^2 = 4\frac{25}{36}]$. Primus vero $1\,QM2LP3$, hoc est $3\frac{13}{36}$, $(x^2 - 2x + 3 = 3\frac{13}{36})$.

Le lecteur aura remarqué ces deux équations:

$$52\,M32\,L \text{ aequalia } M8\,L, \qquad 52 - 32x = -8x;$$

$$52\,M24\,L \text{ aequalia nihilo}, \qquad 52 - 24x = 0.$$

Cette manière d'écrire, si rare encore au XVI$^e$ siècle, mérite l'attention.[1])

Je passe rapidement sur l'équation du second degré, dont la résolution forme l'objet des chapitres 4—8. A l'exemple de ses prédécesseurs, GOSSELIN ramène l'équation aux trois types,

$$q = x^2 + px \quad , \qquad x^2 = px + q \quad , \qquad px = x^2 + q$$

et pour chacun d'eux il établit les formules classiques. Il n'y a rien de neuf à y relever, si ce n'est, peut-être, qu'à un moment il est assez mal inspiré. Partout ailleurs il professe grand respect pour l'*Algèbre* de NONIUS, „in cujus verba juravi", dit-il dans la préface;[2]) mais ici il lui cherche mal à propos querelle.[3])

Quand le terme du second degré est affecté d'un coefficient, NONIUS résout l'équation que nous écririons

$$ax^2 + bx = c$$

en lui faisant subir les transformations suivantes:[4])

$$4a^2x^2 + 4abx = 4ac$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 + 4ac$$

$$2x = \frac{\sqrt{b^2 + 4ac} - b}{a}$$

GOSSELIN ne sait pas faire assez de gorges chaudes sur cette manière d'opérer. Pourquoi d'abord cette multiplication par $a$? Pourquoi sur-

---

1) Outre l'exemple cité ci-dessus, on trouve encore chez GOSSELIN (F° 73 v°)

$$3\ QM\ 24\ L \text{ aequalia nihilo}, \qquad 3x^2 - 24x = 0.$$

Voir, sur ce sujet interessant: G. ENESTRÖM: *Über Gleichungen, die auf Null gebracht sind* (Biblioth. Mathem. $3_3$, 1902, p. 145).

CANTOR, dans sa *réponse à la Question 307* de l'Intermédiaire des mathématiciens 2, 1895, p. 86.

Je rappellerai que WALLIS fit un effort énergique pour tâcher de reporter le mérite de cet usage sur HARRIOT (*J. WALLISII Opera mathematica*, Oxoniae 1693—1699, T. II, p. 139). Le rédacteur des Acta Eruditorum crut le fait assez important pour mériter d'être relevé dans le compte rendu qu'il donna de l'*Algèbre* de WALLIS (Année 1686, p. 285).

2) F° aiiij 2°. — 3) C'est l'objet du chapitre VIII, f. 67 r°—68 r°.

4) Je cite d'après GOSSELIN, car les *Opera* de NONIUS (Basileae) que j'ai seuls sous la main ne contiennent pas l'algèbre. L'édition espagnole parut, on le sait, à Anvers, sous le titre: *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria. Compuesto por el Doctor PEDRO NUÑEZ, Cosmographo Mayor del Rey de Portugal.* Anvers, en la casa de la Biuda y Herederos de Juan Stelsio, 1567. D'autres exemplaires ont pour adresse d'imprimeur: En Anvers, en casa de los Herederos d'Arnoldo Birckman, 1567.

tout prendre pour inconnue $2x$? Quelle raison y a-t-il de s'arrêter dans cette voie? Ne pourrait-on pas aussi bien choisir $3x$, ou $4x$, ou $5x$? Là-dessus GOSSELIN démontre que NONIUS aurait pu prendre pour inconnue $3x$ ou $4x$, ce qui ne lui cause naturellement aucune difficulté.

Le chapitre 10 „De aequatione tertia“ est très écourté. GOSSELIN n'y expose pas ce qu'on savait alors de la résolution de l'équation du 3ᵉ degré; il se contente de dire que le problème n'a pas encore reçu de solution complète. Il le réétudiera et publiera sous peu le résultat de ses recherches; „nos vero interea pro virili parte problema hoc vestigabimus, dabimusque operam ut brevi cognoscatur“.[1])

Les chapitres 11 et 12 ont pour objet des problèmes d'analyse indéterminée d'après Diophante.

La traduction latine de DIOPHANTE venait d'être éditée à Bâle, en 1575, par XYLANDER. Il y avait donc de cela deux ans à peine. Mais il faut avoir eu en mains l'édition de XYLANDER pour comprendre quelle série d'inextricables énigmes à résoudre, elle imposait à la sagacité des mathématiciens.

Ecoutons à ce sujet, un des plus ingénieux commentateurs de DIOPHANTE, SIMON STEVIN:[2])

„L'exemplaire grec duquel XYLANDRE l'avoit translaté, dit-il, a esté (par le souvent rescripre comme il semble) si rempli de vices (dont XYLANDRE s'en complaint souventes fois) que le texte de DIOPHANTE ne se pourroit expliquer de mot à mot.“

Aussi STEVIN arrête sa traduction et son commentaire à la fin du quatrième livre, „laissant le cinquiesme et le sixiesme pour empeschement d'autres occupations plus necessaires“.[3]) Mais ALBERT GIRARD son continuateur ne croit pas trop à la raiscn alléguée par le géomètre brugeois D'après lui,[4]) il „est plus apparent que les grandes difficultés qui se rencontrent aux deux derniers livres de DIOPHANTE ont empesché le translateur d'en parachever la version“.

Il ne faut donc point s'étonner d'entendre GOSSELIN nous dire, dans

---

1) Fº 72 vº.

2) *L'Arithmetique*, Leyde CIƆ. IƆ. LXXXV, p. 433—434.

Réédité dans: *Les Oeuvres Mathematiques de* SIMON STEVIN *de Bruges. Par* ALBERT GIRARD. Leyde, CIƆ. IƆ. CXXXIV, Tom. I, p. 102.

3) *L'Arithmetique*, p. 433; *Les Oeuvres*, Tom. I. p. 102.

4) *L'Arithmetique de* SIMON STEVIN *de Brvges, Reueuë, corrigee & augmentee de plusieurs traictez et annotation par* ALBERT GIRARD *Samielois Mathematicien.* A Leide, de l'Imprimerie des Elzeviers. CIƆ. IƆ. CXXV. Fº $*_2$. Dans la dédicace d'ALBERT GIRARD à MAURICE DE NASSAU. Cette dédicace n'est pas reproduite dans l'édition des *Oeuvres Mathematiques de* SIMON STEVIN, *par* ALBERT GIRARD, de Leide 1634.

sa préface:[1]) „Cum vero ad DIOPHANTUM deveni, aliquantulum me recta circumegit ratio; nihilominus multis laboribus exantlatis, plurima exhausta fuligine, tandem ipsum legi, perlegi et assecutus fui". Plus tard, ajoute-t-il, il publiera un commentaire complet de l'algébriste grec; mais il convient d'attendre que MAURICE BRESSIEU, aît d'abord publié le texte des sept derniers livres, d'après le manuscrit de la Bibliothèque du Roi.[2]) Pour le moment, il se contente de faire connaître l'esprit des méthodes de DIOPHANTE, par quelques exemples.

En fait, GOSSELIN traite seulement les équations et les problèmes suivants:

D'abord, au chapitre 11, trois équations:

1° $$6x^2 + 16 = y^2$$

2° $$6x + 8 = y^2$$

3° $$6x^2 + 12x + 16 = y^3.$$

Puis, toujours dans le même chapitre, cinq problèmes:

1° Trouver trois nombres en progression arithmétique, et tels, qu'en ajoutant 4 à chacun d'eux, on obtienne trois carrés.

2° Trouver trois nombres dont la somme soit un carré; et tels que le premier soit un carré, ainsi que les sommes de ce premier nombre avec chacun des deux autres.

3° Trouver, quatre nombres dont la somme soit un carré; et tels que les différences entre le premier et le second, le second et le troisième, le troisième et le quatrième, soient trois carrés.

4° Trouver trois carrés en progression arithmétique.

5° Trouver trois carrés en progression arithmétique, connaissant le carré du milieu.

Au chapitre 12, GOSSELIN ne résout qu'un seul problème, qu'il dit très difficile:[3])

Trouver trois carrés en progression arithmétique connaissant la raison.

L'exemple numérique sur lequel GOSSELIN raisonne est traité correctement, mais il est moins évident qu'il aît aperçu la solution générale de la question. Quoi qu'il en soit, il débute d'une manière fort élégante. La voici en langage moderne:

---

1) F° aiiij r° et v°. — 2) F° aiiij v° — (a^v) r°.

3) F° 77 v°. C'est, dit-il, un problème de DIOPHANTE qui lui a donné l'idée de la méthode. Ce problème il l'énonce et le résout. On y reconnaît immédiatement le problème 11 du 2e livre des *Arithmétiques*. Voir *DIOPHANTI Opera omnia . . edidit* PAULUS TANNERY, Lipsiae 1893, p. 96—99.

Soit $d$ la raison donnée. Le problème revient à résoudre les deux équations:

$$x^2 + d = y^2 \qquad (1)$$

$$x^2 + 2d = z^2 \qquad (2)$$

(1) peut s'écrire

$$d = (y + x)(y - x)$$

On décomposera donc $d$, de toutes les manières possibles, en deux facteurs, $d = uv$, et on posera

$$y + x = u \quad , \quad y - x = v$$

d'où on a, pour chacune des décompositions en facteurs de $d$:

$$y = \tfrac{1}{2}(u + v) \quad , \quad x = \tfrac{1}{2}(u - v).$$

Jusqu'ici Gosselin est parfaitement clair. Mais maintenant il abrège et semble opérer quelque peu au hasard. Il était bien aisé cependant d'achever la solution comme elle était commencée:

(2) peut s'écrire

$$2d = (z + x)(z - x)$$

On décomposera $2d$ en deux facteurs, de toutes les manières possibles, $2d = u'v'$, puis on posera

$$z + x = u' \quad , \quad z - x = v'$$

d'où

$$z = \tfrac{1}{2}(u' + v') \quad , \quad x = \tfrac{1}{2}(u' - v')$$

Le problème n'est possible que si les deux valeurs de $x$ sont égales, c'est à dire, si

$$u - v = u' - v'$$

A cette condition il n'est, en tous cas, fait aucune allusion.

Gosselin se donne pour raison le nombre 96. Les trois carrés qui répondent à la question sont alors 4, 100, 196.

Le chapitre 13 a pour but de trouver le côté d'un nombre polygonal donné. Le sujet n'y est pas traité avec toute la généralité que semble promettre le titre: „vestigare cujuscunque polygoni lateris generalis nostra ratio et facilis“. Au point de vue théorique l'auteur se contente de renvoyer à la formule de Maurice Bressieu qu'il a donnée au chapitre 9 du livre I. Il l'applique à deux problèmes.[1])

1° Trouver le côté du nombre triangulaire 21?

Il suffit de résoudre l'équation

$$\tfrac{1}{2}\,QP\tfrac{1}{2}L \text{ aequale } 21 \quad , \quad \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x = 21$$

On obtient 6 pour longueur du côté.

1) F° 78 v°—79 r°.

2° Trouver le côté du nombre pentagonal 51?

Il faut résoudre

$$\tfrac{3}{2}\,QM\,\tfrac{1}{2}\,L \text{ aequale } 51 \qquad , \qquad \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x = 51$$

On obtient de nouveau 6.

## V.

Le livre IV est le plus intéressant de l'ouvrage. „Hactenus", dit Gosselin,[1]) „illa quae sub Algebrae calculum cadere posse videbantur explicuimus, immensumque adeo opus tres in libros congessimus. Superest aliud ratiocinandi genus duplex: unum quantitatis simplicis quae absoluta vulgo dicitur, alterum quantitatis surdae; utrumque quadantenus Algebrae simile. Una tamen hypothesi non absolvitur, praesertim simplex sed duabus, pluribusve."

Les hypothèses multiples dont il est ici question, sont des équations multiples. Bref, pour aller droit au but, Gosselin veut dire qu'il va nous exposer la résolution des équations à plusieurs inconnues.

Il divise son livre IV en trois chapitres. Le premier n'a pas d'en tête et sert de préface, mais les deux autres sont intitulés respectivement,

De quantitate absoluta.

De quantite surda.

Que faut-il entendre par ces deux mots? Gosselin ne les définit pas et il est assez malaisé de le faire à sa place. Sous le nom de quantités *absolues* et de quantités *sourdes*, il s'agit de deux méthodes différentes pour résoudre les équations du 1r degré à plusieurs inconnues. Un exemple de chacune d'elles en fera saisir la différence.

Les problèmes des quantités *absolues* sont au nombre de 5 et tous du même genre. Gosselin modifie sa notation habituelle, en supprimant dans les formules les signes $P$ et $M$. Par conséquent

$$1\,D\,\tfrac{1}{6}\,A\,\tfrac{1}{6}\,B\,\tfrac{1}{6}\,C \text{ aequale } 13$$

doit se lire

$$D + \tfrac{1}{6}A + \tfrac{1}{6}B + \tfrac{1}{6}C = 13.$$

C'est une notation dont l'idée appartient à Butéon,[2]) auquel l'énoncé du problème suivant est d'ailleurs emprunté.

---

1) F° 79 v°—80 r°.

2) I. Buteo, *Logistica, quae & arithmetica vulgo dicitur in libros quinque digesta.* Lvgdvni M.D.LIX. Voir sur cet ouvrage: G. Wertheim, *Die Logistik des Johannes Buteo;* Biblioth. Mathem. $3_3$, 1902, p. 217—218.

Problema 5.[1])

„Inveniamus quatuor numeros quorum primus cum semisse reliquorum faciat 17, secundus cum aliorum triente 12, tertius cum aliorum quadrante 13, item quartus cum aliorum sextante 13.

„Sint illi quatuor $A$, $B$, $C$, $D$; et sint

$$1A\tfrac{1}{2}B\tfrac{1}{2}C\tfrac{1}{2}D \text{ aequalia } 17$$
$$1B\tfrac{1}{3}A\tfrac{1}{3}C\tfrac{1}{3}D \text{ aequalia } 12$$
$$1C\tfrac{1}{4}A\tfrac{1}{4}B\tfrac{1}{4}D \text{ aequalia } 13$$
$$1D\tfrac{1}{6}A\tfrac{1}{6}B\tfrac{1}{6}C \text{ aequalia } 13.$$

Revocentur ad integros numeros, existent

$$2A1B1C1D \text{ aequalia } 34$$
$$1A3B1C1D \text{ aequalia } 36$$
$$1A1B4C1D \text{ aequalia } 52$$
$$1A1B1C6D \text{ aequalia } 78.$$

Addamus duas ultimas aequationes, tertiam scilicet et quartam, existent

$$2A2B5C7D \text{ aequalia } 130$$

tollamus hinc primam, restabunt

$$1B4C6D \text{ aequalia } 96.$$

Addamus quartam et secundam, fient

$$2A4B2C7D \text{ aequalia } 114$$

tollamus hinc primam, superest

$$3B1C6D \text{ aequalia } 80.$$

Addamus secundam et tertiam aequationem, fient

$$2A4B5C2D \text{ aequalia } 88$$

tollamus primam, restabunt

$$3B4C1D \text{ aequalia } 54.$$

Jam vero triplicemus $1B4C6D$ quae fuerunt aequalia 96, fient

$$3B12C18D \text{ aequalia } 288$$

tollamus hinc $3B1C6D$ aequalia 80, restabunt

$$11C12D \text{ aequalia } 208$$

subducamus iterum ex eadem $3B4C1D$ aequalia 54, restabunt

$$8C17D \text{ aequalia } 234.$$

Multiplicemus hanc aequationem in 11, fient

$$88C187D \text{ aequalia } 2574$$

ducamus etiam $11C12D$ aequalia 208 in 8, existent

$$88C96D \text{ aequalia } 1664$$

1) F° 82 v°—83 v°, dans la *Logistica*, p. 193.

tollamus $88C\,96D$ aequalia 1664 ex $88C\,187D$ aequalibus 2574, restabunt

$$91D \text{ aequalia } 910$$

sicque stat aequatio.

Partiemur 910 in 91, quotus erit 10 valor $D$; est ergo 10 ultimus numerus ex quaesitis.

Et quoniam $11C\,12D$ erant aequalia 208, tollamus $12D$ hoc est 120, restabunt

$$88 \text{ aequalia } 11C$$

dividemus 88 in 11, quotus erit 8, valor $C$ et tertius numerus.

Sed etiam $3B\,4C\,1D$ aequalia sunt 54; tollamus hinc $4C\,1D$, hoc est 10 et 32, nempe 42, restabunt

$$12 \text{ aequalia } 3B$$

estque $B$ et secundus numerus 4.

Jamvero $2A\,1B\,1C\,1D$ aequantur 34; tollamus $1B$, nempe 4, $1C$ 8, $1D$ 10, hoc est 22, restabunt

$$12 \text{ aequalia } 2A$$

quare $1A$ et primus numerus est 6; suntque quatuor numeri 6, 4, 8, 10, quales vestigasse oportuit."

Demeurons en d'accord, voilà une démonstration qui peut être mise en parallèle avec ce que les algébristes du XVI^e siècle ont écrit de meilleur. Aussi est-il bien naturel le sentiment de fierté avec lequel Gosselin triomphe maintenant de Butéon qui a essayé de trois manières différentes, dit-il,[1]) d'appliquer sa méthode au problème proposé sans parvenir à le résoudre. Trois fois, en effet, Butéon s'embrouille dans la solution.[2]) Il ne parvient pas à éliminer régulièrement les inconnues, comme Gosselin le fait, mais après en avoir, par des soustractions, réduit le nombre au besoin jusqu'à deux, trois fois il achève le problème, correctement il est vrai, mais par des tâtonnements et à la manière d'un exercice d'analyse indéterminée. Aussi Butéon termine-t-il,[3]) par une réflexion un peu découragée, que ne mérite plus la solution de Gosselin: „Si cui modus iste calculi videatur obscurior in hac regula, cuius est etiam rarior usus, certò sciat alium communiter usurpatum longe plus afferre molestiae, multoque difficilius capi. Innata enim rebus ipsis obscuritas arte quidem levari potest, tolli autem nullo modo".

---

1) F° 83 v°.

2) *Logistica* p. 193—196. Il reste cependant à Butéon le mérite d'avoir inspiré à Gosselin le *principe* de la méthode.

3) *Logistica* p. 196.

Il nous reste, pour terminer ce travail, à donner un exemple de la résolution d'un système d'équations par quantités *sourdes*. Les problèmes traités par cette méthode, au nombre de quatre, ont tous pour notes caractéristiques d'abord l'emploi explicite d'une seconde inconnue, la quantité *sourde*,[1]) ensuite une *espèce* d'essai d'élimination par substitution.

„Problema 2[2])

„Vestigemus tres ejusmodi numeros, ut primus et secundus superent tertium 20, secundus et tertius primum 30, primus et tertius secundum 40.

„Sit primus 1, secundus $1q$, tertius ergo erit $1\,L\,P\,1\,q\,M\,20$ $(= L + q - 20)$. Sed secundus et tertius superant primum 30, quare

$$1LP2qM20 \text{ aequalia sunt } 1LP30$$
$$[L + 2q - 20 = L + 30]$$

et sublato superfluo, additoque quod deficit

$$2q \text{ aequales } 50,$$

fit $1q25$.

Jam sit primus, ut ante, $1L$, secundus 25, tertius $1LP25M20$ $(= L + 25 - 20)$, hoc est, $1LP5$ $(= L + 5)$. Sed et tertius et primus superant secundum 40, quare

$$2LP5 \text{ aequalia sunt } 65$$

et sublato superfluo

$$2L \text{ aequalia } 60,$$

fit unum latus 30. Primus itaque est 30, secundus 25, tertius $30P5$, hoc est 35.“

Il est intéressant de comparer, à cette occasion, GOSSELIN et SCHEUBEL. M. FONTÈS, dans son étude sur *Les arithmétiques et les algèbres du XVI^e siècle qui sont à la bibliothèque de Toulouse*,[3]) a relevé avant moi, chez l'algébriste allemand,[4]) un essai analogue de méthode par substitution. Mais SCHEUBEL est bien inférieur à GOSSELIN, car l'idée d'employer une seconde inconnue ne lui vient pas.[5])

---

1) Dans ce sens, le terme „quantita sorda“ a été employé déjà par PACIUOLO (cf. Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, p. 399), et plus tard par CARDAN. Le terme est usité encore par CLAVIUS dans son *Algebra* (chap. XV, CLAVII *Opera*, Moguntiae 1611, 2, p. 36).

2) F^o 84 v^o—85 r^o.

3) Bulletins et mémoires de l'académie des sciences inscriptions et belles-lettres de Toulouse 3, 1900, p. 285—286.

Voir aussi les exemples cites par M. STAIGMÜLLER, à la p. 456 de sa notice: *JOHANNES SCHEUBEL, ein Deutscher Algebraiker des XVI. Jahrhundert;* Abhandl. zur Gesch. der Mathem. 9, 1900. — Dans SCHEUBEL, éd. de Bâle, p. 20—21 et 23—24; éditions de Paris, f. 15 v^o—16 r^o et 17 r^o—17 v^o.

4) Ed. de Bâle, p. 73; éditions de Paris, f^o 50 v^o.

5) D'après STIFEL ce serait à CARDAN que reviendrait l'honnour d'avoir repré-

## VI.

Concluons. Nous croyons avoir donné une idée complète du *De arte magna,* et en tous cas nous avons tâché d'y garder la plus stricte impartialité. C'est pour cela que nous avons laissé l'auteur parler le plus souvent lui même. Nous pouvons porter maintenant un jugement d'ensemble sur son oeuvre. On n'y trouve, il est vrai, aucune de ces grandes découvertes qui font époque et cependant le *De arte magna* mérita à juste titre l'estime des contemporains. GOSSELIN, très au courant de la science de son temps, y est éminemment clair et bref. C'est un vulgarisateur dans le meilleur sens du mot, ayant l'art de jeter la lumière sur les découvertes des autres et de les mettre à la portée du grand nombre des savants. KÄSTNER avait excellemment jugé le *De arte magna* en disant qu'il était „sehr gut nur kurz".

---

senté les diverses inconnues d'un problème, par des lettres *différentes.* Voici le passage *(Arithmetica Integra,* Lib. III, cap. VI, f° 252 r°):

„CHRISTOPHORUS et HIERONYMUS CARDANUS, tractant radices secundas (les deuxièmes inconnues) sub vocabulo quantitatis, ideoque eas sic signant 1q. Latius vero eas tractavit CARDANUS. CHRISTOPHORUS enim nihil habet de commissionibus secundarum radicum cum primis. Eas autem CARDANUS pulchris exemplis notificavit, ita ut ipsas facile didicerim. Eae autem commissiones secundarum radicum cum primis sequentia exempla satis docent." Suivent les exemples.

STIFEL a évidemment ici en vue le chapitre 9 de l'*Artis magnae liber* (*Opera,* t. IV, p. 241—242).

# Per la preistoria della teoria delle trasformazioni di contatto.

Di Gino Loria a Genova.

Le trasformazioni geometriche ideate da Fermat e delle quali mi sono di recente occupato[1]) sono notevoli perchè, a differenza di quelle che ordinariamente si usano, riposano sulla considerazione della lunghezza degli archi delle curve alle quali sono applicate. Esse sono effettuabili su qualunque curva piana, ma, contenendo nella loro rappresentazione analitica una funzione inerente alle curve su cui operano, non sono di quelle che esercitano la loro influenza sull' intero piano. Esse quindi, contrariamente a quanto, per una inesplicabile ed imperdonabile svista, ho asserito, non sono trasformazioni di contatto, almeno sinchè si voglia conservare a tale locuzione il significato attribuitole da S. Lie.

Di tale categoria di trasformazioni fa invece parte una classe di corrispondenze più antiche di tutte quelle studiate dal Lie nel capitolo intitolato „Zur Vorgeschichte der Berührungstransformationen“ di una delle migliori sue opere.[2]) Sono quelle trasformazioni immaginate dal Varignon e che ho studiate nel Cap. I dell'ultima parte della mia opera *Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven* (Leipzig 1902, p. 595 e seg.) In forza di una tale corrispondenza al punto $P_1$ di coordinate $x_1$, $y_1$ viene associato quello $P$ di coordinate polari $\varrho$, $\omega$ tali che

$$x_1 = \varrho,\ y_1 = l\omega \tag{1}$$

ossia, introducendo le coordinate cartesiane $x$, $y$ del punto $P$,

$$x_1 = \sqrt{x^2 + y^2},\ y_1 = l \text{ arc tg } \frac{y}{x}, \tag{2}$$

ove $l$ è una costante nota.

Ora la proprietà essenziale di tale trasformazione, di mutare due curve fra loro tangenti in altre pure in contatto, si può rendere di evidenza intuitiva, senza ricorrere a teoremi generali, mediante una costruzione stereometrica della trasformazione stessa, che, non essendo, a quanto mi consta, stata finora notata, giova qui segnalare.

1) Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, p. 343—346.

2) *Geometrie der Berührungstransformationen, dargestellt von* S. Lie *und* S. Scheffers, I. Bd., Leipzig 1896, p. 1 e seg.

Si consideri la superficie elicoide avente per asse la retta $Oz$ e per curva meridiana nel piano $xOz$ quella di equazione

$$f(x, z) = 0. \tag{3}$$

Se $l$ è il comun passo ridotto delle eliche della superficie, quella di tali curve che passa pel punto $(x_1, z_1)$ del meridiano sarà rappresentabile mediante le equazioni

$$x = x_1 \cos u, \quad y = x_1 \operatorname{sen} u, \quad z = z_1 + lu, \tag{4}$$

nelle quali $u$ è un parametro variabile. L'equazione di quella superficie si otterrà eliminando $u$, $x_1$, $z_1$ fra le (4) e l'equazione $f(x_1, z_1) = 0$, ond' è

$$f\left(\sqrt{x^2 + y^2},\ z - l \text{ arc tg } \frac{y}{x}\right) = 0. \tag{5}$$

La sezione della superficie col piano $xOy$ (che è un piano qualunque perpendicolare all'asse) avrà quindi per equazione

$$f\left(\sqrt{x^2 + y^2},\ -l \text{ arc tg } \frac{y}{x}\right) \tag{6}$$

o, introducendo coordinate polari $\varrho$ e $-\omega$,

$$f(\varrho, l\omega) = 0. \tag{7}$$

Ora la curva (7) nasce evidentemente dalla (3) coll' applicazione di una trasformazione di Varignon; quindi per eseguire questa sopra una curva del piano $xz$ si può procedere così: *si consideri una superficie elicoide di cui quella curva sia il meridiano e la si tagli con un piano perpendicolare all' asse; la curva sezione sarà la cercata.* Emerge da ciò che se si considerano nel piano $xz$ due curve $\Gamma$ e $\Gamma_1$ fra loro tangenti in un punto $M$ di loro intersezione, nasceranno coll' indicato procedimento due elicoidi fra loro tangenti lungo tutta l'elica ad esse comune (è quella generata dal moto elicoidale di $M$); tangenti saranno quindi le curve $\Sigma$ e $\Sigma_1$ in cui esse sono tagliate dal piano $xOy$; e poichè $\Gamma$ e $\Gamma_1$ sono curve qualunque, così resta dimostrato *essere ogni trasformazione di Varignon una trasformazione di contatto.*

Osserviamo, finendo, che, siccome una tale trasformazione muta una retta in un spirale d'Archimede, così è evidente (e d'altronde è notissimo) essere curve di tale specie tutte le sezioni prodotte in un' elicoide generato dal movimento di una retta segante l'asse, da piani a questo perpendicolari

Al lettore non isfuggirà certamente come la indicata costruzione stereometrica della trasformazione di Varignon guidi ad una generalizzazione di questa, giacchè l'elicoide che ci è servito si può tagliare con un piano obliquo all'asse; la nascente curva sezione è allora legata alla curva meridiana da una nuova trasformazione puntuale, più generale di quella di Varignon e di cui non sarebbe malagevole determinare la rappresentazione analitica

Genova, 18 Maggio 1906.

# Euler und die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion.

Von Edmund Landau in Berlin.

## Einleitung.

Die Funktion $\zeta(s)$ ist für $\Re(s) > 1$ durch die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots$$

definiert; Riemann[1]) hat bewiesen, daß $(s-1)\zeta(s)$ eine ganze transzendente Funktion ist, und daß $\zeta(s)$ der Funktionalgleichung genügt:

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cos\frac{s\pi}{2}\, \Gamma(s)\, \zeta(s). \tag{1}$$

Wenn die analytische Funktion $\varphi(s)$ eingeführt wird, welche für $\Re(s) > 0$ durch die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu^s} = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \ldots \tag{2}$$

definiert ist, so ist bekanntlich

$$\varphi(s) = \zeta(s) - \frac{2}{2^s}\zeta(s) = (1 - 2^{1-s})\,\zeta(s),$$

und die Riemannsche Funktionalgleichung (1) nimmt die Gestalt an:

$$\frac{\varphi(1-s)}{\varphi(s)} = \frac{-\Gamma(s)\,(2^s-1)}{(2^{s-1}-1)\,\pi^s} \cos\frac{s\pi}{2}. \tag{3}$$

Unzutreffend ist Herrn Bachmanns[2]) Angabe, die Relation (3) sei schon im Jahre 1849 von Schlömilch[3]) angegeben worden, und die Behauptung der Herren Cahen,[4]) Vecchi[5]) und Torelli,[6]) Schlömilch habe im

1) *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe;* Monatsberichte der preußischen Akademie der Wissenschaften 1859, S. 671—673; Werke, 2. Aufl., 1892, S. 145—146.

2) *Die analytische Zahlentheorie,* Leipzig 1894, S. 339.

3) *Lehrsatz;* Archiv der Mathem. **12**, 1849, S. 415.

4) *Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et sur des fonctions analogues;* Annales de l'école normale (Paris) $\mathbf{11}_3$, 1894, S. 75.

5) *Sulla funzione $\zeta(s)$ di Riemann,* 1 (Paris, Hermann 1899), S. 7.

6) *Sulla totalità dei numeri primi fino ad un limite assegnato;* Atti dell' accademia delle scienze di Napoli $\mathbf{11}_2$, 1901, S. 88.

Jahre 1858[1]) (also noch vor Riemann) die Gleichung (3) gefunden. Die genannten Autoren verwechseln jene zwei Schlömilchschen Noten mit einer dritten[2]), welche erst im Jahre 1877 erschien und (für $0 < s < 1$) die Relation (3) enthält.

Mit Ausnahme von Herrn Cahen[3]) scheint noch niemand die — richtige — Bemerkung gemacht zu haben, daß die Relation (3) (ohne Beweis) schon von Euler veröffentlicht worden ist, fast 100 Jahre vor Riemann. Da Herr Cahen versehentlich die Petersburger Akademieberichte statt der Berliner Akademieberichte zitiert, ist durch sein Zitat die Eulersche Arbeit auch nicht bekannt geworden; im Übrigen geben Herrn Cahens kurze Bemerkungen[4]) kein richtiges Bild von der Bedeutung der Abhandlung: *Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques*, par M. L. Euler (lu en 1749), welche im Band **17** (Berlin 1768) der Histoire de l'académie des sciences et belles-lettres („année 1761") auf S. 83—106 der „Mémoires" abgedruckt ist.

Im § 1 des Folgenden werde ich über den Inhalt dieser interessanten Arbeit referieren und die Eulersche Behauptung in diejenige präzise Form bringen, welche er gemeint hat. Im § 2 werde ich diese Eulersche Behauptung beweisen, indem ich zeige, daß sie mit der Funktionalgleichung (3) identisch ist; für gewisse Werte der Variablen bedarf dies nicht einmal einer besonderen Begründung, da für sie die in der Eulerschen Formel auftretenden unendlichen Reihen konvergieren. Euler spricht nur von reellen Werten von $s$; doch wird sich im Folgenden die Richtigkeit seiner Vermutung auch für alle komplexen $s$ ergeben, für welche

$$\varphi(s) \neq 0$$

ist.

## § 1.

Euler beginnt mit der Ankündigung, daß er einen einfachen Ausdruck für den Quotienten der beiden Reihen

$$1^m - 2^m + 3^m - 4^m + \ldots \tag{4}$$

und

$$\frac{1}{1^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \ldots \tag{5}$$

angeben will, wo $n = m + 1$ ist.

1) *Über eine Eigenschaft gewisser Reihen;* Zeitschr. für Mathem. **3**, 1858, S. 130—132.

2) *Über die Summen von Potenzen der reciproken natürlichen Zahlen*; Berichte der sächs. Gesellsch. d. Wissensch. (Leipzig), Mathem. Kl. **29**, 1877, S. 106—109; Zeitschr. für Mathem. **23**, 1878, S. 135—137.

3) l. c., S. 75—76.

4) „Même Euler, en 1761, avait donné cette relation, sans d'ailleurs en donner une démonstration, ni même préciser les valeurs des sommes qu'il considère."

Für $0 < n < 1$ sind dies konvergente Reihen. Euler erkennt wohl, daß (für reelle $n$) sonst eine der Reihen divergiert Bekanntlich[1]) war er noch der irrtümlichen Meinung — der er auch auf S. 84 der vorliegenden Arbeit Ausdruck gibt — daß einer divergenten Reihe eine bestimmte Zahl entspricht, welche sie bei jeder formalen Rechnung ersetzen darf; hier definiert er jedoch (wie meist[2])) in eindeutiger Weise, was er unter der Summe der Reihen versteht. Es ist dies für die Reihe (4) der Grenzwert der Funktion

$$1 - 2^m x + 3^m x^2 - 4^m x^3 + \ldots,$$

wenn $x$ wachsend gegen 1 heranrückt, und für die Reihe (5) das analoge.

Hier entsteht zunächst die Frage, ob dieser Grenzwert existiert. Euler beweist dies wenigstens für alle ganzzahligen $m \geqq 0$, indem er durch successives Multiplizieren mit $x$ und Differentiieren findet:

$$\begin{aligned}
1 - x + x^2 - x^3 + \ldots &= \frac{1}{1+x},\\
1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots &= \frac{1}{(1+x)^2},\\
1 - 2^2 x + 3^2 x^2 - 4^2 x^3 + \ldots &= \frac{1-x}{(1+x)^3},\\
1 - 2^3 x + 3^3 x^2 - 4^3 x^3 + \ldots &= \frac{1-4x+x^2}{(1+x)^4},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots,
\end{aligned}$$

woraus er auf Grund der obigen Definition die Summenwerte erhält:

$$\begin{aligned}
1 - 1 + 1 - 1 + \ldots &= \frac{1}{2},\\
1 - 2 + 3 - 4 + \ldots &= \frac{1}{4},\\
1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots &= 0,\\
1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \ldots &= -\frac{1}{8},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots
\end{aligned}$$

Übrigens hat Euler den Fall des ganzzahligen positiven $m$ auch in anderen Schriften behandelt. Er erkennt, daß die Reihe

$$1 - 2^m x + 3^m x^2 - 4^m x^3 + \ldots$$

eine rationale Funktion von $x$ mit dem Nenner $(1+x)^{m+1}$ ist, also für $x = 1$ einen Grenzwert besitzt. Durch Anwendung der „Eulerschen" Summenformel findet er als Summe der divergenten Reihe (4) für gerade $m > 0$

1) Vergl. z. B. Herrn Pringsheims Artikel „Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse" in der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* 1:1, 1898—1904, S. 107.

2) S. ebenda, S. 108—109.

$$(6)\qquad 1^m - 2^m + 3^m - 4^m + \ldots = 0,$$

für ungerade $m = 2k - 1 > 0$

$$(7)\qquad 1 - 2^{2k-1} + 3^{2k-1} - 4^{2k-1} + \ldots = \frac{(-1)^{k-1}(2^{2k}-1)B_k}{2k},$$

wo (in heutiger Bezeichnungsweise) $B_k$ die $k^{\text{te}}$ BERNOULLIsche Zahl ist.

Andererseits findet er bei geradem $n = 2k > 0$ für die (konvergente) Reihe

$$(5)\qquad 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \ldots$$

(wie auch in anderen Schriften) die Formel

$$(8)\qquad 1 - \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} - \frac{1}{4^{2k}} + \ldots = \frac{(2^{2k-1}-1)B_k}{(2k)!}\pi^{2k}.$$

Aus (6) schließt EULER für ungerade $n > 1$

$$(9)\qquad \frac{1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + \ldots}{1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \ldots} = 0,$$

aus (7) und (8) für gerade $n > 0$

$$(10)\qquad \frac{1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + \ldots}{1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \ldots} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}(n-1)!\,(2^n-1)}{(2^{n-1}-1)\pi^n};$$

vor diese Relationen (9) und (10), die den ganzzahligen $n > 1$ entsprechen, gehört für $n = 1$ die Gleichung

$$(11)\qquad \frac{1 - 1 + 1 - 1 + \ldots}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots} = \frac{1}{2\log 2},$$

„dont la liaison avec les suivantes est entierement[1]) cachée".

Dies System der Gleichungen (9) und (10) führt nun EULER dazu, eine Funktion $N$ von $n$ durch die Relation

$$\frac{1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + \ldots}{1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \ldots} = N\frac{(n-1)!\,(2^n-1)}{(2^{n-1}-1)\pi^n}$$

zu definieren; da für $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$ sich die Werte $N = 1, 0, -1, 0$ cyclisch wiederholen, also

$$N = -\cos\frac{n\pi}{2}$$

ist, fährt er fort: „Par cette raison je hazarderai la conjecture suivante, que quelque soit l'exposant $n$, cette équation ait toujours lieu:

$$\frac{1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + 5^{n-1} - 6^{n-1} + \&c.}{1 - 2^{-n} + 3^{-n} - 4^{-n} + 5^{-n} - 6^{-n} + \&c.} = \frac{-1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)(2^n-1)}{(2^{n-1}-1)\pi^n}\cos\frac{n\pi}{2}."$$

1) Ich zitiere durchweg in EULERS Orthographie.

Euler bestätigt diese Gleichung zunächst noch für den Fall $n=1$, indem er unter $1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)$ den Wert 1 versteht und statt

$$\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{2^{n-1}-1}=\frac{0}{0}$$

den Grenzwert

$$\lim_{n=1}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{2^{n-1}-1}=-\frac{\pi}{2\log 2}$$

setzt, wodurch seine Gleichung tatsächlich in (11) übergeht. „Notre conjecture ayant donc aussi lieu pour le cas $n=1$, qui paroissoit d'abord s'écarter entierement de la loi des cas suivans, c'est déjà une preuve très forte pour la vérité de cette conjecture; & puisqu'il semble impossible qu'une fausse supposition ait pu soutenir cette épreuve, on pourroit déjà regarder notre conjecture comme très solidement établie: mais je m'en vai apporter encore d'autres preuves également convaincantes."

Alsdann verifiziert er seine Gleichung für $n=0$. Die rechte Seite hat zwar für $n=0$ keinen Sinn; doch schreibt Euler zuvor

$$1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)(2^n-1)=1\cdot 2\cdot 3\ldots n\,\frac{2^n-1}{n},$$

und geht dann im zweiten Faktor für $n=0$ zur Grenze $\log 2$ über, während er den ersten $=1$ setzt. Mit anderen Worten, er bestimmt

$$\lim_{n=0}\Gamma(n)(2^n-1)=\log 2$$

und findet so die richtige Formel

$$\frac{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots}{1-1+1-1+\ldots}=2\log 2.$$

„Voilà donc une nouvelle preuve, qui étant jointe à la précédente pourra bien tenir lieu d'une démonstration complette de notre conjecture. Cependant on n'est que trop autorisé d'en exiger une démonstration directe, qui renferme à la fois tous les cas possibles."

Euler versteht für nicht ganze (reelle) $\lambda$, wie er ausdrücklich bemerkt, unter $1\cdot 2\cdot 3\ldots\lambda$ seine Funktion $[\lambda]$, die heute mit $\Gamma(\lambda+1)$ bezeichnet wird; unter Benutzung der Funktionalgleichung

$$\Gamma(\lambda)\,\Gamma(1-\lambda)=\frac{\pi}{\sin\lambda\pi}$$

findet er, daß sein Satz für alle reellen $n$ richtig ist, falls er für $n>0$ gilt.

Er bestätigt ihn nunmehr für $n = \frac{1}{2}$, wo die linke Seite

$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots} = 1$$

und die rechte

$$= \frac{-\Gamma(\frac{1}{2})\,(2^{\frac{1}{2}} - 1)}{(2^{-\frac{1}{2}} - 1)\,\pi^{\frac{1}{2}}} \cos\frac{\pi}{4} = 1$$

ist.

Alsdann geht er zum Fall $n = \frac{3}{2}$ über, wobei er die divergente Reihe

$$1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{4} + \cdots$$

unter Anwendung der „Eulerschen" Summenformel auf einem Wege behandelt, der sich leicht in einen strengen Beweis der Existenz von

$$\lim_{x=1} (1 - \sqrt{2}\,x + \sqrt{3}\,x^2 - \sqrt{4}\,x^3 + \cdots)$$

umwandeln läßt. Während für $n = \frac{3}{2}$ die rechte Seite der zu verifizierenden Gleichung

$$= \frac{3 + \sqrt{2}}{2\pi\sqrt{2}} = 0{,}4967738\ldots$$

ist, findet er, daß die linke Seite mit einem Fehler $< \frac{2}{10^5}$ diesem Werte gleichkommt. „Notre conjecture est portée au plus haut degré de certitude, qu'il ne reste plus même aucun doute sur les cas où l'on met pour l'exposant $n$ des fractions."

Es folgen noch einige Bemerkungen über den Fall des ungeraden $n > 1$.

Zum Schluß spricht Euler noch ein wichtiges Analogon zu seiner Funktionalgleichung ohne Beweis aus. „Une conjecture semblable nous fournit ce théorème

$$\frac{1 - 3^{n-1} + 5^{n-1} - 7^{n-1} + \&c.}{1 - 3^{-n} + 5^{-n} - 7^{-n} + \&c.} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot 2^n}{\pi^n} \sin\frac{n\pi}{2}."$$

Für $0 < n < 1$ konvergieren die beiden hierin auftretenden Reihen, und da er unter $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)$ die Funktion $\Gamma(n)$ versteht, spricht Euler hiermit eine viel später von Malmsten[1]) gefundene und von Schlömilch[2]) wiedergefundene Relation aus.

Er schließt mit den Worten, welche durch die geschichtliche Entwickelung bestätigt wurden: „Cette derniere conjecture renferme une expression plus simple que la précédente; donc, puisqu'elle est également certaine,

---

1) *Specimen analyticum, theoremata quaedam nova de integralibus definitis, summatione serierum earumque in alias series transformatione exhibens*, Upsala 1842, S. 23; *De integralibus quibusdam definitis, seriebusque infinitis*, Journal für Mathem. 38, 1849, S. 17.

2) An der auf S. 69, Anm. 3 zitierten Stelle (vom Jahre 1849) spricht Schlömilch die Gleichung aus; in der auf S. 70, Anm. 1 zitierten Note (vom Jahre 1858) beweist er sie.

il y a à espérer qu'on travaillera avec plus de succès à en chercher une démonstration parfaite, qui ne manquera pas de répandre beaucoup de lumiere sur quantité d'autres recherches de cette nature".

Ich werde nunmehr die Frage in Angriff nehmen und in § 2 affirmativ erledigen, ob EULERS Gleichungen richtig sind. Die von ihm ausgesprochenen Vermutungen lauten in moderner Bezeichnungsweise

$$(12)\qquad \frac{\lim\limits_{x=1}\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\nu^{s-1}x^{\nu-1}}{\lim\limits_{x=1}\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\nu^{-s}x^{\nu-1}} = \frac{-\Gamma(s)(2^s-1)}{(2^{s-1}-1)\pi^s}\cos\frac{s\pi}{2}$$

und

$$(13)\qquad \frac{\lim\limits_{x=1}\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}(2\nu-1)^{s-1}x^{\nu-1}}{\lim\limits_{x=1}\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}(2\nu-1)^{-s}x^{\nu-1}} = \frac{\Gamma(s)\,2^s}{\pi^s}\sin\frac{s\pi}{2}.$$

EULER vermutet, daß diese Gleichungen für alle reellen $s$ richtig sind, für welche die rechte Seite endlich ist, d. h. (12) mit Ausnahme der Werte $-2$, $-4$, $-6$, ... und (13) bis auf die Werte $-1$, $-3$, $-5$, ...[1]) Zum Nachweise von (12) ist es nach (3) hinreichend, zu beweisen, daß

$$\lim_{x=1}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\nu^{-s}x^{\nu-1}$$

existiert und

$$=\varphi(s)=(1-2^{1-s})\,\zeta(s)$$

ist. Ich werde sogar für jedes komplexe $s$ die Richtigkeit der Gleichung

$$\lim_{x=1}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\nu^{-s}x^{\nu-1} = \varphi(s)$$

nachweisen; dadurch wird sich nach (3) die Richtigkeit der Gleichung (12) für alle reellen und komplexen $s$ ergeben, für welche $\varphi(s)$, also der Nenner der linken Seite von (12), von Null verschieden ist.

Analog reicht es zum Beweise von (13) hin, festzustellen, daß

$$\lim_{x=1}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}(2\nu-1)^{-s}x^{\nu-1}$$

existiert und gleich der ganzen transzendenten Funktion $\psi(s)$ ist, welche für $\Re(s)>0$ durch die Reihe

$$\psi(s)=1-\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}-\frac{1}{7^s}+\dots=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}}{(2\nu-1)^s}$$

1) Für diese ausgeschlossenen Werte sind die Gleichungen insofern auch richtig, als der Nenner ihrer linken Seite 0 und der Zähler $\neq 0$ ist

definiert ist. Ich werde für jedes reelle oder komplexe $s$ diesen Nachweis führen und dadurch die Richtigkeit der Eulerschen Gleichung (13) für alle $s$ zeigen, für welche $\psi(s)$ nicht verschwindet, also insbesondere für die — von Euler betrachteten — reellen $s$, welche nicht negative ungerade ganze Zahlen sind.

## § 2.

Es bezeichne $\zeta(s, w)$ diejenige analytische Funktion von $s$, welche für $\Re(s) > 1$ durch die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(w+\nu)^s}$$

mit dem positiven Parameter $w$ definiert ist. Bekanntlich ist $(s-1)\,\zeta(s, w)$ eine ganze transzendente Funktion von $s$. Herr Mellin[1]) hat nun folgende wichtige Relation bewiesen, in der $s$ eine beliebige nicht positiv-ganze komplexe Zahl bezeichnet:

$$\lim_{x=1} \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{w+\nu}}{(w+\nu)^s} - \Gamma(1-s) \left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1} \right) = \zeta(s, w), \tag{14}$$

wo $x$ wachsend gegen 1 konvergiert.

Aus (14) folgt für $w = 1$

$$\lim_{x=1} \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{1+\nu}}{(1+\nu)^s} - \Gamma(1-s) \left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1} \right) = \zeta(s),$$

$$\lim_{x=1} \left( \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{\nu^s} - \Gamma(1-s) \left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1} \right) = \zeta(s). \tag{15}$$

Herr E. Lindelöf[2]) hat diese interessante Darstellung (15) der Riemannschen Zetafunktion auf anderem Wege abgeleitet, aber später auch[3]) auf die Beziehung zur Mellinschen Relation hingewiesen.

Wird

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{\nu-1}}{\nu^s} = \mathfrak{P}_s(x),$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1} x^{\nu-1}}{\nu^s} = \mathfrak{Q}_s(x)$$

gesetzt, so ist für $|x| < 1$

---

1) *Über eine Verallgemeinerung der Riemannschen Function* $\zeta(s)$; Acta societatis scientiarum Fennicae 24, 1898, S. 40. Die Gleichung (14) des Textes ist ein Spezialfall der dort mit (77) bezeichneten Relation. Für meinen Zweck genügt es, reelle $x$ zu betrachten, welche wachsend gegen 1 heranrücken.

2) *Quelques applications d'une formule sommatoire générale;* ebenda, 28, 1902, S. 36

3) *Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions*, Paris 1905, S. 139.

$$\mathfrak{Q}_s(x) = 1 - \frac{x}{2^s} + \frac{x^2}{3^s} - \frac{x^3}{4^s} + \cdots$$
$$= 1 + \frac{x}{2^s} + \frac{x^2}{3^s} + \frac{x^3}{4^s} + \ldots - 2\left(\frac{x}{2^s} + \frac{x^3}{4^s} + \frac{x^5}{6^s} + \ldots\right)$$
$$= \mathfrak{P}_s(x) - \frac{2x}{2^s}\left(1 + \frac{x^2}{2^s} + \frac{x^4}{3^s} + \ldots\right) = \mathfrak{P}_s(x) - 2^{1-s} x \mathfrak{P}_s(x^2).$$

Aus (15) folgt nun

$$\lim_{x=1}\left(x\mathfrak{P}_s(x) - \Gamma(1-s)\left(\log\tfrac{1}{x}\right)^{s-1}\right) = \zeta(s),$$

also

$$\lim_{x=1}\left(x^2\mathfrak{P}_s(x^2) - \Gamma(1-s)\left(2\log\tfrac{1}{x}\right)^{s-1}\right) = \zeta(s)$$

und daher

$$\lim_{x=1}\left(x\mathfrak{P}_s(x) - 2^{1-s}x^2\mathfrak{P}_s(x^2)\right) = (1-2^{1-s})\,\zeta(s) = \varphi(s),$$
$$\lim_{x=1}\left(\mathfrak{P}_s(x) - 2^{1-s}x\mathfrak{P}_s(x^2)\right) = \varphi(s),$$

$$\lim_{x=1}\mathfrak{Q}_s(x) = \varphi(s). \tag{16}$$

Diese Herleitung der Gleichung (16) gilt nicht für ganzzahlige positive $s$; aber für diese und überhaupt für $\Re(s) > 0$ ist die Gleichung (16) nach dem Abelschen Stetigkeitssatz trivial, da die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu^s} \tag{2}$$

konvergiert und $= \varphi(s)$ ist.

Mit (16) ist nach dem Früheren die Eulersche Vermutung (12) bewiesen

Aus (14) folgt ferner für $w = \frac{1}{4}$ und $w = \frac{3}{4}$

$$\lim_{x=1}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^{\frac{1}{4}+\nu}}{(\frac{1}{4}+\nu)^s} - \Gamma(1-s)\left(\log\tfrac{1}{x}\right)^{s-1}\right) = \zeta(s, \tfrac{1}{4}),$$
$$\lim_{x=1}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^{\frac{3}{4}+\nu}}{(\frac{3}{4}+\nu)^s} - \Gamma(1-s)\left(\log\tfrac{1}{x}\right)^{s-1}\right) = \zeta(s, \tfrac{3}{4}),$$

also durch Subtraktion

$$\lim_{x=1}\left(4^s\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^{\frac{1}{4}+\nu}}{(1+4\nu)^s} - 4^s\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^{\frac{3}{4}+\nu}}{(3+4\nu)^s}\right) = \zeta(s,\tfrac{1}{4}) - \zeta(s,\tfrac{3}{4}),$$

und, wenn hierin $x^2$ statt $x$ geschrieben wird,

$$\lim_{x=1} x^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{x}{3^s} + \frac{x^2}{5^s} - \frac{x^3}{7^s} + \ldots\right) = \frac{1}{4^s}\left(\zeta(s,\tfrac{1}{4}) - \zeta(s,\tfrac{3}{4})\right).$$

$$\lim_{x=1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}x^{\nu-1}}{(2\nu-1)^s} = \frac{1}{4^s}\left(\zeta(s,\tfrac{1}{4}) - \zeta(s,\tfrac{3}{4})\right). \tag{17}$$

Die rechte Seite von (17) ist für $\Re(s) > 1$

$$=\frac{1}{4^s}\left(\frac{1}{(\frac{1}{4})^s}+\frac{1}{(\frac{5}{4})^s}+\cdots-\frac{1}{(\frac{3}{4})^s}-\frac{1}{(\frac{7}{4})^s}-\cdots\right)=1-\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}-\frac{1}{7^s}+\cdots=\psi(s);$$

sie ist also für alle komplexen $s$ gleich der ganzen transzendenten Funktion $\psi(s)$, und aus (17) folgt

$$\lim_{x=1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}x^{\nu-1}}{(2\nu-1)^s}=\psi(s). \tag{18}$$

EULERS Vermutungen sind also vollständig bewiesen, und überdies hat sich die Richtigkeit der Gleichungen (12) und (13) auch für alle komplexen $s$ ergeben, für welche $\varphi(s)$ bezw. $\psi(s)$ nicht verschwinden.

Man kann nun fragen, wie es sich für die nicht reellen Nullstellen von $\varphi(s)$ und $\psi(s)$ verhält. Was zunächst die Nullstellen

$$s=1+\frac{2\lambda\pi i}{\log 2}\qquad\left(\lambda \text{ ganz und} \gtrless 0\right)$$

von $1-2^{1-s}$, also von $\varphi(s)$ betrifft, so ist für sie die rechte Seite von (12) „unendlich" und die linke Seite gleichfalls der Quotient einer von Null verschiedenen Zahl durch Null Die Gleichung (12) ist also in demselben Sinne hier richtig, wie für die reellen Nullstellen $-2, -4, -6, \ldots$ von $\varphi(s)$ und wie (13) für die reellen Nullstellen $-1, -3, -5, \ldots$ von $\psi(s)$.

Der reelle Teil der übrigen Nullstellen von $\varphi(s)$ und $\psi(s)$ liegt bekanntlich zwischen 0 (exkl.) und 1 (exkl.); für eine solche Nullstelle hat die rechte Seite von (12) bezw. (13) einen Sinn, während die linke Seite die sinnlose Form $\frac{0}{0}$ hat, da auch $\varphi(1-s)$ bezw. $\psi(1-s)$ verschwindet. Es liegt nahe, zu fragen, ob die Grenzwerte

$$\lim_{x=1}\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\nu^{s-1}x^{\nu-1}}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\nu^{-s}x^{\nu-1}} \tag{19}$$

bezw.

$$\lim_{x=1}\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}(2\nu-1)^{s-1}x^{\nu-1}}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}(2\nu-1)^{-s}x^{\nu-1}} \tag{20}$$

existieren. Man kann leicht folgendermaßen zeigen, daß dies der Fall ist. Es werde

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\nu^{-s}x^{\nu-1}=\mathfrak{Q}_s(x),$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}(2\nu-1)^{-s}x^{\nu-1}=Q_s(x)$$

gesetzt, und $s$ sei eine im Streifen $0 < \Re(s) < 1$ gelegene Nullstelle von $\varphi(s)$ bezw. $\psi(s)$. Dann ist auch

$$\varphi(1-s) = 0 \text{ bezw. } \psi(1-s) = 0,$$

aber

(21) $$\varphi(s-1) \neq 0 \text{ bezw. } \psi(s-1) \neq 0.$$

Nun ist für $|x| < 1$

(22) $$\frac{d(x\mathfrak{Q}_s(x))}{dx} = \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\nu^{-s+1}x^{\nu-1} = \mathfrak{Q}_{s-1}(x)$$

und ebenso

(23) $$\frac{d(x\mathfrak{Q}_{1-s}(x))}{dx} = \mathfrak{Q}_{-s}(x),$$

ferner

(24) $$\frac{d(xQ_s(x^2))}{dx} = \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}(2\nu-1)^{-s+1}x^{2\nu-2} = Q_{s-1}(x^2),$$

(25) $$\frac{d(xQ_{1-s}(x^2))}{dx} = Q_{-s}(x^2).$$

Nach (16), (18) und (21) existiert

$$\lim_{x=1}\frac{\mathfrak{Q}_{-s}(x)}{\mathfrak{Q}_{s-1}(x)} = \frac{\varphi(-s)}{\varphi(s-1)}$$

bezw.

$$\lim_{x=1}\frac{Q_{-s}(x)}{Q_{s-1}(x)} = \frac{\psi(-s)}{\psi(s-1)};$$

folglich existieren wegen (22), (23), (24) und (25) die beiden Grenzwerte (19) und (20) und es ist

$$\lim_{x=1}\frac{\mathfrak{Q}_{1-s}(x)}{\mathfrak{Q}_s(x)} = \lim_{x=1}\frac{x\mathfrak{Q}_{1-s}(x)}{x\mathfrak{Q}_s(x)} = \lim_{x=1}\frac{\mathfrak{Q}_{-s}(x)}{\mathfrak{Q}_{s-1}(x)} = \frac{\varphi(-s)}{\varphi(s-1)},$$

bezw.

$$\lim_{x=1}\frac{Q_{1-s}(x)}{Q_s(x)} = \lim_{x=1}\frac{xQ_{1-s}(x^2)}{xQ_s(x^2)} = \lim_{x=1}\frac{Q_{-s}(x^2)}{Q_{s-1}(x^2)} = \frac{\psi(-s)}{\psi(s-1)}.$$

# Kleine Mitteilungen.

## Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“.

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen“. BM = Bibliotheca Mathematica.

**1 : 12**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265. — **1 : 15**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 323. — **1 : 22, 29, 34**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265—266. — **1 : 36, 64**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137. — **1 : 103**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1 : 135**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137. — **1 : 144, 155, 169, 171**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137—138. — **1 : 189—190**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 101. — **1 : 192, 193**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 101—102. — **1 : 195**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 56; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 102. — **1 : 196—197**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 102—103. — **1 : 198**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 103. — **1 : 202**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1 : 207**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 283. — **1 : 225, 234**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 138. — **1 : 255**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 238. — **1 : 272**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 396. — **1 : 283**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1 : 284, 321**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266—267. — **1 : 335**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 305. — **1 : 370**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 319. — **1 : 383**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1 : 386**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 407. — **1 : 395**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 323. — **1 : 400**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1 : 429**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 324. — **1 : 432**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1 : 434—435**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 396—397. — **1 : 436**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 138. — **1 : 437, 440**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1 : 457**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 238. — **1 : 463**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139, 324. — **1 : 466**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 397. — **1 : 467, 469**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1 : 475**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267—268; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 283. — **1 : 476**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268.

---

**1** : 479. Über die Lebenszeit des Nikolaus Rhabdas bekommt man genauere Auskunft durch die von Herrn Cantor (Fußnote 3) zitierte Arbeit von Paul Tannery. In einem von Rhabdas verfaßten und von Tannery zum Abdruck gebrachten Traktate wird nämlich (S. 79 des Sonderabzuges) für das byzantinische Jahr 6849 (= 1341) eine Osterrechnung ausgeführt, und dies wird als das Jahr bezeichnet, in dem Rhabdas seinen Traktat verfaßte. Auf diesen Passus weist auch Tannery selbst in seiner Einleitung (S. 14 des Sonderabzuges) hin. G. Eneström.

---

**1** : 480. Nach dem Erscheinen der ersten Auflage des ersten Bandes der *Vorlesungen*, aber jedenfalls viele Jahre vor 1894 veröffentlichte Paul Tannery zwei Aufsätze über Moschopulos, die ohne Zweifel verdienen, hier erwähnt zu werden, nämlich *Manuel Moschopoulos et Nicolas Rhabdas* (Bullet. d. sc. mathem. $8_2$, 1884, S. 263—277) und *Le traité de Manuel Moschopoulos* *sur les carrés magiques; texte grec et traduction* (Annuaire de l'association pour l'encouragement des études grecques **20**, 1886, S. 88—118). Der erste Aufsatz enthält literarische Notizen, der zweite bringt, nach zwei Handschriften der Nationalbibliothek in Paris, einen verbesserten Text nebst französischer Übersetzung.

Der Passus: „Jedenfalls muß dieser Moschopulos vor dem XV. S. gelebt haben, da eine Handschrift seiner Abhandlung in dieser Zeit niedergeschrieben ist", ist natürlich nicht gut redigiert (vermutlich wollte Herr Cantor sagen, daß Moschopulos aus dem angegebenen Grunde *spätestens im 15. Jahrhundert* gelebt haben muß), und wenn Herr Cantor andeutet, daß Moschopulos wahrscheinlich am *Ende* des 14. Jahrhunderts lebte, so ist diese Angabe auf Grund der Untersuchungen von Tannery zu modifizieren. Dieser beruft sich auf ältere Notizen, nach denen der ältere Moschopulos entweder unter Michael VIII Paleologos (1261—1282) oder unter Andronikos Paleologos dem Älteren (1282—1327) lebte; der jüngere Moschopulos kann nicht in Betracht kommen, da er der Mitte des 15. Jahrhunderts angehört, und also nicht durch Nikolaus Rhabdas (der 1341 lebte) angeregt werden konnte, eine Schrift über magische Quadrate zu verfaßen. Tannery ist darum der Ansicht, daß Moschopulos ein älterer Zeitgenosse des Rhabdas war und wahrscheinlich schon am Anfange des 14. Jahrhunderts starb. G. Eneström.

1 : 481. Wie Herr Cantor angibt, scheint Moschopulos wirklich eine Behandlung von drei Hauptfällen in betreff der Konstruktion magischer Quadrate mit $n^2$ Zellen, nämlich $n = 2m + 1$, $n = 4m$ und $n = 4m + 2$ anzukündigen, aber auch die zwei von Paul Tannery untersuchten Manuskripte beschränken sich auf die zwei ersten Fälle. Noch dazu schließen diese Manuskripte mit den Worten: *Τέλος τοῦ αὐτοῦ*, und es scheint also, als ob Moschopulos den dritten Fall nicht behandelt hätte. Paul Tannery ist der Ansicht (Bullet. d. sc. mathem. $8_2$, 1884, S. 265), daß die Byzantiner für diesen Fall kein allgemeines Verfahren kannten. G. Eneström.

**1 : 508,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 68. — **1 : 510,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 314. — **1 : 519—520,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **1 : 537, 540, 542,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1 : 618,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 306—307. — **1 : 622,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143. — **1 : 638,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 394. — **1 : 641,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1 : 661,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1 : 662,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1 : 663,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 405. — **1 : 671,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1 : 673,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 407—408; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 307. — **1 : 675,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 408. — **1 : 687—689,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143—144; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 205—206. — **1 : 694,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 284; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 103. — **1 : 704, 706, 708,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499—500.

1 : 712. Avicenna hat auch einen anderen arithmetischen Traktat verfaßt, oder wenigstens wird er in einer Handschrift des Traktates als Verfasser angegeben. Der Titel desselben lautet in französischer Übersetzung: „Lettre qui ouvre les portes de l'académie, par l'exposition des racines du calcul et de l'arithmétique". Der Anfang dieses Traktates ist französisch von J. J. Marcel übersetzt und gedruckt im *Dictionnaire des sciences mathématiques* von A. S. de Montferrier (tome I, Paris 1835, S. 141—143). Der übersetzte Abschnitt

handelt von der Neunerprobe. Dieser Traktat scheint auch Suter unbekannt zu sein; auf die französische Übersetzung wies Paul Tannery schon 1882 (Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{6}_2$, 144) hin.

G. Eneström.

---

**1:714,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 500. — **1:723,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 307. — **1:735, 736, 744, 748,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 500. — **1:749,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1:752,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 104. — **1:753,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 408—409. — **1:754,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 409; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 104, 308. — **1:756,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 500; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 308. — **1:757, 767,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 500—501. — **1:794,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:804, 805, 807, 808, 812,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268—269.

---

**1:816.** Herr Cantor gibt noch in der 2. Auflage seines Werkes an, daß Gerbert zwei Arbeiten über Rechenkunst verfaßt hat, und diese zwei sind, wie aus der folgenden Darstellung hervorgeht, *Regula de abaco computi* und *Libellus de numerorum divisione*. Bekanntlich bezweifeln oder verneinen die meisten Forscher, die sich mit Gerbert als Mathematiker beschäftigt haben, daß die erste Arbeit von diesem herrührt. Die Gründe, aus denen Herr Cantor noch einer anderen Ansicht ist, scheinen die folgenden zu sein: 1. Bernelinus redet an einer Stelle von der „papae regula“; 2. die von Olleris herausgegebene Arbeit *Regula de abaco computi* ähnelt in ihrer breitspurigen Stilistik der Geometrie Gerberts. Indessen kann man behaupten, daß diese Gründe sehr schwach sind, besonders nachdem Bubnov (*Gerberti Opera mathematica*, Berlin 1899, S. 207) darauf hingewiesen hat, daß die fragliche Arbeit aus vier verschiedenen Stücken zusammengesetzt worden ist. Es scheint mir also fast notwendig, Gerbert die *Regula de abaco computi* abzuerkennen, und zwar wesentlich aus den von Nagl (siehe die Cantorsche Fußnote 1 auf S. 818) und Weissenborn (*Gerbert, Beiträge zur Kenntnis der Mathematik des Mittelalters*, Berlin 1888, S. 210—214) angeführten Gründen.

Auf der anderen Seite kann ich nicht mit Bubnov (a. a. O. S. 23—24) einverstanden sein, wenn er Gerbert eine andere Schrift *De norma rationis abaci* zuschreibt, von der angeblich ein Fragment im cod. Vatic. 3123 aufbewahrt ist. Dies angebliche Fragment, das übrigens nicht, wie Bubnov behauptet, zuerst im Jahre 1888 von ihm veröffentlicht worden ist (Narducci hatte es schon sechs Jahre früher im Bullet. di bibliogr. d. sc. matem. **15**, 1882, S. 115 zum Abdruck gebracht), ist in Wahrheit ein (von Herrn Cantor nicht erwähnter) Brief von Gerbert an Constantin von Fleury, wo jener eine Schrift über Rechenkunst in Aussicht stellt, und wenn man diesen Brief mit der Einleitung des *Libellus de numerorum divisione*, die bekanntlich auch an Constantin gerichtet ist, vergleicht, wird man geneigt anzunehmen, daß der *Libellus* gerade die von Gerbert in Aussicht gestellte Schrift ist. Ich hebe besonders den folgenden Passus des Briefes hervor: „Nam de numeris aut per se aut in relatione consistentibus fortuitu locuturi, quid dicent esse digitos, quid etiam articulos, *cum totius praedicti substantia numeri solummodo in istarum versetur vicissitudine rerum*“; man vergleiche hiermit den folgenden Passus der Einleitung des *Libellus*: „Quid cum idem numerus modo simplex, modo compositus, nunc digitus, nunc constituatur articulus?“. Jedenfalls ist der Brief kein Fragment einer Schrift *De norma rationis abaci*, sondern enthält, wie oben bemerkt wurde, nur eine Mitteilung, daß der Briefschreiber gelegentlich einige schwierige Punkte der Rechenkunst erläutern wird („de his omnibus, si vita suppetit, evidentius explicabo").

Ich bin also der Ansicht, daß nur eine Schrift von Gerbert über Rechenkunst bisher nachgewiesen ist, nämlich der oben genannte *Libellus*.

G. Eneström.

---

**1 :** 823, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 269.

---

1:836. Herr Cantor erwähnt hier, daß Atelhart von Bath um 1130 über den Abacus schrieb und zitiert in der Fußnote die Boncompagnische Ausgabe der betreffenden Schrift (*Regule abaci*), aber über den Inhalt derselben teilt er nur mit, daß die Araber darin nicht genannt werden. Dieser Umstand bedeutet wohl nicht, daß Herr Cantor in den *Regule abaci* nichts gefunden hat, das verdient, erwähnt zu werden, sondern der Grund ist vermutlich, daß die Boncompagnische Ausgabe nach dem Erscheinen der ersten Auflage des ersten Bandes der *Vorlesungen* veröffentlicht wurde, und daß Herr Cantor bei der Vorbereitung der zweiten Auflage seines Werkes möglichst wenig hinzufügen wollte. Aber dann sollten eigentlich solche Stellen der *Vorlesungen* gestrichen (oder modifiziert) werden, wo spätere Schriften über den Abacus als interessant bezeichnet werden, weil sie Sachen enthalten, die tatsächlich schon in den *Regule abaci* des Atelhart vorkommen. Eine solche Stelle findet sich S. 848 (siehe unten die Bemerkung zu dieser Seite). — Die Angabe, daß Atelhart um 1130 über den Abacus schrieb, bedeutet wohl eigentlich, daß die *Regule abaci* in den ersten 30 Jahren des 12. Jahrhunderts niedergeschrieben sein müssen (vgl. S. 851); mir ist wenigstens kein Umstand bekannt, woraus man schließen kann, daß die Schrift gerade um 1130 verfaßt wurde. Im Gegenteil ist es gar nicht unwahrscheinlich, daß dieselbe ein paar Jahrzehnte früher niedergeschrieben wurde, denn Boncompagni hat am Ende der Einleitung seiner Ausgabe der *Regule abaci* darauf hingewiesen, daß eine Abhandlung von Atelhart aus der Zeit von 1104—1116 herrührt. Dieser Umstand ist nicht ganz ohne Bedeutung, denn wenn man behauptet, daß Atelhart seine *Regule abaci* um 1130 schrieb, so kann man kaum umhin anzunehmen, daß diese Schrift wahrscheinlich späteren Datums als der *Liber de abaco* des Radulph von Laon († 1131 nach Herrn Cantor) war. Aber diese Annahme ist meines Erachtens durchaus unbegründet.

G. Eneström.

---

1:848. Herr Cantor bemerkt in betreff einer von Treutlein herausgegebenen anonymen Schrift über den Abacus aus der Mitte des 12. Jahrhunderts: „[Diese Schrift] zieht unsere Aufmerksamkeit dadurch auf sich, daß sie einige Kunstausdrücke enthält, mit welchen wir noch nicht bekannt sind. Sie nennt nämlich das unmittelbare Divisionsverfahren das der goldenen Division, das complementäre das der eisernen". Nun findet sich aber bei Atelhart am Anfange der *Regule abaci* (S. 91 der Boncompagnischen Ausgabe) folgender Passus: „[Philosophi] agunt tribus modis hic scilicet simpliciter. idest sine differenciis quod nos aurum dicimus et composite idest cum differenciis quod nos ferrum vocamus. Permixtum quod nos aurum et ferrum nuncupamus". Hier ist der Ausdruck „quod nos dicimus [bezw. vocamus, nuncupamus]“ bemerkenswert, denn man könnte daraus schließen, daß die Kunstausdrücke goldene und eiserne Division von Atelhart selbst erfunden worden sind. Da aber einige Zeilen weiter unten der Ausdruck: „Dominus Gybertus hoc opus nostris Gallis restituit“, vorkommt, ist es unsicher, ob Atelhart unter „nos“ sich selbst versteht, oder ob sich das Wort z. B. auf seine Zeitgenossen bezieht. Das letztere ist ohne Zweifel das wahrscheinlichste, denn Atelharts Zeitgenosse Radulph von Laon, der ebenfalls die Terme „divisio aurea“ und „divisio ferrea“ benutzt, bemerkt ausdrücklich (siehe A. Nagl, *Der arithmetische Traktat des Radulph von Laon;* Abhandl. zur Gesch. der Mathem. **5**, 1890, S. 116): „Qui autem haec nomina [divisio aurea, divisio ferrea] posuerunt, nichil dignum memoria super ipsorum nominum ratione in scriptis suis reliquisse inveniuntur“, woraus hervorzugehen scheint, daß die Terme wenigstens einige Zeit vor Atelhart bekannt waren. — Beiläufig bemerke ich, daß der Ausdruck „aurea divisio“ auch in einem von Bubnow (*Gerberti Opera mathematica,* Berlin 1899, S. 291—293) zum Abdruck gebrachten, vielleicht etwa um 1100 geschriebenen Traktate *De divisionibus,* sowie in einer von Narducci 1882 herausgegebenen Schrift über den Abacus aus dem Ende des 12. Jahrhunderts vorkommt; die Verfasser dieser Schriften scheinen den Ausdruck „ferrea divisio“ nicht zu kennen, der zweite wendet statt derselben „divisio cum differencia“ an (siehe Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **15**, 1882, S. 154).

G. Eneström.

---

**1 : 852,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 269. — **1 : 853,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 501. — **1 : 854,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 501; **3**$_3$, 1902, S. 324; **4**$_3$, 1903, S. 206; **6**$_3$, 1905, S. 104. — **1 : 855,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 501.

---

**1 : 855.** In betreff des Ocreatus bemerkt Herr Cantor, daß nur seine „Regel des Nikomachus“ der komplementären Multiplikation einigermaßen verwandt ist. Indessen gibt es bei Ocreatus eine andere Stelle, wo man noch größeren Anlaß hat, der komplementären Multiplikationsregel zu gedenken, nämlich die folgende (S. 135 der Henryschen Ausgabe): „Dico ergo quod omnis minor terminus cujus[vis] limitis in majorem ejusdem ordinis tantumdem producit quantum continetur sub ipso minore et principio sequentis ordinis, subtracto. Eo quidem [quod] continetur sub eodem minore et differentia majoris et ipsius principium sequentis ordinis. Verbi gratia septies IX est septies X septies I minus. Similiter sexies IX est sexies X sexies uno minus“. Offenbar ist der gedruckte Text hier ein wenig verstümmelt, aber es ist sehr leicht denselben verständlich zu machen, wenn man nur die zwei eingeklammerten Worte eingefügt, und noch dazu „substracto eo“ statt „substracto . Eo“ setzt, und jedenfalls geht aus den zwei Beispielen deutlich hervor, daß es sich um die Regel $a \,.\, b = 10\,b - (10 - a)\,b$ handelt. Auf diese Stelle bei Ocreatus hat schon H. Weissenborn (*Gerbert, Beiträge zur Kenntnis der Mathematik des Mittelalters,* Berlin 1888, S. 184) aufmerksam gemacht.

G. Eneström.

---

**1 : 856,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 309.

**2 : 7,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351. — **2 : 8,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 309. — **2 : 10,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2 : 14—15,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 200; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 208—209. — **2 : 20,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **2 : 25,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 274. — **2 : 30,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105. — **2 : 31,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351—352; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239—240; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 309—310. — **2 : 32,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105. — **2 : 34,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 310. — **2 : 37,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105. — **2 : 38,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 39,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 209. — **2 : 41,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 51,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 106. — **2 : 53,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 201. — **2 : 57,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 59—60,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 310—311.

---

2 : 61. Herr CANTOR ist der Ansicht, daß die Arithmetik des JORDANUS durch die fortwährende Benutzung allgemeiner Buchstaben statt besonderer bestimmter Zahlen geradezu zu einem bahnbrechenden Werke gestempelt wird, und bemerkt in einer Fußnote, daß CURTZE unabhängig von ihm zu einer ähnlichen Ansicht gekommen war. Unter solchen Umständen scheint es vielleicht allzu kühn, die Richtigkeit der CANTORschen Ansicht in Abrede zu stellen, aber ich erlaube mir dennoch, hier die Gründe anzugeben, warum ich JORDANUS gar nicht als einen Bahnbrecher auf diesem Gebiete betrachten kann.

An der von Herrn CANTOR zitierten Stelle hebt CURTZE hervor, daß bei EUKLIDES der Beweis eines arithmetischen Satzes an einer geometrischen Figur geführt wird, daß aber bei JORDANUS, der auch geometrische Figuren benutzt, die Beweise durchaus keine Rücksicht auf die Figuren nehmen, so daß diese ebensogut wegbleiben könnten, ohne daß das Verständnis der Beweise auch nur im Mindesten erschwert würde. CURTZE denkt dabei offenbar an die Beweise des 2. Buches der *Elementa*, übersieht aber, daß es in Wahrheit bei EUKLIDES eine große Anzahl von Beweisen gibt, welche gerade die Eigenschaft besitzen, auch ohne Figuren durchaus verständlich zu sein. Um dies zu zeigen, drucke ich hier vollständig den 17. Satz des 7. Buches der *Elementa* in der HEIBERGschen Übersetzung ab, aber *ohne* die Figuren hinzuzufügen.

> *Si numerus duos numeros multiplicans numeros aliquos efficit, numeri ex iis effecti eandem rationem habebunt, quam habent numeri multiplicati.* Nam numerus $A$ duos numeros $B$, $\Gamma$ multiplicans numeros $\Delta$, $E$ efficiat. dico, esse $B:\Gamma = \Delta:E$. quoniam enim $A$ numerum $B$ multiplicans $\Delta$ effecit, $B$ numerum $\Delta$ metitur secundum unitates numeri $A$. uerum etiam $Z$ unitas numerum $A$ secundum unitates eius metitur. itaque unitas $Z$ numerum $A$ et $B$ numerum $\Delta$ aequaliter metitur. quare $Z:A = B:\Delta$. eadem de causa erit etiam $Z:A = \Gamma:E$. quare etiam $B:\Delta = \Gamma:E$. itaque permutando $B:\Gamma = \Delta:E$; quod erat demonstrandum.

Es ist augenscheinlich, daß dieser Beweis gerade die Eigenschaft besitzt, auch ohne die Figuren durchaus verständlich zu bleiben, denn sie kann wörtlich auf folgende Weise übersetzt werden: Seien $B$, $\Gamma$ die Zahlen, $A$ der Faktor und $\Delta$, $E$ die Produkte, so daß $\Delta = A \,.\, B$, $E = A \,.\, \Gamma$. Dann ist $A = \frac{\Delta}{B}$, und auf der anderen Seite ist $A = \frac{A}{1}$, also $1 : A = B : \Delta$. Auf ganz dieselbe Weise erhält man $1 : A = \Gamma : E$, folglich $B : \Delta = \Gamma : E$ oder $B : \Gamma = \Delta : E$, was zu beweisen war.

Sehen wir jetzt nach, wie Herr CANTOR selbst seine von CURTZE nicht beeinflußte Ansicht begründet, so finden wir nur folgende Ausführungen: „Wir haben Buchstaben statt der einzelnen Potenzen der Unbekannten bei Diophant, bei Arabern auftreten sehen. Wir waren in der Lage bei Aristoteles, bei Pappus auf Buchstaben hinzuweisen, die einen beliebigen Wert darstellten. Wir vermochten auch bei Leonardo ein vereinzeltes Vorkommen solcher Buchstabenanwendung nachzuweisen". Diese Bemerkungen sind ja ganz richtig, aber wenn Herr Cantor noch dazu bemerkt hätte, daß bei Euklides häufig eine Art von Beweisen vorkommt, die mit der Jordanischen identisch wird, wenn man ohne weiteres die beigefügten Figuren (die nur Linien darstellen) streicht, so würden vielleicht die Leser der *Vorlesungen* weniger geneigt werden, Jordanus als einen Bahnbrecher anzusehen. Aber vorausgesetzt, daß die Jordanische Modifikation der Euklidischen Beweisführung (d. h. die Streichung der von Euklides benutzten Linien) wirklich eine Erfindung ersten Ranges wäre, so kann ich dennoch nicht zugeben, daß Jordanus ein Bahnbrecher war, denn in Wirklichkeit hat er durch seine Benutzung allgemeiner Buchstaben gar keine neue Bahn gebrochen, und Herr Cantor deutet selbst S. 62 den Grund dazu an, nämlich daß Jordanus nicht verstand, das Endergebnis der Rechnung vermittels der ursprünglich gewählten Buchstaben darzustellen. Darum wurde die Jordanische Bezeichnungsweise in den meisten Fällen unzweckmäßig, und nur ausnahmsweise kam sie in den folgenden Jahrhunderten zur Anwendung. Meiner Ansicht nach kann man, auch von dem Standpunkte des Herrn Cantor aus, *höchstens* sagen, daß Jordanus einen mißlungenen Versuch gemacht hat, eine neue Bahn zu brechen. Korrekter wäre es dagegen meines Erachtens zu sagen, daß Jordanus die Euklidische Bezeichnungsweise der Zahlen durch allgemeine Buchstaben anwendete, aber sehr oft ohne die bei Euklides hinzugefügten Linien zu zeichnen.

G. Eneström.

---

**2:63,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 206. — **2:70,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 417. — **2:73, 82, 87,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502. — **2:88,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503; **6**$_3$, 1905, S. 395. — **2:89, 90,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503. — **2:91—92,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503; **5**$_3$, 1904, S. 409—410; **6**$_3$, 1905, S. 395—396. — **2:97,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 406. — **2:98—99,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 269—270; **6**$_3$, 1905, S. 106—107. — **2:100,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140. — **2:101,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 325; **6**$_3$, 1905, S. 396. — **2:104—105,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503; **4**$_3$, 1903, S. 397—398. — **2:111,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352. — **2:116,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 406. — **2:117—118,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 107, 311. — **2:122,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503—504; **6**$_3$, 1905, S. 397. — **2:126,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 406; **6**$_3$, 1905, S. 210. — **2:127,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 406. — **2:128,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 504. — **2:132,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 515—516. — **2:143,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 504. — **2:155,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 410—411.

---

**2**:155—156. In einer früheren Bemerkung (BM **5**$_3$, 1904, S. 410—411) habe ich nachgewiesen, daß die von Narducci veröffentlichten Auszüge aus dem *Introductorius liber qui et pulveris dicitur in mathematicam disciplinam* so wesentlich mit den entsprechenden Stellen des Traktates: *Ioannis Hispalensis liber algorismi de pratica arismetrice* übereinstimmen, daß man behaupten kann, es handele sicht nicht um zwei verschiedene Traktate, sondern nur um zwei Handschriften desselben Traktates. Wegen seines Inhaltes braucht also der *Liber introductorius* in einer Geschichte der Mathematik nicht besonders erwähnt zu werden, aber auf der anderen Seite ist er wegen des im Titel vorkommenden Wortes „pulveris“ von einer gewissen Bedeutung, denn dies

Wort muß wohl als eine wörtliche Übersetzung des arabischen Termes „gubârî“ betrachtet werden. So viel ich weiß, hat Herr CANTOR keine Auskunft über ein anderweitiges Vorkommen des lateinischen Ausdruckes für „Staubrechnung“ im christlichen Mittelalter gegeben, und es dürfte darum nicht ohne Interesse sein, darauf hinzuweisen, daß in einem Manuskripte, das nach NARDUCCI aus der 2. Hälfte des 13. Jahrhunderts herrührt, der Ausdruck „pulverea ductio numerorum“ vorkommt. Dies Manuskript war lange Zeit im Besitze des Fürsten BONCOMPAGNI, und ist von NARDUCCI (*Catalogo di manoscritti ora posseduti da B. Boncompagni*, Seconda edizione, Roma 1892, S. 271—273) beschrieben. Der erwähnte Ausdruck kommt am Ende einer Handschrift des „Carmen de algorismo“ vor. Bekanntlich ist dieser Traktat von HALLIWELL (siehe *Rara mathematica,* Second edition, London 1841, S. 73—83) veröffentlicht worden, aber am Ende des BONCOMPAGNIschen Manuskriptes entdeckte NARDUCCI 28 bei HALLIWELL fehlende Verse, die er (a. a. O. S. 272) zum Abdruck gebracht hat, und von denen der letzte lautet: „et non pulueréa fit ductio sic numerorum“. Die 28 Verse behandeln: arithmetische Reihen, komplementäre Multiplikation [sehr dunkle Formulierung der Regel: $ab = 10b - (10 - a)b$], sowie Regeln, um folgende Produkte zu berechnen ($a$, $b$, $c$, $d$ kleiner als 10): $a(10b)$, $a(10b + c)$ $10a(10b + c)$, $(10a + b)(10c + d)$. Die Darstellung ist zum Teil so dunkel, daß man den Sinn erraten muß. Die letzten Verse würde ich gar nicht verstanden haben, wenn ich nicht die im *Liber algorismi de pratica arismetrice* (siehe die BONCOMPAGNIsche Ausgabe [1857], S. 119) vorkommende Regel verglichen hätte. Meiner Ansicht nach betrachtete der Verfasser der Verse seine Regeln als Kopfrechenregeln, und deutete dies durch die zitierte Bemerkung an, das Rechnen sei nicht Staubrechnen („pulverea ductio numerorum“).

G. ENESTRÖM.

---

**2 : 157, 158,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 160—162,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 311—312.

---

2 : 161. In einer früheren Bemerkung (BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 311—312) habe ich darauf hingewiesen, daß in betreff der drei Gleichungen

$$8x^3 = 5x + 16, \quad 8x^3 = 9x^2 + 12, \quad 8x^3 = 9x^2 + 4x + 12$$

die Lösungen, die in dem von LIBRI zum Abdruck gebrachten Traktate angegeben werden, den Gleichungen nicht genügen. Indessen wäre es nicht ohne Interesse ausfindig zu machen, wie der Verfasser des Traktates zu den Lösungen gekommen ist, und für diesen Zweck ist es von Belang zu bemerken, daß die Wurzeln alle größer als 1 aber kleiner als 2 sind. Schreibt man nun die drei Gleichungen auf folgende Weise

$$x \,.\, 8x^2 = 5x + 16, \quad 8x^2 = 9x + \frac{1}{x} \,.\, 12, \quad 8x^2 = 9x + 4 + \frac{1}{x} \,.\, 12,$$

so ersieht man sofort, daß man Annäherungswerte der Wurzeln erhält, wenn man in der ersten Gleichung das erste $x$ gleich 1, in den zwei anderen Gleichungen $\frac{1}{x}$ gleich 1 setzt. Die Annäherungswerte bestimmt man also aus den Gleichungen

$$8x^2 = 5x + 16, \quad 8x^2 = 9x + 12, \quad 8x^2 = 9x + 16,$$

und die Lösung dieser Gleichungen führt, wie man aus der Darstellung des Herrn CANTOR herauslesen kann, unmittelbar zu den vom Verfasser des Traktates angegebenen Formeln. Nun halte ich für sehr wahrscheinlich, daß dieser wirklich im Voraus wußte, die Wurzeln der Gleichungen seien nicht beträchtlich größer als 1, und man braucht also keineswegs seine Wurzelwerte „toll" zu nennen; dagegen ist es gewiß richtig, daß die Induktion, die ihn dazu führte, ungenügend war. Eigentlich hätte er die approximativen Lösungen der Zahlenbeispiele unter der folgenden Form angeben sollen:

$$x = \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{25}{256} \cdot \frac{1}{x^2} + 2 \cdot \frac{1}{x}}, \qquad x = \frac{9}{16} + \sqrt{\frac{81}{256} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x}},$$

$$x = \frac{9}{16} + \sqrt{\frac{81}{256} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x}};$$

daraus würde er unmittelbar gefunden haben, auf welche Weise die Lösungen verallgemeinert werden könnten.

G. Eneström.

---

**2**:163, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 312. — **2**:**164**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 313. — **2**:**166**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2**:**175**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2**:**206**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 313. — **2**:**210**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352—353. — **2**:**218**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 284. — **2**:**219**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353. — **2**:**222**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 397—398. — **2**:**229, 242**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504—505. — **2**:**243**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 505; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 398. — **2**:**253**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353. — **2**:**273**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 505. — **2**:**274**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325. — **2**:**281**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 411. — **2**:**282, 283**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353—354. — **2**:**284, 286, 287, 289, 290, 291**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506—507. — **2**:**296**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354.

---

**2**:305. Hier nennt Herr Cantor vier italienische Verfasser arithmetischer Arbeiten, und aus den vorangehenden Worten: „die einen [sind] etwas früher, die andern etwas später gedruckt worden" wird man versucht anzunehmen, daß alle diese vier Arbeiten wirklich gedruckt sind. Aber, so viel ich weiß, sind die „Regule de l'arismetica et de la geometria" des Giovanni Tedaldi nur handschriftlich vorhanden; in der Tat erwähnt Boncompagni an der von Herrn Cantor zitierten Stelle nur eine Handschrift (Cod. Parm. H H. VI. 4), und weder in Riccardis *Biblioteca matematica italiana* noch in irgend einer anderen bibliographischen Arbeit habe ich eine gedruckte Schrift von Tedaldi auffinden können. Übrigens scheint aus den von Boncompagni (a. a. O. S. 581) zitierten Stellen der fraglichen „Regule" hervorzugehen, daß sie nicht am Ende des 15. Jahrhunderts, sondern vielmehr 1452 geschrieben wurden.

G. Eneström.

---

**2**:**313**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2**:**317**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 69.

---

**2**:320. In betreff der bei Luca Paciuolo vorkommenden Rechnungen mit Wurzelgrößen, kann noch bemerkt werden, daß Paciuolo im 3. Traktate der 8. Distinction der *Summa* das Rationalmachen von Brüchen lehrt, deren Nenner von der Form $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}$ sind. Freilich behauptet Paciuolo irrigerweise, daß sein Verfahren auch für Brüche mit mehr als viergliedrigem Nenner anwendbar ist (vgl. hierüber P. Cossali, *Origine . . . dell' algebra* II, Parma 1799, S. 225—229; *Scritti inediti pubblicati da B. Boncompagni*, Roma 1857, S. 161). G. Eneström.

---

**2:322,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 399. — **2:325,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 313—314. — **2:328,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140; **4**$_3$, 1903, S. 285. — **2:334,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2:351,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 399. — **2:353,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507; **4**$_3$, 1903, S. 87. — **2:355, 357,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 399—400. — **2:358, 360,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 87. — **2:371,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 314. — **2:379, 380,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 400—401. — **2:381,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2:385,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 81; **4**$_3$, 1903, S. 207. — **2:386,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507; **5**$_3$, 1904, S. 306. — **2:395,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507—508. — **2:399,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 107—108. — **2:401, 405,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507.

---

2:411. In der Angabe, daß bei Rainer Gemma-Frisius die Anwendung des doppelten falschen Ansatzes auf quadratische Gleichungen sich findet, ist vor „quadratische“ das Wort „reine“ einzufügen. Mir liegt augenblicklich die von J. Peletier im Jahre 1563 besorgte Ausgabe der *Arithmeticae practicae methodus facilis* (das Vorwort des Herausgebers ist vom September 1558) vor, und dort steht Blatt 52$^b$—53$^a$ das von Herrn Cantor angeführte Beispiel $x \cdot \frac{3}{2} x = 200$; ein anderes Beispiel der Anwendung des doppelten falschen Ansatzes auf quadratische Gleichungen kommt nicht vor. Ganz neu war übrigens diese Anwendung nicht, denn schon in dem *Liber augmenti et diminuationis* sind ähnliche Sachen zu finden (siehe Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie* I, S. 305, 307 usw.) — Auch bei der Anwendung des einfachen falschen Aufsatzes beschränkt sich Gemma-Frisius auf reine Gleichungen; freilich behandelt er nicht nur quadratische und kubische, sondern auch biquadratische Gleichungen (siehe den Abschnitt „ex quarta regula cosae“, Aufl. 1563, Bl. 56$^b$—58$^a$). G. Eneström.

---

2:412. Mit Recht bemerkt Herr Cantor, daß es leicht zu vermuten ist, wie Gemma-Frisius zu dem Näherungswerte $\sqrt{133\frac{1}{3}} \sim 11\frac{33}{60}$ gelangte. In der Tat ist eine Vermutung eigentlich überflüssig, denn Gemma-Frisius hatte schon an einer früheren Stelle gelehrt (Aufl. 1563, Blatt 44$^b$), daß man, um $\sqrt{200}$ zu berechnen, genau das Verfahren anwenden sollte, das Herr Cantor ihm in betreff der Berechnung von $\sqrt{133\frac{1}{3}}$ zuschreibt. — Der von Herrn Cantor bemerkte offenbare Druckfehler $17\frac{3}{100}$ für die Länge findet sich nicht in der Auflage 1563, wo (Bl. 53$^a$) ganz richtig „ergo longitudo $17\frac{31}{100}$ paulò plus“ steht. G. Eneström.

---

**2:425,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2:427,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 314—315. — **2:429,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 201—202. — **2:430,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 145. — **2:440,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 285. — **2:442,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 325. — **2:449,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140. — **2:454,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 242. — **2:474, 480,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140—141. — **2:481,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 508. — **2:482,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 508; **2**$_3$, 1901, S. 354; **3**$_3$, 1902, S. 240; **6**$_3$, 1905, S. 401. — **2:484,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2:486, 489, 490,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2:497,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509; **4**$_3$, 1903, S. 87. — **2:509,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270, 509. — **2:510,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2:512,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2:514, 516, 517,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509.

---

2 : 524. In betreff der Notiz über das Rationalmachen der Nenner von Brüchen im *General trattato* des Tartaglia kann bemerkt werden, daß Tartaglia, wie er daselbst andeutet, das Beispiel $\frac{10}{\sqrt[5]{5}+\sqrt{3}}$ schon in der zweiten „Risposta“ vom 21. Februar 1547 seinem Gegner L. Ferrari zur Lösung vorgelegt hatte. Die 28. Frage dieser „Risposta“ lautet nämlich: „Anchora ve adimãdo che me sia partito . 10. p R. relata . 5 . piu . R. quadra . 3. cioe trouando el suo reciso come sapeti“. In seinem fünften „Cartello“ löste Ferrari die Frage, wie Tartaglia an der von Herrn Cantor zitierten Stelle des *General trattato* berichtet, indem er darauf hinwies, daß

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt[5]{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt[5]{5}+\frac{\sqrt[5]{25}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt[5]{125}}{\sqrt{9}}+\frac{\sqrt[5]{625}}{\sqrt{27}}\right)=3+\frac{5}{\sqrt{27}},$$

und daß ferner offenbar

$$\left(3+\frac{5}{\sqrt{27}}\right)\left(3-\frac{5}{\sqrt{27}}\right)=8\frac{2}{27},$$

so daß also

$$\frac{1}{\sqrt[5]{5}+\sqrt{3}}=\frac{1}{8\frac{2}{27}}\left(3-\frac{5}{\sqrt{27}}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt[5]{5}+\frac{\sqrt[5]{25}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt[5]{125}}{\sqrt{9}}+\frac{\sqrt[5]{625}}{\sqrt{27}}\right).$$

Ferrari wendete also das Verfahren an, zuerst die 5. Wurzel und dann die Quadratwurzel wegzuschaffen, und sein Verfahren ist, wie aus der Begründung desselben hervorgeht, als eine wirkliche Methode zu betrachten. Dies geht noch deutlicher aus den Antworten des Ferrari auf die Fragen 29 und 30 der zweiten „Risposta“ hervor; diese Fragen beziehen sich nämlich auf das Rationalmachen der Nenner der Ausdrücke:

$$\frac{10}{\sqrt[5]{5}+\sqrt[3]{3}} \quad \text{und} \quad \frac{10}{\sqrt[5]{5}+\sqrt[4]{3}}.$$

Die Bemerkung des Herrn Cantor, daß die Vorschrift des Tartaglia, man müsse zunächst die im Nenner auftretenden Irrationalitäten zu Wurzelgrößen gleicher Benennung machen, *allein* das blinde Umhertasten zu einem verständigen Verfahren umzuwandeln imstande ist, dürfte also modifiziert werden sollen. Vielleicht ist diese Bemerkung dadurch veranlaßt worden, daß Tartaglia selbst (*General trattato*, parte 2, Bl. $153^b$) das Ferrarische Verfahren bemängelt, und zwar teils weil dem Ferrari „totalmente la via maestra da risolver il quesito“ unbekannt war, teils weil dieser das Resultat unter der Form eines Produktes zweier Wurzelgrößen angegeben hatte, während Tartaglia un „reciso“, d. h. ein aus einfachen Wurzelgrößen bestehendes Polynom verlangt hatte. Die erste Ausstellung des Tartaglia, die offenbar mit der Bemerkung des Herrn Cantor sehr nahe übereinstimmt, ist aus dem von mir oben angeführten Grunde unberechtigt, und die zweite Ausstellung ist kaum ernstlich zu nehmen, denn Tartaglia mußte wohl wissen, daß sein Gegner imstande war, eine einfache Multiplikation von zwei Wurzelausdrücken auszuführen.

Am Ende des 10. Buches des 2. Teils des *General trattato* lehrt Tartaglia (Bl. $154^b$) auch das Rationalmachen von Brüchen mit dreigliedrigem Nenner von der Form $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

G. Eneström.

2:529. Das Problem: „Die Zahl 8 in zwei Teile zu zerlegen, welche miteinander und überdies mit ihrer Differenz vervielfacht das größtmögliche Produkt hervorbringen“, wurde, wie TARTAGLIA selbst bemerkt, ursprünglich von FERRARI als 17. Frage des 3. „Cartello“ (S. 7) gestellt, und der Fragesteller forderte auch einen Beweis der Richtigkeit der Lösung. TARTAGLIA löste das Problem in seiner 3. „Risposta“, gab als Lösung $x = 4 + \sqrt{5\frac{1}{3}}$, $y = 4 - \sqrt{5\frac{1}{3}}$ und fügte hinzu: „et questa e di frutti delle nostra pianta con liquali pesavati di farmi guerra, ma el vi e fallato il pensiero“; im *General trattato* findet sich ein verbesserter Text dieses Zusatzes: „et questa è di frutti della nostra pianta, con li quali pensauano di farmi guerra, ma gli falo il pensiero“. Mit „nostra pianta“ meint TARTAGLIA ohne Zweifel seine Lösung der kubischen Gleichung, wie aus seiner 2. „Risposta“ (S. 5—6) deutlich hervorgeht. Im 5. „Cartello“ (S. 19) bemängelt FERRARI die Lösung seines Gegners, weil dieser keinen Beweis der Richtigkeit hinzugefügt hatte. Ob die angegebenen Werte der Teile richtig seien oder nicht, sagt FERRARI, wolle er dem TARTAGLIA nicht mitteilen; jedenfalls sei die Frage wegen des fehlenden Beweises als nicht gelöst zu bezeichnen. G. ENESTRÖM.

---

**2 : 530,** siehe BM **2**₃, 1901, S. 354—355; **3**₃, 1902, S. 141. — **2 : 532, 535, 541, 548,** siehe BM **1**₃, 1900, S. 509—510. — **2 : 549,** siehe BM **1**₃, 1900, S. 510; **6**₃, 1905, S. 401. — **2 : 550,** siehe BM **2**₃, 1901, S. 355. — **2 : 554,** siehe BM **1**₃, 1900, S. 510. — **2 : 555,** siehe BM **4**₃, 1903, S. 285.

---

2 : 561. Il convient de faire observer que, dans le troisième livre de sa *Logistica*, BUTEO emploie en passant des équations dont le second membre est nul. Ainsi p. ex. dans le problème 6 (p. 146), on trouve à la fin de l'exercice:

| | | |
|---|---|---|
| $1\,\varrho\, M\, 7\ [M\, 1$ | c'est à dire | $x - 7 = -1$ |
| $1\,\varrho\, M\, 6\ [0$ | | $x - 6 = 0$ |
| $1\,\varrho\ [6]$ | | $x = 6.$ |

H. BOSMANS.

---

**2 : 565, 567, 568,** siehe BM **4**₃, 1903, S. 285—286. — **2 : 569,** siehe BM **1**₃, 1900, S. 510. — **2 : 572—573,** siehe BM **1**₃, 1900, S. 510; **3**₃, 1902, S. 141. — **2 : 576,** siehe BM **2**₃, 1901, S. 355—356. — **2 : 579,** siehe BM **2**₃, 1901, S. 145. — **2 : 580—581,** siehe BM **4**₃, 1903, S. 207. — **2 : 582,** siehe BM **1**₃, 1900, S. 510. — **2 : 583,** siehe BM **1**₃, 1900, S. 270; **2**₃, 1901, S. 356. — **2 : 585,** siehe BM **5**₃, 1904, S. 69—70. — **2 : 592,** siehe BM **2**₃, 1901, S. 146. — **2 : 594,** siehe BM **1**₃, 1900, S. 270. — **2 : 597,** siehe BM **1**₃, 1900, S. 270; **2**₃, 1901, S. 146. — **2 : 599—600,** siehe BM **2**₃, 1901, S. 146. — **2 : 602,** siehe BM **1**₃, 1900, S. 270. — **2 : 603—604,** siehe BM **1**₃, 1900, S. 270—271; **6**₃, 1905, S. 108. — **2 : 611,** siehe BM **2**₃, 1901, S. 356—357. — **2 : 612,** siehe BM **1**₃, 1900, S. 277; **2**₃, 1901, S. 146.

---

2 : 612—613. Es ist durchaus richtig, daß L. SCHONERUS am Anfange seines Buches *De numeris figuratis* angibt, er verstehe unter figurierten Zahlen solche, welche durch Multiplikation entstanden sind, aber aus dieser Definition ist es kaum möglich zu erraten, was sein Buch enthält. In Wirklichkeit beschäftigt er sich vorzugsweise mit dem Fall, in dem die Faktoren *gleich* sind, d. h. mit Potenzen, und behandelt im Zusammenhang hiermit auch Wurzeln, sowie die Rechnung mit Wurzelgrößen und einfacheren algebraischen Ausdrücken.

Man könnte also sagen, daß er unter figurierten Zahlen eigentlich Potenzen und Wurzeln versteht.

Von größerem Interesse als der sachliche Inhalt des Buches *De numeris figuratis* sind indessen, wie Herr Cantor auch andeutet, einige darin vorkommende Zitate. Außer dem von ihm erwähnten Verweis auf den 33. Satz [nämlich des 2. Teiles] des „*Algorithmus demonstratus* des Jordanus“, kommt bei Schonerus noch ein zweiter Verweis auf dieselbe Schrift vor, nämlich inbetreff des Satzes $(a+1)^3 - a^3 = a^2 + (a+1)^2 + a\,(a+1)$, und zwar beruft sich Schonerus (siehe S. 279 der ersten Auflage vom Jahre 1586) auf „Jordanus 34 p. 2 *Algorithmi demonstrati*“; in der Tat lautet der zitierte Satz des *Algorithmus demonstratus:* „Omnis cubus addit super proximum minorem cubum numerum congregatum ex quadratis amborum et numero facto ex ductu radicis unius in radicem alterius“. Obgleich es jetzt als fast sicher betrachtet werden kann, daß der *Algorithmus demonstratus* nicht von Jordanus herrührt, wäre es ohne Zweifel von Interesse zu wissen, wie Schonerus dazu gekommen ist, diese Schrift dem Jordanus zuzuschreiben.

Auch ein anderer bei Schonerus vorkommender Verweis verdient vielleicht beachtet zu werden. Hinsichtlich des Satzes, daß, wenn $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4} \cdot \frac{a_5}{a_6}$, so ist $a_1 \cdot a_4 \cdot a_6 = a_2 \cdot a_3 \cdot a_5$, beruft sich Schonerus (in der mir augenblicklich vorliegenden letzten Auflage vom Jahre 1627 findet sich die Stelle S. 159) auf „Thebitius ad 2. p. 3. Menelai“. Nun kommt ja dieser Satz in der Schrift *De figura sectore* von Tabit ben Kurra vor, die sich an Menelaos' Sphärik anschließt, aber so weit man jetzt weiß, nennt Tabit darin gar nicht Menelaos (vgl. A. A. Björnbo, Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. **14**, 1902, S. 15). Es wäre also von Interesse zu wissen, woher Schonerus sein Zitat entnommen hat.

G. Eneström.

---

**2:613,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 306. — **2:614,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2:617, 619,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 108—109. — **2:620,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2:621,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 402. — **2:623,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146—147. — **2:632,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 109. — **2:634, 637,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 315—316. — **2:638,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147. — **2:642, 643,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271. — **2:644,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 402—403. — **2:655,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357. — **2:656,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 286. — **2:659, 660,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147—148. — **2:661,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 403. — **2:665,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271. — **2:669,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 203. — **2:670,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 403. — **2:674,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88. — **2:683,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2:693,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 287. — **2:700, 701, 703, 704, 705,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900. S. 271—273. — **2:715,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 412. — **2:716,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 404.

---

2:717. Herr Cantor gibt an, daß James Gregory 1638 geboren ist, und dieselbe Angabe haben alle anderen mir bekannten Arbeiten, die biographische Notizen über Gregory enthalten. Aber wenn sein Geburtsjahr 1638 ist, wie konnte er in seinen *Exercitationes geometricae* (London 1668, S. 2) schreiben: „neque mihi esset difficile affirmare (si modo mentiri vellem), me ante 20 annos illam [= quadraturam hyperboles] cognovisse“? Ein zehnjähriges Kind kann wohl nicht die Quadratur der Hyperbel gefunden haben?

G. Eneström.

2:717. Hier sollte entweder Zeile 26 „verdoppelt wird“ statt „zunimmt“ gesetzt, oder der Satz, der mit: „Er zeigt ferner“ beginnt, modifiziert werden. Sinnstörend ist ja der kleine Redaktionsfehler eigentlich nicht, da es sowohl aus der Figur 142 wie aus den Formeln Seite 718 hervorgeht, was Herr Cantor sagen will. G. Eneström.

2:718. Der von Herrn Cantor Zeile 11—12 zitierte Passus lautet bei Gregory (*Vera circuli et hyperbolae quadratura*, Patavii [1667], S. 4 Z. 3—4): „ex hisce percepi seriem polygonorum convergentem, cuius terminatio est circuli sector“. Nun kann der Umstand, daß Gregory nicht „circulus“ (wie Herr Cantor angibt), sondern „circuli sector“ sagt, durchaus belanglos erscheinen, aber in Wirklichkeit ist es nicht so. Zeuthen hat nämlich (*Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert*, Leipzig 1903, S. 305) darauf aufmerksam gemacht, daß man durch geeignete Verbesserung des von Gregory benutzten Verfahrens sicherlich beweisen könnte, die Fläche eines Kreisausschnittes sei im allgemeinen eine transzendente Größe, daß man aber daraus *nicht* folgern darf, *jeder* Kreisausschnitt (also auch der ganze Kreis) sei eine transzendente Größe. Man darf also nicht ohne weiteres in dem zitierten Passus des Gregory „circulus“ statt „circuli sector“ setzen. G. Eneström.

**2:719,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357. — **2:720,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 287; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 404. — **2:721,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 404—405. — **2:742,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142. — **2:746,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2:747,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 173; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 225. — **2:749,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88. — **2:766,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 412—413. — **2:767,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148, 357—358. — **2:770,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 208. — **2:772, 775,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 358—359. — **2:777,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 204. — **2:783,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88—89. — **2:784,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2:787, 791,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 405. — **2:793—794,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 316—317, 405—406. — **2:795,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 317. — **2:797—798,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 317. — **2:799,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307. — **2:802,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 208. — **2:812,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 37. — **2:820,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307. — **2:825,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2:832,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 203—204; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 211. — **2:840,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148—149. — **2:843,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 328. — **2:850,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 109—110. — **2:856, 865,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149. — **2:876, 878, 879,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511. — **2:891,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2:897,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 406. — **2:898,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 37, 208. — **2:901,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511. — **2:919,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 204. — **2:VIII** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142. — **2:IX, X** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511—512.

**3:9,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359. — **3:10,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 518; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 211. — **3:11,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3:12, 17,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512. — **3:22,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3:24,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3:25,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209, 399. — **3:26,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359. — **3:39,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 407. — **3:45—48, 49, 50,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512—513.

3:63. Im Vorübergehen bemerkt Herr Cantor, daß die *Exercitationes geometricae* (1668) des James Gregory ein nicht umfangreiches Buch ist (in der Tat enthält es außer dem Vorworte nur 27 Druckseiten), daß aber sein

Inhalt auch abgesehen von den hier berücksichtigten 13 ersten Seiten nicht ohne Interesse ist, hat Herr Cantor selbst später (S. 688) hervorgehoben. Ein näheres Studium der Seiten 14—27 der *Exercitationes geometricae* könnte vielleicht noch weitere Belege hierzu liefern. Schon auf dem Titelblatte erwähnt Gregory zwei Sätze von allgemeinerem Interesse, die S. 25—26 zu finden sind, und die in moderner Bezeichnung lauten:

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \log \sec x, \quad \int \operatorname{cosec} x\, dx = \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x.$$

Das Vorkommen des ersten Satzes in den *Exercitationes geometricae* haben G. Heinrich in der Biblioth. Mathem. **1**$_3$, 1900, S. 91 und Braunmühl in seinen *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* (II, S. 41) erwähnt; ob das Vorkommen des zweiten Satzes früher bemerkt worden ist, weiß ich nicht.

G. Eneström.

---

**3 : 70,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 360. — **3 : 82,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 308. — **3 : 100,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149. — **3 : 102,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 318. — **3 : 112,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209—210; **6**$_3$, 1905, S. 318. — **3 : 116,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513. — **3 : 117,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 518. — **3 : 123,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513; **4**$_3$, 1903, S. 399. — **3 : 124,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 407—408; **4**$_3$, 1903, S. 400. — **3 : 126,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 288. — **3 : 131,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 210. — **3 : 151,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 326. — **3 : 167, 172—173,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 400. — **3 : 174,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149—150. — **3 : 183,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 432. — **3 : 188,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 241. — **3 : 201,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513. — **3 : 207,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 519. — **3 : 215,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 150. — **3 : 218,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513. — **3 : 220,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 326. — **3 : 224,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514. — **3 : 225, 228,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 150. — **3 : 230,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 211—212. — **3 : 232,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514; **6**$_3$, 1905, S. 212. — **3 : 244—245,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 205, 413. — **3 : 246,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514; **2**$_3$, 1901, S. 151. — **3 : 250,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514. — **3 : 303,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 155. — **3 : 330—331,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 241—242. — **3 : 337,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 206.

---

**3** : 365. Hier finden sich einige Notizen über die von Guido Grandi 1703 herausgegebene Schrift: *Quadratura circuli et hyperbolae per infinitas hyperbolas et parabolas quadrabiles geometrice exhibita*, und zuletzt wird bemerkt: „Grandi .... schrieb nun $0 + 0 + 0 + \ldots = \frac{1}{2}$ als Symbol der Schöpfung der Welt aus dem Nichts". Aber diese Folgerung findet sich nicht in der 1703 herausgegebenen Schrift, sondern ist ein Zusatz der „editio altera, auctior et accuratior", die im Jahre 1710 erschien. Hier sind nämlich (S. 29) 13 Zeilen eingeschaltet, die in der Auflage von 1703 fehlen. Freilich behauptet Grandi selbst in seinem „Scholion" (S. 29—34), daß die fraglichen Zeilen ursprünglich in seinem Manuskripte standen, und daß er dieselben auf Anregung einer Person, die er „nonnemo censoris vicem subiens" nennt, vor der Drucklegung strich, aber dieser „censor", der sein Gegner A. Marchetti war, hat in einer 1713 herausgegebenen *Lettera* bestritten, daß die in der zweiten Auflage eingeschalteten Zeilen wörtlich mit den von Grandi 1703 gestrichenen übereinstimmten. In jedem Falle aber kann es von Interesse sein zu erwähnen, daß die Schrift von 1703 sieben Jahre später eine verbesserte und vermehrte Auflage bekam.

G. Eneström.

---

**3 : 370—371,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 308. — **3 : 382,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 213. — **3 : 384,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 319. — **3 : 408,** siehe BM **6**$_3$, 1905,

S. 213. — **3 : 447, 455**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 151. — **3 : 473**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 154—155; **4**$_3$, 1903, S. 401. — **3 : 477, 479**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 151—152. — **3 : 497, 498**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 309. — **3 : 507**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 71—72. — **3 : 521**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441.

---

3:527. Das hier nach VARIGNONS *Elémens de mathématique* (1731) erwähnte Instrument zur Dreiteilung eines beliebigen Winkels wurde schon in L'HÔPITALS *Traité analytique des sections coniques* (Paris 1707), S. 452—453 beschrieben. G. ENESTRÖM.

---

**3 : 535**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 401. — **3 : 536**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 206. — **3 : 560**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 319—321. — **3 : 565**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 326—327. — **3 : 571**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 327; **5**$_3$, 1904, S. 72. — **3 : 578**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 327; **5**$_3$, 1904, S. 309. — **3 : 586, 609**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 309—310. — **3 : 614**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 89—90. — **3 : 616**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 214, 408. — **3 : 636—637**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441. — **3 : 646—647**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 206—207. — **3 : 652**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 446; **5**$_3$, 1904, S. 207. — **3 : 660**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441. — **3 : 667**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441—442; **5**$_3$, 1904, S. 207—208, 310. — **3 : 682**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 408. — **3 : 686**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 208. — **3 : 689, 695**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 442. — **3 : 736**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 111. — **3 : 750, 758**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 446. — **3 : 759**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 208. — **3 : 760, 766**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 446—447. — **3 : 774, 798**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 442—443. — **3 : 819**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 321. — **3 : 845**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 447; **3**$_3$, 1902, S. 327—328. — **3 : 848, 881**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 443. — **3 : 882**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 447; **5**$_3$, 1904, S. 414. — **3 : 890**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 401. — **3 : 892**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 143. — **3 : IV** (Vorwort), siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 443.

---

## Anfragen.

**126. Über Spuren der komplementären Multiplikation bei arabischen Mathematikern.** Als negatives Ergebnis seines Berichtes über die westarabische Mathematik hebt Herr CANTOR (*Vorles. über Gesch. d. Mathem.* **1**$^2$, 1894, S. 768) als besonders wichtig hervor, daß wir bei den Westarabern kein komplementäres Rechnen, nicht einmal die komplementäre Multiplikation finden. Meines Wissens ist auch jetzt keine arabische Schrift bekannt, wo diese Art von Multiplikation ausdrücklich gelehrt wird, und man könnte darum versucht sein, das Ergebnis des CANTORschen Berichtes als definitiv anzusehen. Freilich glaubt H. WEISSENBORN (*GERBERT, Beiträge zur Kenntnis der Mathematik des Mittelalters*, Berlin 1888, S. 169—208) durch eine längere Untersuchung nachgewiesen zu haben, daß die komplementäre Multiplikation auf Araber und Inder zurückzuführen ist, aber sein „Nachweis" ist kaum mehr als eine Behauptung.

Indessen gibt es zwei Gründe, die meines Erachtens dafür sprechen, daß die Frage noch nicht endgültig erledigt ist, und die also neue Untersuchungen über das Vorkommen der komplementären Multiplikation bei den Arabern erwünscht machen.

Der erste Grund ist der Umstand, daß vier der ältesten abendländischen Algorismus-Schriften, die alle vier mehr oder weniger Bearbeitungen arabischer Vorlagen zu sein scheinen, eine komplementäre Multiplikationsregel enthalten. Die vier Schriften sind: 1. Die von CURTZE im Jahre 1898 herausgegebene anonyme Algorismusschrift, von denen drei Handschriften bekannt sind, und die möglicherweise von Atelhard von Bath herrührt, jedenfalls aber nicht später als 1168 verfaßt sein kann (vgl. Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, S. 312, 416). 2. Der von Boncompagni im Jahre 1857 herausgegebene *Liber algorismi de pratica arismetrice*, der vielleicht auch aus dem 12. Jahrhundert herrührt, und der in einigen Handschriften dem Johannes Hispalensis beigelegt wird (vgl. Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, S. 408—409; $6_3$, 1905, S. 114). 3. Der von Cantor im Jahre 1865 herausgegebene *Liber algorizmi*, der kaum später als 1200 geschrieben ist (vgl. Cantor, a. a. O. S. 855). 4. Der von Ch. Henry im Jahre 1880 herausgegebene *Prologus Ocreati in Helceph*, der möglicherweise im 12. Jahrhundert verfaßt ist (vgl. Cantor, a. a. O. S. 852, 855; Weissenborn, a. a. O. S. 184—185). Freilich ist das Vorkommen der komplementären Multiplikationsregel in den vier Schriften nicht entscheidend, denn wer geneigt ist, den Arabern die Kenntnis dieser Regel abzusprechen, kann den fraglichen Umstand so erklären, daß die Regel im 12. Jahrhundert im Abendlande allgemein gebräuchlich war, und daß sie eben aus diesem Grunde von den Bearbeitern der arabischen Vorlagen hinzugefügt wurde.

Etwas größere Beachtung verdient vielleicht der zweite der von mir oben angedeuteten Gründe, nämlich daß im *Talkhys* des Ibn Albanna eine Multiplikationsregel vorkommt, die darauf hinzudeuten scheint, daß Ibn Albanna vielleicht die komplementäre Multiplikation kannte. Die betreffende Regel wird von A. Marre (S. 14 des Sonderabzuges seiner Übersetzung) auf folgende Weise wiedergegeben:

> La multiplication par l'excédant. — Elle consiste en ceci: tu dénommes par dix l'excès sur dix de l'un des deux nombres à multiplier l'un par l'autre, puis de son compagnon tu prends ce rapport, tu l'additionnes avec lui, et tu fais de la somme des dixaines; et s'il y a dans le rapport une fraction, tu le prends de dix, et tu le mets à la place des unités.

Wenn ich geneigt bin anzunehmen, daß Ibn Albanna hier von komplementärer Multiplikation spricht, so ist der Grund dazu freilich nicht, daß Marre in der Fußnote die von ihm übersetzte Regel als mit der Formel

$$ab = \left(\frac{a-10}{10}\, b + b\right) 10 = (a - 10)\, b + 10\, b$$

identisch erklärt. Meines Erachtens hat Marre nämlich den Text gar nicht verstanden und darum nicht richtig übersetzen können, so daß die Übersetzung, die er tatsächlich bietet, den Sinn des Ibn Albanna nicht wiedergibt. Möglich ist ja, daß der arabische Text der von Marre benutzten Abschrift verstümmelt ist, aber ebenso sehr ist es möglich, daß Marre durch die Wöpckesche Übersetzung der Arithmetik des Alkalsadi (wo ein Kapitel über „dénomination" vorkommt) veranlaßt worden ist, das Verfahren, das er „dénomination" nennt, mit einem Divisionsverfahren in Verbindung zu setzen. Aber schon der Umstand, daß man, um eine Multiplikation von zwei *ganzen* Zahlen auszuführen, zuerst mit 10 *dividieren* sollte, scheint mir verdächtig; nehme ich noch hinzu, daß im Mittelalter das Wort „denominatio" als besonderes Kunstwort bei der komplementären Multiplikationsregel vorkommt und „Multiplikation mit 10" bedeutet (siehe z. B. Joannis Hispalensis *Liber algorismi de pratica arismetrice*, ed. Boncompagni, Roma 1857, S. 97: „quinquaginta que est denominatio a quinque"; M. Curtze, *Über eine Algorismus-Schrift des XII. Jahrhunderts*; Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. 8, 1898, S. 18: „differentia maioris de minori demere et de reliquo denominationem facere"), so habe ich noch größeren Anlaß anzunehmen, daß Marre den Sinn des arabischen Textes mißverstanden hat, wenn er die Worte, die er durch: „tu dénommes par dix l'excès sur dix de l'un des deux nombres" übersetzt, durch $\frac{a-10}{10}$ wiedergibt; ich für meinen Teil würde eher $10\,(a-10)$ setzen. Den wirklichen Sinn der Regel des Ibn Albanna kann ich zwar nicht ermitteln, aber ich kann nicht umhin, die Überschrift „La multiplication par l'excédant" durch „Komplementäre Multiplikationsmethode" zu übersetzen, und ich halte es nicht für unwahrscheinlich, daß Ibn Albanna entweder die Regel

$$ab = 10\,[a - (10-b)] + (10-a)\,(10-b)$$

oder die Regel

$$ab = 10a - a\,(10-b)$$

angegeben hat. Jedenfalls wäre es gut, wenn ein Kenner der arabischen Sprache die Frage näher untersuchen wollte. G. Eneström.

# Rezensionen.

**Heronis** Alexandrini opera quae supersunt omnia. Vol. III: Rationes dimetiendi et commentatio dioptrica (Vermessungslehre und Dioptra), griechisch und deutsch von **Hermann Schöne.** Leipzig, Teubner 1903. 8⁰, XXI + 366 S. Mark 8[1]).

Die Vermessungslehre Herons, nach dem griechischen Titel jetzt allgemein *Metrica* genannt, ist erst vor einigen Jahren von dem Vater des Herausgebers in Konstantinopel in einem Codex des 11. Jahrh. aufgefunden worden; in welcher Beziehung dieselbe zu den schon von Hultsch i. J. 1864 herausgegebenen Schriften Herons, der Geometrie, Stereometrie und den *Mensurae* stehe, ist eine Frage, auf die wir hier nicht näher eintreten können; es ist aber zu hoffen, daß dieselbe ihrer mathematisch-historischen Bedeutung wegen von anderer Seite eingehend untersucht werden möge (vgl. die beiläufige Bemerkung von P. Tannery in Bullet. d. sc. mathem. $27_2$, 1903, p. 88; R. Meier, *De Pseudo-Heronianis*, im Rhein. Museum $\mathbf{61}_2$, 1906, p. 178—184).

Die *Metrica* eröffnen uns eine Reihe neuer Gesichtspunkte auf dem Gebiete der griechischen Mathematik. Greifen wir zuerst nochmals zwei Punkte heraus, die schon W. Schmidt, M. Curtze und G. Wertheim in der Biblioth. Mathem. ($\mathbf{1}_3$, 1900, p. 13—14; $\mathbf{3}_3$, 1902, p. 143—144) und in der Zeitschr. f. Mathem. (**42**, 1897, Hist. Abt. p. 113—120; **44**, 1899, Hist. Abt. p. 1—3) behandelt haben. Erstens erfahren wir aus den *Metrica*, daß Archimedes eine Schrift, betitelt *Ephodikon*, verfaßt hat; es enthielt dieselbe unter anderem die Quadratur der Parabel, die also unrichtigerweise zwischen die beiden Bücher vom Gleichgewicht der Ebenen hineingeraten ist, dann aber auch die Inhaltsbestimmung zweier Körpergebilde, mit denen man sich heutzutage selten mehr beschäftigt, deren Inhalte aber von Archimedes schon richtig berechnet worden sind, nämlich des Cylinderhufes (p. 131 der *Metrica*) und des gemeinsamen Stückes zweier Cylinder von gleichem Durchmesser, deren Achsen sich rechtwinklig schneiden (p. 133). Das *Ephodikon* wird als eine ähnliche Schrift über

---

1) Vor vier Jahren versprach mir ein Mitarbeiter der Bibliotheca Mathematica eine Rezension von Herons *Opera* 1, 2 : 1, und vor drei Jahren gab mir ein anderer Mitarbeiter der Zeitschrift ein ähnliches Versprechen in betreff des 3. Bandes von Herons *Opera*, aber weder der eine noch der andere ist dazu gekommen, die von ihm versprochene Rezension fertigzustellen. Nun hat Herr Rudio in seinem Nachruf für Wilhelm Schmidt (siehe Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, S. 362—371) sehr ausführlich über den 1. Band und zum Teil auch über den 2. Band des fraglichen Werkes berichtet, so daß eine besondere Rezension nunmehr nur für den 3. Band erwünscht ist, und Herr Suter hat jetzt die Güte gehabt, diese Rezension zu redigieren.
G. Eneström.

Flächen- und Körperberechnung gewesen sein, wie sie die *Metrica* des HERON sind, nur allerdings mit eingehenderer geometrischer Begründung der aufgestellten Formeln. — Zweitens zieht HERON (p. 19) die irrationale Quadratwurzel aus einer Zahl durch wiederholte Anwendung des Verfahrens:

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 \pm b} \sim \tfrac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right) = \alpha;$$
$$\sqrt{A} \sim \tfrac{1}{2}\left(\alpha + \frac{A}{\alpha}\right) = \alpha' \text{ u. s. f.}$$

(vgl. auch S. GÜNTHER, *Die quadratischen Irrationalitäten der Alten;* Abhandl. z. Gesch. d. Mathem. **4**, 1882, 1—134). Die Kubikwurzel berechnet er mit Hilfe der Methode der beiden Fehler, die zu diesem Zwecke etwas umgeformt wird (vgl. G. WERTHEIM in Zeitschr. f. Mathem **44**, 1899; Hist. Abt. 1—3.

Zur Quadratwurzelausziehung ist folgendes hinzuzufügen: Die zweimalige Anwendung des HERONschen Verfahrens führt auf denselben Wert wie die zweite Annäherung des QALAṢÂDÎ und des ḤAṢṢÂR, nämlich:

$$\sqrt{a^2 \pm r} = a \pm \frac{r}{2a} - \frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^2}{2\left(a + \frac{r}{2a}\right)}$$

Es ist in der Tat $a + \frac{r}{2a} - \frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^2}{2\left(a + \frac{r}{2a}\right)} = \alpha' = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{a^2 + r}{\alpha}\right)$,

wo $\alpha = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a^2 + r}{a}\right)$; beide Seiten können nämlich auf die Form gebracht werden: $\dfrac{8a^2(a^2 + r) + r^2}{4a(2a^2 + r)}$

(vgl. auch M. CURTZE in Zeitschr. f. Mathem. **42**, 1897; Hist. Abt. p. 147). Wir wollen noch anführen, daß man mit der dritten Annäherung des ḤAṢṢÂR (vgl. Biblioth. Mathem. $2_3$, 1901, 38), die darin besteht, daß, wenn die zweite Annäherung den Wert $a + \frac{p}{q}$ ergeben hat, von diesem die Größe $\dfrac{\left(\frac{1}{q}\right)^2}{2\left(a + \frac{p}{q}\right)}$ subtrahiert wird, auch den Näherungswert $\frac{1351}{780}$ für $\sqrt{3}$ erhält; nimmt man nämlich als zweite Annäherung den bekannten Wert $\frac{26}{15} = 1\frac{11}{15}$, dann ist

$$1 + \frac{11}{15} - \frac{\left(\frac{1}{15}\right)^2}{2\left(1 + \frac{11}{15}\right)} = \frac{1351}{780}$$

Den Wert $\frac{26}{15}$ erhält man allerdings nach den Formeln des ḤAṢṢÂR direkt nicht, wohl aber die Werte $\frac{7}{4}$ und $\frac{97}{56}$, aus denen sich ergibt:

$$\frac{97 + 7}{56 + 4} = \frac{26}{15}$$

Wir finden ferner in den *Metrica* (p. 49—65) die Inhaltsformeln für die regelmäßigen Polygone aus der Seite berechnet; HERON benutzte für diese Ableitungen die Sätze über das rechtwinklige Dreieck, den goldenen Schnitt, und das „Buch über die Geraden im Kreise“ (p 59); es ist dies höchst wahrscheinlich das Buch über die Berechnung der Sehnen von HIPPARCH; bekanntlich haben auch die Araber ABÛ'L-WEFÂ und EL-BÎRÛNÎ Schriften unter dem gleichen Titel verfaßt. Die Berechnung des Dreiecksinhaltes aus den drei Seiten findet sich an zwei Orten, in den *Metrica* (p. 19—25) und in der *Dioptra* (p. 281 —285); am ersten Orte sagt HERON: „Es gibt eine allgemeine Methode, um, wenn die drei Seiten eines beliebigen Dreiecks gegeben sind, den Inhalt ohne die Höhe zu finden". So würde er sich wohl nicht ausgedrückt haben, wenn er selbst diese Methode erfunden hätte, dieselbe ist also älter als HERON, und in diesem Sinne ist also die Stelle in CANTORS *Vorlesungen* ($\mathbf{1}^2$, p. 360) abzuändern. Es darf hier wohl auch bemerkt werden, daß das „andere Buch", auf das an verschiedenen Stellen der bis jetzt veröffentlichten Schriften HERONS hingewiesen wird (vergl. CANTORS *Vorlesungen* $\mathbf{1}^2$, p. 364, 377, 509), nicht eine erste oder zweite Ausgabe der „Geometrie" war, wie CANTOR an den genannten Stellen vermutet, sondern in den meisten Fällen seine *Metrica*. Zu dieser Behauptung berechtigt mich der Umstand, daß die Aufgaben, bei denen in der Geometrie auf das „andere Buch" des HERON verwiesen ist, sich oft mit denselben Zahlenbeispielen und sogar oft mit derselben Worteinkleidung (vgl. *Geometrie*, ed. HULTSCH, p. 133, Z. 1—5 mit *Metrica*, p. 69, Z. 1—4) in den *Metrica* vorfinden. Nur die Aufgabe der Geometrie p. 133, Z. 10—23, die auf eine quadratische Gleichung führt, und die CANTOR in seinen *Vorlesungen* $\mathbf{1}^2$, p. 376 f. bespricht, findet sich nicht in den *Metrica*; es scheint mir auch wahrscheinlich, daß dieselbe niemals in diesem Buche sich befunden hat, denn sie ist ihrer Natur nach sehr abweichend von den übrigen Kreisaufgaben, die HERON an dieser Stelle behandelt hat. Der Ausdruck „in einem andern Buche" braucht aber keineswegs immer auf das gleiche Buch hinzudeuten, so hat W. SCHMIDT schon nachgewiesen (Biblioth. Mathem. $\mathbf{1}_3$, 1900, p. 313 —315) daß auch einige Male mit den Worten „in einem andern Buche" der *liber geeponicus* gemeint sein müsse.

Wir finden in den *Metrica* ferner für die Fläche eines Kreissegmentes drei Formeln, erstens: $\left(\frac{\text{Sehne} + \text{Höhe}}{2}\right) \cdot \text{Höhe}$, zweitens: $\left(\frac{\text{Sehne} + \text{Höhe}}{2}\right) \cdot \text{Höhe} + \frac{1}{14}\left(\frac{\text{Sehne}}{2}\right)^2$, drittens: etwas mehr als $1\frac{1}{3}$ des eingeschriebenen gleichschenkligen Dreiecks, entsprechend der ARCHIMEDischen Formel für das Parabelsegment (p. 71—83). Bei der ersten Formel liegt $\pi = 3$, bei der zweiten $\pi = 3\frac{1}{7}$ zu Grunde, wie HERON selbst bemerkt (bei diesen Annahmen geben nämlich beide den Halbkreis richtig).

Im zweiten stereometrischen Teile wird die Berechnung der Volumina der fünf regelmäßigen Körper durchgeführt; wir werden ferner auf p. 95 und 97 bei der Behandlung des schiefen Prismas und Cylinders an das CAVALIERIsche Prinzip erinnert; ja dieses Prinzip wird geradezu in der Form ausgesprochen, wie es heutzutage in den Lehrbüchern der Stereometrie benutzt wird, es wird aber nicht bewiesen; wir sind der Ansicht, daß HERON dasselbe und zwar wohl mit Beweis im *Ephodikon* des ARCHIMEDES, oder dann in seinem Buche über Plinthide[1]) und Cylinder gefunden haben werde. Ein solches Buch soll nämlich nach dem Zeugnis von HERON (p. 67) ARCHIMEDES verfaßt haben, und darin für das Verhältnis von Kreisumfang zum Durchmesser andere Zahlen angegeben haben als in der Kreisrechnung, und zwar soll es größer sein als 211875:67441, und kleiner als 197888:62351. In diesen Zahlen müssen Fehler stecken, denn das erste Verhältnis ist etwas größer als $\pi$, kommt aber dem richtigen Werte

---

[1]) Dies sind im allgemeinen niedere Prismen, mit quadratischer oder rechteckiger Grundfläche: Platten, Ziegel.

ziemlich nahe (3,14163), das zweite Verhältnis ist ebenfalls größer als $\pi$ (3,17377), ist aber zu weit entfernt vom wahren Werte; HERON reduziert aber diese großen Zahlen wieder auf 22:7.

Besonderes Interesse bieten auch die eigentümlichen Berechnungen des Pyramidenstumpfes (p. 103—109) und des Obelisken (p. 113—117); dieselben sind richtig, wenn auch teilweise nicht auf dem einfachsten Wege gefunden; es treffen also hier die Bemerkungen CANTORS (*Vorlesungen* **1**², p. 373—374) über die stereometrischen Berechnungen HERONS nicht zu, es ergibt sich aus den angeführten Stellen der *Metrica* unzweifelhaft, daß HERON zwischen Pyramidenstumpf und Obelisk wohl zu unterscheiden wußte. Auffallend ist bei den Zahlenbeispielen zu diesen Aufgaben die ungenaue Bestimmung der Quadratwurzeln, so wird p. 109 die Wurzel aus 455 gleich 21 statt genauer $21\frac{1}{3}$ angenommen; HERON scheint meistens die nächstliegende ganzzahlige Wurzel als für seine Zwecke genügend genau erachtet zu haben. S. 125 wird ein Badeschaff als Beispiel einer Kugelschicht berechnet, und S. 127 eine Spire (oder Wulst), wie sie in der Baukunst als Säulenunterlage auftritt.

Im dritten Teil der *Metrica*, der über die Teilung der Flächen und Körper handelt, sind zu erwähnen die beiden ARCHIMEDischen Aufgaben über die Teilung der Kugeloberfläche und des Kugelinhaltes durch eine Ebene nach gegebenem Verhältnis (p. 171 und 185); die letztere Aufgabe wird, wie bei ARCHIMEDES, nicht vollständig durchgeführt, d. h. die geometrische Lösung der kubischen Gleichung, auf die das Problem führt, wird nicht gegeben. Eine sehr einfache angenäherte Konstruktion der Teilung eines Kreises durch zwei Sehnen in drei gleiche Teile finden wir p. 173.

Wir haben noch einige für die Geschichte der Mathematik nicht unwichtige Punkte hervorzuheben: In der Aufgabe 4 des dritten Teiles der *Metrica* (p. 149) muß eine quadratische Gleichung gelöst werden, da von zwei Größen ihr Produkt und ihre Summe gegeben sind; HERON gibt allerdings den Gang der Lösung nicht an, sondern nur das Schlußresultat, er wird also den erstern als wohl bekannt vorausgesetzt und deshalb weggelassen haben. — HERON hat für „kongruent" den ganz richtigen Ausdruck ἴσος καὶ ὅμοιος (gleich und ähnlich, *Dioptra*, p. 256), während EUKLIDES nur den zweideutigen ἴσος kennt. — HERON bezeichnet eine unbekannte Größe in einer Aufgabe (Proportion) mit ἄλλος τὶς od. auch neutr. ἄλλο τὶ (= irgend ein anderer oder anderes), es kommt auch einfach die Abkürzung τὶ (= irgend etwas) vor (*Metrica*, p. 156, 158, 182 etc.). — M. SIMON sagt in seinem *EUKLID und die sechs planimetrischen Bücher* (Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissensch., **11**, 1901, p. 123), die Ausdrucksweise „eine Strecke nach dem *äußern* und mittlern Verhältnis zu teilen," d. h. ἄκρον mit „äußern" zu übersetzen, gebe keinen Sinn, man müsse übersetzen: „eine Strecke ist *ausgezeichnet* und nach mittlerem Verhältnis geteilt"; dieser Auffassung kann ich mich nicht anschließen, und zitiere als Beweis für die Richtigkeit der bisherigen Auffassung eine Stelle aus HERONS *Metrica* (griech. Text p. 18, deutsche Übers. p. 19): „Wenn drei Zahlen in Proportion stehen, so ist das Produkt der beiden *äußern* (ἄκρων) gleich dem Quadrat der mittlern," und hiervon ist der Ausdruck abgeleitet: eine Strecke nach dem äußern und mittlern Verhältnis zu teilen.

Und nun zu der Ausgabe H. SCHÖNES. Wir wollen von vornherein bemerken, daß die Aussetzungen, die im folgenden ein Mathematiker einem Philologen gegenüber machen muß, keineswegs das große Verdienst zu schmälern vermögen, das sich der Letztere um die mathematisch-historische Forschung durch Herausgabe dieses Werkes Herons erworben hat.

Die ziemlich große Zahl von Fehlern, die teils im griechischen Text, teils in der deutschen Übersetzung, teils in beiden zugleich stehen geblieben sind, hätten wohl durch eine genaue Durchlesung am Schlusse der Arbeit bedeutend reduziert werden können. Ich führe im folgenden nur die wichtigsten und störendsten an, falsche Buchstaben im Text mag der Leser leicht selbst verbessern. (Gerade Seitenzahlen weisen auf den griechischen Text, ungerade auf die Übersetzung hin; wenn der Fehler an beiden Orten vorkommt, sind auch beide Seitenzahlen angegeben.)

S. 19, 3: *ἀνάλογον ἔχουσιν* wird übersetzt: „in einem Verhältnis stehen", es sollte heißen „proportional sind" oder „in Proportion stehen"; Verhältnis heißt *λόγος*.

S. 20, 2 und 3 und S. 21, 4 und 5 sollten wohl an Stelle von 729 und $720\frac{1}{36}$ die Zahlen 27 und $26\frac{5}{6}$ stehen.

S. 49, 12 soll statt $\frac{3}{4}$ stehen $\frac{4}{3}$, und S. 49, 19 in der Klammer $B\Gamma$ statt $A\Gamma$. Die Figur dieser Seite steht nicht am richtigen Orte, sie gehört zum Hilfssatz auf S. 51.

S. 55, 13 muß es heißen 8 : 7 statt 7 : 8.

S. 61, 3 soll es heißen $MZ^2$ statt $ME^2$.

S. 68, 19 ist doch wohl $\iota\alpha\ \iota\delta'$ ($= 11\frac{1}{14}$) unrichtig, es sollte heißen $\frac{\iota\delta'}{\iota\alpha}$ ($= \frac{11}{14}$).

S. 69, 2: Hier und an andern Orten übersetzt der Herausgeber *χώριος* mit „Raumstück," besser wäre „Flächenstück".

S. 73, 11: „kleiner ist als $4\,AEB$ und als $4\,BZ\Gamma$"; besser wäre „kleiner ist als $4\,AEB$ und $4\,BZ\Gamma$ zusammen".

S. 77, 1: *κάθετος* ist hier, wie auch anderswo, unrichtig mit „Kathete" statt „Höhe" übersetzt.

S. 77, 17 soll kein neues alinea beginnen.

S. 81, 10: Statt „um Vieles" wäre besser „um so mehr".

S. 92, 22 steht unrichtig *ατ* (= 1300) statt *μ̈ϑσ* (= 19200).

S. 93, 10 wird *ἄτακτος* mit „irrational" übersetzt; dies ist hier nicht das richtige Wort, es sollte heißen „unklassifizierbar", d. h. die sich nicht in einer bestimmten Klasse unterbringen lassen.

S. 108, 15 gibt der griechische Text den Inhalt eines Dreiecks mit den Seiten 15, 20 und 30 zu $131\frac{1}{4}$ an, er ist aber nahezu $133\frac{1}{3}$; der Fehler ist hier zu groß, als daß $131\frac{1}{4}$ der ursprünglich von Heron angegebene Wert sein könnte.

S. 117, 24 muß es heißen 138 statt 130.

S. 124, 12 soll *τνβ* (= 352) statt *τνη* (= 358) stehen.

S. 125, 21 muß es heißen $448 \cdot \frac{1}{14}$ statt $448 \cdot 14$.

S. 130, 11 und 131, 12 ist 7392 unrichtig, es sollte heißen $9956\frac{4}{7}$ und der Schlußsatz wegfallen.

S. 134, 30 und 135, 33: Es ist merkwürdig, daß hier Heron das Verhältnis 127 : 93 nimmt, da doch 4 : 3 besser wäre; ebenso wäre S. 136, 28 und 137, 25 9 : 10 besser als 8 : 9.

S. 148, 25 und 149, 29 sollte nach „gegeben" stehen: „also ist auch $ZB \cdot Z\Gamma$ gegeben".

S. 150, 7 und 151, 8 ist wahrscheinlich nach $\mu\varsigma$ (= 46) $\overset{\gamma}{\beta}$ (= $\frac{2}{3}$) ausgefallen, denn 46 ist doch zu ungenau; dann wird auch $BZ$ ziemlich nahe = $8\frac{1}{2}$.

S. 150, 8 und 151, 9 soll es heißen $\eta\llcorner$ (= $8\frac{1}{2}$) statt $\eta$ (= 8).

S. 157, 20 schreibt der Herausgeber: $13 : 15 = 6\frac{1}{2} : x = 6\frac{1}{2} : 7\frac{1}{2}$; dem griechischen Text und auch der mathematischen Ausdrucksweise entsprechender wäre: $13 : 15 = 6\frac{1}{2} : x$, also ist $x = 7\frac{1}{2}$.

S. 182, 23 soll es heißen $\eta\psi\iota\varsigma\ \overset{\varepsilon}{\beta}$ (= $8716\frac{2}{5}$) statt $\overset{\gamma}{\mu}\delta\iota\delta$ (= 14014).

S. 182, 24 und 183, 25 muß statt 17248 stehen 157248.

S. 183, 19 muß statt 4158 stehen $4158\frac{2}{5}$.

S. 183, 25 und 184, 2 muß es statt 97050 heißen 97805, und S. 183, 26 statt $\sqrt{97050}$ $\sqrt{97805}$. Trotzdem es in diesem Art. XXII verschiedene Fehler hat, ist doch das Schlußresultat richtig: ein Beweis dafür, daß die Fehler durch die Schuld der spätern Überarbeiter und Abschreiber in den Text gekommen sein werden; auch zweifeln wir daran, daß Heron, um die Höhe $\Gamma M$ zu finden, die Proportion aufgestellt habe:

$$\Gamma AB + \varDelta E\Gamma : \Gamma HZ = \Gamma \varDelta^3 + \Gamma K^3 : \Gamma M^3$$

da nämlich die Proportion $\Gamma AB : \Gamma HZ = \Gamma \varDelta^3 : \Gamma M^3$ vollständig genügend gewesen wäre.

S. 185 fehlt im kleinen Kreise die Bezeichnung des Mittelpunktes $M$, und auf dem Radius $\varDelta\Gamma$ des größern der Schnittpunkt $\Theta$ von $K\varDelta$ und $\varDelta I$; überhaupt sind verschiedene Figuren, wie z. B, Fig. 51 (Obelisk), 55 (Badeschaff), 57 (Cylinderhuf) etc. unvollständig und schlecht gezeichnet; der Herausgeber wird sie wohl wiedergegeben haben, wie sie im Ms. stehen, wir sind der Ansicht, daß hier eine Verbesserung, die sich leicht als solche hätte erkennen lassen, am Platze gewesen wäre.

Die *Dioptra.* Über diese Schrift haben wir nur weniges hinzuzufügen, da dieselbe schon längst (zuerst von Vincent, in den Notices et extraits des mss. de la biblioth. imper. **19**: 2, 1858) veröffentlicht, übersetzt und auch eingehender Betrachtung unterzogen worden ist (vgl. Cantor, *Vorlesungen* **1**$^2$, p. 356f. und W. Schmidt in Biblioth. Mathem. **4**$_3$, 1903, p. 7—13). Sie ist das vollendetste Lehrbuch der Feldmeßkunde, das uns aus dem Altertum erhalten geblieben ist, und jedenfalls die direkte oder indirekte Quelle für verschiedene römische Feldmesser, wie z. B. Columella und die Verfasser des „Codex Arcerianus“. H. Schöne stand allerdings noch ein ausgezeichneter Codex zur Verfügung, den Vincent noch nicht gekannt hat, nämlich der Pariser Codex Suppl. graeca n$^0$ 607. Aber auch dieser Codex ist nicht fehlerfrei und lückenlos, so fehlen zwischen fol. 62 und 63 sehr wahrscheinlich 4 Blätter, und ist am Schlusse Kap. XXXV, über die Bestimmung der Entfernung zweier Orte auf der Erdoberfläche mit Hilfe der Beobachtung von Mondfinsternissen, sehr verderbt; auch gehörte XXXVII wahrscheinlich ursprünglich nicht der Schrift über die Dioptra an.

Als interessante Kapitel sind hervorzuheben: I—V: Beschreibung der Dioptra; XV: einen Berg in gerader Linie zu durchstechen, d. h. einen Tunnel durch denselben abzustecken; XX: Wenn ein unterirdischer Kanal gegeben ist, auf dem vorliegenden Boden einen Ort, d. h. einen Punkt zu finden, so daß ein von diesem senkrecht hinuntergeführter Schacht auf einen bestimmten Punkt des Kanals trifft; XXIV: die Vermessung eines Grundstückes mit Hilfe einer Diagonale und darauf gefällten Senkrechten (Ordinaten); XXV: Wenn die Grenzsteine eines Flächenstückes verschwunden sind und nur zwei oder drei derselben noch übrig sind und ein Handriß (Mimema) vorhanden ist, die übrigen Grenzsteine zu bestimmen; XXXIV: Beschreibung des Wegmessers; XXXV: Bestimmung der Entfernung von Alexandria und Rom (verderbt).

Von Fehlern habe ich nur folgende zu erwähnen: S. 219, 20—21 soll es heißen: „die ganze Strecke $AB$ aber ist $=$ 50 Ellen" statt „die ganze Strecke $AB$ also $=$ 50 Ellen"; denn dies folgt nicht aus dem vorhergehenden, sondern hat sich durch Messung ergeben.

S. 251—253. Der Art. XIX ist im Schlußalinea verderbt; S. 252, 18—21 (Übers. 253, 19—23) soll der griechische Text verbessert werden, wie es von Vincent geschehen ist, und die Übersetzung soll lauten: „Nachdem wir wieder $BM$ senkrecht auf $A\Gamma$ gezogen haben, machen wir $ZN = \Gamma M$ und $BK = N\Xi$; und nachdem wir dasselbe mit $\Delta M$ wie mit $BM$ gemacht haben, werden wir . . . ".

S. 255, in Fig. 101 sollen die Buchstaben $\Psi$ und $\Omega$ miteinander vertauscht werden, oder dann sind die Buchstaben im Texte falsch; in der Tat stimmen diese nicht mit denjenigen der Ausgabe Vincents, obgleich die Buchstaben der Figuren in beiden Ausgaben die gleichen sind; doch finden sich auch bei Vincent Fehler im Text.

S. 258, in Fig. 102 müssen die Buchstaben $\Delta$ und $\Lambda$ vertauscht werden, ebenso ist statt $B$ in der obern Figur $H$ zu setzen.

Zürich. H. Suter.

# Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

## Autoren-Register.



### a) Zeitschriften. Allgemeines.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Leipzig, Teubner. 8⁰. [1

**20** : 1 (1905). — 21 (1906). — [Rezension des Heftes 18:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin $12_2$, 1906, 314—315. (D. E. Smith.) — L'enseignement mathém. 8, 1906, 162—163. (H. Suter.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. 37, 1906, 57—59. (S. Günther.)

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8⁰. [2

$6_3$ (1905) : 4. — [Rezension des Bandes $5_3$:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. $9_3$, 1906, 658—660. (H. Bosmans.)

Revue semestrielle des publicitions mathématiques, rédigée sous les auspices de la société mathématique d'Amsterdam par H. de Vries, D. J. Korteweg, J. C. Kluyver, W. Kapteyn, P. H. Schoute. Amsterdam. 8⁰. [3

**14** : 1 (avril—octobre 1905).

---

**Cantor M.,** Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. — $1^2$ (1894). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 394. (G. Eneström.) — $2^2$ (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 395—406. (G. Eneström, C. Grönblad.) — $3^3$ (1901). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 407—408. (G. Eneström.) [4

**Cantor, M.,** Über einen 4. Band von Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik (1904). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. $9_3$, 1906, 660—661. (H. Bosmans.) [5

**Zeuthen, H. G.,** Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert. Deutsche Ausgabe (1903). [Rezension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 37, 1906, 59—61. (S. Günther.) [6

**Ball, W. W. R.,** Histoire des mathématiques. Traduite par L. Freund. 1 (1906). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin $12_2$, 1906, 309—314. (D. E. Smith.) [7

**Picard, E.,** Sur le développement de l'analyse et ses rapports avec diverses sciences (1905). [Rezension:] Časopis pro pěstov. matem. 34, 1905, 368—369. — Nature 72, 1905, 313. — Nyt Tidsskr. for Mathem. 16, 1905, B : 45. [8

**Darboux, G.,** Etude sur le développement des méthodes géométriques (1904). [Rezension:]

Časopis pro pěstov. matem. 34, 1905, 369. — Monatsh. für Mathem. 16, 1905, 68—69. (E. Müller.) — Nature 72, 1905, 313. — Nyt Tidsskr. for Mathem. 16, 1905, B: 45. [9

**Carrara, B.,** I tre problemi classici degli antichi in relazione ai recenti risultati della scienza. Problema secondo. Duplicazione del cubo (fine). Problema terzo. Trisezione dell' angolo. [10

Rivista di fisica (Pavia) 4: 1, 1903, 337—351, 442—453; 4: 2, 1903, 3—13, 19—33, 228—241, 309—322. — Der dritte Teil ist auch als Sonderabzug erschienen (Pavia 1904, 59 + (2) S.). — [Rezension des 2. Teiles:] The mathem. gazette 2, 1903—1904, 21—22. — [Rezension des 3. Teiles:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. $6_3$, 1904, 663—665. (H. Bosmans.) — Periodico di matem. 20, 1904, 92—93. — The mathem. gazette 3, 1904, 65—66.

**Teixeira, F. G.,** Tratado de las curvas especiales notables (1905). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. $30_2$, 1906, 6—9. (J. G.) [11

**Duhem, P.,** Les origines de la statique I (1905). [Rezension:] L'interméd. d. mathém. 13, 1906, Supplém. II—III. (E. M.) [12

**Duhem, P.,** Les origines de la statique. [13

*Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. $9_3$, 1906, 383—441.

**Duhem, P.,** De l'accélération produite par une force constante. Notes pour servir à l'histoire de la dynamique. [14

Deuxième congrès internationale de philosophie (1904), Comptes rendus, 1905, 859—915. — [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. $30_2$, 1906, 48—49. (J. T.)

**Duhem, P.,** Sur les origines du principe des déplacements virtuels. [15

*Paris*, Acad. d. sc., Comptes rendus 141, 1905, 525—527.

*__La Cour, P.__ und __Appel, J.,__ Die Physik auf Grund ihrer geschichtlichen Entwickelung für weitere Kreise in Wort und Bild dargestellt. Autorisierte Übersetzung von G. Siebert. Braunschweig, Vieweg 1906. [16

8°, 256 S. — [15 Mk.]

*__Helm, G.,__ Die Theorien der Elektrodynamik nach ihrer geschichtlichen Entwicklung. Leipzig, Veit 1904. [17

8°, VIII + 164 S.

**Lebon, E.,** Histoire abrégée de l'astronomie (1899). [Rezension:] Gaceta de matem. 3, 1905, 87—90. (G. Galán.) [18

**Holden, E. S.,** A summary of the „Bibliographie astronomique" of Lalande for the years A. D. 130 to 1473. [19

Science $23_2$, 1906, 548.

**Smith, D. E.,** A portfolio of portraits of eminent mathematicians. Part. 2. Chicago, Open court publishing company 1905. [20

Folio, 12 Porträts + 12 S. Text. — Die 12 Mathematiker sind: Pascal, Johann und Jakob Bernoulli, Gauss, Lagrange, l'Hopital, Cavalieri, Euler, Monge, Laplace, Tartaglia, Barrow.

**Ball, W. W. R.,** Mathematical recreations and essays. 4th edition (1905). [Rezension:] Nature 72, 1905, 364. [21

**Hayashi, T.,** A brief history of the Japanese mathematics. [22

*Amsterdam*, Wisk. genoots., Nieuw archief $7_2$, 1906, 113—163.

### b) Geschichte des Altertums.

**Zeuthen, H. G.,** „Théorème de Pythagore". Origine de la géométrie scientifique. [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. $30_2$, 1906, 46—48. (J. T.) [23

**Newbold, W. R.,** Philolaus. [24

Archiv für Gesch. der Philosophie 19, 1905, 176—217. — Über die Zahlenlehre und die Kosmologie des Filolaos.

**Heiberg, J. L.,** Mathematisches zu Aristoteles (1904). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. $9_3$, 1906, 661—662. (H. Bosmans.) — *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin. $12_2$, 1906, 314—315. (D. E. Smith.) — L'enseignement mathém. 8, 1906, 163. (H. Suter.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. 37, 1906, 57—58. (S. Günther.) [25

**Manilius, M.,** Astronomicon, rec. A. E. Housman (1903). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 27, 1906, 477—482. (F. Boll.) [26

*__Büchel, C.,__ Ganzzahlige Werte bei Diophant. Hamburg 1905. [27

8°, 16 S. — [1 Mk.]

**Haas, A. E.,** Über die Originalität der physikalischen Lehren des Johannes Philoponus. [28

Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 337—342.

### c) Geschichte des Mittelalters.

**Al-Battani,** Opus astronomium, ed. C. A. Nallino I (1903). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. $9_3$, 1906, 663—667. (H. Bosmans.) [29

*__Manitius, M.,__ Collationen aus der Ars geometrica. [30

Hermes 41, 1906.

**Mortet, V.,** Note historique sur l'emploi de procédés matériels et d'instruments usités dans la géométrie pratique au moyen âge (1905). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. $30_2$, 1906, 49. (J. T.) [31

**Tannery, P.,** Les éphémérides chez les Byzantins. [32

Bullet. d. sc. mathém. $30_2$, 1906, 59—63.

**Bosmans, H.,** Les travaux de M. A. Favaro sur Léonard de Crémone. [33

*Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. $9_3$, 1906, 667—669.

### d) Geschichte der neueren Zeit.

**Gravelaar, N. L. W. A.,** De leerwijze van Ferrari voor de oplossingen der vergelijkingen van den vierden graad. II. [34

Wiskundig tijdschrift 1, 1905, 167—171.

**Eneström, G.,** Über die Entdeckung des Zusammenhanges zwischen den Wurzeln einer Gleichung und der Gleichungskonstante. [35
Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 409—410. — Anfrage.

**Carrara, B.,** L'„unicuique suum" nella scoperta delle macchie solari. Roma 1906. [36
$4^0$, V + 183 S. — [6 lire.] — Auszug aus den (zum Teil noch nicht veröffentlichten) Memorie della pontificia accademia romana dei Nuovi Lincei 33—34.

***Wohlwill, E.,** Galilei-Studien I. Die Pisaner Fallversuche. [37
Mitteilungen für Geschichte der Medizin und Naturwissenschaften 4, 1905, 247—248.

**Bachet de Méziriac, C. G.,** Problèmes plaisants et délectables Éd. 4 (1905). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. $30_2$, 1906, 5. (D. J.) — L'interméd. d. mathém. 13, 1906, Supplém. II. (A. G.) [38

***Duhem, P.,** Bernardino Baldi, Roberval et Descartes. [39
Bulletin italien 6, 1906.

**Milhaud, G.,** Descartes et la Géométrie analytique. [40
Revue scient. $5_5$, 1906, 73—80.

**Tannery, P.,** Sur une erreur mathématique de Descartes (1904). [Rezension:] *Bruxelles,* Soc. scient., Revue des quest. scient. $9_3$, 1906, 672—673. (H. Bosmans.) [41

**Loria, G.,** Sopra una trasformazione di contatto ideata da Fermat. [42
Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 343—346.

**Duhem, P.,** Le principe de Pascal [sur l'équilibre des liqueurs]. Essai historique. [43
Revue génér. d. sc 16, 1905, 599—610.

**Loria, G.,** Un' impresa nazionale di universale interesse: pubblicazione delle opere di Evangelista Torricelli (1904). [Rezension:] *Bruxelles,* Soc. scient., Revue des quest. scient. $9_3$, 1906, 669—670. [44

**Eneström, G.,** Über den Ursprung des Termes „ratio subduplicata". [45
Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 410. — Antwort auf eine Anfrage.

Oeuvres complètes de Chr. Huygens. Tome 10 (1905). [Rezension:] Nature 72, 1905, 362—363. [46

**Vahlen, J.,** Erinnerungen an Leibniz. Festrede. [47
*Berlin,* Akad. d. Wiss, Sitzungsber. 1905, 653—671.

**Gerland, E.,** Leibnizens nachgelassene Schriften physikalischen, mechanischen und technischen Inhalts. Herausgegeben und mit erläuternden Anmerkungen versehen. [48
Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. 21, 1906. VI + 256 S. — [10 Mk.]

**Capozzi, D.,** Gli sviluppi di Leibniz e Newton. Palermo 1905. [49

**Muir, Th.,** The theory of determinants in the historical order of development Part. I. General determinants up to 1841. Part II. Special determinants up to 1841. London, Macmillan 1906. [50
$8^0$, IX + 491 S. — [17 sh.]

**Hayashi, T.,** Die magischen Kreise in der japanischen Mathematik. [51
Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 347—349.

**Brocard, H.,** Louis de Pujet, François Lamy, Louis Joblot, leur action scientifique (1905). [Rezension:] *Bruxelles,* Soc. scient., Revue des quest. scient. $9_3$, 1906, 670—672. (H. Bosmans.) [52

**Müller, Conrad H.,** Studien zur Geschichte der Mathematik an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert (1904). [Rezension:] *New York,* Americ. mathem. soc., Bulletin $12_2$, 1906, 315. (D. E. Smith.) — L'enseignement mathém. 8, 1906, 163. (H. Suter.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. 37, 1906, 58. (S. Günther.) [53

***Hoppe, E.,** Die Philosophie Leonhard Eulers. Gotha, Perthes 1904. [54
$8^0$, VII + 167 S.

**Birchby, W. N.,** On Euler's summation of series of reciprocal powers and related series. [55
*Colorado,* College, Publications 11, 1905, 191—208.

**Schur, F.,** Johann Heinrich Lambert als Geometer (1905). [Rezension:] Wiadomosci matem. 9, 1905, 236—237. [56

**Jourdain, Ph. E. B.,** On two differential equations in Lagranges „Mécanique analytique". [57
Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 350—353.

La correspondance de A. Volta et M. van Marum, publiée par J. Bosscha (1905). [Rezension:] Journ. d. savants 1905, 407—418. [58

***Kaučič, F.,** Georg von Vega. Zweite verbesserte und illustrierte Auflage. Wien 1905. [59
$8^0$, 58 S. — [1 Mk.] — [Rezension:] Arch. der Mathem. $10_3$, 1906, 183. (H. Samter.)

**Mackay, J. S.,** Bibliography of the envelope of the Wallace line (the three-cusped hypocycloid). [60
*Edinburgh,* Mathem. soc., Proceedings 23. 1905, 80—88.

**Pierpont, J.,** The history of mathematics in the nineteenth century (1904). [Rezension:] Wiadomosci matem. 9, 1905, 236. [61

**Simon, M.,** Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert. Bericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung erstattet. [62
Deutsche Mathem.-Verein., Ergänzungsband der Jahresberichte 1, 1906. VIII + 278 S. — [8 Mk.]

**Zindler, K.,** Die Entwicklung und der gegenwärtige Stand der differentiellen Liniengeometrie. [63
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 15, 1906, 185—213.

***d'Adhémar, R.,** Trois maîtres: Ampère, Cauchy, Hermite. [64
La quinzaine 1905. 15 S.

**Gundelfinger, S.,** Drei Briefe von C. F. Gauss an Johann Müller. [65
Journ. für Mathem. **131**, 1906, 1—7.

***Bliedner,** Philosophie der Mathematik bei Fries. Coburg 1904. [66
4°. 41 S. — Programm der Oberrealschule.

**Pépin, V. E.,** Auguste Comte et l'histoire scientifique. [67
Revue génér. d. sc. **16**, 1905, 694—700.

**Alasia, C.,** Giusto Bellavitis. Sa correspondance scientifique. [68
L'enseignement mathém. **8**, 1906, 97—117 + Porträt.

**Sós, E.,** Zur Geschichte der natürlichen Geometrie. [69
Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 408—409.

**Muir, Th.,** The theory of general determinants in the historical order of development up to 1852. [70
*Edinburgh*, Royal soc., Proceedings **25**, 1905, 908—947.

***Nekrassoff, P. A.,** [Die Moskauer philosophisch-mathematische Schule und ihre Begründer]. [71
*Moskwa*, Matem. obchtch., Sbornik **25**, 1904, 3—249. — Russisch.

Correspondance d'Hermite et de Stieltjes publiée par les soins de B. Baillaud et H. Bourget. I—II (1905). [Rezension:] *Amsterdam*, Wisk. genoots., Nieuw archief $7_2$, 1906, 211—212. (Kl.) — *Porto*, Acad. polytechn., Annaes **1**, 1906, 133—134. (G. T.) — L'intermed. d. mathém. **13**, 1906, Supplém. I. — Monatsh. für Mathem. **17**, 1906; Lit.-Ber. 21. — Nature **72**, 1905, 314. [72

Picard, E., La science moderne et son état actuel (1905). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. $9_3$, 1906, 612—615. (G. Lechalas.) [73

Kasner, E., The present problems of geometry (1905). [Polnische Übersetzung durch S. Dickstein:] Wiadomości matem. **9**, 1905, 181—216. [74

**Rados, G.,** Zur ersten Verteilung des Bolyai-Preises. [75
Mathem. Ann. **62**, 1906, 156—176. — Wesentlich eine Würdigung der Arbeiten von H. Poincaré und D. Hilbert. — [Französische Übersetzung:] Bullet. d. sc. mathém. $30_2$, 1906, 103—128.

Campos Rodrigues. [76
Jornal de sc. mathem. **15**, 1905, 181—182.

Cyparissos Stéphanos. [77
Gazeta de matem. **3**, 1905, 61—64 [mit Porträt].

International catalogue of scientific literature [Rezension des 1. Jahrganges:] L'enseignement mathém. **8**, 1906, 82. [78

Generalregister zu Band 1—50 der Zeitschrift für Mathematik und Physik. Bearbeitet von E. Wölffing (1905). [Rezension:] Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 411—417. (G. Eneström.) [79

## e) Nekrologe.

Robert **Billwiller** (1849—1905). [80
*Zürich*, Naturf. Gesellsch., Vierteljahrsschr. **50**, 1905, 563—565. (J. Maurer.)

Fedor Alexandrowitch **Bredichin** (1831—1904). [81
*St-Pétersbourg*, Acad. d. sc., Bulletin **21**, 1904. 4 S. (A. A. Bielopolskij.) — Vjestnik elem. matem. **31**, 1904, 217—220. (A. Orbinskij.)

Nikolaus **Bugajeff** (1837—1903). [82
*Moskwa*, Matem. obchtch., Sbornik **25**, 1905, 251—373 [mit Schriftverzeichnis]. (L. K. Lakhtin, L. M. Lopatin, A. P. Minin.)

Octave **Callandreau** (1852—1904). [83
*Leipzig*, Astron. Gesellsch., Vierteljahrsschr. **39**, 1904, 3—6. (M. Loewy.)

Alfred **Cornu** (1841—1902). [84
*Paris*, Ecole polytechn., Journal $10_2$, 1905, 143—176 [mit Schriftverzeichnis]. (H. Poincaré.)

Luigi **Cremona** (1830—1903). [85
*Genova*, Soc. ligustica di sc., Atti **15**, 1904. 19 S. (G. Loria.) — *London*. Royal soc., Proceedings **75**, 1905, 277—279. — *Milano*, Istit. Lombardo, Rendiconti $39_2$, 1906, 95—155. (L. Berzolari.)

Friedrich **Eisenlohr** (1831—1904). [86
Leopoldina **40**, 1904, 76—77.

Joseph David **Everett** (1831—1904). [87
*London*, Royal soc., Proceedings **75**, 1905, 377—380.

Gaspare Stanislao **Ferrari** (1834—1903). [88
*Roma*, Accad. d. N. Lincei, Atti **57**, 1904, 61—67. (G. Olivero.)

Josiah Willard **Gibbs** (1839—1903). [89
*London*, Royal soc., Proceedings **75**, 1905, 280—296. — Rivista di fisica (Pavia) **6**:1, 1905, 21—30, 111—125. (C. Alasia.)

Guido **Hauck** (1845—1905). [90
Zeitschr. für mathem. Unterr. **37**, 1906, 71—76 [mit Porträt]. (G. Hessenberg.)

Charles **Hermite** (1822—1901). [91
Darboux, G., *Notice historique sur Charles Hermite* (lue dans la séance publique annuelle du 18 décembre 1905 de l'académie des sciences). Paris, Gauthier-Villars 1905. 4°, 54 S.
*London*, Royal soc., Proceedings **75**, 1905, 142—145. — La revue du mois **1**, 1906, 37—58. (G. Darboux.)

Adolph Edmund **Heß** (1843—1903). [92
Leopoldina **40**, 1904, 36—37. — Mathem-naturwiss. Blätter **1**, 1904, 22—23. (B. Löffler.)

Johann **Kießling** (1839—1905). [93
Das humanistische Gymnasium **16**, 1905, 189 (Fr. Aly.) — Naturwiss. Rundschau **21**, 1906, 130—131. (F. R.)

Hermann **Kortum** (1836—1904). [94
Leopoldina **40**, 1904, 110.

Julius **Lange** (1846—1903). [95
Programm des Konigstädtischen Realgymnasiums (Berlin) 1904, 23—29. (H. Rsch.)

Samuel Pierpont **Langley** (1834—1906). [96
Science $23_2$, 1906, 438.

Sophus **Lie** (1842—1899). [97
*London*, Royal soc., Proceedings **75**, 1905, 60—68.

Miguel **Merino** (1831—1905). [98
*Madrid*, Acad. de ciencias, Anuario 1906, 145—167, 226—233. — Gaceta de matem. **3**, 1905, 102.

Franz **Neumann**, (1798—1895). [99
Mathem.-naturw. Blätter 1, 1904, 150—152. (W. Lorey.)

Fedor **Petruchewskij** (1828—1904). [100
Vjestnik elem. matem. 31, 1904, 50.

George **Pirie** (1843—1904). [101
Nature 70, 1904, 456—457.

Adolph **Putzler** (1838—1905). [102
Lorey, W., *Zum Gedächtnis an Adolph Putzler.* Görlitz 1906. 8°, 7 S.

Franz **Reuleaux** (1829—1905). [103
*Zürich,* Naturf. Gesellsch., Vierteljahrsschr. 50, 1905, 565—567.

Henry Augustus **Rowland** (1848—1901). [104
*London,* Royal soc., Proceedings 75, 1905, 253—257.

George **Salmon** (1819—1904). [105
*London,* Royal soc., Proceedings 75, 1905, 347—355.

Wilhelm **Schell** (1826—1904). [106
Gaceta de matem. 3, 1905, 101—102. — Leopoldina 40, 1904, 39.

Wilhelm **Schmidt** (1862—1905). [107
Biblioth. Mathem. 6, 1905, 354—386 [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (F. Rudio.)

D. F. **Schor** ( ? —1904). [108
Vjestnik elem. matem. 31, 1904, 50—51. (B. Kagan).

George Gabriel **Stokes** (1819—1903). [109
*London,* Royal soc., Proceedings 75, 1905, 199—216.

Paul **Tannery** (1843—1904). [110
Revue des idées (Paris) 3, 1906. 12 S. (G. Milhaud.) — The mathem. gazette 3, 1905, 168.

Ludwig **von Tetmajer** (1850—1905). [111
*Zürich,* Naturf. Gesellsch., Vierteljahrsschr. 50, 1905, 561—563. (F. Schüle.)

P. **van der Vliet** (1840—1904). [112
Vjestnik elem. matem. 32, 1904, 43.

Eduard **Weyr** (1852—1903). [113
Časopis pro pěstov. matem. 34, 1905, 457—516 [mit Schriftverzeichnis]. (K. Petr, J. Sobotka.)

Anna **Winlock** ( ? —1904). [114
Leopoldina 40, 1904, 40. — Nature 69, 1904, 327.

### b) Aktuelle Fragen.

**Tannery, P.,** Les sociétés savantes et l'histoire des sciences. [115
Bulletin des sciences économiques et sociales du comité des travaux historiques et scientifiques 1904 (Paris 1906), 367—371.

**Amodeo, F.,** Sul corso di storia delle scienze matematiche nella r. università di Napoli. [116
Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 387—393.

**Young, J. W. A.,** The movement for reform in the teaching of matematics in Prussia. [117
*New York,* Americ. mathem. soc., Bulletin $12_2$, 1906, 347—352.

**Loria, G.,** Vergangene und künftige Lehrpläne. Rede gehalten zu Mailand den 22. April 1905. Autorisierte Übersetzung von H. Wieleitner. Leipzig, Göschen 1906. [118
8°, 22 S. — [80 Pf.]

**Zeuthen, H. G.,** Gebrauch und Mißbrauch historischer Benennungen in der Mathematik (1905). [Rezension:] Mathesis $6_3$, 1906, 69—70. (P. M.) [119

**Muir, Th.,** Library aids to mathematical research. [120
*Edinburgh,* Royal soc., Proceedings 26, 1905—1906, 51—64.

[Englische Mathematiker - Versammlung 1905.] [121
Nature 72, 1905, 640—641.

# Wissenschaftliche Chronik.

## Ernennungen.

— Professor E. Anding in München zum Direktor der Sternwarte in Gotha.

— Dr. B. B. Boltwood in New Haven zum Professor der Physik an der „Yale university" daselbst.

— Professor H. A. Bumstead in New Haven zum Professor der Experimentalphysik an der „Yale university" daselbst.

— Dr. H. Dulac in Grenoble zum Professor der Mathematik an der „Faculté des sciences" daselbst.

— Dr. G. Fubini in Catania zum Professor der höheren Analysis an der Universität daselbst.

— Professor Jul. Gmeiner in Prag zum Professor der Mathematik an der Universität in Innsbruck.

— Professor J. G. Hagen in Washington zum Direktor der vatikanischen Sternwarte in Rom.

— Professor A. Hagenbach in Aachen zum Professor der Physik an der Universität in Basel.

— Privatdozent F. Hasenöhrl in Wien zum Professor der Physik an der Technischen Hochschule daselbst.

— Dr. N. A. Kent zum Professor der Physik an der Universität in Boston.

— „Lecturer" C. H. Lees in Manchester zum Professor der Physik am „East London college".

— L. A. Martin in Hoboken, N. J., zum Professor der Mathematik und Mechanik am „Stevens institute of technology" daselbst.

— H. R. Morgan in Washington zum Direktor des „Morrison observatory" in Glasgow, Missouri.

— Professor F. Porro in Genua zum Direktor des „Observatorio astronomico nacional" in La Plata.

— Dozent J. Precht in Hannover zum Professor der Experimentalphysik an der Technischen Hochschule daselbst.

— Professor M. Radakowicz in Innsbruck zum Professor der mathematischen Physik an der Universität in Czernowitz.

— Privatdozent H. Reissner in Berlin zum Professor der Mechanik an der Technischen Hochschule daselbst.

— Privatdozent W. Schlink in Darmstadt zum Professor der Mechanik an der Technischen Hochschule in Braunschweig.

— Professor T. Schwarz zum Direktor der Sternwarte in Kremsmünster.

— Privatdozent E. von Schweidler in Wien zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Dr. O. S. Stetson in Syracuse, N. J., zum Professer der Mathematik an der Universität daselbst.

— Dr. L. P. Wheeler in New Haven zum Professor der Physik an der „Yale university" daselbst.

— E. T. Whittaker in Cambridge zum Professor der Astronomie an der Universität in Dublin.

— Dr. E. B. Wilson in New Haven zum Professor der Mathematik an der „Yale university" daselbst.

— Dr. C. van Wisselingh in Amsterdam zum Professor der Mathematik an der Universität in Groningen.

## Todesfälle.

— Gustav Bauer, Professor der Mathematik an der Universität in München, geboren in Augsburg den 18. November 1820, gestorben in München den 3. April 1906.

— Pierre Curie, Professor der Physik an der Universität in Paris, geboren in Paris den 15. Mai 1859, gestorben daselbst den 19. April 1906.

— Göran Dillner, früher Professor der Mathematik an der Universität in Upsala, geboren zu Oviken (Jämtland, Schweden) den 26. April 1832, gestorben zu Sofielund (Värmdön, Schweden) den 28. März 1906.

— Samuel Pierpont Langley, Astronom, Sekretär der „Smithsonian institution", geboren in Boston den 22. August 1834, gestorben in Washington den 27. Februar 1906.

— Daniel Georg Lindhagen, Astronom, früher Sekretär der schwedischen Akademie der Wissenschaften, geboren zu Askeby (Östergötland, Schweden) den 27. Juli 1819, gestorben in Stockholm den 5. Mai 1906.

— Hermann Lorberg, Professor der Physik an der Universität in Bonn, geboren in Biebrich a/Rh. den 2. März 1831, gestorben 1906.

— Gabriel Oltramare, Professor der Mathematik an der Universität in Genf, geboren in Genf den 18. Juli 1816, gestorben daselbst den 10. April 1906.

— James Mills Pierce, Professor der Astronomie an der „Havard university" in Cambridge, Mass., gestorben in Cambridge, Mass, den 21. März 1906, 71 Jahre alt.

— Alexander Popoff, Professor der Physik am elektrischen Institut in St. Petersburg, gestorben 1906.

## Vorlesungen über Geschichte der mathematischen Wissenschaften.

— An der Universität in Berlin hat Professor W. Förster für das Sommersemester 1906 eine zweistündige Vorlesung über Geschichte der Astronomie im Altertum angekündigt.

— An der Universität in Greifswald hat Privatdozent Berg für das Sommersemester 1906 eine Vorlesung über Geschichte der Physik im Zeitalter Newtons angekündigt.

— An der Universität in Halle hat Privatdozent F. Bernstein für das Sommersemester 1906 eine zweistündige Vorlesung: „Geschichtliche Übersicht über die Hauptgebiete der reinen Mathematik" angekündigt.

— An der Universität in Münster hat Professor J. Plassmann für das Sommersemester 1906 eine einstündige Vorlesung über Geschichte der Astronomie angekündigt.

## Preisfragen gelehrter Gesellschaften.

— *Société scientifique de Bruxelles.* Concours de l'année 1906. Perfectionner un point du calcul fonctionnel.

— *Société hollandaise des sciences à Haarlem.* Concours de l'année 1906. In the case of constant curvature, the determination of the volume of the tetrahedron in elliptic space of three dimensions reduces to that of the hyperspace tetrahedron (extension of the notion of spherical trigonometry) in space of four dimensions. It is required to collect the literature relative to the determination of the latter volume and to extend the theory in some important point (See the memoir of Schlafli, Nieuw archief voor wiskunde, 2nd series, vol. 6, 2nd part, page 199).

## Vermischtes.

— An der Technischen Hochschule in Wien hat sich Privatdozent F. Strunz in Brünn als Privatdozent für Geschichte der Naturwissenschaften habilitiert.

— Das Heft **1:4:1** der *Encyclopédie des sciences mathématiques* bringt die erste Nummer eines Anhangs: Tribune publique, die dazu bestimmt ist, ein Sprechsaal für die französische Ausgabe der Enzyklopädie zu sein. Darin werden nämlich Verbesserungsvorschläge und Ergänzungen aufgenommen, und es scheint auch die Absicht des Herrn Molk zu sein, durch die Tribune gelegentlich Auskunft über solche literarischen Fragen zu suchen, die den folgenden Heften des Werkes gehören und von den Mitarbeitern selbst nicht erledigt werden können. Vielleicht entschließt sich Herr Molk, den Plan der Tribune allmählich zu erweitern, so daß sie zuletzt auch Aufsätze über Enzyklopädie-Fragen, z. B. über zweckmäßige Darstellungsweise und Begrenzung von Enzyklopädie-Artikeln, umfassen wird.

— La cinquième section du congrès international de philosophie, qui se tenait à Genève en 1904, adoptait un vœu relatif à l'enseignement de l'histoire des sciences, à savoir:

1o que des rudiments d'histoire des sciences soient enseignés en même temps que les sciences elles-mêmes et par les mêmes professeurs dans les établissements d'enseignement; que cet enseignement, tout élémentaire d'ailleurs, soit rendu obligatoire par les programmes et reçoive une sanction dans les examens;

2o que, dans les universités, l'enseignement régulier de l'histoire des sciences soit assuré par la création de cours divisés en quatre séries: sciences mathématiques et astronomiques; sciences physiques et chimiques; sciences naturelles; médecine.

# Über das Rechenbuch des Alî ben Aḥmed el-Nasawî.

Von Heinrich Suter in Zürich.

Das Rechenbuch des Nasawî, betitelt „el-muqni" (das Befriedigende, Überzeugende) wurde von F. Woepcke im Journal asiatique (1863; I, p. 492—500) nur kurz besprochen; es wurden nur die Kapitelüberschriften und ein Teil der Vorrede übersetzt, ferner die Bezeichnungsweise der Brüche und einige technische Ausdrücke wiedergegeben (vergl. auch Cantor, *Vorlesungen*, $I^2$, p. 716—718). Dies war selbstverständlich für die Kenntnis des Buches nicht genügend, und deshalb ist es auch nicht recht begreiflich, worauf in dieser Zeitschrift ($7_3$, 1906, p. 35—37) schon G. Eneström hingewiesen hat, wie M. Cantor einem Jordanus Nemorarius mit ziemlicher Bestimmtheit eine Abhängigkeit von el-Nasawî gutschreiben konnte. Wir haben uns daher entschlossen, das Leidener Ms. 556 (Warn.) etwas näher zu studieren.[1])

Die Abhandlung des Nasawî nimmt in demselben die letzte Stelle ein (fol. $68^v$—$79^v$), sie ist ziemlich schlecht geschrieben, die diakritischen Punkte fehlen oft, Wörter und ganze Sätze sind weggelassen, besonders gegen den Schluß hin, viele Wörter unrichtig geschrieben, in den Zahlenbeispielen oft falsche Ziffern, so daß man mit dem Verfasser der ersten Hälfte des dritten Bandes des Katalogs von Leiden (1865) annehmen muß, der Abschreiber sei des Arabischen (und gewiß auch der Rechenkunst) nur in sehr geringem Maße kundig gewesen, und dazu habe er noch, was zu seiner Entschuldigung etwas beitragen könnte, ein schwierig zu lesendes Exemplar vor sich gehabt. Es war daher keine geringe Mühe für mich, selbst das Wenige, das ich dem Buche entnommen habe, in seiner ursprünglichen Form zu erkennen und richtig wiederzugeben.

Was die Rechnungsweise el-Nasawîs anbetrifft, so wissen wir schon aus der Darstellung Woepckes, daß er im Gegensatz zu el-Karchî, der gar keine Zahlzeichen gebraucht, sich der indischen Ziffern bedient, wir kennen auch seine Schreibweise der Brüche, die Berücksichtigung von Verdoppelung und Halbierung als besonderer Rechnungsoperationen, und

1) Wir sprechen der Universitätsbibliothek zu Leiden für die Überlassung des Ms. auf längere Zeit unsern besten Dank aus.

die Anwendung der Neunerprobe. Hier haben wir noch hinzuzufügen, daß keine komplementäre Multiplikation in der Abhandlung vorkommt, daß el-Nasawî nichts von den verschiedenen zusammengesetzten Bruchformen weiß, die bei el-Karchî und besonders bei den Westarabern el-Haṣṣâr und el-Qalaṣâdî vorkommen; daher sind auch seine Operationen mit Brüchen viel einfacher als diejenigen der genannten Mathematiker, und unterscheiden sich im ganzen von den unsrigen fast gar nicht; so sagt er z. B.: zwei Brüche werden miteinander multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert, und das erste Produkt durch das zweite dividiert. Bei der Division wird sowohl die Regel angewandt, daß man den ersten Bruch mit dem umgekehrten zweiten multipliziert, als auch die daß man die Brüche auf gleichen Nenner bringt und dann die Zähler durch einander teilt. Es wird daher auch el-Nasawî recht haben, wenn er in der Vorrede sagt, er habe die weitschweifige Darstellung einiger seiner Vorgänger zu vermeiden gesucht; deshalb mag er wohl auch als ein recht kühner Neuerer unter den arabischen Rechnern betrachtet worden sein, und sein Buch vielleicht keine gar große Beachtung gefunden haben, wenigstens bei den Arabern nicht, vielleicht mehr bei den Persern.

Für uns ist von besonderem Interesse die Wurzelausziehung, und deshalb hätten wir gewünscht, daß er dieser eine etwas eingehendere Behandlung hätte zuteil werden lassen; aber wir müssen annehmen, er habe sich aus praktischen Gründen so kurz gefaßt, da die Finanzbeamten der Bujidischen Statthalter nur wenig in den Fall gekommen sein werden, Quadrat- und Kubikwurzeln ausziehen zu müssen.

### *Quadratwurzel.*

Als einziges Beispiel gibt el-Nasawî $\sqrt{57342}$ [1]). Zuerst setzt er das Verfahren allgemein (ohne Beispiel) auseinander; diese allgemeine Darstellung lassen wir weg, sie ist auch schlecht geschrieben und enthält verschiedene Lücken. Nachdem er das Beispiel aufgestellt und die Einteilung zu je 2 Stellen von rechts nach links erwähnt hat, fährt er fort:[2])

Fol. 72v. Die Wurzel aus 5 ist (angenähert)[3]) 2, stelle dieses über das 5 und unter dasselbe, multipliziere das obere 2 mit dem untern, dies gibt 4, subtrahiere dieses von 5, bleibt 1, dann verdoppele das untere 2, und verschiebe (das erhaltene 4) um eine Stelle nach rechts, wie folgendes Bild zeigt:

---

1) Ein Wurzelzeichen kommt bekanntlich bei el-Nasawî nicht vor.

2) Wir geben zu besserem Verständnis eine ziemlich freie Übersetzung des Textes.

3) Das Eingeklammerte hier und im folgenden steht nicht im Ms.

1. Bild:
```
2
17342
4
```
Dann suche eine Zahl, die, wenn du sie mit dem 4 multiplizierst und mit sich selbst und die Summe dieser Produkte von dem Rest abziehst, entweder nichts oder ein neuer Rest übrig bleibt[1]), diese Zahl ist 3; setze sie unter das 3 und über dasselbe und multipliziere sie mit dem 4 der untersten Zeile und mit sich selbst, subtrahiere das Ergebnis vom Rest, verdoppele das 3 (hinter dem 4) und verschiebe die untere Zeile um eine Stelle nach rechts, so hast du folgendes Bild:

2. Bild:
```
2 3
4442
46
```
Nun suche eine dritte Zahl auf die gleiche Weise und unter denselben Bedingungen wie vorhin, sie ist 9, setze sie unter die letzte Stelle des Restes (unter das 2) und über dasselbe, und multipliziere sie mit der ganzen unteren Zeile,[2]) und subtrahiere das Produkt von dem Rest, verdoppele dann das 9 (hinter dem 6) und addiere noch 1 hinzu, so hast du folgendes Bild:

3. Bild:
```
2 3 9
221
479
```
Nun ist die Zahl der obersten Zeile 239 die gesuchte Wurzel, und den Rest (vom Radikanden), das ist 221, setzen wir als soviele Teile von eins, als die Zahl der untersten Zeile angibt, also gleich $\frac{221}{479}$[3]). Der Grund hievon ist, daß die Quadrate je zweier aufeinander folgender Zahlen der natürlichen Zahlenreihe sich um das Doppelte der kleineren mehr eins voneinander unterscheiden.

## *Kubikwurzel.*

Auch hier lassen wir die allgemeine Darstellung, die dem Beispiel vorangeht, weg, da sie ohne ein solches geradezu unverständlich ist. Wiederum gibt el-Nasawî nur ein einziges Beispiel, es ist $\sqrt[3]{3652296}$. Nachdem er die Einteilung zu je 3 Stellen von rechts nach links erwähnt hat, fährt er fort:

Fol. $73^r$—$73^v$. Man setze 1 (d. i. die angenäherte Wurzel aus 3) über das 3 und unter dasselbe zweimal, ziehe 1 von 3 ab, so hat man folgendes Bild:

1. Bild:
```
1
2652296
1
1
```
Nun wird das 1 der untersten Zeile verdoppelt, und das oberste 1 mit dem erhaltenen 2 multipliziert, und dieses Produkt (2) zu dem 1 der dritten Zeile addiert; dann das 1 der obersten

---

1) Dieser letzte Satz fehlt im Ms.

2) Daß aufeinmal $2ab + b^2$ gebildet und abgezogen wird, ist hier etwas anders und deutlicher ausgedrückt als vorher.

3) Dieser Bruch ist im Ms. in Worten geschrieben.

Zeile auch zu dem 2 der vierten addiert, hierauf das 3 der dritten Zeile um eine Stelle, das der untersten Zeile um zwei Stellen nach rechts verschoben, so hat man folgendes Bild:[1])

2. Bild: 1
2652296
3
3

Nun sucht man eine Zahl, die so beschaffen ist, daß, wenn man sie mit dem untersten 3 multipliziert und mit sich selbst und diese beiden Produkte zusammenzählt und zur Zahl der dritten Zeile hinzufügt, und diese Summe mit der gefundenen Zahl multipliziert und dieses Produkt vom Reste abzieht, dieser Rest entweder verschwindet, oder wieder ein Rest übrig bleibt,[2]) diese Zahl ist 5; setze sie hinter das 3 der untersten Zeile, und in die oberste über das 2, dann multipliziere sie mit dem untersten 3 und mit sich selbst, (addiere diese Produkte) und füge die Summe zu dem 3 der dritten Zeile hinzu, und multipliziere das Ganze mit dem gefundenen 5 und subtrahiere das Produkt von dem Reste, so hast du folgendes Bild:[3])

3. Bild: 1 5
277296
475
35

Nun wird das 5 in der untersten Zeile verdoppelt, zu dem 3 (bezw. 30) vor ihm hinzugezählt, (gibt 40), dieses mit dem 5 der obersten Zeile multipliziert (gibt 200), dieses zu 475 hinzugezählt (gibt 675), das oberste 5 ebenfalls zu dem in der untersten Zeile (erhaltenen 40) hinzugezählt, (gibt 45), dann die 3. Zeile um eine, die 4. um zwei Stellen nach rechts verschoben, gibt folgendes Bild:[4])

4. Bild: 1 5
277296
675
45

Nun wird eine dritte Zahl gesucht, auf dieselbe Weise und unter denselben Bedingungen wie vorhin, diese Zahl findet man gleich 4; setze sie hinter das 5 der untersten Zeile und in die oberste Zeile über das 6, multipliziere dieses 4 mit der Zahl der untersten Zeile (45) und mit sich selbst, (addiere diese Produkte), und füge die Summe zu der dritten Zeile hinzu, und multipliziere das Ganze mit dem gefundenen 4,

1) In diesem zweiten Bild ist also das 3 der dritten Zeile nach unserer gewöhnlichen Bezeichnungsweise $= 3a^2$, und das unterste $3 = 3a$. Im ersten und zweiten Bild stehen im Ms. hinter dem 1 (bezw. 3) der dritten Zeile noch 6 (bezw. 5) Nullen, die ich weggelassen habe.

2) Die Worte „dieser Rest entweder — — — — — — — übrig bleibt" stehen nicht im Text.

3) In diesem 3. Bild ist 277296 der neue Rest; 475 ist $= 3a^2 + (3a + b)b = 3a^2 + 3ab + b^2$, wenn $a = 10$ und $b = 5$ angenommen wird, und $35 = 3a + b$; wird 475 mit $b = 5$ multipliziert, so ergibt sich $2375 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, dieses von 2652 abgezogen, bleibt 277, mit den drei letzten Stellen zusammen 277296.

4) In diesem 4. Bilde ist also $675 = 475 + 200 = 3a^2 + 3ab + b^2 + (3a + 2b)b = 3a^2 + 6ab + 3b^2 = 3(a + b)^2$; $45 = 3(a + b)$.

und subtrahiere das Produkt von dem Reste, so hast du folgendes Bild:[1])

5. Bild: 1 5 4 | 32 | 69316 | 454 — Nun wird das 4 in der untersten Zeile verdoppelt (gibt 458), dieses mit dem 4 der obersten Zeile multipliziert (gibt 1832), dieses zu (dem 69316) der dritten Zeile hinzugefügt (gibt 71148), das oberste 4 ebenfalls zu der untersten Zeile addiert[2]) (gibt 462), und zur dritten Zeile noch 1 hinzugefügt, so hat man folgendes Bild:[3])

6. Bild: 1 5 4 | 32 | 71149 | 462[5]) — Die oberste Zeile ist die gesuchte Kubikwurzel, und der Rest (32) sind Teile von der dritten[4]) Zeile.

Vergleicht man diesen Schluß der Kubikwurzelausziehung mit demjenigen der Quadratwurzelausziehung, so wird man sofort einsehen, daß hier ein Fehler vorliegen muß; nach den letzten Worten des Textes wäre der zu 154 hinzuzufügende Näherungsbruch $= \frac{32}{71149} = \frac{r}{3(a+b+c)^2+1}$, el-Nasawî muß aber wohl gewußt haben, daß sich zwei aufeinander folgende Kubikzahlen $(a+1)^3$ und $a^3$ um $3a^2+3a+1$ unterscheiden, er hätte also sagen sollen: „und der Rest 32 sind Teile von der dritten und vierten Zeile zusammen"; der richtige Näherungsbruch wäre dann also

$$\frac{32}{71149+462} = \frac{32}{71611} = \frac{r}{3(a+b+c)^2+3(a+b+c)+1}$$

Bei der Mangelhaftigkeit des Manuskriptes wäre es sehr wohl möglich, daß die Worte „und vierten Zeile zusammen" aus Versehen weggelassen worden wären; wir persönlich sind der Ansicht, daß el-Nasawî diese zweite Annäherung gekannt hat, und daß sie nicht erst eine Erfindung Leonardos sei, tritt dieselbe doch auch ums Jahr 1200 bei dem Perser el-Hasan b. el-Hoseïn el-Haqqâq el-Merwazî auf (vergl. Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, p. 105). Da aber Leonardo in seinem *Liber abaci* von einer selbst gefundenen Methode bei der Kubikwurzelausziehung spricht, so müssen wir seine Worte auf die dritte Annäherung beziehen (vergl. l. c.); es wäre allerdings möglich, aber scheint uns sehr unwahrscheinlich, daß Leonardo kein arabisches Rechenbuch mit Kubikwurzelausziehung gekannt hätte, was auch M. Cantor vermutet (*Vorlesungen* II², p. 31).

---

1) In diesem 5. Bild ist 32 der neue Rest; 69316 ist $= 3(a+b)^2 + 3(a+b)c + c^2$; $454 = 3(a+b)+c$; man hat von 277296 abgezogen: $69316 \cdot 4 = 277264 = 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3$.

2) Dieser Satz „das oberste 4 — — — — — addiert" fehlt im Ms.

3) In diesem Bild ist $71149 = 3(a+b+c)^2 + 1$ und $462 = 3(a+b+c)$.

4) Im Ms. heißt diese Zeile stets die „mittlere".

5) Hier steht im Ms. unrichtig 458.

Bei der Wurzelausziehung aus Brüchen und gemischten Zahlen hat sich nun EL-NASAWI die Sache auch gar leicht gemacht; bei der Quadratwurzel gibt er nur die beiden Beispiele:

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2} \text{ und } \sqrt{30\tfrac{1}{4}} = \sqrt{\tfrac{121}{4}} = \tfrac{11}{2} = 5\tfrac{1}{2}.$$

bei der Kubikwurzel ebenfalls nur zwei:

$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{8}} = \tfrac{1}{2} \text{ und } \sqrt[3]{3\tfrac{3}{8}} = \sqrt[3]{\tfrac{27}{8}} = \tfrac{3}{2} = 1\tfrac{1}{2}.$$

Bei den Sexagesimalbrüchen verwandelt er die Grade, Minuten und Sekunden, etc. in Sekunden oder Quarten, etc. (bezw. Tertien, Sexten, etc.), zieht aus dieser Zahl die Wurzel und teilt das Ergebnis durch 60, $60^2$, etc., oder er erweitert mit $10^2$, $10^4$, etc. (bezw. $10^3$, $10^6$, etc.) und teilt nachher durch 10, $10^2$, etc.

Beispiele für die Quadratwurzel:

1. $\sqrt{26^0 17'} = \frac{1}{60} \sqrt{94620''} = \frac{1}{60} \cdot 307' = 5^0 7'$
2. $\sqrt{17^0} = \frac{1}{100} \sqrt{170000^0} = \frac{1}{100} \cdot 412^0 = 4^0 7' 12''$

Beispiele für die Kubikwurzel fehlen.

Aus diesen Kapiteln über die Quadrat- und Kubikwurzelausziehung ergeben sich uns folgende Tatsachen: EL-NASAWI hat es schon verstanden, bei beiden Operationen eine kleine Abkürzung anzubringen, indem er bei der Quadratwurzel $2ab$ und $b^2$ nicht einzeln berechnet und abzieht, sondern auf einmal $(2a + b)b$ bestimmt und abzieht (dies tat bekanntlich auch EL-ḤASSÂR, vergl. Biblioth. Mathem $2_3$, 1901, p. 23), ebenso wird bei der Kubikwurzel nicht einzeln $3a^2b$, $3ab^2$ und $b^3$, sondern auf einmal $\{3a^2 + (3a + b)b\}b$ berechnet und subtrahiert. Interessant ist auch die p. 116, Note 4) angegebene Herleitung von $3(a + b)^2$ aus $3a^2 + 6ab + 3b^2$. Ihm sind also in dieser Hinsicht weder LEONARDO von Pisa, noch SACROBOSCO, noch dessen Kommentator PETRUS DE DACIA gefolgt. Bei der Quadratwurzelausziehung benutzte er die Annäherung $\sqrt{a^2 + r} \sim a + \frac{r}{2a + 1}$, bei der Kubikwurzelausziehung höchstwahrscheinlich $\sqrt[3]{a^3 + r} \sim a + \frac{r}{3a^2 + 3a + 1}$. Endlich kannte er die Erlangung einer größeren Genauigkeit bei der Wurzelausziehung durch Multiplikation des Radikanden mit $10^2$, $10^4$, etc. (bezw. $10^3$, $10^6$, etc.) und nachherige Division durch 10, $10^2$, etc., was man bis jetzt zum erstenmal bei JOH. HISPALENSIS (vergl. CANTOR, *Vorlesungen*, $I^2$, p. 752) gefunden hat.[1]) Eine dritte Annäherung kannte er weder bei der Quadrat- noch bei der Kubikwurzel, oder, was wahrscheinlicher ist, wenigstens für die erste, hielt sie für seine Zwecke nicht für notwendig.

---

1) Im sexagesimalen Zahlsystem ist das Verfahren bekanntlich schon von den Söhnen des MÛSÂ BEN SCHÂKIR benutzt worden (vergl. z. B. SUTER, Biblioth. Mathem. $3_3$, 1902, p. 271).

Ob JORDANUS von EL-NASAWÎ beeinflußt worden sei, ist eine Frage, die wir heute nicht endgültig entscheiden können, sie wird wohl auch nie zu entscheiden sein. Aber, wenn man berücksichtigt, daß die Persönlichkeit des JORDANUS noch nicht einmal sicher dasteht, daß es zweifelhaft ist, ob er arabisch verstanden habe, daß lateinische Übersetzungen von EL-NASAWÎS Rechenbuch damals kaum vorhanden gewesen sind (wenigstens hat man bis heute noch keine Spur von solchen gefunden), daß nach den neuesten Untersuchungen ENESTRÖMS (Biblioth. Mathem $7_3$, 1906, p. 24—37) vielmehr die „Demonstratio de algorismo“ des Cod. Dresd. Db. 86 als der von SCHÖNER herausgegebene *Algorithmus demonstratus* dem JORDANUS zuzuweisen ist, so ist die Bejahung jener Frage sehr unwahrscheinlich.

# Albrecht Dürers annähernde Dreiteilung eines Kreisbogens.

Von KARL HUNRATH in Kassel.

In dieser Zeitschrift habe ich mich kürzlich mit ALBRECHT DÜRERS Näherungskonstruktionen regelmäßiger Vielecke beschäftigt[1]). Mir hatte damals nur die lateinische Ausgabe von 1532 vorgelegen. Inzwischen habe ich die deutsche Urausgabe von 1525 einsehen können (S. 8 u. 9 des mit E bezeichneten 5ten Bogens) und mich überzeugt, daß die Beschreibung und die Ausführung der Konstruktion des regelmäßigen Dreizehnecks in beiden Ausgaben durchaus übereinstimmen, daß in beiden Ausgaben die Figur den im Texte nicht erklärten Buchstaben $c$ und zwischen den Buchstaben $c$ und $b$ die gleichfalls im Texte nicht erklärte Zahl 24 aufweist.

Nun möchte ich DÜRERS Dreiteilung eines Kreisbogens untersuchen.

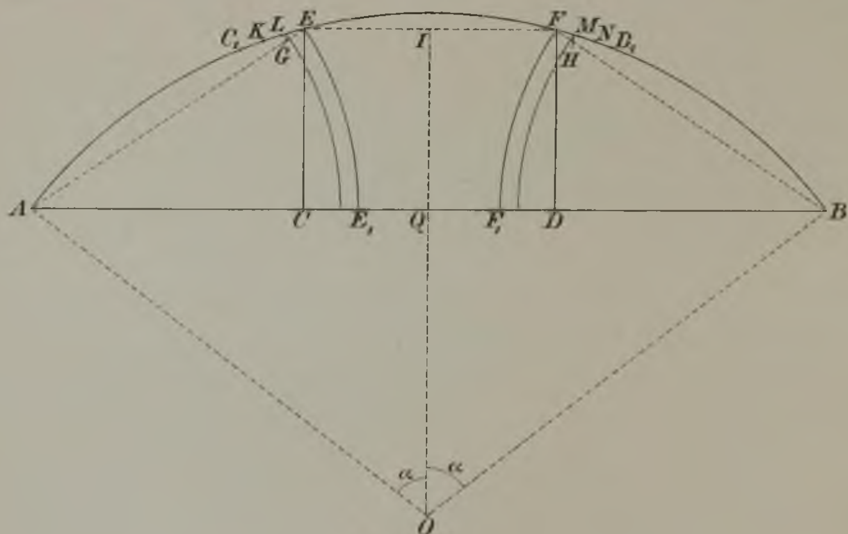



Fig. 1.

1) Siehe Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, S. 249—251. — S. 251, Z. 8 bitte ich zu lesen *fa* statt *ef*, Z. 16 *eaf* statt *eab*, Z. 20 — *0,007* statt — *0,07* und + *0,003* statt + *0,03*.

Es sei (Fig. 1) die zum gegebenen Kreisbogen gehörige Sehne $AB$ in den Punkten $C$ und $D$ in drei gleiche Teile geteilt, es seien auf $AB$ in $C$ und $D$ die Senkrechten errichtet und bis zum Durchschnitte mit dem Bogen verlängert ($E$ und $F$). Es sei $AE_1 = AE$, $BF_1 = BF$ gemacht, es seien $CE_1$ und $DF_1$ in drei gleiche Teile geteilt, endlich sei Sehne $AG = AC + \frac{2}{3} CE_1$, Sehne $BH = BD + \frac{2}{3} DF_1$ gemacht. Dann wird behauptet, daß annähernd die Bogen $AG$, $GH$, $HB$ einander gleich seien. — So weit Dürer.

Zum Beweise mache Sehne $AC_1 = AC$, $BD_1 = BD$, also jede $= EF$. Angenommen werde, die Bogen $C_1E$ und $D_1F$ seien in drei gleiche Teile geteilt, $C_1E$ in den Punkten $K$ und $L$, $D_1F$ in den Punkten $M$ und $N$. Man denke sich ferner die Sehne $C_1E$ und die Sehnen $C_1K = KL = LE = n$ gezogen.

Nun ist $C_1E > AE - AC_1$, also $> CE_1$, ferner $C_1K + KL + LE = 3n$ ist $> C_1E$, also erst recht $> CE_1$, mithin $C_1K + KL > \frac{2}{3} C_1E > \frac{2}{3} CE_1$, sagen wir $= \frac{2}{3} CE_1 + d_1 + d_2$, Sehne $C_1L$ aber $< C_1K + KL$, sagen wir $= \frac{2}{3} CE_1 + d_1 + d_2 - d_3$. Es ist weiter $C_1G > AG - AC_1$, d. h. $> \frac{2}{3} CE_1$, sagen wir $= \frac{2}{3} CE_1 + d_4$. Die mit $d$ bezeichneten Strecken nehmen mit abnehmendem $\sphericalangle AOB$ rasch ab. Es können daher bei mäßiger Größe des Bogens $C_1E$ sowohl die Sehnen $C_1L$ und $C_1G$, als auch die zugehörigen Bogen nur geringen Unterschied zeigen, ebenso die Bogen $AL$ und $AG$. Bogen $AL$ aber ist nach Annahme ein Drittel des Bogens $AB$.

Zur rechnerischen Prüfung fälle $OJ \perp AB$ in $Q$.

Es ist nach Konstr. $AG = AC + \frac{2}{3} CE_1 = AC + \frac{2}{3}(AE - AC)$ $= \frac{AC + 2AE}{3}$. Ferner ist nach Konstr., wenn man $\sphericalangle AOB$ mit $2a$ bezeichnet und den Kreishalbmesser $= 1$ setzt, $AC = \frac{2}{3} \sin a$ und

$$\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{JQ}^2 = \tfrac{4}{9} \sin^2 a + \overline{JQ}^2.$$

Da $EJ = CQ = \frac{1}{3} \sin a$ und $OQ = \cos a$ ist, so ergibt sich $JQ$ aus der Gleichung

$(JQ + \cos a)^2 = 1 - \frac{1}{9} \sin^2 a$, mithin $JQ = -\cos a + \sqrt{1 - \frac{1}{9} \sin^2 a}$

und

$$AE = \tfrac{1}{3} \sqrt{6\left(3 - \sin^2 a - \cos a \sqrt{9 - \sin^2 a}\right)},$$

also

$$AG = \tfrac{2}{9} \left[\sin a + \sqrt{6\left(3 - \sin^2 a - \cos a \sqrt{9 - \sin^2 a}\right)}\right]$$

oder auch

$$AG = \tfrac{2}{9} \left[\sin a + \sqrt{6\left(2 + \cos^2 a - \cos a \sqrt{8 + \cos^2 a}\right)}\right]$$

Zu dem gleichen Ergebnis kommt STAIGMÜLLER[1]) in Berichtigung der von GÜNTHER[2]) angestellten Berechnung.

Es ist aber

$$\sqrt{6\,(3-\sin^2 a-\cos a\,\sqrt{9-\sin^2 a})}=$$
$$\sqrt{3\,(3+2\sin a-\sin^2 a)}-\sqrt{3\,(3-2\sin a-\sin^2 a)},$$

also

$$AG=\tfrac{2}{9}\left[\sin a+\sqrt{3\,(3+2\sin a-\sin^2 a)}-\sqrt{3\,(3-2\sin a-\sin^2 a)}\right]$$

und

$$\mathrm{I}\ldots\sin\tfrac{1}{2}\,AOG=\tfrac{1}{9}\left[\sin a+\sqrt{3\,(3+2\sin a-\sin^2 a)}\right.$$
$$\left.-\sqrt{3\,(3-2\sin a-\sin^2 a)}\right].$$

Nun ist

$$\sqrt{9\pm 6\sin a-3\sin^2 a}$$
$$=3\pm\sin a-\tfrac{2}{3}\sin^2 a+\tfrac{2}{9}\sin^3 a-\tfrac{4}{27}\sin^4 a\pm\tfrac{8}{81}\sin^5 a-\tfrac{2}{27}\sin^6 a$$
$$\pm\tfrac{14}{243}\sin^7\alpha-\ldots,$$

also

$$\sqrt{3\,(3+2\sin a-\sin^2 a)}-\sqrt{3\,(3-2\sin a-\sin^2 a)}$$
$$=2\sin a+\tfrac{4}{9}\sin^3 a+\tfrac{16}{81}\sin^5 a+\tfrac{28}{243}\sin^7 a+\ldots$$

und

$$\mathrm{II}\ldots\sin\tfrac{1}{2}\,AOG=\tfrac{1}{3}\sin a+\tfrac{4}{81}\sin^3 a+\tfrac{16}{729}\sin^5 a+\tfrac{28}{2187}\sin^7 a+\ldots$$

Nach der Reihe für $\sin na$ aber erhält man

$$\sin\frac{a}{3}=\tfrac{1}{3}\sin a+\tfrac{4}{81}\sin^3 a+\tfrac{16}{729}\sin^5 a+\tfrac{256}{19683}\sin^7 a+\ldots$$

Die beiden Reihen stimmen in den ersten drei Gliedern überein, der Unterschied der vierten Glieder ist

$$-\frac{4}{19683}\sin^7 a.$$

Für kleine Werte von $2a$ ist daher die Abweichung unbedeutend. Für $\sin a=0{,}3$, also $2a=34^0\ 54'\ 55'',7$ ist sie nur $-\frac{4}{9}\cdot 0{,}0000001$. Die zweite Reihe ergibt, da sie nur aus positiven Gliedern besteht, an irgend einer Stelle abgebrochen, stets einen Näherungswert unter dem wahren Werte.

Aus der Formel I ergibt sich für $2a=180^0$

$$\sin\tfrac{1}{2}\,AOG=\frac{1+2\sqrt{3}}{9}.$$

Setzt man für $\sqrt{3}$ den Näherungswert $\frac{7}{4}$ ein, so ergibt sich $\sin\frac{1}{2}\,AOG=\frac{1}{2}$. Da aber $\sqrt{3}<\frac{7}{4}$ ist, so ergibt sich $\sin\frac{1}{2}\,AOG<\frac{1}{2}$, $\sphericalangle\,AOG<60^0$. Es ist $\frac{1+2\sqrt{3}}{9}=0{,}4960113$, $\sphericalangle\,\frac{1}{2}\,AOG=29^0\ 44'\ 11'',12$, $\sphericalangle\,AOG=59^0$

1) H. STAIGMÜLLER, *Dürer als Mathematiker*, Stuttgart 1891, S. 26, Anm. 1.

2) S. GÜNTHER, *Die geometrischen Näherungskonstruktionen* ALBRECHT DÜRERS, Ansbach 1886, S. 14ff.

$28' \, 22'', 24 = HOB$, $\sphericalangle GOH = 61^0 \; 3' \; 15'', 52$. Für den $\sphericalangle GOH$ ist daher der absolute Fehler $1^0 \, 3' \, 15'', 52 = 3795'', 52$, der relative $\frac{3795{,}92}{216000} < \frac{1}{56}$, für jeden der Winkel $AOG$ und $HOB$ aber halb so groß mit entgegengesetztem Vorzeichen.

Für $2a = 150^0$ ergibt sich

$$\sin \tfrac{1}{2} AOG = \tfrac{1}{18} \Big[\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{3\,(10 - \sqrt{3} + 4\sqrt{2 + \sqrt{3}})} \\ - \sqrt{3\,(10 - \sqrt{3} - 4\sqrt{2 + \sqrt{3}})}\Big],$$

oder auch

$$= \tfrac{1}{36} \Big[\sqrt{6} + \sqrt{2} + 2\sqrt{3\,(10 - \sqrt{3} + 2\,[\sqrt{6} + \sqrt{2}])} \\ - 2\sqrt{3\,(10 - \sqrt{3} - 2\,[\sqrt{6} + \sqrt{2}])}\Big].$$

Die Rechnung ergibt 0,4214232, während $\sin 25^0 = 0{,}4226183$ ist. Man findet $\sphericalangle \tfrac{1}{2} AOG = 24^0 \, 55' \, 28'', 1$, $AOG = 49^0 \, 50' \, 56'', 2$, $GOH = 50^0 \, 18' \, 7'', 6$, den relativen Fehler für $\sphericalangle GOH < \frac{1}{165}$.

Für $2a = 135^0$ ergibt sich

$$\sin \tfrac{1}{2} AOG = \tfrac{1}{18} \Big[\sqrt{2 + \sqrt{2}} + \sqrt{3\,(10 - \sqrt{2} + 4\sqrt{2 + \sqrt{2}})} \\ - \sqrt{3\,(10 - \sqrt{2} - 4\sqrt{2 + \sqrt{2}})}\Big] = 0{,}3820962,$$

während $\sin 22^0 \, 30' = 0{,}3826834$ ist. Man findet $\tfrac{1}{2} AOG = 22^0 \, 27' \, 48'', 9$, $\sphericalangle AOG = 44^0 \, 55' \, 37'', 8$, $\sphericalangle GOH = 45^0 \, 8' \, 44'', 4$ und den relativen Fehler für $GOH < \frac{1}{308}$.

Für $2a = 120^0$ ist

$\sin \tfrac{1}{2} AOG = \tfrac{1}{18} \Big[\sqrt{3} + \sqrt{3\,(9 + 4\sqrt{3})} - \sqrt{3\,(9 - 4\sqrt{3})}\Big] = 0{,}3417569 \ldots$ $(\sin 20^0 = 0{,}3420201) \ldots$ $\sphericalangle AOG = 39^0 \, 58' \, 4'', 42$, $\sphericalangle GOH = 40^0 \, 3' \, 51'', 16$ und der relative Fehler für $\sphericalangle GOH < \frac{1}{624}$.

Für $2a = 108^0$ ist

$$\sin \tfrac{1}{2} AOG = \tfrac{1}{36} \Big[\sqrt{5} + 1 + \sqrt{6\,(25 + 3\sqrt{5})} - \sqrt{6\,(17 - 5\sqrt{5})}\Big]$$

$= 0{,}3088892 \ldots$ $\left(\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = 0{,}3090170\right) \ldots$ $\sphericalangle AOG = 35^0 \, 59' \, 4'', 56$, $\sphericalangle GOH = 36^0 \, 1' \, 50'', 88$ und der relative Fehler für $GOH < \frac{1}{1168}$.

Für $2a = 90^0$ ist

$\sin \tfrac{1}{2} AOG = \tfrac{1}{18} \Big[\sqrt{2} + \sqrt{6\,(5 + 2\sqrt{2})} - \sqrt{6\,(5 - 2\sqrt{2})}\Big] = 0{,}2587828 \ldots$ $(\sin 15^0 = 0{,}2588190) \ldots$ $\sphericalangle AOG = 29^0 \, 59' \, 44'', 5$, $\sphericalangle GOH = 30^0 \, 0' \, 31''$, relativer Fehler für $\sphericalangle GOH < \frac{1}{3484}$.

Für $2a = 60^0$ ist

$\sin \tfrac{1}{2} AOG = \tfrac{1}{18} [1 + 3\sqrt{5} - \sqrt{21}] = 0{,}1736460 \ldots (\sin 10^0 = 0{,}1736482) \ldots$ $\sphericalangle AOG = 19^0 \, 59' \, 59'', 1$, $\sphericalangle GOH = 20^0 \, 0' \, 1'', 8$, relativer Fehler für $\sphericalangle GOH \; \frac{1}{10000}$.

Für $2a = 45^0$ ist

$$\sin \tfrac{1}{2} AOG = \tfrac{1}{18} \Big[\sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{3\,(10 + \sqrt{2} + 4\sqrt{2 - \sqrt{2}})}$$

$- \sqrt{3\,(10 + \sqrt{2} - 4\sqrt{2 - \sqrt{2}})}\Big] = 0{,}1305259 \ldots (\sin 7^0 \, 30' = 0{,}1305262) \ldots$

Für $2a = 36^0$ ist

$$\sin \tfrac{1}{2} AOG = \tfrac{1}{36} \left[\sqrt{5} - 1 + \sqrt{6(17 + 5\sqrt{5})} - \sqrt{6(25 - 3\sqrt{5})}\right]$$

$= 0{,}1045284 \ldots$ ($\sin 6^0 = 0{,}1045285$).

Für $2a = 30^0$ ist

$$\sin \tfrac{1}{2} AOG = \tfrac{1}{18} \left[\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{3(10 + \sqrt{3} + 4\sqrt{2 - \sqrt{3}})}\right.$$
$$\left. - \sqrt{3(10 + \sqrt{3} - 4\sqrt{2 - \sqrt{3}})}\right]$$

oder auch

$$= \tfrac{1}{36} \left[\sqrt{6} + \sqrt{2} + 2\sqrt{3(10 + \sqrt{3} + 2[\sqrt{6} - \sqrt{2}])}\right.$$
$$\left. - 2\sqrt{3(10 + \sqrt{3} - 2[\sqrt{6} - \sqrt{2}])}\right]$$
$$= 0{,}0871557 \;(= \sin 5^0).$$

Für $180^0 > 2a > 90^0$ würde man den Fehler sehr herabdrücken, wenn man die annähernde Dreiteilung an $180^0 - 2a$ ausführen und den gefundenen $\sphericalangle$ zu $60^0$ ergänzen würde.

An Winkel $> 180^0$ hat DÜRER offenbar bei seiner Dreiteilung nicht gedacht; auch für solche $\sphericalangle\sphericalangle$ kann man stets auf $\sphericalangle\sphericalangle < 90^0$ zurückgehen, auf dem eben angegebenen Wege.

STAIGMÜLLER a. a. O. meint, die Behandlung, welche KÄSTNER[1]) der DÜRERschen Trisektion eines Kreisbogens angedeihen lasse, sei infolge ihrer großen Ungenauigkeit für uns wertlos.

Doch liegt die Ungenauigkeit nicht in KÄSTNERs Methode begründet, sondern beruht auf Rechenfehlern und Versehen.

KÄSTNER nennt den gegebenen Bogen $v$, die zugehörige Sehne $b$, den Bogen $EF$ unserer Figur $2w$; er findet $\sin w = \frac{1}{6} b$ und die Sehne $AE$ unserer Figur $=$ Sehne $(\frac{1}{2} v - w)$, endlich Sehne $AG$ unserer Figur

$$= \tfrac{1}{3}\left[\tfrac{1}{3} \text{ Sehne } v + 2 \times \text{Sehne}\,(\tfrac{1}{2} v - w)\right].$$

Als erstes Beispiel setzt er (a. a. O. S. 244) $v = 60^0$, findet $b = 1$ und $\sin w = \frac{1}{6}$, $\log \sin w = 9{,}2218487 - 10$, $w = 9^0\, 35'\, 38''$, $\frac{1}{2} v - w = 20^0\, 24'\, 22''$, $\frac{1}{2}(\frac{1}{2} v - w) = 10^0\, 12'\, 11''$; dann rechnet er:

$$\begin{array}{rl}
\log \sin 10^0\, 12'\, 10'' = & 0{,}2482981 - 1 \\
\log 2 = & 0{,}3010300 \\
\hline
\log \text{Sehne}\,(\frac{1}{2} v - w) = & 0{,}5493281 - 1 \\
\text{Sehne}\,(\frac{1}{2} v - w) = & 0{,}354365 \\
2 \times \text{Sehne}\,(\frac{1}{2} v - w) = & 0{,}708730 \\
\frac{1}{3}\, \text{Sehne}\, v = & 0{,}333333 \\
\hline
& 1{,}141063
\end{array}$$

davon $\frac{1}{3}$ gibt $0{,}380354$ usw.

---

1) A. G. KÄSTNER, *Geometrische Abhandlungen.* I (Der math. Anfangsgründe I. Theil III. Abth.), Göttingen 1790, S. 241 ff.

Ich will nicht davon reden, daß KÄSTNER den $\sphericalangle w$ nicht sehr genau findet, daß er log sin $10^0\ 12'\ 10''$ statt log sin $10^0\ 12'\ 11''$ berechnet — aber in Zeile 4 findet er Sehne $(\frac{1}{2}v - w) = 0{,}354365$ statt $= 0{,}354265$ und in Zeile 7 als Summe der in Zeile 5 und 6 stehenden Zahlen 1,141063 statt 1,042063. Werden alle diese Fehler berichtigt, so ergibt sich als diese Summe 1,0418761, als $\frac{1}{3}$ dieser Summe 0,3472920, in Übereinstimmung mit dem oben von mir gefundenen Werte $(0{,}1736460 = \frac{1}{2} \,.\, 0{,}3472920)$.

In seinem zweiten Beispiele (a. a. O. S. 245), $v = 180^0$, findet KÄSTNER $\sphericalangle AOG = 59^0\ 28'\ 24''$, also leidlich genau. In seinem dritten Beispiele (S. 246), $v = 90^0$, findet er sin $\frac{1}{2}AOG = 0{,}2588190$; $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}v - w)$ hat er richtig noch $= 15^0\ 41'\ \frac{1}{2}''$, hätte daher für Sehne $(\frac{1}{2}v - w) = 2 \sin 15^0\ 41'\ \frac{1}{2}''$ 0,5406408 finden müssen — er findet aber 0,5406454 —, und für sin $\frac{1}{2}AOG$ 0,2587825, nicht 0,2587810.

KÄSTNER schreibt a. a. O. auf S. 247 unter 20): Für $v < 90^0$ gab die Regel zu viel, für $v > 90^0$ zu wenig. Ob das allemal so ist, und sie um $90^0$ herum der Wahrheit nahe kommt, das mühsam untersuchen, wäre: sich mit der Theorie eines Irrtums beschäftigen.

Dieser nach KÄSTNERS Ansicht unnützen Mühe mich unterzogen zu haben muß ich mich schuldig bekennen.

# Der Briefwechsel zwischen Leonhard Euler und Daniel Bernoulli.

Von G. Eneström in Stockholm.

Im Jahre 1843 veröffentlichte P. H. Fuss[1]) vollständig oder im Auszuge 57 Briefe von Daniel Bernoulli an Leonhard Euler und noch dazu eine von N. Fuss verfertigte französische Übersetzung eines verlorenen Briefes aus diesem Briefwechsel. Die entsprechenden Briefe von Euler scheinen zum größten Teil verloren gegangen zu sein, und meines Wissens sind nur vier derselben aufbewahrt worden; sie finden sich in der Herzoglichen Bibliothek in Gotha, und sind bisher nicht zum Abdruck gebracht. Es ist wohl kaum zu hoffen, daß einige der übrigen Briefe wiedergefunden werden, aber jedenfalls kann es von Interesse sein, ein Verzeichnis des Briefwechsels zwischen Euler und Daniel Bernoulli zu haben. Ich habe mir daher vorgenommen ein solches Verzeichnis, wesentlich auf Grund der Fussschen Ausgabe, anzufertigen und teile es hier unten mit. Das Zeichen * bedeutet, daß der betreffende Brief verloren ist. In den meisten Fällen gibt Daniel Bernoulli nicht das Datum des von ihm zitierten Eulerschen Briefes an, zuweilen ist es nicht möglich zu entscheiden, ob seine Worte wirklich auf einen Brief seines berühmten Freundes und Landsmannes hinweisen.

*Daniel Bernoulli an Euler 1726.

Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem zweiten Brief aus dem Jahre 1726 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 409).

Daniel Bernoulli an Euler 1726.

Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 409—410. — Französisch.

*Daniel Bernoulli an Euler 22. September 1733.*

Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 411—414.

---

1) P. H. Fuss, *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle* (St. Pétersbourg 1843), II S. 409—655.

2) Cod. chart. B. 689—690. Anscheinend enthält die Handschrift 5 Briefe von Euler an Daniel Bernoulli, aber der vierte von diesen (vom 24. Mai 1764 datiert) ist in Wirklichkeit an Johann III Bernoulli adressiert, freilich um dem Daniel Bernoulli mitgeteilt zu werden.

# Der Briefwechsel zwischen Leonhard Euler und Daniel Bernoulli.

Von G. Eneström in Stockholm.

Im Jahre 1843 veröffentlichte P. H. Fuss[1]) vollständig oder im Auszuge 57 Briefe von Daniel Bernoulli an Leonhard Euler und noch dazu eine von N. Fuss verfertigte französische Übersetzung eines verlorenen Briefes aus diesem Briefwechsel. Die entsprechenden Briefe von Euler scheinen zum größten Teil verloren gegangen zu sein, und meines Wissens sind nur vier derselben aufbewahrt worden; sie finden sich in der Herzoglichen Bibliothek in Gotha, und sind bisher nicht zum Abdruck gebracht. Es ist wohl kaum zu hoffen, daß einige der übrigen Briefe wiedergefunden werden, aber jedenfalls kann es von Interesse sein, ein Verzeichnis des Briefwechsels zwischen Euler und Daniel Bernoulli zu haben. Ich habe mir daher vorgenommen ein solches Verzeichnis, wesentlich auf Grund der Fussschen Ausgabe, anzufertigen und teile es hier unten mit. Das Zeichen * bedeutet, daß der betreffende Brief verloren ist. In den meisten Fällen gibt Daniel Bernoulli nicht das Datum des von ihm zitierten Eulerschen Briefes an, zuweilen ist es nicht möglich zu entscheiden, ob seine Worte wirklich auf einen Brief seines berühmten Freundes und Landsmannes hinweisen.

*Daniel Bernoulli an Euler 1726.

Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem zweiten Brief aus dem Jahre 1726 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 409).

Daniel Bernoulli an Euler 1726.

Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 409—410. — Französisch.

*Daniel Bernoulli an Euler 22. September 1733.*

Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 411—414.

---

1) P. H. Fuss, *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle* (St. Pétersbourg 1843), II S. 409—655.

2) Cod. chart. B. 689—690. Anscheinend enthält die Handschrift 5 Briefe von Euler an Daniel Bernoulli, aber der vierte von diesen (vom 24. Mai 1764 datiert) ist in Wirklichkeit an Johann III Bernoulli adressiert, freilich um dem Daniel Bernoulli mitgeteilt zu werden.

*Euler an Daniel Bernoulli Juni (?) 1738.
Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Brief vom 9. August 1738 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 449).

Daniel Bernoulli an Euler 9. August 1738.
Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, 449–452.

*Euler an Daniel Bernoulli 23. Dezember 1738.
Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe vom 7. März 1739 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 453); vgl. Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, S 24.

*Daniel Bernoulli an Euler 7. März 1739.
Original verloren. Eine von N. Fuss verfertigte französische Übersetzung veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 453—457.

*Euler an Daniel Bernoulli März (?) 1740.
Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe vom 30. April 1740 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 459); vgl. Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, S. 53.

*Daniel Bernoulli an Euler 30. April 1740.*
Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 458—460.

**Euler an Daniel Bernoulli 15. September 1740.**
Original in der Herzoglichen Bibliothek in Gotha.

*Daniel Bernoulli an Euler 5. November 1740.*
Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 461—465.

*Euler an Daniel Bernoulli Dezember (?) 1740.
Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe vom 28. Januar 1741 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 467).

Daniel Bernoulli an Euler 28. Januar 1741.
Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 467—472.

*Euler an Daniel Bernoulli August (?) 1741.
Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe vom 20. September 1741 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 473).

Daniel Bernoulli an Euler 20. September 1741.
Veröffentlicht vom Fuss, a. a. O. II, S. 473—478.

*Euler an Daniel Bernoulli Dezember (?) 1741.
Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe vom 20. Januar 1742 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 479).

Daniel Bernoulli an Euler 20. Januar 1742.
Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 479—483.

*Euler an Daniel Bernoulli Februar 1742.
Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe vom 7. März 1742 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 484).

Daniel Bernoulli an Euler 7. März 1742.
Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 484–489.

*Euler an Daniel Bernoulli März 1742.
Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe vom 17. April 1742 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 490).

Daniel Bernoulli an Euler 14. April 1742.
Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 490—494.

*Euler an Daniel Bernoulli Juni (?) 1742.
Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe vom 28. Juli 1742 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 497).

Daniel Bernoulli an Euler 28. Juli 1742.
Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 495—498.

*Euler an Daniel Bernoulli 1. September 1742.
Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe vom 20. Oktober 1742 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 499).

Daniel Bernoulli an Euler 20. Oktober 1742.
Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 499—507.

*Euler an Daniel Bernoulli November 1742.
Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe vom 12. Dezember 1742 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 508—509).

Daniel Bernoulli an Euler 12. Dezember 1742.
Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 508—514.

*Euler an Daniel Bernoulli Januar 1743.
Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe vom 9. Februar 1743 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 515).

Daniel Bernoulli an Euler 9. Februar 1743.
Veröffentlicht von Fuss, a. a. O, II, S. 515—521.

*Euler an Daniel Bernoulli März (?) 1743.
Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe vom 23. April 1743 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 522).

Daniel Bernoulli an Euler 23. April 1743.
Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 522–528.

*Euler an Daniel Bernoulli August (?) 1743.
Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe vom 4. September 1743 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 529, 533).

Daniel Bernoulli an Euler 4. September 1743.
Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 529–537.

*Euler an Daniel Bernoulli November (?) 1743.
Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe vom 25. Dezember 1743 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 539.

Daniel Bernoulli an Euler 25. Dezember 1743.
Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 539—547.

*Euler an Daniel Bernoulli Januar 1744.
Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe vom 4. Februar 1744 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 548—549).

Daniel Bernoulli an Euler 4. Februar 1744.
Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 548–552.

*Euler an Daniel Bernoulli Februar (?) 1744.
Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe vom April oder Mai 1744 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 553).

Daniel Bernoulli an Euler April oder Mai 1744.
Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 553—554.

*Euler an Daniel Bernoulli 28. März 1744.
Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe vom 13. Juni 1744 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 555).

Daniel Bernoulli an Euler 13. Juni 1744.
Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 555–560.

*Euler an Daniel Bernoulli 4. Juli 1744.
Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe vom 29. August 1744 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 561).

*Euler an Daniel Bernoulli 21. Juli 1744.
Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe vom 29. August 1744 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 561).

Daniel Bernoulli an Euler 29. August 1744.
Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 561–567.

*Euler an Daniel Bernoulli Ende 1744 oder Anfang 1745.
Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe vom Anfang 1745 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 569).

Daniel Bernoulli an Euler Anfang 1745.
Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 568–572.

*Euler an Daniel Bernoulli Februar (?) 1745.
Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe vom 20. März 1745 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 573, 575).

Daniel Bernoulli an Euler 20. März 1745.
Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 573—575.

*Euler an Daniel Bernoulli Juni (?) 1745.
Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe vom 7. Juli 1745 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 578).

Daniel Bernoulli an Euler 7. Juli 1745.
Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 576—578.

*Euler an Daniel Bernoulli August (?) 1745.
Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe von 7. September 1745 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 583, 585).

Daniel Belnoulli an Euler 7. September 1745.
Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 579–586.

*Euler an Daniel Bernoulli November (?) 1745.
Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe vom 4. Dezember 1745 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 588).

Daniel Bernoulli an Euler 4. Dezember 1745.
Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 587—591.

*Euler an Daniel Bernoulli Dezember 1746.
Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe vom 4. Januar 1746 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 592, 596).

Daniel Bernoulli an Euler 4. Januar 1746.
Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 592–596.

*Euler an Daniel Bernoulli Februar (?) 1746.
Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe vom 19. März 1746 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 597).

Daniel Bernoulli an Euler 19. März 1746.
Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 597—600. — Französisch.

*Euler an Daniel Bernoulli Mai (?) 1746.
Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe vom 29. Juni 1746 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 601).

Daniel Bernoulli an Euler 29. Juni 1746.
Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 601–606.

*Euler an Daniel Bernoulli Juni 1746.
Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe vom 9. Juli 1746 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 607).

Daniel Bernoulli an Euler 9. Juli 1746.
Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 607—611.

?*Euler an Daniel Bernoulli Oktober (?) 1746.
Möglicherweise ist der Brief des Daniel Bernoulli vom 3. November 1746 ein Antwortschreiben auf einen nach dem 9. Juli geschriebenen Brief von Euler.

Daniel Bernoulli an Euler 3. November 1746.
Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 612—615.

Daniel Bernoulli an Euler 21. Januar 1747.
Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 616—618.

*Euler an Daniel Bernoulli März (?) 1747.
Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe vom 29. April 1747 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 619).

Daniel Bernoulli an Euler 29. April 1747.
Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 619—621.

*Euler an Daniel Bernoulli Juli (?) 1747.
Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe vom 16. August 1747 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 622, 625).

Daniel Bernoulli an Euler 16. August 1747.
Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 622—625.

*Euler an Daniel Bernoulli September 1747.

Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe vom 22. September 1747 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 626, 627).

Daniel Bernoulli an Euler 22. September 1747.

Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 626–629.

*Euler an Daniel Bernoulli Februar (?) 1748.

Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe vom 9. März 1748 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 630).

Daniel Bernoulli an Euler 9. März 1748.

Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 630–631.

*Euler an Daniel Bernoulli April (?) 1748.

Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe vom 15. Mai 1748 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 632).

Daniel Bernoulli an Euler 15. Mai 1748.

Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 632—633.

*Euler an Daniel Bernoulli Juni (?) 1748.

Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe vom Juli (?) 1748 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 634).

Daniel Bernoulli an Euler Juli (?) 1748.

Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 634–637.

*Euler an Daniel Bernoulli August (?) 1748.

Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe vom September (?) 1748 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 638).

Daniel Bernoulli an Euler September (?) 1748.

Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 638–640.

*Euler an Daniel Bernoulli Ende 1748 oder Anfang 1749

Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Briefe von Anfang 1749 (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 641, 644).

Daniel Bernoulli an Euler Anfang 1749.

Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 641—644.

?*Euler an Daniel Bernoulli 1749.

Möglicherweise ist der Brief des Daniel Bernoulli vom 16. August 1749 ein Antwortschreiben auf einen von Euler etwa Mitte 1749 geschriebenen Brief.

Daniel Bernoulli an Euler 16. August 1749.

Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 645—647.

?*Euler an Daniel Bernoulli 1749.

Möglicherweise ist der Brief des Daniel Bernoulli vom 26. Januar 1750 ein Antwortschreiben auf einen von Euler nach dem 16. August 1749 geschriebenen Brief.

Daniel Bernoulli an Euler 26. Januar 1750.

Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 648—650.

Daniel Bernoulli an Euler 7. Oktober 1753.

Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 651—652. — Französisch.

*Euler an Daniel Bernoulli November (?) 1753.

Zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Brief vom Dezember 1753 (?) (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 653).

Daniel Bernoulli an Euler Dezember 1753 (?).

Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. II, S. 653—655. — Französisch. — Der undatierte Brief ist nach Fuss zwischen 1754 und 1766 geschrieben, aber er scheint mir vielmehr aus dem Ende des Jahres 1753 herzurühren, da sein Inhalt sich sehr nahe an den Inhalt des Briefes vom 7. Oktober 1753 anschließt.

Euler an Daniel Bernoulli 22. November 1767.

Original in der Herzoglichen Bibliothek in Gotha. — Französisch. — Natürlich nicht von Euler selbst geschrieben, da dieser damals schon vollständig blind war.

Aus diesem Verzeichnisse geht hervor, daß Euler wenigstens 49 Briefe an Daniel Bernoulli geschrieben hat und, wie schon bemerkt, sind nur vier derselben, soweit jetzt bekannt ist, aufbewahrt. Am Ende des 18. Jahrhunderts befanden sich die Eulerschen Briefe im Besitze des Johann iii Bernoulli[1]) aber ob die Sammlung schon damals nur aus vier Briefen bestand, weiß man nicht.

Im folgenden bringe ich zum Abdruck drei dieser Briefe, nämlich die zwei aus dem Jahre 1734 und den Brief aus dem Jahre 1740; diesem Briefe sind im Verzeichnisse durch fette Schriften hervorgehoben. Der vierte Brief, der aus dem Jahre 1767 herrührt, ist sehr kurz und hat gar kein mathematisches Interesse. Um das Verständnis der drei Eulerschen Briefe zu erleichtern, drucke ich hier noch die vier Schreiben des Daniel Bernoulli ab, die mit jenen im nächsten Zusammenhang stehen, nämlich vom 22. September 1733, 18. Dezember 1734, 30. April 1740 und 5. November 1740; diese Schreiben sind im Verzeichnisse durch kursive Schriften hervorgehoben. Noch dazu bringe ich am Anfange jedes Briefes ein kurzes Inhaltsverzeichnis und als Fußnoten erläuternde Anmerkungen.

### **Daniel Bernoulli** an **Euler** 22. September 1733.

*Inhalt.* Über die Reise der Brüder Daniel und Johann ii Bernoulli und besonders über deren Aufenthalt in Paris. — Über zwei mechanische Probleme. — Über die Bestimmung der Geschwindigkeit eines Schiffes und über die Ursache, warum das Schiff geschwinder mit halbem als mit vollem Winde gehen kann. — Universitätsnachrichten aus Basel.

Paris d. 22. Septbr. 1733.

Hochedelgeborner
Hochzuverehrender Herr Professor.

Ew. werden ohne Zweifel unsere glückliche Ankunft in Paris schon vernommen haben: Es hat sich auch mein Bruder die Ehre gegeben Ihnen einen Brief aus Amsterdam zu adressiren durch den Hrn. Prof. Gross. Unsere Landreise[2]) ist allezeit sehr glücklich gewesen und habe viel dadurch profitirt, worüber aus Basel mehrern Rapport abstatten werde. In Paris sind viele gute Mathematici und Physici, so dass es unserer Akademie in Petersburg lieb und nützlich seyn wird mit hiesiger Akademie in einer genauen Verbündniss zu stehen, worüber hoffentlich in Petersburg in einem neuen Reglement die nöthigen Verfassungen werden gemacht werden, indem dergleichen Correspondenten die Seele einer wohleingerichteten Akademie sind. Sollte ich von dem Hrn. Präsidenten im Stand befunden

1) Siehe R. Wolf, *Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz* 3 (Zürich 1860), S. 195—197.

2) Über diese Reise siehe Wolf, a. a. O. 3, S. 160—167.

werden hierzu etwas beitragen zu können, so werde ich solches mit vielem Vergnügen thun. Es sind auch allhier einige Subjecta, welche vielleicht nicht refusiren würden sich bei unserer Akademie zu engagiren. Das problema de invenienda tautochrona in medio resistente in ratione quadrata velocitatum ist allhier von einigen solvirt worden: Mein Vater hat auch eine Solution in den hiesigen Mémoires hiervon drucken lassen.[1]) Man kann hierdurch sehen wie präjudicirlich es unsern Commentariis ist, so langsam gedruckt zu werden, indem wir allzeit als die alte Fastnacht nach den andern kommen werden. Als ich dem Hrn. Clairaut redete von Ew. solutione isoperimetricorum, antwortete er gleich, solches problema müsse nicht schwerer seyn, als das problema ordinarium, indem man allzeit numerum elementorum multiplizieren könne pro numero conditionum: woraus zu sehen, dass dergleichen problemata den hiesigen Mathematicis nicht schwer fallen. Aber in mechanicis ist man hier bei weitem nicht so weit gekommen. Unterwegs habe ich einige meditationes mathematicas gemacht de determinandis utique crassitiebus laminae muro horizontaliter infixae, ita ut ubique aequaliter sit rupturae obnoxia lamina, die lamina mag proprio pondere agiren oder noch von einem superincumbente pondere utcunque geladen seyn. Man kann über dieses Thema viele curiose Sachen annotieren, worüber ein sonderbares mémoire abfassen werde und solches unserer Akademie überschicken, sobald ich mich in meinem Vaterland werde arrangirt haben. Inzwischen zweifle ich nicht, es werden Ew. das problema auch leicht solviren. Ich habe auch einige artige observationes gemacht de foliis sive aequaliter sive inaequaliter crassis sibi invicem superimponendis ut supremum folium ab infimo maxime reclinet, als in beigesetzter Figur (Fig. 1). Wenn man nun dergleichen Quadersteine sollte, als in beigesetzter Figur legen, und zugleich in locis, *a*, *a*, *a* etc. vincula ferrea aequalia, um allen casibus fortuitis zu occurriren, anlegen, wurde solches eine wunderliche Architectur machen. Man kann aber dieses zu andern Sachen gebrauchen. — Auf der See habe ich einige observationes gemacht und gemerkt dass meine angegebene Maschine de observantis astrorum altitudinibus einen guten Effect haben würde. Ich hab auch die velocitatem navis ex globo e filo suspenso et aquae submerso gar genau gemessen, und ist meine Methode mit der ordinären Methode

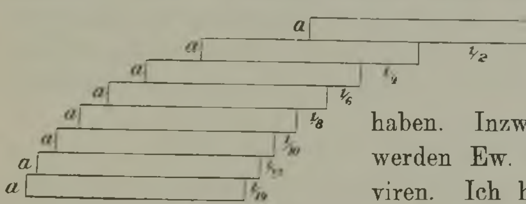


Fig. 1.

1) Siehe Johann Bernoulli, *Méthode pour trouver les tautochrones dans les milieux résistans comme le quarré des vitesses;* Mém. de l'acad. d. sc. de Paris 1730, S. 78—101 [= *Opera omnia* III, S. 173—197].

allzeit übereingekommen: diese aber ist weit operoser und hat nicht den Vortheil, dass man die velocitatem navis sine ulla operatione gleichsam als an einer Uhr sehen kann, welches dazu dienen würde, dass man positionem velorum maxime favorabilem gar leicht abnehmen könnte. Allhier in Paris hab ich gehört, dass auch der Herr Poleni diese Methode inveniendi navis velocitatem angegeben habe in seiner dissertatione, so das praemium erhalten. Ich habe auch gesehen die wahre Ursach, warum das Schiff caeteris paribus geschwinder geht mit halbem Winde, als mit vollem Winde. Die Ursach ist gar nicht, wie man bishero geglaubt, dass man alle Segel mit halbem Winde employiren könne; denn die obliquitas velorum derogirt mehr als man a numero velorum gewinnt, welches gewiss ist. Die wahre Ursach ist, dass mit einem vent en pouppe en faisant force de voile, das Schiff schier dimidiam velocitatem venti, oder auf das wenigste tertiam ejus partem erlangt. Weil nun die ratio velocitatum notabel ist, so ist velocitas respectiva venti bei einem halbem Winde viel größer als bei vollem Winde, und kann also in dem ersten Falle das Schiff geschwinder getrieben werden, als in dem andern. Aber die Zeit läßt mir nicht zu, von dergleichen Materien weitläufiger zu seyn. Aus Basel schreibt man mir, dass für die professionem Rhetorices et Moralis nächstens soll disputirt werden; hab aber nicht haben wollen, dass man mich in meinem Namen dafür angebe: vielleicht wird mein Bruder einen Candidatus abgeben. Der Professor Anatomiae soll nächstens gemacht werden. Libera nos Domine! Des Hrn. Hermann[1]) Tod hat mich sehr geschmerzt ....

## Euler an Daniel Bernoulli 18. Februar 1734.

*Inhalt.* Geldangelegenheiten. — Über die zwei mechanischen Probleme, die im Briefe des Daniel Bernoulli erwähnt wurden. — Über die Ursache, warum das Schiff geschwinder mit halbem als mit vollem Winde gehen kann. — Die Riccatische Differentialgleichung. — Über eine Kurve, deren Ordinaten den Bogen einer gewissen Folge von Ellipsen gleich sind. — Über eine unrichtige Reihe für log $x$. — Über die tautochrone Kurve im resistenten Medium. — Akademienachrichten.

Hochedelgebohrner

Hochgeehrtester Herr.

Ew. Hochedelgeb. werden ohne Zweifel mein letzteres Schreiben nebst dem Wexel a 550 R. Holl. von der Fr. Bruknerin ingleichem den Sec. Wexel von meinem Vater erhalten haben. Das Contoir, daraus mir denselben der H. Stehelin verschaffet, soll auch so gut stehen, daß im geringsten nicht ein Protest zu befürchten.

Da ich in meinem letzteren Briefe nicht Zeit genug hatte Ew. Hochedelgeb. von Scientificis etwas zu überschreiben, und auf Deroselben unter-

1) Jakob Hermann starb in Basel am 11. Juli 1733 (siehe über ihn Wolf, a. a. O. 4, Zürich 1862, S. 91).

wegs gemachte Observationen zu antworten, als berichte hiemit zugleich, daß das Problema laminarum sibi superimponendarum, ut maximam habeant inclinationem bald sowohl von dem H. Justiz Rath GOLDBACH als mir ist solvirt worden. Das andere Problema die Form eines Balkens betreffend, welcher er mag beladen seyn oder nicht, allenthalben zum brechen gleich geneigt sein soll, erfordert eine Theorie des Brechens, dergleichen Dero verehrl. H. Oncle gegeben, und wie mich deucht eben das Problema schon tractirt.[1]) Die völlige Ausführung aber, und Application ist freylich so wohl das schönste als schwehrste in dieser Materie, und erwarte deshalben mit Verlangen Ew. Hochedelgeb. darüber versprochene Dissertation

Deroselben Explication, warum ein Schiff mit halbem Winde geschwinder fortgehe als mit gantzem, hat jedermann über die Maßen wohl gefallen. Denn da der stärkste Wind in einer Secunde kaum 20 Schue gehet, so ist freylich die Geschwindigkeit des Schiffes in Ansehung desselben sehr considerabel. Allein der Mangel bei vollem Wind deucht mich doch noch größer zu seyn, als Ew. Hochedelgeb. scheinen in Betrachtung zu ziehen. Denn in solchem Falle kan man nicht nur nicht so viel Segel ausspannen als bei halbem, sondern auch von den ausgespannten hat kaum die Helfte einige Wirkung. Daß die Segel des vorderen Mastes umsonst seyen, wie auch ein Theil derer des mittleren ist unstreitig. Denn ich habe oft bei starkem vollem Winde das Fähnlein des vorderen Mastes hinderwerts gekehrt gesehen. Woraus erhellet, daß die vorderen Segel den Lauf des Schiffes sogar wegen der Resistenz verhindert haben.

In den Actis lips. M. Aug. des vorigen Jahres wird man schon in Basel meine Construction der RICCATIanischen Aequation gesehen haben,[2]) ich möchte darüber mit großem Verlangen Dero Hochgeehrtesten Herrn Vatters und Herrn Vetters Urtheil vernehmen. Ew. Hochedelgeb. wissen, wie indirecte ich auf dieselbe gekommen. Wann man eine directe Methode sollte finden können, so bin ich versichert, daß dadurch die Analysis ungemein würde erweitert werden, und daraus gleichsam ein neuer Calculus entstehen.

Mann unendlich viel Ellipses auf einem Axe conjug. $b$ gesetzet werden, und daraus eine neue curva formirt wird, davon die Abscissae den Axibus transversis $r$ gleichgenommen, die Applicatae aber den Peripheriis dieser

1) Siehe JACOB BERNOULLI, *Curvatura laminae elasticae;* Acta Erud. 1694, S. 262—276 [= *Opera* I, S. 576—600]. *Véritable hypothèse de la resistance des solides, avec la démonstration de la courbure des corps qui font ressort;* Mém. de l'acad. d. sc. de Paris 1705, S. 176—186 [= *Opera* II, S. 976—989].

2) Siehe L. EULER, *Constructio aequationum quarundam differentialium quae indeterminatarum separationem non admittunt;* Nova Acta Erud. 1733, S. 369—373.

Ellipsium $u$ gleichgesetzet werden, so wird die Natur dieser Curvae durch nachfolgende Aequation exprimiert werden;[1])

$$ddu = \frac{du\,dr}{r} + \frac{u\,dr^2}{r^2 - b^2},$$

worauf ich gleichfalls nicht anderst als indirecte gekommen.

Ich vermeinte neulich, daß nachfolgende Series

$$\frac{m-1}{9} - \frac{(m-1)(m-10)}{990} + \frac{(m-1)(m-10)(m-100)}{999000}$$
$$- \frac{(m-1)(m-10)(m-100)(m-1000)}{9999000000} + \text{etc.}$$

(alwo die Anzahl der Nullen im Numeratore und Denominatore einander gleich sind, im übrigen ist die Lex klar) den Logarithmum communen ipsius $m$ exprimere, dann ist $m = 1$, so ist die gantze Series $= 0$, ist $m = 10$ so kommt 1, ist $m = 100$, kommt 2, und so fortan. Als ich nun daraus den Log. 9 finden wollte, bekam ich eine Zahl welche weit zu klein war, ohngeacht diese Series sehr stark convergirte.

Meine Dissertation *De tautochrona in fluidis* wird nächstens mit den 4t. Tomo unserer Comment. gedrucket werden.[2]) Dero Herren Vatters Methode und einiger Mathematicorum von Paris, welche diese Curvam gleichfalls gefunden, bin ich sehr begierig zu sehen, ob sie von meiner Methode different sind, indem mich kaum möglich deucht, auf eine andere Art dazu zu kommen; daß diese Methoden aber mit meiner völlig übereinkommen müßten, glaube ich deswegen, weil keiner für eine andere Hypothesin resistentiae die tautochronam gefunden. Wann diese Herren von Paris so weit gekommen, möchte ich gern vernehmen, ob sie auch dieses Problema, datae curvae aliam adjungere ad tautochronismum producendum aptam,[3]) welches Ew. Hochedelgeb. proponirt, nur in hypothesi Vacui solviren werden. In den Conferenzen lese ich anjetzo eine Dissertation vor *De brachystochronis in medio quocunque resistente*, darinn der verehrl. H. Prof. Herman sich übersehen.[4]) Ich habe dabey diese merkwürdige

1) Vgl. die Abhandlung von Euler, *Solutio problematum rectificationem ellipsium requirentium;* Comment. acad. sc. Petrop. 8, 1736 [gedruckt 1741], S. 86—98 (speziell Problem 1).

2) Siehe die Abhandlung von Euler, *Curva tautochrona in fluido resistentiam faciente secundum quadrata celeritatum;* Comment. acad. sc. Petrop. 4, 1729 [gedruckt 1735], S. 67—89 (vgl. Bibl. Mathem. $4_3$, 1903, S. 373).

3) Vgl. hierüber den Brief von Euler an Johann Bernoulli vom 21. Oktober 1729 (Biblioth. Mathem. $4_3$, 1903, S. 372—373), sowie die dort zitierten Abhandlungen von Euler.

4) Siehe J. Hermann, *Theoria generalis motuum;* Comment. acad. sc. Petrop. 2, 1727 [gedruckt 1729], S. 139—173 (speziell art. 26). L. Euler, *De linea celerrimi descensus in medio quocunque resistente;* Comment. acad. sc. Petrop. 7, 1734/1735, [gedruckt 1740], S. 135—149.

Observation gemacht, daß die Brachystochrona in fluido, oder wann die Resistenz den quadratis celeritatum proportional ist, mit der tautochrona in eadem hypothesi völlig übereinkomme. Wann nun diese Übereinstimmung allzeit eintreffen sollte, so würde das Problema Tautochronarum sehr leicht zu solviren werden. Dann sowohl in vacuo als medio quocunque resistente ist allzeit diese Curva die Brachystochrona, da die Pressio corporis in curvam noch so groß ist als die Vis centrifuga corporis, oder da die zwey vires prementes curvam sc. vis normalis et centrifuga einander gleich sind. Aus diesem unvergleichlichen Theoremate ist es derohalben sehr leicht die Brachystochronam in quacunque hypothesi zu finden.

Von hiesigen Neuigkeiten weiß für dießmal nichts merkwürdigeres zu berichten, als daß in Abwesenheit des H. Presidenten die Direction von den Herren Goldbach, Schumacher und Bayer geführet wird. Der H. Meder ist Secretarius sowohl bey den Conferenzen als auf der Canzley. Ich habe, seit dem ich mich verheyrathet, ein eignes Hauß, so in der 10 Linie gelegen, und über die maßen wohl conditionirt ist, gekauft.

An Ew. Hochedelgeb. Herrn Vatter und gantze hochzuehrende Familie bitte gehorsamst meine ergebenste Empfehlung zu machen, womit verbleibe mit schuldigster Hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen

Meines Hochgeehrtesten Herren Professors

St. Petersburg, d. 16t. Febr. 1734.

gehorsamster und verbundenster

Leonhard Euler.

## Euler an Daniel Bernoulli November (?) 1734.

*Inhalt.* Über einen verloren gegangenen Brief des Daniel Bernoulli. — Über Daniel Bernoullis Wunsch, von der Petersburger Akademie der Wissenschaften eine Pension zu bekommen. — Akademienachrichten. — Die Hydrodynamik des Daniel Bernoulli und die Mechanik des Euler. — Ein verloren gegangenes Manuskript von Daniel Bernoulli. — Privatangelegenheiten. — Euler wünscht in Basel Doctor medicinae zu werden. — Zwei Probleme aus der Differentialgeometrie. — Die Bahn einer Stückkugel in der Luft zu bestimmen. — Politische Nachrichten.

Hochedelgebohrner

Hochgeehrtester Herr Profeßor.

Ew. Hochedelgeb. Antwort auf mein ersteres Schreiben habe richtig erhalten und hätte darauf vor einiger Zeit schon wieder geschrieben, wenn nicht auf mein zweytes Schreiben, welches der H. Schumacher mit einem Briefe an Ew. Hochedelgeb. begleitet, noch vorher eine Antwort erhalten wollen. Da ich aber anjetzo von dem H. Moulat[1]) nicht nur vernommen,

1) Vermutlich Friedrich Moula († 1783), der 1734 Adjunkt der Petersburger Akademie der Wissenschaften war (siehe Wolf, a. a. O. 3, S. 161—162.

daß gedachter Brief in Basel angekommen, sondern daß Dieselben auch schon vor geraumer Zeit geantwortet, so muß Dero Schreiben, indem ich nichts bekommen, zu meinem großen Verdruß verlohren gegangen seyn.

Ew. Hochedelgeb. Hoffnung zu der jährlichen Pension von 200 R. ist meiner Meinung nach gar nicht völlig verschwunden, sondern nur aufgeschoben wegen der Abwesenheit Unseres Herrn Präsidenten, als vor dessen Wiederkunft keine Sachen von einiger Wichtigkeit können ausgemachet werden. Inzwischen können Dieselben versichert seyn, daß zu einem Membro Honorario von der Mathematischen Class niemand anderes als Ew. Hochedelgeb. werde ersuchet werden. Wegen Deroselben Anforderungen habe mit großem Fleiße ein Memoriale an die Academische Direction aufgesetzet, und darauf nachfolgende Antwort erhalten, daß hierüber, ehe Ew. Hochedelgeb. wegen dem Lettre cacheté werden disponirt haben, keine Resolution ertheilet werden könne. Im übrigen würden diese Forderungen für sehr billich erkannt.

Was den Zustand der Academie betrifft, so scheinet insonderheit die Mathematische Class je mehr und mehr in Decadence zu kommen, indem auch der H. Kraft[1]) künftiges Jahr wegreisen wird; und man keine Anstalten macht, wiederum tüchtige membra zu erlangen. Es heißt, daß man solche Leute sehr leicht werde bekommen können, Ew. Hochedelgeb. werden aber sowohl als ich die Schwierigkeiten darinnen einsehen.

Der 4te Tomus unserer Commentarii ist schon lang zum Drucke reglirt worden, der Anfang aber ist dennoch noch nicht gemacht. Dero hinterlassene Bücher habe zusammen gepackt, und dem H. Stehelin übergeben, welcher dieselben nach Amsterdam zu schicken über sich genommen. Von den Bolognesischen Memoiren habe ich seit der Zeit kein Exemplar empfangen, und auch nicht erfahren, daß jemand anderes davon bekommen habe.

Was Dero Tractatum Hydrodynamicae betrifft, so habe deswegen gleichfalls mit dem Directorio gesprochen, von welchem deswegen an den H. Präsidenten wird geschrieben werden. Es sollte mir höchstens leid seyn, wenn die Sache einige Schwierigkeiten haben sollte.

Des H. Bayard Historia Edessena ist herausgekommen, und soll den Leuten als ein Tomus Comment. aufgedrungen werden, welches aber, wie ich glaube, nicht angehen wird; vielmehr möchte man dadurch eine Provision von Maculatur auf einige Zeit bekommen. Es wäre zu wünschen, daß an statt solcher Bücher Scientifica möchte gedrucket werden, als wovon man nicht nur mehr Profit sondern auch Ehre haben würde.

---

1) Georg Wolfgang Krafft (1701—1754), seit 1731 Professor der Physik an der Petersburger Akademie der Wissenschaften.

Von meiner *Mechanica* ist der erste Tomus auch ganz fertig, habe aber wenig Hoffnung, daß man denselben allhier drucken werde.[1])

Von der Piece, welche Ew. Hochedelgeb. an den H. Praesident geschickt, weiß kein Mensch nichts, noch von den Briefen, so dabei gewesen. Ew. Hochedelgeb. würden am besten thun, wenn Sie solche Sachen an mich ins künftige adressiren wollten, ich will dafür lieber das Postgelt bezahlen, als den Verlust derselben leiden.

Die Krankheit Dero Herren Vatters ist mir höchstens zu Herzen gegangen, und wünsche daß dieses Denselben wiedrum in gutem Zustande antreffen möchte, wozu ich aus der Leichen Predigt des H. Hermans um so viel größere Hoffnung habe, da in derselben des Herren Vatters Carmen von jedermann vor allen anderen ist bewundert worden, insonderheit aber von mir, der ich sowohl Desselben Sentiments als die Besslerische Gewohnheit kenne. Bey Verfertigung dieser Verse vermuthe ich, daß Er vollkommen gesund müße gewesen seyn. Demselben bitte gehorsamst meine unterthänige und dankbarste Empfehlung zu machen, und mich Deßelben Wohlgewogenheit auf das beste zu recommendiren.

Mein Schwager Nörbel hat mich sehr gebeten ihn Ew. Hochedelgeb. zu recommendiren damit er zu einem besseren Dienste gelangen möchte, er vermeinet meine Recommendation werde sehr kräftig seyn, welches ich aber nicht einmal verlange, wenn er es nicht wohl meritirt.

Der Herr Geheime Rath Baron von Munnich, welcher anjetzo Chef von dem Cadeten Corps ist, hat mir neulich Propositionen gemacht, in dem Cadeten Corps Lectionen zu halten und zugleich über die Informatores die Inspection zu haben, wofür ich außer der Academischen Gage noch eine jährliche Pension von 400 R. genießen soll. Welche Propositionen ich um so viel eher ohne Bedenken annehmen werde, da ich wegen der Abwesenheit des Herrn Praesidenten aufs zukünftige Jahr noch keine größere Besoldung hoffen kann. Bei der Academie ist sonsten keine Veränderung vorgegangen, als daß der H. Junker von Ihro Kaiserl. Majestaet immediate ist zum Professor ernannt worden mit Verdopplung seiner vorher gehabten Gage.

Da Ew. Hochedelgeb. nunmehr Professor Medicinae sind, so möchte ich gern mit der Zeit einmal, wenn es nicht allzuviel kosten sollte, in dieser Facultät Doctor werden, indem ich schon immatriculirt bin, und mich ins künftige etwas mehr auf dieses Studium appliciren werde.

---

1) Der erste Teil der Eulerschen *Mechanica sive motus scientia analytice exposita* (St. Petersburg 1736) war also schon 1734 im Manuskript fertig. Dieser Umstand erklärt, warum der zweite Teil in gewissen Fällen einen Fortschritt im Vergleich mit dem ersten Teil repräsentiert (vgl. Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, S. 319—321).

Seit der Zeit habe ich nachfolgende Problemata solvirt worüber ich gerne Deroselben nebst Dero Herren Vatters und anderer Mathematicorum Urtheil vernehmen möchte. Das erste ist eine Curvam zu finden, welche von unendlich viel Ellipsibus,[1]) welche auf einem Axe transverso stehen, gleiche Arcus abschneidet. Ingleichem von unendlich vielen Ellipsibus, welche einen Verticem und gleiche Axes conjugatos haben, gleiche Arcus abzuschneiden. Die Construction dieser curvarum ist per rectificationem ellipsium leicht, ich verlange aber eine aequationem vor diese curvas, welche so beschaffen seyn wird, daß man daraus zu keiner Construction gelangen kann, ohne meine Methode, dadurch ich auch die Aequationem Riccatianam construirt. Wann die curvae propositae similes sind als Parabolae, so hat die Solution keine Difficultät und ist dieses Problema schon im vorigen Seculo von Dero H. Vatter[2]) solvirt worden: wann die Curvae aber dissimiles sind, so würde die Solution, wann sie von meiner unterschieden wäre, in der Analyse ein größeres Licht geben.

Das zweyte Problema ist dieses:[3]) Invenire (Fig. 2) duas curvas $AM$, $AN$ algebraicas non rectificabiles sed quarum rectificatio a datâ quadratura pendeat; tales ut, ducta ad axem communem $AP$ quacunque ordinata orthogonali $MN$, summa arcuum $AM$ et $AN$ possit algebraice exprimi. Wann diese Condition nicht hinzu gethan würde, daß die beiden Arcus einerley abscissam $AP$ haben sollten, so folgete die Solution gleich aus den Formulis welche Dero Herr Vatter[4]) pro reducendis quadraturis ad rectificationes curvarum algebraicarum gegeben. Mit dieser Condition aber ist die Solution meiner Meinung nach sehr schwehr, und kan ich, obgleich meine Solution general ist, dennoch keine curvas simplices satisfacientes geben. Dieses Problema muß auch möglich seyn, daß man wann die eine curva $AM$ gegeben ist, die andere $AN$ finden soll, so daß $AM + AN$ rectificabel ist. Ich habe nur diesen Casum betrachtet, wann $AM$ eine Parabola ist, habe aber die andere Curvam nicht finden können

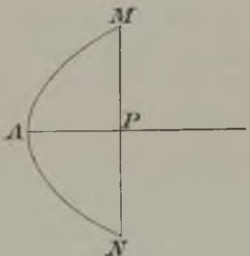


Fig. 2.

1) Vgl. die Abhandlung von Euler, *Solutio problematum rectificationem ellipsium requirentium;* Comment. acad. sc. Petrop. 8, 1836 [gedruckt 1741], S. 86—98 (speziell Problem 2).

2) Siehe Johann Bernoulli, *Solutio sex problematum fraternorum;* Acta Erud. 1698, S. 226—230, Problem IV, V [= *Opera omnia* I, S. 256—259].

3) Siehe hierüber den Brief von Euler an Johann Bernoulli vom 27. August 1737 (Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, S. 260—262), sowie die daselbst zitierten Abhandlungen.

4) Siehe Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, S. 260, Fußnote 3.

In Schreibung meiner Mechanic bin ich auf eine Aequation gefallen, welche quam proxime die Natur der projectoriae in Aëre exprimirt[1]) Als es sey $BNAMC$ (Fig. 3)[2]) die Via meiner Stückkugel, $A$ das punctum summum, $AD$ eine Verticallinie. $b$ sey die Höhe aus welcher die Celeritas in $A$ generirt wird, und $c$ die Höhe aus welcher diejenige Celeritas entspringt, mit welcher wann sich die Kugel bewegt, die Resistenz der Vi gravitatis gleich ist. $g$ ist zu 1 wie die Schwehre der Kugel in aëre, zu ihrer wahren Schwehre in vacuo. Wann nun gesetzt wird $AP = y$, $PM = x$, so wird die Natur der curvae $AMC$ q. pr. diese Aequation haben:

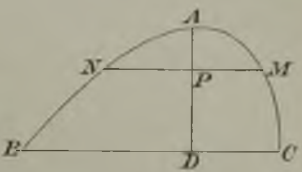


Fig. 3.

$$2by + gcx = gc^2\left(e^{\frac{x}{c}} - 1\right)$$

oder

$$x = c\,\mathrm{l}\,\frac{2by + gcx + gc^2}{gc^2}.$$

Wann die altitudo generans celer. in $M$ ist $v$, so wird seyn

$$v = be^{-\frac{x}{c}} + \frac{c^2g^2e^{-\frac{x}{c}}}{4b}\left(e^{\frac{x}{c}} - 1\right)^2.$$

Und tempus per $AM$ wird seyn $\frac{c}{125\sqrt{b}}\left(e^{\frac{x}{2c}} - 1\right)$ min. sec. wann $b$ und $c$ in 1000ste Theile eines Rheinischen Schues exprimirt wird. Setzt man die Geschwindig-[3])

P. S. Der Herr Brouckner[4]) befindet sich gar wohl, und läst Ew. Hochedelgeb. seine gehorsamste Empfehlung machen. Den Augenblick ist durch einen Courir die Nachricht gekommen, daß die 2000 Franzosen, so vor Danzig angekommen, feliciter geschlagen worden, so dass wenig mehr nach Francreich zurückkommen werden.

---

1) Vgl. Euler, *Mechanica* I, S. 373—389.

2) Neben der Figur steht: „Meines Erachtens betrügt (?) Newton in seinem 2ten Buch, wenn er statuirt, das diese Curve $AM$ eine Asymptoton verticale habe, und deswegs dazu durch hyperbolas zu appropinquiren sucht".

3) Der in Gotha aufbewahrte Brief ist unvollständig; er enthält nur vier Seiten von denen die letzte mit „Geschwindig-" endet. Offenbar stand das Datum des Briefes auf dem fehlenden Blatt; etwas auffällig ist es, daß das Postskriptum schon auf der vierten Seite, also vor dem Schluß des Briefes steht.

4) Vermutlich Isaak Bruckner (1686—1762), der seit 1725 von der Petersburger Akademie der Wissenschaften als Mechaniker angestellt war (siehe Wolf, a. a. O. 4, S. 91—92).

## Daniel Bernoulli an Euler 18. Dezember 1734.

*Inhalt.* Akademieangelegenheiten. — Über die Drucklegung der *Mechanica* von Euler und der *Hydrodynamica* von Daniel Bernoulli. — Über eine zahlentheoretische Abhandlung von Lagny. — Über einige geometrische und mechanische Probleme. — Über den Wunsch Eulers, Doctor medicinae zu werden.

Basel d. 18. December 1734.

..... Die Akademie ist glücklich einen solchen Directorem[1]) bekommen zu haben, der selber die Wissenschaft besitzt. Ein guter General muss auch ein guter Soldat seyn.

..... Es wäre wohl Schade wenn die mathematische Classe, wie Sie sagen, in Abgang käme: Man mag sagen was man will, so dependirt doch die Ehre der Akademie bei den Ausländern am allermeisten von den mathematischen und physischen Wissenschaften. Solches habe auf meiner Rückreise zur Genüge erfahren. Man sollte trachten den jungen Hrn. Clairaut von Paris zu bekommen. Ich kann Ihnen nicht genug sagen, mit welcher Avidität man allerorten nach den Mémoires von Petersburg fragt . . . Es wäre zu wünschen dass die Druckung derselben mehr beschleunigt würde. Wenn man etwa mit der Zeit sollte Mangel an mémoires haben und die meinigen nicht verachtet würden, so bin bereit einige pièces zu schicken. Es ist mir leid, dass diejenige pièce, so ich an den Hrn. Präsidenten vor einem Jahr geschickt, ist verloren gegangen.

Wenn mir Ew. Dero Tractatum mechanicum schicken wollen, so will ich denselben drucken lassen in Straßburg, allwo sie gar froh darüber seyn werden. Meine Hydrodynamicam druckt wirklich der Herr Dulsecker und gibt mir nebst 30 exemplaribus annoch 100 Thl. Recompens[2]) Ew. judiciren gar recht wegen der Historia Edessena; meine Hydrodynamica ist in einigen Journalen zum voraus recensirt: Ich werde solche I. K. M. zu dediciren die Freyheit nehmen, welches die einzige Dankbarkeit ist, so im Stand bin zu bezeigen, da sonsten meine Dienste nicht agreirt werden; doch bitte ich Ew. mir hierauf expresse zu antworten, ob Sie meinen, dass solches etwa nicht sollte ungütig aufgenommen werden. Wenn etwas zum Besten der Akademie darin könnte gemeldet werden, kann mir solches nur angezeigt werden, aber mit ehestem .....

Ich komme nun auf einige Mathematica. Ew. verlangen von mir zu wissen einen kurzen Begriff von des Lagny pièce, so in den Pariser Mém. a. 1720 ist[3]). Es ist nichts, als leere Worte. Sein ganzes problema ist,

---

1) Fuss (a. a. O. II, S. 415) teilt mit, daß der neue Direktor der Baron von Korff war.

2) Bekanntlich erschien die *Hydrodynamica* von Daniel Bernoulli zuerst im Jahre 1738.

3) Siehe T. F. de Lagny, *Méthode pour résoudre indéfiniment et d'une manière complète en nombres entiers les problèmes indéterminés;* Mem. d. l'acad. d. sc. de Paris 1720, S. 178—188.

den valorem numeri integri von $x$ zu finden, damit $\frac{a+bx+cx^2+\dots}{d}$ (allwo $a, b, c, d$ numeri integri sind) einen numerum integrum mache, und zugleich $\frac{e+fx+gx^2+\dots}{h}$ auch einen numerum integrum. Wenn $x$ drei Dimensionen hätte oder mehr, so kann er es allzeit praestiren, wenn es möglich ist, vermittelst denen zwei Conditionen, welche er allzeit supponiren muß; solches aber ist gar leicht und hat ja der NEWTON in seiner *Arithmetica universalis* schon gezeigt, wie man müsse den valorem von $x$ aequatione unius dimensionis vermittelst der zwei gegebenen Aequationen finden [1]). Es wird also gleich das problema von LAGNY dahin reducirt, dass $\frac{lx+m}{n}$ ein numerus integer sey. Wenn man auf diese Weise den valorem von $x$ gefunden, muss man erst tentiren ob er angehe oder nicht; wenn das problema möglich ist, so wird der inventus valor satisfaciren und sonsten nicht, welche letztere Observation, wie mich dünkt, der LAGNY nicht einmal macht.

Ew. problema de abscindendis arcubus aequalibus in serie ellipsium etc. ist sehr profundum und, wie ich glaube, schwer anders als a posteriori, methodo serierum auf Ihre Weise, zu solviren.

Die Natur der trajectoriae corporis in medio resistente tenuissimo projecti habe auch quam proxime determinirt: unsere Expressionen kommen in quovis casu particulari gar nahe zusammen. Doch aber muss nach unser beider hypothesi $c$ viel grösser supponirt werden als $a$ und $x$. Welche aber von unsern Expressionen accurater sey, kann nicht wohl anders als ex hypothesibus, quibus uterque in analysi usi sumus, geschlossen werden. Ihre denominationes habe in einem falschen sensu genommen, bis ich meine Expression gefunden. Ihre Worte sind diese: „$b$ sey die Höhe, aus welcher die celeritas in vertice $A$ generirt wird (subintellige vi gravitatis naturali), und $c$ die Höhe (rursus pro vi gravitatis naturali), aus welcher diejenige celeritas entspringt, mit welcher, wenn sich die Kugel bewegt, die Resistenz der vi gravitatis (naturali nempe, non diminutae a medio) gleich ist etc.“. Wenn dieses Ihrer Worte Verstand ist, so finde solche Aequation:

$$y = \frac{gxx}{4b} + \frac{512\,b^3x + (48\,ggx^3 - 48\,bbx)\sqrt{(16\,bb + ggxx)} - (20\,ggx^3 + 80\,bbx)\sqrt{(16bb + 4\,ggxx)}}{768\,bbgc}$$

Aus dieser Aequation (in welcher vergessen, den numerator und denominator durch 4 zu dividiren) kann ich die übrigen Circumstanzen,

1) Siehe I. NEWTON, *Arithmetica universalis*, Ausgabe Leiden 1732, S. 60—63.

von denen Sie Meldung thun, leicht deduciren. Ihre Aequation aber, wenn man sie in seriem resolvirt, ist gar simpel, indem, wenn

$$y = \frac{acc(e^{\frac{x}{c}} - 1) - gcx}{2b},$$

man propter valorem admodum magnum ipsius $c$, supponiren kann $y = \frac{gxx}{4b} + \frac{gx^3}{12bc}$, und hat in diesem Punct einen grossen Vortheil vor meiner Aequation. Es wird aber leicht zu zeigen seyn, dass quam proxime sey

$$\frac{128b^3x + (12ggx^3 - 12bbx)\sqrt{(16bb + ggxx)} - (5ggx^3 + 20bbx)\sqrt{(16bb + 4ggxx)}}{16bg} = gx^3.$$

Auf das wenigste differiren diese zwey Expressionen in casibus particularibus nicht viel. —

In mechanicis habe einige neue principia generalia erdacht, welche viel quaestiones physico-mechanicas solviren, gleich dem principio conservationis virium vivarum. Ich habe vor etwas Zeit gearbeitet in invenienda lege vibrationum minimarum laminae uniformis elasticae parieti horizontaliter infixae ex data ejus vi elastica; aber ich bin nicht recht mit meiner Solution zufrieden.

Wenn Ew. wollen in facult. med. Doctor werden, so will dazu gern verhülflich seyn. Wissen Sie nichts von den Kamtschatker Herren? . . . .

## Daniel Bernoulli an Euler 30. April 1740.

*Inhalt.* Über die Preisschriften der Pariser Akademie. — Über einige mathematische Probleme und Fragen. — Die Kälte in St. Petersburg.

Basel d. 30. April 1740.

. . . Es werden Dieselben allbereit den succès von den Pariser pièces wissen. Der prix ist in vier Theile getheilt worden, davon der eine ist Ew. zuerkannt worden, wozu ich Ihnen gratulire; ein anderer Theil ist dem Mac Laurin, ein dritter einem unbekannten Cartesianer und einer mir zuerkannt worden. Man schreibt mir, es sey noch nichts Vortrefflicheres nach Paris für dergleichen praemia geschickt worden, als drei von diesen pièces; die vierte aber hat man nicht rühmen wollen und mag vielleicht sein einzig mérite seyn, kein Anti-Cartesianer gewesen zu seyn. Von Ihrer pièce hat man mir insonderheit gerühmt, wie sie die figuram terrae, quatenus ab actione lunae mutatur, determinirt, und anbei inertiam aquarum sehr geschicklich in Consideration gezogen. Ich für mein Theil habe, um mich nicht allzuweit in die pure geometrica einzulassen, mich contentirt die differentiam inter axem et diametrum perpendicularem ab actione lunae ortam zu determiniren; was aber die considerationes physicas anbelangt, habe ich alle Umstände mit der möglichsten exactitude betrachtet.

Die Observation, so Herr DE LA CROYÈRE dem Hrn. DELISLE gesagt und welche mir Ew. überschrieben, hab ich der Akademie zu Paris als uns Beiden sehr favorabel überschrieben und dabei gemeldet, dass von unserm Hrn. Präsidenten ordre gestellt worden accurate Observationen in zona glaciali zu machen. Bitte Ew. von dem Hrn. Kammerherrn zu vernehmen, ob diese meine überschickte Addition dürffe gedruckt werden. Zu Paris ist man sehr begierig zu wissen, wer der Autor sey von einer Brochure: *Examen désintéressé sur la figure de la terre* etc. Ew. sagen mir doch, ob Sie nicht glauben, dass Herr DELISLE solches verfertiget. —

Haben Sie das problema de oscillationibus corporum ex filo flexili suspensorum auch untersucht? in welchem Fall ich gern wissen möchte ob Ihre Solution mit meiner übereinkommt; ich habe Ihnen neulich solche durch den Hrn. Präsidenten überschrieben . . . .

Es ist mir lieb, dass Ew. meine schon vor vielen Jahren gefasste Idee de vorticibus infinitis ad causam gravitatis explicandam nicht desapprobiren; ich habe die Möglichkeit dieser Hypothesis illustrirt ab exemplo decussationis liberae infinitorum radiorum solarium in camera obscura. Was der Abbé MOLIÈRES hierüber geschrieben[1]), habe ich nicht gesehen. Da meine Dissertation de causa gravitatis nirgend ist gedruckt worden, könnte vielleicht selbe einmal bei Mangel anderer Materie unseren Commentariis inseriret werden. Der von dem NEWTON angenommene rapport inter actiones lunae et solis ist gewiss sehr übel fundirt und nicht füglich die phaenomena aestus maris mit einer Accuratesse zu expliciren. Ew. werden zu seiner Zeit meine Reflexionen über diesen Punct sehen: ich statuire rationem mediam inter actiones solis et lunae, wie 2 zu 5.

Der gradus frigoris Petropoli huj. anni ist stupend; ich möchte gern wissen, ob keine observationes physicae bei dieser Kälte sind gemacht worden.

### **Euler** an **Daniel Bernoulli** 15. September 1740.

*Inhalt.* EULERS Augenkrankheit. — EULERS Preisschrift über Ebbe und Flut. — Beobachtungen über Ebbe und Flut im Eismeer. — Über das Gleichgewicht einer schwimmenden dreieckigen Scheibe. — Über die Schwingung eines an einem Faden aufgehängten Körpers. — Über die *Dissertatio hydraulica* von JOHANN BERNOULLI. — Über die akustische Theorie der Pfeifen.

Hochedelgebohrner

Hochgeehrtester Herr Professor.

Vor einiger Zeit habe die Ehre gehabt, Denselben über Amsterdam zuzuschreiben, und Ihro Durchlaucht Portrait nebst den Academischen

1) J. P. DE MOLIÈRES (1677—1742) hat in den Mémoires de l'academie des sciences de Paris 1728—1733 drei Abhandlungen über den fraglichen Gegenstand veröffentlicht.

Ew. Hochedelgeb. und Dero H. Vater destinirten Büchern zuzusenden, welches Dieselben ohne Zweifel schon richtig werden erhalten haben.

Auf die Scientifica habe nicht eher als jetzo antworten können, wegen einer Unpäßlichkeit an meinem Auge, wodurch ich einige Wochen außer Stand gesetzet worden, das geringste vorzunehmen.

Weilen ich hoffe, daß Ew. Hochedelgeb. meine Piece *De fluxu et refluxu maris*[1]) schon werden gesehen haben, so finde nichts anders auf Dero darüber gemachte Remarques für nöthig zu antworten, als daß H. Clairaut in seiner nach London gesandten Piece, welche ich in den Transactionen gelesen[2]), freylich recht hat, daß ab aucta terrae versus centrum densitate die Figur der Erde weniger von der vollkommenen Rundung abweichen müsse; diese Sache aber hat in meiner Piece keinen Einfluß, weilen ich dieße Materie nur obenhin berühret habe. Sonsten hat mir der H. Maupertius neulich geschrieben, daß H. Cassini nunmehro seine Meinung wegen der Figur der Erde völlig abandonnirt und vor der Academie abgeschworen.

Aus dem Mari glaciali habe ich neulich observationes circa aestum maris erhalten, welche aber nicht hinlänglich sind etwas gründliches daraus zu schließen. Dieselben sind etwan 40 Werst von Archangel in der weisen See den 6. und 7. Aug. angestellt worden, allwo mein Schwager Kaiser Capitain von der Flotte an einem eingetheilten Pfal observirt, daß den 6t. Aug. um 2 Uhr 45′ p. m. 12 Schuh ½ Zoll gestanden, zu welcher Zeit das Wasser am höchsten gewesen, nachdem ist das Wasser nach und nach gefallen biß 8 Uhr 40′, da es am Pfal 9 Sch. 3½ Zoll anzeigte. Den folgenden Morgen d. 7t. war wiedrum Ebbe um 7 h. 58′, da das Wasser am Pfal bey 8 Sch. 10 Zoll stund; um 9 h. 22′ fieng daßelbe an zu steigen biß zur folgenden Fluth, so geschah um 3 h. 48′ p. m., da die Höhe des Wasser am Pfal war 11 Sch. 6 Zoll. Mehr Observationen sind nicht gemacht worden, wie ich gewünscht hätte, daß dergleichen von einer Conjunction bis zur folgenden zum wenigsten angestellet würden, auch war diese Zeit circa quadraturam Lunae, aus welcher am wenigsten etwas geschlossen werden kann.

---

1) Die Eulersche Preisschrift *Inquisitio physica in causam fluxus et refluxus maris* erschien zuerst im Jahre 1741 in den Pièces que ont remporté le prix de l'académie royale des sciences en M.DCC.XL. sur le flux et reflux de la mer (Paris 1741), S. 235—350.

2) Siehe A. L. Clairaut, *Investigationes aliquot, ex quibus probetur, terrae figuram secundum leges attractionis in ratione inversa quadrati distantiarum maxime ad ellipsin accedere debere;* Philos. Trans. 40, 1737/38, S. 19—25. — *An inquiry concerning the figure of such planets as revolve about an axis, supposing the density continually to vary from the centre towards the surface;* Philos. Trans. **40**, 1737/38, S. 277—306.

Meine Difficultät über die Oscillationen des Trianguli Rectanguli aquae verticaliter innatantis [1]) beruhete keineswegs darauf, ob der angulus rectus außer dem Wasser stehe oder umgekehrt unter dem Wasser, wie ich angenommen hatte, denn wenn in einem Fall ein Situs aequilibrii vorhanden ist, so ist auch im umgekehrten situ ein Aequilibrium da; und also ist mein Zweifel durch Ew. Hochedelgeb. Antwort noch nicht aufgehoben.

Denn wenn auch gleich das Triangulum $a\ b\ c$ (Fig. 4) ad $b$ rectangulum so im Wasser steht, daß die Superficies aquae $d\,e$ parallel ist dem lateri $b\ c$, und folglich das Latus $a\ b$ vertical ist, so ziehe man nur die Linie $a\ f$, welche das latus $b\ c$ in zwey gleiche Theile schneide: Weilen nun das Triangulum homogeneum gesetzt wird, so muß sein centrum gravitatis in diese Linie $a\ f$ fallen. Ferner fällt auch das Centrum gravitatis partis submersae $a\ d\ e$ in diese Linie $a\ f$; und geht folglich diese $a\ f$ durch beyde Centra gravitatis. Nun aber wird zu einem situ aequilibrii erfordert, daß die gerade Linie, welche durch beyde Centra gravitatis gezogen wird, vertical sey. Dahero dieser situs des Trianguli, den Ew. Hochedelgeb. angeben, nicht einmal ein situs aequilibrii, will geschweigen ein situs firmus, wie zu den Oscillationibus nötig ist, seyn kan.

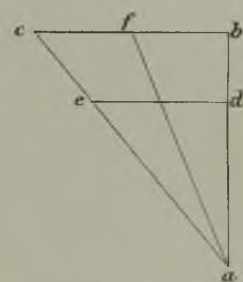


Fig. 4.

Ew. Hochedelgeb. Problema von den Oscillationibus eines an einem filo gravitatis experte aufgehängten Körpers [2]) habe ich anfänglich nicht mit genugsamer Attention in Erwegung gezogen; anjetzo aber, je mehr ich dasselbe betrachte je wichtiger und nützlicher befinde ich dasselbe, indem ohne dasselbe niemal die Oscillationen einer an einem Faden aufgehängten Kugel welcher Casus sonsten für so leicht angesehen wird richtig bestimmt werden können. Ich habe mich lange bedenken müssen ehe ich meine General Methode einen jeden Motum oscillatorium zu bestimmen, darauf habe appliciren können; endlich aber habe ich doch nachfolgende solution gefunden, welche mit Ew. Hochedb. auf das genauste übereinkommt.

Filo igitur $OA$ in $O$ fixo alligatum sit in $A$ corpus $ACBD$, cujus

1) Siehe Daniel Bernoulli, *De motibus oscillatoriis corporum humido insidentium;* Comment. acad. sc. Petrop. **11**, 1739 [gedruckt 1750], S. 100—115.

2) Vgl. Daniel Bernoulli, *Commentationes de oscillationibus compositis, praesertim iis, quae fiunt in corporibus ex filo flexili suspensis;* Comment. acad. sc. Petrop. **12**, 1740 [gedruckt 1750], S. 97—108, sowie L. Euler, *De motu oscillatorio corporum flexibilium;* Comment. acad. sc. Petrop. **13**, 1741—1743 [gedruckt 1751], S. 124—166 (speziell S. 149).

oscillationes cum sese ad aequabilitatem et isochronismum composuerint definiri oporteat. Repraesentet figura opposita (Fig. 5) situm fili et corporis in maxima a recta verticali $Oq$ elongatione inter oscillandum. Sit corporis centrum gravitatis in $G$, atque finita semioscillatione ubi filum $OA$ fit verticale, necesse est, ut recta $AB$ pariter fiat verticalis. Producta ergo recta $BA$ in $Z$, corpus hoc inter oscillandum quasi circa punctum fixum $Z$ gyrabitur. Jam posito corporis pondere $= P$, actu corpus sollicitabitur directe deorsum in directione $GP$ a vi $= P$. Ex natura vero motus oscillatorii uniformis, siponamus longitudinem penduli simplicis isochroni quam quidem quaerimus $= z$, quamlibet corporis particulam $M$ a tanta vi urgeri oportebit, qua eo tempore, quo pendulum $z$ descensum absolvit, perducatur ad situm suum naturalem. Scilicet cum particula quaevis $M$ circa polum $Z$ gyrari debeat per angulum $MZm = AZa$, spatium ab hac particula absolvendum erit $= Mm$, et vis requisita ad hanc particulam in directione $Mm$ protrahendum $= \frac{M\cdot Mm}{z}$, unde omnium harum virium summa erit

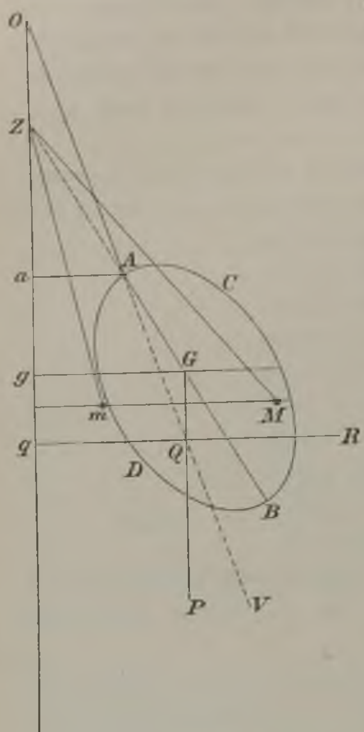



Fig. 5

$$\int \frac{M\cdot Mm}{z} = \frac{P\cdot Gg}{z} = \frac{P\cdot Aa\cdot GZ}{AZ\cdot z}$$

Momentum vero hujus vis $\frac{M\cdot Mm}{z}$ ratione poli $Z$ est

$$= \frac{M\cdot Mm\cdot MZ}{z} = \frac{Aa}{AZ\cdot z}\, M\cdot MZ^2,$$

summa omnium momentorum est

$$= \frac{Aa}{AZ\cdot z}\int M\cdot MZ^2.$$

Sit summa omnium productorum, quae oriuntur, si singulae corporis particulae $M$ multiplicentur per quadrata distantiarum suarum ab axe normaliter ad planum oscillationum $GOg$ ducto $= P\cdot kk$, quam summam momentum inertiae corporis respectu axis descripti vocare soleo; erit

$$\int M\cdot MZ^2 = P(kk + GZ^2),$$

ex quo summa omnium illorum momentorum est

$$= \frac{Aa \cdot P(k^2 + GZ^2)}{AZ \cdot z},$$

quae divisa per summam potentiarum $\frac{P \cdot Aa \cdot GZ}{AZ \cdot z}$ dabit positionem potentiae omnibus aequivalentis $Qq$ nempe distantiam

$$Zq = \frac{k^2 + GZ^2}{GZ} = GZ + \frac{k^2}{GZ},$$

atque ipse potentia omnibus his fictis potentiis aequivalens erit $= \frac{P \cdot Aa \cdot GZ}{AZ \cdot z}$. Per hypothesin igitur haec potentia

$$Qq = \frac{P \cdot Aa \cdot GZ}{AZ \cdot z}$$

eundum pro motu oscillatorio effectum producit, quem actu edit vis gravitatis $P$ in directione $GP$ urgens. Quare si huic potentiae $Qq$ contraria applicata concipiatur

$$QR = \frac{P \cdot Aa \cdot GZ}{AZ \cdot z},$$

haec cum vi gravitatis $P$ corpus in aequilibrio tenebit. Ex compositione autem harum potentiarum binarum

$$QR = \frac{P \cdot Aa \cdot GZ}{AZ \cdot z} \text{ et } QP = P$$

oriatur una haec $QV$; a qua corpus in quiete conservari nequit, nisi directio $QV$ cum fili directione $OA$ in directum jaceat. Erit itaque $OAQV$ linea recta ac propterea

$$P : \frac{P \cdot Aa \cdot GZ}{AZ \cdot z} = Oa : Aa = AZ \cdot z : Aa \cdot GZ.$$

At cum sit

$$Qq = Gg = \frac{Aa \cdot GZ}{AZ},$$

erit

$$Aa : Oa = Qq\,(= Gg) : OZ + Zq$$

ergo

$$Aa : Oa = \frac{Aa \cdot GZ}{AZ} : OZ + GZ + \frac{k^2}{GZ}.$$

Sit nunc, uti Tu, Vir celeb., posuisti, $OA = n$, $AG = g$, atque $OZ = x$, $Aa = y$, erit ob omnes angulos infinite parvos $Oa = n$, $AZ = n - x$, ideoque hae duae emergent analogiae:

$$n : y = (n - x)z : (g + n - x)y, \text{ seu } z = \frac{n(g + n - x)}{n - x}$$

et

$$y:n = \frac{y(g+n-x)}{n-x} : g+n+\frac{k^2}{g+n-x}$$

seu

$$\frac{n(g+n-x)}{n-x} = g+n+\frac{k^2}{g+n-x}.$$

Sit $n-x=u$, erit

$$n+\frac{ng}{u} = g+n+\frac{k^2}{g+u}, \text{ seu } \frac{g(n-u)}{u} = \frac{k^2}{g+u}$$

ex qua aequatione si valor ipsius quadratur, habebitur longitudo penduli simplicis quaesitae

$$z = n+\frac{ng}{u} = n+\frac{2ngg}{nn-gg-kk\pm\sqrt{(gn-gg-kk)^2+4ng^3)}}.$$

Quodsi autem tuo modo longitudo penduli isochroni oscillationibus, si corpus ex $A$ esset suspensum, in computum ducatur, eaque vocetur $= l$, erit

$$l = g+\frac{kk}{g} \text{ seu } kk+gg = gl, \text{ quo substituto nascitur}$$

$$z = n+\frac{2ng}{n-l\pm\sqrt{(4ng+(n-l)^2)}}$$

quae est ipsa expressio a Te, Vir Celeb., mecum communicata. Caeterum haec eadem longitudo penduli simplicis isochroni $z$ ita potest exprimi, ut sit

$$z = \frac{n+l\pm\sqrt{((n-l)^2+4ng)}}{2},$$

de his autem Te notare velim, me ista nunc primum in chartam conjecisse, ex quo facile video, me eadem multo distinctius, ordinatius et brevius exponere potuisse, quare rogo, ut minus ordinatam explicationem mihi condones. Sic linea $Mm$ deberet esse ad $MZ$ normalis, quia distantia particulae $M$ ad $AB$ potest est finita, etiamsi anguli $AOa$, $AZa$ sint infinite parvi. Ex his autem non potest determinari motus oscillatorius, si filum in ipso centro gravitatis $G$ alligetur, tum enim sponte fit $kk=0$, quod nisi corpus sit infinite parvum fieri nequit; quare hic casus seorsim debet investigari; interim mirum est casum alias facillimam in hac solutione non contineri.

Wann dahero der aufgehängte Körper ein Globus ist, dessen Radius $AG=g$, und derselbe in der superficie an den Faden $OA=n$ angebunden wird, so kommt die Longitudo penduli isochroni

$$= n+g+\frac{2gg}{5n}-\frac{6g^3}{25nn}.$$

Wann aber keine Flexibilität vorhanden wäre, wie man gemeiniglich anzunehmen pflegt, so findet man die longitudinem penduli isochroni

$$= n+g+\frac{2gg}{5(n+g)} = n+g+\frac{2gg}{5n}-\frac{2g^3}{5nn},$$

wann nehmlich $g$ sehr klein in Ansehung des $n$ angenommen wird. Dahero ist in diesem Fall die wahre longitudo penduli isochroni größer als die, welche durch den gemeinen Weg gefunden wird, um $\frac{4g^3}{25nn}$, welche Differentz in vielen Fällen, da man die longitudinem pedis horarii durch die Experienz zu bestimmen sucht, nicht negligirt werden kan. Generaliter aber kommt nach dem gemeinen Wege für unßer angenommenes Corpus oscillans die Longitudo penduli isochroni $= n + g + \frac{gl - gg}{n + g}$. Weilen nun $l$ ad $g$ eine gegebene Verhältniss, so vom $n$ nicht dependirt, so setze ich $l - g = xg$ und wann $n$ sehr groß in Ansehung des $g$ angenommen wird, so bekommt nach dem gemeinen Wege diese Longitudinem penduli isochroni $= f + \frac{xgg}{f}$ posito $n + g = f$. Die Bahn aber wird durch $f$, $g$ und $x$ exprimirt sein

$$= \frac{f + xg + \sqrt{(ff - 2xfg + 4xgg + x^2gg)}}{2} = f + \frac{xgg}{f} + \frac{x^2g^3}{ff} \text{ q. p.}$$

Dahero ist allzeit die wahre longitudo penduli simplicis isochroni größer als die, welche durch den gewöhnlichen Weg gefunden wird um $\frac{x^2g^3}{ff}$, und allhier bedeutet $xg$, nach Ew. Hochedelgeb. Benennungs Art die Distantiam centri virium vivarum corporis $ACBD$ a centro gravitatis $G$: es ist aber unnöthig, daß ich Ew. Hochedelgeb. die Wichtigkeit dieses Problematis weiter darthue.

Anjetzo habe von Dero H. Vater den anderen Theil seiner Theoriae Hydrodynamicae [1]) bekommen, welche mir über die maßen wohl gefällt, insonderheit hat Derselbe auch ex primis Principiis die Pressionem aquae in latera Vasis sehr gründlich determinirt, welche mit Ew. Hochedelgeb. Theorie sehr schön übereinkommt. Ich glaube aber, daß sich Dero H. Vater vielleicht übersehen, wann er glaubt, daß Ew. Hochedelgeb. in diesem Stücke gefehlt haben. Denn er refutirt Sie zu verschiedenen malen, nicht zwar Dero Opus Hydrodynamicum, sondern einen Brief von 1730. Er findet nehmlich eine andere Formul für die Vim, qua Vas ab effluente aqua retro urgetur, wann daran Tubi horizontales allso befestigt sind (Fig. 6). Dero H. Vaters Formul für diesen Fall ist mir aber sogleich suspect vorkommen, weilen nach derselben die retroactio vasis finita, ja quavis quantitate data major seyn kann, wann gleich das

Fig. 6.

1) Vgl. über den zweiten Teil der *Dissertatio hydraulica* des Johann Bernoulli die Briefe von Euler an diesen vom 19. Oktober 1740 und von Johann Bernoulli an Euler vom 18. Februar 1741 (Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, S. 74, 78—79).

Foramen O infinite parvum ist; dieser Fehler aber steckt keineswegs in der Theorie Derselben sondern bloß in der Application auf diesen Fall; und deswegen verwundere ich mich, daß Derselbe diese Discrepanz von Ew. Hochedgb. nicht nur bemerket, sondern die Seinige Formul für wahr hält, und Dero Formul für falsch, und dazu noch schreibt: De his judicet Lector. Ich möchte allso wünschen, daß diese Piece nicht in diesen Terminis gedruckt werden müsse: und will deswegen versuchen ob meine Vorstellungen, welche ich darüber Dero H. Vater machen will, eine Verändrung auswürken können.

Ew. Hochedgb. Theoria de sono fistularum kommt mit der meinigen, welche Dieselben in meinem Tractätlein von der Music ausführlich erklärt finden werden, bey nahem überein, indem wir nur in ratione constante von einander differiren, nehmlich wie 11 zu 14 q. pr. Durch die Experientz kan man allso leicht determiniren, welche Theorie mit der Wahrheit übereinkommt, wann man eine Chordam datae Longitudinis et dati ponderis durch ein Gewicht so spannt, biß dieselbe mit dem Thon der Pfeife consoniret und dadurch den Numerum oscillationum minuto secundo editarum ausrechnet. Nach meiner Theorie müßte eine Cylindrische Pfeife, welche 1 Pariser Schu lang in einer Secunde 870 Vibrationen machen (tempestate scilicet mediocri), denn hierinn hat man sowohl auf das Barometrum als Thermometrum insonderheit zu sehen: und bey warmem Sommerwetter, wann das Barometrum sehr hoch steht, würde diese Pfeife wohl 927 Vibrationen machen. Die Hervorbringung der verschiedenen Thöne, welche auf einer Pfeife angegeben werden können, habe ich auch so erkläret, daß durch die Vermehrung des Blasens nach und nach solche Thöne, welche sich verhalten wie 1, 2, 3, 4 ,5 etc. herausgebracht werden können.

Des Neutons Theoriae circa accessus facilis reflexionis et transmissionis in seiner Optica ist mir jederzeit im höchsten Grad obscur und unverständlich vorgekommen, und möchte ich eine Erläuterung darüber mit der größten Begierde sehen. Inzwischen hat man mir geschrieben, daß der H. Moivre auch an einer Theoria Musica arbeite,[1]) und deswegen mein Opusculum darüber zu sehen verlange: ich bin aber nicht weniger begierig, desselben Gedanken darüber zu sehen.

Für Ew. Hochedlgb. guten Rath wegen meines Bruders bin gehorsamst verbunden, und verbleibe mit aller vollkommenen Hochachtung

Ew. Hochedelgeb.

gehorsamster Diener

St. Petersburg, d. 15t. Sept. 1740. L. Euler.

---

1) Meines Wissens hat Moivre, der im Jahre 1740 schon 73 Jahre alt war, keine Arbeit über die Theorie der Musik veröffentlicht.

Beyliegenden Brief an meinen Vater ersuche gehorsamst bestellen zu lassen, und meine abermal genommene Freyheit nicht übel zu nehmen.

Was in absolvirtem Problemate den Casum anbelangt, wann der Faden im Centro gravitatis fest gemacht wird, und folglich $g = 0$, so ist derselbe klar in der Solution begriffen, indem aus der Aequation

$$z = n + \frac{ng}{u}$$

sogleich folgt $z = n$. Dahero ein solcher Körper motu sibi parallelo sich bewegen wird: Daß ich dieses nicht sogleich bemerket, war die Ursach, weilen ich vermeinte als wann sich ein solcher Körper nach den ordentlichen Regulis de centro Oscillationis richten müßte; welches aber nicht geschieht und ist allso ein großer Unterschied, ob ein Körper so in seinem Centro Gravitatis angebunden oder an dem Faden befestigt wird, daß dort eine Beugung Statt findet oder nicht. Dann wann eine Beugung allda geschehen, so ist das Centrum gravitatis selbst das Centrum oscillationis: ist aber der Faden sammt dem Körper als ein Corpus rigidum anzusehen, so hat das ordentliche Centrum Oscillationis Platz. Nach meiner Methode kan ich ferner sehr leicht die Oscillationen determinieren, wann mehr Körper so zusammen gesetzt sind, daß bey jeglicher Junctur eine Flexion geschehen kan.

## **Daniel Bernoulli** an Euler 5. November 1740.

*Inhalt.* Über Eulers Berufung nach Berlin. — Die Beobachtungen über Ebbe und Flut im Eismeer. — Über das Gleichgewicht einer schwimmenden dreieckigen Scheibe.

Basel d. 5. November 1740.

.... Ueber den letztern bewussten punctum[1]) erfreue ich mich nicht weniger, als Dero Herr Vater und kann die Stunde nicht erwarten. Die nouvelle hatte ich schon von einigen Orten her erfahren mit denen Umständen, die Sie zwar nicht überschrieben, die ich aber dem Hrn. Pfarrer erzählt. Wenn Sie kein Geheimniss daraus machen, so möchte ich gar gern alle Particularitäten von Ihnen selber vernehmen. Es ist mir lieb, dass Sie mit Herrn Maupertuis nunmehro in Correspondenz stehen: ich habe mit demselben von Ew. niemals als mit Admiration geredt und ihm dadurch gleiche sentiments beigebracht, welches Ew. bei jetzigen Umständen ohne Zweifel nicht unangenehm seyn wird. Doch sollen Sie dieses nicht aufnehmen, als wenn Herr Maupertuis nicht allzeit eine sonderbare estime vor Sie gehabt, sondern vielmehr als ein Zeichen, dass man Sie, nach meinem Sinn, niemals genugsam nach Dero mérites estimire ..... Nun komme ich auf Dero Brief.

1) Es handelt sich um Eulers Berufung nach Berlin (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 461).

Des Herrn Capit. Kayser's observationes circa aestum maris in mari glaciali scheinen unserer Theorie gar nicht conform, an welcher ich doch keinen Zweifel trage. Ich hab gar wohl vorgesehn ex impetu concepto aquarum, dass sich die phaenomena nicht würden so zeigen, wie es die theoria pura mit sich bringt, und deswegen gar nicht positive geredt, sondern nur hypothetice, und hab auch nicht provocirt ad aestus marinos in zona glaciali um die theoriam Newtonianam zu beweisen. Doch habe ich gesagt, weil es unmöglich sey den effectum ab impetu concepto aquarum oriundum zu messen, so müsse man sich begnügen einige inaequalitates in genere anzuzeigen; und dünkt mich, dass diese inaequalitates noch ziemlich confirmirt werden durch des Hrn. Kaysers Observationen. Es wäre freylich zu wünschen, dass wir dergleichen Observationen, die nach der besten Methode sind angestellt worden, eine Suite hätten auf das wenigste von einer ganzen lunaison; noch viel besser aber wäre es, wenn man solche instituirte 2 Monate lang und zwar den einen circa solstitium, den andern circa aequinoctium autumnale; ich hoffe, dass solches noch geschehen werde. Uebrigens dünken mich diese Observationen gar nicht übereinzustimmen mit des Hrn. de la Croyère seinen, und hätte ich mehr inaequalitates circa hos aestus erwartet, in Ansehung die declinatio lunae den 6. August (ohne Zweifel stili vet.) muss schier maxima gewesen seyn.

Ew. piece *de aestu maris* glaube ich nicht dass sie schon gedruckt sey und erwarte solche auch nicht vor einem halben Jahre.

Ew. haben ganz recht wegen dem Exempel eines trianguli rectanguli, dessen ich mich bedient um die oscillationes compositas zu illustriren, und nimmt mich selber Wunder, wie ich die Sach hab anders ansehen können. Ich kann mich in der Wahrheit nicht einmal besinnen, wie ich das exemplum concipirt hatte. Ich bin also Denselben gar sehr verbunden, dass Sie mich hierüber zum zweiten Mal haben erinnern wollen und sehe hierdurch Ihre wahre Freundschaft; ich bitte Sie also dieses exemplum auszustreichen[1]) und die folgenden paragraphos anders zu numerotiren und mir express zu berichten ob Sie solches wirklich verrichtet haben. Das Vertrauen, das ich auf Sie setze, macht mich sicher, dass ich öfter die Attention, die ich in der Hauptsach conservire, in den leichten Nebensachen fahren lasse.

Nicht ein geringeres specimen Ihrer Freundschaft geben sie mir occasione meines Vaters disquisitionis hydrodynamicae[2]), allwo er einen Brief, so ich ihm a. 1730 geschrieben, refutirt. Ich weiss nicht, was ich

1) Siehe die Fußnote 1 auf Seite 147.

2) Siehe die Fußnote 1 auf Seite 151.

mag meinem Vater dazumal geschrieben haben; ich weiss aber dass ich die Sach felicissimo successu ex genuinis principiis in meinem opusculo hydrodynamico tractirt habe, und das pro fistula utcunque inaequali et utcunque incurvata, auch nicht nur in hypothesi velocitatis jamjam uniformis, sed pro quovis velocitatis gradu acquisito. Wenn Ew. zu lesen belieben, was ich in cit. Opusc. a pag. 279 usque ad pag. 289 melde, so werden Sie sehen, dass ich dieses Argumentum völlig exhauriret habe. Mein Vater wird wohl zufrieden seyn, dass Sie alles in seiner Disquisition, so er über diese Materie sagt, auslöschen. Da Sie aber sagen, er habe nicht gefehlt in der Methode, sondern in applicatione methodi, so möchte ich wohl von Ew. vernehmen, ob er denn auch in hypothesi velocitatis uniformis cylindrum duplum herausbringe, welches die wahre theoria nothwendig mit sich bringt, obschon der Newton selbst anders gesagt hat.

Ich habe niemals gezweifelt, Ew. werden mein problema de oscillationibus corporum ex filo flexili suspensorum solviren, sobald Sie solches ernstlich untersuchen würden. Es freut mich, dass Ihnen nunmehro dieses problema von einer grossen Wichtigkeit zu seyn vorkommt. Ihre Methode kommt ziemlich mit meiner überein und habe solche allzeit gebraucht, seit der Zeit, da ich das problema de corporibus filo flexili connexis solvirt, da ich erinnert habe, dass wenn das systema in gyrum agiret wird, die figura fili eadem seyn müsse, als solche in oscillationibus ist. Ich hab hierüber eine Dissertation gemacht, welche ich hiemit der Akademie überschicke[1]. Solche ist schon vor 3 Monaten fertig gewesen, und ich bitte Ew. sie mit Dero gewöhnlichen Attention zu examiniren. Von meinem Vater habe ich vernommen, dass er dieses problema auch solvirt habe.

Ich erwarte mit grossem Verlangen Ew. *theoriam musicam*[2], als über welche Materie ich auch ziemlich meditirt und viele Experimente gemacht. Diese experimenta confirmiren meine theoriam de sono fistularum gar schön. Ich werde Ihnen ausführlicher darüber schreiben, wenn ich Dero tractatum werde empfangen haben. Nur eins will ich diessmal melden, davon ich schon Meldung in meinem vorigen gethan: Eine Pfeife, so einen Pariser Schuh lang, wenn solche gegen den Mund in distantia unius vel duorum pollicum gehalten und dagegen geblasen wird, gibt den Ton etwas höher als d und etwas niederer als dis. Nun aber haben Ew. in Dero Dissertation *de sono*[3] ein experimentum, daraus folgt, dass das unterste C in einer Secunde $116\frac{1}{2}$ vibrationes mache; ich rechne also, dass die

1) Siehe die Fußnote 2 auf Seite 147.

2) Es handelt sich natürlich um das *Tentamen novae theoriae musicae* (St. Petersburg 1839) von Euler.

3) L. Euler, *Dissertatio physica de sono* (Basel 1727).

schuhige Pfeife in einer Secunde 1050 Vibrationen respondire, müsste also nach meiner Theorie der sonus intra min. sec. per spatium 1050 Pariser Schuh propagirt werden, welches auch nach allen Experimenten wirklich die velocitas media soni ist. Nach Ew. theoria hätte die Pfeife müssen einen tiefern Ton geben als c. Ich aestimire aber velocitatem soni nicht secundum theorias, sondern secundum experimenta. Ich habe auch experimenta gemacht über die sonos von den prismatibus chalybeis, so man zu den kleinern carillons pflegt zu gebrauchen und vermeine diese theoriam auch assequirt zu haben. Wenn Sie des Hrn. Moivre's Tractat werden gesehen haben, bitte mir Dero Meinung darüber aus.

# Ein Beitrag zur Biographie C. G. J. Jacobis.

Von W. Ahrens in Magdeburg.

## I.

„Die Politik ist keine exakte Wissenschaft“ hat Bismarck einmal gesagt.[1]) Erwägungen dieser Art haben jedoch nicht verhindert, daß eine ganze Reihe hervorragender Vertreter der mathematischen Wissenschaften — ich nenne nur Arago, Bailly, Condorcet, Carnot, Brioschi, Cremona, Galois, Fourier, Monge, Dupin — sich der Politik in die Arme geworfen haben. Unter den deutschen Mathematikern sind Beispiele von Männern, die zu Zeiten im Vordertreffen politischen Streites gestanden haben, allerdings weit spärlicher als bei den Romanen. Das bekannteste und berühmteste Beispiel, zugleich dasjenige, welches hier näherer Betrachtung unterzogen werden soll, ist das C. G. J. Jacobis, und doch ist auch hier noch zu bedenken, daß einerseits ganz besondere Zeitverhältnisse erforderlich gewesen sind, um den Verfasser der *Fundamenta nova functionum ellipticarum* aus seiner stillen Studierstube in die politische Arena zu locken und daß andererseits die eigentlich politische Betätigung nur eine verhältnismäßig recht kurze Periode im Leben Jacobis ausmacht und daß selbst diese wie wir sehen werden, fast nur eine zufällige gewesen ist. In den Jahren seiner größten wissenschaftlichen Ruhmestaten, jener Zeit, welche Bessel einmal mit der Turiner Zeit Lagranges verglichen hat, in Königsberg, hatte Jacobi von politischen Geschäften sich gänzlich fern gehalten. Zwar kann kein Zweifel bestehen, daß der so vielseitig gebildete und so vielseitig interessierte Mann auch die politischen Vorgänge und Fragen der Zeit mit Aufmerksamkeit und selbständigem Urteil verfolgt und hierbei stets liberalen Ideen gehuldigt hat, daß er insbesondere stets für weiteste geistige Freiheit auf wissenschaftlichem, auf literarischem Gebiet, auch im amtlichen Leben eingetreten ist; doch diese Gesinnung nach außen zu betätigen, fehlte Veranlassung und Notwendigkeit. Die mit Beginn der vierziger Jahre des vorigen Jahrhunderts einsetzende liberale Bewegung in Preußen, deren Geburtsstätte bekanntlich die Stadt der reinen Vernunft war und deren

1) Gegenüber Rud. Virchow, Sitzung des preuss Abgeordn.-Hauses v. 18. Dez. 1863 (Stenogr. Ber. p. 507).

erste Anfänge Jacobi dort noch mit erlebte, wußte den großen Mathematiker zu aktiver Beteiligung nicht anzuregen. Zwar gehörten die Häupter der Königsberger Liberalen zu seinen näheren Freunden, so vor allem der Oberpräsident der Provinz, der Minister Theodor v. Schön, der bekannte liberale preußische Staatsmann, der des Freiherrn v. Stein Mitarbeiter an der preußischen Verfassungsgesetzgebung der Jahre 1807—1810 gewesen war. Auch Johann Jacoby, der als Politiker so berühmt gewordene Königsberger Arzt, gehörte zu Jacobis Umgang und wird durch seinen intimen Freund,[1]) den Physikprofessor Ludwig Moser, vermutlich schon frühzeitig mit dem großen Mathematiker näher bekannt geworden sein. Andererseits waren es aber selbstverständlich nicht ausschließlich und auch keinenfalls in erster Linie politische Gesichtspunkte, nach denen Jacobi seinen Umgang gewählt hätte. Huldigte doch zum Beispiel Bessel, mit welchem Jacobi durch herzlichste Freundschaft verbunden war, zumal gegen Ende seines Lebens († 1846) in der Politik extrem entgegengesetzten Anschauungen, die den schon genannten gemeinsamen Freund Th. v. Schön zu den lebhaftesten Klagen über „diese Besselsche Krankheit“[2]) veranlaßten. Überhaupt ist Jacobi — dies mag, um gleich von vorne herein etwaigen falschen Vorstellungen vorzubeugen, schon hier bemerkt werden — niemals, auch nicht in der Zeit, in welche sein politisches Quart d'heure fällt, ein einseitiger Parteimann gewesen. Erscheint es schon an sich unwahrscheinlich und unnatürlich, daß ein solcher Geist sich in die Fesseln eines Parteiprogramms sollte schlagen lassen, um Welt und Menschen hinfort nur noch durch eine Parteibrille anzusehen, so läßt sich auch bei Jacobi das gerade Gegenteil sehr leicht erweisen. Ich beziehe mich hier z. B., jedoch ohne speziell auf einzelne Stellen hinzuweisen, auf den demnächst erscheinenden Briefwechsel[3]) Jacobis mit seinem älteren Bruder Moritz, dem Erfinder der Galvanoplastik, der anscheinend von jeher den Grundsätzen des Liberalismus abhold gewesen war und diese seine politische Grundauffassung, vielleicht nicht ohne Einwirkung des Petersburger Milieus, im Laufe der Jahre zu einem ziemlich feudal-aristokratischen, selbst reaktionären Bekenntnis entwickelt hatte.[4]) — Ein jugendlicher Freund

1) Ferdinand Falkson, *Die liberale Bewegung in Königsberg (1840—1848)* (Breslau 1888), p. 53.

2) *Briefw. des Ministers Theodor v. Schön mit G. H. Pertz und J. G. Droysen*, herausg. v. Franz Rühl (Lpz. 1896), p. 73; vgl. a. p. 85 (Briefe an G. Schwinck, einen Vetter von Jacobis Frau).

3) *Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und M. H. Jacobi* (Leipzig, B. G. Teubner). Die im folgenden nach laufenden Nummern in römischen Ziffern zitierten Briefe gehören diesem Briefwechsel an.

4) Moritz Jacobi nahm, wie ich im Gegensatz zu Koenigsberger, *C. G. J. Jacobi* (Lpz. 1904), p. 452 (unten) bemerken möchte, an den politischen Vorgängen, zumal

C. G. J. JACOBIS, der Philolog J. HORKEL, schreibt in einem Brief, in dem er sich in Politik und Religion für durchaus konservativ, wenn auch ohne Intoleranz, bekennt: „Ähnliche Gespräche habe ich gar manches Mal mit JACOBI geführt, und er ist bis an sein Ende mein Freund geblieben" (Brief v. 18. Nov. 1851),[1]) und gerade dieser Freund war, wie andere Briefstellen[2]) beweisen, ein glühender Verehrer des berühmten Mathematikers, dessen politische Ansichten ihm also gewiß niemals in intransigenter oder unduldsamer Form erschienen sind. Vor allem beweist aber das weiter unten zu schildernde politische Auftreten JACOBIS unsere Behauptung am deutlichsten; ja man darf sagen, daß unduldsames und unwürdiges Verhalten der eigenen Anhänger den Gegnern gegenüber, worüber JACOBI einige Male[3]) zu klagen hatte, für ihn der praktischen Politik einen unangenehmen Beigeschmack gaben und neben anderen allerdings viel wesentlicheren Faktoren mit dazu beitrugen, sein baldiges Wiederabtreten von der politischen Bühne ihm nicht bedauerlich erscheinen zu lassen.

## II.

War JACOBI in Königsberg eine „politische Jungfrau" geblieben, wie er sich später selbst ausdrückte, so änderte sich dies in Berlin um so mehr, je weiter die Bewegung fortschritt, die in den Ereignissen der Jahre 1848/1849 ihren Abschluß und Höhepunkt fand. Während dieser Zeit selbst indifferent zu bleiben war vollends unmöglich. Inmitten der hochgehenden Wogen der Volksbewegung nicht für oder wider Partei zu ergreifen, hätte völlige Gleichgültigkeit bedeutet. „Schon CICERO", so schrieb C. G. J. JACOBI dem Bruder in dieser Zeit einmal,[4]) „schreibt den Untergang des römischen Staates daher, daß sich die anständigen Leute zurückzögen und andern das Feld überließen". In Frankreich nahmen PONCELET und J. LIOUVILLE Deputiertenmandate an, in Königsberg trat JACOBIS Freund und früherer Kollege FRANZ NEUMANN als Redner in Arbeiterversammlungen auf,[5]) aber auch die Berliner mathematischen Fachgenossen JACOBIS blieben nicht

---

der Revolutionszeit (1848), sehr regen und temperamentvollen Anteil; seine diesbezüglichen Urteile muten zwar zum Teil sonderlich an, zum anderen Teil zeigen sie aber oft großen Scharfblick.

1) *Ausgew. Briefe von u. an* LOBECK *u.* LEHRS, herausg. v. A. LUDWICH (Leipzig 1894), T. II, p. 552/553.

2) L. c. p. 426, 471, 472, 551.

3) S. unten S. 185/6 resp. Brief No. LXII (20. Juni 1848), sowie Brief No. LXVII (22. Jan. 1849).

4) Brief No. LXII (20. Juni 1848). — Der größte Teil dieses auch weiterhin häufig zitierten Briefes ist bereits bei KOENIGSBERGER, *C. G. J. Jacobi* (Lpz. 1904), p. 448 – 452 abgedruckt.

5) *Franz Neumann. Erinnerungsblätter von seiner Tochter Luise Neumann* (Tübingen u. Leipzig 1904), p. 375/6.

unberührt von der Zeitströmung. Am verhängnisvollsten wurde diese, wie bekannt, für Eisenstein. Weniger bekannt dürfte sein, daß auch Steiner sich politisch exponiert haben muß, da später, als bereits die Reaktion eingetreten war, die Fama bald nach der Verhaftung des bekannten Oppositionsführers Waldeck auch von der des berühmten Geometers berichtete. Varnhagen von Ense, der dies erzählt,[1]) später aber widerruft, hat auch sogar von einigen weiteren noch bevorstehenden Inkarzerierungen Kunde bekommen und darunter neben seiner eigenen auch von der Dirichlets.[2]) Wenn auch der Begründer der analytischen Zahlentheorie vor diesem Verhängnis und der preußische Staat glücklicherweise vor dieser Schmach bewahrt geblieben ist, so ist doch Dirichlets entschieden freisinnige und demokratische Sinnesrichtung bekannt und findet u. a. durch seinen Umgang mit dem bekanntlich ausgeprägt demokratischen Varnhagen und das von diesem ihm in den „Tagebüchern" gespendete Lob[3]) ihre volle Bestätigung. Auch bezüglich der politischen Stellung Steiners wird man nicht länger in Zweifel sein, wenn man hört, daß er wegen Unterzeichnung einer an die Abgeordneten Waldeck und v. Unruh gerichteten Adresse seinen Weg in ein von der politischen Polizei zusammengestelltes schwarzes Buch[4]) gefunden hat. Allerdings attestiert die politische Polizei dem berühmten Geometer durch seine Aufnahme in die Abteilung III des Buches erfreulicherweise, daß er noch zu den „Männern von Intelligenz und Gesittung" gehöre, auf die nur „aufmerksam gemacht werden solle".[5]) — Kein Wunder, daß, wo alles fortgerissen wurde, auch Jacobi lebhaftes Interesse und Anteil nahm. Die Seite, auf welche er sich stellte, war dieselbe wie bei den zuvor genannten Mathematikern. „Ich finde", so motivierte Jacobi später einmal seine Parteinahme dem Bruder gegenüber, „so viel gesunden und nüchternen Sinn unter den arbeitenden Klassen, so tiefe Verderbtheit unter den besitzenden, daß ich glaube, daß eine Auffrischung der letztern durch die erstern wünschenswerth wäre".[6])

1) *Tagebücher von K. A. Varnhagen von Ense*, Bd. VI (Leipzig 1862) p. 186/7 (24. Mai 1849): „Mathematiker Professor Steiner" und l. c. p. 188 (Widerruf).

2) L. c. p. 188 (25. Mai 1849).

3) L. c. Bd. V, p. 302; s. a. ibidem p. 292, 310, 349/50.

4) *Anzeiger für die politische Polizei Deutschlands auf die Zeit vom 1. Januar 1848 bis zur Gegenwart. Ein Handbuch für jeden deutschen Polizeibeamten.* Herausgegeben von —r. Dresden. (Ohne Jahreszahl, Vorwort von Sept. 1854), p. 330. — Das äußerst seltene Buch ist auf der Berliner Magistratsbibliothek vorhanden, die außerdem in der „Friedländerschen Sammlung" eine reichhaltige und vortrefflich geordnete Spezialbibliothek über die Revolutionsbewegung von 1848 besitzt; vgl. Arend Buchholtz, *Die Litteratur der Berliner Märztage;* Deutsche Rundschau, Bd. 94, 1898, p. 426—438.

5) L. c. Vorwort, p. XI u. VIII.

6) Brief No. LXVII (22. Jan. 1849).

Schon vor Ausbruch der Revolution, bereits 1847 unter dem großen Interesse, welches die Verhandlungen des ersten vereinigten Landtags erregten, hatte JACOBI, ohne selbst öffentlich als Politiker aufzutreten, Beziehungen zu mehreren liberalen Führern angeknüpft und gepflogen. Besonders sympathisch und interessant war ihm der edle und humane Charakter HERMANN V. BECKERATHS, der auch, obwohl neben GEORG V. VINCKE Führer der Opposition, des Königs FRIEDRICH WILHELMS IV. besonderes Vertrauen besaß.[1]) Auch seine glänzenden rhetorischen Fähigkeiten zu zeigen, hatte JACOBI in diesem Kreise bereits mehrfach Gelegenheit gefunden und z. B. auch nach einer Tischrede BECKERATHS durch einen Toast „überaus große Furore" zu erzielen gewußt.[2])

## III.

Nach den Märztagen von 1848 schossen bekanntlich in Berlin wie anderswo Zeitungen und politische Klubs wie Pilze aus der Erde. Die wichtigsten dieser letzteren, in denen sich das politische Treiben der Bürgerschaft konzentrierte, waren zunächst zwei: der „politische" und der „constitutionelle" Klub. Von diesen war der erstere der Resonanzboden der radikaleren Tonart, während der letztere „allgemein der Geheimeraths-Club genannt wurde",[3]) da er zahlreiche höhere Beamte, manche berühmte Gelehrte, viele Juristen usw. zu den seinigen zählte. Jenem, dem „Club der Begeisterung" stand dieser als der „Club des Verstandes"[4]) gegenüber. Während der politische Klub entschieden demokratisch gerichtet war, sagte man dem konstitutionellen mit Recht nach, daß er der Aristokratie der Bourgeoisie bei den bevorstehenden Wahlen zum Siege zu verhelfen erstrebe.[5]) Ja, er sah sich häufig sogar der Anklage ausgesetzt, das ziemlich begriffslose Wort „Constitution" diene ihm oder doch vielen seiner Mitglieder nur als Deckmantel für aristokratische und reaktionäre Bestrebungen.[6]) Nicht zweifelhaft ist, daß der Vorstand dieses Klubs mit den Ministern in Verbindung stand, wenn auch VARNHAGEN sagt, daß

1) LEOPOLD V. RANKE, *Aus dem Briefwechsel FRIEDRICH WILHELMS IV. mit BUNSEN* (Leipzig 1873), p. 265.

2) S. Brief LIV (3. Juli 1847) nebst Wortlaut des Toastes, vgl. a. Brief LIII (11. Juni 1847).

3) *Die Clubs und Volksversammlungen Berlins bis zum Lindenclub hinab oder vielmehr hinauf* (Berlin 1848), p. 24; s. a. z. B. Magdeburgische Zeitung No. 100, 27. April 1848.

4) AUGUST BRASS, *Geschichte der Demokratie und Revolution in Berlin* (Berlin 1849), p. 9.

5) S. HELD's Locomotive No. 27 v. 5. Mai 1848, p. 106.

6) S. die in vorstehender Anm. cit. Nummer der Locomotive, p. 105; vgl. a. VARNHAGENS *Tagebücher*, Bd. V, p. 132.

diesen das Geschick, rechten Gebrauch hiervon zu machen, gefehlt habe.[1]) Entsprechend diesem seinem ganzen Charakter und vor allem dem Umstande, daß er die Verfassung auf sein Banner geschrieben hatte, legte er selbst bei seinen Verhandlungen auf strengste Beobachtung der Vorschriften parlamentarischer Ordnung und Verfassung großes Gewicht,[2]) wofür der Leser in den folgenden Berichten übrigens auch Belege finden wird.[3]) Dieser Umstand wie auch der Name „Geheimeraths-Club" lassen bereits vermuten, daß man sich von den Sitzungen dieses Klubs im allgemeinen nicht übermäßig viel Unterhaltung versprechen durfte und versprach, ja seine Verhandlungen waren sogar für ziemlich langweilig[4]) verschrieen. Diese Langeweile zu bannen hatte das Schicksal keinen geringeren ausersehen als den größten Mathematiker Preußens. Jacobi hatte bereits einige Male die Sitzungen dieses Klubs besucht und zwar auf Anraten seines Arztes, der sich von solchem Besuch eine wohltuend stimulierende Wirkung auf Jacobis abgespannte Nerven versprach, eine Prognose, die der Patient bestätigt fand. Dabei hatte sich der große Forscher lediglich auf die Rolle des stummen Zuhörers beschränkt. Nur ein kurzer Zwischenruf wird ihm an einer Stelle nachgesagt, jedoch ist dieser insoforn nicht ohne Interesse, als er bereits zeigt, wie wenig es Jacobi darauf ankam, die aura popularis zu erhaschen und wie er weiter nichts erstrebte, als rücksichtslos seine persönliche Ansicht auszusprechen. Ein Redner hatte nämlich in die Versammlung hineingedonnert: Ist jemand in diesem Saal, der die Teilung Polens nicht für ein schmähliches Unrecht hält? Alles hatte geschwiegen, nur von einem Platze aus hörte man in ruhigem und gleichgültigem Tone: Ich. — Es war Jacobi.[5])

Mehr praktische Bedeutung erhielt das Klubleben, als die für den 1. Mai 1848 angesetzten Wahlen für die deutsche und die preußische Nationalversammlung heranrückten und der konstitutionelle Klub es übernahm, der Bürgerschaft Berlins geeignete Kandidaten vorzuschlagen. In die engere Wahl hierfür gelangten zunächst nicht nur diejenigen, welche von dem Vorstand des Klubs oder aus der Mitte des letzteren empfohlen waren, sondern es stand auch jedem frei, sich selbst vorzuschlagen. Alle Bewerber hatten sich dem Klub durch eine Rede vorzustellen und in dieser ihr politisches Glaubensbekenntnis abzulegen. Hierbei forderte in der

1) *Tagebücher*, Bd. V, p. 171 (23. Aug. 1848).

2) S. Aug. Brass, l. c. p. 9.

3) Vgl. z. B. S. 179 Anm. 3.

4) Julian Schmidt in den Grenzboten 1848, II. Quartal, p. 19.

5) Die Grenzboten, 8. Jahrg. I. Sem. II. Bd. (Leipzig 1849), No. 18: „Porträts der Berliner Universität. 2. Jacobi", p. 179. — In dem *Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und M. H. Jacobi* wird dieser Artikel als Anhang wiederabgedruckt werden.

Sitzung v. 21. April H. W. Dove, der dem Comité des Klubs angehörte, im Vorbeigehen seinen Freund Jacobi, den er als glänzenden Stegreifredner kannte, auf, auch eine Kandidatenrede zu halten, und verkündete dies, als Jacobi nicht abgeneigt war, sofort von der Tribüne. Verschiedene Glaubensbekenntnisse waren bereits abgelegt, als an Jacobi die Reihe kam. Der gewaltige Eindruck, den seine Rede hervorbrachte, erhellt aus einer Schilderung, welche die von Arnold Ruge-Leipzig und H. B. Oppenheim-Berlin herausgegebene Reform entwarf.

„Die einzelnen [Redner]“, berichtet das genannte Blatt in No. 25, Leipzig, 26. April 1848, „treten nacheinander auf und halten ihre Rede, die Meisten rühmen sich edler, wohlwollender Gesinnungen für das Volk, eines unbeugsamen Charakters, und was dergleichen schöne Redensarten mehr sind. Glücklich, wer aus seinem Leben ein kleines Conflictchen mit irgend einer Staatsbehörde, eine frühzeitige Entlassung aus dem Staatsdienste, sonst eine Zurücksetzung oder gar irgend einen Preßprozeß citiren kann! Das anständige Märtyrerthum der liberalen Göttinger Hofräthe, das vor einigen Jahren in Deutschland Mode war, als es Collecten von Tilsit bis Wesel hervorrief, wird hier im Kleinen wieder aufgefrischt. Massmann mit dem naiv umgelegten Hemdkragen erzählt seine alten Turnergeschichten und rühmt sich, den baierischen und griechischen Ordensbändern entgangen zu sein (!!), der Major erklärt sich gegen die strenge Disciplin. Andere sprechen so, daß man sie schon oft gehört zu haben glaubt.

Endlich wird der breite Strom der Alltäglichkeit und Gemeinplätzlichkeit durch Etwas unterbrochen, das uns überrascht, als ob ein Fels plötzlich aus der Spree hervorragte. Das Präsidium meldet nämlich den Prof. Jacobi (Naturforscher) an, der auf der Wahlcandidatenliste vergessen sei. Seine Rede hatte Mark und Nerv. Zwar merkte man ihr die Vorbereitung, die Studirtheit etwas an, zwar sprach er von Kant und Fichte, von der Wissenschaft und von Athen; aber er hatte doch ausnahmsweise Gedanken, er trat doch mit Würde auf und suchte zu belehren, statt wie ein unverschämter Bettler seine Leiden und obscuren Verdienste zu preisen, die Niemand aufs Wort glaubt. Er entwickelte den Begriff der Gesetzlichkeit und Ordnung, kritisirte in dieser Beziehung manches gedankenlose Vorurtheil, er wünschte, daß in unserm Cabinet neben den *redlichen Leuten* auch ein Staatsmann säße, daß an die Stelle der Gesetzlichkeit, die in der That jetzt gar nicht existirt, bis zur neuen Ordnung der Dinge, mehr das Motiv der Zweckmäßigkeit trete, er sprach gegen allmälige Entwickelung (ein Strom lasse sich im Laufe nicht aufhalten!) und für directe Wahlen, gegen die Republik, obgleich er vor dem Worte nicht zurückschrecke, und endigte mit einer Apologie der Wissenschaft. — Die Reden der Andern habe ich nicht ausgehalten.“

Auch ein „Berlin, 22. April“ datierter Bericht der Magdeburgischen Zeitung (No. 99, 26. April 1848) mag hier herangezogen werden, in dem es nach abfälligen Bemerkungen über die vorhergegangenen Reden heißt: „Um so erfrischender wirkte nunmehr auf die so sehr gedrangsalte Versammlung die Ansprache des berühmten Professor Jacoby aus Königsberg, jetzt Mitglieds der hiesigen Hochschule. Er war der Held des Tages. Als er in seiner, einem Gelehrten von Europäischem Rufe so wohl anstehenden Bescheidenheit, damit schloß, zu sagen: Wenn er die vielen Kräfte einer so großen und intelligenten Versammlung überschaue, so bleibe ihm nichts übrig, als wie Phocion, da er den Markt verließ, auszurufen: „mögen sich 18 bessere Männer finden“; da, ja da wollte der Jubel kein Ende nehmen. Aber er hatte dem Feinde auch offen ins Auge geschaut. So erkannte er beispielsweise an, daß die jetzigen Minister brave Leute seien, daß sie auch finanzielle Talente besitzen möchten, aber er vermißte die große Behandlung großer Verhältnisse, die Kühnheit des Formbildners, die Kraft eines Stein.“ . . . . . .

Über den außerordentlichen und enthusiasistischen Beifall, den die Rede Jacobis erntete, herrscht in der ganzen Tagespresse nur eine Stimme.[1]) „Eine dreimal wiederholte Salve endlosen Beifalls,“ so schrieb Jacobi[2]) dem Bruder, „ertönte am Schluß; dreimal mußte ich vom Platz aufstehn und wie ein Comödiant mich nach allen Seiten verbeugen. Schelling sagte mir, sein Sohn, der viel die alten griechischen Redner studirt, habe ihm gesagt, daß sie die größten Muster erreichte“. — Wenn es in dem vorstehend abgedruckten Bericht der Reform übrigens heißt, die Rede sei „vorbereitet“ gewesen, so ergibt sich aus der oben nach Jacobi angegebenen Entstehungsgeschichte bereits das Gegenteil, das übrigens auch darin seine Bestätigung findet, daß der Redner dem von „12 Buchhändlern“ an ihn gestellten Verlangen wegen Drucklegung der Rede nicht zu entsprechen vermochte, da er „durchaus nicht mehr genau“ wußte, was er gesagt, „ja nicht einmal den Faden, zumal da wohl keiner darin war“.[2]) Andererseits darf man natürlich annehmen, daß Jacobi zumal unter den damaligen Zeitverhältnissen sich mit denjenigen Fragen, die er erörterte, in Gedanken vorher oft und gründlich beschäftigt hatte. Wenn man also seine Rede als eine „wohldurchdachte“ bezeichnet, so dürfte man das treffen, was der Reporter vielleicht durch die Bezeichnungen „studirt“ und „vorbereitet“ andeuten wollte.

---

1) S. insbesondere auch den Bericht des offiziellen Kluborgans, der Constitutionellen Club-Zeitung, red. v. Robert Prutz, Nr. 1, 22. April 1848, S. 4, sowie A. Wolff, *Berliner Revolutions-Chronik*, Bd. II (Berlin 1852), p. 264.

2) Brief No. LXII (17. Juni 1848).

„Mir war gleich unmittelbar nach meiner Rede etwas bange geworden“, so heißt es in dem zuvor zitierten Briefe JACOBIS „und ich hatte das unbestimmte Gefühl, daß eine große Anstrengung dagegen gemacht werden würde. . . . . Meine Rede war vollkommen unabhängig gewesen. Sie rühmte die Minister als edle und ehrliche Männer, im Finanzfach ausgezeichnet, wünschte aber, daß sie sich durch einen Politiker ergänzten. Bedenklicher war noch ein anderer Punct, zumal ich wohl in der Hast der Improvisation den Gedanken nicht ganz klar ausgesprochen haben mag. Wie ich ihn später entwickelte, war er so: Ich wäre zwar für eine constitutionelle Monarchie, lege aber auf die Verfassungen überhaupt nicht den großen Werth. Absolute Monarchieen hätten Großes für die Völker geleistet, aber auch bei dem Namen einer Republik überliefe mich keine Gänsehaut. Es käme immer am meisten auf den patriotischen Sinn des Volkes an. . . . . . Da jetzt jeder Reactionär oder Republicaner heißt, so bin ich dadurch ich weiß nicht wie in die letztre Klasse geworfen worden.“ . . . — Der Minister des Innern, ALFRED V. AUERSWALD, war durch seinen Privatsekretär, einen studiosus AEGIDI, den späteren bekannten Prof iuris der Berliner Universität und Mitbegründer der freikonservativen Partei, welcher dem konstitutionellen Klub angehörte und dort als Sekretär des Klubs fungierte, gewiß unterrichtet und mag anheimgegeben haben, bei dem bedenklichen Beifall, welchen die dem Minister gewiß nicht unbedenklich erscheinenden Ausführungen JACOBIS gefunden hatten, eine Gegenbewegung einzuleiten.[1] Doch es scheint, daß in erster Linie nicht die entwickelten Anschauungen JACOBI verhängnisvoll wurden, als vielmehr seine glänzenden Talente, ohne welche sein Auftreten kaum weiter beachtet worden wäre. Jetzt erregte die Rede dagegen nicht nur die Aufmerksamkeit der politischen Gegner, sondern mußte ihm vor allem von seiten der vielen ehrgeizigen Kandidaten des Klubs Neid und Eifersucht zuziehen, ihm, dem unbequemen Eindringling, mit dem bisher niemand gerechnet hatte, der gar nicht zu den offiziell vorgeschlagenen Kandidaten des Klubs, sondern nur zu den freiwilligen Bewerbern gehörte, nichtsdestoweniger aber sofort den allergrößten Beifall der Versammlung gefunden hatte Schließt doch z. B der oben zitierte Bericht aus der Magdeburgischen Zeitung bereits mit der Prognose, daß nur JACOBI und MASSMANN von allen Kandidaten Aussicht auf Erfolg zu haben schienen, „diese beiden aber auch eine sichere“.

Unter den Gegnern JACOBIS trat besonders hervor ein Triumvirat, bestehend aus den bekannten Dichtern ROBERT PRUTZ und WILHELM JORDAN, von denen der zweite, politisch von recht zweifelhaftem Charakter[2]),

1) Vgl. den mehrfach zitierten JACOBIschen Brief No. LXII.

2) S. HEINRICH LAUBE, *Das erste deutsche Parlament* (Leipzig 1849), Bd. II p. 163f.

seine ehrgeizigen Pläne später durch ein allerdings außerhalb Berlins erworbenes Mandat zur Frankfurter Nationalversammmlung gekrönt sah, und als dem dritten und eigentlichen Führer in der nun beginnenden antijacobischen Intrigue, dem Vorsitzenden des Klubs, Ludwig Crelinger. Dieser, ein Mann von ganz hervorragenden geistigen Fähigkeiten, war früher Oberlandesgerichtsrat gewesen, hatte jedoch einer Verfehlung wegen diese Stellung aufgeben müssen, war dann Justizkommissar (Rechtsanwalt) in Königsberg geworden, hatte dort für eine „Kapacität ersten Ranges“[1]) gegolten und hatte vor allem durch sein Auftreten in dem berühmten Polenprozeß von 1847, dem sogenannten „Riesenprozeß“, sich ein dauerndes Gedächtnis in der Geschichte der preußischen Advokatur erworben.[2]) „Der kluge Rechtsanwalt Crelinger, ein hagerer Herr mit großer Judennase, dem man den feinen, verwöhnten Gelehrten sofort ansah“, so wird er bei Treitschke[3]) beschrieben; dazu ehrgeizig, erstrebte er doch, wie man sagte, die Stellung des Oberbürgermeisters von Berlin.[4]) Sachlich hatten nun Jacobis Gegner gegen dessen Rede vermutlich nicht viel vorzubringen; vor allem bot auch bei dem ungeheuren Beifall, den seine Ausführungen bereits gefunden hatten, ein hiergegen gerichteter Angriff sehr wenig Aussicht. Man spielte daher den Kampf vorwiegend auf das Gebiet des Persönlichen hinüber. Frühere Königsberger spielten damals in der politischen Bewegung Berlins überhaupt eine große Rolle. Crelinger war dort (in Königsberg) einer der Führer der liberalen Bewegung gewesen, Jordan hatte an der „Albertina“ studiert, der schon erwähnte stud. Aegidi sich ebendort das consilium abeundi geholt. Während man selbst an der Wiege des preußischen Liberalismus gestanden hatte und sich mit Stolz seiner wirklichen oder eingebildeten politischen Verdienste[5]) erinnern durfte, hatte der berühmte Mathematiker in derselben Zeit sich abseits gehalten. Ja, noch mehr als das: man glaubte allerlei für einen liberalen Politiker bedenkliche Antezedenzien aus Jacobis früherem Leben zu kennen. Dies war die Stelle, wo man ihn verwundbar wähnte, gegen sie mußte man also den Speer richten. — So entstanden jene denkwürdigen Debatten über die „Jacobische Angelegenheit“, welche mehrere Sitzungen des konstitutionellen Klubs ausfüllten, welche den Glanzpunkt[6]) in der Geschichte dieses Klubs bilden und welche während einer Woche das Interesse der Berliner

1) Falkson, l. c. p. 87.

2) S. Ad. Weissler, *Geschichte der Rechtsanwaltschaft* (Leipzig 1905), p. 469.

3) *Deutsche Geschichte im Neunzehnten Jahrh.*, Th. V (Leipzig 1894), p. 205.

4) S. Die Reform Nr. 27, 28. April 1848.

5) S. z. B. bezüglich Crelingers und Jordans Treitschke a. a. O.

6) *Die Clubs und Volksversammlungen Berlins bis zum Lindenklub hinab oder vielmehr hinauf* (Berlin 1848).

Bürgerschaft in solchem Grade fesselten, daß während dieser Zeit die Zahl der Mitglieder des Klubs rapide wuchs und z B. von einer Sitzung (23. April) bis zur nächsten (25. April) um 200 (etwa 50 Prozent) stieg. In unserer Darstellung dieser Debatten werden wir uns auf die Berichte der Tageszeitungen stützen, besonders auf die der Berliner Zeitungs-Halle. Die Berichte dieses Blatts, das nach einem zeitgenössischen Autor[1]) unter den Berliner Zeitungen die einzige war, die nach der Revolution das Panier der Freiheit aufsteckte, während die älteren Blätter (Vossische Zeitung, Haude u. Spenersche Zeitung) „wie der Gaul, der am Pfluge ergraut ist" von der Freiheit keinen Gebrauch machen wollten, sind bei weitem die eingehendsten[2]) und geben nach JACOBI[3]) „gute und unpartheiische Auszüge". Bevor wir jedoch zu den Einzelheiten übergehen, mag hier ein Stimmungsbild Platz finden, das dem Hauptquellenwerk der Berliner Revolutionsbewegung, der äußerst fleißigen, wenn auch nicht tendenzfreien[4]) *Berliner Revolutions-Chronik* von ADOLPH WOLFF[5]) (3 Bände) entnommen ist (Bd. II, Berlin 1852, p. 265).

„JACOBIS Rede weniger", so heißt es dort, „als die Person des Redners beschäftigte den Club einige Sitzungen hindurch. Nie war hier eine aufgeregtere Debatte geführt, nie das Feld der Persönlichkeiten eifriger betreten worden. Der berühmte Mathematiker, einer der gefeiertsten Gelehrten seiner Zeit, inmitten einer Schaar von Gegnern und Anklägern, die mit Heftigkeit und schonungslos erhobenen Angriffspunkte mit Ruhe und Humor widerlegend, dem kleinsten seiner Gegner Rede stehend, bald wie der Löwe mit der Maus spielend, bald nicht sowohl mit dem Ernste sittlicher Entrüstung, als vielmehr mit scheinbar harmlosem Spotte den Anklägern begegnend, endlich, nachdem er einen unwürdigen Kampf mit glänzenden Mitteln geführt, als vielbejubelter Sieger hervorgehend — das war das Schauspiel, dessen erster Theil am ersten Ostertage[6]) im Club aufgeführt wurde" ....

---

1) ROBERT SPRINGER, *Berlin's Straßen, Kneipen und Clubs im Jahre 1848* (Berlin 1850), p. 144.

2) Ohne den Drucker-Strike, unter dem einzelne Zeitungen während eines Teils jener Zeit zu leiden hatten, würden wohl noch mehr Berichte vorliegen.

3) Brief No. LXII (20. Juni 1848).

4) Vgl. W. BUSCH, *Die Berliner Märztage von 1848* (München u. Leipzig 1899), p. 49.

5) Die sehr verkürzte und lediglich durch Zusammenstreichen aus der ersten Ausgabe entstandene *Jubiläums-Volksausgabe* v. C. GOMPERTZ in 1. Bd. (Berlin 1898) enthält zwar die hier abgedruckte Stelle, von den in der ersten Ausgabe abgedruckten und hier in Betracht kommenden Berichten der Zeitungs-Halle dagegen nichts.

6) 23. April.

## IV.

Sofort in der auf Jacobis Kandidaten-Rede folgenden Klubsitzung, bereits am nächsten Tage (22. April), war in Abwesenheit des berühmten Mathematikers, der die Klubsitzungen nur sehr unregelmäßig besuchte, aus dem Klub der Antrag gestellt worden, die Rede Jacobis drucken zu lassen. Dies war das Alarmsignal für Jacobis Gegner, auf dem Plan zu erscheinen und zum Angriff vorzugehen: Der Sprecher des Klubs, Ludwig Crelinger, ergriff sofort diese Gelegenheit, um „einige Bemerkungen über die allgemeine Bedeutung politischer Glaubensbekenntnisse zu machen", wie es in dem Bericht des offiziellen Kluborgans verschämt heißt. „Dieselben [die politischen Glaubensbekenntnisse] seien meist unvollständig und böten, allein genommen, keine genügende Bürgschaft für die wahre Überzeugung der Candidaten und am Allerwenigsten dafür, daß sie an der geäußerten Überzeugung auch für die Zukunft festhalten würden. Vielmehr zu vollständiger Prüfung sei es nöthig auch auf die politische Vergangenheit der Candidaten zurückzugehen. Vor Allem aber habe man sich zu hüten, daß nicht die blendende Form einer Rede das Urtheil gefangen nehme und die bedächtige Prüfung des Inhalts verhindere."[1])

Crelinger hatte zwar Jacobi nicht ausdrücklich genannt; der Zusammenhang und eine Anspielung[2]) auf den Mann, dessen Rede den außerordentlichsten Beifall der Versammlung erhalten hatte, schlossen jedoch jeden Zweifel aus. Die Folge war, daß nun auch Jacobis Anhänger sich zusammenschlossen und in einer Weißbierstube eine Leibgarde des berühmten Mathematikers begründeten.[3]) Jacobi war von der gegen ihn gesponnenen Intrigue verständigt worden und ging nun in die nächste, am 23. April, dem ersten Ostertage, stattfindende Klubsitzung, um eine Wiederholung der ihn betreffenden Bemerkungen aus der vorigen Sitzung zu fordern. Über diese Sitzung des 23. April berichtet die Berliner Zeitungs-Halle — nach Aufzählung der 18 Kandidaten, für welche sich innerhalb des Klubs eine Majorität ergeben hatte, darunter Crelinger, Prutz, Borsig, Diesterweg, Jordan, Jacobi, Dove, v. Raumer, v. Grolmann, v. Humboldt — weiter folgendermaßen:[4])

„Der Sprecher Crelinger bemerkt: Prof. Jacobi habe sich in einer persönlichen Angelegenheit an ihn wenden zu müssen erklärt, er gebe

1) Constitutionelle Club-Zeitung No. 2, 26. April 1848, S. 9.

2) A. Wolff, l. c. p. 266. — 3) Robert Springer, l. c. p. 185.

4) Berliner Zeitungs-Halle, No. 98, 26. April 1848, Beilage und No. 99, 27. April 1848, Hauptblatt; abgedruckt bei A. Wolff, l. c. p. 266 ff. — Wir folgen hierbei stets dem Originalwortlaut der Zeitungs-Halle, von dem der bei Wolff bisweilen, allerdings nur unwesentlich, abweicht.

deshalb für die Dauer dieser Erörterung das Sprecheramt in die Hände des Präs. Lette. .... Lette übernimmt das Sprecheramt. Prof. Jacobi: Er sei von Crelinger verdächtigt worden, Crelinger habe auf seine politischen Antecedentien angespielt, er bitte zu wiederholen, was in seiner Abwesenheit über seine Person und seine Rede gesagt sei. Crelinger: Weist den Vorwurf der Verdächtigung zurück; was er gesagt habe, gelte nicht der Person „des hochverehrten Mitbürgers". Eben so wenig habe er die glänzende Rede bemängeln wollen; aber er habe in ihr Gedanken und vor Allem ein politisches Glaubensbekenntniss vermißt. Dr. Bernhardt: Crelinger habe von den politischen Antecedentien Jacobis gesprochen. Crelinger gibt dies zu. Jacobi: Es sei gesagt, seine Rede habe der Gedanken entbehrt; er glaube allerdings Gedanken geäußert zu haben, einige ewige Gedanken und manche allerdings nur auf die Zeit bezügliche. Wenn man so lange spreche, könne es ohne allen Phrasenschmuck freilich nicht abgehen Es sei nicht möglich, nur in Gedanken zu sprechen, und ein wohlgezielter Pfeil treffe, auch wenn er mit bunten Federn geziert sei. Er glaube auch ein politisches Glaubensbekenntniss abgelegt zu haben; er sei jedoch bereit, ein solches noch einmal vorzutragen, wenn die Gesellschaft es verlange. Lette bringt die Frage zur Abstimmung: Verlangt die Gesellschaft, daß Prof. Jacobi ein politisches Glaubensbekenntniss ablege (auf Jacobis Verlangen mit dem Zusatz), weil dies bisher nicht genügend geschehen sei? Wiederholte Abstimmung durch Händeaufheben mit Gegenprobe und Rückprobe. Die Versammlung ist uneinig über das Resultat der Abstimmung. Lette erklärt: Die Majorität sei g e g e n ein neues Glaubensbekenntniss. Jacobi: Man habe von seinen politischen Antecedentien gesprochen. Dergleichen habe er nicht; er sei eine politische Jungfrau, er habe nicht in Zeitungen geschrieben, seine Wirksamkeit auf den Kreis seiner Wissenschaft beschränkt, die Zeiten seien zur Betheiligung an der Politik nicht geeignet gewesen, er habe aber nachgedacht über Staatsverhältnisse und sich eine feste Ansicht gebildet und bewahrt. Wolle man seine Biographie wissen: sie sei die aller Gelehrten. Wenn daher auf seine politischen Antecedentien eine Anklage gegründet werden solle, so müsse er erwarten, daß man diese näher substantiiere, er sei bereit, über alle Punkte Aufschluß zu geben. Prutz: Er sei heiser, aber hier müsse er reden. Prof. Jacobi behaupte, keine politischen Antecedentien zu haben. Das sei ein übles Geständniss eines Candidaten. Jacobi habe in Königsberg gelebt, „in Königsberg, der Geburtsstätte unserer Freiheit". Es habe dort an Veranlassung nicht gefehlt, sich an der Politik zu betheiligen. Wenn er dies unterlassen habe, so spreche das nicht zu seinen Gunsten. Aber es seien allerdings politische Antecedentien vorhanden. Prof. Jacobi habe zunächst zu beantworten, ob er den Brief der Akademie an den König in der Raumerschen Angelegenheit[1]) mit unterschrieben habe? Außerdem sei bekannt geworden, daß Prof. Jacobi sich an die Machthaber herangedrängt, Gunstbezeugungen und Belohnungen von ihnen angenommen[2]) habe. Ihm (Dr. Prutz) sei dies auf Privatwegen bekannt geworden, er sei auch bereit seine Quelle zu nennen, sein Gewährsmann sei — Crelinger. Hierüber werde Aufschluß erwartet. Dr. Glaser: Man klage hier eine Person an auf Grund politischer Antecedentien. Thue man dies bei Einem, so müsse es bei Allen geschehen. Er beantrage: die politischen Antecedentien aller Candidaten in gleicher Art zu erörtern. (Stürmischer Beifall.) Prof. Schellbach: Meine Herren, Sie scheinen die Bedeutung des Mannes nicht zu kennen, den Sie richten wollen. Er ist der Spinoza seiner Wissenschaft . . . (Furchtbarer Lärm unterbricht den Redner.) Lette läßt darüber abstimmen: ob die Versammlung den Prof. Schellbach weiter hören wolle? Es erheben sich Hände, und der Sprecher theilt mit, die Majorität wolle den Redner nicht hören. — Jacobi: „*Wenn Hr. Crelinger Hrn. Prutz gesagt hat, ich habe mich an die Macht herangedrängt, so ist er ein Lügner*". (Furchtbarer Tumult. „Zurücknehmen! Abbitten!" Eine Viertelstunde lang befindet sich der Club in vollständiger Auflösung. Endlich werden die Hammerschläge des Sprechers hörbar.) Lette: Der Redner hat sich eines Ausdruckes bedient, der für die gröbste Verletzung parlamentarischer Sitte gilt, namentlich in England. Jacobi: ‚Ich habe nur einen Widerspruch äußern wollen". (Neuer Sturm. „Zurücknehmen! Zurücknehmen"!) Jacobi: „Wenn Hr. Crelinger von mir gekränkt ist, so will ich den Ausdruck zurücknehmen". (Der Lärm wieder-

---

1) Für diese zumal in Tageszeitungen vielerörterte Angelegenheit muß auf Harnack, *Geschichte der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, Ausg. in einem Bande (Berlin 1901), p. 704ff. verwiesen werden, wo zum ersten Male eine quellenmäßige Darstellung der ganzen Angelegenheit gegeben ist. Hier sei nur kurz folgendes bemerkt: Raumer hielt als Sekretar der Akademie 1847 am 28. Januar, dem Friedrichs-Tage, eine Lobrede auf den großen König, worin er diesen gegen die damals von theologischer Seite erhobene Kritik in Schutz nahm. Dabei ging Raumer jedoch selbst in zum Teil wenig angemessener Form zum Angriff über und spielte mehrfach auf die der Fridericianischen entgegengesetzte Religions-Politik Friedrich Wilhelms IV. an. Der König fühlte sich, zumal das Publikum mehrfach gelacht hatte, tief gekränkt und äußerte dies sowohl zu Humboldt wie zum Kultusminister. Die Akademie nahm Veranlassung, ein Entschuldigungsschreiben an den König zu richten, nachdem Raumer sich selbst der Akademie gegenüber entschuldigt hatte. Da die Tagespresse Raumer fortgesetzt als Heros des Freisinns feierte, so ließ der Minister Eichhorn den auf Grund des Raumerschen Schreibens erfolgten Brief der Akademie an den König veröffentlichen, worauf sich in der Presse ein wahrer Entrüstungssturm gegen die Akademie und die Akademiker erhob.

2) In dem Bericht der Const. Club-Zeitung No. 2, 26. April 1848, S. 10 heißt es: „erstrebt"

holt sich. „Abbitten! Abbitten!") CRELINGER erklärt, zwar tief gekränkt, durch JACOBIS Erklärung jedoch befriedigt zu sein. LETTE und mit ihm ein großer Theil der Versammlung: Wenn Hr. CRELINGER befriedigt ist, so hat die Gesellschaft noch keine Genugthuung. Der Redner muß die Gesellschaft um Verzeihung bitten. JACOBI: Ich bitte die Gesellschaft um Verzeihung. (Der Lärm legt sich allmälig und JACOBI fährt fort:) Es sei gesagt, er habe sich an die Macht herangedrängt und Gunstbezeugungen empfangen. Und doch sei er nicht einmal *Geheimrath*![1]) Wenn er Gunstbezeugungen hätte erstreben wollen, so würde er diese, das werde man ihm zugeben, durch die bloße Äußerung des Wunsches erlangt haben. Die Pariser Akademie habe acht Gelehrte zu ihren Associés ernannt; unter diesen Acht sei er Einer, als Geheimrath würde er Einer unter 80 oder 800 oder 8000 gewesen sein. Er habe diese Gunst aber nicht erlangt, er sei nur Professor. Von *Orden* habe er nur den rothen Adlerorden 3ter Klasse bei der Huldigung in Königsberg erhalten, er würde vielleicht, selbst ohne sich herandrängen zu müssen, die zweite Klasse haben erlangen können.[2]) ARAGO habe ihn dem Minister SALVANDY für die Ehrenlegion vorgeschlagen, der Minister habe ihn nicht decorirt wegen seiner politischen Gesinnung. Aber der „National" habe ihn wegen eben derselben gelobt, und der „National" stehe nicht in dem Rufe, servile Gunstbewerber zu loben. (Lebhafter Beifall. Von anderen Seiten: „Aber der Brief, der RAUMERsche Brief!") Er müsse noch vom Orden pour le mérite sprechen. Der Orden pour le mérite, meine Herren, ist nicht sowohl eine Gunstbezeugung, als eine Bequemlichkeit. Der König hat die Bequemlichkeit, die Gelehrten alle Jahre einmal bei sich zu sehen; die Gelehrten wissen jeden 24. Jan. im Voraus sicher: daß sie von Mittag bis Abends um 6 Uhr beim König sind, und am Abend wissen sie gewiß, daß sie ihn vor dem nächsten 24. Jan. nicht wieder sehen. Er wisse nun nicht, in welcher Art er sich an die Machthaber herangedrängt habe. Vier Jahre sei er in Berlin und nur einmal beim Minister EICHHORN gewesen, um einem Feinde eine ihm wegen politischer Gesinnungen versagte Unterstützung zu einer Erholungsreise auszuwirken. (Stürmisches Bravo.) Über sein Verhältniss zum König sei Allerlei gesagt worden, unter Anderem, daß er einen Tag um den andern beim Könige esse. Das sei nicht wahr, er habe nie eine Privat-Audienz gehabt; einmal habe er eine solche nachgesucht, da sei er zu Tisch ge-

1) Der Berliner Krakehler schrieb in seiner No. 1 (18. Mai 1848): „In dem neuen Gesetzbuch soll das Wort Geheimerath mit unter den stärksten Injurien stehen"; vgl. a. No. 2 und 4 dess. Blattes.

2) Wie z. B. diesen Orden der Astronom H. C. SCHUMACHER damals besaß, der nicht einmal preuß. Professor und vor allem kein — JACOBI war.

beten worden. Man mache ihm zum Vorwurf, daß er sich in Königsberg an den liberalen Bestrebungen nicht betheiligt habe. Er sei seit 4 Jahren[1]) von dort entfernt und *wisse* nicht, daß *bis dahin* in Königsberg Politisches vorgegangen sei.[2]) Sein guter Freund, Dr. Jacoby, habe früher[3]) die Vier Fragen geschrieben, auf welche jetzt erst die Antwort erfolgt sei. Ausserdem wisse er von politischen Bestrebungen in Königsberg während seines Aufenthalts dort Nichts. Dagegen wolle er auf Eins aufmerksam machen. Jetzt liberal zu sein, sei keine Kunst. In Zeiten, wo es noch gefährlich gewesen, habe er in der deutschen Gesellschaft in Königsberg in Gegenwart des Präsidenten Zander, der den Dr. Jacoby damals wegen Preßvergehen zur Criminaluntersuchung gezogen, über die kantischen Principien von der Freiheit und namentlich von der Preßfreiheit gelesen. Jacoby sei ebenfalls anwesend gewesen, und die Abhandlung habe so viel Aufsehen gemacht, daß der Minister v. Schön sie abgeschrieben habe. Endlich wolle er noch eine Notiz geben, die vielleicht für die Unabhängigkeit seines Charakters zeuge. Es sei ihm vor einiger Zeit zufällig eine bereits unterzeichnete Cabinetsordre zu Gesicht gekommen, welche einen Mann in das Unterrichts-Ministerium berufen, von dem er die Gefährdung der freien Wissenschaft habe besorgen müssen. Sofort habe er an den Minister Eichhorn und an den König geschrieben, die Gefahr geschildert, und gegen seine eigene Erwartung seien Cabinetsordre und sämmtliche Ministerial-Verfügungen zurückgenommen worden. — Das sei Alles, was ihm einfalle. Wolle man das politische Antecedentien nennen, nun so möge man ihn nach diesen beurtheilen. Er erwarte nun die Angabe von Thatsachen, durch welche sein Herandrängen an die Gewalt dargethan werden könne. — Der Redner verläßt unter unaufhörlichem Beifallssturm die Tribüne. — Crelinger: Wenn es sich um den politischen Charakter eines Mannes handele, so könne man denselben nach dem Gesammteindruck, welchen man von dem Leben des Mannes empfangen habe, beurtheilen. Dieser Gesammteindruck werde durch kleine Züge, durch das Urtheil der Umgebung hervorgebracht,

1) Unter Einrechnung der italienischen Reise (1843/44), nach deren Beendigung Jacobi bekanntlich nach Berlin übersiedelte, sogar seit fast 5 Jahren.

2) Ferd. Falkson, a. a. O. p. 109 betrachtet als Ausgangspunkt der vormärzlichen liberalen Bewegung in Königsberg in der Tat erst die Gründung der „Bürgergesellschaft“ (20. Dez. 1844). Keinenfalls gab es aber vor den vierziger Jahren eine liberale Bewegung dort: die Juli-Revolution war an Königsberg spurlos vorübergegangen und zur Zeit der Demagogenverfolgungen hatte das Ministerium noch in einem besonderen Schreiben anerkannt, daß auf dieser Universität nichts von revolutionären Tendenzen zu bemerken gewesen (s. H. Prutz, *Die Königliche Albertus-Universität zu Königsberg i. Pr. im 19. Jahrh.* (Königsberg 1894), p. 107; sowie L. Friedländer, *Aus Königsberger Gelehrtenkreisen*, Deutsche Rundschau, Bd. 88, 1896, p. 224; vgl. dazu auch *Denkwürdigkeiten aus dem Leben des Generals Oldwig v. Natzmer*, herausg. v. Greomar Ernst v. Natzmer, Teil II (Gotha 1888), p. 149). — 3) 1841.

er sei entscheidend, ohne daß bestimmte Facta vorhanden zu sein brauchten, welche ihn bewahrheiten. Es habe schon seit dem Regierungsantritt des jetzigen Königs eine Partei in Königsberg bestanden, die man die liberale genannt habe. Er selbst sei ihr beigezählt worden. Niemand habe gezweifelt, daß Professor JACOBI derselben gleichfalls angehöre. Seine hohe geistige Begabung, seine Verbindung mit dem Minister VON SCHÖN [1]), einzelne Äußerungen, welche er diesem gemacht, haben diese Annahme unterstützt. Trotzdem habe er sich von den Liberalen gesondert, er habe sich in der Umgebung des Königs wohlgefallen und eine des freien Mannes unwürdige Weise dem Könige gegenüber verrathen. (Lärm in der Versammlung. Man fordert „Thatsachen".) „Professor JACOBI hat vor Aller Augen dem Könige die Hand geküßt. Meine Herren, es war ein Gefühl des tiefsten Schmerzes, das uns Alle übermannte, als wir dies vor unseren Augen vorgehen sahen. Und nun ersuche ich den Herrn Sprecher, diesen Brief, den mir Herr Dr. PRUTZ gegeben, zu verlesen." LETTE verliest ein Schreiben, mit welchem JACOBI dem Könige seine mathematischen Abhandlungen zugeeignet hat. Man ruft nach dem Datum: es ist der 26. August [2]) 1846. In dem Schreiben ist charakteristisch die Anerkennung, welche der Verfasser dem Könige für die Unterstützungen ausspricht, durch die es ihm möglich geworden sei, Kraft und Muße für seine wissenschaftliche Thätigkeit zu gewinnen. Verschiedenartige Rufe geben zu erkennen, daß der Brief den beabsichtigten Eindruck auf die Versammlung nicht hervorgebracht hat. Herr CRELINGER fährt jedoch fort: „Kann, meine Herren, Jemand, der der Gewalt so entgegengekommen ist, Ihre Rechte vertreten?" (Neuer Tumult.) JACOBI: „Meine Herren, mir wird vorgeworfen, daß ich dem Könige die Hand geküßt; o, ich habe viel, viel Schlimmeres gethan, ich habe sogar dem verstorbenen Papst [3]) die Hand geküßt". Der Redner

---

1) Der Minister v. SCHÖN (vgl. oben S. 158) schätzte JACOBI sehr hoch. „Diese Kern-Männer" sagt er einmal in seiner Selbstbiographie von BESSEL, JACOBI, HERBART und einem anderen Freund, mit denen er den Plan einer polytechnischen Schule beraten habe (*Aus den Papieren des Ministers* THEODOR v. SCHÖN, Bd III (Berlin 1876), p. 104). Stolz darauf, ein Schüler KANTS zu sein, verkehrte SCHÖN mit Vorliebe mit den Gelehrten der Königsberger Universität. „BESSEL, MOSER, JACOBI, ROSENKRANZ gehören zu seinem intimsten Umgange", heißt es in einer Schrift *Preußens Staatsmänner.* III. SCHÖN (Leipzig 1842), p. 31, „auf seiner Geschäftsreise in der Provinz wird er gewöhnlich von einem dieser Gelehrten begleitet". Vgl. a. einen Brief SCHÖNS v. 25. Dez. 1843 in der Vierteljahrschr. für Volkswirthsch., Politik und Kulturgesch. 66 (1880), p. 29, wonach er eine staatswissenschaftliche Frage mit seinen Freunden: „BESSEL dem Himmlischen, HAGEN dem Staatswirth, JACOBI dem großen Kalkulator, MOSER dem Lichtfreund" besprochen hatte.

2) 30. August 1846; s. C. G. J. JACOBIS *Gesammelte Werke*, Bd. VII, p. 375.

3) Gregor XVI. auf der weiterhin erwähnten italienischen Reise in einer Audienz v. 28. Dez. 1843.

rechtfertigt den angefochtenen Handkuß als einen Ausdruck persönlicher Dankbarkeit; der König habe ihm die Mittel gewährt, zur Herstellung seiner Gesundheit eine Reise nach Italien zu machen usw. (Man ruft: „der Raumersche Brief!") Er wolle sich auch über den Brief in der Raumerschen Angelegenheit erklären. Man müsse wissen, wie es bei der Unterzeichnung zugegangen. Nach einer heißen Debatte von vier Stunden, als Alle bereits ermüdet gewesen,[1]) sei plötzlich ein vertrauenswürdiges Mitglied[2]) mit dem Bemerken eingetreten, er habe einen Brief entworfen, man dürfe ihn nur unterschreiben. „Ich habe, wie alle meine Collegen, unterzeichnet, ohne zu lesen.[3]) Erst durch die Zeitungen habe ich von dem Inhalt des Briefes Kenntniss erhalten." Sei ein Fehler begangen worden, so bestehe er darin, daß man Etwas, was man nicht gelesen, unterschrieben habe. Das sei nichts Unverzeihliches. Er wolle sich nicht damit entschuldigen, daß er nur gethan habe was vielen Anderen mit ihm zur Last falle. Aber man möge nicht vergessen, daß der Brief Nichts bezweckt habe, als dem Könige eine Höflichkeit zu bezeigen. Der König sei als Gast in die Akademie gekommen und verletzt worden durch *Polissonnerien.* (Lärm. „Unparlamentarisch!") Der Redner bittet um Entschuldigung, er sei heut unglücklich in der Wahl der Ausdrücke. Dem Könige sei aber jedenfalls mit Unhöflichkeit begegnet worden, und es habe sich nur darum gehandelt, eine Unhöflichkeit durch eine Höflichkeit gut zu machen. Daß *er*, der Redner, nichts weiter gewollt habe, möge der Umstand zeigen, daß er am anderen Tage die Weglassung der althergebrachten weitschweifigen Redensarten in künftigen Briefen der Akademie an den König beantragt und durchgesetzt habe. Sein so eben verlesenes Zueignungsschreiben an den König enthalte nichts was seinen Charakter beflecke. Es sei, wie ein großer Gelehrter schon gesagt habe, nützlich einem Könige zu sagen: Du bist der Vater des Volkes, damit er sich bemühe, es zu werden. Es sei ihm deshalb zweckmäßiger erschienen, dem Könige zu sagen: „Ew. Majestät stehen an der Spitze der Bewegung!" als „Stellen Sie sich an die Spitze!" (Hier erhebt sich in der Nähe der Tribüne ein furchtbarer Tumult; der Ruf: „Heraus, Heraus!" wird gehört, und die Frage fast aller Anwesenden, wem dieser Ruf gelte, steigert den Lärmen bis zur äußersten Höhe parlamentarischer Aufregung. Fünf Minuten lang ringt der Hammer des Sprechers vergeblich nach der ihm gebührenden Beachtung. Endlich legt sich der Sturm und man hört den

1) Über diese Akademie-Sitzung vom 4. Febr. 1847 vgl. das Nähere bei Harnack, l. c. p. 708ff.

2) Böckh, vgl. dazu den Brief (No. LIV) Jacobis v. 3. Juli 1847 an den Bruder. Nach A. Harnack, l. c. p. 709 billigten alle Akademiker das Böckhsche Schreiben.

3) „Heftiges Murren" verzeichnet hier der Bericht der Const. Club-Zeitung Nr. 2, 26. Apr. 1848, S. 10.

*Sprecher*) LETTE: Unser Secretair hat sich eine durchaus unparlamentarische Äußerung zu Schulden kommen lassen. Er muß die Versammlung um Verzeihung bitten. (Neuer Lärm: „Welche Äußerung?") Er hat „Pfui!" gesagt. — Stud. AEGIDI, Secr.: „Ich habe mich zu dem Ausruf fortreißen lassen, ich bitte um Verzeihung. Die Versammlung hat schon einmal Absolution ertheilt, sie wird sie mir nicht versagen. Was Einem recht ist etc." — JACOBI: „Ich sehe, es will mit meiner Vertheidigung nicht glücken, vielleicht fange ich es zu ungeschickt an. Ich bitte nur noch um die Gunst, aus der Gesellschaft scheiden zu dürfen". (Er will sich entfernen. Seine Freunde umringen ihn. Von vielen Seiten hört man: Nein, nein! Hierbleiben! Endlich winkt Hr. JACOBI mit dem Hute und setzt sich nieder.) Es wird wieder ruhiger. — Herr v. BARDELEBEN tritt auf. Das Unterschreiben des Briefes der Akademie, ohne ihn durchzulesen, sei wenigstens Indifferenz, Leichtsinn, Eigenschaften, die ein Volksvertreter nicht besitzen dürfe. Außerdem habe Hr. JACOBI kein genügendes Glaubensbekenntniss abgelegt Er habe zwar gesagt, er sei für die constitutionelle Monarchie, er bekomme aber auch keine Gänsehaut, wenn er das Wort „Republik" nennen höre. Das sei eine sehr schwankende Meinungsäußerung. Auch er, der Redner, halte die Republik für die vollkommenste Verfassungs-Form, aber für jetzt sei bei uns noch eine Kluft zwischen Monarchie und Republik, die nur mit Blut ausgefüllt werden könne. Dem Charakter des Prof. JACOBI falle auch zur Last, daß er mit keinem Worte in seiner Rede der Person des Königs gedacht habe, des Königs, der ihn, wie er selbst zugestanden, in den Tagen seines Glückes zu Dank verpflichtet habe, und dessen jetzt zu gedenken um so mehr Pflicht eines Ehrenmannes sei, als jeder Bube jetzt das Haupt des tiefgebeugten Monarchen mit Koth zu bewerfen wage. (Stürmischer Applaus.) — JACOBI: Er müsse dem Redner in allen Stücken Recht geben. Allerdings sei es leichtsinnig, Etwas zu unterschreiben, das man nicht gelesen habe. Dieses Leichtsinns klage er selbst sich an. Auch bekenne er das Unrecht, des Königs, seines edlen Herzens, seines hohen Geistes nicht gedacht zu haben. Er habe dies mit vielen andern Punkten, die er in seiner Rede zu berühren sich vorgenommen,[1]) bei der Überraschung, durch die er auf diese Tribüne geführt worden, vergessen. Hierauf weist der Redner in beredter Entwicklung die Wohlthaten nach, welche die Völker der Monarchie verdanken; diese habe die Aristokratienherrschaft gebrochen und die Freiheit angebahnt. Er macht hierbei auf die Milderung der Leibeigenschaft durch den Kaiser in Rußland aufmerksam. .... Dr. GLASER: In den alten Republiken habe ein Gesetz Jeden mit Verbannung bedroht, der einen Bürger angeklagt habe, ohne

1) Auch in einem kurz zuvor (3. April 1848) geschriebenen Brief an den Bruder gibt JACOBI seiner persönlichen Verehrung für den König Ausdruck (Brief No. LX).

daß ein bereits bestehendes Gesetz die Anklage gerechtfertigt hätte. Hier liege ein solcher Fall vor. Man klage den Professor Jacobi wegen sogenannter politischer Antecedentien an, dies müsse auch gegen Andere geschehen; *Aller* Antecedentien müssen zur Sprache gebracht, *alle* Candidaten zur Rechtfertigung angehalten werden. Er beantrage: einen solchen *Alle* bindenden Beschluß zu fassen. Der *Sprecher* erklärt es für bedenklich, eine Entscheidung über einen so wichtigen Antrag sofort zu veranlassen. Er wünscht noch weitere Redner über den Antrag zu hören. Dr. Jordan: Professor Jacobi habe heute zu erkennen gegeben, daß er nicht den erforderlichen parlamentarischen Takt besitze: *daher* müsse er beantragen, den Professor Jacobi von der Candidatenliste zu streichen. (Tumult. Verschiedene Versuche, über diese Anträge zur Abstimmung zu gelangen, scheitern an der leidenschaftlichen Erregtheit, in der die Versammlung sich befindet.) Der *Sprecher* schlägt vor: die Abstimmung auf eine ruhigere Sitzung zu vertagen.

## V.

Man wird dem oben zitierten Verfasser der *Revolutions-Chronik* darin beistimmen müssen, daß ein Kampf, der Jacobi zwang, sich gegen persönliche Anklagen von jener Art zu rechtfertigen, des großen Mannes wenig würdig war. Man darf aber andererseits zunächst nicht unterlassen, alle diese Vorgänge im Spiegel der Zeit zu betrachten. Ein Hinweis auf die hohe wissenschaftliche Stellung Jacobis, wie ihn Schellbach versuchte, an sich schon von fragwürdigem Wert für die zur Entscheidung stehende Frage, mußte in einer Zeit, die allen Autoritätsglauben ablehnte, wirkungslos bleiben oder nur noch mehr aufreizen, zumal dieser Versuch in wenig geschickter Form hervorgetreten zu sein scheint, wenn er auch gut gemeint war und ehrlicher und berechtigter Entrüstung über die dem großen Forscher aufgezwungene unwürdige Rolle entsprungen sein mochte. Standen nun auch Angriff und Anklagen gewiß sehr tief, so verdient um so größere Beachtung die Übereinstimmung aller authentischen Berichte darin, daß Jacobis Verhalten würdevoll und seiner hohen Stellung in der Aristokratie des Geistes stets durchaus angemessen gewesen sei und er sich schon beim ersten Auftreten in der Hinsicht vorteilhaft von allen anderen Kandidaten unterschieden habe, die geflissentlich ihre früheren Händel mit der Regierung anbrachten und ihre Verdienste um die Volkssache priesen, auch ohne irgendwie hierzu gedrängt zu sein. Selbst Gelehrte von großem Ruf, wie Fr. v. Raumer, sind hiervon nicht freizusprechen. Nun war Jacobi seiner Vergangenheit wegen direkt in Anklagezustand versetzt; er mußte, nachdem er einmal a gesagt hatte, auch b sagen und sich verteidigen, wollte er nicht den Eindruck erwecken, die erhobenen Anklagen seien berechtigt und er fühle sich diesen Angriffen und seinen Gegnern nicht mehr gewachsen. Zudem wird die begeisterte Anhängerschaft, die der große Mathematiker sofort gefunden hatte und die eine eigene Partei „Jacobi“ formierte, mit allen Mitteln dafür gewirkt haben, daß der aufgenötigte Kampf auch mit möglichster Entschiedenheit durchgeführt werde. Diese Anhängerschaft bestand, wie dies weiterhin auch in den Berichten hervorgehoben werden wird, aus der „Jugend“, und zwar darf man dies Moment als besonders charakteristisch für den tatsächlichen Eindruck, den jene Debatten hervorgebracht haben und den verkürzte Zeitungsberichte doch nur höchst unvollkommen wiederherzustellen imstande sind, bewerten. Denn die „Jugend“, die hier vorwiegend die akademische Jugend gewesen sein wird, wie bei der Art des Klubs nicht zweifelhaft ist, hat zu allen Zeiten ein besonders feines Gefühl für vornehme und unabhängige Gesinnung gehabt.[1]) In der Form scheint JACOBI allerdings in dieser Sitzung (23. Apr.) nicht immer glücklich gewesen zu sein. „Ich war ermüdet“, sagt er in dem mehrfach zitierten Brief[2]) an den Bruder, „und durch die Menge, die über mich herfiel, etwas verwildert.“ Die rücksichtslose, heftige, ja niederträchtige Art, wie er von fast allen Komiteemitgliedern angegriffen wäre, habe auch seine Partei erbittert. Die Wogen der Debatte gingen sehr hoch. „Es war ein furchtbarer Sturm, die höchste Aufregung“, heißt es in demselben Brief. „Denke Dir immerfort gleichzeitig 300 klatschen und 300 trommeln, und den Präsidenten mit dem Hammer die Tribune zerklopfen um Ruhe zu schaffen. Gleichwohl wurde auch von den wüthendsten Gegnern immer meiner Rede, deren Eindruck mir noch heute unerklärlich ist, mit einer Art Bewunderung gedacht. 'Diese glänzende Rede, sagte CRELINGER, und weil glänzend, desto gefährlichere, also diese gefährliche Rede.' 'Das sei der Mann, sagte ein anderer, der in dem Moment wo in Francfurt vielleicht alles auf dem Spiele stände, durch die Gewalt seiner Rede alles in den Verderben bringenden Abgrund mit sich fortreißen könnte.' Und so weiter.“ Der Reporter der National-Zeitung, die späterhin zu überschwänglichem Lob für JACOBI sich durchrang, fand sogar, er habe sich in der Sitzung des 23. April „größtentheils ungeschickt vertheidigt, oder doch so, daß er den Kern der Ausstellung als berechtigt anerkannte“.[3]) Dies lag nun allerdings wohl vorwiegend an der Natur der Anklagen. „Ich stand unter dreierlei Anklage“, sagt JACOBI selbst (ibidem), „1. früher servil gewesen zu sein und nun eine plötzliche Schwenkung gemacht zu haben, 2. von jeher ein eingefleischter Jacobiner gewesen zu sein, und 3. von CRELINGER, der als kluger Mann allein das richtige traf, des politischen Indifferentismus. Du siehst, da hieß es, incidit in Scyllam

1) Vgl. a. S. 187 Anm. 1. — 2) Brief No. LXII (20. Juni 1848).

3) National-Zeitung, Nr. 24, 25. April 1848.

qui vult vitare Charybdim; es war unmöglich sich gegen eine Anklage zu vertheidigen ohne der andern Recht zu geben."

So kann es nicht wunder nehmen, wenn nach diesem ersten Tage (23. Apr.) die Stimmung im ganzen, wie Jacobi a. a. O. sagt, gegen ihn die vorherrschende geblieben war. Der schon zitierte Bericht der National-Zeitung spiegelt dies wider, indem er meint, der größte Mißgriff Jacobis sei der gewesen, daß er sich überhaupt als Kandidaten angeboten habe, eine Behauptung, die das gesinnungstüchtige demokratische Blatt durch den Zusatz bekräftigt: „In den Parlamenten braucht man nicht Jungfrauen, sondern Männer, nicht Gelehrte von zweifelhafter politischer Überzeugung, sondern öffentlich bewährte politische Charaktere, und zwar solche, welche bereits früher das gestürzte Regierungssystem bekämpften". Andererseits muß jedem nur einigermaßen urteilsfähigen und unbefangenen Beobachter bereits an diesem 23. April unverkennbar der Eindruck einer gegen den gefährlichen Rivalen gesponnenen Intrigue sich aufgedrängt haben: der ehrgeizige Crelinger hatte vorher in Jacobis Abwesenheit diesen ohne Nennung des Namens zu verdächtigen gesucht, dann aber, von Jacobi zur Rede gestellt, seine Bemerkungen so moderiert, daß der Angegriffene, wie er dem Bruder schreibt (20. Juni 1848), sich schon zufrieden gestellt erklären wollte, als nun, damit die ganze Aktion nicht einfach im Sande verlief, der zweite Hauptakteur, Prutz, auftrat und trotz Heiserkeit das Wort ergriff, wobei er sich auf private Äußerungen Crelingers über Jacobi berief, eine Indiskretion, die jenem dann später (Sitzung v. 27. Apr.), als er die betreffenden Äußerungen zurücknehmen mußte, berechtigten Anlaß zu einer Rüge gegen Prutz gab. Umgekehrt hat nach dem obigen Bericht der Zeitungs-Halle Crelinger, als er die Widmung aus den *Opuscula mathematica* vorbrachte, sich auf Prutz berufen, was diesen wieder zu einer dementierenden Erklärung in dem genannten Blatte[1]) veranlaßte. Man sieht: die moralische Verantwortung der Anklage zu übernehmen getraute sich niemand recht; der eine suchte dem anderen die Rolle des Großinquisitors aufzuzwingen. Man fürchtete offenbar Jacobis geistige Überlegenheit und seinen darauf basierenden Einfluß auf die Zuhörerschaft seit seinem ersten Auftreten doch schon zu sehr, und vor allem fehlte auch der ganzen Anklage von vorne herein der innere Gehalt. Dies letztere hatte sich am Ende der Debatten des 23. April bereits so weit gezeigt, daß, als nun der Dritte im Bunde, Wilhelm Jordan, auf dem Plan erschien mit dem Antrage, Jacobi wieder von der Kandidatenliste zu streichen, er zur Motivierung dieses Antrages nichts weiter als Jacobis angeblichen und in der betr. Sitzung bewiesenen Mangel an parlamentarischem Takt vorbrachte,

1) Berliner Zeitungs-Halle No. 99, 27. April 1848, Beilage, 4. Seite.

offenbar in der Hoffnung, so die Erörterung der politischen Antecedenzien, die sich JACOBI gegenüber nun doch schon als wirkungslos erwiesen hatte, ganz abschneiden zu können, um damit zugleich den gefährlichen GLASERschen Antrag in der Versenkung verschwinden zu lassen. Sehr richtig beobachtet hatte der Berichterstatter der Reform, der „Berlin, 25. April", noch vor der nächsten Klubsitzung, über die Verhandlungen des 23. April schrieb:[1]) „Es ist die ganze Sache eine bloße Intrigue, in der CRELINGER, ROBERT PRUTZ und JORDAN spielen, die aber den Intriguanten theuer zu stehen kommen wird." Für den Fall einer allgemeinen Untersuchung der Antecedenzien aller Kandidaten gemäß dem GLASERschen Antrage prophezeit dieser Bericht „eine große Purification", bei der „CRELINGER, JORDAN, Professor KELLER, DOVE, RAUMER, PRUTZ usw. gestürzt werden" würden.

## VI.

Über die nächste Klubsitzung, welche am Dienstag, den 25. April stattfand und in der die Fortsetzung des Gerichts über den berühmten Mathematiker erfolgte, berichtet die Zeitungs-Halle:[2])

. . . . Dr. JORDANS Antrag: *Prof. JACOBI von der Candidatenliste zu streichen*, wird zur Berathung gestellt. Der Antragsteller bemerkt: der Candidat sei weder aus der Vorwahl, noch aus dem Comité hervorgegangen, er habe durch seine Rede die Herzen mit Sturm eingenommen. Später habe man bereut, daß man sich habe überrumpeln[3]) lassen. (Lärm.) JACOBI habe früher andere politische Gesinnungen gehabt, in neuester Zeit aber eine Schwenkung gemacht; solche Candidaten könne man nicht brauchen. Es haben sich Mehrere um das Wort gemeldet; ein Streit entsteht darüber, Wer das Wort erhalten soll. Als der Sprecher JACOBI auf die Tribüne ruft, bricht ein anhaltender Beifallssturm los. JACOBI: der *Ankläger* spricht von einer politischen Schwenkung, also von einer Sinnesänderung, der *Denunciant* dagegen hat seine Beschuldigung anders begründet; er behauptet, ich hätte mich trotz meiner notorisch liberalen Gesinnung in Königsberg von den Bestrebungen der Gesinnungsgenossen fern gehalten. Beide Behauptungen sind unwahr. Ich war immer unabhängig, und wählte meine Freunde stets aus Männern, die einer liberalen Richtung angehören. Minister v. SCHÖN wäre, glaube ich, nicht mein Freund gewesen, hätte ich einer servilen Richtung gefolgt. Ich habe auch

1) Die Reform No. 27, 28. April 1848.

2) Berliner Zeitungs-Halle No. 99, 27. April 1848, Beilage; abgedruckt bei A. WOLFF, l. c. p. 271—272.

3) „Der Clubb sei überrumpelt oder überrascht, wie der Redner sich verbessern mußte — denn der Clubb hat eigenthümliche Begriffe von parlamentarischen Formen und hält streng auf deren Beachtung", heißt es im Bericht der National-Zeitung Nr. 26, 27. April 1848.

nie den Regierungsbevollmächtigten bei der Universität anerkannt;[1]) auf die gefährlichsten Posten, wo es galt, gegen Ministerialverfügungen zu remonstriren, schob der akademische Senat mich vor. Ich bin zwar jetzt zum ersten Male genöthigt, mich zu vertheidigen, nicht aber bin ich zum ersten Male denunciirt. Das hat früher schon der bekannte Hr. v. Derschau in Königsberg gethan. Vielleicht ist er selbst hier. (Stimme aus der Versammlung: „Hier bin ich. Das ist nicht wahr!" Tumult. Raus! Raus!) Hr. v. D.[2]) ist sonst ein ehrenwerther Mann, nur vertieft er sich zuweilen in besondere Richtungen. (Gelächter.) In Berlin hatte ich das Recht, zu Hoffesten eingeladen zu werden, habe aber Nichts gethan, um dazu zu gelangen. Keinen Minister kenne ich persönlich. Jede Gelegenheit, die Unabhängigkeit meines Charakters zu zeigen, habe ich benutzt. Als ein gewisser Peters in Dresden wegen seiner dem Cultusminister wohlgefälligen „Moralität" zum Prof. der Mathematik in Berlin gemacht werden sollte, habe ich dies rückgängig gemacht. Ich schrieb dem Minister damals: „Unwissenheit im Berufsfache ist Immoralität". Es ist wahr, der König hat mit mir bei Gelegenheit ein Wort mehr gesprochen als mit Andern. Warum? weiß ich mir nicht zu erklären; ich denke, weil ich ein Potsdamer bin. Was ist gegen mich vorgebracht? Man nenne mir doch nur *ein Factum*. Crelinger sagt, ich habe mich von den liberalen Bestrebungen zurückgezogen. M. H., ich kann nur denken oder handeln, wenn mir eine bestimmte Aufgabe vorliegt. Ohne ein solches bestimmtes Ziel etwas zu unternehmen, zu agitiren, mich an der Regierung zu reiben, das widerstrebt meiner innersten Natur. Wäre dies nicht, ich hätte es leicht erreichen können. Politisch verfolgt zu werden aber war mir allzuwolfeil. (Stürmischer Applaus.) Was den Brief der Akademie an den König betrifft, so handelte sich's bei der Rede des Hrn. v. Raumer nur *um die Form*, nicht um den Inhalt. Alexander v. Humboldt wohnte der Sitzung bei, und erklärte, mit dem Inhalt ganz einverstanden zu sein.[3]) Dem an den

---

1) Nach der National-Zeitung Nr. 26, 27. April 1848: „er habe zuerst die Professoren mit befreit von ihrer etwas unwürdigen Stellung dem Regierungsbevollmächtigten gegenüber".

2) v. Derschau erließ in der Const. Club-Zeitg. No. 3 (3. Mai 1848, S. 23 f. eine Erklärung gegen „die wahrheitswidrigen Ausfälle" Jacobis; die dort von ihm angekündigte besondere Broschüre scheint nicht erschienen zu sein.

3) Der Bericht der Zeitungs-Halle ist hier offenbar ungenau. Zutreffend berichtet jedenfalls die Const. Club-Zeitg. No. 2, 26. April 1848), S. 11, wonach Jacobi sagte, mit dem Inhalt der Raumerschen Rede seien alle Mitglieder der Akademie, unter ihnen Alexander v. Humboldt, ebenso einverstanden gewesen, als sie die Form gemißbilligt hätten. Dies findet, soweit es Humboldt betrifft, seine Bestätigung durch dessen Brief an Gauss v. 23. März 1847; s. die von Bruhns herausgegebenen *Briefe zwischen Humboldt und Gauss* (Leipzig 1877), p. 55.

König zu schreibenden Brief wurde ein reuevoller Brief, den Raumer selbst an die Akademie gerichtet,[1]) zum Grunde gelegt. Raumer selbst fand sich auch nicht durch den Brief verletzt. Noch drei Wochen behielt er die Leitung der Angelegenheiten der Akademie als Secretair und blieb mit uns im besten Vernehmen. Erst als der Brief gedruckt war, erklärte er seinen Austritt, obgleich die Akademie ihn zu bleiben bat[2]) und seine Stelle ein ganzes Jahr für ihn offen hielt. Liegt noch Etwas gegen mich vor? (Ruf: „das Dedicationsschreiben".) M. H. Der König hat es nicht gelesen. Ich habe darin nur meinen Dank für die Unterstützung, die mir der König hatte zu Theil werden lassen, aussprechen wollen,[3]) aber das Buch ist ungelesen vom Könige an die Bibliothek gegeben. Wenn man übrigens von meiner Stellung zum Könige spricht, so muß man bedenken: die Minister Thile und Bodelschwingh[4]) waren unerbittlich gegen unabhängige Männer. Nicht so der König.[5]) Das zeigt sein Verhältniss zu Humboldt und dessen Verhältniss zu Arago. Mein unabhängiger Charakter steht in keinem Widerspruch zu der Gunst, welche der König für mich hatte. Dafür spricht auch mein berliner Umgang mit Männern wie Beckerath, Auerswald, Bardeleben[6]) — dem Deputirten. (Gelächter.[7])) Der Redner zählt noch Viele seiner Freunde auf, namentlich auch aus Italien,[8]) und

1) Den Wortlaut s. bei Harnack, l. c. p. 708.

2) Jacobi bildete mit Dove und Lachmann die Kommission, die dies Schreiben verfaßte (Harnack, l. c. p. 712).

3) Nach dem Bericht der Const. Club-Zeitung Nr. 2, 26. Apr. 1848, S. 11 sagte Jacobi, „Zuschriften der Art würden mehr an das deutsche Publikum, als an die hohe Person gerichtet", und nach der National-Zeitung No. 26, 27. Apr. 1848: „Man werde wohl zugeben, daß es ihm ein Leichtes gewesen wäre, sie dem Könige zu Gesichte zu bringen, wenn er anders gewollt hätte". — „Der König hat meine Dedication nicht gelesen; Humboldt hätte sie ihm vorgelesen, wenn der ihn betreffende Passus nicht darin gewesen wäre. Die Freude und der Dank, den er mir dafür bezeigt hat, haben mich vollständig entschädigt", hatte Jacobi dem Bruder (11. Juni 1847, Brief No. LIII) geschrieben.

4) Der Bericht der Const. Club-Zeitung l. c. S. 11 nennt hier — offenbar zutreffend — Eichhorn statt Bodelschwingh.

5) Der Bericht der Const. Club-Zeitung l. c. S. 11 läßt Jacobi sagen, „er liebe den König, der jede diametrale Richtung einer anderen Meinung vertragen habe".

6) Im Bericht der Const. Club-Zeitung l. c. S. 11 sind hier ferner Mohr und Mevissen genannt.

7) „‚Der Deputirte', wie Jacobi sehr beißend hinzusetzte, da der Sohn dieses Deputirten einer seiner Hauptankläger ist", heißt es in der National-Zeitung Nr. 26, 27. April 1848. — In dem oben erwähnten schwarzen Buch der Polizei sind übrigens Vater und Sohn aufgeführt, letzterer vermutlich sogar zweimal, nämlich als Student an der Universität Berlin (p. 173) und als Redacteur der Constitutionellen Zeitung (p. 334), während der Vater als Deputirter und Landrath p. 325 vorkommt.

8) Im Bericht der Const. Club-Zeitung l. c. heißt es: „die liberalen Gelehrten Mossotti, Melloni etc."

verläßt dann unter dem rauschendsten Beifall die Tribüne. Aegidi will nicht gegen den Candidaten, sondern gegen die vom Club empfohlene Candidatur des großen Gelehrten sprechen. Er sei überzeugt, Jacobi sei ein Republikaner. Alle große[1]) Gelehrte seien Republikaner, das wisse er aus Erfahrung. Es fehle Jacobi an Consequenz, an politischem Charakter. (Fortwährende lärmende Unterbrechungen nöthigen den Redner, schnell zu schließen.)[2]) — Prutz gegen Jordans Antrag . . . : . . Die Versammlung in ihrer gegenwärtigen Zusammensetzung sei nicht befugt, über die Candidaten zu stimmen. Sie habe, seitdem die Jacobische Angelegenheit verhandelt werde, einen ungewöhnlichen Zuwachs erhalten, heute allein seien an 200 zugetreten. Diese könne er nur in 3 Kategorien theilen; sie seien entweder Feinde von Jacobi, diese stimmen zu lassen, verbiete die Ehre der Versammlung; oder Freunde von Jacobi, diese werde er selbst nicht wünschen; oder Skandalsüchtige, Frivole: solche hätten kein Recht zu stimmen. (Bravo!) . . . . — Jordan zieht den Antrag *für jetzt* zurück. — Assessor Wolf macht ihn zu dem seinigen[3]) nur darum, weil man nicht dulden könne, daß Jemand angegriffen und dann die Entscheidung verhindert werde. . . . . . . Beschlossen, die Debatte für heut zu schließen.

## VII.

In dieser Sitzung (25. April), in der auch Jacobis Frau und Schwester sich unter der Zuhörerschaft befanden, sei es besser gegangen als in der ersten, berichtet Jacobi dem Bruder (Brief LXII, 20. Juni 1848). Der große Mathematiker hatte alle Anklagen niedergeschlagen. Bezüglich der Königsberger politischen Vergangenheit führte daher später, nämlich in der nächsten Sitzung (27. April), einer der Redner, Oldenberg, die Anklage mit Recht auf ihren eigentlichen Kern zurück, indem er bemerkte, Jacobi habe dort „wohl dem Liberalismus, doch nicht den Liberalen gehuldigt“[4]) oder wie es in einem späteren Artikel der Grenzboten[5]) heißt: Jacobi habe sich in Königsberg, wo „ein reges politisches Leben, (d. h. eine rege politische Kannegießerei)“ geherrscht habe, „in die stolze Einsamkeit des Gelehrten zurückgezogen,“ worin die Gegner, vor allem die früheren

1) Im Bericht der Const. Club-Zeitung l. c.: „einsam denkende Gelehrte“.

2) Der Bericht der Const. Club-Zeitung verzeichnet: „Theils Lärm, theils lebhafter Beifall“.

3) S. die abweichende Darstellung in Const. Club-Zeitung l. c. S. 11 und auch S. 19 (Nr. 3).

4) In dem unten abgedruckten Bericht der Zeitungs-Halle fehlt dieser Passus der Oldenbergschen Rede; s. dagegen Const. Club-Zeitung Nr. 3, 3. Mai 1848, S. 19.

5) Die Grenzboten, 8. Jahrg. I. Sem. II. Bd. (Leipzig 1849), Nr. 18: „Porträts der Berliner Universität. 2. Jacobi“, p. 177/178.

Königsberger, allerdings eine unverzeihliche Nichtachtung erblicken mochten. Mit Recht nannte die Augsburger Allgemeine Zeitung[1]) die JACOBI gemachten Vorwürfe „zum Teil ganz frivol, z. B. daß er einst dem Könige die Hand geküßt!“ Der Vorgang hatte sich am Tage nach der Huldigung in der alten Krönungsstadt (Sept. 1840) abgespielt;[2]) der geistreiche und liebenswürdige Monarch hatte in diesen Tagen aller Herzen im Sturm gewonnen. Von einem „Herandrängen“ an die Machthaber konnte bei JACOBI keine Rede sein. „Alles schwamm in Freuden, und noch einige Tage hindurch währte der bacchantische Taumel“ (TREITSCHKE, *Deutsche Geschichte im 19. Jahrh.*, T. V, Lpz. 1894, p. 47).[3]) Daß auch die gelehrten Herren der „Albertina“ hiervon mit ergriffen wurden, ist an manchen Beispielen leicht zu zeigen: man lese z. B., auf jene Tage bezüglich, in der Autobiographie[4]) des Botanikers E. MEYER den allerdings „unwürdigen“ Exkurs über „Hofluft“ oder auch einen allerdings späteren Brief BESSELS[5]) an HUMBOLDT über ein Porträt des Königs usw. Das einzige, was JACOBI allenfalls noch hätte hinderlich sein können, wenn er ehrgeizige politische Pläne gehabt und diesen zu Liebe um Volksgunst sich hätte bemühen wollen, war die RAUMERsche Angelegenheit; doch mußte es hier versöhnend und sympathisch wirken, daß JACOBI unumwunden die „Nachlässigkeit“ — und mehr konnte ihm schlechterdings niemand vorwerfen — zugab. Wenn Die Reform[6]) ohne Nennung von Namen gegen jene Akademiker wettert, welche sich soweit vergäßen, die oft bejammerte Veröffentlichung jenes Schreibens anzuklagen, so kann sie hierbei JACOBI nicht wohl gemeint haben, da dieser wenigstens den vorliegenden Berichten zufolge eine derartige Äußerung nicht getan hat. Nach HARNACK, a. a. O. p. 715 hatte JACOBI seinerzeit im Verein mit DOVE, POGGENDORFF, RIESS und G. ROSE sogar beantragt, um der öffentlichen Meinung ein richtiges Urteil zu ermöglichen, sämtliche Protokolle in der RAUMERschen Sache in den Monatsberichten der Akademie zu publizieren, ein Antrag, der jedoch abgelehnt wurde.

Jedenfalls entschied dieser Tag (25. April) die Niederlage der Gegner des berühmten Mathematikers: PRUTZ sprach, von der Aussichtslosigkeit des JORDANschen Antrages bereits überzeugt, gegen den Antrag, wenn auch scheinbar nur aus formellen Gründen; der Antragsteller zog sodann

---

1) Allgemeine Zeitung Nr. 122, p. 1942, 1. Mai 1848.

2) Brief No. LXII (20. Juni 1848).

3) Vgl. a. FALKSON, l. c. p. 41; von JACOBI ist dort anläßlich dieser Festlichkeiten nur in einer gleichgültigen Szene die Rede (p. 34).

4) Neue Preuß. Provinzial-Blätter Bd. XI (1857), p. 208/209.

5) Brief v. 12. Febr. 1846; s. *Briefe von* HUMBOLDT *an* VARNHAGEN VON ENSE, 4. Aufl., Lpz. 1860, p. 198ff.; vgl. dazu Astron. Nachr. 24, No. 556 (8. April 1846).

6) Die Reform Nr. 28 v. 29. April 1848 unter „Berlin, 26. April“.

den Antrag vorläufig zurück, so daß dieser zur Erzwingung einer Abstimmung aus dem eigenen Lager Jacobis wiederaufgenommen werden mußte. Der Eindruck, den die Debatten dieses Tages hinterlassen hatten, spiegelt sich auch in den Preßberichten wider. Die National-Zeitung, ursprünglich, wie wir sahen, gegen Jacobi eingenommen, schrieb[1]) über dessen Rede vom 25. April: „Diese lange Rede, in ruhigem[2]) Tone gesprochen, mit scharfen Sarkasmen untermischt, machte unleugbar großen Eindruck auf die Versammlung; uns gewährte sie ein ähnliches Schauspiel, als wenn ein Löwe mit Mäusen spielt. Jacoby appellirte weder an den Constitutionalismus, noch an die Intelligenz des Clubbs, wie es so beliebt und so leicht ist; keinen Augenblick verbarg er das Bewußtsein seiner Bedeutung“ . . . und in einem Artikel der Haude u. Spenerschen Zeitung[3]) heißt es von derselben Rede Jacobis u. a.: „Die Mittheilung dieser Rede durch den Druck würde ein sehr schätzbarer Beitrag zu der Biographie des großen Gelehrten seyn, und man kann nicht leugnen, daß sie sich in einzelnen Partieen zur Höhe der Classicität[4]) erhob. Deutschland würde sich Glück wünschen können, wenn es viele solcher Vertreter in seine Parlamente zu schicken hätte. Der Angriff des Hrn. Aegidi, daß der Prof. Jacobi nicht als Vertreter der constitutionellen Ansicht, und somit nicht als Empfohlener des Clubs gelten könne, war zu wenig geeignet über den Werth dieses bedeutenden Mannes ein genügendes Urtheil abzugeben, dem gewiß nichts geraubt ist, wenn ihn der constitutionelle Clubb auch nicht empfiehlt.“

## VIII.

In der nun folgenden Klubsitzung vom 27. April, der letzten in Sachen Jacobi, wurde dessen Sieg durch nahezu einstimmige Verwerfung des Jordanschen Antrages besiegelt, so daß der große Mathematiker unter den Kandidaten verblieb, welche der konstitutionelle Klub der Bürgerschaft Berlins für die Wahlen empfahl, ohne daß diese Empfehlung für Jacobi jedoch weitere Konsequenzen gehabt hätte. „Die ganze Sache“, sagt Jacobi selbst, „war eigentlich eine Kinderei, da Beifall oder Tadel dieses Klubs die gleichgültigste Sache der Welt ist; sie war mir aber doch interessant

1) National-Zeitung No. 26, 27. April 1848.

2) Auch in dem oben zitierten Grenzbotenartikel heißt es (l. c. p. 178), Jacobi habe inmitten der erbittertsten Aufregung unter tausend Zuhörern mit der größten Ruhe mehr als eine Stunde gesprochen, „eben so langsam und behäbig, wie gewöhnlich, auch nicht in dem Ton der Stimme war eine Spur der Aufregung zu entdecken“. Im übrigen findet der anonyme Verfasser dieser Skizze, daß Jacobi nicht eigentlich ein Redner sei (s. das Nähere dort).

3) Haude u. Spenersche Zeitung Nr. 99, 27. April 1848.

4) „Wenn es wahr ist“, sagt Jacobi hierzu (Brief No. LXII), „soll es mir angenehm sein, doch ist dieser Umstand bei Parteiartikeln Nebensache“.

und lehrreich, indem ich dabei mancherlei Erfahrungen machte"[1]). Welcher Art diese „Erfahrungen" gewesen seien, sagt der Briefschreiber nicht, doch faßt der Bruder dies auf die ihm genehme Art auf und schreibt: „Mit dem Pöbel Dich zu befassen, darin hast Du Gott sei Dank gleich beim debut ein Haar gefunden, und an Herzweh für das Wohl der ganzen Menschheit hast Du so viel ich weiß nie gelitten. Als Du Dich vom Kitzel eines bon-mots hinreißen ließest, dachtest Du gewiß in Erinnerung Deiner philologischen Studien an das Alterthum . . . . Wenn Du das Glück oder Unglück haben solltest, Deputirter zu werden (und warum solltest Du nicht daran denken?), so hoffe ich Dich im rechten Centro glänzen, mit Sarcasmen haushälterisch umgehen, und Deinen edlen Charakter und Deine feste Gesinnung im schönsten Lichte zeigen zu sehen"[2]). Natürlich ist hier z. T. der Wunsch der Vater des Gedankens: auch MORITZ JACOBI wird kaum erwartet haben, daß es ihm gelingen würde, den Bruder auf seinen Lehrer HEGEL und dessen Persiflage des „Herzwehs für das Wohl der ganzen Menschheit"[3]) einzuschwören und so die politische Differenz zwischen ihnen beiden zu überbrücken. In der Tat würde der große Mathematiker, wenn er in die preußische Kammer deputiert wäre, für die damals (zur Zeit des zit. Briefes) die Wahlen vorbereitet wurden, sich jedenfalls der Linken angeschlossen haben, während, wenn es ihm vorher bestimmt gewesen wäre, die Namen der 76 Professoren des Frankfurter „Professorenkonvents" noch um einen besonders glanzvollen zu vermehren, er vermutlich nicht im rechten, sondern im linken Centro seinen Platz genommen hätte.[4]) „Ein mittelmäßiger Mann wie unser eins", sagt JACOBI[5]) allerdings selbst, „ist jetzt übel daran, weil alles gleich ins Gegentheil überschlägt, und man bald rechts bald links ist".

JACOBIS Hauptgegner CRELINGER hatte durch seinen Vorstoß tatsächlich weiter nichts erreicht, als seine eigene Stellung zu untergraben, wozu vor allem auch beigetragen hatte, daß aus Erbitterung über den heftigen Angriff gegen JACOBI einer von dessen Anhängern in der Sitzung vom 23. April die nicht unbedenklichen, schon oben erwähnten amtlichen und damit zusammenhängenden politischen Antecedenzien CRELINGERS an der Hand eines Artikels der Magdeburgischen Zeitung[6]) vorgebracht hatte, „eine etwas unwürdige Waffe", wie JACOBI in dem oft zitierten Briefe

1) Brief No. LXII (20. Juni 1848). — 2) Brief No. LXVI (Ende Dez. 1848).

3) Vgl. auch Brief No. LXXIV (Petersburg, 30. Juni 1849 n. St.).

4) Von dem Hervortreten der „österreichischen Frage" an, welche bekanntlich eine ganz neue Parteigruppierung in Frankfurt zur Folge hatte, wird JACOBI mit der sogen. „Erbkaiserpartei" („Weidenbuschverein") sympathisiert haben (für seine preußisch-deutsche Gesinnung vgl. den Brief LXIV v. 4. Aug. 1848).

5) Brief No. LXIV (2. Aug. 1848).

6) Magdeburg. Zeitung No. 98, 23. April 1848 unter „Berlin, 21. April"; s. a. A. WOLFF, l. c. pag. 270.

sagt, in welchem er zugleich die betr. Verfehlung CRELINGERS in außerordentlich milder Beurteilung erzählt. Wenn auch CRELINGER später eine darauf bezügliche Erklärung in den Zeitungen erließ, die VARNHAGEN „offen, freimüthig und recht brav“ nennt[1]) und durch die er auch jeden Vorwurf von CRELINGER beseitigt glaubt, so liest man doch bei demselben VARNHAGEN bereits einige Tage zuvor[2]): „Herrn Justizrath CRELINGER gesprochen, über seine Kämpfe, sein Zurücktreten; er sagt, die neue Zeit gehöre der Jugend, dieser müsse man überlassen das Nöthige zu thun. Auch seines Klubs ist er schon müde und läßt Andre dort walten.“ — Der Klub selbst sank nach Beendigung dieser denkwürdigen Debatten wieder in seine frühere Langweiligkeit zurück; während in den Tagen der JACOBIschen Angelegenheit die Zahl der Mitglieder ungeheuer, nach den Grenzboten[3]) sogar bis über 1000 angeschwollen war (von vorher 424), waren später selten mehr als 100 anwesend.

## IX.

Über die Einzelheiten der Sitzung vom 27. April, für welche wir noch den Bericht schuldig geblieben sind, sagt die Zeitungs-Halle folgendes:[4])

*Tagesordnung:* JACOBIsche Angelegenheit. . . . . Dr. PRUTZ: Er habe gegen den JORDANschen Antrag: *den Prof. JACOBI von der Liste der Candidaten zu streichen*, in voriger Sitzung aus *formellen* Gründen gesprochen; er wolle jetzt seinen Widerspruch durch *sachliche* Gründe rechtfertigen. Der Club sei kein Wahlcomité. Die Bedeutung, welche die Aufstellung einer Candidatenliste habe, sei allein die, dem Candidaten eine Empfehlung, ein Zeugniss, einen *Creditbrief* auszustellen. Der Antrag verlange einen *Mißkreditbrief*. Das *politische* Zeugniss würde auch er dem Candidaten versagen, allein die *moralische* Frage sei von der politischen hier nicht zu trennen, die zur Sprache gekommenen Handlungen, obwohl ihm, dem Redner, persönlich mißfällig, seien jedoch nicht geeignet, den Candidaten in der öffentlichen Meinung moralisch zu ächten. Überdies sei die Anklage nicht genügend substantiirt, da sie sich nicht auf erhebliche Thatsachen, vielmehr nur auf einen Totaleindruck gründe. — Der Redner bemerkt noch: er habe die Anklage veranlaßt, durch welche der Club „einen ungeheuren Ruck“ erhalten habe. Überstehe man diesen nicht, so sei nichts daran gelegen. Der Club habe dann verdient zu fallen. Überstehe man ihn, so habe man einen ungeheuren Fortschritt gemacht. Er habe den

1) VARNHAGEN, *Tagebücher*, Bd. V, p. 11 (9. Mai 1848).

2) Ibidem, p. 3 (2. Mai 1848).

3) Die Grenzboten 8. Jahrg. (1849) I. Sem. II. Bd., p. 180.

4) Berliner Zeitungs-Halle Nr. 102, 3. Mai 1848, Hauptblatt; abgedruckt bei A. WOLFF, l. c. p. 272—273.

Muth, die Anklage fallen zu lassen. Ihn bestimme dazu vor Allem der Applaus, welchen die Jugend[1]) dem Angeklagten gezollt habe. — v. BARDELEBEN: er sei gegen JACOBIS Candidatur, aber nicht für den Antrag, ihn zu streichen. Moralisch habe er Nichts gegen JACOBI, nur sein politischer Standpunkt genüge ihm nicht. Er glaube überdies nicht, daß die Empfehlung des Clubs einem Candidaten viel nützen werde. — v. WERTHER: Der Club sei nun einmal in die Grenzen eines Mäßigkeitsvereins zurückgetreten; er müsse deshalb consequent sein und die Anklage verfolgen. Es frage sich, ob die Thatsachen, die man gegen JACOBI vorgebracht, eine politische Inconsequenz, eine Achselträgerei verrathen. Es komme zuerst der Handkuß in Betracht. Unstreitig ist derselbe aus persönlichem Attachement an den König hervorgegangen. Kann ein Mann, der dem König persönlich zugeneigt ist, constitutioneller Deputirter werden? (Ja, ja!) Ich bin derselben Meinung. Der Volksvertrag, der geschlossen werden soll, hat die Person des Königs zu sichern, den Parteileidenschaften zu entheben. Der König wird jetzt aus Liebe eine desto freiere Constitution geben, nicht mehr durch Stahl und Eisen, nicht durch Theorien von STAHL. (Bravo. Heiterkeit.) Habe man dem Candidaten vorgeworfen, er sei ein versteckter Republikaner, so sei das kein Vorwurf. Man könne Republikaner sein, ohne mit dem Königthum zu brechen. Deshalb sei er *gegen* den Antrag. — OLDENBERG: Die Mehrheit der Versammlung kennt JACOBI nicht, sie beurtheilt ihn nur nach dem Eindruck, den die Discussion hervorgebracht. Dem Redner geht es eben so. Ihm scheint JACOBI alle Angriffe glücklich abgewehrt zu haben, nur die Akademieangelegenheit nimmt er aus. Der Dedicationsbrief sei so, daß er selbst ihn geschrieben zu haben wünsche. So könne jeder freie Britte an seine Königin schreiben, der Brief der Akademie sei ein Hauch auf einer Spiegelfläche, aber keine moralische Verschuldung. Manchmal schläft auch der gute HOMER, und damals hat mehr als ein HOMER geschlafen. (Beifall.) Auch die Lichter der Wissenschaft setzen Kohle ab, die öffentliche Meinung muß sie putzen, aber nicht auslöschen. (Bravo.) JACOBI muß eben als Mathematiker wahrhaft befruchtend auf eine gesetzgebende Versammlung wirken, die aus lauter Juristen, Nationalökonomen, Kaufleuten u. s. w. bestehen wird.[2]) Er, der Redner, sei nicht nur gegen den Antrag, sondern er beantrage jetzt, nachdem die Gesinnungstüchtigkeit ihr Müthchen an dem Genius recht tüchtig

---

1) „Mit ihrem feinen Instinkt für alles Große und Geistige" heißt es im Bericht der Const. Club-Zeitung Nr. 3, 3. Mai 1848, S. 19.

2) In dem Bericht der Const. Club-Zeitung l. c. heißt es: „Der Mangel an politischem Talent, den man bei dem Mathematiker angeregt, sei nicht erwiesen, er erinnere an BAILLY, der als Mann derselben Wissenschaft seinen Präsidentenstuhl trefflich ausgefüllt habe, ja es sei anzunehmen, daß eine so abstracte Intelligenz, befruchtend auf viele rein praktische Männer einwirken werde".

gekühlt habe, den Prof. Jacobi für einen vom Club empfohlenen Candidaten ausdrücklich zu erklären. (Rauschender Applaus.)[1] ....... Jacobi (Anhaltender Beifallssturm empfängt den Redner): Er danke zunächst für die Geduld, mit der man ihn bisher angehört. Seine Angelegenheit erhalte einen eigenen Charakter dadurch, daß der Mann, der die Anklage gegen ihn vorgebracht, an der Spitze der Versammlung stehe und ihr volles Vertrauen genieße. Er bitte vor Allem, davon zu abstrahiren, daß der Leiter der Gesellschaft mit seinem Ankläger zusammenfalle. Vielleicht sei dieser Mann selbst durch die Auseinandersetzung der Angelegenheit befriedigt erklärt, und er richte dieserhalb eine Frage an ihn. Es scheine nahe gelegen zu haben, ganz zurückzutreten. Obgleich indess seine Kräfte durch diese Verhandlungen erschöpft seien, habe er doch nicht zurücktreten *wollen*. Auch auf die Abstimmung verzichte er nicht. Er wolle die Meinung der Versammlung über ihn kennen lernen, er wolle, daß sie seine Lage würdige und die Nachtheile berücksichtige, welche ihm durch die hohe Autorität seines Klägers bereitet werden. Man möge daran nicht denken, daß ein Votum für ihn zugleich eine Verurtheilung des Sprechers sei. Es sei ihm an der Meinung der Versammlung auch darum gelegen, weil dieselbe vielleicht über seine künftigen Entschlüsse bestimmen könne. Für das Publicum, welches über den Club vielleicht noch keine sichere Ansicht habe, werde es ein historisches Factum abgeben, daß der constitutionelle Klub über den und den Mann so oder so geurtheilt hat. (Ein Applaus, der nicht enden zu wollen scheint, geleitet den Redner von der Tribüne.) — Crelinger: Was Jacobi eine Anklage nenne, habe er nicht erhoben. Er habe nur eine bestimmtere und klarere Entwickelung der politischen Grundsätze gewünscht, Persönlichkeiten seien von ihm nicht angeregt worden. Man habe sein Zeugniss angerufen, und das habe er nicht verweigern können. Er sei wider seinen Willen in die Discussion hineingezogen worden. Man habe Privatäußerungen, die nicht in den Bereich dieses Saales gehören, indiscret benutzt. Wenn man ihn frage, ob er die Meinung, die er nach seinen Privatäußerungen über Jacobi gehegt, noch habe, so antworte er: Nein (Beifall) und er danke Jacobi, mit dem er immer in den freundschaftlichsten Beziehungen gestanden, daß er ihm zu dieser Äußerung Gelegenheit gegeben.

*Die Abstimmung ergiebt eine Minorität von 4 oder 6 Stimmen für den Antrag.* . . . . .

---

1) Auch Jacobi sagt in dem oft zitierten Briefe, Oldenberg — vermutlich C. M. Oldenberg, der Ende 1848 Redakteur der damals gegründeten Deutschen Reform wurde — habe durch seine „im höchsten Grade ausgezeichnete Rede alle entzückt".

X.

Bei der häufigen Benutzung, welche wir im vorstehenden von der Tagesliteratur machten und machen mußten, würde eine Seite fehlen, wenn wir nicht wenigstens kurz auch jener Literaturgattung gedächten, welche in Preußen diesen Tagen ihre Entstehung verdankt und damals gleich besonders üppig emporblühte, der politischen Satire. Bei dem großen Aufsehen, welches die Jacobische Angelegenheit in Berlin erregte, konnte es nicht fehlen, daß auch die Witzblätter und Broschüren sich dieser Materie bemächtigten. So behandelt das in jenen Tagen gegründete und noch heute angesehenste Organ dieser Richtung, der Kladderadatsch, in seiner allerersten Nummer (7. Mai 1848) unter der Rubrik „Clubb-Zeitung" die „Politischen Antecedenzien des Wahl-Candidaten, Arbeitsmann Waschlappen" in einem längeren Artikel, der zwar, wie man nach dem Zusatz: „Sitzung vom 28sten" annehmen darf, nicht gerade speziell oder ausschließlich auf Jacobi zielen soll, der aber doch ganz vorwiegend mit Anspielungen auf die Debatten über Jacobi reichlich gespickt ist. Auch ist in derselben Nummer Jacobi unter denjenigen Männern genannt, die das Blatt zu Mitarbeitern zu gewinnen hofft, indem durch die Zusammenstellung „Jacoby und Aegidi" kein Zweifel darüber gelassen ist, daß hier der große Mathematiker und nicht Johann Jacoby gemeint war.[1]) — Die damals sehr viel gelesene Ewige Lampe brachte einen Bericht[2]) über die politische Section, die der Prosector des constitutionellen Clubs, Herr Ludwig Crelinger, an dem Professor der Mathematik Jacobi aus Königsberg vorgenommen habe und wobei sich folgender Befund herausgestellt habe: „1. eine Lippenschwiele von einem servilen Handkuß; 2. an der rechten Hand ein unauslöschlicher Dintenfleck von der Unterschrift eines ungelesenen Briefes; 3. ein unterdrücktes Geheimeraths-Bewußtsein und 4. mangelnde Strangulations-Marke von einem zweiten Ordenshalsbande." — Auch eine besondere kleine Broschüre mit dem Titel *Eine Sitzung im constitutionellen Club* (Berlin 1848, 13 Seiten) parodierte z. T. jene Debatten und läßt „Aejüdlein" (Aegidi) auftreten, um „die geehrte Gesellschaft vor Herrn Prof. Jacques,[3]) den großen Mathematikus zu warnen," worauf dann die weitere Diskussion über ein wenig salonfähiges Thema nach „Prof. Dovelchen" auch „Prof. Jacques" auf die Tribüne führt. — Nicht wesentlich höheren Grad von Ernst darf das schon oben erwähnte schwarze Buch der politischen Polizei für sich in Anspruch nehmen und darf daher

1) Die hierzu gegebene „Erläuterung" in der unter dem Titel „Im tollen Jahr" 1898 erschienenen Neu-Ausgabe dieses Jahrgangs ist verbesserungsbedürftig; bei dem obenerwähnten Artikel fehlt dagegen jede Erläuterung.

2) Die ewige Lampe, Nr. 3 (1848), S. 4.

3) Wohl als Anspielung sowohl auf Jacobis Familiennamen wie auch auf seinen gewöhnlichen Rufnamen (Jacques) aufzufassen.

hier nochmals erwähnt werden, um dem Leser, der schon oben die Frage gestellt haben wird, ob denn nicht auch Jacobi in dem Buch figuriere, hierauf zu antworten. An sich wäre Jacobi allerdings schon deswegen von dem 1854 erschienenen Buche ausgeschlossen, weil er bekanntlich 1851 starb. Nun führt das Buch aber mehrfach Tote auf: die politische Polizei hielt offenbar auch die Geister des Schattenreichs noch für so gefährlich, um gegen sie zu wüten, und so fehlt denn auch im Grunde genommen Jacobi nicht, d. h. er ist dabei zu einer Art von Symbiose mit seinem Königsberger Namensvetter Joh. Jacoby verurteilt, wobei denn der berühmte Mathematiker zu dieser Lebensgemeinschaft allerdings weiter nichts als seine abgelegte Königsberger Professur beigesteuert hat, während die übrigen Schändlichkeiten dem Johann Jacoby zur Last fallen mit der Wirkung, daß das Zwitterwesen „Jakoby, Professor aus Königsberg"[1]) nicht wie Jacob Steiner in der Abth. III der Harmlosen, sondern neben Arago u. a. in die Abth. II des Buches geraten ist, welche „die einer strengeren Überwachung Bedürfenden, großentheils gefährliche Subjekte in sich faßt."[2]) „Ich fange jetzt erst an, meine Existenz von der des Dr. Jacoby zu detachiren", hatte C. G. J. Jacobi dem Bruder am 26. Jan. 1849 geschrieben:[3]) Dem Spürsinn der politischen Polizei muß dies Detachement ebenso wie der Tod des großen Mathematikers entgangen sein.

## XI.

Jacobis politisches Wirken hatte mit den Debatten im konstitutionellen Klub zwar noch nicht völlig,[4]) aber doch in der Hauptsache ihr Ende erreicht. Als glänzendes Meteor war er plötzlich und unerwartet am politischen Himmel aufgezogen, aber auch fast ebenso schnell verschwand er wieder. Zum Volksführer fehlte dem großen Gelehrten doch mancherlei. „Jacobi ist radikal" heißt es am Ende des mehrfach zitierten Grenzbotenartikels,[5]) „aber er verleugnet nie den vornehmen Geist, der mit den Edelsten seiner Zeit und aller Zeiten in stetem Verkehr steht, der dem Volke sich nicht nähert, um ihm zu schmeicheln, sondern um es zu der Höhe, die er selbst errungen, heranzubilden. Aber eben daran scheitern seine Bemühungen, eine politische Stellung zu erreichen; keine Partei traut ihm, keine Partei liebt ihn. Für Geister, wie Jacobi, ist die

---

1) L. c. p. 154. — 2) L. c. Vorwort, p. VIII. — 3) Brief No. LXVII.

4) Im „Verein für Volksrechte", in dem Jacobi zu seiner „Übung und Erfahrung", jedoch nur kurze Zeit den Vorsitz führte, sprach er mehrfach, ebenso in Bezirksvereinen (Brief No. LXII; vgl. auch Grenzboten, l. c. p. 180). Auch anläßlich der Wahlen Anfang 1849 hatte er „3 große Reden gehalten, die für Kammerreden hätten gelten können, und war unerbittlich gegen die Schmach des Belagerungszustandes gewesen" (Brief No. LXVII, 22. Jan. 1849). S. ferner Koenigsberger, l. c. p. 479.

5) L. c. p. 181.

Monarchie ein günstigerer Boden; er ist zu selbstständig und auch wieder in anderer Art zu biegsam, um von den großen Massen getragen und gehoben zu werden." — Die berechtigten Forderungen des Volkes, das edle Bestreben, für materielle und geistige Hebung der unteren Volksschichten zu wirken, hatten Jacobi auf die Seite der Volkspartei geführt; Voreingenommenheit und Unduldsamkeit der Menge stießen ihn dagegen, wie schon erwähnt, wieder ab. Das Recht der selbständigen Ansicht nahm er unter allen Umständen für sich in Anspruch und scheute sich daher nicht, eventuell die eigene Partei rücksichtslos vor den Kopf zu stoßen, so z. B., indem er in dem „Verein für Volksrechte" sich gegen das gleiche Wahlrecht aussprach, eine Verletzung aller demokratischen Grundsätze, die sofort von etwa 10 Rednern nacheinander bekämpft wurde.[1]) Daß solche Überraschungen das Vertrauen der eigenen Partei etwas angriffen, kann nicht wunder nehmen. Auch sonst fehlte Jacobi bei seinem Auftreten stets jede Berechnung persönlichen Vorteils; so soll er nach derselben Quelle[2]) bei den Wahlen des Jahres 1849 alle Aussichten dadurch verscherzt haben, daß er auf eine an ihn gerichtete Interpellation hin sich eine Bedenkzeit erbat, ohne die Frage, wie offenbar erwartet war, sofort in dem gewünschten Sinne zu beantworten. „Daß ich jetzt nicht die geringste Probabilität zum Deputirten habe," schrieb[3]) er damals, zum Wahlmann gewählt, unmittelbar vor den Deputiertenwahlen dem Bruder, „und daher über den einzunehmenden Platz nicht zu reflectiren brauche, scheint mir sicher. Du hast gar keine Vorstellung, wie fern unser eins dem Volke steht, und selbst solchen, von denen man es doch meinen sollte, ist unsere Existenz ganz unbekannt. . . . . . Auch ist es mir unmöglich, Schritte zu thun, um mich hervorzudrängen, nicht aus mangelndem Ehrgeiz, sondern aus Bequemlichkeit. Es ist mir vorläufig genug, daß alle, die mich kennen, meinen, ich hätte die Qualification, und zwar mehr als die meisten. Ich werde auch keine Gelegenheit vorüberlassen, wenn ich einmal in einer Wahlversammlung bin, meine Meinung mit allem Feuer, Beredsamkeit und Rücksichtslosigkeit eines klar erfaßten politischen Gedankens auszusprechen. Und so kann es wohl allmählig im Laufe der Jahre, wenn ich nach und nach immer bekannter werde, dazu kommen. Das Opfer, das ich durch Aufgabe meiner Arbeiten und und vielleicht durch meine Gesundheit bringen müßte, ist so groß, daß ich mir den Aufschub oder Aufhub gefallen lassen kann." Damit berührt Jacobi denn auch zugleich den Hauptpunkt, die Rücksicht auf seine wissenschaftliche Tätigkeit. Schon in einer der obigen Reden des kon-

---

1) Die Grenzboten, l. c. p. 180.

2) Falkson, l. c. p. 87/88, sowie Grenzboten, l. c. p. 180/1.

3) Brief No. LXVII (26. Jan. 1849), Antwort auf die S. 185 zitierte Stelle aus Brief LXVI.

stitutionellen Klubs hatte er, wie die National-Zeitung vorwurfsvoll berichtet,[1]) bemerkt, die Liebe zur Wissenschaft habe ihn wohl über Gebühr von der Politik fern gehalten; auch die Revolutionsbewegung hatte ihn in seinen wissenschaftlichen Arbeiten, die damals vorzugsweise auf astronomischem Gebiete lagen, nicht zu stören vermocht, ja das Jahr 1848 war sogar besonders reich an wissenschaftlicher Arbeit für ihn gewesen (vgl. Brief LXVII, 25. Jan. 1849) und selbst mitten in jener stürmischen Aprilwoche war er mit einem ungeheuer langen Brief an Fuss, den Sekretär der Petersburger Akademie, die Herausgabe der Eulerschen Schriften betreffend, beschäftigt. Die Wahlen des nächsten Jahres und seine Mitwirkung dabei als Wahlmann kosteten ihm „eine furchtbare Arbeit“, wie er dem Bruder klagt,[2]) „ganze Tage“, während er bis dahin nur einige späte Abende daran zu setzen gehabt habe.

Hatte Jacobi es einerseits nicht erreicht, vom Volke auf den Schild erhoben zu werden, so hatte sein Auftreten nach der anderen Seite noch weit mehr Anstoß erregt;[3]) er hatte, wie dies unabhängigen und selbständigen Männern so oft geht, bei keiner von beiden Parteien Anklang gefunden. Die verhängnisvollen Konsequenzen, welche sich für seine amtliche Stellung hieraus ergaben und welche zeitweilig sein ferneres Verbleiben in Preußen in Frage stellten, bis es dann Humboldt gelang, „ihn ganz befriedigt und unter Verhältnissen, welche die Zartheit seiner Gefühle nicht verletzen konnten, dem Lande zu erhalten“,[4]) sind bekannt[5]) und gehören zudem nicht mehr in den Rahmen unseres Themas.

1) National-Zeitung No. 24, 25. April 1848.

2) Brief No. LXVII (22. Jan. 1849).

3) Vgl. a. oben S. 190 Anm. 4, sowie Brief No. LXXV (21. Sept. 1849). S. a. Koenigsberger, l. c. p. 485.

4) Späterer Brief Humboldts an M. H. Jacobi (19. Jan. 1852).

5) Vgl. besonders Koenigsberger, l. c. p. 462 ff., wo auch (p. 470) eine von Jacobis Frau herrührende gedrängte Darstellung der ganzen Angelegenheit abgedruckt ist; eine auf dieselbe Quelle zurückgehende Darstellung findet sich auch in dem *Aus zwei Weltteilen* (Stuttg. u. Leipz. 1905, p. 15/16) betitelten Buche der Frau Marie Hansen-Taylor, einer Tochter des mit Jacobi befreundeten Astronomen P. A. Hansen.

# Über Bearbeitung von Bandregistern zu mathematischen Zeitschriften oder Sammelwerken.

Von G. Eneström in Stockholm.

Daß jeder Zeitschriftenband mit einem Inhaltsverzeichnis versehen werden soll, ist eine Regel, die wohl ausnahmslos beobachtet wird, und wenn das Verzeichnis auf verständige Weise angeordnet ist, so wird es ohne Zweifel in vielen Fällen das Benutzen des Bandes erleichtern. Durch dasselbe findet man nämlich fast unmittelbar eine Abhandlung auf, deren Verfasser oder Titel man kennt, und man kann auch ohne große Mühe ermitteln, welche Aufsätze einen gewissen Gegenstand behandeln, sofern dieser Gegenstand in den Titeln der Aufsätze genannt oder wenigstens angedeutet wird.

Aber nicht selten kommt es vor, daß man wissen will, ob sich in einer Zeitschrift Aufschlüsse über eine besondere Frage oder eine besondere Persönlichkeit finden, ohne daß man voraussetzen kann, daß es immer aus dem Titel hervorgeht, ob ein Aufsatz Aufschlüsse der erwünschten Art enthält, und in solchen Fällen genügt nicht das Inhaltsverzeichnis. Zuweilen gibt es Generalregister, die nicht nur Inhaltsverzeichnisse einer Reihe von Bänden enthalten, sondern noch dazu den Benutzern ein Namen- und Sachregister bieten, und dadurch bekommt man natürlich sehr leicht die Aufschlüsse, von denen ich soeben gesprochen habe. Aber die Generalregister erscheinen erst, nachdem eine größere Anzahl von Bänden herausgegeben worden ist, und während der Zwischenzeit hat der Forscher keinen anderen Ausweg, als die Zeitschriftenbände nacheinander durchzulaufen; indessen ist dies Verfahren so zeitraubend, daß man oft auf die erwünschte Auskunft verzichtet. Für viele Benutzer einer Zeitschrift wäre es also von Interesse, daß jeder Band nicht nur Inhaltsverzeichnis, sondern überdies Namen- und Sachregister enthielte.

Sehen wir jetzt nach, wie es sich mit den mathematischen Zeitschriften verhält, und beschränken wir uns zunächst auf *Namen*register, so finden wir, daß es einige Zeitschriften gibt, die am Ende jedes Bandes ein solches

Register bringen. Hierzu gehören unter den noch existierenden Zeitschriften: Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche, Bulletin des sciences mathématiques, Nouvelles annales de mathématiques, Rendiconti del circolo matematico di Palermo, Revue semestrielle des publications mathématiques, Wiadomości matematyczne, Bibliotheca Mathematica[1]). Dagegen enthalten die meisten mathematischen Zeitschriften keine Namenregister.

Der Grund dieser Tatsache ist ohne Zweifel in einigen Fällen, daß der Herausgeber den Nutzen eines Namenregisters nicht erkannt hat. In anderen Fällen ist es anzunehmen, daß der Herausgeber nicht dazu gekommen ist, ein solches Register anzufertigen oder anfertigen zu lassen, weil er nicht wußte, wie dasselbe zweckmäßig hergestellt werden könnte, und wie viele Zeit man dazu nötig hätte; sicherlich gibt es auch Herausgeber, die in keinem Falle geneigt sind, sich mit der Anfertigung eines Registers zu beschäftigen. Mit diesen letzteren ist natürlich nichts anzufangen; dagegen ist es zu hoffen, daß einige der Übrigen angeregt werden, die Registerfrage in Aussicht zu nehmen, wenn ihre Aufmerksamkeit besonders darauf gelenkt wird, und daß sie auch bewogen werden können, ihre Zeitschriften mit Bandregistern zu versehen, wenn sie über das diesbezügliche Verfahren nähere Auskunft bekommen.

Anscheinend ist es am zweckmäßigsten, bei der Anfertigung von Namenregistern kleine Zettel zu benutzen, von denen jeder einen Namen mit allen dazu gehörenden Verweisen aufnimmt, denn auf diese Weise genügt es, die Druckseiten einmal durchzulaufen, und wenn man nach und nach die neuen Zettel in alphabetischer Folge einordnet, so ist das Namenregister nach der Durchsicht der letzten Druckseite des Bandes sofort fertig. Dieses Verfahrens habe ich mich auch anfangs bedient, aber ich entdeckte bald, daß es um so unbequemer wurde, je größer die Zahl der Namen war. In der Tat wurde es mir unmöglich, mich in vielen Fällen zu erinnern, ob ein gewisser Name früher vorgekommen war, so daß ich oft die schon geschriebenen Namenzettel erfolglos durchblättern mußte, und auch das Aufsuchen der wirklich vorhandenen Zettel, um neue Verweise einzutragen, sowie das Einordnen der neuen Namenzettel erforderte eine nicht unbedeutende Zeit. Seit vielen Jahren wende ich darum ein anderes Verfahren an. Zuerst fertige ich eine Namenliste *ohne Verweise* an, wobei ich auf vierspaltigen Schreibpapierbogen die Namen grob alphabetisch, d. h. *nur* nach dem Anfangsbuchstaben ordne, und

1) L'intermédiaire des mathématiciens hat am Ende jeden Bandes ein Namenregister, aber dies bezieht sich nur auf die Fragesteller und die Verfasser der Antworten. — Mathesis hat auch am Ende jeden Bandes ein solches Register, das aber nicht alle im Bande zitierten Namen enthält.

weiter auf zweispaltigen Bogen die also erhaltene Namenliste genau alphabetisch umordne. Dann sehe ich noch einmal die Druckseiten durch und führe jetzt die Verweise (d. h. die Seitenzahlen) ein. Es ist für mich also nötig, jede Druckseite zweimal durchzusehen und jeden Namen zweimal zu schreiben, aber dieser Mühe unterziehe ich mich viel lieber, als daß ich Namenzettel anwende. Ich füge hinzu, daß ich nunmehr ein besonderes Namenregister für jedes Heft der Bibliotheca Mathematica anfertige, und zuletzt aus den vier Heftregistern ein Bandregister bearbeite; ich habe nämlich gefunden, daß dies Verfahren weniger Zeit erfordert, obgleich ich dadurch genötigt bin, jeden Namen und jede Seitenzahl noch einmal zu schreiben. Ein anderer Vorteil dieses Verfahrens ist, daß das Bandregister schon vor dem Abschließen des Bandes zum größten Teil fertig sein kann.

Die anscheinend sehr einfache Sache, eine gegebene Anzahl von verschiedenen Namen alphabetisch zu ordnen, ist bekanntlich in vielen Fällen gar nicht einfach, weil man nicht immer genau entscheiden kann, welcher Name der eigentliche Zuname ist, und welche Buchstaben als dem Zunamen angehörig betrachtet werden sollen, aber auf diese Frage, die besonders in betreff arabischer und jüdischer Namen schwierig ist, werde ich mich nicht hier einlassen, da sie in jedem Handbuch der Bibliothekswissenschaft behandelt wird. Dagegen halte ich für angebracht, eine andere ziemlich schwierige Frage zu berühren, nämlich was man als Name betrachten soll. Es kommen nämlich Fälle vor, in denen ein Name ausdrücklich genannt wird (vgl. z. B. die Ausdrücke „nicht-EUKLIDische Geometrie“, „PELLsche Gleichung“), ohne daß man den geringsten Grund hat, einen Fachgenossen, der Aufschlüsse über den Träger dieses Namens sucht, auf solche Stellen hinzuweisen. Es kommen andere Fälle vor, in denen ein Name zwar nicht ausdrücklich genannt, aber dennoch mehr oder weniger offen angedeutet wird, z. B. durch die Ausdrücke „Filius meus“, „ein hochverdienter Fachgenosse“, „Ich“, „*meine* Abhandlung“ usw. Wie soll man in diesen und ähnlichen Fällen verfahren? Eine allgemein gültige Antwort auf diese Frage gibt es natürlich nicht. Man *kann* als Grundsatz aufstellen, im Namenregister *nur* auf solche Stellen hinzuweisen, wo ein Name ausdrücklich angeführt wird und Aufschlüsse über den Träger dieses Namens gegeben werden; man kann sogar noch einen Schritt weiter gehen und sich auf solche Aufschlüsse beschränken, die von größerem Interesse sind. Dies letztere Verfahren scheint mir am wenigsten empfehlenswert, da es äußerst schwierig ist zu entscheiden, was für den Benutzer eines Zeitschriftenbandes von Interesse ist oder nicht, und aus meiner eigenen Erfahrung weiß ich, daß ein an sich sehr geringfügiger Aufschluß nicht selten wertvoll werden kann, wenn er als Ausgangspunkt für weitere Nachforschungen benutzt wird. Dagegen gebe ich zu, daß man bei der Zusammenstellung eines Namenregisters sehr wohl von solchen Stellen absehen könnte, wo die Gleichung $ax^2 + 1 = y^2$ unter dem Namen „Pellsche Gleichung“ angeführt wird. Auf der anderen Seite wird die Berücksichtigung solcher Stellen zum Teil das Fehlen eines wirklichen Sachregisters ersetzen, und aus diesen und ähnlichen Gründen nehme ich in das Namenregister alle ausdrücklich angeführten Namen (mit Ausnahme von denen der Verleger oder Buchdrucker) auf, sogar den Namen des Empfängers einer zitierten „Festschrift“, auch wenn dieser Gelehrte gar nichts mit dem behandelten Gegenstande zu tun gehabt hat. Ist dagegen eine Persönlichkeit nicht ausdrücklich genannt, sondern z. B. mit dem Ausdrucke „ein hochgeehrter Kollege“ angedeutet, so kann die Feststellung seines Namens zuweilen besondere Nachforschungen nötig machen, und solche Nachforschungen gehören eigentlich nicht zur Bearbeitung des Namenregisters eines einzelnen Zeitschriftenbandes; kann ich ohne Mühe den Namen ermitteln, so führe ich ihn gewöhnlich in das Register ein, sonst sehe ich von der fraglichen Stelle ab. Dagegen gebe ich mir besondere Mühe, um die Initialen der Vornamen angeben zu können, um dadurch zu vermeiden, daß zwei oder mehrere Persönlichkeiten unter einem Namen zusammengeführt werden.

Die Zeit, die erforderlich ist, um ein Namenregister anzufertigen, hängt natürlich nicht nur von dem Umfange des Bandes, sondern noch mehr von den behandelten Gegenständen ab. In dogmatisch-mathematischen Zeitschriften werden nur wenige Namen zitiert, und für die Herstellung des Namenregisters eines solchen Zeitschriftenbandes genügen einige Stunden [1]). Wesentlich anders liegt die Sache in betreff der mathematischen Zeitschriften, die literarische Artikel, Rezensionen und Schriftverzeichnisse bringen; hier kann zuweilen eine einzige Seite eine Viertelstunde oder mehr in Anspruch nehmen, während freilich andere Seiten in einer Minute erledigt werden. Die zur Herstellung des Namenregisters nötige Zeit wechselt also nicht nur für verschiedene Zeitschriften, sondern auch für einzelne Bände ein und derselben Zeitschrift; die Bände $\mathbf{2}_3$ (1901) und $\mathbf{5}_3$ (1904) der Bibliotheca Mathematica enthalten bezw. 23 und 13 Druckseiten Namenregister, und die Anfertigung des ersten Namenregisters

1) Als Stichprobe habe ich ein Namenregister des Bandes **61** (1905) der Mathematischen Annalen angefertigt, und dies Register hat mir 5 Stunden Arbeit gekostet (wovon 1/2 Stunde für die Feststellung der fehlenden Initialen von Vornamen). Dazu kommt für die Korrekturlesung, wobei ich die Verweise durch nochmaliges Durchlaufen der Seiten kontrolliert habe, 3 Stunden. Das Register drucke ich als Anhang dieses Artikels ab; wer sich für die Sache interessiert, kann dadurch leicht kontrollieren, ob die von mir angegebene Zeit genügt, um ein vollständiges und korrektes Namenregister anzufertigen.

hat mehr als zweimal die Zeit, die für das zweite Namenregister nötig war, in Anspruch genommen. Im Durchschnitt haben die Namenregister der 6 ersten Bände der dritten Folge der Bibliotheca Mathematica 18 Druckseiten betragen, und da die Seitenzahl des Registers des 6. Bandes (1905) gerade mit der Durchschnittszahl zusammenfällt, notiere ich hier, wie lange Zeit die Anfertigung dieses Registers erfordert hat. Für die vier Heftregister habe ich zusammen 30 Stunden, für das daraus hergestellte definitive Bandregister 12 Stunden gebraucht. Aber überdies habe ich die Verweise durch nochmaliges Durchlaufen der Druckseiten des Bandes kontrolliert, und für diesen Zweck 10 Stunden angewendet, wozu für die Korrekturlesung 4 Stunden hinzukommen, so daß das Register im ganzen 56 Stunden Arbeit erfordert hat. Diese 56 Stunden würden ganz gewiß genügt haben, um einen wenigstens 18 Druckseiten langen mathematisch-historischen Aufsatz zu verfassen, aber ich für meinen Teil betrachte dennoch die Zeit als wohl angewendet, die ich für die Anfertigung des Namenregisters gebraucht habe.

Ich habe bisher nur von *Namen*registern gesprochen. Für den Benutzer eines Zeitschriftenbandes kann gewiß ein *Sach*register von ebenso großem Nutzen wie ein Namenregister sein, und insofern können die zwei Register gleichgestellt werden, aber daß es in betreff der Anfertigung derselben einen wesentlichen Unterschied geben muß, dürfte schon aus dem Umstande hervorgehen, daß keine einzige der mathematischen Zeitschriften, die mit Bandregistern versehen sind, dabei ein Sachregister bringt. In der Tat ist es so schwer, ein gutes Sachregister zu bearbeiten, daß es kaum der Mühe lohnt, für jeden Band ein solches anzufertigen, ohne daß man im Voraus sicher ist, daß das ganze Register von sehr vielen Personen benutzt werden wird. Aber oft werden in Zeitschriftenartikeln nebenbei Gegenstände berührt, die von geringem Interesse sind gerade für den Leserkreis, an den sich die Zeitschrift wendet, und auf diese Gegenstände ist es also eigentlich unnötig, im Bandregister hinzuweisen. Will man aus diesem Grunde von solchen Nebensachen absehen und sich auf das wesentlichste der Artikel des Bandes beschränken, so entstehen Schwierigkeiten hinsichtlich der Auswahl der im Register aufzuführenden Stichwörter. Zuweilen erfordert die Anfertigung des Registers eine ganz besondere Sachkunde, die nicht jedem Herausgeber einer Zeitschrift immer zur Verfügung steht. Auch in sprachlicher Hinsicht bietet die Anfertigung eines Sachregisters Schwierigkeiten dar, wenn es sich um eine mehr oder weniger internationale Zeitschrift handelt, und für eine solche Zeitschrift wird noch dazu der Wert des Registers vermindert, weil z. B. ein Italiener ein Sachregister mit deutschen Stichwörtern nicht leicht benutzen kann. Aus diesen Gründen habe ich den Bänden der

Bibliotheca Mathematica kein Sachregister beigefügt[1]), und aus denselben Gründen will ich meine Kollegen zur Anfertigung solcher Bandregister nicht auffordern. Dagegen empfehle ich ihnen dringend bei der Bearbeitung von Generalregistern auch Sachregister zu bieten[2]). Hinsichtlich der Generalregister sind natürlich die Schwierigkeiten nicht kleiner, aber der Nutzen des Sachregisters ist viel größer.

* * *

Im Titel dieses Artikels habe ich auch mathematische Sammelwerke genannt. Darunter verstehe ich solche Werke, die in mehreren, nicht allzu schnell aufeinander folgenden Bänden erscheinen und verschiedenartige Gegenstände behandeln, z. B. die Gesammelten Werke eines Mathematikers oder eine Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Für solche Werke sind meines Erachtens Bandregister immer wünschenswert, unabhängig davon, ob nach der Beendigung ein Gesamtregister bearbeitet werden wird oder nicht. Für gesammelte Werke ist freilich dabei auf den Inhalt besondere Rücksicht zu nehmen. Handelt es sich um einen moderen Mathematiker, der vorzugsweise auf einem beschränkten Gebiete gearbeitet hat, sind die Bandregister von geringerem Belang, aber besonders wertvoll werden sie in betreff der gesammelten Werke älterer Mathematiker, und sogar fast notwendig, wenn Briefe darin veröffentlicht werden. Da die Bände solcher Werke dazu bestimmt sind, unmittelbar nach dem Erscheinen von vielen Fachgenossen benutzt zu werden, so sollten die Bandregister meiner Ansicht nach sowohl Namen- wie Sachregister bringen.

Noch größere Bedeutung haben gute Bandregister hinsichtlich einer Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, wenn diese, wie die seit einigen Jahren in Angriff genommene, „in knapper Form aber mit möglichster Vollständigkeit eine Gesamtdarstellung der mathematischen Wissenschaften nach ihrem gegenwärtigen Inhalt an gesicherten Resultaten zu geben und zugleich durch sorgfältige Literaturangaben die geschichtliche Entwickelung der mathematischen Methoden nachzuweisen“ beabsichtigt. Daß das Sachregister hier das durchaus wichtigste sein muß, ist ohne weiteres klar und ebenso klar ist es, daß das Sachregister um so nützlicher wird, je vollständiger es ist in betreff der *mathematischen* Stichwörter. Ob es dagegen nötig oder wenigstens nützlich ist, in das Sachregister solche nicht mathematischen Stichwörter wie „Ablaufen“ (einer Lebensversicherung), „Abschlußprovision“, „Aktiengesellschaft“,

---

1) Als einen Ersatz des Sachregisters der *Artikel* bringt die Bibliotheca Mathematica ein Sachregister zum Inhaltsverzeichnisse, d. h. ein Sachregister der *Titel* der Artikel.

2) Vgl. Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, S. 417.

„Aktionär", „Ausgaben" (einer Lebensversicherungsgesellschaft), „Erschöpfung" (der Nummern einer Ziehungsreihe) usw. einzuführen, scheint mir zweifelhafter. Jedenfalls will ich hier ausdrücklich hervorheben, daß ich das von Herrn W. Fr. Meyer bearbeitete Sachregister des ersten Bandes der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* als eine sehr verdienstvolle Arbeit betrachte.

Auf der anderen Seite bin ich gar nicht damit einverstanden, daß das Register dieses Bandes *wesentlich* nur ein Sachregister bringt. Freilich kommen darin Personennamen vor, aber eigentlich nur in solchen Fällen, in denen es sich um einen Satz oder eine Methode handelt, die im Texte einem bestimmten Mathematiker zugeschrieben werden. Sein Verfahren hat Herr W. Fr. Meyer in der Vorrede (S. XXVII) auf folgende Weise auseinandergesetzt und begründet:

> Mit einigen Ausnahmen sind hier bei den Stichworten nur solche Autoren berücksichtigt, die der Gegenwart nicht mehr angehören, und auch diese zumeist nur dann, wenn ihr mit einem bestimmten Begriffe oder Satze oder einer spezifischen Methode verbundener Name — oft freilich nur zufällig oder auch mißbräuchlich — zu einer Art gangbarer Münze geworden ist. Andererseits lag die Versuchung nahe, wenn ein Autor angeführt wurde, hinsichtlich seiner hervorstechenden Leistungen eine gewisse Vollständigkeit anzustreben. Der an sich berechtigte Wunsch, den Mancher gehegt haben wird, daß dies Prinzip auf möglichst viele oder gar alle Autoren hätte ausgedehnt werden sollen, konnte schon mit Rücksicht auf den zur Verfügung stehenden Raum nicht befriedigt werden.

Der einzige ausdrücklich angegebene Grund, warum von einem vollständigen Namenregister Abstand genommen wurde, ist also, daß der zur Verfügung stehende Raum zu klein war. Nun möchte ich aber wissen, ob Herr W. Fr. Meyer wenigsens versucht hatte, die für das Namenregister nötige Seitenzahl abzuschätzen. Bis auf weiteres bin ich geneigt anzunehmen, daß er keinen erfolgreichen Versuch in dieser Hinsicht gemacht hat, denn es ist äußerst schwer, eine solche Abschätzung auszuführen, auch wenn man gewohnt ist, Namenregister anzufertigen. Aber dem sei wie ihm wolle, jedenfalls kann ich dem von Herrn W. Fr. Meyer angeführten Grunde keine eigentliche Bedeutung beimessen. Ich habe für meinen eigenen Gebrauch ein Namenregister des ersten Bandes der *Encyklopädie* angefertigt; dies Register enthält etwa 1800 Namen, und nach meiner Schätzung würde es höchstens 32 zweispaltige Druckseiten in Anspruch nehmen. Aber wenn es sich um ein so wertvolles Unternehmen wie die *Encyklopädie* handelt, ist es höchst unwahrscheinlich, daß ein Raum von 32 Druckseiten von entscheidender Bedeutung gewesen wäre[1]); im Gegenteil bin ich überzeugt, daß der rührige Verleger der *Encyklopädie* mit Vergnügen zwei Druckbogen für das Namenregister zur Verfügung gestellt hätte, denn die Brauchbarkeit des Werkes würde durch ein solches Register viel größer als jetzt geworden sein. In der Tat kommt es nicht selten vor, daß der Name eines jetzt lebenden Mathematikers in erster Linie mit einem gewissen Satz oder einer gewissen Methode verbunden ist, so daß man den Satz oder die Methode sofort auffinden könnte, wenn man wüßte, wo sein Name genannt wird. Nun kann man ja einwerfen, daß in der *Encyklopädie* die Gegenstände in systematischer Ordnungsfolge behandelt sind und daß es noch dazu ein Sachregister gibt, so daß man direkt den Satz oder die Methode auffinden kann, aber in Wirklichkeit ist es oft gar nicht leicht zu wissen, wo ein gewisser Gegenstand seinen Platz hat, und für nicht deutsche Mathematiker ist das Benutzen des Sachregisters auch nicht immer leicht.

Aber abgesehen von dem soeben erwähnten Nutzen eines vollständigen Namenregisters, kann ein solches in vielen anderen Fällen brauchbar sein. Wenn ich z. B. wissen will, ob eine gewisse Abhandlung, die ich als wertvoll betrachte, in der *Encyklopädie* erwähnt wird oder nicht, so kann mir ein Namenregister sofort hierüber Auskunft geben, während ich mir sonst zuweilen große Mühe geben muß, um diese Auskunft zu erhalten. Ebenso nützlich wäre mir das Namenregister, wenn man mir z. B. gelegentlich mitteilte, daß ein gewisser Verfasser eine Abhandlung über einen gewissen Gegenstand veröffentlicht hat, aber ohne daß es mir möglich war, gleichzeitig zu erfahren, wann und wo die Abhandlung erschien.

Auch von mathematisch-historischem Gesichtspunkte aus wäre ein vollständiges Namenregister erwünscht. Aus demselben könnten nämlich die jungen Mathematiker entnehmen, welche Aufschlüsse ihnen die *Encyklopädie* über die älteren Mathematiker bietet. So z. B. würde man dadurch erfahren, daß Leonardo Pisano den Bruchstrich benutzt (S. 19), das Wort „surdus" angewendet (S. 50), die Gleichungen $s^2 + n = u^2$, $s^2 - n = v^2$ behandelt (S. 570—571) und sich mit einer rekurrenten Reihe beschäftigt hat (S. 577). Ebenso würde der junge Mathematiker durch das Namenregister erfahren können, daß F. Viète die eigentliche Buchstabenrechnung ausgebildet (S. 5), ein unendliches Produkt für $\frac{2}{\pi}$ hergeleitet (S. 111), eine trigonometrische Lösung der kubischen Gleichung gegeben (S. 501) und Konstruktionen zur geometrischen Ermittelung

1) Das Namenregister der Bibliotheca Mathematica $2_3$ (1901) enthält, wie oben bemerkt wurde, 23 Druckseiten.

rechnerisch erhaltener Ausdrücke zusammengestellt hat (S. 1007). Von diesen Sachen werden im MEYERschen Register nur die rekurrente Reihe des LEONARDO PISANO (S. 1147 unter „FIBONACCI") und das unendliche Produkt für $\frac{2}{\pi}$ des VIETE (S. 1193) erwähnt.

Es ist wohl kaum zu erwarten, daß die folgenden Bände der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* ein vollständiges Namenregister bringen werden. Dagegen hoffe ich, daß die Bände der französischen Auflage solche Register enthalten werden. Von mathematisch-historischem Gesichtspunkte aus wäre dies gewiß sehr zu wünschen, da die französische Ausgabe eine außerordentlich große Anzahl von wertvollen historischen Notizen bringt.

## Anhang.

Namenregister des Bandes 61 (1905) der Mathematischen Annalen (siehe oben Fußnote 1 Seite 196).

Abel, N. H., 34, 37, 42, 49, 52, 369.
Abraham, M., 235, 247.
d'Alembert, J., 227, 271, 438, 439.
Amiot, B., 5.
Ampère, A. M., 109, 112—114, 116.
Appell, P., 37.
Archenhold, F. S., 72.
Archimedes, 173.
Aronhold, S. H., 13.

Baire, R., 119, 146, 149, 281, 287.
Ball, R., 1.
Benzenberg, J. F., 72.
Bernoulli, Joh. I, 425, 431, 434.
Bernstein, F., 117, 121, 132, 146.
Berry, A., 24.
Bessel, F. W., 74, 398.
Bianchi, L., 205, 367.
Biermann, O., 317.
Blumenthal, O., 235, 289, 325.
Bohler, O., 366.
Boole, G., 5.
Borel, E., 121, 271, 407, 415.
Brendel, M., 73.
Brianchon, C. J., 4.
Brill, A., 77.
Brioschi, F., 14, 51, 56, 57, 59.
Brodén, T., 282.
Bromwich, T. J. I'A., 95, 106.
Burali-Forti, C., 160.
Byerly, W. E., 217.

Cantor, G., 117—121, 134, 135, 138, 143, 145—148, 150, 159, 160, 406, 407, 410, 412, 413.
Casey, J., 3.
Castelnuovo, G., 20, 21, 24, 26, 37, 45, 47, 49, 50.
Cauchy, A. L., 39.
Cayley, A., 3, 5—18, 364.
Cesaro, E., 529, 530, 533.
Chasles, M., 3—5, 10.
Christoffel, E. B., 437, 438.
Clebsch, A., 15—18.
Cremona, L., 11, 15.

Darboux, G., 208, 209, 431, 436.
Dehn, M., 173, 174, 561.
De la Vallée Poussin, Ch. J., 272, 527, 529.
Del Pezzo, P., 20.
Dersch, O., 15.
Desargues, G., 161—164, 167, 169—171, 177, 178, 180, 183.
Dini, U., 208, 252—254, 261, 269.
Dirichlet, P. G. L., 50, 239, 252—255, 260, 261, 451, 527, 533, 534, 536—539, 543, 546, 551.
Dodd, E. L., 95.
Du Bois Reymond, P., 450, 451.
Duhem, P., 438.

Engel, F., 72, 109, 113, 185—191, 587.
Enneper, A., 208.
Enriques, F., 24, 40, 49.
Euklides, 174, 177, 178, 180, 184, 197, 199, 561, 562, 577, 581—583, 585—587.
Euler, L., 211, 432, 448, 449, 530, 531, 558, 561—563, 565, 568—570, 574, 576, 577, 585, 586.

Faber, G., 289.
Fabry, E., 289.
Faure, H. A., 17.
Fejér, L., 271, 273, 274, 277—280, 422, 560.
Fiedler, W., 5, 18, 19.
Föppl, A., 235.
Förster, E., 422.
Fourier, J., 215, 217, 251—254, 256—258, 262, 263, 269, 271—274, 277, 278, 280, 552.
Fricke, R., 52, 70, 217, 325, 357, 364, 366, 368, 560.
Fubini, G., 367.
Furtwängler, Ph., 381.
Fuss, P. H., 528—530.
Füter, R., 72.

Galois, E., 55, 60—62.
Gauss, K. F., 60, 72—76, 164, 203, 205, 209.
Gerbaldi, F., 65, 454, 457, 474, 518.
Gergonne, J. D., 6.
Gordan, P., 50, 60, 61, 65, 68, 70, 71, 453.
Goursat, E., 37.
Graves, Ch., 3.
Gray, A., 398.
Green, G., 236, 237, 249, 397, 447.
Grube, F., 239.
Gutzmer, A., 535.

Hadamard, J., 437, 448, 535.
Hahn, H., 430.
Hamilton, W. R., 3, 439—441, 446, 449.
Hansen, P. A., 72, 74.
Hart, A. S., 3, 13.
Hartogs, F., 289, 290, 316, 319—321.
Harzer, P., 72.
Hausdorff, F., 143.
Heine, H. E., 407, 415.
Hensel, K., 50, 369, 454.
Herglotz, G., 551.
Hermite, Ch., 14, 16, 331—333, 359—363, 367.
Hesse, O., 5, 13—16, 18, 67, 68.

# Kleine Mitteilungen.

## Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik".

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen".
BM = Bibliotheca Mathematica.

**1 : 12**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265. — **1 : 15**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 323. — **1 : 22, 29, 34**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265—266. — **1 : 36, 64**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137. — **1 : 103**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1 : 135**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137. — **1 : 144, 155, 169, 171**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137—138. — **1 : 189—190**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 101. — **1 : 192, 193**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 101—102. — **1 : 195**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 56; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 102. — **1 : 196—197**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 102—103. — **1 : 198**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 103. — **1 : 202**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1 : 207**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 283. — **1 : 225, 234**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 138. — **1 : 255**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 238. — **1 : 272**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 396; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 322. — **1 : 283**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1 : 284, 321**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266—267. — **1 : 335**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 305. — **1 : 370**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 319. — **1 : 383**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1 : 386**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 407. — **1 : 395**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 323. — **1 : 400**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1 : 429**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 324. — **1 : 432**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1 : 434—435**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 396—397. — **1 : 436**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 138. — **1 : 437, 440**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1 : 457**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 238. — **1 : 463**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139, 324. — **1 : 466**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 397. — **1 : 467**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267.

---

**1** : 468. In betreff der Lebensumstände des EUTOKIOS sollte in erster Linie auf den Aufsatz von PAUL TANNERY: *Eutocius et ses contemporains* (Bullet. d. sc. mathem. $8_2$, 1884, 315—329) verwiesen werden. TANNERY hebt zuerst hervor, daß von den vier Stellen, wo EUTOKIOS anscheinend ISIDOROS seinen Lehrer nennt, drei einen solchen Wortlaut haben, daß „mein" im Ausdrucke „mein Lehrer" sich kaum auf EUTOKIOS bezieht, und daß auch die vierte Stelle sehr wohl ein von EUTOKIOS gar nicht herrührender Zusatz sein kann. Dann sucht TANNERY nachzuweisen, daß EUTOKIOS wahrscheinlich nicht jünger als ISIDOROS war, und also kaum Schüler von diesem gewesen ist. Auf der anderen Seite macht TANNERY darauf aufmerksam, daß AMMONIOS (der etwa 510 starb) offenbar als Lehrer des EUTOKIOS betrachtet werden muß, und nach HEIBERG (siehe W. KROLL, *Die Altertumswissenschaft* **1** [1905], S. 131) ist die Richtigkeit dieser Angabe jetzt anderweitig bestätigt worden. TANNERY setzt darum die Blütezeit des EUTOKIOS in die *erste* Hälfte des 6. Jahrhunderts, und nimmt an, daß er etwa 480 geboren ist. G. ENESTRÖM.

---

**1 : 469** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1 : 475**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267—268; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 283. — **1 : 476**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1 : 479, 480**, siehe BM. $\mathbf{7}_3$, 1906, S. 80—81.

---

1 : 480. In einer früheren Bemerkung habe ich behauptet (siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906, S. 81), daß ein gewisser Passus der *Vorlesungen* nicht gut redigiert ist, aber ich hätte dabei auch hinzufügen sollen, warum ich dieser Ansicht bin (denn an sich könnte dieser Passus sehr wohl richtig abgefaßt sein), nämlich weil meines Wissens keine Handschrift der Abhandlung des Moschopulos aus der Zeit vor dem 15. Jahrhundert bekannt ist. Die zwei von Tannery untersuchten Handschriften stammen sicherlich aus dem 15. Jahrhundert, und die von Günther benutzte Handschrift gehört einem Sammelbande, der zum großen Teil von Johann Murmureus aus Nauplia (15. Jahrhundert) geschrieben ist. Indessen wäre es vielleicht besser gewesen, wenn ich gesagt hätte: „Entweder ist die betreffende Cantorsche Angabe bisher unbestätigt, oder ist sie nicht gut redigiert“.

G. Eneström.

---

**1 : 481**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906, S. 81. — **1 : 508**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 68. — **1 : 510**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 314. — **1 : 519—520**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **1 : 537, 540, 542**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268.

---

1 : 550. Hier wird im Kapitel: „Die spätere mathematische Literatur der Römer“ eine in einem Sammelbande in Chartres enthaltene Abhandlung über das Abacusrechnen erwähnt. Aber die Handschrift stammt nach Chasles (*Geschichte der Geometrie*, übertr. von L. A. Sohncke, Halle 1839, S. 517) aus dem 11. Jahrhundert, nach Bubnov (*Gerberti Opera mathematica*, Berlin 1899, S. XXVI) aus dem 12. Jahrhundert her, und meines Wissens hat man gar keinen Anlaß anzunehmen, daß die Abhandlung von einem Römer verfaßt worden ist.

G. Eneström.

---

**1 : 618**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 306—307. — **1 : 622**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S 143. — **1 : 638**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 394. — **1 : 641**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1 : 661**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1 : 662**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1 : 663**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 405. — **1 : 671**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1 : 673**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 407—408; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 307.

---

1 : 674. In der Musterrechnung der Division 46 468 : 324 hat der Quotient einen unrichtigen Platz bekommen. Statt $\begin{array}{l}143\\46468\end{array}$ muß nämlich $\begin{array}{r}143\\46468\end{array}$ stehen. Dies könnte ja sehr wohl ein Druckfehler sein, aber da bei Friedlein (*Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendlandes vom 7. bis 13. Jahrhundert*, Erlangen 1869, S. 137—138) dieselbe fehlerhafte Anordnung vorkommt, vermute ich, daß auch hier ein Mißverständnis vorliegt. In der Tat heißt es an der von Herrn Cantor zitierten Stelle des Traktates *Algorismi de numero Indorum* (S. 15, Z. 12—14): „Scribamus in directo prime differentie numeri, super quem dividimus, super numerum superiorem quem dividimus, qui sunt quater, unum“. Aber „numerus super quem dividimus“ bedeutet ganz gewiß der Divisor, denn einige Zeilen weiter

oben auf derselben Seite steht: „scribes sub eis numerum, super quem dividis, scribesque ultimam differentiam numeri, super quem dividis, que est figura trium . . . sub ultima differentia numeri superioris“; auf der anderen Seite bedeutet „prima differentia“ die *letzte* Stelle nach unserer Ausdrucksweise, also die Einerziffer. Die höchste Ziffer des Quotienten soll also über die Ziffer 4 des Divisors d. h. über die dritte Ziffer (4) des Dividenden gesetzt werden, und der Grund dazu ist leicht einzusehen: sowohl die Ziffer des Quotienten wie die dritte Ziffer des Dividenden bezeichnen Hunderte.

Dieselbe Anordnung haben übrigens *alle* mir bekannten Algorismus-Schriften des 12. und 13. Jahrhunderts, die die Überwärtsdivision lehren, so z. B. der von Herrn Cantor selbst herausgegebene *Liber algorizmi* und die von Curtze zum Abdruck gebrachte Algorismusschrift aus dem 12. Jahrhundert (daß dort ein einzigesmal die erste Ziffer 1 des Quotienten durch einen Druckfehler einen unrichtigen Platz bekommen hat, kann nicht irre leiten).

Auch abgesehen von dieser Berichtigung, scheint mir die Cantorsche Restitution der Musterrechnung nicht ganz gelungen. Soll überhaupt etwas *über* den Quotienten gesetzt werden, so möchte ich $\begin{matrix}14\\2\\110\end{matrix}$ statt $\begin{matrix}24\\110\end{matrix}$ und $\begin{matrix}12\\2\\140\end{matrix}$ statt $\begin{matrix}22\\140\end{matrix}$ setzen. In der Beschreibung kommen nämlich gar nicht die Zahlen 24 und 22 vor, aber dagegen die Zahlen 14, 2, 12, 2, und es dürfte nicht leicht zu erklären sein, was jene Zahlen eigentlich bedeuten sollten. Indessen scheint es mir aus der Beschreibung durchaus klar zu sein, daß die Produkte 3 . 1, 2 . 1, 4 . 1, usw. unmittelbar vom Dividenden 46 468 subtrahiert werden sollen, so daß dieser successiv die folgenden Werte bekommt (vgl. Friedlein, a. a. O. S. 137): 16 468, 14 468, 14 068, 2068, 1268, 1108, 208, 148, 136. Die erste Operation wird auf folgende Weise angegeben: „Multiplicemus ipsum [= unum] in tribus, et minuemus eum de eo quod supra ipsum [= tres] est, et remanebit unum“, und dieselbe Ausdrucksweise wird für die folgenden Operationen angewendet. Übrigens wird dies Verfahren in allen oben von mir angedeuteten Algorismusschriften gebraucht. G. Eneström.

---

**1 : 675**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 408. — **1 : 687—689**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143—144; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 205—206. — **1 : 694**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 284; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 103.

---

1 : 699. In betreff des Buches der geometrischen Konstruktionen von Abul Wafa wäre es nützlich, nicht nur auf den Woepckeschen Bericht, sondern auch auf die Auszüge von L. Rodet (Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **16**, 1883, S. 528—544) hinzuweisen. Rodet hat dasselbe Manuskript (Bibliothèque nationale, anc. fonds persan n° 169) wie Woepcke benutzt, gibt aber selbst an, daß er an gewissen Stellen eine bessere Übersetzung bietet. G. Eneström.

---

**1 : 704, 706, 708**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499—500. — **1 : 712**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906, S. 81—82. — **1 : 714**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 500. — **1 : 723**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 307. — **1 : 735, 736, 744, 748**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 500. — **1 : 749**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1 : 752**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 104. — **1 : 753**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 408—409. — **1 : 754**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 409; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 104, 308.

---

**1**:754. Herr A. Sturm hat schon (BM **6**$_3$, 1906, S. 308) darauf hingewiesen, daß das Rechenrätsel der Schrift *Liber algorismi de pratica arismetrice* (ed. Boncompagni S. 118), wo der von Herrn Cantor zitierte Ausdruck „tantum quantum“ vorkommt, im Mittelalter ziemlich verbreitet war. Ich gebe hier noch zwei weitere Belege hierfür. Im Cod. lat. Berol. 4° 510 findet sich Bl. 74$^b$ unten folgende Aufzeichnung, die mit dem Texte (Demonstratio Jordani de algorismo) in keinem Zusammenhange steht:

„Ad solvendum istud problema: Si vixisti quantum vixisti et iterum tantum et dimidium tanti et dimidium dimidii, tandem .c. annos complevisses. Notandi sunt isti versus:

„De numeri summa si portio quinta secetur,
Tercia de reliquo, numerus quesitus habetur“.

In der Tat ist ja $\frac{1}{3}(100 - \frac{100}{5}) = 26\frac{2}{3}$.

Fast derselbe Wortlaut des Rechenrätsels findet sich im Cod. lat. Monac. 14684, fol. 31$^a$ (siehe M. Curtze, *Arithmetische Scherzaufgaben aus dem 14. Jahrhundert;* Biblioth. Mathem. 1895, S. 80):

O fili, si tantum vixisses, quantum vixisti, et iterum tantum, et dimidium tanti, et dimidium dimidii, centum annos complevisses, aber dort lauten die Verse:

Hic puer etate quantus fuit, arte probate.
Quinta recidatur, remanentis tercia pars est.

Von den fünf in der BM erwähnten Texte des Rechenrätsels enthält also nur eine einzige den Ausdruck „tantum quantum“, was wohl beweist, daß dieser nicht als ein Kunstausdruck betrachtet werden kann. G. Eneström.

---

**1**:**756**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 500; **6**$_3$, 1905, S. 308. — **1**:**757**, **767**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 500—501. — **1**:**794**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 139. — **1**:**804**, **805**, **807**, **808**, **812**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 268—269. — **1**:**816**, siehe BM **7**$_3$, 1906, S. 82—83. — **1**:**823**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 269.

---

**1**:825. Nach A. Nagl (*Gerbert und die Rechenkunst des 10. Jahrhunderts;* Sitzungsber. der Akad. d. Wiss. in Wien, Phil. Cl. **116**, 1888, S. 877) ist es gar nicht sicher, daß Bernelinus der Schule Gerberts unmittelbar angehört hat. Nagl gibt an, daß Bernelinus zum ersten Mal im Jahre 1588 von einem französischen Verfasser als Schüler Gerberts bezeichnet worden ist, daß es aber nicht möglich war, eine Bestätigung dieser Angabe aufzufinden. G. Eneström.

---

**1**:**836**, **848**, siehe BM **7**$_3$, 1906, S. 83—84.

---

**1**:848. In einer früheren Bemerkung (BM **7**$_3$, 1906, S. 83—84) habe ich einige Notizen über das Vorkommen der Terme „divisio aurea“ und „divisio ferrea“ gegeben, und daraus gefolgert, daß diese Terme wahrscheinlich vor Atelhart von Bath bekannt waren. Nachdem diese Bemerkung zum Absatz gebracht war, fand ich, daß Herr A. Nagl (*Der arithmetische Tractat des Radulph von Laon*; Abhandl. zur Gesch. der Mathem. **5**, 1890, S. 92) diese Terme als schon lange Zeit vor RADULPH „in der Schule zu rein technischen geworden“ bezeichnet hat. Als Beleg verweist Herr NAGL auf eine von CHASLES (Comptes rendus de l'académie des sciences [de Paris] **16**, 1843, S. 237—246) herausgegebene Schrift über den Abacus, wo (S. 243) folgender Passus vorkommt: „divisio . . . de ferrea redit ad auream, scilicet de ista cum differentiis ad illam sine differentiis“. Aber die von CHASLES benutzte Handschrift (Cod. lat. Paris. 15119) stammt nach BUBNOV (*GERBERTI Opera mathematica*, Berlin 1899, S. LXIV) aus dem Ende des 12. Jahrhunderts, und die andere bekannte Handschrift der von CHASLES herausgegebenen Schrift (Cod. Vatic. 3123) rührt nach E. NARDUCCI (*Due trattati inediti d'abaco;* Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **15**, 1882, S. 112) ebenfalls aus der 2. Hälfte des 12. Jahrhunderts her. Der von Herrn NAGL zitierte Passus beweist also gar nicht, daß die Terme „divisio aurea“ und „divisio ferrea“ schon zu RADULPH von Laons Zeit (also am Anfange des 12. Jahrhunderts) seit langem zu technischen Bezeichnungen geworden waren. Meines Wissens ist es noch nicht nachgewiesen, daß die Terme schon im 11. Jahrhundert benutzt worden sind, und nur aus den Worten des RADULPH kann man schließen, daß sie wahrscheinlich am Ende dieses Jahrhunderts bekannt waren. G. ENESTRÖM.

---

**1 : 852,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 269. — **1 : 853,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501. — **1 : 854,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 324; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 206; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 104. — **1 : 855,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501; $\mathbf{7}_3$, 1906, S. 84. — **1 : 856,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 309.

---

**2 : 7,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351. — **2 : 8,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 309. — **2 : 10,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2 : 14—15,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 200; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 208—209. — **2 : 20,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **2 : 25,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 274. — **2 : 30,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105. — **2 : 31,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351—352; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239—240; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 309—310. — **2 : 32,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105. — **2 : 34,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 310. — **2 : 37,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105. — **2 : 38,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 39,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 209. — **2 : 41,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 51,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 106. — **2 : 53,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 201. — **2 : 57,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352.

---

2 : 59. In meinem Aufsatze *Über die „Demonstratio JORDANI de algorismo“* (BM $\mathbf{7}_3$, 1906, S. 24—37) habe ich erwähnt (S. 25), daß der Cod. Ottob. 309 zwei dem JORDANUS NEMORARIUS zugeschriebene Traktate „De numeris“ und „De minutiis“ enthält, und ich habe (S. 34) bemerkt, daß der erste Traktat, der mit den Worten „Communis et consuetus“ beginnt, ein gewöhnlicher „Algorismus“ zu sein scheint. Ich habe jetzt eine vollständige photographische Kopie dieses Traktates eingesehen, und bin darum in der Lage, meine Angabe zu präzisieren. Der Text „Communis et consuetus“ enthält nach einer längeren Einleitung, die zum Teil den Definitionen der „Demonstratio JORDANI de algorismo“ entspricht, wörtlich die 25 Sätze I—VIII, X, XI, XX—XXXIV dieser „Demonstratio“; im Vorübergehen sei bemerkt, daß Null nur „circulus“ genannt sind, und daß weder „digitus“ noch „articulus“ vorkommt. Die Beweise der Sätze stimmen in den meisten Fällen wörtlich mit der „Demonstratio“ überein, in einigen Fällen sind sie kürzer und nur sehr selten (z. B. in

betreff der Wurzelausziehung) weichen sie direkt von der „Demonstratio“ ab. Der Text „Communis et consuetus“ ist wesentlich ein gewöhnlicher „Algorismus“, obgleich die ganze Anordnung zeigt, daß der Verfasser nicht ausschließlich einen praktischen Zweck verfolgte. So z. B. wird hinsichtlich der Wurzelausziehung, zuerst das gewöhnliche Verfahren gelehrt etwa wie in den anderen Algorismus-Schriften des 12. und 13. Jahrhunderts, aber dann, um die Sache noch gründlicher zu behandeln, angenommen, daß die gegebene Zahl $a.b.c.d.e.f$ und die gesuchte Wurzel $g.h.f$ ist, worauf erläutert wird, warum die Produkte $g^2$, $2gh$ usw. gerade so, wie die Regel angibt, gesetzt werden sollen.

Die Frage, ob die „Demonstratio Jordani de algorismo“ wirklich von Jordanus Nemorarius herrührt, ist durchaus unabhängig von der Frage, wer der Verfasser des Textes „Communis et consuetus“ ist, denn Jordanus kann sehr wohl die beiden Traktate geschrieben haben; in der Tat habe ich jetzt einen ganz bestimmten Anlaß zu vermuten, daß sich der Verweis der „Demonstratio“: „Hanc subtractionem docuimus in *opere extrahendi radicem*“ gerade auf den letzten Satz des Textes „Communis et consuetus“ bezieht.

Sollte es sich indessen herausstellen, daß in Wirklichkeit nur der Text „Communis et consuetus“ von Jordanus herrührt, während die „Demonstratio“ eine spätere Bearbeitung ist, so hat dieser Umstand jedenfalls keine Bedeutung für die Schlußfolgerungen meines oben zitierten Aufsatzes. In diesem Falle wäre besonders darauf hinzuweisen, daß der Text „Communis et consuetus“ ebensowenig wie die „Demonstratio“ die Araber erwähnt, sondern sich in der Einleitung mehr als einmal auf „die Alten“ beruft; dort kommen nämlich die Ausdrücke „summa et adoranda antiquorum diligentia“ und „ad instituendum in singulis operationibus modum vestigiis antiquorum sit insistendum“ vor. Ein Mann, der so spricht, ist gewiß nicht in arabischer Schulung zum Mathematiker geworden.

Daß sowohl der Text „Communis et consuetus“ wie die „Demonstratio“ mit Unrecht dem Jordanus zugeschrieben wurde, ist wohl kaum anzunehmen.

G. Eneström.

---

**2 : 59—60,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502; **6**$_3$, 1905, S. 310—311. — **2 : 61,** siehe BM **7**$_3$, 1906, S. 85—86.

---

**2 : 61.** Ob die Angabe (Z. 14—15), Jordanus habe in seiner *Arithmetica* ein dem griechischen ἀξιώματα nachgebildetes Wort „Dignitates“ gebraucht, etwas mehr als lediglich eine Vermutung des Herrn Cantor ist? Herr Cantor zitiert die zwei Auflagen der Lefèvreschen Ausgabe der *Arithmetica*, und in der Tat findet sich in dieser Ausgabe das Wort „Dignitates“. Unmittelbar nach dem Spezialtitel: *Jordani Nemorarii clarissimi viri Elementa arithmetica cum demonstrationibus Jacobi Fabri Stapulensis* folgen nämlich teils 13 Definitionen (nicht numeriert und ohne Rubrik), dann 20 numerierte „Dignitates“ und 6 ebenfalls numerierte „Petitiones“, worauf Lefèvre bemerkt: „Dignitates atque petitiones paucas . . . adiecimus, quas . . . author suppressit“. Offenbar kann diese Bemerkung bedeuten, entweder daß Lefèvre die wenigen bei Jordanus nicht vorkommenden „Dignitates“ und „Petitiones“ hinzugefügt hat oder daß einige der „Dignitates“ und „Petitiones“ von Lefèvre herrühren. Im ersten Falle, der meines Erachtens schon aus typographischen Gründen die größere Wahrscheinlichkeit besitzt, hat JORDANUS keine „Dignitates" aufgeführt, und also keinen Anlaß gehabt, das Wort „Dignitates" zu gebrauchen. Im zweiten Falle ist es möglich, daß dies Wort von JORDANUS herrührt, aber sicher ist es nicht, denn das Wort kann sehr wohl entweder von LEFÈVRE hinzugefügt worden, oder von ihm aus einer von unbekannter Hand herrührenden Randbemerkung seiner Handschrift der *Arithmetica* entnommen sein.

G. ENESTRÖM.

**2:63,** siehe BM $4_3$, 1903, S. 206.

2:67. Herr CANTOR hat selbst in seinem Vorwort (S. IV) die Angaben der Fußnote 2 in betreff der Ausgaben des Traktates *De numeris datis* ergänzt, indem er auf einen Aufsatz des Herrn R. VON STERNECK aus dem Jahre 1896 verweist. Da Herr v. STERNECK in seinem Aufsatz bemerkt hat, daß die zwei von ihm benutzten vollständigen Handschriften des Traktates (von denen freilich die eine wertlos ist, weil sie nur eine wörtliche Abschrift der anderen bringt) vielleicht die einzigen sind, welche das vollständige Werk enthalten, so erlaube ich mir zu erwähnen, daß sich im Cod. Mazarin. 1258 der Nationalbibliothek in Paris eine vollständige Abschrift des Traktates, der hier „Data JORDANIS secundum operationem numerorum" genannt wird, findet. Um einen Vergleich dieses Textes mit dem von Herrn v. STERNECK benutzten zu ermöglichen, drucke ich hier den Beweis des Satzes IV: 34 ab, welcher Satz bekanntlich besagt, daß, wenn $(a_1x + a_2)(b_1x - b_2) = cx^2$ oder $= cx$ ist, so sind $x^2$ und $x$ gegeben. Die Klammern bedeuten, daß sich die eingeklammerte Stelle zwar in der Handschrift findet, aber meiner Ansicht nach gestrichen werden soll, um den richtigen Sinn des Textes wieder herzustellen.

> Si productus ad quadratum datus fuerit, cumque alter cum sibi addito in detractum a reliquo faciat numerum ad radicem datum et numerum datum [erit ut ipse cum sibi addito in reliquum totum faciat numerum ad quadratum datum et numerum ad radicem datum et item numerum datum]. Sed reliquus totus in illum et additum ductus facit totum numerum ad quadratum datum et alium ad radicem datum. Minoribus igitur de majoribus detractis, vel relinquetur *numerus datus* equalis dato ad radicem vel ad quadratum datus (! soll wohl „dato" sein) vel numerus datus equalis numero ad radicem dato et numero ad quadratum dato, vel numerus ad radicem datus equalis numero dato et numero ad quadratum dato, vel numerus ad quadratum datus equalis numero dato et numero ad radicem dato. Quodcumque fuerit, erit radix et quadratus datus.
>
> Si productus ad radicem fuerit datus, erit eadem ratione, ducto toto in totum, numerus conjunctus ad radicem datus cum numero dato tamquam numerus ad radicem datus et numerus ad quadratum datus. Demptis ergo omnibus vel erit numerus datus equalis numero ad quadratum dato, vel equalis numero ad quadratum dato cum numero ad radicem dato, vel numerus ad quadratum datus tamquam numerus datus et numerus ad radicem datus. Et sic etiam radix data est.

Sieht man von der eingeklammerten Stelle ab, so ist dieser Text (ich habe nichts geändert, aber nur die zwei Kursiv gedruckten Worte *numerus datus* hinzugefügt) offenbar besser, als der von Herrn v. STERNECK benutzte. Die im Texte angegebenen Operationen sind:

$$(a_1x + a_2)\,b_2 = a_1b_2x + a_2b_2,\ (a_1x + a_2)\,b_1x = a_1b_1x^2 + a_2b_1x,$$

also, wenn $(a_1x + a_2)(b_1x - b_2) = cx^2$,

$$a_1b_1x^2 + (a_2b_1 - a_1b_2)\,x - a_2b_2 = cx^2,$$

welche Gleichung unter eine der fünf folgenden Formen gesetzt werden kann:

$$\alpha = \beta x,\ \alpha_1 = \gamma_1x^2,\ \alpha_2 = \beta_2x + \gamma_2x^2,\ \alpha_3\,x = \beta_3 + \gamma_3x^2,\ \alpha_4x^2 = \beta_4 + \gamma_4x,$$

wodurch in jedem Falle $x$ und dadurch auch $x^2$ bestimmt ist.

Ist dagegen $(a_1x + a_2)(b_1x - b_2) = cx$, so bekommt man

$$c\,x + a_2b_2 = (a_2b_1 - a_1b_2)\,x + a_1b_1x^2,$$

welche Gleichung unter eine der drei folgenden Formen gesetzt werden kann:

$$\gamma = \alpha\,x^2,\ \gamma_1 = \alpha_1x^2 + \beta_1x,\ \alpha_2x^2 = \gamma_2 + \beta_2x,$$

wodurch in jedem Falle $x$ bestimmt ist. G. Eneström.

---

**2 : 70,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 417. — **2 : 73, 82, 87,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2 : 88,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 395. — **2 : 89, 90,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503. — **2 : 91—92,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 409—410; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 395—396. — **2 : 97,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406.

---

2 : 98. Der hier genannte Schüler Roger Bacons Johannes von London hat zwei handschriftlich erhaltene Traktate verfaßt, nämlich „De trigonio circinoque“ und „De speculis comburentibus libri quinque“ (siehe S. Vogl, *Die Physik Roger Bacos*, Erlangen 1906, S. 11). — Es ist wenig wahrscheinlich, daß der von Roger Bacon im 11. Kapitel des *Opus tertium* erwähnte „Johannes von London“ mit seinem soeben genannten Schüler identisch ist, vermutlich meint Roger Bacon entweder Johannes Peckham oder Johannes Basingstocke (vgl. S. Vogl, a. a. O. S. 10—11).

---

**2 : 98—99,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 269—270; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 106—107. — **2 : 100,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2 : 101,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 396. — **2 : 104—105,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 397—398. — **2 : 111,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 116,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2 : 117—118,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 107, 311. — **2 : 122,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503—504; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 397. — **2 : 126,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 210. — **2 : 127,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2 : 128,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2 : 132,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 515—516. — **2 : 143,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2 : 155—156,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 410—411; $\mathbf{7}_3$, 1906, S. 86—87. — **2 : 157, 158,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 160—162,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 311—312; $\mathbf{7}_3$, 1906, S. 87—88. — **2 : 163,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 312. — **2 : 164,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 313. — **2 : 166,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2 : 175,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2 : 206,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 313. — **2 : 210,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352—353. — **2 : 218,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 284. — **2 : 219,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353. — **2 : 222,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 397—398. — **2 : 229, 242,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504—505. — **2 : 243,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 505; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 398. — **2 : 253,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353. — **2 : 273,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 505. — **2 : 274,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325. — **2 : 281,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 411. — **2 : 282, 283,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353—354. — **2 : 284, 286, 287, 289, 290, 291,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506—507. — **2 : 296,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354. — **2 : 305,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906, S. 88. — **2 : 313,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2 : 317,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 69. — **2 : 320,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906, S. 88—89. — **2 : 322,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 399. — **2 : 325,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 313—314. — **2 : 328,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 285. — **2 : 334,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2 : 351,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 399. — **2 : 353,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87. — **2 : 355, 357,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 399—400. — **2 : 358, 360,** siehe

BM **4**$_3$, 1903, S. 87. — **2 : 371,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 314. — **2 : 379, 380,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 400—401. — **2 : 381,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 385,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 81; **4**$_3$, 1903, S. 207. — **2 : 386,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507; **5**$_3$, 1904, S. 306. — **2 : 395,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507—508.

---

2 : 397. Da Herr Cantor hier über die von Grammateus angewendeten algebraischen Zeichen berichtet, benutze ich die Gelegenheit, um auf einen holländischen Cossisten aus der Zeit von 1500—1550 hinzuweisen, der von Grammateus beeinflußt zu sein scheint; eigentlich gibt es ja in diesem Abschnitte der *Vorlesungen* keinen Platz für Holländer, sondern nur für französische, spanische, portugiesische, deutsche, englische und italienische Mathematiker.

Der betreffende Cossist ist Gielis van der Hoecke, der im Jahre 1537 in Antwerpen ein Rechenbuch nebst Algebra veröffentlichte. Der Titel des Buches lautet: *In arithmetica | een sonderlinge excellet boeck | leerende veel schoone ende perfecte regulen der selven Conste | eenen yeghelijcken seer profijtelijik ende van noode te weten.* Eine neue Ausgabe erschien 1545; Bierens de Haan (*Bibliographie néerlandaise ... sur les sciences mathématiques et physiques*, Rome 1883, S. 127) verzeichnet eine Ausgabe von 1544 (vielleicht identisch mit der soeben genannten?), und auch eine Ausgabe von 1548 wird zitiert (siehe H. Bosmans, *Le fragment du commentaire d'Adrien Romain sur l'algèbre de Mahumed ben Musa el-Chowârezmî*; Annales de la société scientifique de Bruxelles, **30** : 2, 1906, S. 8 des Sonderabzuges). Angeblich sollte das British Museum eine Ausgabe vom Jahre 1514 besitzen, aber schon aus den Bezeichnungen des Rechenbuches des van der Hoecke ist es offenbar, daß das Buch nicht vor 1521 erschienen sein kann, und in der Tat ist es leicht zu erklären, warum der Katalog des British Museum eine Ausgabe von 1514 verzeichnet. Auf dem Titelblatt der Ausgabe von 1545 steht nämlich, wie ich einer freundlichen Mitteilung des Herrn H. Bosmans entnehme, „Gheprent ... M . CCCCC . XLV“, aber nach Herrn Bosmans ist „L“ so undeutlich, daß man ebenso gut XIV wie XLV lesen kann.

Für die Potenzen der unbekannten Größen wendet van der Hoecke die Zeichen Pri, 2$^a$, 3$^a$, 4$^a$, 5$^a$ an und benutzt auch die Zeichen + und — (vgl. Suzan R. Benedict, *The development of algebraic symbolism from Paciuolo to Newton*; Teachers college, Columbia university, New York, Courses for teachers of mathematics 1906—1907, S. 19). G. Eneström.

---

**2 : 399,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 107—108. — **2 : 401, 405,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 411, 412,** siehe BM **7**$_3$, 1906, S. 89. — **2 : 425,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 427,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 314—315. — **2 : 429,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 201—202. — **2 : 430,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 145. — **2 : 440,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 285. — **2 : 442,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 325. — **2 : 449,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140. — **2 : 454,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 242. — **2 : 474, 480,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140—141. — **2 : 481,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 508. — **2 : 482,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 508; **2**$_3$, 1901, S. 354; **3**$_3$, 1902, S. 240; **6**$_3$, 1905, S. 401. — **2 : 484,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 486, 489, 490,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2 : 497,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509; **4**$_3$, 1903, S. 87. — **2 : 509,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270, 509. — **2 : 510,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2 : 512,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 514, 516, 517,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2 : 524, 529,** siehe BM **7**$_3$, 1906, S. 90—91. — **2 : 530,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 354—355; **3**$_3$, 1902, S. 141.

---

2 : 531. Für die Geschichte der algebraischen Terminologie ist der 6. Teil des *General trattato di numeri e misure* von Interesse, weil darin die erste bekannte Erweiterung der Bedeutung des Termes „Binom“ zu finden ist. Im 5. Buche des 2. Teiles (Bl. $87^a$—$95^b$) hatte Tartaglia dies Wort in der damals geläufigen, auf Euklides zurückgehenden Bedeutung angewendet, und dabei auch (Bl. $94^a$—$94^b$) die Terme „Trinom“, „Multinom“ auf ähnliche Weise gebraucht. Im 1. Buche des 6. Teiles (Bl. $4^a$—$5^a$) führte er die Benennung „binomio de dignità algebratice“ für Ausdrücke von der Form $ax^m + bx^n$ ($m$, $n$ ganze positive Zahlen oder Null) ein, und benutzte auch den Term „trinomio de dignità algebratice“ in ähnlicher Bedeutung. Dagegen nannte er Ausdrücke von der Form $ax^m - bx^n$ nicht „binomio“ sondern „residuo“.

G. Eneström.

---

**2 : 532, 535,** siche BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509.

---

2 : 536. In betreff des 5. Kapitels der *Regula Aliza* von Cardano wird bemerkt, daß, wenn auch nicht in klarsten Worten gesagt, die Entstehung der Gleichungskonstante als Produkt der Wurzelwerte hier mindestens angedeutet ist, und die betreffende Stelle lautet, wie in der Fußnote 2 richtig angegeben wird: „Videmus, numerum aequationis si sit compositus, ut 18, 12, 24 facile habere aestimationem et plures etiam, si autem primus difficile est invenire unam solam“. Liest man diese Zeilen, ohne sich die Mühe zu geben, von dem Inhalt des betreffenden Kapitels Kenntnis zu nehmen, wird man ohne Zweifel versucht sein können, die Angabe des Herrn Cantor als richtig anzusehen. In Wahrheit aber ist diese Angabe durchaus unbegründet. Das 5. Kapitel der *Regula Aliza* bezieht sich nämlich auf solche kubische Gleichungen von der Form $x^3 + b = a\,x$ ($a$ und $b$ rationale Zahlen), die als Wurzel ein „binomium“ oder „recisum“ haben. Zuerst bemerkt Cardano, daß es nicht angebracht ist, $x = \sqrt{m} \pm \sqrt{n}$ zu setzen, weil in diesem Falle $a$ und $b$ nicht gleichzeitig rational werden. Dann gibt er folgende Beispiele der fraglichen Art von Gleichungen (das letzte Beispiel ist unrichtig, und wird identisch mit dem ersten, wenn man den Fehler berichtigt, d. h. 32 statt 34 setzt).

| Gleichung: | Wurzel: |
|---|---|
| $x^3 + 24 = 32\,x$, | $x_1 = 3 + \sqrt{5}$, $x_2 = 3 - \sqrt{5}$, |
| $x^3 + 12 = 34\,x$, | $x_1 = 3 + \sqrt{7}$, $x_2 = 3 - \sqrt{7}$, |
| $x^3 + \phantom{0}8 = 18\,x$, | $x_1 = \sqrt{6} - 2$, |
| $x^3 + 48 = 25\,x$, | $x_1 = \sqrt{3\frac{1}{4}} - 1\frac{1}{2}$, |
| $x^3 + 21 = 16\,x$, | $x_1 = \sqrt{9\frac{1}{4}} - 1\frac{1}{2}$, |
| $x^3 + 18 = 19\,x$, | $x_1 = \sqrt{17\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$, |
| $x^3 + 18 = 15\,x$, | $x_1 = \sqrt{8\frac{1}{4}} - 1\frac{1}{2}$, |
| $x^3 + 18 = 39\,x$, | $x_1 = \sqrt{12} - 3$, |
| $x^3 + 24 = 34\,x$. | $x_1 = 3 + \sqrt{5}$, $x_2 = 3 - \sqrt{5}$. |

In keinem Falle ist also die von Cardano angegebene Wurzel ein rationaler ganzer Faktor der Gleichungskonstante und in keinem Falle hat er auch nur angedeutet, daß die Gleichungskonstante das Produkt der drei Wurzeln ist. Der Sinn der von Herrn Cantor falsch mißverstandenen Stelle ist offenbar der folgende. Nimmt man an, daß eine Wurzel der Gleichung $x^3 + b = a\,x$ von der Form $\sqrt{m} + n$ ($m$ und $n$ rationale Zahlen, aber $\sqrt{m}$ irrational) ist, so wird

$$m\sqrt{m} + 3\,m\,n + 3\sqrt{m}\,n^2 + n^3 + b = a\sqrt{m} + a\,n,$$

also ist

$$3\,m\,n + n^3 + b = a\,n,\quad m + 3\,n^2 = a,$$

weil sonst eine rationale Zahl gleich einer irrationalen sein würde. Folglich wird

$$b = an - 3\,m\,n - n^3 = (m + 3\,n^2)\,n - 3\,m\,n - n^3 = 2\,n\,(n^2 - m).$$

Sind $m$ und $n$ ganze Zahlen, kann $b$ offenbar nie eine Primzahl sein, und man versteht also leicht, was CARDANO meint mit dem Ausdrucke: „si autem primus, difficile est invenire unam solam". Beiläufig sei bemerkt, daß die Wurzeln der Gleichung $x^3 + 2\,n(n^2 - m) = (m + 3\,n^2)\,x$ offenbar $\sqrt{m} + n, -\sqrt{m} + n, -2\,n$ sind, so daß immer, wenn $n$ eine ganze Zahl ist, eine Wurzel der Gleichung eine ganze (freilich negative) rationale Zahl wird, deren numerischer Wert gleich der Summe der zwei irrationalen Wurzeln ist. Daß dem CARDANO selbst dieser Umstand nicht unbekannt war, scheint daraus hervorzugehen, daß er in betreff der Gleichungen $x^3 + 24 = 32\,x$ und $x^3 + 12 = 34\,x$ im Vorübergehen bemerkt, die Wurzel der Gleichung $x^3 = 32\,x + 24$ sei gleich $3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5} = 6$ und die Wurzel der Gleichung $x^3 = 34\,x + 12$ sei gleich $3 + \sqrt{7} + 3 - \sqrt{7} = 6$. In keinem Falle gibt er aber die drei Wurzeln der von ihm behandelten neun Gleichungen an.

Als Beweis dafür, daß Herr CANTOR die zitierte Stelle richtig verstanden hat, wird von ihm auf das 17. Kapitel der *Regula Aliza* hingewiesen, aber da in diesem Kapitel gar nicht von irgend einer Gleichung gesprochen wird, ist es schwer zu begreifen, wie es überhaupt möglich war, hier den Satz von der Gleichungskonstante hineinzulesen (vgl. die folgende Bemerkung).

G. ENESTRÖM.

---

2 : 536. Z. 8—9 wird die Überschrift des 17. Kapitels der *Regula Aliza:* „Quot modis numerus possit produci ex non numero" erwähnt und übersetzt, und dann gibt Herr CANTOR als Beispiel $\left(3\frac{1}{5} + \sqrt{\frac{6}{25}}\right)\left(3\frac{1}{5} - \sqrt{\frac{6}{25}}\right) = 10$ an. Aber dies Beispiel bringt ja gar keinen Aufschluß über die Frage, auf *wie viele Arten* die Zahl 10 das Produkt irrationaler Faktoren sein kann. In der Tat ist diese Frage am Anfange des Kapitels behandelt, während das CANTORsche Beispiel aus dem Absatz „Tertio" gegen das Ende des Kapitels entnommen ist, und meines Erachtens ist gerade der Anfang, den Herr CANTOR stillschweigend übergeht, das interessanteste. Hier bemerkt nämlich CARDANO, daß kein Faktor einer rationalen Zahl aus mehr als vier einfachen Quadratwurzelausdrücken (oder aus mehr als einer rationalen Zahl und drei einfachen Wurzelausdrücken) bestehen kann, und diese Bemerkung ist offenbar identisch mit dem Satz, daß der Nenner des Bruches

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{a_n}}$$

nicht rational gemacht werden kann, sofern $n > 4$ ist. Noch dazu bemerkt CARDANO, daß kein Faktor einer rationalen Zahl aus mehr als drei einfachen Kubikwurzelausdrücken bestehen kann. Diese Bemerkungen enthalten die Antwort auf die Frage, auf *wie viele Arten* eine ganze Zahl das Produkt irrationaler Faktoren sein kann.

G. ENESTRÖM.

**2:541, 548,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509—510. — **2 : 549,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510; **6**$_3$, 1905, S. 401. — **2 : 550,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 355. — **2 : 554,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2 : 555,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 285; **6**$_3$, 1905, S. 322. — **2 : 561,** siehe BM **7**$_3$, 1906, S. 91. — **2 : 565, 567, 568,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 285—286. — **2 : 569,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2 : 572—573,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510; **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 576,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 355—356. — **2:579,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 145. — **2 : 580—581,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 207. — **2 : 582,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2 : 583,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270; **2**$_3$, 1901, S. 356. — **2 : 585,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 69—70. — **2 : 592,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2 : 594,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270. — **2 : 597,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270; **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2 : 599—600,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2 : 602,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270. — **2 : 603—604,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270—271; **6**$_3$, 1905, S. 108. — **2 : 611,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 356—357. — **2 : 612,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2 : 612—613,** siehe BM **7**$_3$, 1906, S. 91—92. — **2 : 613,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357; **5**$_3$, 1904, S. 306. — **2 : 614,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 617, 619,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 108—109. — **2 : 620,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 621,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146; **6**$_3$, 1905, S. 402.

---

2:621. Dans son traité *De occulta parte numerorum quam algebram vocant libri duo* (Paris 1560) mentionné par M. G. Eneström à la BM **6**$_3$, 1905, p. 402, J. Peletier donne aussi en passant des équations dont le second membre est égalé à zéro. En effet, au f$^0$ 10 r$^0$ de ce traité se trouve le passage suivant: „Sint 6 *R* aequales 12 *R m.* 24. Vtrinque aufero 6 *R*: Tum 6 *R m.* 24 aequantur 0 seu nihilo: vt necesse sit 6 *R* et 24 simul aequari, quum 6 *R* et 24 se mutuo tollant“. Autre exemple au f$^0$ 58 r$^0$. H. Bosmans.

---

**2 : 623,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146—147. — **2 : 632,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 109. — **2 : 634, 637,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 315—316. — **2:638,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 147. — **2 : 642, 643,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271. — **2 : 644,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 402—403. — **2 : 655,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2 : 656,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 286. — **2 : 659, 660,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 147—148. — **2 : 661,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 403. — **2 : 665,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271. — **2:669,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 203. — **2 : 670,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 403. — **2 : 674,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 88. — **2 : 683,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148. — **2 : 693,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 287. — **2 : 700, 701, 703, 704, 705,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271—273. — **2 : 715,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 412. — **2 : 716,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 404. — **2 : 717, 718,** siehe BM **7**$_3$, 1906, S. 92—93. — **2 : 719,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2 : 720,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 287; **6**$_3$, 1905, S. 404. — **2 : 721,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273; **6**$_3$, 1905, S. 404—405. — **2 : 742,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273; **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2 : 746,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2 : 747,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 173; **2**$_3$, 1901, S. 225. — **2 : 749,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 88. — **2 : 766,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 142; **5**$_3$, 1904, S. 412—413. — **2 : 767,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148, 357—358. — **2 : 770,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 208. — **2 : 772, 775,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 358—359. — **2 : 777,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148; **3**$_3$, 1902, S. 204. — **2 : 783,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359; **4**$_3$, 1903, S. 88—89. — **2 : 784,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148. — **2 : 787, 791,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 405. — **2 : 793—794,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 307; **6**$_3$, 1905, S. 316—317, 405—406. — **2 : 795,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 317. — **2 : 797—798,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 307; **6**$_3$, 1905, S. 317. — **2 : 799,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 307. — **2 : 802,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 208. — **2 : 812,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 37. — **2 : 820,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148; **5**$_3$, 1904, S. 307. — **2 : 825,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148. — **2 : 832,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 203—204; **6**$_3$, 1905, S. 211. — **2 : 840,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148—149. — **2 : 843,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 328. — **2:850,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 109—110. — **2:856, 865,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149. — **2 : 876, 878, 879,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511. — **2 : 891,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2 : 897,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 406. — **2 : 898,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 37, 208. — **2 : 901,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511. — **2 : 919,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 204. — **2 : VIII** (Vorwort), siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2 : IX, X** (Vorwort), siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511—512.

---

**3 : 9**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359. — **3 : 10**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 518; **6**$_3$, 1905, S. 211. — **3 : 11**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209. — **3 : 12, 17**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512. — **3 : 22**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512; **4**$_3$, 1903, S. 209. — **3 : 24**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209. — **3 : 25**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209, 399. — **3 : 26**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359. — **3 : 39**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 407. — **3 : 45—48, 49, 50**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512—513. — **3 : 63**, siehe BM **7**$_3$, 1906, S. 93—94. — **3 : 70**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 360. — **3 : 82**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 308. — **3 : 100**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149. — **3 : 102**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 318. — **3 : 112**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209—210; **6**$_3$, 1905, S. 318. — **3 : 116**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513. — **3 : 117**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 518. — **3 : 123**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513; **4**$_3$, 1903, S. 399. — **3 : 124**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 407—408; **4**$_3$, 1903, S. 400. — **3 : 126**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 288. — **3 : 131**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 210. — **3 : 151**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 326. — **3 : 167, 172—173**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 400. — **3 : 174**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149—150. — **3 : 183**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 432. — **3 : 188**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 241. — **3 : 201**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513. — **3 : 207**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 519. — **3 : 215**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 150. — **3 : 218**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513. — **3 : 220**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 326. — **3 : 224**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514. — **3 : 225, 228**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 150. — **3 : 230**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 211—212. — **3 : 232**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514; **6**$_3$, 1905, S. 212. — **3 : 244—245**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 205, 413. — **3 : 246**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514; **2**$_3$, 1901, S. 151. — **3 : 250**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514. — **3 : 303**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 155, — **3 : 330—331**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 241—242. — **3 : 337**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 206. — **3 : 365**, siehe BM **7**$_3$, 1906, S. 94.

---

**3** : 367. Da diese Seite die einzige Stelle der *Vorlesungen* ist, wo A. Arnauld genannt wird, bemerke ich in betreff der Zeilen 27—30, daß Arnauld in den späteren Auflagen der *Nouveaux elemens de geometrie* seine Ansicht über Proportionen, wo negative Zahlen vorkommen, modifizierte (vgl. z. B. die zweite Auflage, S. 19). Über die Gründe, welche Arnauld dazu veranlaßte, findet man Auskunft in einem von Prestet (*Nouveaux elemens de mathématiques*, Paris 1689, S. 366—371) veröffentlichten, wahrscheinlich aus dem Jahre 1676 herrührenden, Briefwechsel zwischen ihm selbst und Arnauld.

G. Eneström.

---

**3 : 370—371**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 308. — **3 : 382**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 213. — **3 : 384**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 319. — **3 : 408**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 213. — **3 : 447, 455**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 151. — **3 : 473**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 154—155; **4**$_3$, 1903, S. 401. — **3 : 477, 479**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 151—152. — **3 : 497, 498**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 309. — **3 : 507**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 71—72. — **3 : 521**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441. — **3 : 527**, siehe BM **7**$_3$, 1906, S. 95. — **3 : 535**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 401. — **3 : 536**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 206. — **3 : 560**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 319—321. — **3 : 565**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 326—327. — **3 : 571**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 327; **5**$_3$, 1904, S. 72. — **3 : 578**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 327; **5**$_3$, 1904, S. 309. — **3 : 586, 609**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 309—310. — **3 : 614**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 89—90. — **3 : 616**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 214, 408. — **3 : 636—637**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441. — **3 : 646—647**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 206—207. — **3 : 652**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 446; **5**$_3$, 1904, S. 207. — **3 : 660**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441. — **3 : 667**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441—442; **5**$_3$, 1904, S. 207—208, 310. — **3 : 682**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 408. — **3 : 686**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 208. — **3 : 689, 695**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 442. — **3 : 736**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 111. — **3 : 750, 758**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 446. — **3 : 759**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 208. — **3 : 760, 766**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 446—447. — **3 : 774, 798**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 442—443. — **3 : 819**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 321. — **3 : 845**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 447; **3**$_3$, 1902, S. 327—328. — **3 : 848, 881**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 443. — **3 : 882**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 447; **5**$_3$, 1904, S. 414. — **3 : 890**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 401. — **3 : 892**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 143. — **3 : IV** (Vorwort), siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 443.

---

## Anfragen und Antworten.

**127. Über den italienischen Arithmetiker Giovanni Antonio da Como.** In seinem Aufsatze *Nuove ricerche sul matematico* Leonardo Cremonese (Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, S. 326—341) hat A. Favaro einige Notizen über den italienischen Mathematiker Leonardo Cremonese oder Leonardo de' Antonii und seine Schriften mitgeteilt. Indessen wäre es erwünscht, noch weitere Untersuchungen über diesen Mathematiker des 15. Jahrhunderts anzustellen, und für diesen Zweck könnte es nützlich sein, Aufschlüsse über einen bisher fast unbekannten italienischen Mathematiker Giovanni Antonio da Como zu haben. Nach B. Boncompagni (*Intorno ad un trattato d'aritmetica stampato nel 1478;* Atti dell' accademia pontificia de' Nuovi Lincei **16**, 1863, S. 517—519) fand sich nämlich 1863 in der „Biblioteca del monasterio di S. Salvatore de' canonici regolari Lateranensi" in Bologna eine (von Herrn Favaro nicht erwähnte) Handschrift aus dem 15. Jahrhundert mit dem Titel: „Aritmetica di Gio. Ant° da Como e Leonardo da Cremona." Es scheint also, als ob die zwei in dem Titel genannten Persönlichkeiten, von denen der letztere wohl mit Leonardo de' Antonii identisch ist, vielleicht gleichzeitig gelebt hätten.

Ist es möglich, einige biographische Notizen über Giovanni Antonio da Como aufzufinden? G. Eneström.

---

**Addition à la réponse à la question 110 sur les frères Français.** A la page 40 du Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématique **1** (1855), on trouve le renseignement que les frères Français étaient neveux de Arbogast; le frère mort en 1810 est appelé F. Français, et Terquem dit qu'il était professeur à l'école d'artillerie de Mayence. G. Eneström.

# Rezensionen.

**L. Königsberger.** **Carl Gustav Jacob Jacobi.** Festschrift zur Feier der hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages. Leipzig, Teubner 1904. 8⁰, XVIII + 554 S. + Porträt + Facsim. ℳ 16.

**Ch. Lucas de Pesloüan.** **N.-H. Abel.** Sa vie et son œuvre. Paris, Gauthier-Villars 1906. 8⁰, XIII + 168 + (1) S. + Porträt. Francs 5.

Die Namen Jacobi und Abel gehören in der Geschichte der Mathematik fast ebenso sehr zusammen wie Newton und Leibniz; die gleichzeige Anzeige der zwei oben genannten Bücher kann also von diesem Gesichtspunkte aus gerechtfertigt sein. Auch die Darstellungsweise ist in beiden Fällen insofern dieselbe, als die Schilderung sowohl der Lebensumstände wie der wissenschaftlichen Wirksamkeit in eine einzige Abteilung zusammengeführt wurde, wo die chronologische Ordnungsfolge der Tatsachen oder Schriften maßgebend ist. Aber sonst verfolgen die zwei Biographien wesentlich verschiedene Zwecke, was man ja auch schon aus den Angaben über die Seitenzahlen erraten kann.

Herr Königsberger hat nicht nur die jedem Fachgenossen unmittelbar zugänglichen Quellen zu Rate gezogen, sondern noch dazu teils Briefe und Mitteilungen von seiten der Angehörigen Jacobis, teils andere ungedruckte oder schwer zugängliche Aktenstücke benutzt, und sein Buch bietet darum eine Fülle von neuem Material zur Biographie Jacobis. Herr Lucas de Pesloüan hat dagegen, wie er selbst im Vorworte hervorhebt, all sein Material aus den gesammelten Werken von Abel sowie dem „Mémorial du centenaire“ und der bekannten Arbeit von C. A. Bjerknes entnommen. Er hat sich so wenig darum bekümmert, weitere Nachforschungen anzustellen, daß er S. 109 die „Recherches sur les fonctions elliptiques; seconde mémoire“ als verloren angibt, obgleich es allgemein bekannt sein dürfte, daß diese Abhandlung von Herrn G. Mittag-Leffler im Jahre 1894 wiedergefunden und im Jahre 1902 in den Acta Mathematica (26, S. 1—42) zum Abdruck gebracht wurde.

Die Arbeit des Herrn Königsberger hat sieben Abteilungen, nämlich: 1. Carl Gustav Jacob Jacobis Jugendjahre 1804—1821 (S. 1—5). — 2. Jacobi als Student an der Universität in Berlin von Ostern 1821 — Ostern 1825 (S. 6—17). — 3. Jacobi als Privatdozent an der Universität zu Königsberg von Ostern 1826 — Dezember 1827 (S. 18—58). — 4. Jacobi als außerordentlicher Professor an der Universität in Königsberg vom Januar 1827 — Juli 1832 (S. 59—136). — 5. Jacobi als ordentlicher Professor an der Universität in Königsberg vom Juli 1832 — Michaelis 1844 (S. 137—330). — 6. Jacobi als Mitglied der Akademie in Berlin vom Oktober 1844 bis zu seinem Tode am 18. Februar 1851 (S. 331—523). — 7. Rückblick (S. 524 — 543). Am Ende findet sich ein Personen-Register (S. 544—549).

Daß Herr KÖNIGSBERGER hinsichtlich der Würdigung der wissenschaftlichen Wirksamkeit JACOBIS nichts wesentlich neues bieten kann, ist leicht zu verstehen, aber auch wenn man die berühmte Gedächtnisrede von DIRICHLET gelesen hat, kann man mit Vergnügen vom „Rückblick“ des Herrn KÖNIGSBERGER Kenntnis nehmen. Indessen hat, wie schon bemerkt wurde, die KÖNIGSBERGERsche Arbeit seinen entschiedenen Wert hauptsächlich als eine zuverlässige und übersichtlich geordnete Materialsammlung zur Biographie JACOBIS, und von diesem Gesichtspunkte aus braucht sie keine besondere Empfehlung.

Auch über JACOBIS mathematisch-historische Forschungen bringt die Arbeit interessante Aufschlüsse. Daß sich JACOBI schon als Jüngling eingehend mit solchen Forschungen beschäftigt hat, wußten wir ja schon aus dem Aufsatze von FR. HULTSCH im Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik (2, Leipzig 1879, S. 324—334), und daß er sich immer für dies Forschungsgebiet interessiert hat, ist auch wohl bekannt, aber Herr KÖNIGSBERGER gibt uns noch weitere Belege hierzu (vgl. S. 386—391, 414, 473). Freilich macht es einen etwas eigentümlichen Eindruck, wenn man S. 496 liest: „JACOBI bespricht . . . die . . . im Jahre 1503 gedruckte kleine Schrift *Opusculum* etc., worin schon die Regeln für die Ausziehung der Kubikwurzeln gegeben werden“. Bekanntlich ist die betreffende kleine Schrift gerade der *Algorismus* des SACRABOSCO, der etwa 1250 verfaßt wurde, so daß die Erwähnung des Druckjahres 1503 nicht nur bedeutungslos ist, sondern sogar irreleitend sein kann; der nicht sachkundige Leser könnte nämlich leicht die Auffassung bekommen, daß im Jahre 1503 die Ausziehung von Kubikwurzeln etwas ungewöhnliches war.

Wenn es also klar ist, daß und warum die Veröffentlichung der KÖNIGSBERGERschen Arbeit durchaus berechtigt ist, so liegt die Sache etwas anders inbetreff der neuesten Biographie ABELS. Daß der Verfasser nicht die Absicht hat, den Lesern etwas neues zu bieten, gibt er schon im Vorworte an, und daß er eigentlich keine objektive Schilderung der Bedeutung seines Helden bieten will, sieht man am deutlichsten aus der folgenden gelegentlichen Bemerkung inbetreff der BJERKNESschen Biographie (S. 147—148): „Ce qui fait la beauté de son livre, c'est le sentiment d'affection pour son compatriote, dans lequel il est écrit. Dieu nous préserve de l'historien qui n'est d'aucun temps, ni d'aucun pays!“, sowie aus den zwei folgenden Zeilen des Vorwortes (S. XII): „On excusera ce qu'il y a dans ce travail d'imaginatif, de romanesque même“. Aber meiner Ansicht nach hat auch das Buch des Herrn LUCAS DE PESLOÜAN eine Existenzberechtigung, und zwar als ein Versuch, die Bedeutung ABELS für das gebildete Publikum gemeinverständlich darzulegen, und von diesem Gesichtspunkte aus wäre es gut, wenn das Buch recht bald viele Nachfolger bekäme. Freilich wäre es zu wünschen, daß solche Bücher vor dem Erscheinen von einer kompetenten Person durchgesehen werden, so daß nicht unnötigerweise Schreibfehler oder andere Ungenauigkeiten vorkommen. Ziemlich schlecht sind von Herrn LUCAS DE PESLOÜAN einige Personennamen behandelt, so z. B. schreibt er (S. 18, 19, 20, 34, 127, 167) „Shumacher“, obgleich er weiß (S. 35, 100, 107, 112, 113), daß der Name SCHUMACHER heißt, ebenso schreibt er (S. 50, 52, 54) „Litrow“ statt LITTROW und (S. 65) „Gergone“ statt GERGONNE. Inbetreff der Ungenauigkeiten erwähne ich hier zwei Stellen, worauf mich ein geschätzter Mitarbeiter der Bibliotheca Mathematica aufmerksam gemacht hat.

S. 14. Hinsichtlich der Bemerkung von ABEL in einem Briefe an LEGENDRE: „Je ne peux m'empêcher de transcrire le théorème suivant qui s'y [chez LEGENDRE] trouve et qui est, certes, le plus merveilleux des Mathématiques", fügt der Verfasser hinzu: „Ce théorème sur la théorie des nombres n'a plus rien qui nous émerveille aujourd'hui". Es handelt sich hier um LEGENDRES Näherungsformel $y = \frac{x}{\log x - 1{,}08366}$ für die Anzahl der Primzahlen $\leqq x$ Aber der Nachweis dieser Gleichung gelang weder GAUSS, noch ABEL, noch DIRICHLET, die sich alle drei damit beschäftigt haben; erst vor einigen Jahren hat CH. DE LA VALLÉE POUSSIN die Frage erledigt, und dabei die LEGENDREsche Gleichung modifiziert.

S. 97. Hier wird ein wohlbekannter ABELscher Satz über unendliche Reihen in folgender offenbar unsinnigen Form zitiert: „$u_n$ étant un terme d'une série et $\varphi(n)$ une fonction du rang $n$, on ne saurait trouver une telle fonction $\varphi$ qui permette d'affirmer que $\Sigma u_n$ soit convergent quand $u_n \varphi(n)$ tend vers zéro". Aber das tut z. B. $\varphi(n) = n$. Der springende Punkt ist, daß für $\lim u_n \varphi(n) = 0$ und nur hierfür $\Sigma u_n$ konvergiert. Überdies sollen die $u_n > 0$ sein.

Ein Personen-Register am Ende des Buches wäre sehr willkommen.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

# Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

## Autoren-Register.



### a) Zeitschriften. Allgemeines.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften 18 (1904). [Rezension:] Monatsh. für Mathem. 17, 1906; Lit.-Ber. 37—38. (R. v. St.) [1

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8⁰. [2

$7_3$ (1906) : 1.

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8⁰. [3

1906 : 1.

Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses, herausgegeben von A. Krazer (1905). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin $12_2$, 1906, 409—410. (H. S. White.) [4

Congrès international d'histoire des sciences. IIIme section. Tenue à Genève du 4 au 8 septembre 1904. Rapports et comptes rendus publiés par les soins de Ed. Claparède. Genève 1906. [5

8⁰, VIII S. + S. 775 — 959 + (3) S. + Porträt (Paul Tannery). — [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. $30_2$, 1906, 46—50. (J. T.)

---

**Eneström, G.,** Die Geschichte der Mathematik als Bestandteil der Geschichte der Wissenschaften. [6

Biblioth. Mathem. $7_3$, 1906, 1—5.

**Mentré, F.,** La simultanéité des découvertes scientifiques. [7

Deuxième congrès international de philosophie (Genève 1904), Comptes rendus 1905, 916—924.

**Cantor, M.,** Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. — $1^2$ (1894). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. $7_3$, 1906, 80—84. (G. Eneström.) — $2^2$ (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. $7_3$, 1906, 85—93. (G. Eneström, H. Bosmans.) — $3^2$ (1901). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. $7_3$, 1906, 93—95. (G. Eneström.) [8

**Sturm, R.,** Geschichte der Mathematik (1904). [Rezension:] Monatsh. für Mathem. 17, 1906; Lit.-Ber. 36—37. (R. v. St.) [9

**Ball, W. W. R.,** Histoire des mathématiques. Traduite par L. Freund. 1 (1906). [Rezension:] L'enseignement mathém. 8, 1906, 242—244. (H. Suter.) [10

**Bobynin, V. V.,** Méthode expérimentale dans la science des nombres et principaux résultats obtenus. [11

L'enseignement mathém. 8, 1906, 177—190.

**Teixeira, F. G.,** Tratado de las curvas especiales notables (1905). [Rezension:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 15, 1906, 282—283. [12

**Amodeo, F.,** I trattati delle sezioni coniche da Apollonio a Simson. Discorso inaugurale della cattedra di storia delle scienze matematiche della regia università di Napoli (16 dicembre 1905). [13

*Napoli*, Istituto tecnico, Annali 23, 1905. 51 S.

**Duhem, P.,** Les origines de la statique. I (1905). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 9, 1906 13—18. (G. Vailati.) — Bullet. d. sc. mathém $30_2$, 1906, 150—160. (J. T.) [14

**La Cour, P.** und **Appel, J.**, Die Physik auf Grund ihrer geschichtlichen Entwickelung dargestellt. Übersetzung von G. Siebert (1906). [Rezension:] Monatsh. für Mathem. 17, 1906; Lit.-Ber. 40. (St. M.) [15

**Almagià, R.**, La dottrina della marea nell' antichità e nel medio evo. [16
*Roma*, Accad. d. Lincei, Memorie $5_5$, 1905, 375—514.

**Lebon, E.**, Pour l'histoire des hypothèses sur la nature des taches du soleil. [17
Deuxième congrès international de philosophie (Genève 1904), Comptes rendus 1905, 943—959.

**Mikami, Y.**, On reading P. Harzers paper on the mathematics in Japan. [18
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 15, 1906, 253—262. — [Bemerkung:] Daselbst 15, 1906, 330. (P. Harzer.)

## b) Geschichte des Altertums.

**Vogt, H.**, Haben die alten Inder den Pythagoreischen Lehrsatz und das Irrationale gekannt? [19
Biblioth. Mathem. $7_3$, 1906, 6—23.

**Heiberg, J. L.**, Mathematisches zu Aristoteles (1904) [Rezension:] Monatsh. für Mathem. 17, 1906; Lit.-Ber. 37. (R. v. St.) [20

**Heronis** Opera. III. Vermessungslehre und Dioptra. Griechisch und Deutsch von H. Schöne (1903). [Rezension:] Biblioth. Mathem. $7_3$, 1906, 98—104. (H. Suter.) [21

**Meier, R.**, De Pseudo-Heronianis. [22
Rheinisches Museum für Philologie $61_5$, 1906, 178—184.

## c) Geschichte des Mittelalters.

**Wiedemann, E.**, Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften. IV. Über Wagen bei den Arabern. V. Auszüge aus arabischen Encyklopädien und Anderes. VI. Zur Mechanik und Technik bei den Arabern. [23
*Erlangen*, Physik.-Mediz. Societät, Sitzungsber. 37, 1905, 388—455; 38, 1906, 1—56.

**Wiedemann, E.**, Über die Lage der Milchstraße nach Ibn al Haitam. [24
Sirius (Leipzig) 1906. 3 S.

**Eneström, G.**, Über Spuren der komplementären Multiplikation bei arabischen Mathematikern. [25
Biblioth. Mathem. $7_3$, 1906, 95—97. — Anfrage.

**Eneström, G.**, Über die „Demonstratio Jordani de algorismo". [26
Biblioth. Mathem. $7_3$, 1906, 24—37.

**Vogl, S.**, Die Physik Roger Bacos. (13. Jahrh.) Erlangen 1906. [27
8°, X + (1) + 105 + (1) S. — Inaugural-Dissertation.

**Hellmann, G.**, Über die Kenntnis der magnetischen Deklination vor Christoph Columbus. [28
Meteorolog. Zeitschr. 1906, 145—149 + Tafel.

## d) Geschichte der neueren Zeit.

**Eneström, G.**, Hat Tartaglia seine Lösung der kubischen Gleichung von del Ferro entlehnt? [29
Biblioth. Mathem. $7_3$, 1906, 38—43.

**Bosmans, H.**, Le „De arte magna" de Guillaume Gosselin. [30
Biblioth. Mathem. $7_3$, 1906, 44—63.

***Baldauf, G.**, Keplers Neue Astronomie im Auszuge und in Übersetzung der wichtigsten Abschnitte. Freiburg i. Br. 1905. [31
4°, 40 S. — Gymnasial-Programm. — [Rezension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 37, 1906, 220—221. (M. Richter.)

***Haldane, E. S.**, Descartes, his life and times. New York, Dutton 1905. [32
8°, 28 + 398 S. — [4.50 doll.]

**Berr, H.**, Gassendi, historien des sciences. [33
Deuxième congrès international de philosophie (Genève 1904), Comptes rendus 1905, 855—858.

**Loria, G.**, Per la preistoria della teoria delle trasformazioni di contatto. [34
Biblioth. Mathem. $7_3$, 1906, 67—68.

**Landau, E.**, Euler und die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion. [35
Biblioth. Mathem. $7_3$, 1906, 69—79.

**Valentin, G.**, Leonhard Eulers Wohnhaus in Berlin. [36
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 15, 1906, 270—271.

**Müller, Conrad H.**, Studien zur Geschichte der Mathematik an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert (1904). [Rezension:] Monatsh. für Mathem. 17, 1906; Lit.-Ber. 37—38. (R. v. St.) [37

**Marcolongo, R.**, Sul teorema della composizione delle rotazioni istantanee. Appunti per la storia della meccanica secolo XVIII. [38
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 9, 1906, 1—12.

**Zanotti-Bianco, O.**, I concetti moderni sulla figura matematica della terra. Appunti per la storia della goodesia. III—IV. [39
*Torino*, Accad. d. sc., Atti (sc. matem.) 41, 1905—1906, 21—43, 288—308.

**Bliedner**, Philosophie der Mathematik bei Fries (1904). [Rezension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 37, 1906, 218. (M. Richter.) [40

**Lucas de Pesloüan, Ch.**, N.-H. Abel. Sa vie et son œuvre. Paris, Gauthier-Villars 1906. [41
8°, XIII + 168 + (1) S. + Porträt. — [5 fr.]

***Streit, H.**, Die Fortschritte auf dem Gebiete der Thermoelektrizität. III Von der Mitte des vorigen Jahrhunderts bis zur Neuzeit. Wittenberge 1905. [42

8°. 104 S. — Realschul-Programm. — [Rezension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 37, 1906, 216—217. (Stegemann.)

**Graf, J. H.,** Briefwechsel von Ludwig Schläfli mit Arthur Cayley (1905). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 9, 1906, 29. (G. L.) [43

**Wieleitner, H.,** Bibliographie der höheren algebraischen Kurven 1890—1904 (1904). [Rezension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 37, 1906, 295—296. (H. Wieleitner). [44

**Rados, G.,** Rapport sur le prix Bolyai (1906). [Wieder abgedruckt:] *Palermo,* Circolo matem., Rendiconti 21, 1906, 367—385. [45

**Stäckel, P.,** Das Archiv der Mathematik und Physik, ein Geleitwort zu den ersten zehn Bänden der dritten Folge. [46

Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 15, 1906, 323—329.

### e) Nekrologe.

Franz Michael **Karlinski** (1830—1906) [47

Wiadomosci matem. 10, 1906, 123.

James Mills **Pierce** (1834—1906). [48

*New York,* Americ. mathem. soc., Bulletin $12_2$, 1906, 417. — Science $23_2$, 1906, 637—638; $24_1$, 1906, 40—48 (J. K. Whittemore).

Otto **Stolz** (1842—1905). [49

Monatsh. für Mathem. 17, 1906, 161—178. (J. A. Gmeiner.) — Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 15, 1906, 309—322. (Auszug aus dem Nachrufe von Gmeiner mit hinzugefügtem Schriftenverzeichnis.)

### f) Aktuelle Fragen.

Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens. IV. [50

L'enseignemet mathém. 8, 1906, 217—225.

**Carracido, J. R.,** Catalogo internacional de literatura científica. [51

*Madrid,* Acad. de ciencias, Revista 3, 1905, 587—602.

# Wissenschaftliche Chronik.

**Ernennungen.**

— Professor W. P. Alexejewskij in Charkow zum Professor der angewandten Mathematik am Technologischen Institut in Tomsk.

— Dr. R. B. Allen in Worcester zum Professor der Mathematik am Kenyon college in Gambier, Ohio.

— Dr. H. T. Barnes an der „Mc Gill university" in Montreal zum Professor der Physik daselbst.

— Dr. H. S. Blichfeldt an der Stanford Universität, Cal. zum Professor der Mathematik daselbst.

— Lektor T. Brodén in Helsingborg zum Professor der Mathematik an der Universität in Lund.

— Dr. C. E. Colpitts in Ithaca zum Professor der Mathematik an der „Georgia school of technology".

— Dr. S. Epsteen in Boulder zum Professor der Mathematik an der Universität von Colorado daselbst.

— A. S. Eve an der „Mc Gill university" in Montreal zum Professor der Mathematik daselbst.

— Dr. G. de Franchis in Cagliari zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Professor G. Fubini in Catania zum Professor der Mathematik an der Universität in Genua.

— N. R. George zum Professer der Mathematik am „Massachussetts institute of technology" in Boston.

— Dr. J. Graham zum Professor der Mathematik am „Williams college".

— Privatdozent F. Gruner in Bern zum Professor der mathematischen Physik an der Universität daselbst.

— Dr. J. G. Hardy am „Williams College" zum Professor der Mathematik daselbst.

— Dr. C. N. Haskins in Ithaca zum Professor der Mathematik an der Universität von Illinois in Urbana.

— Professor H. Jacoby zum Direktor der Sternwarte der „Columbia university" in New York.

— Dr. E. Kasner in New York zum Professor der Mathematik an der „Columbia university" daselbst.

— Dr. J. L. Love in Cambridge, Mass. zum Professor der Mathematik an der „Harvard university" daselbst.

— Privatdozent A. Marcuse in Berlin zum Professor der Astronomie und mathematischen Geographie an der Handelshochschule daselbst.

— Privatdozent F. Martens in Berlin zum Professor der Physik an der Handelshochschule daselbst.

— Professor G. A. Miller an der „Stanford university" zum Professor der Mathematik an der Universität von Illionis in Urbana.

— Professor J. A. Miller in Bloomington zum Professor der Mathematik und Astronomie am „Swarthmore college".

— Dr. J. M. Poor in Hanover, N. H. zum Professor der Mathematik am „Dartmouth college" daselbst.

— Dr. J. T. Porter am „Williams college" zum Professor der Physik am „Randolph-Macon college".

— Professor N. Saltykoff in Kiew zum Professor der Mathematik an der Universität in Charkow.

— Professor S. E. Slocum in Urbana zum Professor der angewandten Mathematik an der Universität in Cincinnati.

— Privatdozent J. Stark in Göttingen zum etatsmäßigen Dozenten der Physik an der Technischen Hochschule in Danzig.

— Dr. H. F. Stecker am „Pennsylvania State college" zum Professor der Mathematik daselbst.

— Professor W. A. Stekloff in Charkow zum Professor der Mathematik an der Universität in St. Petersburg.

— Professor E. B. van Vleck in Middletown, Conn. zum Professor der Mathematik an der Universität von Wisconsin.

— J. K. Whittemore in Cambridge, Mass. zum Professor der Mathematik an der „Harvard university" daselbst.

— Privatdozent G. Wieghardt in Aachen zum Professor der Mechanik an der Technischen Hochschule in Braunschweig.

### Todesfälle.

— Friedrich Hultsch, früher Rektor der Kreuzschule in Dresden, geboren in Dresden den 22. Juli 1833, gestorben daselbst den 6. April 1906.

— Franz Michael Karlinski, früher Professor der Mathematik und Astronomie an der Universität in Krakau, geboren in Krakau den 4. Oktober 1830, gestorben daselbst den 21. März 1906.

— Karl Pape, früher Professor der Physik an der Universität in Königsberg, geboren in Hannover den 20. Januar 1836, gestorben im Mai 1906.

— George Albert Wentworth, früher Professor der Mathematik am Phillips Exeter academy, gestorben in Exeter den 24. Mai 1906, 71 Jahre alt.

### Vorlesungen über Geschichte der mathematischen Wissenschaften.

— At the „Columbia university" (New York) Professor D. E. Smith will deliver during the academic year 1906—1907 a course (two lectures each week) on the history of mathematics.

— An der Universität Straßburg hat Professor M. Simon für das Sommersemester 1906 eine zweistündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik im Mittelalter angekündigt.

— At the university of Wisconsin (Madison) Professor C. S. Slichter will deliver during the summer session 1906 a course (two lectures each week) on the history of mathematics.

### Vermischtes.

— Der Vorstand der Deutschen Mathematiker-Vereinigung hat beschlossen, in diesem Jahre ein ausführliches Mitgliederverzeichnis mit biographischen Notizen herzustellen, und für diesen Zweck hat der Schriftführer Herr A. Krazer einen besonderen Fragebogen an die Mitglieder versandt. Da die Vereinigung am Anfange des Jahres 664 Mitglieder hatte, von denen freilich etwa 30 nicht Personen sondern Institutionen sind, muß ein solcher biographischer Spezial-Kalender von großem Interesse werden.

# The fragment of Anthemius on burning mirrors and the „Fragmentum mathematicum Bobiense".

By T. L. Heath in London.

The fragment of Anthemius (6th. c. A. D.) on burning mirrors is the subject of frequent reference in books dealing with the history of Greek geometry. But it is somewhat inaccessible, since it is not every one who can consult the original edition of it by L Dupuy (1777) or the reproduction in the Mémoires de l'académie des inscriptions et des belles lettres [de Paris] 42 (1786), p. 392—451, or even the reprint of the Greek text in A. Westermann's *Παραδοξογράφοι (Scriptores rerum mirabilium Graeci)*, Braunschweig 1839, p. 149—158. The result is that the actual contents of the fragment appear to be little known or even completely overlooked, although the first and third portions of it (ed. Westermann, p. 145—152 and p. 157—158) make it a document of great importance in the history of conic sections. The object of this paper is to make these extracts once more accessible, to draw attention to the points of greatest historical interest, and incidentally to consider afresh the relation (if any) between Anthemius and the *Fragmentum mathematicum Bobiense,* as to which reference should also be made to Heiberg's article in the Zeitschrift für Mathematik und Physik 28 (1883), Hist.-litt. Abt. p. 121—129.

The following is a literal translation of the fragment of Anthemius so far as it relates to the conic sections.

„I . . . . . *in a given spot to contrive that a ray of the sun shall fall, without moving away, at any hour and season.*

„Let the given spot be that at the point $A$ [Fig. 1], and through $A$ let a meridian straight line be drawn parallel to the horizon, the [straight line] reaching to the hole or window through which the rays have to be carried to $A$, as $AB$.

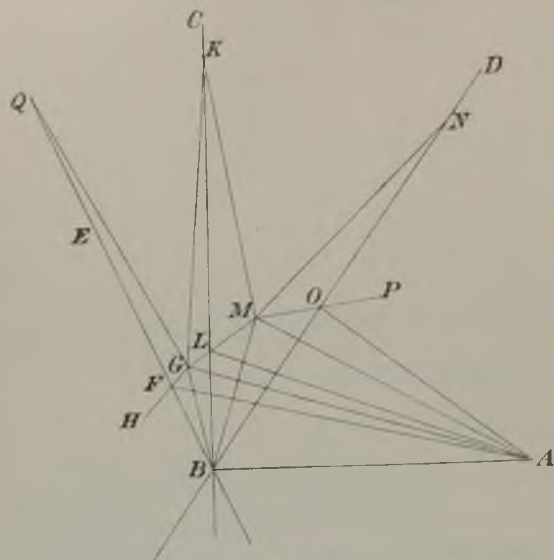



Fig. 1.

„Let $BC$ be drawn through $B$ at right angles to $AB$ so that it will be equinoctial.

„And let there be also through the point $B$ another straight line $BD$ belonging to the summer solstice, and likewise let $BE$ through $B$ be a winter-ray.

„Let there be taken, at a suitable distance from $B$, according to the size that we wish to make the instrument, on the winter straight line first, a point $F$, let $FA$ be joined, and let the angle $EFA$ be bisected by the straight line $FG$, the point $G$ being conceived between the winter and the equinoctial rays, as [lying] on the bisector of the angle $EBC$, and $GF$ being produced as for as the point $H$.

„If then we conceive a plane mirror in the position of the straight line $GF$, I say that the ray $BFE$ falling on $FGH$ will be reflected to the point $A$.

„For, since the angle $EFG$ is equal to the angle $GFA$, and the angle $EFG$ is equal to its vertical angle $HFB$, it is clear that the angle $GFA$ is also equal to the angle $HFB$.

„Therefore the ray $BF$ will be reflected, at equal angles, to $A$ in the straight line $AF$.

„Similarly also we shall contrive that the equinoctial ray is reflected, in the following manner.

„Let the straight line $GA$ be joined; and, as it were drawing a circle with centre and distance, let $GK$ [with its extremity $K$] on the straight line $BC$ be made equal to $GA$.

„And similarly let the angle $KGA$ be bisected by the straight line $GLM$ cutting the straight line $BKC$ in $L$, and terminated at the point $M$ by the straight line bisecting the angle $CBD$; and let $LA$ be joined.

„Then, since $GK$ is equal to $GA$, and the angle $KGA$ is bisected by the straight line $GLM$,

„therefore the base $KL$ is equal to $LA$, so that the angle $KLM$ is also equal to the angle $MLA$.

„But the angle $KLM$ is equal to the angle $GLB$, for they are vertical; therefore also the angle $MLA$ is equal to the angle $GLB$.

„Hence, if similarly a plane mirror be conceived, $GLM$, being continuous and connected with the aforesaid mirror $GFH$, the equinoctial ray $LB$ will be reflected to $A$ along the straight line $LA$.

„Similarly, doing the same with the straight line $DB$, we shall prove that the summer ray $BN$ falling on the plane mirror through $MOP$ is reflected to $A$ along the straight line $OA$

„If therefore we conceive at the point $B$ a hole symmetrical about the same centre, all the rays falling through the hole, that is, through the point $B$, upon the said mirrors continuous with one another will be reflected to the point $A$.

„But it is possible also, by continually bisecting the said angles, and proceeding in the same way by means of more and smaller mirrors, to describe the line $HFGLMOP$ which, if it were conceived to be carried round $BA$ as axis, will form the so-called pot-shaped (κλιβανοειδὲς) mirror, which, being bisected and covered with a lid parallel to the horizon, and receiving the rays through $B$ only, the point at the hole, will send them, whatever their direction, to the point $A$.

„But, in order that we may not have to construct and put together continual divisions and plane mirrors . . . . . .“ (here there are gaps in the text, the probable effect of the passage being, „⟨we will show how⟩, immediately after the drawing of the straight line itself [as $AB$], a surface of impact can be constructed to it, so as to make a mirror with the required property“).

„For, if we conceive $QF$ made equal to the straight line $FA$, the straight line $QG$ is equal to $GA$.

„Since, then, the straight line $QF$ was made equal to $FA$ . . . . . . ., therefore the whole $QB$ is equal to $KB$, because $QG$ is equal to $GK$, and the angle $QBK$ is bisected; therefore $BK$ is equal to $BF$, $FA$.

„But $BK$ is equal to $BL$, $LA$, because $KL$ is equal to $LA$, and $LB$ is common.

„For the same reason it will also be proved that $BN$ is equal to $BK$ and $QB$; and $BO$, $OA$ are equal to $BL$, $LA$, and $BF$, $FA$ to both.

„Thus from this it may be proved that the [broken] rays sent through the point $B$ and reflected to $A$ are equal to all the rest which have the same property.

„If then we stretch a string passed round the points $A$, $B$, and through the first point taken on the rays which are to be reflected, the said line will be described, which is part of the so-called ellipse, with reference to which the surface of impact of the said mirror has therefore to be constructed.“

We can now take stock of the important facts which emerge from the foregoing extract.

1) Anthemius gives in it an elegant method of *constructing an ellipse by means of tangents.*

2) Two tangent-properties of the ellipse formed the basis from which the construction was evolved. These properties are: a) *The focal distances of any point on an ellipse make equal angles with the tangent at that point,* which is proved in Apollonius III. 48, b) *The straight line joining the focus to the point of intersection of two tangents bisects the angle between the straight lines joining the said focus to the two points of contact respectively,* a proposition *not found in Apollonius.*

3) The fundamental property used as the criterion for determining that a number of points are on an ellipse is the fact that *the sum of the focal distances of any point on the ellipse is constant.*

4) We have here mentioned, *for the first time on record apparently,* the well-known construction for an ellipse by using an endless string passed round two fixed points, and a pencil keeping the string taut and describing the curve by its motion round the two points.

On the construction as a whole it may be remarked that it has the appearance of being a solution of an „inverse tangent-problem". It is so however only in appearance; for Anthemius obviously knew that an ellipse had the property desired and that it was fully determined when the foci and the one assumed point were given: hence he merely addressed himself to the construction of a number of tangents *to that particular ellipse,* using as his criteria for such tangents the two properties quoted under a) and b) above. The construction had the advantage that the drawing of each tangent in the particular way determined automatically the point of contact as well.

There can be no doubt that the fact that an ellipse has the property of reflecting all rays through one focus to the other focus was known to Apollonius. For it is so easy a deduction from Apollonius III. 48, and we shall see from the *Fragmentum Bobiense* that he wrote a book on burning-glasses (*πεϱὶ τὸν πυϱίον*).

---

We will now pass to the third part of the fragment of Anthemius, which is as follows:

„III. Since the ancients also mentioned the usual burning-glasses, [describing] how the construction of their surfaces of impact should be effected, [but dealing with them] mechanically only and not setting out any geometrical proof to this end, all of them saying that such figures are conic sections but not specifying which, and how produced, for this reason we will try to set out some constructions for such surfaces of impact, and these not without demonstration but confirmed by geometrical methods.

„For let the diameter of the burning-glass for which we wish to find a construction be $AB$ [Fig. 2], and the point to which we wish the reflection to take effect the point $D$ on the straight line $CED$ at right angles to $AB$ and bisecting it, $E$ being supposed at the bisection of $AB$; and let $BD$ be joined.

„Let $BF$ be drawn through $B$ parallel to $DEC$, being equal to $BD$, and through $F$ let $FC$ be drawn parallel to $BA$ meeting $DEC$ at the point $C$; let $CD$ be bisected at the point $H$.

„Then $HE$ will be the depth of the surface of impact about $AB$ as diameter, as will presently be clear.

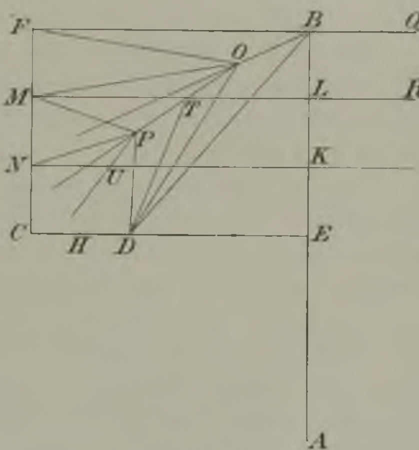


Fig. 2.

„Let the straight line $BE$ be divided into any number of equal segments whatever; suppose they are three in the present construction, $EK$, $KL$, $LB$; and through $K$, $L$ let $LM$, $KN$ be drawn parallel to $BF$, $EC$; let the angle $FBD$ be bisected by the straight line $OB$, the point $O$ being conceived midway between the parallels $BF$, $LM$.

„Let all the said parallels be produced in the direction of $D$ to the points $Q$, $R$.

„I say that the ray $QB$, occupying a position parallel to the axis, that is to $ED$, and falling at the point $B$ on the mirror through $OB$, will be reflected to $D$, because the angle $FBD$ is bisected, and reflection takes place at equal angles, as has before been proved.

„Similarly also we shall make the ray $RL$ be reflected to $D$ in this manner.

„For let the straight line $OD$ be joined, and likewise $OM$, $OF$.

„And it is clear that $OD$ is equal to $DF$ because of the bisection of the angle at $B$.

„But $OF$ is equal to $OM$ because they are carried to the points $F$, $M$ from $O$ which lies midway; and [therefore] $MO$ is equal to $OD$.

„Let then the angle $MOD$ be bisected by $OTP$, ($P$ being conceived midway between the parallels $ML$, $NK$), cutting the parallel $ML$ at $T$.

„For the same reason it will then be proved that $MT$ is also equal to $TD$;
and $TD$ . . . . . . [here the fragment ends].

---

Although the fragment ends here, it is easy to see, from the analogy of the case of the ellipse, how the argument proceeded. By bisecting the angle $NPD$ a point $U$ would be found on $NK$ such that a ray in the direction $KN$ would be reflected from a mirror through $PU$ at the point $U$ to $D$, and $NU$ would be equal to $UD$.

Similarly, if parallels to the axis were drawn bisecting $FM$, $MN$, $NC$ respectively, points on them and mirrors through them would be determined such that rays along the parallels would be reflected to $D$; and so on continually.

Then all the points so found, as $B$, $T$, $U$, $H$, are on a parabola with focus $D$ and directrix $FC$. Thus the construction of separate plane mirrors could be avoided by drawing the parabola, which then by its revolution about $CE$ gives the reflecting surface required.

The salient facts brought out by the extract are these.

1) We have here, corresponding to the earlier construction for the ellipse, an elegant method of *constructing a parabola by means of tangents*, the method having here also the advantage that the drawing of each tangent automatically determines the point of contact as well.

2) The properties of the parabola forming the basis of the method are a) that *the tangent at any point makes equal angles with the axis and with the focal distance of the point* and b) that *the distance of any point on the curve from the focus is equal to its distance from the directrix*.

3) Most important of all, we have here the *first instance on record of the practical use of the directrix*, though the property of conics with reference to the focus and directrix was known to PAPPUS (lemma on EUCLID's Surface-loci) and possibly to EUCLID himself.

It is clear that ANTHEMIUS knew beforehand that the parabola had the desired property of reflecting to the focus all rays parallel to the axis, and further that a parabola was fully determined if only the focus and a double ordinate were given; and his construction was simply directed to drawing the particular parabola. Nothing that he says proves that the property of a parabola brought out by his construction had not been proved before. He says that „the ancients“ stated that curves having the property of reflecting rays to a point were conic sections, without proving the fact geometrically or specifying *which* conics. But if the properties were so commonly known and quoted, they must have been proved, and possibly so long before that the book containing the proofs had already been lost when ANTHEMIUS wrote.

It is now necessary to compare ANTHEMIUS' proposition about the parabola with the portion of the *Fragmentum mathematicum Bobiense* dealing with the same subject.

It is as follows, the first part of it being the conclusion of a proof that, *if a tangent be drawn* [Fig 3] *to a parabola at a point $E$ and meet the axis in $D$, and if along the axis $AB$ be measured equal to one-fourth of the parameter, then $BE = BD$.*

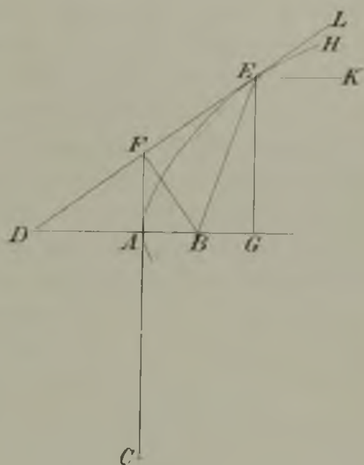


Fig. 3.

„[For since the rectangle $AC$, $AG$ is equal to the square on] $EG$, and $CA$ is quadruple of $AB$, therefore four times the rectangle $BA$, $AG$, that is, four times the rectangle $BA$, $AD$, is equal to the square on $GE$, that is, to four times the square on $AF$.

„Therefore also the rectangle $BA$, $AD$ is equal to the square on $AF$.

„Therefore the angle at $F$ is right. And $FE$ is equal to $DF$.

„Therefore also $DB$ is equal to $BE$.

---

„This being proved, let there again be a section of a cone, a parabola, of which $AB$ is the *diameter* and $AC$ the parameter; let $AB$ be one-fourth of $AC$, and from any point on the section let $EK$ be drawn parallel to $AB$, and let $EB$ be joined.

„It is to be proved that $KE$ is reflected at the section at an equal angle.

„For let the tangent $DEL$ be drawn.

„Now, by what was before shown, $DB$ is equal to $BE$; so that the angles at the points $D$, $E$ are also equal.

„*So are the angles $DEA$, $LEH$.*

„Let the difference between the angles be taken; therefore the angles $BEA$, $HEK$ which remain are equal.

„Similarly we shall show that all the lines drawn parallel to $AB$ will be reflected at equal angles to the point $B$."

---

[The above is quoted from HEIBERG's article in the Zeitschrift für Mathematik und Physik; the remainder is translated from BELGER's original edition in Hermes **16** (1881), p. 261 seqq.]

„Thus burning-glasses constructed with the surface of impact [in the form] of *the section of a right-angled cone* may easily, in the manner above shown, be proved to bring about ignition at the point indicated. But now it is necessary again to show the facts with reference to the arcs of a circle, how large the circumference of the mirror must be and where it will effect ignition. Now the ancients assumed that the ignition is effected about the centre of the mirror; *but this* Apollonius *proved*, as was very necessary, *to be false . . . . [in his tract] against the Catoptrici, and he further, in his book on the burning-glass, made it clear about what point the ignition will take place . . . . . .* His proof is difficult and somewhat long. Let us therefore pass over the demonstrations given by him and try to set out those which we have to add, not as desiring to set up ours against his (which would really be like swallows vying with swans) but as claiming to be able to add something for the benefit of students of the subject referred to.

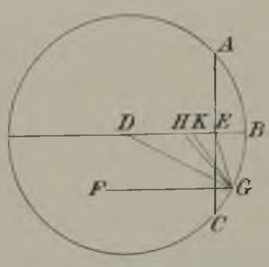


Fig. 4.

„Let [Fig. 4] the circumference of a circle $ABC$ be set out, in which $AC$ is the side of a square [inscribed], while $D$ is the centre of the circle; and let $DEB$ be drawn perpendicular to $AC$, let $BD$ be bisected in $H$, and from any point let $FG$ be drawn parallel to $DB$.

„I say that $FG$ will be reflected at an equal angle between $E$, $H$ . . .“

[The proof, which follows, it is unnecessary to reproduce.]

Heiberg (l. c.) conjectured that the *Fragmentum mathematicum Bobiense* is also by Anthemius, and that the part of it quoted above is the conclusion of the argument concerning the parabolic mirror begun in the fragment edited by Dupuy. So far as this conjecture is based on the passage in which Anthemius states that the ancients had only constructed such mirrors and said they were conic sections without any geometrical proof of the fact, Zeuthen (*Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, 1886) had already shown it to be unsafe and even improbable. But in fact it will be easily seen that the contents of the *Fragmentum Bobiense* do not fit on to the fragment of Anthemius, the conclusion of which is easily supplied by the analogy of the previous case of the ellipse, as above shown. On the other hand, the proof in the *Fragmentum Bobiense* makes no use of or allusion to the property of the parabola with reference to the focus and directrix unmistakeably assumed by Anthemius; and, as the property proved in the *Fragmentum Bobiense* is more easily (nay, almost instantaneously) proved from the focus directrix property, it seems more likely that Anthemius would have used the latter method

But HEIBERG also expressed concurrence in the view of BELGER that the language of the *Fragmentum Bobiense* suggests Byzantine authorship. It is with reference to this idea that a re-examination of the two fragments seems called for, since I think it will show, on the contrary, that the language of the two is very different, and that the *Fragmentum Bobiense* must belong to a much earlier date than the other. I would draw attention to the following differences. ANTHEMIUS speaks of the „ellipse“ and „parabola“, the *Fragmentum Bobiense* of „a section of a cone, a parabola“ and of *„the section of a right-angled cone“*. The latter is the pre-Apollonian term and could hardly have survived in a treatise so late as supposed. Similarly the *Fragmentum Bobiense* speaks of the „diameter“ (meaning the „axis“) of a parabola, like ARCHIMEDES; ANTHEMIUS speaks of the „axis“, like APOLLONIUS: the *Fragmentum* also brings in the „parameter“ of which there is no word in ANTHEMIUS. Lastly the *Fragmentum Bobiense* uses curvilinear angles, assuming as known that the angles between the tangent to a parabola and the portions of the curve on each side of the point of contact respectively are equal. Now it is clear from EUCLID's *Elements* that the use of such angles was already dying out in his time, the cases in which they are mentioned in the *Elements* being obviously mere survivals.

All these circumstances indicate that the *Fragmentum Bobiense* is much older than ANTHEMIUS, and we naturally turn next to the hypothesis of CANTOR (Hermes **16**, p. 637 sqq.), that its author might be DIOCLES, whom we know to have written on burning-glasses (*περὶ πυρίων*). EUTOCIUS (Comm. on ARCHIMEDES, ed. HEIBERG III, p. 188 sqq.) quotes from this treatise DIOCLES' solution of the problem left unsolved in ARCHIMEDES, On the sphere and cylinder II, 4, and prefaces it with words which suggest that he is quoting word for word. But in this solution DIOCLES speaks of an „ellipse“ and a „hyperbola“, not of „sections of an acute-angled“ and „obtuse-angled cone“ respectively. Hence it seems probable that our fragment was anterior even to DIOCLES (fl. probably about 180 B. C.). As its author also quotes APOLLONIUS (born about 262 B. C.), the necessary inference would appear to be that he was a younger contemporary of APOLLONIUS. This agrees well with his modest comparison of himself with APOLLONIUS, which is more likely, it seems to me, to belong to the time when the contemporaries of the latter were speaking of him as „the great geometer“ than to any later time. For geometers soon came to mention him without any exaggerated respect, as witness PAPPUS, and even GEMINUS, to judge by PROCLUS' quotations from him in which APOLLONIUS is mentioned.

# Über den Kommentar des Muhammed ben 'Abdelbâqî zum zehnten Buche des Euklides.

Von HEINRICH SUTER in Zürich.

EUKLIDES nennt bekanntlich $n$ und $\sqrt{m}$ (oder $\sqrt{n}$ und $\sqrt{m}$) zwei *rationale* Größen (Gerade), kommensurabel bloß in Potenz; sie bilden ein *mediales* Rechteck $n\sqrt{m}$ (oder $\sqrt{nm}$), und die Seite des Quadrates, das diesem Rechteck inhaltsgleich ist, also $\sqrt{n\sqrt{m}}$ (oder $\sqrt{\sqrt{nm}}$) wird Mediallinie oder kurzweg *Mediale* genannt. Aus je zwei solchen Linien setzt nun EUKLIDES durch Addition und Subtraktion neue Linien zusammen, und erhält so folgende sechs (bezw. zwölf) erste Irrationallinien:

1. a) $n + \sqrt{m}$ oder $\sqrt{n} + \sqrt{m}$ heißt Binomium (absolutum),
   b) $n - \sqrt{m}$ oder $\sqrt{n} - \sqrt{m}$ oder $\sqrt{m} - n$ heißt Apotome oder Residuum (absolutum).

2. a) $\sqrt{m\sqrt{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}\sqrt{n}}$ oder $\sqrt{m\sqrt{n}} + \sqrt{\frac{m}{n}\sqrt{n}}$ heißt erste Bimediale,
   b) $\sqrt{m\sqrt{n}} - \sqrt{\frac{n}{m}\sqrt{n}}$ oder $\sqrt{m\sqrt{n}} - \sqrt{\frac{m}{n}\sqrt{n}}$ heißt erste Medialapotome.

   Beide Mediale sind in Potenz kommensurabel und ihr Produkt ist rational.

3. a) $\sqrt{m\sqrt{n}} + \sqrt{\frac{mp}{n}\sqrt{n}}$ oder $\sqrt{m\sqrt{n}} + \sqrt{\frac{np}{m}\sqrt{n}}$ heißt zweite Bimediale.
   b) $\sqrt{m\sqrt{n}} - \sqrt{\frac{mp}{n}\sqrt{n}}$ oder $\sqrt{m\sqrt{n}} - \sqrt{\frac{np}{m}\sqrt{n}}$ heißt zweite Medialapotome

   Beide Mediale sind in Potenz kommensurabel und ihr Produkt ist medial.

4. a) $\sqrt{m + \sqrt{mn}} + \sqrt{m - \sqrt{mn}}$ heißt Major (größere Irrationale),
   b) $\sqrt{m + \sqrt{mn}} - \sqrt{m - \sqrt{mn}}$ heißt Minor (kleinere Irrationale).

   Beide Irrationallinien sind in Potenz inkommensurabel, die Summe ihrer Quadrate ist rational, ihr Produkt ist medial.

5. a) $\sqrt{(m+\sqrt{n})\sqrt{m^2-n}} + \sqrt{(m-\sqrt{n})\sqrt{m^2-n}}$

oder $\sqrt{(\sqrt{m}+\sqrt{n})\sqrt{m-n}} + \sqrt{(\sqrt{m}-\sqrt{n})\sqrt{m-n}}$

heißt die ein Rationales und Mediales Potenzierende.[1])

b) $\sqrt{(m+\sqrt{n})\sqrt{m^2-n}} - \sqrt{(m-\sqrt{n})\sqrt{m^2-n}}$

oder $\sqrt{(\sqrt{m}+\sqrt{n})\sqrt{m-n}} - \sqrt{(\sqrt{m}-\sqrt{n})\sqrt{m-n}}$

heißt die mit einem Rationalen ein mediales Ganzes gebende.[2])

Beide Irrationallinien sind in Potenz inkommensurabel, die Summe ihrer Quadrate ist medial, ihr Produkt rational.

6. a) $\sqrt{(m+\sqrt{p})\sqrt{n}} + \sqrt{(m-\sqrt{p})\sqrt{n}}$

oder $\sqrt{(\sqrt{m}+\sqrt{p})\sqrt{n}} + \sqrt{(\sqrt{m}-\sqrt{p})\sqrt{n}}$

oder $\sqrt{(\sqrt{m}+\sqrt{p})n} + \sqrt{(\sqrt{m}-\sqrt{p})n}$

heißt die zwei Mediale Potenzierende [3])

b) $\sqrt{(m+\sqrt{p})\sqrt{n}} - \sqrt{(m-\sqrt{p})\sqrt{n}}$

oder $\sqrt{(\sqrt{m}+\sqrt{p})\sqrt{n}} - \sqrt{(\sqrt{m}-\sqrt{p})\sqrt{n}}$

oder $\sqrt{(\sqrt{m}+\sqrt{p})n} - \sqrt{(\sqrt{m}-\sqrt{p})n}$

heißt die mit einem Medialen ein mediales Ganzes gebende.[4])

Beide Irrationallinien sind in Potenz inkommensurabel, die Summe ihrer Quadrate ist medial, ihr Produkt ist medial, beide Mediale aber sind inkommensurabel.

Von diesen zusammengesetzten Irrationallinien, die ich im allgemeinen durch die Wurzelausdrücke wiedergegeben habe, die NESSELMANN in seiner *Geschichte der Algebra bei den Griechen* aufgestellt hat, handeln die Sätze 29—47 und 73—84 des zehnten Buches (HEIBERGS Ausgabe); der arabische Kommentator (mit größter Wahrscheinlichkeit MUHAMMED BEN ʿABDELBÂQÎ EL-BAGDÂDI, vergl. Biblioth. Mathem. $4_3$, 1903, p. 24—27) gibt zu denselben folgende Zahlenbeispiele (vergl. *EUCLIDIS opera omnia. Supplementum: ANARITII in decem libros priores commentarii*, edid. M. CURTZE, 1899, p. 317—321, 345—354, 360—362 und 370—379):

1. Binomium (absolutum): $\sqrt{10}+\sqrt{8}$
   Apotome oder Residuum (absolutum): $\sqrt{10}-\sqrt{8}$

2. Erste Bimediale: $\sqrt[4]{192}+\sqrt[4]{108} = \sqrt{4\sqrt{12}}+\sqrt{3\sqrt{12}}$
   Erste Medialapotome: $\sqrt[4]{192}-\sqrt[4]{108} = \sqrt{4\sqrt{12}}-\sqrt{3\sqrt{12}}$

---

1) d. h. das Quadrat der Linie ist gleich der Summe aus einem rationalen und medialen Rechteck.

2) d. h. das Quadrat der Linie ist gleich der Differenz aus einem medialen und rationalen Rechteck.

3) d. h. das Quadrat der Linie ist gleich der Summe aus zwei medialen Rechtecken.

4) d. h. das Quadrat der Linie ist gleich der Differenz aus zwei medialen Rechtecken.

geht aus der ersten der oben unter 2. genannten Formeln hervor für $n = 12$ und $m = 4$; p. 347 und 374 finden wir ein anderes Beispiel für diese Irrationallinien, nämlich $\sqrt[4]{108} \pm \sqrt[4]{12} = \sqrt{6\sqrt{3}} \pm \sqrt{2\sqrt{3}}$, das sich für $n = 3$ und $m = 6$ aus der zweiten daselbst genannten Formel ergibt.

3. Zweite Bimediale: $\sqrt[4]{12} + \sqrt[4]{3} = \sqrt{2\sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{3}}$

Zweite Medialapotome: $\sqrt[4]{12} - \sqrt[4]{3} = \sqrt{2\sqrt{3}} - \sqrt{\sqrt{3}}$

geht aus der oben unter 3. genannten Formel hervor für $m = 2$, $n = 3$ und $p = \frac{3}{2}$; p. 349 und 376 finden wir für diese Irrationalzahl das Beispiel: $\sqrt[4]{72} \pm \sqrt[4]{8} = \sqrt{6\sqrt{2}} \pm \sqrt{2\sqrt{2}}$, das sich aus derselben Formel für $m = 6$, $n = 2$ und $p = \frac{2}{3}$ ergibt.

4. Major: $\sqrt{8 + \sqrt{32}} + \sqrt{8 - \sqrt{32}}$

Minor: $\sqrt{8 + \sqrt{32}} - \sqrt{8 - \sqrt{32}}$

geht aus der oben unter 4. gegebenen Formel hervor für $m = 8$ und $n = 4$; p. 350 und 377 finden wir für diese Zahl das Beispiel: $\sqrt{12 + \sqrt{96}} \pm \sqrt{12 - \sqrt{96}}$, welches sich aus der gleichen Formel für $m = 12$ und $n = 8$ ergibt.

5. Die ein Rationales und Mediales Potenzierende: $\sqrt{\sqrt{32} + 4} + \sqrt{\sqrt{32} - 4}$

Die mit einem Rationalen ein mediales Ganzes gebende:

$$\sqrt{\sqrt{32} + 4} - \sqrt{\sqrt{32} - 4}$$

geht aus der oben unter 5. gegebenen zweiten Formel hervor für $m = 8$ und $n = 4$; p. 352 und 378 findet man für diese Irrationale das Beispiel: $\sqrt{\sqrt{48} + \sqrt{32}} \pm \sqrt{\sqrt{48} - \sqrt{32}}$, das sich aus derselben zweiten Formel für $m = 12$ und $n = 8$ ergibt.

6. Die zwei Mediale Potenzierende: $\sqrt{\sqrt{48} + \sqrt{24}} + \sqrt{\sqrt{48} - \sqrt{24}}$

Die mit einem Medialen ein mediales Ganzes gebende:

$$\sqrt{\sqrt{48} + \sqrt{24}} - \sqrt{\sqrt{48} - \sqrt{24}}$$

geht aus der oben unter 6. genannten ersten Formel hervor für $m = 4$, $n = 3$ und $p = 8$; p. 354 und 379 findet sich für diese Irrationale das Beispiel: $\sqrt{\sqrt{80} + \sqrt{48}} \pm \sqrt{\sqrt{80} - \sqrt{48}}$, das sich aus der dritten Formel für $m = 5$, $n = 4$ und $p = 3$ ergibt.

Eine zweite Doppelhexade von Sätzen über andere Irrationallinien findet sich bei Euklides (ed. Heiberg) in den Sätzen 54—65 und 91—102. Voraus gehen (p. 137 und 255) die Definitionen dieser neuen Irrationallinien und die Aufgaben, jede einzelne derselben zu finden (Sätze 48—53 und 85—90). Diese neuen Irrationallinien haben die folgenden Formen und Namen:

1. a) $m + \sqrt{m^2 - n^2}$ = erste Binomiale (Binomium primum)
   b) $m - \sqrt{m^2 - n^2}$ = erste Apotome (Residuum primum)

2. a) $\sqrt{\frac{m^2 n^2}{n^2 - p^2}} + m$ = zweite Binomiale
   b) $\sqrt{\frac{m^2 n^2}{n^2 - p^2}} - m$ = zweite Apotome

3. a) $\sqrt{m} + \sqrt{\frac{m(n^2 - p^2)}{n^2}}$ = dritte Binomiale
   b) $\sqrt{m} - \sqrt{\frac{m(n^2 - p^2)}{n^2}}$ = dritte Apotome

4. a) $m + \sqrt{m^2 - n}$ = vierte Binomiale
   b) $m - \sqrt{m^2 - n}$ = vierte Apotome

5. a) $\sqrt{m^2 + n} + m$ = fünfte Binomiale
   b) $\sqrt{m^2 + n} - m$ = fünfte Apotome

6. a) $\sqrt{m} + \sqrt{m - n}$ = sechste Binomiale
   b) $\sqrt{m} - \sqrt{m - n}$ = sechste Apotome

wo $m$ und $n$ im allgemeinen keine Quadratzahlen sein sollen und überdies so beschaffen sein müssen, daß die Quadratwurzeln stets irrational werden.

Wir sehen, daß diese sechs (bezw. zwölf) Irrationallinien in die Kategorie 1. der ersten Doppelhexade gehören, es sind alles Binomiale (bezw. Apotomeen), es kommt keine Mediallinie in denselben vor; aber es sind keine Binomia (bezw. Residua) absoluta, bei denen die beiden Teile nur der Bedingung genügen müssen, daß sie zu einander inkommensurabel seien, sondern die beiden Teile jeder Linie unterliegen noch anderen speziellen Bedingungen, diese sind die folgenden.

Bei den ersten drei Linien potenziert der größere Teil über den kleineren um das Quadrat einer der größeren in Länge kommensurabeln Linie, d. h. es ist z. B. bei 1. $\sqrt{m^2 - (m^2 - n^2)} = n$ kommensurabel zu $m$, und so entsprechend bei 2. und 3. Die drei Fälle unterscheiden sich dadurch voneinander, daß bei 1. der größere Teil rational, der kleinere irrational (diese Begriffe im heutigen Sinne genommen) ist, bei 2. der größere irrational, der kleinere rational, bei 3. beide irrational sind.

Bei den letzten drei Linien potenziert der größere Teil über den kleineren um das Quadrat einer der größeren in Länge inkommensurabeln Linie, d. h. es ist z. B. 4. $\sqrt{m^2 - (m^2 - n)} = \sqrt{n}$ inkommensurabel zu $m$, und so entsprechend bei 5 und 6. Die drei Fälle 4., 5. und 6. unterscheiden sich wieder in gleicher Weise voneinander wie 1., 2. und 3.

Der Kommentar des Arabers gibt p. 332—335 und p. 366—369 folgende Zahlenbeispiele für diese zweite Doppelhexade:

1. Erste Binomiale: $3 + \sqrt{5}$
Erste Apotome: $3 - \sqrt{5}$

geht aus der oben gegebenen Formel 1. hervor für $m = 3$ und $n = 2$; p. 366 heißt das Beispiel für die Apotome $6 - \sqrt{20}$.

2. Zweite Binomiale: $\sqrt{45} + 5$
Zweite Apotome: $\sqrt{45} - 5$

geht aus der oben gegebenen Formel 2. hervor für $m = 5$, $n = 3$ und $p = 2$; p. 367 steht für die Apotome das Beispiel $\sqrt{180} - 10$.

3. Dritte Binomiale: $\sqrt{108} + \sqrt{60}$
Dritte Apotome: $\sqrt{108} - \sqrt{60}$

geht aus der oben genannten Formel 3. hervor für $m = 108$, $n = 3$ und $p = 2$.

4. Vierte Binomiale: $4 + \sqrt{6}$
Vierte Apotome: $4 - \sqrt{6}$

geht aus der Formel 4. hervor für $m = 4$ und $n = 10$

5. Fünfte Binomiale: $\sqrt{24} + 3$
Fünfte Apotome: $\sqrt{24} - 3$

geht aus der Formel 5. hervor für $m = 3$ und $n = 15$.

6. Sechste Binomiale: $\sqrt{8} + \sqrt{3}$
Sechste Apotome: $\sqrt{8} - \sqrt{3}$

geht aus der Formel 6. hervor für $m = 8$ und $n = 5$. Wir werden im folgenden noch eine zweite Reihe von Beispielen für diese Irrationallinien finden.

In welcher Beziehung stehen nun die Linien dieser zweiten Doppelhexade zu denjenigen der ersten? Für uns, die wir diese Irrationalgrößen als absolute Zahlen ohne geometrische Bedeutung auffassen, heißt diese Beziehung einfach: die Größen der ersten Doppelhexade sind die Quadratwurzeln der entsprechenden der zweiten Doppelhexade, oder umgekehrt, diejenigen der zweiten die Quadrate von denen der ersten.

EUKLIDES mußte nach seiner Auffassungsweise diese Beziehungen anders aussprechen; als Beispiel gebe ich nur je den ersten Satz beider Hexaden in der EUKLIDischen Form: a) Wenn ein Rechteck aus einer rationalen Linie und einer ersten Binomiale gebildet ist, so ist die Linie, die dasselbe potenziert (d. h. die Seite des Quadrates, das gleich dem Rechteck ist), ein Binomium (absolutum). b) Wenn einer rationalen Linie ein Rechteck angelegt wird, das gleich dem Quadrate eines Binomiums (absol.) ist, so ist die zweite Rechteckseite eine erste Binomiale. (HEIBERG, Sätze 54 und 60). Beide Sätze gehen in Radizierung (bezw.

Quadrierung) der betreffenden Irrationallinie über, wenn die rationale Linie $= 1$ gesetzt wird.

Der arabische Kommentator gibt für die Radizierung zwei Reihen von Zahlenbeispielen (p. 342—344 und p. 345—354), für die Quadrierung nur eine Reihe (p. 355—358). In der ersten Reihe der Wurzelbeispiele setzt er stillschweigend die rationale Linie $= 1$ und gibt eine rein algebraische Regel für die Wurzelausziehung; in der zweiten Reihe setzt er die rationale Linie $= 4$ und wendet die geometrische Darstellungsweise des EUKLIDES an.

*Erste Reihe der Wurzelausziehungen.*

1. Die Wurzel[1]) aus einer ersten Binomiale (Apotome) ist ein Binomium (Residuum) absol.

$$\sqrt{6 \pm \sqrt{20}} = \sqrt{5} \pm 1$$

2. Die Wurzel aus einer zweiten Binomiale (Apotome) ist eine erste Bimediale (Medialapotome):

$$\sqrt{\sqrt{12} \pm 3} = \sqrt{\sqrt{6\tfrac{3}{4}}} \pm \sqrt{\sqrt{\tfrac{3}{4}}}$$

3. Die Wurzel aus einer dritten Binomiale (Apotome) ist eine zweite Bimediale (Medialapotome):

$$\sqrt{\sqrt{8} \pm \sqrt{6}} = \sqrt{\sqrt{4\tfrac{1}{2}}} \pm \sqrt{\sqrt{\tfrac{1}{2}}}$$

4. Die Wurzel aus einer vierten Binomiale (Apotome) ist eine Major (Minor):

$$\sqrt{6 \pm \sqrt{12}} = \sqrt{3 + \sqrt{6}} \pm \sqrt{3 - \sqrt{6}}$$

5. Die Wurzel aus einer fünften Binomiale (Apotome) ist eine ein Rationales und Mediales Potenzierende (mit einem Rationalen ein mediales Ganzes gebende):

$$\sqrt{\sqrt{12} \pm 2} = \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \pm \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

6. Die Wurzel aus einer sechsten Binomiale (Apotome) ist eine zwei Mediale Potenzierende (mit einem Medialen ein mediales Ganzes gebende):

$$\sqrt{\sqrt{20} \pm \sqrt{8}} = \sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \pm \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$$

Wir zeigen das Verfahren der Wurzelausziehung des arabischen Kommentators an Beispiel 4. Man teile 6 in zwei Teile, deren Produkt gleich dem Quadrat der Hälfte von $\sqrt{12}$ sei. Die quadratische Gleichung, die sich hierbei ergibt, nämlich $x^2 - 6x + 3 = 0$, wird vom Kommentator nicht aufgestellt, sondern es werden einfach die Lösungen $3 + \sqrt{6}$ und $3 - \sqrt{6}$ angegeben; die Wurzeln aus diesen Lösungen bilden zusammen eine Major, und diese ist die Wurzel der gegebenen vierten Binomiale

[1]) Der Kürze halber schreibe ich statt „Quadratwurzel" nur „Wurzel".

$6+\sqrt{12}$; voneinander abgezogen bilden sie eine Minor. und diese ist die Wurzel der gegebenen vierten Apotome $6-\sqrt{12}$.[1])

*Zweite Reihe der Wurzelausziehungen.*

1. $\sqrt{4(6\pm\sqrt{20})}=\sqrt{24\pm\sqrt{320}}=\sqrt{20}\pm 2$
2. $\sqrt{4(\sqrt{12}\pm 3)}=\sqrt{\sqrt{192}\pm 12}=\sqrt{\sqrt{108}}\pm\sqrt{\sqrt{12}}$
3. $\sqrt{4(\sqrt{8}\pm\sqrt{6})}=\sqrt{\sqrt{128}\pm\sqrt{96}}=\sqrt{\sqrt{72}}\pm\sqrt{\sqrt{8}}$
4. $\sqrt{4(6\pm\sqrt{12})}=\sqrt{24\pm\sqrt{192}}=\sqrt{12+\sqrt{96}}\pm\sqrt{12-\sqrt{96}}$
5. $\sqrt{4(\sqrt{12}\pm 2)}=\sqrt{\sqrt{192}\pm 8}=\sqrt{\sqrt{48}+\sqrt{32}}\pm\sqrt{\sqrt{48}-\sqrt{32}}$
6. $\sqrt{4(\sqrt{20}\pm\sqrt{8})}=\sqrt{\sqrt{320}\pm\sqrt{128}}=\sqrt{\sqrt{80}+\sqrt{48}}\pm\sqrt{\sqrt{80}-\sqrt{48}}$

Da die rationale Linie $=4$ ist, so sind natürlich die Wurzeln das doppelte von denen der ersten Reihe.

Die Umkehrungen dieser Sätze, d. h. die Quadrierungen der ersten sechs (bezw. zwölf) Irrationallinien finden sich bei Euklides (ed. Heiberg) in den Sätzen 60—65 und 97—102; die Zahlenbeispiele dazu gibt der Kommentator p. 355—358 und p. 382—383; da dieselben die nämlichen sind wie diejenigen bei der Wurzelausziehung, so geben wir nur von jeder Reihe das erste Beispiel (in *einer* Gleichung vereinigt):

$$(\sqrt{20}\pm 2)^2=24\pm\sqrt{320}=4(6\pm\sqrt{20})$$

die rationale Linie ist wieder wie bei der Radizierung $=4$ gesetzt.

Da die Curtzesche Ausgabe der Gerhardschen Übersetzung dieses arabischen Kommentars (l. c. p. 252—386), sowie auch die Ausgabe Boncompagnis (*de numeris et lineis*, s. l. 1863/64?) viele Fehler enthalten[2]), so mag es vielleicht Denjenigen, die sich mit dem Studium dieses Gebietes beschäftigen, willkommen sein, hier eine Richtigstellung der störendsten dieser Fehler zu finden, die mir durch Vergleichung der beiden genannten Ausgaben wesentlich erleichtert worden ist[3]).

| Seite u. Zeile. | Curtze. | Richtig. |
|---|---|---|
| 254, 19 | comparatione . . . . ad alteram | separatione . . . . . ab altera |
| 255, 7—8 | Dicuntur vero cum diminutione | Discreta vero est diminutio |

1) Die Wurzelausziehung wird also nach der bekannten Formel ausgeführt:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

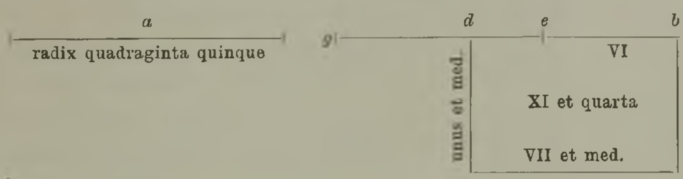
2) Besonders in den Zahlenbeispielen; auch sind sehr oft ganze Sätze ausgelassen, was das Verständnis wesentlich erschwert.

3) Die sehr seltene Boncompagnische Ausgabe hat mir Herr G. Eneström bereitwillig zur Verfügung gestellt, wofür ich ihm meinen besten Dank ausspreche.

| Seite u. Zeile. | Curtze. | Richtig. |
|---|---|---|
| 255, 9 | diminutione (bis) | diminutio |
| 255, 18—19 | determinantur | derivantur |
| — 20 | compositio | compositio et separatio |
| — Note 2 | $\sqrt[4]{a^3 b} \pm \sqrt[4]{a b^3}$ | $\sqrt{a\sqrt{b}} \pm \sqrt{\frac{b}{a}\sqrt{b}}$ od. $\sqrt[4]{a^2 b} \pm \sqrt[4]{\frac{b^3}{a^2}}$ |
| — Note 3 | $\sqrt[4]{a^2 b} \pm \sqrt[4]{a b^2}$ | $\sqrt{a\sqrt{b}} \pm \sqrt{\frac{b p}{a}\sqrt{b}}$ od. $\sqrt[4]{a^2 b} \pm \sqrt[4]{\frac{b^3 p^2}{a^2}}$ |
| 259, 8 | quoniam | quod |
| 260, 2 | communis in loco suo | *communis* eis, que est pars cuiusque earum. Jam ergo prima quantitas diversificata est, et sit pars erecta *in loco suo* |
| 260, 4 | *at* | *ao* |
| — 12 | Quodsi *qx* fuerint partes | Quodsi *rx* fuerit pars |
| — 21 | et ideo | aut *ao* |
| — 30 | *ab* | *at* |
| — 31 | incommunicantes et sint surde | *incommunicantes* et quod una earum est rationalis et altera surda; quod si *ab* non fuerit numerans aliquam earum, dicemus quod ipse sunt incommunicantes *et sint surde* |
| 261, 30 | *aq* | *ax* |
| 262, 33 | tantum | iterum |
| 263, 4—5 | communicantes | (fällt weg) |
| 264, 13 | per res | in rem bis |
| 265, 1 | *hb*, et . . . | *hb*, est equale multiplicationi *ab* in *bh* duabus vicibus; jam igitur ostensum est, quod, cum quadrato *ab* additur quadratum *bh*, *et . . .* |
| 265, 13 | voluerimus ex numeris | *voluerimus*, dicemus quod sunt centum et census additus exceptis viginti rebus; et similiter erit quicquid multiplicare voluerimus *ex numeris* |
| 266, 30 | dividam, est | diminutum est |
| 267, 2 | preteritis | pluribus |
| — 12 | ergo unum ⟨in se⟩, cuius | *ergo* mediedatem sex in se ipsum et provenit novem, ex quo minue octo et remanebit unus, *cuius* |
| 269, 7 | *e* ad *g*, ergo | *e ad g*, sed jam fuit proportio *b* ad *d* sicut proportio *a* ad *e*, ergo proportio *a* ad *e* est sicut proportio *e* ad *g*, *ergo* |

| Seite u. Zeile. | Curtze. | Richtig. |
|---|---|---|
| 272, 12 | assumpte | coniuncte |
| — 13—14 | assumptis | coniunctis |
| 274, Fig. | *q* | *b* |
| 275, 4 | ad hoc ducere, multiplicabimus | *ad hoc ducere*, ut fiat linea una, removebimus additum cum diminuto qui sunt duo postremi, postea *multiplicabimus* |
| 281, Note | Heibergii X, 31: Duas lineas mediales potentia tantum communicantes superficiemque rationalem continentes, quarum ... | Heibergii X, 29: Duas lineas rationales potentia tantum communicantes, quarum ... |
| 282, 19 | *tk* ad *th* | *th* ad *kh* |
| 286, 1 | linearum | figurarum |
| — 31 | addit | cadit |
| 291, 4 | quinque, quod est | *quinque*, cum ergo voluerimus scire radicem superficiei contente a linea rationali et superfluo quod est inter novem et quadraginta quinque, *quod est* |
| 294, 11 | erit triginta sex | erit radix triginta sex |
| 295, 8—9 | Remanet ergo proportio secundum earum habitudines et quantitas similiter | Remanent ergo proportiones secundum earum habitudines et quadrata similiter |
| 297, 3 | conversam | conversionem |
| — 18 | Quod | Et |
| 298, 14 | *a* et *bg*, ⟨Ponam autem⟩ superficiem | *a et bg*, quas ponam novem et radicem 45, sitque *a* minor, et adiungam ad longitudinem longiorem *bg* *superficiem* |
| — 23—24 | Sed *dg* est equalis *de*: ergo quadratum *a* | *Sed dg est equalis de:* ergo quadratum *a* est quadruplum superficiei *bd* in *de*; ipsa vero est undecim et quarta, sit ergo quadratum *be* commune, *ergo quadratum a* |
| — 25 | duplo | quadruplo |
| — 25 | quadrato *de* | quadrato *be* |

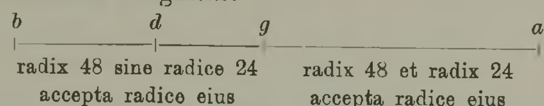
| Seite u. Zeile. | Curtze. | Richtig. |
|---|---|---|
| 299, 21—22 | Quinti decimi exemplum | Quarto decimo nihil additur, nisi quod figura per numeros hoc modo notatur. *Quinti decimi exemplum* |
| — 25—26 | que sit 4 | que sint 4 et 6 |
| — | Über die Figuren auf p. 298 und 299 habe ich folgendes zu bemerken: die Figur p. 298 gehört zu Theor. XIV und unter der Linie *a* soll stehen: radix radicis 128 statt radix radicis 11; die Figur zu Theor. XIII fehlt, sie ist folgende: | |




| Seite u. Zeile. | Curtze. | Richtig. |
|---|---|---|
| 300, Note 1 | Heibergius X, 19 | Heibergius X, 20 |
| — Note 2 | Heibergius X, 20 | Heibergius X, 30 |
| 309, 22 | cui communicat *g* in longitudine, et *g* est medialis: | *cui communicat a in longitudine*, ergo *g* communicat *d* in potentia et potest supra eam cum augmento quadrati linee cui communicat *g* in longitudine, *et g est medialis:* |
| 310, 12 | supra *b* | supra *g* |
| 313, 23 | equale quadrato *dz* | *equale* superficiei *az* in *zb*, et superficies *az* in *zb* est equalis *quadrato dz* |
| — 27 | medietas | (fällt weg) |
| 314, Fig. | An der Höhe *dz* soll | stehen: radix radicis duorum |
| — 4 | *ab* et *bg* | (fällt weg) |
| — 5 | tantum communicantes | incommunicantes |
| — 8 | Exponam, ut *ab* | Signabo igitur duas lineas *ab* et *bg* mediales, in potentia tantum communicantes et continentes superficiem rationalem, et ponam, *ut ab* |
| 315, Fig. | radix radicis 32 | radix radicis 48 |
| — Fig. | An der Höhe *dz* soll | stehen: radix radicis 3 |
| — 22—23 | et designatio sunt rationalis | et disgregatio sunt, videlicet |
| 316, 14 | communicat | incommunicat |
| 319, 19 | secundum, et est | *secundum*, hoc est summa que fit ex radice radicis duodecim et radice radicis trium, *et est* |

| Seite u. Zeile. | CURTZE. | Richtig. |
|---|---|---|
| 319,24—26 | Summa, que fit ex radice . . . . . radice earum accepta | (fällt weg) |
| 320, 17 | mediale. | mediale, et coniunctam cum rationali facientem totum mediale. |
| 320, 20 | mediale . . . . Sed cum | *mediale*, que sint *ab* et *bg*, cum ergo coniungentur, erit potens super rationale et mediale. *Sed cum* |
| — 22 | Hier fehlt das Zahlenbeispiel, es ist: $\sqrt{\sqrt{32}+4}+\sqrt{\sqrt{32}-4}=$ die ein Rationales und Mediales Potenzierende<br>$\sqrt{\sqrt{32}+4}-\sqrt{\sqrt{32}-4}=$ die mit einem Rationalen ein mediales Ganzes gebende. | |
| — 30—31 | ex radice ⟨ex⟩ 48 et radice 28, cum additur supra eam radix ⟨ex⟩ 48 absque radice 28 | ex radice 48 et radice 24 accepta radice eius quod aggregatur, cum additur supra eam radix 48 absque radice 24 accepta radice residui. |
| 321, 17 | ponuntur | posui |
| — Note 1 | $\sqrt{48+\sqrt{28}}\pm\sqrt{48-\sqrt{28}}$ | $\sqrt{\sqrt{48}+\sqrt{24}}\pm\sqrt{\sqrt{48}-\sqrt{24}}$ |
| — Note 2 | HEIBERGII X, 32 | HEIBERGII X, 30. |
| 322, 10 | communicantes, et assumam | *communicantes*, eius modi ut maior supra minorem possit cum augmento quadrati linee, cui maior in longitudine communicat, *et assumam* |
| — 20 | potentia primam | *potentia* tantum communicantes, *primam* |
| — 21 | secundam, et assumam | *secundam*, et tertiam, eius modi, ut prima supra tertiam possit cum augmento quadrati linee, cui prima in longitudine communicat, *et assumam* |
| — 25—26 | erit ergo linea alia assumpta, quam querebamus | erit ergo linea primo assumpta et linea illa alia assumpta quod querebamus. |
| 323, 7 | precessit; ⟨et⟩ accipiam . . | *precessit;* et commendabo memorie duas sectiones, et multiplicabo unamquamque earum in longiorem lineam et eorum que proveniunt *accipiam* |
| — 13 | premittetur | premitteretur |

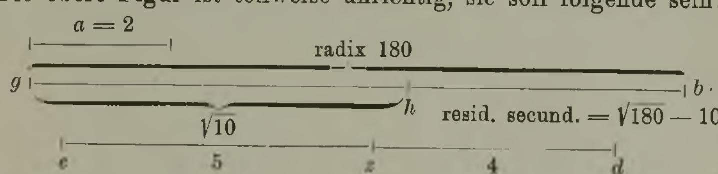
| Seite u. Zeile. | CURTZE. | Richtig. |
|---|---|---|
| 323,14—15 | Nostri tamen libri inceptio est a nota, id est nili. Quod scias ergo hoc: | heißt bei BONCOMPAGNI so: unde cum libri inceptio est a nota in h. 98, scias ergo hoc: Aus beiden weiß ich nichts zu machen. |
| 324, 5 | mediale | (fällt weg) |
| — 26 | quod est | et sic |
| — 27 | eisdem insignitis lineis | eisdem insignitur literis |
| — 29 | linee in potentia | linee mediales in potentia |
| 326 | Muß in der unteren Figur sowohl unter radix 48 absque radice 24 als auch unter radix 48 et radix 24 stehen: accepta radice eius. | |
| 327 | In der Figur müssen die Worte unter der Linie *bg* lauten: radix 32 sine 4, accepta radice eius. Die unter der Linie *ag*: radix 32 et 4, accepta radice eius Nach dieser Figur fehlt folgendes: In 39[a] nihil mutatur nisi quod linea hoc modo numeris insignitur: | |




| Seite u. Zeile. | CURTZE. | Richtig. |
|---|---|---|
| 328, 3 | binomium, et fuerit | *binomium* et recta rationalis, *et fuerit* |
| 329, 1 | quod est 13 | quod est 5 |
| — 6 | radici 4 | 4 |
| — 12—13 | $^2/_3$ ipsius 20. Nam in 45 novem quinquies fuerit | $^2/_3$ radicis ipsius. 20 nam in 45 nongenti fuerit |
| — 26 | quadratum | superficiem |
| 330, 1 | que | cuius radix |
| — 13 | per longiorem | per quadratum longioris |
| — 14 | longior | quadratum longioris |
| — 19 | 2 et $^1/_2$ | 1 et $^1/_2$ |
| — 28 | quadrata, et erunt | *quadrata*, est enim eius radix unus et medium, et similiter si multiplicaverimus unum eorum in alterum, erit quod proveniet, superficies quadrata, *et erunt* |
| — 29—30 | cum quadratum minoris ⟨ex eo⟩ minuitur, remanet, | cum ex quadrato maioris minuitur, remanet 5, |
| — 35 | minoris | (fällt weg) |
| 331, 28 | brevior | levior |

| Seite u. Zeile. | Curtze. | Richtig. |
| --- | --- | --- |
| 333, Fig. | radix 168 (bis) | radix 108 |
| 334, 8 | *de* ad *ez* | *ez* ad *de* |
| 337, 8 | incommunicat | communicat |
| 339, 3 | quadratum: ergo *zh* | *quadratum:* ergo proportio quadrati *zh* ad quadratum *ht* non est sicut proportio numeri quadrati ad numerum quadratum, *ergo zh* |
| 340, 23 | secundum | sedecim |
| 342, 3 | seiungitur; ⟨seiungitur⟩ | *seiungitur,* et unaqueque duarum linearum *bg gh seiungitur* |
| — 5 | sextum; et illud est | *sextum;* et superfluum inter eas, quod est radix octo sine radice trium est residuum sextum, *et illud est* |
| — 7 | numerantur | inveniuntur |
| — 14 | ostendimus | ostendemus |
| — 25—26 | quadrato quarte 20 | quarte quadrati radicis 20 |
| 343, 1 | quadrato quarte | quarte quadrati |
| — 11 | radix 8 et medii | radix 4 et medii |
| — 12 | radix unius et medietatis | radix unius medietatis |
| 345, 9—10 | namque est multiplicatio 16 | namque est radix multiplicationis 16 |
| 346, 32 | *ln,* et .... superficies *ml* | *lm,* et .... superficies *nl* |
| 351, 6 | ⟨at⟩ | rationalis |
| — 9 | et *ad* est⟩ rationalis | (fällt weg) |
| 352, 17 | et earum | et quadratorum earum |
| 356, 2—3 | et est adiuncta ad *gd* rationalem | (fällt weg) |
| — 10 | *el* | *eo* |
| — 10—11 | ergo *kt* seiungitur *le* | ergo *kg* seiungitur *ke* |
| 357, Fig. | Über der Geraden *ab* (rechts oben) muß stehen: radix 96, statt radix 6. In den beiden Figuren 55 und 56 sind diese Nummern zu vertauschen. | |
| 358, Fig. | Unter den Geraden *az* und *bz* (rechts oben) muß stehen: radice eius accepta. In den beiden Figuren 57 und 58 sind diese Nummern zu vertauschen. | |
| 359 | Die beiden Figuren sind mit falschen Zahlen besetzt, es war mir aber unmöglich, herauszufinden, welches die ursprünglichen richtigen gewesen sein mögen. | |
| 360, 8 | adiuncte, sicut secunde | adinvicem, sicut surde |
| — 11 | sequuntur in termino | *sequuntur,* non sunt *in termino* |

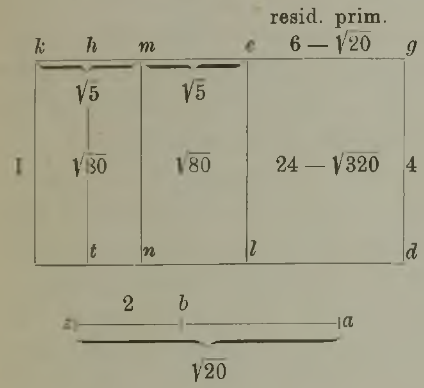
| Seite u. Zeile. | Curtze. | Richtig |
|---|---|---|
| 360, 21 | Huius vero residui est separatio | Huius vero modi residuum est separatio |
| — Fig. | Die Zahlen 92 und 108 sind zu ersetzen durch 108 und 192, statt residuum absolutum soll stehen: residuum bimediale primum; die Figur gehört nämlich zu Theor. LXIX, die Figur zu LXVIII fehlt, das Zahlenbeispiel wäre $\sqrt{10} - \sqrt{8}$ | |
| 361, 24 | *bg* coniuncta sunt rationale | *bg coniuncta* erunt incommunicantia quadrato *ag*, et duo quadrata *ab bg* coniuncta *sunt rationale* |
| — 24 | quadratum *gd* | quadratum *ag* |
| — Fig. | Diese Figur gehört zu Theor. LXXII. | |
| 362, 8 | punctis | principio |
| — 9 | Hier fehlt das Zahlenbeispiel: $\sqrt[4]{12} - \sqrt[4]{3}$ | |
| — 16 | Hier fehlt das Zahlenbeispiel: $\sqrt{\sqrt{48} + \sqrt{24}} - \sqrt{\sqrt{48} - \sqrt{24}}$ | |
| 363, 24 | surda | residua |
| 364, 7 | inde | itidem |
| — 14 | paravimus | pervenimus |
| 365, 2 | cuius in | cuius tota in |
| — 5—6 | ⟨et coniunctam⟩ | (fällt weg) |
| — 6 | surda | secunda |
| 366, 23 | *a* et *bg* signabo, que sit 12 | *a* et *gh* signabo, que sint 2 et 10 |
| 367, Fig. | Die obere Figur ist teilweise unrichtig, sie soll folgende sein: | |

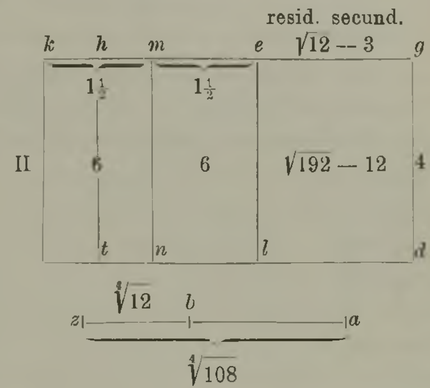


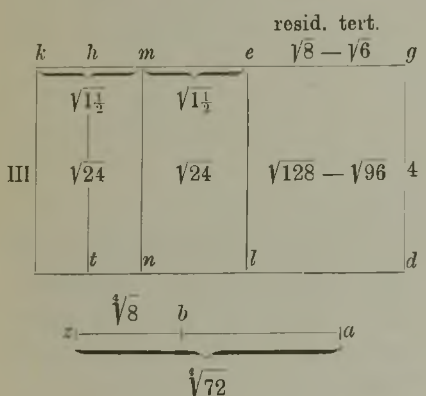

| Seite u. Zeile. | Curtze. | Richtig |
|---|---|---|
| 368, 18 | *eh;* et similiter | *ez;* et sit proportio *de* ad *ez* sicut proportio quadrati *bg* ad quadratum *gh* |
| — Fig. | Über der Linie *ed* ist das *h* links durch *z* zu ersetzen, das *h* rechts fällt weg. | |
| 371, 2 | ⟨radix⟩ 32 | radix 8 |
| — 3 | ipse duo radices 32 | ipse due radices sunt radix 32 |
| — 9—10 | in quadratum, | in quadratum *ml,* |
| — 13—22 | Est ergo . . . . . radix 8 | (fällt weg) |
| — 29—30 | que est 2 et radix 2 | et est 2 sine radice 2 |
| — Fig. | An dieser Figur und den folgenden bis p. 380 fehlen die Zahlen, sie sind vom Leser nach dem berichtigten Texte leicht zu ergänzen. | |

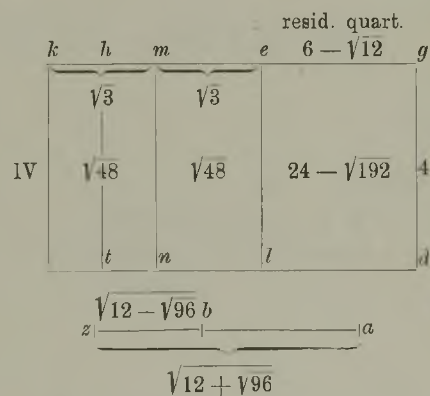
| Seite u. Zeile. | Curtze. | Richtig. |
|---|---|---|
| 372, 13 | equale *bd* | equale *td* |
| — Note | Illa ostendit St'ius | Boncompagni hat: Ita ostendit sensus |
| 373, 13 | *ed* ad *dz*, ergo | *ed* ad *dz*, sed proportio *az* ad *ed* est sicut proportio superficiei *bz* ad superficiem *dh*, et proportio *ed* ad *dz* est sicut proportio superficiei *dh* ad superficiem *dt*, *ergo* |
| — 23 | ergo *bz* | ergo *fz* |
| — 23 | gnomoni. Erit | *gnomoni;* sed *bz* equatur *kl*, et *fz* equatur gnomoni, ergo *bg* est equalis *lm*, sed quadratum *sq* est equale *lm*, *erit* |
| 374, 22 | quadrati radix 108 | quadrati *kl* radix 108 |
| 375, 13 | ergo *dt* | ergo *dh* |
| — 29 | *gd* | *ge* |
| — 31 | area earum | area duarum |
| 376, 1 | sit radix 72 | quadrate *kl* sit radix 72 |
| — 20 | 48 | 12 |
| — 21 | 48 | 12 |
| 377, 3 | quadrati est | quadrati *kl* est |
| 378, 16 | 92 | 192 |
| — 16 | et ⟨area quadrati est⟩ 8 | (fällt weg) |
| — Fig. | An der unteren linken Ecke des Rechteckes muß *b* stehen, ebenso p. 379. | |
| 380, 3 | superficiei | superficiei totius |
| — 4 | radix 180 | radix 320 |
| — 4 | quadrati sit | quadrati *kl* sit |
| — 23 | numerationem | Boncompagni hat: unum genus, ich glaube, daß es heißen muß: mutagenibem (vergl. p. 321) |
| 381 | In dieser Tafel müssen in den Rubriken „Radices" überall die auf „Radix" folgenden Worte im Genetiv stehen, also z. B. *Radix Binomii primi* statt *Radix Binomium primum;* es sind eben die in den Rubriken „Coniuncta" und „Residua" stehenden Irrationallinien die Quadratwurzeln derjenigen, die in den Rubriken „Radices" stehen. | |
| 382, 13 | est residuum | est residuum secundum |
| — 25 | inde | itidem |
| 383, 12 | residuum quartum | residuum quintum |

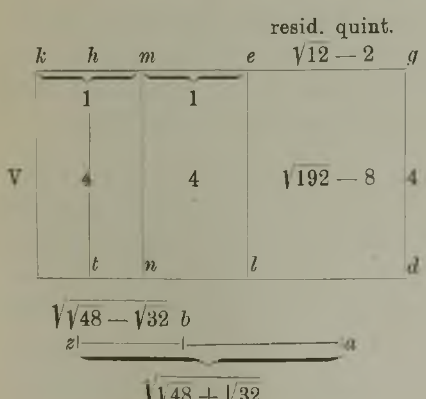
Die Figuren zu den sechs Sätzen (p. 382 und 383), welche nachweisen sollen, daß die sechs Residua die Quadrate der sechs ersten Irrationalapotomeen sind, sind voll von Fehlern in bezug auf die eingeschriebenen Zahlen, unvollständig und nicht in richtiger Reihenfolge, es ist deshalb nötig, dieselben hier richtig wiederzugeben:

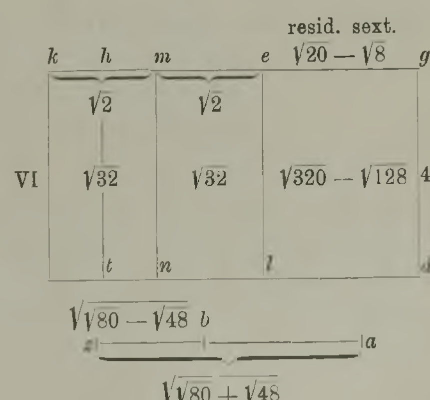


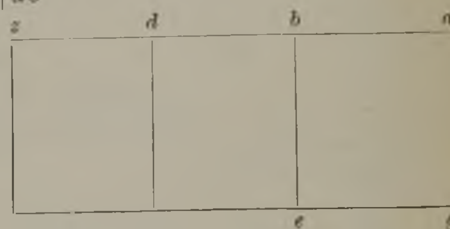



Wir geben hier die Erklärung zu Fig. I, zu den übrigen ist sie dieser analog. Man legt an die rationale Seite $gd = 4$ das Rechteck $kd$ an, das gleich $az^2 + bz^2 = 20 + 4 = 24$, also ist $gk = 6$; dann subtrahiert man von diesem Rechteck die beiden gleichen Rechtecke $kn$ und $ml$, die zusamen $= 2az \,.\, bz = 2\sqrt{80}$ sind, so ist das übrig bleibende Rechteck $ed = az^2 + bz^2 - 2az \,.\, bz = (az - bz)^2 = 24 - \sqrt{320}$, und da $gd = 4$ ist, so ist $eg = 6 - \sqrt{20}$, und dies ist ein residuum primum (erste Apotome). — Wäre $gd = 1$, so wäre $eg$ selbst $= (az - bz)^2 = (\sqrt{20} - 2)^2$. Die Linie $ht$ teilt das ganze Rechteck so, daß $gt = az^2 = 20$, und $kt = bz^2 = 4$ ist.

| Seite u. Zeile. | CURTZE. | Richtig. |
|---|---|---|
| 384, 19 | toto | toti |
| 385, 20 | conveniret | eveniret |
| — 25 | *de* (bis) | *dz* |
| — 25 | *be* | *de* |
| — Fig. | Die richtige Figur ist: |   |
| 386, 2 | *de* | *dz* |
| — 9 | est itaque radix | est itaque *bd* radix |
| — 12—13 | Deinde multiplicabo . . . . . . . surda. | Dies ist ganz unverständlich, es sollte wohl heißen: deinde multiplicabo illud in 48, et est radix radicis radicis radicis illius quod provenerit surda *dz*. |
| 386, Fig. | Die beiden Figuren sind mit denselben Buchstaben zu bezeichnen, wie die vorhergehende, an die Seite *ag* ist 2 zu schreiben, im mittleren Rechteck ist bei beiden das Wort „radicis“ einmal, im vorderen zweimal hinzuzufügen. | |

Zum Schlusse sehen wir uns noch zu folgender Bemerkung veranlaßt: Der letzte Satz des Kommentars (p 385—386) bezieht sich auf Satz 115 bei EUKLIDES (Edit. HEIBERG) und nicht, wie CURTZE in Note 1, p. 385 andeutet, auf das Porisma p. 352/353. EUKLIDES will nämlich am Schlusse des 10. Buches noch darauf hinweisen, daß es noch höhere Mediallinien gebe, als die von ihm im 21. Satze des 10. Buches definierte und dann durch das ganze Buch hin benutzte erste Mediallinie $\sqrt{m\sqrt{n}}$;

konstruiert man nämlich ein Rechteck, dessen eine Seite $ab$ (Fig. p. 385) gleich dieser Mediallinie, die andere Seite $ag$ gleich der rationalen Linie $p$ ist, so ist die Linie, die dieses Rechteck potenziert $= \sqrt{p\sqrt{m\sqrt{n}}} = \sqrt[8]{nm^2p^4}$; dies ist eine zweite Mediallinie, sie sei in der Figur $= bd$; dann ist die Linie, die das Rechteck $de$ potenziert $= \sqrt{p\sqrt{p\sqrt{m\sqrt{n}}}} = \sqrt[16]{nm^2p^{12}}$ eine dritte Mediallinie, sie sei in der Figur $dz$; so könnte man bis ins Unendliche weiter gehen. Wir sind daher der Ansicht, daß dieser Satz 115 entgegen der Meinung von Heiberg (*Euclidis Elementa*, Vol. V, Proleg. LXXXV) wohl von Euklides herstamme, in bezug auf die Sätze 112—114 können wir dagegen mit Heiberg übereinstimmen; diese unsere Ansicht scheint auch Naṣîr ed-Dîn el-Tûsî gehabt zu haben, indem er in seiner Euklid-Rezension die Sätze 112—114 weggelassen, dagegen 115 aufgenommen hat. Freilich sind jene fraglichen Sätze nicht so weit von dem Gegenstande abgelegen, der in den vorhergehenden Sätzen des 10. Buches behandelt wird, wie dies Heiberg (l. c.) darstellt; in 114 wird der Satz bewiesen, daß $\left(\sqrt{n} + \sqrt{m}\right)\left(\sqrt{\frac{np^2}{q^2}} - \sqrt{\frac{mp^2}{q^2}}\right)$ rational sei.

# Über zwei angebliche mathematische Schulen im christlichen Mittelalter.

Von G. Eneström in Stockholm.

„Wir haben das Ende des XIV. Jahrhunderts erreicht. Überblicken wir dasselbe mit nach rückwärts gewandten Augen, so sind es etwa folgende Punkte, die vorzugsweise sich bemerkbar machen. Die beiden Schulen, deren Vorhandensein im XIII. Jahrhundert wir erkannten, sind noch immer getrennt vorhanden. Die geistliche Schule der Universitäten, an Zahl und Bedeutung der ihr angehörenden Persönlichkeiten überwiegend, bringt in England einen Bradwardinus, in Frankreich einen Dominicus de Clavasio, einen Oresme hervor, schickt Sendboten einer künftigen Größe nach Deutschland. Die weltliche oder kaufmännische Schule bleibt noch in Italien haften, ohne durch diese Einengung des Bodens ganz zu verkümmern. Sie zählt auch Persönlichkeiten von geistiger Bedeutung, wenn auch keineswegs dem Gründer der Schule, Leonard von Pisa, nur annähernd gleichzustellen.“

So äußert sich Herr Cantor an einer Stelle seiner *Vorlesungen*,[1]) und aus einigen anderen Stellen bekommt man nähere Auskunft über diese zwei Schulen, deren Vorhandensein meines Wissens vor Herrn Cantor unbekannt war.[2]) Der Gründer der ersten Schule war nach Herrn Cantor Jordanus Nemorarius[3]), und ein Vertreter dieser Schule war auch Sacrobosco.[4]) Als Gründer der zweiten Schule ist schon in dem oben zitierten Passus Leonardo Pisano genannt, und derselben Schule gehörte

1) M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* 2², Leipzig 1900, S. 166.

2) Wenn Libri (*Histoire des sciences mathématiques en Italie* 2, Paris 1838, S. 44) behauptet, daß Leonardo „créa en Toscane une école florissante“, so ist dies kaum mehr als eine Redeweise. Herr Cantor macht selbst a. a. O. S. 55 darauf aufmerksam, daß für Italien eine Nachwirkung Leonardos sich nicht eher als mehr als 200 Jahre nach seinem Tode mit Deutlichkeit erkennen läßt.

3) M. Cantor, a. a. O. S. 86, 205.

4) M. Cantor, a. a. O. S. 205.

nach Herrn CANTOR[1]) der unbekannte Verfasser eines von LIBRI[2]) teilweise veröffentlichten, angeblich aus dem 14. Jahrhundert herstammenden algebraischen Traktates in italienischer Sprache.

Daß man im allgemeinen, wenn es mehrere Universitäten gibt, die mathematischen Unterricht erteilen, von einer mathematischen Schule der Universitäten reden kann, will ich nicht verneinen. Es ist ja klar, daß der Universitätsunterricht fast notwendigerweise eine mehr oder weniger feste Form annehmen muß, deren allgemeine Züge durch die Satzungen bestimmt werden, und es kommt oft vor, daß der Unterricht oder die Satzungen einer hervorragenden Universität wenigstens bis zu einem gewissen Grade für die übrigen maßgebend werden Ob dies wirklich für den mathematischen Universitätsunterricht im christlichen Mittelalter gilt, werde ich später untersuchen, aber jedenfalls scheint es mir nicht ganz angebracht, die betreffende Schule „geistlich“ zu nennen. Herr CANTOR macht selbst darauf aufmerksam[3]), daß die Universitäten zwar oft aus Klosterschulen und ähnlichen von Geistlichen geleiteten Anstalten herausgewachsen sind, daß aber dies nicht ihre einzige Entstehungsweise war. Von den angeblichen Vertretern der fraglichen Schule starben freilich BRADWARDIN und ORESME als Bischöfe, aber SACROBOSCO und DOMINICUS DE CLAVASIO waren meines Wissens nicht Geistliche; jener wird allgemein nur Lehrer der Mathematik und Astronomie an der Universität in Paris genannt[4]), und dieser gehörte zuerst der Artistenfakultät, dann der medizinischen Fakultät derselben Universität an[5]).

Nun ist ja möglich, daß Herr CANTOR die Schule geistlich genannt hat, weil seiner Ansicht nach der Ordensgeneral JORDANUS NEMORARIUS ihr Gründer war, aber dann ist die Benennung meines Erachtens noch weniger angebracht. Herr CANTOR geht nämlich von der Voraussetzung aus, daß der *Algorithmus demonstratus* von JORDANUS verfaßt ist, und hebt besonders den Inhalt dieser Schrift als für die Schule kennzeichnend hervor[6]). Aber bekanntlich hat es sich herausgestellt, daß der Verfasser des *Algorithmus demonstratus* höchst wahrscheinlich nicht JORDANUS,

1) M. CANTOR, a. a. O. S. 157, 167.

2) G. LIBRI, *Histoire des sciences mathématiques en Italie* **3**, Paris 1840, S. 302—349.

3) M. CANTOR, a. a. O. S. 54.

4) Über SACROBOSCO vgl. P. TANNERY, L'intermed. d. mathem. **7**, 1900, S. 404—405; **8**, 1901, S. 263—265. — H. BROCARD, L'intermed. d. mathem. **9**, 1902, S. 275—277; **10**, 1903, S. 261—262. An der zuletzt zitierten Stelle erwähnt Herr BROCARD einen Verfasser aus dem Ende des 17. Jahrhunderts, der nachweist, daß man keinen Grund hat, SACROBOSCO als geistlich zu betrachten.

5) Vgl. M. CURTZE, *Über den* DOMINICUS DE CLAVASIO *der „Geometria Culmensis“;* Biblioth. Mathem 1895, S. 107—110.

6) M. CANTOR, a. a. O. S. 84—85.

sondern ein bisher unbekannter „Magister Gernardus" ist[1]), und eigentlich sollte man also diesen als Gründer der Schule der Universitäten betrachten. Nimmt man noch hinzu, daß es bisher nicht ganz sicher gestellt ist, daß der Mathematiker Jordanus Nemorarius wirklich mit dem Ordensgeneral Jordanus Saxo identisch ist, so kann man kaum umhin, die Annahme, daß dieser Ordensgeneral Gründer einer mathematischen Schule der Universitäten im christlichen Mittelalter war, als höchst unsicher oder sogar unwahrscheinlich zu bezeichnen.

Meiner Ansicht nach war Jordanus Nemorarius Vertreter einer Richtung, die ich der Kürze halber die neueuklidische nennen möchte. An einer anderen Stelle[2]) habe ich die *Demonstratio Jordani de algorismo* charakterisiert als einen Versuch, das Euklidische Lehrgebäude unter Bezugnahme auf die arabische Rechenkunst zu ergänzen, und etwas ähnliches könnte man von den zwei Traktaten *De numeris datis* und *De triangulis* sagen. Der erste Traktat kann eine Ergänzung der *Δεδομένα* unter Bezugnahme auf die arabische Algebra genannt werden, und der zweite Traktat hat einen entsprechenden Zweck hinsichtlich gewisser Abschnitte der Euklidischen Planimetrie. Durch seine Schriften hat Jordanus ohne Zweifel einen nicht unbedeutenden Einfluß auf die späteren mittelalterlichen Mathematiker gehabt, aber Tatsachen, die bestätigen, daß er eine wirkliche Schule bildete, habe ich noch nicht entdecken können.

In betreff der Frage, ob es im christlichen Mittelalter eine mathematische Schule der Universitäten gegeben hat, muß ich zuerst hervorheben, daß diese Schule, auch wenn sie existierte, keineswegs eine besonders feste Form hatte; es ist also jedenfalls kaum erlaubt, zu sagen, daß sie in England und Frankreich Vertreter *hervorbrachte* und daß sie Sendboten nach Deutschland *schickte*. Auf dem rechnerischen Gebiete gab es wohl eine solche Schule, und als die ersten Vertreter derselben möchte ich Sacrobosco und „Magister Gernardus" nennen; in einem gewissen Sinne könnte man vielleicht auch Bradwardin und Oresme zu dieser Schule rechnen. Dagegen sehe ich nicht ein, wie man aus dem Inhalte der *Practica geometriae* des Dominicus de Clavasio und der *Geometria Culmensis* folgern kann, daß die Verfasser dieser zwei Schriften der Schule angehörten. Dominicus de Clavasio vertritt ja vielmehr eine praktische Richtung, und der Umstand, daß er ein paar Jahre Lehrer der Pariser Artistenfakultät war, genügt kaum, um zu motivieren, warum Herr Cantor ihn zu der mathematischen Schule der Universitäten gerechnet hat.

---

1) Vgl. P. Duhem, *Sur l'Algorithmus demonstratus;* Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, S. 9–15.

2) G. Eneström, *Über die „Demonstratio Jordani de algorismo";* Biblioth. Mathem. $7_3$, 1906, S. 31–32.

Wenn ich also nur bis zu einem gewissen Grade mit den Ausführungen des Herrn CANTOR in betreff der ersten von ihm angegebenen Schule einverstanden sein kann, so bin ich noch weniger mit ihm einig, wenn es sich um die angebliche kaufmännische Schule handelt. In der Tat muß ich in Abrede stellen, nicht nur, daß LEONARDO PISANO eine solche Schule gegründet, sondern sogar, daß sie nachweislich existiert hat.

So viel ich sehen kann, hat Herr CANTOR die feste Überzeugung, daß LEONARDO Kaufmann[1]) war, und teils hieraus, teils aus dem Umstande, daß der *Liber abaci* Gegenstände behandelt, welche der Kaufmann brauchen mußte oder wenigstens konnte[2]), hat er wohl unmittelbar gefolgert, daß LEONARDO Vertreter einer kaufmännischen mathematischen Schule war. Ich will zunächst untersuchen, ob die erste Voraussetzung dieser Folgerung richtig ist.

Wer zuerst behauptet hat, daß LEONARDO PISANO Kaufmann war, habe ich nicht mit Sicherheit ermitteln können, aber ich bin geneigt anzunehmen, daß die Angabe aus der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts herrührt. Jedenfalls habe ich bei den älteren Verfassern keine Bestätigung derselben auffinden können. So z. B. bemerkt der anonyme Verfasser eines *Libro di praticha darismetricha* aus der ersten Hälfte des 15. Jahrhunderts[3]) „LIONARDO PISANO . . . fu dal suo padre tirato asse, che era scrittore nella ghabella di doghana di bruggia, e quindi in egitto, e chaldea e india navichando, e per alchuno tempo riposandosi usò le schuole loro“. Etwa ein Jahrhundert später schreibt im Jahre 1506 der Pisaner Ser PERIZOLO[4]): „LIONARDO FIBONACCI fue nostro concive, e vivette nelli anni 1203. Vidde tutto el mondo; tornoe a Pisa e recò i numeri arabichi e l'aritmetica, e ne compose un libro . . .“. Hier ist also gar nicht davon die Rede, daß LEONARDO Kaufmann war. Ebenso unbekannt scheint dieser Umstand gewesen zu sein am Ende des 16. Jahrhunderts, als B. BALDI seine Mathematiker-Chronik verfaßte, denn darin wird nur gesagt, daß LEONARDO ein großer Mathematiker war und lange Reisen gemacht hatte.[5]) Die Angabe, daß LEONARDO Kaufmann war, habe ich zuerst bei

1) Auffälligerweise fehlt S. 5 des schon zitierten Bandes der *Vorlesungen*, wo es sich um LEONARDOS Lebensumstände handelt, jede genaue Angabe über seinen Beruf; es wird nur gesagt, daß er viele Handelsreisen vorgenommen hat. Aber an vielen späteren Stellen nennt Herr CANTOR LEONARDO ausdrücklich „Kaufmann“, z. B. S. 85, 86, 154, 156.

2) M. CANTOR, a. a. O. S. 35.

3) B. BONCOMPAGNI, *Intorno ad alcune opere di LEONARDO PISANO*, Roma 1854, S. 128.

4) F. BONAINI, *Memoria unica sincrona di LEONARDO FIBONACCI*, Pisa 1858, S. VI.

5) B. BALDI, *Cronica de' matematici*, Urbino 1707, S. 88—89.

P. Cossali gefunden[1]), und vom Anfange des 19. Jahrhunderts an kommt dieselbe bei den meisten mathematisch-historischen Verfassern vor, die Anlaß gehabt haben, sich mit Leonardos Lebensumständen zu beschäftigen.[2]) Nur bei B. Boncompagni fehlt die Angabe[3]), und in der Tat bin ich überzeugt, daß sie auf einem Mißverständnis beruht. Bis auf unsere Tage war nämlich die einzige Quelle, aus der man authentische Aufschlüsse über Leonardos Lebensumstände bekommen konnte, sein Widmungsschreiben an „Magister Michael Scottus" am Anfange des *Liber abaci*, und in den älteren Abdrücken dieses Schreibens kommt der Ausdruck: „ad que loca negotiationis causa prius ea peragravi" vor[4]); aus diesem Ausdrucke folgerte man nun, daß Leonardos Reisen Handelsreisen waren. Aber in Boncompagnis Ausgabe des *Liber abaci*, die einen besseren Text bietet, lautet der Passus[5]): „ad que loca negotiationis tam postea peragravi", und Leonardo deutet also gar nicht an, daß er als Kaufmann seine Reisen vornahm. Daß er vorzugsweise oder vielleicht ausschließlich Handelsstädte besuchte, ist sehr leicht zu erklären, ohne daß man die willkürliche Annahme, daß er Kaufmann war, gebraucht. Herr Cantor hat selbst hervorgehoben[6]), daß die Stellung des Vaters Leonardos, mochte er auch nur Schreiber („publicus scriba") heißen, keineswegs eine untergeordnete gewesen ist, und daß es sich in betreff der pisanischen Faktoreien zuweilen um ganz wichtige Sachen handelte, z. B. um den Abschluß neuer Verträge. Es ist darum sehr wohl möglich, daß Leonardo, der Sohn des hohen Zollbeamten in Bugia, seine Reisen im Auftrage seiner Vaterstadt vornahm. Es ist ebenso möglich, daß Leonardo gerade die „loca negotiationis" besuchte, weil sein Vater dort Bekannte hatte,

1) Siehe P. Cossali, *Scritti inediti pubblicati da B. Boncompagni*, Roma 1857, S. 1: „colà chiamollo il padre per procurargli pane nel servigio del commercio", vgl. S. 343: „il necessario commerciale tragitto dei mari". Über eine ähnliche Äußerung von G. Grimaldi (*Memorie istoriche di più uomini illustri Pisani* 1 [1790], S. 163) siehe B. Boncompagni, *Della vita e delle opere di Leonardo Pisano*, Roma 1852, S. 72. — Dagegen habe ich die Angabe, daß Leonardo Kaufmann war, nicht in Cossalis Arbeit: *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' algebra* (Parma 1797—1799) auffinden können.

2) Siehe z. B. Ch. Bossut, *Essai sur l'histoire générale des mathématiques* 1, Paris 1802, S. 237 („un riche négociant de Pise, appelé Léonard"). — G. B. Guglielmini, *Elogio di Lionardo Pisano*, Bologna 1813, S. 7 („Non si ha tosto il Mercatante afferato il Porto"). — Libri, a. a. O. 2, S. 20 („c'est à un marchand de Pise, Léonard Fibonacci, que nous devons la connaissance de l'algèbre").

3) Siehe B. Boncompagni, *Della vita e delle opere di Leonardo Pisano*, S. 5—24. — Über den Ausdruck „per cagione di traffico" (S. 6) siehe weiter unten S. 257.

4) Siehe z. B. Libri, a. a. O. 2, S. 288.

5) *Scritti di Leonardo Pisano, pubblicati da B. Boncompagni* 1, Roma 1857, S. 1.

6) M. Cantor, a. a. O. S. 4—5.

die dem Sohne die Bekanntschaft mit den arabischen und griechischen Gelehrten vermitteln konnten. Aber auch wenn man annimmt, daß der ältere Text „que loca negotiationis causa peragravi“ richtig ist, so folgt daraus gar nicht mit Sicherheit, daß LEONARDO Kaufmann war. BONCOMPAGNI übersetzt[1]) „negotiationis causa“ mit „per cagione di traffico“, und man kann sehr wohl sagen, daß ein Beamter, der Reisen macht, um neue Handelsverträge abzuschließen, „per cagione di traffico“ reist. Durch den älteren Text wird also LEONARDOs kaufmännische Tätigkeit bestätigt, nur unter der Voraussetzung, daß man anderweitig etwas hierüber erfahren hat. Nimmt man jetzt hinzu, daß LEONARDO, so weit bekannt ist, an keiner Stelle seiner Schriften auch nur andeutet, daß er Kaufmann war, so darf man wohl behaupten, daß die gewöhnliche Angabe auf einem Mißverständnisse beruht.

Außer dem erwähnten Widmungsschreiben gibt es meines Wissens nur zwei authentische Aktenstücke, woraus man etwas über LEONARDOs Lebensumstände erfährt. Das erste Aktenstück rührt aus dem Jahre 1226 her und ist von G. MILANESI im Jahre 1867 veröffentlicht worden[2]), gibt aber keine Auskunft über LEONARDOs Beruf. Das zweite Aktenstück, ein wahrscheinlich um 1241 ausgefertigtes fiskalisches Dokument, ist von F. BONAINI im Jahre 1858 zum Abdruck gebracht[3]), und dort heißt es:

> Considerantes nostre civitatis et civium honorem atque profectum, qui eis, tam per doctrinam quam per sedula obsequia discreti et sapientis viri magistri LEONARDI BIGOLLI, in abbacandis estimationibus et rationibus civitatis eiusque officialium et aliis quoties expedit, conferuntur; ut eidem LEONARDO, merito dilectionis et gratie, et scientie sue prerogativa in recompensationem laboris sui quem substinet in audiendis et consolidandis estimationibus et rationibus supradictis . . . .

Aber den Mann, der „sapiens vir magister LEONARDO BIGOLLO“ genannt und als hervorragender Mathematiker bezeichnet wird, hat man gar keinen Anlaß zum Kaufmann zu machen. Was hier mit „obsequia in abbacandis estimationibus et rationibus“ gemeint wurde, ist mir nicht näher bekannt, aber die Worte scheinen mir darauf hinzudeuten, daß LEONARDO als Kassenkontrolleur der Stadt Pisa tätig gewesen ist.[4])

1) B. BONCOMPAGNI, *Della vita e delle opere di LEONARDO PISANO,* S. 6.

2) G. MILANESI, *Documento inedito e sconosciuto intorno a LIONARDO FIBONACCI* Roma 1867, S. 9—10.

3) F. BONAINI, a. a. O. S. VII—VIII.

4) Nach M. LAZZARINI (*LEONARDO FIBONACCI, le sue opere e la sua famiglia;* Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 7, 1904, S. 5) sollte aus den zitierten Worten hervorgehen, daß LEONARDO „contabile“ (also Rechnungsführer) der Stadt Pisa war.

Es ist ja denkbar, daß Leonardo sich als Jüngling der kaufmännischen Tätigkeit gewidmet hatte, und erst nach der Rückkehr von seinen Reisen ein „sapiens magister" wurde, aber auch in diesem Falle wäre es meiner Ansicht nach unrichtig, ihn Kaufmann zu nennen; mit ebenso gutem Rechte könnte man in einer Geschichte der Astronomie von den Entdeckungen des „Handelslehrlings" F. W. Bessel sprechen.

Dagegen ist es ohne Zweifel richtig, daß Leonardo in seinem *Liber abaci* Gegenstände behandelte, „welche der Kaufmann mitten im Verkehre des Lebens brauchen konnte, mitunter brauchen mußte"[1]); so z. B. bezieht sich der 9. Abschnitt auf Umtausch von Waren und der 10. Abschnitt auf Genossenschaft unter Gesellschaftern. Aber aus diesem Umstande darf man weder schließen, daß Leonardo Kaufmann war, noch daß er in erster Linie für Kaufleute schrieb. Bekanntlich haben viele arabische und jüdische Mathematiker in ihren Schriften Probleme dieser Art behandelt, ohne daß man daraus gefolgert hat, diese Schriften seien von Kaufmännern oder für Kaufmänner verfaßt. Es ist auch längst darauf hingewiesen worden, daß Leonardo seine Vorgänger, z. B. Alkhwarizmi und Alkarkhi ausgiebig benutzt hat[2]), und es ist darum leicht erklärlich, daß seine außerordentlich große Sammlung von Problemen viele kaufmännische Gegenstände behandelt. Auch nach Leonardo hat es viele Arbeiten gegeben, worin eine Menge von ähnlichen Problemen vorkommen, obgleich ihre Verfasser nachweislich nichts mit Handel zu tun gehabt haben, und ebensowenig einer kaufmännischen Schule angehört haben; als Beispiele nenne ich L. Paciuolo und N. Tartaglia. Übrigens muß wohl der Leser von Leonardos Schriften ziemlich bald zu der Einsicht gelangen, daß diese nicht in erster Linie einen praktischen Zweck verfolgen[3]). Auch in solchen Fällen, in denen es sich um kaufmännische *Gegenstände* handelt, ist die *Behandlung* gar nicht kaufmännisch. Als Beleg erlaube ich mir auf die Probleme über Vögelkäufe hinzuweisen. Ein Mann kauft 30 Vögel verschiedener Gattung um 30 Geldstücke, nämlich Rebhühner, Tauben und Sperlinge; ein Rebhuhn kostet 3, eine Taube 2, ein Sperling $\frac{1}{2}$ Geldstück. Wie viele Vögel jeder Gattung hat er gekauft?[4]) Ein andrer Mann soll auch für 30 Geldstücke 30 Vögel kaufen, nämlich zahme und wilde Tauben sowie Sperlinge; die zahme Taube kostet 2, die wilde Taube $\frac{1}{2}$, der Sperling $\frac{1}{4}$ Geldstück. Wie viele Vögel jeder Gattung soll dieser Mann kaufen?[5]) Ich bin überzeugt, daß der Kaufmann am

1) M. Cantor, a. a. O. S. 35.

2) Vgl. z. B. F. Woepcke, *Extrait du Fakhri*, Paris 1853, S. 24—29.

3) Vgl. was Herr Cantor selbst a. a. O. S. 36 in betreff der *Practica geometriae* sagt.

4) *Scritti di Leonardo Pisano* 1, S. 165.

5) *Scritti di Leonardo Pisano pubblicati da B. Boncompagni* 2, Roma 1862, S. 247.

Anfange des 13. Jahrhunderts ebensowenig als der Kaufmann am Anfange des 20. Jahrhunderts die Lösung solcher Fragen im Verkehre des Lebens anwenden konnte.

Als Vertreter der angeblich von LEONARDO PISANO gegründeten kaufmännischen mathematischen Schule nennt Herr CANTOR, wie ich schon erwähnt habe, den Verfasser eines von LIBRI teilweise veröffentlichten algebraischen Traktates. Die Handschrift dieses Traktates soll nach LIBRI aus dem 14. Jahrhundert herrühren, aber die LIBRIsche Angabe ist gar nicht belegt; meiner Ansicht nach kann man eher vermuten, daß der Traktat aus dem Ende des 15 Jahrhunderts stammt[1]), also aus einer Zeit, da es wohl nicht mehr eine kaufmännische mathematische Schule gab[2]). Übrigens erinnert der Inhalt der von LIBRI veröffentlichen Auszüge kaum an die Kaufleute[3]), und der einzige Grund, warum man den Traktat zur kaufmännischen Richtung rechnen könnte, ist eine Stelle, wo es nach LIBRI heißt[4]): „Essendo io pregato di dovere scrivere alcune cose di abaco necessarie a' mercatanti, da tale che i preghi suoi mi sono comandamenti, non come prosuntuoso ma per ubbidire mi sforzero . . .“. Aber dieser Grund ist sehr schwach, solange man nicht weiß, welche Gegenstände durch den Ausdruck „alcune cose di abaco necessarie a' mercatanti“ bezeichnet werden.

Sonst habe ich in den *Vorlesungen* des Herrn CANTOR nur einen Mathematiker auffinden können, der als Vertreter der kaufmännischen Schule betrachtet werden kann, nämlich PAOLO DAGOMARI, der als Verfasser eines für Kaufleute verfaßten Traktates erwähnt wird[5]). Aber von diesem Traktat sagt LIBRI an der von Herrn CANTOR zitierten Stelle nicht, daß er für Kaufleute geschrieben ist, sondern „qu'il est *aussi* écrit pour les négocians“ und aus dem, was LIBRI sonst mitteilt, z. B. daß der Traktat „la solution de plusieurs problèmes assez difficiles d'analyse indéterminée“ enthält, geht es nicht hervor, daß der Traktat *in erster Linie* für Kaufleute verfaßt war, und also auch nicht, daß der Verfasser desselben Vertreter einer kaufmännischen Schule war.

Aus dem vorangehenden dürfte klar sein, daß die Annahme einer kaufmännischen mathematischen Schule des christlichen Mittelalters zum

1) Vgl. G. ENESTRÖM, *Remarque sur l'époque où le mot „plus“ a été introduit comme terme d'addition;* Biblioth. Mathem. 1899, S. 105—106.

2) Daß es am Ende des 15. Jahrhunderts Rechenbücher gab, die für junge Leute, welche dem Kaufmannsstande sich widmen wollten (vgl. CANTOR, a. a. O. S. 303), bestimmt waren, beweist natürlich nicht, daß damals eine kaufmännische mathematische Schule vorhanden war.

3) Vgl. M. CANTOR, a. a. O. S. 158.

4) LIBRI, a. a. O. 2, S 214.

5) M. CANTOR, a. a. O. S. 164.

mindesten auf sehr schwachen Füßen steht, aber damit ist noch nicht gesagt, daß es nicht im christlichen Mittelalter eine Schule gab, die einen entschiedenen Gegensatz zu der Schule der Universitäten bildete. In der Tat glaubt Herr Cantor einen solchen Gegensatz bei Leonardo Pisano entdeckt zu haben, und wenn dies wirklich zutrifft, so ist es ja nur der Name der von Leonardo vertretenen Richtung, der modifiziert werden soll.

Nach Herrn Cantor gehört der Gegensatz zwischen Leonardo Pisano und der Schule der Universitäten zumeist den rechnenden Abschnitten an; ich drucke hier die Begründung des Herrn Cantor[1]) ab, indem ich nur bemerke, daß „Jordanus" den Verfasser der *Algorithmus demonstratus* bedeutet, so daß man eigentlich überall, wo Jordanus steht, „Magister Gernardus" lesen soll:

> Jordanus führt Verdoppelung und Halbierung als besondere Rechnungsarten an, Leonardo kennt sie nicht als solche. Leonardo lehrt die Neunerprobe, für Jordanus ist sie nicht vorhanden. Jordanus besitzt eine Art complementärer Multiplication (ob freilich aus arabischer Quelle bezweifeln wir), bei Leonardo nichts Ähnliches . . .[2]) Fast am Auffallendsten ist der Gegensatz beider Schriftsteller, wo es sich um die Ausziehung von Kubikwurzeln handelt, Jordanus lehrt dieselbe, soweit sie ganzzahlig möglich ist, genau in der gleichen unbefangenen Weise wie vorher die Quadratwurzel. Leonardo rühmt sich der Erfindung der Kubikwurzelausziehung und lehrt dabei eine Näherungsmethode, welche es gestattet, den rohesten ganzzahligen Annäherungen noch Brüche beizufügen.

Meines Erachtens genügt diese Begründung kaum, um „schroffe Gegensätze"[3]) zwischen der Schule der Universitäten und Leonardo nachzuweisen. Daß bei diesem weder Verdoppelung und Halbierung noch komplementäre Multiplikation vorkommt, scheint mir nur zu beweisen, daß Leonardo diese Rechnungsarten als unnötig betrachtete, während auf der anderen Seite die Schule der Universitäten dieselben ohne weiteres aufnahm, nur aus dem Grunde, weil sie in älteren lateinischen Algorismusschriften vorkamen. Wenig wichtig scheint mir auch der Umstand, daß Leonardo aber nicht die Schule der Universitäten die Neunerprobe lehrte;

1) M. Cantor, a. a. O. S. 84—85.

2) Ich habe hier den Passus: „Leonardo gebraucht für das Quadrat der unbekannten Größe das Wort *census*, bei Jordanus ist es nicht zu finden, sondern nur *quadratus*" ausgeschlossen, der sich wirklich auf Jordanus und nicht auf Meister Gernardus bezieht. Der von Herrn Cantor bemerkte Unterschied in betreff der Terminologie hängt wohl damit zusammen, daß Jordanus eine Richtung vertrat, die ich oben „neueuklidisch" genannt habe, während Leonardo in arabischer Schulung zum Mathematiker geworden war.

3) Vgl. M. Cantor, a. a. O. S. 84 Z. 8—9 v. u.

im Vorübergehen hebe ich hervor, daß die Sätze, die der Neunerprobe zugrunde liegen, in der „Demonstratio JORDANI de algorismo" vorkommen [1]), so daß die Neunerprobe eigentlich nicht für LEONARDO kennzeichnend war. Was zuletzt die Kubikwurzelausziehung betrifft, so kann ja der Umstand, daß die von LEONARDO wohl zum Teil den Arabern [2]) entnommene Näherungsmethode nicht bei SACROBOSCO oder Meister GERNARDUS vorkommt, darauf beruhen, daß diese die Rechnung mit ganzen Zahlen besonders behandelten, und dabei nicht die Kenntnis der Brüche voraussetzen wollten.

Auf der anderen Seite ist es ohne Zweifel richtig, daß LEONARDO PISANO eine Richtung vertrat, die von der der meisten Mathematiker im christlichen Mittelalter verschieden war, und der Grund dazu ist sehr leicht aufzufinden. Auf seinen Reisen bekam LEONARDO Gelegenheit, mit dem damaligen Stand der arabischen Mathematik bekannt zu werden, während die Mathematiker, die nach Herrn CANTOR der Schule der Universitäten angehörten, ihre Kenntnisse der arabischen Mathematik aus älteren Übersetzungen oder Bearbeitungen entnehmen mußten. Am deutlichsten zeigt sich wohl der Gegensatz auf dem zahlentheoretischen Gebiete, aber auch in betreff der Algebra scheint mir dieser Gegensatz nachgewiesen werden zu können. Weniger wichtig ist dagegen meines Erachtens das bei LEONARDO eigentümliche, wenn es sich um die rechnerischen und geometrischen Gebiete handelt. In bezug hierauf verdient indessen hervorgehoben zu werden, daß LEONARDO besonderes Gewicht auf die praktische Arithmetik gelegt hat, während sich die Algorithmiker des Mittelalters sonst mit diesem Gegenstande weniger beschäftigten.

Übrigens gibt es auch einen anderen Umstand, der dazu beiträgt, die Gegensätze zwischen LEONARDO und den anderen Mathematikern des christlichen Mittelalters besonders ersichtlich zu machen. Der Zweck, den LEONARDO durch seine zwei Hauptwerke verfolgte, war offenbar, eine Enzyklopädie der Mathematik zu bearbeiten, während z. B. SACROBOSCO, BRADWARDIN und ORESME für einen ganz anderen Zweck literarisch tätig waren. Dadurch erklärt es sich, warum in vielen Fällen der Stoff bei LEONARDO von dem der anderen so verschieden ist.

Zum Schluß erlaube ich mir, die hauptsächlichsten Resultate der vorangehenden Untersuchung auf folgende Weise zusammenzufassen:

1. Man kann freilich von einer mathematischen Schule der Universitäten im christlichen Mittelalter sprechen, aber es ist kaum möglich, diese Schule

1) Siehe G. ENESTRÖM, *Über die „Demonstratio JORDANI de algorismo"*; Biblioth. Mathem. $7_3$, 1906, S. 32.

2) Vgl. H. SUTER, *Über das Rechenbuch des ALI BEN AHMED EL-NASAWI*; Biblioth. Mathem. $7_3$, 1906, S 117.

näher zu charakterisieren, sofern man sich nicht auf das rechnerische Gebiet beschränkt

2. Es gab im christlichen Mittelalter keine kaufmännische mathematische Schule. Der angebliche Gründer derselben, Leonardo Pisano, war nicht Kaufmann und hat auch nicht besonders für Kaufleute geschrieben.

3. Leonardo Pisano vertrat eine besondere mathematische Richtung auf Grund seiner eingehenden Bekanntschaft mit dem Stand der arabischen Mathematik am Ende des 12. Jahrhunderts, hat aber keine wirklichen Nachfolger im christlichen Mittelalter gehabt.

# Die geometrische Darstellung imaginärer Größen bei Wallis.

Von G. Eneström in Stockholm.

Es ist eine wohlbekannte Sache, daß sich Wallis in seiner Algebra mit der Versinnlichung imaginärer Lösungen von Gleichungen zweiten Grades beschäftigt hat, und zwar in den vier Kapiteln 66–69[1]), die die Überschriften tragen: „Of negative squares, and their imaginary roots in algebra"; „the same exemplified in geometry"; „the geometrical construction accommodated thereunto"; „other geometrical constructions thereunto relating". Dagegen scheint es fast, als ob kein Historiker der Mathematik sich der Mühe unterzogen hätte, diese vier Kapitel wirklich durchzuarbeiten. Freilich haben die Herren I. Timtchenko[2]) (1892) und W. W. Beman[3]) (1897) ziemlich ausführliche Auszüge aus diesen Kapiteln veröffentlicht, aber in den Auszügen fehlen die Figuren und Erläuterungen sind nicht hinzugefügt, so daß es kaum möglich ist, daraus auszufinden, inwieweit es Wallis wirklich geglückt ist, imaginäre Größen geometrisch darzustellen. Was man aus den Auszügen ersieht, ist eigentlich nur, daß Wallis die reellen Wurzeln einer quadratischen Gleichung durch Punkte *auf* einer gewissen Gerade, die imaginären Wurzeln dagegen durch Punkte *außerhalb* der Gerade darstellte, und daß er sich dabei eines Verfahrens bediente, das an Addition von Vektoren erinnert. Noch weniger Auskunft über die Fragen bringen die kurzen Bemerkungen, die ich in anderen mathematisch-historischen Arbeiten gefunden habe[4]).

1) J. Wallis, *A treatise of algebra both historical and practical*, London 1685, S. 264—273. — J. Wallis, *Opera mathematica* II, Oxford 1693, S. 286—295.

2) **И. Тимченко,** Основанія теорія аналитическихъ функцій. 1. Историческія свѣдѣнія о развитіи понятій и методовъ лежащихъ въ основаніи теоріи аналитическихъ функцій. Томъ 1. Записки математическаго отдѣленія новороссійскаго общества естествоиспытателей **12**, Одесса 1892, S. 167—170.

3) W. W. Beman, *A chapter in the history of mathematics;* Proceedings of the American association for the advancement of science **46**, 1897, S. 35—36; vgl die Übersetzung in L'enseignement mathém. **1**, 1899, S. 164—167.

4) Siehe z. B. D. E Smith, *History of modern mathematics* in „Higher mathematics", New York 1896, S. 515: „The idea of the graphic representation of complex

Wie schon gesagt, behandelt Wallis die Versinnlichung imaginärer Größen in den 66.—69. Kapiteln, aber das 66. Kapitel bezieht sich eigentlich nicht auf die geometrische Darstellung solcher Größen, sondern darin wird nur bemerkt, daß $\sqrt{-bc}$ als die mittlere Proportionale zwischen $-b$ und $c$ aufgefaßt werden kann. Am Anfange des 67. Kapitels versinnlicht Wallis geometrisch eine solche mittlere Proportionale, indem er vom Punkte $x = -b$ eine Tangente nach dem Kreise zieht, dessen Mittelpunkt auf der X-Achse liegt und der die Achse in den Punkten $x = 0$, $x = c - b$ schneidet. Diese Tangente macht offenbar mit der X-Achse einen Winkel $=$ arc sin $\frac{c-b}{c+b}$ und ihre Länge ist $\sqrt{bc}$. Indessen ist diese Versinnlichung[1]) von wenig Interesse, denn teils ersieht man daraus nicht, wie eine imaginäre Größe von der Form $a + bi$ konstruiert werden soll, teils folgt aus der Konstruktion, daß $\sqrt{-1}$ *jeden* Punkt auf der Peripherie eines Kreises mit dem Halbmesser 1 darstellen kann, mit Ausnahme der zwei Schnittpunkte des Kreises und der X-Achse. Man hat nämlich für jedes $k$ identisch $1 = k \cdot \frac{1}{k}$, und man kann folglich nach dem Wallisschen Verfahren $\sqrt{-1}$ so konstruieren, daß man vom Punkte $x = -\frac{1}{k}$ aus eine Gerade zieht, die mit der X-Achse den Winkel

arc sin $\dfrac{k - \frac{1}{k}}{k + \frac{1}{k}}$ macht, und auf dieser Gerade eine Strecke $= 1$ absetzt.

Hierbei hat man aber keinen Anlaß, irgend einen besonderen Wert von $k$ vorzuziehen.

Viel interessanter sind die folgenden Absätze des 67. Kapitels, wo Wallis versucht, eine Größe von der Form $a + bi$ geometrisch darzu-

---

numbers had appeared, however, as early as 1685, in Wallis's De Algebra tractatus" (vgl. unten S. 269 Fußnote 1). — *Essai sur la représentation analytique de la direction par Caspar Wessel. Traduction,* Copenhagne 1897, S. III: „Déjà vers la fin du 17e siècle, Wallis a essayé de donner aux nombres imaginaires une signification réelle". Dagegen behauptet Herr M. Cantor noch in der zweiten Auflage seiner *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (3, Leipzig 1901, S. 726), daß H. Kühn (geboren 1690) der erste gewesen ist, der einen Versuch machte, die imaginären Zahlen zu versinnlichen, was ja bedeuten muß, daß Wallis nach der Ansicht des Herrn Cantor nicht einmal einen Versuch in dieser Hinsicht gemacht hat. Die Erklärung dieses auffälligen Umstandes bietet wohl eine Bemerkung auf S. 728 des zitierten Bandes der *Vorlesungen,* woraus hervorzugehen scheint, daß Herr Cantor nur das 66. Kapitel der Wallisschen Algebra gelesen hat.

1) Vgl. hierüber A. Macfarlane, *The imaginary of algebra;* Proceedings of the American association for the advancement of science 41, 1892, S. 38.

stellen, und ich gebe zuerst die wichtigsten Stellen derselben wörtlich wieder. [1])

Suppose now (for further Illustration) A Triangle standing [Fig. 1] on the Line $AC$ (of indefinite length;) whose one Leg $AP = 20$ is given; together with (the Angle $PAB$, and consequently) the Height $PC = 12$; and the length of the other Leg $PB = 15$: By which we are to find the length of the Base $AB$.

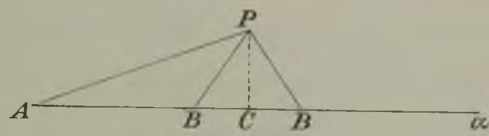



Fig. 1.

— — — — — — — — — — —

But if we shall Suppose, $AP = 20$, $PB = 12$, $PC = 15$, (and therefore $AC = \sqrt{175}$:) When we come to Subtract as before, the Square of $PC$ (225,) out of the Square $PB$ (144,) to find the Square of $BC$, we find that cannot be done without a Negative Remainder, $144 - 225 = -81$.

So that the Square of $BC$ is (indeed) [Fig. 2] the Difference of the Squares of $PB$, $PC$; but a defective Deference; (that of $PC$ proving the greater, which was supposed the Lesser; and the Triangle $PBC$, Rectangled, not as was supposed at $C$, but at $B$:) And therefore $BC = \sqrt{-81}$.

Which gives indeed (as before) a double value of $AB$, $\sqrt{175}$, $+\sqrt{-81}$, and $\sqrt{175}, -\sqrt{-81}$: But such as requires a new Impossibility in Algebra. — — — — — — — — — — — — — — — — — —

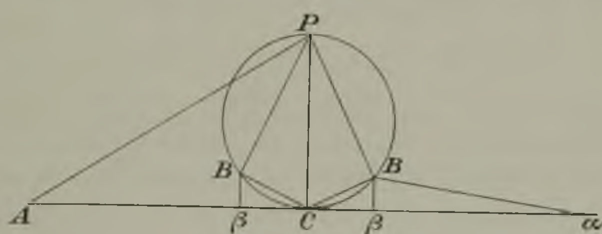



Fig. 2.

Yet are there Two Points designed (out of that Line, but) in the same Plain; to either of which, if we draw the Lines $AB$, $BP$, we have a Triangle; whose Sides $AP$, $PB$ are such as were required: And the Angle $PAC$, and Altitude $PC$, (above $AC$, though not above $AB$,) such as was proposed; And the Difference of Squares of $PB$, $PC$, is that of $CB$.

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

This I have the more largely insisted on, because the Notion (I think) is new; and this, the plainest Declaration that at present I can think of, to explicate what we commonly call the *Imaginary Roots* of Quadratick Equations.

Es handelt sich also hier um die Konstruktion eines Dreiecks, wenn zwei Seiten $m$, $n$ und der Gegenwinkel $\mu$ der Seite $m$ gegeben sind. Berechnet man die Länge der dritten Seite, wird das Resultat

$$n \cos \mu + \sqrt{m^2 - n^2 \sin^2 \mu},$$

und wenn $n \sin \mu > m$, so ist diese dritte Seite imaginär. In diesem Falle konstruiert Wallis die Seite auf folgende Weise. Er nimmt $AC = n \cos \mu$, zieht vom Punkte $C$ aus eine Gerade, die mit der Verlängerung von $AC$ den Winkel $\varphi = \arccos \frac{m}{n \sin \mu}$, bzw. $= \pi - \arccos \frac{m}{n \sin \mu}$ bildet, und

1) Wallis, a. a. O. S. 266–268.

nimmt auf dieser Gerade eine Strecke $BC = \sqrt{n^2 \sin^2 \mu - m^2}$. Dann ist $AB$ die gesuchte Seite. Setzt man jetzt $n \cos \mu = a$, $\sqrt{n^2 \sin^2 \mu - m^2} = b$, so ist die zu konstruierende Größe $a \pm bi$ und $\varphi = \text{arc sin} \sqrt{1 - \frac{m^2}{n^2 \sin^2 \mu}}$ $= \text{arc sin} \frac{b}{a \text{ tg } \mu}$, bzw. $= \pi - \text{arc sin} \frac{b}{a \text{ tg } \mu}$. Folglich ist nach Wallis $AB = a + bi$, wenn $AC = a$, $BC = b$, $\wedge \alpha CB = \text{arc sin} \frac{b}{a \text{ tg } \mu}$; $\mu$ muß $>$ arc tg $\frac{b}{a}$ sein, kann aber sonst nach Belieben gewählt werden.

Es ist offenbar, daß Wallis durch diese Konstruktion wirklich einen Versuch gemacht hat, imaginäre Größen von der Form $a + bi$ vermittelst Addition von Vektoren geometrisch darzustellen, und daß die Darstellung für $\mu = \text{arc tg} \frac{b}{a}$ in die Gausssche übergeht. Dagegen sieht man sofort, daß sein Versuch nicht besonders gelungen ist. Zuerst benutzt er für die Darstellung von $a - bi$ den Winkel $\varphi = \pi - \text{arc sin} \frac{b}{a \text{ tg } \mu}$, so daß im Spezialfalle $\mu = \text{arc tg} \frac{b}{a}$ sowohl $a + bi$ als $a - bi$ durch denselben Punkt repräsentiert werden, was ein großer Übelstand ist. Kaum geringer ist der Übelstand, daß nach dem Wallisschen Verfahren $a + bi + a' + b'i$ im allgemeinen *nicht* $= a + a' + (b + b')i$ wird; ja nicht einmal die Gleichung $a + bi + a + bi = 2a + 2bi$ findet im allgemeinen statt, denn auch wenn $a$ und $b$ gegeben sind, kann $\mu$ und folglich $\varphi$ verschiedene Werte haben. Hierzu kommt noch derselbe Übelstand wie bei der ersten Darstellung, nämlich, daß $a + bi$ jeden nicht reellen Punkt auf der Peripherie des Kreises mit $C$ als Mittelpunkt und $b$ als Radius darstellen kann.

Den letzten Übelstand hat Wallis versucht durch eine dritte Konstruktion zu beseitigen, wo in der Tat $\mu$ den Wert arc tg $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ hat; freilich bezeichnet Wallis nicht diese dritte Konstruktion als einen Spezialfall des zweiten, sondern als eine selbständige Konstruktion. Er äußert sich dabei auf folgende Weise[1]):

The Geometrical Effection, therefore answering to this Equation $aa + ba + \alpha = 0$, (so as to take in both cases at once, Possible and Impossible; that is, whether $\frac{1}{4}\, bb$ be or be not less than $\alpha$;) may be this.

On $AC\alpha = b$, bisected in $C$, erect [Fig. 3, 4] a Perpendicular $CP = \sqrt{\alpha}$. And taking $PB = \frac{1}{2}\, b$ make (on whether Side you please of $CP$,) $PBC$, a Rectangled Triangle. Whose Right Angle will therefore be at $C$ or $B$, according as $PB$ or

1) Wallis, a. a. O. S. 268—269.

$PC$ is bigger; and accordingly, $BC$ a Sine or a Tangent (to the Radius $PB$,) terminated in $PC$.

The Streight Lines $AB$, $B\alpha$ are the

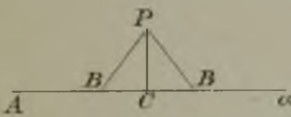



Fig. 3.

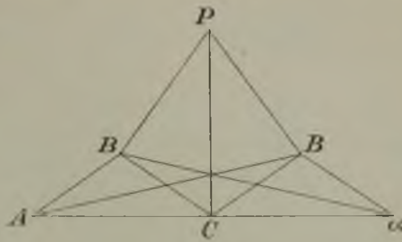



Fig. 4.

two values of $a$. Both Affirmative if (in the Equation,) it be $-ba$: Both negative, if $+ba$. Which values be (what we call) Real, if the Right-Angle be at $C$: But Imaginary if at $B$.

Es handelt sich hier im zweiten Falle um die Konstruktion der imaginären Größe $AC \pm i\sqrt{PC^2 - AC^2}$. Setzt man $AC = a$, $\sqrt{PC^2 - AC^2} = BC = b$, wird der Winkel $\alpha CB$ für $a + bi$ gleich arc tg $\frac{b}{a}$ und der Winkel $ACB$ für $a - bi$ gleich $\pi -$ arc tg $\frac{b}{a}$. Die dritte Konstruktion fällt folglich mit der zweiten zusammen, wenn man arc tg $\frac{b}{a}$ statt arc sin $\frac{b}{a \operatorname{tg} \mu}$ setzt, d. h. wenn tg $\mu = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$. Im Vorübergehen mache ich auf den Umstand aufmerksam, daß Wallis durch einen merkwürdigen Zufall gerade den Winkel benutzt, der bei unserer Darstellung der komplexen Größen unter der Normalform vorkommt. Auch in betreff dieser Konstruktion gilt indessen die Bemerkung, daß im allgemeinen nicht $a + bi + a' + b'i = a + a' + (b + b')i$; nur wenn $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ ist die Formel anwendbar. Ebenso sieht man sofort, daß für $a = 0$ die Darstellung von $bi$ mit der Gaussschen identisch wird, daß aber in diesem Falle $-bi$ denselben Punkt als $+bi$ repräsentiert.

Im 69. Kapitel gibt Wallis noch viele andere Konstruktionen imaginärer Größen an, aber die meisten sind entweder Modifikationen der schon erwähnten oder ohne Interesse; beispielsweise wird einmal die Größe $\sqrt{1 - x^2}$ für $x < 1$ als Ordinate des Kreises $x^2 + y^2 = 1$, für $x > 1$ dagegen als Ordinate der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ dargestellt. Nur eine einzige Konstruktion verdient hier angeführt zu werden[1]). Diese bezieht sich auf die Wurzeln der Gleichung $aa - ba - \textit{æ} = 0$ und wird von Wallis selbst mit folgenden Worten angegeben, nachdem er [Fig. 5] $AC = C\alpha = \frac{1}{2}b$ gemacht und auf $A\alpha$ einen Halbkreis gezeichnet hat:

1) Wallis, a. a. O. S. 270.

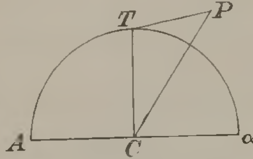



Fig. 5.

Though $\sqrt{\alpha}$ (if greather than $\frac{1}{2}b$) cannot lye as a Sine within the Semicircle, in the same Plain: Yet if on the Semicircle, we suppose a Cylinder to be erected, whose height shall be $TP = \sqrt{:\frac{1}{4}bb + \alpha:}$ (or $\sqrt{:\frac{1}{4}bb - \alpha:}$ the Root of a Negative Square:) $CP = \sqrt{\alpha}$ shall be (in that Cylinder,) a Slope-Line; whose Ground-Line shall be $CT = \frac{1}{2}b$. And the Square of $TP$, the measure of the Impossibility.

Setzt man hier $\frac{1}{2}b = k$, $\sqrt{\alpha - \frac{1}{4}b^2} = k'$, so bezieht sich die Wallissche Konstruktion auf $k + k'i$ und sein Verfahren ist wesentlich folgendes. Er versetzt stillschweigend den Nullpunkt der reellen Werte nach $C$ und betrachtet als Gerade der reellen Punkte die Senkrechte in $C$ auf $A\alpha$. Ferner nimmt er auf dieser Senkrechte eine Strecke $CT = k$, zieht durch $CT$ die Vertikalebene und in dieser Ebene eine Senkrechte in $T$ auf $CT$ und nimmt endlich auf der letzten Senkrechte die Strecke $TP = k'$. Dann ist nach Wallis $CP = k + k'i$.

Es ist offenbar, daß diese Darstellung wesentlich mit der Gaussschen zusammenfällt. Der Unterschied ist nur, daß sich Wallis nicht der Horizontal- sondern der Vertikalebene bedient. Wie man auf diese Weise $k - k'i$ darstellen kann, sagt Wallis nicht, aber da ihm unsere Darstellung negativer reeller Größen geläufig war, hätte er wohl leicht finden können, daß $k - k'i$ durch einen Punkt unterhalb der Horizontalebene dargestellt werden sollte. Dagegen hat er den Wert seines Verfahrens nicht verstanden, denn er erwähnt dasselbe nur ganz beiläufig und fügt hinzu, daß es nur wenig von einem vorangehenden abweicht, das eine Darstellung in der Horizontalebene bietet und wesentlich mit der zweiten der oben angeführten Konstruktionen identisch ist.

Aus der vorangehenden Untersuchung findet man:

1. daß Wallis wirklich versucht hat, imaginäre Größen[1]) durch Addition von Vektoren geometrisch darzustellen;

2. daß seine Darstellung rein imaginärer Größen von der Form $+ bi$ mit der Gaussschen identisch ist;

3. daß seine Versuche Größen von der Form $- bi$ in der Horizontalebene darzustellen, nicht geglückt sind, weil er nur Punkte *oberhalb* der Gerade der reellen Werte in Betracht zog;

4. daß seine Versuche imaginäre Größen von der Form $a + bi$ in der Horizontalebene darzustellen auch nicht erfolgreich waren. Dagegen

1) Eigentlich bezieht sich Wallis' geometrische Darstellung nur auf Quadratwurzeln negativer Größen und imaginäre Wurzeln von Gleichungen zweiten Grades, aber Wallis hat selbst in seiner Algebra (S. 278) hervorgehoben, daß bei der Lösung von Gleichungen höherer Grade keine anderen imaginären Größen auftreten.

hat er eine Darstellung in der Vertikalebene angegeben, die weiter entwickelt mit der GAUSSschen zusammenfällt[1]), aber dies Verfahren ist nur im Vorübergehen erwähnt, und gar nicht verwertet.

Vergleicht man die WALLISschen Versuche mit dem von H. KÜHN[2]) etwa 70 Jahre später veröffentlichten, so sind jene entschieden die belangreichsten, und sie hätten ohne Zweifel, als Ausgangspunkt benutzt, sehr leicht an die von WESSEL, GAUSS und ARGAND erfundene Darstellung komplexer Größen führen können. Indessen hat man keinen Anlaß anzunehmen, daß irgend einer dieser Mathematiker von WALLIS beeinflußt war.

---

1) Die Bemerkung des Herrn D. E. SMITH a. a. O. S. 516, daß „WALLIS had suggested the idea, that $+\sqrt{-1}$ should represent a unit line, and its negative, perpendicular to the real axis“ ist also nicht unrichtig, hebt aber einen Umstand besonders hervor, worauf WALLIS kein Gewicht legte, nämlich daß die Richtung der rein imaginären Größen senkrecht gegen die reelle Achse ist, und die Bemerkung kann darum leicht irreleitend werden.

2) H. KÜHN, *Meditationes de quantitatibus imaginariis construendis et radicibus imaginariis exhibendis;* Novi comment. acad. sc. Petrop. **3** (1750/51), gedruckt 1753, S. 170—223. Vgl. hierüber M. CANTOR, a. a. O. S. 726—728.

# Curve piane speciali nel carteggio di C. Huygens.

Di Gino Loria a Genova.

Le numerose citazioni di lettere scambiatesi nel periodo 1638—1684 fra C. Huygens ed i più eminenti matematici del suo tempo, che si trovano nella mia opera *Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven* (Leipzig, 1902)[1], fa nascere la fiducia che anche gli ultimi due volumi[2]) della corrispondenza di quel grande possano somministrare qualche ulteriore notizia sulla storia di quelle figure. Tale fiducia appare tanto più giustificata ove si rifletta che durante l'ultimo periodo della vita del sommo olandese — quello cioè che corre fra la pubblicazione del *Traité de la lumière* (1691) e la deplorata sua morte (1695) — egli si disinteressò dalle ricerche di astronomia e fisica, che tanta luce di gloria avevano su di lui projettata, per consacrare tutte le forze del suo ancor robusto intelletto ai nuovi calcoli, dei quali Leibniz e Newton, col concorso di eminenti discepoli, stavan allora dimostrando, sopra memorabili esempi, lo straordinario potere. Di tali nuovi metodi egli non fu un ammiratore della prima ora; ma, convintosi in prosieguo di tempo del loro indiscutibile valore[3]), si dimostrò capace di usarli con avvedutezza ed originalità, almeno nei casi in cui entrano soltanto differenziali primi[4]), onde in

1) Indicheremo in seguito questo volume coll' abbreviatura *Ebene Kurven.*

2) *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens publiées par la société hollandaise des sciences.* T. IX. Correspondance 1685—1690 (La Haye 1901). T. X. Correspondance 1691—1695 (La Haye 1905). Questi volumi verranno da noi citati coi soli numeri IX e X.

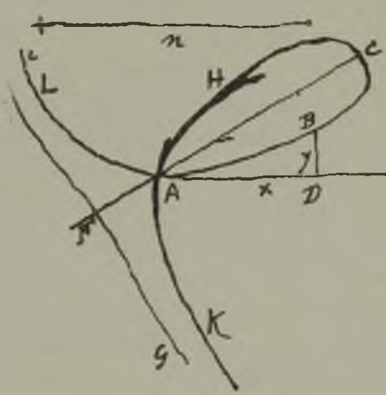
3) „. . . j'ay fait quelque progres dans les subtilitez geometriques et dans votre excellent calcul differentiel, dont je goute de plus en plus l'utilité". Lettera di Huygens a Leibniz del 17 Settembre 1693 (v. X, p. 510).

4) „J'admire de plus en plus la beauté de la geometrie dans ces nouveaux progres qu'on y fait tous les jours, ou vous avez si grande part, Monsieur, quand ce ne seroit que par votre merveilleux calcul. M'y voilà maintenant mediocrement versé, si non que je n'entens rien aux $ddx$, et je voudrois bien savoir si vous avez rencontré des problèmes importants ou il faille les employer, afin que cela me donné l'envie de les etudier". Lettera di Huygens a Leibniz del 17 Settembre 1693 (X, p. 511). In conseguenza un' asserzione di Zeuthen (*Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert*, Leipzig, 1903, p. 47) sembra esigere qualche modificazione.

qualunque storia del calcolo infinitesimale un paragrafo importante dev'essere dedicato ai procedimenti suggeriti od applicati da HUYGENS per eseguire quadrature od integrare equazioni differenziali, le une e le altre collegate a problemi di geometria.

Molte delle questioni da lui trattate concernono la determinazione di curve dotate di assegnate proprietà delle tangenti (v. T. IX, p. 473, 517, 532, 536, 549, 555, 573—76; T. X, p. 50, 56, 58, 60), mentre altre hanno per fine la determinazione delle aree di cubiche, quartiche e sestiche speciali. Inoltre una folla variopinta di osservazioni toccano curve particolari già note e di esse ci piace dar quì più precisa notizia, a complemento di quanto si legge nell' opera succitata.

1. **Foglia di DESCARTES.** La questione (v. *Ebene Kurven* p. 5) di chi per primo abbia esattamente delineata la curva di equazione cartesiana $x^3 + y^3 = nxy$, sembra risoluta dalla lettera diretta da HUYGENS al marchese de l'HÔPITAL il 29 Dicembre 1692, ove trovasi (X, p. 352) la figura quì riprodotta, accompagnata (ivi p. 351—352) dalle seguenti parole: „Mr. DES CARTES en parle comme si elle avait plusieurs feuilles, quoy qu'elle n'en ait qu'une, comme dans cette figure est $ABCH$, son trait continuant en $AK$, $AL$, le long de l'asymptote $EFG$, perpendiculaire au diamètre $CA$, prolongé d'un tiers $AF$." Tale ossevazione parve nuova ed interessante al l'HÔPITAL, il quale nella sua risposta, in data 12. Febbrajo 1693, soggiunse (X, p. 390) che l' errore di DESCARTES può rendersi palese osservando che l'equazione $y^3 - axy + x^3 = 0$, considerata come una equazione di terzo grado in $y$, ammette una o tre radici reali secondo che $x \gtrless \frac{a}{3} \sqrt{4}$.




La surriferita osservazione venne in dominio del pubblico grazie ad una lettera diretta da HUYGENS a BASNAGE DE BEAUVAL e da costui pubblicata nel Fascicolo Dicembre 1692—Gennajo e Febbrajo 1693 dell' Histoire des ouvrages des savants (v. X, p. 407—417, specialmente p. 417), lettera in cui (come in quella già citata diretta all' HÔPITAL) HUYGENS ha di più indicata la quadratura della curva di cui si tratta; ecco come egli si esprime: „Je trouve le contenu de feuille $ABCH$ égal à 1/6 $nn$ ou 1/6 du carré du diamètre $AC$; et l'espace infini des deux costez entre $AK$, $AL$ et l'asymptote, encore de la mesme grandeur" (X, p. 351). E nella pur succitata replica dell' HÔPITAL, questi afferma di avere ottenuta, „par trois differentes manières" (X, p 391), la quadratura indefinita della foglia annunziata da HUYGENS, usando le parole: „On ne s'imagineroit pas que cette courbe dust avoir une quadrature si reguliere et si simple. Celle qui est generale pour les segments l'estant de mesme, qui s'exprime par un seul terme" (X, p. 351—352). Ad occuparsi di tali problemi HUYGENS fu probabilmente indotto studiando i metodi di quadratura inventati da FERMAT[1]), il quale anzi aveva affermata[2]) la quadrabilità della curva in esame. In quale modo poi HUYGENS abbia proceduto per giungere a quei risultati si apprende da un interessante brano degli „Adversaria" (raccolta di appunti di HUYGENS) intitolato „21. Nov. 1692 hanc e tenebris erui quadraturam" e pubblicato in appendice alle lettere di cui ci siamo testè occupati (X, p. 374—380). Di queste sue scoperte HUYGENS diede notizia a LEIBNIZ con lettera del 12 Gennajo 1693 (X, p. 383—389; v. specialmente p. 388[3])); esse fecero una profonda impressione sopra l'emulo di NEWTON, il quale non esitò a dichiararle (lettera del 10/20 Marzo 1693; v. X, p. 429) „extremement belles" e fu tentato di trovarne per conto suo una formola di quadratura indefinita. HUYGENS credette di scoprire in tale formola un errore[4]), che si affrettò a segnalare al marchese de l'HÔPITAL con lettera del 9 Marzo 1693 (v. X, p. 437—438); più tardi però si accorse del proprio torto e lo dichiarò tanto all' HÔPITAL (lettera del 10 Settembre 1693; X, p. 499), quanto a LEIBNIZ medesimo (lettera del 17 Settembre 1693; X, p. 510).

Riguardo ai tre metodi usati dall' HÔPITAL (v. più sopra) per quadrare la foglia, due di essi sono esposti per esteso nella lettera ad HUYGENS del 2 Luglio 1693 (v. X, p. 452); e poichè sono di notevole eleganza e, a differenza di quelli oggi preferiti[5]), riposano sull' uso, non di coordinate polari, ma di coordinate cartesiane, ci sia lecito riferirne l'essenza con simboli moderni:

1. Dall' equazione

$$x^3 + y^3 = axy,$$

differenziando e poi moltiplicando per $y$ si ottiene

$$3\,x^2y\,dx + 3\,y^3dy = axy\,dy + ay^2dx;$$

1) Alludesi qui all' opuscolo postumo *De aequationum localium transmutatione et emendatione.*

2) *Oeuvres de* FERMAT, ed. TANNERY et HENRY. T. I, p. 276 e T. III, p. 276.

3) V. anche LEIBNIZENS *Mathematische Schriften*, ed. GERHARDT, II. Bd., p. 148—153.

4) V. un commento a quel passo della lettera di LEIBNIZ pubblicato in X, p. 432 nota 14).

5) V. p. es. SERRET, *Calcul intégral* (II ed.; Paris 1880), p. 234—236; P. MANSION, *Sur certaines courbes carrables algébriquement* (Nouv. corresp. mathém. **1**, 1878).

e da questa, surrogando $y^3$ col suo valore $axy - x^3$,

$$ydx = \frac{ay^2dx - 2axydy}{6x^2} + \frac{xdy + ydx}{2}$$

Ognuno dei termini al secondo membro essendo un differenziale esatto, si conclude

$$\int ydx = \frac{1}{2}xy - \frac{a}{6}\frac{y^2}{x}.$$

2. Alle $y$ si sostituisca nell' equazione della curva la $z$ definita dalla relazione

$$y = \frac{zx^2}{a^2}$$

e si otterrà

$$x^3 = \frac{a^5z - a^6}{z^3}.$$

Ora si differenzi e si avrà

$$3x^2dx = \frac{3a^6 - 2a^5z}{z^4}dz,$$

ossia

$$3\frac{x^2}{a^2}dx = 3a^4\frac{dz}{z^3} - 2a^3\frac{dz}{z^2},$$

onde

$$\int ydx = \frac{2ax^2}{3y} - \frac{x^4}{2y^2}.$$

Sul terzo dei suoi metodi di quadratura l'Hôpital dice soltanto che riposa sull' introduzione come nuovi assi delle bisettrici degli angoli formati dagli antichi.

Nella sua risposta, in data 23 Luglio 1693 (v. X, p. 461) Huygens chiese spiegazione sull' essere, come affermò l'Hôpital (v. sopra),

$$\frac{aydx - 2axydy}{6x^2} = d\left(-\frac{ay^2}{6x}\right),$$

propose una correzione all' ultima formola comunicatagli dal suo abile corrispondente e chiese ulteriori particolari sul terzo metodo di quadratura della foglia. Ma poco dopo (v. lettere del 5 Settembre e del 3 Ottobre 1693; X, p. 474 e 491) riuscì a rendersi ragione di quella formola ed a riconoscere l'esattezza anche di quell' ultimo risultato. E per quanto concerne il terzo dei procedimenti usati dall' Hôpital per quadrare la foglia, tutti i desiderabili particolari del relativo calcolo si trovano nella lettera del 25 Novembre 1693 (X, p. 566; cfr. anche un passo della lettera ad Huygens del 18 Gennajo 1694; X, p. 580).

Altri metodi di quadratura della foglia dovuti al de Volder, professore a Leida, si apprendono pure nel carteggio che stiamo studiando (v. lettera di Huygens all' Hôpital del 16 Giugno 1694; X, p. 623, 630 e 637); anche tali metodi, come l'ultimo di quelli dell' Hôpital, poggiano sulla sostituzione $x, y = \left\{ \frac{z \pm t}{\sqrt{2}} \right.$, che DESCARTES aveva posta in moda, servendosene nella sua disputa con ROBERVAL (*Ebene Kurven* p. 55).

Da tuttc ciò risulta stabilito come sin dalla fine del Secolo XVII la questione di quadrare la foglia di DESCARTES era omai risoluta definitivamente ed in vari modi.

2. **Versiera ed Iperversiera.** L'equazione (*Ebene Kurven* p. 76)

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$$

della versiera si trova già in FERMAT[1]) sotto la forma *Bc aequalis Aq in E + Bq in E*, cioè[2]) $b^3 = a^2e + b^2e$; a tale curva il sommo tolosano applicò il suo metodo di quadratura e concluse esser l'area totale della curva nota quando lo sia quella del cerchio[3]). Ora, appunto commentando le idee di FERMAT, in un lavoro postumo (X, p. 364—373), HUYGENS (v. X, p. 370–371) ha, non soltanto confermato tale conclusione, ma l'ha precisata, trovando quell' espressione dell' area compresa fra la versiera ed il proprio asintoto a cui così facilmente guida il calcolo integrale (v. *Ebene Kurven* p. 76—77). Emerge da ciò che, per quanto concerne la quadratura della versiera, la priorità non può essere, col VACCA[4]), attribuita a GUIDO GRANDI, ma dev' esserlo a FERMAT ed HUYGENS[5]).

Analoga alla versiera è la curva avente la seguente equazione

$$y = \frac{a^3}{a^2 - x^2};$$

ne è fatta menzione nella lettera scritta da HUYGENS a LEIBNIZ il 6 Febbrajo 1691 (v. X, p. 10) e prima nel celebre *Discours sur la cause de la pesanteur*, letto dinnanzi all' Accademia di Parigi il 28 Agosto 1669[6]). Scritta quell' equazione sotto la forma

$$y = \frac{1}{2}\left\{\frac{a^2}{a + x} + \frac{a^2}{a - x}\right\},$$

si vede che la curva da essa rappresentata può riguardarsi come la „fibre moyenne" (*Ebene Kurven* p. 710) dedotta dalle due iperbole

$$y\,(a \pm x) = a^2.$$

È notevole però che quella curva si può ottenere applicando all' iperbola equilatera

---

1) *Oeuvres de* FERMAT T. I, p. 279. — 2) Id. T. III, p. 233. — 3) *Oeuvres* ll. cc.

4) G. VACCA, *Sulla versiera* (Bollett. di bibliogr. e storia delle sc. mat. 4, 1901, p. 33—34).

5) Riguardo alla quadratura della „versoria" di G. GRANDI si vegga anche il dotto volume di P. FERRONI, *De calculo integralium exercitatio mathematica* (Florentiae 1792), p. 182 e seg.

6) Cfr. IX, p. 96.

$$-x^2 + y^2 - ay = 0$$

quella costruzione che, applicata al cerchio

$$x^2 + y^2 - ay = 0,$$

conduce alla versiera (*Ebene Kurven* p. 76). Perciò quella curva si potrebbe convenientemente chiamare *iperversiera*.

3. **Logaritmica e Logistica.** Lo studio degli scritti di HUYGENS nei quali si trovano enunciate o dimostrate le più insigni proprietà della curva

$$y = be^{\frac{x}{a}}$$

(cioè il surricordato *Discours sur la cause de la pesanteur* ed il *Traité de la lumière*) indussero il marchese de l'HÔPITAL a tentare la rettificazione della logaritmica e così giunse ad un risultato che si affrettò a comunicare ad HUYGENS con lettera 26 Luglio 1692 (v. X, p. 305). L'enunciato datone da l'HÔPITAL contiene un „lapsus calami", che HUYGENS non mancò di rilevare (lettera del 27 Agosto 1692; X, p. 307) e che l'HÔPITAL si affrettò di correggere (lettera del 10 Settembre 1692; X, p. 312), indicando in pari tempo una nuova forma del suo teorema e la relativa dimostrazione. L'interesse di HUYGENS per siffatte indagini è attestato dalla successiva sua lettera all' HÔPITAL (in data 22 Ottobre 1692; X, p. 325), ove leggesi la notizia che egli applicò il metodo usato da l'HÔPITAL al calcolo dell' area generata dalla rotazione della logaritmica attorno al proprio asintoto e che inoltre trovò il massimo della curvatura della linea in questione. In qual modo egli vi sia pervenuto è completamente indicato in due brani, datati dall' Ottobre 1692, ma solo ora pubblicati (X, p. 330 e 333), nei quali è dimostrato che l'area generata dalla rotazione della curva attorno al suo asintoto è espressa da

$$\pi b \sqrt{a^2 + b^2} + \pi a^2 \log \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

e che il massimo del raggio di curvatura è $\frac{3\sqrt{3}}{2}\,a$, risultati di cui è assai agevole rendersi conto coi procedimenti moderni.

Un' altra procedura per rettificare la logaritmica leggesi in una lettera dell' HÔPITAL, in data 23 Novembre 1692 (X, p. 342—344)[1]), ove inoltre è indicata l'espressione generale seguente pel raggio di curvatura di quella linea

$$\frac{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{ay}.$$

Notiamo da ultimo che uno dei metodi di rettificazione dell' HÔPITAL consiste nel ridurre tal problema alla quadratura della curva di equazione

1) V. anche la lettera dell' HÔPITAL a LEIBNIZ pubblicata da GERHARDT nel T. II di LEIBNIZENS *Mathematische Schriften*, p. 217.

$$a^6 = a^2x^2y^2 + x^2y^4$$

ora in una lettera resa di pubblica ragione di HUYGENS a BASNAGE DE BEAUVAL e che già citammo (v. X, p. 407), HUYGENS riduce invece la detta questione alla quadratura della curva

$$a^4 = x^2y^2 - a^2y^2,$$

in un modo che è oggi noto, grazie ad un brano inedito di recente pubblicato (X, p. 358—360).[1])

4. **Curve di DEBEAUNE.** Gli è nella lettera ad HUYGENS del 10 Settembre 1692 (X, p. 312) che il marchese de l'HÔPITAL annunciò di avere risoluto il noto problema che DEBEAUNE aveva proposto a DESCARTES (cfr. *Ebene Kurven* p. 516); ma è soltanto nella seguente lettera del 12 Febbrajo 1693 (X, p 391—392) che fa nota la soluzione da lui trovata, cioè, non solo la costruzione della curva domandata, ma anche la quadratura della porzione di piano compresa fra un arco di essa, le ordinate degli estremi e l'asse delle $x$, nonchè il baricentro di tal porzione[2]). E' noto che GIOVANNI BERNOULLI rivendicò pubblicamente (cioè negli Acta eruditorum del Maggio 1693) la paternità di tale costruzione[3]). Tale fatto trovasi rilevato in una lettera di HUYGENS del 5 Agosto 1693 (X, p. 476), in risposta alla quale l'HÔPITAL in data 10 Agosto 1693 (X, p. 484), dichiara quanto segue: „Lorsque Mr. BERNOULLI étoit à Paris il me vint voir et m'ayant dit qu'ils avoient fort travaillé son frère et lui sur l'inverse des tangentes, je lui proposé d'abord le probleme de Mr. DE BEAUNE, dont il est vrai qu'il m'apporta la solution quelque temps après qui n'étoit pas beaucoup differente de la mienne que je fis inserer depuis dans le 34e Journal des Sçavants sous le nom de Mr. G***, qui est la Ire lettre de mon nom de baptesme m'appellant Guilleaume et ayant des raisons alors pour cacher mon nom. Il y a apparance que Mr. BERNOULLI ayant vû dans votre lettre[4]) que vous m'attribuyez cette invention et voulant

1) V. l'analoga riduzione della quadratura della curva $x^2y^2 = a^4 - a^2y^2$ a quella della curva $x^2y^2 = 4a^4 - x^4$, esposta in un brano a p. 541—543 del tomo IX.

2) Cfr. anche la lettera dell' HÔPITAL ad HUYGENS del 12 Maggio 1693 (X, p. 446—450), ove eziandio si parla di un' altra questione proposta da DEBEAUNE, cioè della determinazione della curva avente per suttangente $\frac{y^2 - xy}{a}$; tale problema rinviene all' integrazione dell' equazione differenziale $a\,dx = y\,dy - x\,dy$, che si effettua mediante la sostituzione $y - x = z$.

3) V. l'articolo *Solutio problematis CARTESIO propositi a Dn. de BEAUNE.* Va inoltre notato che quello pubblicato dal marchese de l'HÔPITAL venne riprodotto in JOHANNIS BERNOULLI *Opera omnia* (T. 1, 1742, p. 62—63), accompagnato dalla seguenta nota esplicativa: „Cette pièce a été faite en commun par Mr. le Marquis de l'HÔPITAL et par Mr. BERNOULLI. C'est pourquoi l'un et l'autre a crû être en droit de se l'attribuer".

4) Si allude alla già citata lettera di HUYGENS a BASNAGE DE BEAUVAL pubblicata nell' Histoire des ouvrages des savants 1692—1693.

avoir part à la gloire qui me paroist très petite, il s'est depesché de faire mettre dans les actes de Leipsic ce que vous y verrez". HUYGENS rispose dichiarando: „Maintenant apres ce que vous m'en dites je suis scandalizè, car s'il a esté faschè de ce qu'aiant donné la solution du Probleme de Mr. DE BEAUNE, vous n'avez pas fait mention de luy, il pouvoit dire ce qui en estoit, sans faire de superchierie" (lettera del 3 Settembre 1693; X, p. 494). Ci sia lecito oservare che nelle riferite spiegazioni dell' HÔPITAL noi troviano parecchi punti oscuri, onde, allo stato degli atti, non ci sembra potersi ritenere del tutto ingiustificato il reclamo di priorità sporto dal BERNOULLI ed indiscutibile il suo torto. Prima di lasciare tali curve noteremo ancora che di esse è fatto cenno nella lettera che LEIBNIZ diresse ad HUYGENS il 10/20 Marzo 1693 (X, p. 429), in modo però che questi giudicò „exprimé assez obscurement" nella lettera che diresse al marchese de l'HÔPITAL il 9 Aprile 1693 (X, p. 438—439), onde fu indotto a „douter si LEIBNIZ n'a pas formé cette construction sur vostre premiere, qui est depuis le mois de Sept. de l'année passée dans le Journal des Scavants"; e, quasi per giustificare tal maligna insinuazione, soggiunge: „Mons$^{r}$. LEIBNITZ est assurement tres habile, mais il a avec cela une envie immoderée de paroistre, comme cela se voit encore dans le 13$^{e}$ Journal de la mesme année lorsqu'il parle de son Analyse des infinis".

5. **Curve per le quali è costante il rapporto fra tangente e suttangente.** Il problema avente per iscopo la ricerca di tali curve è quel „Problema ab eruditis solvendum" che GIOVANNI BERNOULLI enunciò negli Acta eruditorum del Maggio 1693 (cfr. *Ebene Kurven* p. 520). Già nella lettera scritta a HUYGENS il 2 Luglio dello stesso anno il marchese de l'HÔPITAL afferma (v. X, p. 454) di essere in grado di risolverlo. La questione interessò subito HUYGENS (v. la sua risposta in data 23 di detto mese; X, p. 460), sicchè l'HÔPITAL si affrettò (lettera del 10 Agosto 1693; X, p. 484) a dargli qualche cenno dei risultati ottenuti, in particolare a fargli noto che le curve richieste sono algebriche o trascendenti secondo che quel rapporto costante è o non razionale. Intanto era uscito il fascicolo di Giugno 1693 degli Acta eruditorum contenente l'articolo *JACOBI BERNOULLI Solutio problematis fraterni ante octiduum Lipsiam transmissi* e di esso HUYGENS prima segnala l'esistenza all' HÔPITAL (lettera del 3 Settembre 1693; X, p. 494) e poi gliene dà un succoso riassunto (lettera del 10 Settembre 1693; X, p. 497—499). Ma nella settimana che intercede fra le date di queste due lettere HUYGENS si occupò per conto suo del problema bernoulliano (cfr. X, p. 500—508) e di tali studi diede notizia con la nota *C. H. Z. De problemata BERNOULLIANO in Actis Lipsiensibus hujus anni proposito*, pubblicata nel fascicolo di Ottobre 1693 degli stessi Acta. Delle indagini del marchese de l'HÔPITAL

sopra lo stesso tema si attingono più precise notizie non soltanto in una memoria da lui presentata all' Accademia francese il 30 Giugno 1693[1]), ma anche in una lettera a Giovanni Bernoulli pubblicata nel fascicolo di Settembre 1693 di quel periodico ed in una indirizzata ad Huygens il 18 dello stesso mese (X, p. 518—523). Questa provocò alcuni appunti da parte di Huygens (lettera del 1° Ottobre 1693; X, p. 534), che furono riconosciuti giusti da colui al quale erano stati rivolti (lettera del 21 Ottobre 1693; X, p. 544). Aggiungiamo che delle curve in discorso Huygens ha scoperte notevoli costruzioni meccaniche (lettera all' Hôpital del 5 Novembre 1693; X, p. 550, cfr. anche p 537) e ne determinò una cuspide (v. X, p 555), risultato quest' ultimo che il marchese de l'Hôpital si affrettò a verificare esatto (v. lettera del 25 Novembre 1693; X, p. 565).

Giova quì osservare come delle curve la cui suttangente $y\frac{dx}{dy}$ vale $x \pm y$ (la cui determinazione dipende, al pari di quella delle curve di Bernoulli, da un' equazione differenziale omogenea) si parli più volte nelle lettere che si scambiarono il marchese d'Hôpital e Leibniz; così nella lettera scritta dal primo il 12 Maggio 1693 (X, p. 448) si legge una costruzione di quella la cui suttangente è $= x + y$; in conseguenza l'altro tentò indarno la costruzione di quelle aventi per suttangente $x - y$ (lettera del 23 Luglio 1693; X, p. 460), di cui però ottenne la quadratura (v. X, 478—480); tale costruzione fu invece scoperta da l'Hôpital (v. lettera del 10 Agosto 1693; p. 481—482). Le curve ottenute sono sempre trascendenti di natura logaritmica; esse rappresentano, in certe modo, il caso eccezionale delle curve definite dall' equazione differenziale $y\frac{dx}{dy} = \alpha x + \beta y$, le quali di regola sono curve binomie (*Ebene Kurven* p. 267), algebriche od interscendenti, tranne quando sia $\alpha = 1$, ipotesi fatta appunto nei casi studiati da l'Hôpital ed Huygens.

6. **Trattrice e Sintrattrice**. Il concetto di trattrice viene di consueto (cfr. *Ebene Kurven* p. 562) fatto risalire ad un medico il quale s'interessava di questioni scientifiche e ne propose la ricerca a Leibniz. Ma giustizia impone si avverta che, non solo al concetto, ma anche alle più insigni prerogative di tale curva giunse per conto suo anche Huygens, il quale nell' importante sua lettera a Basnage de Beauval, da noi in parecchie occasioni già citata, la nota come una di quelle „lignes courbes qui ayent cette propriété, que leurs longueur puisse se mésurer d'elles memes", (X, p. 408). Con tali parole Huygens intendeva, in ultima analisi,

1) *Solution d'un problème de géométrie que l'on a proposé depuis peu dans le Journal de Leipsic* (Mém. de l'acad. des sciences **10**, p. 234—237). Ivi la soluzione è enunciata, ma la dimostrazione è rimandata ad altra occasione.

esprimere il fatto che tanto l'equazione della curva, quanto la sua rettificazione dipendono dalla quadratura dell' iperbola (cioè da logaritmi); descritta quindi la curva meccanicamente, con un procedimento da lui stesso inventato, ne deriva un modo per quadrare ogni iperbola, donde la ragione per cui egli considerava la curva in questione come una „quadratice dell' iperbola".

La via battuta dal nostro matematico per giungere alle proprietà della trattrice è tracciata in un brano sin quì inedito (X, 418—421), del quale ci sia lecito tradurre in linguaggio analitico moderno i passi più interessanti.

L'equazione della trattrice essendo

$$x = \int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy,$$

si ha

$$\int_o^y y\,dx = \int_o^y \sqrt{a^2 - y^2}\,dy = \frac{1}{2} y \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a^2}{2} \text{ arc tg } \frac{y}{a},$$

risultato che Huygens esprime a parole per ottenere un elegante metodo di quadratura della trattrice; in particolare l'area compresa fra la trattrice e l'asintoto vale $\frac{\pi a^2}{2}$. Il volume descritto dalla rotazione della trattrice è dato da

$$\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2}\,y\,dy = 2\left[-\frac{\pi(a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_o^a = \frac{2\pi a^3}{3};$$

tale volume è, dunque, eguale al quadruplo di quello della sfera avente $a$ per diametro, come afferma Huygens. Il quale aggiunge che la determinazione del centro di gravità $G$ della trattrice dipende dalla quadratura del cerchio; ed infatti detta $g$ l'ordinata di $G$, in forza del teorema di Pappo-Guldino si ha

$$\frac{\pi a^2}{2} \cdot 2\pi g = \frac{2\pi a^3}{3}$$

onde

$$g = \frac{a}{3\pi}.$$

Finalmente l' area descritta dalla rotazione della trattrice attorno al suo asintoto vale

$$2\pi \int_{-a}^{+a} y\,ds = 2\pi \int_{-a}^{+a} a\,dy = 4\pi a^2,$$

è dunque eguale all' area del cerchio di raggio $2a$, altra conclusione che appartiene ad Huygens.

Il brano succitato si chiude con alcune notevolissime frasi (X, p. 422), le quali mostrano che Huygens concepì anche l'analoga curva in coordinate polari e ne avvertì la proprietà di accostarsi asintoticamente al polo.

Ritorniamo alla trattrice ordinaria per notare come il nome di „tractoria" si legga in una lettera diretta da Huygens a Leibniz il 17 Settembre 1693 (X, p. 510) ed in quell' articolo degli Acta eruditorum (Settembre 1693; cfr. X, p. 512—515) che già citammo a proposito delle curve per cui è costante il rapporto fra tangente e suttangente; in tale articolo vanno notate le applicazioni pratiche della curva in questione, le quali attirarono l'attenzione di Leibniz. Questi, nella sua lettera ad Huygens del 1/11 Ottobre 1693 (X, p. 538—543), avvertì tosto la possibilità di generalizzare la definizione di trattrice, nel modo che risulta dalle parole seguenti: „La construction des lignes que vous appellés Tractorias est d'importance. J'appelle ainsi plustost la construction que la ligne, car toute ligne peut estre construite de cette façon, prenant tousjours dans la Tangente un point dont la distance du point de la courbe soit donnée, ce qui fera une nouvelle ligne, le long de la quelle un bout du fil estant mené l'autre decrira la courbe donnée". In tale definizione, di così notevole generalità, è evidentemente compresa quella della sintrattrice (*Ebene Kurven* p. 566), curva di cui uno studio metodico venne fatto nel Sec. XVIII da Vincenzo Riccati,[1]) in seguito a ricerche del Poleni[2]), curva che appunto da lui ricevette il nome che porta.

Se si volesse che la presente rassegna risultasse assolutamente completa converrebe ancora richiamare l'attenzione dei lettori sopra una curiosa curva algebrica di ordine non inferiore a 16, concepita da Tschirnhausen e di cui s'ignora e desidera la definizione (IX, p. 157)[3]); inoltre far menzione dei molteplici passi in cui si parla delle curve a fuochi di Tschirnhausen (IX, p. 154, 159, 176, 181, 185) o delle indagini di Huygens sulla catenaria (IX, p. 500 e 502—510)[4]), sulle

1) *De natura et proprietatibus quarundam curvarum, quae simul cum tractoria generantur, quaque proinde syntractoria nominabuntur* (De Bononiensi scient. et artium inst. atque acad. Commentarii, **3**, 1755, p. 479—303). Notiano che, nelle prime pagine di questi lavoro, viene stabilita l'equazione differenziale dell' evoluta della trattrice; bastava eseguire la quadratura ivi indicata per concludere che tale curva è une catenaria (*Ebene Kurven* p. 565).

2) *Epistolarum mathematicarum fasciculus*, Venetiis 1729.

3) Cfr L'intermédiaire des mathématiciens **9**, 1902, p. 172, e **12**, 1905, p. 19. È probabile che la curva in questione si possa delineare meccanicamente col movimento di cerchi che rotolano sopra altri.

4) V. Korteweg, *La solution de Christiaan Huygens du problème de la chaînette* (Biblioth. Mathem. $1_3$, 1900, p. 97—108).

costruzioni dei flessi della concoide (v. *Ebene Kurven* p. 131), sulle caustiche (X, p. 73 e 543), ecc.

Ma il sin qui detto sembraci più che sufficiente a dimostrare quale preziosa fonte di notizie intorno al calcolo infinitesimale (in sè e nelle sue applicazioni alle curve piane) sia il carteggio di HUYGENS, del quale la Società olandese delle Scienze ha da poco felicemente compiuta la pubblicazione. I tremila articoli sparsi nei primi dieci volumi delle *Oeuvres complètes de* CHR. HUYGENS contengono tale somma di osservazioni geniali, di notizie interessanti e di documenti inoppugnabili, che dovranno essere incessantemente consultati da chiunquare voglia fedelmente ritrarre quel fortunoso periodo storico nel quale l'analisi moderna, benchè tuttora in fasce, con vagiti robusti faceva prevedere il radioso avvenire che la sorte le riserbava.

# Kleine Mitteilungen.

## Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik".

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen". BM = Bibliotheca Mathematica.

**1 : 12**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 265. — **1 : 15**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 323. — **1 : 22, 29, 34**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 265—266. — **1 : 36, 64**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 137. — **1 : 103**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 266. — **1 : 135**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 266; **3**$_3$, 1902, S. 137. — **1 : 144, 155, 169, 171**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 137—138. — **1 : 189—190**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 266; **6**$_3$, 1905, S. 101. — **1 : 192, 193**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 101—102. — **1 : 195**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 56; **6**$_3$, 1905, S. 102. — **1 : 196—197**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 266, **6**$_3$, 1905, S. 102—103. — **1 : 198**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 103. — **1 : 202**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 266. — **1 : 207**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 283. — **1 : 225, 234**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 138. — **1 : 255**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 238. — **1 : 272**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 396; **6**$_3$, 1905, S. 322. — **1 : 283**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 499. — **1 : 284, 321**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 266—267. — **1 : 335**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 305. — **1 : 370**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 319. — **1 : 383**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 267. — **1 : 386**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 407. — **1 : 395**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 323. — **1 : 400**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 267. — **1 : 429**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 324. — **1 : 432**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 267. — **1 : 434—435**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 396—397. — **1 : 436**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 138. — **1 : 437, 440**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 267. — **1 : 457**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 238. — **1 : 463**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 139, 324. — **1 : 466**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 397. — **1 : 467**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 267. — **1 : 468**, siehe BM **7**$_3$, 1906, S. 203. — **1 : 469**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 267. — **1 : 475**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 267—268; **3**$_3$, 1902, S. 139; **4**$_3$, 1903, S. 283. — **1 : 476**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 268. — **1 : 479**, siehe BM **7**$_3$, 1906, S. 80. — **1 : 480**, siehe BM. **7**$_3$, 1906, S. 80—81, 204. — **1 : 481**, siehe BM **7**$_3$, 1906, S. 81. — **1 : 508**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 68. — **1 : 510**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 314. — **1 : 519—520**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 239.

---

**1** : 524. In betreff der Bedeutung der hier angeführten Stelle aus der Postelschen anonymen Schrift vom Jahre 1540, siehe unten S. 289 die Bemerkung zu **2** : 385. Die Berufung auf Appuleius in zwei um 1500 gedruckten Rechenbüchern mit dem Titel *Algorithmus linealis* hat meiner Ansicht nach ebensowenig Bedeutung, da ihre Quelle unbekannt ist, und die Zuverlässigkeit derselben also nicht kontrolliert werden kann. Bekanntlich behauptete man am Anfange des 16. Jahrhunderts auch, daß Appuleius eine Schrift über die Coss(!) aus dem Griechischen übersetzt hatte (vgl. Abhandl. zur Gesch. der mathem. Wissensch. **13**, 1902, S. 449).

G. Eneström.

---

**1** : 525. Über die Bedeutung des Ausdruckes: „Du rechnest wie Nikomachos" siehe die Bemerkung zu **1** : 400 (BM **1**$_3$, 1900, S. 267).

---

**1** : 537, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 268.

---

**1** : 539—540. Über Boetius als Zahlentheoretiker bemerkt Herr Cantor: „Es ist kein ebenbürtiger Bearbeiter, der sich an den griechischen Zahlentheoretiker [Nikomachos] gewagt hat. Grade den feinsten arithmetischen Dingen ist er aus dem Wege gegangen. Sein Griechisch reichte aus zur Übersetzung, seine Mathematik nicht“. Diese Bemerkung begründet Herr Cantor dadurch, daß „unter den weggebliebenen Dingen jener Satz des Nikomachos enthalten ist, der von der Entstehung der Kubikzahlen aus der Summe ungerader Zahlen handelt, und ebenso der Satz, daß die $n$ eckszahl von der Seite $r$ und die Dreieckszahl von der Seite $r$—1 zusammen die $(n + 1)$eckszahl von der Seite $r$ bilden“. Aber in Wirklichkeit hat Boetius gerade die von Herrn Cantor erwähnten „feinsten arithmetischen Dingen“ in seine Arithmetik aufgenommen und zwar sind die betreffenden Sätze II : 39 und II : 19 (siehe *De institutione arithmetica libri duo*, ed. G. Friedlein, Leipzig 1867, S. 136, 103—104; vgl. B. Boncompagni, Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. 8, 1875, S. 53—54). Als Beleg bringe ich hier unten die zwei Sätze vollständig zum Abdruck.

XXXVIIII. Ipsi vero cybi, qui quamquam tribus intervallis sublati sint, tamen propter aequalem multiplicationem participant immutabilis substantiae eiusdemque naturae sunt socii, non aliorum quam inparium coacervatione producuntur, numquam vero parium. Nam si omnes ab unitate inpares disponantur, iuncti figuras cybicas explicabunt.

I. III. V. VII. VIIII. XI. XIII. XV. XVII. XVIIII. XXI.

In his igitur qui primus est, potestate et virtute primum cybum faciet; iuncti vero duo qui sequuntur, ternarius scilicet et quinarius, secundum efficiunt cybum, qui est octonarius. Iuncti autem tres, qui sequuntur, septenarius, novenariusque et .XI. cybum facient, qui .XXVII. numero continetur, qui est tertius. Et sequentes quattuor quartum, et qui sequuntur quinque quintum, et ad eundem modum quotus quisque cybus efficitur, tot coniunctione inpares apponuntur. Hoc autem diligentius subiecta descriptio docet.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| I. | III. V. | VII. VIIII. XI. | XIII. XV. XVII. XVIIII. | XXI. XXIII. XXV. XXVII. XXVIIII. |
| I. | VIII. | XXVII. | LXIIII. | CXXV. |

XVIIII. Hi vero omnes, si ad latitudinem fuerint comparati, id est trianguli tetragonis vel tetragoni pentagonis vel pentagoni exagonis vel hi rursus eptagonis, sine aliqua dubitatione triangulis sese superabunt. Nam si ternarium triangulum quaternario, vel quaternarium tetragonum quinario, vel quinarium pentagonum senario exagono, vel senarium septenario eptagono compares, primo se triangulo, id est sola transeunt unitate. At vero si senarius contra novenarium, vel hic contra .XII. vel hic contra .XV., vel quindecim contra .X. et .VIII., pro inveniendis differentiis comparentur, secundo se triangulo, id est ternario superabunt. .X. vero ad .XVI. et .XVI. ad .XXII. et .XXII. ad .XXVIII. et .XXVIII. ad .XXXIIII. si componas, tertio se triangulo vincent, id est senario. Atque hoc rite notabitur in aliis cunctis sequentibus sese perspectum omnesque se triangulis antecedent. Quare perfecte, ut arbitror, demonstratum est, omnium formarum principium elementumque esse triangulum.

G. Eneström.

---

**1 : 540, 542,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1 : 550,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906, S. 204. — **1 : 618,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 306—307. — **1 : 622,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143. — **1 : 638,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 394. — **1 : 641,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1 : 661,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1 : 662,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1 : 663,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 405. — **1 : 671,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1 : 673,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 407—408; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 307. — **1 : 674,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906, S. 204—205. — **1 : 675,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 408.

---

1 : 677. Wie Herr Cantor richtig hervorhebt, gibt Alkhwarizmi ausdrücklich an, daß die Gleichung $x^2 + c = bx$ zwei Wurzeln haben kann. Auf der anderen Seite hat L. Rodet in seiner Abhandlung *L'algèbre d'Al-Khârizmi et les méthodes indienne et grecque* (Journal asiatique $\mathbf{11}_7$, 1878; siehe S. 90—92 des Sonderabzuges) darauf hingewiesen, daß Alkhwarizmi bei dem Beweise der Richtigkeit der Lösung nur die Wurzel $x = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ in Betracht zieht, und am Ende des Beweises ganz beiläufig bemerkt, auch $x = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ sei eine Lösung der Gleichung; in der von Libri veröffentlichten mittelalterlichen Übersetzung fehlt sogar diese beiläufige Bemerkung gänzlich (siehe Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie* I, S. 263). Noch dazu lenkt Rodet die Aufmerksamkeit darauf, daß Alkhwarizmi zwar in der Theorie zwei Wurzeln der Gleichung $x^2 + c = bx$ anerkennt, aber in der Praxis nur die Wurzel $\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ anwendet; in der Tat scheint die von Herrn Cantor zitierte Stelle die einzige zu sein, wo Alkhwarizmi auch die größere Wurzel erwähnt (vgl. Libri, a. a. O. S. 278, 280, 281, 282, 283). Freilich *kann* dies auf der Natur der behandelten Probleme beruhen (die zwei Wurzeln repräsentieren bei Alkhwarizmi immer die Teile einer gegebenen Zahl).

G. Eneström.

---

**1 : 687—689,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143—144; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 205—206. — **1 : 694,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 284; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 103. — **1 : 699,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906, S. 205. — **1 : 704, 706, 708,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499—500. — **1 : 712,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906, S. 81—82. — **1 : 714,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 500. — **1 : 723,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 307. — **1 : 735, 736,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 500.

---

1 : 736—737. Wer der Erfinder der hier auseinandergesetzten Näherungsmethode, um sin 1⁰ aus sin 3⁰ zu berechnen, ist, dürfte zur Zeit nicht mit Sicherheit ermittelt werden können. A. von Braunmühl (*Vorles. über Gesch. der Trigonom.* **1**, Leipzig 1899, S. 72—73) vermutet, daß sie viel älteren Ursprungs ist, weil die Dreiteilungsgleichung schon von Abu'l Dschud (etwa 1000) aufgestellt wurde, und diese Gleichung für die exakte Berechnung der Sinustabellen von großer Wichtigkeit ist. Dies ist ja möglich, aber ebenso möglich ist es, daß man sich vor dem 15. Jahrhundert anderer Näherungsmethoden bediente. Zeuthen (*Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert,* Leipzig 1903, S. 82) bemerkt, daß es kaum berechtigt ist, aus Ulug Begs Kreis besonders den Arzt Al-Kaschi als Erfinder der Methode herauszugreifen. Aber wenigstens scheint Miram Tschelebi die Methode ganz bestimmt dem von ihm genannten Atab-Eddin Dschamschid zuzuschreiben,

denn die SÉDILLOTsche Übersetzung (*De l'algèbre chez les arabes;* Journal asiatique $2_5$, 1853; in der Sonderausgabe findet sich der Passus S. 30—31) der betreffenden Stelle lautet: „ATAB-EDDIN DJEMSCHID ... a réduit finalement ce problème à ceci, que 45 élevé une fois, multipliant les choses, sont équivalent du cube et du nombre .... Et afin d'obtenir cette racine, l'auteur se sert d'un artifice ingénieux pour introduire le cube de la chose dans la division". Nun hat MIRAM TSCHELEBI an einer vorangehenden Stelle (SÉDILLOT, a. a. O. S. 16) in betreff dieser Methode gesagt: „Nous en donnerons les démonstrations d'après le commentaire des tables d'OLOUG-BEG par ALA-EDDIN-ALI-KOSCHDJI, et l'opuscule qui a été composé sur le même objet par le savant CADHI ZADEH-EL-RUMI". „Der Verfasser" muß also entweder AL-KASCHI oder KADISADEH EL-RUMI sein, und jener aber nicht dieser ist von MIRAM TSCHELEBI an der von mir zuerst zitierten Stelle genannt. Denn daß ATABEDDIN DSCHAMSCHID mit AL-KASCHI identisch ist, hat man meines Wissens keinen Anlaß zu bezweifeln.

Der Verweis S. 736 auf *WŒPCKE, Passages relatifs à des sommations de séries de cubes* (Rome 1864), S. 22—25, sollte ergänzt werden, weil es in Wirklichkeit zwei solche Sonderabzüge gibt. Der erste, der hier *nicht* gemeint ist, hat den Titel: *Passages relatifs à des sommations de séries de cubes extraits de trois manuscrits arabes inédits de la bibliothèque impériale de Paris cotés nos $951_2$, $951_3$ et 952 du supplément arabe* (Rome 1864) und ist ein Sonderabzug aus den Annali di matematica 5, 1863, S. 147—181. Der zweite Sonderabzug hat den Titel: *Passages relatifs à des sommations de séries de cubes extraits de deux manuscrits arabes inédits du British museum de Londres cotés nos CCCCXVIII et CCCCXIX des manuscrits orientaux (nos 7469 et 7470 des manuscrits additionels)* (Rome 1864) und diese Abhandlung erschien in der Annali di matematica 6, 1864, S. 225—248. G. ENESTRÖM.

---

**1 : 740, 748,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 500. — **1 : 749,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1 : 752,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 104. — **1 : 753,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 408—409.

---

1 : 754. Der Cod. 65 (14. Jahrh.) der Bibliothek in St. Florian (Ober-Österreich) enthält nach dem Werke AUGUSTINS „de magistro" folgendes „Epitaphium AUGUSTINI super sepulchrum ADEODATI":

Si quantum vixit tantum vixisset itemque
Tantum tantique dimidium super hoc,
Dimidium quoque dimidii, centennis hic esset.

In der Mauriner AUGUSTINUSausgabe findet sich dieses Epitaphium nicht. ADEODATUS war der Sohn des AUGUSTINUS. A. STURM.

---

**1 : 754,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 409; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 104, 308; $\mathbf{7}_3$, 1906, S. 206. — **1 : 756,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 500; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 308. — **1 : 757, 767,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 500—501. — **1 : 794,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139.

---

1 : 796. Wie schon BUBNOV (*GERBERTI Opera mathematica*, Berlin 1899, S. 201) hervorgehoben hat, ist die Bemerkung (Z. 26—28): „Ob über das Rechnen mit ganzen Zahlen Anweisungen bei ABBO gegeben sind, läßt sich aus den veröffentlichten Musterstücken nicht nachweisen" nicht ganz richtig, denn die von CHRIST mitgeteilten Auszüge aus der Schrift ABBOS enthalten (S. 146) Anweisungen über Multiplikation von 6 und 600 („dum sexagies sexagenos

perquiris, sexies senos XXXVI esse invenies, ubi sunt tre articuli et sex digiti, qui ostendunt sexagies sexagenos esse III DC"). Aus den von Bubnov (a. a. O. S. 202—204) veröffentlichten weiteren Auszügen ersieht man, daß Abbo auch Multiplikation von einem „articulus" mit einem „numerus compositus" gelehrt hat. Dagegen fehlen bei Abbo, wenigstens in den von Bubnov benutzten Handschriften, Anweisungen über Multiplikation von zwei „numeri compositi", und über Division giebt Abbo gar keine Auskunft.

G. Eneström.

---

**1:804, 805, 807, 808, 812,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268—269. — **1:816,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906, S. 82—83. — **1:823,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 269. — **1:825,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906, S. 206. — **1:836,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906, S. 83. — **1:848,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906, 83—84, 206—207. — **1:852,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 269. — **1:853,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501. — **1:854,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 324; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 206; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 104. — **1:855,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501; $\mathbf{7}_3$, 1906, S. 84. — **1:856,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 309.

---

**2:5.** Es ist wohl nicht ganz richtig zu sagen, daß wir den Namen des Vaters von Leonardo Pisano nicht kennen, denn aus einem von G. Milanesi 1867 veröffentlichten Aktenstücke aus dem Jahre 1226 (*Documento inedito e sconosciuto intorno a Lionardo Fibonacci;* Giornale arcadico $\mathbf{52}_2$, 1867; der Sonderabzug enthält 10 Seiten) scheint deutlich hervorzugehen, daß der Vater Guglielmo hieß. Der betreffende Passus lautet: „Bartholomeus quondam Alberti Bonacii vendidit et tradidit Leonardo bigollo quondam Guilielmi, procuratori et certo nuntio Bonaccinghi germani sui quondam suprascripti Guilielmi". Daß Bonaccio ein spöttischer Beiname des Vaters war, ist kaum anzunehmen, da im Aktenstücke zwei andere Personen mit diesem Beinamen genannt werden, nämlich der damals verstorbene Alberto Bonaccio und sein Sohn Bartolomeo Bonaccio.

G. Eneström.

---

**2:7,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351. — **2:8,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 309. — **2:10,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2:14—15,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 200; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 208—209. — **2:20,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **2:25,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 274. — **2:30,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105. — **2:31,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351—352; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239—240; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 309—310. — **2:32,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105. — **2:34,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 310. — **2:37,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105. — **2:38,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2:39,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 209. — **2:41,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2:51,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 106. — **2:53,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 201. — **2:57,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2:59,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906, S. 207—208. — **2:59—60,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 310—311. — **2:61,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906, S. 85—86, 208—209.

---

**2:61.** Der 38. Satz des 9. Buches der *Arithmetica Jordani* enthält einen Passus, der für die Geschichte der mathematischen Terminologie von einem gewissen Interesse ist. Dort wird erst nach Nikomachos (*Introductionis arithmeticae libri II*, ed. R. Hoche, Leipzig 1866, S. 51) und Boëtius (*De institutione arithmetica libri duo*, ed. G. Friedlein, Leipzig 1867, S. 53) eine Tafel mitgeteilt, die ganz wie das gewöhnliche Einmaleins aussieht, obgleich sie wie bei Nikomachos und Boëtius einen zahlentheoretischen Zweck hat; dann wird in der Lefèvreschen Ausgabe bemerkt: „Formata ergo hac mensula Pythagore", und wenn diese Bemerkung wirklich von Jordanus selbst herrührt, so scheint daraus hervorzugehen, daß die gewönliche Annahme (vgl.

M. CANTOR, *Mathematische Beiträge zum Culturleben der Völker*, Halle 1863, S. 205) in betreff der Entstehung der Benennung „Mensa PYTHAGORAE" zu modifizieren ist. Nach dieser Annahme beruht die Benennung auf einer irrigen Einschaltung des Einmaleins an einer Stelle der *Geometria BOETII*, die von dem Rechenbrett handelt. Aus der zitierten Stelle des JORDANUS könnte man dagegen folgern, daß eine Tafel, die sich nur in betreff der Anwendung von dem Einmaleins unterscheidet, im Mittelalter unter dem Namen „mensula PYTHAGORAE" bekannt war, und unter solchen Umständen ist es ja leicht zu verstehen, warum das Einmaleins denselben Namen bekam.

Rührt dagegen der Ausdruck „Mensula PYTHAGORE" von LEFÈVRE her, so weiß man jedenfalls, daß er schon im 15. Jahrhundert angewendet worden ist.

G. ENESTRÖM.

---

**2 : 63,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 206. — **2 : 67,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906, S. 209—210. — **2 : 70,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 417. — **2 : 73, 82, 87,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2 : 88,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 395. — **2 : 89, 90,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503. — **2 : 91—92,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 409—410; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 395—396. — **2 : 97,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2 : 98—99,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 269—270; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 106—107; $\mathbf{7}_3$, 1906, S. 210. — **2 : 100,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2 : 101,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 396. — **2 : 104—105,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 397—398. — **2 : 111,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 116,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2 : 117—118,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 107, 311. — **2 : 122,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503—504; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 397. — **2 : 126,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 210. — **2 : 127,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2 : 128,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504.

---

2 : 129. Hier stellt Herr CANTOR die Frage: „Wer sind die Alten, *veteres*, welche ORESME hier unzweideutig als seine Vorgänger bezeichnet?". In betreff dieser Frage ist zu bemerken, daß es noch nicht sicher ist, ob bei ORESME überhaupt das Wort *veteres* vorkommt. Herr CANTOR zitiert nach M. CURTZE: „Cum ymaginationem veterum vel meam . . . .", aber an der zitierten Stelle erwähnt CURTZE vier Handschriften, von denen zwei: „Cum ymaginationem meam . . . ." und eine: „Cum ymaginationem veterum . . . ." haben. Die vierte Handschrift hat allerdings nach CURTZE: „Cum ymaginationem veterum vel meam . . . .", aber CURTZE hat nicht selbst diese Handschrift gesehen, sondern beruft sich auf aus Frankreich übersendete Notizen, und es ist höchst wahrscheinlich, daß die Worte „veterum *vel* meam" von dem Verfasser dieser Notizen herrührt. Von den vier Handschriften haben also zwei *nicht* das Wort „veteres", und in einer Handschrift ist die Lesart unsicher. G. ENESTRÖM.

---

**2 : 132,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 515—516. — **2 : 143,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504.

---

2 : 145. Da CAMPANUS eine in vielen Abschriften aufbewahrte *Theorica planetarum* verfaßt hat (siehe z. B. HOUZEAU *et* LANCASTER, *Bibliographie générale de l'astronomie* I, Bruxelles 1887, S. 504), so ist es wohl anzunehmen, daß ALBERT VON SACHSEN an der von Herrn CANTOR (Fußnote 3) zitierten Stelle diese *Theorica* meint, besonders als die betreffende Bedeutung des Wortes „quadratura" auf eine astronomische Schrift hinzuweisen scheint. Eine Abschrift der genannten Abhandlung findet sich Bl. 172—193 der von Herrn CANTOR etwas weiter oben (S. 110) erwähnten Cod. Basil. F. II. 33. G. ENESTRÖM.

---

2 : 150—151. Die Regel der Quadratwurzelausziehung der *Geometria Culmensis* stimmt in betreff der Berechnung der *ganzen* Zahl größtenteils wörtlich mit der entsprechenden Stelle des *Algorismus* des Sacrobosco überein, wie aus der folgenden Zusammenstellung hervorgeht.

| *Geometria Culmensis.* | Sacrobosco. |
|---|---|
| Sub ultima figura inpari loco posita inveniendus est quidam digitus, qui ductus in se quadrate deleat totum superpositum, vel iu quantum vicinius potest ... Si nihil est residuum, constat, quod numerus propositus fuit quadratus, si vero aliquid est residuum tunc numerus inventus fuit proxima radix sub illo numero contenta, saltem in integris. | Sub ultima figura in impari loco posita inveniendus est quidam digitus qui ductus in se deleat totum sibi superpositum respectu sui, vel in quantum vicinius postest .... Si nichil [est residuum], constat, quod numerus propositus fuerit quadratus... si vero fuerit aliquid residuum, ... digitus ultimo inventus cum subduplo vel subduplis tunc est radix maximi quadrati sub numero proposito contenti. |

Dagegen fehlt bei Sacrobosco der Zusatz der *Geometria Culmensis*:

> De numero autem residuo sic facies: numerus, qui non potuit integrum constituere, id est qui fuit residuus, sit numerator parcium, et radix inventa duplicata erit pro denominatore.

Freilich war dies Verfahren im Abendlande schon vor Sacrobosco bekannt (vgl. *Liber algorismi de pratica arismetrice*, ed. Boncompagni, Roma 1857, S. 76), und vielleicht hat der Verfasser der *Geometria Culmensis* alles was er über Quadratwurzelausziehung lehrt, wörtlich aus irgend einer Bearbeitung des *Algorismus* des Sacrobosco entnommen; solche Bearbeitungen waren im späteren Mittelalter gar nicht selten (vgl. M. Curtze, Centralbl. für Bibliothekswesen **16**, 1899, S. 285—286). G. Eneström.

---

**2 : 155—156,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 410—411; $\mathbf{7}_3$, 1906, S. 86—87. — **2 : 157, 158,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 160—162,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 311—312; $\mathbf{7}_3$, 1906, S. 87—88. — **2 : 163,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 312. — **2 : 164,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 313. — **2 : 166,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2 : 175,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2 : 206,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 313. — **2 : 210,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352—353. — **2 : 218,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 284. — **2 : 219,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353. — **2 : 222,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 397—398. — **2 : 229, 242,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504—505. — **2 : 243,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 505; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 398. — **2 : 253,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353. — **2 : 273,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 505. — **2 : 274,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325. — **2 : 281,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 411. — **2 : 282, 283,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353—354. — **2 : 284, 286, 287, 289, 290, 291,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506—507. — **2 : 296,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354. — **2 : 305,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906, S. 88. — **2 : 313,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507.

---

2 : 314. Aus dem 5. Tractate der 2. Distinctio der *Summa* kann man einen kleinen Beitrag zur Vorgeschichte der Differenzenrechnung entnehmen. Am Ende des Traktates (Bl. 44ª) gibt Paciuolo nämlich einen Satz an, der in moderner Bezeichnung lautet

$$u_n - u_o = \varDelta u_1 + \varDelta u_2 + \ldots + \varDelta u_n.$$

Er selbst spricht den Satz auf folgende Weise aus: „Se saranno disposti quanti voli numeri. In che proportione se vogliano pur che el secondo auanzi el primo el terzo auanzi el secondo el quarto auanzi el terzo el quinto auanzi el quarto. Et sic in infinitum: e quelli excessi: ouer differentie sieno in qual proportione si voglia: e per quanto si voglia che non fa caso: e volere sapere subito con prestezza quanta sia la summa de tutte loro differentie dal primo fin a lultimo sempre: caua el primo termino: ouer numero de lultimo el rimanente sempre sera la summa de ditte differentie: ouer excessi: quod est nota dignum".

G. Eneström.

**2 : 317**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 69. — **2 : 320**, siehe BM **7**$_3$, 1906, S. 88—89. — **2 : 322**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 399. — **2 : 325**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 313—314. — **2 : 328**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140; **4**$_3$, 1903, S. 285. — **2 : 334**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 351**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 399. — **2 : 353**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507; **4**$_3$, 1903, S. 87. — **2 : 355, 357**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 399—400. — **2 : 358, 360**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 87. — **2 : 371**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 314. — **2 : 379, 380**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 400—401. — **2 : 381**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 385**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 81; **4**$_3$, 1903, S. 207.

2 : 385. Meines Wissens hat man keinen Grund zu bezweifeln, daß die von Herrn Cantor hier erwähnte, 1540 anonym herausgegebene Schrift wirklich von G. Postel herrührt. An der von Herrn Cantor zitierten Stelle sagt Vossius ausdrücklich: „factum id scimus, etsi in titulo praetereatur, a Guilielmo Postello" und dieselbe Angabe haben alle anderen Verfasser, die ich zu Rate gezogen habe; der Titel der Schrift scheint *Compendium de quattuor mathematicis disciplinis ex Cassiodoro* zu sein.

Um so zweifelhafter ist es, ob die von Herrn Cantor aus dieser Schrift angeführte Stelle über Appulejus wirklich wichtig ist. In seiner Abhandlung *Les signes numéraux et l'arithmétique chez les peuples de l'antiquité et du moyen-âge* (Annali di matem. 5, 1863, S. 298) bemerkt Th. H. Martin in betreff dieser Stelle: „Postel reproduit infidèlement la phrase de Cassiodore, en y ajoutant des traits de son invention, et en conseillant la lecture du livre d'Apulée, comme s'il existait encore". Auch für mich ist es höchst unwahrscheinlich, daß Postel allein eine sonst unauffindliche Arbeit gesehen hätte. Der aus der fraglichen Stelle des Postel gezogene Schluß, ein Rechenbuch des Appuleius müsse sich bis zum Anfange des XVI. Jahrhunderts erhalten haben, wird also meines Erachtens hinfällig.

G. Eneström.

**2 : 386**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507; **5**$_3$, 1904, S. 306.

2 : 388. Da das Buch von Nuñez: *Libro* (nicht „livro") *de algebra en* (nicht „em") *arithmetica y* (nicht „e") *geometria* (Antwerpen 1567) jetzt eine große bibliographische Rarität ist, und da Herr Cantor nur im Vorübergehen einen von Stevin zitierten Passus des Buches erwähnt, aber sonst gar keine Auskunft über dessen Inhalt gibt, bemerke ich, daß Ch. Hutton in seinen *Tracts on mathematical and philosophical subjects* (II, London 1812, S. 250—252) ein gutes Referat des Buches gebracht hat. Daraus geht hervor, daß Nuñez ausgiebig die Arbeiten von Paciuolo, Cardano und Tartaglia benutzt, aber kubische und biquadratische Gleichungen nicht behandelt. Auf der anderen Seite scheint Nuñez die mathematischen Schriften seiner deutschen Zeitgenossen nicht gekannt zu haben.

G. Eneström.

**2 : 395**, isehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507—508. — **2 : 397**, siehe BM **7**$_3$, 1906, S. 211. — **2 : 399**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 107—108. — **2 : 401, 405**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507.

**2**: 410. Die Zeichen für 1, 10, 100, 1000, 4, 40, 400, 4000, die Herr Cantor J. Bronkhorst zuschreibt, sind vermutlich aus Heilbronner und Nesselmann entnommen. Indessen hat Friedlein an der von Herrn Cantor selbst zitierten Stelle darauf aufmerksam gemacht, daß Bronkhorst in Wirklichkeit nur Zeichen mit *wagrecht* liegendem Grundstrich benutzt, also wie in der Figur 36 der *Mathematischen Beiträge zum Culturleben der Völker*. Die Richtigkeit der Angabe von Friedlein wird auch durch die Schrift von G. Frizzo: *De numeris libri duo authore Ioanne Noviomago esposti ed illustrati* (Verona 1901, S. 62—63) bestätigt. Die Kenntnis der Zeichen verdankte Bronkhorst nach seiner eigenen Aussage seinem Landsmann Rodolphus Paludanus, und soweit bekannt ist, haben alle Verfasser, die die fraglichen Zahlzeichen erwähnen, aus Bronkhorst geschöpft. Aber wenn kein anderer als Paludanus die Zeichen gesehen hat, müssen sie sehr wenig verbreitet gewesen sein; man könnte sogar versucht sein zu vermuten, daß sie wesentlich von Paludanus selbst herrühren. Jedenfalls hat man meines Erachtens gar keinen bestimmten Grund anzunehmen, daß sich der von Bronkhorst angewendete Ausdruck: „Chaldei et Astrologi quemlibet numerum . . . describunt“ auf spätrömische oder mittelalterliche Sterndeuter beziehe; aus der Angabe von Bronkhorst kann man höchstens folgern, daß einige Sterndeuter *des 16. Jahrhunderts* die Zahlzeichen gebraucht haben.

G. Eneström.

---

**2 : 411, 412,** siehe BM **7**$_3$, 1906, S. 89. — **2 : 425,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 427,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 314—315. — **2 : 429,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 201—202. — **2 : 430,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 145. — **2 : 440,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 285. — **2 : 442,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 325. — **2 : 449,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140. — **2 : 454,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 242. — **2 : 474,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140—141.

---

**2** : 479—480. Herr Cantor lenkt die Aufmerksamkeit darauf, daß in einer englischen Encyklopädie dem R. Recorde das Verdienst unrichtig zugeschrieben wird, die Quadratwurzelausziehung aus algebraischen Ausdrücken zuerst gelehrt zu haben, und fügt hinzu, daß es sich bei Recorde nicht um anderes handeln kann als um Ausdrücke, welche aus Summen von mit bestimmten Zahlen vervielfachten Potenzen der Unbekannten bestehen. Herr Cantor hat durchaus Recht, und die Quelle der unrichtigen Angabe ist vermutlich die *Philosophical and mathematical dictionary* von Ch. Hutton, wo (siehe New edition 1, London 1815, S. 85; vgl. Ch. Hutton, *Tracts on mathematical and philosophical subjects* II, London 1812, S. 245) bemerkt wird: „He (Recorde) gives also many examples of extracting the roots of compound algebraic quantities ... which is the first instance of this kind that I have observed“ und als Beispiel $\sqrt{25x^6 + 80x^5 - 26x^4 - 144x^3 + 81x^2} = 5x^3 + 8x^2 - 9x$ angegeben wird.

Herr Cantor bemerkt noch: „In anderen Ländern haben wir viel früher als 1556 Quadratwurzeln aus Ausdrücken ziehen sehen, welche aus Summen von mit bestimmten Zahlen vervielfachten Potenzen der Unbekannten bestanden“, aber leider gibt er nicht die Stellen an, wo die *Vorlesungen* Aufschlüsse hierüber geben. Ich habe vergebens die Stichwörter „Quadratwurzel“ und „Wurzel“ des Registers zu Rate gezogen, um die Stellen aufzufinden, und sonst kenne ich nur einen (im Register nicht verzeichneten) Passus, der sich auf den fraglichen Gegenstand bezieht, nämlich S. 442, Z. 2—5 v. u. des 2. Bandes der *Vorlesungen*. Hier erwähnt Herr Cantor ganz beiläufig, daß

Stifel in der *Arithmetica integra* Gleichungen 4. Grades durch Wurzelausziehung auf quadratische Gleichungen reduziert hat. Aber Deutschland ist ja nur *ein* Land, und 1544 kaum *viel* früher als 1556, so daß ein Verweis auf S. 442 kaum genügt, um als Beleg zur Bemerkung des Herrn Cantor benutzt zu werden. Selbst kenne ich vor 1556 nur *ein* anderes Beispiel der Wurzelausziehung aus algebraischen Polynomen, nämlich das von den Herren Treutlein (*Die deutsche Coss;* Abhandl. zur Gesch. der Mathem. **2**, 1879, S. 42) und Tropfke (*Geschichte der Elementar-Mathematik* 1, Leipzig 1902, S. 213) aus der Stifelschen Ausgabe (1553) von Rudolffs Schrift *Die Coss* (S. $166^b$—$171^b$) zitierte. Etwa gleichzeitig behandelte Tartaglia den Gegenstand im 6. Teile des *General trattato di numeri i misuri* (Bl. $13^b$—$14^b$), aber dieser Teil erschien bekanntlich erst 1560.

---

**2 : 480,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 481,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 508. — **2 : 482,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 508; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 240; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 401.

---

2 : 483. Hier könnte erwähnt werden, daß sich Scipione del Ferro auch mit dem Rationalmachen des Nenners des Bruches

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$$

beschäftigt hat, welche Frage ohne Zweifel im Anfange des 16. Jahrhunderts als ziemlich schwierig betrachtet werden konnte. In der *Regula Aliza* des Cardano findet sich nämlich (S. 33 der Originalausgabe, Basel 1570) folgender Passus: „Et ita si uolo diuidere per *R cu* 4 *p* : *R cu* 3 *p* : *R cu* 2, ut docuit Scipio Terrus (!) Bononiensis" („Terrus" ist offenbar Druckfehler für Ferreus). Cardano gibt als Lösung der Frage (ich habe den offenbaren Druckfehler 4199645 der *Regula Aliza* in 419904 *p*: verbessert)

$$(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{12}-2-\sqrt[3]{6}) \times (81+\sqrt[3]{419904}+\sqrt[3]{472392})=81,$$

vermutlich ist dies genau die Lösung des Scipione del Ferro.

G. Eneström.

---

**2 : 484,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 486, 489, 490,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2 : 497,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87.

---

2 : 497. In betreff des Zunamens Tartaglias bemerke ich noch, daß es am Anfange des 16. Jahrhunderts wirklich eine Familie Tartaglia gegeben zu haben scheint. Im Jahre 1524 reichte nämlich ein Architekt Giovanni Tartaglia dem Marchese di Mantova ein Gesuch ein, für gewisse Arbeiten 350 Lire zu bekommen (siehe A. Bertolotti, *Architetti, ingegneri e matematici . . . nei secoli XV, XVI e XVII*, Genova 1889, S. 25—26). Sollte vielleicht Tartaglias Angabe, sein Zuname sei ursprünglich ein Spottname gewesen, eine Erfindung seines phantasiereichen Gehirns sein?

G. Eneström.

---

**2**:503. Aus gewissen Umständen schließt Herr Cantor mit Recht, daß die *Ars magna* ohne Zweifel das 10. Buch des von Cardano geplanten *Opus perfectum* ist, aber zu diesem Resultate kommt man direkt, wenn man das Titelblatt der Originalausgabe vom Jahre 1545 der *Ars magna* einsieht. Dort steht nämlich: *Artis magnae, sive de regulis algebraicis lib. unus, qui et totius operis de Arithmetica, quod Opus perfectum inscripsit, est in ordine Decimus.*

G. Eneström.

---

**2**:505. In betreff des 18. Kapitels der *Ars magna* hebt Herr Cantor als einen ungeheueren Fortschritt hervor, daß Cardano für gewisse spezielle kubische Gleichungen drei Wurzeln angegeben hat. Aber dieser „ungeheuere Fortschritt" findet sich schon im ersten Kapitel der *Ars magna*, wo Cardano teils im Vorübergehen bemerkt, daß die Gleichung $x^4 + 12 = 7x^2$ vier Wurzeln hat, nämlich 2, $-2$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, teils ausführlich auseinandersetzt, unter welchen Bedingungen eine kubische Gleichung zwei oder drei Wurzeln haben kann. Für den letzten Fall gibt er richtig die Bedingung $\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}} > b$ an, wenn die gegebene Gleichung $x^3 + b = ax$ ist. Der Umstand daß Cardano in erster Linie auf die vier Wurzeln der Gleichung $x^4 + 12 = 7x^2$ hinweist, scheint mir von Interesse zu sein, weil er andeutet, daß Cardano vielleicht durch biquadratische Gleichungen dieser Art zu seiner Entdeckung, daß eine Gleichung mehr als zwei Wurzeln haben kann, geführt ist. Hinsichtlich der von Herrn Cantor erwähntem Rückverweisung auf das 1. Kapitel, bin ich nicht ganz sicher, ob Herr Cantor dieselbe richtig gedeutet hat. Meines Erachtens kann sich die Verweisung wenigstens ebensogut auf § 8 des 1. Kapitels beziehen, wo Cardano angibt, daß in betreff der Gleichungen $x^3 + ax^2 = b$ und $x^3 + b = ax^2$ immer die Differenz der positiven und der negativen Wurzeln dem Koeffizienten von $x^2$ gleich ist, denn dies bedeutet ja, daß die algebraische Summe der drei Wurzeln diesem Koeffizienten gleich ist.

G. Eneström.

---

**2:509,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270, 509. — **2:510,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2:512,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2:514, 516, 517,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2:524, 529,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906, S. 90—91. — **2:530,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354—355; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2:531,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906, S. 212.

---

**2**:532. In betreff des *Opus novum de proportionibus* kann bemerkt werden, daß es gerade das 5. Buch des von Cardano geplanten *Opus perfectum* ist. Am Anfange der ersten Seite der Originalausgabe vom Jahre 1570 steht nämlich: Hieronymi Cardani . . . de proportionibus, seu Operis perfecti liber quintus". Auffälligerweise hat das Titelblatt die unrichtige Angabe: *Opus novum de proportionibus . . . in V libros digestum*, obgleich es leicht zu konstatieren ist, daß die Arbeit gar nicht aus fünf Büchern besteht, und überdies am Ende (S. 271): „*Libri* de proportionibus finis" steht. — Die *Regula Aliza* ist entweder das letzte Buch des geplanten *Opus perfectum* oder ein Anhang desselben, denn auf dem besonderen Titelblatt der Originalausgabe vom Jahre 1570 steht: *De Aliza regula libellus, hoc est Operis perfecti . . . necessaria coronis.*

G. Eneström.

**2** : 532, 535, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2** : 536, siehe BM **7**$_3$, 1906, S. 212 —213.

---

2 : 539. Als die weitaus bedeutsamste Bemerkung des Werkes *Ars magna arithmeticae* bezeichnet Herr CANTOR die folgende: „Cum fuerint denominationes extremae aequales extremis, semper aequatio erit una tantum et casus possibilis, quotquot fuerint denominationes. Cum vero denominationes intermediae fuerint aequales extremis tunc semper erunt plures aequationes in quaesito et casus poterit cum hoc etiam esse impossibilis“, und etwas weiter unten gibt Herr CANTOR die zwei Behauptungen auf folgende Weise wieder: „Falls eine Gleichung $n$-ten Grades auf Null gebracht nur einen Zeichenwechsel der Glieder wahrnehmen läßt, ist immer eine und nur eine positive Wurzel vorhanden; zweimaliger Zeichenwechsel ist das Kennzeichen mehrerer positiver oder lauter imaginärer Wurzeln; auf vollständiges Vorhandensein der Gleichungsglieder kommt es nicht an“.

Hierzu bemerke ich folgendes.

1) Die von CARDANO beispielsweise angeführten Gleichungen sind $2^{\text{ten}}$, $3^{\text{ten}}$ und $4^{\text{ten}}$ Grades und meines Wissens hat sich CARDANO nur einmal ganz im Vorübergehen, und zwar mit sehr wenigem Erfolg, mit Gleichungen höheren Grades beschäftigt. Es ist also nicht ganz genau, hier von einer Gleichung $n$ten Grades zu sprechen.

2) Es geht nicht an, den Ausdruck „casus impossibilis“ des CARDANO mit „lauter imaginäre Wurzeln“ zu übersetzen, und dies um so weniger, weil dadurch seine zweite Behauptung unrichtig wird; in der Tat hat ja z. B. eine Gleichung von der Form $x^3 + a_3 = a_2 x^2 + a_1 x$ ($a_1$, $a_2$, $a_3$ positive Zahlen) immer eine reelle negative Wurzel. Mit „casus impossibilis“ bezeichnet CARDANO natürlich (vgl. die Bedeutung des Ausdruckes „casus possibilis“) den Fall, in dem alle Wurzeln entweder negativ oder imaginär sind.

3) Es scheint mir, als ob man bei der Wiedergabe der Behauptungen des CARDANO besonders hervorheben sollte, daß das Zeichen des letzten Gliedes eine hauptsächliche Rolle spielt. Aus diesem Grunde erlaube ich mir, folgende Formulierung derselben vorzuschlagen:

a) Wenn in einer Gleichung $2^{\text{ten}}$, $3^{\text{ten}}$ oder $4^{\text{ten}}$ Grades das letzte Glied negativ ist, und wenn nur ein negatives Glied oder nur eine zusammenhängende Folge von negativen Gliedern vorkommt, so gibt es eine und nur eine positive Wurzel;

b) Wenn in einer Gleichung $2^{\text{ten}}$, $3^{\text{ten}}$ oder $4^{\text{ten}}$ Grades das letzte Glied positiv ist, und wenn nur ein negatives Glied oder nur eine zusammenhängende Folge von negativen Gliedern vorkommt. so gibt es entweder mehrere oder keine positiven Wurzeln;

c) Der Ausdruck „zusammenhängende Folge“ bedeutet, daß die Differenz der Exponenten zweier succesiver Glieder überall $= 1$ ist.

4) Will man das Wort „Zeichenwechsel“ benutzen, wäre es am Platze besonders anzugeben, daß CARDANO eigentlich keine Gleichungen mit mehr als zwei Zeichenwechseln in Betracht zieht. Für die Gleichung $x^3 - a_1 x^2 + a_2 x - a_3 = 0$ paßt also keine seiner zwei Regeln, obgleich er wirklich im Vorübergehen eine Gleichung dieser Form behandelt hat, und dabei bemerkt, daß die Gleichung drei positive Wurzeln haben kann.

G. ENESTRÖM.

---

**2 : 541, 548,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S 509—510. — **2 : 549,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510; **6**$_3$, 1905, S. 401. — **2 : 550,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 355. — **2 : 554,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2 : 555,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 285; **6**$_3$, 1905, S. 322. — **2 : 561,** siehe BM **7**$_3$, 1906, S. 91. — **2 : 565, 567, 568,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 285—286. — **2 : 569,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2 : 572—573,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510; **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 576,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 355—356. — **2 : 579,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 145. — **2 : 580—581,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 207. — **2 : 582,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2 : 583,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270; **2**$_3$, 1901, S. 356. — **2 : 585,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 69—70. — **2 : 592,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2 : 594,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270. — **2 : 597,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270; **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2 : 599—600,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2 : 602,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270. — **2 : 603—604,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270—271; **6**$_3$, 1905, S. 108. — **2 : 611,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 356—357. — **2 : 612,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2 : 612—613,** siehe BM **7**$_3$, 1906, S. 91—92. — **2 : 613,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357; **5**$_3$, 1904, S. 306.

---

2 : 613. Da eigentlich gar keine biographischen Notizen über Guillaume Gosselin vorliegen (vgl. H. Bosmans, Biblioth. Mathem. 7$_3$, 1906, S. 44) erlaube ich mir hier einige, freilich nicht unbekannte Zeilen aus der „Epistola ad lectorem“ der Bachetschen Diofantos-Ausgabe (Paris 1621) noch einmal zum Abdruck zu bringen: „Cardinalis Perronius . . . mihi saepe testatus est, se codicem manuscriptum habuisse . . . quem cum Guilielmo Gosselino concivi suo, qui in Diophantum commentaria meditabatur, perhumaniter more suo exhibuisset, paulo post accidit ut Gosselinus peste correptus interiret“. Dieser Passus, der schon von Nesselmann (*Die Algebra der Griechen*, S. 258) Boncompagni (Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. 2, 1869, S. 464) und P. Tannery (*Diophanti Opera omnia* II, S. XXXIV) für einen anderen Zweck zitiert worden ist, könnte vielleicht der Ausgangspunkt für Nachforschungen über Gosselins Todesjahr sein: gewöhnlich wird ja angegeben, daß er etwa 1590 starb.

G. Eneström.

---

**2 : 614,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 617, 619,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 108—109. — **2 : 620,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 621,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146; **6**$_3$, 1905, S. 402; **7**$_3$, 1906, S. 214. — **2 : 623,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146—147. — **2 : 632,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 109. — **2 : 634, 637,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 315–316. — **2 : 638,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 147. — **2 : 642, 643,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271. — **2 : 644,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 402—403. — **2 : 655,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2 : 656,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 286. — **2 : 659, 660,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 147—148. — **2 : 661,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 403. — **2 : 665,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271. — **2 : 669,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 203. — **2 : 670,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 403. — **2 : 674,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 88. — **2 : 683,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148.

---

2 : 687. Die *Cyclomathia* des Leotaud erschien 1663 (nicht 1662).

C. Grönblad.

---

2 : 693. Das hier erwähnte 4. Buch der (im Jahre 1657 erschienenen) *Exercitationes mathematicae* des Franciscus van Schooten wurde schon früher als selbständiges Werk veröffentlicht unter dem Titel: *De organica conicarum sectionum in plano descriptione tractatus . . . Cui subnexa est appendix de cubicarum aequationum resolutione.* Lugd. Batavor. 1646. Aus diesem Grunde ist auch das Vorwort des 4. Buches der *Exercitationes* vom November 1646 datiert. — Der Appendix der älteren Arbeit findet sich nicht in den *Exer-*

*citationes*, wurde aber bekanntlich vom Verfasser in die zweite Auflage seiner lateinischen Ausgabe der CARTESianischen Geometrie aufgenommen.

C. GRÖNBLAD.

---

**2 : 693,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 287. — **2 : 700, 701, 703, 704, 705,** siehe BM **1**$_3$, 1900. S. 271—273. — **2 : 715,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 412. — **2 : 716,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 404. — **2 : 717, 718,** siehe BM **7**$_3$, 1906, S. 92—93. — **2 : 719,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2 : 720,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 287; **6**$_3$, 1905, S. 404. — **2 : 721,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273; **6**$_3$, 1905, S. 404—405.

---

2 : 741. Das hier im Vorübergehen erwähnte *Supplementum chiliadis logarithmorum continens praecepta de eorum usu* (1625) von KEPLER bietet unter anderem auch einen kleinen Beitrag zur Vorgeschichte der Exponentialreihe. In betreff des Aufsuchens einer Zahl, deren Logarithmus nicht in der Tafel steht, lehrt KEPLER nämlich ein Verfahren, das zu der Formel

$$e^z \sim 1 + z + \frac{z^2}{2}$$

führt, so daß die drei ersten Glieder der Exponentialreihe richtig angegeben sind. KEPLERS Regel findet sich im 8. Kapitel als „praeceptum III" und lautet (*Opera omnia*, ed. C. FRISCH **7**, Frankfurt am Main 1868, S. 372):

> Dato logarithmo proxime majorem exscribe ex Chiliade cum numero absoluto rotundo respondente, factaque subtractione dati ab exscripto, residuum duc in absolutum exscriptum ut multiplicantem . . . Sed quia ei [= numero justo] adhuc deest aliquid, corrigetur sic, si facti curtati dimidium colloces loco ultimarum cyphrarum multiplicationis et multiplicationem repetas.

Setzt man den gegebenen Logarithmus gleich $k$, die Zahl der Tafel, deren Logarithmus dem gegebenen am nächsten kommt, gleich $a$, $\log a - k$ gleich $\delta$, und die gesuchte Korrektion gleich $x$, so daß $\log(a + x) = k$, kann man die KEPLERsche Regel auf folgende Weise ausdrücken:

$$x = \left(a + \frac{a\delta}{2}\right)\delta.$$

Nun ist

$$\delta = \log a - k = \log a - \log(a + x) = -\log\left(1 + \frac{x}{a}\right),$$

also, weil die Grundzahl der KEPLERschen Logarithmen gleich $e^{-1}$ ist,

$$(e^{-1})^{-\delta} = 1 + \frac{x}{a}, \text{ oder } \frac{x}{a} = e^{\delta} - 1,$$

folglich

$$e^{\delta} - 1 = \frac{1}{a}\left(a + \frac{a\delta}{2}\right)\delta = \delta + \frac{\delta^2}{2}, \text{ oder } e^{\delta} = 1 + \delta + \frac{\delta^2}{2}.$$

Selbstverständlich hat KEPLER selbst diese Folgerung nicht gezogen, und wahrscheinlich hat er die von ihm angegebene Regel aus dem Satz 26 der „Demonstratio structurae logarithmorum" (a. a. O. S. 339) hergeleitet. Dieser Satz besagt, daß

$$\frac{1}{a} > \frac{\log a - \log(a + x)}{(a + x) - a} > \frac{1}{a + x};$$

also ist annäherungsweise

$$\frac{\log a - \log(a + x)}{x} = \frac{1}{a + \frac{1}{2}x}$$

oder

$$\frac{\delta}{x} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}x}$$

woraus

$$x = \frac{a\delta}{1-\frac{1}{2}\delta} \sim a\,\delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right).$$

G. Eneström.

---

**2 : 742,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142. — **2 : 746,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2 : 747,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 173; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 225. — **2 : 749,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88. — **2 : 766,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 412 —413. — **2 : 767,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148, 357—358. — **2 : 770,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 208. — **2 : 772, 775,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 358—359. — **2 : 777,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 204. — **2 : 783,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88—89. — **2 : 784,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148.

---

**2** : 787. Als Ergänzung einer früheren Notiz (BM. $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 405) über Klammern als Zeichen der Zusammengehörigkeit verschiedener Ausdrücke zum Zwecke der Ausführung einer neuen Operation, bemerke ich, daß meines Wissens gewöhnliche (runde) Klammern für diesen Zweck zuerst von Tartaglia im 2. Bande (1556) seines *General trattato di numeri e misure* angewendet worden sind. Sehr oft kommen solche Klammern bei Wurzeln aus zusammengesetzten Ausdrücken vor (vgl. Bl. $167^b$, $169^b$, $170^b$, $174^b$, $177^a$ usw.); so z. B. drückt Tartaglia (Bl. $167^b$) $\sqrt{\sqrt{28}-\sqrt{10}}$ auf folgende Weise aus: ℞ v. (℞ 28 men ℞ 10); ℞ v. bedeutet „radix universalis“. Ausnahmsweise benutzt Tartaglia (Bl. $168^b$, $169^a$) die erste Klammernhälfte um zu bezeichnen, daß zwei vor einem Minuszeichen stehende Monome als ein einziger Term betrachtet werden sollen; so z. B. bedeutet (Bl. $168^b$): men (22 men ℞ 6 nicht $-22-\sqrt{6}$ sondern $-(22-\sqrt{6})$. Dagegen hat Tartaglia meines Wissens die Klammern nie als Multiplikationszeichen gebraucht. G. Eneström.

---

**2 : 787, 791,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 405. — **2 : 793—794,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 316—317, 405—406. — **2 : 795,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 317. — **2 : 797—798,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 317. — **2 : 799,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307. — **2 : 802,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 208. — **2 : 812,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 37. — **2 : 820,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307. — **2 : 825,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2 : 832,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 203—204; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 211. — **2 : 840,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148—149. — **2 : 843,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 328. — **2 : 850,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 109—110. — **2 : 856, 865,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149. — **2 : 876, 878, 879,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511. — **2 : 891,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2 : 897,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 406. — **2 : 898,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 37, 208. — **2 : 901,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511. — **2 : 919,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 204. — **2 : VIII** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142. — **2 : IX, X** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511—512.

---

**3 : 9,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359. — **3 : 10,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 518; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 211. — **3 : 11,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3 : 12,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512.

---

**3** : 14—15. Hier finden sich einige Zeilen über Nicolas de Malézieu (1650—1727) und die *Elémens de géométrie de M. le duc de Bourgogne*, welche Schrift Herrn Cantor nicht zugänglich gewesen zu sein scheint, da er über deren Inhalt nach dem Referate in der Histoire de l'académie des sciences [de Paris] 1727 berichtet. Herr CANTOR erwähnt auch nach Herrn LORIA das in Padua 1713 erschienene Buch: *Serenissimi Burgundiae ducis Elementa geometrica ex gallico sermone in latinum translata,* und fügt hinzu, er wisse nicht zu sagen, ob zwischen diesem Buche und den *Elémens de géométrie* ein Zusammenhang besteht.

In betreff der letzten Frage kann sofort bemerkt werden, daß das Buch vom Jahre 1713 in Wirklichkeit eine genaue Übersetzung der *Elémens de géométrie* ist. Nun geben ja die Bibliographen im allgemeinen an (siehe z. B. QUÉRARD, *La France littéraire* **5,** Paris 1833, S. 464), daß die letzte Schrift zuerst 1715 herausgegeben wurde, und da teils die „Licenza" der Übersetzung vom 3. September 1712 datiert ist, teils eine Rezension dieser Übersetzung im Giornale de' letterati d'Italia **14** (1713) erschien, kann die Jahreszahl MDCCXIII nicht verdruckt sein. Auf der anderen Seite ist die Übersetzung nicht nach einer Abschrift des Originals sondern nach der Druckausgabe desselben verfertigt, denn am Anfang der Übersetzung findet sich eine „Praefatio gallica latine reddita", die aus der Druckausgabe des Originals entnommen worden sein muß. Die gewöhnliche Angabe, daß diese Ausgabe zuerst 1715 erschien, kann folglich nicht richtig sein, und in der Tat ist das Buch schon in den Acta Eruditorum 1707, S. 92—93 angezeigt. Dort steht als Druckjahr 1705, und dasselbe Druckjahr hat auch MURHARD (*Litteratur der mathematischen Wissenschaften* **1,** Leipzig 1797, S. 248), der durch ein Sternchen angibt, daß er selbst ein Exemplar des Buches eingesehen hat. Es ist also sicher, daß das Buch nicht 1715 sondern 1705 erschien.

Über den wirklichen Verfasser der *Elémens de géométrie* gibt das Vorwort ganz bestimmte Auskunft; dort wird nämlich ausdrücklich hervorgehoben, daß der Inhalt des Buches wesentlich von A. ARNAULD herrührt, freilich so, daß seine *Nouveaux élémens de géométrie* an einigen Stellen abgekürzt, an anderen Stellen ergänzt worden sind. Der Passus (S. 14): „MALÉZIEU verfaßte für seinen Zögling *Elémens de géométrie*", sollte also auf folgende Weise modifiziert werden: „MALÉZIEU benutzte bei seinem Unterrichte die *Nouveaux élémens de géométrie* von ARNAULD, und der Prinz redigierte auf Grund des mündlichen Unterrichts die später gedruckten *Elémens de géométrie de M. le duc de Bourgogne*". Dagegen rühren vielleicht von MALÉZIEU die algebraisch gelösten Probleme am Ende des Buches her. — Herr LORIA hat schon darauf hingewiesen, daß die *Elémens de géométrie* in betreff eines mathematischen Satzes einen Beweis enthält, der von der Herzogin von MAINE herrührt. Es handelt sich darum, zu beweisen, daß $ad = bc$ wenn $a : b = c : d$, und dies gelang der Herzogin, als sie nur sechzehn Jahre alt war. Ich gebe hier den Grundgedanken des einfachen Beweises wieder. Sei $b = \mu a$ und $a : b = c : d$, so muß offenbar $d = \mu c$ sein, also $ad = a(\mu c) = \mu ac$, und ebenso $bc = (\mu a)c = \mu ac$, folglich $ad = bc$. Die Herzogin führte den Beweis für $a = 2$, $b = 4$, $c = 3$, $d = 6$, $\mu = 2$ durch.

G. ENESTRÖM.

---

**3:17,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512. — **3:22,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209.

---

**3**: 23. Herr CANTOR bemerkt hier, daß CARLO RENALDINI eine gewisse angenäherte Kreisteilung 1668 in seiner Schrift *De resolutione et compositione mathematica* veröffentlicht haben soll, und fügt hinzu, daß die erwähnte Schrift nur der wiederholte Abdruck eines Abschnittes eines bereits 1655 als *Opus mathematicum* erschienenes Werkes war. In betreff der ersten Bemerkung kann das Wort „soll“ ohne weiteres gestrichen werden, denn Renaldini hat tatsächlich die fragliche Kreisteilung in der Schrift *De resolutione & compositione mathematica libri duo* (Patavii MDCLXVIII) angegeben, und zwar S. 367—368: „Auctoris methodus ad generalem polygonorum omnium ordinatorum inscriptionem in circulo“. Daß bei Renaldini der Punkt $C$ der Cantorschen Figur 5 nicht Scheitelpunkt eines gleichseitigen Dreiecks, sondern Schnittpunkt zweier Kreise, die mit dem Halbmesser $AB$ bzw. um $A$ und $B$ beschrieben werden, ist, hat ja gar keine Bedeutung.

Dagegen ist die zweite Bemerkung des Herrn Cantor meines Erachtens unrichtig. Daß sie zum mindesten höchst verdächtig sein muß, kann man aus Riccardis *Biblioteca matematica italiana* (**1**:2, Sp. 347) entnehmen, denn dort wird erwähnt, daß die 1668 erschienene Schrift 525 Folioseiten enthält, während der einzige von Riccardi verzeichnete Teil des *Opus mathematicum* ein Quartband von 475 Seiten ist, und noch dazu als „Pars prior Numerorum algebram complectens“ bezeichnet wird. In der Tat ist das 1655 erschienene *Opus mathematicum* als die erste Auflage des im Jahre 1665 veröffentlichten ersten Teils der großen Arbeit *Ars analytica mathematum* anzusehen, und hat gar nichts mit der Schrift *De resolutione et compositione mathematica* zu tun. Nun könnte es ja möglich sein, daß es wirklich einen zweiten Teil des *Opus mathematicum* gäbe, und daß die Schrift *De resolutione et compositione mathematica* ein Abdruck dieses Teils wäre. In der Tat lautet der Titel des 1655 erschienenen Buches: *Caroli Renaldinii. . . Opus mathematicum in quo utraque algebra, vetus scilicet et nova à se in opere, hac de re pridem edito, pertractata novis praeceptis; novisque demonstrationibus illustratur. Methodus quoque resolutionis et compositionis mathematicae longè copiosiùs, quàm ibidem, ad abstrusiora theoremata, et problemata enodanda declaratur. Pars prior Numerosam algebram complectens*, und S. 12 wird unter „Synopsis eorum quae in hoc volumine continentur“ auch „Tractatus . . . de resolutione et compositione mathematica“ aufgeführt; es ist also sicher, daß Renaldini im Jahre 1655 einen solchen Traktat zu veröffentlichen beabsichtigte. Auf der anderen Seite hat weder Riccardi noch irgend ein anderer mir bekannter Bibliograph oder Historiker der Mathematik die „Pars posterior“ des *Opus mathematicum* erwähnt, und meine eigenen Versuche ein Exemplar derselben aufzufinden sind erfolglos geblieben. Bis auf weiteres betrachte ich also die Angabe als unrichtig, daß die Schrift *De resolutione et compositione mathematica* Renaldinis vor 1668 erschienen ist. Die Schrift selbst enthält weder auf dem Titelblatt noch im Vorwort eine Andeutung, daß eine frühere Ausgabe existiert hat.

G. Eneström.

---

**3 : 24**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209. — **3 : 25**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209, 399. — **3 : 26**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359. — **3 : 39**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 407. — **3 : 45—48, 49, 50**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512—513.

---

**3** : 57. Hier wird angegeben, daß die von N. Mercator in seiner *Logarithmotechnia* (1668) ausgeführte Division

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + \ldots$$

damals neu war. Auf der anderen Seite hat bekanntlich NEWTON selbst behauptet, daß WALLIS „in Opere suo Arithmetico, publicato A. D. 1657. Cap. 33. Prop. 68. reduxit fractionem $\frac{A}{1-R}$ per perpetuam Divisionem in seriem $A + AR + AR^2 + AR^3 + AR^4 +$ etc." (siehe z. B. *Commercium epistolicum J. COLLINS et aliorum*, ed. BIOT et LEFORT, Paris 1856, S. 9), und die CANTORsche Angabe ist ja unvereinbar mit der NEWTONschen Behauptung, deren Richtigkeit meines Wissens bisher nicht in Abrede gestellt worden ist (vgl. z. B. CH. HUTTON, *Tracts on mathematical and philosophical subjects* 1, London 1812, S. 416). Untersucht man indessen näher die von NEWTON zitierte Stelle (*JOHANNIS WALLISII Mathesis universalis sive arithmeticum opus integrum*, Oxonii 1657, S. 302—304), so findet man, daß in Wirklichkeit die von WALLIS ausgeführte Division, nicht

$$\frac{A}{1-R} = A + AR + AR^2 + AR^3 + AR^4 + \ldots$$

sondern

$$\frac{AR^t - A}{R-1} = A + AR + AR^2 + \ldots$$

ist, wo $t$ eine beliebig große ganze Zahl bedeutet. Der Unterschied ist ja von unserem Gesichtspunkte aus nicht besonders groß, aber dennoch kann man wohl sagen, daß die NEWTONsche Behauptung nicht ganz genau ist. Auf der anderen Seite wäre es für die Leser der *Vorlesungen* angenehm zu erfahren, auf welche Weise MERCATOR, in betreff der von ihm ausgeführten, von Herrn CANTOR als „neu" bezeichneten Division, in WALLIS einen Vorläufer gehabt hat.

G. ENESTRÖM.

---

**3 : 63**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906, S. 93—94.

---

**3** : 68. Hinsichtlich der NEWTON'schen Abhandlung *Analysis per aequationes numero terminorum infinitas* wird bemerkt, daß sie, soweit sie Erfinderrechte begründet, als 1669 bekannt gelten muß, wenn der Druck auch erst im XVIII. Jahrhundert erfolgte. Da nun Herr CANTOR etwas weiter unten (S. 107) erwähnt, daß die in der *Analysis per aequationes* vorkommenden Gleichungsauflösungen ihre erste Veröffentlichung im Drucke in der *Algebra* von WALLIS (1685) fanden, wäre es auch am Platze anzugeben, daß das wesentlichste der Reihenlehre der NEWTONschen Abhandlung ebenfalls 1685 in der *Algebra* von WALLIS veröffentlicht wurde und zwar im 95. Kapitel (S. 341—347). Dort wurden z. B. die Reihen für $e^x$, $\sin x$, $\cos x$ (eigentlich sin vers $x$, d. h. $1 - \cos x$) und $\operatorname{arc} \sin x$ zum Abdruck gebracht.

G. ENESTRÖM.

---

**3 : 70**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 360. — **3 : 82**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 308. — **3 : 100**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149.

---

**3** : 100. In betreff des LEIBNIZschen Beweises des Satzes, daß die Fläche eines rationalen rechtwinkligen Dreiecks nie ein Quadrat ist, kann bemerkt werden, daß LEIBNIZ diesen fand, nachdem er den FRENICLE'schen Beweis gesehen hatte. Sein Beweis ist nämlich vom 29. Dezember 1678 datiert und im Dezember 1678 schrieb er (*Mathematische Schriften*, herausg. von C. I. GERHARDT, I S. 185) an Galloys „J'ay demonstré le theoreme de Mons. Frenicle (de l'impossibilité d'un triangle rectangle dont l'aire est quarrée) par une voye differente de la sienne, et bien meilleure, puisqu'elle donne une infinité d'autres theoremes plus generaux Cependant les plus habiles mathematiciens ont cherché inutilement une demonstration differente de celle de M. Frenicle". Die Bedeutung seines Beweises hat Leibniz offenbar überschätzt, denn derselbe ist kaum wesentlich von dem Frenicleschen verschieden. G. Eneström.

---

**3:102,** siehe BM $6_3$, 1905, S. 318.

---

3:102. Da Herr Cantor weiter unten (S. 578) aus einer Abhandlung von de Gua entnommen hat, daß Prestet einen, wie dieser selbst nachmals zugestand, mißglückten Versuch eines Induktionsbeweises der Descartesschen Zeichenregel gemacht hatte, gebe ich hier nähere Auskunft über diesen Punkt. Der betreffende Beweis findet sich S. 368 der ersten Auflage (Paris 1675) der *Elemens des mathematiques* des Prestet. Zuerst weist dieser darauf hin, daß

$$(x-2)(x-3)(x-4)(x+5) = x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120,$$
$$(x+2)(x+3)(x+4)(x-5) = x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120,$$

so daß die zwei Gleichungen

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$
$$x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$$

bezw. drei positive und eine negative, drei negative und eine positive Wurzel besitzten, während auf der anderen Seite in den Gleichungen bezw. drei Zeichenwechsel und eine Zeichenfolge, drei Zeichenfolgen und ein Zeichenwechsel vorkommen. Daß es sich hier um eine allgemein gültige Regel handelt, begründet Prestet auf folgende Weise: „$x$ qui a toûjours +, et chaque vraye racine toûjours —, multipliant alternativement une troisiéme grandeur, distribuent aux termes de l'égalité composée un changement alternatif de + et —. Mais au contraire, $x$ et les fausses racines qui ont toûjours +, multipliant alternativement une troisiéme grandeur, elles distribuent alors deux fois de suite aux termes de l'égalité composée, un même signe +, si la troisiéme grandeur a +, ou le même signe —, si cette grandeur a —".

Dieser offenbar ungenügende Beweis fehlt in der zweiten Auflage (*Nouveaux elemens des mathématiques* Paris 1689) der Prestetschen Arbeit, und der Verfasser begnügt sich zu sagen (II, S. 353—354): „On pourra feindre ou s'imaginer que l'égalité proposée renferme autant de racines qu'elle a de dimensions, et qu'entre ces racines il y en a autant de vraies, qu'il y a de variations des signes + et — dans les termes, et autant de fausses, qu'on y trouve de fois deux mêmes signes +, ou deux mêmes signes —, qui s'entre-suivent immédiatement". Noch dazu schaltet Prestet weiter unten (S. 362—365) einen Artikel „De quelques reflexions de l'academie royale des sciences sur une régle d'analyse de Monsieur Descartes" ein, worin er, unter Bezugnahme auf einen Aufsatz im Journal des sçavans 1684 S. 250, die Richtigkeit der Descartesschen Zeichenregel verteidigt, freilich ohne auch nur einen Versuch zu machen, die Regel zu beweisen. Diese neuen Ausführungen von Prestet wurden übrigens unmittelbar nach deren Veröffentlichung von M. Rolle (*Traité d'algèbre*, Paris 1690, S. 268—270) beanstandet. G. Eneström.

---

**3 : 112,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209—210; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 318. — **3 : 116,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 117,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 518.

---

**3** : 122. Die Angabe: „Eben die Zahl $h$, deren Entstehung wir kennen gelernt haben, ist auch als eine Hypothese, und zwar als sogenannte große Hypothese zu benutzen, während der Wert 0 die kleine Hypothese heißt" ist irreleitend, denn da Herr CANTOR unmittelbar vorher die Gleichung $8x^2 - 5x - 2 = 0$ vermittels des Wertes $h = 2$ in die Gleichung $8x^2 - 27x + 20 = 0$ transformiert hat, muß der Leser annehmen, daß entweder für $8x^2 - 5x - 2 = 0$ oder für $8x^2 - 27x + 20 = 0$ die zwei Hypothesen 0 und 2 sind. Aber in Wirklichkeit benutzt ROLLE die Hypothesen nur für solche Gleichungen, deren Glieder wechselnde Vorzeichen haben (siehe S. 124: „L'on suppose icy que l'égalité proposée . . . ait receu . . . la quatriéme préparation dont on a parlé dans le Chapitre précedent"), so daß die Gleichung $8x^2 - 5x - 2 = 0$ gar nicht in Betracht kommen kann; der Grund dazu ist natürlich, daß Null nur dann die kleine Hypothese sein kann, wenn die reellen Wurzeln sämtlich positiv sind. Auf der anderen Seite ist für die Gleichung $8x^2 - 27x + 20 = 0$ die große Hypothese nicht 2 sondern $\frac{27}{8} + \frac{5}{8} + 1 = 5$.

G. ENESTRÖM.

---

**3** : 123. In betreff der Bedeutung des Termes „Cascade" bei ROLLE hat Herr A. VON BRAUNMÜHL (BM $4_3$, 1903, S. 399) die CANTORsche Darstellung wesentlich verbessert, indem er darauf hinweist, daß die Substitution $v = x + z$ nur zur Bildung der Cascaden dient. Man kann also nicht mit Herrn CANTOR sagen, daß die auftretenden Koeffizienten der Potenzen von $x$ einzeln verschwinden müssen, denn in den verschiedenen Cascaden bedeutet $z$ nicht dieselbe Größe. Diesen Umstand hat CH. REYNEAU, der im ersten Bande seiner *Analyse demontrée* (Paris 1708) die ROLLEsche Cascadentheorie ausführlich auseinandersetzt, besonders hervorgehoben (S. 292): „L'inconnue $x$ du produit [d. h. der Abgeleiteten] pouvant être considerée comme une indéterminée differente de $x$, qui est l'inconnue de la proposée, et étant possible que l'indéterminée $x$ ait des valeurs propres à faire en sorte que le produit soit égal à zero, en supposant que $x$ represente dans le produit ces valeurs-là, il est évident que le produit peut être supposé égal à zero".

Dagegen hat Herr CANTOR wirklich Recht, wenn er behauptet, daß die Cascaden Gleichungen sind; in der Tat sagt ROLLE ganz bestimmt (S. 125): „Chacune de ces égalitez s'appellera *Cascade*". Dieser Umstand ist ja von untergeordneter Bedeutung, und vielleicht hätte ROLLE seine Darstellung deutlicher machen können, wenn er die *Abgeleiteten* als Cascaden bezeichnet hätte, aber hier handelt es sich nur um die Tatsache selbst, nicht um eine Verbesserung der ROLLEschen Terminologie.

G. ENESTRÖM.

---

**3** : 123. Die Bemerkung: „ROLLE behauptet nun, die Wurzeln irgend einer Cascade von der letzten anfangend und aufsteigend bis zur ursprünglich gegebenen Gleichung seien stets als Hypothesen in der Cascade nächsthöheren Grades zu verwenden. In unseren Tagen spricht man den Satz so aus: Zwischen zwei aufeinander folgenden Wurzeln $\alpha$ und $\beta$ der Gleichung $f'(z) = 0$ kann nicht mehr als eine einzige Wurzel von $f(z) = 0$ liegen" ist nicht unrichtig, gibt aber keine genauere Auskunft über Rolles eigene Darstellung des Satzes. Im Vorübergehen bemerke ich, daß es angebracht wäre, vor „Hypothesen" das Wort „mittlere" einzufügen, um wenigstens anzudeuten, daß Rolle auch bei der Anwendung seiner Cascadenmethode sowohl die „kleine" wie die „große" Hypothese benutzt. Wie es jetzt steht, ist es nicht leicht zu ersehen, auf welche Weise Rolle mehr als eine Wurzel der kubischen Gleichung bestimmen konnte, denn die Cascade hat ja nur zwei Wurzeln in diesem Falle.

Der Satz selbst lautet bei Rolle (S. 128): „Lors qu'il y a des racines effectives dans une cascade, les hypotheses de cette cascade donnent alternativement l'une $+$ et l'autre $-$," und den Sinn dieses Satzes kann man auf folgende Weise wiedergeben: wenn eine Gleichung $f(x) = 0$ nur reelle und ungleiche Wurzeln hat, so liegt eine dieser Wurzeln zwischen zwei aufeinanderfolgenden Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$. Ferner bemerkt Rolle (S. 130), daß, wenn in einer Gleichung $f(x) = 0$ keine Wurzel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$ liegt, so hat die Gleichung $f(x) = 0$ zwei imaginäre Wurzeln. Noch dazu hebt er hervor (S. 130), daß, wenn die Gleichung $f'(x) = 0$ zwei imaginäre Wurzeln hat, so hat die Gleichung $f(x) = 0$ wenigstens zwei solche Wurzeln.

Dagegen kommt der Satz, der gewöhnlich als das Rollesche Theorem bezeichnet wird (vgl. Braunmühl, BM $4_3$, 1903, S. 399), im *Traité d'algèbre* nicht vor, aber es ist nicht unmöglich, daß dieser Satz, wenn auch nicht in der allgemeinen Form, später von Rolle veröffentlicht wurde, und zwar in dem von Herr Cantor erwähnten Duodezbändchen, worin die Cascadenmethode bewiesen ist. Diese Schrift, die außerordentlich selten zu sein scheint, ist mir leider nicht zugänglich, und ich kann nicht einmal den genauen Titel derselben feststellen. Herr Cantor gibt nach einem Zitate von Rolle selbst als Titel „Sur les effections géométriques" und als Druckjahr 1690 an; dagegen verzeichnet J. Rogg (*Handbuch der mathematischen Literatur*, Tübingen 1830, S. 524) eine Schrift von Rolle: *Démonstration d'une méthode pour résoudre les égalités de tous les degrés suivie de deux autres méthodes, dont la première donne les moyens de résoudre ces mêmes égalités par la géométrie et la seconde pour résoudre plusieurs questions de Diophante, qui n'ont point encore esté resolues.* Paris, Cussons 1692, 12⁰. Meine Vermutung, daß Rolle auch das nach ihm benannte Theorem veröffentlicht hat, beruht darauf, daß es sich, freilich nicht in der jetzt geläufigen Form, in der *Analyse demontrée* (I, Paris 1708, S. 290) von Ch. Reyneau, findet und dieser verweist für seine Darstellung der Cascadenmethode ausdrücklich auf Rolle. Reyneau drückt das Theorem auf folgende Weise aus: „Les racines d'une équation, dont toutes les racines sont réelles, positives et inégales, sont les limites de l'équation nouvelle qui vient de la multiplication de chaque terme de la premiere par le nombre qui est l'exposant de l'inconnue de ce terme, et de son dernier terme par zero".

G. Eneström.

---

**3 : 123,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 399. — **3 : 124,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 407—408; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 400. — **3 : 126,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 288. — **3 : 131,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 210. — **3 : 151,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326. — **3 : 167, 172—173,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 400. — **3 : 174,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149—150. — **3 : 183,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 432. — **3 : 188,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 241. — **3 : 201,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 207,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 519. —

**3 : 215,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150. — **3 : 218,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 220,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326. — **3 : 224,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3 : 225, 228,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150. — **3 : 230,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 211—212. — **3 : 232,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 212.

---

**3** : 232. In betreff der Abhandlung von JOHANN BERNOULLI *Principia calculi exponentialium seu percurrentium* (Acta Eruditorum 1697, S. 125—133) erlaube ich mir hier eine kleine Notiz einzufügen, die freilich nur bibliographisches Interesse hat. In POGGENDORFFS *Biographisch-literarischem Handwörterbuch* wird (I, Sp. 157) unter die Schriften von JOHANN BERNOULLI eine *Dissertatio de calculo exponentiali* (Paris 1725) aufgeführt, aber da diese Abhandlung in den *Opera omnia* fehlt, habe ich immer die POGGENDORFFsche Angabe als sehr verdächtig betrachtet, obgleich es mir unmöglich war zu ermitteln, woher er dieselbe entnommen hatte. Jetzt ist es mir gelungen die Frage zu erledigen. In der posthumen Arbeit von VARIGNON *Eclaircissemens sur l'analyse des infiniment petits* (Paris 1725) ist S. 101—107 JOHANN BERNOULLIS Abhandlung in den Acta Eruditorum 1697 zum größten Teil und nur mit einigen weniger wesentlichen Abweichungen zum Abdruck gebracht. Freilich ist der Titel daselbst nur *De calculo exponentiali*, aber im „Avertissement" auf Seite 100 wird die Abhandlung „dissertation" genannt. Daß Sonderabzüge des Abdruckes vorhanden sind, ist ja nicht unmöglich, wenn auch wenig wahrscheinlich.

Offenbar beruht die Angabe von WÖLFFING (*Mathematischer Bücherschatz*, Leipzig 1903, S. 164), daß eine *Dissertatio de calculo exponentiali* von JOHANN BERNOULLI in Paris 1825 erschienen ist, auf einem Schreibfehler; die Angabe bezieht sich ohne Zweifel auf den VARIGNONschen Abdruck vom Jahre 1725.

G. ENESTRÖM.

---

**3** : 244. Im Zusammenhang mit den Angaben von neuen Auflagen der HÔPITALschen *Analyse des infiniment petits* könnte auch bemerkt werden, daß zwei Kommentare dieses Buches besonders herausgegeben worden sind, nämlich *Commentaire sur l'analyse des infiniment petits. Par M. CROUZAS* (Paris 1721, (36) + 320 S. 4° + 4 Taf.) und *Eclaircissemens sur l'analyse des infiniment petits. Par M. VARIGNON* (Paris 1725, (8) + 118 + 2 S. 4° + 6 Taf.). Da G. VIVANTI in seiner Schrift: *Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla matematica. Saggio storico* (Mantova 1894, S. 52, 119) nach MONTUCLA einen dritten Kommentar von PAULIAN zitiert, und noch in der zweiten Auflage jener Schrift (Napoli 1901, S. 76) bemerkt, er kenne nicht den exakten Titel dieses Kommentars, mag hier darauf hingewiesen werden, daß der „Commentaire des articles les plus difficiles de l'analyse des infiniment petits" ein Anhang (S. 257—375) der dritten, von A. H. PAULIAN besorgten Ausgabe (Paris 1768) der *Analyse des infiniment petits* ist. Die Angabe von POGGENDORFF (*Biographisch-literarisches Handwörterbuch* II, Sp. 379), daß PAULIAN in Paris 1768 einen „Commentaire sur l'analyse des infiniment petits de L'HÔPITAL" veröffentlichte, ist also bibliographisch ungenau.

Um PAULIANS Sachkunde auf dem Gebiete der Infinitesimalrechnung zu charakterisieren, genügt es, seinen Beweis der Formel $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$ zu erwähnen. Nachdem er richtig bewiesen hat, daß wenn $\frac{x}{y} = z$, so ist $dz = \frac{dx}{y} - \frac{z dy}{y}$, fährt er fort: also ist $dz = \frac{dx}{y} - zd$ (!), folglich auch $dz = \frac{dx}{y} - \frac{xd}{y}$ (!), woraus $dz = \frac{ydx - xdy}{y^2}$ oder $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$. Er betrachtet also $y$ in $dy$ als einen Faktor!

G. ENESTRÖM.

---

**3 : 244—245,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 205, 413. — **3 : 246,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151. — **3 : 250,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514.

---

**3** : 276. Es ist richtig, daß LEIBNIZ in seinem Briefe an JOHANN BERNOULLI vom 27. Juni 1708 auch den Jesuit THOMAS GOUYE als Gegner der Differentialrechnung nennt, aber diesen neben LA HIRE als *Stütze* des ROLLE innerhalb der Pariser Akademie zu bezeichnen, ist meines Erachtens nicht richtig. Als solche Stützen nennt LEIBNIZ ausdrücklich in seinem Briefe an JOHANN BERNOULLI vom 23. März 1707 in erster Linie den Abbé JEAN GALLOIS und in zweiter Linie LA HIRE („binos illos ex malevolis ROLLII instigatoribus . . . et ego divinabo; . . . in mentem habes GALOISIUM et LA HIRIUM, calculi differentialis acerrimos hostes"). VARIGNON, der sicherlich die Sache am besten kannte, nennt sogar GALLOIS allein als ROLLES Instigator in einem undatierten Briefe an LEIBNIZ aus dem Jahre 1707 (siehe *LEIBNIZENS Mathematische Schriften* herausg. von C. I. GERHARDT IV, S. 158): „la mort de M. l'Abbé GALLOYS a enfin réduit M. ROLLE à se taire: . . . il ne pense plus à rien dire contre les infiniment petits . . . . Il se plaind d'y avoir été engagé par cet Abbé . . . . M. ROLLE allait au feu, ne pouvant (dit-il) resister aux sollicitations de l'autre."

G. ENESTRÖM.

---

**3 : 303,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 155.

---

**3** : 306. Statt „JOHN MACHIN war Professor der Astronomie am Gresham College in London" lies: „JOHN MACHIN wurde ein Jahr nach der Anfertigung des Berichtes zum Professor der Astronomie am Gresham College in London ernannt". CH. HUTTON gibt in seinem *Philosophical and mathematical dictionary* (siehe New edition, London 1815, II S. 1) das Datum der Ernennung (16. Mai 1713) an.

G. ENESTRÖM.

---

**3 : 330—331,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 241—242. — **3 : 337,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 206.

---

**3** : 364. Die Angabe, daß JOHN MACHIN eine zweckmäßige Umformung der GREGORYschen Reihe gab und daß seine Berechnung der Zahl $\pi$ 1706 von W. JONES der Öffentlichkeit übergeben wurde, ist durchaus richtig, aber es liegt sehr nahe, die Angabe so aufzufassen, daß in der *Synopsis palmariorum matheseos* nicht nur die Berechnung vorkommt, sondern auch die MACHINsche Methode wenigstens angedeutet wird (der Ausdruck des Herrn CANTOR „ohne Erläuterung" etwas weiter unten ist auch nicht vollständig deutlich), und vielleicht hat Herr Tropfke wirklich die Worte des Herrn Cantor auf diese Weise aufgefaßt, da er (*Geschichte der Elementar-Mathematik* II, S. 130) sagt: „Machin veröffentlichte seine Berechnungsart 1706“. Um in Zukunft ein Mißverständnis vorzubeugen, drucke ich hier den ganzen betreffenden Passus der *Synopsis palmariorum matheseos* (S. 263) ab:

In the circle, the diameter is to circumference as 1 to

$$\overline{\frac{16}{5} - \frac{4}{239}} - \frac{1}{3}\,\overline{\frac{16}{5^3} - \frac{4}{239^3}} + \frac{1}{5}\,\overline{\frac{16}{5^5} - \frac{4}{239^5}} - \text{etc.} = 3\,.\,14159 \text{ etc.} = \pi.$$

This series (among others for the same purpose, and drawn from the same principle) I receiv'd from the excellent analyst, and my much esteem'd friend Mr. John Machin.

Es scheint fast, als ob Jones absichtlich verbergen wollte, auf welche Weise sein Freund die Reihe hergeleitet hatte, denn dieselbe kommt an einer Stelle vor, wo es sich gar nicht um die Gregorysche Reihe handelt (diese wird von Jones S. 243 erwähnt).

Etwa gleichzeitig mit dem Erscheinen der *Synopsis* gab J. Hermann in einem Briefe an Leibniz vom 21. August 1706 die Herleitung der Machinschen Reihe (siehe *Leibnizens Mathematische Schriften,* herausg. von C. I. Gerhardt IV, S. 303), und teilte auch die Formel

$$\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{7}$$

mit.

G. Eneström.

---

**3 : 365**, siehe BM **7**$_3$, 1906, S. 94. — **3 : 367**, siehe BM **7**$_3$, 1906, S. 215. — **3 : 370—371**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 308. — **3 : 382**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 213. — **3 : 384**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 319.

---

**3** : 398. Nikolaus I Bernoulli war nicht der einzige, der im Jahre 1708 einen Beweis für die Richtigkeit des Newtonschen Verfahrens zur Aufsuchung von Faktoren eines Polynoms brachte. Einen solchen Beweis, der wesentlich mit dem Bernoullischen zusammenfällt, teilte J. Hermann fast gleichzeitig Leibniz mit (siehe *Leibnizens Mathematische Schriften*, herausg. von C. I. Gerhardt IV, Halle 1859, S. 328—331). Mit derselben Frage beschäftigte sich auch Leibniz selbst und gab in seinem Briefe an Hermann vom 6. September 1708 (a. a. O. S. 335—339) Auskunft über eine andere Methode zur Aufsuchung von Faktoren eines Polynoms. Für diesen Zweck wird zuerst das gegebene Polynom durch lineare Substitution auf die Form

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

gebracht, wo alle Koeffizienten *positiv* sind. Dann wird statt $x$ eine Zahl $h$ eingesetzt, die größer ist als der größte der Koeffizienten, und alle Divisoren der auf diese Weise erhaltenen Zahl

$$a_0 h^n + a_1 h^{n-1} + \cdots + a_n$$

aufgesucht. Wird nun jeder der fraglichen Divisoren auf die Form

$$\alpha_0 h^r + \alpha_1 h^{r-1} + \cdots + \alpha_r$$

gebracht, so weiß man, daß das transformierte Polynom nur Faktoren von der Form

$$\alpha_0 x^r + \alpha_1 x^{r-1} + \cdots + \alpha_r$$

haben kann, und daß immer $\frac{a_0}{\alpha_0}$ und $\frac{a_n}{\alpha_r}$ ganze Zahlen sein müssen. Ferner weiß man auch, daß wenn

$$\alpha_0 x^r + \alpha_1 x^{r-1} + \cdots + \alpha_r$$

ein solcher Faktor ist, so muß es unter den aufgesuchten Divisoren neben der Zahl

$$\alpha_0 h^r + \alpha_1 h^{r-1} + \cdots + \alpha_r$$

eine andere Zahl

$$\alpha_0' h^{n-r} + \alpha_1' h^{n-r-1} + \cdots + \alpha_{n-r}'$$

geben, die die Eigenschaft hat, daß $\alpha_0 \alpha_0' = a_0$, $\alpha_r \alpha_{n-r}' = a_n$. Man kann also sofort alle Divisoren ausscheiden, die nicht die genannten Eigenschaften besitzen, und in betreff der übrigen erkennt man leicht durch Probieren, ob ihnen wirkliche Faktoren des transformierten Polynoms entsprechen. Hat man alle Faktoren dieses Polynoms ermittelt, so ist es natürlich leicht auch die Faktoren des gegebenen Polynoms zu bestimmen.

Die Hauptschwierigkeit des Verfahrens ist, wie Leibniz selbst hervorhebt, die Aufsuchung der Divisoren der Zahl

$$a_0 h^n + a_1 h^{n-1} + \cdots + a_n,$$

wenn diese sehr groß ist. G. Eneström.

**3 : 408,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 213.

**3 : 412.** Es mag sein, daß in betreff des Zeitabschnittes 1700—1726 die wirklich bedeutenden deutschen Mathematiker am wenigsten Algebraiker waren, aber auf der anderen Seite verdienen sicherlich andere deutsche Mathematiker als P. Halcke hier genannt zu werden. So z. B. hat sich Leibniz im Vorübergehen mit der Descarteschen Zeichenregel beschäftigt und den Beweis derselben auf den später von Segner bewiesenen Satz, daß wenn die Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

nur reelle Wurzeln hat, so ist

$$\frac{a_1}{a_0} > \frac{a_2}{a_1} > \frac{a_3}{a_2} \cdots > \frac{a_n}{a_{n-1}},$$

zurückgeführt (siehe den Brief an Hermann vom 24. Juni 1707; *Mathematische Schriften* herausg. von C. I. Gerhardt, IV, S. 316). Den Satz selbst hat Leibniz freilich nicht bewiesen, aber er hat den Weg zur Erledigung der betreffenden Frage angewiesen. Denselben Gegenstand hat Leibniz fast gleichzeitig in einem Briefe an Chr. Wolff berührt (siehe die Ausgabe von Gerhardt, Halle 1860, S. 64). Auch andere algebraische Fragen (vgl. oben) werden im Briefwechsel zwischen Leibniz und Hermann behandelt. G. Eneström.

**3 : 447, 455,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 151. — **3 : 473,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 154—155; **4**$_3$, 1903, S. 401 — **3 : 477, 479,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 151—152. — **3 : 497, 498,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 309. — **3 : 507,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 71—72. — **3 : 521,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441. — **3 : 527,** siehe BM **7**$_3$, 1906, S. 95. — **3 : 535,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 401. — **3 : 536,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 206. — **3 : 560,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 319—321. — **3 : 565,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 326—327. — **3 : 571,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 327; **5**$_3$, 1904, S. 72. — **3 : 578,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 327; **5**$_3$, 1904, S. 309.

**3** : 582. Der vollständige Titel der hier erwähnten Abhandlung von SEGNER lautet: *Ad virum excellentissimum atque experientissimum dominum* GEORGIUM ERHARDUM HAMBERGERUM, *phil. et med. doct. in acad. Ienens. med. prof. extrord. ac phil. prof. publ. med. prov. Saxo-Vinar. Dissertatio epistolica qua regulam* HARRIOTI *de modo ex aequationum signis numerum radicum tam verarum quam spuriarum eas componentium, cognoscendi, demonstrare, simulque rationem structurae instrumenti novi, sectionibus conicis secundi generis plerisque, ac omnibus primi, describendis, apti, exponere conatur* JOANNES ANDREAS SEGNER, *M. C.* Jenae apud Christianum Franciscum Buchium (23 + (1) S. $4^0$ + 1 Taf.). Wie ich schon in der BM $5_3$, 1904, S. 309—310 angegeben habe, erschien die Abhandlung im Jahre 1728, dagegen ist die daselbst vorkommende Angabe, daß das Titelblatt als Druckjahr MDCCXVIII hat, dahin zu modifizieren, daß am Ende der Seite 23 das verdruckte Datum „Die VII. Sept. Anni M.DCC.XVIII“ steht. Vergleicht man den oben angeführten Titel mit dem von Herrn CANTOR weiter unten (S. 609) angegebenen, so ersieht man, daß im letzteren die Worte: „tam verarum quam spuriarum“ [d. h. sowohl positive wie negative] fehlen, welche Worte auf die Tatsache hinweisen, daß SEGNER nur Gleichungen mit *reellen* Wurzeln behandelt. S. 4 gibt SEGNER an, er habe aus den *Elementa matheseos universae* von CHR. WOLFF entnommen daß die betreffende Zeichenregel zuerst von HARRIOT entdeckt wurde. Sein Beweis der Regel findet sich S. 4—13 der Abhandlung und ist, so viel ich sehen kann, wesentlich richtig, obgleich weder besonders klar noch schön. SEGNER beweist zuerst den später von DE GUA benutzten Satz, daß wenn die Gleichung

$$\text{(A)} \qquad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

nur reelle Wurzeln hat, so ist

$$\frac{a_1}{a_0} > \frac{a_2}{a_1} > \frac{a_3}{a_2} > \cdots\cdots > \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

Dann multipliziert er die Gleichung (A) mit $x - m$ und zieht besonders in Betracht die Zeichenwechsel für die Fälle

$$m > \frac{a_1}{a_0},\ \frac{a_1}{a_0} > m > \frac{a_2}{a_1},\ \ldots\ldots,\ \frac{a_n}{a_{n-1}} > m.$$

Auf diese Weise findet er, daß durch die Multiplikation mit $x - m$ immer ein Zeichenwechsel hinzukommt, weist nach, daß dasselbe Verfahren mit einer einfachen Modifikation angewendet werden kann, wenn nicht alle Koeffizienten positiv sind, und folgert daraus, daß jede Gleichung so viele positive Wurzeln besitzt wie die Zahl der Zeichenwechsel. Zuletzt wird die Gleichung (A) mit $x + m$ multipliziert, und dasselbe Verfahren benutzt, um den entsprechenden Satz in betreff der negativen Wurzeln herzuleiten. G. ENESTRÖM.

---

**3 : 586, 609,** siehe BM $5_3$, 1904, S. 309—310.

---

**3** : 612. Es wäre vielleicht nicht ohne Interesse, inbetreff der EULERschen Abhandlung *De solutione problematum Diophantæorum per numeros integros* hinzuzufügen, daß EULER die von ihm gestellte Frage durch Zurückführung auf die ganzzahlige Lösung der Gleichung $1 + ap^2 = q^2$ erledigt. Dadurch bekommt er Anlaß, auf eine Methode zu verweisen, „qua olim jam usi sunt

Pellius et Fermatius“, und welche „in operibus Wallisii descripta extat“. Dies ist die erste gedruckte Abhandlung von Euler, wo dieser die Brounckersche Lösung der Gleichung $ax^2 + 1 = y^2$ Pell zuschreibt. Auch von rein mathematischem Gesichtspunkte aus ist die Abhandlung für die Geschichte dieser Gleichung von Interesse, weil darin eine Tafel der kleinsten Werte von $x$ und $y$ für $a < 68$ enthalten ist.

G. Eneström.

---

**3 : 614,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 89—90.

---

3 : 614—615. Den von Herrn Cantor hier angeführten Beweis des Satzes, daß keine Summe $a^2 + b^2$ zweier Quadrate ($a$ und $b$ teilerfremd) durch eine Primzahl von der Form $4n - 1$ teilbar ist, hatte Euler schon am Anfange des Jahres 1742 gefunden (siehe seinen Brief an Goldbach vom 6. März 1742; *Correspondance mathématique et physique . . . publiée par P. H. Fuss* I, St.-Pétersbourg 1843, S. 115—117). Den Beweis des Satzes, daß die ungeraden Faktoren von $a^{2m} + b^{2m}$ ($a$ und $b$ teilerfremd) ausschließlich von der Form $2^{m+1}n + 1$ sind, kannte Euler spätestens am Anfange des Jahres 1745 (siehe seinen Brief an Goldbach vom 16. Februar 1745; Fuss, a. a. O. I, S. 313).

G. Eneström.

---

**3 : 616,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 214, 408. — **3 : 636—637,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441. — **3 : 646—647,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 206—207. — **3 : 652,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 446; **5**$_3$, 1904, S. 207. — **3 : 660,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441. — **3 : 667,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441—442; **5**$_3$, 1904, S. 207—208, 310. — **3 : 682,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 408. — **3 : 686,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 208. — **3 : 689, 695,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 442. — **3 : 736,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 111. — **3 : 750, 758,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 446. — **3 : 759,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 208. — **3 : 760, 766,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 446—447. — **3 : 774, 798,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 442—443. — **3 : 819,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 321. — **3 : 845,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 447; **3**$_3$, 1902, S. 327—328. — **3 : 848, 881,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 443. — **3 : 882,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 447; **5**$_3$, 1904, S. 414. — **3 : 890,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 401. — **3 : 892,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 143. — **3 : IV** (Vorwort), siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 443.

---

## Anfragen und Antworten.

**128. Über die Bezeichnung gewöhnlicher Brüche im christlichen Mittelalter nach der Einführung arabischer Ziffern.** Bekanntlich wurden nach der Einführung der arabischen Rechenkunst in Europa die Brüche, wenn sie nicht mit Worten geschrieben wurden, zuerst ganz wie bei den älteren arabischen Mathematikern bezeichnet, d. h. mit dem Zähler oberhalb des Nenners aber ohne Bruchstrich. Soweit bekannt ist, war Leonardo Pisano der erste abendländische Mathematiker, der diesen Strich benutzte, aber es dauerte lange Zeit, bevor der Bruchstrich allgemein angenommen wurde. Genauere Auskunft über die Geschichte der Bruchbezeichnung im Mittelalter sucht man vergebens in den gewöhnlichen mathematisch-historischen Handbüchern, und dennoch ist die Frage nicht ohne Interesse, denn im christlichen Mittelalter gab es wenigstens noch eine dritte Weise, um gewöhnliche Brüche zu bezeichnen. In einem anonymen Traktate (kaum später als 1350 verfaßt) mit dem Titel: „Brevis ars minuciarum“ (Anfang: „Cum minor quantitas aliquociens sumpta maiorem componit“; Ende: „si multo maior fuerit“) der sich im Cod. Vatic. Ottob. 309 findet, wird in betreff der Bezeichnung gewöhnlicher Brüche bemerkt:

> Minuciam vulgarem scribes superius numeratorem inferius denominatorem ponendo .... Est etiam alius modus scribendi non peior predicto, uidelicet scribendo numeratorem et denominatorem dextrorsum cum curtella lineuncula recte ipsi denominatori superposita ut .3. quintas sic $3\,\bar{5}$, similiter .4. $7^{\text{mas}}$ $4\,\bar{7}$.

Vielleicht gab es im christlichen Mittelalter noch andere Weisen, die gewöhnlichen Brüche zu bezeichnen, und für die Geschichte der mathematischen Zeichensprache wäre jedenfalls eine nähere Untersuchung der Frage von Interesse.

G. Eneström.

---

**129. Über die Anfänge der Benutzung von Null als eine wirkliche Größe.** Für die Entwickelung der Mathematik hat bekanntlich die Verallgemeinerung des Begriffes „Größe“ eine wesentliche Bedeutung gehabt. Wichtig ist die Einführung negativer Größen gewesen, aber kaum weniger wichtig die Erkenntnis, daß es zweckmäßig ist, die Null als eine wirkliche Größe zu betrachten.

Abgesehen von den indischen Mathematikern scheint diese Erkenntnis aus dem 16. Jahrhundert herzustammen. Daß in dieser Zeit Gleichungen aufgestellt worden sind, deren rechtes Glied Null ist, war schon früher bekannt (vgl. Biblioth. Mathem. $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 145; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 402—403; $\mathbf{7}_3$, 1906, 58, 91, 214), aber auch auf andere Weise wurde im 16. Jahrhundert die Null als eine wirkliche Größe behandelt. So z. B. hat Stifel (*Arithmetica integra*, Nürnberg 1544, Bl. $317^b$) den Ausdruck $x^3+1$ für einen gewissen Zweck unter der Form $x^3+0x^2+0x+1$ geschrieben. Ferner hat Tartaglia im 2. Teile des *General trattato di numeri e misure* (Venedig 1556, Bl. $89^a$) Subtraktionsbeispiele von der folgenden Form angegeben:

$$\begin{array}{r} \sqrt{45}+0 \\ \sqrt{5}+3 \\ \hline \sqrt{20}-3 \end{array}, \qquad \begin{array}{r} \sqrt{45}-0 \\ \sqrt{5}+3 \\ \hline \sqrt{20}-3 \end{array}.$$

Ebenso finden sich im *De aliza regula libellus* (Basel 1570, S. 107—108) des Cardano Gleichungen von der Form

$$x^3 = a + bx$$

wo $a$ und $b$ successiv verschiedene Werte nach einer gegebenen Regel bekommen, und dabei werden auch die Fälle in Betracht gezogen, in denen $a$ oder $b$ Null ist. Beispielsweise schreibt Cardano

$$\begin{array}{lll} 1\text{ cu} \quad\ \ 0\,p\text{: } 1\text{ pos.,} & \text{d. h.} & x^3 = \phantom{216}0 + \phantom{0}x, \\ 1\text{ cu}\ \ 216\,p\text{: } 0\text{ pos.} & \text{d. h.} & x^3 = 216 + 0x. \end{array}$$

Man verlangt eine eingehende Untersuchung über die mathematischen Schriften des 16. Jahrhunderts, wo Null als wirkliche Größe behandelt wird.

G. Eneström.

# Rezensionen.

**D. E. Smith. History of modern mathematics.** Fourth edition, enlarged. New York, Wiley 1906. 81 S. 8⁰. 1 doll.

Die erste Auflage dieser Schrift erschien 1896 als letztes Kapitel (S. 508—576) der Arbeit *Higher mathematics. A text-book for classical and engineering colleges. Edited by M. Merriman and R. S. Woodward*, und wurde in der Biblioth. Mathem. 1896, S. 84—89 besprochen. An sich muß es ja den Verfasser sehr freuen, daß jetzt eine vierte erweiterte Auflage als besonderes Buch herausgegeben wird, aber leider ist damit ein Umstand verbunden, der weder dem Verfasser noch den Lesern angenehm sein kann. Der Verleger hat nämlich, wie aus dem Vorworte des Verfassers hervorgeht, noch für die vierte Auflage *die Stereotypplatten der ersten Auflage* angewendet, so daß es Herrn Smith unmöglich war, seine Darstellung zu verbessern, sofern es sich nicht um ganz kleine Änderungen handelte, z. B. statt „all" (S. 24 Z. 8) das Wort „many" zu setzen. Nun ist es klar, daß die im Laufe der zehn letzten Jahren erschienenen mathematisch-historischen Arbeiten viel Material enthalten müssen, wodurch die ursprüngliche Darstellung des Herrn Smith zu modifizieren oder wesentlich zu ergänzen ist, so daß schon aus diesem Grunde eine neue Bearbeitung gewisser Stellen erwünscht wäre. Hierzu kommt noch, teils daß der Verfasser seit 1896 seine mathematisch-historischen Studien eingehend fortgesetzt hat, so daß er sicherlich ohne Bezugnahme auf die neueste Literatur viele Verbesserungen vornehmen würde, wenn es ihm gestattet wäre, eine wirklich neue Auflage zu veranstalten, teils daß gewisse Angaben, die 1896 korrekt sein konnten, jetzt unrichtig sind, z. B. der Verweis (S. 8) auf die erschienenen *26* (richtiger 25) Bände der Fortschritte der Mathematik (bekanntlich sind jetzt 35 Bände erschienen) und die Angabe (S 69), daß nur *zwei* Bände der Hagenschen *Synopsis der höheren Mathematik* herausgegeben sind.

Es ist natürlich, daß der Verfasser die Übelstände, welche die Benutzung der ursprünglichen Stereotypplatten mit sich geführt haben, nur in geringem Grade durch die Zusätze (S. 70—77) beseitigen konnte. Abgesehen vom Schlußkapitel (S. 74—77), das unter dem Titel „General tendencies" eine Übersicht der Hauptrichtungen auf dem mathematischen Forschungsgebiete am Ende des 19. Jahrhunderts bringt, sind die Zusätze wesentlich bibliographischer Natur. Vermutlich hat es der Verfasser zwecklos gefunden, die historischen Angaben nachträglich zu berichtigen und zu ergänzen, auch an den Stellen, wo er offenbar selbst imstande war, Verbesserungen zu bieten. Unter solchen Umständen ist es angebracht, von einer eingehenden Kritik der Einzelheiten der SMITHschen Darstellung abzusehen, da diese Kritik eigentlich den Verleger und nicht den Verfasser treffen würde. Nur einige kleine Bemerkungen, die ich ganz gelegentlich notiert habe, bringe ich hier unten zum Abdruck.

S. 9. Wenn nur ein einziger Mathematiker des 17. Jahrhunderts genannt werden soll, der zur Entwickelung der Algebra beigetragen hat, so kommt dabei kaum HARRIOT in Betracht, sofern man nicht mit WALLIS in die *Artis analyticae praxis* Sachen hineinliest, die gar nicht darin stehen.

S. 11. Warum VIÈTE neben BACHET und FERMAT als Arbeiter auf dem zahlentheoretischen Gebiete hervorgehoben wird, verstehe ich nicht. Meines Wissens hat sich jener kaum mit der Zahlentheorie beschäftigt, denn seine Tafel der *rationalen* Lösungen der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ gehört eigentlich nicht hierher.

S. 15. Schon vor EULER hatte COTES (1722) eine Formel, die mit $\cos x + i \sin x = e^{ix}$ wesentlich zusammenfällt, angegeben (vgl. Biblioth. Mathem. $2_3$, 1901, S. 442).

S. 16. Der Term „Richtungskoeffizient" wurde vor HANKEL von M. CANTOR (*Grundzüge der Elementarmathematik*, Heidelberg 1855) benutzt.

S. 19. Der Grund, warum Herr SMITH für die NEWTONsche Approximationsmethode die Jahreszahl 1711 angibt, ist leicht aufzufinden. Die Methode wurde nämlich von NEWTON selbst in der *Analysis per aequationes numero terminorum infinitas* auseinandergesetzt, und diese Abhandlung, die freilich schon 1669 fertig war, erschien im Jahre 1711. Auf der anderen Seite wurde die Approximationsmethode 1685 von WALLIS im 94. Kapitel (S. 338—339) seiner *Treatise of algebra* veröffentlicht, und statt 1711 könnte also mit größerem Rechte 1685 gesetzt werden.

S. 23. Die Angabe, das GIRARD eine Formel für die Summe der Potenzen der Wurzeln einer Gleichung aufstellte, ist insofern ungenau, als GIRARD nur die Summen der vier ersten Potenzen (*Invention nouvelle en l'algèbre*, Amsterdam 1629, Bl. F2[a]) angegeben hat.

S. 33. Ich weiß jetzt ebensowenig als vor zehn Jahren (vgl. Biblioth. Mathem. 1896, S. 85), aus welchem Grunde TAYLOR als Urheber des Operationskalkuls („symbolic method") angegeben wird. Mit ebenso großem Rechte könnte wohl LEIBNIZ als Urheber desselben genannt werden, wegen seines bekannten Hinweises auf die Analogie zwischen den Formeln für $d^m(xy)$ und $(x+y)^m$ (vgl. seinen Brief an JOHANN BERNOULLI vom 16. Mai 1695; *Commercium philosophicum et mathematicum*, Lausannae 1745, I S. 46—47). Durch diesen Hinweis wurde JOHANN BERNOULLI (siehe seinen Brief an LEIBNIZ vom 18. Juni 1695; a. a. O, I S. 52) veranlaßt zu bemerken, daß man in gewissen Fällen die Differentiationszeichen $d^0$, $d^1$, $d^2$, $d^3$ etc. als algebraische Größen behandeln konnte, was ja gerade das Prinzip des Operationskalkuls ist.

S. 50. Hier würde ich empfehlen, die zweite Fußnote (ENESTRÖM G., Review of CANTOR, Bibliotheca Mathematica 1896, p. 20) zu streichen. An der zitierten Stelle bemerkte ich nur, daß die erste Auflage der *Doctrine of chances* im Jahre 1718 erschien, ein Umstand, der natürlich schon längst bekannt ist.

S. 68—73. Die hier mitgeteilte mathematisch-historische Bibliographie kann zu verschiedenen Bemerkungen Anlaß geben, da es zum Teil eine Geschmackssache ist, was man dabei erwähnen oder stillschweigend übergehen soll. Meiner Ansicht nach sind einige der wirklich aufgeführten Schriften kaum erwähnenswert, und auf der anderen Seite sollten wenigstens einige der von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung veröffentlichten Berichte genannt werden. Unter den übrigen Arbeiten, deren Titel ich hier vermisse, nenne ich nur die zweite wesentlich erweiterte Auflage des LORIASchen Buches *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche* (Torino 1896) und die *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* (Leipzig 1900—1903) von A. VON BRAUNMÜHL.

S. 75. Hier wird der internationale Philosophen-Kongreß in Paris 1900 erwähnt, aber nicht der von mathematisch-historischem Gesichtspunkte aus weit wichtigere gleichzeitige Kongreß für Geschichte der Wissenschaften, dessen Präsident PAUL TANNERY war und dessen Verhandlungen von ihm herausgegeben sind. Dieser Kongreß ist der unmittelbare Vorgänger des von Herrn SMITH erwähnten Kongresses in Rom 1903.

Von den nicht besonders erheblichen Druckfehlern der ursprünglichen Stereotypplatten sind nur wenige verbessert worden. Von unrichtigen Namen finden sich noch „Le Sœur“ (S. 24) statt TH. LE SEUR oder LESUEUR, „François“ (S. 33) statt J. F. FRANÇAIS, „Hersel“ (S. 64) statt J. F. CH. HESSEL; neu hinzugekommen ist der Fehler „Segré“ (S. 75) statt C. SEGRE.

Das Buch ist mit einem Index versehen, der aber nur Sachregister, nicht Namensregister enthält.

Es wäre erwünscht, daß die vermutlich recht bald nötige fünfte Auflage wirklich eine neue Bearbeitung und nicht, wie die bisherigen Auflagen, einen Abdruck der Stereotypplatten der ersten Auflage brachte.

G. ENESTRÖM.

Stockholm.

# Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

## Autoren-Register.



### a) Zeitschriften. Allgemeines.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8⁰. [1
$7_3$ (1906) : 2.

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8⁰. [2
1906 : 2.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben von E. Lampe. Berlin. 8⁰. [3
35 (1904) : 2.

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la société mathématique d'Amsterdam par H. de Vries. D. J. Korteweg, J. C. Kluyver, W. Kapteyn, P. H. Schoute. Amsterdam. 8⁰. [4
14 : 2 (octobre 1905—avril 1906).

Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses, herausgegeben von A. Krazer (1905). [Rezension:] *Porto*, Acad. polytechn., Annaes 1, 1906, 199. (G. T.) — Arch. der Mathem. $11_3$, 1906, 105. (G. Hessenberg.) [5

---

**Cantor, M.,** Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. ▬ $1^2$ (1894). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. $7_3$, 1906, 203—207. (G. Eneström.) ▬ $2^2$ (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. $7_3$, 1906, 207—214. (G. Eneström, H. Bosmans.) ▬ $3^2$ (1901). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. $7_3$, 1906, 215. (G. Eneström.) [6

**Picard, E.,** Sur le développement de l'analyse et ses rapports avec diverses sciences (1905). [Rezension:] Science $23_2$, 1906, 912. (M. Bôcher.) [7

***Greilach, S.,** Zur Quadratur des Kreises. St. Paul 1906. [8
8⁰, 42 S. — Gymnasialprogramm; historische Abhandlung. — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 27, 1906, 1846.

**Bonola, R.,** La geometria non-euclidea. Esposizione storico-critica del suo sviluppo. Bologna, Zanichelli 1906. [9
8⁰, (2) + VI + (2) + 213 + (1) S. — [5 lire.]

***Shearman, A. T.,** Development of symbolic logic; a critical-historical study of the logical calculus. London, Williams & Norgate 1906. [10
12⁰, 254 S. — [5 sh.]

***Kistner, A.,** Geschichte der Physik. 1—2. Leipzig, Göschen 1906. [11
8⁰, 117 + 130 S. — [1.60 Mk.] — Sammlung Göschen Nr. 293—294. — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 27, 1906, 2525.

**Duhem, P.**, Les origines de la statique. 1 (1905). [Rezension:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 15. 1906, 459—461. (F. Bernstein.) — Nature 73, 1905, IX [Nov. 30]. — Revue génér. d. sc. 17, 1906, 244—245. [12

**Duhem, P.**, Les origines de la statique (fin). [13
*Bruxelles,* Soc. scient., Revue des quest. scient. $10_3$, 1906, 65—109.

**Duhem, P.**, De l'accéleration produite par une force constante, notes pour servir à l'histoire de la dynamique (1905). [Rezension:] *Bruxelles,* Soc. scient., Revue des quest. scient. $10_3$, 1906, 342. [14

***Butterfield, A. D.**, A history of the determination of the figure of the earth from the measurements. Worcester 1906. [15
8⁰, 5 + 168 S. — [1.50 doll.]

***Löschner, H.**, Über Sonnenuhren. Beiträge zu ihrer Geschichte und Konstruktion. Graz, Leutscher 1905. [16
8⁰, 154 S. — [5 Mk.] — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 27, 1906, 2166.

**Müller, F.**, Verzeichnis älterer mathematischer Werke aus der im Besitz der Jacobsonschule zu Seesen befindlichen Wertheimschen Bibliothek. [17
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 15, 1906, 430—434, 536.

**Ahrens, W.**, Scherz und Ernst in der Mathematik (1904). [Rezension:] Arch. der Mathem. $11_3$, 1906, 91. (P. Schafheitlin.) [18

**Ball, W. W. R.**, Mathematical recreations and essays. Ed. 4 (1905). [Rezension:] The mathem. gazette 3, 1905—1906, 256—257. [19

**Smith, D. E.**, A portfolio of portraits of eminent mathematicians 2 (1905). [Rezension:] L'enseignement mathém. 8, 1906, 327. [20

**Harzer, P.**, On japanese mathematics. [21
British association, Report 75 (1905), 1906, 325—329.

**G., W. J.**, Japanese mathematics. [22
The mathem. gazette 3, 1905—1906, 268—270.

### b) Geschichte des Altertums.

**Moors, B. P.**, Le système des poids, mesures et monnaies des Israélites, d'après la Bible (1904). [Rezension:] Arch. der Mathem. 11, 1906, 119—120. (H. Samter.) [23

***Schmidt, M. C. P.**, Zur Entstehung und Terminologie der elementaren Mathematik. Leipzig, Dürr 1906. [24
8⁰, (2) + 134 S. — [2.40 Mk.] — Kulturhistorische Beiträge zur Kenntnis des griechischen und römischen Altertums. 1. — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 27, 1906, 2901—2902. (A. A. Björnbo.)

**Manitius, K.**, Hipparchs Theorie der Sonne nach Ptolemaeus. [25
Das Weltall 6, 1906, 323—329, 340—344.

***Krämer, A.**, Ort und Zeit der Abfassung der „Astronomica" des Manilius. Frankfurt am Main 1904. [26
4⁰, 47 S. — Gymnasialprogramm. — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 27, 1906, 2265—2266. (H. Kleingünther.)

### c) Geschichte des Mittelalters.

**Suter, H.**, Über das Rechenbuch des Alî ben Ahmed el-Nasawî. [27
Biblioth. Mathem. $7_3$, 1906, 113—119.

**Gravelaar, N. L. W. A.**, Over den oorsprong van den nam „sinus". [28
Wiskundig tijdschrift 2, 1905—1906, 12—15.

**Duhem, P.**, Un ouvrage perdu cité par Jordanus de Nemore: le Philotechnes. [Rezension:] *Bruxelles,* Soc. scient., Revue des quest. scient. $10_3$, 1906, 341. [29

**Vogl, S.**, Die Physik Roger Bacons. (13. Jahrh.) (1906). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 27, 1906, 2364—2366. (F. Strunz.) [30

***Nau, F.**, Le livre de l'ascension de l'esprit sur la forme du ciel et de la terre. Cours d'astronomie rédigé en 1279 par Grégoire Aboulfarag, dit Bar-Hebraeus, publié pour la première fois, d'après les manuscrits de Paris, d'Oxford et de Cambridge. I—II. [31
*Paris,* Ecole des hautes études, Bibliothèque 121. 1900. — I: Texte syriaque. II: Traduction française; XXIV + 200 S. — [Rezension:] *Bruxelles,* Soc. scient., Revue des quest. scient. $10_3$, 1906, 280—285. (H. Bosmans.)

**Eneström, G.**, Über den italienischen Arithmetiker Giovanni Antonio da Como. [32
Biblioth. Mathem. $7_3$, 1906, 216. — Anfrage.

**Silberberg, M.**, Ein handschriftliches hebräisch-mathematisches Werk des Mordechai Comtino (15. Jahrh.). [33
Jahrbuch der jüdisch-literarischen Gesellschaft in Frankfurt am Main 3, 1906, 277—292.

***Solmi, E.**, Nuovi studi sulla filosofia naturale di Leonardo da Vinci. Il metodo sperimentale. L'astronomia. La teoria della visione. [34
*Mantova,* Accad. Virgiliana, Atti e memorie 1904—1905. 224 S.

Un manoscritto sconosciuto di Leonardo da Vinci. [35
Raccolta Vinciana (Milano) 2, 1906, 89—90. — Über ein verschollenes Manuskript „Trattati di meccanica e geometria" des Leonardo da Vinci.

### d) Geschichte der neueren Zeit.

**Smith, D. E.**, History of modern mathematics. Fourt edition. New York, Wiley 1906. [36
8⁰, 81 S. — [1 doll.] — Mathematical monographs edited by M. Merriman and R. S. Woodward. No. 1.

**Benedict, Suzan R.**, The development of algebraic symbolism from Paciuolo to Newton. [37
Teachers college, Columbia university, New York. Courses for the training of teachers of mathematics 1906—1907, New York 1906, S. 11—18 + Tafel.

**Hunrath, K.**, Albrecht Dürers annähernde Dreiteilung eines Kreisbogens. [38
Biblioth. Mathem. $7_3$, 1906, 120—125.

**Bosmans, H.,** Le fragment du commentaire d'Adrien Romain sur l'algèbre de Mahumed ben Musa el-Chowârezmî. [39
*Bruxelles*, Soc. scient., Annales 30 : 2, 1906. 21 S.

Le opere di GALILEO GALILEI. Edizione nazionale sotto gli auspicii di sua maestà il re d'Italia. Volume XVII—XVIII. Firenze, Barbera 1906. [40
4⁰, 438 + (1) S.; 545 + (1) S. — Herausgegeben von A. FAVARO.

**Favaro, A.,** Leonardo da Vinci e Galileo Galilei. [41
Raccolta Vinciana (Milano) 2, 1906, 84—88.

**Favaro, A.,** Intorno ad alcuni apparati attribuiti a Galileo esistenti nell' istituto di fisica dell' università di Padova. [42
Rivista di fisica (Pavia) 7, 1906, 213—220.

**Favaro, A.,** Quale il domicilio di Galileo in Roma durante il secondo processo. [43
Archivio storico italiano $37_5$, 1906. 8 S.

**Favaro, A.,** Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. XVI. Beniamino Engelcke. XVII. Lodovico Settala. [44
*Venezia*, Istituto Veneto, Atti 65 : 2, 1906, 585—592, 597—624.

**Carrara, B.,** L'„unicuique suum" nella scoperta delle macchie solari (1906). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. $10_3$, 1906, 276—280. (H. BOSMANS.) [45

**Amodeo, F.,** Nuova analisi del trattato delle coniche di Gérard Desargues e cenni su J. B. Chauveau. [46
*Napoli*, Accad. d. sc., Rendiconti 1906. 31 S.

**Duhem, P.,** Le principe de Pascal [sur l'équilibre des liqueurs]. Essai historique (1905). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. $10_3$, 1906, 342. [47

Oeuvres complètes de CHRISTIAAN HUYGENS publiées par la société hollandaise des sciences. Tome 10 (1905). [Rezension:] Journ. des savants 1905, 596—605. (P. PUISEUX.) [48

**Korteweg, D. J.,** Christiaan Huygens. Travaux de jeunesse. La Haye 1906. [49
4⁰, 80 S. — Sonderabdruck aus dem noch nicht erschienenen 11. Bande der „Oeuvres complètes de CHR. HUYGENS".

**Geer, P. van,** Christiaan Huygens' leerjaren. [50
De tijdspiegel 1906. 22 S.

**Geer, P. van,** Hugeniana geometrica. I. [51
*Amsterdam*, Wisk. genoots., Nieuw archief $10_2$, 1906, 215—226.

**Mascart, J.,** La découverte de l'anneau de Saturne par Huygens. [52
La revue du mois 1, 1906, 160—185.

**Aubry, A.,** Sur l'emploi de la formule de N. Mercator. [53
Mathesis $6_3$, 1906, 203—211. — Wesentlich historischen Inhalts.

**Gerland, E.,** Leibnizens nachgelassene Schriften physikalischen, mechanischen und technischen Inhalts (1906). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. $10_3$, 1906, 290—291. (V. S.) [54

**Muir, Th.,** The theory of determinants in the historical order of development (1906). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. $30_2$, 1906, 187—188. (J. T.) [55

**Amodeo, F.,** Vita matematica italiana. 1 (1905). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 9, 1906, 46. (G. L.) [56

**Eneström, G.,** Der Briefwechsel zwischen Leonhard Euler und Daniel Bernoulli. [57
Biblioth. Mathem. $7_3$, 1906, 126—156.

**Rotch, A. L.,** When did Franklin invent the lightning-rod? [58
Science $24_2$, 1906, 374—376.

**Czuber, E.,** A. de Moivres Abhandlung über Leibrenten. Nach der dritten Auflage von 1756 ins Deutsche übertragen und mit Anmerkungen versehen. Wien 1906. [59
8⁰, VIII + 88 S. — Sonderheft der „Versicherungswissenschaftlichen Mitteilungen".

**Schur, F.,** Johann Heinrich Lambert als Geometer (1905). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 27, 1906, 2190. [60

**Burkhardt, H.,** Entwicklungen nach oscillierenden Funktionen und Intergration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik. [61
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 10 : 2, 1906, 1073—1392.

**Simon, M.,** Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert (1906). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 27, 1906, 2590—2591. (A. VON BRAUNMÜHL.) [62

**Macfarlane, A.,** Bibliography of quaternions and allied systems of mathematics (1904). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin $13_2$, 1906, 30—32. (H. E. HAWKES.) [63

**Hayashi, T.,** A list of dutch books on mathematical sciences imported from Holland to Japan before the restoration in 1868. [64
*Amsterdam*, Wisk. genoots., Nieuw archief $10_2$, 1906, 232—237. — Mit Bemerkungen von J. C. KLUYVER.

**Eneström, G.,** Sur les frères Français. [65
Biblioth. Mathem. $7_3$, 1906, 216. — Antwort auf eine Anfrage.

**Mathé, F.,** Karl Friedrich Gauss. Leipzig, Weicher 1906. [66
8⁰, 30 + (2) S. + Porträt — [1 Mk.] — Männer der Wissenschaft, Heft 6.

Vier Briefe von Gauss und Wilhelm Weber an Fries. [67
Abhandlungen der Fries'schen Schule. Neue Folge, Heft 3 (1906), 431—440.

**Gérard, L.,** Un chapitre de l'histoire des mathématiques. [68
Bullet. d. sc. mathém. élément. 11, 1905—1906, 85—87.

**Lucas de Pesloüan, Ch.,** N. H. Abel (1906). [Rezension:] Biblioth. Mathem. $7_3$, 1906, 217—219. (G. ENESTRÖM.) — Mathesis $6_3$, 1906, 216—217. — Periodico di matem. 22, 1906, 46—47. (K.) [69

**Tannery, J.,** Manuscrits et papiers inédits de Galois. [70
Bullet. d. sc. mathém. $30_2$, 1906, 226—248 255—263.

**Königsberger, L.** Carl Gustav Jacob Jacobi. Festschrift (1904). [Rezension:] Biblioth. Mathem. $7_3$, 1906, 217—219. (G. Eneström.) — Journ. des savants 1905, 132—138. (P. Appell.) — Revue génér. d. sc. 17, 1906, 46. [71

**Ahrens, W.,** Ein Beitrag zur Biographie C. G. J. Jacobis. [72
Biblioth. Mathem. $7_3$, 1906, 157—192.

**Müller, F.,** Karl Schellbach (1905). [Rezension:] *Bruxelles,* Soc. scient., Revue des quest. scient. $10_3$, 1906, 274—276. (H. Bosmans.) — Deutsche Literaturz. 27, 1906, 2189—2190. (E. Lampe.) [73

**Lampe, E.,** Dirichlet als Lehrer der Allgemeinen Kriegsschule. [74
Naturwiss. Rundschau 21, 1906, 482—485.

**Jourdain, Ph. E. B.,** The development of the theory of transfinite numbers. 1. [75
Arch. der Mathem. $10_3$, 1906, 254—281.

**Hardcastle, Frances,** Report on the theory of point-groups. II—IV. [76
British association, Report 72 (1902), 81—93; 73 (1903), 65—77; 74 (1904), 20—29.

Correspondance d'Hermite et de Stieltjes publiée par les soins de B. Baillaud et H. Bourget. 1—2 (1905). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 9, 1906, 39—40. (G. L.) — The mathem. gazette 3, 1905—1906, 272—273. — Wiskundig tijdschrift 2, 1905—1906, 40—41, 125. [77

**Helmholtz, H. von,** La vie et les travaux de H. Hertz. [78
Revue génér. d. sc. 16, 1905, 1024—1029. — Nach einem nachgelassenen Artikel übersetzt von G. Guéroult.

**Bonola, R.,** Il modello di Beltrami di superficie a curvatura costante negativa. [79
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 9, 1906, 33—38.

Georg Cantor. [80
Americ. journ. of mathem. 28:1, 1906. — Nur Bildnis.

**[Guimarães, R.,]** Gustav Eneström. [81
Gaceta de matem. 4, 1906, 49—52 (mit Porträt).

### e) Nekrologe.

Ernst **Abbe** (1840—1905). [82
*München,* Akad. d. Wiss., Sitzungsber. 35, 1905, 346—355. (C. Voit.)

Davide **Besso** (1845?—1906). [83
Periodico di matem. 22, 1906, 48.

Ludwig **Boltzmann** (1844—1906). [84
Naturwiss. Rundschau 21, 1906, 552—553. (A. Lampa.)

Ernesto **Cesàro** (1859—1906). [85
Mathesis $6_3$, 1906, 201—202.

Ralph **Copeland** (1837—1905). [86
Nature 73, 1905, 32.

Paul **Drude** (1863—1906). [87
Naturwiss. Rundschau 21, 1906, 413—415. (F. Kiebitz.)

Friedrich **Hultsch** (1833—1906). [88
Bericht über die 1906 abgehaltene Jahresversammlung des sächsischen Gymnasiallehrervereins (Leipzig 1906), 34—36.

Charles Jasper **Joly** (1864—1906). [89
Nature 73, 1906, 273—274.

Samuel Pierpont **Langley** (1834—1906). [90
Nature 73, 1906, 443—444.

Gaston **de Longchamps** (1842—1906). [91
Mathesis $6_3$, 1906, 202.

Gabriel **Oltramare** (1816—1906). [92
L'enseignement mathém. 8, 1906, 378—382. (H. Fehr.)

Josef **Petzval** (1807—1891). [93
Arch. der Mathem. $11_3$, 1906, 115.

Otto **Stolz** (1842—1905). [94
Gaceta de matem. 4, 1906, 92.

Joseph **de Tilly** (1837—1906). [95
*Bruxelles,* Soc. scient., Revue des quest. scient. $10_3$, 1906, 353—361 + Porträt. (P. Mansion.) — Mathesis $6_3$, 1906, 201.

Robert **Tucker** (1832—1905). [96
*London,* Mathem. soc., Proceedings $3_2$, 1905, XII—XX. (M. J. M. Hill.)

Walter Friedrich **Wislicenus** (1859—1905). [97
Nature 73, 1905, 57—58.

### f) Aktuelle Fragen.

Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens. V. [98
L'enseignement mathém. 8, 1906, 293—310; 383—385 (G. Loria).

**Eneström, G.,** Über Bearbeitung von Bandregistern zu mathematischen Zeitschriften oder Sammelwerken. [99
Biblioth. Mathem. $7_3$, 1906, 193—202.

**Dalwigk, F. v.,** Beiträge zur Frage des Unterrichts in angewandter Mathematik an der Universität. [100
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 15, 1906, 349—376.

**Dyck, W. von,** Die naturwissenschaftliche Hochschulbildung. [101
Die Kultur der Gegenwart, herausg. von P. Hinneberg 1:1, 1906, 312—346.

**Appell, P.,** L'enseignement scientifique à l'université de Paris. [102
L'enseignement mathém. 8, 1906, 337—342.

[Deutsche Mathematiker-Versammlung in Stuttgart 1906.] [103
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 15, 1906, 527—535. — Naturwiss. Rundschau 21, 1906, 576—578. (E. Wölffing.)

# Wissenschaftliche Chronik.

**Ernennungen.**

— Dr. L. D. Ames in Columbia zum Professor der Mathematik an der Universität von Missouri daselbst.

— C. Bourlet in Paris zum Professor der darstellenden Geometrie am „Conservatoire des arts et métiers" in Paris.

— P. P. Boyd zum Professor der Mathematik am Hanover college, Indiana.

— Professor F. W. Brown in Haverford zum Professor der Mathematik an der „Yale university" in New Haven.

— Miß Mabel Chase zum Professor der Physik am „Mount Holyoke college" in South Hadley, Mass.

— „Instructor" H. L. Coar in Urbana zum Professor der Mathematik am „Marietta college" in Marietta, Ohio.

— Dr. H. L. Cooke in Cambridge (England) zum Professor der Physik an der Universität in Princeton.

— Privatdozent I. Fredholm in Stockholm zum Professor der Mechanik und mathematischen Physik an der Universität daselbst.

— Privatdozent T. Godlewski in Lemberg zum Professor der Physik an der Technischen Hochschule daselbst.

— Dr. C. C. Grove zum Professor der Mathematik am „Hamilton college" in Clinton, N. Y.

— Privatdozent J. Grünwald in Wien zum Professor der Mathematik an der deutschen Universität in Prag.

— Dr. Gutton in Nancy zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Professor G. B. Halsted in Gambier zum Professor der Mathematik an der „State normal school of Colorado" in Greeley.

— Dr. J. Ivey zum Professor der Mathematik und Astronomie an der „Tulane university".

— Privatdozent A. Kahlähne in Heidelberg zum Professor der Physik an der Technischen Hochschule in Danzig.

— Professor G. Landsberg in Breslau zum Professor der Mathematik an der Universität in Kiel.

— Privatdozent H. Mache in Wien zum Professor der Experimentalphysik an der Universität in Innsbruck.

— Professor Th. E. McKinney in Marietta zum Professor der Mathematik an der „Wesleyan university".

— „Instructor" B. MacNutt an der „Lehigh university" zum Professor der Physik daselbst.

— H. D. Minchin in Rochester zum Professor der Physik daselbst.

— J. Muir in Glasgow zum Professor der Physik am „Technical college" daselbst.

— W. J. Newlin zum Professor der Mathematik und Philosophie am „Amherst college".

— „Instructor" J. H. Ogburn an der „Lehigh university" zum Professor der Mathematik und Astronomie daselbst.

— Professor H. Reissner in Berlin zum Professor der Mechanik an der Technischen Hochschule in Aachen.

— Dr. O. W. Richardson in Cambridge (England) zum Professor der Physik an der Universität in Princeton.

— Dr. J. T. Rood zum Professor der Mathematik am „Ursinus college" in Collegeville, Pa.

— Professor H. Rubens in Berlin zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Professor W. H. Salmon zum Professor der Physik an der Universität von New Brunswick.

— Professor G. Scheffers in Darmstadt zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Berlin.

— Professor H. Schöne in Königsberg, Herausgeber der Heronschen „Metrica" zum Professor der klassischen Philologie an der Universität in Basel.

— Privatdozent W. Seitz in Würzburg zum Dozenten der Physik an der Technischen Hochschule in Aachen.

— Professor A. Sommerfeld in Aachen zum Professor der Physik an der Universität in München.

— Professor J. Stein in Katwijk (Holland) zum Observator an der Vatikanischen Sternwarte in Rom.

— Professor Fr. Streintz in Graz zum Professor der Physik an der Technischen Hochschule daselbst.

— J. M. Thornton zum Professor der Mathematik an der Universität von West-Virginia.

— Professor A. Trowbridge an der Universität von Wisconsin zum Professor der mathematischen Physik an der Universität in Princeton.

— Professor H. de Vries in Delft zum Professor der Mathematik an der Universität in Amsterdam.

— Professor R. Wachsmuth in Berlin zum Professor der Experimentalphysik an der Bergakademie daselbst.

— Miß M. H. Walbridge zum Professor der Mathematik und Physik am „Wells college" in Aurora, N. Y.

— Privatdozent R. Weber in Heidelberg zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Professor A. Wehnelt in Erlangen zum Professor der theoretischen Physik an der Universität in Berlin.

— Professor K. Zsigmondy in Prag zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Wien.

### Todesfälle.

— Davide Besso, früher Professor der Mathematik an der Universität in Modena, geboren 1845 (?), gestorben zu Frascati 1906.

— Ludwig Boltzmann, Professor der Physik an der Universität in Wien, geboren in Wien den 20. Februar 1844, gestorben zu Duino bei Görz den 6. September 1906.

— Joseph François Bossert, Astronom an der Sternwarte in Paris, geboren in Blandy den 30. November 1851, gestorben den 21. Juni 1906.

— Ernesto Cesàro, Professor der Mathematik an der Universität in Neapel, geboren in Neapel den 12. März 1859, gestorben in Torre Annunziata den 12. September 1906.

— Paul Drude, Professor der Physik an der Universität in Berlin, geboren in Braunschweig den 12. Juli 1863, gestorben in Berlin den 5. Juli 1906.

— Thomas Harrison, früher Professor der Mathematik an der Universität in New Brunswick, gestorben den 18. September 1906, 68 Jahre alt.

— Gaston Albert Gohierre de Longchamps, Examinator an der Militärschule in St. Cyr, geboren in Alençon den 1. März 1842, gestorben in Paris den 9. Juli 1906.

— S. N. Maillard, Professor der Mathematik an der „Faculté des sciences" in Poitiers, gestorben 1906, 61 Jahre alt.

— Antonino Mascari, Assistent an der Sternwarte in Catania, gestorben den 18. Oktober 1906, 44 Jahre alt.

— Ludwig Matthiessen, früher Professor der Physik an der Universität in Rostock, geboren in Fissau bei Eutin den 22. September 1830, gestorben den 15. Oktober 1906.

— Georges Antoine Rayet, Professor der Astronomie an der Universität in Bordeaux, geboren in Bordeaux den 12. Dezember 1839, gestorben 1906.

— Karl Johann Konrad Reinhertz, Professor der Geodäsie an der Technischen Hochschule in Hannover, geboren in Xanten (Rheinprov.) den 19. Juni 1859, gestorben den 22. August 1906.

— Joseph de Tilly, Generalleutnant, früher Direktor der „Ecole militaire" in Brüssel, geboren in Ypres den 16. August 1837, gestorben in Schaerbeek den 4. August 1906.

— Paul Wolfskehl, früher Privatdozent der Mathematik an der Technischen Hochschule in Darmstadt, geboren in Darmstadt den 30. Juni 1856, gestorben den 13. September 1906.

### Demnächst erscheinende mathematisch-literarische Werke.

— Eine zweite, wesentlich erweiterte Auflage der Arbeit des Herrn R. Guimarães:

„Les mathématiques en Portugal", deren erste Auflage im Jahre 1900 erschien, ist jetzt unter der Presse, und etwa 20 Bogen sind schon gedruckt.

— Der Druck der „Einführung in die mathematische Literatur" des Herrn Felix Müller (vgl. Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, S. 94—95) hat jetzt begonnen.

### Mathematisch-historische Arbeiten in Vorbereitung.

— Der noch ausstehende Band (Geschichte der Physik) der Sammlung *Geschichte der Wissenschaften in Deutschland*, mit dessen Abfassung zuerst G. Karsten und dann A. Heller betraut wurde, ist seit einiger Zeit vom Professor E. Gerland in Klausthal in Angriff genommen und wird voraussichtlich bis Ostern 1909 druckfertig vorliegen.

### Vorlesungen über Geschichte der mathematischen Wissenschaften.

— An der Universität in Berlin hat Professor W. Förster für das Wintersemester 1906—1907 eine zweistündige Vorlesung über Geschichte der mittelalterlichen Astronomie angekündigt.

— An der Universität in Greifswald hat Privatdozent Berg für das Wintersemester 1906—1907 eine Vorlesung über Geschichte der neueren Physik angekündigt.

— An der Technischen Hochschule in Darmstadt hat Professor F. Graefe für das Wintersemester 1906—1907 eine Vorlesung über Geschichte der Mathematik angekündigt.

— An der Universität in Königsberg hat Privatdozent Schmidt für das Wintersemester 1906—1907 eine Vorlesung über Die großen Physiker und ihre Leistungen angekündigt.

— An der Universität in Neapel hat Professor F. Amodeo für das Wintersemester 1906—1907 eine vierstündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik 1200—1800 angekündigt.

— An der Universität in Padua hat Professor A. Favaro für das Wintersemester 1906—1907 eine dreistündige Vorlesung über Geschichte der italienischen Mathematik im 16. Jahrhundert angekündigt.

— An der Universität in Straßburg hat Professor M. Simon für das Wintersemester 1906—1907 eine zweistündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik im Altertum in Verbindung mit Kulturgeschichte angekündigt.

### Gekrönte Preisschriften.

— Die preußische Akademie der Wissenschaften in Berlin hat Herrn F. Mertens in Wien einen Preis für sein Werk über zyklische Gleichungen zuerkannt.

### Preisfragen gelehrter Gesellschaften.

— *Académie de Belgique à Bruxelles* Entre les éléments de deux formes du second ordre (deux systèmes plans non superposés, un système plan et une gerbe, deux gerbes de sommets différents), on établit une correspondance quadratique („Verwandtschaft zweiten Grades" dans le sens de Reye, *Geometrie der Lage*, vol. II, chap. XXII). Etudier les systèmes d'éléments qu'on déduit par jonction ou par intersection des couples d'éléments homologues des deux formes du second ordre.

### Mathematiker-Versammlungen im Jahre 1906.

— *Deutsche Mathematiker-Vereinigung.* Die Jahresversammlung 1906 der Deutschen Mathematiker-Vereinigung fand zu Stuttgart 16.—20. September statt. Vorträge wurden von den Herren O. Blumenthal, A. Pringsheim, G. Faber, O. Perron, F. Hartogs, P. Stäckel, D. Hilbert, E. Hilb, M. Krause, P. Koebe, W. Fr. Meyer, P. Schafheitlin, A. Schönflies, G. Hessenberg, G. Landsberg, K. Rohn, C. Juel, Th. Schmid, R. Müller, H. Wiener, C. Runge, R. Mehmke, A. Wagenmann gehalten. Zwei Mitglieder der Vereinigung wurden beauftragt, mit der Göttinger Universitätsbibliothek zu verhandeln, ob und unter welchen Bedingungen die Bibliothek bereit wäre, Manuskripte und Briefe verstorbener Mathematiker, welche ihr von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung übergeben werden, aufzubewahren. Es wurde ferner beschlossen, auf der nächsten Jahresversammlung eine Sitzung dem Andenken Eulers zu widmen.

— *Mathematics at the British association 1906.* The British association for the advancement of science met at York 1906, August 3; the mathematical session was held under the presidency of Mr. E. H. Griffiths. Mathematical papers were read by O. Henrici, A. C. Dixon, A. Cunningham, A. R. Forsyth, P. A. Mac Mahon, H. Hilton, T. J. I'a Bromwick, A. R. Richardson and A. Lodge.

## Vermischtes.

— *L'histoire des mathématiques et l'enseignement secondaire en France.* Les modifications apportées au plan d'études des lycées et collèges de garçons du 31 mai 1902 (arrêtés des 27, 28 juillet et 8 septembre 1905) contiennent entre autres le conseil suivant à propos de l'enseignement mathématique: Il est recommandé au maître d'introduire dans son enseignement quelques notions historiques; ainsi il pourra parler de la méthode d'exhaustion chez les anciens (Euclide, Archimède) et donner quelques détails sur l'invention du calcul différentiel et intégral.

# Eine neue Schrift des Archimedes.

Von J. L. HEIBERG und H. G. ZEUTHEN in Köbenhavn.

Im vorigen Sommer habe ich im Metochion (in Konstantinopel) des Klosters des h. Grabes in Jerusalem eine Handschrift untersucht, die unter einem Euchologion des 13. Jahrhunderts Schriften des ARCHIMEDES enthält in schöner Minuskel des 10. Jahrhunderts, die nur abgewaschen, nicht ausradiert, und mit der Lupe einigermaßen lesbar ist.

Die Hs., no. 355, 4^to, aus dem Kloster des h. Sabba bei Jerusalem stammend, ist beschrieben von PAPADOPULOS KERAMEUS, *Ἱεροσολυμιτικὴ βιβλιοθήκη*, IV S. 329,[1]) der eine Probe der unteren Schrift gibt; daraus war es mir sofort ersichtlich, daß der alte Text ARCHIMEDES ist. Es sind in der Hs. große Stücke von *Περὶ ἑλίκων* und *Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* erhalten, kleinere von *Ἐπιπέδων ἰσορροπίαι* und *Κύκλου μέτρησις*, die ich verglichen habe und für eine in Angriff genommene Neubearbeitung der Werke des ARCHIMEDES verwerten werde; der Ertrag ist übrigens nicht groß. Wichtiger ist es schon, daß die Hs. den griechischen Text von *Περὶ ὀχουμένων* fast vollständig enthält, wovon man bisher nur die lateinische Übersetzung WILHELMS VON MOERBEK besaß;[2]) ihre vielen Lücken und schweren Verderbnisse lassen sich jetzt vollständig heilen. Außerdem findet sich der Anfang einer Abhandlung über das *στομάχιον*, wovon SUTER (Abhandl. z. Gesch. der Mathem. 9, 1899, S. 493—499) ein anderes, nur arabisch erhaltenes Bruchstück veröffentlicht hat; es ist der „loculus Archimedius“, eine Art „chinesischen Spiels“.[3])

Bei weitem die wichtigste Bereicherung, die uns durch die Hs. zuteil wird, ist aber ein großes Stück einer Schrift mit dem Titel: *Ἀρχιμήδους περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος*. Es ist das

1) Hierauf machte mich Prof. H. SCHÖNE aufmerksam.

2) Daß das griechische Fragment ARCHIMEDIS *Opera* II, S. 356—358 unecht ist, bestätigt sich jetzt.

3) Durch den griechischen Titel erledigt sich die Erklärung SUTERS von dem arabischen s(i)tomaschion. *Στομάχιον* bedeutet nach einer scharfsinnigen Vermutung meines Kollegen A. B. DRACHMANN: Neck-Spiel (worüber man sich ärgert); vergl. stomachari.

*'Εφοδικόν*, das Theodosios kommentiert hatte und Heron mehrmals zitiert (*Μετρικά* ed. Schöne S. 80, 17; 84, 11; 130, 15, 25). Zu dem Satz über den Flächeninhalt eines Parabelsegments, den Heron zitiert, ist nur der mechanische Beweis erhalten, der versprochene geometrische (derselbe als in der erhaltenen *Quadratura parabolae*) ist mit dem Schluß des Werks verloren gegangen. Dasselbe Schicksal hat den von Heron S. 130, 25 angeführten Satz betroffen, wovon keine Spur erhalten ist. Dagegen ist von den Beweisen für den anderen von Heron erwähnten Satz (vom Rauminhalt eines Cylinderhufs) so viel erhalten, daß eine vollständige Herstellung inhaltlich möglich ist. Überhaupt sind die noch übrigen Lücken im erhaltenen Teil nur selten für den Inhalt von Bedeutung. Im übrigen lasse ich die Schrift für sich selbst sprechen.

Der hergestellte griechische Text mit mehr philologischem Commentar wird im nächsten Heft des Hermes erscheinen. Hier lege ich den Mathematikern eine genaue Übersetzung vor. Was ich ergänzt habe, steht in [ ]; inhaltlich absolut sichere Ergänzungen sind nicht bezeichnet, und offenbare Schreibfehler habe ich stillschweigend berichtigt.

J. L. Heiberg.

---

## Des Archimedes Methodenlehre von den mechanischen Lehrsätzen, an Eratosthenes.

Archimedes grüßt den Eratosthenes.

Ich habe dir früher einige der von mir gefundenen Lehrsätze übersandt, indem ich nur die Sätze verzeichnete, mit der Aufforderung, die vorläufig nicht angegebenen Beweise zu finden. Die Sätze der dir zugeschickten Theoreme waren folgende:

1. Wenn in ein rechtstehendes Prisma mit einem Parallelogramm[1]) als Grundfläche ein Zylinder eingeschrieben wird, der die Grundflächen in den gegenstehenden Parallelogrammen[1]) hat, die Seitenlinien aber auf den übrigen Ebenen des Prismas, und durch den Mittelpunkt des Kreises, der Grundfläche des Zylinders ist, und einer Seite des in der gegenstehenden Ebene gelegenen Quadrats eine Ebene gelegt wird, so wird diese Ebene vom Zylinder ein Stück abschneiden, das begrenzt wird durch zwei Ebenen, die schneidende und die, worin die Grundfläche des Zylinders liegt, und durch die zwischen den genannten Ebenen liegende Zylinderfläche, und das abgeschnittene Stück des Zylinders ist $^1/_6$ des ganzen Prismas.

---

1) Muß heißen: Quadrat.

2. Wenn in einen Würfel ein Zylinder eingeschrieben wird, der die Grundflächen in den gegenstehenden Parallelogrammen[1]) hat und mit der Zylinderfläche die übrigen vier Ebenen berührt, und ferner in denselben Würfel ein zweiter Zylinder eingeschrieben wird, der die Grundflächen in zwei anderen Parallelogrammen[1]) hat und mit der Zylinderfläche die vier übrigen Ebenen berührt, so wird der von den Zylinderflächen eingeschlossene Körper, der in beiden Zylindern enthalten ist, $^2/_3$ des ganzen Würfels sein.

Diese Lehrsätze sind von den früher mitgeteilten wesentlich verschieden; jene Körper nämlich, die Konoiden und Sphäroiden und ihre Segmente, verglichen wir mit dem Rauminhalt von Kegeln und Zylindern, aber keiner derselben wurde einem von Ebenen umschlossenen Körper gleich gefunden; von diesen Körpern dagegen, die von zwei Ebenen und Zylinderflächen umschlossen sind, wird jeder einem der von Ebenen umschlossenen Körper gleich gefunden. Die Beweise dieser Lehrsätze schicke ich dir also in diesem Buche.

Da ich aber, wie ich schon früher sagte, sehe, daß du ein tüchtiger Gelehrter bist und nicht nur ein hervorragender Lehrer der Philosophie, sondern auch ein Bewunderer [mathematischer Forschung], so habe ich für gut befunden dir auseinanderzusetzen und in dieses selbe Buch niederzulegen eine eigentümliche Methode, wodurch dir die Möglichkeit geboten werden wird, eine Anleitung herzunehmen um einige mathematische Fragen durch die Mechanik zu untersuchen. Und dies ist nach meiner Überzeugung ebenso nützlich auch um die Lehrsätze selbst zu beweisen; denn manches, was mir vorher durch die Mechanik klar geworden, wurde nachher bewiesen durch die Geometrie, weil die Behandlung durch jene Methode noch nicht durch Beweis begründet war; es ist nämlich leichter, wenn man durch diese Methode vorher eine Vorstellung von den Fragen gewonnen hat, den Beweis herzustellen als ihn ohne eine vorläufige Vorstellung zu erfinden. So wird man auch an den bekannten Lehrsätzen, deren Beweis EUDOXOS zuerst gefunden hat, nämlich von dem Kegel und der Pyramide, daß sie $^1/_3$ sind, der Kegel des Zylinders und die Pyramide des Prismas, die dieselbe Grundfläche und gleiche Höhe haben, dem DEMOKRITOS einen nicht geringen Anteil zuerkennen, der zuerst von dem erwähnten Körper den Ausspruch getan hat ohne Beweis. Wir sind aber in der Lage auch den jetzt zu veröffentlichenden Lehrsatz [in derselben Weise] früher gefunden zu haben und fühlen uns jetzt genötigt, die Methode bekannt zu machen, teils weil wir früher davon gesprochen haben, damit niemand glaube, wir hätten ein leeres Gerede verbreitet, teils in der Überzeugung, dadurch nicht geringen Nutzen für die Mathematik

1) Muß heißen Quadrat.

zu stiften; ich nehme nämlich an, daß jemand von den jetzigen oder künftigen Forschern durch die hier dargelegte Methode auch andere Lehrsätze finden wird, die uns noch nicht eingefallen sind.

Zuerst legen wir nun das dar, was uns auch zuerst klar geworden durch die Mechanik, daß ein Parabelsegment $^4/_3$ ist des Dreiecks, das dieselbe Grundfläche und gleiche Höhe hat, darauf aber der Reihe nach die einzelnen durch die genannte Methode gefundenen Lehrsätze; und am Schluß des Buches legen wir dar die geometrischen [Beweise der genannten Lehrsätze] . . . . . . . [Voraus schicken wir folgende Sätze, die wir benutzen werden:]

1 Wenn von [einer Größe eine andere Größe weggenommen wird, die nicht denselben Schwerpunkt hat, findet man den Schwerpunkt des Rests, wenn man die Gerade, welche die Schwerpunkte des ganzen und des weggenommenen Teils verbindet, nach der Seite hin, wo der Schwerpunkt des ganzen liegt,] verlängert und auf ihr eine Gerade absetzt, die zur Geraden zwischen den genannten Schwerpunkten sich verhält wie das Gewicht der weggenommenen Größe zum Gewicht des Rests [*De plan. aequil.* I 8].

2. Wenn die Schwerpunkte einer beliebigen Anzahl von Größen auf derselben Geraden liegen, wird auch der Schwerpunkt der aus allen zusammengesetzten Größe auf derselben Geraden liegen [vergl. ib. I 5].

3. Der Schwerpunkt einer Geraden ist der Mittelpunkt der Geraden [vergl. ib. I 4].

4. Der Schwerpunkt eines Dreiecks ist der Punkt, worin die von den Winkelspitzen des Dreiecks zu den Mittelpunkten der Seiten gezogenen Geraden sich schneiden [ib. I 14].

5. Der Schwerpunkt eines Parallelogramms ist der Punkt, worin die Diagonale sich treffen [ib. I 10].

6. Der Schwerpunkt [eines Kreises] ist der Mittelpunkt [des Kreises].

7. Der Schwer[punkt eines Zylinders ist der Mittelpunkt der Achse.

8. Der Schwerpunkt eines Kegels teilt dessen Achse so, daß das Stück am Scheitelpunkt] dreimal so groß [ist als das Stück an der Grundfläche].

[Dies alles ist schon früher] veröffentlicht. [Außerdem benutze ich noch den folgenden Satz, der leicht zu beweisen ist:]

[Wenn in zwei Reihen von Größen die der ersteren Reihe paarweise der Ordnung nach mit denen der zweiten proportional sind, ferner] die Größen [der ersteren Reihe], entweder alle oder einige von ihnen, [zu denen einer dritten Reihe] in einem beliebigen Verhältnis stehen, und die der zweiten zu den entsprechenden [einer vierten Reihe] in demselben Verhältnis, so steht die Summe der Größen der ersteren Reihe zu der Summe der aus der dritten Reihe genommenen in demselben Verhältnis als die Summe derjenigen der zweiten Reihe zu der Summe der aus der vierten Reihe genommenen [*De conoid.* 1].

## I.

Es sei [Fig. 1] $\alpha\beta\gamma$ ein Parabelsegment umschlossen von der Geraden $\alpha\gamma$ und der Parabel $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\gamma$ sei in $\delta$ halbiert, $\delta\beta\varepsilon$ dem Durchmesser parallel, und es seien $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ gezogen. Dann wird das Segment $\alpha\beta\gamma$ $^4/_3$ des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ sein.

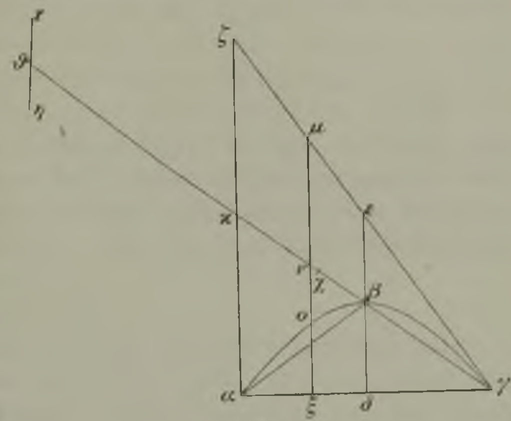


Fig. 1.

Man ziehe von den Punkten $\alpha, \gamma$ $\alpha\zeta \parallel \delta\beta\varepsilon$ und die Tangente $\gamma\zeta$, verlängere [$\gamma\beta$ nach $\kappa$ und mache $\kappa\vartheta = \gamma\kappa$]. Man denke sich $\gamma\vartheta$ als eine Wagestange mit dem Mittelpunkt $\kappa$, und $\mu\xi$ sei eine beliebige Gerade $\parallel \varepsilon\delta$. Da nun $\gamma\beta\alpha$ eine Parabel ist, $\gamma\zeta$ eine Tangente und $\gamma\delta$ eine Ordinate, so ist $\varepsilon\beta = \beta\delta$; dies wird nämlich in den Elementen bewiesen [d. h. der Kegelschnittlehre, vergl. *Quadr. parab.* 2]. Aus diesem Grunde und weil $\zeta\alpha$ und $\mu\xi \parallel \varepsilon\delta$, ist auch $\mu\nu = \nu\xi$, $\zeta\kappa = \kappa\alpha$. Und weil $\gamma\alpha : \alpha\xi = \mu\xi : \xi o$ (dies wird nämlich in einem Hilfssatz bewiesen [vergl. *Quadr. parab.* 5]), $\gamma\alpha : \alpha\xi = \gamma\kappa : \kappa\nu$, und $\gamma\kappa = \kappa\vartheta$, so ist $\vartheta\kappa : \kappa\nu = \mu\xi : \xi o$. Und weil $\nu$ Schwerpunkt der Geraden $\mu\xi$ ist, da $\mu\nu = \nu\xi$, so wird, wenn wir $\tau\eta = \xi o$ setzen und $\vartheta$ als deren Schwerpunkt, so daß $\tau\vartheta = \vartheta\eta$, die Gerade $\tau\vartheta\eta$ in Gleichgewicht sein mit $\mu\xi$ an der Stelle, wo sie ist, weil $\vartheta\nu$ in umgekehrtem Verhältnis geteilt ist zu den Gewichten $\tau\eta$ und $\mu\xi$ und $\vartheta\kappa : \kappa\nu = \mu\xi : \eta\tau$; also ist $\kappa$ Schwerpunkt des aus beiden zusammengesetzten Gewichts. Ebenso werden alle Geraden, die im Dreieck $\zeta\alpha\gamma \parallel \varepsilon\delta$ gezogen werden, an der Stelle, wo sie sind, in Gleichgewicht sein mit ihren durch die Parabel abgeschnittenen Teilen, wenn diese nach $\vartheta$ versetzt werden, so daß $\kappa$ Schwerpunkt ist des aus beiden zusammengesetzten Gewichts. Und weil aus den Geraden im Dreieck $\gamma\zeta\alpha$ das Dreieck $\gamma\zeta\alpha$ besteht und aus den im Parabelsegment der Geraden $\xi o$ entsprechend genommenen das Segment $\alpha\beta\gamma$, so wird das Dreieck $\zeta\alpha\gamma$ an der Stelle, wo es ist, im Punkte $\kappa$ in Gleichgewicht sein mit dem Parabelsegment, wenn dies nach $\vartheta$ als Schwerpunkt versetzt wird, so daß $\kappa$ Schwerpunkt ist des aus beiden zusammengesetzten Gewichts. Nun sei $\gamma\kappa$ in $\chi$ so geteilt, daß $\gamma\kappa = 3\,\kappa\chi$;

dann wird $\chi$ Schwerpunkt des Dreiecks $\alpha\zeta\gamma$ sein; denn dies ist in der Gleichgewichtslehre bewiesen [vergl. *De plan. aequil.* I 15 p. 186, 3 mit Eutokios S. 320, 5 ff.]. Nun ist das Dreieck $\zeta\alpha\gamma$ an der Stelle, wo es ist, im Punkte $\varkappa$ in Gleichgewicht mit dem Segment $\beta\alpha\gamma$, wenn dies nach $\vartheta$ als Schwerpunkt versetzt wird, und Schwerpunkt des Dreiecks $\zeta\alpha\gamma$ ist $\chi$; also ist $\triangle\,\alpha\zeta\gamma$ : Segm. $\alpha\beta\gamma$ nach $\vartheta$ als Schwerpunkt versetzt $= \vartheta\varkappa : \varkappa\chi$. Es ist aber $\vartheta\varkappa = 3\,\varkappa\chi$; also auch $\triangle\,\alpha\zeta\gamma = 3$ Segm. $\alpha\beta\gamma$. Es ist aber auch $\triangle\,\zeta\alpha\gamma = 4\,\triangle\,\alpha\beta\gamma$, weil $\zeta\varkappa = \varkappa\alpha$ und $\alpha\delta = \delta\gamma$; also ist Segm. $\alpha\beta\gamma = {}^4/_3\,\triangle\,\alpha\beta\gamma$. Dies wird klar werden ....

Dies ist nun zwar nicht bewiesen durch das hier Gesagte; es deutet aber darauf hin, daß das Ergebnis richtig ist. Da wir nun sahen, daß es nicht bewiesen ist, aber vermuteten, daß das Ergebnis richtig sei, so haben wir selbst einen geometrischen Beweis ersonnen, den wir schon früher veröffentlicht haben und auch unten anbringen werden.

## II.

Daß die Kugel viermal so groß ist als ein Kegel, dessen Grundfläche dem größten Kreis der Kugel gleich ist, die Höhe aber dem Radius der Kugel, und daß ein Zylinder, dessen Grundfläche dem größten Kreis der Kugel gleich ist, die Höhe aber dem Durchmesser des Kreises, anderthalbmal so groß ist als die Kugel, läßt sich durch die genannte Methode folgendermaßen einsehen.

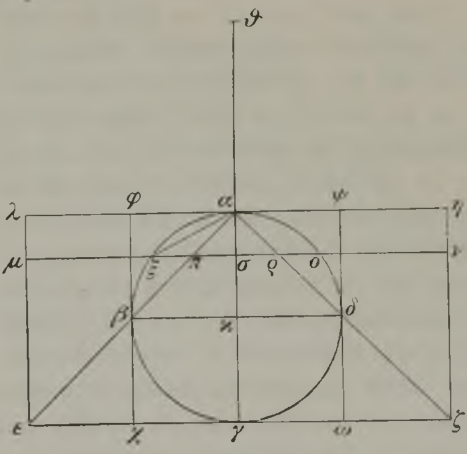


Fig. 2.

Es sei [Fig. 2] eine Kugel, deren größter Kreis $\alpha\beta\gamma\delta$, zwei auf einander senkrechte Durchmesser $\alpha\gamma$, $\beta\delta$; es sei in der Kugel um den Durchmesser $\beta\delta$ ein Kreis senkrecht auf den Kreis $\alpha\beta\gamma\delta$, und auf diesem senkrechten Kreis sei ein Kegel errichtet, dessen Scheitelpunkt $\alpha$, und nachdem dessen Mantel verlängert ist, sei der Kegel durch $\gamma$ von einer der Grundfläche parallelen Ebene geschnitten; sie wird folglich einen auf $\alpha\gamma$ senkrechten Kreis hervorbringen, dessen Durchmesser sei $\varepsilon\zeta$. Auf diesem Kreis sei ein Zylinder errichtet, dessen Achse $= \alpha\gamma$, die Seitenlinien $\varepsilon\lambda$ und $\zeta\eta$. Man verlängere $\gamma\alpha$ und mache $\alpha\vartheta = \gamma\alpha$ und denke sich $\gamma\vartheta$ als eine Wagestange, deren Mittelpunkt $\alpha$; ferner sei eine beliebige

Gerade $\mu\nu \parallel \beta\delta$ gezogen, sie schneide den Kreis $\alpha\beta\gamma\delta$ in $\xi$ und $o$, den Durchmesser $\alpha\gamma$ in $\sigma$, die Gerade $\alpha\varepsilon$ in $\pi$ und $\alpha\zeta$ in $\varrho$, und auf der Geraden $\mu\nu$ sei eine Ebene senkrecht auf $\alpha\gamma$ errichtet; sie wird also hervorbringen als Schnitt in dem Zylinder einen Kreis mit dem Durchmesser $\mu\nu$, in der Kugel $\alpha\beta\gamma\delta$ einen Kreis mit dem Durchmesser $\xi o$, in dem Kegel $\alpha\varepsilon\zeta$ einen Kreis mit dem Durchmesser $\pi\varrho$. Weil nun $\gamma\alpha \times \alpha\sigma = \mu\sigma \times \sigma\pi$ (denn $\alpha\gamma = \sigma\mu$, $\alpha\sigma = \pi\sigma$), und $\gamma\alpha \times \alpha\sigma = \alpha\xi^2 = \xi\sigma^2 + \sigma\pi^2$, so ist $\mu\sigma \times \sigma\pi = \xi\sigma^2 + \sigma\pi^2$. Ferner, weil $\gamma\alpha : \alpha\sigma = \mu\sigma : \sigma\pi$ und $\gamma\alpha = \alpha\vartheta$, so ist $\vartheta\alpha : \alpha\sigma = \mu\sigma : \sigma\pi = \mu\sigma^2 : \mu\sigma \times \sigma\pi$. Es wurde aber bewiesen $\xi\sigma^2 + \sigma\pi^2 = \mu\sigma \times \sigma\pi$; also $\alpha\vartheta : \alpha\sigma = \mu\sigma^2 : \xi\sigma^2 + \sigma\pi^2$. Es ist aber $\mu\sigma^2 : \xi\sigma^2 + \sigma\pi^2 = \mu\nu^2 : \xi o^2 + \pi\varrho^2 =$ der Kreis in dem Zylinder mit dem Durchmesser $\mu\nu$ : der Kreis in dem Kegel, dessen Durchmesser $\pi\varrho$, + der Kreis in der Kugel, dessen Durchmesser $\xi o$, also $\vartheta\alpha : \alpha\sigma =$ der Kreis in dem Zylinder : der Kreis in der Kugel + der Kreis in dem Kegel. Also wird der Kreis in dem Zylinder an der Stelle, wo er ist, mit den beiden Kreisen, deren Durchmesser $\xi o$, $\pi\varrho$, wenn sie nach $\vartheta$ so versetzt werden, daß $\vartheta$ der Schwerpunkt beider ist, im Punkte $\alpha$ in Gleichgewicht sein. In derselben Weise kann bewiesen werden, daß, auch wenn eine andere Gerade im Parallelogramm $\zeta\lambda \parallel \varepsilon\zeta$ gezogen wird, und auf ihr eine Ebene senkrecht auf $\alpha\gamma$ errichtet wird, der im Zylinder hervorgebrachte Kreis an der Stelle, wo er ist, im Punkt $\alpha$ mit den beiden in der Kugel und im Kegel hervorgebrachten Kreisen, wenn sie versetzt und auf der Wagestange im Punkt $\vartheta$ so angebracht werden, daß $\vartheta$ der Schwerpunkt beider ist, in Gleichgewicht sein wird. Wenn also Zylinder, Kugel und Kegel von den genommenen Kreisen ausgefüllt werden, so wird der Zylinder an der Stelle, wo er ist, im Punkt $\alpha$ mit der Kugel und dem Kegel zusammen, wenn sie versetzt und auf der Wagestange im Punkt $\vartheta$ so angebracht werden, daß $\vartheta$ der Schwerpunkt beider ist, in Gleichgewicht sein. Da nun die genannten Körper in Gleichgewicht sind, der Zylinder mit $\varkappa$ als Schwerpunkt, die Kugel und der Kegel versetzt, wie gesagt, mit $\vartheta$ als Schwerpunkt, so ist $\vartheta\alpha : \alpha\varkappa =$ Zylinder : Kugel + Kegel. Es ist aber $\vartheta\alpha = 2\,\alpha\varkappa$, also auch der Zylinder $= 2 \times$ (Kugel + Kegel). Es ist aber auch der Zylinder $= 3$ Kegeln [Euklid, *Elem.* XII 10], also 3 Kegel $= 2$ Kegeln $+ 2$ Kugeln. Wenn die 2 Kegel auf beiden Seiten abgezogen werden, ist also der Kegel, dessen Achsendreieck $\alpha\varepsilon\zeta$, $= 2$ Kugeln. Es ist aber der Kegel, dessen Achsendreieck $\alpha\varepsilon\zeta$, $= 8$ Kegeln, deren Achsendreieck $\alpha\beta\delta$, weil $\varepsilon\zeta = 2\beta\delta$, also die genannten 8 Kegel $= 2$ Kugeln. Folglich ist die Kugel, deren größter Kreis $\alpha\beta\gamma\delta$, viermal so groß als der Kegel, dessen Scheitelpunkt $\alpha$, die Grundfläche aber der Kreis um den Durchmesser $\beta\delta$ senkrecht auf $\alpha\gamma$.

Durch $\beta$ und $\delta$ ziehe man im Parallelogramm $\lambda\zeta \parallel \alpha\gamma$ die Geraden $\varphi\beta\chi$ und $\psi\delta\omega$ und stelle sich einen Zylinder vor, dessen Grundflächen die Kreise um die Durchmesser $\varphi\psi$, $\chi\omega$, die Achse aber $\alpha\gamma$. Da nun der Zylinder, dessen Achsenparallelogramm $\varphi\omega$, doppelt so groß ist als der Zylinder, dessen Achsenparallelogramm $\varphi\delta$, und dieser letztere dreimal so groß ist als der Kegel, dessen Achsendreieck $\alpha\beta\delta$, wie in den Elementen bewiesen ist [Euklid, *Elem.* XII, 10], so ist also der Zylinder, dessen Achsenparallelogramm $\varphi\omega$, sechsmal so groß als der Kegel, dessen Achsendreieck $\alpha\beta\delta$. Es wurde aber bewiesen, daß die Kugel, deren größter Kreis $\alpha\beta\gamma\delta$, viermal so groß ist als derselbe Kegel; folglich ist der Zylinder $^3/_2$ der Kugel; was zu beweisen war.

Durch diesen Lehrsatz, daß eine Kugel viermal so groß ist als der Kegel, dessen Grundfläche der größte Kreis, die Höhe aber gleich dem Radius der Kugel, ist mir der Gedanke gekommen, daß die Oberfläche einer Kugel viermal so groß ist als ihr größter Kreis, indem ich von der Vorstellung ausging, daß, wie ein Kreis einem Dreieck gleich ist, dessen Grundlinie die Kreisperipherie, die Höhe aber dem Radius des Kreises gleich, ebenso ist die Kugel einem Kegel gleich, dessen Grundfläche die Oberfläche der Kugel, die Höhe aber dem Radius der Kugel gleich.

## III.

Durch diese Methode läßt sich auch einsehen, daß ein Zylinder, dessen Grundfläche dem größten Kreis eines Sphäroids gleich, die Höhe aber der Achse des Sphäroids, anderthalbmal so groß ist als das Sphäroid, und wenn dies erkannt ist, ist es klar, daß, wenn ein Sphäroid von einer Ebene durch den Mittelpunkt senkrecht auf die Achse geschnitten wird, so ist die Hälfte des Sphäroids doppelt so groß als der Kegel, dessen Grundfläche die des Segments ist und die Achse dieselbe.

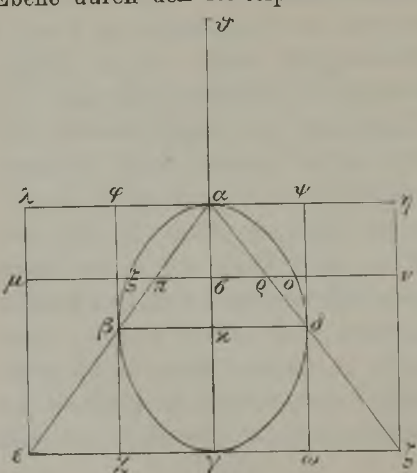


Fig. 3.

Es sei nämlich [Fig. 3] ein Sphäroid von einer Ebene durch die Achse geschnitten, und in seiner Oberfläche sei eine Ellipse $\alpha\beta\gamma\delta$ entstanden, deren Durchmesser $\alpha\gamma$, $\beta\delta$, der Mittelpunkt $\varkappa$, und es sei im Sphäroid ein Kreis um den Durchmesser $\beta\delta$ senkrecht auf $\alpha\gamma$; ferner stelle man sich einen Kegel vor, dessen Grundfläche der genannte Kreis, der Scheitelpunkt aber $\alpha$, und nachdem sein Mantel verlängert ist, sei der Kegel von einer Ebene durch $\gamma$ der Grundfläche parallel geschnitten; der Schnitt wird also ein Kreis sein senkrecht auf $\alpha\gamma$ mit $\varepsilon\zeta$ als Durchmesser; ferner denke man sich einen Zylinder, dessen Grundfläche derselbe Kreis mit dem Durchmesser $\varepsilon\zeta$, die Achse aber $\alpha\gamma$; es sei $\gamma\alpha$ verlängert und $\alpha\vartheta = \gamma\alpha$; $\vartheta\gamma$ denke man sich als Wagestange mit dem Mittelpunkt $\alpha$ und ziehe in dem Parallelogramm $\lambda\zeta$ eine Gerade $\mu\nu \parallel \varepsilon\zeta$, und auf $\mu\nu$ sei eine Ebene errichtet senkrecht auf $\alpha\gamma$; sie wird also als Schnitt in dem Zylinder einen Kreis hervorbringen, dessen Durchmesser $\mu\nu$, in dem Sphäroid einen Kreis, dessen Durchmesser $\xi o$, und in dem Kegel einen Kreis, dessen Durchmesser $\pi\varrho$. Weil $\gamma\alpha : \alpha\sigma = \varepsilon\alpha : \alpha\pi = \mu\sigma : \sigma\pi$, und $\gamma\alpha = \alpha\vartheta$, so ist $\vartheta\alpha : \alpha\sigma = \mu\sigma : \sigma\pi$. Es ist aber $\mu\sigma : \sigma\pi = \mu\sigma^2 : \mu\sigma \times \sigma\pi$ und $\mu\sigma \times \sigma\pi = \pi\sigma^2 + \sigma\xi^2$; denn $\alpha\sigma \times \sigma\gamma : \sigma\xi^2 = \alpha\kappa \times \kappa\gamma : \kappa\beta^2 = \alpha\kappa^2 : \kappa\beta^2$ (denn beide Verhältnisse sind gleich dem Verhältnis des Durchmessers zum Parameter [Apollonios, *Con.* I 21]) $= \alpha\sigma^2 : \sigma\pi^2$, also $\alpha\sigma^2 : \alpha\sigma \times \sigma\gamma = \pi\sigma^2 : \sigma\xi^2 = \sigma\pi^2 : \sigma\pi \times \pi\mu$, folglich $\mu\pi \times \pi\sigma = \sigma\xi^2$. Man addiere auf beiden Seiten $\pi\sigma^2$; dann ist $\mu\sigma \times \sigma\pi = \pi\sigma^2 + \sigma\xi^2$. Also $\vartheta\alpha : \alpha\sigma = \mu\sigma^2 : \pi\sigma^2 + \sigma\xi^2$. Es ist aber $\mu\sigma^2 : \sigma\xi^2 + \sigma\pi^2 =$ der Kreis im Zylinder, dessen Durchmesser $\mu\nu$, : der Kreis mit dem Durchmesser $\xi o$ + der Kreis mit dem Durchmesser $\pi\varrho$; also wird der Kreis, dessen Durchmesser $\mu\nu$, an der Stelle, wo er ist, im Punkte $\alpha$ in Gleichgewicht sein mit den beiden Kreisen, deren Durchmesser $\xi o$, $\pi\varrho$, wenn sie versetzt werden und im Punkte $\vartheta$ der Wagestange so angebracht, daß $\vartheta$ der Schwerpunkt beider ist; und $\vartheta$ ist der Schwerpunkt beider Kreise zusammen, deren Durchmesser $\xi o$, $\pi\varrho$, wenn sie versetzt werden, also $\vartheta\alpha : \alpha\sigma =$ der Kreis mit dem Durchmesser $\mu\nu$ : die beiden Kreise, deren Durchmesser $\xi o$, $\pi\varrho$. Auf dieselbe Weise kann bewiesen werden, daß auch, wenn eine andere Gerade in dem Parallelogramm $\lambda\zeta \parallel \varepsilon\zeta$ gezogen wird, und auf der gezogenen eine Ebene errichtet wird senkrecht auf $\alpha\gamma$, wird der in dem Zylinder hervorgebrachte Kreis an der Stelle, wo er ist, im Punkte $\alpha$ in Gleichgewicht sein mit den beiden Kreisen zusammen, dem im Sphäroid und dem im Kegel hervorgebrachten, wenn sie nach dem Punkt $\vartheta$ der Wagestange so versetzt werden, daß $\vartheta$ der Schwerpunkt beider ist. Wenn also Zylinder, Sphäroid und Kegel von den genommenen Kreisen ausgefüllt werden, wird der Zylinder an der Stelle, wo er ist, im Punkte $\alpha$ in Gleichgewicht sein mit dem Sphäroid + dem Kegel, wenn sie versetzt werden und im Punkt $\vartheta$ auf der Wagestange so angebracht werden, daß $\vartheta$ der Schwerpunkt beider ist. Nun ist $\kappa$ der Schwerpunkt des Zylinders, $\vartheta$ aber, wie gesagt, der Schwerpunkt des Sphäroids und des Kegels zusammen; also ist $\vartheta\alpha : \alpha\kappa =$ Zylinder : Sphäroid + Kegel. Aber $\alpha\vartheta = 2\alpha\kappa$, also auch der Zylinder = 2 × (Sphäroid + Kegel) = 2 × Sphäroid + 2 × Kegel. Es ist aber der Zylinder = 3 × Kegel, also 3 × Kegel = 2 × Kegel + 2 × Sphäroid. Man ziehe auf beiden Seiten 2 × Kegel ab; dann ist der Kegel, dessen Achsendreieck $\alpha\varepsilon\zeta$, = 2 × Sphäroid. Derselbe Kegel ist aber = 8 Kegeln, deren Achsendreieck $\alpha\beta\delta$; also 8 solche Kegel = 2 × Sphäroid, 4 × Kegel = Sphäroid; folglich ist das Sphäroid viermal so groß als der Kegel, dessen Scheitelpunkt $\alpha$, die Grundfläche aber der Kreis um den Durchmesser $\beta\delta$ senkrecht auf $\lambda\varepsilon$, und $^1/_2$ Sphäroid doppelt so groß als der genannte Kegel.

Man ziehe durch die Punkte $\beta$, $\delta$ im Parallelogramm $\lambda\zeta \parallel \alpha\gamma$ die Geraden $\varphi\chi$, $\psi\omega$ und stelle sich einen Zylinder vor, dessen Grundflächen die Kreise um die Durchmesser $\varphi\psi$, $\chi\omega$, die Achse aber $\alpha\gamma$. Da nun der Zylinder, dessen Achsenparallelogramm $\varphi\omega$, doppelt so groß ist als der Zylinder, dessen Achsenparallelogramm $\varphi\delta$, weil ihre Grundflächen gleich sind, die Achse aber doppelt so groß als die Achse, und da der Zylinder, dessen Achsenparallelogramm $\varphi\delta$, dreimal so groß ist als der Kegel, dessen Scheitelpunkt $\alpha$, die Grundfläche aber der Kreis um den Durchmesser $\beta\delta$ senkrecht auf $\alpha\gamma$, so ist der Zylinder, dessen Achsenparallelogramm $\varphi\omega$, sechsmal so groß als der genannte Kegel. Es wurde aber bewiesen, daß das Sphäroid viermal so groß ist als derselbe Kegel; also ist der Zylinder anderthalbmal so groß als das Sphäroid. W. z. b. w.

## IV.

Daß ein Segment eines rechtwinkligen Konoids abgeschnitten durch eine auf die Achse senkrechte Ebene anderthalbmal so groß ist als der Kegel, der dieselbe Grundfläche und Achse hat als das Segment, kann man durch die genannte Methode einsehen folgendermaßen.

Es sei [Fig. 4] ein rechtwinkliges Konoid, und es sei geschnitten von einer Ebene durch die Achse, die in der Oberfläche als Schnitt eine Parabel $\alpha\beta\gamma$ hervorbringe; es sei auch von einer anderen Ebene geschnitten senkrecht auf die Achse, und ihre gemeinsame Schnittlinie sei $\beta\gamma$; die Achse des Segments sei $\delta\alpha$, sie sei verlängert bis $\vartheta$, und es sei $\vartheta\alpha = \alpha\delta$; man stelle sich $\delta\vartheta$ als Wagestange vor mit dem Mittelpunkt $\alpha$; Grundfläche des Segments sei der Kreis um den Durchmesser $\beta\gamma$ senkrecht auf $\alpha\delta$; man stelle sich einen Kegel vor, dessen Grundfläche der Kreis mit dem Durch-

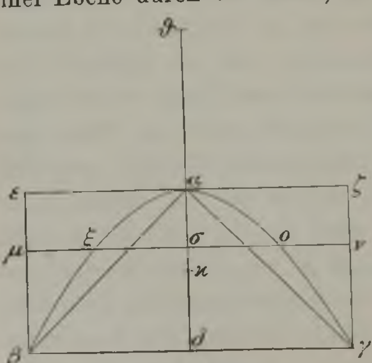


Fig. 4.

messer $\beta\gamma$, der Scheitelpunkt aber $\alpha$, es sei auch ein Zylinder, dessen Grundfläche der Kreis mit dem Durchmesser $\beta\gamma$, die Achse aber $\alpha\delta$, und im Parallelogramm sei eine Gerade $\mu\nu$ gezogen $\parallel \beta\gamma$, und auf $\mu\nu$ sei eine Ebene errichtet senkrecht auf $\alpha\delta$; sie wird also als Schnitt hervorbringen in dem Zylinder einen Kreis mit dem Durchmesser $\mu\nu$ und in dem Segment des rechtwinkligen Konoids einen Kreis mit dem Durchmesser $\xi o$. Da nun $\beta\alpha\gamma$ eine Parabel ist, $\alpha\delta$ ihr Durchmesser und $\xi\sigma$, $\beta\delta$ Ordinaten, so ist [*Quadr. parab.* 3] $\delta\alpha : \alpha\sigma = \beta\delta^2 : \xi\sigma^2$. Aber $\delta\alpha = \alpha\vartheta$, also $\vartheta\alpha : \alpha\sigma = \mu\sigma^2 : \sigma\xi^2$. Es ist aber $\mu\sigma^2 : \sigma\xi^2 =$ der Kreis im Zylinder, dessen Durchmesser $\mu\nu$, : der Kreis im Segment des rechtwinkligen Konoids, dessen Durchmesser $\xi o$, also $\vartheta\alpha : \alpha\sigma =$ der Kreis mit dem Durchmesser $\mu\nu$ : der Kreis mit dem Durchmesser $\xi o$; folglich ist der Kreis im Zylinder, dessen Durchmesser $\mu\nu$, an der Stelle, wo er ist, im Punkt $\alpha$ in Gleichgewicht mit dem Kreis, dessen Durchmesser $\xi o$, wenn er versetzt wird und auf der Wagestange in $\vartheta$ so angebracht, daß $\vartheta$ sein Schwerpunkt ist. Und der Schwerpunkt des Kreises, dessen Durchmesser $\mu\nu$, ist $\sigma$, der des Kreises, dessen Durchmesser $\xi o$, wenn er versetzt wird, $\vartheta$, und es ist in umgekehrtem Verhältnis $\vartheta\alpha : \alpha\sigma =$ der Kreis mit dem Durchmesser $\mu\nu$ : der Kreis mit dem Durchmesser $\xi o$. In derselben Weise kann bewiesen werden, daß auch, wenn eine andere Gerade im Parallelogramm $\varepsilon\gamma \parallel \beta\gamma$ gezogen wird, der im Zylinder hervorgebrachte Kreis an der Stelle, wo er ist, im Punkte $\alpha$ in Gleichgewicht sein wird mit dem in dem Segment des rechtwinkligen Konoids hervorgebrachten, wenn er auf der Wagestange nach $\vartheta$ so versetzt wird, daß $\vartheta$ sein Schwerpunkt ist. Wenn also der Zylinder und das Segment des rechtwinkligen Konoids ausgefüllt werden, so wird der Zylinder an der Stelle, wo er ist, im Punkte $\alpha$ in Gleichgewicht sein mit dem Segment des rechtwinkligen Konoids, wenn es versetzt wird und auf der Wagestange in $\vartheta$ so angebracht, daß $\vartheta$ sein Schwerpunkt ist. Und da die genannten Größen in $\alpha$ in Gleichgewicht sind, und $\kappa$ der Schwerpunkt des Zylinders ist, wenn $\alpha\delta$ in $\kappa$ halbiert wird, $\vartheta$ aber der Schwerpunkt des dahin versetzten Segments, so ist in umgekehrtem Verhältnis $\vartheta\alpha : \alpha\kappa =$ Zylinder : Segment. Es ist aber $\vartheta\alpha = 2\alpha\kappa$, also auch der Zylinder $= 2 \times$ Segment Derselbe Zylinder ist aber dreimal so groß als der Kegel, dessen Grundfläche der Kreis mit dem Durchmesser $\beta\gamma$, der Scheitelpunkt aber $\alpha$; es ist also klar, daß das Segment anderthalbmal so groß ist als derselbe Kegel.

## V.

Daß der Schwerpunkt eines Segments eines rechtwinkligen Konoids, das von einer auf die Achse senkrechten Ebene abgeschnitten wird, auf der Geraden liegt, die Achse des Segments ist, so geteilt, daß das Stück am Scheitelpunkt doppelt so groß ist als das übrige, läßt sich durch die Methode folgendermaßen einsehen.

Ein Segment eines rechtwinkligen Konoids, von einer auf die Achse senkrechten Ebene abgeschnitten, sei von einer anderen Ebene durch die Achse geschnitten, und diese bringe hervor [Fig. 5] als Schnitt in der Oberfläche die Parabel $\alpha\beta\gamma$, die gemeinsame Schnittlinie aber der Ebene, die das Segment abgeschnitten hat, und der schneidenden Ebene sei $\beta\gamma$; Achse des Segments und Durchmesser der Parabel $\alpha\beta\gamma$ sei $\alpha\delta$; man verlängere $\delta\alpha$, mache $\alpha\vartheta = \alpha\delta$ und stelle sich $\delta\vartheta$ als Wagestange vor mit dem Mittelpunkt $\alpha$; ferner sei ein Kegel im Segment eingeschrieben mit den Seitenlinien $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$, und in der Parabel sei eine Gerade $\xi o$ gezogen $\parallel \beta\gamma$; sie schneide die Parabel in $\xi$, $o$, die Seitenlinien des Kegels in $\pi$, $\varrho$. Weil nun in einer Parabel $\xi\sigma$, $\beta\delta$ senkrecht auf den Durchmesser gezogen sind, ist $\delta\alpha : \alpha\sigma = \beta\delta^2 : \xi\sigma^2$ [*Quadr. parab.* 3]. Es ist aber $\delta\alpha : \alpha\sigma = \beta\delta : \pi\sigma = \beta\delta^2 : \beta\delta \times \pi\sigma$, also auch $\beta\delta^2 : \xi\sigma^2 = \beta\delta^2 : \beta\delta \times \pi\sigma$. Folglich $\xi\sigma^2 = \beta\delta \times \pi\sigma$ und $\beta\delta : \xi\sigma = \xi\sigma : \pi\sigma$, also $\beta\delta : \pi\sigma = \xi\sigma^2 : \sigma\pi^2$ Es ist aber $\beta\delta : \pi\sigma = \delta\alpha : \alpha\sigma = \vartheta\alpha : \alpha\sigma$, also auch $\vartheta\alpha : \alpha\sigma = \xi\sigma^2 : \sigma\pi^2$. Auf $\xi o$ errichte man eine Ebene senkrecht auf $\alpha\delta$; sie wird also im Segment des rechtwinkligen Konoids einen Kreis hervorbringen, dessen Durchmesser $\xi o$, in dem Kegel aber einen Kreis, dessen Durchmesser $\pi\varrho$. Weil nun $\vartheta\alpha : \alpha\sigma = \xi\sigma^2 : \sigma\pi^2$, und $\xi\sigma^2 : \sigma\pi^2 =$ der Kreis mit dem Durchmesser $\xi o$ : der Kreis mit dem Durchmesser $\pi\varrho$, so ist $\vartheta\alpha : \alpha\sigma =$ der Kreis, dessen Durchmesser $\xi o$, : der Kreis, dessen Durchmesser $\pi\varrho$. Also wird der Kreis, dessen Durchmesser $\xi o$, an der Stelle, wo er ist, im Punkte $\alpha$ in Gleichgewicht sein mit dem Kreis, dessen Durchmesser $\pi\varrho$, wenn dieser auf der Wagestange nach $\vartheta$ so versetzt wird, daß $\vartheta$ sein Schwerpunkt ist. Da nun $\sigma$ der Schwerpunkt ist des Kreises, dessen Durchmesser $\xi o$, an der Stelle, wo er ist, $\vartheta$ aber der des Kreises, dessen Durchmesser $\pi\varrho$, wenn er versetzt wird, wie gesagt, und in umgekehrtem Verhältnis $\vartheta\alpha : \alpha\sigma =$ der Kreis mit dem Durchmesser $\xi o$ : der Kreis mit dem Durchmesser $\pi\varrho$, so sind die Kreise in Gleichgewicht im Punkt $\alpha$. In derselben Weise kann bewiesen werden, daß auch, wenn eine andere Gerade in der Parabel ge-

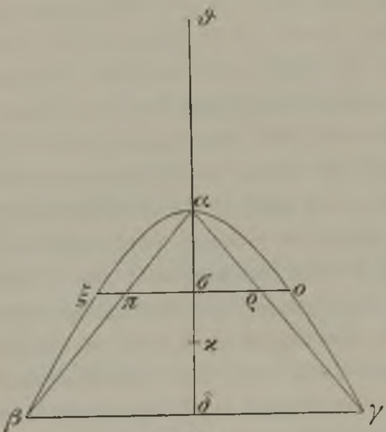


Fig. 5.

zogen wird $\| \beta\gamma$ und auf der gezogenen Geraden eine Ebene errichtet senkrecht auf $\alpha\delta$, wird der im Segment des rechtwinkligen Konoids hervorgebrachte Kreis an der Stelle, wo er ist, im Punkt $\alpha$ in Gleichgewicht sein mit dem im Kegel hervorgebrachten Kreis, wenn er versetzt wird und auf der Wagestange in $\vartheta$ so angebracht, daß $\vartheta$ sein Schwerpunkt ist. Wenn also das Segment und der Kegel von den Kreisen ausgefüllt wird, so werden alle Kreise im Segment an der Stelle, wo sie sind, in Punkt $\alpha$ in Gleichgewicht sein mit allen Kreisen des Kegels, wenn sie versetzt werden und auf der Wagestange im Punkt $\vartheta$ so angebracht, daß $\vartheta$ ihr Schwerpunkt ist; also wird auch das Segment des rechtwinkligen Konoids an der Stelle wo es ist, im Punkt $\alpha$ in Gleichgewicht sein mit dem Kegel, wenn er versetzt wird und auf der Wagestange in $\vartheta$ so angebracht, daß $\vartheta$ sein Schwerpunkt ist. Weil nun der Schwerpunkt beider Größen zusammengenommen $\alpha$ ist, der des Kegels allein aber, wenn er versetzt ist, $\vartheta$, so liegt der Schwerpunkt der übrigen Größe auf $\alpha\vartheta$ nach $\alpha$ hin verlängert, wenn auf ihr $\alpha\kappa$ abgesetzt wird derart, daß $\alpha\vartheta : \alpha\kappa =$ Segment : Kegel. Das Segment ist aber $^3/_2 \times$ Kegel, folglich $\alpha\vartheta = {}^3/_2\, \alpha\kappa$, und $\kappa$, der Schwerpunkt des rechtwinkligen Konoids, teilt $\alpha\delta$ so, daß das Stück am Scheitelpunkt des Segments doppelt so groß ist als das übrige.

## VI.

[Der Schwerpunkt einer Halbkugel liegt auf deren Achse so geteilt,] daß das Stück an der Oberfläche der Halbkugel zu dem übrigen Stück sich verhält wie 5 : 3.

Es sei [Fig. 6] eine Kugel von einer Ebene durch den Mittelpunkt geschnitten, als Schnitt in der Oberfläche sei der Kreis $\alpha\beta\gamma\delta$ hervorgebracht, $\alpha\gamma$ und $\beta\delta$ seien zwei unter sich senkrechte Durchmesser des Kreises, auf $\beta\delta$ sei eine Ebene errichtet senkrecht auf $\alpha\gamma$, ferner stelle man sich einen Kegel vor, dessen Grundfläche der Kreis mit dem Durchmesser $\beta\delta$, der Scheitelpunkt aber $\alpha$, die Seitenlinien $\beta\alpha$, $\alpha\delta$; es sei $\gamma\alpha$ verlängert und $\alpha\vartheta = \gamma\alpha$; man denke sich die Gerade $\vartheta\gamma$ als Wagestange mit dem Mittelpunkt $\alpha$ und ziehe in dem Halbkreis $\beta\alpha\delta$ eine Gerade $\xi o \| \beta\delta$; sie schneide den Umkreis des Halbkreises in $\xi$, $o$, die Seitenlinien des Kegels in $\pi$, $\varrho$ und $\alpha\gamma$ in $\varepsilon$; auf $\xi o$ sei eine Ebene errichtet senkrecht auf $\alpha\varepsilon$; sie wird als Schnitt hervorbringen in der Halbkugel einen Kreis mit dem Durchmesser $\xi o$, in dem Kegel einen Kreis mit dem

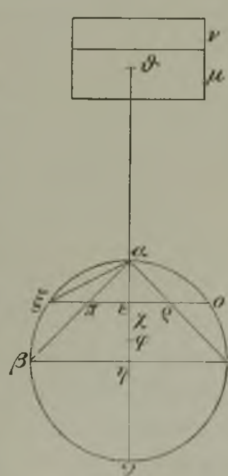


Fig. 6.

Durchmesser $\pi\varrho$. Weil nun $\alpha\gamma : \alpha\varepsilon = \xi\alpha^2 : \alpha\varepsilon^2$ und $\xi\alpha^2 = \alpha\varepsilon^2 + \varepsilon\xi^2$ und $\alpha\varepsilon = \varepsilon\pi$, so ist $\alpha\gamma : \alpha\varepsilon = \xi\varepsilon^2 + \varepsilon\pi^2 : \varepsilon\pi^2$. Es ist aber $\xi\varepsilon^2 + \varepsilon\pi^2 : \varepsilon\pi^2$ = der Kreis mit dem Durchmesser $\xi o$ + der Kreis mit dem Durchmesser $\pi\varrho$ : der Kreis mit dem Durchmesser $\pi\varrho$, und $\gamma\alpha = \alpha\vartheta$, also $\vartheta\alpha : \alpha\varepsilon$ = der Kreis mit dem Durchmesser $\xi o$ + der Kreis mit dem Durchmesser $\pi\varrho$ : der Kreis mit dem Durchmesser $\pi\varrho$. Also werden die beiden Kreise, deren Durchmesser $\xi o$, $\pi\varrho$, an der Stelle, wo sie sind, im Punkte $\alpha$ in Gleichgewicht sein mit dem Kreis, dessen Durchmesser $\pi\varrho$, wenn er versetzt wird und in $\vartheta$ so angebracht, daß $\vartheta$ sein Schwerpunkt ist. Da nun der Schwerpunkt der beiden Kreise, deren Durchmesser $\xi o$, $\pi\varrho$, an der Stelle, wo sie sind, — — — — — — — — — — —

## VII.

[Durch diese Methode] läßt sich auch einsehen, [daß ein beliebiges Kugelsegment] zu dem Kegel [mit derselben Grundfläche und Höhe sich verhält, wie Radius der Kugel + Höhe des Gegensegments : Höhe des Gegensegments]. — — — — — — — — — — — — — — — —
und [Fig. 7] auf $\mu\nu$ errichte man eine Ebene senkrecht zu $\alpha\gamma$; sie wird also als Schnitt hervorbringen im Zylinder einen Kreis, dessen Durchmesser $\mu\nu$, im Kugelsegment einen Kreis, dessen Durchmesser $\xi o$, im Kegel, dessen Grundfläche der Kreis um $\varepsilon\zeta$ als Durchmesser, der Scheitelpunkt aber $\alpha$, einen Kreis, dessen Durchmesser $\pi\varrho$. In derselben Weise wie früher kann nun bewiesen werden, daß der Kreis, dessen Durchmesser $\mu\nu$, an der Stelle, wo er ist, in $\alpha$ in Gleichgewicht ist mit den beiden Kreisen, [deren Durchmesser $\xi o$, $\pi\varrho$, wenn sie versetzt werden und an der Wagestange in $\vartheta$ angebracht. Und dasselbe kann von allen entsprechenden Kreisen bewiesen werden]. Da nun Zylinder, Kegel und Kugelsegment von den betreffenden Kreisen ausgefüllt werden, so wird auch der Zylinder an der Stelle, wo er ist, [in $\alpha$ in Gleichgewicht sein] mit Kegel + Kugelsegment, wenn sie versetzt werden und an der Wagestange in $\vartheta$ angebracht. Man teile $\alpha\eta$ in $\varphi$ und $\chi$ so, daß $\alpha\chi = \chi\eta$ und $\alpha\varphi = 3\varphi\eta$; also

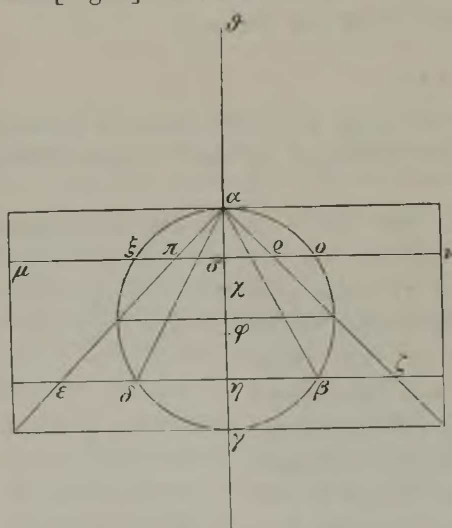



Fig 7.

wird $\chi$ der Schwerpunkt des Zylinders sein, weil Mittelpunkt der Achse $\alpha\eta$, [$\varphi$ aber der des Kegels]. Weil nun die genannten Körper in $\alpha$ in Gleichgewicht sind, so wird sein Zylinder : Kegel mit dem Durchmesser der Grundfläche $\varepsilon\zeta$ + Kugelsegment $\beta\alpha\delta = \vartheta\alpha : \alpha\chi$. — — — — — —

## VIII.

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

man verlängere [Fig. 8] $\alpha\gamma$ und mache $\alpha\vartheta = \alpha\gamma$ und $\gamma\xi$ = dem Radius der Kugel; $\gamma\vartheta$ stelle man sich als Wagestange vor mit dem Mittelpunkt $\alpha$, und in der das Segment abschneidenden Ebene beschreibe man einen Kreis mit dem Mittelpunkt $\eta$ und dem Radius $= \alpha\eta$, auf diesem Kreis sei ein Kegel errichtet mit dem Scheitelpunkt $\alpha$, und die Seitenlinien des Kegels seien $\alpha\varepsilon$, $\alpha\zeta$; ferner sei eine Gerade $\varkappa\lambda$ gezogen $\parallel \varepsilon\zeta$; sie schneide den Umkreis des Segments in $\varkappa$, $\lambda$, die Seitenlinien des Kegels $\alpha\varepsilon\zeta$ in $\varrho$, $o$ und $\alpha\gamma$ in $\pi$. Weil nun $\alpha\gamma : \alpha\pi = \alpha\varkappa^2 : \alpha\pi^2$ und $\varkappa\alpha^2 = \alpha\pi^2 + \pi\varkappa^2$ und $\alpha\pi^2 = \pi o^2$ (da auch $\alpha\eta^2 = \varepsilon\eta^2$), so ist $\gamma\alpha : \alpha\pi = \varkappa\pi^2 + \pi o^2 : o\pi^2$. Es ist aber $\varkappa\pi^2 + \pi o^2 : \pi o^2$ = der Kreis mit dem Durchmesser $\varkappa\lambda$ + der Kreis mit dem Durchmesser $o\varrho$ : der Kreis mit dem Durchmesser $o\varrho$, und $\gamma\alpha = \alpha\vartheta$; also $\vartheta\alpha : \alpha\pi$ = der Kreis mit dem Durchmesser $\varkappa\lambda$ + der Kreis mit dem Durchmesser $o\varrho$ : der Kreis mit dem Durchmesser $o\varrho$. Da nun der Kreis mit dem Durchmesser $\varkappa\lambda$ + der Kreis mit dem Durchmesser $o\varrho$ : der Kreis mit dem Durchmesser $o\varrho = \alpha\vartheta : \pi\alpha$, so sei der Kreis mit dem Durchmesser $o\varrho$ versetzt und auf der Wagestange in $\vartheta$ so angebracht, daß $\vartheta$ sein Schwerpunkt ist; also ist $\vartheta\alpha : \alpha\pi$ = der Kreis mit dem Durchmesser $\varkappa\lambda$ + der Kreis mit dem Durchmesser $o\varrho$ an der Stelle, wo sie sind, : der Kreis mit dem Durchmesser $o\varrho$, wenn er versetzt wird und auf der Wagestange in $\vartheta$ so angebracht, daß $\vartheta$ sein Schwerpunkt ist; also sind die Kreise im Segment $\beta\alpha\delta$ und in dem Kegel $\alpha\varepsilon\zeta$ in Gleichgewicht mit dem in dem Kegel $\alpha\varepsilon\zeta$ in $\alpha$. Und in derselben Weise sind alle Kreise im Segment $\beta\alpha\delta$ und im Kegel $\alpha\varepsilon\zeta$ an der Stelle, wo sie sind, mit allen Kreisen im Kegel $\alpha\varepsilon\zeta$, wenn sie versetzt werden und auf der Wagestange in $\vartheta$ so angebracht, daß $\vartheta$ ihr Schwerpunkt ist, in Gleichgewicht im Punkte $\alpha$; also sind auch das Kugelsegment $\alpha\beta\delta$ und der Kegel $\alpha\varepsilon\zeta$ an

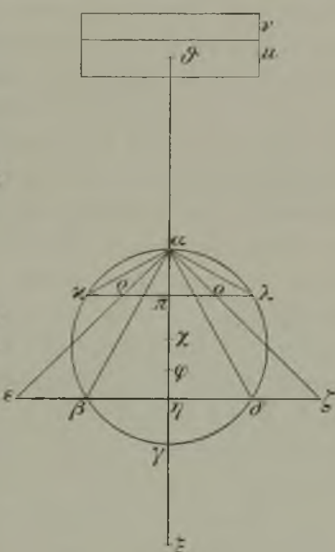


Fig. 8

der Stelle, wo sie sind, mit dem Kegel $\varepsilon\alpha\zeta$, wenn er versetzt wird und auf der Wagestange in $\vartheta$ so angebracht, daß $\vartheta$ sein Schwerpunkt ist, in Gleichgewicht im Punkte $\alpha$. Es sei der Zylinder $\mu\nu$ gleich dem Kegel, dessen Grundfläche der Kreis mit dem Durchmesser $\varepsilon\zeta$, der Scheitelpunkt aber $\alpha$, und $\alpha\eta$ sei in $\varphi$ so geteilt, daß $\alpha\eta = 4\varphi\eta$; also ist $\varphi$ der Schwerpunkt des Kegels $\varepsilon\alpha\zeta$; denn das ist vorher bewiesen. Ferner sei der Zylinder $\mu\nu$ durch eine senkrecht schneidende Ebene so geschnitten, daß der Zylinder $\mu$ mit dem Kegel $\varepsilon\alpha\zeta$ in Gleichgewicht ist. Da nun das Segment $\alpha\beta\delta$ + der Kegel $\varepsilon\alpha\zeta$ an der Stelle, wo sie sind, mit dem Kegel $\varepsilon\alpha\zeta$, wenn er versetzt wird und auf der Wagestange in $\vartheta$ so angebracht, daß $\vartheta$ sein Schwerpunkt ist, in $\alpha$ in Gleichgewicht sind, und Zylinder $\mu\nu$ = Kegel $\varepsilon\alpha\zeta$, und die beiden Zylinder $\mu + \nu$ in $\vartheta$ angebracht sind, und $\mu\nu$ mit beiden Körpern in Gleichgewicht ist, so wird auch der Zylinder $\nu$ mit dem Kugelsegment im Punkt $\alpha$ in Gleichgewicht sein. Und da Kugelsegment $\beta\alpha\delta$ : der Kegel, dessen Grundfläche der Kreis mit dem Durchmesser $\beta\delta$, der Scheitelpunkt aber $\alpha$, $= \xi\eta : \eta\gamma$ (dies ist nämlich vorher bewiesen [*De sph. et cyl.* II 2 coroll.]) und Kegel $\beta\alpha\delta$ : Kegel $\varepsilon\alpha\zeta$ = der Kreis mit dem Durchmesser $\beta\delta$ : der Kreis mit dem Durchmesser $\varepsilon\zeta$ $= \beta\eta^2 : \eta\varepsilon^2$, und $\beta\eta^2 = \gamma\eta \times \eta\alpha$, $\eta\varepsilon^2 = \eta\alpha^2$, und $\gamma\eta \times \eta\alpha : \eta\alpha^2 = \gamma\eta : \eta\alpha$, so ist Kegel $\beta\alpha\delta$ : Kegel $\varepsilon\alpha\zeta = \gamma\eta : \eta\alpha$. Wir haben aber bewiesen Kegel $\beta\alpha\delta$ : Segment $\beta\alpha\delta = \gamma\eta : \eta\xi$; also δι' ἴσου Segment $\beta\alpha\delta$ : Kegel $\varepsilon\alpha\zeta = \xi\eta : \eta\alpha$. Und weil $\alpha\chi : \chi\eta = \eta\alpha + 4\eta\gamma : \alpha\eta + 2\eta\gamma$, so ist umgekehrt $\eta\chi : \chi\alpha = 2\gamma\eta + \eta\alpha : 4\gamma\eta + \eta\alpha$ und durch Addition $\eta\alpha : \alpha\chi = 6\gamma\eta + 2\eta\alpha : \eta\alpha + 4\eta\gamma$. Es ist aber $\eta\xi = \frac{1}{4}\,(6\eta\gamma + 2\eta\alpha)$, $\gamma\varphi = \frac{1}{4}\,(4\eta\gamma + \eta\alpha)$; denn das leuchtet ein; also ist $\eta\alpha : \alpha\chi = \xi\eta : \gamma\varphi$, folglich auch $\xi\eta : \eta\alpha = \gamma\varphi : \chi\alpha$. Es wurde aber bewiesen, daß auch $\xi\eta : \eta\alpha$ = das Segment, dessen Scheitelpunkt $\alpha$, die Grundfläche aber der Kreis mit dem Durchmesser $\beta\delta$, : der Kegel, dessen Scheitelpunkt $\alpha$, die Grundfläche aber der Kreis mit dem Durchmesser $\varepsilon\zeta$; also Segment $\beta\alpha\delta$ : Kegel $\varepsilon\alpha\zeta = \gamma\varphi : \chi\alpha$. Und da der Zylinder $\mu$ mit dem Kegel $\varepsilon\alpha\zeta$ in $\alpha$ in Gleichgewicht ist, und $\vartheta$ der Schwerpunkt ist des Zylinders, $\varphi$ aber der des Kegels $\varepsilon\alpha\zeta$, so ist Kegel $\varepsilon\alpha\zeta$ : Zylinder $\mu = \vartheta\alpha : \alpha\varphi$ $= \gamma\alpha : \alpha\varphi$. Es ist aber Zylinder $\mu\nu$ = Kegel $\varepsilon\alpha\zeta$; also durch Subtraktion Zylinder $\mu$ : Zylinder $\nu = \alpha\varphi : \gamma\varphi$. Und Zylinder $\mu\nu$ = Kegel $\varepsilon\alpha\zeta$; also Kegel $\varepsilon\alpha\zeta$ : Zylinder $\nu = \gamma\alpha : \gamma\varphi = \vartheta\alpha : \gamma\varphi$. Es wurde aber bewiesen, daß auch Segment $\beta\alpha\delta$ : Kegel $\varepsilon\alpha\zeta = \gamma\varphi : \chi\alpha$; also δι' ἴσου Segment $\beta\alpha\delta$ : Zylinder $\nu = \zeta\alpha : \alpha\chi$. Und es wurde bewiesen, daß Segment $\beta\alpha\delta$ mit dem Zylinder $\nu$ in Gleichgewicht ist in $\alpha$, und $\vartheta$ ist Schwerpunkt des Zylinders $\nu$; folglich ist auch Punkt $\chi$ Schwerpunkt des Segments $\beta\alpha\delta$.

IX.

In derselben Weise wie dies läßt sich auch einsehen, daß der Schwerpunkt eines beliebigen Kugelsegments auf der Geraden liegt, die Achse des Segments ist, so geteilt, daß das Stück derselben am Scheitelpunkt des Segments zu dem übrigen Stück sich verhält wie die Achse des Segments + das vierfache der Achse des Gegensegments zu der Achse des Segments + dem doppelten der Achse des Gegensegments.

X.

Ferner läßt sich durch diese Methode einsehen, daß [ein Hyperboloidsegment zu dem Kegel], der dieselbe Grundfläche hat [und gleiche Höhe, sich verhält, wie die Achse des Segments + das dreifache] des Achsenzusatzes : die Achse + das doppelte des Zusatzes [*De conoid.* 25],[1]) und noch manches andere, das ich beiseite lassen will, da die Methode durch die vorher gegebenen Beispiele klar gemacht ist, um nur noch die Beweise der oben genannten Theoreme mitzunehmen.

XI.

Wenn in ein rechtstehendes Prisma mit quadratischen Grundflächen ein Zylinder eingeschrieben wird, dessen Grundflächen in den gegenstehenden Quadraten liegen und dessen krumme Oberfläche die 4 übrigen Parallelogramme berührt, und durch den Mittelpunkt des Kreises, der Grundfläche des Zylinders ist, und eine Seite des gegenstehenden Quadrats eine Ebene gelegt wird, so wird der Körper, der durch diese Ebene [vom Zylinder] abgeschnitten wird, $^1/_6$ des ganzen Prismas sein. Das läßt sich durch diese Methode einsehen, und wenn es so bewiesen ist, werden wir zu dem geometrischen Beweis dafür übergehen.

Man stelle sich ein rechtstehendes Prisma vor mit quadratischen Grundflächen und im Prisma einen Zylinder in besagter Weise eingeschrieben. Das Prisma sei durch die Achse von einer Ebene geschnitten senkrecht auf die Ebene, die das Zylinderstück abschneidet; der Schnitt im Prisma mit dem Zylinder sei [Fig. 9] das Parallelogramm $\alpha\beta$, die gemeinsame Schnittlinie aber der Ebene, die das Zylinderstück

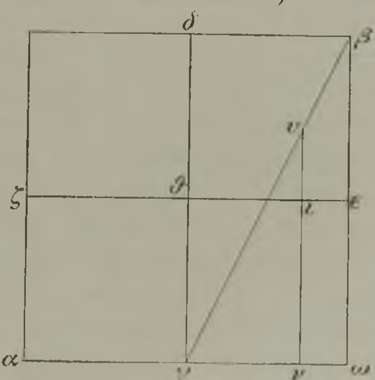


Fig. 9.

[1]) Vielleicht stand hier noch der Satz von der Lage des Schwerpunkts eines Hyperboloidsegments.

abschneidet, und der durch die Achse gelegten Ebene senkrecht auf die das Zylinderstück abschneidende sei $\beta\gamma$; Achse des Prismas und des Zylinders sei $\gamma\delta$. die von $\varepsilon\zeta$ unter rechten Winkeln halbiert werde, und auf $\varepsilon\zeta$ sei eine Ebene errichtet senkrecht zu $\gamma\delta$; sie wird also im Prisma ein Quadrat, im Zylinder einen Kreis als Schnitt hervorbringen.

Es sei nun [Fig. 10] der Schnitt des Prismas das Quadrat $\mu\nu$, der des Zylinders der Kreis $\xi o \pi \varrho$, und es berühre der Kreis die Seiten des Quadrats in den Punkten $\xi$, $o$, $\pi$, $\varrho$; gemeinsame Schnittlinie der das Zylinderstück abschneidenden Ebene und der durch $\varepsilon\zeta$ gelegten senkrecht auf die Achse des Zylinders sei $\kappa\lambda$; sie wird von $\pi\vartheta\xi$ halbiert. Man ziehe im Halbkreis $o\pi\varrho$ eine Gerade $\sigma\tau$ senkrecht auf $\pi\chi$, auf $\sigma\tau$ errichte man eine Ebene senkrecht zu $\xi\pi$ und verlängere sie nach beiden Seiten der Ebene, worin der Kreis $\xi o \pi \varrho$; sie wird also im Halbzylinder, dessen Grundfläche der Halbkreis $o\pi\varrho$, die Höhe aber die Achse des Prismas,

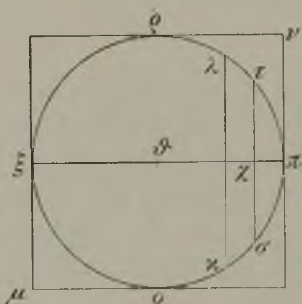


Fig. 10

als Schnitt ein Parallelogramm hervorbringen, dessen eine Seite $= \sigma\tau$, die andere $=$ der Seitenlinie des Zylinders, und im Zylinderstück ebenfalls ein Parallelogramm, dessen eine Seite $= \sigma\tau$, die andere $= \nu\upsilon$; und $\nu\upsilon$ wird demnach im Parallelogramm $\delta\varepsilon \parallel \beta\omega$ gezogen sein und $\varepsilon\iota = \pi\chi$ abschneiden. Weil nun $\varepsilon\gamma$ ein Parallelogramm ist und $\nu\iota \parallel \vartheta\gamma$, und $\varepsilon\vartheta$, $\beta\gamma$ die Parallelen schneiden, so ist $\varepsilon\vartheta : \vartheta\iota = \omega\gamma : \gamma\nu = \beta\omega : \upsilon\nu$. Es ist aber $\beta\omega : \upsilon\nu =$ Parallelogramm im Halbzylinder : Parallelogramm im Zylinderstück; beide Parallelogramme haben nämlich dieselbe Seite $\sigma\tau$; und $\varepsilon\vartheta = \vartheta\pi$, $\iota\vartheta = \chi\vartheta$; und da $\pi\vartheta = \vartheta\xi$, so ist $\vartheta\xi : \vartheta\chi =$ Parallelogramm im Halbzylinder : Parallelogramm im Zylinderstück. Man denke sich das Parallelogramm im Zylinderstück versetzt und in $\xi$ so angebracht, daß $\xi$ sein Schwerpunkt ist, ferner denke man sich $\pi\xi$ als eine Wagestange mit dem Mittelpunkt $\vartheta$; also ist das Parallelogramm im Halbzylinder an der Stelle, wo es ist, im Punkt $\vartheta$ in Gleichgewicht mit dem Parallelogramm im Zylinderstück, wenn es versetzt wird und an der Wagestange in $\xi$ so angebracht, daß $\xi$ sein Schwerpunkt ist. Und da $\chi$ der Schwerpunkt ist des Parallelogramms im Halbzylinder, $\xi$ aber der des Parallelogramms im Zylinderstück, wenn es versetzt wird, und $\xi\vartheta : \vartheta\chi =$ Parallelogramm, dessen Schwerpunkt $\chi$ : Parallelogramm, dessen Schwerpunkt $\xi$, so wird das Parallelogramm, dessen Schwerpunkt $\chi$, in $\vartheta$ in Gleichgewicht sein mit dem Parallelogramm, dessen Schwerpunkt $\xi$. Auf dieselbe Weise kann bewiesen werden, daß auch, wenn eine andere Gerade im Halbkreis

$o\pi\varrho$ senkrecht auf $\pi\vartheta$ gezogen wird, und auf der gezogenen Geraden eine Ebene errichtet wird senkrecht zu $\pi\vartheta$ und nach beiden Seiten der Ebene, worin der Kreis $\xi o\pi\varrho$ liegt, verlängert, wird das im Halbzylinder hervorgebrachte Parallelogramm an der Stelle, wo es ist, im Punkt $\vartheta$ in Gleichgewicht sein mit dem im Zylinderstück hervorgebrachten Parallelogramm, wenn es versetzt wird und an der Wagestange in $\xi$ so angebracht, daß $\xi$ sein Schwerpunkt ist; also werden auch alle Parallelogramme im Halbzylinder an der Stelle, wo sie sind, im Punkt $\vartheta$ in Gleichgewicht sein mit allen Parallelogrammen des Zylinderstücks, wenn sie versetzt werden und an der Wagestange im Punkt $\xi$ angebracht; folglich wird auch der Halbzylinder an der Stelle, wo er ist, im Punkt $\vartheta$ mit dem Zylinderstück in Gleichgewicht sein, wenn es versetzt wird und an der Wagestange in $\xi$ so angebracht, daß $\xi$ sein Schwerpunkt ist.

## XII.

Es sei [Fig. 11] das auf die Achse senkrechte Parallelogramm [$\mu\nu$ für sich gezeichnet mit dem Kreis $\xi o\pi\varrho$ und dessen Durchmessern $\xi\pi$, $o\varrho$. Man ziehe] $\vartheta\mu$ und $\vartheta\eta$ und errichte auf ihnen zwei Ebenen senkrecht zu der Ebene, worin der Halbkreis $o\pi\varrho$ liegt, und verlängere die genannten Ebenen nach beiden Seiten; es entsteht so ein Prisma, dessen Grundfläche ein Dreieck wie $\vartheta\mu\eta$, die Höhe aber gleich der Achse des Zylinders, und dieses Prisma ist $\frac{1}{4}$ des ganzen Prismas, das den Zylinder umschließt. Im Halbkreis $o\pi\varrho$ und im Quadrat $\mu\nu$ ziehe man zwei Geraden $\varkappa\lambda$ und $\tau\upsilon$ in gleichen Abständen von $\pi\xi$; sie schneiden den Umkreis des Halbkreises $o\pi\varrho$ in den Punkten $\varkappa$, $\tau$, den Durchmesser $o\varrho$ in $\sigma$, $\zeta$, die Geraden $\vartheta\eta$, $\vartheta\mu$ in $\varphi$, $\chi$. Auf $\varkappa\lambda$, $\tau\upsilon$ errichte man zwei Ebenen senkrecht zu $o\varrho$ und verlängere sie nach beiden Seiten der Ebene, worin der Kreis $\xi o\pi\varrho$ liegt; sie werden also als Schnitte hervorbringen im Halbzylinder, dessen Grundfläche der Halbkreis $o\pi\varrho$, die Höhe aber die des Zylinders, ein Parallelogramm, dessen eine Seite $= \varkappa\sigma$, die andere aber gleich der Achse des Zylinders, und im Prisma $\vartheta\eta\mu$ ebenfalls ein Parallelogramm, dessen eine Seite $= \lambda\chi$, die andere aber $=$ der Achse, und in derselben Weise im Halbzylinder ein Parallelogramm, dessen eine Seite $= \tau\zeta$, die andere aber $=$ der Achse des Zylinders, und im Prisma ein Parallelogramm, dessen eine Seite $= \upsilon\varphi$, die andere aber $=$ der Achse des Zylinders.

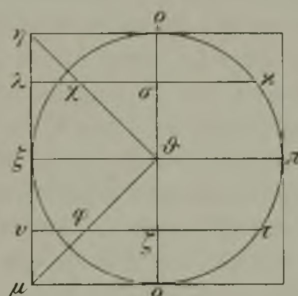


Fig. 11.

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

XIII.

Es sei ein rechtstehendes Prisma mit quadratischen Grundflächen, eine seiner Grundflächen sei [Fig. 12] das Quadrat $\alpha\beta\gamma\delta$, im Prisma sei ein Zylinder eingeschrieben, und seine Grundfläche sei der Kreis $\varepsilon\zeta\eta\vartheta$, der die Seiten des Parallelogramms $\alpha\beta\gamma\delta$ in $\varepsilon$, $\zeta$, $\eta$, $\vartheta$ berührt; durch seinen Mittelpunkt und die der Seite $\gamma\delta$ entsprechenden Seite des dem Quadrat $\alpha\beta\gamma\delta$ gegenstehenden Quadrats lege man eine Ebene; sie wird also von dem ganzen Prisma ein anderes Prisma abschneiden, das $\frac{1}{4}$ des ganzen Prismas sein wird, und es wird umschlossen sein von 3 Parallelogrammen und 2 einander gegenüberstehenden Dreiecken.

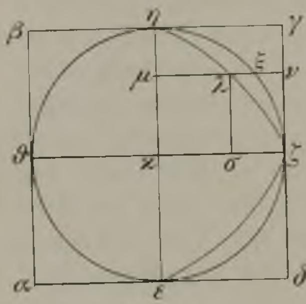


Fig. 12.

In dem Halbkreis $\varepsilon\zeta\eta$ beschreibe man eine Parabel, deren Grundlinie $\eta\varepsilon$, die Achse aber $\kappa\zeta$, und im Parallelogramm $\delta\eta$ ziehe man $\mu\nu \parallel \kappa\zeta$; sie wird also den Umkreis des Halbkreises in $\xi$ schneiden, die Parabel aber in $\lambda$, und $\mu\nu \times \nu\lambda = \nu\xi^2$ (denn das ist einleuchtend [Apollonios, *Con.* I 11]). Daher ist $\mu\nu : \nu\lambda = \eta\kappa^2 : \lambda\sigma^2$. Auf $\mu\nu$ sei eine Ebene errichtet senkrecht zu $\varepsilon\eta$; sie wird in dem von dem ganzen Prisma abgeschnittenen Prisma als Schnitt ein rechtwinkliges Dreieck hervorbrigen, dessen eine Kathete $\mu\nu$, die andere aber eine Gerade in der Ebene auf $\gamma\delta$ senkrecht zu $\gamma\delta$ in $\nu$ und gleich der Achse des Zylinders, die Hypotenuse aber in der schneidenden Ebene. Sie wird ferner in dem Stück, das vom Zylinder abgeschnitten wird von der durch $\varepsilon\eta$ und die der Seite $\gamma\delta$ gegenstehende Quadratseite gelegten Ebene, als Schnitt ein rechtwinkliges Dreieck hervorbringen, dessen eine Kathete $\mu\xi$, die andere aber eine in der Zylinderfläche senkrecht auf die Ebene $\kappa\nu$ gezogene Gerade, die Hypotenuse aber — — — — — — —

und es werden sein alle Dreiecke im Prisma : alle Dreiecke im Zylinderstück = alle Geraden im Parallelogramm $\delta\eta$ : alle Geraden zwischen der Parabel und der Geraden $\varepsilon\eta$. Und aus den Dreiecken im Prisma besteht das Prisma, aus [denen im Zylinderstück das Zylinderstück, aus] den Geraden im Parallelogramm $\delta\zeta \parallel \kappa\zeta$ das Parallelogramm $\delta\eta$ und aus den von der Parabel und der Geraden $\varepsilon\eta$ abgeschnittenen Geraden das Parabelsegment; also ist Prisma : Zylinderstück = Parallelogramm $\eta\delta$ : Segment $\varepsilon\zeta\eta$, das von der Parabel und der Geraden $\varepsilon\eta$ umschlossen wird. Es ist aber das Parallelogramm $\delta\eta$ [= $\frac{3}{2}$ des von der Parabel und der Geraden $\varepsilon\eta$ umschlossenen] Segments; dies ist nämlich in dem vorher entwickelten bewiesen; also ist auch das Prisma $= \frac{3}{2}$ Zylinderstück. Wenn also das Zylinderstück $= 2$, ist das Prisma $= 3$ und das ganze, den Zylinder umschließende Prisma $= 12$, weil es 4 mal das andere Prisma ist; also ist das Zylinderstück $= \frac{1}{6}$ Prisma. W. z. b. w.

XIV.

Es sei ein rechtstehendes Prisma mit quadratischen Grundflächen [und darin eingeschrieben ein Zylinder; es sei geschnitten von einer Ebene durch den Mittelpunkt der Grundfläche des Zylinders und eine Seite des gegenstehenden Quadrats]. Diese Ebene schneidet also vom ganzen Prisma ein Prisma ab und vom Zylinder ein Zylinderstück. Es läßt sich beweisen, daß das vom Zylinder durch die Ebene abgeschnittene Stück $\frac{1}{6}$ des ganzen Prismas ist. Vorher wollen wir aber beweisen, daß es möglich ist im Zylinderstück eine körperliche Figur einzuschreiben und eine andere zu umschreiben aus Prismen zusammengesetzt, die gleiche Höhe haben und als Grundflächen ähnliche Dreiecke, so daß die umschriebene Figur die eingeschriebene übertrifft um weniger als jede beliebige Größe. — — — — — — — — — — — — — — — — —

Es wurde aber bewiesen, daß das von der schiefen Ebene abgeschnittene Prisma $< \frac{3}{2}$ des im Zylinderstück eingeschriebenen Körpers. Nun ist das von der schiefen Ebene abgeschnittene Prisma : der im Zylinderstück eingeschriebene Körper $=$ Parallelogramm $\delta\eta$ : die Parallelogramme, die eingeschrieben sind in dem von der Parabel und der Geraden $\varepsilon\eta$ umschlossenen Segment; also ist Parallelogramm $\delta\eta < \frac{3}{2}$ der Parallelogramme in dem von der Parabel und der Geraden $\varepsilon\eta$ umschlossenen Segment. Das ist aber unmöglich, weil wir anderswo bewiesen haben, daß das Parallelogramm $\delta\eta$ $\frac{3}{2}$ ist des von der Parabel und der Geraden $\varepsilon\eta$ umschlossenen Segments. Folglich ist — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — nicht größer — — — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

Und alle Prismen in dem von der schiefen Ebene abgeschnittenen Prisma : alle Prismen in der um das Zylinderstück umschriebenen Figur $=$ alle Parallelogramme im Parallelogramm $\delta\eta$ : alle Parallelogramme in der Figur, die umschrieben ist um das von der Parabel und der Geraden $\varepsilon\eta$ umschlossenen Segment, d. h. das von der schiefen Ebene abgeschnittene Prisma : die um das Zylinderstück umschriebene Figur = Parallelogramm $\delta\eta$ : die von der Parabel und der Geraden $\varepsilon\eta$ umschlossene Figur. Es ist aber das von der schiefen Ebene abgeschnittene Prisma $> \frac{2}{3}$ der um das Zylinderstück umschriebenen körperlichen Figur — — — — — —

## Kommentar.

Herr Heiberg hat mich freundlichst gebeten seine Übersetzung der von ihm gefundenen Schrift von Archimedes mit einem Kommentar zu begleiten. Diese Schrift, wo Archimedes, der sonst nur fertige Sätze und fertige Beweise gegeben hat, in seine mathematische Werkstatt hineinsehen läßt, wird dadurch sowohl sehr leicht zu lesen als außerordentlich reich an Belehrung über Archimedes' Arbeitsweise und ganze Auffassung und dadurch über die antiken mathematischen Auffassungen überhaupt. Sie bringt auch wichtige, rein historische Aufschlüsse über die Arbeiten von Archimedes und von seinen Vorgängern.

Da Archimedes diesmal selbst die leitenden Gesichtspunkte in seiner klaren Sprache, wo höchstens die antiken Umbildungen der Proportionen dem modernen Leser fremdartig vorkommen werden, darlegt, wird es da, wo der Text vollständig vorliegt, keiner Erklärung bedürfen. Eine solche würde vielmehr nur dem Leser den Genuß nehmen, selbst der schönen Darstellung des Archimedes zu folgen. In meinem Kommentar werde ich daher immer auf den Text selbst hinweisen, und nur, wenn es für den Überblick notwendig ist, den Inhalt referieren oder in die moderne Zeichensprache umschreiben. Durch das Lesen wird Archimedes' Gedankengang sich so klar darbieten, daß kleinere Lakunen fast mit vollständiger Sicherheit ausgefüllt werden, und daß selbst die wahrscheinlichen Hauptzüge einiger ganz verlorener Beweise sich erraten lassen.

Dagegen läßt der Platz, den diese Schrift chronologisch in der Reihe der bekannten Arbeiten von Archimedes einnimmt, sich nicht mit vollständiger Sicherheit festsetzen. Nur erfahren wir am Schluß von I, daß ihr die an Dositheos in Alexandria gesandte Schrift über die Quadratur der Parabel, wo er zum ersten Male dieselbe mechanische Methode wie hier benutzt und nachher einen davon ganz verschiedenen geometrischen Beweis gibt, vorangegangen ist. Noch älter als die genannte Schrift waren die an Konon in Alexandria gesandten Aufgaben und Lehrsätze, die später in der Einleitung zur Schrift über die Spiralen wiederholt sind. In der ersten dieser Aufgaben wird es verlangt, eine ebene Fläche zu finden, die der Oberfläche einer gegebenen Kugel gleich ist. Diese Aufgabe war, als die Schrift über die Spiralen erschien, schon in dem ersten Buche über Kugel und Zylinder gelöst, und daran weiter die Bestimmungen der krummen Oberfläche eines Kugelsegments und der Rauminhalte einer Kugel, eines Kugelsektors und (im 2. Buche) eines Kugelsegments geknüpft. Ebenfalls waren die nachfolgenden Aufgaben schon im 2. Buche über Kugel und Zylinder gelöst. Außer den eben zu beweisenden Sätzen über die Spiralen nennt ARCHIMEDES noch unter den an KONON geschickten Lehrsätzen die Bestimmung des Rauminhaltes eines Segments eines Umdrehungsparaboloids. Diese hat er später in der Schrift über „Konoiden und Sphäroiden" bewiesen und noch dazu die Rauminhalte der Segmente eines zweischaligen Umdrehungshyperboloids und eines Umdrehungsellipsoids gefunden. Zur Beurteilung des wahrscheinlichen Platzes der jetzt vorliegenden Arbeit in Beziehung auf die hier genannten drei Schriften, von welchen diejenigen über Kugel und Zylinder und über Konoiden und Sphäroiden teilweise dieselben Fragen auf ganz andere Weise behandeln, liefert sie uns verschiedene Beiträge, die wir, um nichts vorzugreifen, erst am Schlusse dieses Kommentars beleuchten werden.

Der Anfang der Vorrede zeigt, daß die Schrift an den bekannten Gelehrten ERATOSTHENES in Alexandria geschickt ist, und daß ARCHIMEDES ihm schon vorher die am Schlusse der Schrift bewiesenen Lehrsätze[1]), die er aus klar ausgesprochenen Gründen als besonders interessant betrachtet, gesandt hatte. Er sagt auch, daß er früher Sätze über den Rauminhalt von Konoiden (d. h. Umdrehungsparaboloiden und hyperbolischen Umdrehungshyperboloiden) und Sphäroiden (Umdrehungsellipsoiden) mitgeteilt habe. Da die Mitteilung an KONON — soweit wir sie kennen — nur solche vom Paraboloid enthält, muß er also entweder in einem andern Schreiben an einen Alexandriner mehr darüber mitgeteilt haben oder ihnen schon die „Konoiden und Sphäroiden" gesandt haben. Obschon ARCHIMEDES alles, was er vom Ellipsoid wußte, auch von der Kugel wissen mußte, sagt er doch nichts von der Kugel, was wir schon hier hervorheben. Waren doch die Eigenschaften der Kugel zu wichtig, um sie nur als Spezialfälle derjenigen des Ellipsoids zu betrachten, eine Betrachtungsweise, die überhaupt den antiken Darstellungen ganz fern lag!

ARCHIMEDES spricht demnächst von der eigentümlichen, mechanischen Methode, die, neben den geometrischen Beweisen der zwei Hauptsätze, ein

---

1) Daß eben diese Sätze in der nun gefundenen Schrift bewiesen waren, wußte man schon aus HERONS vor kurzem gefundenen *Metrica*.

Hauptgegenstand der ganzen Mitteilung ist. Sie ist nützlich zur Auffindung geometrischer Sätze und ihrer Beweise, wenn auch die dadurch erreichte Herleitung nicht selbst als geometrischer Beweis gelten darf. Als Beispiel der Nützlichkeit solcher heuristischen Methoden nennt er, daß Demokritos die Lehrsätze über die Rauminhalte einer Pyramide und eines Kegels gefunden hat, wenn sie auch erst von Eudoxos bewiesen würden. Da natürlich Demokritos nicht ganz ohne Grund solche richtige Sätze aufgestellt hat, erfahren wir dadurch, daß er ihr wirklicher Entdecker ist, daß seine Beweisführung aber nicht die später aufgestellten, exakten Anforderungen befriedigte. Es wird auch bestätigt, daß Eudoxos der Erfinder der exakten Beweisführung der genannten Sätze ist. Wie wir aus II 296, 9—12 und 23—25[1]) ersehen, geht seine Erfindung darauf aus, daß er, statt von unendlich kleinen Größen zu sprechen, die Beweise auf dem Postulat beruhen läßt, daß eine gegebene Größe immer so vielmal wiederholt werden kann, daß das dadurch erreichte Multiplum eine andere gegebene Größe übertrifft. Bekanntlich stützt sich die Lehre von den Verhältnissen inkommensurabler Größen im 5. Buche der Euklidischen Elemente auf dasselbe Postulat (Def. 4), und durch die Vermittelung des daraus hergeleiteten Satzes 1 des 10. Buches, gilt dasselbe von den Beweisen im 12. Buche der eben genannten, von Demokritos gefundenen, Sätze.[2])

In allen seinen anderen Schriften stützt Archimedes seine exakte Begründung (Exhaustionsbeweis) der Sätze infinitesimaler Natur auf dasselbe Postulat (Lemma), und wie steif man damals an die Forderung einer solchen Beweisführung hielt, ersehen wir aus seiner Vorrede zum 1. Buch über Kugel und Zylinder, wo er, ohne Demokritos zu nennen, die eben zitierten Sätze als ganz unbekannt vor Eudoxos betrachtet. In der neugefundenen Schrift erlaubt er sich aber selbst, in I ein Dreieck und ein Parabelsegment aus Reihen paralleler Sehnen bestehen zu lassen, in II Zylinder, Kugel und Kegel durch Reihen paralleler Kreisschnitten auszufüllen, und ebenso in den folgenden Sätzen. Dadurch gelingt es ihm auf wenigen Seiten eine große Anzahl von Sätzen herzuleiten, indem er sich selbst und seinen Lesern die Mühe weitläufiger Exhaustionsbeweise erspart, Beweise, die sich jedoch überall ohne Schwierigkeit nach den ge-

1) Diese Zitate und ähnliche im folgenden beziehen sich auf Heibergs Ausgabe der Werke des Archimedes.

2) Es ist daher ganz irreleitend, namentlich auch für das Verständnis der Euklidischen Elemente, wenn man dieses schon von Aristoteles (266 $b_2$; siehe Heiberg: *Mathematisches zu Aristoteles;* Abhandl. zur Gesch. der mathem. Wiss. 18, 1904, S. 23) zitierte Postulat das „Archimedische Axiom" nennt. (Siehe meinen Vortrag am Heidelberger Kongreß 1904, Bericht (1905) S. 541.)

wöhnlichen Regeln ausbilden ließen, wie er es selbst schon in der Schrift über Parabelquadratur für den Beweis in I getan hatte. Aber er hütet sich überall wohl davor, die gegebene Andeutung eines Beweises als Beweis zu betrachten.

Nach der Vorrede nennt ARCHIMEDES, neben einem Hilfsatz algebraischer Natur, die statischen Voraussetzungen, die er in seiner mechanischen Methode benutzen muß. Diese werden also als den Lesern bekannt betrachtet, und man muß annehmen, daß sie in einem damals bekannten Buche zu finden waren. Für die Mehrzahl dieser Voraussetzungen, die die Schwerpunkte ebener Figuren betreffen, liegt es nahe an ARCHIMEDES' eigenes erstes Buch über das Gleichgewicht ebener Figuren zu denken, wo eben solche Fragen behandelt werden. Der erste Hilfsatz scheint auch nach den erhaltenen Überresten fast wörtlich mit dem Satz 8 des genannten Buches zu stimmen. Von demselben Hilfsatz wird ein Teil zitiert in einem Stücke des nun gefundenen, griechischen Textes der hydrostatischen Schrift von ARCHIMEDES, das eine Lakune der bis jetzt allein gekannten lateinischen Übersetzung ausfüllt (II S. 377, 14).[1]) Dort wird gesagt, daß er in den Elementen der Mechanik (*ἐν τοῖς στοιχείοις τῶν μηχανικῶν*) bewiesen ist. Sollte dadurch das erste Buch über das Gleichgewicht ebener Figuren bezeichnet werden, und dasselbe Buch auch in der hier vorliegenden Schrift zitiert sein?

Auf letzteres deuten die zwei folgenden Hilfsätze nicht. Sie befinden sich weder unter den Postulaten noch unter den Sätzen des genannten Buches, wo sie jedenfalls besondere Beweise fordern würden, der letztere z. B. einen mit demjenigen für die Bestimmung des Schwerpunktes eines Parallelogrammes analogen Beweis. Zitate des Buches in seiner uns überlieferten Gestalt sind sie also jedenfalls nicht. Dagegen sind sie einfach genug um anzunehmen, daß sie in einem Vorläufer der exakt-geo-

1) Wie Hr. HEIBERG mir gütigst mitgeteilt hat, lautet dieses Ausfüllungsstück so: . . . und von $\pi$ werde $\pi\varphi \parallel \nu o$ gezogen; also halbiert $\pi\varphi$ $\iota\sigma$; denn dies ist in der Lehre von den Kegelschnitten bewiesen. Man teile $\pi\varphi$ so, daß $\pi\beta = 2\beta\varphi$, und $\nu o$ in $\varrho$ so, daß $o\varrho = 2\varrho\nu$. Dann ist $\varrho$ der Schwerpunkt des größeren Segments, $\beta$ derjenige des Segments $\iota\pi o\sigma$; denn es ist in der Lehre vom Gleichgewicht (*ἐν ταῖς ἰσορροπίαις*) bewiesen, daß der Schwerpunkt eines Paraboloidsegments die Achse so teilt, daß das Stück am Scheitel das Doppelte des Überrests ist. Wenn man dann das Segment $\iota\pi o\varsigma$ vom ganzen Segment abzieht, liegt der Schwerpunkt des Überrestes in $\varrho\gamma$; denn in den Elementen der Mechanik (*ἐν τοῖς στοιχείοις τῶν μηχανικῶν*) ist es bewiesen, daß, wenn man eine Größe, die einen anderen Schwerpunkt als das Ganze hat, abzieht, der Schwerpunkt des Überrests auf der Geraden liegt, die die Schwerpunkte des Ganzen und des abgezogenen Teils verbindet, nach derselben Seite verlängert, wo der Schwerpunkt des Ganzen liegt.

metrischen Behandlung, die ARCHIMEDES von der Statik gegeben hat, aufgestellt waren. Von diesem konnte ARCHIMEDES dann auch den Wortlaut des Hilfsatzes 1 behalten haben, und 4 und 5 mußten in allen Lehrbüchern der Statik vorkommen. Einem solchen älteren Buch müßte dann auch der wichtige Hilfsatz über den Schwerpunkt des Kegels, deren Bestimmung in keiner bekannten Schrift von ARCHIMEDES vorliegt, entnommen sein.

Diese Betrachtungen setzen doch die Möglichkeit voraus, daß ARCHIMEDES nur der exakte Begründer der einfachsten Sätze der Statik, nicht ihr erster Entdecker noch der erste Erfinder des Begriffs des Schwerpunktes ist. Diese Möglichkeit wird nicht durch die Ausdrücke im Buche über das Gleichgewicht ebener Figuren ausgeschlossen: der Schwerpunkt wird nicht als ein neuer Begriff behandelt; nur die zu seiner exakten geometrischen Bestimmung nötigen Voraussetzungen werden aufgestellt. Auch die Überlieferung genügt nicht, um diese Möglichkeit zu entfernen; haben wir ja eben gesehen, daß man EUDOXOS aus ganz ähnlichen Gründen als Entdecker des Rauminhaltes der Pyramide und des Kegels betrachtete! Daß ARCHIMEDES den Begriff des Schwerpunktes und damit alle die in der vorliegenden Methodenlehre benutzten Voraussetzungen selbst geschaffen hat, erfordert ebensowohl einen Beweis als die entgegengesetzte Annahme.

Darauf, daß ARCHIMEDES doch wirklich selbst früher alle die aufgestellten Voraussetzungen mitgeteilt hat,[1]) deutet das einzige erhaltene Wort des nach der Aufstellung der mechanischen Voraussetzungen folgenden Stückes (S. 324 unten), nämlich „veröffentlicht", welches der Herausgeber mit [Dies alles ist schon früher] ausgefüllt hat. ARCHIMEDES sollte dann schon damals nicht nur die planimetrischen Schwerpunktsätze im zitierten Buche, sondern auch die räumlichen in einer jetzt verlorenen Fortsetzung veröffentlicht haben. Auf letztere konnte dann auch das erste Zitat in dem Stück, das wir in der Note S. 345 angeführt haben, sich beziehen. Sie müßte dann früher als die Methodenlehre einen geometrischen Beweis ihres Satzes V enthalten haben; denn eben auf diesen Satz bezieht sich das Zitat in dem Satze aus der hydrostatischen Schrift.

Wie es sich nun auch mit den zwei hier genannten Möglichkeiten verhält, sehen wir, daß der Satz über den Schwerpunkt eines Kegels eine Voraussetzung ist, die unabhängig von der neuen Methode gefunden ist. Es ist wahrscheinlich so geschehen, daß man mit dem Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide angefangen hat.

Es ist auch noch zu bemerken, daß ARCHIMEDES seine Erklärungen darüber, daß seine mechanischen Herleitungen nicht als Beweise zu be-

1) Dies ist die Ansicht HEIBERGS.

trachten sind, so weit getrieben hat, daß er selbst in der Schrift über die Parabelquadratur, wo er dieser Herleitung die exakte Form eines Exhaustionsbeweises gibt, es doch für notwendig hält, darauf eine eigentlich geometrische Beweisführung folgen zu lassen. Diese würde ganz natürlich sein, wenn seine eigene exakte Begründung der Statik im 1. Buche über das Gleichgewicht ebener Figuren damals noch nicht vorlag, und er also auf einer älteren, weniger genauen Mechanik bauen mußte. In diesem Falle versteht man auch seinen Wunsch, nachher seiner neuen Methode eine bessere Grundlage zu geben, und besonders die bei der Parabelquadratur benutzte Bestimmung des Schwerpunktes eines Dreiecks mit der in der Geometrie verlangten Genauigkeit zu beweisen. Aber auch wenn sowohl die noch erhaltene Schrift über Gleichgewicht als die soeben als möglich angenommene Fortsetzung damals vorlagen, und der Schwerpunkt in diesen zum ersten Male hervorgetreten war, konnte ARCHIMEDES diesen Begriff als zu neu betrachten, um zu hoffen, daß andere den darauf gegründeten Beweisen eine geometrische Sicherheit beimessen würden.

In beiden Fällen versteht man, daß ARCHIMEDES in der vorliegenden Schrift sich die Mühe erspart, den mechanischen Herleitungen die Form von Exhaustionsbeweisen zu geben, was ihm doch gar keine wirkliche Schwierigkeiten verursachen konnte; dies würde nämlich nicht genügen um die Beweise exakt zu machen.

Ehe wir die mechanischen Voraussetzungen verlassen, ist noch zu bemerken, daß die Benutzung des Schwerpunktes eines Kegels, dessen Bestimmung durch Integration die Kenntnis des Integrals $\int_0^a x^3\,dx$ voraussetzt, dem ARCHIMEDES erlaubt auch andere Bestimmungen auszuführen, die für uns auf dasselbe Integral führen würden, ganz wie bei der Parabelquadratur die Kenntnis des Schwerpunktes eines Dreiecks die Integration $\int_0^a x^2 dx$ ersetzt Von seiner Hand kannte man bis jetzt nur e i n e Bestimmung, deren Schwierigkeit durch unseren Gebrauch des Integral $\int_0^a x^3 dx$ sich angeben läßt, nämlich diejenige des Schwerpunktes eines Parabelsegments, die im 2. Buche über das Gleichgewicht ebener Figuren durch ganz besondere Hilfsmittel ausgeführt wird.[1]) Seine in den Anfängen der Schriften über die Spiralen (II, 40) und über die Konoide und Sphäroide (I, 290) aufgestellten d i r e k t e n Methoden, die er in den genannten Schriften mit völliger Konsequenz überall da anwendet, wo man jetzt die

1) Siehe mein Buch: *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, S. 438 (in der dänischen Ausgabe S. 283), wo ich eine Lakune der Beweisführung ausfülle.

Integrale $\int_0^a x^2 dx$ und $\int_0^a x dx$ anwenden würde,[1]) reichen, wie man es eben aus diesem Vergleich ersieht, nicht so weit.

Wir haben hier schon in Verbindung mit der Vorrede die von Archimedes an Satz I geknüpften weiteren Bemerkungen benutzt. Solche finden sich auch am Schluß vom Satz II und lehren uns, daß Archimedes den Rauminhalt der Kugel früher als ihre Oberfläche erkannt hat. Die darauf gegründeten weiteren Folgerungen aber schieben wir bis auf den Schluß dieses Aufsatzes auf.

Seine Methode erklärt Archimedes nur durch die in den Sätzen I—X enthaltenen Anwendungen, die auch zu diesem Zwecke genügen. Von I haben wir hinlänglich gesprochen. In II wird der Rauminhalt einer Kugel dadurch bestimmt, daß, wenn sie zusammen mit einem gewissen Kegel $\alpha\varepsilon\zeta$ im Punkte $\vartheta$ eines in $\alpha$ unterstützten Hebels aufgehängt wird, diese Körper mit dem an der Stelle bleibenden Zylinder $\varepsilon\zeta\eta\lambda$ in Gleichgewicht sein werden. Nachdem man II gelesen hat, wird man ungefähr die nach demselben Muster unternommenen Bestimmungen der Rauminhalte eines Umdrehungsellipsoids (III) und der durch Ebenen senkrecht auf die Achse abgeschnittenen Segmente eines Umdrehungsparaboloids (IV), einer Kugel (VII) und eines Umdrehungshyperboloids (X) nachmachen können. Die dabei hervortretende Übereinstimmung der Aufgaben ist dieselbe, die sich uns jetzt dadurch zeigt, daß die Gleichungen der Meridiankurven aller dieser Flächen die Form $y^2 = px + qx^2$ haben, wo $q \gtreqless O$. Eine entsprechende Übereinstimmung findet man unter den Bestimmungen des Schwerpunktes eines Paraboloidsegments (V), einer Halbkugel (VI) und eines Kugelsegments in VIII und IX. Sie werden alle dadurch bestimmt, daß die an der Stelle bleibenden Körper mit gegebenen Körpern in gegebenem Abstand vom Unterstützungspunkt in Gleichgewicht sind. Man wird auch, wenn Archimedes in X von anderen Anwendungen derselben Methode spricht, in erster Linie an die anderen Segmente ähnlicher Natur (Inhalt und Schwerpunkt eines Ellipsoidsegmentes, Schwerpunkt eines Hyperboloidsegmentes) denken. Bekanntlich hat Archimedes in der Schrift über Konoide und Sphäroide die Sätze über die Rauminhalte aller dieser Körper, auch dann, wenn die Segmente schief abgeschnitten sind, geometrisch bewiesen, nicht

1) Dies habe ich im 20. Abschnitt des eben zitierten Buches im einzelnen nachgewiesen. Auf diesen konsequenten Gebrauch der Methoden gründe ich die Berechtigung, sie als „Integrationsmethoden" zu bezeichnen, eine Benennung, die vielleicht weniger bestritten sein wird, nachdem man aus diesem Buche ersehen hat, daß infinitesimale Betrachtungen in Archimedes' eigener Darstellung unverschleiert auftreten können.

aber die Sätze über ihre Schwerpunkte, deren Bestimmung durch die Integralrechnung teilweise vom genannten Integral $\int_0^a x^3 dx$ abhängen würde.[1])

Die übereinstimmende Behandlung der Sätze I—X macht auch die wenigen, diese Sätze betreffenden Lakunen recht bedeutungslos für das Verständnis des Inhaltes. Dies ist doch erst dadurch erreicht, daß dieselbe Übereinstimmung und der ganze Zusammenhang schon von Herrn Heiberg benutzt sind, um das schwierige Manuskript zu lesen und die Figuren zu rekonstruieren. Von VIH fehlt noch die Protasis oder die Aussprache des Satzes neben dem ersten Anfang des Beweises. Dieser Anfang hat jedoch nur einen Teil der Beschreibung der Figur enthalten. Die Fortsetzung zeigte im wesentlichen wie diese, übrigens in völliger Übereinstimmung mit den Figuren 6 und 7, zu rekonstruieren war, und der Beweis enthält faktisch eine vollständige Bestimmung des Schwerpunktes eines beliebigen Kugelsegmentes. Wenn jedoch demnächst IX angibt, daß der Schwerpunkt eines „beliebigen" Kugelsegments in derselben Weise bestimmt werden kann, muß VIII zwar eine gewisse Begrenzung enthalten haben. Die Vollständigkeit der Beweisführung zeigt jedoch, daß dieselbe nur etwa in der Angabe bestanden haben kann, daß das Segment größer (wie es in der Figur 8 des Herrn Heiberg vorausgesetzt ist) oder kleiner als eine Halbkugel sei, eine Begrenzung, die nötig war um eine bestimmte Figur zu haben. Abgesehen von der kleinen Abänderung der Figur darf Archimedes demnächst in IX mit vollem Recht sagen, daß der Beweis im anderen der genannten Fälle in derselben Weise wie in VIII geführt werden kann.

---

1) Diejenigen von allen diesen Bestimmungen, die nicht in Archimedes' übrigen Schriften erhalten sind, hat erst Luca Valerio (1552—1618), der sich in hervorragender Weise Archimedes' Arbeitsweise angeeignet hatte, wiedergefunden (in seinem 1604 ausgegebenen Buche: *De centro gravitatis solidorum*). Ohne im einzelnen demselben Weg wie Archimedes zu folgen (siehe Note S. 351), gelangt auch er so weit durch Benutzung des Schwerpunkts eines Kegels, den er durch vorangehende Betrachtung desjenigen einer dreiseitigen Pyramide gefunden hatte.

Dies war jedoch nicht nötig um die Richtigkeit der aus der hydrostatischen Schrift des Archimedes zu entnehmenden Angabe über die Lage des Schwerpunktes eines Paraboloidsegments zu beweisen; solche Beweise waren auch vor Valerio gefunden. In *Der Lehre von den Kegelschnitten im Altertum* (S. 285 der dänischen und S. 454 der deutschen Ausgabe) habe ich — wie es sich jetzt zeigt, richtig — erraten, daß Archimedes bei dieser Bestimmung die jetzt vollständig vorliegende, mechanische Methode, die damals allein durch die Anwendung in der Schrift über die Parabelquadratur bekannt war, angewandt hatte. Da noch kein Vorbild für die Anwendung auf Bestimmungen von Schwerpunkten vorlag, habe ich jedoch unter den verschiedenen möglichen Formen einer solchen Anwendung nicht genau des Archimedes' eigene, sehr einfache und schöne Herleitung getroffen, die jetzt in V vorliegt.

Dieselbe Teilung eines Satzes über Kugelsegmente findet sich in XLII und XLIII des ersten Buches über Kugel und Zylinder. Vom Beweise des VI. Satzes über den Schwerpunkt einer Halbkugel fehlt der Schluß. Der Gang des Beweises geht jedoch hinlänglich aus dem erhaltenen Teil hervor. Es wäre selbst möglich das Fehlende mit Ausdrücken, die von Archimedes selbst benutzt sein könnten, zu rekonstruieren. Denn die Bestimmungsweise ist ganz dieselbe, die Archimedes nachher in VIII auf ein beliebiges Kugelsegment anwendet. Um den Schluß von VI zu haben, würde es also genügen in dem entsprechenden Teil von VIII das Segment durch eine Halbkugel zu ersetzen, woraus folgt, daß $\varepsilon$ und $\zeta$ mit $\beta$ und $\delta$, der Kegel $\varepsilon\alpha\zeta$ mit dem Kegel $\beta\alpha\delta$ zusammenfällt, was eben auf der Figur 6 geschehen ist. Außerdem werden andere Vereinfachungen davon herrühren, daß die im Beweise benutzte Bestimmung des Rauminhaltes einer Halbkugel einfacher ist als die des Rauminhaltes eines willkürlichen Segmentes.

Letztere Bestimmung ist aus Satz VII entlehnt, wo sie ganz in derselben Form gegeben ist, worin sie in VIII benutzt wird. Vielleicht hat Archimedes den VII. Satz, der sonst seinen natürlichen Platz unmittelbar nach der Bestimmung des Rauminhaltes einer Kugel (II) haben würde, nur darum unter die Beispiele seiner Methode mitgenommen, weil er sein Resultat in VIII benutzen wollte.

Die Bestimmung des Rauminhaltes eines Kugelsegmentes wird in VII ganz durch dieselben Betrachtungen ausgeführt, die in II zur Bestimmung des Rauminhaltes einer Kugel dienen. Eben dadurch ward es möglich aus den Überresten des Beweises den Satz selbst und die Figur zu rekonstruieren, wie auch einige kleine Lücken im Beweise auszufüllen. Demnach muß ferner der Schluß des Beweises folgenden Hauptinhalt gehabt haben.

Da nun $\alpha\chi = \frac{1}{2}\alpha\eta$ und $\alpha\vartheta = \alpha\gamma$, wird der dem Kugelsegment gehörige Zylinder : Kegel $\alpha\varepsilon\zeta$ + Kugelsegment $\beta\alpha\delta = \alpha\gamma : \frac{1}{2}\alpha\eta = \alpha\gamma^2 : \frac{1}{2}\alpha\eta \,.\, \alpha\gamma$. Nun ist Zylinder : Kegel $\alpha\varepsilon\zeta = \alpha\gamma^2 : \frac{1}{3}\alpha\eta^2$; also wird Zylinder : Segment $= \alpha\gamma^2 : \frac{1}{2}\alpha\eta \,.\, \alpha\gamma - \frac{1}{3}\alpha\eta^2$ sein. Ferner ist Zylinder : Kegel $\alpha\beta\delta$ mit derselben Grundfläche $\beta\delta$ und Scheitel $\alpha$ wie das Segment $= \alpha\gamma^2 : \frac{1}{3}\eta\beta^2$. Also wird Segment $\alpha\beta\delta$ : Kegel $\alpha\beta\delta = \frac{1}{2}\alpha\eta \,.\, \alpha\gamma - \frac{1}{3}\alpha\eta^2 : \frac{1}{3}\eta\beta^2$, oder da $\alpha\eta : \eta\beta = \eta\beta : \eta\gamma$, ist Segment $\alpha\beta\delta$ : Kegel $\alpha\beta\delta = 1\frac{1}{2}\alpha\gamma - \alpha\eta : \eta\gamma$ oder $= \frac{1}{2}\alpha\gamma + \eta\gamma : \eta\gamma$, was zu beweisen war. [Verlängert man den Durchmesser $\alpha\gamma$ über $\gamma$ hinaus um den Halbmesser bis zum Punkte, der in VIII $\xi$ genannt ist, so wird man eben den in VIII benutzten Ausdruck $\xi\eta : \eta\gamma$ haben].

Die Bildung und Umbildung der Proportionen ist jedoch hier kürzer gegeben, als Archimedes es getan haben wird.

Durch diese 10 Beispiele hat Archimedes seine Methode so gut erklärt, daß man vollständig sieht, nicht nur wie er sie hier anwendete, sondern auch auf neue Aufgaben, z. B. auch auf die beiden neuen in der Vorrede genannten Hauptsätze, anwenden konnte. Bevor wir uns an diese wenden, haben wir jedoch noch zu fragen, ob die Fruchtbarkeit der Methode nur durch die in die Augen springende, glückliche Zusammenstellung verschiedener Bestimmungen, nämlich von Räumen und von Schwerpunkten, erlangt wird, oder ob sie auch auf die Einführung ganz neuer infinitesimaler Begriffe beruht. In der Tat begegnet uns ein solcher in der Bestimmung des Schwerpunkts durch die Größe, die wir jetzt das statische Moment eines Körpers in Beziehung auf eine feste Ebene nennen, und der Auffindung dieser Größe durch die unendliche Teilung des Körpers mittels paralleler Ebenen. Zwar hat ARCHIMEDES keine eigene Benennung für das Moment. Überall in den Beispielen kommt aber ein Raum vor, der nach Multiplikation mit einer konstanten Größe, genau dem Momente gleich ist.

Hat eine beliebige der mit der festen Ebene parallelen Ebenen den Abstand $x$ von ihr, und macht sie im Körper den Schnitt $u$, wird das Moment $\int xudx$ oder $a\int\frac{x}{a}udx$ sein. Bringt man nun den Körper ohne seine Lage zu ändern auf einem in seinem Schnittpunkte mit der festen Ebene ($x=0$) unterstützten Hebel an, wird er mit einem auf der anderen Seite der Ebene an dem Hebel im Abstande $a$ aufgehängten Körper von der Größe $\int\frac{x}{a}udx$ in Gleichgewicht sein. Nennen wir diese Größe $V$, den Rauminhalt des vorgelegten Körpers $U(=\int udx)$ und den Abstand des Schwerpunktes dieses Körpers $\xi$, hat man $U:V=a:\xi$. $U$ ist in den Beispielen des ARCHIMEDES bekannt; mittels der Proportion bestimmt er demnächst entweder $V$ durch $\xi$ oder umgekehrt.

Da die vorliegende Schrift in der neueren Zeit bis jetzt unbekannt war, bemerken wir, daß ARCHIMEDES doch auf die moderne Bildung des Begriffes des Momentes eines Körpers Einfluß gehabt hat, nämlich durch ihre Anwendung in der Schrift über die Parabelquadratur (vergl. den vorliegenden Satz I). Da kommt jedoch nur das Moment einer ebenen Figur in Beziehung auf eine Gerade vor.[1])

---

1) LUCA VALERIO's Lösung der von ARCHIMEDES behandelten Aufgaben (siehe Note S. 349), weicht von der vorliegenden namentlich dadurch ab, daß er nicht die Momente in hervortretender Weise benutzt. Ohne dies zu tun, kann er den Schwerpunkt eines Paraboloidsegments finden. Der jetzigen Gleichungsform $y^2=px\pm qx^2$ der Meridiankurve entsprechend, sind die übrigen Segmente Summen oder Differenzen eines Paraboloidsegments und eines Kegels. Auch ARCHIMEDES benutzt diese Zusammensetzung, aber so, daß er nicht auf das in V für das Paraboloidsegment gewonnene

Nachdem Archimedes in den Sätzen I—X seine Methode vollständig erklärt hat, geht er zu den Sätzen über, die er im Anfange seines Schreibens an Eratosthenes besonders hervorgehoben hat. Die Behandlung des ersten umfaßt sowohl eine Herleitung durch die mechanische Methode (XI—XII) als einen in XIII vorbereiteten, geometrischen Beweis, dessen in XIV erhaltene Trümmern zeigen, daß er eben so vollständig gewesen ist als die Beweise in Archimedes' anderen Schriften. Die Behandlung des zweiten Satzes fehlt ganz im Manuskript. Es ist doch kaum zu bezweifeln, daß sie eben so vollständig dagewesen ist.

Der erste Satz gibt den Rauminhalt des kleineren Teils eines in ein rechtstehendes Prisma mit quadratischen Grundflächen eingeschriebenen Zylinders an, der von einer Ebene geteilt wird, die durch eine Seite der einen und den Mittelpunkt der anderen Grundfläche des Prismas geht. Um diesen Rauminhalt durch seine Methode zu finden, zeigt Archimedes zuerst in XI, daß das genannte Zylinderstück, wenn man es mit seinem gesammelten Gewicht in dem Punkte, der in der Fig. 9 $\zeta$ und in Fig. 10 $\xi$ genannt wird, an einen im Mittelpunkt $\vartheta$ des Prismas unterstützten Hebel aufhängt, mit dem auf seinem Platz bleibenden im Rechteck $\delta\beta\omega\gamma$ und im Halbkreise $\varrho\pi o$ projizierten[1]) Halbzylinder in Gleichgewicht sein wird. Um dadurch die Größe des Zylinderstücks zu finden, muß man das Moment des Halbzylinders in Beziehung auf die in $\gamma\delta$ und $\varrho o$ projizierte Ebene bestimmen. Diese Bestimmung, oder die damit gleichgeltende des Schwerpunktes des Halbzylinders, wird daher in XII ausgeführt. Man findet, daß der Halbzylinder, dessen Querschnitt nun in Fig. 11 der Halbkreis $o\pi\varrho$ ist, auch mit dem Prisma, dessen Querschnitt das Dreieck $\eta\vartheta\mu$ ist und das dieselbe Höhe als das gegebene Prisma hat, in Gleichgewicht ist, wenn sie beide auf ihrem Platze bleiben und $\vartheta$ der feste Punkt des Hebels ist. Dann wird das Zylinderstück gleich $\frac{2}{3}$ des letztgenannten dreiseitigen Prismas sein, das selbst $\frac{1}{4}$ des ganzen gegebenen, vierseitigen Prismas ist. Der Schwerpunkt des Prismas liegt nämlich auf $\xi\vartheta$ im Abstande $\frac{2}{3}\xi\vartheta$ von $\vartheta$.

Zwar liegt dieser Beweis nicht vollständig vor, aber der erhaltene Anfang zielt eben auf diese Beweisführung so bestimmt ab, daß man sicher auf den Inhalt der Fortsetzung schließen darf. Wenn man in $\lambda\kappa$ eine Ebene senkrecht auf die Ebene der Figur errichtet, wird der Schwerpunkt des $\sigma\kappa$ enthaltenden Schnittes des Halbzylinders der Mittelpunkt

Resultat hinweist, sondern jedesmal aufs neue den Kegel einführt, der in Gleichgewicht mit diesem ist. Er will nämlich eben den Gebrauch der Momente zeigen. Bei den Raumbestimmungen benutzt Valerio dieselbe Zusammensetzung.

1) Die Figuren 9 und 10, welche die im Anfang der Beweisführung von XI genannten Schnitte darstellen, gewähren in der Tat denselben Nutzen wie zwei Projektionen des Körpers.

von $\sigma\varkappa$ sein, und der Schwerpunkt des $\lambda\chi$ enthaltenden Schnittes des dreiseitigen Prismas der Mittelpunkt von $\lambda\chi$, dessen Abstand von $\sigma$ die Größe $\frac{1}{2}(\sigma\lambda + \sigma\chi)$ hat Um zu beweisen, daß diese Rechtecke auf einem Hebel mit dem festen Punkt $\sigma$ sich in Gleichgewicht halten, ist's also nur nötig, zu beweisen, daß

$$\tfrac{1}{2}\,\sigma\varkappa : \tfrac{1}{2}(\sigma\lambda + \sigma\chi) = \lambda\chi : \sigma\varkappa.$$

Da $\lambda\chi = \sigma\lambda - \sigma\chi$, $\sigma\chi = \sigma\vartheta$ und $\sigma\lambda =$ dem Halbmesser des Kreises $\vartheta\varkappa$ ist, wird die Richtigkeit dieser Proportion daraus folgen, daß $\vartheta\sigma^2 + \sigma\varkappa^2 = \vartheta\varkappa^2$ ist.

Diese Schlußreihe wird Archimedes jedoch in umgekehrter Ordnung aufgestellt haben. Demnächst wird er wie gewöhnlich in der vorliegenden Schrift den Halbzylinder und das dreiseitige Prisma als aus solchen ebenen Schnitten wie die hier betrachteten bestehend aufgefaßt haben. Indem er weiter in irgend einer Weise — die sich eben, weil Archimedes sich in der vorliegenden Schrift freier als sonst ausdrückt, nicht mit Sicherheit wieder herstellen läßt — die Symmetrie in Beziehung auf $\xi\pi$ benutzt hat, wird er bewiesen haben, daß das dreiseitige Prisma an seiner Stelle, wie früher das Zylinderstück in $\xi$ angebracht, an dem in $\vartheta$ unterstützten Hebel mit dem Halbzylinder in Gleichgewicht ist. Fraglich ist es nur, ob Archimedes als ein Zwischenglied der Untersuchung auch den Schwerpunkt des Halbzylinders bestimmt hat.

Unabhängig davon, was Archimedes selbst davon bemerkt haben mag, dringt sich hier ein Zusammenhang mit anderen Untersuchungen auf. Der hier bestimmte Schwerpunkt des Halbzylinders ist mit demjenigen seines Querschnittes, des Halbkreises $o\pi\varrho$, identisch. Wegen des später im Altertum gekannten, sogenannten Pappus-Guldinschen Satzes, dessen Richtigkeit für die einfachsten Spezialfälle natürlich früher bemerkt war, ist die hier genannte Bestimmung wieder mit derjenigen des Rauminhaltes der Kugel, auf welcher $o\pi\varrho\xi$ ein größter Kreis ist, wesentlich identisch. Daher müssen auch die Beweise, die man, jeden für sich, für diese Bestimmungen führen kann, ganz von selbst miteinander übereinstimmen. Die hier benutzte Bestimmung des Schwerpunktes, oder genauer des Momentes, eines Halbkreises $o\pi\varrho$ in Beziehung auf den Durchmesser $o\varrho$ entspricht dann ganz genau derjenigen Bestimmung des Rauminhaltes der Kugel mit dem größten Kreis $o\pi\varrho\xi$, die darin besteht, daß man, durch die Betrachtung ebener Schnitte senkrecht auf dem Durchmesser $o\varrho$ zeigt, daß der umgeschriebene Zylinder $\mu\nu$ die Summe der Kugel und der durch die Umdrehung der Dreiecke $\vartheta o\mu$ und $\vartheta\varrho\eta$ um $o\varrho$ erzeugten Kegel ist.[1])

1) Diese Betrachtung verwendet Luca Valerio in seinem schon zitierten Buche sowohl um die Rauminhalte der Kugel und ihrer Segmente als um die Schwerpunkte derselben Körper zu finden.

In XIII stellt Archimedes den Gedankengang des geometrischen Beweises dar, doch noch ohne den infinitesimalen Betrachtungen die Form eines Exhaustionsbeweises zu geben. Es fehlt zwar hier ein Teil des Textes, es ist aber eben soviel übrig geblieben, als zur Erkennung des ganzen Beweises nötig ist, nämlich erstens die Konstruktion (Fig. 12) der Parabel $\eta\xi\varepsilon$ und demnächst der Gebrauch dieser Hilfskurve. Es fehlt also nur der leichte Beweis für die Richtigkeit dieser Anwendung. Archimedes hat schon in dem erhaltenen Anfang des Beweises aus der Haupteigenschaft (Gleichung) der Parabel eine Proportion hergeleitet, die, da $\eta\kappa = \mu\nu$, so geschrieben werden kann

$$\mu\nu : \nu\lambda = \mu\nu^2 : \lambda\sigma^2.$$

Nun schneidet die durch $\mu\nu$ gezogene, auf der Ebene der Figur senkrechte Ebene das von Archimedes im erhaltenen Text beschriebene dreiseitige Prisma mit der Seitenfläche $\eta\delta$ und das gesuchte, auf dem Halbkreise $\varepsilon\zeta\eta$ stehende Zylinderstück in Dreiecken, die sich wie $\mu\nu^2 : \mu\xi^2$ verhalten. Da nun $\mu\xi^2 = \mu\nu^2 - \lambda\sigma^2$, leitet man aus der obigen Proportion her, daß

$$\mu\nu^2 : \mu\xi^2 = \mu\nu : \mu\lambda,$$

und demnächst findet man, wie es im letzten der erhaltenen Textstücke gesagt wird, daß das dreiseitige Prisma sich zum Zylinderstück verhält wie das Rechteck $\delta\eta$ zum Parabelsegment $\varepsilon\zeta\eta$. Die gesuchte Kubatur ist also auf die bekannte Quadratur der Parabel zurückgeführt, und daraus hat Archimedes schon hier das Resultat hergeleitet.

Man sieht, daß die Parabel nur als analytisches Hilfsmittel auftritt. Jetzt würde man, wenn man die Seite der Grundfläche des gegebenen Prismas $2a$ nennt, seine Höhe $b$ und den Abstand $\kappa\mu$ des betrachteten, ebenen Schnittes vom Mittelpunkt der Grundfläche durch $x$ bezeichnet, das Zylinderstück durch das Integral $\frac{1}{2} b \int\limits_{-a}^{a} \left(a - \frac{x^2}{a}\right) dx$ ausdrücken, wo der Ausdruck $\frac{1}{2} ab \frac{a^2 - x^2}{a^2}$ völlig der Proportion entspricht, durch welche Archimedes den Schnitt des Zylinderstücks bestimmt. Wir machen es, weil wir den Wert des Integrals kennen. Archimedes wendet die entsprechende Umbildung an, weil er denselben Wert kennt, nämlich in der Gestalt des Ausdruckes der Fläche eines Segments der durch die Gleichung $y = a - \frac{x^2}{a}$ (oder durch die entsprechende Proportion) bestimmten Parabel. Wie man es in der Renaissance tat, benutzt Archimedes also die schon gewonnenen Quadraturen statt unserer Integrale.

Von XIV fehlen große Stücke. Es würde uns aber gewissermaßen genügt haben, wenn Archimedes nur nach XIII gesagt hätte: Dieser Beweis läßt sich in einen Exhaustionsbeweis umgestalten. Denn der Bau dieser Beweise ist so festen Regeln unterworfen, daß jedermann, der z. B. die Beweise in der Schrift über die Konoide und Sphäroide kennt, selbst die Umgestaltung ausführen kann. Die Überreste des Beweises XIV zeigen, daß Archimedes in der Tat einen mit XIII übereinstimmenden Exhaustionsbeweis in der überlieferten Form geführt hat.

Aus dem ersten Bruchstück sehen wir, daß Archimedes, nach einer Teilung des Zylinderstücks durch äquidistante, auf $\eta\varepsilon$ (Fig. 12) senkrechte Ebenen, auf den Schnitten rechtstehende Prismen konstruiert hat, die außerdem von der einen oder der anderen der benachbarten Ebenen begrenzt sind, und daher zwei Reihen bilden, die beziehungsweise das Zylinderstück umschließen und von ihm umschlossen werden. Weiter hat er, wie er sagt, bewiesen, daß es — natürlich durch Teilung der Gerade $\varepsilon\eta$ in hinlänglich viele Teile — möglich ist zu erreichen, daß „die umschriebene Figur die eingeschriebene um weniger als jede beliebige Größe übertrifft“.[1]) Nach diesem Beweise muß Archimedes versucht haben vorauszusetzen, daß das gesuchte Zylinderstück $> \frac{2}{3}$ des von derselben (schiefen) Ebene abgeschnittenen dreiseitigen Prismas (mit der Seitenfläche $\delta\eta$) sei. So wäre es möglich, daß — wie es im nächsten erhaltenen Stück heißt — das Prisma $< \frac{3}{2}$ des im Zylinderstück eingeschriebenen Körpers sei. Die Unmöglichkeit davon wird gezeigt durch Anwendung derselben Proportion, die in XIII für das Zylinderstück und das Parabelsegment vorläufig aufgestellt war, auf den in das Zylinderstück eingeschriebenen Körper und die entsprechende in das Parabelsegment eingeschriebene Summe von Rechtecken. Daß sie für diese gilt, erhellt aus den in XIII bewiesenen Proportionen, muß aber auch in dem vorher fehlenden Stück von XIV vollständig begründet gewesen sein. Nach der nächsten Lücke, wo die Annahme versucht sein muß, daß das Zylinderstück $< \frac{2}{3}$ des dreiseitigen Prismas sei, folgt nämlich der Schluß des entsprechenden Beweises dafür, daß dieselbe Proportion für den umschriebenen Körper und die Summe der entsprechenden größeren Rechtecke gilt. Der Gang des ganzen Beweises

1) Diese Ausdrucksweise benutzt Archimedes nicht nur hier, sondern auch in mehreren seiner früher bekannten Exhaustionsbeweise (Siehe z. B. I 374, 17; 380, 4). Wenn ich also, mit Bezug darauf, daß man diesem oder jenem Verfasser in der neueren Zeit die Erfindung dieses Ausdrucks für einen exakten Grenzübergang zuschreibt, in meiner *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert* (S. 382 in der dänischen und S. 274 in der deutschen Ausgabe) ausspreche, daß der hier hervorgehobene Ausdruck „in der Tat nur besagt, was schon im Exhaustionsbeweise der Alten enthalten ist,“ habe ich den Alten noch kaum alles, was ihnen gebührt, gegeben.

läßt sich also vollständig verfolgen, und muß mit dem vorläufig in XIII aufgestellten Schluß enden, daß das Prisma $= \frac{3}{2}$ des Zylinderstücks ist.

Wie dem Exhaustionsbeweise XIV die vorläufige infinitesimale Betrachtung in XIII vorausgeht, und wie auch die kürzere Beweisführung in I dem in der Schrift über Parabelquadratur früher mitgeteilten Exhaustionsbeweis für die mechanische Quadratur entspricht, so wird es nun erlaubt sein, überall, wo Archimedes Exhaustionsbeweise benutzt, vorauszusetzen, daß er vorher durch ähnliche infinitesimale Betrachtungen dieselben Sätze *gefunden* hat.[1]) Archimedes wendet zwar auch nicht in diesen Betrachtungen das in der früheren griechischen Mathematik viel gebrauchte,[2]) aber später wegen Mißbrauchs verpönte Wort *ἄπειρος* an. Seine Ausdrucksweise kommt uns heute noch schlimmer vor als ein solcher noch im 18. Jahrhundert geltender, leichtsinniger Gebrauch des Worts, „unendlich“, wenn er nämlich Flächen und Körper als aus Geraden und ebenen Figuren zusammengesetzt betrachtet. Die Hauptsache ist aber, daß er diese Worte nur da gebraucht, wo er voraussieht, daß seine Räsonnements sich nachher durch einen Exhaustionsbeweis ratifizieren lassen. Dann werden seine Betrachtungen dieselbe Gültigkeit haben, wie diejenigen, die sich jetzt auf Cauchy's Infinitesimalbegriff stützen.

Archimedes hat durch die Beispiele I—X und durch die Anwendung zur Auffindung der ersten seiner neuen Hauptsätze seine mechanische Methode so vollständig erklärt, daß es dem aufmerksamen Leser nicht schwierig sein kann selbst den letzten seiner Sätze durch dieselbe Methode und im genausten Anschlusse an ihre früheren Anwendungen herzuleiten. Wir werden eine solche Herleitung zeigen, und werden nachher untersuchen, ob andere, von dieser wesentlich verschiedene Herleitungen gut denkbar wären.

Der Satz, der herzuleiten ist, betrifft den Rauminhalt, der von zwei Zylinderflächen, die beide in einen Würfel eingeschrieben sind, umschlossen wird. Jeder Zylinder hat seine Grundflächen in zwei entgegengesetzten Seitenflächen des Würfels, während die Zylinderfläche die vier anderen berührt.

Unsere Bestimmung dieses Raumes wird sich ganz genau an die Bestimmung des Rauminhaltes einer Kugel in II anschließen. Wir können

---

1) Da der Exhaustionsbeweis nur dazu geeignet ist, schon *gefundene* Ergebnisse zu *beweisen*, ist eine solche Annahme wohl den meisten ganz natürlich vorgekommen. Sie ist jedoch in der neueren Zeit von Herrn C. R. Wallner in verschiedenen Artikeln in dieser Zeitschrift (siehe besonders: *Über die Entstehung des Grenzbegriffs*, Biblioth. Mathem. $4_3$, 1903, S. 246) bestritten worden.

2) Siehe Aristoteles 203 b 17, 204 a 34, 207 b 10 (Heiberg, *Mathematisches zu Aristoteles*; Abhandl. zur Gesch. der mathem. Wiss. 18, 1904, p. 23)

auch dazu dieselbe Figur (Fig 2) benutzen. Nur soll jetzt die Ebene der Figur die durch den Mittelpunkt des Würfels senkrecht auf die Achse des einen Zylinders gelegte Ebene sein, der Kreis $\alpha\beta\gamma\delta$ der Schnitt dieses Zylinders, $\psi\varphi\chi\omega$ der des Würfels. Wenn die übrigen Geraden wie in II konstruiert werden, wird $\varepsilon\zeta\eta\lambda$ der Schnitt eines Prismas sein, das dieselbe Höhe $\alpha\gamma$ als der Würfel hat, während die Grundfläche ein Quadrat ist, dessen Seiten ($\varepsilon\zeta$) doppelt so groß als die Kanten des Würfels sind. $\alpha\varepsilon\zeta$ ist der Schnitt einer Pyramide mit derselben Höhe und derselben Grundfläche als dieses Prisma.

Eine mit den Achsen der beiden Zylinder parallele Ebene schneidet den gesuchten Körper in einem Quadrat, dessen Seiten die Größe $\xi o$ haben, das Prisma in einem Quadrat, dessen Seiten $= \mu\nu$ sind, die Pyramide in einem Quadrat, dessen Seiten $= \pi\varrho$ sind. Aus der in II bewiesenen Proportion $\alpha\vartheta : \alpha\sigma = \mu\nu^2 : \xi o^2 + \pi\varrho^2$ folgt nun, daß Körper + Pyramide, in $\vartheta$ aufgehängt an dem Hebel mit dem Unterstützungspunkt $\alpha$, mit dem an seiner Stelle belassenen Prisma in Gleichgewicht sein werden. Die Pyramide ist $\frac{1}{3}$ des Prismas, und der Mittelpunkt $\varkappa$ ist der Schwerpunkt des Prismas. Also ist der gesuchte Körper $= \frac{1}{6}$ Prisma, und da dies $= 4$ Würfel ist, wird der Körper $= \frac{2}{3}$ Würfel sein, wie in der Vorrede angegeben.

Bis in alle Einzelheiten könnte dieser Beweis wie derjenige in II formuliert werden: es genügt, die kreisförmigen Schnitte in II überall durch Quadrate zu ersetzen.

Andere Beweisführungen würden kaum durch Archimedes' Methode möglich sein. Archimedes benutzt nämlich immer die in parallelen Ebenen enthaltenen Schnitte des gesuchten Körpers. Wenn man im vorliegenden Falle dazu andere Ebenen als die mit den Achsen der beiden Zylinder parallelen nähme, würden die Schnitte, im günstigsten Falle, von Geraden und Kreisen umgeben sein, und also gar nicht für die vorliegende Untersuchung geeignet sein.

Daraus darf man weiter schließen, daß — was bei dem vorhergehenden Satze nicht der Fall war — auch im geometrischen Beweise, der wahrscheinlich der mechanischen Herleitung folgte, dieselben Ebenen benutzt sind[1]), und dann muß dieselbe Übereinstimmung mit einem geometrischen Beweise des Satzes über den Rauminhalt einer Kugel, die uns bei der mechanischen Herleitung begegnet ist, sich auch hier ganz von selbst dar-

1) Herr Prof. C. Juel hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß der hier betrachtete Körper aus 8 Zylinderstücken von der im vorigen Hauptsatz behandelten Beschaffenheit zusammengesetzt ist. Wie die Sätze jeder für sich aufgestellt sind, hat Archimedes sie doch gewiß auch unabhängig voneinander behandelt.

geboten haben. Eben daher ist der Verlust des geometrischen Beweises besonders zu bedauern. Wir wissen nämlich aus dem Schlusse von II, daß der Rauminhalt der Kugel Archimedes früher als ihre Oberfläche bekannt war, und daß er also ursprünglich nicht, wie im 1. Buche über Kugel und Zylinder mittels dieser bestimmt ist. Hat er auch zuerst diesen Inhalt durch seine mechanische Methode gefunden, wird er es nicht versäumt haben selbst dieses wichtige Resultat gleich auch durch einen geometrischen Beweis zu sichern, wenigstens bevor er die darauf beruhenden Aufgaben an Konon sandte. Auf einen solchen mußte die bei der mechanischen Herleitung in II benutzte Teilung durch parallele Ebenen ihn leicht führen, selbst ohne daß er noch die in der Schrift über Konoide und Sphäroide zur Kubatur des Ellipsoids benutzte besondere Integrationsmethode, die also auch auf die Kugel anwendbar war, erfunden hatte. Er konnte aber dabei auf verschiedene Weisen verfahren, unter welchen man also raten muß. Wegen der Übereinstimmung mit der in XII gegebenen Bestimmung des Schwerpunktes eines Halbkreises liegt es doch am nächsten an Luca Valerio's Bestimmung des Rauminhaltes einer Kugel (Note S. 353) zu denken. Diese wird dadurch erreicht, daß in Fig. 11 ein Kreis mit dem Halbmesser $\sigma\lambda$ der Summe zweier Kreise mit den Halbmessern $\sigma\varkappa$ und $\sigma\chi$ gleich ist. Faßt man nun Fig. 11 so auf, wie wir eben Fig. 2 aufgefaßt haben, und vertauscht man diese drei Kreise mit Quadraten auf ihren Durchmessern, wird man ganz in derselben Weise ersehen, daß der Würfel mit dem Schnitt $\mu\nu$ der Summe des gesuchten Körpers und der zwei Pyramiden mit dem Scheitel $\vartheta$ und denselben Grundflächen wie der Würfel gleich ist.

Den hier versuchten Beweisen für die zwei Raumbestimmungen kann man leicht die Gestalt eines Exhaustionsbeweises geben. Kannte Archimedes einen dieser Beweise, würde der andere sich von selbst darbieten.

Unsere Restitution der mechanischen Herleitung und des geometrischen Beweises des letzten Hauptsatzes stützt sich zwar hauptsächlich darauf, daß nun einmal solche Beweisführungen existiert haben müssen, und daß dazu keine andere brauchbare Hilfsmittel vorlagen als die von uns benutzten. Doch haben wir dabei auch mit Archimedes' durch seine vielen Untersuchungen gewonnener Übung in derartigen Betrachtungen gerechnet, und namentlich mit seinen auch hier hervortretenden Bestrebungen seine Entdeckungen auf verschiedene Weise zu begründen und mit seiner Fähigkeit die Ergebnisse einer Untersuchung auf eine andere zu übertragen. Von letzterer Fähigkeit zeugt die Methode selbst, die ja eben auf einer solchen Übertragung beruht. Wir können hinzufügen, daß er kaum ohne diese Übung und diese Fähigkeit zu besitzen, die zwei Hauptsätze gefunden haben würde. Als den Vorzug dieser Sätze hebt er nämlich in der Vorrede hervor, daß es möglich ist nur von Ebenen begrenzte Körper zu konstruieren, die den hier untersuchten Körpern gleich sind. Um ganz oder teilweise von krummen Flächen begrenzte Körper zu entdecken, die diese Eigenschaft besitzen, hat er sicher zuerst die Kubatur anderer Körper, die sie nicht hatten, versucht, und dann einen Blick dafür gewonnen, welche Abänderungen der Körper nötig waren, um sie zu erreichen. Wir nahmen ja besonders an, daß die Entdeckung dieser Eigenschaft bei dem zuletzt untersuchten Körper durch eine Abänderung der Bestimmung des Kugelinhaltes gewonnen ist. —

Zuletzt werden wir die Untersuchung über den Gang der Entdeckungen der der Kugel gehörigen Rauminhalte und Oberflächen wieder aufnehmen. Bisher haben wir sie aufgeschoben, indem wir doch jeden einzelnen Beitrag zu einer solchen Untersuchung, der in der Schrift vorkommt, hervorgehoben haben.

Aus dem Schlusse von II haben wir gesehen, daß die Kenntnis des Rauminhaltes einer Kugel der ihrer Oberfläche vorausging, und daß ARCHIMEDES in der Tat die Größe der Oberfläche aus der des Rauminhaltes durch dieselbe Betrachtung hergeleitet hat, deren umgekehrte Anwendung in seiner Schrift über Kugel und Zylinder von der Oberfläche auf den Rauminhalt führt. Letzteres ward ihm nur dadurch möglich, daß er einen ganz neuen Beweis der Größe der Oberfläche erfand. Seine Ausdrucksweise in II deutet darauf hin, daß er damals noch nicht diesen neuen Beweis erfunden hatte, und daß also die vorliegende Schrift derjenigen über Kugel und Zylinder vorausgegangen ist. Dies werden wir daher, wenigstens vorläufig, annehmen.

Daß jedoch ARCHIMEDES nicht erst jetzt auf den Gedanken gekommen ist, daß die Oberfläche einer Kugel viermal so groß ist als ihr größter Kreis, ersehen wir aus der ersten der früher an KONON gesandten Aufgaben (S. 342), welche die Konstruktion einer der Kugeloberfläche gleichen ebenen Fläche verlangt (II, 4, 9). Jetzt erfahren wir aber, daß ARCHIMEDES' damalige Lösung dieser Aufgabe auf seiner Kenntnis des Rauminhaltes der Kugel beruhte. Ebenso beruhen die Lösungen der folgenden Aufgaben (II, 4, 15—6, 7), welche ARCHIMEDES später im zweiten Buche über Kugel und Zylinder mitgeteilt hat, alle auf der Kenntnis der Rauminhalte der Kugel und ihrer Segmente und auf der, wie wir jetzt wissen, von diesen abhängigen Kenntnis der Oberflächen derselben Körper; sie betreffen ja eben diese verschiedenen Größen. Auch die hinzugefügten Vexieraufgaben (II, 6, 10—8, 8) beziehen sich auf die noch übrigen Aufgaben, die im zweiten Buche richtig gelöst sind.

Schon damals mußte ARCHIMEDES, der gewiß die von ihm gestellten

Aufgaben selbst lösen konnte, den in dem genannten zweiten Buche behandelten Stoff wesentlich beherrschen, also namentlich mit der Darstellung der Rauminhalte der Kugel selbst und ihrer Segmente durch ihre Verhältnisse an Zylindern und Kegeln ganz vertraut gewesen sein. Wie wir eben gesehen haben, konnten direkte, geometrische Beweise dieser Sätze ihm auch nicht fern liegen. Daß er sie jedoch in den zwei Büchern über Kugel und Zylinder ganz anders, nämlich durch Benutzung der Größen der Oberflächen, bewiesen hat, läßt sich dadurch erklären, daß er nach der glänzenden Lösung einer so ganz neuartigen Aufgabe als die Planifikation krummer Oberflächen die gewonnenen Resultate möglichst viel benutzen wollte. Dadurch wird die Einheit der Behandlung in diesen Büchern gewahrt, und Archimedes befriedigte seine Lust, dieselben Fragen von verschiedenen Seiten aus anzugreifen.

Beachtet man, daß die ganze Grundlage aller der an Konon gesandten Aufgaben über Kugeln die Kenntnis der Rauminhalte der Kugel und ihrer Segmente ist, wird es ziemlich auffällig, daß keine dieser Aufgaben sich auf dieses Fundament selbst bezieht. Man könnte vielleicht denken, daß Archimedes dadurch die Aufgaben fast unlösbar für andere als ihn selbst machen wollte; er würde sich aber dann dafür aussetzen, daß andere eben die von ihm verschwiegenen, wichtigen Sätze aufstelten. Außerdem macht er in den folgenden Aufgaben über die Spiralen und das Paraboloid eben das Umgekehrte, indem er die Lehrsätze selbst zum Beweisen vorlegt. Die Aufgaben machen vielmehr den Eindruck, daß er voraussetzt, daß auch seine Leser die genannten Rauminhalte kennen.

Derselbe Eindruck wurde bei mir durch die Lektüre der neu gefundenen Schrift hervorgerufen. Wenn der Rauminhalt einer Kugel, den Archimedes selbst, wie wir eben sahen, jedenfalls schon voraus kannte, hier zum erstenmal veröffentlicht würde, sollte man glauben, daß er eine so wichtige Entdeckung in der sonst recht ausführlichen Vorrede genannt hätte. Er verweist dagegen auf frühere Mitteilungen über den Rauminhalt eines Ellipsoids, der offenbar, wie es auch in der vorliegenden Schrift geschieht, durch Verallgemeinerung der Untersuchungen, die auf den Inhalt der Kugel geführt haben, gefunden sein muß. Jedenfalls wird jedermann, der seine Bestimmung des Rauminhaltes des Ellipsoids verstanden hat, selbst daraus denjenigen der Kugel erschließen können. Da Archimedes sicher nicht ein so wichtiges Resultat auf diese indirekte Weise preisgeben würde, muß er früher den Rauminhalt der Kugel und dann wahrscheinlich auch die sich daran unmittelbar anschließende Bestimmung des Rauminhaltes eines Segments mitgeteilt haben, entweder ohne Beweis oder mit einem von der erst jetzt vorgelegten Methode unabhängigen geometrischen Beweis. Sonst müßte man annehmen, daß diese Rauminhalte schon vor Archimedes bekannt waren.

Eine solche Möglichkeit darf man nämlich nicht ohne eine nähere Untersuchung verwerfen. Nachdem wir erfahren haben, daß Archimedes die Entdeckung der Oberfläche der Kugel auf seine frühere Kenntnis des Rauminhaltes gegründet hat, wurden alle Zeugnisse der späteren Literatur dafür, daß er auch den Rauminhalt gefunden hat, hinfällig. Archimedes' Schrift über Kugel und Zylinder ward nämlich bald die Quelle der Kenntnis der beiden Größen, und da geht die jedenfalls dem Archimedes gehörige Entdeckung der Oberfläche voraus. Man mußte also mit Sicherheit annehmen, daß der Rauminhalt nicht früher gekannt sein konnte. Der Einfluß, den Archimedes durch seine Anordnung des Stoffes auf die ganze folgende Mathematik ausgeübt hat, ist so groß, daß man noch in vielen Lehrbüchern demselben Weg folgt und mit der schwierigeren Bestimmung der Oberfläche anfängt. Es würde doch einfacher und daher pädagogisch besser sein, zuerst den Raum z. B. so zu bestimmen, wie der auch von Archimedes' anderen Schriften (namentlich von derjenigen über Konoide und Sphäroide) angeregte Luca Valerio es tut, und man kommt dann jedenfalls Archimedes' eigenem Weg der *Erfindung* näher. Unter diesen Umständen sagt es auch nichts, daß man später Archimedes' bekannte Monument auf die beiden Entdeckungen bezogen hat. Die große Entdeckung der Oberfläche genügt um dieses Monument zu rechtfertigen.

Dagegen müssen wir alle Aufklärungen suchen, die in Archimedes' eigenen Schriften zu finden sind. Dann findet man in der Vorrede zum 1. Buch über Kugel und Zylinder *eine* Zeile, die ihm ausdrücklich die Entdeckung des Rauminhaltes zuschreibt, nämlich I, 4, 3—4: *αὐτός τε ἡμιόλιός ἐστιν τῆς σφαίρας, καί*. Er legt hier die Sätze dar, die „nicht früher bewiesen waren". Er nennt zuerst die Sätze über die ganze Oberfläche und über eine Kugelkalotte. Demnächst sagt er von dem um eine Kugel umgeschriebenen Zylinder, daß er s o w o h l  s e l b s t $\frac{3}{2}$ d e r  K u g e l als[1]), seine ganze Oberfläche $\frac{3}{2}$ der Kugeloberfläche ist. Dagegen nennt er hier nichts über die auch in demselben Buche gefundene Größe eines Kugelsektors.

Wenn dieses an und für sich ganz klare Zitat uns nicht so völlig überzeugt, daß wir gleich jeden Zweifel fallen lassen, ist der Grund, daß es der Nachwelt nicht fern liegen konnte die hervorgehobene Zeile zu

1) Daß Archimedes hier sagt, daß er im Buche über Kugel und Zylinder zum erstenmal diesen Satz beweist, streitet nicht dagegen, daß er in der vorliegenden Schrift denselben Satz hergeleitet hatte. Die Herleitung durch die mechanische Methode, will er nämlich ausdrücklich nicht als einen Beweis betrachtet haben.

interpolieren.[1]) Die beiden Sätze über die Kugel und den umschriebenen Zylinder sind nämlich in demselben Korollar I 146, 13—17 vereinigt, und da man, wie schon bemerkt, gute Gründe hatte zu glauben, daß der erste nach dem zweiten gefunden sei, *mußte* man ihn auch als ebenso neu ansehen und daher auch beide in der Vorrede vereinigt denken.

Auch einige Äußerungen in der Vorrede zur Schrift über die Parabelquadratur II, 296, 12—23 deuten bestimmt darauf, daß ARCHIMEDES der erste Entdecker des Rauminhaltes der Kugel sei. Hier, wo er zum erstenmal den Exhaustionsbeweis benutzen will, nennt er die Anwendungen, die man schon früher von dem Postulat, auf welchem diese Beweisführung beruht (S. 344), gemacht hat. Er weiß aber nur dieselben Anwendungen zu nennen, die wir aus EUKLID kennen. Die rege wissenschaftliche Tätigkeit in Alexandria, wo auch ARCHIMEDES das beste Verständnis seiner großen Entdeckungen suchte, hat also seit EUKLID in bezug auf die infinitesimalen Untersuchungen gar keinen Fortschritt gemacht. Die strengen Anforderungen an genaue Ausformung des Exhaustionsbeweises, von denen ARCHIMEDES sich nur in der vorliegenden Schrift loszusagen wagt, sind also nur durch Schulübungen an den EUDOXOS-EUKLIDischen Beispielen erhalten! Hat ARCHIMEDES hier wirklich alle früheren Anwendungen von EUDOXOS' Postulat genannt, so bleibt kein Platz für eine frühere Kugelkubatur übrig.

Wir haben hier sowohl die Gründe angeführt, die für eine frühzeitige Entdeckung des Rauminhalts der Kugel sprechen, und auch dafür, daß auch andere als ARCHIMEDES recht frühzeitig davon wußten, als diejenigen, die es wahrscheinlich machen, daß doch ARCHIMEDES selbst der Entdecker ist. Bestimmter wagen wir uns nicht darüber auszusprechen. Mehr würden wir wahrscheinlich wissen, wenn wir noch zwei Mitteilungen von ARCHIMEDES kannten. Die eine ist die, welche, wie in der Einleitung bemerkt, die die Konoide und Sphäroide betreffenden Resultate enhalten hat, und, wie es anzunehmen ist, auch die Definitionen dieser in der Schrift selbst nicht definierten Flächen. Dasselbe Schreiben mußte auch, wenigstens indirekt durch die Angaben über Ellipsoide, etwas enthalten über die der Kugel gehörigen Rauminhalte. Eine andere Mitteilung — die doch möglicherweise schon während seines Aufenthaltes in Alexandria mündlich abgegeben ist (?) — scheint dem Briefe an KONON vorausgegangen zu sein; denn die schon berührten Vexieraufgaben in diesem Brief nebst der etwas bittern Motivierung ihrer Aufstellung (II 4, 2—4) rühren sicher von Mißgebrauch seiner früheren Mitteilungen her. Seine Absicht mit diesen Aufgaben ist nämlich: diejenigen, die sagen, daß sie alles finden können,

1) Eine solche Interpolation hält Herr HEIBERG doch für unmöglich.

ohne doch Beweise dafür vorbringen zu können, dadurch zu überführen, daß sie auch falsche Sätze gefunden zu haben vorgeben. Sollte man ihm eben früher die Entdeckung der Rauminhalte der Kugel und der Kugelsegmente streitig gemacht haben? Wir wissen es nicht und wagen es kaum als Hypothese aufzustellen. Eine solche Annahme würde jedoch alle die hier besprochenen Schwierigkeiten beseitigen. Ebenfalls würden dann die Erweiterung bis zu Flächen zweiter Ordnung, die Entdeckung der Oberfläche und die vom Rauminhalte unabhängige Bestimmung dieser Oberfläche in steigendem Maße seine Überlegenheit in dieser Sache dargelegt haben.

Wie schon gesagt, haben wir die an den Satz II zugefügte Bemerkung so verstanden, als ob sie eine Bestimmung der Oberfläche der Kugel, die noch auf keine andere Weise begründet war, betrifft, und daher die neugefundene Schrift derjenigen über Kugel und Zylinder vorangehen lassen. Ich weiß auch, daß Hr. Heiberg den griechischen Text ebenso verstanden hat. Denken wir uns doch die Möglichkeit, daß diese Auffassung unrichtig sei, und die Anmerkung zu II nur angebe, wie Archimedes den in der *damals schon veröffentlichten* Schrift anders bewiesenen Satz über die Kugeloberfläche *zuerst* gefunden hatte. Die in der Vorrede besprochenen früheren Mitteilungen über Konoide und Sphäroide sind dann vielleicht auch diejenigen, die in der ausgegebenen Schrift von diesem Namen sich finden. Archimedes erklärt dann in I—X nur, wie er seine schon lange gekannten und bewiesenen Sätze *zuerst* gefunden hat, und die an die Schrift selbst geknüpften historischen Schwierigkeiten würden also wegfallen.

H. G. Zeuthen.

# Zur Frage abendländischer Einflüsse auf die japanische Mathematik am Ende des siebzehnten Jahrhunderts.

Von Yoshio Mikami in Tokio.[1])

In seinem Artikel über *Die exakten Wissenschaften im alten Japan*[2]) hat Herr P. Harzer auch die Frage behandelt, auf welchen Wegen die abendländische Mathematik im 16. Jahrhundert nach Japan gebracht sein könnte, und ob der Aufschwung der japanischen Mathematik am Ende des genannten Jahrhunderts wirklich auf abendländischen Einflüssen beruhte.[3]) Die folgenden Zeilen haben den Zweck, einen kleinen Beitrag zu dieser Frage zu bieten; freilich sind die Resultate, wozu meine Untersuchungen geführt haben, wesentlich negativer Art.

1. Herr Harzer macht auf eine Stelle der zweiten lateinischen Ausgabe von Descartes' Geometrie aufmerksam[4]), wo in einem posthumen Traktate von F. van Schooten bemerkt wird: „placuit . . . theorema . . . verificare . . ., prout ad hoc me instigavit praestantissimus ac undequaque doctissimus juvenis D. Petrus Hartsingius, Japonensis quondam in addiscendis Mathematis, discipulus meus solertissimus". Herr Harzer erwähnt auch, daß sich im „Album Studiorum Academiae Lugdunensis" unter dem 6. Mai 1669 folgender Eintrag finde: „Petrus Hartsingius Japonensis, 31, M. Hon. C." und daß nach einer Mitteilung des Herrn D. Korteweg die Zahl das Lebensalter, M. das Studium der Medizin bedeute. Hartsingius war also etwa 1638 geboren, und hat neben Mathematik auch Medizin studiert. Nun wird von einem japanischen Arzt Namens Hatono Sōha, der 1697 in Osaka im Alter von 57 Jahren starb, berichtet, daß er etwa 1658 in Nagasaki mit einem Holländer bekannt wurde, dann mit einem holländischen Schiff nach „Namban" (d. h. Portugal, Spanien oder Holland) fuhr und unter einem Professor Postō (oder Postow oder Bostow;

1) Resume einer ausführlichen Mitteilung.

2) P. Harzer, *Die exakten Wissenschaften im alten Japan;* Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung 14, 1905, S. 312—339.

3) A. a. O. S. 325—334.

4) A. a. O. S. 328.

der Name ist wahrscheinlich nicht der Zuname sondern der Vorname des Professors) Medizin studierte, worauf er nach Japan zurückkehrte und dort als Arzt bis zu seinem Tode wirkte. Könnte man nicht geneigt sein zu vermuten, daß der Arzt Hatono mit dem Mathematiker und Mediziner Hartsingius identisch ist, und daß dieser also nach Japan zurückkehrte? Und wäre es nicht möglich, daß der japanische Mathematiker Seki gerade durch Hartsingius die europäische Mathematik kennen lernte, so daß die Methoden des Seki nicht selbständig erfunden worden sind?

In betreff dieser Fragen soll zuerst bemerkt werden, daß die Gleichheit der Namen Hatono und Hartsingius durchaus zufällig ist, denn jener hieß ursprünglich Nakashima Chōzaburō und erst nach seiner Zurückkehr nach Japan bekam er später aus einem ganz besonderen Grunde den neuen Namen Hatono. Ferner scheint sich Hatono gar nicht mit Mathematik beschäftigt zu haben, und es ist höchst unwahrscheinlich, daß er, auch wenn er Mathematiker gewesen wäre, irgend einen Einfluß auf Seki geübt haben könnte. Dieser hatte nämlich schon 1674 eine Arbeit *Hatsubi Sampō* verfaßt, worin Resultate seiner neuen Methode zu erkennen sind, und damals waren Hatono und Seki sicherlich nicht zusammengetroffen, denn Hatono war bis 1681 in Nagasaki wohnhaft, und es ist unmöglich, daß Seki eine so lange Reise gemacht hat, ohne daß man davon Kenntnis hätte.

Wenn es also höchst unwahrscheinlich ist, daß Petrus Hartsingius mit Hatono identisch ist, so ist es dennoch möglich, daß Hartsingius wirklich nach Japan zurückkehrte und mit Seki zusammentraf. Es ist auch möglich, daß um dieselbe Zeit oder etwas später ein anderer Japaner in Europa Mathematik studiert hat und bei seiner Rückkehr nach Japan die Kenntnis der abendländischen Theorien verbreitet hat, aber alle solche Annahmen sind wenigstens zur Zeit durchaus unbelegt. Ebenso ist es unbekannt, ob japanische Mathematiker am Ende des 17. Jahrhunderts im Besitz von europäischen mathematischen Arbeiten waren, aus denen Seki seine Methoden entnommen haben könnte.

**2.** Herr Harzer hat auch untersucht, ob die Methoden des Seki wirklich auf europäische Einflüsse hinweisen, und er ist zu dem Resultate gelangt, daß solche Einflüsse kaum nachweisbar sind.[1]) Ich bin wesentlich derselben Ansicht; will man ermitteln, inwieweit die japanische Mathematik selbständig gewesen ist, muß man meines Erachtens die *chinesischen* Arbeiten untersuchen, die am Ende des 17. Jahrhunderts in Japan zugänglich waren. Daß Seki wenigstens bis zu einem gewissen Grade ein Schüler der Chinesen war, geht schon aus der Weise hervor, wie er

1) A. a. O. S. 334—336.

seine algebraischen Operationen vornahm, ein Umstand, den auch Herr Harzer im Vorübergehen erwähnt hat. Besonders scheint Seki die chinesische Arbeit *Suang-hsiao Chi-mêng* benutzt zu haben, von der 1658 und 1672 neue Ausgaben in Japan erschienen. Vielleicht wurde er gerade durch diese Arbeit, wo u. a. die Auflösung linearer Gleichungen gelehrt wird, angeregt, sich mit algebraischen Untersuchungen zu beschäftigen. Eine weitere Stütze meiner Ansicht finde ich darin, daß in einer Schrift *Taisei Sankyō*, die wenigstens zum Teil von Seki herrührt, die sogenannte schachbrettartige Multiplikation gelehrt wird. Dies Verfahren, das bekanntlich auf die Inder zurückgeht[1]), hatte Seki sicherlich aus dem chinesichen Werke *Suang-fa tung-Tsung* entnommen, das aus dem Ende des 16. Jahrhunderts herrührt und etwas später auch in Japan nachgedruckt wurde. Auf der anderen Seite ist es höchst wahrscheinlich, daß Seki in betreff seiner wichtigsten Entdeckungen, z. B. des Kreisprinzips, von seinen chinesischen Lehrern unabhängig war.

[1]) Vgl. M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* I², S. 571.

# The correspondence of Brook Taylor.

By H. BATEMAN in Liverpool.

My attention having been called to the fact that a considerable part of BROOK TAYLOR's correspondence with contemporary mathematicians is in a state of preservation, I have thought it worth while to give a brief account of the contents of some of the letters.[1])

The bulk of the correspondence consists of letters from RÉMOND DE MONTMORT and belongs to the period 1717—1723, but there are a few written by TAYLOR himself and one of these which is dated July 26th 1712 contains an enunciation of the theorem which bears his name.

This letter, a copy of which is given below (p. 368—371), indicates that TAYLOR had discovered the theorem at least three years before the publication of his book *Methodus incrementorum directa et inversa* (1715), it also enables us to follow to some extent the train of thought which culminated in the discovery of the theorem.

The two note books, which have been preserved along with the letters, contain solutions of a number of geometrical and dynamical problems and also descriptions of experiments on capillarity, but do not throw any light upon the unsettled question whether TAYLOR had applied his theorem to the actual development of known functions in series.

TAYLOR is also known to the mathematical world as the discoverer of a singular solution of a differential equation.[2]) In his *Methodus incrementorum* he discusses the question

$$(1+x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 - 1 = 0,$$

mentioning that it possesses a singular solution, but he does not enter into a general theory of the subject.

In a lemma (p. 17, lemma 1), he also discusses the equation

$$4x^3 - 4x^2 = (1+z^2)^2\left(\frac{dx}{dz}\right)^2,$$

1) The letters are in the possession of Mr ERNEST TAYLOR of Bourne Place, Bushey, Herts. I am deeply gratiful to him for the kind assistance he gave me in the preparation of this paper.

2) See M CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* 3², p. 460.

obtaining the singular solution $x = 1$, although he makes a mistake in calculating the actual integral.

I have carefully examined his letters and note books in the hope of finding some further developments of this subject, but without success.

The other letters are concerned chiefly with problems in integration and the summation of series. In one of them (dated Nov. 14th 1715) MONTMORT attributes the well known expansion

$$\frac{c}{b-a} = \frac{c}{b} + \frac{ac}{b(b+d)} + \frac{ac(a+d)}{b(b+d)(b+2d)} + \dots \text{ to infinity,}$$

to TAYLOR, the letter is apparently in answer to one of TAYLOR's, but he may possibly have obtained the result from one of TAYLOR's publications.

The publications of MONTMORT and TAYLOR form the subject matter of some of the letters. In one letter he answers a request of MONTMORT's for a criticism of some papers he is about to publish, and the no half-hearted way in which TAYLOR accomplishes his task may be taken as an illustration of the help which he generously gave to his brother mathematicians. Another letter from MOIVRE calls for an alteration in the wording of one of TAYLOR's problems. This letter is almost worthy of publication because the writer arrives at an amusing paradox in his discussion of the problem.

Another letter of some interest is one from Chevalier RAMSAY, in which he describes the attitude which some of the French scientists took towards NEWTON's theory of gravitation.

---

## Letter from Brook Taylor to John Machin.

Mr. JOHN MACHIN,

. . . I think justice gives you a title to what a hint [from] you was the occasion of my discovering; and therefore I now present you with what I have been able to do towards the solution of KEPLER's Problem in a more useful manner than has yet been done for making tables. Tho' I must own that my desire to exchange letters with so ingenious a person as Mr. MACHIN made me the more inclined to bestow some time upon this subject.

I remember once at Child's Coffee house you shew'd me something of a method you had of doing this by finding the true center of the circle which Dr. WARD supposes to be the other focus, whose radius describes angles proportional to the elliptical spaces described by a ray from the Sun to the Planet.

If you would proceed that way $ABDP$ [Fig. 1] being the semi Ellipsis, $C$ the center, $G$ the Focus, $CP = 1 = \frac{1}{2}$ the greater axis, $CB = b = \frac{1}{2}$ the lesser axis, and the angle $DFG$ be[ing] to 2 right angles, as the segment $PGDP$ is to the semi Ellipsis and $CG = c$, $DE = bz$ and $CE = x$.

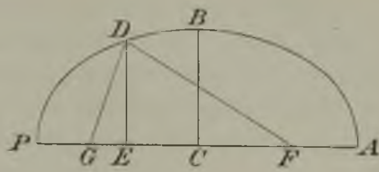



Fig. 1.

Then will $EF$

$$\left.\begin{aligned} = bx + bc + bxc^2 + bx^2c^3 + bxc^4 + bx^2c^5 + bx^3c^6 + bx^4c^7 \\ + \tfrac{1}{3}bz^2c^3 - \tfrac{1}{3}bxz^2c^4 + \tfrac{2}{15}bz^4c^5 + \tfrac{1}{3}bxz^2c^6 + \tfrac{2}{3}bx^2z^2c^7 \\ + \tfrac{2}{15}bxz^4c^6 + \tfrac{1}{15}bz^4c^7 \\ \frac{-4}{315}bz^6c^7 \end{aligned}\right\} \text{\&c.}$$

But, to me the following method seems to be the most-convenient. Let $PQBA$ [Fig. 2] be the semi-Ellipsis (whose greater axis is $AP$,

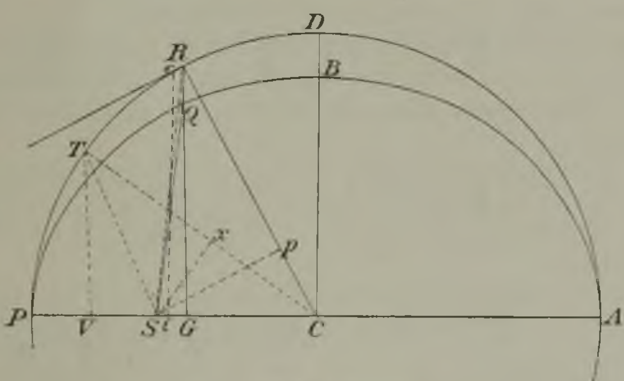



Fig. 2.

half the lesser axis $CB$, and its focus $S$, and center $C$,) which is required to be divided by the ray $SQ$; so that the Segment $SQP$ may be to the whole semi Ellipsis in a given proportion.

With the center $C$ and radius $CP$ describe the circle $PRDA$, and draw $QG$ perpendicular to $CP$, cutting the circle in $R$. Then will the Segment $PRSP$ be to the semi circle, as $PQS$ is to the semi Ellipse. Wherefore if you take the arch $PT$ in the same proportion to the whole semicircular arch $PDA$, as the segment $PQS$ is to the semi Ellipsis the difference $TR$, between $PR$ and $PT$ will be $=$ to the perpendicular $Sp$ from the focus $S$ to the ray $CR$. For the segment $PSRP = PCRP - \triangle SCR =$ segm: $CPTC$, wherefore $CRTC = \triangle CSRC$, &c.

Now suppose that by some means or other, you had got the point $r$, very near to $R$. Then making $CP = 1$, $CB = b$, $CS = c$, $ri = z$, $Ci = x$, $Tr = a$, $s =$ the sine of the unknown arch $rR = v$, and $y$ its cosine. Then will $RG = zy + xs$, and $Sp = czy + cxs = TR = a + v$ (as I have just now proved). But by Sir I. N.'s series's

$$y = 1 - \frac{v^2}{2} + \frac{v^4}{24} - \frac{v^6}{720}\text{ \&c., and } s = v - \frac{v^3}{6} + \frac{v^5}{120}\text{ \&c.},$$

wherefore, (putting these values into the aequation),

$$a + v = cz + cxv - \frac{czv^2}{2} - \frac{cxv^3}{6} + \frac{czv^4}{24} + \frac{cxv^5}{120} - \frac{czv^6}{720}\text{ \&c.}$$

Whence (by D^r HALLEY's method of extracting roots, which is in the Transactions, and at the end of S^r I. N.s Algebra)

$$v = -\frac{1+cx}{cz} + \sqrt{\left(\frac{1-cx}{cz}\right)^2 + 2 - \frac{2a}{cz} - \frac{x}{3z}v^3 + \frac{v^4}{12} + \frac{x}{60z}v^5 - \frac{v^6}{360}}\text{ \&c.}$$

But when $cz < a$ (the point $r$ being between $R$ and $A$), then it will be

$$v = \frac{1-cx}{cz} - \sqrt{\left(\frac{1-cx}{cz}\right)^2 + 2 - \frac{2a}{cz} + \frac{xv^3}{3z} + \frac{v^4}{12} - \frac{xv^5}{60z}}\text{ \&c.}$$

And when $r$ falls on the other side of $D$, in the quadrant $DA$, then the form will be

$$v = \frac{-1-cx}{cz} + \sqrt{\left(\frac{1+cx}{cz}\right)^2 + 2 - \frac{2a}{cz} + \frac{xv^3}{3z} + \frac{v^4}{12} - \frac{xv^5}{60z}}\text{ \&c.}$$

Or, when $cz < a$,

$$v = \frac{1+cx}{cz} - \sqrt{\left(\frac{1+cx}{cz}\right)^2 + 2 - \frac{2a}{cz} - \frac{x}{3z}v^3 + \frac{v^4}{12} + \frac{xv^5}{60z}}\text{ \&c.}$$

And if for the first supposition you take $a = c \times TV$, one correction, by the terms $\frac{xv^3}{3z}$ &c. will give you $v$ beyond the extent of the common tables. And in the Orbits of all the Planets excepting ☿ you may conveniently enough take $a = 0$, and $z = TV$, and $x = CV$. Or if you take any point $r$ and successively take $T$, first near $r$, and then further from it towards $P$, the point $R$ moving at the same time from between $r$ and $A$ through $r$ til[l] it comes to some distance between $r$ and $P$; the same quantities $z$ and $x$ may serve for several degrees together. And the motion of the point $R$ in the compass of a few degrees being very near the same with that of $T$, the quantity $v$ as well as $a$ will be formed by the contin[u]al addition or subtraction of a degree, near enough for forming the terms $\frac{xv^3}{3z}$, $\frac{v^4}{12}$ &c. So as to get $v$ by one extraction of the square root, as far as the extent of the common tables of sines. In this method too there is this further advantage, that having got the arch $TR$, that divided by $c$ is the sine $RG$, and that again multiplied by $b$ is the Elliptical sine $QG$, by which the point $Q$ is determined. Tho', near the Quadratures it is best to make use of the cosine $CG$, which is easily found by the tables, when once you have $TR$.

This is the best method I can think of, to render this calculation easy If there be any better, nobody is more likely to find it than Mr. MACHIN; and if he has such a one he will oblige me very much by giving me some account of it.

While I was thinking of these things I fell into a general method of applying Dr. HALLEY's Extraction of roots to all Problems, wherein the Abscissa is required, the Area being given which, for the service that it may be of calculations, (the only true use of all corrections) I cannot conceal. And it is comprehended in this Theorem.

Theorem.

If $\alpha$ be any compound of the powers of $z$ and given quantities whether by a finite or infinite expression rational or surd. And $\beta$ be the like compound of $p$ and the same coefficients, and $z = p + x$, and $\dot{p} = 1 = \dot{z}$

Then will

$$\alpha - \beta = \frac{\dot{\beta}}{1} x + \frac{\ddot{\beta}}{1.2} x^2 + \frac{\dddot{\beta}}{1.2.3} x^3 + \frac{\ddddot{\beta}}{1.2.3.4} x^4 \text{ \&c.}$$

$$= \frac{\dot{\alpha}}{1} x - \frac{\ddot{\alpha}}{1.2} x^2 + \frac{\dddot{\alpha}}{1.2.3} x^3 - \frac{\ddddot{\alpha}}{1.2.3.4} x^4 \text{ \&c.}$$

Where $\dot{\alpha}$, $\ddot{\alpha}$, $\dddot{\alpha}$ &c. are formed in the same manner of $z$ und the given quantities, as $\dot{\beta}$, $\ddot{\beta}$, &c. are formed of $p$. &c.

So that having given $\alpha$, $\beta$, and one of the abscissae $z$ or $p$, the other may be found by extracting $x$, their difference, out of this aequation. Or you may apply this to the invention of $\alpha$ or $\beta$, having given $z$, $p$ and $x$. But you will easily see the uses of this.

When $\alpha$ is a finite expression, then will all the quantities $\dot{\alpha}$, $\ddot{\alpha}$ &c. and $\dot{\beta}$, $\ddot{\beta}$ &c. be so to[o].

I have sent M$^{r}$. KEIL what I have done in the Refractions, which I desired him to shew you, upon condition that you would oblige me with a sight of w$^{t}$: you have done in that matter, which favor I hope you won't deny me.

Bifs[ons] near Cant[erbury], 26 July 1712

# Über Bildnisse von Leonhard Euler.

Von G. Eneström in Stockholm.[1])

Folgende Bilder von Euler sind mir bekannt:

A) Ölbild von E. Handmann, gemalt 1756, in der Universitätskunstsammlung in Basel.

B) Pastellbild von E. Handmann, gemalt 1753, auch in der Universitätskunstsammlung in Basel.

C) Ölbild, erwähnt von P. H. Fuss in der *Correspondance mathématique et physique* 1 (St. Pétersbourg 1843), S. XXV und nach seiner Angabe von Küttner gemalt. Nach den unten genannten Reproduktionen sollte das Bild dagegen von Darbes herrühren.

Ein Wachsfarbebild, von A. Lorgna im Jahre 1787 verfertigt, besitzt die Akademie der Wissenschaften in Paris.

Ein Brustbild von weißem Marmor findet sich im Sammlungssaal der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg.

Wenigstens zwei Medaillen scheinen zu existieren. Die eine, mit der Unterschrift: „Rachet f(ecit) 1781", ist im Besitze der Akademie der Wissenschaften in Paris; die andere, von Abranson verfertigt, besitzt u. a. die Universitätsbibliothek in Basel.

Von A) oder B) sind mir folgende Reproduktionen bekannt:

1. Fast ganze Figur mit der Unterschrift:

   Handmann pinxit 1756. J. Stenglin sculp. Petropoli 1768.

   Ein Exemplar in der Universitätsbibliothek in Basel. Reproduziert im Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung 16 (1907), Heft 3–4.

2 Brustbild mit der Unterschrift:

   Leonh. Euler.
   Gebr. (!) zu Basel, 1707.
   Gest. zu St. Petersburg 1803 (!).

   Ein Exemplar in der Sammlung des Herrn D. E. Smith in New York.

3 Brustbild mit der Unterschrift:

   Leonhd. Euler. Nat. Basileae MDCCVII. Mort. Petrop. MDCCLXXXIII. Ad Prototypum artifice Em. Handmanni Basils. manu pictum Inque Honorem

1) Viele Notizen verdanke ich den Herren J. Bernoulli in Bern, H. Brocard in Bar-le-Duc, Fritz Burckhardt in Basel, H. Fehr in Genf und D. E. Smith in New York.

summi viri Bibliothecae publicae Amplissimi Magistratus Basileensis jussu illatum. Aere expressit Patriaeque dicavit CHRIST. à MECHEL Chalcogr. Basil$^{s}$.

Ein Exemplar in der Schweizerischen Landesbibliothek in Bern. Reproduziert in der Schrift: *LEONHARD EULER* von S. SCHULZ-EULER (Frankfurt a. M. 1907).

4. Brustbild mit der Unterschrift:

LEONARD EULER

E. HANDMANN pinx. T. COOK sculp.

Published by W. Bent, London, 1787.

Ein Exemplar in der Sammlung des Herrn D. E. SMITH in New York.

5. Brustbild mit der Unterschrift:

N. pinx. Landon direx$^{t}$.

Ein Exemplar in der Schweizerischen Landesbibliothek in Bern.

6. Halbfigur mit der Unterschrift:

EM. HANDMANN Basil. pinxit. FRIDR. WEBER Basil. sculpsit.

LEONARDI EULERI Basiliensis imaginem aeri incidendam curavit grata Civitas MDCCCLI.

Dieser Stich findet sich ferner als Titelbild in den *Opera posthuma* (Petropoli 1862). Er ist auch für das Titelbild dieses Bandes benutzt (Bildnis links).

Von C) sind mir folgende Reproduktionen bekannt.

1. Brustbild mit der Unterschrift:

J. DARBES pinxit. S. KÜTTNER(?) sc. 1780.

Nach einer Mitteilung des Herrn H. FEHR.

2 Brustbild mit der Unterschrift:

LEONHARD EULER

DARBES pinx. C. DARCHOW sculp. Berolini 1782.

Ein Exemplar in der Sammlung des Herrn D. E. SMITH in New York. Auf der Rückseite des Exemplares ist mit Bleistift notiert: „Aus Allg. D. Biblioth. B. 53 St. 1. Berlin 1783“.

3. Brustbild mit der Unterschrift:

C. T. RIEDEL sc. Lips.

Ein Exemplar in der Schweizerischen Landesbibliothek in Bern. Reproduziert von J. BOYER in seiner *Histoire des mathématiques* (Paris 1900), S. 172.

4. Brustbild mit der Unterschrift:

J. CHAPMAN sculp$^{t}$.

LEONARD EULER.

London, Published as the Act directs, Oct$^{r}$. 13$^{th}$ 1804, by J. Wilkes.

Ein Exemplar in der Sammlung des Herrn D. E. SMITH in New York.

5. Brustbild mit der Unterschrift:

DARBES pinxit.

Ein Exemplar in der Universitätsbibliothek in Basel.

6. Eine gute Reproduktion des Bildes ist von P. H. FUSS als Titelbild dem 1. Bande der *Correspondance mathématique et physique* beigefügt worden. Diese Reproduktion ist für das Titelbild dieses Bandes (Bild rechts) benutzt.

Eine Nachahmnng von C) ist ein in der Universitätsbibliothek in Basel aufbewahrter Stich (Brustbild) mit der Unterschrift: H. Pf. (= HEINRICH PFENNIGER).

Ein Porträt von Euler in der Arbeit von A. Rebière, *Les savants modernes* (Paris 1899), S. 85 ähnelt sehr den Reproduktionen von C), aber entstammt möglicherweise einem anderen Bildnisse.

Nur eine Reproduktion des von A. Lorgna verfertigten Porträts ist mir bekannt, nämlich ein Stahlstich (Brustbild) mit der Unterschrift:

Engraved by B. Holl.
Euler.
From a Picture by A. Lorgna in the Collection of the Institute of France
Under the Superintendance of the Society
for the Diffusion of Useful Knowledge.
London Published by Charles Knight Ludgate Street.

Ein Exemplar in der Sammlung des Herrn D. E. Smith in New York.

Dieser Stich ist für das Titelbild dieses Bandes benutzt (das kleinere Bild unten).

Reproduktionen der von Rachet verfertigten Medaille sind vermutlich:

1. Ein Stich mit der Unterschrift:

Leonhard Euler.
Des Academies Royales des Sciences de Paris, de Londres, de Berlin, de Petersbourg &c. &c. Né à Basle, le 15 Avril 1707, Mort à St. Petersbourg, le 18 de (!) Septembre 1783.
Dessiné par Made du Piery d'après le Medaillon envoyé à l'Acad. des Sciences par l'Académie de Petersbourg. Dupin sculp.
A Paris, chez Esnauts et Rapilly, rue St. Jacques, à la Ville de Coutances Avec Priv. du Roi.

Ein Exemplar in der Sammlung des Herrn D. E. Smith in New York.

Dieser Stich ist für das Titelblatt dieses Bandes benutzt (das kleinere Bild oben).

2. Ein Stich mit der Unterschrift:

Thornthwaite sculpt
Leonard Euler.
Pubd. as the Act directs Decr. 1, 1789 by C. Forster No. 41 Poultry.

Ein Exemplar in der Sammlung des Herrn D. E. Smith in New York

Nach einer Mitteilung des Herrn G. Valentin finden sich Porträts von Euler in den folgenden Werken:

J. G. Tralles, *Physikalisches Taschenbuch* (Göttingen 1786).
Eulers *Briefe über verschiedene Gegenstände der Naturlehre* 1 (Leipzig 1792).
Allgemeine geographische Ephemeriden **22**, 1807, S. 257.
Euler, *Oeuvres complètes publiées par* Dubois **1** (Bruxelles 1838).
M. Rühlmann, *Vorträge über Geschichte der technischen Mechanik* (Leipzig 1885), S. 176.
P. J. Möbius, *Über die Anlage zur Mathematik* (Leipzig 1900), S. 54.

Es ist mir unbekannt, welche Bildnisse von Euler darin reproduziert sind.

# A mathematical exhibit of interest to teachers.

By David Eugene Smith in New York.

For the benefit of students and teachers of mathematics who may be visiting Columbia University (New York), we have arranged in Teachers College a permanent exhibit of material available for the study of the history of mathematics.

The early mathematical instruments exhibited include the following: an astrolabe of Arabic workmanship; one of Italian workmanship, signed by the maker, and dated 1509; another, a part dating from about 1450, and the rest including the four plates, from the following century; and one of Paduan workmanship, signed by the maker, and dated 1557, a practically perfect specimen, with five finely engraved plates. There is also a quadrans of the sixteenth century, the well known trigonometric instrument, bearing the names „Umbra recta", and „Umbra versa", together with several leveling instruments of the seventeenth and eighteenth centuries. There are also numerous measures of length and weight, of the seventeenth and eighteenth centuries, including the ell and some interesting sets of money changers' weights; several finely engraved protractors, diagonal scales, and similar instruments; several sector compasses and compasses of other kinds, of the Renaissance period; a collection of typical forms of dials to illustrate the application of mathematics to dialling in the Renaissance period, and several armillary spheres of the sixteenth, seventeenth, and eighteenth centuries.

The material used to illustrate the development of mechanical calculation includes the following: a collection of mediaeval counters (jetons, reckoning pennies) of fifteenth and sixteenth century workmanship, partly French and partly German, some with the figure of the Rechenmeister seated at the abacus. Numerous books showing the process of calculation by means of counters „on the line" are also exhibited. There are also to be seen an Arabic abacus, a Russian tschotü, a Chinese swanpan, a Japanese saroban, a set of Napier's rods, and a set of Korean bones (the modern form of the ancient Chinese „bamboo rods", or the Japanese Sangi). Some Japanese Wasan books of 1698 are exhibited showing the transition from this latter form of computing to the saroban, which took place in Japan about that time. Besides these there are shown several modern calculating machines, including the Goldman and Stanley arithmometers, slide rules, and similar devices.

There are in the collection about two thousand portraits of mathematicians, of which forty are framed. Visitors wishing to examine others, however, are assisted in doing so. This part of the collection represents the work of a number of years and the repeated examination of the stocks of many European dealers. It is particularly rich in the works of early engravers, although containing a considerable number of photographs and modern process portraits. The collection or NEWTONS includes all the most important portraits of this great mathematician and physicist. An effort has been made to acquire all the best portraits of the early scholars who stand out as particularly prominent in the creation of pure mathematics, but the collection also includes the portraits of many who have achieved success in the field of applied mathematics. There is also a collection of more than a hundred medals of mathematicians, including the complete set of mathematical portrait medallions by DAVID d'ANGERS.

Reproductions of a number of the portraits have been made for school and college use by The Open Court Publishing Co., of Chicago. Many of these portraits have also been reproduced in stereopticon slides for the use of the department, and copies are supplied to schools at cost.

Another interesting feature of the exhibit is the collection of autographs of mathematicians. On account of space, it is possible to exhibit only a few of the several thousand autographs in the library. The following are among the most interesting, and are shown in one of the wall cases: NEWTON — a two-page manuscript demonstration written for one of his students at Cambridge; LEIBNITZ — an autograph letter relating to a series of integrals; autograph letters of Sir WILLIAM ROWAN HAMILTON, EULER, JOHANN BERNOULLI, MERSENNE (written about 1625), MAUPERTUIS LEGENDRE, WRONSKI, and ARAGO; documents signed by GAUSS, LAPLACE, and LAGRANGE; autograph letters from PONCELET to LIOUVILLE, LIOUVILLE to DIRICHLET, and ARAGO to PONCELET.

The NEWTON manuscript was long in the library of Professor F. JACOLI, at Venice. It consists of a physical demonstration written by NEWTON at Cambridge, for an Italian student, c. 1700. The impression of NEWTON'S GALILEO seal is from the original which was recently presented to the South Kensington Museum. The bust of NEWTON is after the original by ROUBILLAC. The portraits of NEWTON, numbering over one hundred, include specimens of the work of the best engravers.

There are also displayed a number of books and curios illustrating certain steps in the history or teaching of mathematics. These include a Babylonian cylinder with cuneiform numerals, reproductions of various other cylinders, a piece of ancient Egyptian pottery with the zodiacal signs, Roman coins illustrating certain unusual forms in the ancient numeral system, some English tally sticks of 1296, two Renaissance compotus medals, a celestial sphere of the sixteenth century, and photographs of curios in many of the large museums.

The bibliographical curios include one of the few copies saved from the fire which destroyed most of the first edition of LIBRI's *Histoire des mathématiques* (Vol. I.), with LIBRI's autograph marginal notes. There are also autograph presentation copies of LAPLACE's *Théorie des probabilités* and of HALLIWELL's *Rara Mathematica*, over a hundred unpublished autograph letters of Prince BONCOMPAGNI on the history of mathematics, numerous first or early editions of works by such writers as NEWTON, DESCARTES, TARTAGLIA, CARDAN, BOMBELLI, PACIUOLO, EULER, and BARROW, a number of the earlist editions of EUCLID, an unpublished French translation of CANTOR's *Mathematische Beiträge zum Culturleben der Völker*, from the library of CHASLES, and various similar works of bibliographical interest.

# Kleine Mitteilungen.

## Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“.

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen“. BM = Bibliotheca Mathematica.

**1 : 12**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265. — **1 : 15**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 323. — **1 : 22, 29, 34**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265—266. — **1 : 36, 64**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137. — **1 : 103**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1 : 135**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137. — **1 : 144, 155, 169, 171**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137—138. — **1 : 189—190**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 101.

---

1 : 190—191*). Der ganze auf Bryson bezügliche Absatz dürfte gestrichen werden, auch auf die Gefahr hin, daß der Name Bryson dann ganz wegfallen würde. Denn dieser verdankt die Anerkennung, die ihm Cantor zuteil werden läßt, wesentlich dem Umstande, daß Bretschneider die Stelle bei Johannes Philoponus falsch übersetzt hat. Bryson zeichnete nämlich zu einem Kreise ein eingeschriebenes und ein umgeschriebenes Polygon und dann dazwischen (*μεταξύ*) ein drittes Polygon. Eine genauere Angabe fehlt, und sie wäre auch für das jetzt folgende plumpe Sophisma ohne jede Bedeutung, denn Bryson schloß: Der Kreis und das Zwischenpolygon sind beide kleiner als das umgeschriebene und beide größer als das eingeschriebene Polygon, „was aber größer als dasselbe und kleiner als dasselbe ist, ist gleich“ — *τὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ μείζονα καὶ ἐλάττονα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν*. Das also ist die Leistung Brysons und das ist es, was Proklus zurückweist und was auch schon Alexander von Aphrodisias als unwahr abgelehnt hat, „denn es seien ja auch 8 und 9 zugleich kleiner und größer als 10 und 7 und trotzdem nicht einander gleich“.

Alle diese Dinge sind übrigens schon 1884 von Heiberg (Philologus 43, p. 336) in das richtige Licht gesetzt worden. Seiner Erklärung, daß „in der Geschichte der Mathematik Bryson kaum einen Platz verdiene“, kann man nur zustimmen. So etwa ist Bryson auch bereits von Aristoteles eingeschätzt worden. F. Rudio.

---

**1 : 192, 193**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 101—102. — **1 : 195**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 56; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 102. — **1 : 196—197**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 102—103. — **1 : 198**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 103. — **1 : 202**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1 : 207**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 283. — **1 : 225, 234**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 138. — **1 : 255**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 238. — **1 : 272**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 396; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 322. — **1 : 283**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1 : 284, 321**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900,

*) Seite 203 der dritten Auflage.

S. 266—267. — **1 : 335,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 305. — **1 : 370,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 319. — **1 : 383,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1 : 386,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 407. — **1 : 395,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 323. — **1 : 400,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267.

---

1 : 402*). Es ist mir nicht möglich, den Sinn des folgenden Passus auszufinden: „Aus den drei Zahlen $a$, $b$, $c$ [sollen] die drei neuen Zahlen $a$, $a + b$, $a + 2b + c$ gebildet werden, ein Bildungsgesetz, welches der moderne Mathematiker mit einigem Staunen als das gleiche erkennen wird, das anderthalb Jahrtausende später zu den Größen $x$, $x + \Delta x$, $x + 2\Delta x + \Delta^2 x$ führte". Oder hat Herr CANTOR wirklich aus der betreffenden Stelle bei NIKOMACHOS den Satz herausgelesen, daß allgemein $u_{n+1} = u_n + \Delta u_n$, $u_{n+2} = u_n + 2\Delta u_n + \Delta^2 u_n$? In Wirklichkeit sind bei NIKOMACHOS die drei Zahlen $a$, $b$, $c$ Glieder einer *geometrischen* Reihe (der Quotient dieser Reihe kann auch 1 sein, so daß alle Glieder gleich sind), und der Satz besagt, daß $a$, $a + b$, $a + 2b + c$ eine neue geometrische Reihe bilden, was ja leicht zu beweisen ist. Ich bringe hier unten zum Abdruck teils die fragliche Stelle des NIKOMACHOS (*Introductionis arithmeticae libri II*, ed. R. HOCHE, Leipzig 1866, S. 66—67), teils die entsprechende Stelle des BOETIUS (*De institutione arithmetica libri duo*, ed. R. HOCHE, Leipzig 1867, S. 67).

NIKOMACHOS

*τὰ δὲ προστάγματα ταῦτά ἐστι, πρῶτον πρώτῳ ἴσον ποιῆσαι, δεύτερον δὲ πρώτῳ ἅμα καὶ δευτέρῳ, τρίτον δὲ πρώτῳ καὶ δυσὶ δευτέροις ἅμα καὶ τρίτῳ . . . ἐκ μὲν ἰσότητος εὐθὺς τὸ διπλάσιον, ἐκ δὲ διπλασίου εὐθὺς τὸ τριπλάσιον . . .*

BOËTIUS

Praecepta autem tria haec sunt, ut primum numerum primo facias parem, secundum vero primo et secundo, tertium primo, secundis duobus et tertio. Hoc igitur cum in terminis æqualibus feceris, ex his qui nascentur, duplices erunt, de quibus duplicibus si idem feceris, triplices procreantur . . .

Denselben Gegenstand hat NIKOMACHOS auch im zweiten Buche seiner Arithmetik (Satz 3—4) behandelt. G. ENESTRÖM.

---

**1 : 429,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 324. — **1 : 432,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1 : 434—435,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 396—397. — **1 : 436,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 138. — **1 : 437, 440,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1 : 457,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 238. — **1 : 463,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139, 324. — **1 : 466,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 397. — **1 : 467,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1 : 468,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 203. — **1 : 469,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1 : 475,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267—268; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 283. — **1 : 476,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1 : 479,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 80. — **1 : 480,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 80—81, 204. — **1 : 481,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 81. — **1 : 508,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 68. — **1 : 510,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 314. — **1 : 519—520,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **1 : 524, 525,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 282. — **1 : 537,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1 : 539—540,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 283. — **1 : 542,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1 : 550,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 204. — **1 : 618,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 306—307. — **1 : 622,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143. — **1 : 638,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 394. — **1 : 641,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1 : 661,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1 : 662,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1 : 663,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 405. — **1 : 671,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1 : 673,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 407—408; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 307. — **1 : 674,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 204—205. — **1 : 675,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 408. — **1 : 677,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 284. — **1 : 687—689,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143—144; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 205—206. — **1 : 694,** siehe

---

*) Seite 431 der dritten Auflage.

BM **1**$_3$, 1900, S. 499; **4**$_3$, 1903, S. 284; **6**$_3$, 1905, S. 103. — **1 : 699,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 205. — **1 : 704, 706, 708,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 499—500. — **1 : 712,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 81—82. — **1 : 714,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 500. — **1 : 723,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 307. — **1 : 735,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 500. — **1 : 736—737,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 500; **7**$_3$, 1906/7, S. 284—285. — **1 : 744, 748,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 500. — **1 : 749,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 268. — **1 : 752,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 104. — **1 : 753,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 408—409. — **1 : 754,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 409; **6**$_3$, 1905, S. 104, 308; **7**$_3$, 1906/7, S. 206, 285. — **1 : 756,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 500; **6**$_2$, 1905, S. 308. — **1 : 757, 767,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 500—501. — **1 : 794,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 139. — **1 : 796,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 285—286. — **1 : 804, 805, 807, 808, 812,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 268—269. — **1 : 816,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 82—83. — **1 : 823,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 269. — **1 : 825,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 206. — **1 : 836,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 83. — **1 : 848,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 83—84, 206—207. — **1 : 852,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 269. — **1 : 853,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 501. — **1 : 854,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 501; **3**$_3$, 1902, S. 324; **4**$_3$, 1903, S. 206; **6**$_3$, 1905, S. 104. — **1 : 855,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 501; **7**$_3$, 1906/7, S. 84. — **1 : 856,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 309.

---

**2 : 5,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 286. — **2 : 7,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 351. — **2 : 8,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 501; **6**$_3$, 1905, S. 309. — **2 : 10,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502. — **2 : 14—15,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 144; **5**$_3$, 1904, S. 200; **6**$_3$, 1905, S. 208—209. — **2 : 20,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502; **3**$_3$, 1902, S. 239. — **2 : 25,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 274. — **2 : 30,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 105. — **2 : 31,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 351—352; **3**$_3$, 1902, S. 239—240; **6**$_3$, 1905, S. 309—310. — **2 : 32,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 105. — **2 : 34,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 144; **6**$_3$, 1905, S. 310. — **2 : 37,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502; **6**$_3$, 1905, S. 105. — **2 : 38,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352. — **2 : 39,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502; **6**$_3$, 1905, S. 209. — **2 : 41,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352. — **2 : 51,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 106. — **2 : 53,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 201. — **2 : 57,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352. — **2 : 59,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 207—208. — **2 : 59—60,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502; **6**$_3$, 1905, S. 310—311. — **2 : 61,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 85—86, 208—209, 286—287. — **2 : 63,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 206. — **2 : 67,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 209—210. — **2 : 70,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 417. — **2 : 73, 82, 87,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502. — **2 : 88,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503; **6**$_3$, 1905, S. 395. — **2 : 89, 90,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503. — **2 : 91—92,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503; **5**$_3$, 1904, S. 409—410; **6**$_3$, 1905, S. 395—396. — **2 : 97,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 406. — **2 : 98—99,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 269—270; **6**$_3$, 1905, S. 106—107; **7**$_3$, 1906/7, S. 210. — **2 : 100,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140. — **2 : 101,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 325; **6**$_3$, 1905, S. 396. — **2 : 104—105,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503; **4**$_3$, 1903, S. 397—398.

---

2 : 106. Was Herr Cantor nach Campanus festgestellt hat, ist eigentlich nicht die Irrationalität des goldenen Schnittes, sondern nur, daß die zwei Teile nicht *ganze* Zahlen sein können. Aber offenbar ist es sehr leicht, den Beweis zu ergänzen, denn wenn die Teile Brüche sind, so kann man $x_1 = \frac{m_1}{n_1}$, $x_2 = \frac{m_2}{n_2}$ setzen, wo $m_1$, $n_1$, $m_2$, $n_2$ ganze Zahlen sind, und dann ist

$$\left(\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}\right) : \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_1}{n_1} : \frac{m_2}{n_2},$$

oder

$$(m_1 n_2 + m_2 n_1) : m_1 n_2 = m_1 n_2 : m_2 n_1,$$

und jetzt kann man ganz wie früher beweisen, daß $m_1 n_2$ nicht eine ganze Zahl ist. Dies ist aber unvereinbar mit der Annahme, daß $m_1$ und $n_2$ beide ganze Zahlen sind, und dadurch ist die Irrationalität des goldenen Schnittes festgestellt.

G. Eneström.

---

**2 : 111**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352. — **2 : 116**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 406. — **2 : 117—118**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 107, 311. — **2 : 122**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503—504; **6**$_3$, 1905, S. 397. — **2 : 126**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 406; **6**$_3$, 1905, S. 210. — **2 : 127**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 406. — **2 : 128**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 504. — **2 : 129**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 287. — **2 : 132**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 515—516. — **2 : 143**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 504.

---

2 : 144. Hier werden die Gründe angegeben und gebilligt, aus denen H. SUTER einen von ihm im Jahre 1887 zum Abdruck gebrachten Traktat „De proportione dyametri quadrati ad costam ejusdem“ dem ALBERTUS DE SAXONIA beigelegt hat. Indessen hat kürzlich P. DUHEM (*Etudes sur LEONARD DE VINCI* I, Paris 1906, S. 341—344) darauf hingewiesen, daß diese Gründe nicht entscheidend sind. Die Redewendung „est dare“ war nämlich sehr gewöhnlich bei den Scholastikern des Mittelalters, und ebenso war ALBERTUS DE SAXONIA gar nicht der einzige, der aus der Inkommensurabilität von Seite und Diagonale des Quadrates folgerte, daß das Kontinuum nicht aus unteilbaren Atomen endlicher Größe zusammengesetzt ist. Auf der anderen Seite macht DUHEM darauf aufmerksam, daß ALBERTUS DE SAXONIA in seinem Kommentar zu der ARISTOTELischen Schrift *De coelo* einen Satz widerlegt hat, der im Traktate „De proportione dyametri quadrati ad costam ejusdem“ vorkommt, und schließt daraus, daß ALBERTUS kaum der Verfasser des Traktates sein kann. Mit dieser Schlußfolgerung bin ich indessen nicht ganz einverstanden. Der fragliche Satz beginnt nämlich: „videtur, quod possibile sit“ und unmittelbar darauf folgt ein Satz, der mit „deinde probatur“ beginnt und gerade das Gegenteil des vorangehenden Satzes behauptet. Unter solchen Umständen bin ich geneigt, den Ausdruck: „videtur quod possibile sit“ mit: „es scheint als ob es möglich wäre“ zu übersetzen, und dadurch wird die Schlußfolgerung des Herrn DUHEM hinfällig.

G. ENESTRÖM.

---

**2 : 145**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 287.

---

2 : 148. In seinem ziemlich ausführlichen Bericht über die Abhandlung *De proportione dyametri quadrati ad costam ejusdem* übergeht Herr CANTOR stillschweigend eine Stelle (S. 48—49 des SUTERschen Abdruckes), die meines Erachtens von besonderem Interesse ist, obgleich die darin vorkommenden Sätze in Wahrheit falsch sind. Der erste Satz (derselbe, der in der vorangehenden Bemerkung angedeutet wird) besagt, daß eine unendliche Anzahl von gleich großen Kugeln in eine Kugel mit endlichem Durchmesser verwandelt werden kann, und sein wesentlicher Inhalt ist, daß die unendliche Reihe

$$1 + (\sqrt[3]{2} - 1) + (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}) + \ldots + (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) + \ldots$$

eine endliche Summe hat. Der zweite Satz dagegen behauptet, daß die fragliche Anzahl von Kugeln in eine Kugel mit unendlichem Durchmesser verwandelt werden kann, und sein wesentlicher Inhalt ist, daß alle Glieder der unendlichen Reihe

$$\sqrt[3]{2} - 1,\ \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2},\ \ldots,\ \sqrt[3]{\frac{n(n+1)}{2} + 1} - \sqrt[3]{\frac{n(n-1)}{2} + 1},\ \ldots$$

gleich groß sind.

Diese Sätze verdienen meiner Ansicht nach besondere Aufmerksamkeit wegen ihres Gegenstandes. Früher war eine einzige unendliche Reihe behandelt worden, nämlich die abnehmende geometrische Reihe, und die Sätze enthalten einen, freilich wenig gelungenen Versuch, die Lehre von den unendlichen Reihen weiter zu entwickeln. Daß der Verfasser der Abhandlung dazu kommen konnte, die Reihe

$$u_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$$

als konvergent zu betrachten, beruht wahrscheinlich darauf, daß auch für diese Reihe, wie für die abnehmende geometrische, $\lim_{n=\infty} u_n = 0$, und daß er aus diesem Umstande folgerte, auch die Summe der Reihe $u_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$ sei endlich. Von unserem Gesichtspunkte aus könnte man also sagen, daß er das unrichtige Konvergenzkriterium $\lim_{n=\infty} u_n = 0$ aufgestellt hat.

G. Eneström.

---

**2:150—151,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 288. — **2:155—156,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 410—411; **7**$_3$, 1906/7, S. 86—87. — **2:157,** 158, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352. — **2:160—162,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 311—312; **7**$_3$, 1906/7, S. 87—88. — **2:163,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 504; **6**$_3$, 1905, S. 312. — **2:164,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 313.

---

2 : 165. Einem Verfasser des 17. Jahrhunderts zufolge hat Andalò di Negro einen Traktat: *Praxis arithmeticae* verfaßt, von dem aber jetzt kein Exemplar bekannt ist (vgl. B. Boncompagni, Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **7**, 1874, S. 370). Jedenfalls rührt wohl der angegebene Titel des Traktates nicht von Andalò di Negro selbst her.

G. Eneström.

---

**2:166,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 504. — **2:175,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140. — **2:206,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 313. — **2:210,** siehe BM **2**$_3$, 191, S. 352—353. — **2:218,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 284. — **2:219,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 353. — **2:222,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 397—398. — **2:229,** **242,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 504—505. — **2:243,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 505; **6**$_3$, 1905, S. 398.

---

2 : 243. In betreff des Zeichens ø, das in der Dresdener lateinischen Algebra die konstante Größe bedeutet, vermutet J. Tropfke (*Geschichte der Elementar-Mathematik* I, Leipzig 1902, S. 196), daß es eigentlich ein griechisches $\Phi$ ist. Das ist ja sehr möglich, da spätere deutsche Cossisten tatsächlich ein dem $\varphi$ ähnliches Zeichen für die konstante Größe benutzen; dagegen verstehe ich nicht, wie Tropfke dies Zeichen zugleich als *Anfangsbuchstabe* von „dragma" erklären kann. Will man das Zeichen als Anfangsbuchstabe irgend eines Wortes deuten, so möchte ich als dies Wort „quantitas" vorschlagen, so daß ø also eigentlich ein $q$ sein würde. Bekanntlich kommt bei Paciuolo das Wort „quantita" mit der Abkürzung $q^a$ in einem anderen Sinne, nämlich als Name bezw. Zeichen einer zweiten unbekannten Große vor (vgl. Biblioth. Mathem. 6$_3$, 1905, S. 399) und aus einigen Stellen der Dresdener lateinischen Algebra wird man geneigt, das Zeichen ø als Abkürzung des Termes „quantitas" oder „quantitas cognita" zu deuten (vgl. z. B. S. 23 Z. 30 der Wapplerschen Abhandlung: „ø 36 similiter diuidatur per maiorem partem").

G. Eneström.

---

**2** : 245. Nicht ohne Grund bemerkt Herr CANTOR, daß er die Regeln V, VI, VII so gefaßt hat, wie sie lauten müßten, nicht wie sie in der Handschrift lauten. Auf der anderen Seite wäre es vielleicht angebracht, darauf hinzuweisen, daß die Rekonstruktion der richtigen Regeln leicht vermittels der S. 21—26 der WAPPLERschen Abhandlung abgedruckten Regeln 4—6 erhalten wird. Durch diesen Hinweis wird man nämlich veranlaßt, als Lösung der VI. Gleichung $x^\beta = \pm\sqrt{\left(\frac{b}{2c}\right)^2 - \frac{a}{c}} + \frac{b}{2c}$ anzugeben, wo ja das doppelte Vorzeichen, das bei Herrn CANTOR fehlt, von besonderem Interesse ist (vgl. unten die Bemerkung zu **2** : 247). G. ENESTRÖM.

---

**2** : 246. Herr CANTOR bemängelt hier den Verfasser der Dresdener lateinischen Algebra, weil dieser bei der 5. Form die Möglichkeit, die Wurzelgröße additiv oder subtraktiv zu nehmen, dahin mißversteht, daß unter dem Wurzelzeichen $\frac{a}{c}$ zugezählt werden müsse, wenn es nicht abgezogen werden könne, und weil er überdies die Wurzelgröße selbst nur subtraktiv benutzt. Diese Ausstellung würde ohne Zweifel begründet sein, wenn es sicher wäre, daß der von WAPPLER benutzte Handschriftenband wirklich das Originalmanuskript des Verfassers enthielte. Meines Erachtens kann dies aber nicht der Fall sein, und zwar auf Grund der zahlreichen, von WAPPLER selbst durch das Zeichen (!) hervorgehobenen groben Fehler. Im Gegenteil scheint das betreffende Manuskript von einem unkundigen Abschreiber herzurühren, vielleicht von einem Studenten, der zwar ein wenig Arithmetik gelernt hatte, aber die Algebra nicht verstand. Nun kommt die von Herrn CANTOR beanstandete Regel (S. 14 der WAPPLERschen Abhandlung) dreimal unter der Form „si . . subtrahi non potest, addere licet eundem“ vor, und nach dem Worte „si“ stehen bezw. die Zeichen für $x^0$, $x^1$ und $x^2$ (Z. 3, 15, 29). Nimmt man nun an, daß im Originalmanuskripte an allen drei Stellen das Zeichen für Quadratwurzel nach „si“ stand, so ist alles in Ordnung und die dreimal wiederholte Regel stimmt mit der richtigen Regel S. 23 der WAPPLERschen Abhandlung überein. Man könnte meinen, daß nach dieser Verbesserung der Ausdruck „subtrahi non potest“ sinnlos sein würde, da immer $\sqrt{\alpha^2 - \beta}$ kleiner als $\alpha$ ist, aber derselbe Ausdruck kommt wirklich S. 26 der WAPPLERschen Abhandlung in betreff der Quadratwurzel vor, und sein Sinn dürfte der folgende sein. Will man z. B. die Zahl 10 in zwei Teile zerfällen, deren Summe $= 16$ ist, und nennt man den *größeren* Teil $x$, so wird die Gleichung $x\ (10 - x) = 16$, d. h. $x = 5 \pm \sqrt{25 - 16}$, und hier *kann* nicht die Quadratwurzel subtraktiv sein, weil in diesem Falle $x$, d. h. der *größere* Teil, kleiner als die Hälfte der ganzen Zahl wird, was ja unsinnig ist.

Wie Herr CANTOR richtig angibt, kommt die unsinnige Regel auch in dem von WAPPLER (S. 14) erwähnten „Liber restauracionis numeri quem edidit MACHUMED filius MOYSI ALGAURISMI“ vor, aber diese Handschrift kann sehr wohl von demselben unkundigen Abschreiber herrühren. G. ENESTRÖM.

---

**2** : 247. Daß die Wurzelgröße sowohl subtraktiv wie additiv sein kann, wußte der Verfasser der Dresdener Algebra jedenfalls früher als am Schlusse des 5. Kapitels, denn dies wird schon am Anfange des Kapitels (S. 23 der Wapplerschen Abhandlung) ausdrücklich gelehrt. Daß er dies auch wußte, als er die in der Dresdener Handschrift verstümmelten Zeilen (S. 11—12 der Wapplerschen Abhandlung) über die Gleichung $bx^{\alpha+\beta} = ax^{\alpha} + cx^{\alpha+2\beta}$ niederschrieb, scheint mir auch höchst wahrscheinlich (vgl. oben die Bemerkung zu **2** : 245). Nebenbei bemerke ich, daß der Passus des Herrn Cantor: „Was also . . . nicht bekannt schien“, unverständlich ist, wenn man nicht annimmt, daß S. 245 in betreff der VI. Regel vor dem Wurzelzeichen ein *Minus* stehen soll.

G. Eneström.

---

**2 : 253,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353. — **2 : 273,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 505. — **2 : 274,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325. — **2 : 281,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 411. — **2 : 282, 283,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353—354. — **2 : 284, 286, 287, 289, 290, 291,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506—507. — **2 : 296,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354. — **2 : 305,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 88. — **2 : 313,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2 : 314,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 288—289. — **2 : 317,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 69.

---

**2** : 317. Die hier von Herrn Cantor zitierte Stelle aus der *Summa* des Paciuolo: „Thebit ancora degno philosopho (del qual molto Boetio exponendo Euclide fa mentione: maxime nel quinto)“ scheint anzudeuten, daß Paciuolo die anonyme Euklid-Übersetzung kannte, die Herr A. A. Björnbo näher untersucht hat, und die wahrscheinlich von Gherardo Cremonese herrührt, denn darin wird Thebit oft genannt (siehe Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, S. 247—248). Daß Boëtius der anonyme Übersetzer war, ist wohl lediglich eine Annahme des Paciuolo selbst. Die Campanosche Übersetzung kann nicht gemeint werden, denn unmittelbar nach der von Herrn Cantor zitierten Stelle sagt Paciuolo: „De Ameto figliuolo de Joseph (del qual el Campano exponendo el quinto de Euclide fa mentione),“ und übrigens konnte diese Übersetzung kaum dem Boëtius zugeschrieben werden.

G. Eneström.

---

**2 : 320,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 88—89. — **2 : 322,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 399. — **2 : 325,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 313—314. — **2 : 328,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 285. — **2 : 334,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2 : 351,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 399. — **2 : 353,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87. — **2 : 355, 357,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 399—400. — **2 : 358, 360,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87. — **2 : 371,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 314.

---

**2** : 379. Der *Livre singulier et utile touchant l'art et pratique de geometrie* von Ch. de Bouvelles ist unter dem Titel *Boeck aenghaende de conste en de practycke van geometrie* ins Holländische übersetzt und herausgegeben (Amsterdam, A. Roelants 1547, 4⁰; siehe D. Bierens de Haan, *Bibliographie néerlandaise . . . sur les sciences mathématiques*, Rome 1883, S. 38). Nach einer freundlichen Mitteilung des Herrn H. Bosmans scheint die Übersetzung ein wenig abgekürzt zu sein; wer der anonyme Übersetzer war, ist nicht bekannt.

G. Eneström.

---

**2 : 379, 380,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 400—401. — **2 : 381,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2 : 385,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 81; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 207; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 289. — **2 : 386,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 306. — **2 : 388,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 289. — **2 : 395,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507—508. — **2 : 397,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 211, — **2 : 399,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 107—108. — **2 : 401, 405,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2 : 410,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 290. — **2 : 411, 412,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 89. — **2 : 425,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2 : 427,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 314—315. — **2 : 429,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 201—202. — **2 : 430,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 145. — **2 : 440,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 285. — **2 : 442,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325. — **2 : 449,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2 : 454,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 242. — **2 : 474,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140—141. — **2 : 479—480,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 290—291.

---

2 : 479—480. Eine kleine Ergänzung meiner früheren Notiz über Quadratwurzelausziehung aus algebraischen Ausdrücken (BM $7_3$, 1906/7, S. 290) entnehme ich aus der kürzlich erschienenen Abhandlung des Herrn H. Bosmans *L'algèbre de Jaques Peletier* (siehe unten die Bemerkung zu 2 : 621), wo S. 137—139 mitgeteilt wird, daß Peletier in seiner französischen Algebra (Lyon 1554) die Quadratwurzelausziehung $\sqrt{36x^4 + 48x^3 - 104x^2 - 80x + 100}$ vornahm. Freilich war Peletier sowohl in betreff des Zahlenbeispiels als hinsichtlich des Verfahrens von Stifel abhängig, und er legte auf die Sache so wenig Gewicht, daß er dieselbe nicht in seine lateinische Algebra vom Jahre 1560 aufnahm. Ferner hat mich Herr Suter darauf aufmerksam gemacht, daß Quadratwurzelausziehung aus algebraischen Polynomen schon bei Alkarkhi vorkommt (siehe *Extrait du Fakhri . . . par F. Woepcke,* Paris 1853, S. 54—55). Alkarkhi findet z. B., daß $\sqrt{a^4 + 4a^3 + 10a^2 + 12a + 9} = a^2 + 2a + 3$.

G. Eneström.

---

**2 : 481,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 508. — **2 : 482,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 508; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 240; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 401. — **2 : 483,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 291. — **2 : 484,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 486, 489, 490,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509.

---

2 ; 490. Von dem hier erwähnten Richard Wentworth rührt vielleicht ein Traktat in italienischer Sprache her, der handschriftlich in der Bodleianischen Bibliothek in Oxford aufbewahrt ist und den Titel *De numeris et misuris* trägt. Von diesem Traktate hat Herr V. Tonni-Bazza in seinem Artikel *Frammenti di nuove ricerche intorno a Nicolo Tartaglia* (Atti del congresso internazionale di scienze storiche 1903, **12** (1904), S. 304) zwei Seiten in Faksimile reproduziert, und die eine Seite beginnt: „Questo me era demandato a messer Nicolo Tartalia 1539 a di 7 de settembre e che el medico da millan nō potria soluer ma pregando il mi compar inf(?) n^to^ de mandarse la solution e cosi io troueva el detto demando a di 11 detto". Nun hat Herr A. Favaro (siehe a. a. O. S. 304—305) darauf hingewiesen, daß die betreffende Frage von Tartaglia im 5. Teile seines *General trattato di numeri et misure* (Venezia 1560, Bl. $18^b$—$19^a$) behandelt wird. An dieser Stelle berichtet Tartaglia, daß er die Frage seinen zwei Schülern Richard Wentworth und Gianantonio di Rusconi vorlegte, daß diese beide die Frage lösten und daß Wentworth etwas später bei einem Besuche des Cardano in Venedig diesem mündlich die Lösung erklärte. Auf dies Zusammentreffen zwischen Cardano und Wentworth deutet übrigens Tartaglia auch in seiner *Terza risposta* hin (siehe S. 13 der Reproduktion von E. Giordani, Milano 1876), und nachdem Ferrari in seinem *Quinto cartello* (S. 17) geantwortet hatte, der

fragliche Wentworth sei ihm durchaus unbekannt, berichtete Tartaglia in der *Quinta risposta* (S. 4) ausführlicher hierüber, etwa wie in seinem gedruckten Werke. Nimmt man jetzt hinzu, daß der Traktat in einer englischen Bibliothek Platz gefunden hat, kann man kaum umhin, die Annahme, daß Wentworth Verfasser oder Bearbeiter des Traktates ist, als sehr wahrscheinlich zu bezeichnen, sofern man nicht der Ansicht ist, daß Tartaglia die ganze Geschichte der von seinen zwei Schülern gebrachten Lösungen selbst erfunden hatte.

G. Eneström.

---

2 : 497. Fu effettivamente in Mantova, circa dal secolo decimoquinto fino al decimottavo, una famiglia Tartaglia; ed anzi a pag. 129 del Libro VII delle *Notizie genealogiche delle famiglie mantovane*, compilate dal Conte Carlo d'Arco, e che si conserva manoscritto nell' Archivio Gonzaga, si legge: „Spesse volte troviamo la famiglia Tartaleoni confusa con quella detta dei Tartaglia. Noi però troviamo che queste fossero due distinte famiglie, e ci basterà ricordare che di que' cognominati de Tartaleis visse nel 1544 Messer Zoane Tartalia revisor de le fabbriche de Corte. E Giulio Pippi romano ordinava che lo magnifico Thesaurario faccia pagamento a Gio. Tartalia soprastante de quanto ha speso per bisogno della Corte de Sua Eccellenza, cominciando a dì primo decembre fino all' ultimo del detto 1544". — Nel 1600 Margherita Tartaglia era moglie a Giulio Ceresara degli Acelli. Di poi sono nominati: Ill. D. Capitaneus Franciscus Tartalea f. q. Magnif. D. Andreae de contrata aquila nel 1657; D. Alphonsus f. q. D. Hieronimi scriptor de contrata cigno nel 1684 ed „Anselmus Tartalea notarius et Commissarius Castrilucoli nel 1704". Il Giovanni Tartaglia al quale si riferisce A. Bertolotti (*Architetti, ingegneri e matematici . . . nei secoli XV, XVI e XVII*, Genova 1889, pag. 25—26) è precisamente il „Messer Zoanne Tartalia" che nel documento del 5 Settembre 1524 (Lib. 29 dei copialettere riservati nell' Archivio Gonzaga) dice „haver lavorato et fatto lavorare nel pallatio della rasone, over del potestate, et avanzare trecento cinquanta libre per tal lavorero".

Nel libro delle spese e delle entrate Rub. B. XII. 7 del 1553, e precisamente nella „Nota dei salariati dell' Ill.$^{mo}$ S.$^{r}$ nostro che si pagano all' ufficio della Massaria ogni anno" figura: „Messer Giovanni Tartalia revisor delle fabbriche. Ducati 38. 3. 6." Altri documenti del medesimo Archivio Gonzaga in Mantova concernono Zoan Tartalia, in ispecie nei mandati di pagamento di Giulio Pippi romano, come soprastante alle fabbriche del Marchese di Mantova. Questo Giovanni adunque appartenne alla famiglia Tartaglia da non confondersi con l'altra famiglia Tartaglioni, essa pure mantovana.

Non è pertanto da escludere, ed anzi è sommamente probabile, che il cognome di ambedue queste famiglie ripeta la sua origine prima dal difetto di qualche antenato che consiste nel ripetere più volte la prima sillaba innanzi di poter esprimere la parola intera, e che in italiano si dice „tartagliare", mentre „tartaglione" si dice di chi tartaglia o prova difficoltà nell' esprimere i proprii concetti. Non resta perciò di qui minimamente infirmato quello che di sè narra a tale proposito Niccolò Tartaglia.

Antonio Favaro.

---

**2** : 497, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 291. — **2** : 503, 505, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 292. — **2** : 509, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270, 509.

— **2:510,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2:512,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2:514, 516, 517,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2:524,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 90.

---

2:527. Hier könnte erwähnt werden, daß TARTAGLIA im 1. Buche des 5. Teiles seines *General trattato de numeri et misure* gewissermaßen das später sogenannte MALFATTIsche Problem gestreift hat; er versucht nämlich daselbst in ein Dreieck drei Kreise einzuschreiben, die einander gleich und möglichst groß sind. Zuerst löst er (Bl. 19[a]) das Problem für ein gleichseitiges Dreieck, was ja für diesen Fall genau die Lösung des MALFATTIschen Problems gibt, fügt eine ziemlich unklare Bemerkung über den Fall eines gleichschenkligen Dreieck hinzu, und hebt zuletzt hervor, daß wenn man auf dieselbe Weise in betreff eines ungleichseitigen Dreiecks verfährt, so bekommt man zwei Kreise, die sich berühren, und einen dritten Kreis, der *nicht* die zwei anderen berührt.

G. ENESTRÖM.

---

**2:529,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 91. — **2:530,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 354—355; **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2:531,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 212. — **2:532,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509; **7**$_3$, 1906/7, S. 292. — **2:535,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2:536,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 212—213.

---

2:537. Es wird gewöhnlich angenommen, daß man zwar vor VIÈTE bekannte Größen durch Buchstaben bezeichnete, aber nicht imstande war, dabei Rechenoperationen auszuführen, ohne zu neuen Buchstaben zu greifen. Indessen hat CARDANO wirklich am Ende seiner *De regula aliza* (Basel 1570, S. 111) zwei beliebige bekannte Größen durch die Buchstaben $a$ und $b$ bezeichnet und bemerkt, daß $℞\frac{a}{b}$ gleich $\frac{℞ a}{℞ b}$ ist, d. h. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

G. ENESTRÖM.

---

**2:539,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 293. — **2:541, 548,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509—510. — **2:549,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510; **6**$_3$, 1905, S. 401. — **2:550,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 355. — **2:554,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2:555,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 285; **6**$_3$, 1905, S. 322. — **2:561,** siehe BM **7**$_3$, 1906, S. 91. — **2:565, 567, 568,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 285—286. — **2:569,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2:572—573,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510; **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2:576,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 355—356. — **2:579,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 145. — **2:580—581,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 207. — **2:582,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2:583,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270; **2**$_3$, 1901, S. 356. — **2:585,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 69—70. — **2:592,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 146.

---

2:593. Da man gewöhnlich annimmt, daß REIMERS (RAIMARUS URSUS) 1599 gestorben ist (vgl. z. B. A. VON BRAUNMÜHL, *Geschichte der Trigonometrie* I. Leipzig 1900, S. 204), erlaube ich mir hier die Notiz einzufügen, daß REIMERS am 15. August 1600 in Prag starb. Diese Notiz entnehme ich einer freundlichen Mitteilung des Herrn F. R. FRIIS, der sich auf den Anzeiger für Kunde der deutschen Vorzeit (Nürnberg), Jahrg. 1877, S. 330—331, beruft; hier ist nämlich die folgende Aufzeichnung zum Abdruck gebracht: „1600. 15 August. Mane phtisi mortuus est Pragae Bohemiorum NICOLAUS RAYMARUS URSUS Dithmarsius". Daß REIMERS am 3. August 1600 todeskrank war, sieht man übrigens aus einem Briefe von TYGE BRAHE an HOLGER ROSENKRANTZ (siehe F. R. FRIIS, *Epistolae quas* TYCHO BRAHE *et* OLIGERUS ROSENKRANTZIUS *inter se scripserunt*, Köbenhavn 1896, S. 58).

G. ENESTRÖM.



---

**2**: 594, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270. — **2**: 597, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2**: 599—600, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2**: 602, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270. — **2**: 603—604, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270—271; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 108.

---

2 : 610. Es ist richtig, daß im 8. Buche der Jordanischen Arithmetik die Summenformel der Quadratzahlen nicht in der uns geläufigen Form vorkommt, aber in Wirklichkeit wird sie im 36. Satze gelehrt. Dieser Satz lautet: „Si cuilibet cubo adjungatur basis sua, et triangularis basi sue equilaterus: efficietur triplus sui pyramidi.“ Nun hat Jordanus früher (Satz 27) angegeben, daß die Tetragonalpyramidalzahlen durch Summierung der Quadratzahlen erhalten werden, und der 36. Satz besagt also gerade, daß

$$x^3 + x^2 + \frac{x(x+1)}{2} = 3\ (1^2 + 2^2 + \ldots + x^2).$$

Auch die Sätze 31 und 34 handeln von der Summe der Quadratzahlen, und sie enthalten implizite die Formel

$$1^2 + 2^2 + \ldots + x^2 = (x+1)\cdot\frac{x(x+1)}{2} - \frac{x(x+1)(x+2)}{6}.$$

Dagegen habe ich die Summenformel der Kubikzahlen im 8. Buche des Jordanus nicht auffinden können. Freilich ist es leicht, diese Formel auf Grund des 28. Satzes des 7. Buches herzuleiten; in diesem Satze wird nämlich nach Nikomachos und Boëtius bewiesen, daß $1,\ 3+5,\ 7+9+11,\ 13+15+17+19$ usw. die successiven Kubikzahlen sind. Übrigens behauptet Simon Jacob nicht, daß die Summenformeln im 8. Buche des Jordanus vorkommen, sondern nur, daß sie daraus „jhre Demonstration vnnd gewissheit“ haben.

G. Eneström.

---

**2**: 611, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 356—357. — **2**: 612, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2**: 612—613, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 91—92. — **2**: 613, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 306; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 294.

---

2 : 613. Der Untersuchungsgegenstand, den Maurolico mit dem Terme „columna“ bezeichnete, war nicht ganz neu, denn ähnliche Sachen sind schon von griechischen Mathematikern gestreift worden, nämlich von dem Verfasser (Anatolios?) der sogenannten Heronschen Definitionen und von Nikomachos. Jener definiert im Vorübergehen gewisse Arten von körplichen Zahlen, d. h. Zahlen von der Form $l \cdot b \cdot h$ ($l$ = Länge, $b$ = Breite, $h$ = Höhe), z. B. δοκός für welche Zahl $l > b$, $h = b$ ist (siehe G. Friedlein, *De Heronis quae feruntur definitionibus;* Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. 4, 1871, S. 110). Nikomachos hat solche Zahlen in den 15. und 16. Kapiteln des 2. Buches seiner Arithmetik erwähnt (siehe *Introductionis arithmeticae libri II*, ed. R. Hoche, Leipzig 1866, S. 105—108), und sie kommen unter lateinischen Namen (asser, laterculus, spheniscos oder cuneolus) bei Boëtius vor (siehe *De institutione arithmetica libri duo*, ed. R. Hoche, Leipzig 1867, S. 111—121). Bei Jordanus finden sich im 8. Buche seiner Arithmetik die Terme „serratile“ und „columna“; bezeichnet man durch $n_p$ die $n$-te $p$-eckszahl, so ist nach Jordanus eine Zahl von der Form $k \cdot n_3$ ein „serratile“, und „columna“ bedeutet jede Zahl von der Form $k \cdot n_p$ mit Ausnahme der Fälle $p = 3$ und $p = 4$. In den Sätzen 30—36 des 8. Buches behandelt Jordanus gewisse

Eigenschaften eines „serratile"; z. B. daß $n \cdot n_3 + n \cdot (n-1)_3 = n^3$, welcher Satz ja die Identität $n \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n \cdot \frac{(n-1)n}{2} = n^3$ enthält.

Über die Arithmetik des MAUROLICO gibt es eine besondere Abhandlung von MARIANO FONTANA mit dem Titel: *Osservazioni storiche sopra l'aritmetica di FRANCESCO MAUROLICO* (Atti dell' istituto nazionale italiano 2 : 1, 1808, 275—296 + Tafel). G. ENESTRÖM.

---

**2 : 614,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 617, 619,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 108—109. — **2 : 620,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 621,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146; **6**$_3$, 1905, S. 402; **7**$_3$, 1906/7, S. 214.

---

2 : 621. Über J. PELETIER als Algebraiker hat H. BOSMANS kürzlich eine ausführliche Abhandlung (*L'algèbre de JAQUES PELETIER du Mans departie an deus livres;* Revue des questions scientifiques publiée par la société scientifique de Bruxelles **11**$_3$, 1907, S. 117—173) veröffentlicht. Wie aus dem Titel der Abhandlung hervorgeht, hat er dabei in erster Linie die französische Ausgabe der Algebra von PELETIER (Lyon 1554; neue Auflagen 1609 und 1622) benutzt. Als Ergänzung der BOSMANSschen Abhandlung erlaube ich mir auf eine Stelle der lateinischen Ausgabe (Bl. 13$^b$) aufmerksam zu machen, die in unsere Sprache übersetzt folgendermaßen lauten würde:

Wenn die Koeffizienten der Gleichung

$$a_0 x^n = a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

($a_0$, $a_1, \ldots, a_n$ positive Größen) der Bedingung $a_0 > a_1 + \ldots + a_n$ genügen, so ist die positive Wurzel der Gleichung $< 1$.

Freilich spricht PELETIER den Satz nur für die Gleichung $x^3 = ax^2 + b$ aus („ex inspectione numeri, radicem esse numerum fractum facile intelligemus: quum scilicet numerus majoris signi superat numerum minoris numerumque absolutum simul sumptos"), aber seine Begründung gilt allgemein. Nach einer brieflichen Mitteilung des Herrn H. BOSMANS findet sich der Satz schon S. 25 der französischen Ausgabe von 1554. G. ENESTRÖM.

---

**2 : 623,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146—147.

---

2 : 626. Die Angabe, daß JOHANNES JUNGE oder JUNG sein Verfahren, um Gleichungen mit ganzen rationalen Wurzeln zu lösen, 1577 veröffentlicht haben soll, beruht vielleicht auf einem Mißverständnis. NIKOLAUS REIMERS, dem man nähere Auskunft über das JUNGEsche Verfahren verdankt, sagt nur, daß dies im Jahre 1577 „erfunden vnd außgesunnen" worden ist. Auf der anderen Seite ist es wahrscheinlich, daß JUNGE ein Rechenbuch veröffentlicht hat, denn „JOHANN JUNG, Rechenmaister zu Lübeck" wird von J. FAULHABER in seinem Buche *Newer arithmetischer Wegweyser* (Ulm 1614) unter den „Authores, welche nach einander hierinnen angezogen werden" genannt, und FAULHABER scheint nur Verfasser von gedruckten Rechenbüchern aufgeführt zu haben. Ob das Rechenbuch von JUNGE 1577 erschien und ob darin das fragliche Verfahren gelehrt wurde, dürfte zurzeit durchaus unbekannt sein.

Übrigens ist Junge nicht der erste, der das ihm zugeschriebene Verfahren angewandt hat, denn J. Peletier wies schon 1554 darauf hin, daß wenn eine Gleichung von der Form $x^2 = ax + b$ oder $x^3 = ax^2 + b$, wo $a$ und $b$ ganze Zahlen sind, eine ganze rationale Wurzel hat, so muß diese Wurzel (und im zweiten Falle noch dazu das Quadrat der Wurzel) ein Faktor von $b$ sein (siehe *L'algebre de Jaques Peletier*, Lyon 1554, S. 39—46, zitiert von H. Bosmans in der Revue des questions scientifiques publiée par la société scientifique de Bruxelles **11**$_3$, 1907, S. 143—147; vgl. J. Peletier, *De occulta parte numerorum quam algebram vocant*, Paris 1560, Bl. 12$^b$—13$^b$). G. Eneström.

---

2 : 626. Es ist mir unbekannt, aus welcher Quelle Herr Cantor die Angabe entnahm, daß Raimarus Ursus das Beispiel $x^3 = 486 - 90x - 21x^2$ aufbewahrt hat, was wohl bedeuten muß, daß das Beispiel schon bei Junge vorkommt. Gerhardt sagt hierüber gar nichts, bei Treutlein kommt allerdings das Beispiel vor, aber dieser gibt nicht an, daß es von Junge herrührt, ebensowenig als Kästner (*Geschichte der Mathematik* II, Göttingen 1797, S. 718), dem Treutlein vermutlich das Beispiel entnommen hat. Auch bei Raimarus Ursus selbst sucht man vergebens eine solche Angabe. Das Verfahren des Junge wird von Ursus im 4. Kapitel des 2. Abschnittes (Blatt E 1$^a$—E 2$^b$) seiner *Arithmetica analytica* (Frankfurt an der Oder 1601) auseinandergesetzt und an dem Beispiel

$$x^{28} = 65532x^{12} + 18x^{10} - 30x^6 - 18x^3 + 12x - 8$$

erläutert. Dagegen findet sich das Beispiel $x^3 = 486 - 90x - 21x^2$ im 5. Kapitel des 2. Abschnittes (Blatt F 2$^a$) und hat die Überschrift „Ad formam Vtae", während Junge hier nicht genannt wird.

Ob die Cantorsche Restitution des Verfahrens von Junge und Ursus durchaus richtig ist, scheint mir zweifelhaft, und da die Arbeit des Ursus ziemlich selten sein dürfte, drucke ich hier die betreffende Stelle der *Arithmetica analytica* ab, indem ich statt der von Ursus benutzten cossischen Zeichen die jetzt geläufigen Symbole, sowie — statt ÷ und = statt „gr." setze:

$$\begin{array}{c}
x^3 = 486 - 90x - 21x^2 \\
\underline{\text{in } 3 \quad (162} \quad \underline{(24\quad} \\
\text{rest } 72 \quad \text{rest } 3 \\
\text{in } 3
\end{array}$$

Hieraus scheint mir hervorzugehen, daß Ursus auf folgende Weise verfuhr. Er nahm versuchsweise $x = 3$ an, und da aus der gegebenen Gleichung folgt, daß

$$x^2 = \frac{486}{x} - 90 - 21x,$$

wird also

$$x^2 = 162 - 90 - 21x = 72 - 21x.$$

Aus dieser Gleichung folgt nun wieder

$$x = \frac{72}{x} - 21, \text{ oder da } x = 3 \text{ angenommen wurde}$$

$$x = 24 - 21 = 3,$$

wodurch sich erweist, daß $x = 3$ wirklich eine Wurzel ist. Herr Cantor verwandelt dagegen die gegebene Gleichung successiv in

$$x^3 = 3\ (162 - 90) - 21x^2 = 3 \cdot 72 - 21x^2 = 3^2\ (24 - 21) = 3^3.$$

G. Eneström.

---

**2:632,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 109. — **2:634, 637,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 315—316. — **2:638,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147. — **2:642, 643,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271.

2:643. Der hier (Z. 15 v. u.) erwähnte JACOB CURTIUS (kaiserlicher Prokanzler, gest. 1594) briefwechselte mit TYGE BRAHE über astronomische Fragen (vgl. F. R. FRIIS, *Tychonis Brahei et ad eum doctorum virorum epistolae ex anno 1588 et sequentibus annis*, Köbenhavn 1900—1906, S. 121, 126, 199, 201), und wird oft von BRAHE in seinen Briefen an andere Fachgenossen genannt. G. ENESTRÖM.

**2:644,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 402—403. — **2:655,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357. — **2:656,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 286. — **2:659, 660,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147—148. — **2:661,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 403. — **2:665,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271. — **2:669,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 203. — **2:670,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 403.

2:670. In einer früheren Bemerkung zu dieser Seite (BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 403) habe ich den Rechenmeister CHR. F. BRECHTEL in Nürnberg erwähnt. Da das von diesem herausgegebene Rechenbuch sehr selten ist (nach einer Mitteilung des Herrn G. VALENTIN scheint keine öffentliche deutsche Bibliothek ein Exemplar des Buches zu besitzen), gebe ich hier unten den vollständigen Titel desselben nach meinem Exemplare an:

Pratic= || Büchlein / auff || allerley jetztlauf= || fende Kauffschleg. || Durch/ || Christoff Fabium Brech= || tel Burgern vnd Rechenmei= || stern in Nürnberg. || Seinen Schulern mit fleiss || zusammen getragen.

Das Buch enthält 62 unpaginierte Seiten in sehr kleinem Oktavformat. Druckjahr fehlt, aber am Ende der letzten Seite steht: „Gedruckt zu Nürnberg / durch Johannem Knorrn“. Da BRECHTEL von FAULHABER 1614 zitiert wird, so ist das Rechenbuch jedenfalls vor diesem Jahre (wahrscheinlich nur einige Jahre früher) gedruckt. G. ENESTRÖM.

**2:674,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88. — **2:683,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2:687,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 294.

2:689. In betreff des vierten Traktates (1605) von LEVINUS HULSIUS wird bemerkt: „ob noch durch HULSIUS selbst oder schon durch seine Wittwe verlegt, ist auf dem Titel nicht angegeben“. Ich habe kein Exemplar des Traktates gesehen, aber dennoch scheint mir die Bemerkung verdächtig, denn auf dem Titelblatte der von KÄSTNER beschriebenen Auflage vom Jahre 1615 steht „in Verlegung des Authorn“ und diese Angabe kann meines Erachtens nur als ein wörtlicher Abdruck der entsprechenden Stelle der Originalauflage erklärt werden. Die Angabe, daß der dritte Traktat zum erstenmal 1607 erschien, ist unrichtig; MURHARD (*Litteratur der mathematischen Wissenschaften* III, Leipzig 1803, S. 173) erwähnt, daß er selbst eine Auflage vom Jahre 1604 „In Verlegung Levini Hulsii“ eingesehen hat, und die königl. Bibliothek in Berlin besitzt ein Exemplar mit diesem Druckjahre.

Herr CANTOR gibt an, daß HULSIUS jedenfalls vor 1607 gestorben ist; dagegen behauptet QUETELET an der von Herrn CANTOR zitierten Stelle bestimmt, daß HULSIUS 1606 starb. G. ENESTRÖM.

**2 : 693**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 287; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 394—395. — **2 : 700, 701, 703, 704, 705**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900. S. 271—273. — **2 : 715**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 412. — **2 : 716**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 404. — **2 : 717, 718**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 92—93. — **2 : 719**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357. — **2 : 720**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903 S. 287; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 404. — **2 : 721**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 404—405.

---

2 : 727. Die schwebende Angabe, daß Bürgis Logarithmen die Logarithmen mit der Basis $e$ sind, weil jene, abgesehen von den angehängten Nullen, nahe genug mit diesen übereinstimmen, ist unnötig, denn aus dem, was Herr Cantor mitteilt, kann die exakte Angabe sofort hergeleitet werden.

Aus $$x = 10\,n, \quad y = 10^8\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^n$$
folgt nämlich
$$y \cdot 10^{-8} = \left[(1 + 10^{-4})^{10^k}\right]^{x \cdot 10^{-k-1}}$$
und wenn $k$ eine beliebige ganze positive oder negative Zahl ist, so haben offenbar die Zahlen $y$ und $y \cdot 10^{-8}$, sowie die Zahlen $x$ und $x \cdot 10^{-k-1}$ dieselben Ziffern. Wenn man also eine Tafel der Logarithmen mit der Basis
$$(1 + 10^{-4})^{10^k}$$
berechnet hat, so kann man durch einfache Versetzung der Dezimalkommata sowohl der Logarithmen wie der Zahlen eine Tafel der Bürgischen Logarithmen herstellen und umgekehrt. In *diesem* Sinne kann man also sagen, daß Bürgis Logarithmen die Logarithmen mit der Basis $(1 + 10^{-4})^{10^k}$ ($k$ eine beliebige ganze Zahl) sind. Setzt man z. B. $k = 4$, so ist die Basis $2{\cdot}7184573$ also näherungsweise gleich $e$, und in diesem *sehr beschränkten* Sinne könnte man sagen, daß Bürgis Logarithmen die Logarithmen mit der Basis $e$ sind.

G. Eneström.

---

**2 : 741**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S 395—396. — **2 : 742**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142. — **2 : 746**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2 : 747**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 173; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 225. — **2 : 749**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88. — **2 : 766**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 412–413. — **2 : 767**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148, 357—358. — **2 : 770**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 208.

---

2 : 772. Die frühere Bemerkung von Curtze (BM $2_3$, 1901, S. 358) enthalt einen Passus, der modifiziert werden muß. Curtze sagt nämlich, daß Initius Algebras eine unbestimmte Aufgabe genau so gelöst wie es jetzt geschehen würde. Aber wie Curtze selbst erwähnt, führt Initius Algebras die Aufgabe auf die Lösung der Gleichung $59x + 19y = 1900$ zurück, worauf er die Werte $x = 19$, $y = 41$ angibt, ohne mitzuteilen, wie diese Werte aus der Gleichung erhalten werden können. Daß er die jetzt geläufige Methode benutzt hat, ist höchst unwahrscheinlich. Im Gegenteil deuten die Worte (siehe Abhandl. zur Gesch. der mathem. Wiss. **13**, 1902, S. 572): „1900 . . . sollen wir diuidirn in 19 vnd 59 dermaßen, das eins mit dem andern aufgeht“ darauf hin, daß Initius Algebras durch Probieren die Zahl 1900 in zwei Teile zerfällte, von denen der eine ein Multipel von 19 und der andere ein Multipel von 59 war. Dies Verfahren wurde übrigens im 16. Jahrhundert gelehrt z. B. von Apianus (vgl. P. Treutlein, *Das Rechnen im 16. Jahrhundert;*

Abhandl. zur Gesch. der Mathem. 1, 1877, S. 91). Aus dem was APIANUS sagt, scheint hervorzugehen, daß das Probieren auf folgende Weise vorgenommen wurde. Sei die Gleichung $ax + by = c$, wo $a$ größer als $b$ ist, und sei $na < c < (n + 1)a$, so bildet man die Zahlen $c - na$, $c - (n - 1)a$, $c - (n - 2)a$ usw., und dividiert jede dieser Zahlen durch $b$. Findet man dann, daß $c - (n - k)a$ die erste Zahl ist, die ohne Rest durch $b$ dividiert werden kann, so ist offenbar $x = n - k$, $y = \frac{c - (n - k)a}{b}$ eine Lösung der gegebenen Gleichung. G. ENESTRÖM.

---

**2 : 772, 775,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 358—359. — **2 : 777,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148; **3**$_3$, 1902, S. 204. — **2 : 783,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359; **4**$_3$, 1903, S. 88—89. — **2 : 784,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148. — **2 : 787,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 405; **7**$_3$, 1906/7, S. 296.

---

2 : 790. Über THOMAS HARRIOT ist vor einigen Jahren eine besondere Arbeit von H. STEVENS herausgegeben worden, die nicht im Buchhandel zu haben ist und die aus diesem Grunde den Historikern der Mathematik unbekannt zu sein scheint; nicht einmal G. VACCA, der sich näher mit HARRIOT beschäftigt hat (*Sui manoscritti inediti di THOMAS HARRIOT;* Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 5, 1902, S. 1—6), erwähnt diese Arbeit. Der Titel lautet: *THOMAS HARIOT the mathematician, the philosopher and the scolar developed. Chiefly from dormant materials with notices of his associates including biographical and bibliographical disquisitions upon the materials of the history of „ould Virginia“* (London 1900, 8, (10) + 213 S.) G. ENESTRÖM.

---

**2 : 791,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 405. — **2 : 793—794,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 307; **6**$_3$, 1905, S. 316—317, 405—406. — **2 : 795,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 317. — **2 : 797—798,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 307; **6**$_3$, 1905, S. 317. — **2 : 799,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 307. — **2 : 802,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 208. — **2 : 812,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 37. — **2 : 820,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148; **5**$_3$, 1904, S. 307. — **2 : 825,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148. — **2 : 832,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 203—204; **6**$_3$, 1905, S. 211. — **2 : 840,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148—149. — **2 : 843,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 328. — **2 : 850,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 109—110. — **2 : 856, 865,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149. — **2 : 876, 878, 879,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511. — **2 : 891,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2 : 897,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 406. — **2 : 898,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 37, 208. — **2 : 901,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511. — **2 : 919,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 204. — **2 : VIII** (Vorwort), siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2 : IX, X** (Vorwort), siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511—512.

---

**3 : 9,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359. — **3 : 10,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 518; **6**$_3$, 1905, S. 211.

---

3 : 10. Der Umstand, daß COLLINS schon gestorben war, als WALLIS' *Algebra* (1685) erschien, hat keine Bedeutung für die Frage, auf welche Weise COLLINS bei dem Drucke dieses Werkes mitwirkte. WALLIS gibt nämlich in seinem Vorworte an, daß die *Algebra* schon 1676 im Manuskript fertig war und nach London versandt wurde, um gedruckt zu werden. Freilich wurde dann nur ein Probebogen angefertigt, aber der wirkliche Druck begann im August 1683, also etwa zwei Monate bevor COLLINS starb. Die Bemerkung, daß COLLINS' Mitwirkung „höchstens darin bestanden haben kann, daß er den

Verfasser zur Herausgabe ermunterte", wird also hinfällig. Übrigens scheint Wallis durch Collins' Anregung veranlaßt worden zu sein, gewisse Fragen in seinem Werke zu behandeln (vgl. z. B. „Additions and emendations" S. 171).

G. Eneström.

---

**3 : 11,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3 : 12,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512. — **3 : 14—15,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 296—297. — **3 : 17,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512. — **3 : 22,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3 : 23,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 297—298. — **3 : 24,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3 : 25,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209, 399. — **3 : 26,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359.

---

3 : 26. Die Bemerkung, daß die Herausgabe des Briefes von Wallis an Léotaud vom 17. Februar 1667 unterblieb bis 1685, wo der Brief als Teil der *Defensio Tractatus de angulo contactus et semicirculi* Aufnahme fand, ist nicht durchaus unrichtig, aber bibliographisch ungenau. Es handelt sich nämlich um den in *englischer* Sprache erschienenen Traktat *A defense of the treatise of the angle of contact. By John Wallis. . . .* London: Printed by John Playford . . . 1684. Dieser Traktat ist ein mit besonderem Titelblatt versehener Anhang der im Jahre 1685 erschienenen englischen Ausgabe von Wallis' *Algebra*.

G. Eneström.

---

**3 : 39,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 407.

---

3 : 40. Die Wahrscheinlichkeit, daß unter der „Algebra Lanzii puerilis" die *Institutiones arithmeticae* von Johann Lantz gemeint sind, wird fast zur Gewißheit, wenn man bemerkt, daß nach Vossius (*De universae mathesios natura et constitutione*, Amsterdam 1650, S. 464) dies Buch auch Abschnitte „De rationalibus cossicis" und „De irrationalibus cossicis" enthält. Nach Vossius erschien das Buch 1630; auf der anderen Seite verzeichnet Murhard (*Litteratur der mathematischen Wissenschaften* I, Leipzig 1797, S. 184) vier Auflagen aus den Jahren 1616—1621 (München 1616, Augsburg 1617, München 1619, Köln 1621). Die Auflage von 1616 besitzt die königliche Bibliothek in Berlin.

G. Eneström.

---

**3 : 45—48, 49, 50,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512—513. — **3 : 57,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 298—299. — **3 : 63,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 93—94. — **3 : 68,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 299. — **3 : 70,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 360. — **3 : 82,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 308.

---

3 : 97. Es ist nicht richtig, daß Huygens' *Descriptio automati planetarii* 1698 veröffentlicht wurde; die richtige Angabe (1703) hat Herr Cantor selbst im 2. Bande (S. 766) seiner *Vorlesungen* gegeben. Zum erstenmal wurde die Schrift 1703 in den *Opuscula posthuma* (Leiden 1703), zum zweitenmal im 2. Bande der *Opera reliqua* (Amsterdam 1728) zum Abdruck gebracht. Das Planetarium wird von Huygens in einem Briefe an J. Gallois vom 19. Februar 1682 erwähnt (*Oeuvres complètes de Chr. Huygens*, 8, La Haye 1699, S. 342—343), aber das bedeutet natürlich nicht, daß die *Descriptio* schon damals redigiert worden war.

G. Eneström.

**3 : 100,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 299—300. — **3 : 102,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 318; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 300. — **3 : 112,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209—210; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 318. — **3 : 116,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 117,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 518. — **3 : 122,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 301. — **3 : 123,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 399; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 301—302. — **3 : 124,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 407—408; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 400. — **3 : 126,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 288. — **3 : 131,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 210. — **3 : 151,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326. — **3 : 167, 172—173,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 400. — **3 : 174,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149—150. — **3 : 183,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 432. — **3 : 188,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 241. — **3 : 201,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 207,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 519. — **3 : 215,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150. — **3 : 218,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 220,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326. — **3 : 224,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3 : 225, 228,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150. — **3 : 230,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 211—212. — **3 : 232,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 212; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 303. — **3 : 244—245,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 205, 413; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 303—304. — **3 : 246,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151. — **3 : 250,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514.

---

3 : 270. Das *Lexicon mathematicum astronomicum* [nicht „et"] *geometricum* (Paris 1668) des H. Vitale ist für die Geschichte der reinen Mathematik fast ohne Interesse. Etwa $^9/_{10}$ der Artikel sind astronomisch oder astrologisch, und von den rein mathematischen Artikeln beziehen sich etwa $^3/_4$ auf Terme, die aus den Euklidischen Elementen entnommen sind. Von arithmetischen Termen sind aufgeführt: Abaculi (= Rechensteine), Arithmetica (2 Druckseiten), Aurea regula, Divisio, Fractiones, Logistica, Numerus, Isarithmi (wird aus Isag = initium und rythmos = numerus hergeleitet!), Quotiens, Regula aurea (vgl. Aurea regula!) und Solidus numerus; der Term Radix kommt zwar vor, aber lediglich in astronomischer Bedeutung. Die ganze Algebra ist nur durch den Artikel Algebra (vier Zeilen!) vertreten; möglicherweise könnte man auch den Artikel Logarithmi ($1^1/_2$ Druckseite) hierher rechnen. Zur Trigonometrie gehören die Artikel Complementum arcus, Logarithmica (= Lösung sphärischer Dreiecke vermittelst Logarithmentafeln), Sagitta, Sinus, Trigonometria; zur höheren Geometrie die Artikel Ellipsis, Parabola (Hyperbola fehlt!). Lege ich noch die Artikel A figura (= Circinus), Asymetria, Mathematica ($1^1/_2$ Druckseite), Quadra, Quadrantal, Quadrans, Quadratura circuli (2 Druckseiten) hinzu, so glaube ich alle Terme der reinen Mathematik erwähnt zu haben, die nicht aus den Euklidischen Elementen entnommen sind. Vom Stande der Mathematik an der Mitte des 17. Jahrhunderts bekommt man also durch das Buch gar keine Ahnung. — Eine neue erweiterte Auflage erschien in Rom 1690.

G. Eneström.

---

**3 : 276,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 304. — **3 : 303,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 155. — **3 : 306,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 304. — **3 : 330—331,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 241—242. — **3 : 337,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 206. — **3 : 364,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 304—305. — **3 : 365,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 94. — **3 : 367,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 215. — **3 : 370—371,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 308. — **3 : 382,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 213. — **3 : 384,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 319. — **3 : 398,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 305—306. — **3 : 408,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 213. — **3 : 412,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 306. — **3 : 447, 455,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151. — **3 : 473,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 154—155; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401. — **3 : 477, 479,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151—152. — **3 : 497, 498,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309. — **3 : 507,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 71—72. — **3 : 521,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3 : 527,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 95. — **3 : 535,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401. — **3 : 536,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 206. — **3 : 560,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 319—321. — **3 : 565,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326—327. —

**3** : **571**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 72. — **3** : **578**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309. — **3** : **582**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 307. — **3** : **586**, **609**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309—310. — **3** : **612**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 307—308. — **3** : **614—615**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 89—90; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 308. — **3** : **616**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 214, 408. — **3** : **636—637**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3** : **646—647**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 206—207. — **3** : **652**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 207. — **3** : **660**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3** : **667**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441—442; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 207—208, 310. — **3** : **682**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 408. — **3** : **686**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 208. — **3** : **689**, **695**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442. — **3** : **736**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 111. — **3** : **750**, **758**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446. — **3** : **759**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 208. — **3** : **760**, **766**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446—447. — **3** : **774**, **798**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442—443. — **3** : **819**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 321. — **3** : **845**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327—328. — **3** : **848**, **881**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443. — **3** : **882**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 414. — **3** : **890**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401. — **3** : **892**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 143. — **3** : **IV** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443.

---

## Vermischte historische Notizen.

**Zur Frage des von Nairizi zitierten Mathematikers „Diachasimus".** Bei Gelegenheit des Studiums des Kommentars des Muhammed b. 'Abdelbâqî zum 10. Buche des Euklides, über welchen ich im vorhergehenden Hefte der Biblioth. Mathem. eine Abhandlung veröffentlicht habe, mußte ich auch den Kommentar des Nairîzî (Anaritius) zu diesem 10. Buche etwas näher in Berücksichtigung ziehen, der in der Ausgabe Curtzes die Seiten 211—252 einnimmt. Auch dieser Kommentar ist voll von Fehlern, und deshalb bisweilen sehr schwer verständlich, Curtze hätte noch manche Stelle durch Anführung von Verbesserungen in den Noten dem Verständnis näher bringen können. Für jetzt will ich nur *eine* Stelle hier erwähnen, die schon von P. Tannery besprochen worden ist (Biblioth. Mathem. $2_3$, 1901, p. 11), der aber den daselbst vorkommenden Fehler nicht verbessert hat. Seite 232 heißt es: *Diachasimus inquit minor, quare Anaritius hoc apposuit*, etc.; dies gibt keinen Sinn, es muß natürlich heißen: *Diachasimus inquit: miror, quare Anaritius hoc apposuit*, etc. Es ist möglich, daß *minor* nur ein Druckfehler ist, und daß Curtze gelesen und geschrieben hat *miror*, denn er sagt in der Fußnote auch nur: *Quis sit Diachasimus, nescimus;* P. Tannery aber sagt: *Enfin le Diachasimus minor*, etc. — Dagegen war die Vermutung Tannerys, daß dieser Diachasimus identisch sei mit dem Araber Abû Ga'far el-Châzin, naheliegend, denn dieser Mathematiker hat ebenfalls einen Kommentar zum 10. Buche des Euklides geschrieben, allein eine genaue Untersuchung[1]) dieses Kommentars, der sich im Codex 14 Gol. der Leidener Bibliothek befindet, hat ergeben, daß jene Stelle nicht darin vorkommt, daß überhaupt el-Nairîzî im ganzen Kommentar nirgends genannt wird; es wäre aber wohl möglich, wenn auch nicht gerade wahrscheinlich, daß dieselbe einer andern Schrift dieses arabischen Mathematikers entnommen sein könnte.

H. Suter.

---

[1]) Diese Untersuchung hat Herr Th. W. Juynboll in Leiden auf meine Bitte hin vorgenommen, wofür ich ihm auch hier meinen verbindlichsten Dank ausspreche; ich hatte leider vergessen, das Ms 14 Gol., das ich letzten Sommer auf der Universitätsbibliothek Zürich näher studierte, nach dieser Richtung hin zu untersuchen.

## Anfragen.

**130. Über den Pantometer von Michel Coignet.** Bekanntlich hat der belgische Mathematiker Michel Coignet (1549—1623) ein Instrument, die sogenannte „Regula pantometrae", konstruiert, das wesentlich mit dem Galileischen Proportionalzirkel übereinstimmt. Dies Instrument ist von Coignet in einem Traktate beschrieben, der handschriftlich in der Königlichen Bibliothek in Brüssel aufbewahrt ist (siehe H. Bosmans, *Le traité des sinus de Michiel Coignet;* Annales de la société scientifique de Bruxelles **25**: 2, 1901, S. 5 des Sonderabzuges). Der Traktat ist französisch geschrieben, trägt aber den lateinischen Titel: „Usus duodecim divisionum geometricarum per quas (et ope unius circini vulgaris) fere omnia mathematicorum problemata facili negotio resolvuntur. Opera et studio Michaelis Coigneti ... 1610."

Heilbronner (*Historia matheseos universae*, Leipzig 1742, S. 540, 572) erwähnt zwei andere Exemplare (oder Redaktionen) dieser Beschreibung des Pantometers, das eine (in der Vatikanischen Bibliothek in Rom) mit dem Titel: „Michaelis Coigneti usus duodecim divisionum regulae pantometrae", das andere (in der Nationalbibliothek in Paris) mit dem Titel: „Michaelis Cogneti de regulae pantometrae fabrica et usu libri VII".

Daß Coignet sein Instrument lange Zeit vor 1610 erfunden und selbst eine Beschreibung desselben verfaßt hatte, scheint aus einem 1626 gedruckten Buche hervorzugehen, das den Titel trägt: *La geometrie redvite en vne facile et briefve practique, par deux excellens instrumens, dont l'vn est le pantometre ov compas de proportion de Michel Connette ... Traduits en François par P. G. S. Mathematicien* (Paris, Chez Charles Hulpeau ... MDCXXVI). Der Übersetzer gibt nämlich an (siehe „av lectevr" Seite 2), er habe etwa 8 Jahre früher von Coignet selbst die Beschreibung des Pantometers bekommen, die er jetzt in französischer Übersetzung herausgebe, und er fügt hinzu, daß „il y auoit plus de 40 ans qu'il [= Coignet] sçauoit la composition de ce Compas, comme pourront tesmoigner ceux de sa nation qui l'ont cogneu". Nach dieser Angabe sollte also Coignet sein Instrument schon viele Jahre vor 1598, also ganz gewiss unabhängig von Galilei, erfunden haben.

Es wird gefragt, ob es Beschreibungen des Coignetschen Pantometers gibt, die nachweislich aus der Zeit vor 1598 herrühren, und, wenn dies nicht der Fall ist, ob man irgend einen sicheren Grund hat anzunehmen, daß Coignet sein Instrument vor 1598 konstruiert hat. G. Eneström.

# Rezensionen.

**M. Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.** Erster Band. Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. Dritte Auflage. Leipzig, B. G. Teubner 1907. 8, VI + 941 S. + 1 Tafel. 24 Mk.

In seinem kurzen Vorworte lenkt Herr Cantor die Aufmerksamkeit darauf, daß zwischen dem Erscheinen dieser und der vorigen Auflage ein Zwischenraum von 13 Jahren liegt, und daß die mathematisch-historische Forschung während dieser 13 Jahre viele neue Ergebnisse gewonnen hat. Daß nicht nur die letzte Bemerkung richtig ist, sondern auch neugewonnene Resultate von Herrn Cantor berücksichtigt worden sind, kann man schon aus dem Umstande folgern, daß die neue Auflage etwa 60 Seiten mehr als die vorige enthält; noch besser ersieht man es natürlich, wenn man das Buch selbst liest. Es ist also eine nicht unbedeutende Arbeit, der sich Herr Cantor unterzogen hat, um die neue Auflage fertig zu stellen.

Bei dieser Arbeit scheint Herr Cantor folgendes Verfahren angewendet zu haben. Wenn ihm eine mathematisch-historische Schrift zur Verfügung gestellt worden ist, hat er dieselbe durchgesehen und eventuell in sein Handexemplar der *Vorlesungen* die Ergänzungen oder Verbesserungen, die seines Erachtens dadurch veranlaßt werden konnten, eingetragen, oder wenigstens den Titel der Schrift angemerkt, um etwas später die angebrachten Ergänzungen oder Verbesserungen einzutragen; vielleicht hat er ausnahmsweise auch einige andere Schriften, deren Vorhandensein ihm bekannt geworden ist, auf dieselbe Weise benutzt. Durch dies Verfahren hat er allmählich das Druckmanuskript der neuen Auflage hergestellt und dasselbe dann im Jahre 1906 an den Verleger als druckfertig gesandt.

Ohne Zweifel kann ein solches Verfahren als *Vorarbeit* gebilligt werden, aber jedenfalls nur unter der Bedingung, daß das Druckmanuskript zuletzt genau kontrolliert wird, unter Zuhilfenahme der einschlägigen bibliographischen Arbeiten (z. B. des Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik und der Abteilung „Neu erschienene Schriften" der Bibliotheca Mathematica), sowie der schon benutzten mathematisch-historischen Schriften, sofern diese noch zugänglich sind. *Ohne* diese Kontrolle kann man nämlich nicht sicher sein, daß man die mathematisch-historische Literatur so weit möglich herangezogen hat, und übrigens könnte es sehr leicht eintreffen, daß man zuweilen versäumte, ziemlich wichtige Sachen zu notieren, weil man zurzeit anderes zu besorgen hatte; noch dazu ist es eine gewöhnliche Erfahrung, daß es sehr schwer ist, im Laufe einer längeren Zeit konsequent zu sein in betreff der Auswahl der Ergebnisse, die verdienen, notiert zu werden.

Aber so viel ich sehen kann, hat Herr Cantor die hier als notwendig bezeichnete nachträgliche Kontrolle nicht oder wenigstens nur ausnahmsweise vorgenommen, denn nur unter dieser Voraussetzung kann ich gewisse, sehr auffällige Unvollständigkeiten seiner Darstellung erklären. Eine solche Unvollständigkeit hat er selbst in seinen „Ergänzungen und Verbesserungen" hervorgehoben, wo er (S. 913) mitteilt, daß er seinerzeit versäumte, den wichtigen Artikel des Herrn H. Suter über *Das Rechenbuch des Abû Zakarijâ el Hassâr* (Biblioth. Mathem. $2_3$, 1901, S. 12—40) in seinem Handexemplare anzumerken. Daß aber dieser Fall gar nicht der einzige der fraglichen Art ist, dürfte der sachkundige Leser ohne besondere Mühe ausfindig machen können. Hier werde ich nur noch einen einzigen auffälligen Fall erwähnen.

Im Jahre 1897 veröffentlichte Max Curtze in den Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik (8, S. 1—27), die damals zugleich Supplemente zur Zeitschrift für Mathematik und Physik (Mitherausgeber Moritz Cantor!) waren, eine Algorismus-Schrift, die nachweislich vor 1168 verfaßt wurde, und die von großem Interesse ist, teils wegen ihres Inhalts, teils weil sie die einzige zurzeit bekannte Algorismus-Schrift in lateinischer Sprache ist, von der es nachgewiesen worden ist, daß sie *ganz sicher* dem 12. Jahrhundert entstammt, und weil es wenigstens möglich ist, daß Atelhart von Bath ihr Verfasser ist (vgl. Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, S. 416). Aber nichtsdestoweniger behauptet Herr Cantor noch in der neuen Auflage (S. 911) ganz wie in der vorigen (S. 856): „Andere Algorithmiker aus der Zeit, welche wir hier besprechen, also bis etwa zum Jahre 1200, sind gewiß noch mannigfach in handschriftlichen Texten vorhanden, aber im Drucke nicht veröffentlicht worden", und einen weiteren Beleg dafür, daß er die soeben zitierte Abhandlung von Curtze vergessen hat, bietet die Bemerkung S. 910: „Wir haben freilich diese komplementäre Multiplikation . . . bei keinem älteren Schriftsteller . . . gefunden", denn Curtze hat nachgewiesen, daß dieselbe komplementäre Multiplikation in der vor 1168 verfaßten Algorismus-Schrift vorkommt.

Ich gehe jetzt zu der Frage über, auf welche Weise Herr Cantor die von ihm wirklich herangezogene mathematisch-historische Literatur benutzt hat. Dabei will ich zuerst als einen erfreulichen Umstand hervorheben, daß man in der neuen Auflage nicht selten den früheren Moritz Cantor, den hervorragenden Verfasser der *ersten* Auflage des ersten Bandes der *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* erkennt, wenn er über den Inhalt der seit 1894 zugänglich gemachten mathematischen Schriften des Altertums berichtet. Handelt es sich dagegen nicht um Berichte über den Inhalt neuer *Quellenschriften*, sondern um die Verwertung solcher Resultate anderer Fachgenossen, wodurch die frühere Darstellung des Herrn Cantor modifiziert sein würde, so liegt die Sache etwas anders. Es scheint nämlich, als ob Herr Cantor jetzt eine fast kränkliche Abgeneigtheit hätte, das was er früher schrieb, zu streichen oder zu ändern, so daß er sich begnügt, lediglich Zusätze einzufügen, auch wenn Streichungen oder Änderungen sehr leicht anzubringen gewesen wären. Noch schlimmer wird es, wenn die von Herrn Cantor benutzten mathematisch-historischen Monographien nicht sofort alle erwünschten Aufschlüsse bringen, denn es scheint, als ob er nunmehr im allgemeinen durchaus abgeneigt wäre, auch nur einen Versuch zu machen, um unklare Fragen zu erledigen. Nimmt man noch hinzu, daß die mathematisch-historischen Kenntnisse des Herrn Cantor in gewissen Gebieten nunmehr auffallend lückenhaft sind, so ist es leicht zu verstehen, daß seine Darstellung an vielen Stellen ungenau oder sogar unrichtig sein muß. Ich werde jetzt einige Beispiele solcher Stellen geben, hebe aber besonders hervor, daß ich nicht in erster Linie die Stellen gewählt habe, weil sie sehr wichtig sind, sondern weil es außerordentlich leicht gewesen wäre dieselben zu verbessern. Über wichtigere Stellen werden die „Kleinen Bemerkungen“ der folgenden Hefte der Bibliotheca Mathematica Auskunft geben.

In der vorigen Auflage kam (S. 537) folgender Passus vor:

> Eine ganze Anzahl von Handschriften [hat] sich bis auf den heutigen Tag erhalten, in welchen den Titeln nach die Arithmetik, die Musik, die Geometrie des BOETHIUS aufgezeichnet sind. Die älteste Handschrift . . . der Geometrie [soll] dem IX. S.[4]) [entstammen].
>
> 4) G. SCHEPSS . . . nennt drei Pariser Codices, deren ältester dem IX. S. angehört . . . In ihnen wird ausdrücklich das Ganze als Eigentum des BOETHIUS in Anspruch genommen.

In betreff dieses Passus bemerkte PAUL TANNERY in der Bibliotheca Mathematica ($\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268): „Les mss. contenant une géométrie attribuée à BOÈCE et reconnus comme antérieurs au XI$^e$ siècle, n'en ont qu'un traité en cinq livres dont l'authenticité ne peut être soutenue“, und er begründete seine Behauptung ausführlich in seinen *Notes sur la Pseudo-Géométrie de Boèce* (a. a. O. S. 39—50). Das Material, das TANNERY auf diese Weise zur Verfügung stellte, könnte nun für die neue Auflage der *Vorlesungen* so verwertet worden sein, daß S. 537 Z. 13 „eine Geometrie“ statt „die Geometrie“, sowie Z. 16 „geometrischen Inhalts“ statt „der Geometrie“ gesetzt und außerdem die Fußnote[4]) ein wenig modifiziert wurde. Ein anderes Verfahren wäre gewesen, schon hier über die verschiedenen Schriften geometrischen Inhalts, die dem BOËTIUS zugeschrieben werden, kurz zu berichten. Indessen hat Herr CANTOR weder das eine noch das andere Verfahren benutzt, sondern in der neuen Auflage (S. 577) den ganzen Passus *unverändert abdrucken lassen* und erst S. 580—581 die wesentlichen Berichtigungen TANNERYS als Zusätze eingefügt. Nun will ich nicht mit Herrn CANTOR darüber streiten, ob der zitierte Passus auch unter Bezugnahme auf die TANNERYsche Bemerkung als *buchstäblich* richtig bezeichnet werden kann, denn diese Frage ist für mich von untergeordneter Bedeutung. Dagegen will ich ausdrücklich hervorheben, daß wenn der Zweck des CANTORschen Buches nicht ist, die Leser irre zu führen, sondern sie zu belehren, so ist seine Darstellung jetzt zu beanstanden. Da nämlich Herr CANTOR im Texte zuerst *die* Geometrie nennt und dann angibt, daß die älteste Handschrift *der* Geometrie dem 9. Jahrh. entstammen soll, so *muß* der Leser unnötigerweise die Ansicht bekommen, daß es sich um eine bestimmte Arbeit handelt, die möglicherweise dem BOËTIUS zuzuschreiben ist. Aber *die* Arbeit, von welcher eine Handschrift aus dem 9. Jahrhundert bekannt war, ist, wie TANNEBY ausführlich dargelegt hat und Herr CANTOR selbst S. 580—581 anzuerkennen scheint, ganz gewiß nicht von BOËTIUS verfaßt, während die älteste Handschrift der Arbeit, die möglicherweise von BOËTIUS herrührt (die sogenannte *Geometria Boëtii*) aus dem 11. Jahrhundert herstammt.

In der vorigen Auflage hatte Herr CANTOR (S. 807) auf eine Handschrift hingewiesen, die vielleicht eine von „JOSEPHUS sapiens“ verfaßte Geometrie enthalten könnte, und er fügte hinzu: „Diese Spur dürfte weitere Verfolgung verdienen“. Hinsichtlich dieses Hinweises bemerkte PAUL TANNERY in der Bibliotheca Mathematica ($\mathbf{1}_3$, 1900, S. 269), daß es sich in Wirklichkeit um eine *griechische* Handschrift handelte, die von einem Mönche JOSEPH RHACENDYTES herrührte, und die nur insofern geometrischen Inhalts war, daß sie unter anderem das Kompendium der Mathematik enthielt, das gewöhnlich MICHAEL PSELLOS zugewiesen wird. Mit „JOSEPHUS sapiens" hat also diese Handschrift gar nichts zu tun. Aber dennoch findet man in der neuen Auflage (S. 857) den erwähnten Passus wieder, nur mit der Veränderung, daß statt „Diese Spur dürfte weitere Verfolgung verdienen" jetzt die Worte stehen: „Nur freilich ist gerade diese Spur nicht weiter zu verfolgen, wie an Ort und Stelle vorgenommene Untersuchungen bewiesen haben (briefliche Mitteilung von TANNERY)". Auch hier lasse ich beiseite, ob die Worte buchstäblich richtig sein können, wenn es sich um eine endgültig erledigte Frage handelt, aber ich kann nicht umhin zu bemerken, daß der Leser unnötigerweise eine unrichtige Auffassung bekommen *muß*. Denn wenn die fragliche Handschrift tatsächlich gar nichts mit „JOSEPHUS sapiens" zu tun hat, so sollte wohl hier, wo es sich gerade um diese Persönlichkeit handelt, der Hinweis ohne weiteres gestrichen oder möglicherweise unter die Fußnoten versetzt werden. Oder soll man annehmen, daß die TANNERYsche Bemerkung Herrn CANTOR unbekannt geblieben ist, und daß die briefliche Mitteilung keine vollständige Auskunft brachte? Das letzte halte ich allerdings für wenig wahrscheinlich auf Grund meiner Bekanntschaft mit PAUL TANNERY.

Die zwei vorangehenden Beispiele beziehen sich auf die CANTORsche Abneigung gegen leichte Änderungen und Streichungen. Jetzt biete ich ein paar Beispiele seiner Abgeneigtheit, auch nur sehr einfache ergänzende Nachforschungen vorzunehmen.

In der vorigen Auflage kam (S. 854) folgender Passus vor:

> Vielleicht darf man . . . auch einen Algorithmus des Meister GERHARD, der handschriftlich in London sich befindet,[4]) unserem GERHARD von Cremona überweisen. Das wäre alsdann der erste Algorithmus von bekanntem abendländischem Verfasser, den wir zu nennen hätten.
>
> 4) Ebenda [= B. BONCOMPAGNI, *GHERARDO CREMONESE*] pag. 57.

In betreff dieses Passus bemerkte ich (Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, S. 104), daß statt „London" Oxford zu setzen sei, und daß in Wirklichkeit als Verfasser der Algorismus-Schrift nicht „Gerardus" sondern GERNANDUS angegeben werde, wodurch der Anlaß, die Schrift dem GHERARDO CREMONESE zu überweisen, hinfällig wird. Ob Herr CANTOR meine Bemerkung gelesen hat, weiß ich nicht, jedenfalls hat er in der neuen Auflage (S. 908) die unrichtige Angabe „London" nicht verbessert, und auch sonst den Passus der vorigen Auflage unverändert abdrucken lassen. Dagegen zitiert er (S. 909) Abhandlungen von A. A. BJÖRNBO und P. DUHEM, und wenn man diese einsieht, findet man:

1) daß Herr BJÖRNBO die von BONCOMPAGNI erwähnte Algorismus-Schrift als ein anderes Exemplar des *Tractatus magistri GERNARDI* des Cod. Reg. Lat. 1261 der Vatikanischen Bibliothek bezeichnet;
2) daß Herr DUHEM eine Handschrift der Nationalbibliothek in Paris untersucht hat, die auf der einen Seite mit dem 1534 gedruckten *Algorithmus demonstratus* identisch ist, auf der anderen Seite mit der Algorismus-Schrift der soeben angeführten Handschrift der Vatikanischen Bibliothek identisch zu sein scheint.

Man kann also schon aus diesen Angaben folgern, daß der von Herrn CANTOR in der vorigen Auflage erwähnte Algorithmus des Meister GERHARD wahrscheinlich mit dem 1534 gedruckten *Algorithmus demonstratus* identisch ist. Nun ist aber diese Schrift nach der Ansicht des Herrn Cantor (siehe den zweiten Band der *Vorlesungen*, zweite Auflage S. 63—66) eine der wichtigsten Algorismus-Schriften des Mittelalters, und die bloße Möglichkeit, daß sie dem Gherardo Cremonese zu überweisen wäre, also schon um die Mitte des 12. Jahrhunderts verfaßt sein würde, ist darum von größtem Belang; in Wahrheit kann die Entwickelung der Arithmetik im christlichen Mittelalter nicht dargestellt werden, ohne daß man zu dieser Frage Stellung nimmt.

Dabei gibt es zwei Auswege, die beide sehr nahe liegen. Man kann nämlich die Mutmaßung, daß Meister Gerard mit Gherardo Cremonese identisch ist, als so unbegründet betrachten, daß sie gar nicht berücksichtigt zu werden verdient, denn teils war ja Gherardo Cremonese bisher *nur* als Übersetzer bekannt, teils war im Mittelalter „Gerardus" ein gar nicht ungewöhnlicher Verfassername; so z. B. gibt es handschriftlich ein „Liber magistri Gerardi de Brussel De motu", der spätestens dem 13. Jahrhundert zu entstammen scheint. Endlich ist es auf Grund des Inhalts des *Algorithmus demonstratus* höchst unwahrscheinlich — man könnte sogar sagen fast unglaublich —, daß er schon aus der Mitte des 12. Jahrhunderts herrührt. Man könnte also mit gutem Rechte den ganzen Passus streichen, der von der angeblichen Algorismus-Schrift des Gherardo Cremonese handelt.

Der zweite Ausweg wäre, wenigstens einen Versuch zu machen, um die Frage zu erledigen, und für diesen Zweck zuerst die zitierte Schrift von Boncompagni einzusehen. Tut man dies, so findet man an der von Herrn Cantor erwähnten Seite folgenden Passus:

> Nel catalogo stampato de' manoscritti della biblioteca Bodleiana d'Oxford si legge: Algorismus Magistri Gerardi in integris et minutiis. Questo trattato d'aritmetica trovasi manoscritto nel codice 61 Digby della medesima biblioteca Bodleiana,

und Boncompagni verweist auf den *alten* Manuskript-Katalog von 1698. Vergleicht man jetzt dies Zitat mit der von Herrn Cantor erwähnten Stelle der Björnboschen Abhandlung, so findet man, daß nach dem *neuen* Manuskript-Katalog der Bodleianischen Bibliothek von 1883 der Titel der von Boncompagni zitierten Algorismus-Schrift lautet: „Algorismus magistri Genardi in integris et minutiis". Der Traktat, der angeblich vom Meister Gerardus verfaßt sein würde, muß also jetzt dem Meister Genardus (Gernardus, Gernandus) zugeschrieben werden, und schon dadurch ist es fast sicher geworden, daß Gherardo Cremonese gar nichts mit der 1534 herausgegebenen Algorismus-Schrift zu tun hat. Aber Herr Cantor hat sich nicht einmal die Mühe gegeben, diese leichte Untersuchung auszuführen, sondern begnügt sich, nachdem er den Passus der vorigen Auflage unverändert abgedruckt hat, hinzuzufügen:

> Vielleicht gibt es noch eine zweite umfangreichere Handschrift desselben Algorithmus in einem Vatikancodex, der den *Tractatus magistri Gernardi* enthält. Genauer werden wir auf diesen Algorithmus, der unter dem Namen *Algorithmus demonstratus* ohne Bezeichnung eines Verfassers 1533 [Druckfehler für 1534] gedruckt worden ist, erst im II. Bande . . . eingehen.

Es hat also hier die Frage ganz unnötigerweise unentschieden gelassen. Im Vorübergehen bemerke ich, daß Herr Cantor sicherlich die Frage endgültig erledigt haben könnte, wenn er nur zwei kurze Briefe geschrieben hätte (vgl. sein Verfahren in betreff der „Hodie"-Frage, S. 287 der zweiten Auflage des dritten Bandes der *Vorlesungen*).

In der vorigen Auflage hatte Herr CANTOR (S. 536) angegeben, daß die Astronomie des BOETIUS nach aller Wahrscheinlichkeit noch 1515 vorhanden war, weil sich eine dies Jahr erschienene Arbeit auf deren Benutzung beruft, und in der neuen Auflage wird (S. 576) diese Angabe wiederholt mit dem Zusatze:

> Möglicherweise ist bei jener Berufung ein 1503 in Paris gedruckter, von FABER STAPULENSIS herausgegebener Band gemeint, der den . . . Titel führt: „BOETIUS SEV. Epitome . . . insuper Astronomicon". Wenn dem aber so wäre, so stünde die Meinung auch das Astronomicon müsse von BOETHIUS verfaßt gewesen sein, freilich auf recht schwachen Füßen,

und in einer Fußnote teilt Herr CANTOR mit, daß Herr KARL BOPP den Titel einem antiquarischen Kataloge entnommen hat.

Nun verhält es sich aber so, daß der betreffende Sammelband vom Jahre 1503 ein sehr bekanntes Buch ist, dessen eine Abteilung Herr CANTOR selbst im 2. Bande seiner *Vorlesungen* (Aufl. 2, S. 379) zitiert hat, und das von P. RICCARDI teils in der *Biblioteca matematica italiana* 1, Sp. 142—143, teils ausführlicher in der Bibliotheca Mathematica 1894, S. 73—75 beschrieben worden ist. Aus der letzten Beschreibung ersieht man (a. a. O. S. 75), daß das „Astronomicon" mit den Worten beginnt: „JACOBI FABRI STAPULENSIS Astronomici theorici corporum celestium Liber primus", so daß der Traktat gewiß nicht von BOETIUS herrühren kann.

Ich habe oben bemerkt, daß die mathematisch-historischen Kenntnisse des Herrn CANTOR in gewissen Gebieten auffällig fragmentarisch sind und werde dies jetzt durch ein Beispiel belegen; das Beispiel ist übrigens auch ein neuer Beweis seiner Abneigung gegen jede besondere Nachforschung.

S. 800 gibt Herr CANTOR an, daß eine sichere Entscheidung einer gewissen Frage allerdings nur dann möglich wäre, wenn es gelänge, den Urtext des *Liber embadorum* SAVASORDAS aufzufinden. Aber dieser Urtext ist längst aufgefunden worden (vgl. Biblioth. Mathem. $4_3$, 1903, S. 332), und von demselben ist vor einigen Jahren eine Abteilung veröffentlicht worden (vgl. Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, S. 90). Übrigens kann es Herrn CANTOR nicht unbekannt sein, daß MORITZ STEINSCHNEIDER die Geschichte der jüdischen Mathematik und besonders SAVASORDA eingehend behandelt hat, und es würde Herrn CANTOR ziemlich leicht gewesen sein, eine Stelle aufzufinden, wo die bekannten Handschriften des Urtextes des *Liber embadorum* verzeichnet sind, wenn er nur seine eigene Fußnote 3) S. 797 zu Rate gezogen hätte (vgl. Biblioth. Mathem. 1896, S. 36—37).

In seinem schon erwähnten Vorworte bemerkt Herr CANTOR, daß es die Pflicht des gewissenhaften Geschichtsschreibers ist, seine Leser auf die Streitpunkte aufmerksam zu machen, und daß er hofft, dieser Pflicht genügt zu haben. Auch ich bin überzeugt, daß er wirklich versucht hat, über die Gründe, die von den Vertretern verschiedener Ansichten angeführt worden sind, unparteiisch zu berichten. Aber leider scheinen seine Versuche nicht immer geglückt zu sein, und der Grund dazu ist wohl zum Teil, daß er wesentlich nur die Schriften, die ihm zur Verfügung gestellt wurden, gelesen hat. Es ist natürlich, daß diese Schriften in erster Linie von denen herrühren, die seinen Ansichten beipflichten, während die Gegner dieser Ansichten weniger Anlaß gehabt haben, ihm ihre Abhandlungen zu senden. Aber dann versteht man leicht, wie erfolglos die fraglichen Versuche des Herrn CANTOR zuweilen werden müssen. Ein Beispiel dieser Art bietet die CANTORsche Darstellung der Streitfrage über den Ursprung der Schriften, die Herr CANTOR (S. 388) „HERONsche Sammlungen" nennt. Als Vertreter der Ansicht, daß diese Schriften wesentlich byzantinischen Ursprungs sind, zitiert Herr CANTOR (S. 392) nur J. L. HEIBERG, der in seinem sehr kurzen Berichte über griechische Mathematik, Mechanik und Astronomie (1905) diesen Ursprung ganz beiläufig als „bewiesen" bezeichnet, aber *nicht* PAUL TANNERY, der in seinem zweiten Artikel über HERON im Journal des savants 1903 (S. 203—211) die Frage ausführlich behandelt hat. Diesen Artikel hat Herr CANTOR vermutlich nicht bekommen, denn die fragliche Zeitschrift bietet ihren Mitarbeitern keine Sonderabzüge, und er ist ihm vielleicht auch unbekannt geblieben (der Artikel ist freilich in der Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, S. 303 erwähnt). Nun enthält der TANNERYsche Artikel Ausführungen, aus denen mit großer Wahrscheinlichkeit hervorgeht, daß wenigstens die von HULTSCH unter dem Titel „*HERONIS Geometria*" veröffentlichte Schrift byzantinischen Ursprungs ist, und da Herr CANTOR gar nichts davon mitteilt, so verliert seine Darstellung der Streitpunkte der HERON-Frage sehr an Wert.

Ein anderer Fehler der CANTORschen Berichte über Streitpunkte ist, daß zuweilen Tatsachen und mehr oder weniger kühne Hypothesen nicht unterschieden werden. Ich hoffe, daß Herr CANTOR mit mir einig ist, wenn ich sage: Es wäre unangebracht, in einem Lehrbuche der Arithmetik anzugeben, daß zweimal zwei fünf sei, auch wenn man nachträglich hinzufügte, daß allerdings zweimal zwei nicht genau fünf sondern vielmehr vier beträgt. Aber gerade Fehler verwandter Art begeht Herr CANTOR zuweilen, wie aus den zwei folgenden Belegen hervorgehen dürfte; beide beziehen sich auf die HERON-Frage.

S. 364 macht Herr CANTOR darauf aufmerksam, daß HERON in seiner Vermessungslehre den Verfasser „der Geraden im Kreise" zitiert, und Herr CANTOR fügt unmittelbar hinzu: „die Geraden im Kreise (S. 362) [rühren] von HIPPARCH [her]; folglich muß HERON nach der Mitte des II. vorchristlichen Jahrhunderts gelebt haben"; hier wird also *ausdrücklich* behauptet, (vgl. die Verweisung auf S. 362, wo HIPPARCHOS behandelt wird), daß HIPPARCHOS Verfasser der von HERON zitierten Schrift ist. Aber in den folgenden Zeilen wird erwähnt, daß auch MENELAOS eine Schrift mit demselben Titel verfaßte, und nun sucht Herr CANTOR nachträglich zu *beweisen*, daß HERON nicht diese Schrift gemeint haben kann (der Beweis ist übrigens meiner Ansicht nach wertlos[1]); ferner bemerkt Herr CANTOR S. 367, daß seine *Überzeugung*, die in der Metrica erwähnte Sehnentafel sei die des HIPPARCHOS, von einem jüngeren Philologen geteilt wird. Aber dann ist es unangebracht, zuerst ganz einfach zu sagen, daß „die Geraden im Kreise" von HIPPARCH herrühren, ohne hinzuzufügen: „unserer Überzeugung nach" oder „wie wir unten begründen werden" oder etwas ähnliches.

S. 366 bemerkt Herr CANTOR: „um das Jahr 500 n. Chr. erzählt CASSIODORIUS von dieser Vermessung und sagt dabei, ein Schriftsteller Heron metricus

---

1) Auf dieselbe Weise könnte man beweisen, daß wenn in einer Arbeit bemerkt wird, in den Logarithmentafeln finde man den Wert des Logarithmus von 2, so entstammt diese Arbeit dem 17. Jahrhundert.

habe sich an ihrer Redaktion beteiligt"; hier wird also ausdrücklich von einer tatsächlichen Aussage des CASSIODORIUS gesprochen. Aber unmittelbar nachher gibt Herr CANTOR selbst zu, daß CASSIODORIUS gar nicht einen Schriftsteller HERON nennt, sondern daß die Handschriften „iron" oder „yron" (das jedenfalls nicht ein Personenname zu sein braucht) haben. In der Tat ist die Lesart „auctor Heron metricus" nur eine kühne Konjektur MOMMSENS, und nach PAUL TANNERY (Journal des savants 1903, S. 156) stand vermutlich statt „auctor yron metricus" ursprünglich „auctor gromaticus". Wie dem auch sei, ist es durchaus irreleitend zu sagen, daß CASSIODORIUS einen Schriftsteller „Heron metricus" erwähnt hat.

Bevor ich meine Kritik der neuen Auflage schließe, kann ich nicht umhin, mein Bedauern auszusprechen, daß Herr CANTOR die „Kleinen Bemerkungen" der Bibliotheca Mathematica nur sehr unvollständig benutzt hat; diese Bemerkungen enthalten ja ein Material, das ihm sozusagen umsonst zur Verfügung gestellt worden ist. Hinsichtlich derselben ist es bedeutungslos, ob Herr CANTOR zuweilen versäumt hat, nach dem Erscheinen eines neuen Heftes der Bibliotheca Mathematica die angezeigten Verbesserungen in seinem Handexemplar anzumerken, denn jedes Heft der Zeitschrift enthält Verweise auf alle Bemerkungen der vorangehenden Hefte. Besonders bedauere ich, daß noch in der neuen Auflage (S. 706) die folgende irreleitende Behauptung der vorigen Auflage wiederholt ist: „So müssen beispielsweise die Arbeiten des ZENODORUS den Arabern bekannt gewesen sein, weil in einer lateinischen Abhandlung über die isoperimetrische Aufgabe, welche handschriftlich in Basel vorhanden ist, der Name ARCHIMENIDES vorkommt" (vgl. Biblioth. Mathem. $3_3$, 1902, S. 405).

Es ist noch übrig, hier ein allgemeines Urteil über die dritte Auflage des ersten Bandes der *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* auszusprechen. Den Liebhabern der Geschichte der Mathematik, die nicht Mathematiker sind und die höchstens ganz beiläufig die literarische Geschichte der Mathematik selbst bearbeiten wollen, kann das Buch unbedingt empfohlen werden. Auch den Mathematikern, die nicht in der Lage sind, die mathematisch-historischen Quellenschriften oder Monographien zu benutzen, wird das Buch sehr willkommen sein, da es jedenfalls viele neue Aufschlüsse bringt, deren einige sonst nicht leicht aufzufinden sind.

Betrachtet man dagegen die neue Auflage vom Gesichtspunkte der mathematisch-historischen Forschern aus, kann das Urteil nicht in so wenigen Worten abgefaßt werden. Als Herr CANTOR seine mathematisch-historischen Studien begann, war die Geschichte der Mathematik mehr ein Gegenstand der Liebhaberei als der rein wissenschaftlichen Forschung, und die vorhandene Literatur war wenig umfassend. Seitdem haben sich die Verhältnisse wesentlich verändert. Die Geschichte der Mathematik ist, zum Teil auf Grund der wertvollen Vorarbeit des Herrn CANTOR, allmählich eine wirkliche Wissenschaft geworden und die diesbezügliche Literatur mehrt sich von Jahr zu Jahr. Eine notwendige Folge dieses Umstandes ist, daß ein Fachmann allmählich zum Standpunkte des Dilettanten herabsinken wird, wenn er hauptsächlich nur von den Schriften, die er selbst bekommt, Kenntnis nimmt, ohne nachher die bibliographischen Hilfsmittel auszunützen. Diese Veränderung der Verhältnisse scheint Herrn CANTOR leider entgangen zu sein, und darum kann die dritte Auflage des ersten Bandes seiner *Vorlesungen* den Fachgenossen empfohlen werden nur unter der Bedingung, daß sie dieselbe mit großer Vorsicht benutzen. Wie ich schon hervorgehoben habe, besteht der

Wert der neuen Auflage in erster Linie darin, daß sie viele Berichte bringt über die Quellenschriften, die seit 1894 zugänglich geworden sind. Ferner enthält sie viele wertvolle Angaben über die neueste mathematisch-historische Literatur, aber man muß sich davor hüten, diese Angaben ohne weiteres als wenigstens annäherungsweise vollständig zu betrachten. Auch die Darstellung der Streitpunkte ist nur mit Vorsicht zu benutzen, und wenn man in der neuen Auflage Aufschlüsse über eine gewisse Frage suchen will, so soll man sich immer erinnern, daß man nicht darauf rechnen kann, mit Sicherheit Auskunft über den heutigen Stand der mathematisch-historischen Forschung zu bekommen. Im Gegenteil kann es leicht eintreffen, daß man in Wirklichkeit Auskunft über den Stand dieser Forschung im Jahre 1880 bekommt.

Stockholm. G. Eneström.

---

**Max Simon. Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert.** Bericht, der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erstattet. Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Der Ergänzungsbände I. Band. Leipzig, B. G. Teubner 1906. 278 S. 8⁰. 8 Mk.

Der III. Band der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* soll nach der Disposition der Herausgeber die „Geometrie" enthalten, und zwar in 3 Teilen. Für einen Abschnitt „Elementargeometrie" des I. Teils war ein Bericht des Herrn Max Simon: „Über die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jahrhundert" ursprünglich bestimmt. Das Programm der „Encyklopädie" verlangt „eine möglichst vollständige Gesamtdarstellung der mathematischen Disziplinen nach ihrem gegenwärtigen Inhalt an *gesicherten Resultaten* in knapper *zu rascher Orientierung geeigneter* Form und eine von *sorgfältigen* Literaturangaben begleitete *historische Entwickelung der Methoden*". Da die von Herrn Max Simon eingereichte Arbeit weder dem Inhalt noch der Form nach diesem vorgeschriebenen Programm entspricht, so lehnten die Herausgeber der *Encyklopädie* die Aufnahme ab. Dagegen beschloß, — wohl mit Rücksicht auf die von Herrn Simon im Interesse der Sache aufgewandte große Mühe, — auf Anregung des Herrn Felix Klein, der Vorstand der deutschen Mathematiker-Vereinigung, diesen Bericht als I. Ergänzungsband seiner Jahresberichte erscheinen zu lassen. Man erwartete wohl, daß das meist aus Zetteln bestehende Manuskript vom Verfasser vor der Drucklegung einer sorgfältigen Redaktion und einer Prüfung in bezug auf die bibliographische Treue der Zitate unterzogen würde. Daß Herr Simon dieser Erwartung leider nicht entsprochen hat, werden wir im Folgenden beweisen.

Zuvor möchte ich aber ausdrücklich hervorheben, daß ich mit dieser Besprechung nicht lediglich den Zweck verfolge, die dem Simonschen Werke anhaftenden Fehler und Mängel aufzudecken. Es kommt mir in erster Linie darauf an, auf die Schwierigkeiten hinzuweisen, mit welchen derartige historisch-literarische Arbeiten verknüpft sind. Vielleicht gelingt es mir, auf Grund meiner Erfahrungen einiges beizutragen zu der Frage, wie eine solche Arbeit angegriffen und möglicherweise erleichtert werden kann.

Wer die bisher erschienenen Beiträge zu der von Felix Klein, von Dyck und Franz Meyer so schön und großzügig angelegten *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* prüft, wird zugeben müssen, daß mehrere dieser Monographieen sich recht weit von dem Ideal entfernen, das den Begründern vorgeschwebt hat. Das Programm verlangt zunächst eine Darstellung der gesicherten Resultate: eine solche ist, wenn man sich auf eine ganz spezielle Disziplin oder auf ein bestimmtes Problem beschränkt, für den, der dieses Feld beherrscht, wohl möglich. Schwieriger ist der zweite Punkt, eine Form der Darstellung zu finden, die zu rascher Orientierung geeignet ist; hier kann ein gut angelegtes Sachregister, wie wir es für den ersten Band besitzen, den Leser unterstützen. Das Schwierigste ist aber die dritte Forderung, eine von sorgfältigen Literaturangaben begleitete historische Entwickelung. An dieser scheitern die meisten der bisher erschienenen Beiträge, obwohl zugegeben werden muß, daß die französische Bearbeitung in diesem Punkte glücklicher ist. Aus diesem Mangel ist aber dem Verfasser kein Vorwurf zu machen, denn es fehlen bis jetzt die erforderlichen bibliographischen Vorarbeiten, ohne die eine historische Darstellung unmöglich ist. Herr Eneström hat in der Bibliotheca Mathematica ($5_3$, 1904, 388—406) darauf hingewiesen, daß die Encyklopädie „ein neues literarisches Hilfsmittel zur Verbreitung mathematisch-historischer Kenntnisse" zu werden verspricht, vorausgesetzt, daß die historischen Anmerkungen von einem sachkundigen Fachmann gegeben und die vorhandenen von einem solchen ev. ergänzt oder verbessert werden.

Nach dem eben Gesagten wird der oben angeführte Grund für die Ablehnung der Aufnahme des Simonschen Werkes in die Encyklopädie verständlich, auch wenn kein schriftliches Gutachten der Leiter vorliegt. Selbst wenn man das Gebiet der Elementar-Geometrie auf das beschränkt, was in der Regel auf Gymnasien gelehrt wird, (hier werden sogar die Elemente der analytischen Geometrie ausgeschlossen,) ist die Aufgabe, ihre Entwickelung im XIX. Jahrhundert darzustellen, eine äußerst schwierige, für den Einzelnen unmögliche. Schon die Vorarbeiten zu einem solchen Unternehmen müssen die Kräfte eines Einzelnen übersteigen. Selbstverständliche Voraussetzung ist, daß man alle früheren Arbeiten über die historische Entwickelung der Elementar-Geometrie kennt. Zunächst müßte man sich dann wohl die Frage vorlegen: welches war der Zustand der Elementar-Geometrie am Ende des XVIII. Jahrhunderts? Keines der bekannten historischen Werke gibt hierüber eine genügende Auskunft. Man ist also auf das Studium der bis dahin erschienenen mathematischen Journalliteratur und der mathematischen Einzelwerke angewiesen. Wer sich nicht eingehend mit der älteren Journalliteratur beschäftigt hat, unterschätzt gewöhnlich ihren Umfang und ihre Bedeutung. Als Herr Moritz Cantor zur Freude aller Fachgenossen die Absicht kundtat, seine Geschichte der Mathematik durch einen IV. Band bis zum Jahre 1799 fortzuführen, und durch mehrere Rundschreiben zur Mitarbeit aufforderte, nahm ich Gelegenheit, außer einem Verzeichnis von ca. 100 mathematischen Sammelwerken aus der zweiten Hälfte des XVIII. Jahrhunderts eine Liste von 270 Zeitschriften mathematischen Inhalts aus den Jahren 1750 bis 1800 zusammenzustellen. Diese als Hilfsmittel für historisch-mathematische Studien unentbehrliche bibliographische Vorarbeit legte ich dem verehrten Senior der mathematischen Historiographie vor und machte in der letzten Sitzung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung zu Stuttgart in einem Bericht über die Arbeiten der bibliographischen Kommission eine kurze Mitteilung über meine Zusammenstellung.

Nimmt man nun auch an, daß die wichtigeren elementar-geometrischen Resultate und Aufgaben, welche in diesen 270 Zeitschriften enthalten sind, größtenteils in die größeren Kompendien und Encyklopädieen der Mathematik sowie in die Lehrbücher der Planimetrie, Trigonometrie und Stereometrie aus den letzten Jahrzehnten des XVIII. Jahrhunderts aufgenommen worden sind, so müßte man diese wenigstens zu Rate ziehen. Von den Kompendien und Encyklopädieen kämen u. a. folgende, von Herrn SIMON nicht genannten Werke in Betracht:

O. GHERLI, *Gli elementi teorico-pratici delle matematiche pure.* 7 vol. fol. Bologna 1770—1777, nach LAGRANGES Urteil das vollständigste Werk über Mathematik.

CH. BOSSUT, *Cours complet de mathématiques.* 3 vol. Paris 1795—1800.

TH. BUGGE, *Lehrbuch der gesammten Mathematik.* Deutsch. 3 Bde. Altona 1800—1816.

CH. HUTTON, *A mathematical and philosophical dictionary.* 2 vol. London 1795—96. 2d ed. 1815.

SAURI, *Institutions mathématiques.* Paris 1770, 6e éd. 1834.

GEORG GOTTL. SCHMIDT, *Anfangsgründe der Mathematik.* Frankfurt a. M. 5 Bde. 1797—1807. 1. Bd. (worin Elementare Geometrie) auch 1806 und 1822.

JOH. GEORG BÜSCH, *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften.* Hamburg 1775; 2. Aufl. 1795. Amsterdam 1778—80. 2 Bde.

J. F. HÄSELER, *Anfangsgründe der Arithmetik, Algebra, Geometrie und Trigonometrie.* Lemgo 1775; 2. Aufl. 1792; 3. Aufl. 3 Bde. 1802—6.

J. PH. GRÜSON, *Vollständige Anleitung zur niedern, höhern und angewandten Mathematik.* 2 Bde. Berlin 1799.

LP. UNTERBERGER, *Anfangsgründe der Mathematik.* 3 Bde. Wien 1775—77 und 1784—86.

HEINR. JOH. KREBS, *Anfangsgründe der reinen Mathematik.* 2 T. Kopenhagen 1777—78; 2. Aufl. 1792—99.

N. L. DE LACAILLE, *Leçons élémentaires de mathématiques, ou Élémens d'algèbre et de géométrie.* Paris. Viele Ausgaben, u. a. 1798, 1806, 1811.

M. J. LEMOINE, *Traité élémentaire de mathématiques.* Paris 1789; 2e éd. 1790; 3e éd. 1793. (Auch für die Geschichte wichtig.)

F. MEINERT, *Lehrbuch der Mathematik.* 3 T. Halle. I, II. Reine Math. 1789. III. 1795.

C. SCHERFFER, *Institutiones mathematicae.* 6 vol. gr. 4. Wien 1770—77 und Supplementa ib. 1782.

Genannt werden von Herrn SIMON, aber mit ungenauen Titeln, folgende:

CHR. WOLFF, *Elementa matheseos universae.* Halae; 5 vol. 1713—1741, auch 1730—52 und 1743—69. — — *Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften.* Halle 1710; 10. Aufl. 1775; 11. Aufl. von L. W. GILBERT 1800. — — *Auszug aus den Anfangsgründen der mathematischen Wissenschaften.* Halle 1713; viele Aufl. bis 1772. Neuer Auszug etc. von TOBIAS MAYER und C. LANGSDORF. Marburg 1797; von C. MÜLLER 1818.

ABR. G. KASTNER, *Anfangsgründe der Mathematik.* 4 T. Göttingen 1758—66; T. I, 1. u. 2; 6. Aufl. 1800; I, 3 u. 4 *(Sammlung geometrischer Abhandlungen und Anwendungen der ebenen Geometrie und Trigonometrie)* 1790—91.

W. J. G. KARSTEN, *Elementa matheseos universalis.* Rostock 1758. — — *Mathesis theoretica elementaris atque sublimior.* Rostock und Greifswald 1760. — — *Lehrbegriff der gesammten Mathematik.* 8 T. ib. 1767—77; neue Aufl. 1786—95. — — *Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften.* 3 T. Greifswald 1778—80. — — *Auszug aus den Anfangsgründen und dem Lehrbegriff der mathematischen Wissenschaften.* Greifswald 1781; 2. Aufl. 2 T. 1785 u. 1790. *Neue Anfangsgründe* . . . 1802.

J. A. v. SEGNER, *Cursus mathematici, seu elementa etc.* 5 T. Halle 1757—68. — — *Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie und der geometrischen Berechnungen.* A. d. Lat. übers. von J. W. v. SEGNER. Halle 1764; auch 1773 und 1801.

J. F. LORENZ, *Grundriß der reinen und angewandten Mathematik* 4 Bde. Helmstädt 1791—92. Viele Auflagen: I, 1799, 1807, 1816, 1820 von CH. L. GERLING, 1827; II, 1800, 1808, 1817, 1821. III u. IV. 4. Aufl. 1818. — — *Die Elemente der Mathematik,* in 6 Büchern. 3 T. Leipzig 1785—86; 2. Aufl. 1793—97; I, 3. Aufl. 1812.

G. SIM. KLÜGEL, *Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie nebst ihrer Anwendung.* Berlin 1782; auch 1792, 1798, 1803, 1809 und 6. Aufl. von CH. G. ZIMMERMANN 1819.

Et. Bezout, *Cours de mathématiques à l'usage de l'artillerie.* 4 vol. Paris 1770—72; 2e éd. 1795—99. — — *Cours de mathématique à l'usage de la marine;* augm. par Garnier. 6 vol. Paris 1800. — — *Cours complet de mathématique, à l'usage de la marine, d'artillerie et des élèves de l'École polytechnique.* Nouv. éd. rev. et augm. par Mrss. Reynaud et de Rossel. 6 vol. 1814 und 1825.

Außer diesen Gesamtdarstellungen der Mathematik müßte man die speziellen Lehrbücher der Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie aus den letzten Jahren des XVIII. Jahrhunderts durchblättern, um sich ein Bild von dem Zustand der Elementar-Geometrie am Ende desselben zu verschaffen. Da die Zahl dieser Lehrbücher sehr groß ist (sie beträgt über 50!), so begnüge ich mich hier damit, die Namen der Verfasser der wichtigsten Lehrbücher aufzuführen. Es sind: A. M. Legendre, S. Fr. Lacroix, A. G. Kästner, S. G. Gilbert, G. S. Klügel, S. Lhuilier, D. Snell, K. Scherffer, Ch. F. Pfleiderer, F. Th. Schubert, Abel Bürja, Th. Walton, Ch. Michelsen, A. R. Mauduit, Jac. F. Maler, J. Playfair, Ant. Ludenna, J. G. Prändel, J. Howard, Jean Trembley, G. v. Vega, Niels Morville, J. N. Müller, A. Wagenführ, F. G. v. Busse, C. Ch. Langsdorf, Joh. Tob. Mayer, Andr. Cagnoli, Walter Fisher, Sam. Vince.

Alle diese Werke müßten zur Verfügung stehen, um festzustellen, ob nicht etwa ein in einer späteren Arbeit gefundenes Resultat schon vor Beginn des XIX. Jahrhunderts entdeckt worden ist. Man sieht, daß diese Feststellung der Priorität, welche von einem gewissenhaften Historiker verlangt wird, gerade bei der Elementar-Geometrie mit außerordentlichen Schwierigkeiten und großer Mühe verbunden, wenn nicht ganz unmöglich ist.

Aus dem Vorigen ergibt sich, ein wie großes Wagnis es ist, eine Darstellung der Entwickelung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert geben zu wollen. Herr Max Simon hat recht viel Material für seine Arbeit gesammelt, welches man sonst nicht so leicht findet, — und das ist der Vorzug seines Buches. Sehen wir nun zu, in welcher Weise dieses zusammengehäufte Material von Herrn Simon verwertet worden ist, um ein Bild von der Entwickelung der Elementar-Geometrie, wie es der Titel verspricht, zu geben. Zu dem Zweck müssen wir auf den Inhalt des Buches näher eingehen.

Das Werk zerfällt in 2 Abschnitte: I. Allgemeines (S. 1—52), II. Spezielles (S. 53—252). Abschnitt I enthält 4 Artikel mit den Überschriften: 1. Abgrenzung des Referates und allgemeine Gesichtspunkte (S. 1—4); 2. Geschichte (Bibliographie) (S. 5—11); 3. Methodik (S. 12—24); 4. Lehrbücher, Aufgabensammmlungen (S. 24—52). Berücksichtigt werden soll das, was auf dem Gymnasium gelehrt wird; doch werden die Kegelschnitte „wegen des ungeheuren Umfanges ihrer Literatur“ (!) abgetrennt, desgleichen die Elemente der analytischen Geometrie, obwohl viele elementar-geometrischen Sätze analytisch gefunden sind. Zur allgemeinen Charakteristik der Entwickelung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert wird bemerkt, daß die großen Strömungen der Wissenschaft auch in unserer Disziplin zutage treten. „Die Darwinsche Theorie der Entstehung der Arten zeigt sich als systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten.“ (!) Der zweite große Zug des Jahrhunderts ist der kritische, der dritte das Gesetz der Kontinuität. „Dabei zeigt es sich denn allerdings, daß unsere Elementargeometrie, was die Materie betrifft, wenig über die der Hellenen oder der Araber hinausgekommen ist.“ Dieses Urteil des Herrn Simon dürfen wir nicht zu tragisch nehmen; einige Zeilen weiter unten heißt es: „Dennoch ist die geistige Arbeit auf unserem Gebiete gewaltig gewesen, es hat seine Größen wie die anderen“. Und nun werden 32 dieser Größen aufgezählt, indem die Lebenden unerwähnt gelassen werden. Daß hier auch viele Verstorbene nicht genannt sind, sagt die Zahl 32.

Der Artikel 2. *Geschichte* (der Zusatz *Bibliographie* ist überflüssig) beginnt mit dem seltsamen Satze: „Die Geschichte der Elementargeometrie ist im wesentlichen die der ägyptischen, griechischen, indischen, arabischen Geometrie, wozu etwa die Periode von 800—1600 (Vieta und Fermat) der europäischen Geometrie kommt.“ S. 5 werden 54 Namen von Historikern der Elementargeometrie, geordnet nach Nationalitäten, hintereinander aufgezählt; es folgen 15 Namen von Herausgebern orientalischer und griechischer mathematischer Werke. Auffallend ist, daß in diesem Abschnitt Namen wie G. Wertheim, H. Weissenborn, A. Marre, F. Hoefer, S. Dickstein, Biernatzki, C. de Vaux, G. Vivanti, G. Vacca, G. Vicuña ganz fehlen, während von den auf S. 5 nicht genannten A. Arneth, M. Poppe, K. Fink, W. Schmidt, C. I. Gerhardt, M. Marie, J. Boyer wenigstens einzelne Werke angeführt werden. Von Zeitschriften, in denen Artikel über Geschichte der Mathematik zu finden sind, werden nur erwähnt Boncompagnis Bullettino (nicht Bulletino!), Gino Lorias „kleiner Ersatz“ desselben, G. Eneströms Bibliotheca Mathematica, die historisch-literarische Abteilung der Zeitschrift f. Math. u. Phys., das Journal asiatique, die Zeitschrift für Ägyptologie, die Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft, der Bursian (!), der Philologus, die Revue scientifique, — alle ohne nähere Angabe des Titels und der Jahreszahlen. Unter die folgende Literatur („Einzelheiten“, S. 6—12) hat sich zuletzt noch verlaufen das Bulletin de bibliographie, d'histoire etc., als Anhang zu den Nouv. Ann. de math. 1855—1862. Gar nicht erwähnt sind hier unter Geschichte (Bibliographie) die Supplemente zur Zeitschr. f. Math. u. Phys., Abhandlungen zur Geschichte der math. Wissenschaften, 1877 u. flg., Darboux' Bulletin des sciences mathématiques etc., seit 1870, L'Intermédiaire des mathématiciens, von Laisant und Lemoine, seit 1894, Bobynins Fisiko-matematitscheskaja naouki (Les sciences physiques et mathématiques dans leur présent et leur passé), 1885—1905, das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik **1** (1868), 1871 u. flg., die Revue semestrielle des publications mathématiques der mathematischen Gesellschaft zu Amsterdam, seit 1892, das Repertorium der literarischen Arbeiten auf dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik, von L. Königsberger und G. Zeuner, **1** u. 2, 1877—79; ganz abgesehen von den zahlreichen (ca. 100) allgemein-wissenschaftlichen Zeitschriften, die mit dem Journal des Savants (1665) beginnen, und in denen zahlreiche mathematisch-historische Artikel zu finden sind.

Doch „nun zu den Einzelheiten“. Auf S. 6—12 werden in buntem Gemisch (— die Anordnung war wohl ursprünglich chronologisch gedacht —) zahlreiche Werke aufgezählt, die für die Geschichte der Elementargeometrie von Wichtigkeit sind: größere Werke über Geschichte der Mathematik, ferner Werke, welche die Geschichte der Mathematik in besonderen Zeiten oder bei einzelnen Völkern behandeln, Geschichten besonderer mathematischer Disziplinen, Biographieen, Reden, kurze historische Notizen, Enzyklopädieen und Wörterbücher, auch 2 mathematische Zeitschriften, Ausgaben und Übersetzungen der Werke älterer Mathematiker u. a. — Leider vermissen wir hier, wie in dem ganzen Werk des

Herrn Max Simon, die bibliographische Sorgfalt, die für ein historisches Werk gefordert werden muß. Die Literaturangaben sind zum großen Teil ungenau oder ganz falsch; die Titel fehlen häufig ganz, wie bei F. Peyrard, E. F. August, Halma, L. F. Ofterdinger, H. Martin, E. Hoppe, P. Mansion, J. H. Knoche, G. Friedlein, A. Favaro, L. Rodet. Falsche Jahreszahlen stehen bei Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 2. Aufl. (statt I 1898 lies I 1894); Cantor, *Über den Seqt* (statt 1889 lies 1884), J. L. Heiberg, (statt *Apollonius* 1891 lies: *Apollonii Pergaei quae graece exstant* I, 1891, II, 1893). Bei Martin heißt die Quelle Mém. prés. Ac. inscript. I statt **4**, 22. Wo findet man E. Révillout, Revue égyptologique p. 308? Die Bemerkung, über den Papyrus Rhind sei im Jahrb. ü. d. Fortschritte d. Math. *erst* Bd. **22**, p. 9 (1890) ein Referat gegeben, ist falsch; s. F. d. M. **12**, 17—18, 1880.

Eine ganze Reihe wichtiger Quellenschriften für die Geschichte der Elementargeometrie fehlt in Artikel 2. Herr Max Simon hätte mehrere derselben in Felix Müller, *Zeittafeln für die Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie bis zum Jahre 1500*, Lpz. 1892 (die er nicht anführt), finden können. Von wichtigeren Lücken nennen wir:

*Scriptores gromatici. Schriften der römischen Feldmesser, hersg. u. erläut. von F. Blume, K. Lachmann u. A. Rudorff.* Berlin 1848—1852.
Fr. Hultsch, *Scriptorum metrologicorum reliquiae.* 2 vol. Lpz. 1864 u. 1866.
E. Stöber, *Die römischen Grundvermessungen* etc. München 1877.
H. Suter, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke.* Abh. Gsch. d. math. Wiss. **10**, 1900.
F. Rosenberger, *Die Geschichte der exakten Wissenschaften und der Nutzen ihres Studiums.* Abh. Gsch. d. math. Wiss. 9, 1899, 359—381.
H. Hankel, *Die Elemente der projektiven Geometrie.* Lpz. 1875. (IV. Abschn. Aufgaben des Apollonius.)
G. Friedlein, *De Heronis quae feruntur definitionibus.* Bull. bibl. stor. 4, 93—121, 1871. Zusatz von B. Boncompagni, ib. 122—126.
J. L. Heiberg, *Neue Studien zu Archimedes.* Z. Math. Phys. **24**, Suppl. 1—84, 1890.
H. Weissenborn, *Das Trapez bei Euklid, Heron und Brahmegupta.* Z. Math. Phys. **24**, Suppl. 167—184, 1879.
P. Treutlein, *Ein Beitrag zur Geschichte der griechischen Geometrie.* Z. Math. Phys. 28, Hl. Abt. 209—226, 1883.
H. Künssberg, *Der Astronom, Mathematiker und Geograph Eudoxos von Knidos.* 2 Pr. Dinkelsbühl 1888 u. 1890.
Fr. Hultsch, *Autolyci de sphaera liber.* Lpz. 1885.
Fr. Hultsch, *Scholien zur Sphärik des Theodosius.* Abh. philol.-hist. Kl. d. Sächs. Ak. 5, 383—446, Lpz. 1887.
V. Mortet, *Un nouveau texte des traités d'arpentage et de géométrie d'Epaphroditus et de Vitruvius Rufus.* Paris 1896.
J. L. Heiberg, *Philologische Studien zu griechischen Mathematikern.* 5 T. J. f. klass. Phil. **11**, Suppl. 357—399; **12**, Suppl. 377—402; **13**, Suppl. 543—577. Lpz. 1881—1884.
P. Tannery, *Pour l'histoire de la science hellène. De Thalès à Empédocle.* Paris 1887.
A. Aubry, *Notice historique sur la géométrie de la mesure.* J. math élém. **20**, 1896 et **21**, 1897. (8 Artikel.)
Jamblichus, *De vita Pythagorae.* Gr. lat. ed. Kiessling. 2 vol. Lips. 1815—16.
Serenus, Dtsch. von E. Nizze. Pr. Stralsund 1860 u. 1861.
*Sereni Opuscula.* Ed. J. L. Heiberg. Lpz. 1896.
N. B. Halma, *Commentaire de Théon sur le livre premier de la Composition mathématique de Ptolémée.* Traduction. 3 vol. Paris 1822—25.
*Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii*, ed. Friedlein. Lpz. 1873.
J. N. Knoche, *Untersuchungen über die neu aufgefundenen Scholien des Proclus Diadochus zu Euclids Elementen.* Herford 1865.
H. G. Zeuthen, *Brahmeguptas Trapez.* Tidsskr. for Math. $6_3$, 168—174, 181—191, 1876.

Obwohl der Artikel 2 zur „Geschichte“ den Zusatz („Bibliographie“) trägt, wird nur der Name RICCARDI (S. 5) genannt, nicht aber

P. RICCARDI, *Biblioteca matematica italiana.* 2 vol. 2. Ausg. Torino 1894.
P. RICCARDI, *Saggio di una bibliografia Euclidea.* Mem. Acc. Ist. Bologna $8_4$, 1887; $9_4$, 1888; $1_5$, 1890; $3_5$, 1893: $4_5$, 1894.

Wer über Geschichte der Mathematik schreiben will, sollte auch noch mit folgenden Bibliographieen vertraut sein:

C. A. BEUGHEM. *Bibliographia mathematica.* Amstelod. 1688.
JOH. EPHR. SCHEIBEL, *Einleitung zur mathematischen Bücherkenntnis.* 3 Bde. in 20 Heften. Breslau 1769—98. I, neue Aufl. 1781.
F. W. MURHARD, *Litteratur der mathematischen Wissenschaften. Bibliotheca mathematica.* Lpz. 1797—1805. 5 T.
J. W. MÜLLER, *Auserlesene mathematische Bibliothek.* Nürnberg 1820.
J. ROGG, *Handbuch der mathematischen Literatur.* I. Abt. Arithmetik und Geometrie. Tübingen 1830.
L. A. SOHNCKE, *Bibliotheca mathematica* (V. J. 1830—54). Lpz. 1854.
E. WÖLFFING, *Mathematischer Bücherschatz.* Systematisches Verzeichnis der wichtigsten deutschen und ausländischen Lehrbücher und Monographieen des 19. Jahrhunderts auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. I. T. Reine Mathematik. Lpz. 1903; auch Abh. Gsch. d. math. Wiss. **16**, **1**.
*Catalogue of scientific papers. Ed. by the R. Society of London.* 12 Bde. London 1867—1902.
JER. DAV. REUSS, *Repertorium commentationum a Societatibus literariis editarum.* 7 Bde. Gottingae 1801—21. Bd. VII. Mathematik.
J. C. POGGENDORFF, *Bibliographisch-litterarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften.* I u. II. Lpz. 1863. Forts. III (die Jahre 1858—1883 umfassend), hrsg. von B. W. FEDDERSEN und A. J. VON ÖTTINGEN. Lpg. 1896. IV (die Jahre 1883 bis zur Gegenwart), hrsg. von A. J. VON ÖTTINGEN. Lpz. 1902.

Keines von diesen bibliographischen Werken ist von Herrn SIMON zitiert.

Artikel 3 des SIMONschen Buches, *Methodik* überschrieben, enthält in dem einleitenden Abschnitt eine Charakteristik der neueren Strömungen des mathematischen Unterrichts. Es werden Lehrer der Mathematik genannt, welche „lebendige Lehrbücher der Methodik“ sind, es werden Hochschullehrer angeführt, deren Werke und Vorlesungen indirekt und direkt großen Einfluß auf die Geometrie der Mittelschulen gehabt haben, — zuletzt WEIERSTRASS, der „via GEORG CANTORS Mengenlehre zu der Arithmetisierung der Geometrie geführt hat“ (!). Dann folgt unter A. *Allgemeines* die Aufzählung einer Reihe von Werken über Philosophie und Methodik der Mathematik. Die chronologische Anordnung solcher Massen-Literatur ist zwar sehr bequem (ihr zuliebe werden sogar einmal die beiden Bände eines Werkes [H. SCHOTTEN] getrennt!); gegen diese spricht aber die notwendige Anführung neuer Auflagen, vor allem aber erschwert sie die Übersicht. Welche Bedeutung die einzelnen Schriften für die Entwickelung der Elementargeometrie gehabt haben, wird nicht gesagt; einige wenige werden ganz kurz charakterisiert, andere mit mehr oder weniger hierher gehörigen kurzen Notizen versehen. Die Bemerkung (S. 19), daß G. HAUCKS Festrede „seit MAUPERTUIS (1743) der erste nachdrückliche Hinweis auf das künstlerische Element in der Mathematik“ sei, ist unrichtig. Man vergleiche: A. ZEISING, *Ästhetische Forschungen.* Frankfurt a. M. 1855 (s. S. 174!); S. GÜNTHER, *ADOLPH ZEISING als Mathematiker.* Z. Math Phys. **21**, Hl. Abt. 157—165, 1876; abgesehen von den älteren Aufsätzen über den Nutzen der Mathematik von KÄSTNER, PALMQUIST, MEYEN, EBERHARD u. a. Auf S. 20 hätten unter denen, die nach GÜNTHER die Bedeutung der Geschichte für den Unterricht hervorgehoben haben, neben MAX SIMON, P. TREUTLEIN, G. LORIA und P. MANSION noch genannt werden müssen: G. FRIEDLEIN, A. v. BRILL, H. G. ZEUTHEN, K. FINK, FELIX MÜLLER, A. KLIMPERT, F. KRUSE,

J. Tropfke u. a. Der Zusatz zu O. Rausenberger, „das Werk hält, was es verspricht", klingt seltsam, da im angeführten Titel die bezeichnenden Worte „systematisch und kritisch behandelt" fehlen. Fehlende, unvollständige oder unrichtige Titel bemerkten wir außerdem bei V. Valeriani, G. Bellavitis, J. M. Hoene-Wronski (S. 19), A. Ziegel, Th. Wittstein, J. Hoüel, F. Dauge, C. F. Hauber (nicht „Haubert"), Ch. F. Pfleiderer, G. Peano.

Unter B. *Spezielle Methodik* (S. 22—24) folgt eine neue Reihe von methodischen Schriften. Mehrere unter A. stehende Schriften hätten auch hier aufgenommen werden können; eine derselben kommt auch hier noch einmal vor.

Um zu zeigen, daß auch in diesem Abschnitt 2 mehrere wichtige Schriften fehlen, führen wir folgende an:

W. Wundt, *Logik.* II. Bd. Allgemeine Methodenlehre. 1. Abt. Logik der Mathematik und der Naturwissenschaften. 2. Aufl. Stuttgart 1894.
G. Veronese, *Dei principali metodi in geometria.* Verona, Padova 1882.
J. C. Becker, *Die Mathematik als Lehrgegenstand des Gymnasiums.* Berlin 1883.
E. Kretschmer, *Welche Aufgabe soll die Mathematik in der Gymnasialerziehung erfüllen?* Pr. Posen 1875.
A. Gille, *Herbarts Ansichten über den mathematischen Unterricht.* Diss. Halle 1888.
C. Harms, *Die erste Stufe des mathematischen Unterrichts.* 2 T. Oldenburg 1852.
K. Kraus, *Methodik des Unterrichts in der Geometrie und im geometrischen Zeichnen.* Wien 1895.
A. Mayr, *Die wissenschaftliche Methode angewandt auf die Mathematik.* Würzburg 1845.
J. Kober, *Über die Definitionen der geometrischen Grundbegriffe.* Z. f. math. Unterr. **1**, 228—236, 1870.
Krähe, *Über den indirekten Beweis.* Pr. Berlin 1874.
K. A. T. Knabe, *Die Formen des indirekten Beweises mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Mathematik.* Diss. Lpz. 1885.
K. A. T. Knabe, *Über den indirekten Beweis.* Pr. Kassel 1890.
M. W. Drobisch, *Neue Darstellung der Logik.* Lpz. 4. Aufl. 1875.

Der letzte Artikel 4 (S. 24—52) des allgemeinen Abschnittes in dem Simonschen Buche ist überschrieben: „*Lehrbücher*, Aufgabensammlungen". Er beginnt mit einer allgemeinen Charakteristik: „Die geschilderten Strömungen zeigen sich auch in den Lehrbüchern". Alsdann folgt eine Aufzählung von Lehrbüchern in Frankreich, Deutschland, England, Amerika, Italien und den übrigen Ländern. Zur Charakteristik der Lehrbücher in Deutschland soll u. a. die Phrase dienen: „In dem Maße wie der Bureaukratismus in die Gymnasien eindrang, ist der Geist daraus entwichen". Besonders auf die preußischen Lehrpläne von 1892 ist der Verfasser schlecht zu sprechen; sie sollen eine Flut der schlechtesten Lehrbücher hervorgerufen haben. Die Bemerkung (S. 30), daß während in Frankreich und Italien wirklich große Mathematiker auch elementare Lehrbücher schreiben, „das in Deutschland nicht für voll gilt", (Ausnahmen seien die Hochschullehrer Felix Klein, H. Weber, A. Brill.) ist wohl nicht ganz richtig. Abgesehen von den älteren Mathematikern L. Euler, A. G. Kästner, J. H. Lambert, Tob. Mayer, B. F. Thibaut, besitzen wir Lehrbücher von H. G. Grassmann, M. Ohm, J. A. Grunert, J. J. v. Littrow, K. H. Schellbach, R. Baltzer u. a., die, obgleich z. T. nicht Hochschullehrer, doch zu den großen Mathematikern gerechnet werden können. Nicht allzu tragisch ist der Ausspruch (S. 25) zu nehmen, daß „ungründliche Bücher, geschickte aber unwissenschaftliche Werke eine *ungeheure* Verbreitung finden, während ernste Arbeiten wie die von W. Gallenkamp, Worpitzky, Hubert Müller, ja selbst Henrici und Treutlein es selten zu mehr als zwei Auflagen bringen". Wird doch selbst von Herrn Simon auf S. 35 von Henrici und

Treutlein, *Lehrbuch*, die 3. Auflage, ebenda von Hubert Müller, *Die Elemente der Planimetrie*, die 7. (!) Auflage, und S. 33 von W. Gallenkamp, *Die Elemente der Mathematik*, die 5. (!) Auflage angeführt. — Das auf S. 22 und auf S. 40 ausgesprochene Urteil über geometrische Elementarbücher in England ist auch nicht mehr richtig. Vgl. Jahrb. über Fortschr. der Math. 1901 u. flgde. im Abschnitt VIII, 3 die Schriften von J. Perry, *Englands neglect of science*, London 1900 und *Discussion on the teaching of mathematics*, London 1901 u. a. Sie haben einen wohltätigen Umschwung im englischen Unterricht hervorgebracht. Auch sprechen die schon früher erschienenen, von Herrn Simon nicht genannten Bücher von Fr. Castle, *Elementary practical mathematics*, London 1899, J. Graham, *An elementary treatise on practical mathematics*, ib. 1899, J. Perry, *Practical mathematics*, ib. 1899 gegen das Urteil des Herrn Simon. Näheres findet man in dem Vortrag von R. Fricke, *Über Reorganisationsbestrebungen des mathematischen Elementarunterrichts in England*, Jahresb. der Dtsch. Math.-Ver. **13**, 283—296, 1904.

Daß das Verzeichnis der Lehrbücher und Aufgabensammlungen vollständig ist, wird niemand beanspruchen. Wohl aber hätte größere Sorgfalt auf die Titel und die Jahreszahlen verwendet werden müssen. Viele Titel sind ungenau, unvollständig oder fehlen ganz. Das Verzeichnis beginnt mit den Worten: „Über die Elemente Legendres siehe „Parallelen". Wenn irgendwo, so hätte wohl hier der vollständige Titel angeführt werden müssen. Unter „Parallelen" wird von der 12. Auflage gesprochen; auch hier fehlt der Titel. Die 29. Auflage von Blanchet, 1886, ist nicht genannt. Mehrere Zeilen tiefer steht in einer Klammer: (Legendre von Crelle ins Deutsche). Neuere Auflagen fehlen häufig, z. B. bei S. F. Lacroix die 25. Auflage 1897, Ch. Briot et Ch. Vacquant die 7. Auflage 1875, Lebon die 2. Auflage 1900, bei den älteren deutschen Kompendien (s. oben) u. a. auf S. 33 steht: „Über Scheffler vergleiche „Methodik"; aber in 3 steht nur bei Wronski die Bemerkung: „Eine Parallele mit Scheffler wäre nicht uninteressant"; Schefflers Hauptwerk wird nirgends genannt. Unsere sonst so entgegenkommenden Bibliothekare würden sicherlich Bestellzettel, die nur die Worte: Aug. Poulain 1875, L. Foucault, Paris 1894, A. Jardine 1855, Dillner V. und VI. Buch, Die Bücher von Noca(?), W. Herz 1883, trügen, mit dem Vermerk versehen: „Nicht vorhanden!" Herr Simon sagt im Vorwort: „Ich selbst habe nur die allerwichtigsten Werke bibliographisch genau zitiert, und die andern so, daß sie, mit verschwindender Ausnahme, jeder Interessent nach meinem Zitat sofort auffinden kann." Daß dies nicht einmal für die „allerwichtigsten" stimmt, haben wir bereits gesehen; daß es für die „andern" unrichtig ist, wird uns noch mehr einleuchten, wenn wir auf die Zitate von Journalen zu sprechen kommen.

Wir wenden uns nun zum II. Teil des Buches, *Spezielles* (S. 53—249). Hier vermissen wir zunächst eine übersichtliche Anordnung des Materials, welche ermöglicht, irgend ein Problem oder irgend einen Satz leicht aufzufinden. Es ist bekannt, daß alle bisher unternommenen Versuche, die Mathematik zu systematisieren, daran scheiterten, daß nicht streng nach den behandelten Objekten, sondern teils nach Gegenständen, teils nach Methoden klassifiziert wurde. Bei Herrn Simon ist von einem Prinzip der Einteilung des Materials nichts zu bemerken. Man sieht zwar 9 Abschnitte mit den Überschriften: A (Art. 5) Parallelentheorie, B (6—12) Kreis, C (13—16) Flächeninhalt, D (17—20) Dreieck, E (21, 22) Polygone, F (23—26) Allgemeine ebene Konfigurationen, G (27—29) Allgemeine räumliche Beziehungen, H (30—32) Besondere räumliche Beziehungen, J (33 u. 34), Trigonometrie, doch sind die Überschriften nicht überall maßgebend für den Inhalt. Trigonometrische Formeln und Sätze sind in allen Abschnitten zu finden, nicht nur in J, Stereometrische nicht bloß in G und H. Noch schlimmer sieht es mit den Unterabteilungen, mit den Überschriften der einzelnen Artikel aus. Artikel 7 (S. 74—82): „Reguläre Polygone, Kreisteilung“ überschrieben, enthält auf S. 75 einen Abschnitt A. „Allgemeines (vgl. auch Polygon)“; ein entsprechendes B als Überschrift sucht man vergebens. Unter A stehen dann die Paragraphen: a. Allgemeines. b. Besondere Vielecke. c. Besondere approximative Konstruktionen. d. Sternpolygone. e. Kreisteilung. f. Bogenteilung (Trisektion). In Artikel 8 folgt dann wieder: Trisektion, bezw. Multiplikation des Winkels; Artikel 9 Kreissätze, 10 Inversion (worin auch Arbeiten über das Taktionsproblem), Art. 11 Taktionsprobleme, 12 „Schließungsprobleme (inkl. Castillon)“ hat 2 Abteilungen: a. Castillon, b. Schließungsprobleme. Abschnitt C, Flächeninhalt, enthält Art. 13 Pythagoras (worin auch der Pythagoras im Raum und der sphärische Pythagoras), Art. 14 Ptolemäus (mit dem Zusatz: vgl. Kreisviereck!), Art. 15 Inhalt (Flächenvergleichung), Art. 16 Isoperimetrie (mit Einschluß räumlicher Gebilde). Bei derartigen Überschriften wäre doch wohl ein genaues Sachregister erwünscht gewesen.

Bei der Besprechung des II. Teiles müssen wir uns kurz fassen; er trägt die Mängel des I. Teiles in erhöhtem Maße. Eine Aufzählung der fehlenden wichtigen Literatur, eine Korrektur der zahlreichen unvollständigen oder falschen Titel und Quellenangaben, ein Verzeichnis der häufigen Druckfehler würde einen Raum in Anspruch nehmen, den die Bibliotheca Mathematica uns unmöglich zu Gebote stellen darf. Was die Druckfehler betrifft, so erstrecken sie sich nicht bloß auf einzelne Worte und Zahlen, sondern auf die Wahl der Typen. Der fortlaufende Text ist oft nicht durch den Druck von Literaturangaben zu unterscheiden, in letzteren hätte durch Typenänderung erkenntlich gemacht werden müssen, wo der Titel aufhört und die kritische Bemerkung des Referenten anfängt. Die Verfassernamen sind bald kursiv, bald antiqua, bald gesperrt, bald fett, bald sehr fett gedruckt. Die Typen wechseln ganz unmotiviert, ebenso die Alinea. Darauf hätte bei der Korrektur geachtet werden müssen. Wenn Herr Simon in dem Vorwort sagt, er sei seinem Freunde E. Lampe für die überaus mühevolle Korrektur verpflichtet, so darf Herr Lampe nicht für die stehengebliebenen Druckfehler verantwortlich gemacht werden; denn er hat nur einige (nicht alle!) Druckbogen durchgesehen und die darin befindlichen Literaturangaben korrigiert und ergänzt.

Zum Schluß der Besprechung des Simonschen Referates müssen wir kurz auf einige historische Irrtümer hinweisen. Auf S. 2 steht: „Das Gesetz der Kontinuität, das Leibniz für seine größte Entdeckung erachtete“: das Gesetz der Kontinuität findet sich schon bei Kepler (1604); s. e. Aufsatz von C. Taylor, Proc. Cambr. Phil. Soc. 4, 14—17, 1880. Wenn Herr Simon in der Voranzeige seines Buches sagt: „Im Artikel 34 ist auf Sorlin als den ersten, der noch vor Gergonne das Gesetz der Kontinuität formuliert hat, hingewiesen“, so meint er das Gesetz der Kausalität. Die Behauptung (S. 3), Pythagoras habe selbst seinen Satz von den Indern entlehnt, hat M. Cantor als zweifelhaft nachgewiesen (s. Arch. Math. Phys. (2) 8, 68—72, 1904). Daß nicht erst Legendre durch seine *Éléments* von 1794 die Parallelenfrage in Fluß gebracht hat, zeigen die 64 (!) Schriften von SACCHERI (1733) bis LEGENDRE, die Herr STÄCKEL in seiner *Theorie der Parallellinien*, Leipzig 1895, aufzählt. S. 61 wird gesagt, das Problem der Quadratur des „Zirkels" habe eine „über 5000jährige Geschichte" (!). S. 105 wird von dem Ottojanoschen Problem gesprochen und erzählt: „Ottojano", damals wenig über 16 Jahre, gab die Lösung, während doch jeder Historiker der Mathematik weiß, daß Ottojano ein Städtchen am Vesuv ist und der Entdecker des Problems GIORDANO (aus Ottojano) war. In einer Fußnote auf S. 67 erzählt Herr SIMON, daß er einige Jahre vor GÖRING im mathematischen Kollegium auf SCHEFFLER, bezw. PROSZ hingewiesen habe. Die GÖRINGsche Konstruktion der Quadratur des Bogens findet sich aber schon bei L. EULER, Novi Commentarii Ac. Petrop. 8, a. 1760—61 [1763]. Man sehe auch die nicht genug bekannten, aber sehr inhaltreichen „Adversaria mathematica" L. EULERS, welche in die *Opera posthuma* 1862 aufgenommen wurden. Auffallend ist, daß Herr SIMON mehrmals (S. 72, 88. 124, 164 etc.) als Quelle Novae Commentationes Ac. Petrop. angibt, statt Novi Commentarii. Publikationen mit ersterem Titel hat die Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften, aber nicht die Petersburger Akademie. Auf di Novi Commentarii (ad. ann. 1747—1775) [1750 - 1776] folgen die Acta Ac. Petrop. (pro ann. 1777—1782) [1778—1786], darauf die Nova Acta (ad ann. 1783—1802) [1787—1806]. Ein Zitat Petrop. T. IX (S. 69) ist also unvollständig. Ebenso (S. 105) Acta Petrop. (1780), denn jeder der 6 Bände der Acta besteht aus zwei besonders paginierten Teilen; z. B. S. 142 muß es statt Acta Petrop. 1, pag. 92 richtig heißen: Acta Petrop. 4, P. I, ad. ann. 1780 [1783], 91—94. Kann nach solchen Zitaten des Herrn SIMON „jeder Interessent die Quelle sofort auffinden"? Zweimal (S. 187 u. S. 209) wird gesagt: „Seit WIENERS Schrift: *Vielecke und Vielflache* (also seit 1864) werden auch die KEPLER-POINSOTschen Polyeder ab und zu den Schülern vorgeführt". SCHELLBACH, O. HERMES, BERTRAM u. a. taten das schon viel früher. Im Jahre 1833 soll (s. S. 240) C. F. SCHULZ die erste deutsche elementare Sphärik seit THEODOSIUS und MENELAOS geschrieben haben. Es gibt frühere deutsche Lehrbücher der Sphärik von CHR. WOLFF, SCHERFFER, PRÄNDEL (1815), v. FORSTNER (1827), GUDERMANN (1830). In der Einleitung zur Trigonometrie (S. 223) findet sich die Bemerkung: „die ebene Trigonometrie . . . und die Polygonometrie . . sind über EULER, L'HUILIER, LEGENDRE, CAGNOLI nicht wesentlich hinausgekommen". Zum Glück wird diese Bemerkung durch das Material auf den folgenden Seiten wiederlegt; wir brauchten sonst nur an LAMBERT, LAGRANGE, DELAMBRE, LACROIX, PFLEIDERER zu denken.

Noch ein paar Worte über die Zeitschriftenquellen, auf deren Bedeutung für die mathematisch-historische Forschung ich wiederholt hingewiesen habe (s. Sitzgsb. der Berl. Math. Ges. **1**, 17—19, 1902, und Atti del congresso internazionale di scienze storiche [Roma 1903] **12**, 105—113, Roma 1904). Hier mag daran erinnert werden, daß Herr VALENTIN für seine in Vorbereitung begriffene mathematische Bibliographie die Anzahl der Einzelwerke auf 35000, die der Journalartikel auf 95000 schätzt. In den vier großen Berichten von BRILL und NÖTHER, FR. MEYER, E. KÖTTER und E. CZUBER, welche die Deutsche Mathematiker-Vereinigung inauguriert hat, werden insgesamt 157 Zeitschriften erwähnt, und das Buch von G. LORIA *Spezielle und transscendente Kurven. Theorie und Geschichte* zitiert 139 Journale. Die Liste der Journale, welche Herr SIMON auf einer besonderen Seite seines Buches bringt, enthält nur 15 Zeitschriften; das sind aber nur die von ihm am häufigsten zitierten Journale. Außer diesen werden im Buche noch andere Zeitschriften angeführt, im ganzen wohl nicht mehr als 80. Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung hat sich wiederholt mit der Frage beschäftigt, wie die Titel der Zeitschriften mathematischen Inhalts abgekürzt werden sollen. Herr SIMON bezeichnet die von ihm am häufigsten zitierten Journale nur mit dem Namen ihrer Begründer oder dem ihrer Nachfolger in der Redaktion, z. B. BATTAGLINI, BOURGET, LAMPE. Eine abkürzende Bezeichnung mit Hülfe von Eigennamen, z. B. BONCOMPAGNI Bull., LIOUVILLE Journ., DARBOUX Bull., hat sich als höchst unpraktisch erwiesen. Das Namenregister des Herrn SIMON zeigt sogar, daß er selbst Person und Zeitschrift verwechselt hat, z. B. bei SCHLÖMILCH und LAMPE. Nach den hauptsächlich von Herrn STÄCKEL angegebenen Prinzipien der Abkürzung habe ich ein Verzeichnis von Zeitschriften mathematischen Inhalts angefertigt, das auf Beschluß der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in den Jahresberichten Bd. **12**, 1903, veröffentlicht wurde. Es ist für die Zitate in der *Encyklopädie* und deren französischer Bearbeitung größtenteils maßgebend geworden. Für eine in Vorbereitung befindliche Neuausgabe dieses Verzeichnisses habe ich die Anzahl der Zeitschriften mathematischen Inhalts auf ca. 1400 gebracht. Nun darf man wohl annehmen, daß Aufsätze oder Artikel über Elementar-Geometrie in allen diesen Zeitschriften zu finden sind. Diese Bemerkung soll wiederum hinweisen auf die ungeheuren Schwierigkeiten, mit denen die Sammlung des Materials für eine Geschichte der Elementar-Geometrie verbunden ist. Beschränkt man sich auf die Arbeiten in dieser Disziplin aus dem XIX. Jahrhundert, so kann man allerdings ca. 200 dieser Zeitschriften entbehren, die vor 1800 entweder ganz eingegangen oder unter einem neuen Titel fortgeführt sind. Es kämen aber immerhin für das XIX. Jahrhundert noch 1200 Zeitschriften in Betracht. Daraus sieht man, daß auch die referierenden Zeitschriften, wie unser Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, das Bulletin des sciences mathématiques, die Revue semestrielle des publications mathématiques, so verdienstvoll sie immerhin sind, auf Vollständigkeit keinen Anspruch machen können.

Geradezu unmöglich ist es für den Einzelnen festzustellen, ob irgend ein Satz, irgend eine Formel, die im XIX. Jahrhundert veröffentlicht wurde, nicht etwa schon in früheren Journalen sich findet. Von besonderer Wichtigkeit für die elementare Mathematik ist eine Reihe von ca. 24 englischen Zeitschriften, beginnend 1704 mit dem berühmten The Ladies Diary, welche zahlreiche mathematische Aufgaben aus der Elementar-Mathematik mit Lösungen und kleinere elementar-mathematische Artikel enthalten. Wie Herr MACKAY (*Notice sur le journalisme mathématique en Angleterre*, C. R. Assoc. Franc. 22, 303—308, 1893) mitteilt, finden sich schon in diesen älteren Zeitschriften zahlreiche Sätze aus der sogenannten Dreiecks-Geometrie. Leider sind diese Journale schwer zugänglich; nur vier von ihnen sind, wie ich durch das Auskunftsbureau an der Königl. Bibliothek zu Berlin erfahren habe, in den öffentlichen Bibliotheken Deutschlands vollständig vorhanden, von drei anderen findet man nur einzelne Bände oder Nummern. Nur selten werden die in älteren Zeitschriften vergrabenen Schätze ans Licht gebracht. Eine vollständige mathematische Bibliographie gibt es noch nicht. Zwar finden sich zahlreiche Zeitschriftenartikel in dem oben (S. 412) angeführten *Repertorium* von REUSS und in POGGENDORFFS *Wörterbuch*, aber auf Vollständigkeit können beide Werke keinen

Anspruch machen. Es wäre ein für die mathematisch-historische Forschung sehr verdienstliches Unternehmen, wenn aus älteren schwer zugänglichen Journalen die mathematische Literatur, mit kurzen Referaten versehen und systematisch geordnet, zusammengestellt würde, wie es z. B. Herr Loria für das Giornale de'letterati d'Italia und die Raccolta Calogerà getan hat (Abh. z. Gsch. d. math. Wiss. 9, 241—274, 1899). Die Gründung eines „Jahrbuches für die *negativen* Fortschritte der Mathematik", wie Herr F. Klein es zu nennen vorschlug, sei hiermit den Fachgenossen, die sich für die Geschichte unserer Wissenschaft interessieren, dringend ans Herz gelegt.

Zweck der vorhergehenden Ausführungen war in erster Linie der, zu zeigen, welche eingehenden Vorstudien, welche umfangreichen Vorarbeiten ein mathematisch-historisches Werk erfordert zumal wenn es ein so umfangreiches Gebiet behandeln will, wie das der Elementar-Geometrie ist. Soll „eine möglichst vollständige Gesamtdarstellung der Elementar-Geometrie nach ihrem gegenwärtigen Inhalt an gesicherten Resultaten", wie sie die *Encyklopädie* verlangt, gegeben werden, so teile man die Arbeit. Nur durch die Beschränkung auf ein kleines, scharf abgegrenztes Gebiet, auf ein spezielles Problem oder eine spezielle Theorie ist dem Einzelnen möglich, das Verlangte auszuführen. Mustergültig in der Herbeischaffung des Materials und in der Verarbeitung desselben ist z. B. die Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie, die Herr P. Stäckel in Gemeinschaft mit Herrn Fr. Engel unter dem Titel: *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss*, Lpz. 1895, veröffentlicht hat. Erst mehrere solcher sorgfältig ausgeführten Vorarbeiten könnten die Bausteine bilden für eine wissenschaftliche Geschichte der Elementar-Geometrie. Durch das Buch des Herrn Simon gewinnen wir nicht ein Bild von der Entwickelung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert. Die einleitenden Bemerkungen zu den einzelnen Abschnitten geben keine Vorstellung von den neuen Ideen in dieser Disziplin, geschweige denn von einer chronologischen Folge der Entdeckungen oder gar von einem Zusammenhang der neuen Ideen, als Glieder der Entwickelung. Hätte Herr Simon das von ihm gesammelte Material dazu verwertet, eine möglichst vollständige, systematisch geordnete Bibliographie der Elementargeometrie im XIX. Jahrhundert herzustellen, so hätte er sich ein größeres Verdienst um die mathematisch historische Forschung erwerben können. Es wäre dadurch wenigstens eine literarische Geschichtsschreibung der Elementar-Geometrie vorbereitet. Eine wissenschaftliche Geschichtsschreibung ist, wie Herr Eneström in einem Aufsatze der Bibl. Math. (3) 2, 1901, 1—4, bemerkt, immer mit fast unüberwindlichen Schwierigkeiten verbunden.

Friedenau. Felix Müller.

# Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

## Autoren-Register.



### a) Zeitschriften. Allgemeines.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8⁰. [1
$7_3$ (1907) : 3.

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8⁰. [2
1906 : 3—4.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben von E. Lampe. Berlin. 8⁰. [3
35 (1904) : 3.

Atti del congresso internazionale di scienze storiche (1903). Volume XII (1904). [Rezension:] Arch. der Mathem. $11_3$, 1906, 127—128. (E. Lampe.) [4

Adreßbuch der lebenden Physiker, Mathematiker und Astronomen, zusammengestellt von Fr. Strobel (1905). [Rezension:] Arch. der Mathem. $11_3$, 1906, 96—97. (E. Jahnke). [5

---

**Cantor, M.,** Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Erster Band. Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. Dritte Auflage. Leipzig, Teubner 1907. [6
8⁰, VI + 941 S. + Taf. — [24 Mk.] — $1^2$ (1894). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. $7_3$, 1907, 282—286. (G. Eneström, A. Sturm.) — $2^2$ (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. $7_3$, 1907, 286—296. (G. Eneström, C. Grönblad.) — $3^2$ (1901). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. $7_3$, 1907, 296—308. (G. Eneström.)

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, herausgegeben von M. Cantor. Vierter Band. Von 1759 bis 1799. Erste Lieferung. Geschichte der Mathematik. Von S. Günther. Arithmetik, Gleichungslehre, Zahlentheorie. Von F. Cajori. Leipzig, Teubner 1907. [7
8⁰, 200 S. — [5.60 Mk.]

**Aubry, A.,** Les logarithmes avant Neper. [8
L'enseignement mathém. 8, 1906, 417—432.

**Fourrey, E.,** Curiosités géométriques. Paris, Vuibert et Nony 1907. [9
8⁰, VIII + 431 S. — Enthält als Einleitung eine „Esquisse de l'histoire de la géométrie élémentaire" (S. 1—32) und außerdem viele Abschnitte historischen Inhalts.

**Loria, G.,** Pour une histoire de la géométrie analytique (1905). [Résumé:] Mathesis $6_3$, 1906, 260—264. (H. Bosmans.) [10

**Teixeira, F. G.,** Tratado de las curvas especiales notables (1905). [Rezension:] *New York,* Americ. mathem. soc., Bulletin $13_2$, 1907, 249—250. (C. H. Sisam.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 9, 1906, 84—86. (G. L.) — Mathesis $7_3$, 1907, 12—13. (J. N.) — Periodico di matem. 22, 1906, 90—95. (E. Nannei.) [11

**Bonola, R.,** La geometria non-euclidea. Esposizione storico-critica del suo sviluppo (1906). [Rezension:] *Porto,* Acad. polytechn., Annaes 1, 1906, 259—260. (G. T.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 9, 1906, 107—109. (U. Amaldi.) [12

**Duhem, P.**, Les origines de la statique. Tome II. Paris, Hermann 1906. [13
8⁰, VIII + 364 S. — Die Seiten 1—290 sind wesentlich ein Sonderabdruck aus der Revue des questions scientifiques publiée par la société scientifique de Bruxelles $8_3$, 1905, 115—201, 508—588; $9_3$, 1906, 115—148, 383—441; $10_3$, 1906, 65—109.

**Kistner, A.**, Geschichte der Physik. 1—2 (1906). [Rezension:] Monatsh. für Mathem. 18, 1907; Lit.-Ber. 23. (St. M.) [14

**Wiedemann, E.**, Über das Experiment im Altertum und Mittelalter. [15
Unterrichtsblätter für Mathem. 1906. 19 S.

***Berry, A.**, Compendio di storia dell' astronomia, tradotto dall' inglese da D. Gambioli. Con due appendici sulle specole e sugli astronomi italiani dei tempi recenti. Riveduto e corretto da E. Millosevich. Roma 1907. [16
8⁰. — [8 lire] — [Rezension:] Periodico di matem. 22, 1907, 191. (Ω.)

**Loria, G.**, Matematica e matematici del Giappone. [17
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 9, 1906, 65—72.

**Hayashi, T.**, On Mr. Mikami's essay and Prof. Harzers remark. [18
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 15, 1906, 586.

**Mansion, P.**, Esquisse de l'Histoire des mathématiques en Belgique. [19
*Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. $11_3$, 1907, 270—285.

## b) Geschichte des Altertums.

***Hilprecht, H. V.**, Mathematical, metrological and chronological tablets from the temple library of Nippur. Philadelphia 1906. [20
8⁰, XVIII + 70 S. + 30 + XV Taf. — [5 doll.] — The Babylonian expedition of the university of Philadelphia. Cuneiform texts. 20 : 1.

**Charlier, L.**, Ein astronomischer Beitrag zur Exegese des Alten Testaments. [21
*Leipzig*, Deutsche Morgenland. Gesellsch., Zeitschr. 58, 1904, 386—394.

**Schmidt, M. C. P.**, Zur Entstehung und Terminologie der elementaren Mathematik (1906). [Rezension:] Berliner philol. Wochenschr. 27, 1907, 202—213. (F. Rudio.) [22

**Tittel, K.**, Mathematik, Mechanik und Astronomie 1902—1905. [23
Jahresber. für Altertumswissensch. 129, 1906, 113—219.

***Borghorst, G.**, De Anatolii fontibus. Berlin 1904. [24
8⁰.

**Heath, T. L.**, The fragment of Anthemius on burning mirrors and the „Fragmentum mathematicum Bobiense". [25
Biblioth. Mathem. $7_3$, 1907, 225—233.

## c) Geschichte des Mittelalters.

**Wiedemann, E.**, Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften. VII. Über arabische Auszüge aus der Schrift des Archimedes über die schwimmenden Körper. VIII. Über Bestimmnug der spezifischen Gewichte. IX. Zu der Astronomie bei den Arabern. [26
*Erlangen*, Physik.-mediz. Sozietät, Berichte 38, 1906, 152—194.

**Wiedemann, E.**, Zur Physik bei den Arabern. [27
Jahrbuch für Photographie (Halle) 1906. 7 S. — Über einen Traktat von Abu Otman Amr ibn Bahr al Gahiz († 869).

**Besthorn, R. O. et Heiberg, J. L.**, Codex Leidensis 399, 1. Euclidis elementa ex interpretatione Al-Hadschdschadschii cum commentariis Al-Narizii. Arabice et latine. Partis II fasciculus I. Köbenhavn, Gyldendal 1905. [28
8⁰, (1) + 148 S.

**Wiedemann, E.**, Ibn al Haitam, ein arabischer Gelehrter. [29
Festschrift für J. Rosenthal (Leipzig, Thieme 1906), 149—178.

**Suter, H.**, Über den Kommentar des Muhammed ben Abdelbaqi zum zehnten Buche des Euklides. [30
Biblioth. Mathem. $7_3$, 1907, 234—251.

**Eneström, G.**, Über zwei angebliche mathematische Schulen im christlichen Mittelalter. [31
Biblioth. Mathem. $7_3$, 1907, 252—262.

**Eneström, G.**, Über die Bezeichnung gewöhnlicher Brüche im christlichen Mittelalter nach der Einführung arabischer Ziffern. [32
Biblioth. Mathem. $7_3$, 1907, 309—310. — Anfrage.

**Duhem, P.**, Etudes sur Léonard de Vinci. Ceux qu'il a lus et ceux qui l'ont lu. Première série. Paris, Hermann 1906. [33
8⁰. VII + (1) + 355 S. — Das meiste ist ein Abdruck aus dem „Bulletin italien".

## d) Geschichte der neueren Zeit.

**Smith, D. E.**, History of modern mathematics. Ed. 4 (1906). [Rezension:] Biblioth. Mathem. $7_3$, 1907, 310—312. (G. Eneström.) [34

**Jackson, L. L.**, The educational significance of sixteenth century arithmetic from the point of view of the present time. New York 1906. [35
8⁰, 232 S. — Teachers college, Columbia university, Contributions to education. No. 8.

**Eneström, G.**, Über die Anfänge der Benutzung von Null als eine wirkliche Größe. [36
Biblioth. Mathem. $7_3$, 1907, 309. — Anfrage.

**Bosmans, H.**, L'algèbre de Jaques Peletier de Mans departie an deus livres (XVIe siècle). [37
*Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. $11_3$, 1907, 117—173.

**Friis, F. R.**, Tychonis Brahei et ad eum doctorum virorum epistolae ex anno 1588 et sequentibus annis. Nunc primum collectae et editae. Fasc. IV — VIII. Köbenhavn, Gad 1903—1906. [38
4°, S. 97—256 + 2 Taf. — [8 Mk.]

***Waard, C. de**, De uitvinding der verrekijkers. Eene bijdrage tot de beschavingsgeschiedenis. 's Gravenhage 1906. [39
8°, VI + 340 S.

**Favaro, A.**, La invenzione del telescopio secondo gli ultimi studi. [40
*Venezia*, Istituto Veneto, Atti 66:2, 1907, 1—54.

**Favaro, A.**, Serie decimasettima di scampoli Galileiani. [41
*Padova*, Accad. d. sc., Atti e memorie 23, 1907, 5—34.

Antiche vite di Galileo scritte da contemporanei, ristampate dalle originali e rare edizioni. Firenze, Barbera 1907. [42
4°, 21 S. — Nozze Favaro-Dolfin.

**Favaro, A.**, Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. XVIII. Raffaello Gualterotti. XIX. Giannantonio Rocca. [43
*Venezia*, Istituto Veneto 66:2, 1907, 119—139, 141—167.

**Duhem, P.**, Le p. Marin Mersenne et la pesanteur de l'air. [44
Revue génér. d. sc. 17, 1906, 769—782, 809—817.

**Eneström, G.**, Die geometrische Darstellung imaginärer Größen bei Wallis. [45
Biblioth. Mathem. $7_3$, 1907, 263—269.

**Geer, P. van**, Christiaan Huygens' reisen studiejaren (1657—1665). [46
De tijdspiegel 1906. 28 S.

**Loria, G.**, Curve piane speciali nel carteggio di C. Huygens. [47
Biblioth. Mathem. $7_3$, 1907, 270—281.

**Mascart, J.**, La découverte de l'anneau de Saturne par Huygens. [48
La revue du mois 1, 1906, 302—314.

**Gerland, E.**, Leibnizens nachgelassene Schriften physikalischen, mechanischen und technischen Inhalts (1906). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin $13_2$, 1907, 252. (F. Cajori.) — Monatsh. für Mathem. 18, 1907; Lit.-Ber. 28. (St. M.) [49

***Tramer, M.**, Die Entdeckung und Begründung der Differential- und Integralrechnung durch Leibniz im Zusammenhange mit seinen Anschauungen in Logik und Erkenntnistheorie. Bern 1906. [50
8°. — [1.50 Mk.] — Berner Studien zur Philosophie und ihrer Geschichte.

**Muir, Th.**, The theory of determinants in the historical order of development. I—II (1906). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin $13_2$, 1907, 244—246. (G. A. Miller.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 9, 1906, 115—116. (G. L.) [51

**Hayashi, T.**, Seki's Daijutsu-bengi and Byodai-meichi. [52
*Tokyo*, Sûgaku-Buturigakkwai, Kizi-Gaiyô 3, 1906, 127—141.

***Ricci, F.**, Paolo Frisi e la composizione dei moti rotatori. [53
Rivista geografica italiana 13, 1906.

**Simon, M.**, Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert (1906). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bullettin $13_2$, 1906, 139—142. (D. E. Smith.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 9, 1906, 103—104. (G. L.) — Mathesis $7_3$, 1907, 44—46. (J. Neuberg.) [54

**Hayashi, T.**, Sur un soi-disant théorème chinois. [55
Mathesis $6_3$, 1906, 257—260.

**Gauss, C. F.**, Werke. Herausgegeben von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen. Siebenter Band. Leipzig (Göttingen), Teubner 1906. [56
4°, (3) + 650 S. — [30 Mk.] — [Bericht:] Götting. gelehrte Anzeigen 1907, 74—77. (Brendel.)

**Klein, F.**, Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauss Werken. VII. [57
*Göttingen*, Gesellsch. d. Wissensch., Nachrichten 1906. 5 S. — [Wieder abgedruckt:] Mathem. Ann. 63, 1907, 333—336.

**Lucas de Pesloüan, Ch.**, N. H. Abel, sa vie et son œuvre (1906). [Rezension:] *Porto*, Acad. polytechn., Annaes 1, 1906, 259. (G. T.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 9, 1906, 109—110. (G. L.) — Bullet. d. sc. mathém. $30_2$, 1906, 323. (J. T.) [58

**Ahrens, W.**, Ein Beitrag zur Biographie C. G. J. Jacobis (1906). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 9, 1906, 127—128. [59

**Müller, Felix**, Karl Schellbach (1905). [Rezension:] Bullet. d. sc mathém. $30_2$, 1906, 317—322. (J. T.) [60

**Muir, Th.**, The theory of alternants in the historical order of development up to 1860. [61
*Edinburgh*, Royal soc., Proceedings 26, 1906, 357—389.

**Muir, Th.**, The theory of circulants in the historical order of development up to 1860. [62
*Edinburgh*, Royal soc., Proceedings 26, 1906, 390—398.

**Königsberger, L.**, Hermann von Helmholtz (1902—1903). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin $13_2$, 1906, 112—114. (E. B. Wilson.) [63

Correspondance d'Hermite et de Stieltjes publiée par les soins de B. Baillaud et H. Bourget. (1905). [Rezension:] L'enseignement mathém. 8, 1906, 491—492. (H. F.) — Monatsh. für Mathem. 18, 1907; Lit.-Ber. 6—7. (W.) [64

**Landau, E.**, Der Integrallogarithmus und die Zahlentheorie. [65
*Palermo*, Circolo matem., Rendiconti 23, 1907, 126—129. — Historische und bibliographische Notizen.

### e) Nekrologe.

Giuseppe **Battaglini** (1826—1894). [66
*Napoli*, Accad. pontaniana, Atti 36, 1907. 64 S. + Porträt [mit Schriftverzeichnis]. (F. Amodeo.)

Gustav **Bauer** (1820—1906). [67
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 54—75, 264 [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (A. Voss.)

Davide **Besso** (1845—1906). [68
Periodico di matem. 22, 1907, 147—156 [mit Schriftverzeichnis]. (R. Marcolongo.)

Ludwig **Boltzmann** (1844—1906). [69
L'enseignement mathém. 8, 1906, 484—485. (E. Kaller.) — Monatsh. für Mathem. 18, 1907, 1—7. (G. Jäger.)

Ernesto **Cesaro** (1859—1906). [70
L'enseignement mathém. 8, 1906, 485; 9, 1907, 5—23 + Porträt (C. Alasia). — Periodico di matem. 22, 1906, 49—53. (F. Amodeo.)

Ugo **Dainelli** (?—1906). [71
Periodico di matem. 22, 1907, 191—192. (G. Frattini.)

Paul **Drude** (1863—1906). [72
Richarz, F., und König, W., *Zur Erinnerung an Paul Drude.* Gießen, Töpfelmann 1906. 8°.

Guido **Hauck** (1845—1905). [73
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1905, 155—164 + Porträt (E. Lampe.) — Monatsh. für Mathem. 18, 1907; Lit.-Ber. 9—10. (Th. Sch.)

Gaston **de Longchamps** (1842—1906). [74
Periodico di matem. 22, 1906, 53—59. (G. Lazzeri.)

Amédée **Mannheim** (1831—1906). [75
L'enseignement mathém. 9, 1907, 66—68. (A. Buhl.) — Nouv. ann. de mathém. $6_4$, 1906, 529.

Gabriel **Oltramare** (1816—1906). [76
Revue génér. d. sc. 17, 1906, 725. (H. Fehr.)

Wilhelm **Schmidt** (1862—1905.) [77
Mitteil. zur Gesch. d. Mediz. und Naturwiss. 5, 1906, 496—497. (S. Günther.)

### f) Aktuelle Fragen.

**Tannery, P.**, Les sociétés savantes et l'histoire des sciences (1906). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 9, 1906, 125—126. [78

Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens. VI. [79
L'enseignement mathém. 8, 1906, 463—475.

**Müller, Conrad H.**, Mathematik. [80
Mitteil. der Gesellschaft für deutsche Erziehungs- und Schulgeschichte 15, 1905. 7 S. — Über die Geschichte der Mathematik als Unterrichtsgegenstand.

A mathematical exhibit of interest to teachers. [81
Science $25_2$, 1907, 232—234. — Über die mathematisch-historische Ausstellung des „Teachers college, Columbia university" in New York.

**Dyck, W. von**, Über die Errichtung eines Museums von Meisterwerken der Naturwissenschaft (1905). [Rezension:] Arch. der Mathem. $11_3$, 1906, 122. (R. Vater.) [82

[Deutsche Mathematiker-Versammlung in Stuttgart 1906.] [83
*New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin $13_2$, 1907, 157—166. (A. B. Frizell.) — L'enseignement mathém. 8, 1906, 480—482.

# Wissenschaftliche Chronik.

### Ernennungen.

— Professor J. Adamczik in Pribram zum Professor der Geodäsie an der deutschen Technischen Hochschule in Prag.

— E. F. Adams in Cambridge, Mass. zum Professor der Physik am „Oberlin college".

— Professor W. Bjerknes in Stockholm zum Professor der mathematischen Physik an der Universität in Kristiania.

— Privatdozent W. Donle in München zum Professor der Physik an der Artillerie- und Ingenieurschule daselbst.

— Privatdozent T. T. Friesendorff in St. Petersburg zum Professor der angewandten Mathematik am elektrotechnischen Institut daselbst.

— Privatdozent E. Holmgren in Upsala zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Professor J. Ch. Hubbard in New York zum Professor der Physik an der „Clark university" in Worcester.

— Professor M. Lerch in Freiburg (Schweiz) zum Professor der Mathematik an der böhmischen Technischen Hochschule in Brünn.

— Dr. R. E. Loving zum Professor der Physik am „Cornell college", Iowa.

— Dr. L. Marchis in Bordeaux zum Professor der allgemeinen Physik an der „Faculté des sciences" daselbst.

— Professor R. Müller in Braunschweig zum Professor der darstellenden Geometrie an der Technischen Hochschule in Darmstadt.

— Privatdozent N. Nielsen in Kopenhagen zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— „Instructor" P. N. Peck an der „George Washington university" zum Professor der Mathematik daselbst.

— Direktor Th. L. Picart in Bordeaux zum Professor der Astronomie an der „Faculté des sciences" daselbst.

— Dr. A. L. Rotch in Cambridge, Mass. zum Professor der Meteorologie an der „Harward university" daselbst.

— Professor C. K. Russian in Lemberg zum Professor der Mathematik an der Universität in Charkow.

— Professor E. Rutherford in Montreal zum Professor der Physik an der „Victoria university" in Manchester.

— Privatdozent A. Schulze in Marburg zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Professor R. Wachsmuth in Berlin zum Leiter der physikalischen Abteilung des Physikalischen Vereins in Frankfurt am Main.

### Todesfälle.

— Wilhelm von Bezold, Professor der Meteorologie an der Universität in Berlin, geboren in München den 21. Juni 1837, gestorben den 17. Februar 1907.

— Alberto Bracciforti, Lehrer der Mathematik in Piacenza, gestorben in Piacenza den 29. September 1906.

— Agnes Mary Clerke, Verfasserin astronomischer Arbeiten, geboren den 10. Februar 1842, gestorben den 22. Januar 1907.

— Ugo Dainelli, Professor der Mathematik am „Istituto tecnico" in Rom, gestorben in Rom im Dezember 1906.

— Enno Jurgens, Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Aachen, geboren in Oberstein den 30. März 1849, gestorben den 5. Januar 1907.

— François Le Roux, früher Professor der Physik an der „Ecole de pharmacie" in Paris, geboren in Paris den 4. Januar 1832, gestorben daselbst im Januar 1907.

— Joseph Lyon, Privatdozent der Mathematik an der Universität in Genf, gestorben in Genf den 26. Januar 1907, 49 Jahre alt.

— E. B. Mc Clellan, Assistent am „Radcliffe observatory" in Oxford, gestorben den 2. Januar 1907, 45 Jahre alt.

— George B. Mc Elroy, früher Professor der Mathematik am „Adrien college", gestorben den 29. Januar 1907, 86 Jahre alt.

— Amédée Mannheim, früher Professor der Geometrie an der „Ecole polytechnique" in Paris, geboren in Paris den 17. Juli 1831, gestorben daselbst den 11. Dezember 1906.

— Jean Abraham Chrétien Oudemans, früher Direktor der Sternwarte in Utrecht, geboren in Amsterdam den 16. Dezember 1827, gestorben den 14. Dezember 1906.

— Arthur William Panton, „lecturer in mathematics" am „Trinity college" in Dublin, geboren 1846, gestorben in Dublin den 18. Dezember 1906.

— Adam Paulsen, Direktor des meteorologischen Instituts in Kopenhagen, geboren in Nyborg den 2. Januar 1833, gestorben in Kopenhagen den 11. Januar 1907.

— Salvatore Porcelli, früher Professor der darstellenden Geometrie am „Istituto tecnico" in Trapani, geboren in Palermo den 11. November 1843, gestorben daselbst den 1. Januar 1907.

— J. Pöschl, Professor der Physik an der Technischen Hochschule in Graz, gestorben 1907, 79 Jahre alt.

— John Krom Rees, Professor der Astronomie an der „Columbia university" in New York, geboren 1851, gestorben den 9. März 1907.

— Henry Chamberlain Russel, Regierungsastronom von New South Wales, geboren in Maitland den 17. März 1836, gestorben 1907.

— Moritz Steinschneider, früher Direktor der jüdischen Töchterschule in Berlin, geboren in Proßnitz (Mähren) den 30. März 1813, gestorben in Berlin den 24. Januar 1907.

— F. P. H. Stirling, Professor der Mathematik am „Christian college" in Madras, gestorben 1907, 26 Jahre alt.

— Anton Sucharda, früher Professor der Mathematik an der böhmischen Technischen Hochschule in Brünn, geboren in Mríčná (Böhmen) den 3. Oktober 1854, gestorben in Prag den 19. Februar 1907.

— Henry Davis Todd, früher Direktor des „Nautical almanac", gestorben in Annapolis den 8. März 1907, 69 Jahre alt.

— August Weilenmann, Professor der Physik am Polytechnicum in Zürich, geboren in Knonau den 9. Januar 1843, gestorben in Zürich den 10. November 1906.

## Vorlesungen über Geschichte der mathematischen Wissenschaften.

— An der Universität in Berlin hat Professor J. Knoblauch für das Sommersemester 1907 eine Vorlesung über Leonhard Eulers Werke und ihre Bedeutung für die neuere Mathematik angekündigt.

— An der Universität in Berlin hat Professor W. Förster für das Sommersemester 1907 eine zweistündige Vorlesung über Geschichte der neueren Astronomie angekündigt.

— An der Universität in Heidelberg hat Privatdozent K. Bopp im Wintersemester 1906—1907 eine Vorlesung über Geschichte der Mathematik bei den Griechen gehalten und für das Sommersemester 1907 eine Vorlesung über Geschichte der Infinitesimalrechnung von Leibniz bis Lagrange angekündigt.

— An der Universität in Leipzig hat Professor H. Zimmern für das Sommersemester 1907 eine Vorlesung über die Astronomie der Babylonier angekündigt.

### Gekrönte Preisschriften.

— *Académie des sciences de Paris.* Des prix ont été décernés à MM. H. Padé, R. de Montessus et A. Auric pour leurs mémoires sur le sujet: „Perfectionner en quelque point important, l'étude de la convergence des fractions continues algébriques".

### Preisfragen gelehrter Gesellschaften.

— *Société hollandaise des sciences à Haarlem.* Concours de l'année 1908. Commet doit-on placer $p_1 N$ sphères de rayon $R_1$ et $p_2 N$ sphères de rayon $R_2$ ($N$ étant un nombre indéterminé) pour qu'ensemble elles occupent un espace aussi restreint que possible? Quelles sont, si elles existent, $p_1$ et $p_2$ étant donnés, les rapports critiques entre $R_1$ et $R_2$ pour lesquels une légère variation de ce rapport exige une disposition tout à fait différente des sphères pour arriver au plus petit espace?

— *Académie des sciences de Paris.* Concours de l'année 1909. L'invariant absolu qui représente le nombre des intégrales doubles distinctes de seconde espèce d'une surface algébrique dépend d'un invariant relatif $\varrho$, qui joue un rôle important dans la théorie des intégrales de différentielles totales de troisième espèce et dans celles des courbes algébriques tracées sur la surface. On propose de faire une étude approfondie de cet invariant, et de chercher notamment comment on pourrait trouver sa valeur exacte, an moins pour des catégories étendues de surfaces.

— *Académie des sciences de Danemark à Kjöbenhavn.* Concours de l'an 1908. Un travail complétant par des résultats nouveaux la théorie d'un plan ou d'une surface algébrique dont les points se correspondent réciproquement.

### Vermischtes.

— An der Universität in Bern hat sich Fräulein Gertrud Woker als Privatdozent für Geschichte der Chemie und Physik habilitiert.

# Namenregister.

Druck von Theodor Hofmann in Gera.