BIBLIOTHECA MATHEMATICA.

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN.

HERAUSGEGEBEN
VON
GUSTAF ENESTRÖM
IN STOCKHOLM.

DRITTE FOLGE. VIERZEHNTER BAND.

MIT DEM BILDNIS VON J. MOLK ALS TITELBILD
SOWIE 55 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1913—1914.

Inhaltsverzeichnis.

Autoren-Register.

Sach-Register.

Allgemeines über Geschichte der Mathematik.

Geschichte des Altertums.

Geschichte des Mittelalters.

Geschichte der neueren Zeit.

Das 1. Heft dieses Bandes	(S. 1— 96)	wurde	am	17.	Februar	1914	ausgegeben.
„ 2. „ „ „	(S. 97—192)	„	„	19.	Mai	„	„
„ 3. „ „ „	(S. 193—288)	„	„	6.	August	„	„
„ 4. „ „ „	(S. 289—378)	„	„	31.	März	1915	„

Die mathematisch-historische Forschung und der mathematisch-historische Schulunterricht.

Von G. Eneström in Stockholm.

1. Schon seit längerer Zeit ist die Ansicht ausgesprochen und begründet worden, daß das Studium der Mathematik durch historische Behandlung des Gegenstandes erleichtert wird und eine natürliche Konsequenz dieser Ansicht ist der seit Jahrzehnten immer lebhaftere Kampf für die Berücksichtigung der Geschichte der Mathematik im Schulunterrichte.[1]) So viel ich weiß, ist man dabei immer so vorgegangen, daß man erst die Gründe, warum die Berücksichtigung des historischen Elementes bei dem mathematischen Schulunterricht nützlich wäre, auseinandergesetzt und daraus ohne weiteres gefolgert hat, daß eine solche Berücksichtigung zu empfehlen sei. Man hat also vorausgesetzt, daß den Schullehrern die nötigen und nützlichen mathematisch-historischen Notizen ohne besonders große Mühe zur Verfügung stehen. Nun ist ja sofort klar, daß die Mathematiklehrer nur ausnahmsweise in der Lage sind, selbständige historische Untersuchungen zu machen, und es ist bekannt, daß an den Universitäten nur ausnahmsweise mathematisch-historischer Unterricht erteilt wird. Diese Umstände sind nicht unbeachtet gelassen worden, sondern man hat eben auf Grund derselben das Vorhandensein gewisser mehr oder weniger ausführlicher Darstellungen der Geschichte der Mathematik hervorgehoben und die Sache dadurch als erledigt betrachtet. Nicht einmal die Frage, ob und bis zu welchem Grade die historischen Notizen, die der Mathematiklehrer seinen Schülern bieten soll, korrekt zu sein brauchen, hat man eingehend untersucht. Und doch scheint mir diese Frage aus ganz besonderen Gründen von wesentlicher Bedeutung zu sein. Wenn es sich um ein Lehrfach, wie z. B. die lateinische Sprachlehre, handelt, die seit Jahrhunderten wissenschaftlich behandelt worden ist, wäre es natürlich durchaus überflüssig, zu untersuchen, ob die Schullehrer selbst sich die Kenntnisse verschaffen können, die sie den Schülern mitteilen sollen. Die wichtigsten dieser Kenntnisse müssen sie ja schon be-

1) Vgl. P. Treutlein, *Das geschichtliche Element im mathematischen Unterrichte der höheren Lehranstalten,* Braunschweig 1890. — M. Gebhardt, *Die Geschichte der Mathematik im mathematischen Unterrichte der höheren Schulen Deutschlands,* Leipzig 1912.

sitzen, bevor sie Lehrer werden können, und jedenfalls wäre es unsinnig vorauszusetzen, daß ein Lehrer nicht ohne Mühe ausfindig machen könnte, ob „ich hatte" lateinisch „habevi" oder „habui" heißt. Allein in betreff der Geschichte der Mathematik liegt die Sache ganz anders. Die meisten Bearbeiter dieser Wissenschaft sind entweder schlechthin Dilettanten oder nur auf sehr beschränkten Gebieten derselben sachkundig gewesen, und abgesehen von diesen Gebieten sind ihre Angaben und Urteile nur mit großer Vorsicht zu benutzen. Wie ich mehr als einmal in den Leitartikeln der einzelnen Bände dieser Zeitschrift hervorgehoben habe, enthalten darum die meisten mathematisch-historischen Handbücher eine recht große Zahl von mehr oder weniger groben Fehlern, und in der Regel ist dies um so mehr der Fall, je ausführlicher die Darstellung des Handbuches ist. Aber gerade solche ausführliche Handbücher braucht der Schullehrer in erster Linie, weil die Kompendien der Geschichte der Mathematik nur wenige Angaben über die Entwicklung der Elementarmathematik während der neueren Zeit bringen. Die ersten Fragen, die erledigt werden müssen, sind also: Braucht der Mathematiklehrer überhaupt irgendein Gewicht darauf zu legen, daß seine historischen Angaben korrekt sind? Und wenn diese Frage mit Ja zu beantworten ist, bis zu welchem Grade müssen die fraglichen Notizen korrekt sein?

2. Nimmt man lediglich auf die Gründe Bezug, die für die Berücksichtigung der Geschichte der Mathematik im Schulunterrichte angeführt worden sind, wird man vielleicht geneigt, die erste Frage mit Nein zu beantworten. Als Hauptgrund für die Berücksichtigung ist wohl ziemlich einstimmig hervorgehoben worden, daß der mathematische Unterricht wesentlich durch den Einblick in den Werdegang der Mathematik erleichtert wird, und daß das an sich abstrakte Lehrfach dadurch auch für die Mehrzahl der Schüler angenehmer erscheint. Aber für diesen Zweck braucht ja ein phantasiereicher Lehrer die Geschichte der Mathematik nur ganz oberflächlich studiert zu haben; das meiste, das er den Schülern bieten will, kann er dann selbst nach Belieben einschalten oder hinzufügen, und das Phantasiebild der Entwicklung der Elementarmathematik, das er auf diese Weise bekommt, kann sogar ansprechender als die Darstellung der wirklichen Entwicklung werden. Denken wir uns zum Beispiel, daß er seinen Schülern Auskunft über die älteren Zeichen für unbekannte Größen geben will, und daß er nur folgendes ausfindig gemacht hat:

1. Diofantos selbst hat vielleicht die Unbekannte durch ein Kompendium für die zwei ersten Buchstaben des Wortes ἀριθμός bezeichnet und in den bis auf unsere Zeit aufbewahrten Handschriften seiner Arithmetik sieht das Kompendium so aus, daß es sehr einem Schlußsigma ähnelt.[1])

1) Siehe T. L. Heath, *Diophantus of Alexandria*, Cambridge 1910, S. 32—37.

— 2. Die arabischen Mathematiker nannten gewöhnlich die Unbekannte „šai“, das Sache bedeutet.[1]) — 3. Im christlichen Mittelalter wurde zuweilen der Anfangsbuchstabe š des fraglichen arabischen Wortes durch x transkribiert.[2]) — 4. Einige Mathematiker der Renaissance benutzten für die Unbekannte ein Zeichen, das in den Handschriften und später in den Druckschriften die Form ꝛc bekam.[3]) — 5. Descartes wendet für diesen Zweck eben den Buchstaben x an.[4])

Unter Bezugnahme auf diese Tatsachen konnte der Schullehrer das folgende Bild der historischen Entwicklung der fraglichen Bezeichnungsweise konstruieren:

> Als Zeichen für die unbekannte Größe benutzte Diofantos ein Zeichen, dessen Form und Bedeutung nicht mit Sicherheit ermittelt werden kann, aber von den Abschreibern seiner Arithmetik oft als ein Schlußsigma gedeutet wurde Die arabischen Mathematiker, denen das wahre Diofantische Zeichen unbekannt war, nannten, um ihre Unkenntnis hervorzuheben, die Unbekannte ganz einfach Sache (arabisch „šai“). Da nun dies arabische Wort im christlichen Mittelalter mit gewöhnlichen lateinischen Buchstaben „xai“ geschrieben wurde, wählten die Mathematiker der Renaissance als Zeichen der Unbekannten eben den Buchstaben x, aber die Abschreiber und nach ihnen die Buchdrucker gaben dem Zeichen die Form ꝛc. Erst Descartes entdeckte die Bedeutung des Zeichens und gab demselben definitiv die wahre Form x.

Wenn man als Zweck der Berücksichtigung des historischen Elements aufstellt, den mathematischen Schulunterricht leichter und angenehmer zu machen, dürfte die obige, **wesentlich falsche**[5]) historische Darstellung wenigstens ebenso gut wie die korrekte sein.

Untersucht man auch die übrigen Gründe, aus denen man die fragliche Berücksichtigung empfohlen hat, findet man, daß der wesentliche Zweck ebenfalls erreicht werden kann, auch wenn die historischen Angaben zum großen Teil unrichtig sind. Beispielsweise hat man darauf aufmerksam gemacht, daß unter den Personen, die von der Nachwelt als große Männer gewürdigt werden, eben die Mathematiker eine allzu untergeordnete Stelle einnehmen. Aber die Schüler können ja einen großen Mathematiker würdigen lernen, auch wenn die Angaben über seine Ver-

---

1) Siehe z. B. F. Wöpcke, *L'algèbre d'Omar Alkhayyami*, Paris 1851, S. 6; *Extrait du Fakhrî*, Paris 1853, S. 48. — H. Suter, *Das Rechenbuch des Abu Zakarija el-Hassar;* Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, S. 32.

2) Siehe P. de Lagarde, *Woher stammt das x der Mathematiker?* Götting. gelehrte Nachr. 1882, S. 409—413. Vgl. G. Eneström, *Sur l'origine du symbole x employé comme signe d'une quantité inconnue;* Biblioth. Mathem. 1885, Sp. 41—44.

3) Siehe z. B. E. Wappler, *Zur Geschichte der deutschen Algebra im 15. Jahrhundert,* Zwickau 1887, S. 6. Chr. Rudolff, *Behend vnnd hubsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre*, Straßburg 1525, Bl. D 2v.

4) Descartes, *La géométrie,* Ausgabe Paris 1886, S. 6.

5) Vgl. z B. G. Eneström, Biblioth. Mathem. 6_3, 1905, S. 316—317, 405—406.

dienste nicht besonders zuverlässig sind. Sagt man ihnen z. B., daß Hermite die Transzendenz der Zahl π endgültig und einwandfrei bewiesen hat, so ist dieser Ausspruch tatsächlich ungenau, aber für die gebührende Würdigung des großen Mathematikers ist dieser Umstand recht belanglos.

Sieht man dagegen von dem besonderen Zweck des mathematisch-historischen Schulunterrichts ab, bekommt die Frage: „Braucht man bei diesem Unterricht überhaupt irgendein Gewicht auf korrekte Angaben zu legen?“ eine ganz andere Bedeutung. Es ist nämlich an sich klar, daß ein historischer Unterricht, wobei nicht korrekte Angaben mitgeteilt werden, eigentlich kein Unterricht im wahren Sinne des Wortes ist, ebensowenig wie eine falsche Münze in Wirklichkeit eine Münze ist. Jedenfalls ist man also berechtigt, ohne weitere Untersuchung zu behaupten: Von rein prinzipiellem Gesichtspunkte aus muß großes Gewicht darauf gelegt werden, daß die mathematisch-historischen Angaben, die die Schullehrer mitteilen, richtig sind, und eigentlich sollte ihnen verboten werden, andere Angaben zu bringen. Nun verhält es sich indessen oft so, daß ein Ausspruch, der prinzipiell einwandfrei ist, unter Bezugnahme auf die tatsächlichen Verhältnisse mehr oder weniger modifiziert werden muß, und aus diesem Grunde sollen wir uns jetzt mit der zweiten Frage beschäftigen.

3. Daß jeder historische Unterricht fast unmöglich wäre, wenn man von demselben forderte, daß sein Inhalt für alle Zeiten vollständig richtig bliebe, liegt in der Natur der Sache, und besonders gilt die Bemerkung augenblicklich in betreff des mathematisch-historischen Unterrichts, weil die exakte Forschung auf dem mathematisch-historischen Gebiete noch recht jung ist. Allerdings könnte der Mathematiklehrer die historischen Notizen, die er bringen will, so formulieren, daß er sich ausdrücklich auf seine Quelle beruft, und nur beansprucht, seine Notizen daraus richtig entnommen zu haben. Bei dem privaten Studium und vielleicht auch für den Universitätsunterricht könnte dieses Verfahren als Notbehelf geduldet werden, aber für den Schulunterricht paßt es meines Erachtens nicht. Die wenigen Stunden, die in der Schule dem mathematischen Lehrfache zugewiesen worden sind, dürfen nicht für einen Unterricht dieser Art verwendet werden; nur unter der Voraussetzung, daß die Quellen, worauf der Lehrer sich beruft, die neuesten und zuverlässigsten Resultate der wissenschaftlichen Forschung enthalten, kann das Verfahren gebilligt werden. Warum sollte übrigens gerade in betreff der Mathematik eine solche minderwertige Unterrichtsart zur Anwendung kommen dürfen? Man denke sich nur einen Lehrer für französische Sprache, der seinen Schülern sagt: die Worte „ich bin gewesen“ sollte man eigentlich französisch durch „je suis été“ wiedergeben, obgleich ich in einer französischen Sprachlehre die Worte durch „j'ai été“ übersetzt gefunden habe! Man werfe nicht ein, daß etwas Ähnliches nicht aus den vorhandenen mathematisch-historischen Handbüchern entnommen werden kann; in Wirklichkeit gibt es in einer oft gelobten Geschichte der Mathematik zahlreiche Behauptungen, die ebenso fehlerhaft sind wie die Übersetzung „je suis été“.

Beiläufig bemerke ich, daß es für den ganzen Schulunterricht schädlich sein kann, wenn die Schüler erfahren, daß in verschiedenen Schulen oder sogar von verschiedenen Mathematiklehrern derselben Schule einander widersprechende Angaben mitgeteilt werden, z. B. in einer Schule, daß das x als Zeichen für eine unbekannte Größe zuerst von Descartes eingeführt wurde, in einer anderen Schule aber, daß das Zeichen mit derselben Bedeutung schon in Schriften aus dem 15. Jahrhundert vorkommt.

Durch die vorhergehenden Ausführungen glaube ich in aller Kürze die Ansicht begründet zu haben, daß die Schullehrer nur die zuverlässigsten Resultate der neuesten mathematisch-historischen Forschung mitteilen sollen, und die nächste Frage wird: Haben die Schullehrer zur Verfügung Arbeiten, die diese Resultate enthalten?

4. Die Arbeit, an die man bei der Beantwortung dieser Frage in erster Linie denken sollte, ist meiner Ansicht nach die *Geschichte der Elementarmathematik in systematischer Darstellung* (Leipzig 1902—1903) von J. Tropfke. Über den Wert dieser Arbeit habe ich mich schon teils in zwei ausführlichen Rezensionen, teils im Leitartikel des vorhergehenden Bandes dieser Zeitschrift[1]) ausgesprochen und ich habe nichts Weiteres hinzuzufügen. Die zuverlässigsten Resultate der neuesten mathematisch-historischen Forschung kann die Arbeit nicht überall enthalten, da sie schon vor mehr als 10 Jahren veröffentlicht wurde, und die Forschung während der letzten Zeit eine ganze Menge älterer Angaben berichtigt oder wesentlich ergänzt hat. Anderseits bringt sie natürlich eine sehr große Zahl von Angaben, die noch als exakt zu betrachten sind, aber diese Angaben können die Schullehrer im allgemeinen nicht von den anderen unterscheiden.

In zweiter Linie sollten wohl die Cantorschen *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* in Betracht kommen. Allerdings will Cantor die Entwicklung der ganzen Mathematik schildern, und darum spielt in den letzten Bänden seiner Arbeit die Geschichte der Elementarmathematik eine recht untergeordnete Rolle. Außerdem ist seine Arbeit in erster Linie eine Geschichte der Mathematiker und ihrer Schriften, so daß die Entwicklung der Theorien oft recht unvollständig dargestellt wird. Nichtsdestoweniger bringt Cantor eine beträchtliche Zahl von Notizen zur Geschichte der Elementarmathematik, die Tropfke wegen der konzentrierten Form seiner

1) Siehe G. Eneström, *Wie kann die weitere Verbreitung unzuverlässiger mathematisch-historischer Angaben verhindert werden?* Biblioth. Mathem. **13**$_3$, 1912/13, S. 12 und die daselbst in der Fußnote 3 zitierten Stellen.

Darstellung übergehen mußte. Leider hat es sich herausgestellt, daß Cantor teils wegen seiner ungenügenden mathematischen und mathematisch-historischen Kenntnisse, teils wegen seiner unbefriedigenden Arbeitsmethode recht unzuverlässig ist[1]), so daß seine Angaben nur mit größter Vorsicht zu benutzen sind. Darum müssen die Schullehrer davor gewarnt werden, sich auf die *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* zu verlassen, wenn sie sich korrekte Auskunft über die Geschichte der Elementarmathematik verschaffen wollen.

Außer den zwei soeben genannten Arbeiten gibt es auch viele Kompendien der Geschichte der Mathematik sowie verschiedene spezielle Werke (darunter auch einige Zeitschriften) mathematisch-historischen Inhalts, die der Mathematiklehrer benutzen könnte. Allein die Kompendien sind für seinen Zweck allzu unvollständig; aus den Monographien und Zeitschriftenartikeln können allerdings nützliche Angaben entnommen werden, denn in ihnen sind eben die zuverlässigsten Resultate der neuesten Forschung enthalten, aber nur wenige Lehrer können Zeit und Lust haben, diese Schriften zu Rate zu ziehen; die Schriften in italienischer Sprache dürften übrigens vielen deutschen Lehrern schwer verständlich sein. Die dritte Frage muß also augenblicklich mit Nein beantwortet werden.

5. Aus den Antworten auf die von mir gestellten drei Fragen dürfte ersichtlich sein, daß die Voraussetzung, die man stillschweigend gemacht, als man die Berücksichtigung des historischen Elementes im mathematischen Schulunterricht empfohlen hat, hinfällig wird, und daß darum die Gründe, die für die fragliche Berücksichtigung angeführt wurden, bis auf weiteres nicht stichhaltig sind. Auf der anderen Seite gibt es ja Schullehrer, die selbst als Forscher auf dem mathematisch-historischen Gebiete wirksam sind, und für diese hat der Umstand, daß meine dritte Frage mit Nein beantwortet worden ist, keine entscheidende Bedeutung. Ebenso gibt es historische Angaben, die die meisten Mathematiklehrer ohne besonders große Mühe auf ihre Richtigkeit prüfen können, und solche Angaben können sie natürlich ohne Ungelegenheit ihren Schülern mitteilen. Allein für eine durchgeführte Berücksichtigung des historischen Elementes im mathematischen Schulunterrichte ist die Zeit noch nicht gekommen, und meiner Ansicht nach würde augenblicklich ein Versuch in dieser Richtung schädlich sein, nicht nur für den Schulunterricht sondern auch für die mathematisch-historische Forschung. Man müßte nämlich auf diese Weise in weiten Kreisen eine ganz unrichtige Vorstellung von dem wissenschaftlichen Gehalte der neuesten Forschung auf diesem Gebiete bekommen, weil die Arbeiten, die die Schullehrer ohne allzu große Mühe benutzen können, nur ausnahmsweise den heutigen Stand dieser

1) Siehe G. Eneström, *Wie kann die weitere Verbreitung unzuverlässiger mathematisch-historischer Angaben verhindert werden?* Biblioth. Mathem. 13_3, 1912/13, S. 2—12.

Forschung repräsentieren.[1]) Darum verfuhr man meines Erachtens in Schweden vor fünf Jahren ganz richtig, als neue methodische Anweisungen für den Gymnasialunterricht zusammengestellt wurden. Ursprünglich beabsichtigte man, in betreff des mathematischen Lehrfaches die Mitteilung historischer Notizen besonders zu empfehlen. Indessen nahm man nach näherer Untersuchung von der Einführung einer solchen Empfehlung Abstand, eben weil man nicht voraussetzen konnte, daß die schwedischen Gymnasiallehrer durch eigene Forschungen ausfindig machen würden, inwieweit die Angaben der mathematisch-historischen Handbücher richtig seien, und weil man der Ansicht war, daß das Verzichten auf historische Notizen der Mitteilung unzuverlässiger Angaben vorzuziehen sei.

6. Wer lebhaft überzeugt ist, daß der mathematische Schulunterricht durch Mitteilung historischer Notizen wesentlich befördert wird, kann natürlich nicht damit befriedigt sein, daß auf die Dauer keine durchgeführte Berücksichtigung des historischen Elementes stattfindet. Er muß vielmehr sich überlegen, wie die Hindernisse für eine solche Berücksichtigung sobald als möglich beseitigt werden sollen, und zwar dadurch, daß man den Mathematiklehrern die korrekten historischen Aufschlüsse, die sie brauchen, zugänglich macht.

---

1) Es ist darum zu bedauern, daß Gebhardt in seiner oben zitierten Abhandlung (S. 124) in erster Linie seinen Kollegen die Cantorschen *Vorlesungen* empfiehlt. Noch bedauerlicher ist die Ausdrucksweise, deren er sich dabei bedient: „Voranstellen möchte ich unseren Altmeister M. Cantor. Es müßte jeder zum mindesten einige Abschnitte aus dessen großem, in seltenem Grade vollständigen vierbändigen Werke: „Vorlesungen über Geschichte der Elementarmathematik (!!)“ im Zusammenhange studiert haben.“ Allerdings fügt Gebhardt hinzu, daß Berichtigungen, die sich aus neueren Forschungen ergeben, in der Bibliotheca Mathematica veröffentlicht werden, und dadurch kann ja der Schullehrer wenigstens ersehen, daß die *Vorlesungen* nicht durchaus zuverlässig sind. Allein, daß die Arbeit von falschen Angaben und schiefen Urteilen wimmelt, die von den mangelhaften Kenntnissen und der unbefriedigenden Arbeitsmethode des Verfassers herrühren, kann man natürlich nicht aus dem Gebhardtschen Ausspruche erraten. Ein wenig irreleitend ist auch der Schreibfehler „Elementarmathematik“ statt „Mathematik“, sowie der Ausspruch „in seltenem Grade vollständig“. Auf Grund des Schreibfehlers muß der Schullehrer annehmen, daß die *Vorlesungen* eben für seinen Zweck angepaßt sind, was ja gar nicht der Fall ist, und auch der soeben zitierte Ausspruch gibt eine unrichtige Vorstellung von der empfohlenen Arbeit. In Wirklichkeit sollte man wenigstens „ausführlich“ statt „vollständig“ setzen, denn die Cantorschen *Vorlesungen* sind im Grunde sehr lückenhaft und was für den nicht Sachkundigen als Zeichen der Vollständigkeit erscheint, erklärt sich zum großen Teil dadurch, daß Cantor nicht selten Angaben über recht unbedeutende Sachen bringt, die eigentlich in eine weit ausführlichere Darstellung gehören sollten. Nun ist allerdings Gebhardt keine Autorität auf dem mathematisch-historischen Gebiete, aber seine Abhandlung ist vom Deutschen Unterausschusse der internationalen mathematischen Unterrichtskommission herausgegeben worden, und hat dadurch sozusagen ein offizielles Gepräge bekommen.

Meiner Ansicht nach wäre der beste Ausweg, ihnen direkt das Quellenmaterial zu bieten, worauf sich die zuverlässigsten Resultate der neuesten mathematisch-historischen Forschung stützen. Man sollte also möglichst kurze Auszüge aus den eigentlichen Quellenschriften anfertigen, denselben wenn nötig Übersetzungen in deutscher Sprache beifügen und dieses Material systematisch oder chronologisch ordnen. Allein da das direkte Quellenstudium auf dem mathematisch-historischen Gebiete oft recht schwer ist[1]), müssen im Bedarfsfalle Erläuterungen gebracht werden.

Man könnte vielleicht wundernehmen, daß ich nicht die Bearbeitung eines neuen Handbuches der Geschichte der Elementarmathematik befürwortet habe. In Wahrheit würde wohl ein solches denselben Nutzen mit sich führen, wie eine Exzerptensammlung mit Erläuterungen, vorausgesetzt daß im Handbuche die Belege für die Richtigkeit der Darstellung gebracht werden. Die Bemerkung ist nicht unrichtig, aber meiner Ansicht nach erzielt man durch die von mir vorgeschlagene Anordnung, daß die Schullehrer sich gewöhnen, die Auszüge aus den Quellen als die Hauptsache zu betrachten und die Erläuterungen zu Rate ziehen, nur wenn die Auszüge ihnen keine hinreichende oder klare Auskunft bieten. Bringt man dagegen erst eine zusammenhängende Darstellung und dann als Belege die Auszüge, liegt die Gefahr nahe, daß die Lehrer diese als etwas Nebensächliches betrachten und darum oft unterlassen, von denselben Kenntnis zu nehmen. Wenn man also schon durch die Anordnung die Belege hervorhebt, lernen die Lehrer auch allmählich, sich nicht kritiklos auf die Angaben der vorhandenen Handbücher zu verlassen, und um dies noch besser zu bewirken, wäre es vielleicht angebracht, gelegentlich Anmerkungen einzuschalten, worin auf die Fehler der fraglichen Handbücher aufmerksam gemacht wird.

Die Idee der Arbeit, deren Anfertigung ich jetzt angeregt habe, ist nicht ganz neu, denn in Wirklichkeit handelt es sich um ein mathematisch-historisches Lesebuch, und nicht nur ist der Nutzen solcher Lehrbücher schon früher hervorgehoben worden, sondern es gibt schon einige solche.[2])

Selbstverständlich sollten auf Grund neuer Forschungen gewisse Auszüge früher oder später in Fortfall kommen und andere hinzugefügt werden, so daß die Arbeit allmählich veraltet wird. Allein, wenn man annehmen darf, daß jeder Mathematiklehrer sich ein Exemplar derselben verschafft, werden auch allmählich neue Auflagen nötig werden, so daß der Inhalt von Zeit zu Zeit mit dem Stande der neuesten mathematisch-historischen Forschung in Übereinstimmung gebracht werden kann.

1) Siehe G. Eneström, *Über die Bedeutung von Quellenstudien bei mathematischer Geschichtsschreibung*; Biblioth. Mathem. 12_3, 1911/12, S. 2—8.

2) Vgl. Gebhardt, a. a. O. S. 128—132.

Zur Entdeckungsgeschichte des Irrationalen.

Von Heinrich Vogt in Breslau.

Inhaltsverzeichnis.

Überblick und Plan.

In drei inhaltreichen Veröffentlichungen[1]), deren erste an meinen Aufsatz *Die Entdeckungsgeschichte des Irrationalen nach Plato und anderen Quellen des 4. Jahrhunderts*[2]) anknüpft, hat Herr H. G. Zeuthen seine neuerdings gewonnene Auffassung der Entdeckungsgeschichte des Irrationalen zur Darstellung gebracht. Die Hauptpunkte seiner Theorie denke ich in Kürze folgendermaßen richtig wiederzugeben:

Die ersten Pythagoreer, ja höchstwahrscheinlich Pythagoras selbst haben nicht nur den Quadratsatz bewiesen, sondern auch die Irrationalität der Quadratdiagonale ($\sqrt{2}$) entdeckt und auf die von Aristoteles überlieferte Weise bewiesen. Diese Entdeckung blieb nicht isoliert, sondern gewann sofort eine weittragende Bedeutung. Im Anschluß an $\sqrt{2}$ wurde

1) A. *Sur la constitution des livres arithmétiques des éléments d'Euclide et leur rapport à la question de l'irrationalité*; in Oversigt over det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger 1910, S. 395—435.

B. *Praecisionsmathematikens Tilbliven fra Pythagoras til Euklid*; in Beretning om den anden Skandinaviske Mathematikerkongres i Kjöbenhavn 1911 (Kopenhagen 1912), S. 3—13.

C. *Die Mathematik im Altertum und im Mittelalter*; in „Kultur der Gegenwart" III: 1, Leipzig 1912 (95 S.).

Ich werde diese drei Abhandlungen im folgenden kurz mit A, B, C bezeichnen. In Betracht kommt ferner: *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*, Kopenhagen 1896. Ich zitiere dies Werk kurz als: *Gesch.*

2) Biblioth. Mathem. 10_3, 1909/10, S. 97—155.

sogleich die Irrationalität aller Quadratwurzeln aus nichtquadratischen Zahlen erkannt und durch Erweiterung des für $\sqrt{2}$ geführten Beweises begründet. Kann $\sqrt{2}$ nicht ein Bruch sein, weil sonst dieselbe Maßzahl zugleich den Faktor 2 enthalten und nicht enthalten, also zugleich gerade und ungerade sein müßte, so kann $\sqrt{3}$ kein Bruch sein, weil dieselbe Zahl sonst den Faktor 3 enthalten und nicht enthalten müßte. Damit wurde die Erkenntnis der Irrationalität der Ausgang und die treibende Kraft für die Entwicklung des mathematischen Systems der Pythagoreer, besonders ihrer eigenartigen Geometrie. Nach der Entdeckung des Irrationalen „konnte man eine exakte Mathematik nicht durch Rechnungen mit ganzen Zahlen aufbauen. Entschlossen griffen die Pythagoreer deswegen dazu, ihr in der Geometrie eine neue Grundlage zu geben" (C, S. 38). Das Streben nach Bewältigung und, wo diese nicht gelang, nach Umgehung des Irrationalen, führte sie zu ihrer geometrischen Algebra, speziell zur konstruktiven Lösung der quadratischen Gleichung durch ihre Rechtecks- und Gnomon-Antragung. Daß es ihnen nicht gelang, alle Konsequenzen aus ihrer Entdeckung zu ziehen, beweisen die gegen sie gerichteten Paradoxa des ZENO. Seinen Gipfel und Abschluß fand das aus der Entdeckung des Irrationalen entsprungene Bemühen erst im Grundsatz des EUDOXUS und in den Elementen EUKLIDS. Zwischenstationen aber waren die Arbeiten THEODORS und THEAETETS. THEODOR von Kyrene hat den allgemeinen Beweis für die Inkommensurabilität der Quadratwurzeln mit der Einheit durch konsequente Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Teilers in geometrischer Form geführt. THEAETET von Athen hat diesen Weg verlassen. Er ist auf den alten pythagoreischen Beweis zurückgegangen und hat diesem volle Strenge durch den Nachweis der Eindeutigkeit der Zerlegung einer Zahl in Primfaktoren, die man bisher für selbstverständlich gehalten hatte, gegeben. Er ist der geistige Schöpfer der arithmetischen Bücher in EUKLIDS Elementen. Der Zusammenhang dieser Bücher mit der Theorie des Irrationalen liegt in der Anwendung von VIII, 11 im Korollar zu X, 9. Die Leistung EUKLIDS, speziell seine Eigenarbeit in der Theorie des Irrationalen, sind wir nicht imstande streng von der seiner Vorgänger zu trennen. Doch „ist man geneigt, sie vorzüglich in den am ausführlichsten ausgearbeiteten Abschnitten zu suchen, nämlich in der Klassifikation der irrationalen Größen im zehnten Buche . . . und in der Anwendung dieser Klassifikation auf die regulären Polyeder im dreizehnten Buche" (C, S. 49).

Dieses Bild der Entdeckungsgeschichte des Irrationalen tritt in wesentlichen Zügen in starken und bewußten Gegensatz zu dem von Herrn G. JUNGE[1])

---

1) G. JUNGE, *Wann haben die Griechen das Irrationale entdeckt?* in Novae Symbolae Joachimicae, Halle 1907; auch Sonderabdruck.

und mir[1]) entworfenen: darnach haben nicht Pythagoras und nicht die ersten, sondern die späteren Pythagoreer die Irrationalität der Quadratdiagonale, und zwar als einer anscheinend isolierten Tatsache erkannt. Die allgemeine Irrationalität der Quadratwurzeln aus nichtquadratischen Zahlen hat erst Theodor von Kyrene entdeckt und durch Verallgemeinerung des von den Pythagoreern für $\sqrt{2}$ geführten Beweises dargetan. Theaetet hat die Klassifikation der quadratischen Irrationalen begonnen; Euklid hat sie vollendet und die Theorie durch volle Ausnutzung des Eudoxischen Prinzips zu Ende geführt.

Wer die Wahrheit in einer schwierigen historischen Frage sucht, dem pflegen sich einzelne Beweismomente darzubieten, welche unzweideutig eine bestimmte Auffassung begründen und sich einer anderen Deutung durchaus nicht fügen. Sieht man sie allein an, so scheint ein Zweifel an der Richtigkeit der Theorie, deren Grundlagen und Stützen sie sind, ausgeschlossen. Ich will sie Beweismomente erster Ordnung nennen. Neben ihnen finden sich Momente zweiter Ordnung, gewissermaßen neutraler Art, welche sich jener Theorie ohne Widerstreben fügen, aber auch der entgegengesetzten nicht widersprechen. Sie geben der Darstellung Fülle, liefern aber mehr subjektive Überzeugung als objektive Beweiskraft. Endlich finden sich Instanzen einer dritten Art. Sie widersprechen, unbefangen angesehen, der aufgestellten Theorie; es sind die Argumente erster Ordnung der entgegengesetzten Auffassung. Die Einheitlichkeit der ersten Theorie kann nur trotz ihnen gewahrt werden, indem entweder ihre Glaubwürdigkeit widerlegt oder ihre Bedeutung durch Ersinnen von anderen Deutungsmöglichkeiten und Zusammenhängen abgeschwächt wird.

Was bei dem für alle gleichen Tatbestande den einzelnen zur Entscheidung nach der einen oder der anderen Seite treibt, können sachliche, zufällige, persönliche Momente der verschiedensten Art sein. Es kann die erste Darstellung des Streitfalles, auf die er gestoßen ist, ihn gefangen genommen und zur Partei für oder wider gemacht haben; Argumente, die er selbst entdeckt hat, werden mit besonderer Kraft auf ihn wirken; der eine kann großen Persönlichkeiten, der andere der Gesamtheit von vielen Einzelleistungen das größere Gewicht beilegen; es können in Fragen aus der Geschichte der Mathematik auf den einen literarische Zeugnisse, auf den andern die Konstruktion mathematischer Zusammenhänge überzeugen-

1) *Haben die alten Inder den Pythagoreischen Lehrsatz und das Irrationale gekannt?*; Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/7, S. 6—23. — *Die Geometrie des Pythagoras*; Biblioth. Mathem. 9_3, 1908/9, S. 15—54 — *Die Entdeckungsgeschichte des Irrationalen nach Plato und anderen Quellen des 4. Jahrhunderts*; Biblioth. Mathem. 10_3, 1909/10, S. 97—155.

der wirken; endlich können rein persönlich-psychische Eigenheiten und Neigungen den Ausschlag geben.

Die Entdeckungsgeschichte des Irrationalen, wie sie sich Herrn ZEUTHEN und wie sie sich mir darstellt, sehe ich als ein Beispiel an für die verschiedene Auffassung derselben Vorgänge je nach dem Gewicht, welches man diesen oder jenen Argumenten beimißt. Ich will im folgenden die Gründe, welche für die eine oder die andere Theorie ins Feld geführt werden, natürlich von meinem Standpunkte aus, kritisch beleuchten und auf ihre Grundtendenzen zurückzuführen suchen. Ich fasse mich in der Wiedergabe der einzelnen Beweismomente möglichst kurz, da die vorliegenden Originalarbeiten mich einer breiteren Darstellung überheben.

Ausführung.

1. PYTHAGORAS' persönliche Leistung. Daß die pythagoreische Schule ihre Richtung auf das Wissenschaftliche ihrem Gründer verdankt haben muß, wird allgemein anerkannt; ebenso aber auch, daß man schon zu ARISTOTELES' Zeit die wissenschaftlichen Leistungen und Anregungen des PYTHAGORAS von den Weiterbildungen seiner Schüler nicht zu scheiden vermochte. Speziell die Zuweisung des Quadratsatzes an PYTHAGORAS beruht ausschließlich auf dem Epigramm des Rechners APOLLODOR, welches etwa 500 Jahre nach PYTHAGORAS auftaucht und dessen legendenhaften Charakter schon PROKLUS (410—485) erkannt hat. Herr JUNGE und ich haben dies Versagen aller zuverlässigen Quellen über PYTHAGORAS' eigene wissenschaftliche Tätigkeit scharf betont und alle aus den vorhandenen späten Erzählungen gezogenen Folgerungen abgelehnt.

Auch Herr ZEUTHEN gesteht die Unwissenheit über etwaige wissenschaftliche Entdeckungen des PYTHAGORAS zu; trotzdem kann er sich nicht zu der Zurückhaltung des Urteils verstehen, die ARISTOTELES für geboten hielt.[1]) Er spricht gelegentlich von PYTHAGORAS als dem Entdecker des Quadratsatzes und sogar des Irrationalen (A, S. 429; B, S. 4; C, S. 36). Herr ZEUTHEN ist bemüht, den Strom der Entdeckungen nicht nur bis an seine sichtbare Quelle, sondern bis in den unzugänglichen Bergesschoß, der ihn genährt hat, zurückzuverfolgen. Das birgt die Gefahr in sich, jedem Forscher nicht nur die Entdeckungen zuzuweisen, die für ihn bezeugt oder erschließbar sind, sondern die, deren Besitz nicht direkt widerlegbar ist. Ich suche ein Minimum, das Beweisbare, festzustellen; Herr ZEUTHEN geht auf das Maximum, das Mögliche. Diese Tendenz hat starken Gefühlswert; sie legt ihm die Worte in den Mund (A, S. 431): „J'aime à

1) Auf diesen Widerspruch hat schon Herr G. ENESTRÖM (Biblioth. Mathem. 13_3, 1912/13, S. 185) hingewiesen.

croire que ce point de départ (la découverte de l'irrationalité) ... appartient à PYTHAGORE lui-même."

2. Die pythagoreische Zahlenlehre und das Irrationale. Die Entdeckung des Irrationalen kann nicht erfolgt sein, bevor die pythagoreische Zahlenmetaphysik durch Verallgemeinerung der in der Musik als gültig erkannten Zahlenverhältnisse entwickelt war. Jetzt „war das Gewebe aus Wahrheit und Irrtum in der pythagoreischen Zahlenlehre schon so fest und umfangreich geworden, daß die Entdeckung des Irrationalen ihm nichts mehr anhaben konnte. Aber zur Zeit ihres Entstehens hätte die Lehre von den Zahlenverhältnissen das Irrationale schwerlich vertragen können. Und ganz unglaublich ist es, daß der Begründer der Schule und des Zahlenkults, daß PYTHAGORAS selbst These und Antithese nebeneinander aufgestellt haben soll."[1]) Diese Worte sind im wesentlichen die Ausführung der Bedenken, denen Herr ZEUTHEN in seiner *Geschichte der Mathematik* (S. 65) Ausdruck gegeben hatte.

Ist die Entstehung des pythagoreischen Zahlenkultus nur denkbar vor der Entdeckung des Irrationalen, so ist seine Erhaltung und Befestigung nur glaublich, wenn das Irrationale zunächst nur als isolierter Ausnahmefall erkannt und die in ihm verborgenen Konsequenzen nicht gezogen wurden, nicht aber, wenn er, wie Herr ZEUTHEN jetzt will (A, S. 431; B, S. 4; C, S. 38), sich von Anfang an als richtunggebendes Gesetz in den Mittelpunkt des Systems drängte. Die These „Alles ist Zahl" schließt die Antithese „Nicht alles ist Zahl" als ihr kontradiktorisches Gegenteil aus.

Zwingt die Konsequenz und der Tatbestand des pythagoreischen Systems zu der Annahme, daß die Irrationalität nicht von den ersten Pythagoreern entdeckt worden ist, so macht sie höchst wahrscheinlich, daß die erste erkannte Irrationalität, die der Quadratdiagonale, nicht sofort Anlaß zur Erweiterung des Begriffs und zur Erkenntnis der allgemeinen Irrationalität geworden ist. Stärker als der Gelehrte war in den Pythagoreern der Mystiker. So ist es wohl verständlich, daß die einzige Tatsache, die dem allbeherrschenden Zahlengesetz sich nicht fügte, ihnen mehr ein mystisches Symbol des in das Erkennbare geheimnisvoll hineinragenden Unerkennbaren als ein wissenschaftliches Problem war.[2])

3. Unkenntnis des Irrationalen bei PLATO. PLATO läßt erkennen[3]), daß er erst spät, d. h. im Mannesalter, Kenntnis von der Irrationalität erhalten hat und daß zu seiner Zeit das ganze Griechenvolk in dem „tierisch dummen" Glauben verharrte, alle gleichartigen Größen seien durcheinander meßbar.

---

1) JUNGE, a. a. O. S. 12.

2) Vgl. das Ende von Scholion 1 zu EUKLID X; ed. HEIBERG V, 417.

3) Gesetze VII, 819, 820. — Vgl. Biblioth. Mathem. 10_3, 1909/10, S. 136—142.

Herr Zeuthen hält diese Unkenntnis Platos und der Athener für ein lokales Phänomen und wohl vereinbar damit, daß die Irrationalität seit etwa hundert Jahren im geometrischen System der Pythagoreer eine beherrschende Stellung einnahm. Er beruft sich darauf, daß im 5. Jahrhundert die griechische Wissenschaft noch nicht, wie später in Athen oder Alexandria, zentralisiert war, daß die mathematischen Kenntnisse der Pythagoreer an ihrem Ursprungsorte, Unteritalien, hafteten, und daß Athen erst durch Plato Zentrale des mathematischen Forschens geworden ist (A, S. 434).

Aber Plato beklagt nicht die Unwissenheit der Athener, sondern aller Griechen. Die Kenntnis des Irrationalen muß zu seiner Zeit auf kleine, eingeweihte Kreise beschränkt gewesen sein, aus denen er selbst in Unteritalien und Kyrene sein Wissen geschöpft haben mag.

Die pythagoreische Gemeinschaft war seit 100 Jahren gesprengt, ihre Mitglieder und Nachfolger über ganz Griechenland zerstreut; pythagoreisches, speziell geometrisches Wissen war, wie Eudemus' Geometerverzeichnis beweist, aus dem Bann der Schule befreit, in Lehrbüchern niedergelegt, und wurde wie anderes Wissen für Geld gelehrt.[1]) Mag erst durch Plato Athen zum Mittelpunkt des mathematischen Lebens geworden sein; Mittelpunkt des griechischen Geisteslebens war es schon zur Perikleischen Zeit. „Wie die Produkte der ganzen Mittelmeerwelt und alle materiellen Erfindungen und Genüsse floß hier zusammen, was irgendwo von geistigen Regungen und Strömungen aufkam“ (Ed. Meyer). Die Szenerie der Platonischen Dialoge gibt im Gewande der Dichtung ein sicher zutreffendes Bild von dem Zuströmen der führenden Geister und dem durch sie befruchteten geistigen Leben Athens zu dieser Zeit. Nur weil Demokrit in Athen Kenntnis seiner Lehre voraussetzen durfte, konnte er sich wundern, gerade hier unbekannt geblieben zu sein.

Von diesem lebhaften Treiben kann die Geometrie nicht ausgeschlossen gewesen sein. Wie hätte sonst die Verdoppelung des Würfels und die Quadratur des Kreises die Zeitgenossen des Sokrates so tief erregen und die Lösungsversuche der Antiphon, Bryson, Hippias, Hippokrates hervorbringen können? Der Scholiast, welcher von dem längeren unfreiwilligen Aufenthalte des Hippokrates in Athen berichtet, erzählt, daß dieser, der vorher Kaufmann war, in Athen selbst durch den Besuch der Philosophen zum Geometer geworden sei.[2]) Er hat das erste Lehrbuch der Geometrie verfaßt.

Ist es unter diesen Umständen denkbar, daß die Irrationalität, wenn sie als allgemeine Gesetzlichkeit erkannt war, und wenn sie wie treibende

1) Jamblichus, *De communi mathematica scientia*, ed. Nic. Festa (1891), S. 78 und *De vita Pythagorica*, S. 89.

2) Joannes Philoponus, Brandes scholia (in *Aristotelis physic. auscult.* 185^a 16) 327^b.

Hefe die Geometrie in Gärung setzte, weiteren Kreisen in Athen und im übrigen Griechenland verborgen geblieben wäre?

4. $\sqrt{2}$ „instar omnium"? In unverdächtigen literarischen Zeugnissen ist für die Pythagoreer nur die Kenntnis der Irrationalität der Quadratdiagonale und ihrer ersten Näherungswerte mit den Terminis *διάμετρος ῥητή* und *ἄρρητος τῆς πεμπάδος* belegt. An der ersten Stelle der griechischen Literatur, an der die Verallgemeinerung des Irrationalen auftritt, in Platos *Theaetet*, wird der Beweis der Irrationalität von $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ usw. Theodor von Kyrene zugeschrieben; $\sqrt{2}$ wird ebenso wie $\sqrt{4}$ weggelassen.

Herr Zeuthen gesteht die historische Bedeutung dieser Tatsache und besonders der Platostelle zu; aber er bestreitet, daß man daraus schließen dürfe, den Pythagoreern sei nur $\sqrt{2}$ bekannt gewesen und Theodor sei der Entdecker der allgemeinen Irrationalität. Er betont (A, S. 398, 399), daß man kein Recht habe, dem, der den letzten Schritt einer Entdeckung getan hat, die ganze Ehre der Entdeckung zuzuschreiben; vielmehr gehen dem letzten, ans Licht führenden Schritte der Vollendung gewöhnlich Stufen der Vorbereitung und geringerer Vollkommenheit voraus, die sich mehr im Verborgenen halten; auch liegen zeitgemäße Entdeckungen nicht selten in der Luft und werden von mehreren Seiten zugleich ergriffen. Zieht man außerdem die Lückenhaftigkeit der alten Quellen in Betracht, so sei die Isoliertheit von $\sqrt{2}$ dadurch zu erklären, daß es als „typisches Beispiel" für alle Irrationalen, also „instar omnium" steht (A, S. 418; C, S. 37). Denn „nach meiner Ansicht mußte die Kenntnis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ die Frage der Irrationalität der anderen Wurzeln unmittelbar nach sich ziehen" (A, S. 428). Andernfalls wäre die historische Kontinuität unterbrochen gewesen (A, S. 428).

Gewiß können Vorstufen einer Entdeckung vorausgegangen und der Geschichte unbekannt geblieben sein. Aber solange nicht innere Gründe zwingen, solche Vorstufen anzunehmen, müssen wir unser historisches Wissen durch die Überlieferung begrenzen. Wir müssen uns gegenwärtig halten, daß Vorstufen zwar existiert haben können, obgleich sie nicht erwähnt werden, daß wir sie aber nicht konstruieren dürfen, weil sie nicht erwähnt werden. Andernfalls greifen wir nach dem Möglichen und verlieren darüber das Sichere aus dem Auge.

Die Kontinuität der Entwicklung kann in unserem Falle ebensowohl dadurch hergestellt werden, daß man mit mir die isolierte Entdeckung von $\sqrt{2}$ den späteren Pythagoreern zuschreibt, wie dadurch, daß man mit Herrn Zeuthen an die frühe Entdeckung von $\sqrt{2}$ die der allgemeinen Irrationalität sich sofort anschließen läßt. Der Unterschied ist nur, daß ich die Quellen nach Wortlaut und Zeitfolge nehme, wie sie sind, während

Herr ZEUTHEN zu der Hilfsannahme gezwungen ist, $\sqrt{2}$ stehe, wo sie steht, „instar omnium".

Und diese Hypothese kann dem, der sie billigt, nur über die Tatsache hinweghelfen, daß vor THEODOR nur von $\sqrt{2}$ die Rede ist; aber sie läßt unerklärt, warum bei der Beweisführung THEODORS $\sqrt{2}$ ebenso wie $\sqrt{4}$ weggelassen wird. Hierdurch wird der $\sqrt{2}$ eine Sonderstellung eingeräumt, die nicht dadurch aus der Welt zu schaffen ist, daß man sie leugnet oder ignoriert. Für mich ist diese Weglassung ein Argument erster Ordnung; für Herrn ZEUTHEN eine Schwierigkeit erster Ordnung. Ich kann nicht finden, wie er sie überwindet.

5. PROKLUS' Zeugnis. Auf das „wenig entscheidende" Zeugnis des PROKLUS[1]), durch welches PYTHAGORAS τῶν ἀλόγων πραγματεία zugeschrieben wird und „auf welches man bisher die Zuweisung an PYTHAGORAS geglaubt hat, stützen zu können", legt Herr ZEUTHEN wenig Wert (A, S. 428). Mit Recht; denn die Lesart ist handschriftlich unsicher und von namhaften Philologen aufgegeben.[2])

6. Teilung der Saite. Herr ZEUTHEN läßt die Entdeckung der Irrationalität aus derselben Wurzel entspringen wie die pythagoreische Zahlenlehre: aus der Beziehung der Längenverhältnisse der Saiten zu dem Wohlklang oder Mißklang der von ihnen hervorgebrachten Töne. Nur die Entdeckung, daß die Saitenlängen von Grundton und Oktav im Verhältnis 2 : 1 stehen, sieht er als ursprünglich an; der weitere Gedankengang war nach ihm folgender (B, S. 4—5; C, S. 36): man hatte eingesehen, daß das Intervall der Töne von dem Verhältnis der Saitenlängen abhängt. Wollte man das Intervall der Oktav halbieren, so mußte man eine Saitenlänge herstellen, zu der die Saitenlänge des Grundtons in demselben Verhältnis steht, wie sie selbst zur Saitenlänge der Oktav, also das geometrische Mittel zwischen den Saitenlängen 2 und 1. Diese Länge war bekannt als Diagonale eines Quadrats von der Seitenlänge 1. Erprobte man nun die Töne dieser Saitenlängen, so „mußte man erfahren, daß sie gar nicht harmonierten. Besseren Erfolg hatte man in dieser Hinsicht mit den Näherungswerten, die man an Stelle von $\sqrt{2}$ versuchte. Man ersetzte diesen Wert durch das arithmetische Mittel $\frac{3}{2}$ und erhielt so die Intervalle, die wir jetzt beziehungsweise als Quinte und Quarte bezeichnen." „Durch fortgesetzte Einschiebung des arithmetischen und des harmonischen Mittels konnte man immer genauere Annäherungen an $\sqrt{2}$ und ebenso an andere Quadratwurzeln finden." So hat „eine erste Veranlassung (zur

1) *Comm. in EUCLID.* I, ed. FRIEDLEIN, S. 65, 19.

2) Neuerdings von HERM. DIELS, *Vorsokratiker* I (1903), S. 280 und PAUL WENDLAND, Berliner Philologische Wochenschrift 1908, Nr 45, S. 1403.

Entdeckung des Irrationalen) die Musik gegeben". „Einen anderen Anlaß, sich mit Quadratwurzeln zu beschäftigen, gab die Geometrie."

So ist das Irrationale wirklich in die Anfangszeit der Pythagoreer gerückt und in einem ihrer fundamentalsten Gedanken, der Begründung der Harmonie auf dem Zahlenverhältnis der Saiten, verankert. Aber um welchen Preis!

Die natürliche Vorstellung von der Zurückführung der Harmonie auf Zahlen ist doch wohl diese: Lange vor den Pythagoreern hat es Musik, Wohlklang und Mißklang gegeben; lange vor ihnen waren als wohlklingend die Tonfolgen bekannt, die wir als Oktav, Quint usw. bezeichnen. Schon die ältesten Saiteninstrumente zeigen Saiten von verschiedenen Längen, aber auch Mittel zum Spannen der Saiten. Die Abstimmung der Saiten beruhte also praktisch auf zwei Momenten, auf Länge der Saite und Spannung. Die Tonhöhe als Funktion der Spannung theoretisch richtig zu bestimmen, ist den Griechen überhaupt nicht gelungen.[1]) Viel leichter war es und viel näher lag es dem geometrischen Sinn der Pythagoreer, die qualitative Abhängigkeit des Tons von der Saitenlänge oder Saitenteilung in das Quantitative zu übertragen. Dazu mußte man von dem mehrsaitigen Instrument zu einer Saite mit konstanter Spannung übergehen. Hatten die Pythagoreer einmal entweder durch einen glücklichen Zufall und kluges Aufmerken, oder durch eine geistvolle Fragestellung erkannt, daß zu dem Grundton der ganzen Saite die halbe Saite die Oktav hervorbringt und daß dies Gesetz unabhängig von der absoluten Saitenlänge für jede Saite und jede Spannung gilt, so war für sie, „die ersten Experimentalphysiker", die Frage nahegelegt: Gilt der Satz vom konstanten Längenverhältnis auch für die anderen bekannten harmonischen Intervalle, und in welchen Verhältnissen muß für diese die Grundlänge geteilt werden? So dürften sie für die längst vorhandenen Intervalle Quint, Quart, Terz die Teilungen $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ usw. experimentell gefunden haben. Und diese Teilungen waren nicht nur hinreichende, sondern auch notwendige Bedingung für jene Intervalle; denn eine Verschiebung des Teilpunktes führte zum Mißklang. Nicht die Beseitigung des Mißklanges von $\sqrt{2}$ hat zur Herstellung der rationalen Saitenverhältnisse, und die rationalen Saitenverhältnisse zur Erkenntnis der harmonischen Intervalle geführt; sondern umgekehrt: die bekannten harmonischen Intervalle hat man als Funktionen der Saitenlänge zu erkennen gesucht. Das Irrationale dürfte mit dieser Entdeckung nichts zu tun haben.

---

1) Die Literatur bei Ed. Zeller, *Philosophie der Griechen* I[5] (1892), S. 401—403 Anmerkung.

7. Zeno von Elea. Nach Herrn Zeuthen hätte Zeno die Paradoxa, welche die Unmöglichkeit dartun, das Stetige durch fortgesetzte Teilung zu erschöpfen, nicht ersonnen, wenn er nicht einerseits den Versuch der Pythagoreer, den Raum atomistisch aufzufassen, anderseits das konkrete Beispiel der Inkommensurabilität stetiger Größen in den pythagoreischen irrationalen Quadratwurzeln vor Augen gehabt hätte (A, S. 432—433; B, S. 8—9; C, S. 43).

Demokrit wurde zur atomistischen Auffassung des Raumes und des Stetigen überhaupt durch sein System gedrängt. Daß er diese Konsequenz wenigstens als Problem in Erwägung gezogen hat, beweisen mehrere seiner Büchertitel, ferner seine Integration des Kegelvolumens, besonders die theoretische Unsicherheit, in der sie in Plutarchs Bericht erscheint, endlich in bezug auf die Linienatome die Worte des Scholiasten[1]) *ὡς οἱ Δημοκρίτειοί φασιν*. Plato ist diese Auffassung nicht fremd gewesen, zum Dogma ist sie als *Ξενοκράτειος λόγος* durch Xenokrates geworden. Es ist recht wohl möglich, daß die Wurzel dieser Lehre pythagoreisch ist und daß sie in ihrer Definition des Punktes als räumlicher *μονάς* zum Ausdruck kommt.[2]) Gibt man dies zu, so können die Zenonischen *λόγοι* ihre Spitze wohl gegen die Raumlehre der Pythagoreer gerichtet haben. Soweit kann man mit P. Tannery[3]) und Herrn Zeuthen gehen und braucht deshalb doch nicht zu glauben, daß Zeno durch seine Polemik Zeugnis für die frühe pythagoreische Entdeckung des Irrationalen abgelegt hat. Es ist etwas viel verlangt und ohne wirkliche Begründung nicht wahrscheinlich, daß er den Angriff gegen das pythagoreische Bollwerk mit Waffen aus der pythagoreischen Rüstkammer geführt haben sollte. Ein solcher Nachweis aber fehlt vollständig und ist nach dem Stande unserer Kenntnisse wohl kaum möglich.

Zeno versucht, das Kontinuum in seine letzten Teile, die Bewegung in ihre Stationen zu zerlegen, er versucht, eine unendlich fallende geometrische Reihe dadurch zu summieren, daß er ihre Glieder zu Ende verfolgt. Das alles enthält Widersprüche in sich, weil das Unendliche sich eben nicht zu Ende denken läßt. Aber der Mann, der diese Fragestellungen ersann, braucht nicht von der Kenntnis der Irrationalität gewisser Strecken ausgegangen zu sein. Gewiß, in ihren Wurzeln hängen Stetigkeit und Inkommensurabilität zusammen; dem von diskreten Größen oder der Kommensurabilität ausgehenden Verstande werden beide zugänglich durch dasselbe Eudoxische Prinzip. Aber die Erkenntnis dieses Zusammenhanges

1) Euklid, *Opera* ed. Heiberg V, S. 436, 15 (Scholion 26 zu X, 1).

2) Zeller, a. a. O. S. 399, 400. Theod. Gomperz, *Griechische Denker* I[2] (1911), S. 85, 164.

3) *Pour l'histoire de la science hellène* (1887), S. 250.

liegt am Ende, nicht am Anfange einer langen und dornigen Bahn. Weder haben wir ein Recht zu der Annahme, daß der Ausgang der Zenonischen, das Geheimnis des Stetigen markierenden Paradoxa „bestimmte Beispiele der Inkommensurabilität" gewesen sind, noch zu dem Schluß, daß andernfalls Zeno selbst „zur allgemeinen Einsicht der Tatsache gekommen wäre, daß man nicht alle beliebig gegebenen Größen für kommensurabel halten darf". Ein solcher Erkenntniszusammenhang zwischen dem Stetigen und dem Irrationalen besteht nicht; es werden eben, wie Herr Zeuthen selbst betont, in der geschichtlichen Entwicklung nicht gleich die letzten logischen Konsequenzen gezogen. Plato setzt die Zenonischen λόγοι als in der Mitte des 5. Jahrhunderts allgemein bekannt voraus, er läßt sie im Dialog *Parmenides* den ganz jugendlichen Sokrates diskutieren; die allgemeine Irrationalität hat er selbst spät kennen gelernt, sie tritt im *Theaetet* an Sokrates erst kurz vor seinem Tode heran.

Der offenkundige Ausgangspunkt Zenos ist die Lehre seines Lehrers Parmenides von der Einheit und Unteilbarkeit alles Seienden. Nach seinen Worten bei Plato[1]) hat er die λόγοι ersonnen, um den Verächtern des Parmenides, zu denen auch die Pythagoreer gehört haben mögen, ihren Spott heimzuzahlen. Um die Lehre von der Alleinheit zu stützen, wendet der „Erfinder der Dialektik" die indirekte Beweisart an, indem er die Vielheit leugnet. Er hat zur allgemeinen These des Parmenides die besonderen Beispiele ersonnen, welche die Unmöglichkeit der Vielheit in Raum und Zeit an der Unbegreifbarkeit der Zusammensetzung des Stetigen aus seinen Teilen und der Bewegung aus einzelnen Lagen dartun. Er ist den Weg vom Allgemeinen zum Besonderen, nicht, wie Herr Zeuthen voraussetzt, den umgekehrten gegangen. Nach dem Schema des Aufsteigens vom Besonderen zum Allgemeinen müßte Zeno der Vorläufer des Parmenides sein.

8. Die geometrische Algebra. Die pythagoreische Flächenanlegung ist gleichwertig mit der Lösung der Gleichung zweiten Grades. Sie leistet diese Lösung unabhängig davon, ob die gegebenen oder die gefundenen Größen kommensurabel oder inkommensurabel, ihre Maßzahlen rational oder irrational sind, und hat dadurch einen Vorzug vor den rein algebraischen Lösungen, welche ohne Bewältigung des Problems der Irrationalität nicht vollständig sind.

Diese Tatsachen sind ins Licht gerückt durch P. Tannery und Herrn Zeuthen; es ist nur natürlich, daß sie in Herrn Zeuthens historischem System eine sehr wichtige und an Wichtigkeit zunehmende Stelle einnehmen. „In den naheliegenden geometrischen Darstellungen von Eigen-

1) *Parmenides*, 128 d.

schaften ganzer Zahlen, mit denen man begonnen hat, hat man ... eine Darstellungsform gehabt, die von selbst ebenso leicht auf allgemeine kontinuierliche Größen anwendbar war" (*Gesch.*, S. 39). Deshalb konnten und mußten die Pythagoreer, da nach der Entdeckung des Irrationalen die rechnerischen Lösungen nicht mehr exakt waren, der Mathematik in der geometrischen Algebra eine neue exakte Grundlage geben (A, S. 430; B, S. 6—7; C, S. 38). So ist nach Herrn Zeuthen die geometrische Algebra bewußt deswegen ausgebaut worden, weil sie vor Eudoxus der einzig gangbare Weg war, das Irrationale praktisch zu bewältigen, und deshalb ist nach seiner Auffassung ihre frühe Existenz (*Elementa* II) der Beweis für die frühe Erkenntnis des Irrationalen.

Ich glaube, daß in diesem Gedankengange und in seiner Aufdeckung des Zusammenhanges der arithmetischen Bücher mit der Theorie des Irrationalen die eigentliche Achse von Herrn Zeuthens Frühansetzung des Irrationalen zu sehen ist. Es sind dies in der Tat Argumente erster Ordnung für seine Theorie. Doch sind auch sie nicht unanfechtbar.

Die „mit absoluter Konsequenz durchgeführte Rücksichtnahme auf die Existenz irrationaler Größen" (C, S. 34) und die hierdurch erzielte Allgemeingültigkeit der Sätze ist eine Eigenschaft des in Euklids Elementen festgelegten Systems, für deren Verständnis keiner mehr als Herr Zeuthen uns die Augen geöffnet hat. Daß die Grundsteine dieses Baues von den Pythagoreern gelegt sind, ist nach innerer Notwendigkeit und nach historischen Zeugnissen unzweifelhaft; aber wie weit sie den Bau geführt haben, wie fest oder wie locker die Verbindung der Teile unter ihren Händen war, das wissen wir nicht. Zu groß ist die Zahl derer, die nach ihnen am Bau gearbeitet haben, sowohl der produktiven Forscher wie der Ordner, die über den jeweiligen Stand einen Überblick schafften. Ihrer aller Vorarbeit und dazu seine eigene Arbeit steckt in Euklids Elementen. Deshalb dürfte es nicht erlaubt sein, das Urteil, welches für den letzten Bestand der Elemente unbedingt gültig ist, auf den Ursprung des Systems zu übertragen: „Diese mit absoluter Konsequenz durchgeführte Rücksichtnahme auf die Existenz irrationaler Größen läßt die Entdeckung des Irrationalen als Ausgangspunkt für die Bildung des Systems erkennen" (C, S. 34). „Also kann die Entdeckung der Irrationalität, welche der Ausgangspunkt dieser Entwicklung ist, nicht den letzten Pythagoreern angehören" (A, S. 431).

Herr Zeuthen hat selbst früher betont, daß man sich des Wertes der geometrischen Darstellungsform „nur erst ganz allmählich bewußt geworden ist" und daß „die abstrakte Natur (der Flächenanlegung und geometrischen Algebra) nicht von vornherein so bewußt und ausgeprägt gewesen ist, wie sie es zu Eudemus' Zeit geworden war und bei Euklid ist"

(*Gesch.*, S. 39). In der Tat läßt sich gar nicht sagen, wie lange die Flächenanlegung gepflegt worden ist, ehe man sich des Vorzuges ihrer Allgemeingültigkeit bewußt geworden sein mag. Lehrreich ist in dieser Beziehung das Beispiel der Inder, welche von der Irrationalität keine Kenntnis hatten und doch, ähnlich wie die Griechen, Flächenanlegung benutzten[1]) (C, S. 31—32). Ja, die einseitige Verwendung der Flächenanlegung, welche unterschiedslos für alle Arten von Linien gilt, kann nach meiner Meinung umgekehrt zur Ursache geworden sein, daß die unterschiedliche Natur der Lösungen der quadratischen Gleichungen, welche der rechnerischen Behandlung sich sehr bald aufdrängt, lange unbekannt blieb; sie kann die Entdeckung und Wertung des Irrationalen geradezu hintangehalten haben.

Die Forscher der letzten Jahrzehnte haben Großes geleistet, indem sie, ausgestattet mit dem Rüstzeug der Gegenwart, die Gleichwertigkeit der Flächenanlegung mit der Lösung der quadratischen Gleichung, ihre Überlegenheit in der Unabhängigkeit vom Irrationalen, kurz, das ganze Wesen der griechischen geometrischen Algebra erkannt haben. Viel höher aber muß die wissenschaftliche Leistung derer eingeschätzt werden, denen zuerst der algebraische Sinn der geometrischen Operationen aufging und welche sie nach der Entdeckung des Irrationalen als Mittel zur Umgehung des Irrationalen erkannten. Wer will sagen, zu welcher Zeit und in welchem Kopfe das unbewußt Geübte zuerst bewußt geworden ist? Herr Zeuthen wählt jetzt auch hier, getreu seiner Methode, den frühesten Termin.

Außer an dieser allgemeinen Unsicherheit scheint mir Herrn Zeuthens Gedankengang an einem besonderen Widerspruch zu kranken.

Der bekannte Beweis des Quadratsatzes, in dem die Gleichheit jedes Kathetenquadrates mit dem Rechteck aus seiner Projektion auf die Hypotenuse und der ganzen Hypotenuse durch Flächenvergleichung festgestellt wird, rührt nach Proklus' Zeugnis von Euklid her. Euklid würde bei seinem konservativen Sinn schwerlich für den ehrwürdigen Satz einen neuen Beweis eingeführt haben, wenn der überlieferte in das System gepaßt hätte. Deshalb nimmt man allgemein an, daß der bis Euklid gültige Beweis die Gleichheit der Kathetenquadrate mit den entsprechenden Rechtecken durch ähnliche Dreiecke und mittlere Proportionalen dargetan hat, welche in den ersten vier Büchern der Elemente noch nicht vorkommen (*Gesch.*, S. 50; A, S. 432).[2]) Ist dieser oder ein ähnlicher Beweis der alte pythagoreische gewesen, so hat er vor der exakten Begründung der Pro-

1) Vgl. auch H. G. Zeuthen, *Théorème de Pythagore*; II^{me} Congrès internat. de philosophie (Genf 1904) und H. Vogt in Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/7, S. 6—23.

2) Ebenso P. Tannery, *La géométrie grecque* (1887), S. 105. — T. L. Heath, *The thirteen books of Euclids elements* (1908) I, S. 353.

portionslehre durch Eudoxus (408—355) nicht allgemeine Gültigkeit besessen, also ist auch die Gültigkeit des Quadratsatzes streng genommen auf rationale rechtwinklige Dreiecke (pythagoreische Dreiecke im engeren Sinne) beschränkt gewesen. Nun wird aber zur Lösung der Flächenanlegungsaufgaben der Quadratsatz benutzt. Also haben vor Euklid diese Lösungen und damit die ganze geometrische Algebra nicht die Allgemeingültigkeit gehabt, um derentwillen sie nach Herrn Zeuthens Ansicht begründet sein soll.

Nimmt man mit Herrn Zeuthen an, daß die Pythagoreer volle Kenntnis des Irrationalen besessen haben und daß seine Bewältigung oder Umgehung die treibende Kraft ihrer geometrischen Forschung gewesen sei, so kann ihnen diese gefährliche Lücke ihres Systems nicht entgangen sein, und ihr Bemühen muß darauf gerichtet gewesen sein, sie auszufüllen. Es fällt aber sehr schwer, zu glauben, daß der Übergang vom Beweise der Gleichheit zwischen Kathetenquadrat und Hypotenusenrechteck durch Ähnlichkeit zu dem Beweise derselben Gleichheit durch Flächenvergleichung, den auch Herr Zeuthen für einen natürlichen Schritt ansieht (*Gesch.*, S. 50), den Anstrengungen vieler Generationen von Mathematikern unmöglich gewesen sein sollte und daß dieser Stein des Anstoßes fast 200 Jahre lang auf der großen Heerstraße der Geometrie hätte liegen bleiben können.

Alle anderen Denkmöglichkeiten, diesen Widerspruch zu beseitigen, halte ich für gekünstelt oder unhistorisch; die einfache Lösung ist: den Pythagoreern ist nicht zum Bewußtsein gekommen, daß der Beweis ihres Hauptsatzes nicht allgemeingültig war. Dann haben sie aber auch überhaupt nicht das Bewußtsein von der unvollständigen Begründung ihrer Proportionslehre gehabt; dann können sie die Kenntnis des allgemeinen Irrationalen nicht früh besessen haben; dann kann diese Kenntnis nicht der Grundstein ihrer geometrischen Algebra, speziell ihrer Flächenanlegung gewesen sein, und die Existenz dieser geometrischen Algebra kann nicht zum Argument für die frühe Erkenntnis des allgemeinen Irrationalen und seiner Bedeutung gemacht werden.

Haben die Pythagoreer dagegen, wie ich glaube, die Inkommensurabilität der Quadratdiagonale als vereinzelte Ausnahme von der allgemein angenommenen Kommensurabilität besessen, so konnten sie trotz dieser unbequemen und geheimnisvollen Tatsache ebenso wie den Satz „Alles ist Zahl" auch sehr wohl ihre Proportionslehre samt ihrem Beweis des Quadratsatzes und der Flächenanlegung für wohl begründet und als allgemeine Gesetzmäßigkeit ansehen. Der Aufdeckung der allgemeinen Irrationalität durch Theodor von Kyrene folgte alsdann auf dem Fuße ihre Überwindung, nicht Umgehung, durch Eudoxus von Knidus nebst der ausnahmslosen Begründung der Proportionalität. Bei dieser Annahme kann die Periode der Unsicherheit nur sehr kurz gewesen sein. Außerdem war nach der Aufstellung der Eudoxischen Proportionslehre die Ersetzung des pythagoreischen Beweises für den Quadratsatz durch den Euklidischen nicht mehr eine methodische Notwendigkeit, nicht die Wahl zwischen ungültig und gültig, sondern nur eine Frage der systematischen Einordnung. Diese Einordnung und Umordnung dürfen wir in Übereinstimmung mit Proklus' Zeugnis „*πολλὰ μὲν τῶν Εὐδόξου συντάξας*" als Euklids eigenstes Werk ansehen.

9. Theaetet und Euklid. Durch seine Analyse des VII. und VIII. Buches von Euklids Elementen (A, S. 409—417) hat Herr Zeuthen diese arithmetischen Bücher ihrer Isoliertheit entrückt und dargetan, daß sie ein notwendiges Glied in der Kette der Elemente bilden. Das „logische Raffinement" dieser Bücher wäre überflüssig, wenn ihr Ziel die Herleitung praktischer arithmetischer Regeln wäre; aber es erscheint gerechtfertigt und notwendig, wenn sie in dem Satze von der Eindeutigkeit der Zerlegung einer Zahl in Primfaktoren (VII, 27) die Grundlage für den exakten Existenzbeweis irrationaler Größen liefern sollen (X, 6 Cor.).

Durch den Nachweis dieses Zusammenhanges hat Herr Zeuthen unser Verständnis für Euklids Werk in dankenswertester Weise vertieft. Wieder, wie schon so oft, ist das Resultat tieferen Eindringens die geklärte Einsicht in die alles beherrschende Planmäßigkeit und logische Schärfe dieses Baues. Herrn Zeuthens Verdienst, den logischen Zusammenhang zwischen den Büchern VII, VIII und X aufgedeckt zu haben, reiht sich seinen anderen Verdiensten um das Verständnis Euklids würdig an; die durch ihn gewonnene Einsicht wird ein fester und wertvoller Besitz der Euklidforschung bleiben.

Wer aber ist der Schöpfer des Ausbaues der arithmetischen Bücher? In Frage kommen Theaetet und Euklid. Herr Zeuthen weist das Wesentliche dieser Leistung Theaetet zu Prüfen wir, mit welchem Grade von Sicherheit.

Die Hauptquelle der Beweisführung muß natürlich die bekannte Platostelle[1]) sein, in welcher der junge Theaetet als Beispiel einer exakten Definition die allgemeine Klassifikation der rationalen und irrationalen Größen leistet. Ich habe in meiner Plato-Arbeit ausgeführt, daß Plato, indem er dem Jüngling Theaetet die wissenschaftlichen Leistungen des Mannes vorgreifend in den Mund legte, sich, ohne die innere Wahrheit der Szenerie zu zerstören, auf Andeutungen beschränken mußte und daß wir deshalb in diesen Andeutungen nur die untere Grenze von Theaetets wirklichen Leistungen erblicken dürfen. Weder gibt Plato uns einen An-

1) *Theaetet* 147 C — 148 B.

halt, daß Theaetet eine besondere Beweisführung eingeschlagen hätte, noch reicht sein Zeugnis für die Feststellung der oberen Abgrenzung von Theaetets Leistungen aus; aber es widerlegt auch keine derartige Abgrenzung.

Mir scheint deshalb, daß Herr Zeuthen den Sinn der Platostelle und speziell meiner Auffassung derselben überspannt, wenn er darin das Zeugnis findet (A, S. 398), „daß Theaetet einen Beweis (für die allgemeine Irrationalität) gefunden hat, welcher die Quadratwurzeln aller Nicht-Quadratzahlen umfaßt". Auch aus dem Parallelismus der Ausdrücke „Quadratzahlen, Rechteckszahlen" (A, S. 421) bei Plato und bei Euklid (VII def. 16, 18), ebenso wie aus der Ausdehnung auf die dritte Dimension als „Körperzahlen" (A, S. 420) darf man wohl nicht die Andeutung einer Entdeckung Theaetets herleiten; sind diese Ausdrücke doch, wie Herr Zeuthen selbst bemerkt (A, S. 421 Anm.), pythagoreischen Ursprungs.

Die Kenntnis der oberen Grenze von Theaetets Leistung, also die Abgrenzung gegen Euklid, ist nicht in dem Platonischen Dialog zu finden, sondern zwar spärlich, aber doch nicht ganz versagend, in den Bemerkungen Proklus' und der Scholiasten. Zwar Proklus' Angabe, die sich auf Leodamas, Archytas und Theaetet gemeinschaftlich bezieht, daß nämlich durch sie „die Theoreme vermehrt wurden und zu einer wissenschaftlicheren Ordnung gelangten", ist so allgemein gehalten, daß aus ihr schwerlich der Hinweis auf Theaetets Verdienst um das VII. Buch der Elemente herausgelesen werden kann (A, S. 426). Aber der Aussage über Euklid, daß „er viele Leistungen Theaetets zum Abschluß brachte" (τελεωσάμενος) und „Vieles, was die Vorgänger nicht sicher bewiesen hatten, durch unanfechtbare Beweise festlegte", trägt Herr Zeuthen, wie mir scheint, nur unvollkommen Rechnung. Denn seine ganze Betrachtungsweise gipfelt in der Annahme, „daß Theaetet die Theorie der Irrationalität der Wurzeln zur Vollendnung geführt hat" (a apporté les derniers perfectionnements) (A, S. 400). Daran wird nichts durch die Klausel geändert, „abgesehen von den Fortführungen und Anpassungen, die wir dem Autor (des X. Buches) verdanken"; und ebensowenig durch das an anderer Stelle gemachte Zugeständnis (A, S. 408), daß die Scheidung der „Bausteine" Theaetets und Euklids „unmöglich" ist. Schreibt man einmal das ganze Verdienst der vollkommenen Theorie, also des VII., VIII. und X. Buches, Theaetet zu, dann bleibt in der Tat für seine Fortsetzer Hermotimus und Euklid nicht mehr übrig, als Herr Zeuthen ihnen zugesteht: „Hermotimus ... und Euklid haben einige Einzelheiten (quelque detail) hinzugefügt, um den arithmetischen Büchern die endgültige Form zu geben, die wir in den Elementen finden. Übrigens hat eine solche Fortführung mehr für die Beiträge Theaetets zum X. Buche stattgefunden" (A, S. 421).

Die alten Zeugnisse schweigen vom VII. und VIII. Buche vollständig; die Grundlagen des X. und XIII Buches weisen sie THEAETET zu. Der einzige, der auf die Anteile THEAETETS und EUKLIDS am X. Buche näher eingeht, der durch das Arabische gegangene, von F. WOEPCKE veröffentlichte Scholiast[1]), bezeugt für THEAETET die Definition und Klassifikation der irrationalen Größen und ihre Zuweisung an Geometrie, Arithmetik und Harmonie, „wie dies vom Peripatetiker EUDEMUS berichtet und erzählt wird“. Für EUKLID bleibt „die Schärfe der auf Kommensurabilität und Inkommensurabilität im allgemeinen bezüglichen Regeln; die Präzision der Definitionen und Distinktionen, die Aufstellung einer großen Zahl von Unterklassen; schließlich der klare Nachweis ihrer ganzen Ausdehnung“. Gewiß, dieser Scholiast ist ein einwandfreier Zeuge nur so weit, wie er sich auf EUDEMUS berufen kann. Seine Schilderung der Leistungen EUKLIDS braucht nicht auf positiven Quellen zu beruhen, sondern nur die Ergänzung der durch EUDEMUS abgegrenzten Entdeckungen THEAETETS zu sein. Aber eben darum ist sie nicht ohne Bedeutung. Hier tritt EUKLID wirklich in der würdigen Rolle des „Vollenders“ und des „Schöpfers der unwiderleglichen allgemeinen Beweise“ auf, die ihm PROKLUS zuweist und für die ihm Herrn ZEUTHENS Verteilung der Leistungen keinen Raum läßt.

10. THEODOR von Kyrene. Wenn schon die Pythagoreer die allgemeine Irrationalität der Quadratwurzeln entdeckt und dadurch bewiesen haben, daß unmöglich eine Zahl einen gewissen Primfaktor, z. B. 3, bei einer Zerlegung enthalten, bei einer andern nicht enthalten könne; wenn THEAETET diesem Beweise die volle Schärfe durch den exakten Nachweis der Eindeutigkeit der Zerlegung einer Zahl in Primfaktoren gegeben hat, so haben wir in diesen fortschreitenden Gedankengängen das Bild einer geradlinigen, lückenlosen, abgeschlossenen Entwicklung vor uns. Diese Entwicklung braucht für die theoretische Grundlegung keinen Vollender, wie EUKLID, noch eine Zwischenperson, wie THEODOR.

Soll also, worauf die Überlieferung hinweist, THEODOR ein Verdienst um Entdeckung und Sicherung des Irrationalen gehabt haben, so muß seine Leistung in einen Seitenweg geführt haben, der beim endgültigen Ausbau des Systems verlassen und vielleicht verschüttet wurde. Die Andeutung eines solchen verlassenen Seitenweges findet Herr ZEUTHEN in EUKLID X, 2. Hier wird die Inkommensurabilität zweier Größen dadurch bewiesen, daß das von der Arithmetik und von kommensurabeln Größen her bekannte und geübte Schema der Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Teilers zu keinem Ende führt. Von diesem Kriterium wird praktisch bei EUKLID kein Gebrauch gemacht (A, S. 423).

1) Vgl. Biblioth. Mathem. 10_3, 1909/10, S. 134—135.

Herr Zeuthen meint nun, daß Theodor den arithmetischen Beweisgang der Pythagoreer, dessen Unzulänglichkeit er erkannt hatte (A, S. 422), aufgegeben und für den Nachweis der Irrationalität von $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ..., $\sqrt{17}$ durch die geometrisch umgebildete Methode der Aufsuchung des größten Teilers ersetzt hat. Führt dieses Schema auf einen sich wiederholenden Vorgang (wir sagen, wird der das Verhältnis der Größen angebende Kettenbruch periodisch), so haben die die Größen darstellenden Strecken und die Größen selbst kein gemeinschaftliches Maß, sie sind *ἀσύμμετροι*, inkommensurabel. Dieses Kriterium wendet Herr Zeuthen tatsächlich auf die entscheidenden Beispiele an (A, S. 423—427).

Es ist unbedenklich zuzugestehen, daß seine Methode im einzelnen kein den Alten fremdes Beweismoment benutzt und daß sie im ganzen in höchst geistvoller Art der Denkweise der griechischen Geometrie angepaßt ist. Herr Zeuthen macht geltend, daß dieser Gedankengang sich an die pythagoreische Aufsuchung der Kettenbruchs-Näherungswerte für $\sqrt{2}$ anlehnt. Und doch ist Herr Zeuthen, indem er ihn Theodor zuschreibt, sich bewußt, eine Hypothese aufzustellen. Aber er hält die vorhandenen Hinweise für ausreichend, dieser Hypothese einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit zu verleihen.

An direkter literarischer Beglaubigung, daß diese Beweismethode von irgendeinem Griechen, und speziell, daß sie von Theodor angewendet worden sei, fehlt es durchaus. Es ist nicht zu leugnen, daß sie den geometrischen Charakter hat, der durch die Bezeichnung *ἔγφαφε* gefordert wird (A, S. 422), und daß, wie ebenfalls nach Plato nötig ist, für jede Wurzelgröße der Beweis einzeln geführt werden muß (A, S. 426). Aber das sind nicht entscheidende Kennzeichen; sie treffen ebensogut bei dem von mir für Theodor angenommenen Beweisgang zu.

Einen besonderen Anhalt findet Herr Zeuthen daran, daß Plato dem Theodor die Bezeichnung *οὐ ξύμμετροι* in den Mund legt. Er sieht darin den Hinweis auf eine neue durch Theodor vollzogene Begriffsbildung („nouvelles notions", A, S. 422). Da nach Herrn Zeuthens Auffassung schon vor Theodor die allgemeine Irrationalität, nach meiner Meinung wenigstens die Irrationalität der Quadratdiagonale, bekannt war, und da für diese die Näherungswerte, vermutlich durch die Methode des sukzessiven Abtragens, aufgesucht, ein Endwert aber nicht gefunden wurde, so dürfte der alte Begriff *σύμμετρος* seinen Gegensatz *ἀσύμμετρος* gewiß schon vor Theodor gefunden haben. Theodor dürfte diesen Begriff wohl nicht erfunden, sondern als Ausdruck einer allgemeinen Gesetzmäßigkeit erkannt und damit als gleichberechtigten Gegensatz zu *σύμμετρος* in die mathematische Terminologie eingeführt haben (A, S. 400—401).

Theodor soll „die Unzulänglichkeit der früheren Beweise“ erkannt und deshalb seine Beweise für $\sqrt{3}$ bis $\sqrt{17}$ ersonnen haben. Hat Theodor wirklich die unbewiesene Annahme, daß dieselbe Zahl durch 3 nicht zugleich teilbar und nicht teilbar sein kann, für unzulänglich und unzulässig gehalten, so muß er doch wohl auch die Annahme, daß dieselbe Zahl nicht zugleich gerade und ungerade sein kann, für ebenso beweisbedürftig gehalten haben. Warum übergeht er dann bei seinem Beweise die $\sqrt{2}$? Wieder will die verhängnisvolle Weglassung von $\sqrt{2}$ sich Herrn Zeuthens Konstruktion nicht fügen.

Hatte Theodor die Inkommensurabilität von $\sqrt{3}$ bis $\sqrt{17}$ durch die geometrische Methode des sukzessiven Abtragens bewiesen, so durfte er „ohne Zweifel erwarten, daß es möglich sein werde, auf dieselbe Weise die Irrationalität der Quadratwurzeln der folgenden Nichtquadrat-Zahlen zu beweisen“. „Doch hat er die Allgemeinheit der Periodizität, welche sich ihm in den einfachsten Fällen dargeboten hatte, nicht nachweisen können“ (A, S. 426). Denn jeder einzelne Beweis erforderte einen der Besonderheit der vorliegenden Zahl angepaßten Kunstgriff. Bei aussetzendem Beweise versagte auch die Sicherheit der These. Theaetet aber stellt bei Plato, gestützt auf Theodors Beweisführung, die ganz allgemeine Definition der rationalen und irrationalen Größen auf. Er beruft sich bei der Fragestellung ausdrücklich auf die der Unendlichkeit der Zahlenreihe entsprechende Unendlichkeit der Quadrate (*ἐπειδὴ ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο*), und bei der Lösung betont er, daß seine Distinktion „alle Geraden“ umfaßt (*ὅσαι μὲν γραμμαὶ . . ., ὅσαι δὲ . . .*). Die Überzeugung von dieser Allgemeingültigkeit war nur berechtigt, wenn Theodors an einigen Fällen ausgeführte Beweise die Ausdehnung auf alle Fälle erlaubten und damit die allgemeine Gesetzlichkeit vollständig sichergestellt war, nicht aber durch Fälle partikulärer Natur. Auf diese hätte Theaetet seine Definitionen nur durch Induktion, und zwar durch unvollständige Induktion, gründen können. Induktiv aber soll sein Vorgehen gewiß nicht sein. Das widerspräche der bei Plato gestellten Aufgabe; es widerspräche dem Wesen der exakten Mathematik und besonders der Schärfe, in deren Durchführung Herr Zeuthen gerade Theaetets Eigenart erblickt.

Führt die Einfügung der von Herrn Zeuthen Theodor zugeschriebenen Methode in die literarisch bezeugte Entwicklung zu starken Unstimmigkeiten, so unterliegt auch die innere Möglichkeit, ob Theodor die Schöpfung dieser Beweisart zuzutrauen ist, begründetem Zweifel. Herr Zeuthen selbst gibt diesem Zweifel Ausdruck: „Die Exaktheit des Beweises hängt vom Postulat des Eudoxus ab, welcher erst ein Nachfolger von Theodor war“ (A, S. 405). Theodor war gleichaltrig mit Sokrates, also um 470 geboren; Eudoxus hat von 408 bis 355 gelebt. Die Aushilfen, welche

Herr Zeuthen ersinnt, um diese Schwierigkeit zu überwinden und seine Idee zu retten, daß nämlich Theodors Beweis nicht „vollständig exakt“ gewesen und gerade seine Unsicherheit zur Anregung für Eudoxus geworden sein kann oder daß Theodor den „in der Luft schwebenden Gedanken“ des Eudoxus in diesem besonderen Falle aufgegriffen habe, führen bestenfalls vielleicht so weit, daß man trotz jenes Bedenkens diese Leistung dem Theodor nicht mit Sicherheit absprechen kann. Aber um sie ihm mit einiger Wahrscheinlichkeit zuzusprechen, dazu gehören positive Gründe; und an diesen fehlt es.

Rückblick.

Das Bild, welches Herr Zeuthen von der Entdeckungsgeschichte des Irrationalen entworfen hat, entbehrt nicht der Größe und Geschlossenheit. Diese Geschlossenheit ist ein innerer, ein relativer Vorzug. Hält er stand, wenn wir, von der relativen zur absoluten Zeitbestimmung übergehend, die Berechtigung der Einfügung dieses Bildes in den Rahmen einer bestimmten Zeit, des Jahrhunderts von Pythagoras bis Theaetet, prüfen? Diese Prüfung ist möglich durch Hinweise der Literatur auf persönliche Leistungen oder durch Anknüpfung an zeitlich fixierte Tatbestände.

Herr Zeuthen glaubt in dem wissenschaftlichen Ansehen des Pythagoras, in der pythagoreischen Behandlung von $\sqrt{2}$, in der Entdeckung des Gesetzes der Saitenteilung, in der Forderung der historischen Kontinuität, in den Sophismen des Zeno, in der geometrischen Algebra Anhalte genug zu besitzen, um die erste Stufe der Entwicklung, die Entdeckung des Irrationalen und seine geometrische Umgehung, in die erste Hälfte des 5. Jahrhunderts zu setzen.

Natürlich ist bei dem Versagen aller direkten Zeugnisse für diese Periode jede Beweisführung unsicher und auf Kombinationen, auf Anpassung an das wenige gesichert Überlieferte angewiesen. Aber die frühe Kenntnis des Irrationalen paßt sich der pythagoreischen Zahlenlehre nicht an; der Zusammenhang des Irrationalen mit der Saitenteilung erscheint künstlich konstruiert; die alleinige Erwähnung von $\sqrt{2}$ zwingt zu der Hilfshypothese, daß $\sqrt{2}$ als typisches Beispiel „instar omnium“ stehe; unerklärt aber bleibt, warum in einem Falle $\sqrt{2}$ den Vorzug genießt, allein unerwähnt zu bleiben; die historische Kontinuität ist auch auf andere Weise zu wahren; die Zenonischen Paradoxa setzen ebensowenig wie die geometrische Algebra die Kenntnis des Irrationalen voraus.

Die zweite Stufe der Entwicklung, die exakte Behandlung der Irrationalität, kann geprüft werden erstens sachlich an der Fixierung, die sie in Euklids Elementen gefunden hat, zweitens an literarischen Personenhinweisen Platos, der Geschichtschreiber und Scholiasten. Die Analyse von Euklids Elementen erweist sich äußerst fruchtbar für den inneren Zusammenhang der Entdeckungen und ihre relative Geschichte. Aber sie läßt uns im Dunkel über die absolute Zuordnung an bestimmte Personen und Zeiten, welche doch nur aus literarischen Zeugnissen geschöpft werden kann. Ich glaube nachgewiesen zu haben, daß Herr Zeuthen den vorhandenen Zeugnissen nicht gerecht wird. Zwar, daß die von Herrn Zeuthen Theaetet zugeschriebene Leistung aus der Hauptquelle, dem Platonischen Dialog, nicht zu belegen ist, widerlegt nicht die Möglichkeit der Leistung. Aber höchst gewagt erscheint diese Zuweisung erstens deswegen, weil sie für die gut bezeugten Verdienste Euklids keinen Spielraum läßt. Zweitens erscheint Theodor zwischen Theaetet und die Pythagoreer ohne Bewegungsfreiheit eingekeilt. Während wir nach Platos Schilderung von ihm eine fruchtbare, vorwärtsführende Entdeckung erwarten müssen, ist der Gedankengang, den Herr Zeuthen mit großem Scharfsinn für ihn rettet, eine Episode, anachronistisch und nicht durch seine Nachwirkung bestätigt.

Herrn Zeuthens Auffassung der Entdeckungsgeschichte des Irrationalen wurzelt in dem Streben, die Momente der Entdeckung über ihr literarisches Hervortreten hinaus so weit rückwärts zu verfolgen, wie es historisch möglich und nicht durch direkte Zeugnisse widerlegbar erscheint. Handhaben für diese prinzipielle Frühdatierung liefern ihm die sachlichen Zusammenhänge, die aufgedeckt zu haben sein großes Verdienst ist und deren systematische Bedeutung sich leicht in historische Bedeutung in seinem Sinne umsetzt. Demgegenüber habe ich mir zur Aufgabe gemacht, in erster Linie die historischen Quellen auszuwerten, indem ich ihre Tragweite untersuche und die Datierung der Entdeckungen nach Möglichkeit durch literarische Zeugnisse abgrenze. Die Verschiedenheit der Gesichtspunkte bedingt die Abweichung der Bilder. Während Herrn Zeuthens Methode notwendig zur oberen Grenze des für eine Zeit möglichen und denkbaren Erkenntnisstandes führt, gelange ich durch Ausscheidung des Unbelegbaren zu einer unteren Begrenzung. — Ich halte meinen Standpunkt nach wie vor für die festeste Grundlage der Entdeckungsgeschichte des Irrationalen.

Sur un passage géométrique d'Aristote.

Par P. Mansion à Gand.

I.

On trouve dans le livre II de la *Physique* d'Aristote, ch. 9, 200 a 16—19 le passage suivant où il s'agit du théorème relatif à la somme des trois angles d'un triangle, de la proposition réciproque et de la proposition contraire de la réciproque:

> *ἐπεὶ γὰρ τὸ εὐθὺ τοδί ἐστιν, ἀνάγκη τὸ τρίγωνον δύο ὀρθαῖς ἴσας ἔχειν· ἀλλ' οὐκ ἐπεὶ τοῦτο, ἐκεῖνο· ἀλλ' εἴγε τοῦτο μή ἐστιν, οὐδὲ τὸ εὐθύ ἐστιν.*

O. Hamelin, dans son ouvrage intitulé: Aristote, *Physique* II. *Traduction et commentaire* (Paris, Alcan 1907), p. 31, traduit ainsi ce passage: «En effet, la droite étant ceci, il est nécessaire que le triangle ait [ses angles] égaux à deux droits. Mais de cette dernière [proposition on] ne [tirerait] pas la précédente, bien que si la dernière n'est pas [vraie], la droite à son tour n'existe pas.»

Dans son Commentaire sur ce passage, pp. 165—169 de son livre, il expose et rejette l'explication qu'en a donnée Simplicius, admet celle de Philopon pour la proposition directe et la proposition contraire de la réciproque, en observant que ce commentateur ne dit rien de la réciproque elle même: *Mais de cette dernière proposition on ne tirerait pas la précédente*, ce qui, dit Hamelin, est *le point le plus embarassant*. Il propose alors pour son propre compte une explication de ce point embarassant en supposant qu'Aristote distingue entre un angle droit comme figure et un angle droit comme angle au centre correspondant à un quadrant dans un cercle. Nous ne parvenons pas à saisir cette distinction.

II.

Selon nous, le passage d'Aristote peut s'expliquer d'une manière beaucoup plus simple. On peut le paraphraser comme il suit:

1. Dans un triangle rectiligne, la somme des trois angles est égale à deux droits.

2. La somme des angles d'un triangle peut être égale à deux droits sans qu'il soit rectiligne.
3. Si la somme des angles d'un triangle n'est pas égale à deux droits, le triangle n'est certainement pas rectiligne.

La proposition 1 était connue longtemps avant Aristote; la proposition 3 en est une conséquence logique immédiate; il suffit donc de montrer que la proposition 2 est vraie, en prenant un exemple. En voici un très simple:

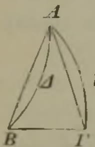


Fig. 1.

Soit [Fig. 1] $AB\Gamma$ un triangle isoscèle où $AB = A\Gamma$. Menons les arcs de cercle $A\Delta B$, $AE\Gamma$ de même rayon, l'un de A à B, l'autre de A à Γ comme l'indique la figure. Les angles curvilignes $BA\Delta$, $AB\Delta$, ΓAE, $A\Gamma E$ sont égaux. Par suite, dans le triangle mixtiligne $B\Delta AE\Gamma$ la somme des angles est égale à deux droits. En effet, puisque angle $BA\Delta$ = angle ΓAE,

$$\text{angle } \Delta AE = BA\Gamma - BA\Delta + \Gamma AE = BA\Gamma,$$

ensuite

$$\text{angle } \Delta B\Gamma = AB\Gamma - AB\Delta,$$

$$\text{angle } B\Gamma E = B\Gamma A + A\Gamma E.$$

Donc, en ajoutant ces trois égalités,

$$\Delta AE + \Delta B\Gamma + B\Gamma E = BA\Gamma + AB\Gamma + B\Gamma A - AB\Delta + A\Gamma E,$$

ou, puisque $AB\Delta = A\Gamma E$ et que la somme des trois angles du triangle rectiligne $AB\Gamma$ est égale à deux droits,

$$\Delta AE + \Delta B\Gamma + B\Gamma E = 2 \text{ droits}.$$

On peut facilement construire d'autres triangles non rectilignes où la somme des trois angles est égale à deux droits.

III.

Dans l'interprétation précédente, nous employons la considération d'angles mixtilignes. Euclide a donné de l'angle plan (*Elémenta* I, def. 8) une définition qui s'applique aux angles mixtilignes et dans la proposition 16 du livre III, il démontre un théorème qui s'y rapporte. Mais il n'utilise nulle part la somme ou la différence de pareils angles avec des angles rectilignes. Au contraire, Aristote le fait incidemment dans un passage des *Premiers Analytiques*, livre I, ch. 24, 41b 14—20 où il s'occupe de la nature du syllogisme. Il employe l'exemple géométrique suivant[1]):

---

1) Nous empruntons ce passage à Heiberg, *Mathematisches zu Aristoteles*; Abhandl. z. Gesch. d. mathem. Wissensch. 18, 1904, p. 25.

οἷον ὅτι του ἰσοσκελοῦς ἴσαι αἱ πρὸς τῇ βάσει. ἔστωσαν εἰς τὸ κέντρον ἠγμέναι αἱ Α, Β. εἰ οὖν ἴσην λαμβάνοι τὴν Α, Γ γωνίαν τῇ Β, Δ μὴ ὅλως ἀξιώσας ἴσας τὰς τῶν ἡμικυκλίων καὶ πάλιν τὴν Γ τῇ Δ μὴ πᾶσαν προσλαβὼν τὴν τοῦ τμήματος, ἔτι δ' ἀπ' ἴσων οὐσῶν τῶν ὅλων γωνιῶν καὶ ἴσων ἀφῃρημένων ἴσας εἶναι τὰς λοιπὰς τὰς Ε, Ζ, κτλ.

«[Soit à démontrer] que les angles de l'isoscèle à la base sont égaux. Soient menées [Fig. 2] les droites A, B au centre [du cercle dont le centre est au sommet du triangle et passant par les extrémités de la base]. Si l'on admet que l'angle (A, Γ) [c'est à dire l'angle formé par la ligne A, avec la demi-circonférence] est égal à l'angle (B, Δ) [angle de B avec la demi-circonférence], sans avoir posé, d'une manière générale, que les angles des demi-circonférences [avec les diamètres] sont égaux; si de plus, on admet que l'angle Γ est égal à Δ sans avoir ajouté que cela est toujours vrai des angles d'un segment; et si enfin on déduit de là que les angles E, Z sont égaux, comme différences des angles totaux [(A, Γ), (B, Δ)] et des angles égaux [Γ, Δ], etc.»

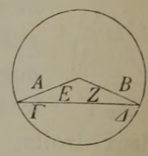


Fig 2.

Aristote critique dans ce qui est contenu dans *etc.*, les syllogismes où n'entrent pas de propositions universelles; mais si l'on introduit dans la démonstration précédente celles dont il signale la nécessité (les angles des demi-circonférences avec les diamètres sont égaux, les angles d'un segment circulaire à ses deux extrémités sont égaux), la démonstration revient à ceci:

$$E = (A, \Gamma) - \Gamma = (B, \Delta) - \Delta = Z.$$

Le théorème sur l'égalité des angles du segment cité ici par Aristote est précisément celui que nous avons utilisé plus haut dans notre interprétation du passage de la Physique; Aristote ajoute un angle mixtiligne à un rectiligne (Γ à E, ou Z à Δ) comme nous l'avons fait. Notre interprétation est donc bien dans l'esprit aristotélicien.

Bemerkungen über die Terminologie des Archimedes.

Von T. Kierboe in Köbenhavn.

Die Frage: „Wie kommt es, daß in die Lehre von den Kegelschnitten solche Termini wie Achse und Scheitel eingekommen sind?“ bildet die Veranlassung zur folgenden Untersuchung. An und für sich könnte diese Frage nur wenig Interesse beanspruchen; es ergibt sich aber, daß ihre Beantwortung auch für andere Fragen historischer Natur von Bedeutung ist, weshalb wir die Untersuchung etwas breiter als sonst nötig anlegen müssen.

1. In den Elementen Euklids tritt Achse nur als Umdrehungsachse auf (XI def. 15, 19, 22) und Scheitel einer Figur, einer Pyramide, eines Kegels wird als selbstverständlicher Ausdruck ohne jede Erklärung benutzt (VI def. 3, XII 3 u. 10). Wenn wir dann bei Apollonios finden, daß sowohl die schiefen Kegel als die ebenen Schnitte derselben Achsen haben und daß ein beliebiger Punkt eines Kegelschnittes als Scheitel auftreten kann, dann wäre dieser Sprung schwer verständlich, wenn sich kein Zwischenglied angeben ließe. Ein solches bilden aber die Schriften Archimedes', in welchen sich überdies die schrittweise Entwicklung des betreffenden Teiles der mathematischen Terminologie nachweisen läßt.

Um den Gang dieser Entwicklung verfolgen zu können, müssen wir die chronologische Reihenfolge der genannten Schriften, soweit diese bekannt ist, beachten; umgekehrt wird uns dann auch die Terminologie über unsichere Punkte in dieser Reihenfolge Aufschlüsse geben. Bekanntlich kann man durch Benutzung der Vorreden und der Stellen, wo Archimedes eigene Werke zitiert oder benutzt, folgende Ordnung derjenigen seiner Schriften, die uns hier interessieren, aufstellen:

„Quadratur der Parabel“,
zweites Buch „vom Gleichgewichte der Ebenen“,
zwei Bücher „von Kugel und Zylinder“,
„von den Spiralen“,
„von Konoiden und Sphäroiden“,
zwei Bücher „von schwimmenden Körpern“.

Vom 2. Buche über Gleichgewicht der Ebenen weiß man übrigens nur, daß es nach dem von der Parabelquadratur zu stellen ist; wir werden im folgenden einen Grund dafür angeben, diese Schrift für jünger als die von den Konoiden und Sphäroiden zu halten. Zu den genannten Büchern kommt noch die wiedergefundene Methodenlehre, deren Platz wir unten ausführlicher besprechen werden.

2. Mit Herrn Heiberg[1]) dürfen wir annehmen, daß die meisten der von Archimedes ohne Definition gebrauchten Kunstwörter von seinen Vorgängern herrühren. Diese bezeichneten die Achsen der Kegelschnitte als Durchmesser, während sie für die Durchmesser keine eigene Benennung hatten. Dieser Mangel wird z. B. merkbar, wenn Archimedes nicht nur Parabelsegmente betrachtet, deren Grundlinien zum Parabeldurchmesser (Achse) senkrecht stehen — wir wollen solche als gerade bezeichnen —, sondern auch schiefe Segmente, für welche seine Methoden ebenso anwendbar sind, in die Betrachtung zieht. Für seine Bestimmungen des Flächeninhaltes und des Schwerpunktes des schiefen Parabelsegments hat nämlich der die Grundlinie desselben halbierende Durchmesser dieselbe Bedeutung wie die Achse beim geraden Segmente; für jene mit dem Segment eng verbundene Gerade mußte er daher eine Bezeichnung finden. Als ein erstes dazu dienendes Mittel begnügt er sich damit, den Endpunkt des erwähnten Durchmessers als Scheitel des Segments zu definieren. Das geschieht im 17. Satze der Schrift von der Quadratur der Parabel, wo auch Basis und Höhe des Segments eingeführt werden. In diesem Satze wird schon benutzt — was zuerst im folgenden Satze bewiesen wird —, daß die vom Mittelpunkt der Basis dem Parabeldurchmesser (Achse) parallel gezogene Gerade durch den Segmentenscheitel geht. Diese Merkwürdigkeit sowie die, daß die neuen Ausdrücke erst nach deren Benutzung definiert werden und daß dieselben nicht gleich nach den ersten, gerade von den Durchmessereigenschaften handelnden Sätzen des Buches eingeführt werden, zeigen, daß Archimedes erst bei der Ausarbeitung des Buches die Notwendigkeit, jene Ausdrücke einzuführen, empfunden hat.

3. Wie zu erwarten, werden die Ausdrücke: Basis, Höhe und Scheitel auch für Segmente der von Archimedes betrachteten Körper in Anwendung gebracht. In den Büchern von Kugel und Zylinder meint er sie ohne Definition benutzen zu können. In der Vorrede zur Schrift von den Spiralen dagegen, wo dem Dositheus die zwei früher an Konon gesandten Sätze über das Umdrehungsparaboloid mitgeteilt werden, werden die Basis eines Paraboloidsegments und der Scheitel desselben — als Rührungspunkt einer der Basis parallelen Ebene — definiert. Das erste Wort, Basis, wird im ersten der erwähnten Sätze gebraucht. Mittels des anderen bekommt

---

1) *Die Kenntnisse des Archimedes über die Kegelschnitte*; Zeitschr. für Math. 25, 1880, Hist Abt. p. 41—67.

der zweite Satz die Form: zwei willkürliche Segmente verhalten sich wie die Quadrate der aus ihren Scheiteln parallel der Achse bis an die schneidenden Ebenen gezogenen Geraden. Hier hat ARCHIMEDES also vergessen, daß er eben die kürzere Bezeichnung Basis eingeführt hat. Wir legen auf diese Stelle besonderes Gewicht, weil daraus wahrscheinlich wird, daß die Sätze nicht in der Formulierung, worin sie für KONON abgefaßt waren, auftreten, daß vielmehr in ihnen die Terminologie repräsentiert werde, die ARCHIMEDES zur Zeit der Abfassung der Schrift von den Spiralen besaß. Dieser Gedanke wird dadurch bestätigt, daß die erwähnten Sätze in der Vorrede zum Buche von Konoiden und Sphäroiden, worin sie noch einmal wiedergegeben werden, mit der in dieser Schrift verbesserten Terminologie übereinstimmend formuliert werden, ohne daß dort ein Wort über die geänderte Redaktion gesagt wird.

4. In dem Buche von Konoiden und Sphäroiden hat, wie angedeutet, die Terminologie eine weitere Ausbildung bekommen. Was früher umständlich das Stück der zur Paraboloidachse parallelen Geraden durch den Segmentenscheitel, welches zwischen diesem und der Basis liegt, hieß, bekommt hier den Namen: Achse des Segments. Auch für gerade Segmente wird dieser Ausdruck von Bedeutung, weil dadurch das im Segment liegende Stück der Umdrehungsachse eine kurze Bezeichnung erhält. Derselbe Ausdruck wird natürlich auch beim Umdrehungsellipsoid und -hyperboloid eingeführt. Die Gerade zwischen dem Scheitel eines Segments und dem Zentrum der Meridiankurve wird Zusatz der Segmentenachse genannt. Während ARCHIMEDES wohl vom Scheitel eines Parabelsegments, nicht aber vom Scheitel der Parabel selbst redet, nennt er dagegen den Schnittpunkt der Umdrehungsachse mit der Oberfläche eines Konoids oder Sphäroids Scheitel des Körpers. Doch bekommt selbst das Ellipsoid nur einen Scheitel; wird von zwei solchen gesprochen, sind sie als Scheitel der zwei von einer Ebene abgetrennten Segmente bezeichnet.

Wie bekannt, werden bei den ARCHIMEDischen Kubaturen der von Konoiden und Sphäroiden abgeschnittenen Segmente diese mit Kegeln (oder Zylindern) auf derselben Grundfläche verglichen. Ist das Segment schief, wird die Kegelbasis elliptisch; um dann Gleichartigkeit der Ausdrucksweise zu erlangen, zeigt ARCHIMEDES, daß sich Kreisschnitte an einem solchen Kegel befinden, und kann dann diesen, den er in der Vorrede vorsichtig „Figur“ nennt, als Kegelsegment bezeichnen, indem für ihn Kegel dasselbe als Kreiskegel bedeutet. Auf ähnliche Weise bekommt die den Kegelscheitel mit dem Zentrum der Ellipse verbindende Gerade den Namen: Achse des Kegelsegments.

5. Nach diesem kann es nicht wundern, in Schriften, die jünger sind als die von Konoiden und Sphäroiden, auch den Ausdruck: Achse eines

Kugelsegments für die Gerade zu finden, die in den Schriften von Kugel und Zylinder und von den Spiralen als Höhe bezeichnet wurde.[1])

Wundern kann es auch nicht, wenn wir zur selben Zeit wie den Ausdruck: Achse eines Paraboloidsegments, den damit verwandten: Durchmesser eines Parabelsegments auftreten sehen. Letzterer wird im 3. Satze als die Halbierungslinie aller zur Grundlinie parallelen Geraden definiert. Diese Definition ist übrigens nicht ganz genau, unter Segmentendurchmesser versteht Archimedes sonst nur das im Segment liegende Geradenstück. Eingeführt wird der Ausdruck nur wegen der bequemeren Formulierung des Satzes: zwei Parabelsegmente sind gleich, wenn ihre Durchmesser es sind. Für diesen Satz hat Archimedes in dieser Schrift keinen Gebrauch. Er beweist ihn durch den Nachweis, daß die Dreiecke, welche dieselbe Basis und denselben Scheitel wie die Segmente haben, gleich sind, weil die Höhen (ΘH, AK) ihrer Hälften es sind, was sich mittels der bekannten Eigenschaften der Parabel beweisen läßt.[2]) Im 23. Satze, — außer dem dritten der einzige, worin der Segmentendurchmesser vorkommt — wird aber die Gleichheit der Dreiecke als Beweis dafür angeführt, daß die genannten Höhen (dort als $E\Theta$, AX bezeichnet) gleich sind. Archimedes hätte also nicht nötig gehabt, den Satz über die gleichgroßen Dreiecke und den daraus folgenden über die Parabelsegmente einzuführen. Beachten wir noch, daß im 22. Satze der Ausdruck Segmentendurchmesser nicht, wie man es erwarten sollte, vorkommt, so müssen wir das Auftreten dieses Ausdrucks in der Schrift von Konoiden und Sphäroiden als ein recht zufälliges bezeichnen. In dieser Schrift wird für die Eigenschaften des Segmentendurchmessers im 3. Satze auf die Kegelschnittlehre hingewiesen. Ganz anders verhält es sich mit dem 2. Buche vom Gleichgewichte der Ebenen, wo der genannte Ausdruck überall mit Vorteil und ohne jede Definition oder Erklärung benutzt wird. Insofern man also die letztgenannte Schrift als ein selbständiges Werk, nicht bloß als ein Bruchstück betrachten will, wird man dazu genötigt, sie als die jüngere anzusehen.

6. Wenden wir uns nun der Kegelschnittlehre des Apollonios zu, so finden wir hier die Terminologie Archimedes' benutzt oder weiterentwickelt. Ohne Bedenken wird der Ausdruck: Achse eines schiefen Kreiskegels eingeführt. Für den Durchmesser eines Kegelschnittsegments wird aber der bessere Name: Durchmesser des Kegelschnittes gefunden. Dann wird für die früheren Durchmesser eine Bezeichnung nötig. Da aber bei Archi-

1) Zum Beispiel im 1. Buche von schwimmenden Körpern Satz 8—9: Archimedis *Opera omnia* ed. J. L. Heiberg II² (Leipzig 1913), p. 336, 340.

2) Archimedis *Opera omnia* ed. J. L. Heiberg I² (Leipzig 1910), p. 274.

medes oft die Kegelschnitte als Achsenschnitte von Konoiden und Sphäroiden auftreten, weshalb dieselbe Gerade als Achse des Körpers und Durchmesser des Kegelschnittes bezeichnet wird, lag es nahe, den Namen Achse zu wählen. Daß jedoch Apollonios nur zögernd das Wort Achse, das er schon für die Kegelachse verwertet hat, benutzt, darf man wohl daraus schließen, daß er im ganzen ersten Buche das Wort vermeidet. Daß sein Gebrauch der Wörter Achse und Durchmesser neu ist, sagt er ausdrücklich in der Vorrede des ganzen Werkes, wo es beim Besprechen des 2. Buches heißt: „Was ich aber Durchmesser und was Achsen nenne, wirst Du aus diesem Buche erfahren.“ Zwar findet sich die Definition der Achsen unter denen, die in dem ersten Buche in dem uns überlieferten Text vorangesetzt sind; daß aber beim Zusammenarbeiten der verschiedenen Ausgaben[1]), in welchen die zwei ersten Bücher von der Hand des Verfassers vorlagen, nicht hinlänglich Rücksicht auf die Definitionen genommen, ist leicht ersichtlich. Wir erwähnen die Doppelbezeichnungen für Parameter und für Durchmesser; auch die gegen die 5. Definition des 1. Buches streitende Anwendung von *diametrus recta* und *transuersa*[2]), sowie daß im 12. Satze des 1. Buches — ganz Archimedisch — nur das im Kegel befindliche Stück des Durchmessers einer an demselben liegenden Hyperbel als Durchmesser bezeichnet wird, nicht aber das aus dem Kegel emporragende, während die erste der sogenannten zweiten Definitionen das Zentrum der Hyperbel, welches ja das letztgenannte Stück halbiert, als Mittelpunkt eines Durchmessers definiert.

Apollonios folgt dem Archimedes darin, daß er den Schnittpunkt eines Durchmessers mit der Kurve Scheitel nennt. Das geschieht jedoch nicht immer, der Punkt wird auch Endpunkt des Durchmessers genannt. Die beiden Schnittpunkte eines Durchmessers mit der Ellipse treten nicht gleichzeitig als Scheitel auf, sie werden öfters als Endpunkte des Durchmessers bezeichnet Nur bei der vollständigen Hyperbel, die als von zwei Kurven zusammengesetzt betrachtet wird, werden beide Schnittpunkte Scheitel genannt.[3]) Die beiden Endpunkte der Hauptachse einer Ellipse oder Hyperbel — und nur diese Punkte — als Scheitel der Kurve zu bezeichnen ist dagegen eine moderne Neuerung.

Der Vollständigkeit halber bemerken wir noch, daß im 6. Buche[4]), das u. a. von Kegelschnittsegmenten handelt, die Archimedischen Defini-

---

1) Apollonii *Quae graece exstant*, ed. J. L. Heiberg I (Leipzig 1891), p. 2; II (Leipzig 1893), p. 176.

2) a. a. O. I p. 184 (Satz I: 58), 376 (Satz III: 27).

3) Apollonii *Quae graece exstant* I p. 8 (Def. 5).

4) Wir machen darauf aufmerksam, daß die von Halley (1710) besorgte lateinische Übersetzung der drei letzten Bücher (V—VII) der Kegelschnittlehre aus dem

tionen der Basis, des Scheitels und Durchmessers eines Segments aufgenommen sind.

7. Die Betrachtung der Terminologie Archimedes' gibt zu einigen Bemerkungen über die chronologische Reihenfolge seiner Schriften Veranlassung. Zuerst bemerken wir, daß im 2. Buche von schwimmenden Körpern[1]) eine sonst unbekannte Schrift „Über Gleichgewicht“ (ἰσορροπίαι) zitiert wird, in welcher bewiesen wurde, daß der Schwerpunkt eines Paraboloidsegments die Achse desselben im Verhältnisse 2/3 teilt, welcher Satz sowohl für ein gerades als für ein schiefes Segment benutzt wird. Daß diese Schrift jünger als die von Konoiden und Sphäroiden ist, kann wohl nicht bezweifelt werden.

Ausführlicher müssen wir über die Schrift von der Methode sprechen, die Herr Heiberg vor wenigen Jahren gefunden hat. Bei der ersten Untersuchung der Handschrift wurde Herr Heiberg auf die Meinung gebracht, daß Archimedes hier zum erstenmal die Kugelkubatur veröffentlicht habe, daß also diese Schrift älter als die Bücher von Kugel und Zylinder wäre. Nach einer erneuten Untersuchung hat aber Herr Heiberg erklärt[2]), daß aus dem Wortlaut der betreffenden Stelle nicht unmittelbar die frühere Annahme gefolgert werden kann. Dennoch hält Herr Heiberg diese für wahrscheinlich, weil nur bei der Parabelquadratur[3]) bemerkt wird, daß der geometrische Beweis früher herausgegeben ist.

Für die großen Schwierigkeiten, welche die genannte Annahme mit sich führt, verweisen wir auf den ausführlichen Kommentar, womit Herr Zeuthen die deutsche Übersetzung begleitet[4]), worin die Frage als offen dahingestellt wird. Unter anderem müßte man den Büchern von Kugel und Zylinder eine ältere Mitteilung über den Rauminhalt von Konoiden und Sphäroiden voraussetzen. Beachten wir die Terminologie, müssen wir noch hinzufügen, daß in einer solchen hypothetischen Schrift die Namen, recht- und stumpfwinkliges Konoid, Achse eines Segments und Achsenzusatz müßten definiert worden sein, denn diese Ausdrücke kommen in der Methodenlehre ohne Erklärung vor. Weder in betreff des Inhaltes noch der Terminologie

---

Arabischen nur mit Vorsicht zu benutzen ist. Durch Vergleich mit dem Bruchstück des 5. Buches, das L. Nix arabisch-deutsch herausgegeben hat (*Das fünfte Buch der Conica des Apollonius von Perga*, Leipzig 1889) zeigt sich z. B, daß Halley im 1. Satze Achse für Durchmesser setzt, was damit in Verbindung stehen möchte, daß er, wie von Nix gezeigt, die Vorrede des 5. Buches an einer wichtigen Stelle gänzlich mißverstanden hat.

1) Archimedis *Opera omnia* II^2 p. 350.

2) Festskrift til H. G. Zeuthen, Köbenhavn 1909, p. 64.

3) Archimedis *Opera omnia* II^2 p. 438.

4) *Eine neue Schrift des Archimedes*; Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/07, p. 321—363.

wäre es daher leicht, den Unterschied zu sehen, der zwischen der bekannten Schrift von Konoiden und Sphäroiden und der hypothetischen bestehen sollte. Entscheidend aber scheint es uns zu sein, daß zur Zeit der Abfassung der Schrift von den Spiralen die Terminologie Archimedes' noch nicht die eben erwähnten Bezeichnungen besaß. Für die Ausdrücke Segmentenachse und Achsenzusatz haben wir dies oben wahrscheinlich zu machen versucht und ebenso für den Ausdruck: Achse eines Kugelsegments, welcher auch in der Methodenlehre ohne Definition vorkommt[1]); hier heben wir noch hervor, daß Archimedes an der früher besprochenen Stelle der Schrift von den Spiralen, wo er die an Konon gesandten Sätze anführt, dem Umdrehungsparaboloid, nachdem er es sorgfältig definiert, den Namen Konoid beilegt. Erst in der Vorrede zur jüngeren Schrift von Konoiden und Sphäroiden, wo er die Definition des Paraboloids sowie die Sätze darüber wiederholt, hat er stillschweigend Konoid durch rechtwinkliges Konoid ersetzt, um nun in seinen als neu erfundenen bezeichneten Sätzen über das Hyperboloid diesen Körper als stumpfwinkliges Konoid bezeichnen zu können. So könnte Archimedes nicht verfahren, wenn er in zwei der Schrift von den Spiralen vorausgehenden Schriften die Namen der zwei Konoiden, in der einen definiert, in der anderen ohne Erklärung benutzt hätte. Die Schrift von der Methode kann also nicht älter als die Bücher von Kugel und Zylinder sein.

Wir sind daher berechtigt, sämtliche dem vom Zylinderhuf vorangehenden Sätze der Methodenlehre einfach als Beispiele aufzufassen, die Archimedes eigenen Werken entnommen hat. Damit stimmt auch die Formulierung dieser Sätze, die nicht die bei ihm übliche ist; so tritt z. B. sein berühmter Satz über den Rauminhalt der Kugel so auf: „Daß jede Kugel usw. läßt sich durch diese Methode so einsehen usw."

Unter den Beispielen findet sich[2]) der Satz über den Schwerpunkt eines Paraboloidsegments — doch nur für den Fall eines geraden Segments — welcher in der oben erwähnten Schrift „Über Gleichgewicht" für willkürliche Segmente bewiesen war. Wahrscheinlich ist es dann, daß auch die übrigen als Beispiele benutzten Sätze über die Schwerpunkte der Segmente von Kugeln, Konoiden und Sphäroiden dieser Schrift entnommen sind, die also älter als die Methodenlehre sein muß.

Für jünger als die Methodenlehre halten wir dagegen die als zusammenhängend zu betrachtenden Bücher von schwimmenden Körpern. Daß diese Bücher jünger als das von Konoiden und Sphäroiden sind, ist schon daraus zu schließen, daß im 4. Satze des 2. Buches[3]) die letztgenannte Schrift

1) Archimedis *Opera omnia* II² p. 470_1, 476_2.

2) Archimedis *Opera omnia* II² p. 458.

3) Archimedis *Opera omnia* II² p. 358.

zitiert wird. Damit übereinstimmend finden sich auch hier die Ausdrücke rechtwinkliges Konoid und Achse, sowohl eines geraden als eines schiefen Segments desselben[1]), ohne Definition benutzt. Auch Durchmesser eines schiefen Parabelsegments tritt hier auf[2]) und im 1. Buche finden wir, wie oben bemerkt, Achse eines Kugelsegments. Einen Grund dafür, diese Bücher zuletzt in der Reihe der von uns besprochenen Schriften zu setzen, finden wir darin, daß Archimedes hier als eine letzte Erleichterung seiner Terminologie den Ausdruck gerades Segment einführt. Dieser Ausdruck, dessen wir uns in dieser Note stets bedient haben, wird sowohl für Segmente des Paraboloids als für die der Parabel[3]) ohne Definition benutzt.

1) Archimedis *Opera omnia* II^2 p. 350.

2) Zum Beispiel a. a. O. II^2 p. 398_{24}. Es wäre daher p. 398_{25} und ebenso p. 396_{36}, 404_{14}, 411_{10} *de conoid.* 3 statt 24 zu zitieren.

3) Archimedis *Opera omnia* II^2 p. 388_{10}.

Das Bruchrechnen des Jordanus Nemorarius.

Von G. Eneström in Stockholm.

Die zwei Algorismusschriften, die in einigen Handschriften dem Jordanus beigelegt werden[1]), enthalten auch einen Abschnitt über Bruchrechnen. Wie ich anderwärts ausführlich begründet habe[2]), ist die kürzere dieser Schriften wahrscheinlich die ältere; von dem Abschnitte über Bruchrechnen sind mir folgende Handschriften bekannt[3]):

1. Cod. Vatic. Ottob. 309 (Bl. 117ʳ Sp. 2 — Bl. 119ᵛ Sp. 2; 14. Jahrh.). Der Abschnitt endet mit den Worten: „Explicit demonstratio Jordanis in algorismum".

2. Cod. S. Marco Florent. 216 (Bl. 39ʳ — 42ᵛ; 14. Jahrh.). Der Abschnitt endet auch mit den Worten: „Explicit demonstratio Jordanis in algorismum".

3. Cod. Dresd. C. 80 (Bl. 182ʳ — 185ᵛ; 15. Jahrh.). Der Traktat endet mit den Worten: „Explicit secundus liber de minutijs Jordanj".

Vermutlich enthält der Cod. Mazarin 3642 (13. Jahrh.) auch den Abschnitt über Bruchrechnen.

Von dem Abschnitte der größeren Algorismusschrift, in dem Bruchrechnen behandelt wird, sind mir folgende Handschriften bekannt[4]):

1. Cod. Borb. Neapol. VIII C. 22 (13 Jahrh.). Der Abschnitt endet mit den Worten: „Explicit demonstratio Jordanis de minutiis".

---

1) Siehe G. Eneström, *Über die „Demonstratio Jordani de algorismo"*; Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/07, S. 24—37. *Über eine dem Jordanus Nemorarius zugeschriebene kurze Algorismusschrift;* Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/08, S. 135—153.

2) Siehe G. Eneström, *Über eine dem Jordanus Nemorarius zugeschriebene kurze Algorismusschrift;* Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/08, S. 147—153.

3) Vgl. G. Eneström, *Über eine dem Jordanus Nemorarius zugeschriebene kurze Algorismusschrift;* Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/08, S. 135—136. — A. A. Björnbo, *Die mathematischen S. Marcohandschriften in Florenz;* Biblioth. Mathem. 12_3, 1911/12, S. 220. — E. Wappler, *Beitrag zur Geschichte der Mathematik;* Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. 5, 1890, S. 161.

4) Vgl. G. Eneström, *Über die „Demonstratio Jordani de algorismo"*; Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/07, S. 25. — M. Curtze, *Über eine Handschrift der königlichen öffentlichen Bibliothek in Dresden*; Zeitschr. für Mathem. 28, 1883; Hist. Abt. S. 6. — A. A. Björnbo, *Die mathematischen S. Marcohandschriften in Florenz;* Biblioth. Mathem. 12_3, 1911/12, S. 209.

2. Cod. Savil. Oxford. 21 (Bl. 146r — 150r; 14. oder 15. Jahrh.). Am Rande steht von einer anderen Hand: „Jordani de fractionibus".

3. Cod. lat. Berol. 4° 510 (Bl. 77r — 81v; 14. Jahrh.). Der Abschnitt ist zwar anonym, aber im Satze 31 wird „ultima de integris" zitiert, und der Abschnitt über ganze Zahlen hat den Titel: „Demonstratio magistri Jordani de algorismo".

4. Cod. Dresd. Db 86 (Bl. 159v—165r; 14. Jahrh.). Anonym.

5. Cod. S. Marco Florent. 206 (Bl. 118v — 124v; 13. Jahrh.). Anonym.

Für diesen Artikel habe ich zur Verfügung gehabt teils eine photographische Kopie des Cod. Vatic. Ottob. 309 Bl. 117—119, teils eine photographische Kopie des Cod. lat. Berol. 4° 510 Bl. 77 — 81. Beide Handschriften sind wegen der zahlreichen Abbreviaturen nicht leicht leserlich, aber ich hoffe, daß ich in den meisten Fällen die richtige Deutung gefunden habe. Offenbare Schreibfehler habe ich ohne weiteres verbessert.

Der Abschnitt über Bruchrechnen beginnt im kürzeren Traktate mit einer Einleitung, die ich hier unten zum Abdruck bringe.

Codex Vaticanus Ottobonianus 309.

[Bl. 117r Sp. 2.] Minutiarum tractatum inchoantes dicimus nichil aliud esse minutias quam partes, alia tamen ratione. Hic quidem secundum relationem ad totum integrum. Hic autem propter continuam quam habent in numeris passionem quoniam a prima integri divisione non cessant crescente denominatione in infinitum decrescere. Exigitur autem denominatio in partibus certitudinis causa, quoniam cum omnis quantitatis notitia ex ipsius ad aliam notam relatione consistat, ad eiusdem relationis certificationem numerali distinctione indigemus. Est autem de integris et partibus agendum vel secundum simplicem relationem qua ad se restituitur omnibus circumscriptis vel secundum tertiam et decimam suppositionem et hic vel discrete quantitatis vel continue. Simplex vero agendi modus utique consonat. Totum autem integrum secundum suppositionem intendimus unum, secundum simplicem intellectum unitatem. Assignantur unitati partes, quoniam integri partitio unitatis est solutio, et ut in unitate integri est componentium unio, ita in eorum distinctione est unitatis divisio, divisio inquam potentialis. Sicut enim in uno integro nondum actu est pluralitas, ita in pluralitate dividentium potentialiter est unitas. Itaque cum fit unum ex pluribus, fit ex pluralitate unitas; cum dividitur unum in plura, solvitur unitas in pluralitatem. In continuis autem et discretis sicut se quadam oppositione respiciunt, ita in eis quadam transumptione unum designatur. In discretis quippe datur unum compositione unitatis, in continuis unione componentium.

Uniuntur minutie vel per se vel cum integris et utrobique vel eiusdem vel diversarum denominationum, eiusdem autem denominationis vel una vel plures, unde in partibus numeri denominantes perpenduntur, quoniam quot fuerint similis denominationis minutie, totus erit numerus eas numerans. Hic autum sumptio vaga est et ordinaria. Vaga est quando singule proprias habent denominationes ex habitudine singularum ad totum et non ad invicem. Ordinaria est quando post singularem et uniformem integri divisionem positiva se quadam dispositione et stabili subsequuntur et sequentes semper respectu precedentium suas sortiuntur denominationes. Alia vero est consimilis et alia dissimilis. Consimilis est quando in eadem denominatione fit progressus ut in opere astronomie integrum primo in .LX. et .LX. iterum in .LX. atque illa etiam in .LX. dividitur et ita in infinitum. Discretio autem ordinum propriis insignitur nominibus. Cum integrum dicitur gradus, et .LX^{ma}. gradus minutum et .LX^{ma}. minuti secundum et .LX^{ma}. secundi tertium et sic deinceps. [Bl. 117^{v} Sp. 1.] Dissimilis quando non est eadem denominatio.

Descriptio autem minutiarum fit duplex, secundum numerum scilicet numerantem et secundum denominantem, et sub duobus modis Primus generalis est nec artificialis, ut numerus numerans premittatur per differentias modo dato designatus et denominatio subsequatur vel nomen proprium minutiarum. Secundus proprius est minutiarum consimilis et est huiusmodi. Primo si integra fuerint, statuantur secundum numerorum rationem per eorum differentias, deinde sub prima differentia integrorum deorsum ordinentur differentie minutiarum, ita ut prima eorum sit minutorum, secunda secundorum, et sic de ceteris. Numeri igitur numerantes eas in ipsarum signentur differentiis, et si in aliqua earum minutie non fuerint, ponantur illic circuli.

Opus minutiarum septenariam divisionem illam superius positam non excedit Quamvis enim quedam videantur diversa interseri, ea tamen ad aliquem locum istarum finaliter respicient. De primis vero quatuor nichil aliud est hic dicendum, quam quod in primo dictum est. In reliquis tribus, quoniam translatione sumuntur nomina, ideo pleniore indigent expositione. Nichil enim esse verius, quam quod per partem fit multiplicatio vel divisio; nichil etiam falsius, quam quod ex multiplicatione minus, ex divisione maius provenit, quia non in divisione contingit cognito modo ut que divisorum, ea sit permutatim dividentium proportio Nichil aliud sit dividere per partem, nisi ut que partis ad totum, ita sit inter dividentes proportio, scilicet dividentis totius ad dividentes partis. Quando igitur quid per partem multiplicatur vel dividitur, que provenient non ad totum vel partem referuntur, sed ad productum ex toto in illud idem.

Hic de toto et parte secundum simplicem eorum relationem dicitur. Restat de eis in cetera suppositione, nisi eadem evenire appareat, demonstretur, et in numeris quidem manifestum est. Pars enim numeri continuo fit numerus, cum per ipsam aliquid dividitur vel multiplicatur, quod exierit non ei vel suo toti comparatur. Ex natura continuitatis quidem tres supra docuimus huiusmodi quantitates: lineam, superficiem, solidum. Linea quidem ducta in lineam faciet superficiem, linea in superficiem solidum. Totum enim integrum nunc lineare, nunc superficiale, nunc solidum, maximeque in multiplicatione ponuntur linee, que cum incerta quantitate integrum sumuntur, namque in se ducte superficiem quadrent, in quas iterum ducte cubica producant; tam ipse quam etiam superficies et cubi eiusdem integri sibi nomen imponunt. Unde dicitur gradus linealis, superficialis et solidus. Ex vi relationis, quoniam gradus in gradum continuo facit gradus, minutum in se faciet secundum, sed respectu gradus producti. Per se enim quelibet minutia, hoc est ex natura supposite quantitatis considerata, integrum est, et integrum simile producit, hoc est minutum facit. Cum vero ex partis multiplicatione producitur secundum, non minus quidem quantitate sed minus secundum proportionem quantitatis.

De radicum extractione non est alia quam de aliis questio.

Cumque hec determinata sint, in hunc modum consequens est exequi quod proposuimus.

Was der Verfasser mit „tertia et decima suppositio" meint, habe ich nicht erraten können; handelt es sich vielleicht um eine Definition der Einleitung zum ersten Abschnitte des Traktates? Sonst geben die philosophischen Ausführungen wenig Anlaß zu Bemerkungen.

Die in der Einleitung definierten Kunstwörter sind:
„minutia" (Bruch), „numerus denominans" (Nenner), „numerus numerans" (Zähler), „vaga sumptio partium" (gewöhnliche Brüche), „ordinaria sumptio partium" (Brüche mit festen Unterabteilungen, wie z. B. die römischen Brüche oder die Sexagesimalbrüche), „consimilis sumptio partium" (Brüche mit festen Nennern von der Form a^n, z. B. die Sexagesimalbrüche), „dissimilis sumptio partium" (Brüche mit festen Nennern, die nicht von der Form a^n sind, z. B. die römischen Brüche).

Ferner wird gelehrt, wie man Brüche schreiben soll; bei gewöhnlichen Brüchen schreibt man erst den Zähler und dann entweder den Nenner oder seine Benennung, also z. B. „3 . 4" oder „3 quarte" für $\frac{3}{4}$. Sexagesimalbrüche werden ganz wie in der „Demonstratio de minutiis" (siehe unten) geschrieben.

Zum Schluß kommen einige, allerdings zuweilen recht dunkle Ausführungen über die Frage, ob bei Multiplikationen das Produkt kleiner, bei Divisionen der Quotient größer als der gegebene Bruch sein kann, und über die Frage, warum z. B eine Minute in sich selbst multipliziert eine Sekunde gibt, obgleich ein Grad in sich selbst multipliziert einen Grad gibt.

Der zweite Abschnitt des größeren Traktates beginnt auch mit einer ausführlichen Einleitung, die ich ebenfalls hier zum Abdruck bringe.

Codex latinus Berolinensis 4^0 510.

[Bl. 77^r] Quidlibet intellectum respectu partis aut partium nuncupatur totum. Quelibet pars rei multiplicata dicitur eius fractio sive minutia. Ipsum autem multiplicatum fractionis totum. Pars restricto vocubulo idem est in hac arte quod fractio. Numerus denominans partem est qui totiens continet unitatem quotiens partis totum continet eam partem. Numerus numerans partes est qui tot continet unitates quot sumpte sunt eiusdem denominantis partes. Omne totum partium denominante crescente in quotlibet eiusdem denominantis partes scinditur intellectu. Vaga partium sumptio est cum non ad se invicem sed ad totum referuntur minucie sub varia denominatione, ut secunda totius et tertia eiusdem. [Bl. 77^v.] Ordinaria sumptio est cum post uniformem integri divisionem minucie se sequentes respectu precedentium sumunt denominantes. Ordinaria consimilis est quando fit in eodem denominante progressus, ut in opere astronomie integrum primo sumptum in 60. scinditur fractiones quarum una deinceps in 60. partes et harum quoque una in totidem divisa pro ipsius operantis arbitrio in infinitum scisio permeabit. In quo opere integrum apellatur gradus, cuius .lx^a. minutum, minuti .lx^a. secundum secundi .lx^{ma}. tertium et deinceps hoc modo secundum naturalem seriem numerorum. Ordinarie consimilis partes cetere et ordines discernuntur. Dissimilis ordinaria est quando eo quo diximus ordine fractiones se sequuntur nec eadem omnibus respectu precedentium denominatio datur, ut cum miliarium ponitur integrum et dividitur in .8. stadia, stadium in c.xxv passus, passus in .v. pedes, pes in .4. palmos, palmus in .4. digitos. Similiter cum cubitus magnus ponitur integrum et dividitur in .6. parvos cubitos, parvus cubitus in tres dimidios pedes, dimidius pes in duos palmos. Similiter cum leuva dividitur in passus mille quingentos secundum Ysidorum, passus in .v. pedes. Similiter cum talentum ponitur integrum et dividitur in 50 libras si sit minimum, in 72 si sit medium, in 120 si sit maximum, libra scindibur in 12 uncias, uncia in duos stateres, sive in vi solidos, stater in duos siclos apud latinos et grecos cum secundum hebreos siclus sit uncia, siclus in duas dragmas, dragma in tres scrupulos, scrupulus in duos obolos, obolus in duo ceratia seu tres siliquos, ceratium in duos calcos. Similiter cum chorus in mensuris ponitur integrum et dividitur in duo gomor, fiunt etiam tria ophy, gomor in tres medimnas, medimna in .v. modios, modius in tria congia et duas tertias unius, congium in sex sextarios, sextarius in duas eminas. Similiter cum chorus dividitur in 30 sata, satum in tres dimidios modios. Similiter cum latus dividitur in 50 sextarios, sextarius in duas eminas, emina in IIIj^{or} acetabulos. Similiter cum lustrum dividitur in 5 annos, annus in 365 dies et tertia unius diei fere, dies in 24 horas, hora in 4 puncta, punctum in 10 momenta, momentum in 12 uncias, uncia in 47 athomos.

Vage sumptionis describuntur minutie numero eas numerante per differentias suas subscripto et denominante suprascripto. In consimilis sumptionis partium descriptione primo loco et summo describitur numerus integrorum per suas differentias et secundo numerans minutorum, tertio secundorum, quarto tertiorum, deinceps eodem modo continuato descensu, ita quod si in aliquo huius continuationis gradu illinc forte gradibus deficient fractiones, eius loci vacuitas circulo denotetur. Si quoque sine integris, in dicta sumptione fractiones proponas, primum eorum locum quicumque est, id est unitatum, circulo nichilominus denotabis. In huius autem sumptionis minutiis denominantes non oportet apponi. Nam cum idem sit omnibus respectu precedentium denominans fractionum, eum est sine figuris retinere facillimum, partiumque nomina sic sumptarum ipsorum determinat ratio locorum, cum primus sit integrorum, secundus minutorum, tertius secundorum, et deinceps dicto modo. Eiusdem generis [sunt] fractiones quarum quelibet alias proportionem respicit quantitatis ut si omnes linee sint vel erunt superficies vel alteriusmodi eodem modo sumpte. Diversorum generum sunt fractiones que se prenominato non respiciunt modo, ut si una sit linea, altera superficies vel soliditas, non est enim linee ad superficiem vel soliditatem proportio nec permutatim. Similes sunt fractiones eundem denominantem habentes.

Multiplicata linea per lineam producit superficies, linea ducta in superficiem solidum, superficies in superficiem nichil, solidum in solidum nichil, solidum in superficiem nichil.

Nota est fractio cum eius ad suum totum nota est proportio.

Omne totum et suum par(?) equale vel quadratum vel solidum dicitur ysometra. Omne totum et aliud quod non est suum equale vel quadratum vel solidum dicitur etherometra.

Addere in partibus est eis dīsim(?) propositis summam coniunctarum invenire.

Subtrahere est maioris summe minutiarum ad minorem aliquam superfluum extrahere.

Duplare est datorum summe partium duplum invenire. Dimidiare est summe partium duplum date subduplum assignare.

[Bl. 78^{r}] Multiplicare est dare partes productas ex datis multiplicantibus in datas multiplicatas.

Dividere est datis multiplicantibus datorum productorum dare multiplicata ad ea producenda.

Radicem extrahere est minutias dare que in se ipsas ducte datas minutias ad proximum producant. Non est autem operandum secundum dictos modos operandi in partibus nisi in eis quarum tota sunt ysometra.

Die Kunstwörter, die in dieser ausführlichen Einleitung definiert werden, sind in erster Linie:
„fractio" oder „minutia", „numerus denominans", „numerus numerans", „vaga sumptio partium", „ordinaria sumptio partium", „consimilis sumptio partium", „dissimilis sumptio partium" (viele Beispiele dieser Art von Brüchen werden erwähnt).

Dann wird gelehrt, wie man Brüche schreiben soll; allerdings wird weder hier noch im folgenden eine schriftliche Darstellung von Brüchen gegeben, aber man sieht, daß die Schreibweise dieselbe sein muß wie in der von M. Curtze 1898 herausgegebenen Algorismusschrift aus dem 12. Jahrhundert.[1] Der gewöhnliche Bruch $\frac{2}{3}$ sollte also etwa durch $\begin{matrix}2\\ \overline{3}\end{matrix}$ dargestellt werden, und die Sexagesimalbrüche werden nicht von links nach rechts, sondern von oben nach unten geschrieben, also z. B. $\begin{matrix}2\\10\\32\\57\end{matrix}$ statt $2^0\,10'\,32''\,57'''$. Wenn ganze Grade oder Brüche irgendeiner Art fehlen, soll der leere Raum durch einen Kreis ausgefüllt werden.

Endlich werden noch folgende Kunstwörter definiert:
„fractiones eiusdem generis" (benannte Brüche derselben Art, z. B. verschiedene Teile einer Länge), „fractiones diversorum generum" (benannte Brüche, die nicht verglichen werden können, z. B. Teile der Längeneinheit und der Flächeneinheit), „similes fractiones" (gleichnamige Brüche), „addere", „subtrahere", „duplare", „dimidiare", „multiplicare", „pars multiplicans", „pars multiplicata", „dividere", „radicem extrahere".

Noch zwei andere Kunstwörter werden aufgeführt, nämlich „ysometra" und „etherometra"; allerdings ist die Erklärung dieser Wörter nicht ganz deutlich, aber aus dem, was gesagt wird, kann man schließen, daß es sich um Wurzelausziehen aus Sexagesimalbrüchen handelt und daß

1) M. Curtze, *Über eine Algorismusschrift des XII. Jahrhunderts*; Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. 8, 1898, S. 12—13, 22—23.

„ysometra“ solche Brüche sind, die eine Wurzel haben können, z. B. Sekunden bei Quadratwurzelausziehung, „etherometra“ dagegen Brüche, die kein direktes Wurzelausziehen zulassen, z. B. Minuten

Nach den Einleitungen folgen in den zwei Traktaten die Sätze mit den zugehörenden Beweisen; der kleine Traktat hat 26, der größere Traktat 35, und zwar sind von diesen die Sätze 1—5, 7—25, 30, 35 mit jenen Sätzen 1—26 identisch.

Im folgenden drucke ich die fraglichen 35 Sätze ab und füge Übersetzungen in unsere mathematische Sprache sowie einige Bemerkungen hinzu; dabei nenne ich die kleinere Schrift „Tractatus minutiarum“, die größere Schrift „Demonstratio de minutiis“.

1. *Quotlibet partes similes sic se habent ad totum sicut numerans ad denominantem.*

$\frac{a}{b} : 1 = a : b$. — „Tractatus minutiarum“ Satz 1.

2. *Partes date unius denominationis quomodo se habeant ad partes alterius denominationis investigare.*

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$. — „Tractatus minutiarum“ Satz 2.

3. *Diversarum denominationum partes quotlibet qualiter ad totum se habeant perscrutare.*

$1 : \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = bd : (ad + bc)$. — „Tractatus minutiarum“ Satz 3.

4. *Partes totius similes sunt partes cuiuslibet partis totius numerate a numero qui fit ex numero eam denominante in numerum eas numerantem.*

$\frac{a}{b} = \frac{ac}{b} \cdot \frac{1}{c}$. — „Tractatus minutiarum“ Satz 4.

5. *Cum sit eadem inter numerantes et denominantes proportio, summe partium equales erunt.*

$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$. — „Tractatus minutiarum“ Satz 5.

6. *Cum sint partium summe equales eadem est inter numerantes et denominantes proportio.*

Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so ist $a : c = b : d$. — Fehlt im „Tractatus minutiarum“.

7. *Diversarum denominationum partes in partes similes resolvere.*

Brüche gleichnamig machen; die Regel lautet: „Inveniatur numerus quem omnes numeri denominantes numerent, quem quanto propinquius tanto commodius invenies“, d. h.: je kleiner der gesuchte Nenner ist, um so bequemer wird die Rechnung. Von einem Aufsuchen des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Nenner ist nicht die Rede. — „Tractatus minutiarum“ Satz **6**.

8. *Sumptis similibus partibus qualiter ad minorem reduci possint denominationem inquirere*

Brüche kürzen; es wird bemerkt, daß „si numerans et denominans fuerint contra se primi, frustra laborabis“; sonst sucht man einen gemeinsamen Teiler zu ermitteln. — „Tractatus minutiarum“ Satz **7** („Sumptis simplicibus(!) partibus quotlibet an ad minorem reduci possint denominationem inquirere“).

9. *Minutiis datis alias quaslibet adiungere.*

Addition. Im Texte wird eigentlich nur das Verfahren bei Sexagesimalbrüchen und gewöhnlichen Brüchen, die gleichnamig sind, gelehrt. Erst in einer Randglosse befindet sich die Regel

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

— „Tractatus minutiarum“ Satz **8** (ohne die Regel der Randglosse).

10. *A datis minutiis alias minoris summe detrahere.*

Subtraktion; ganz wie in betreff der Addition. Erst in einer Randglosse befindet sich die Regel $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$. — „Tractatus minutiarum“ Satz **9** (ohne die Regel der Randglosse).

11. *Datas minutias duplare.*

$2 \cdot \frac{a}{b} = \frac{2a}{b}$ oder $\frac{a}{\frac{b}{2}}$. — „Tractatus minutiarum“ Satz **10**.

12. *Partes propositas restat dimidiare.*

$\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{2b}$ oder $\frac{\frac{a}{2}}{b}$. — „Tractatus minutiarum“ Satz **11**.

13. *Ex ductu minutie in minutiam producitur minutia denominata a numero qui fit ex ductu denominantium unius in alterum.*

Hier bedeutet „minutia“ einen Bruch mit dem Zähler 1, und der Satz besagt also, daß $\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d} = \frac{1}{bd}$. — „Tractatus minutiarum“ Satz **12**.

14. *Omnis pars partis est pars totius denominata a numero qui ex denominationibus producitur.*

$\frac{\frac{1}{b}}{c} = \frac{1}{bc}$. — „Tractatus minutiarum“ Satz **13**.

15. *Si a numero quadrato denominatur minutia, quadrata erit, si vero a numero non quadrato radicem non habebit.*

$\frac{1}{b}$ ist eine Quadratzahl, wenn b Quadratzahl ist, sonst nicht. Auch hier bedeutet „minutia“ einen Bruch mit dem Zähler 1. Vermutlich wurde der Satz ursprünglich für Sexagesimalbrüche aufgestellt (vgl. Satz **17**). — „Tractatus minutiarum“ Satz **14**.

16. *Consimilis denominationis minutie a numeris ab unitate proportionalibus denominantur respectu totius, quod si a numeris proportionalibus denominantur consimilis quoque denominitionis erunt ad invicem.*

Wenn $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ eine ununterbrochene Reihe regelmäßiger Brüche und n der Nenner von α_1 ist, so sind die Nenner von $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$ bzw. $n^2, n^3, \ldots$ und umgekehrt. — „Tractatus minutiarum“ Satz **15**.

17. *Si disponantur in ordine minutie consimilis denominationis fueritque denominans earum non quadratus, posite tamen in impari loco quadrate erunt.*

Wenn $1, n, n^2, n^3, \ldots$ die Nenner einer Reihe regelmäßiger Brüche sind und wenn n keine Quadratzahl ist, so sind nur die Brüche mit ungerader Ordnungszahl Quadratzahlen. — „Tractatus minutiarum“ Satz **16**.

18. *Dispositis hoc modo minutiis quecumque inter aliam et totum loco media fuerit, eadem eiusdem radix erit.*

Wenn dieselbe Anordnung wie im vorigen Satze stattfindet, ist der Bruch mit der Ordnungszahl r die Quadratwurzel der Zahl mit der Ordnungszahl $2r$. Der Satz ist natürlich nur dann richtig, wenn überall der Zähler 1 ist. — „Tractatus minutiarum“ Satz **17**.

19. *Minutie equaliter ab invicem distantes sunt proportionales.*

Der Satz ist nur für regelmäßige Brüche mit den Zählern 1 richtig und besagt, daß für eine Reihe solcher Brüche $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r, \ldots$ immer $\alpha_p : \alpha_{p+q} = \alpha_{p+2q} : \alpha_{p+3q}$. — „Tractatus minutiarum“ Satz **18**.

20. *Si minutia in minutiam ducatur quod producitur toto loco a multiplicata distat quoto reliqua distat ab integra.*

Unter derselben Voraussetzung wie im vorigen Satze genügt die Ordnungszahl r des Produktes $\alpha_p \cdot \alpha_q$ der Bedingung $r - q = p$. — „Tractatus minutiarum“ Satz **19**.

21. *Si due minucie in tertiam ducantur et multiplicantia et producta equaliter ab invicem distare necesse est.*

Unter derselben Voraussetzung wie im vorigen Satze genügen die Ordnungszahlen s_1 und s_2 der Produkte $\alpha_p \cdot \alpha_q$ und $\alpha_p \cdot \alpha_r$ der Gleichung $s_2 - s_1 = r - q$. — „Tractatus minutiarum“ Satz **20**.

22. *Si aliquid per partes divisum aliud quodcumque multiplicet, tantum producitur, quantum si singule partium in idem ducantur.*

$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\cdots\right)=a\cdot\frac{1}{b}+a\cdot\frac{1}{c}+a\cdot\frac{1}{d}+\cdots$ — „Tractatus minutiarum“ Satz **21**.

23. *Si numerus in minutias quotlibet eiusdem denominationis ducatur, similis denominationis producentur minutie sed a numero qui fit ex eodem numero in numerum eas numerantem numerate.*

$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}$. — „Tractatus minutiarum“ Satz **22**, wo indessen zwischen „ducatur“ und „similis“ die Worte: „vel totidem denominate a numero qui provenit diviso denominante per eundem numerum“ stehen. Diese Worte scheinen eine unrichtig eingeschaltene Randglosse zu sein; versetzt man sie nach dem Ende des Satzes, besagen sie, daß $a\cdot\frac{b}{c}=\frac{b}{\frac{c}{a}}$.

24. *Si minutie in minutias ducantur, producentur minutie a numero qui a denominantibus continetur denominate et a numero qui a numerantibus continetur numerate.*

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$. — „Tractatus minutiarum“ Satz **23**.

25. *Opus multiplicandi in minutiis expedire.*

Multiplikation. Erst wird die Regel

$$\left(a+\frac{b}{c}\right)\left(d+\frac{e}{f}\right)=ad+\frac{ae}{f}+\frac{bd}{c}+\frac{be}{cf}$$

gelehrt und dann wird angegeben, daß die Brüche gleichnamig gemacht und addiert werden sollen. — „Tractatus minutiarum“ Satz **24**.

26. *Si per minutias dividende sint minutie, ducto numerante divisoris in denominantem dividendi habebitur denominans dividentis, et ducto denominante divisoris in numerantem dividendi habebitur numerans dividentis.*

$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}$. — Fehlt im „Tractatus minutiarum“.

27. *Si numerus per numerum dividendus sit, scriptis minutiis denominatis a divisore et numeratis a dividendo habebitur dividens.*

a durch b dividiert gibt als Resultat den Bruch $\frac{a}{b}$. — Fehlt im „Tractatus minutiarum“.

28. *Si minutie per numerum dividantur ducto illo numero in denominantem, habebitur denominans dividentis et sumpto numerante dividendarum minutiarum habebitur numerans dividentis.*

$\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{bc}$. — Fehlt im „Tractatus minutiarum“.

29. *Si numerus per minutias dividendus sit, denominans per numerum multiplicetur et fiat numerans dividentis et numerans minutiarum fiat denominans et habebuntur minutie dividentes.*

$\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = \dfrac{ac}{b}$. — Fehlt im „Tractatus minutiarum“.

30. *Divisionis opus in minutiis demonstrare.*

Division. Bei gewöhnlichen Brüchen werden gemischte Brüche, wenn solche vorhanden sind, in unechte Brüche verwandelt und dann wird nach den vorhergehenden vier Sätzen verfahren. Bei Sexagesimalbrüchen ist zu beachten, daß der Dividendus numerisch größer als der Divisor sein muß, also eventuell auf eine niedere Minutie zu reduzieren ist. Um zu entscheiden, welche Benennung das Resultat hat, soll die Umkehrung des Satzes **20** benutzt werden. — „Tractatus minutiarum“ Satz **25**.

31. *Equalium radix minutiarum eundem habet cum eis denominantem et radicem ex numerante in denominantem producti numerantem.*

$\sqrt{\dfrac{b}{c}} = \dfrac{\sqrt{bc}}{c}$; hier wird am Anfange „ultima de integris“ zitiert. — Fehlt im „Tractatus minutiarum“.

32. *Quarumcumque numerans et denominans medium proportionalem non habent, fractiones radice necessario carent.*

Wenn ab keine Quadratzahl ist, so hat der Bruch $\frac{a}{b}$ keine Quadratwurzel. — Fehlt im „Tractatus minutiarum“.

33. *Si fractiones radicem habent, numerans et denominans medium proportionalem habent.*

Wenn $\sqrt{\frac{a}{b}}$ eine Zahl ist, muß ab eine Quadratzahl sein. — Fehlt im „Tractatus minutiarum“.

34. *Si aliquem radicem non habent in integris, nec in minutiis.*

Wenn a eine ganze Zahl ist, kann $\sqrt{a}$ nicht ein Bruch sein. — Fehlt im „Tractatus minutiarum“.

35. *Radicem assignatarum partium extrahere.*

Quadratwurzelausziehen. — Gemischte Brüche werden in unechte Brüche verwandelt; bei gewöhnlichen Brüchen wird dann der Nenner quadratisch gemacht und die Quadratwurzel aus dem Zähler gezogen. Bei Sexagesimalbrüchen muß immer die gegebene Zahl auf einen Bruch mit Nenner von der Form 60^{2n} reduziert werden. — „Tractatus minutiarum" Satz **26**, wo indessen die Darstellung des Verfahrens einen interessanten Zusatz enthält, nämlich die angenäherte Berechnung der Wurzel durch Anhängen von Nullen, ganz wie in der von M. Curtze 1898 herausgegebenen Algorismusschrift aus dem 12. Jahrhundert.[1]) Diese Berechnung wird durch die folgenden Worte eingeleitet: „Supponitur autem ab algorismi quedam subtilis commoditas in radicis extractione et est huiusmodi" Der Verfasser des Traktates hat also unmittelbar oder mittelbar die Schrift Alkwarismis benutzt.

Als Beispiel der Beweise der „Demonstratio de minutiis" gebe ich den Beweis des 24. Satzes wieder.

Sint a minutie numerate a b, denominate a c; d minutie denominate ab f, numerate ab e. Ex a in d fiat g, ex b in e h, ex c in f n. Dico quod g numeratur a h et denominatur ab n. Quia enim una a in unam d ducta reddit unam denominatam ab n, per 13 huius de partibus una a in omnes d ducta reddit tot minucias g denominatas ab n quot est d. Cum ergo singule singulas d multiplicent, quotiens una a est in a, totiens tot g, quot sunt d, in g. At quotiens una a est in a totiens unitas est in b, quia b numerat a, et quotiens unitas est in b, totiens e est in h. Ergo quotiens e in h, totiens tot g, quot sunt d, sunt in g, sed e numerat d, ergo quotiens tot unitates, quot sunt minutie d, sunt in h, totiens tot g, quot sunt d, sunt in g. Ergo quot sunt minutie g, tot sunt unitates numeri h, ergo h numerat g. Patet autem quod n denominat g per 13 de partibus.

Die Beweise des „Tractatus minutiarum" sind im allgemeinen viel kürzer, zuweilen sogar so kurz, daß sie recht schwer verständlich sind. Als Beleg drucke ich den Beweis des Satzes **23** (d. h. des soeben behandelten Satzes **24** der „Demonstratio de minutiis") ab.

Quia enim una in unam ducta unam in illa denominatione reddit, eadem in omnes ducta totidem quoque similes producit. Cum ergo singule singulas multiplicabunt, eiusmodi etiam fient, quare ut numerans habeatur minuciarum multiplicatarum, constat, toties oportet coacervari quot fuerint ille que multiplicant.

Welcher von den zwei Traktaten über Bruchrechnen der ältere sei, dürfte schwerlich aus inneren Gründen definitiv festgestellt werden können. Allein der Umstand, daß der „Tractatus minutiarum" nur das Kunstwort

---

1) M. Curtze, *Über eine Algorismusschrift des XII. Jahrhunderts*; Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. 8, 1898, S. 26–27.

„minutia", die „Demonstratio de minutiis" dagegen sowohl „minutia" wie „fractio" benutzt, dürfte darauf hindeuten, daß jene wahrscheinlich die ältere Redaktion sei.

Ebensowenig dürfte man aus inneren Gründen entscheiden können, wann und von wem die Traktate verfaßt wurden. Ich mache nur darauf aufmerksam, daß man aus der schriftlichen Darstellung der Brüche, die in der Einleitung zur „Demonstratio de minutiis" gelehrt wird, schließen könnte, daß dieser Traktat aus dem Ende des 12. oder dem Anfang des 13. Jahrhunderts herrührt und daß einige Sätze der zwei Traktate mit den ersten Sätzen des 9. Buches der *Arithmetica Jordani*, wie sie in der Ausgabe von Lefèvre vorliegt, übereinstimmen.[1]) Man kann also berechtigt sein, bis auf weiteres Jordanus als Verfasser des älteren Traktates zu betrachten.

1) So z. B. ist der Satz 9 : 4 („Quod fit ex ductu duarum partium unius in aliam: est pars denominata a numero qui fit ex ductu duorum numerorum unius in alium illas partes denominantium") derselbe wie der Satz 12 des „Tractatus minutiarum" und der Satz 13 der „Demonstratio de minutiis".

Zwei Bemerkungen zu Stirlings „Lineae tertii ordinis Neutonianae".

Von H. Wieleitner in Pirmasens.

I.

In Cantors Bericht[1]) über Stirlings *Lineae tertii ordinis Neutonianae*[2]) findet man folgenden Satz:

> „Unendlich ferne Punkte aber müssen [bei Kurven] immer angenommen werden, auch bei Ovalen. Bei diesen hat man sich imaginäre in der Unendlichkeit liegende Doppelpunkte vorzustellen."

Cantor gibt außerdem noch das Zitat „Imo hoc in ipsis Ovalibus obtinet; nam concipiendum est eas habere puncta duplicia imaginaria ad distantiam infinitam". Danach scheint wirklich richtig übersetzt zu sein und Stirling muß also diesen offenkundigen Unsinn, den Cantor noch durch Sperren hervorhebt, geschrieben haben. Man denke nur, schon die Ellipse müßte nach dieser kategorischen Behauptung einen oder mehrere unendlich ferne, imaginäre Doppelpunkte haben!

Die Sache sieht aber wesentlich anders aus, sobald man das Stirlingsche Werk selbst zur Hand nimmt. Der angeführte Satz steht in einem Scholion zu der Propositio V, deren Inhalt Cantor (S. 431/32) ausführlich wiedergibt. Das Theorem dieser Propositio lautet in wörtlicher

---

1) M. Cantor, *Vorles. üb. Gesch. d. Math.* 3^2 (Leipzig 1901), S. 430—435, besonders S. 432.

2) Die Schrift hat den genauen Titel: *Lineæ tertii ordinis Neutonianæ, sive illustratio tractatus D. Neutoni de enumeratione linearum tertii ordinis. Cui subjungitur, solutio trium problematum*, Authore Jacobo Stirling, è Coll. Ball. Oxon. — Oxoniæ, E theatro Sheldoniano, impensis Edvardi Whistler Bibliopolæ Oxoniensis, MDCCXVII. Cantor sagt, das „Büchlein" sei „nur 8 Druckbogen stark". Dies ist bibliographisch zum Teil falsch, zum Teil ungenau. Die Schrift ist nämlich 4° und hat (12) + 128 + 19 + (1) S. (mit unnumerierten Textfiguren). Die 128 Seiten der eigentlichen *Lineæ tertii ordinis* entsprechen demnach 16 Druckbogen, die übrigen 20 Seiten enthalten die drei Probleme, die sich mit der Linie schnellsten Falles, mit einer Anwendung der Kettenlinie und mit einer von Leibniz gestellten Trajektorienaufgabe befassen. Ein „Büchlein" ist es trotz des 4°-Formates; der Satzspiegel ist nämlich nur 15 cm $\times$ $8\frac{1}{2}$ cm.

Übersetzung: „Wenn die Ordinate einer Kurve parallel ist einer Tangente in einem unendlich fernen Punkte, so steigt jene Ordinate in der die Kurve definierenden Gleichung nicht zu so vielen Dimensionen an, als die Kurve selbst hat.“ Cantor drückt das in moderner Fassung richtig so aus, die Kurvengleichung enthalte kein Glied mit y^n, wenn die Ordinatenachse[1]) einer Asymptote parallel ist. Daß Stirling dies geometrisch ganz so auffaßte, wie wir es tun, geht sofort aus dem Scholion hervor, das ich jetzt, soweit es für den vorliegenden Zweck nötig ist, zitiere (S. 46/47):

> „Poteram hanc Propositionem eodem modo demonstrasse quo priorem.[2]) Nam in æquatione tot semper peribunt Ordinatæ dimensiones, quot intersectionis ejus puncta abeunt in infinitum. Et si quando in aliquâ curvâ Ordinata non est tot dimensionum quot est curva, semper concipiendum est puncta quædam intersectionis abire in infinitum[3]): imo hoc in ipsis Ovalibus obtinet; nam concipiendum est eas habere puncta duplicia imaginaria ad distantiam infinitam.“

Was meint also Stirling eigentlich? Er sagt, immer wenn bei irgendeiner Kurve die Ordinate nicht in demselben Grade vorkomme, den die Kurve habe, müsse man sich vorstellen, daß gewisse Schnittpunkte [nämlich der zur Ordinatenachse Parallelen mit der Kurve] ins Unendliche gerückt seien. Das ist ja nur die Umkehrung des eben bewiesenen Satzes. Und nun kommt die Behauptung: Selbst bei einem Ovale sei das der Fall; denn man müsse sich dann [natürlich nur unter den erwähnten Umständen] vorstellen, daß ein imaginärer Doppelpunkt im Unendlichen vorhanden sei.[4])

Nun lautet der Ausspruch ganz anders als bei Cantor. Stirling hat vor allem nicht behauptet, daß bei Ovalen immer unendlich ferne Punkte angenommen werden müssen. Zu einer solchen gleichmäßigen Berücksichtigung des Imaginären auch im Unendlichen war die Zeit noch lange nicht reif. Bevor wir aber über das, was Stirling wirklich ausgesagt hat, ein Urteil abgeben, hören wir ihn erst zu Ende. Das Scholion fährt fort:

---

1) Stirling nennt (wie Newton) auch die Abszissenachse selbst „Abscissa“ und die Ordinatenachse, sofern er eine solche benützt, „Ordinata (prima, principalis)“. Der Koordinatenursprung heißt „Principium Abscissae“, im Einklang mit der ursprünglichen Descartesschen Auffassung (vgl. G. Eneström in Biblioth. Mathem. $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 241—243).

2) Nämlich wie den Satz, daß eine Asymptote eine Kurve n^{ter} Ordnung in höchstens $n-2$ Punkten schneiden könne.

3) Diesen Vordersatz, von „Et si . . .“ an, der die ganze Sachlage verändert, hat Cantor also kurzerhand durch den Satz ersetzt „Unendlich ferne Punkte aber müssen immer angenommen werden.“

4) Der Plural im Original ist wohl nur durch den Plural des Subjekts bedingt.

„Finge enim curvam habere tot Asymptotos quot habet dimensiones, quarum nullæ duæ sunt inter se parallelæ: atque Ordinatæ illis æquidistantes tot erunt dimensionum quot est Curva, demptâ unitate. Concipe Asymptotos plures motu angulari latas, donec tandem evadant parallelæ, & ordinatæ omnibus illis parallelæ perdent tot dimensiones quot sunt Asymptoti æquidistantes. Quod si forte æquatio Asymptotos duas vel plures determinans evadat impossibilis, evanescent Asymptoti illæ cum earum cruribus; at Ordinatæ non erunt plurium dimensionum quam antea erant: Atque hinc redditur ratio, quomodo in Ovalibus aliisque curvis, Ordinatarum nulli tangenti ultimæ parallelarum evanescunt dimensiones: sequitur vero in illis casibus dimensionum evanescentium numerum semper esse parem, quoniam radicum impossibilium numerus est par."

Mit etwas anderen Worten sagt also Stirling folgendes. Hat eine Kurve n^{ter} Ordnung n verschiedene Asymptoten, unter denen sich keine Parallelen befinden, so tritt in der Gleichung der Kurve, wenn die Ordinatenachse einer der Asymptoten parallel läuft, nur die Potenz y^{n-1} auf. Läßt man nun irgendwelche ν Asymptoten parallel werden, so tritt nur mehr $y^{n-\nu}$ in der Gleichung auf. Ganz richtig; denn die Kurve hat einen $(n-\nu)$-fachen Punkt im Unendlichen. Wenn nun [in einem solchen Falle, meint Stirling selbstverständlich] die die ν Asymptoten bestimmende Gleichung imaginäre Wurzeln hat, so verschwinden zwar die Asymptoten und die unendlichen Äste. Aber die Ordinaten sind immer noch höchstens von der Dimension $n-\nu$, wobei dann ν nur eine gerade Zahl sein kann. So könne es also kommen, daß bei Ovalen und anderen Kurven die Ordinaten nur bis zur Potenz $n-\nu$ ansteigen, obwohl sie keiner Asymptote parallel laufen.[1])

Dies wäre alles vollständig richtig, wenn Stirling die Punkte im Unendlichen nicht „imaginäre" Doppelpunkte genannt hätte. Sie sind nämlich in Wirklichkeit reell, aber isoliert, oder wie der Newtonsche Ausdruck lautet „puncta conjugata".[2]) Stirling hat also lediglich das — für jene Zeit leicht verständliche — Versehen begangen, daß er an die Möglichkeit (reeller) isolierter Punkte im Unendlichen nicht dachte. Es ging ihm da nicht besser als seinem Meister Newton selbst, der wohl erkannte,

1) Stirling führt weiter noch aus, wenn die Ordinaten einer Asymptote parallel liefen, aber mehrere Dimensionen verlören, jedoch keine Gleichung mit imaginären Wurzeln vorhanden sei, daß dann mehrere Asymptoten in eine zusammengefallen seien.

2) Vgl. Newtons *Enumeratio linearum tertii ordinis,* z. B. S. 7. Lateinisch geschriebener Anhang zu dem Werke *Opticks* (London 1704, gr. 4⁰, 2. Teil, S. 139—162). Wieder abgedruckt (selbständig paginiert, 24 S. gr. 4⁰) in der lat. Übersetzung dieses Werkes *Optice* (von S. Clarke), Londini 1706. Letztere Ausgabe liegt mir vor.

daß die Kurven, die er Hyperbolismen der Hyperbel und der Parabel nennt, im Unendlichen Doppelpunkte besitzen[1]), die Hyperbolismen der Ellipse aber, die dieselbe Gleichungsform haben, wie die der Hyperbel[2]), in diesem Zusammenhange gar nicht erwähnt. Dies ist um so auffallender, als Newton selbst schon den Grund für die Annahme der Existenz eines unendlich fernen Doppelpunktes darin erblickt, daß die Parallelen in der fraglichen Richtung die Kurve (im Endlichen) nur in einem einzigen Punkte schneiden. Dieser Grund ist aber bei den Hyperbolismen der Ellipse in derselben Weise gegeben, wie bei den anderen Hyperbolismen.

Es ist schade, daß Stirling seine in dem angezogenen Scholion entworfene Theorie an keinem Beispiel ausführt. Aber man beschränkte sich im 18. Jahrhundert eben überhaupt auf die Reihenentwicklung der reellen Kurvenzweige. Auch Cramer und Euler machten in dieser Richtung keinen Fortschritt.[3])

II.

Bezüglich des zweiten Punktes, den ich hier zur Sprache bringen möchte, handelt es sich kurz gesagt darum, daß Stirling, nachdem er seine 76 Formen von Kubiken aufgezählt hat, in einem mit *Determinatio Locorum Geometricorum* überschriebenen Abschnitt (S. 120—128) eine Anleitung zur Bestimmung der Art einer durch eine Gleichung gegebenen Kurve geben will. Von Kubiken behandelt er nur zwei Beispiele, nämlich die Gleichungen

$$y^3 + x^3 = a^3 \quad \text{und} \quad y^3 - 2xy^2 + x^2y - a^3 = 0.$$

Ich will mich hierbei nicht aufhalten, wenn ich auch bemerken möchte, daß dies wohl die ersten Beispiele einer Diskussion höherer Kurven über-

1) *Enumeratio*, S. 20.

2) Die von Newton gegebene Form lautet:

$$xyy + ey = cx + d,$$

und es liegt ein Hyperbolismus der Hyperbel, Ellipse oder Parabel vor, je nachdem $c > 0$, < 0, $= 0$ ist. Die (hier zur Abszissenachse) parallelen Asymptoten sind im ersten Falle getrennt und reell, im zweiten Falle konjugiert imaginär, im dritten fallen sie in die x-Achse zusammen.

3) Cramer macht über den Fall der Hyperbolismen der Ellipse nur die Bemerkung, daß die beiden zugehörigen Reihen imaginär würden und daß die Kurven also unendliche Zweige nur hätten in der Richtung der einen Asymptote (s. G. Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, Genève 1750, S. 364). Euler geht in dem 9. Kapitel des II. Bandes der *Introductio in analysin infinitorum* (Lausannæ 1748, S 114—126), das von der Einteilung der Kubiken handelt, überhaupt nicht auf Entwicklungen ein. Vgl. auch den Bericht über *Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit* von A. Brill und M. Noether im Jahresber. d. deutschen Mathem.-Verein. **3**, 1897, z. B. S. 136 und S. 148.

haupt sind, einer Disziplin, die etwas später von DE GUA[1]) und CRAMER (s. o.) zu einer gewissen Vollendung gebracht wurde.

Vielmehr möchte ich das Interesse auf die Diskussion der Kegelschnittgleichung lenken, die vorausgeht. STIRLING gibt zuerst die allgemeine Form

$$y^2 + Axy + By + Cx^2 + Dx + E = 0$$

an, die, wie er sagt, sehr leicht auf die Form

$$yy = Ax^2 + Bx + C\text{ }^{2)}$$

gebracht werden könne. Wie das STIRLING sich ausgeführt dachte, kann man bei CANTOR (a. a. O. S. 433/34) in etwas modernisierter Form lesen. Je nachdem das Glied Ax^2 positiv („affirmativus"), null oder negativ sei, handle es sich um eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse. Die Ordinaten sind dabei als schiefstehend gegen die Abszissenachse gedacht.

Für den Fall der Hyperbel nimmt nun STIRLING eine neue Abszisse $x + \frac{B}{2A}$, so daß die Gleichung die Form erhält $yy = Ax^2 + B$. Für die Ellipse wird die Gleichung umgeformt in $yy = B - Ax^2$. Damit sind die Kegelschnitte, wie wir sagen, auf zwei konjugierte Durchmesser als Achsen bezogen. Diese Darstellung war ja gar nicht neu und jede Gleichung ist nur die Übersetzung eines schon vor APOLLONIUS dem ARCHIMEDES[3]) bekannten Satzes in die Sprache der Algebra. Daß eine so dargestellte Linie wirklich mit einem auf zwei rechtwinklige Achsen bezogenen Kegelschnitt identisch sei, entnahmen FERMAT und DESCARTES und fast alle Geometer des 17. Jahrhunderts aus den *Κωνικά* des APOLLONIUS. Nur J. DE WITT gab hierfür in seinen *Elementa curvarum linearum*[4]) unabhängige, auf anderer Grundlage beruhende Beweise, die aber rein geometrisch waren. Was nun STIRLING hier nach meiner Meinung Neues bietet, ist die Anleitung, wie man aus der Gleichung allein die (schiefwinkligen) Koordinaten der Achsenendpunkte und somit auch die Längen der Achsen errechnen kann, ohne daß nebenbei andere Sätze verwendet würden als solche, die aus der Figur unmittelbar ersichtlich sind.

Dieses Neue scheint mir um so wichtiger, als bis dahin eigentlich wohl nur WALLIS den Gedanken ausgesprochen hatte, man könne aus der

---

1) J. P. DE GUA DE MALVES, *Usages de l'analyse de DESCARTES* etc. Paris 1740.

2) Ich benutze durchweg die Buchstaben STIRLINGS.

3) Vgl. H. G. ZEUTHEN, *Gesch. d. Math. im Altertum und Mittelalter*, Kopenhagen 1896, S. 196/97.

4) Veröffentlicht im II. Bande der durch F. v. SCHOOTEN besorgten 2. Auflage der lateinischen Ausgabe der *Géométrie* DESCARTES' (*Geometria a RENATO DES CARTES* etc.), Amstelædami 1659, S. 120ff. — Vgl. H. G. ZEUTHEN, *Gesch. d. Math. im XVI. u. XVII. Jahrh.*, Leipzig 1903, S. 224—226.

Gleichung des Kegelschnittes alles übrige durch Rechnung ableiten.[1]) Es ist zweifelhaft, ob Fermat, Descartes, sowie des letzteren Kommentatoren und Nachfolger diese Idee überhaupt faßten. Denn ihnen allen war es, soweit ich es übersehen kann, in der Hauptsache darum zu tun, eine gegebene Kegelschnittgleichung zu „konstruieren", d. h. den dazu gehörigen Kegelschnitt zu zeichnen. Auch durch solche Titel wie den des posthumen Werkes von de L'Hospital: *Traité analytique des sections coniques* etc. (Paris 1707) darf man sich nicht zu der Annahme verleiten lassen, als ob es sich hier um eine „Analytische Geometrie" in dem Sinne handle[2]), daß Eigenschaften durch algebraische Rechnung aus den Gleichungen abgeleitet seien.

Das Verfahren, das Stirling einschlägt, ist bei der Hyperbel mit der Gleichung $yy = Ax^2 + B$ folgendes. Mittels $yy = Ax^2$ sind ihm die Asymptoten gegeben.[3]) Er halbiert ihren Winkel und bestimmt die Koordinaten des Schnittpunktes H dieser Halbierungslinie mit der Kurve. Danach läßt sich das übrige ja berechnen, da der Koordinatenwinkel und der Asym-

---

1) Vgl. *Johannis Wallisii . . . de sectionibus conicis, nova methodo expositis, tractatus.* Oxonii 1655. Abgedruckt in den *Opera mathematica,* I. Band, Oxoniæ 1695, S. 291—354, bes. S. 315. — Die Ausführung bleibt bei Wallis freilich noch etwas hinter der Idee zurück.

2) In dem Hauptteil des großen Werkes (459 S. gr. 4° m. 285 Fig. auf 32 Tafeln) treten die Gleichungen fast nur dekorativ auf. Lediglich im 7. Buch, das die Überschrift hat: *Des lieux géométriques,* werden die Gleichungen wirklich zugrunde gelegt. Aber auch L'Hospital ist es im Wesen nur darum zu tun, den durch eine Gleichung dargestellten Kegelschnitt zu zeichnen. Außerdem stellt er noch einige geometrische Örter mittels Koordinaten auf. Das zu leisten lag ja ebenfalls schon in Fermats und Descartes' Absicht. Ich erwähne das L'Hospitalsche Werk deswegen besonders, weil Cantor (*Vorl.* 3², S. 427) über dasselbe einen Bericht gibt, aus dem man über die Art des Werkes gar nichts ersehen kann. Jedoch findet Cantor es erwähnenswert, daß der Verfasser die beiden Zweige einer Hyperbel als „hyperboles opposées" bezeichnet. Was hieran Merkwürdiges sein soll, ist ganz unerfindlich. Wer nur in ein paar gleichzeitige oder vorausgehende Werke über Kegelschnitte flüchtig hineingesehen hat, weiß, daß diese Bezeichnung und Auffassung ganz allgemein üblich war. Auch Stirling hat sie noch (vgl. *Lineæ tertii ordinis,* S. 82), wenn auch bei ihm (und bei Newton) daneben „hyperbola" auch schon beide Zweige zugleich bezeichnet (Stirling S. 121/22; Newton *Enumeratio*, S. 3, 5). Daß alle Schriftsteller hierin nur Apollonius folgen, hätte doch auch Cantor bewußt sein müssen, der über des Apollonius *Κωνικά* im ersten Bande seiner Vorlesungen (3. Aufl., Leipzig 1907) auf S. 334—343 berichtet hat. Apollonius sagt (vgl. *Apollonii Pergaei quae graece exstant.* Ed. I. L. Heiberg. Vol. I, Leipzig 1891, S. 52/53 und 54/55): *Καλείσθωσαν δὲ αἱ τοιαῦται τομαὶ ἀντικείμεναι* und *Λέγω, ὅτι ἑκατέρα τῶν . . . τομῶν ἐστιν ἡ καλουμένη ὑπερβολή.* Er nennt also solche Schnitte „entgegengesetzt" und sagt, daß jeder derselben eine sogenannte Hyperbel sei.

3) Hier ist im Text ein Versehen, offenbar nur ein Druck- oder Schreibfehler.

ptotenwinkel bekannt sind. Stirling führt diese Winkel allerdings nicht ein, so daß er zu keinen expliziten Formeln gelangen kann.[1]) Bei der Ellipse schneidet er zuerst die Kurve mit der Abszissenachse in L, beschreibt mit dem so gefundenen Halbmesser $CL = \sqrt{\frac{B}{A}}$ einen Kreis um den Mittelpunkt C, der die Kurve zum zweitenmal in E trifft und bestimmt die Koordinaten von E.[2]) Hierauf halbiert er den Winkel ECL und bestimmt die Koordinaten des Scheitels H der Ellipse. Damit sei ja auch CH der Größe nach gegeben. Für die kleine Achse habe man ähnlich zu verfahren. Bei der Parabel mit der Gleichung $yy = Ax + B$ bestimmt er ebenfalls zunächst den Schnittpunkt A der Abszissenachse mit der Kurve, errichtet in A das Lot auf die Achse und berechnet die Koordinaten des Schnittpunktes L dieses Lotes mit der Kurve. Hierauf zieht er im Mittelpunkt E von AL eine Parallele zur Abszissenachse und erhält dadurch die Koordinaten des Scheitels H.[3]) Der Hauptparameter („latus rectum principale") sei ja dann gleich $\frac{AE^2}{HE}$. Danach könne die Parabel konstruiert werden.

Daß Stirling sich selbst bewußt war, mit der Angabe eines Berechnungsverfahrens für die Achsen aus der auf beliebige konjugierte Durchmesser bezogenen Gleichung etwas Neues gemacht zu haben, geht aus seinen Worten hervor (S. 125):

> „Haec tria Problemata soluta dare malui ex nudâ naturâ æquationum curvas definientium; quam per quasdam *Apollonii* Propositiones more veterum Geometrarum: Hoc modo enim melius innotescit analogia inter Loca secundi ordinis & Loca tertii & superiorum ordinum."

In der Tat ist Stirlings Verfahren, so unvollkommen in der Form es uns auch heute erscheinen mag, der erste Schritt zur Transformation der

---

1) Wenn in einem Dreieck die Winkel bekannt sind, so bezeichnet er ein Seitenverhältnis, das er gerade braucht, mit $C : D$. Daß man die längst bekannten trigonometrischen Sätze auch in der „Geometrie" anwenden könne, scheint erst Euler eingeleuchtet zu haben (*Introductio*, Bd. II, an versch. Stellen). Noch heute sind ja fast überall im Schulunterricht „Geometrie" und „Trigonometrie" getrennte Fächer. Die letztere wurde auch sehr spät in die Lehrprogramme aufgenommen, in Bayern zum erstenmal in der Schulordnung von 1854.

2) Die Gleichung des Kreises stellt er nicht auf; aber er rechnet mit x, y, A, B und angenommenen Verhältniszahlen C, D unter Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes.

3) Die Konstruktionen der Achsen, von denen Stirling ausgeht, sind natürlich uralt (vgl. Apollonius a. a. O. S. 266 ff., der allerdings auch bei der Hyperbel den konzentrischen Kreis benutzt).

Kegelschnittgleichung auf die Hauptachsen[1]), die allerdings erst dem 19. Jahrhundert angehört.[2])

---

1) Selbst wenn Cantor etwa den Stirlingschen Rechnungen eine wesentlich geringere Bedeutung zuweisen wollte, wäre es im Hinblick auf den von ihm gegebenen Bericht über das 5. Kapitel des II. Bandes von Eulers *Introductio* (*Vorl.* **3**², S. 804—806) doch gut gewesen, sie wenigstens zu erwähnen. Dort fehlt aber jeder Hinweis auf Newtons und Stirlings Vorgängerschaft.

2) Vgl. *Enzyklopädie der math. Wiss.*, Bd. III 2, S. 25/26 (Artikel von F. Dingeldey). Die Berechnung der Achsen auf der Grundlage der von Stirling benutzten Gleichungen leistete allerdings schon Euler im II Band der *Introductio* (S. 54—60) unter Verwendung trigonometrischer Funktionen in fast moderner Weise. Er bestimmte zuerst Längen und Neigung eines beliebigen Paares konjugierter Durchmesser und stellte dann die Bedingung der Rechtwinkligkeit, die ihm die Richtung der Achsen und damit auch deren Längen ergab.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage[1]) von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“.

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen“.
BM = Bibliotheca Mathematica.

1^3**: 12, 15, 22,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 61. — **1**^{3}**: 30,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 331. — **1**^{3}**: 33,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 307. — **1**^{3}**: 51, 58, 66, 71, 106, 146, 152, 153, 155, 157, 158, 159, 160, 162,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 61—64. — **1**^{3}**: 163—165,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 64, 173—174. — **1**^{3}**: 166, 168, 176, 180, 181, 182, 183,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 64—65. — **1**^{3}**: 198, 201,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 237. — **1**^{3}**: 202,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 307—309. — **1**^{3}**: 203,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 65, 309. — **1**^{3}**: 206,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 237—238. — **1**^{3}**: 213, 225, 236,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 65. — **1**^{3}**: 244,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 341. — **1**^{3}**: 245,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 65. — **1**^{3}**: 252,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 164. — **1**^{3}**: 257,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 139. — **1**^{3}**: 270, 287, 297,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 66. — **1**^{3}**: 298,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 66; **10**$_3$, 1909/10, S. 53—54. — **1**^{3}**: 310,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 66. — **1**^{3}**: 320,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 149—150. — **1**^{3}**: 335, 339—340, 344, 348,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 174—176. — **1**^{3}**: 351,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 66. — **1**^{3}**: 365, 368,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 177. — **1**^{3}**: 372,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 411—412; **9**$_3$, 1908/9, S. 238. — **1**^{3}**: 374, 376,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 412—413. — **1**^{3}**: 380,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 66—67. — **1**^{3}**: 383—384,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 164—165. — **1**^{3}**: 388,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 177. — **1**^{3}**: 394,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 165. — **1**^{3}**: 401—402,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 239. — **1**^{3}**: 406,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 177—178. — **1**^{3}**: 409,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 178; **9**$_3$, 1908/9, S. 239. — **1**^{3}**: 410,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 178. — **1**^{3}**: 429,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 67. — **1**^{3}**: 431,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 67; **9**$_3$, 1908/9, S. 139—140. — **1**^{3}**: 432,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 67, 178—179. — **1**^{3}**: 433,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 179. — **1**^{3}**: 444,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 242. — **1**^{3}**: 447, 448,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 239—240. — **1**^{3}**: 452,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 179. — **1**^{3}**: 459,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 309—310. — **1**^{3}**: 464,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 179. — **1**^{3}**: 470,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 311. — **1**^{3}**: 471,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 413. — **1**^{3}**: 476,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 71—72. — **1**^{3}**: 488,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 67. — **1**^{3}**: 498,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 180. — **1**^{3}**: 500,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 67; **9**$_3$, 1908/9, S. 321—322. — **1**^{3}**: 502,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 67. — **1**^{3}**: 503—504,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 180—181; **9**$_3$, 1908/9, S. 240—241. — **1**^{3}**: 509, 510,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 67. — **1**^{3}**: 512,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 140—141. — **1**^{3}**: 513, 515, 528,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 68. — **1**^{3}**: 531,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 242—243. — **1**^{3}**: 545,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 68—69. — **1**^{3}**: 551,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 141—142. — **1**^{3}**: 556,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 54. — **1**^{3}**: 563—564,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 69. — **1**^{3}**: 567,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 241. — **1**^{3}**: 576,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 69—70, 181; **9**$_3$, 1908/9, S. 142. — **1**^{3}**: 580, 583, 590—591, 660, 664, 703, 704,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 70. — **1**^{3}**: 706,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 70, 181. — **1**^{3}**: 710,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 241. — **1**^{3}**: 713,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 70; **11**$_3$, 1910/11, S. 332. — **1**^{3}**: 715,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 241. — **1**^{3}**: 715—716,** siehe

1) Dritte Auflage des 1. Bandes, zweite Auflage der 2. und 3. Bände.

BM **8**$_3$, 1907/8, S. 70—71, 181. — **1^3: 717,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 71, 182—183. — **1^3: 718,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 71; **9**$_3$, 1908/9, S. 242. — **1^3: 719,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 183—184. — **1^3: 720,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 71. — **1^3: 730,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 71, 184—185. — **1^3: 734,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 71. — **1^3: 736,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 242. — **1^3: 736—737,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 71—72, 185. — **1^3: 738,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 72. — **1^3: 742,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 242. — **1^3: 743, 748, 750,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 72. — **1^3: 762,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 151. — **1^3: 763,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 242. — **1^3: 764,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 185. — **1^3: 766,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 143. — **1^3: 770,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 185. — **1^3: 771,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 143. — **1^3: 779,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 243. — **1^3: 780, 781,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 72. — **1^3: 792,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 143—144. — **1^3: 794,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 72. — **1^3: 795,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 243. — **1^3: 798,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 144; **11**$_3$, 1910/11, S. 332—333. — **1^3: 800,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 73; **9**$_3$, 1908/9, S. 144—145. — **1^3: 801,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 185—186; **9**$_3$, 1908/9, S. 145. — **1^3: 802,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 73, 186—187, 414—415. — **1^3: 805—806,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 73. — **1^3: 809—810,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 243. — **1^3: 815,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 73. — **1^3: 823,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 243—244. — **1^3: 838,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 415. — **1^3: 842,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 243. — **1^3: 854,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 55. — **1^3: 855,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 73; **11**$_3$, 1910/11, S. 333. — **1^3: 856,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 333. — **1^3: 857,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 73; **9**$_3$, 1908/9, S. 243—244. — **1^3: 859, 862, 863,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 73—74. — **1^3: 867,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 74, 187. — **1^3: 869, 875—876, 877, 878,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 74—76. — **1^3: 881,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 415—416. — **1^3: 882, 889, 893,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 77—78. — **1^3: 900,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 78, 187—188. — **1^3: 901,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 145—146; **10**$_3$, 1909/10, S. 261. — **1^3: 902,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 78—79. — **1^3: 906,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 79, 188—189; **9**$_3$, 1908/9, S. 244; **11**$_3$, 1910/11, S. 344. — **1^3: 908,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 79; **9**$_3$, 1908/9, S. 146—147. — **1^3: 909,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 79. — **1^3: 910,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 79, 416; **11**$_3$, 1910/11, S. 334. — **1^3: 911,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 79—80.

2: 5, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 286; **8**$_3$, 1907/8, S. 80. — **2: 7,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 351. — **2: 8,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 501; **6**$_3$, 1905, S. 309. — **2: 9,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 147. — **2: 10,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502; **9**$_3$, 1908/9, S. 147—148; **12**$_3$, 1911/12, S. 61—62. — **2: 11,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 189. — **2: 14—15,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 144; **5**$_3$, 1904, S. 200; **6**$_3$, 1905, S. 208—209. — **2: 17,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 189. — **2: 20,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502; **3**$_3$, 1902, S. 239. — **2: 25,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 274; **9**$_3$, 1908/9, S. 148. — **2: 26,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 244—245. — **2: 30,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 105; **10**$_3$, 1909/10, S. 166—167. — **2: 31,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 351—352; **3**$_3$, 1902, S. 239—240; **6**$_3$, 1905, S. 309—310; **13**$_3$, 1912/13, S. 66—67. — **2: 32,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 105. — **2: 34,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 144; **6**$_3$, 1905, S. 310; **8**$_3$, 1907/8, S. 190. — **2: 37,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502; **6**$_3$, 1905, S. 105. — **2: 38,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352; **9**$_3$, 1908/9, S. 148. — **2: 39,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502; **6**$_3$, 1905, S. 209; **9**$_3$, 1908/9, S. 245. — **2: 41,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352; **8**$_3$, 1907/8, S. 80—81; **9**$_3$, 1908/9, S. 72—73. — **2: 45,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 148—150. — **2: 46,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 81. — **2: 51,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 106; **9**$_3$, 1908/9, S. 150. — **2: 52,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 190—191. — **2: 53,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 201. — **2: 57,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352. — **2: 59,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 207—208; **10**$_3$, 1909/10, S. 262. — **2: 59—60,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502; **6**$_3$, 1905, S. 310—311. — **2: 61,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 85—86, 208—209, 286—287; **9**$_3$, 1908/9, S. 150. — **2: 62,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 335—336. — **2: 63,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 206; **11**$_3$, 1910/11, S. 336—337. — **2: 65,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 151; **11**$_3$, 1910/11, S. 337. — **2: 67,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 209—210. — **2: 70,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 417. — **2: 73,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502. — **2: 75,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 62. — **2: 77,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 152. — **2: 82,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502. — **2: 87,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502; **9**$_3$, 1908/9, S. 323. — **2: 88,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503; **6**$_3$, 1905, S. 395. — **2: 89,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503; **9**$_3$, 1908/9, S. 245—246. — **2: 90,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503. — **2: 91—92,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503; **5**$_3$, 1904, S. 409—410; **6**$_3$, 1905, S. 395—396; **8**$_3$, 1907/8, S. 191; **9**$_3$, 1908/9, S. 152. — **2: 94, 96,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 167—168. — **2: 97,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 406. — **2: 98—99,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 269—270; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 106—107; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 210. — **2:100,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 81; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 73—74. — **2:101,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 396; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 152—153. — **2:103,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 262—263. — **2:104,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 168—169; $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 81. — **2:104—105,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 397—398; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 153. — **2:106,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 380. — **2:111,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2:112,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 56. — **2:112—113,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 56—57. — **2:114,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 153; $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 57. — **2:116,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 153—154. — **2:117—118,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 107, 311. — **2:122,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503—504; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 397. — **2:126,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 210. — **2:127,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2:128,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 191—192. — **2:129,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 287. — **2:132,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 515—516. — **2:134,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 338. — **2:143,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2:144,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 381. — **2:145,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 287. — **2:148,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 381—382. — **2:150—151,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 288. — **2:155,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 323—325. — **2:155—156,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 410—411; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 86—87. — **2:157, 158,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2:160—162,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 311—312; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 87—88; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 154. — **2:163,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 312. — **2:164,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 313. — **2:165,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 382; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 246—247. — **2:166,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2:171,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 58. — **2:175,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2:178—179,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 192—193; $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 58. — **2:206,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 313. — **2:208,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 247; $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 62—63. — **2:210,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352—353. — **2:216, 217,** siehe BM $\mathbf{13}_3$, 1912/13, S. 261—262. — **2:218,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 284. — **2:219,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353. — **2:222,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 397—398. — **2:224—226,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 155. — **2:228,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 193. — **2:229,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504—505; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 194; $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 263; $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 345. — **2:230,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 195—196; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 155—157. — **2:232, 234, 237,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 196—198. — **2:238,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 198; $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 59, 169. — **2:240,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 198—199; $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 59. — **2:242,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 505; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 199—200. — **2:243,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 505; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 398; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 382; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 200. — **2:245,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 383. — **2:246,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 283; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 200. — **2:247,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 383—384; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 247. — **2:249,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 200—201. — **2:250,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 82. — **2:253,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353. — **2:272,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 247. — **2:273,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 505. — **2:274,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325. — **2:281,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 411. — **2:282, 283,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353—354. — **2:284,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 157—158; $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 160; $\mathbf{13}_3$, 1912/13, S. 262—263. — **2:286, 287, 289, 290, 291,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506—507. — **2:296,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354. — **2:304,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 201. — **2:305,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 88. — **2:306, 308,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 248. — **2:309,** siehe BM $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 244; $\mathbf{13}_3$, 1912/13, S. 154—155. — **2:310, 311,** siehe BM $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 244—245. — **2:313,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2:314,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 288—289; $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 245. — **2:315,** siehe BM $\mathbf{13}_3$, 1912/13, S. 155. — **2:317,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 69; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 384; $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 245—246. — **2:318,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 158; $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 246. — **2:319,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 201—202. — **2:320,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 88—89; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 248; $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 346—347. — **2:322,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 399; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 202—203. — **2:325,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 313—314. — **2:326,** siehe BM $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 247. — **2:327,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 248—249. — **2:328,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 285. — **2:329, 330, 331,** siehe BM $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 247—248. — **2:334,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2:337,** siehe BM $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 249. — **2:339,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 82. — **2:341, 343,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 170. — **2:351,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 399. — **2:353,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87. — **2:355, 357,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 399—400. — **2:358,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 203. — **2:360,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87. — **2:363,** siehe BM $\mathbf{13}_3$, 1912/13, S. 339. — **2:371,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 314. — **2:375,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 75; **12**$_3$, 1911/12, S. 249. — **2 : 375—376, 376—377,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 250. — **2 : 379,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 400; **7**$_3$, 1906/7, S. 384. — **2 : 380,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 400—401. — **2 : 381,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 382,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 60. — **2 : 385,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 81; **4**$_3$, 1903, S. 207; **7**$_3$, 1906/7, S. 289; **10**$_3$, 1909/10, S. 170. — **2 : 386,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507; **5**$_3$, 1904, S. 306. — **2 : 388,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 289. — **2 : 392,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 82; **10**$_3$, 1909/10, S. 171. — **2 : 395,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507—508. — **2 : 396,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 82. — **2 : 397,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 211. — **2 : 398,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 204; **9**$_3$, 1908/9, S. 158—160. — **2 : 399,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 107—108; **8**$_3$, 1907/8, S. 204—205; **10**$_3$, 1909/10, S. 344—345. — **2 : 401, 405,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 410,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 290. — **2 : 411,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 89; **12**$_3$, 1911/12, S. 250. — **2 : 412,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 89. — **2 : 413,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 205. — **2 : 416,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 251. — **2 : 419,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 205—206; **9**$_3$, 1908/9, S. 249—250. — **2 : 420,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 83, 206; **10**$_3$, 1909/10, S. 345. — **2 : 421, 422,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 206. — **2 : 423,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 345; **13**$_3$, 1912/13, S. 340. — **2 : 425,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 426,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 207; **10**$_3$, 1909/10, S. 60—61; **12**$_3$, 1911/12, S. 251. — **2 : 427,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 314—315; **8**$_3$, 1907/8, S. 207. — **2 : 428,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 208; **9**$_3$, 1908/9, S. 160. — **2 : 429,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 201—202; **8**$_3$, 1907/8, S. 208—209. — **2 : 430,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 145. — **2 : 434,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 160—161. — **2 : 435,** siehe BM **13**$_3$, 1912/13, S. 340—341. — **2 : 436,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 345—346; **13**$_3$, 1912/13, S. 341—342. — **2 : 437—438,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 209—210. — **2 : 440,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 285. — **2 : 441,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 161; **12**$_3$, 1911/12, S. 251. — **2 : 442,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 325. — **2 : 443,** siehe BM **13**$_3$, 1912/13, S. 69. — **2 : 444,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 210; **13**$_3$, 1912/13, S. 69. — **2 : 446,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 250; **12**$_3$, 1911/12, S. 252. — **2 : 449,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140; **10**$_3$, 1909/10, S. 171. — **2 : 452,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 210. — **2 : 454,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 242. — **2 : 457,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 250—251. — **2 : 469,** siehe BM **13**$_3$, 1912/13, S. 342. — **2 : 471,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 161. — **2 : 474,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140—141; **9**$_3$, 1908/9, S. 161, 251. — **2 : 476,** siehe BM **9**$_3$, 1908, S. 75. — **2 : 479—480,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141; **7**$_3$, 1906/7, S. 290—291, 385; **9**$_3$, 1908, S. 75, 251. — **2 : 481,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 508; **8**$_3$, 1907/8, S. 83. — **2 : 482,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 508; **2**$_3$, 1901, S. 354; **3**$_3$, 1902, S. 240; **6**$_3$, 1905, S. 401; **11**$_3$, 1910/11, S. 81. — **2 : 483,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 291. — **2 : 484,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 486, 489,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2 : 490,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509; **7**$_3$, 1906/7, S. 385—386; **11**$_3$, 1910/11, S. 161—162. — **2 : 493, 494,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 345—346. — **2 : 497,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509; **4**$_3$, 1903, S. 87; **7**$_3$, 1906/7, S. 291, 386; **11**$_3$, 1910/11, S. 81—82; **13**$_3$, 1912/13, S. 155—156. — **2 : 503, 505,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 292. — **2 : 506, 507,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 162—163. — **2 : 508,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 264—265; **11**$_3$, 1910/11, S. 162—163. — **2 : 509,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270, 509. — **2 : 510,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2 : 512,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 514,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2 : 515,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 163—164. — **2 : 516, 517,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2 : 518, 519, 519—520, 521, 523, 523—524,** siehe BM **13**$_3$, 1912/13, S. 156—159. — **2 : 524,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 90; **10**$_3$, 1909/10, S. 171—172; **13**$_3$, 1912/13, S. 532—533. — **2 : 525,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 172. — **2 : 527,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 387. — **2 : 529,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 91. — **2 : 530,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 354—355; **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 531,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 212. — **2 : 532,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509; **7**$_3$, 1906/7, S. 292; **8**$_3$, 1907/8, S. 84; **9**$_3$, 1908/9, S. 163—164; **13**$_3$, 1912/13, S. 159—160, 342. — **2 : 533,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 164. — **2 : 535,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509; **11**$_3$, 1910/11, S. 233—234. — **2 : 536,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 212—213; **13**$_3$, 1912/13, S. 160—163. — **2 : 536—537,** siehe BM **13**$_3$, 1912/13, S. 163. — **2 : 537,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 387; **11**$_3$, 1910/11, S. 164—166; **13**$_3$, 1912/13, S. 163, 342. — **2 : 539,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 293; **9**$_3$, 1908/9, S. 252. — **2 : 541,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2 : 542,** siehe BM **13**$_3$, 1912/13, S. 342—343. — **2 : 547,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 84. — **2 : 548,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510; **9**$_3$, 1908, S. 76; **13**$_3$, 1912/13, S. 164. — **2 : 549,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510; **6**$_3$, 1905, S. 401. — **2 : 550,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 355; **9**$_3$, 1908, S. 76. — **2 : 553,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 252. — **2 : 554,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510; **12**$_3$, 1911/12, S. 252. — **2 : 555,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 285; **6**$_3$, 1905, S. 322. —

2:558, siehe BM **9**$_3$, 1908, S. 76. — **2:560,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 252. — **2:561,** siehe BM **7**$_3$, 1906, S. 91; **13**$_3$, 1912/13, S. 70. — **2:562,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 253—254. — **2:565,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 285. — **2:566,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 85. — **2:567, 568,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 286. — **2:569,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2:571,** siehe BM **13**$_3$, 1912/13, S. 263—264. — **2:572—573,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510; **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2:576,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 355—356. — **2:579,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 145. — **2:580—581,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 207; **8**$_3$, 1907/8, S. 85—86; **9**$_3$, 1908/9, S. 326—327. — **2:582,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2:583,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270; **2**$_3$, 1901, S. 356; **13**$_3$, 1912/13, S. 164—165. — **2:584,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 166, 340. — **2:585,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 69—70. — **2:592,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2:593,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 387. — **2:594,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270. — **2:597,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270; **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2:599—600,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2:600,** siehe BM **13**$_3$, 1912/13, S. 264. — **2:602,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270. — **2:603—604,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270—271; **6**$_3$, 1905, S. 108; **8**$_3$, 1907/8, S. 211. — **2:605,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 86. — **2:608,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 346—347. — **2:610,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 388. — **2:611,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 356—357. — **2:612,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146; **8**$_3$, 1907/8, S. 212; **13**$_3$, 1912/13, S. 71. — **2:612—613,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 91—92. — **2:613,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357; **5**$_3$, 1904, S. 306; **7**$_3$, 1906/7, S. 294, 388—389. — **2:614,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2:617, 619,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 108—109. — **2:619,** siehe BM **13**$_3$, 1912/13, S. 264—265. — **2:620,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2:621,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146; **6**$_3$, 1905, S. 402; **7**$_3$, 1906/7, S. 214, 389; **8**$_3$, 1907/8, S. 86—87; **9**$_3$, 1908, S. 77. — **2:622,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 87. — **2:623,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146—147. — **2:624, 625,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 87—88. — **2:626,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 389—390. — **2:632,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 109. — **2:633,** siehe BM **13**$_3$, 1912/13, S. 165. — **2:634,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 315; **13**$_3$, 1912/13, S. 165. — **2:635,** siehe BM **13**$_3$, 1912/13, S. 166—167. — **2:637,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 315—316. — **2:638,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 147. — **2:639,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 77; **11**$_3$, 1910/11, S. 341—342. — **2:640,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 234—235. — **2:641,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 253; **11**$_3$, 1910/11, S. 235—237; **13**$_3$, 1912/13, S. 72. — **2:642,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271; **13**$_3$, 1912/13, S. 72—73. — **2:643,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271; **7**$_3$, 1906/7, S. 391. — **2:644,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 402—403. — **2:647, 648,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 63—64. — **2:652,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 347. — **2:653,** siehe BM **13**$_3$, 1912/13, S. 265—266. — **2:655,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357; **10**$_3$, 1909/10, S. 265—266. — **2:656,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 286. — **2:659, 660,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 147—148. — **2:661,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 403. — **2:663,** siehe BM **13**$_3$, 1912/13, S. 73—74. — **2:665,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271. — **2:666,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 88—89; **9**$_3$, 1908/9, S. 164—165; **12**$_4$, 1911/12, S. 254. — **2:667,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 89. — **2:669,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 203. — **2:670,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 403; **7**$_3$, 1906/7, S. 391. — **2:674,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 88. — **2:675,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 254—255. — **2:683,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148; **9**$_3$, 1908/9, S. 328. — **2:687,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 294. — **2:689,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 391; **8**$_3$, 1907/8, S. 89; **9**$_3$, 1908/9, S. 253. — **2:693,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 287; **7**$_3$, 1906/7, S. 394—395; **11**$_3$, 1910/11, S. 237—238. — **2:699,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 165—166. — **2:700, 701,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271. — **2:703,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271—272; **8**$_3$, 1907/8, S. 212. — **2:704, 705,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 272—273. — **2:712,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 212—213. — **2:713,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 254. — **2:714,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 89—90. — **2:714—715,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 238—239. — **2:715,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 412; **11**$_3$, 1910/11, S. 239. — **2:716,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 404. — **2:717,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 92—93; **13**$_3$, 1912/13, S. 266. — **2:718,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 93. — **2:719,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2:720,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 287; **6**$_3$, 1905, S. 404; **11**$_3$, 1910/11, S. 342; **12**$_3$, 1911/12, S. 155. — **2:721,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273; **6**$_3$, 1905, S. 404—405; **12**$_3$, 1911/12, S. 64; **13**$_3$, 1912/13, S. 343. — **2:726,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 90. — **2:727,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 392. — **2:737,** siehe BM **13**$_3$, 1912/13, S. 343—344. — **2:741,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 395—396. — **2:742,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273; **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2:746,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2:747,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 173; **2**$_3$, 1901, S. 225. — **2:749,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 88. — **2:753—754,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 254. — **2:757,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 239—240.

— **2 : 758,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 255. — **2 : 759,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 240. — **2 : 763,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 166. — **2 : 765,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 90—91. — **2 : 766,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 142; **5**$_3$, 1904, S. 412—413. — **2 : 767,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148, 357—358. — **2 : 770,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 208. — **2 : 772,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 358; **7**$_3$, 1906/7, S. 392—393. — **2 : 773,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 213; **9**$_3$, 1908/9, S. 167; **13**$_3$, 1912/13, S. 266—267. — **2 : 774,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 64. — **2 : 775,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 358—359. — **2 : 777,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148; **3**$_3$, 1902, S. 204; **12**$_3$, 1911/12, S. 255. — **2 : 780,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 78, 167. — **2 : 781—782,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 256. — **2 : 783,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359; **4**$_3$, 1903, S. 88—89; **12**$_3$, 1911/12, S. 256. — **2 : 784,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148. — **2 : 787,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 405; **7**$_3$, 1906/7, S. 296; **12**$_3$, 1911/12, S. 256. — **2 : 790,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 393; **9**$_3$, 1908/9, S. 255; **10**$_3$, 1909/10, S. 62—63. — **2 : 791,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 405. — **2 : 793,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 64—65; **13**$_3$, 1912/13, S. 74—75. — **2 : 793—794,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 307; **6**$_3$, 1905, S. 316—317, 405—406. — **2 : 795,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 317. — **2 : 796,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 256—257. — **2 : 797—798,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 307; **6**$_3$, 1905, S. 317; **10**$_3$, 1909/10, S. 63—64. — **2 : 799,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 307. — **2 : 801, 801—802,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 257—261. — **2 : 802,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 208. — **2 : 802—803,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 367—368. — **2 : 805,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 65—66. — **2 : 812,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 37; **11**$_3$, 1910/11, S. 240—243. — **2 : 815,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 64; **11**$_3$, 1910/11, S. 243—244. — **2 : 817,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 174. — **2 : 820,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148; **5**$_3$, 1904, S. 307. — **2 : 823,** siehe BM **13**$_3$, 1912/13, S. 267. — **2 : 825,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148. — **2 : 827, 830,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 256—257. — **2 : 832,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 203—204; **6**$_3$, 1905, S. 211. — **2 : 840,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148—149. — **2 : 843,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 328. — **2 : 845,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 343. — **2 : 850,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 109—110. — **2 : 851,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 174. — **2 : 852,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 175; **11**$_3$, 1910/11, S. 244—245. — **2 : 856,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149. — **2 : 860, 863,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 245—246. — **2 : 865,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149. — **2 : 876,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511. — **2 : 878,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511; **11**$_3$, 1910/11, S. 246. — **2 : 879,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511. — **2 : 884,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 167—168. — **2 : 885,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 156; **13**$_3$, 1912/13, S. 268. — **2 : 891,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273; **11**$_3$, 1910/11, S. 246—247. — **2 : 896,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 347. — **2 : 897,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 406. — **2 : 898,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 37, 208; **10**$_3$, 1909/10, S. 175—176. — **2 : 901,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511. — **2 : 902,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 329—330; **10**$_3$, 1909/10, S. 64. — **2 : 903, 904,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 247—248. — **2 : 905, 906,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 66—69. — **2 : 911,** siehe BM **9**$_3$, 1908, S. 78—79. — **2 : 917,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 249. — **2 : 919,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 204; **12**$_3$, 1911/12, S. 156—159. — **2 : 920,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 69. — **2 : 922,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 168—170. — **2 : VIII** (Vorwort), siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2 : IX, X** (Vorwort), siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511—512.

3 : 1, siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 268. — **3 : 4,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 65—67; **12**$_3$, 1911/12, S. 69—73, 159; **13**$_3$, 1912/13, S. 167—168. — **3 : 5,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 269. — **3 : 5—6,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 269—270. — **3 : 9,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359; **12**$_3$, 1911/12, S. 73. — **3 : 10,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 518; **6**$_3$, 1905, S. 211; **7**$_3$, 1906/7, S. 393—394; **13**$_3$, 1912/13, S. 268. — **3 : 11,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209. — **3 : 12,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512; **12**$_3$, 1911/12, S. 261. — **3 : 14,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 261. — **3 : 14—15,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 296—297. — **3 : 15, 16,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 270—272. — **3 : 17,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512. — **3 : 18,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 168. — **3 : 19,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 67—68. — **3 : 22,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512; **4**$_3$, 1903, S. 209. — **3 : 23,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 297—298; **8**$_3$, 1907/8, S. 91. — **3 : 24,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209. — **3 : 25,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209, 399; **9**$_3$, 1908/9, S. 168; **13**$_3$, 1912/13, S. 344. — **3 : 26,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359; **7**$_3$, 1906/7, S. 394. — **3 : 29,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 331. — **3 : 30,** siehe BM **13**$_3$, 1912/13, S. 268—269. — **3 : 37,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 91—92. — **3 : 39,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 407. — **3 : 40,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 394. — **3 : 41,** siehe BM **13**$_3$, 1912/13, S. 269. — **3 : 45—48, 49, 50,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512—513. — **3 : 57,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 298—299. — **3 : 58,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 272—273. — **3 : 59,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 262. —

3 : 61, siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 262—263. — **3 : 62,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 177. — **3 : 63,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 93—94. — **3 : 68,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 299; **9**$_3$, 1908/9, S. 257—258; **11**$_3$, 1910/11, S 249. — **3 : 69,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S 69. — **3 : 70,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 360; **9**$_3$, 1908/9, S. 258. — **3 : 71,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 73—74. — **3 : 72,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 249—250. — **3 : 74,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 74. — **3 : 78,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 92; **11**$_3$, 1910/11, S. 250. — **3 : 79,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 69—71. — **3 : 81,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 251. — **3 : 82,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 308. — **3 : 85,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 273—274. — **3 : 93—94,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 160—162.

---

3 : 95. Das meiste des Inhaltes dieser Seite sollte entweder gestrichen oder auf ganz andere Weise redigiert werden. Es handelt sich um den Satz Jakob Bernoullis:

> In serie quavis infinita, cujus numeratores omnes sunt aequales; denominatores, vel numeri naturales, vel eorundem quadrata, cubi, aut alia quaecumque potestas: summa terminorum omnium in locis imparibus est ad summam omnium in paribus, ut similis potestas binarii unitate multata ad unitatem

und Herr Cantor bemängelt den Beweis Bernoullis für den Fall, daß die Nenner eben die natürlichen Zahlen sind. Nun hat schon Gabriel Cramer in der Fußnote S. 531—532 des 1. Bandes der *Opera* Jakob Bernoullis nachgewiesen, daß der allgemeine Beweis des Satzes für diesen Fall fehlerhaft wird. Herr Cantor nimmt nur auf den speziellen Beweis Bernoullis Bezug und nennt diesen Beweis „so falsch, daß man kaum begreifen kann, daß man den gleichen Verfasser vor sich hat, wie in der Abhandlung von 1689“. Er sagt ferner in betreff einer richtigen Bemerkung Bernoullis, man könne Jakob Bernoulli, den tiefen Denker, höchstens aus dieser Zusatzbemerkung erkennen.

Nun ist es allerdings wahr, daß der spezielle Beweis unbefriedigend ist, weil Bernoulli mit divergenten Reihen rechnet, ohne die Restterme in Betracht zu ziehen, aber es dürfte leicht sein, ausfindig zu machen, daß man hier kaum von „falschen Dingen“ sprechen kann.

Gehen wir nämlich wie Bernoulli von den konvergenten Reihen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots&=\frac{2}{1}\\
\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\cdots&=\frac{2}{3}\\
\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+\cdots&=\frac{2}{5}\\
\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56}+\cdots&=\frac{2}{7}\\
\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}+\frac{1}{72}+\cdots&=\frac{2}{9}
\end{aligned}$$

aus, so können wir leicht durch sukzessive Addition und Berücksichtigung der Restterme die folgenden Resultate herleiten (die eingeklammerten Zahlen sind eben die Restterme):

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\left[\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{3}\right]=\tfrac{2}{1}+\tfrac{2}{3},\\
&\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\left[\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{5}\right]=\tfrac{2}{1}+\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{5},\\
&\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}+\left[\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}\right]=\tfrac{2}{1}+\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{5}+\tfrac{2}{7},
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right]$$
$$=\frac{2}{1}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\frac{2}{9}.$$

Man sieht sofort, daß die Summe der eingeklammerten Zahlen bzw. kleiner als $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ ist, und es ist nicht besonders schwierig zu zeigen, daß im allgemeinen

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\alpha_n=\frac{2}{1}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{2}{2n-1},$$

wo $\alpha_n<\frac{n}{n+1}$. Jetzt kann man mit dieser endlichen Reihe ganz wie Bernoulli verfahren, und bekommt also

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}+\alpha_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$$

oder

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}+\alpha_n}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}}=1.$$

Läßt man nun n unendlich groß werden, so werden, wie Bernoulli hervorhebt, die Summen der zwei Reihen unendlich groß; α_n, die immer kleiner als 1 bleibt, verschwindet also, und der Satz Bernoullis ist bewiesen auch für den Fall, daß die Nenner die natürlichen Zahlen sind. In betreff der Zahl α_n ist es übrigens nicht schwer zu beweisen, daß $\lim\limits_{n=\infty}\alpha_n=\log_e 2=0\cdot 693$ ist. Wenn man nämlich beachtet, daß $\frac{1}{4}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}=\frac{1}{5}-\frac{1}{10}$, sieht man sofort, daß die Restterme bzw. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$, $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$, $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}$, $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}$ geschrieben werden können. Diese Beobachtung führt auch zu einem sehr einfachen Beweis des Bernoullischen Satzes. Setzt man nämlich

$$\alpha_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n},$$

wo α_n offenbar kleiner als $\log_e 2$ ist, so erhält man unmittelbar die von mir hergeleitete Formel

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}+\alpha_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}.$$

Die von Herrn Cantor bemängelten Ausführungen Jakob Bernoullis sind also eigentlich nicht falsch aber unvollständig begründet und von unserem Standpunkte aus nicht einwandfrei formuliert.

G. Eneström.

3:97, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 394. — **3:99,** siehe BM $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 74. — **3:100,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 299—300; $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 74—75. — **3:102,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 318; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 300; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 169; $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 75—77. — **3:103,** siehe BM $\mathbf{13}_3$, 1912/13, S. 344. — **3:104,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 331. — **3:107,** siehe BM $\mathbf{13}_3$, 1912/13, S. 344—345. — **3:109,** siehe BM $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 261; $\mathbf{13}_3$, 1912/13, S. 345 — **3:110,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 170—171. — **3:112,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209—210; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 318. —**3:113,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 258—259. — **3:114,** siehe BM $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S 348. — **3:116,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513; $\mathbf{13}_3$, 1912/13, S. 345—346. — **3:117,** siehe BM

1$_3$, 1900, S. 518; **9**$_3$, 1908/9, S. 259—260; **11**$_3$, 1910/11, S. 171. — **3 : 118,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 92—93. — **3 : 119,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 344—345; **12**$_3$, 1911/12, S. 77; **13**$_3$, 1912/13, S. 346—347. — **3 : 122,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 301. — **3 : 123,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513; **4**$_3$, 1903, S. 399; **7**$_3$, 1906/7, S. 301—302. — **3 : 124,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 407—408; **4**$_3$, 1903, S. 400. — **3 : 126,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 288. — **3 : 129—130,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 93. — **3 : 131,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 210; **11**$_3$, 1910/11, S. 345—347; **12**$_3$, 1911/12, S. 162—163, 263—264. — **3 : 132,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 347. — **3 : 133,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 348. — **3 : 135,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 163—164, 348. — **3 : 136, 137,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 164.

3 : 140. Am Anfange der Seite wird in betreff des Brounckerschen Aufsatzes über den Tautochronismus der Zykloide bemerkt:

> Brounckers Ausdrucksweise ist etwas zu unbestimmt, als daß man aus ihr entnehmen könnte, ob er damals [d. h. 1673] den Satz kennen lernte und zu ihm einen Beweis ermittelte, oder ob er auf eine frühere Erfindung des Satzes Anspruch zu erheben wünschte, aber grade wegen der Unbestimmtheit ist ersteres das Wahrscheinlichere.

Allein in Wirklichkeit weiß man wenigstens seit 1891, daß weder die eine noch die andere Deutung der Brounckerschen Ausdrucksweise richtig sein kann. Im 4. Bande der *Oeuvres complètes de Chr. Huygens* (La Haye 1891) befindet sich nämlich (S. 28—31) eine „Demonstration of the equality of vibrations in a cicloid-pendulum", die Brouncker schon im Januar 1662 an Huygens sandte, und dieser hat am Ende des Beweises notiert: „Demonstratio Domini Brouncker a Domino Moray missa Londino, qua nostrum inventum aequabilis motus in Cycloide probare conatus est, sed nihil effecit." Einige Wochen später sandte Brouncker (siehe a. a. O. S. 88—91) einen verbesserten Beweis, der indessen auch nicht Huygens befriedigte.

Übrigens geht aus einem Schreiben H. Oldenburgs an Huygens vom 12. Juni 1673 (siehe *Oeuvres complètes de Chr. Huygens* **7**, La Haye 1897, S. 303—305) hervor, daß der Brounckersche Beweis schon am 26. Mai 1673 gedruckt vorlag, während Oldenburg erst am 28. Mai das *Horologium oscillatorium* bekam. Auch im Briefe Oldenburgs wird darauf hingewiesen, daß Brouncker schon 1662 der „Royal society" den Beweis mitgeteilt hatte. Noch im Jahre 1673 fand Huygens diesen Beweis unverständlich (siehe a. a. O. S. 313) und später notierte er (a. a. O. S. 314) darüber: „Brounckerus tentavit, vel Angli, sibi hic aliquid decerpere, edita demonstratione, absque mei mentione, sed falsâ, cum et ante aliam quoque falsam ad me misisset."

Die Cantorsche Bemerkung am Anfange der Seite 146 sollte also als wertlos gestrichen werden, und Z. 2 sollte „einen unrichtigen Beweis" statt „einen Beweis" gesetzt werden.

G. Eneström.

3 : 147, siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 251. — **3 : 151,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 326; **13**$_3$, 1912/13, S. 347. — **3 : 156,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 171. — **3 : 157,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 348—349. — **3 : 158,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 251—252. — **3 : 161, 163,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 164—165. — **3 : 166,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 332. — **3 : 167,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 400; **11**$_3$, 1910/11, S. 252—253. — **3 : 168,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 172. — **3 : 170,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 77. — **3 : 171, 171—172,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 172—173. — **3 : 172,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 253—254. — **3 : 172—173,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 400. — **3 : 173,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 254. — **3 : 174,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149—150. — **3 : 175,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 254—255.

3: 178. In der ersten Auflage des 3. Bandes der *Vorlesungen* machte Herr Cantor (S. 171—172) auf gewisse Übereinstimmungen zwischen der *Methodus fluxionum* von Newton und dem *Horologium oscillatorium* von Huygens aufmerksam, und da seiner Ansicht nach die Ähnlichkeit zwischen den zwei Arbeiten zu groß war, um vom Zufall herrühren zu können, folgerte er hieraus, daß Newton wahrscheinlich nach dem Erscheinen des *Horologium oscillatorium*, also nach 1673, seine *Methodus fluxionum* teilweise umgearbeitet hatte. Indessen hob Paul Tannery in seiner Besprechung (Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{18}_2$, 1894, S. 227—230) der Lieferung 1 (1894) des fraglichen Bandes hervor, daß Newton lange Zeit vor 1673 von den Entdeckungen des Huygens Kenntnis bekommen haben könnte, so daß die Cantorsche Fragestellung unrichtig war. Überdies wies Zeuthen ein wenig später (siehe *Sur le fondement mathématique de l'invention du calcul infinitésimal;* Bullet. de l'acad. d. sc. de Danemark 1895, S. 243) nach, daß die Ähnlichkeit zum großen Teil von dem behandelten Gegenstand bedingt war. Leider hat Herr Cantor bei der Bearbeitung der 2. Auflage der *Vorlesungen* weder auf die eine noch auf die andere Bemerkung Rücksicht genommen, so daß seine Darstellung noch daselbst ebenso unbefriedigend ist wie in der ersten.

Ich bin mit Zeuthen darüber einig, daß die Übereinstimmungen zwischen der *Methodus fluxionum* und dem *Horologium oscillatorium* bei der Behandlung der Krümmungsverhältnisse und der Zykloide zum großen Teil in der Natur der Sache liegen. Anderseits halte ich einen Hinweis hierauf für weniger nötig, wenn es sich nur darum handelt, die Unrichtigkeit der Cantorschen Folgerung nachzuweisen, denn für diesen Zweck genügt es, mit Tannery darauf aufmerksam zu machen, daß Newton mit größter Wahrscheinlichkeit schon lange Zeit vor 1673 die Huygensschen Entdeckungen in betreff der Eigenschaften der Zykloide kennen lernte. Daß Huygens von diesen Entdeckungen kein Geheimnis machte, weiß jedermann, der mit dem Briefwechsel dieses Gelehrten bekannt ist, und schon 1662 hatte Brouncker der „Royal society" einen vermeintlichen Beweis des Tautochronismus der Zykloide vorgelegt (vgl. oben die Bemerkung zu **3**: 140).

G. Eneström.

---

3 : 179, siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 71—72; $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 77. — **3 : 180,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 256. — **3 : 181,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 72—73. — **3 : 182,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 256. — **3 : 183,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 432. — **3 : 188,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 241; $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 348. — **3 : 189—190, 190, 192,** siehe BM $\mathbf{13}_3$, 1912/13, S. 347—349. — **3 : 194,** siehe BM $\mathbf{13}_3$, 1912/13, S. 168. — **3 : 195,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 311, 332—333; $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 73. — **3 : 196,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 333.

3: 199. Der Passus: „Unsere Leser erwarten wohl, daß namentlich Leibnizens nicht mißzuverstehender Aufforderung von 1686 gegenüber Newton die Gelegenheit gern ergriffen haben werde . . . die mathematischen Hilfsmittel zu enthüllen, deren er bei der Ausarbeitung sich bedient hatte" sollte gestrichen oder auf andere Weise redigiert werden. Die „Aufforderung von 1686" ist, wie S. 198 erwähnt wird, im Artikel *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum,* der im Juniheft der Acta eruditorum erschien, enthalten. Anderseits war, wie Herr Cantor selbst S. 202 angibt, das erste Buch der *Principia,* worin die Enthüllung wohl eigentlich ihren Platz haben sollte, am 28. April 1686 druckfertig und das Konzept des zweiten Buches war am 20. Juni beendet. Daß NEWTON der „Aufforderung von 1686" nicht in betreff des ersten Buches Folge leisten konnte, ist also selbstverständlich, und daß er vor der definitiven Fertigstellung des zweiten Buches der *Principia* von dem Artikel LEIBNIZens Kenntnis haben konnte, ist zum mindesten höchst unwahrscheinlich. Allerdings steht am Anfange des Juniheftes der Acta eruditorum 1686: „publicata Lipsiae calendis Junii A. M. DC. LXXXVI", aber natürlich darf man hieraus nicht mit Sicherheit schließen, daß das Heft wirklich schon am 1. Juni 1686 erschien. Hierzu kommt noch, daß der buchhändlerische Verkehr zwischen Deutschland und anderen Ländern am Ende des 17. Jahrhunderts nicht besonders gut geordnet war; wie ich schon anderweitig hervorgehoben habe, bekam HUYGENS das Juniheft der Acta eruditorum 1693 erst am 1. September 1693 (siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 74). Selbst bin ich der Ansicht, daß NEWTON vor der Veröffentlichung der *Principia* die Aufforderung LEIBNIZens vom Juni 1686 gar nicht kannte, aber einen entscheidenden Beleg hierfür kann ich augenblicklich nicht bringen.

G. ENESTRÖM.

---

3 : 201, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513; $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 165—167. — **3 : 202—203,** siehe BM $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 77—78.

---

3 : 206. Der Passus (Z. 6—13): „Kein Wort gibt zu verstehen . . . solche nach 1673 vornahm" sollte gestrichen werden. In diesem Falle ist die Neigung des Herrn CANTOR, in die Erwähnung einer einfachen Tatsache eine ganz besondere Meinung hineinzulesen, fast zur Monomanie geworden. Der Umstand, daß NEWTON in betreff des Tautochronismus nur HUYGENS aber nicht sich selbst zitiert, erklärt sich ja sofort, wenn man bemerkt, teils daß das *Horologium oscillatorium* 1687 seit längerer Zeit im Druck, die *Methodus fluxionum* nur handschriftlich vorlag, teils daß HUYGENS nachweislich vor NEWTON die fragliche Eigenschaft der Zykloide entdeckt hatte. Von der Bestätigung einer früher ausgesprochenen Ansicht, von der Herr CANTOR Z. 9 spricht, kann also hier in Wirklichkeit gar nicht die Rede sein, und die Ansicht selbst ist bis auf weiteres als unbegründet zu betrachten (vgl. oben die Bemerkung zu **3** : 178).

G. ENESTRÖM.

---

3 : 207, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 519.

---

3 : 213. Den Passus (Z. 22—28): „Nun finde, sagt LEIBNIZ, die Differentialgleichung statt: $a^2dy^2 = a^2dx^2 + x^2dy^2$ . . . als deren Einheit gewählt wird" würde ein Fachmann auf ganz andere Weise redigiert haben. Die Mathematiker am Ende des 17. Jahrhunderts, die sich mit der Infinitesimalrechnung beschäftigten, hatten keine Formeln für Differentiale trigonometrischer Funktionen, aber sie entnahmen die Sätze, die diesen Formeln entsprechen, aus dem charakteristischen Dreieck. Bildet man nun das Dreieck für den Kreis mit dem Halbmesser a, sieht man sofort, daß dieses dem Dreieck mit den Seiten a, $\sqrt{a^2 - x^2}$, x ähnlich ist, und daraus folgt:

$$dy : dx = a : \sqrt{a^2 - x^2} \text{ oder } a^2dy^2 = a^2dx^2 + x^2dy^2.$$

Für nähere Auskunft über diese Frage verweise ich auf meinen Artikel *Die erste Herleitung von Differentialen trigonometrischer Funktionen* (Biblioth. Mathem. $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 200—205). G. Eneström.

3 : 215, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 260—262.

3 : 217—218. In betreff des Passus:

> Es ist nicht an dem, was Johann in einem nachgelassenen Abrisse des eigenen Lebens erzählt hat, daß beide Brüder erst 1687 durch einen Zufall mit jener Abhandlung [d. h. *Nova methodus pro maximis et minimis*] bekannt geworden seien und binnen weniger Tage das ganze Geheimniß ergründet hätten Es dauerte im Gegentheil Jahre, bis Jakob zuerst, dann unter seiner Leitung Johann jenes mit orakelhafter Kürze verfaßte Schriftstück verstehen lernten. Hat doch Leibniz 1696 in einem Briefe an Johann es Jakob zum Ruhme angerechnet, diesen seinen Bruder der Mathematik zugeführt zu haben und Johann verwahrte sich mit keinem Worte gegen diese Bemerkung, so ihre Wahrheit anerkennend.

ist folgendes zu bemerken.

A. Johann Bernoulli behauptet nicht selbst, daß die Brüder 1687 mit der Leibnizschen Abhandlung bekannt wurden (siehe unten).

B. Der Ausspruch Johann Bernoullis lautet wörtlich (siehe R. Wolf, *Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz* **2**, Zürich 1859, S. 72):

> Après ces commencemens par un hazard imprévu nous tombâmes conjointement mon frère et moi sur un petit écrit de Mr. Leibnitz de 1684, où en 5 ou 6 pages seulement il donne une idée légère du Calcul différentiel, ce qui était une énigme plutôt qu'une explication; mais c'en était assez pour nous, pour en approfondir en peu de jours tout le secret, temoiu quantité de pièces que nous publiâmes ensuite sur le sujet des infiniment petits.

Hier dürften die Worte „en peu de jours“ als ein parenthetischer Zusatz betrachtet werden sollen, der nichts mit den Worten: „temoin . . . petits“ zu tun hat, denn da es nicht angegeben wird, wann die Brüder die Leibnizsche Abhandlung von 1684 kennen lernten und da sie erst 1690 Abhandlungen über die neue Rechnung zu veröffentlichen begannen, kann der fragliche Umstand natürlich nicht bezeugen, daß es ihnen in einigen Tagen gelang, das Rätsel zu lösen. Verbessert man also auf die eine oder die andere Weise den stilistischen Fehler, dürfte die Behauptung Johann Bernoullis aufrecht gehalten werden können. Herr Cantor behauptet seinerseits, daß es Jahre dauerte, bevor die Brüder die Leibnizsche Abhandlung verstehen lernten, begründet aber nicht seine Behauptung. Vielleicht folgert er aus dem Berichte Johann Bernoullis, daß die Worte „après ces commencemens“ durch „unmittelbar nach der Beendung des Studiums der analytischen Geometrie“ wiedergegeben werden, und also laut dem Berichte (vgl. Wolf a. a. O.) auf das Jahr 1687 hindeuten sollen. Allein diese Folgerung ist unbegründet, und übrigens weiß man (siehe *Leibnizens Mathematische Schriften*, herausg. von C. I. Gerhardt III : 1, Halle 1855, S. 13), daß Jakob Bernoulli noch am 15. Dezember 1687 die Leibnizsche

Abhandlung nicht kannte. Beiläufig bemerke ich, daß die Brüder sehr wohl im Jahre 1687 den Inhalt der Abhandlung verstanden („approfondir le secret“) haben könnten, obgleich es ihnen erst viel später gelang, die Differentialrechnung bei der Lösung verwickelter geometrischer und mechanischer Probleme erfolgreich anzuwenden (vgl. JAKOB BERNOULLI *Opera* I, Genevae 1744, Vita S. 20). In keinem Falle kann man indessen nachweisen, daß der Ausspruch JOHANN BERNOULLIS, abgesehen von dem stilistischen Fehler, unrichtig sei. Die CANTORsche Darstellung ist folglich schief und sollte wesentlich modifiziert werden.

C. Die Worte des Herrn CANTOR: „Hat doch LEIBNIZ . . . anerkennend“ sollten ohne weiteres gestrichen werden. Die von JOHANN BERNOULLI selbst (siehe WOLF, a. a. O.) offen anerkannte Tatsache, daß er durch seinen Bruder der Mathematik zugeführt wurde, hat gar nichts zu tun mit der Frage, wer von den zwei Brüdern zuerst begann, die Differentialrechnung zu studieren. Nebenbei sei darauf aufmerksam gemacht, daß das von Herrn CANTOR erwähnte Stillschweigen des JOHANN BERNOULLI an sich kaum genügt, um zu beweisen, daß er mit der LEIBNIZschen Bemerkung einverstanden war. Die Worte „cum ipse Te primum ad haec studia formaverit“ (siehe *LEIBNIZens Mathematische Schriften*, a. a. O. S. 276), die die Bemerkung enthalten, stehen in einem Briefe LEIBNIZens, dessen übriger Inhalt von großem aktuellen Interesse für JOHANN BERNOULLI war und ihn veranlaßte, eine lange Antwort (a. a. O. S. 277–284) an LEIBNIZ zu richten. Es wäre darum an sich möglich gewesen, daß sein Stillschweigen in betreff der Bemerkung LEIBNIZens durch den übrigen Inhalt des Briefes veranlaßt worden wäre.

G. ENESTRÖM.

---

3 : 218, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513. — **3 : 219,** siehe BM **13**$_3$, 1912/13, S. 269—270. — **3 : 220,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 326. — **3 : 221,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 333; **13**$_3$, 1912/13, S. 76—77. — **3 : 223,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 348—349. — **3 : 224,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514. — **3 : 225,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 150; **12**$_3$, 1911/12, S. 78—79; **13**$_3$, 1912/13, S. 349—350. — **3 : 228,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 150; **9**$_3$, 1908/9, S. 333—334. — **3 : 229,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 349. — **3 : 230,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 211—212; **12**$_3$, 1911/12, S. 349—350. — **3 : 231,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 256—257; **12**$_3$, 1911/12, S. 350—351. — **3 : 232,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514; **6**$_3$, 1905, S. 212; **7**$_3$, 1906/7, S. 303; **8**$_3$, 1907/8, S. 94; **9**$_3$, 1908/9, S. 334—335. — **3 : 233—234,** siehe BM **13**$_3$, 1912/13, S. 77—79. — **3 : 244—245,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 205, 413; **7**$_3$, 1906/7, S. 303—304. — **3 : 246,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514; **2**$_3$, 1901, S. 151. — **3 : 250,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514. — **3 : 251,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 264. — **3 : 253,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 73—74; **11**$_3$, 1910/11, S. 173—174. — **3 : 254, 258, 260,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 74—76. — **3 : 269,** siehe BM **13**$_3$, 1912/13, S. 168—169. — **3 : 270,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 395. — **3 : 271,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 79. — **3 : 276,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 304. — **3 : 279,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 335—336. — **3 : 285,** siehe BM **11**$_3$, 1010/11, S. 257—258; **13**$_3$, 1912/13, S. 350. — **3 : 286,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 76. — **3 : 288,** siehe BM **13**$_3$, 1912/13, S. 350. — **3 : 290,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 258; **13**$_3$, 1912/13, S. 350—351. — **3 : 295,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 258—259. — **3 : 303,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 155. — **3 : 306,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 304. — **3 : 310,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 82, 259—261. — **3 : 310—311,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 82—83. — **3 : 312,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 261. — **3 : 314,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 261—262; **12**$_3$, 1911/12, S. 168. — **3 : 315,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 264—265. — **3 : 316,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 262—265. — **3 : 318,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 265; **13**$_3$, 1912/13, S. 169. — **3 : 319,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 265—267. — **3 : 319—320,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 267—268, 349. — **3 : 320—321, 321, 323, 326,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 268—269. — **3 : 327,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 77; **11**$_3$, 1910/11, S. 83—84. — **3 : 330—331,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 241—242. — **3 : 337,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 206.

---

3 : 343. Z. 30—32 hebt Herr Cantor durch gesperrte Schriften hervor, daß Wallis nach der Behauptung Jakob Bernoullis die Summe von Potenzen der aufeinander folgenden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe gefunden hat, aber die Behauptung ist irreleitend und sie kommt auch nicht bei Bernoulli vor. Dieser sagt:

> Wallisius in *Arithm. Infinitorum* fundamentum suae methodi jacturus, rationes quas habent series Quadratorum, Cuborum aliarumque potestatum numerorum naturalium ad seriem totidem maximo aequalium, inductione investigat.

Bekanntlich beschäftigt sich Wallis nicht mit der Berechnung der Potenzsummen der natürlichen Zahlen, sondern mit der Ermittelung des Grenzwertes von $\frac{\sum\limits_{r=1}^{r=n} r^k}{n \cdot n^k}$ für $n = \infty$, und deswegen berechnet er durch direkte Addition die Werte des Ausdruckes für $n = 1, 2, 3, \ldots$ Durch Induktion findet er dann, daß der gesuchte Grenzwert $\frac{1}{k+1}$ ist. G. Eneström

---

3 : 345. Z. 2 von unten sollte meines Erachtens das Wort „geniale" gestrichen werden. In betreff der Exponenten ist ja die Regelmäßigkeit so offenbar, daß man nur die Augen zu benutzen braucht, um das Gesetz zu entdecken. Die Zerteilung der Koeffizienten in zwei Faktoren kann dagegen als ein glücklicher Gedanke bezeichnet werden, aber es dürfte zu viel sein, diesen Gedanken „genial" zu nennen. G. Eneström.

---

3 : 350, siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 336. — **3 : 361,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 79—80. — **3 : 364,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 304—305. — **3 : 365,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 94. — **3 : 366,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 274—275. — **3 : 367,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 215.

---

3 : 367. Die Übersetzung der Worte Leibnizens, die Herr Cantor Z. 10—15 gibt, dürfte den wesentlichen Sinn des Ausspruches wiedergeben. Ganz deutlich ist allerdings nicht überall der Text, den Gerhardt nach dem Konzepte Leibnizens zum Abdruck gebracht hat, und die größte Schwierigkeit bietet wohl die Übersetzung der Worte: „ut usus earum etiam in physicis numquam fallat", weil es unklar ist, was Leibniz mit „earum" meint. Herr Cantor dürfte „earum" in „ejus" verbessert haben, denn er übersetzt: „und dessen [d. h. des Gesetzes] Anwendung führe niemals irre". Indessen hat der Brief Leibnizens nach A. von Reumont (vgl. BM **10**$_3$, 1909/10, S. 274) an dieser Stelle: „ut usus hujus aestimationis etiam . . .", so daß man vielleicht „die Anwendung dieser Betrachtungsweise" sagen könnte. G. Eneström.

---

3 : 370—371, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 308. — **3 : 372,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 80. — **3 : 375,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 80.

---

3 : 375. Der Passus (Z. 16—21):

> Was Newton mit seinem Verfahren bezweckte, hat er wie in dem Briefe vom 24. Oktober 1676, wie in den Principien (S. 372) auch in der *Methodus differentialis* selbst ausgesprochen. Die 6. und letzte Aufgabe verlangt, irgend eine krummlinige Figur so genau als möglich zu quadriren, wenn eine Anzahl von Ordinaten gefunden werden könne,

ist nicht gut redigiert. Wenn die angenäherte Quadratur wirklich der Zweck des NEWTONschen Verfahrens war, sollten die Worte „wie in dem Briefe . . “ geändert werden, denn daselbst ist kaum etwas über Quadratur durch Interpolation ausgesprochen. Auch der Verweis auf S. 372 ist nicht ganz angebracht, denn diese Seite enthält höchstens eine leise Andeutung über Anwendung des NEWTONschen Verfahrens auf Quadratur von Kurven, sofern es sich um die *Principia* handelt. Überhaupt kann der Leser nicht aus der CANTORschen Darstellung ausfindig machen, ob die *Principia* wirklich etwas über angenäherte Quadratur enthalten. In Wahrheit befindet sich am Ende des „Lemma 5“ des dritten Buches der *Principia* das folgende Corollarium:

> Hinc areae curvarum omnium inveniri possunt quamproxime. Nam si curvae cujusvis quadrandae inveniantur puncta aliquot, et Parabola per eadem duci intelligatur: erit area Parabolae hujus eadem quam proxime cum area curvae illius quadrandae. Potest autem Parabola, per Methodos notissimas, semper quadrari Geometrice.

G. ENESTRÖM.

---

3 : 376. Der CANTORsche Beweis des Satzes, den NEWTON im „Scholium“ am Ende der *Methodus differentialis* aufgestellt hat, ist offenbar unrichtig. Es handelt sich um eine angenäherte Quadratur, und vier Ordinaten in gleichen Zwischenräumen sind gegeben; um den Satz NEWTONS zu beweisen, setzt Herr CANTOR die Gleichung der parabolischen Hilfskurve als $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ voraus Ferner nimmt er als Abszissen der vier gegebenen Ordinaten y_0, y_1, y_2, y_3 die Strecken $-\frac{R}{2}, -\frac{R}{6}, \frac{R}{6}, \frac{R}{2}$ an und setzt die Werte in die Gleichung ein. Um die drei Koeffizienten a_0, a_1, a_2 zu bestimmen, bekommt er dann vier Gleichungen, was ja bedeutet, daß die vier Ordinaten einer gewissen Bedingung genügen müssen. Diese Bedingung ist, wie man leicht sieht:

$$y_0 - y_3 = 3(y_1 - y_2) \quad \text{oder} \quad y_3 = y_0 + 3(y_2 - y_1).$$

Was Herr CANTOR bewiesen hat, ist also nur, daß der NEWTONsche Satz richtig wird, wenn diese Bedingung erfüllt ist, aber daß der Satz allgemein gültig ist, folgt nicht daraus.

Nun ist es allerdings leicht, den CANTORschen Beweis zu verbessern, denn wenn man

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

setzt, erhält man ebenfalls

$$y_0 + y_3 = 2a_0 + \frac{R^2}{2} a_2, \quad y_1 + y_2 = 2a_0 + \frac{R^2}{18} a_2,$$

und bei der Quadratur kommt der Wert von a_3 ebensowenig wie der Wert von a_1 in Betracht.

G. ENESTRÖM.

---

3 : 382, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 213. — **3 : 384,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 319. — **3 : 386, 393,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 81—82. — **3 : 394,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 174—175, 269—270; **12**$_3$, 1911/12, S. 351. — **3 : 395,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 270. — **3 : 397,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 94. — **3 : 398,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 305—306; **8**$_3$, 1907/8, S. 94—95. — **3 : 399,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 77—78; **12**$_3$, 1911/12, S. 168—169. — **3 : 400,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 271; **13**$_3$, 1912/13, S. 169. — **3 : 403,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 175. — **3 : 406,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 262; **11**$_3$, 1910/11, S. 84. — **3 : 408,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 213.

3 : 410. Wenn Herr Cantor (Z. 28—30) angibt, daß Cotes „den Ausdruck $x^\lambda \pm a^\lambda$ in λ einfache Factoren zerlegt, deren jeder einzeln gleich 0 gesetzt eine Wurzel von $x^\lambda \pm a^\lambda = 0$ erkennen läßt", so behauptet er zu viel, denn die Behauptung ist stichhaltig, nur wenn alle Wurzeln der Gleichung reell sind, d. h. für die drei trivialen Fälle $x + a = 0$, $x - a = 0$, $x^2 - a^2 = 0$. Nehmen wir beispielsweise den Ausdruck $x^2 + a^2$ in Betracht, so entspricht der Cotessche Lehrsatz in diesem Falle der Formel

$$x^2 + a^2 = \sqrt{x^2 + a^2} \cdot \sqrt{x^2 + a^2}$$

und die Gleichung $\sqrt{x^2 + a^2} = 0$ läßt natürlich nicht eine bestimmte Wurzel der Gleichung $x^2 + a^2 = 0$ erkennen. Der Passus sollte also auf andere Weise redigiert werden.

G. Eneström.

---

3 : 412, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 306; **12**$_3$, 1911/12, S. 82. — **3 : 415,** siehe BM **13**$_3$, 1912/13, S. 170—171. — **3 : 418,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 351. — **3 : 427,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 169. — **3 : 447, 455,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 151. — **457,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 271. — **3 : 461,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 337. — **3 : 468,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 271—272. — **3 : 473,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 154—155; **4**$_3$, 1903, S. 401; **11**$_3$, 1910/11, S. 272. — **3 : 475,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 79—80. — **3 : 476,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 169—170, 476. — **3 : 477, 479,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 151—152. — **3 : 480,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 95. — **3 : 481,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 79. — **3 : 482,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 178. — **3 : 483,** siehe BM **13**$_3$, 1912/13, S. 171. — **3 : 496,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 337—338; **13**$_3$, 1912/13, S. 171—172. — **3 : 497,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 309. — **3 : 498,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 309; **11**$_3$, 1910/11, S. 350. — **3 : 499,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 351—352. — **3 : 500,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 84—87. — **3 : 501,** siehe BM **13**$_3$, 1912/13, S. 172. — **3 : 504,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 82—83. — **3 : 507,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 71—72. — **3 : 507—509, 509,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 338—339. — **3 : 510,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 350. — **3 : 521,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441. — **3 : 524,** siehe BM **13**$_3$, 1912/13, S. 173. — **3 : 527,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 95. — **3 : 531,** siehe BM **12**$_3$, 1911/12, S. 265—266. — **3 : 535,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 401. — **3 : 536,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 206. — **3 : 537,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 350—351. — **3 : 550,** siehe BM **11**$_3$, 1910/11, S. 87. — **3 : 560,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 319—321.

---

3 : 560. Als Ergänzung meiner Bemerkung in der BM **6**$_3$, 1905, S. 319—321 mache ich darauf aufmerksam, daß Daniel Bernoulli schon 1729 eine zweckmäßige Bezeichnung für $\arcsin x$ benutzt hatte. In seiner *Dissertatio de actione fluidorum in corpora solida et motu solidorum in fluidis* (Comment. acad. sc. Petrop. **2**, 1727, gedruckt 1729, S. 304—342) mußte er in den Formeln einen Bogen AD bezeichnen, dessen Sinus $\sqrt{e^{2nB} - 1}$ ist, und bemerkte dabei (S. 332):

> exprimam itaque arcum AD per A S $\sqrt{(c^{2nB} - 1)}$ quod significat, arcum correspondentem sinui $\sqrt{(c^{2nB} - 1)}$.

Die Bezeichnung wandte er auch bei der nachfolgenden Untersuchung an; beispielsweise steht S. 333:

$$\text{A. S.} \sqrt{xx - 1} = Tx \sqrt{an} - x \log\left(x + \sqrt{xx - 1}\right),$$

wo A. S. eben arcsin bedeutet. Diese Gleichung transformiert Bernoulli auch dadurch, daß er an der linken Seite A. S. streicht und am Anfange der rechten Seite „S. A." [= sinus arcus] vor T setzt.

Die erste Benutzung einer zweckmäßigen Bezeichnung für Arcusfunktionen rührt also eigentlich nicht von Euler, sondern von Daniel Bernoulli her.

G. Eneström.

3 : 562, siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 176. — **3 : 565,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326—327. — **3 : 566,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 176. — **3 : 571,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 72; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 170. — **3 : 574,** siehe BM $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 83. — **3 : 575,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 263. — **3 : 577,** siehe BM $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 83; $\mathbf{13}_3$, 1912/13, S. 173—174. — **3 : 578,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309. — **3 : 582,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 307. — **3 : 583,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 80; $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 176—177. — **3 : 584, 585,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 351—352. — **3 : 586,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309. — **3 : 587, 590—591,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 88—89. — **3 : 592,** siehe BM $\mathbf{13}_3$, 1912/13, S. 174. — **3 : 593,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 214. — **3 : 596,** siehe BM $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 170—171. — **3 : 599, 600—601,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 177—178. — **3 : 603,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 352. — **3 : 605,** siehe BM $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 171. — **3 : 609,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309—310. — **3 : 610,** siehe BM $\mathbf{13}_3$, 1912/13, S. 270. — **3 : 612,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 307—308; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 339—340. — **3 : 613,** siehe BM $\mathbf{13}_3$, 1912/13, S. 270. — **3 : 614,** siehe BM $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 266—267. — **3 : 614—615,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 89—90; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 308. — **3 : 615,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 178—179; $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 172. — **3 : 616,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 214, 408; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 263; $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 172. — **3 : 617,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 263; $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 80—81; $\mathbf{13}_3$, 1912/13, S. 270.

---

3 : 621. Es wäre meiner Ansicht nach viel besser gewesen, den ganzen Passus (Z. 28—32): „Daraus folgt aber ... die Bedingung der Ganzzahligkeit fallen läßt" zu streichen. Es handelt sich um den Eulerschen Beweis des Satzes, daß jede ganze oder gebrochene Zahl sich als Summe von höchstens vier ganzen oder gebrochenen Quadraten darstellen läßt, und der von mir angedeutete Passus enthält nur einen weniger wesentlichen Teil des Beweises. Über den übrigen Teil der Eulerschen Darstellung sagt Herr Cantor nur: „Aus diesem Satze folgt dann endlich mittels einiger Zwischensätze, welche wir überspringen." Allein die „Zwischensätze" bilden eben den wesentlichsten Teil des Beweises, und wenn man diesen Teil stillschweigend übergeht, ist das andere wertlos.

Um seinen Satz zu beweisen, legt Euler dar, daß man für jede Primzahl p eine Summe von höchstens drei Quadraten $a^2 + b^2 + c^2$ finden kann, die so beschaffen ist, daß sie durch p teilbar ist und daß a, b und c alle kleiner als $\frac{1}{2}p$ sind. Ferner macht er darauf aufmerksam, daß die kleinsten Primzahlen offenbar durch eine Summe von höchstens vier Quadraten dargestellt werden können. Sei dann p die kleinste Primzahl, die möglicherweise diese Eigenschaft nicht besitzt, so weiß man aus dem, was Euler früher bewiesen hat, daß alle ganzen Zahlen $< p$ Summen von höchstens vier Quadraten sind und daß es drei Zahlen a, b, c geben muß, die so beschaffen sind, daß $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{p}$ eine ganze Zahl kleiner als $\frac{3}{4}p$ ist. Mithin ist $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{p}$ eine Summe von höchstens vier Quadraten, z. B. $x^2 + y^2 + z^2 + v^2$, folglich $p = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{x^2 + y^2 + z^2 + v^2}$, d. h. (siehe den Cantorschen Bericht) p ist eine Summe von höchstens vier Quadraten. Auf ganz dieselbe Weise findet man allmählich, daß jede Primzahl $> p$ auch eine Summe von höchstens vier Quadraten ist, und endlich, daß jede ganze oder gebrochene Zahl diese Eigenschaft besitzt.

Den Satz, daß es für jede Primzahl p eine ganze Zahl von der Form $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{p}$, die kleiner als $\frac{3}{4}p$ ist, gibt, beweist Euler unter Zuhilfenahme der Theorie der quadratischen Reste; wenn p von der Form $4n + 1$ ist, braucht man übrigens keinen Beweis.

Nachträglich bemerke ich, daß Euler schon 1749 im Besitze seines Beweises des Satzes über die Darstellung einer Zahl durch eine Summe von vier Quadratzahlen war (siehe seine Briefe an Goldbach vom 12. April und vom 26. Juli 1749; P. H. Fuss, *Correspondance mathématique* **1**, St. Pétersbourg 1843, S. 493—497, 505—510) und daß nach C. G. J. Jacobi die gedruckte Abhandlung von Euler am 17. Juni 1751 in der Berliner Akademie gelesen wurde. G. Eneström.

---

3 : 628, siehe BM $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 352. — **3 : 636—637,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3 : 646—647,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 206—207. — **3 : 652,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 207; $\mathbf{13}_3$, 1912/13, S. 270—271. — **3 : 655,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S 275—276.

---

3 : 655. Über die älteste Geschichte der Differentiation mit gebrochenem Index bemerkt Herr Cantor:

> Wohl hatte Leibniz in Briefen an Johann Bernoulli die Frage nach der Bedeutung einer solchen Differentiation aufgeworfen, aber dieser Briefwechsel, erst 1745 gedruckt, war für die Öffentlichkeit noch nicht vorhanden, und wenn auch die Möglichkeit nicht geleugnet werden will, daß Euler durch Johann Bernoulli mündlich in Basel oder später schriftlich in nicht bekannt gewordenen Briefen auf die Frage aufmerksam gemacht worden ist, so steht diese Möglichkeit doch auf sehr schwachen Füßen.

Diese Bemerkung sollte indessen höchst wesentlich modifiziert werden. Leibniz hat sich nämlich auch in einem Briefe an Wallis vom 28. Mai 1697 über Differentiation mit gebrochenem Index geäußert, und dieser Brief wurde schon 1699 von Wallis im 3. Bande seiner *Opera mathematica* (Oxford 1699, S. 678—680) veröffentlicht. Später wurde der Brief im *Commercium epistolicum J. Collins et aliorum de analysi promota* abgedruckt (in der Auflage London 1722 befindet sich der Brief S. 216—220). Ich drucke hier unten den fraglichen Passus des Briefes ab:

> Notavi mirabilem analogiam relationis inter Differentias & Summas, cum relatione inter Potentias & Radices. Itaque judicavi, praeter affectiones quantitatis hactenus receptas y, y^2, y^3, $y^{\frac{1}{2}}$, $y^{\frac{1}{3}}$, &c. vel generalior y^e, sive $[p^e]\ y$, vel potentiae ipsius y secundum exponentem e; posse adhiberi novas Differentiarum vel Fluxionum affectiones, $\overline{d}y$, d^2y (seu d^-d^-y,) $d^{\overline{3}}y$ (seu $d^-d^-d^-y$,) imo utiliter etiam occurrit $d^{\overline{\frac{1}{2}}}y$, & generaliter $d^e y$.

Ob Euler diesen Passus wirklich gelesen hat, weiß ich nicht, aber jedenfalls ist es nicht unmöglich, und er kann dadurch angeregt worden sein, sich mit Differentiation mit gebrochenem Index zu beschäftigen. G. Eneström.

---

3 : 656. Herr Cantor gibt hier an, daß und auf welchem Wege Euler zu dem Ergebnis

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}x}{\sqrt{dx}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$$

gekommen ist. Die Angaben sind richtig, aber wenn ein Mathematiker den Gegenstand behandelt hätte, würde er sicherlich nicht unterlassen haben, nachzusehen, ob das Ergebnis mit dem Leibnizschen, auf welches Herr Cantor S. 655

ausdrücklich verweist, übereinstimmt. Es würde sich dabei ergeben haben, daß bei LEIBNIZ die Formel lautet:

$$d^{\frac{1}{2}}x = x\sqrt{\frac{dh}{a}}, \text{ wo } dh = \frac{a\,dx}{x},$$

mithin

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}x}{\sqrt{dx}} = \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x},$$

so daß die Ergebnisse bei LEIBNIZ und EULER verschieden sind. Der Grund dieser Tatsache ist auch leicht ausfindig zu machen. EULER geht von der Definition

$$d^n(z^e) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots e}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(e-n)}\, z^{e-n}(dz)^n$$

aus, während bei LEIBNIZ die Definition eigentlich

$$d^n\,(e^{ax}) = a^n\, e^{ax}\,(dx)^n$$

lauten würde, welche Definition von LIOUVILLE ausdrücklich aufgestellt worden ist. Auf diesen Umstand hat bekanntlich C. W. BORCHARDT schon 1868 aufmerksam gemacht (siehe Monatsber. d. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1868, S. 623—625).

G. ENESTRÖM.

3:657, 658, siehe BM **13**$_3$, 1912/13, S. 174 — **3:660,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441. — **3:666,** siehe BM **10**$_3$, 1909/10, S. 179. — **3:667,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441—442; **5**$_3$, 1904, S. 207—208, 310.

3: 667. Es scheint, als ob EULER schon 1728 den Buchstaben *e* für die Basis des natürlichen Logarithmensystems benutzt hätte. In einem nachgelassenen Artikel *Meditatio in experimenta explosione tormentorum nuper instituta*, der erst 1862 im 2. Bande (S. 800—804) der *Opera postuma* veröffentlicht wurde, kommt nämlich diese Bezeichnung oft vor. Die Versuche, die EULER behandelt, wurden schon 1727 angestellt, und aus dem Worte „nuper" darf man wohl folgern, daß der Artikel entweder 1727 oder 1728 verfaßt wurde. Ich habe früher den Verdacht gehabt, daß der Abdruck der *Opera postuma* nicht ganz korrekt sei, aber ich habe mich jetzt überzeugt, daß im Originalmanuskripte EULERS wirklich *e* steht.

G. ENESTRÖM.

3:668, siehe BM **13**$_3$, 1912/13, S. 81—82.

3:672. Am Ende der Seite sollten meiner Ansicht nach die Worte: „ein Gedanke, dem wir schon bei KEPLER (Bd. II, S. 830) begegnet sind, der ihn zum Nachweis der Richtigkeit der Gleichung $\int_0^{\varphi} \sin\varphi\, d\varphi = 1 - \cos\varphi$ benutzte" gestrichen werden (vgl. meinen Artikel *Über die angebliche Integration einer trigonometrischen Funktion bei* KEPLER; BM **13**$_3$, 1912/13, S. 229—241).

G. ENESTRÖM.

3:674, siehe BM **13**$_3$, 1912/13, S. 175. — **3:675,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 340—341. — **3:682,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 408. — **3:686,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 208.

— **3 : 688,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 341; $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 276. — **3 : 689,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 215. — **3 : 691,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 272—273. — **3 : 692,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 215. — **3 : 693,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S 341. — **3 : 695,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442. — **3 : 700,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 171, 342. — **3 : 702,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 171. — **3 : 703, 705,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 342—343. — **3 : 718,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 273.

---

3 : 720. Z. 4—6 sagt Herr Cantor: „Die Bedingung der Verschiedenheit der Theile fällt weg, sobald der Quotient

$$\frac{1}{(1-x^\alpha z)(1-x^\beta z)(1-x^\gamma z)\cdots}$$

in die Reihe $1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + \cdots$ verwandelt wird“, und bei dieser Darstellung schließt sich Herr Cantor tatsächlich an die Eulersche an. Allein ein Leser, der sich nicht früher mit dem Gegenstande beschäftigt hat, muß geneigt sein zu fragen: „Sollte nicht die Eulersche Darstellung hier ergänzt werden?“ Meiner Ansicht nach hätte Euler selbst eine solche Ergänzung vorgenommen, wenn er nicht schon in der 1741 verfaßten Abhandlung *Observationes analyticae variae de combinationibus*, die Herr Cantor S. 617—618 erwähnt, recht deutlich den Weg angegeben hätte, worauf seine Behauptung bewiesen werden sollte, nämlich dadurch, daß man erst jeden Partialbruch

$$\frac{1}{1-x^\alpha z}, \quad \frac{1}{1-x^\beta z}, \quad \frac{1}{1-x^\gamma z}, \cdots$$

in eine unendliche Potenzreihe entwickelt, und dann das Produkt all dieser Reihen bildet. Dann sieht man nämlich sofort, daß der Koeffizient von $x^n z^m$ angibt, auf wie viele Weisen n als Summe von m verschiedenen oder gleichen Zahlen der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ hergestellt werden kann. G. Eneström.

---

3 : 722, siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 172. — **3 : 726—728,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S 343—344; $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 173. — **3 : 729,** siehe BM $\mathbf{13}_3$, 1912/13, S. 175—176 — **3 : 731—732,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 273—274. — **3 : 736,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 111. — **3 : 749,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 172. — **3 : 750,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446. — **3 : 753,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 172—174. — **3 : 754,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 344—345. — **3 : 758,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 345—346. — **3 : 759,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 208. — **3 : 760,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447. — **3 : 762,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 346. — **3 : 763,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 180. — **3 : 766,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446. — **3 : 773,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 174—175, 346—347. — **3 : 774,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442—443. — **3 : 776,** siehe BM $\mathbf{13}_3$, 1912/13, S. 176—177. — **3 : 787, 789,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S 274. — **3 : 792,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 347. — **3 : 798,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443. — **3 : 799,** siehe BM $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 173—175.

---

3 : 799. Der vollständige Titel der Z. 9—11 im Vorübergehen erwähnten Schrift von P. Murdoch lautet:

> Neutoni genesis curvarum per umbras, sive perspectivae universalis elementa, exemplis coni sectionum et linearum tertii ordinis illustrata. Londini 1746. 8°.

Der Inhalt ist also etwas allgemeiner, als man aus den fünf ersten, von Herrn Cantor erwähnten Worten des Titels annehmen muß. Nach einigen Verfassern (siehe z. B. G. J. Gray, *A bibliography of the works of I. Newton,* 2ᵈ ed., Cambridge 1907, S. 60) erschien die Schrift zum ersten Mal in Leyden 1740, aber diese Angabe dürfte bis auf weiteres als verdächtig betrachtet werden sollen. MURDOCH ergänzte ganz wie vor ihm STIRLING die NEWTONsche Einteilung der Kurven dritter Ordnung und unterschied 78 Formen (vgl. E. KÖTTER, *Die Entwicklung der synthetischen Geometrie;* Jahresber. der deutschen Mathem.-Verein. **5** (1896), 1901, S 431).

Nach MURHARD (*Literatur der mathematischen Wissenschaften* **5**, Leipzig 1805, S. 220) erschien 1757 in Amsterdam eine französische Übersetzung der Abhandlung MURDOCHS in der Schrift: *Nouveaux principes de la perspective linéaire; traduction de deux ouvrages l'un anglois de BROOK TAYLOR, l'autre latin de PATRICE MURDOCH.* Wer der französische Übersetzer war, ist mir nicht mit Sicherheit bekannt.

G. ENESTRÖM.

3 : 810. Aus den Worten EULERS: „methodum inveniendi tangentes, si aequatio pro curva proposita non fuerit rationalis et integra, in calculum differentialem reservabimus“ folgert Herr CANTOR, daß EULER die Absicht hatte, geometrische Anwendungen der Differentialrechnung zu schreiben. Der Inhalt der Folgerung ist richtig und ich habe schon in einer früheren Bemerkung (siehe BM. $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 174—175) hervorgehoben, daß EULER in Wirklichkeit seine Absicht wenigstens zum Teil ausgeführt hat sowie daß vier Kapitel und der Anfang des fünften Kapitels der fraglichen Arbeit seit 1862 im Druck vorliegen; das zweite Kapitel handelt eben „De tangentibus linearum curvarum.“

Es ist sogar nicht durchaus unmöglich, daß EULER, als er die von Herrn CANTOR erwähnten Worte schrieb, schon das Kapitel über Tangentenkonstruktionen in Angriff genommen hatte. Allerdings war das Manuskript der *Introductio in analysin infinitorum* schon 1745 beendigt (siehe z. B. den Brief EULERS an D'ALEMBERT vom 28. September 1748; Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **19**, 1886, S. 145), allein schon 1744 hatte EULER die Bearbeitung seiner *Institutiones calculi differentialis* in Angriff genommen (siehe den Brief EULERS an GOLDBACH vom 4. Juli 1744; Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle **1**, St. Pétersbourg 1843, S. 279).

G. ENESTRÖM.

3 : 812, siehe BM $\mathbf{12}_3$, 1912/13, S. 175. — **3 : 813,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 348; $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 180—181. — **3 : 814,** siehe BM $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 83—84. — **3 : 819,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 321. — **3 : 822, 823,** siehe BM $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 175—176. — **3 : 845,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327—328. — **3 : 848,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443. — **3 : 854, 855, 857,** siehe BM $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 177—179. — **3 : 870—871,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 81—82. — **3 : 871,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S 275 — **3 : 877—878,** siehe BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S 181. — **3 : 880,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 95—96. — **3 : 881,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 264—265; $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 83. — **3 : 882,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 414. — **3 : 885, 889,** siehe BM $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 179—180. — **3 : 890,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 348—349. — **3 : 891,** siehe BM $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 267. — **3 : 892,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 143; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 265. — **3 : 894,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 349—350; $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 89—90. — **3 : 897,** siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 83. — **3 : IV** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443. — **3 : V** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{13}_3$, 1912/13, S. 177.

Anfragen.

163. Über die Geschichte der Kubikwurzelausziehung im Mittelalter. Bei der Kubikwurzelausziehung aus ganzen Zahlen mit mehr als drei

Ziffern liegt bekanntlich die Schwierigkeit in der Auffindung der sukzessiven Ziffern von der zweiten an. Noch Sacrobosco konnte für diese Auffindung kein besonderes Verfahren angeben, sondern beschränkte sich in seinem *Algorismus* auf die Vorschrift: „deinde inveniendus est quidam digitus sub proxima figura ante triplatum qui cum subtriplo ductus in triplatum postea sine subtriplo ductus in productum deleat totum suprapositum respectu triplati, deinde ductus in se cubice deleat totum suprapositum respectu sui, vel in quantum vicinius potest“ (siehe die Ausgabe von M. Curtze, Kopenhagen 1897, S. 18). Anderseits ist das jetzt übliche Verfahren, nämlich die Benutzung der Größe $3a^2$ als Divisor, wenn a die schon gefundene Wurzelzahl bedeutet, im Jahre 1291 von Petrus de Dacia angewandt worden (siehe *Petri Philomeni de Dacia in Algorismum vulgarem Johannis de Sacrobosco commentarius*, ed. M. Curtze, Kopenhagen 1897, S. 89) und dieser schreibt sich selbst die Entdeckung des Verfahrens zu; er sagt nämlich (a. a. O. S. 88): „Verumptamen, quia radicum extractio in numeris cubicis laboriosa videtur et penalis propter difficultatem inveniendi digitum, qui cum subtriplis etc[a], ideo compendium quoddam ad hoc diu investigans post omnes visos angulos qualecumque remedium adinveni“, und nachher lehrt er das fragliche Divisionsverfahren mit der Bemerkung, daß die Ziffer, welche man dadurch erhält, entweder die richtige ist oder um eine Einheit vermindert richtig wird.

Im 15. Jahrhundert scheint das Verfahren sehr verbreitet zu sein; es wird beispielsweise von Peurbach (siehe *Elementa geometriae ... a Ioanne Vogelin ... Arithmeticae practicae per Georgium Peurbachium*, Venetiis 1539, Bl. 42[a]) und Chuquet (siehe *Le triparty en la science des nombres* publié par A. Marre; Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **13**, 1880, S. 702) gelehrt.

Ist das Verfahren wirklich erst von Petrus de Dacia erfunden worden, oder kann es bei einem früheren Algorithmiker nachgewiesen werden?

G. Eneström.

Rezensionen.

J. Rey Pastor. **Los matemáticos españoles del siglo XVI.**[1] Discurso leido en la solemne apertura del curso académico de 1913 á 1914. Oviedo 1913. Groß-4°, 75 S.

Im Jahre 1893 veröffentlichte Acisclo F. Vallín in Madrid eine ausführliche Abhandlung mit dem Titel: *Cultura científica en España en el siglo XVI* (337 S. gr.-8°), und über den Inhalt dieser Abhandlung, sofern sie sich auf die Geschichte der reinen Mathematik bezieht, gab ich in meinem kleinen Artikel: *Quelques remarques sur l'histoire des mathématiques en Espagne au 16e siècle* (Biblioth. Mathem. 1894, S. 33—36) eine kurze Übersicht. Ich bemerkte dabei, daß die Angaben Vallíns im allgemeinen allzu schwebend sind, um eine genaue Vorstellung von dem wissenschaftlichen Wert der Untersuchungen der spanischen Mathematiker im 16. Jahrhundert zu ermöglichen und sprach zuletzt den Wunsch aus, recht bald eine definitive Antwort auf die Frage: „Welches sind die wissenschaftlichen Verdienste der spanischen Mathematiker des 16. Jahrhunderts?“ zu bekommen. Angeregt durch meine Bemerkung hat Herr Rey Pastor die ihm zugänglichen mathematischen Arbeiten untersucht, die im 16. Jahrhundert von spanischen Verfassern veröffentlicht wurden, und teilt in der oben genannten Abhandlung das Resultat seiner Untersuchung mit. Er hebt indessen (S. 29) mit Bedauern hervor, daß er nicht gleichzeitig auch die Werke der nicht spanischen Verfasser, die er eigentlich vergleichen sollte, zur Verfügung gehabt hat.

Einleitungsweise widmet er einige Seiten einem Berichte über die Entwicklung der Mathematik bis zum Anfange des 16. Jahrhunderts und geht dann zur Behandlung seines Gegenstandes über. Er beschäftigt sich dabei erst mit den Arithmetikern, dann mit den Algebraikern und zuletzt mit den Geometern. Diese Anordnung findet er schon aus chronologischen Gründen angebracht, weil die spanischen Mathematiker am Anfange des 16. Jahrhunderts vorzugsweise Arithmetiker, um die Mitte des Jahrhunderts Algebraiker und am Ende desselben Geometer waren.

Die Arithmetiker, deren Schriften er zu Rate gezogen hat, sind in erster Linie P. Ciruelo (*Tractatus arithmeticae practicae qui dicitur Algorismus, noviter compilatus*, 1495; *Cursus quattuor mathematicarum artium liberalium*, 1516); J. Martínez Silíceo (*Arithmetica theorica et practica*, 1514; *Arte calculatoria*, 1520); G. Lax (*Arithmetica speculativa duodecim libris demonstrata*, 1515; *Proportiones*, 1515); M. J. Andrés (*Sumario breve de la pratica de la arithmetica*, 1515) und A. Thomás (*Liber de triplici motu, proportionibus annexis, philosophicas Suiseth calculationes ex parte declarans*, 1509). Als Ergebnis seiner Untersuchung stellt

1) Dieser Titel steht nicht auf dem eigentlichen Titelblatte, sondern auf einem Vorsatzblatte.

er fest, daß die spanischen Arithmetiker wesentlich aus BOETIUS und JORDANUS schöpften, aber anderseits die arithmetischen Verfasser des 15. Jahrhunderts nicht gekannt haben dürften, und jedenfalls nicht dazu beigetragen haben, die Wissenschaft weiter zu führen. Diesen Umstand sucht er dadurch zu erklären, daß die fraglichen spanischen Verfasser ihre arithmetischen Kenntnisse an der Universität in Paris bekommen hatten, woselbst der mathematische Unterricht um das Jahr 1500 nicht besonders hoch stand. Den bekannten *Tractado subtilissimo de arismetica y geometria* (1512) von FR. J. DE ORTEGA hat er nicht benutzen können, sondern nur den Auszug von J. PEROTT im 15. Bande des Bullettino di bibliografia delle scienze matematiche. Über die Methode, wodurch ORTEGA seine angenäherten Quadratwurzelwerte erhielt, verweist Herr REY PASTOR auf einen Anhang seines „Discurso"; aber dieser Anhang ist nicht gedruckt worden.

Bevor Herr REY PASTOR die spanischen Algebraiker behandelt, gibt er einige Notizen über die Entwicklung der Algebra vom Ende des 15. bis zum Ende des 16. Jahrhunderts und berichtet dann über Arbeiten von M. AUREL (*Libro primero de arithmética algebrática*, 1552); J. PEREZ DE MOYA (*Arithmetica practica y speculativa*, 1562; *Fragmentos matematicos*. I, 1568; *Tratado de mathematicas*, 1573), A. ROCHA (*Arithmetica*, 1565), P. NUÑEZ und ein paar anderen Verfassern. Die drei ersten beschränken sich auf eine dürftige Darstellung der Elemente der Algebra, wie sie leicht aus der *Summa* von PACIUOLO entnommen werden können; nur AUREL ist insofern weiter gegangen, als er sich teilweise an CHR. RUDOLFF anschließt. Die Behauptung VALLÍNS, ROCHA habe die Algebra mit der Theorie der Gleichheiten („igualaciones") bereichert, bezeichnet Herr REY PASTOR als durchaus unbegründet. Über die Algebra von NUÑEZ gibt er kurze Auskunft und verweist auch hier auf einen noch nicht zum Abdruck gelangten Anhang.

Die Schriften der spanischen Geometer, die Herr REY PASTOR durchgesehen hat, bieten für die Geschichte der Mathematik wenig Interesse dar. Auf Grund des Titels *Descubrimientos geométricos*, der Arbeit von J. A. DE MOLINA CANO (1598), hätte man vielleicht erwarten können, darin etwas Wertvolles zu finden, aber diese Erwartung ist nicht erfüllt worden. Allerdings enthält die Arbeit nach Herrn REY PASTOR einige neue Sachen, die indessen nicht richtig seien. Daß die Abhandlung *De circuli quadratura* von J. FALCÓ (1587) wertlos sein muß, kann man im voraus vermuten, und diese Vermutung ist durch die Untersuchung des Herrn REY PASTOR bestätigt worden.

Zum Schluß fügt Herr REY PASTOR einige Bemerkungen über die mathematischen Studien in Spanien bis auf unsere Zeit hinzu und bringt eine Liste der von ihm benutzten oder zitierten Schriften.

Um den Stand der spanischen Mathematik im 16. Jahrhundert beurteilen zu können, hat Herr REY PASTOR, wie schon angedeutet, auch auf die frühere und gleichzeitige Entwicklung der Mathematik in den Kulturländern Bezug genommen und dieses Verfahren ist ganz gewiß lobenswert. Leider ist er nicht in der Lage gewesen, von den neuesten Ergebnissen der mathematisch-historischen Forschung Kenntnis zu nehmen, sondern er hat hauptsächlich die CANTORschen *Vorlesungen* zu Rate gezogen, welche Arbeit er als die einzige ihm bekannte wissenschaftliche Darstellung des Gegenstandes bezeichnet, und deren Angaben er offenbar als im großen und ganzen korrekt betrachtet. Es ist darum natürlich, daß er nicht selten unzuverlässige CANTORsche Behauptungen bringen muß. Dadurch wird z. B. seine Darstellung der Geschichte der Algebra in Spanien im 12. Jahrhundert ungenau. Bekanntlich weist CANTOR noch in der dritten Auflage des ersten Bandes der *Vorlesungen* (S. 800) ohne weiteres dem JOHANNES HISPALENSIS die Exzerpte arithmetischen und algebraischen Inhalts zu, die BONCOMPAGNI 1857 veröffentlichte, und unter Bezugnahme hierauf gibt Herr REY PASTOR S. 34 an, JOHANNES HISPALENSIS habe „dado á conocer á Europa el Algebra árabe". Allein ich habe wiederholt (vgl Biblioth. Mathem. 6_3, 1905, S. 114; 9_3, 1908/9, S. 2—4) darauf aufmerksam gemacht, daß die Algorismusschrift, die BONCOMPAGNI 1857 herausgab, nur in der von ihm benutzten Handschrift dem JOHANNES HISPALENSIS beigelegt wird, während in einer Handschrift GHERARDO CREMONESE als Übersetzer oder Bearbeiter angegeben wird und die übrigen bekannten Handschriften des Traktates in betreff der Autorschaft undeutliche oder gar keine Auskunft geben. Ich habe ferner hervorgehoben, daß die Exzerpte, die unter der Überschrift „Hic incipiunt regule" beginnen, eigentlich nichts mit der Algorismusschrift zu tun haben, so daß diese Exzerpte auch im Cod. Paris. 7359 als anonym zu betrachten sind. Fügt man noch hinzu, daß diese Handschrift mehr als 100 Jahre nach dem Tode des angeblichen Bearbeiters angefertigt wurde, so ist klar, daß man vom Standpunkte der jetzigen mathematisch-historischen Forschung aus die fraglichen Exzerpte als anonym betrachten soll. Darum müssen auch S. 33 die Worte: „los matemáticos españoles, herederos legítimos de los árabes y de JUAN el Hispalense" modifiziert werden.

Von den übrigen Bemerkungen, die ich bei der Durchsicht des „Discurso" notiert habe, teile ich hier unten die folgenden mit

S. 11. In der Fußnote sagt Herr REY PASTOR, er wisse nicht, ob VALLÍN den Plan, englische und französische Übersetzungen der *Cultura científica en España en el siglo XVI* anfertigen zu lassen, verwirklicht habe. Ich glaube behaupten zu können, daß die englische Übersetzung nie begonnen, die französische nicht beendet wurde. Ich stand nämlich in recht lebhaftem Briefwechsel mit VALLÍN fast bis zu seinem Tode, und über die Inangriffnahme der englischen Übersetzung schrieb er mir nichts; von der französischen sprach er am 16. Mai 1894 auf folgende Weise: „Esa y otras correcciones se rectificarán en la edicion francés que ha de hacerse en Paris y cujos primeros pliegos están ya preparados para la imprenta," aber seine späteren Briefe enthalten kein Wort über die Übersetzung, obgleich er wußte, daß ich mich lebhaft für seinen Plan interessierte. Ich schließe daraus, daß der französische Übersetzer nie mit der Arbeit fertig wurde.

S. 16. Unter ausdrücklicher Berufung auf CANTOR behauptet Herr REY PASTOR, daß Europa im 12. Jahrhundert aus den westarabischen Mathematikern die Lehre von den Gleichungen vollständig lernen konnte. Allein CANTOR sagt nur, daß die Schriften der westarabischen Mathematiker den Europäern gestatteten, schon im 12. Jahrhundert die Lehre von den Gleichungen in größerer Vollkommenheit kennen zu lernen, als wenn sie deren Entwicklung einzig im Oriente verfolgt hätten, was ja etwas ganz anderes ist. Eine vollständige Lehre von den Gleichungen gab es überhaupt nicht im 12. Jahrhundert.

S. 16—17. Auch wenn man die algebraischen Exzerpte, von denen ich oben gesprochen habe, dem JOHANNES HISPALENSIS zuweisen könnte, wäre es dennoch ungenau zu sagen, daß die erste lateinische Übersetzung einer arabischen Schrift algebraischen Inhalts von JOHANNES HISPALENSIS herrührt. Man weiß nämlich (siehe L. C. KARPINSKI, *ROBERT OF CHESTER'S translation of the algebra of AL-KHOWARIZMI;*

Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/11, S. 125—157), daß 1244 eine solche Übersetzung angefertigt wurde, deren Ende in einer Handschrift lautet: „Finis libri restaurationis et oppositionis numeri quem ROBERTUS CESTRENSIS de Arabico in latinum in civitate Secobiensi transtulit.“ Dagegen weiß man gar nicht, wann die Exzerpte übersetzt wurden, und die Annahme, daß dies vor 1244 geschah, schwebt vollständig in der Luft.

S. 17. In betreff der Bemerkung der Fußnote: „Hay dudas si el Algorismo que tradujo JUAN de Luna era de este mismo matemático“ [ALKHWARISMI] verweise ich auf das, was ich oben in betreff der von BONCOMPAGNI 1857 herausgegebenen Algorismusschrift gesagt habe.

S. 18. Unter die Verdienste des LEONARDO PISANO rechnet Herr REY PASTOR auch, daß jener die indische Rechenkunst in Europa einführte und die Existenz mehrerer Wurzeln einer Gleichung erkannt hatte. Allein schon viele Jahrzehnte vor LEONARDO war die indische Rechenkunst durch die Algorithmiker des 12. Jahrhunderts in Europa bekannt, und es ist nicht ganz korrekt zu sagen, daß nach LEONARDO mehrere Wurzelwerte einer Gleichung genügen (vgl. Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, S. 190; 9_3, 1908/9, S. 245).

S. 23. Es wäre angebracht, die letzte Zeile: „Véase la comparación de ambas [d. h. CHUQUET und PACIUOLO] en CANTOR, t. 2, p. 348—364“, zu streichen (siehe Biblioth. Mathem. 13_3, 1912/13, S. 339).

S. 29. Die Darstellung der Geschichte des Rechnens auf den Linien, die Herr REY PASTOR nach CANTOR gibt, ist unbefriedigend (siehe Biblioth. Mathem. 13_3, 1912/13, S. 261—262).

S. 32. Die Behauptung, daß CARDANO „discute las raíces ... imaginarias“, ist ungenau. CARDANO spricht allerdings von Aufgaben, die in gewissen Fällen unmöglich werden, und rechnet ganz ausnahmsweise mit imaginären Größen, aber imaginäre Wurzeln behandelt er nicht (vgl. hierüber Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/7, S. 293; 11_3, 1910/11, S. 162—163). Auch hier ist Herr REY PASTOR offenbar von CANTOR irregeführt worden.

S. 48. Woher Herr REY PASTOR die Behauptung: „Hasta la caida del imperio bizantino, la Geometría griega era accesibile á Europa solamente por los manuscritos árabes“ entnommen hat, weiß ich nicht; vermutlich stammt die Behauptung unmittelbar oder mittelbar aus einer sehr veralteten Quelle. Daß WILHELM VON MOERBEK 1269 eine Sammlung der Schriften des ARCHIMEDES direkt aus dem Griechischen übersetzt hat, sollte jeder Historiker der Mathematik wissen und über die mittelalterlichen lateinischen Übersetzungen aus dem Griechischen auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften besitzen wir seit 1909 eine Monographie von A. A. BJÖRNBO (Archiv für d. Gesch. d. Naturw. und d. Technik **1**, 1909, S. 385—394), worin 23 solche Übersetzungen behandelt werden.

S. 49. In betreff der Angabe: „BOMBELLI inventa el desarrollo de radicales en fracción continua“ verweise ich auf meine Bemerkung in der Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, S. 87.

S. 62. Die Bemerkung: „WALLIS, MERCATOR, LEIBNITZ, MOIVRE y los BERNOULLI habían creado la teoria de series, sentando los fundamentos del Cálculo infinitesimal, y preparando el advenimiento de NEWTON“ ist ein wenig auffällig schon aus dem Grunde, weil MOIVRE und JOHANN BERNOULLI beide im Jahre 1667, also nachdem NEWTON die Grundlagen der höheren Analysis entdeckt hatte, geboren wurden.

Bei der Bearbeitung der bibliographischen Liste hat Herr REY PASTOR veraltete Quellen benutzt. Ich habe beiläufig folgendes notiert.

S. 71. Der *Tractatus arithmetice practice qui dicitur algorismus* von P. CIRUELO erschien nicht erst 1505, sondern schon 1495 (siehe FR. GRÄFE, Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 306). Außer den von Herrn REY PASTOR zitierten Auflagen von 1505 und 1509 gibt es noch eine Auflage Paris 1513 (siehe D. E. SMITH, *Rara arithmetica*, Boston 1908, S. 60).

S. 72. Die *Suma de arithmetica pratica* von G. DE TEJADA ist nach D. E. SMITH (a. a. O. S. 240) in Valladolid (nicht Valencia) gedruckt. Aus dem Faksimile des Titelblattes bei SMITH scheint hervorzugehen, daß der Verfasser sich TEXEDA nannte.

S. 72. Die *Arithmetica* des A. ROCHA erschien 1565; die Dedikation ist vom 23. November 1564 datiert (siehe D. E. SMITH, a. a. O. S. 316).

S. 72. Die Algebra des NUÑEZ erschien nicht 1564 sondern erst 1567; die Dedikation ist vom 1. Dezember 1564 datiert (siehe H. BOSMANS, Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, S. 154, 156).

Obgleich das Ergebnis der ganzen Untersuchung des Herrn REY PASTOR wesentlich negativ ist, muß es doch als wertvoll betrachtet werden, weil dadurch die Behauptungen früherer Historiker ergänzt und berichtigt werden. Wie der Verfasser selbst S. 29 bemerkt, würde es ebenfalls von Interesse sein, näher zu untersuchen, ob vielleicht einzelne Sätze der spanischen Mathematiker wenigstens bis zu einem gewissen Grade verdienen können, in der Geschichte der Mathematik erwähnt zu werden, aber für diesen Zweck dürften die gegenwärtigen mathematisch-historischen Kenntnisse des Herrn REY PASTOR kaum genügen, auch wenn er die nötige Literatur zur Verfügung gehabt hätte.

Indessen gibt es im „Discurso“ des Herrn REY PASTOR noch eine andere Unvollständigkeit, denn er hat nur auf rein mathematische Schriften Bezug genommen, und es ist nicht undenkbar, daß in astronomischen oder physikalischen Schriften spanischer Mathematiker des 16. Jahrhunderts wichtige rein mathematische Sätze zu finden sind. Einen Beleg hierfür scheint P. DUHEM im dritten Bande seiner *Etudes sur* LÉONARD DE VINCI (Paris 1913) zu bieten. DUHEM gibt nämlich S. 540—541 an, daß in der oben zitierten Schrift *De triplici motu* von A. THOMÁS (Bl. q5^v Sp. 2—q6^r Sp. 1—2) ein Problem behandelt wird, dessen Lösung die Kenntnis der Summe der unendlichen Reihe

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2\cdot 2^3}+\frac{4}{3\cdot 2^4}+\frac{5}{4\cdot 2^5}+\cdots$$

erfordert. Diese Reihe kann offenbar als aus den zwei Reihen

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\cdots,$$

$$\frac{1}{1\cdot 2^2}+\frac{1}{2\cdot 2^3}+\frac{1}{3\cdot 2^4}+\frac{1}{4\cdot 2^5}+\cdots$$

zusammengesetzt betrachtet werden, und die Summe der ersten Reihe ist

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1,$$

die Summe der zweiten Reihe

$$\frac{1}{2}\log_e\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\log_e 2}{2}.$$

Selbstverständlich konnte THOMÁS die fragliche Reihe nicht summieren, aber nach DUHEM macht er darauf aufmerksam, daß die Summe größer als die Summe der obigen geometrischen Reihe, d. h. 1, kleiner als die Summe der Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \cdots$$

sei, und nach DUHEM weiß THOMÁS aus einer Schrift von ORESME, daß diese Summe 2 beträgt. Leider fügt DUHEM nicht den Originaltext des Passus bei THOMÁS hinzu, aber wenn es sich herausstellt, daß die Deutung desselben richtig ist, und daß THOMÁS nicht ganz einfach einen älteren Verfasser abgeschrieben hat, gebührt ihm unstreitig ein Platz in der Vorgeschichte der Theorie der unendlichen Reihen, ganz wie es mit JAKOB BERNOULLI der Fall ist in betreff der Geschichte der Thetareihen (siehe meinen Artikel *JAKOB BERNOULLI und die JACOBIschen Thetafunktionen;* Biblioth. Mathem. $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 206—210).

Stockholm. G. ENESTRÖM.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik, herausgegeben von K. von Buchka, H. Stadler, K. Sudhoff. Leipzig. 8°. [1
5 (1913) : 2.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8°. [2
13_3 (1912/13) : 4. — [Rezension des Bandes 12_3:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 24_3, 1913, 638—640. (H. Bosmans.)

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8°. [3
15 (1913) : 4.

Isis Revue consacrée à l'histoire de la science, publiée par G. Sarton. Vondelgem-lez-Gand. [4
1 (1913) : 3.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von E. Lampe. Berlin. 8°. [5
42 (1911) : 1—2. — Die Seiten 1—70 enthalten Referate der im Jahre 1911 erschienenen mathematisch-historischen Schriften.

Proceedings of the fifth international congress of mathematicians (Cambridge 22—28 August 1912). Edited by E. W. Hobson and A. E. H. Love. Vol. 1—2. Cambridge, University press 1913. [6
8°. — 1 (Report of the congress: lectures, communications, section 1): 500 S. — 2 (Communications to sections 2—4) 657 S. — [30 sh.]

Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. Unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen herausgegeben von Felix Auerbach und R. Rothe. 3 (1913). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 24_3, 1913, 5.6—599. (P Mansion.) — Archiv der Mathem. 21_3, 1913, 337. (E. Jahnke.) Mathesis 3_4, 1913, 213—214. (P. M.) [7

Müller, Felix, Versuch einer Gruppierung der neueren mathematisch-historischen Schriften (1887—1911). [8
Zeitschr. für mathem. Unterr. 44, 1913, 461—463.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 2^3 (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 13_3, 1912/13, 339—344. (G. Eneström.) — 3^2 (1901). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 13_3, 1912/13, 344—351. (G. Eneström.) [9

Wieleitner, H., Geschichte der Mathematik. II : 1 (1911). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 37_2, 1913, 312—313. (H. Vergne.) [10

Zeuthen, H. G., Die Mathematik im Altertum und im Mittelalter (1912). [Rezension:] Archiv der Mathem. 21_3, 1913, 332. (H. Wieleitner.) — Mathesis 3_4, 1913, 240—241. (P. Mansion.) — *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 24_3, 1913, 599—601. (Abdruck der vorigen Rezension.) [11

Wargny, C., Historia de las matemáticas (1913). [Rezension:] *Madrid*, Soc. matem. española, Revista 3, 1913, 19—21. (L. Octavio de Toledo.) [12

Witting, A. und Gebhardt, M., Beispiele zur Geschichte der Mathematik. Ein mathematisch-historisches Lesebuch. II. Teil. Leipzig, Teubner 1913. [13
8°, VI + 61 S. + Titelbild. — [80 Pf.] — Mathematische Bibliothek. XV.

Frankland, W. B., Theories of parallelism. An historical critique (1910). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 15, 1913, 116—117. (G. L.) [14

Aubry, A., Le calcul infinitésimal avant Descartes et Fermat (1912). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 24_3, 1913, 643—646. (H. Bosmans.) [15

Gerland, E., Geschichte der Physik. I (1913). [Rezension:] Isis 1, 1913, 527—529. (G. S.) [16

***Sageret, J.,** Le système du monde des Chaldéens à Newton. Paris, Alcan 1912. [17
16°, 280 S. — [3,50 fr.] — [Rezension:] L'enseignement mathém. 15, 1913, 446. (A. Buhl.)

Oppenheim, S., Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit. Aufl. 2 (1912). [Rezension:] Archiv der Mathem. 21_3, 1913, 344. (P. B. Fischer.) [18

Tannery, P., Mémoires scientifiques. II (1912). [Rezension:] Isis 1, 1913, 509—512. (G. S.) [19

Mikami, Y., The development of mathematics in China and Japan (1913). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 24_3, 1913, 641—643. (H. Bosmans.) [20

b) Geschichte des Altertums.

***Bezold, C.,** Zenit- und Äquatorialgestirne am babylonischen Fixsternhimmel. Mit astronomischen Beiträgen von A. Kopff und Fr. Boll. [21
Heidelberg, Akad. d. Wiss., Sitzungsber. 1913. 59 S. — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 34, 1913, 3036—3038. (Br. Meissner.)

Loria, G., Le scienze esatte nell' antica Grecia. Seconda edizione totalmente riveduta. Milano, Hoepli 1914. [22
12°, XXIV + 969 + (2) S. — [9.50 lire.]

Hoppe, E., Das antike Weltbild. [23
Archiv für d. Gesch. d. Naturw. und d. Technik 5, 1913, 73—85.

Heath, Th., Aristarchus of Samos (1913). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 37_2, 1913, 323—327. (P. Duhem.) [24

Archimedes, Opera omnia ed. J. L. Heiberg. II (1913). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 37_2, 1913, 300—303. (P. Duhem.) [25

Manitius, K., Des Claudius Ptolemäus Handbuch der Astronomie. I—II (1912—1913). [Rezension:] Archiv der Mathem. 22_2, 1913, 62—64. (H. Vogt.) [26

Heath, Th., Diophantus of Alexandria. Second edition (1910). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 15, 1913, 113—116. (G. L.) [27

c) Geschichte des Mittelalters.

Ramanujacharia, N. and Kaye, G. R., The Trisatika of Sridharacarya (1913). [Rezension:] Isis 1, 1913, 516—517. (P. Masson-Oursel.) [28

Kaye, G. R., The Bakhshali manuscript (1912). [Rezension:] Isis 1, 1913, 547. (P. Masson-Oursel.) [29

Hee, L. van, La notation algébrique en Chine au XIII^e siècle. [30
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 24_3, 1913, 574—587.

Ahrens, W., Das „Josephspiel", ein arithmetisches Kunststück, Geschichte und Literatur (1913). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 15, 1913, 127. [31

Eneström, G., Der „Algorismus de integris" des Meisters Gernardus. [32
Biblioth. Mathem. 13_3, 1912/13, 289—332.

Duhem, P., Études sur Léonard de Vinci. Troisième partie. Les précurseurs parisiens de Galilée. Paris, Hermann 1913. [33
8°, XIV + 605 S. — [Rezension:] Mathesis 3_4, 1913, 342—343.

***Bensaude, J.,** L'astronomie nautique en Portugal à l'époque des grandes découvertes. Berne 1913. [34
8°. — [10 Mk.]

d) Geschichte der neueren Zeit.

Cajori, F., A history of the arithmetical methods of approximation to the roots of numerical equations of one unknown quantity (1910). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 15, 1913, 112—113. (G. L.) [35

Rey Pastor, J., Los matemáticos españoles del siglo XVI. Discurso leido en la solemne apertura del curso académico de 1913 á 1914. Oviedo 1913. [36
Groß-4°, 75 S.

Favaro, A., Per la biografia di Niccolò Tartaglia. [37
Archivio storico italiano 1913. 40 S.

Favaro, A., Di Niccolò Tartaglia e della stampa di alcune delle sue opere con particolare riguardo alla „Travagliata inventione". [38
Isis 1, 1913, 329—340.

Bosmans, H., Sur quelques exemples de la méthode des limites de Simon Stevin (1913). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 15, 1913, 127—128. [39

Bosmans, H., Les démonstrations par l'analyse infinitésimale chez Luc Valerio (1913). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 15, 1913, 127—128. [40

Favaro, A., Sulla invenzione del nome „cicloide". [41
Biblioth. Mathem. 13_3, 1912/13, 351—352. — Antwort auf eine Anfrage.

Bosmans, H., Galilée ou Huygens? A propos d'un épisode de la première application du pendule aux horloges (1912) [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 15, 1913, 126. [42

Giacomelli, R., Un contemporaneo di Galileo Galilei. Giuseppe Ballo (1913). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 15, 1913, 126—127. [43

Simon, M., Die Dreihundertjahrfeier der Logarithmentafel. [44
Österreichische polytechnische Zeitschr. 1913. — [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 15, 1913, 127.

Wieleitner, H., Über zwei algebraische Einleitungen zu Descartes' „Géométrie" (1913). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 24_3, 1913, 648—649. (H. Bosmans.) [45

Favaro, A., François Blondel et ses études sur les „Nuove scienze" de Galilée. [46
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 24_3, 1913, 353—380.

Brocard, H., Analyse d'autographes et d'autres écrits de Girard Desargues (1913). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 24_3, 1913, 649—650. (H. Bosmans.) [47

Cajori, F., Historical note on the graphic representation of imaginaries before the time of Wessel (1912). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 15, 1913, 126. [48

Biesbroek, G. van et Tiberghien, A., Études sur les notes astronomiques contenues dans les Adversaria d'Ole Römer. [49
Kjöbenhavn, Vidensk. Selsk., Oversigt 1913, 213—324.

Huygens, Chr., Die Pendeluhr „Horologium oscillatorium". Herausgegeben von A. Heckscher und A. v. Öttingen. Leipzig, Engelmann 1913. [50
8°, 266 S. + Bildnis. — [7 Mk.] — Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 192.

Geer, P. van, Hugeniana geometrica. XII. [51
Amsterdam, Wisk. genoots., Nieuw archief 10_2, 1913, 370—395.

Jourdain, Ph. E. B., Robert Hooke as a precursor of Newton. [52
The monist 23, 1913, 353—385.

Eneström, G., Über die ältere Geschichte der Zerfällung ganzer Zahlen in Summen kleinerer Zahlen. [53
Biblioth. Mathem. 13_3, 1912/13, 352. — Anfrage.

Jourdain, Ph. E. B., The principle of least action (1913). [Selbstanzeige:] Isis 1, 1913, 527. [54

Eneström, G., Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers (1910—1913). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 24_3, 1913, 646—647. (H. Bosmans.) — L'enseignement mathém. 15, 1913, 442. — Mathesis 3_4, 1913, 245. [55

Leonhardi Euleri Opera omnia. Sub auspiciis societatis scientiarum naturalium Helveticae. Edenda curaverunt F. Rudio, A. Krazer, P. Stäckel. I : 10, 11. Leipzig, Teubner 1913. [56
4°. — 1 : 10. Institutiones calculi differentialis edidit G. Kowalewski. 676 S. — 1 : 11 Institutiones calculi integralis ediderunt F. Engel et L. Schlesinger. Volumen primum. XXIII + 462 S. — [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 24_3, 1913, 601—604. (H. Bosmans.) — [Rezension der Bände I : 20, II : 1—2:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 24_3, 1913, 604—608. (H. Bosmans.)

Häntzschel, E., Euler und die Weierstraßsche Theorie der elliptischen Funktionen. [57
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 22, 1913, 278—284.

Stäckel, P., Über die Rektifikation algebraischer Kurven. [58
Annali di matem. 20_3, 1913, 193—200. — Bezieht sich auf Untersuchungen von L. Euler.

Mikami, Y., On Ajima Chokuyen's solution of the indeterminate equation $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = y^2$. [59
Archiv for Mathem. (Kristiania) 33, 1913. 8 S.

Loria, G., Lagrange e la storia delle matematiche. [60
Biblioth. Mathem. 13_3, 1912/13, 333—338 + Bildnis.

Bopp, K., Eine Schrift von Ensheim (1913). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 24_3, 1913, 651—652. (H. Bosmans.) [61

Klein, F., Zehnter Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauß Werken. [62
Mathem. Ann. 74, 1913, 410—412.

Stäckel, P., Wolfgang und Johann Bolyai. Geometrische Untersuchungen. Mit Unterstützung der ungarischen Akademie der Wissenschaften herausgegeben. Erster Teil. Leben und Schriften der beiden Bolyai. Zweiter Teil. Stücke aus den Schriften der beiden Bolyai. Leipzig, Teubner 1913. [63
8°. 1 : X + (2) + 281 S. + Faksimile. — 2 : (7) + 274 S. + 1 Taf. — [28 Mk.] — [Selbstbericht:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 22, 1913, *179—180*.

***Bessel** und **Steinheil**, Briefwechsel. Herausgegeben im Auftrage der Akademie der Wissenschaften zu Berlin und München. Leipzig 1913. [64
8°. — [8 Mk.]

Bortolotti, E., Sul nome „Algoritmo". [65
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 15, 1913, 97—98. — In der italienischen Übersetzung (1842) des 1. Bandes der Librischen „Histoire des sciences mathématiques en Italie" wird „Liber alchoarismi de algebra" durch „Il libro sull' algoritmo (!) per l'algebra" wiedergegeben.

***Lecat, M.,** Bibliographie du calcul des variations (1850—1913). Paris, Hermann 1913. [66
8°, IV + 113 S. — [4 fr] — [Rezension:] Mathesis 3_4, 1913, 242.

Schlesinger, L., Bericht über die Entwicklung der linearen Differentialgleichungen seit 1865 (1909). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 15, 1913, 111—112. (G. L.) [67

Hahn, H., Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen (1911). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 37_2, 1913, 303—304. (A. Châtelet.) [68

Smith, D. E. and **Goldziher, Ch.,** Bibliography of the teaching of mathematics 1900—1912 (1912). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 34, 1913, 2554. (W. Lietzmann.) [69

Poincaré, H., Savants et écrivains (1910). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 15, 1913, 118. (G. L.) [70

Jourdain, Ph. E. B., The development of the theory of transfinite numbers. III: 2. [71
Archiv der Mathem. 22_3, 1913, 1—21.

***Lebon, E.,** Gaston Darboux. Biographie, bibliographie analytique des écrits. Seconde édition entièrement refondue. Paris, Gauthier-Villars 1913. [72
Groß-8°, Bildnis + IV + 96 S. — [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 37_2, 1913, 321—323.

e) Nekrologe.

Heinrich **Bertram** (1826—1904). [73
Deutsche Literaturz. 34, 1913, 2569—2572. (C. Michaelis.)

Carlo **Bourlet** (1866—1913). [74
Madrid, Soc. matem. española, Revista 3, 1913, 24. (L. Octavio de Toledo.) — L'enseignement mathém. 15, 1913, 417—418. (H. Fehr.) — Nouv. ann. de mathém. 13_4, 1913, 433—438. (R. Bricard.)

George Howard **Darwin** (1845—1912). [75
The open court 27, 1913, 193—201. (Ph. E. B. Jourdain.)

Charles **Méray** (1835—1911) [76
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 24_3, 1913, 608—609. (D. T.)

Manuel **Moreno y Anda** (1868—1910). [77
Mexico, Soc. Alzate, Memorias 31, 1911, 95—96 [mit Bildnis].

Pieter Hendrick **Schoute** (1846—1913). [78
Amsterdam, Wisk. genoots., Nieuw archief 10_2, 1913. 2 S. + Bildnis.

Jules **Tannery** (1848—1910). [79
Revue de Paris 1911. (Ern. Hovelaque.)

Paul **Tannery** (1843—1904). [80
Revue de métaphysique et de morale 21, 1913 177—210. (A. Rivaud.)

Léon **Teisserenc de Bort** (1855—1913). [81
La nature 1913: 1, 159—160 (mit Bildnis; J. Loisel), 296—300 (J. Mascart).
Renard, P., *L'œuvre de M. Léon Teisserenc de Bort*. Paris, Gauthier-Villars 1913.
8°, 14 S. — [1.25 fr]

f) Aktuelle Fragen.

Gebhardt, M., Die Geschichte der Mathematik im mathematischen Unterrichte der höheren Schulen Deutschlands (1912). [Rezension:] Biblioth. Mathem. 13_3, 1912/13, 353—357. (G. Eneström.) [82

[Amerikanische Mathematikerversammlung in Madison 1913.] [83
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 22, 1913, *174*.

[Deutsche Mathematikerversammlung in Wien 1913.] [84
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 22, 1913, *157—165*.

[Italienische Mathematikerversammlung in Siena 1913.] [85
Isis 1, 1913, 479—483. (A. Mieli.) — L'enseignement mathém. 15, 1913, 492.

[Schweizerische Mathematikerversammlung in Frauenfeld 1913.] [86
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 22, 1913, *173—174* — L'enseignement mathém. 15, 1913, 492—510.

[Skandinavische Mathematikerversammlung in Kristiania 1913.] [87
L'enseignement mathém. 15, 1913, 491—492.

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— Professor K. Böhm in Heidelberg zum Professor der Mathematik an der Universität in Königsberg.

— S. E. Brasefield zum Professor der Mathematik an der „Lehigh university" in South Bethlehem, Pa.

— R. L. Charles zum Professor der Physik an der „Lehigh university" in South Bethlehem, Pa.

— „Instructor" L. L. Dines in New York zum Professor der Mathematik an der Universität von Arizona.

— Professor J. Drach in Toulouse zum Professor der Mechanik an der Universität in Paris.

— Dr. R. Garnier zum Professor der Mathematik an der Universität in Poitiers.

— „Instructor" N. J. Lennes in New York zum Professor der Mathematik an der Universität in Montana.

— Privatdozent A. Pröll in Danzig zum Professor der Mechanik an der deutschen Technischen Hochschule in Brünn.

— J. B. Reynolds zum Professor der Mathematik und Astronomie an der „Lehigh university" in South Bethlehem, Pa.

— Dr. W. B. Stone in Ann Arbor zum Professor der Mathematik am „Rutgers college".

— „Instructor" R. M. Winger in Urbana zum Professor der Mathematik an der Universität von Oregon.

Todesfälle.

— Robert Ball, Professor der Astronomie an der Universität in Cambridge, geboren in Dublin den 1. Juli 1840, gestorben in Cambridge den 25. November 1913.

— John Robie Eastman, früher Professor der Mathematik an der „U. S. navy" in Washington, geboren in Andover, N. H. den 29. Juli 1836, gestorben den 26. September 1913.

— John Greaves, „Mathematical lecturer" am „Christ's college" in Cambridge, gestorben 1913.

— Wilhelm Holtz, früher Professor der Physik an der Universität in Greifswald, geboren bei Barth in Vorpommern den 15. Oktober 1836, gestorben 1913.

— František Koláček, Professor der mathematischen Physik an der böhmischen Universität in Prag, geboren in Austerlitz den 9. Oktober 1851, gestorben 1911(?).

— L. G. Léon, Sekretär der Mexikanischen astronomischen Gesellschaft, gestorben 1913, 47 Jahre alt.

— Alexander Macfarlane, früher Professor der Mathematik und Physik an der „Lehigh university" in South Bethlehem, Pa., geboren zu Blairgowrie in Schottland den 21. April 1851, gestorben in Chatam, Ontario den 28. August 1913.

— Samuel Roberts, Mathematischer Verfasser, geboren zu Hackney bei London den 15. Dezember 1827, gestorben 1913.

— Hermann Valentiner, Direktor der Lebensversicherungsgesellschaft „Dan" in Kopenhagen, geboren in Gjorslöv den 8. Mai 1850, gestorben in Kopenhagen den 17. September 1913.

— Lucien Augustus Wait, früher Professor der Mathematik an der „Cornell university" in Ithaca, gestorben den 6. September 1913, 67 Jahre alt.

— Ladislaw Weinek, Professor der Astronomie an der deutschen Universität in Prag, geboren in Ofen den 13. Februar 1848, gestorben 1913.

— J. G. White, Professor der Mathematik an der Universität von Kentucky, gestorben den 18. Juli 1913, 67 Jahre alt.

— August Wijkander, Professor der Physik an der Technischen Hochschule in Göteborg, geboren in Stockholm den 14. März 1849, gestorben in Göteborg den 29. Oktober 1913.

Vorlesungen über Geschichte der mathematischen Wissenschaften.

— An der Universität in Gent hat Professor A. Claeys für das Wintersemester 1913—1914 eine einstündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik angekündigt.

— An der Technischen Hochschule in Hannover hat Professor Conrad Müller für das Wintersemester 1913—1914 eine Vorlesung über Geschichte der technischen Mechanik angekündigt.

— An der Universität in Neapel hat Professor F. Amodeo für das akademische Jahr 1913—14 eine dreistündige Vorlesung über die Geschichte der Mathematik während der Newton-Leibnizschen Epoche angekündigt.

Gekrönte Preisschriften.

— *Académie de Belgique à Bruxelles.* Un prix a été décerné en 1912 à M. M. Lecat pour sa réponse à la question suivante: „Exposer et compléter les recherches faites sur le calcul des variations depuis 1850."

Vermischtes.

— Le prix Binoux a été décerné en 1913 par l'Académie des sciences de Paris à M. J. Molk pour les services rendus à l'édition française de l'Encyclopédie des sciences mathématiques.

— Miss Josephine E. Burns ist zum „Instructor in mathematics" an der Universität von Illinois in Urbana ernannt worden.

— Miss M. McDonald ist zum Professor der Mathematik am „Oxford college for women" in Oxford, Ohio, ernannt worden.

Eine Interpolation des Eutokios in unserem Apolloniostext.

Von F. Arendt in Templin.

In dem Fragment aus Diokles *περὶ πυρίων*, das uns Eutokios im Kommentar zum zweiten Buch *περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* aufbewahrt hat, kommt[1]) die Konstruktion einer Hyperbel, von der die Asymptoten und ein Punkt gegeben sind, vor. Die Lösung dieser Konstruktionsaufgabe fügt nun Eutokios am Schluß des Fragmentes selbst hinzu.[2]) Er leitet diese Lösung mit folgenden Worten ein[3]):

Ὡς δὲ δεῖ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου περὶ τὰς δοθείσας ἀσυμπτώτους γράψαι ὑπερβολήν, δείξομεν οὕτως, ἐπειδὴ οὐκ αὐτόθεν κεῖται ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις.

Es folgt Konstruktion und Beweis 206 10—208 6.

Die Aufgabe steht nun in unserem Apolloniostext als II 4[4]), im Widerspruch zu Eutokios' Behauptung: *οὐκ αὐτόθεν κεῖται ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις.*

Die Übereinstimmung ist wörtlich, mit folgenden geringfügigen Abweichungen:

	Eutokios:		Apollonios:
206 10	*ΓΑ*, *ΑΒ*	200 1	*ΑΓ*, *ΑΒ*
206 12	*προκείσθω*	200 3	*δέον ἔστω*
206 13	*περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ΓΑ, ΑΒ γράψαι*	200 3	*τὰς ΓΑΒ γράψαι εἰς ἀσυμπτώτους*
206 21	*ἔστω*	200 9	*γεγονέτω*
206 25	*ΕΗ* (daher *ΔΕΗ*)	200 12	*Η* (daher *ΔΕ*, *Η*)
200 26	*ὁμοίῳ*	200 12	*εἴδει ὁμοίῳ*
206 26	*λέγω ὅτι τῆς γεγραμμένης ὑπερβολῆς ἀσύμπτωτοί εἰσιν αἱ ΓΑ, ΑΒ*		fehlt

1) Archimedis *Opera omnia*, ed. J. L. Heiberg 3, Leipzig 1881, p. 198 25.

2) „Sine dubio Eutocius de suo addidit"; Heiberg, a. a. O. p. 207 not. 1.

3) a. a. O. p. 206 6.

4) Apollonii *Quae graece exstant*, ed. J. L. Heiberg 1, Leipzig 1891, p. 198 25 — 200 19.

Eutokios:		Apollonios:	
206 27	ἐπεὶ γὰρ	200 12	ἐπεὶ οὖν
208 1	τῆς ΓΔ	200 15	ΓΔ
208 2	ΓΒ	200 16	τῆς ΓΒ
208 4	τῆς ὑπερβολῆς	200 19	τῆς γραφείσης ὑπερβολῆς
208 4	διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ β' βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν στοιχείων		fehlt

Eine derartige Übereinstimmung kann auch bei mathematischen Texten nicht zufällig sein. Eutokios kann also nicht etwa später, als er seine Apolloniosausgabe veranstaltete, den Satz in einer anderen Handschrift gefunden haben, sondern er hat ihn aus seinem Archimedeskommentar interpoliert. — Wenn noch ein weiteres Argument vonnöten ist, so kann man es in der vereinzelten Stellung dieses *πρόβλημα* mitten unter den *θεωρήματα* des 2. Buches sehen. Sonst stehen die *προβλήματα* bei Apollonios vereinigt am Schlusse des ersten und zweiten Buches (I 52—60; II 44—53, hier unterbrochen von zwei in engem Zusammenhang mit den Aufgaben stehenden Lehrsätzen 48, 52).

Dieser eine Fall gibt natürlich zu der Vermutung Anlaß, daß Eutokios auch sonst *διὰ τὴν τῶν εἰσαγομένων εὐμάρειαν*, um seine eigenen Worte zu gebrauchen[1]), willkürlich mit dem Apolloniostext verfahren ist; durch sorgfältige Untersuchungen wird sich vielleicht noch einiges feststellen lassen

1) Apollonii *Quae graece exstant,* ed. J. L. Heiberg 2, Leipzig 1893, p. 176 20.

Der „Algorismus de minutiis“ des Meisters Gernardus.

Von G. Eneström in Stockholm.

Den ersten Teil der Algorismusschrift des Meisters Gernardus habe ich im vorigen Bande dieser Zeitschrift veröffentlicht[1]) und verweise auf diese Arbeit teils in betreff der mir bekannten Handschriften des zweiten Teils, d. h. des „Algorismus de minutiis“, teils für das Material, das ich jetzt bei der Herausgabe dieses zweiten Teiles zur Verfügung gehabt habe, teils auch hinsichtlich meines Verfahrens bei der Benutzung des Materials.

Auch der zweite Teil des von mir benutzten Cod. Vatic. Reg. Su. 1261 ist sehr gut geschrieben, und ihre Vorlage scheint im allgemeinen recht leserlich gewesen zu sein. Daß aber die Vorlage dem Abschreiber zuweilen gewisse Schwierigkeiten bereitet haben dürfte, scheint nicht nur aus den offenbaren Fehlern, die er hie und da begangen hat, hervorzugehen, sondern auch aus dem Umstande, daß an einigen Stellen der Handschrift Lücken vorkommen; selbstverständlich können eben diese Lücken schon in der Vorlage vorhanden gewesen sein. Besonders große Mühe haben dem Abschreiber die Sätze 36 und 41 gemacht, weil daselbst gewisse ungewöhnliche Zeichen angewandt sind. Welches diese Zeichen eigentlich sind, ist mir nicht möglich zu ermitteln, da die Druckausgabe im allgemeinen andere Zeichen als die der Handschrift hat, und zwar Zeichen, die die Druckerei aus ihrem Typenvorrat mehr oder weniger willkürlich ausgewählt zu haben scheint. Unter solchen Umständen und da die Form der Zeichen für die Darstellung durchaus gleichgültig ist, habe ich die mir unbekannten Zeichen durch Kapitälchen ersetzt. Über die Zeichen der Handschrift und der Druckausgabe sowie die von mir eingeführten Ersatzzeichen gibt die S. 100 eingefügte Zusammenstellung Auskunft. In der Druckausgabe kommen noch die griechischen Buchstaben β, δ, ϖ, ϑ, $\varDelta$ vor, an deren Stelle die Handschrift gemeine Buchstaben hat.

1) G. Eneström, *Der „Algorismus de integris“ des Meisters Gernardus*; Biblioth. Mathem. 13_3, 1912/13, S. 289—332.

Zeichen der Handschrift	Zeichen der Druckausgabe	Ersatzzeichen
σ	Θ	A
ℯ	e	B
τ	∞	C
o—o	∾	D
ψ	ω	E
→	ϖ	F
9	Q	G
Λ	Λ	H
←	γ	I
⩚	φ	K
8	ω	L
X	X	M
⋀	μ	N

Hinsichtlich der Zahl der Sätze unterscheiden sich die Handschrift und die Druckausgabe, denn jene hat 42, diese nur 41 Sätze. Indessen ist dieser Unterschied nur scheinbar, denn zwischen den Sätzen 9 und 10 der Druckausgabe steht ein nicht numerierter Satz, der eben der Satz 10 der Handschrift ist. Man könnte geneigt sein, an einen einfachen Flüchtigkeitsfehler bei der Herausgabe des *Algorithmus demonstratus* zu denken und dies um so mehr, weil nach Duhem[1]) auch der Cod. Paris. 8680 A 42 Sätze enthält. Allein merkwürdigerweise deuten die Verweise der Cod. Vatic. Reg. Su. 1261 darauf hin, daß die Numerierung der Druckausgabe die ursprüngliche sei.

Ganz wie in betreff des ersten Teiles der Algorismusschrift bringe ich nach dem Texte einen kurzen Kommentar, worin ich auch auf die zwei älteren Algorismusschriften, über deren Inhalt ich in diesem Bande[2]) Auskunft gegeben habe, Bezug nehme.

[Algorismus Gernardi] De minuciis.

ut .3. ut secundum .4.
[Bl. 277r] Deinceps ad minucias procedat negocium et eia(!). Cum minor quantitas secundum aliquem numerum multiplicata maiorem per-
ut .3. ut .12.
ficit dicitur quantitas minor maioris pars multiplicativa sive pars quota
ut .4.
sive pars simpliciter nomine restricto. Numerus autem secundum quem
ut .3.
minor quantitas multiplicata maiorem componit est denominacio partis ad
ut .4. quia quater
totum. Est igitur numerus denominans in quo tociens est unitas quociens
ut .3.
pars denominata in toto. Minucia sive fractio est quantitas numerata et
ut .3.
denominata. Est autem tum pars ut una quinta tum partes ut tres quarte [Bl. 277v]. Est autem quandoque toti equalis ut tres tercie. quandoque

1) P. Duhem, *Sur l'Algorithmus demonstratus*; Biblioth. Mathem. 6_3, 1905, S. 11.

2) G. Eneström, *Das Bruchrechnen des Jordanus Nemorarius*; Biblioth. Mathem. 14_3, 1913/14, S. 41—54.

minor ut tres quarte. quandoque maior ut quinque tercie. Numerus nu-
ut .3.
merans est in quo tociens est unitas quociens pars in minucia.

Minucia per minuciam multiplicare est invenire per operacionem numerum et denominacionem quantitatis ita se habentis ad alteram producencium sicut reliqua se habet ad integrum.

Dividere minuciam per minuciam est invenire per operacionem numerum et denominacionem quantitatis cuius proporcio ad integrum sit sicut divise fractionis ad dividentem.

Quadrata minucia est quam et numerat et denominat quadratus vel sic. Quadrata est minucia quem aliqua minucia in se semel multiplicata producit. Cum autem hoc fit producens est radix producte.

Cubica est minucia qui ex cubicis numeris numeratur et denominatur sive quam aliqua minucia bis in se ducta producit. Quod cum sit producens producte radix dicitur.

Cum divisum fuerit quodlibet totum in .60. minuta et quodlibet minutum in .60. secunda et sic deinceps secunda in tercia et ita in infinitum minucie sic sumpte dicuntur philosophice. Talibus enim maxime utuntur philosophi.

Alie autem vulgares dicuntur. Differunt autem vulgares a philosophicis in modo scribendi. Scribuntur enim vulgares ita ut numerus numerans ponatur supra et numerus denominans subtus. ut tres quarte ita
3
scribo .4. In minuciis autem philosophicis numquam scribitur numerus denominans eo quod certum sit eas denominari a .60. est eciam opus distinctione locorum in earum figuracione. Primus enim locus est integrorum. secundus minutorum. tercius secundorum. quartus terciorum. et sic deinceps.

Die Druckausgabe hat denselben Text, nur daß die Worte „ut
3
tres quarte ita scribo 4“ fehlen und daß die Druckausgabe zweimal „minucie phisice“ hat, während in der Handschrift an den entsprechenden Stellen entweder „philosophice“ oder das zweideutige „ph'e“ steht.

1. *Que est proporcio numeri numerantis ad denominantem, eadem est minucie ad integrum.*

3
Sit data [Fig. 1] minucia .4. dico quod que est proporcio ternarii ad quaternarium ea est trium quartarum ad integrum. Que enim est unitatis ad unitatem ea est unius quarte ad unam

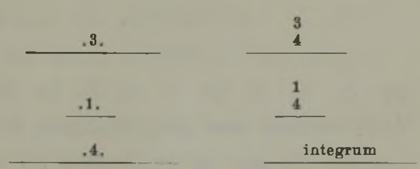


Fig. 1

quartam. per conversam prime partis prime quinti libri EUCLIDIS sed per .15. .5.
multiplicium et submultiplicium est proporcio una. ergo que est ternarii ad unitatem ea est trium quartarum ad unam quartam. et que est unitatis ad quaternarium ea est unius quarte ad integrum iuxta descripcionem numeri denominantis. ergo ex quinto libro EUCLIDIS que est proporcio ternarii ad quaternarium ea est trium quartarum ad integrum. quod fuit probandum.

Der Beweis der Druckausgabe ist ein wenig kürzer als der obige.

2. *Si fuerint due minucie eiusdem denominacionis proporcio minucie ad minuciam erit sicut numeri numerantis ad numerum numerantem.*

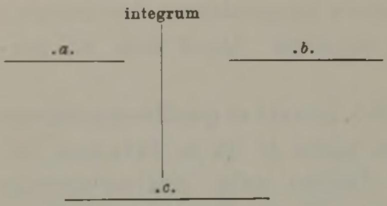


Fig. 2.

Ut si date minucie sint [Fig. 2] *.ac.* et *.bc.* habentes *.c.* communem denominacionem. Dico quod que est proporcio *.a.* numeri numerantis ad *.b.* numerantem ea est *.ac.* minucie ad *.bc.* minuciam. Nam que est *.a.* ad *.c.* ea est minucie *.ac.* ad integrum. ex proxima. et que est *.c.* ad *.b.* ea est integri ad minuciam *.bc.* iuxta eandem racione conversionis. ergo que est *.a.* ad *.b.* ea est *.ac.* minucie ad *.bc.* minuciam. quod fuit probandum.

Der Beweis der Druckausgabe ist ein wenig kürzer als der obige.

3. *Si numerus numerans unius minucie ducatur in denominantem secunde minucie et numerans secunde in denominantem prioris erit proporcio prioris minucie ad secundam sicut numeri producti ex numero numerante prioris minucie in denominantem secunde ad numerum ex alia multiplicacione productum.*

Ut si dentur [Fig. 3] *.ab.* et *.cd.* minucie ducatur *.a.* numerans unius in *.d.* denominantem alterius et fiat *.f.* Item *.c.* alterius numerans in *.b.* denominantem prioris et fiat *.g.* Dico quod proporcio minucie *.ab.* ad minuciam *.cd.* est sicut proporcio *.f.* ad *.g.*

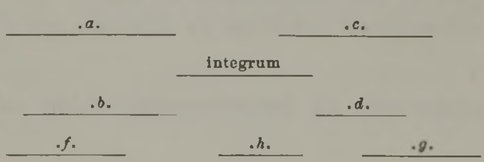


Fig. 3

Ducatur enim eciam *.b.* in *.d.* et producatur *.h.* Inde sic ex *.a.* in *.d.* fit *.f.* et *.b.* in *.d.* fit *.h.* ergo ex 15. quinti EUCLIDIS que dicit eandem esse proporcionem multiplicium et submultiplicium proporcio *.a.* ad *.b.* est ut proporcio *.f.* ad *.h.* ergo ex prima huius proporcio minucie *.ab.* ad integrum est sicut proporcio *.f.* ad *.h.* Item ex *.d.* in

.*b*. fit .*h*. ex .*c*. in .*b*. fit .*g*. ergo que est .*d*. ad .*c*. ea est [Bl. 278r] .*h*. ad .*g*. ergo que est .*h*. ad .*g*. ea est integri ad minuciam .*cd*. ergo que est .*f*. ad .*g*. ea est .*ab*. minucie ad minuciam .*cd*. quod erat probandum.

Der Beweis der Druckausgabe ist etwas kürzer als der obige.

4. *Unius integri ad duas fractiones proporcio est sicut numeri producti ex denominacionibus fractionum altera in alteram multiplicatis ad duos numeros quorum alter producitur numero numerante unius minucie in denominantem alterius ducto. reliquus ex multiplicacione reliqui denominantis in reliquum numerantem.*

Maneat prior posicio. Dico quod [Fig. 4] proporcio integri ad minucias .*ab*. et .*cd*. est sicut proporcio .*h*. ad .*f*. et .*g*. ex proxima enim que est .*f*. ad .*g*. ea est .*ab*. ad .*cd*. ergo coniunctim que est .*f*. et .*g*. ad .*g*. ea est .*ab*. et .*cd*. ad .*cd*. sed que est .*g*. ad .*h*. ea est minucie .*cd*. ad integrum. Hoc patet inspicienti proxime probacionem. ergo que est .*f*. et .*g*. ad .*h*. ea est .*ab*. et .*cd*. minuciarum ad integrum. ergo e converso que est .*h*. ad .*f*. et .*g*. ea est integri ad .*ab*. et .*cd*. fractiones. quod proposui demonstrare.

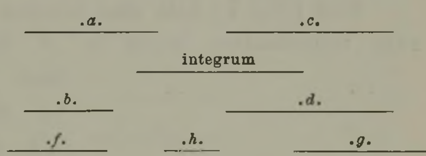


Fig. 4.

Der Beweis der Druckausgabe ist ein wenig kürzer als der obige.

ut .3. 3. ut .3.

5. *Cum duas fractiones numerat unus et idem numerus proporcio prioris ad secundam est sicut proporcio numeri denominantis secundam ad eum qui prioris est denominacio.*

Numeret [Fig. 5] .*a*. numerus .*ab*. et .*ac*. minucias. Dico quod que est proporcio .*c*. ad .*b*. ea est .*ab*. ad .*ac*. Multiplicatur enim .*a*. in .*c*. et faciat .*f*. Item .*a*. in .*b*. et fiat .*g*. ergo ex .16. quinti Euclidis que est proporcio .*c*. ad .*b*. ea est .*f*. ad .*g*. sed que est .*f*. ad .*g*. ea est minucie .*ab*. ad minuciam .*ac*. ex tercia huius. ergo que est .*c*. ad .*b*. ea est .*ab*. ad .*ac*. et hoc est propositum.

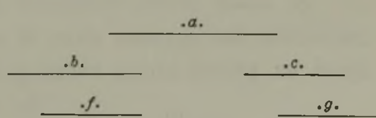


Fig. 5.

Der Beweis der Druckausgabe ist etwas kürzer als der obige.

6. *Datis duabus minuciis si que est proporcio numerantis priorem ad eum qui numerat secundam ea est denominantis priorem ad eum a quo denominatur secunda minucie sunt equales et convertitur.*

Ut si [Fig. 6] proporcio .*a*. ad .*c*. est sicut proporcio .*b*. ad .*d*. minuciam .*ab*. dico equalem esse minucie .*cd*. Nam permutatim erit proporcio .*a*. ad .*b*. sicut proporcio .*c*. ad .*d*. ergo ex prima huius ea est proporcio minucie .*ab*. ad integrum que est minucie .*cd*. ad idem. ergo ex .10. quinti EUCLIDIS date minucie sunt equales. conversa ita patet. quia si equales sint minucie .*ab*. et .*cd*. tunc earum proporcio ad integrum eadem est. oportet ergo iuxta primam huius ut que est proporcio .*a*. ad .*c*. ea sit .*b*. ad .*d*. quod volui probare.

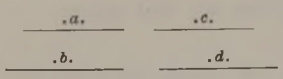


Fig. 6.

Der Beweis der Druckausgabe ist viel kürzer als der obige.

7. *Duas dissimilium denominacionum fractiones ad totidem minucias similium denominacionum reducere.*

Sint [Fig. 7] date due minucie .*ab*. et .*cd*. Ducam ergo .*a*. numerum numerantem unius in .*d*. denominantem alterius et producat .*f*. Item .*c*. in .*b*. et fiat .*g*. preterea .*b*. in .*d*. et producatur .*h*. Dico quod minucia .*fh*. est equalis minucie .*ab*. et quod minucia .*gh*. est equalis minucie .*cd*.

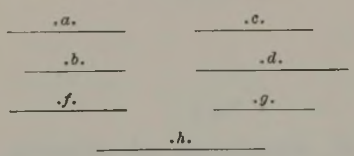


Fig. 7.

Quia enim ducitur .*a*. in .*d*. et fit .*f*. itemque .*b*. in .*d*. et fit .*h*. oportet ut proporcio .*a*. ad .*b*. sit ut proporcio .*f*. ad .*h*. ergo permutatim que est .*a*. ad .*f*. ea est .*b*. ad .*h*. ergo ex proxima minucie sunt equales. Eodem modo proba quod equales sunt minucie .*cd*. et .*gh*. et ita reduxeris datas minucias duas in duas alias quarum utramque denominat .*h*. numerus. et hoc intendi facere.

Der Beweis der Druckausgabe ist kürzer als der obige.

8. *Integra quotcumque in date denominacionis minucias reduces cum numerum integrorum in numerum date minucie denominantem duces.*

Si datur unum integrum fac numerum datum ad faciendam denominacionem fac inquam eum et numerantem et denominantem feceris totum quod ex prima huius videri potest.

Si autem dantur plura integra sit [Fig. 8] datus denominacionis numerus .*d*. numerus integrorum sit .*a*. Duc ergo .*a*. in .*d*. et fit .*c*. dico quod minucia .*cd*. [Bl. 278^{v}] equalis est datis integris. Quia enim ex .*a*. in .*d*. fit .*c*. necesse est ut proporcio .*c*. ad .*d*. sit sicut .*a*. numeri integrorum ad unitatem. sed que est .*a*. ad unitatem ea est integrorum datorum ad unum integrum. ergo que est .*c*. ad .*d*. ea est datorum integrorum ad unum integrum. sed que est .*c*.

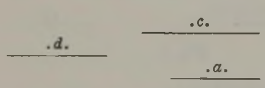


Fig. 8.

ad *.d.* ea est minucie *.cd.* ad unum integrum ex prima huius ergo ex .10. quinti EUCLIDIS datis integris equalibus est minucia *.cd.* et hoc fuit ostendendum.

In der Druckausgabe lautet der Satz: „Integra quotcunque in datae denominationis minutiis ducere.“ Der Beweis der Druckausgabe stimmt mit dem obigen überein.

9. *Qualiter in addicione minuciarum vulgarium operandum sit ostendere.*

Si minucia minucie debet addi reduc eas ad minucias unius denominacionis per proximam proxime ubi sint unius tunc adde numerum numerantem numero numeranti et fac ex duabus unam minuciam cuius numerus sit numerus compositus ex duobus numerantibus et denominans sit communis duarum minuciarum denominacio et feceris totum cum nichil aliud sit addere minuciam minucie quam invenire duabus datis equalem.

Quod autem hoc fiat modo qui dictus est patere potest ex secunda huius scilicet adiuvante penultima quinti. Si autem una duabus addenda est reduc duas in unius denominacionis minucias et compone eas in unum ut iam ostensum est. Deinde huic ex duabus aggregate adde terciam. Ad hunc modum facile est quotlibet minucias ad alias quotlibet aggiungere.

Quod si minucias addere vis integris vel integra vel minucias integris vel minuciis fac minucias unius denominacionis. deinde in minucias eiusdem denominacionis reduc integra. et postea facile fiet quod faciendum est. Et hinc patet quid faciendum sit in addicione vulgarium minuciarum.

Keine Figur, weder in der Handschrift noch in der Druckausgabe. Der Beweis der Druckausgabe ist wesentlich kürzer als der obige (nur 8 Druckzeilen).

10. *Opus addicionis in philosophicis minuciis demonstrare.*

Scribe utramque quantitatem eam scilicet cui facienda sit addicio scribe superius ita ut primus locus versus sinistram sit integrorum. proximus minutorum. tercius secundorum. et sic deinceps. Scribe ergo sub ordine superiori quantitatem addendam sive sint tantum minucie sive integra cum minuciis. pones autem integra sub integris. minuta sub minutis. secunda sub secundis. et sic de aliis. Hoc facto incipe ab utralibet parte et adde numerum inferiorem super se posito in sua scilicet differencia et quicquid provenerit in loco integrorum scribe illud in loco eorum deleto eo quod prius ibi erat. In aliis autem locis utpote in loco minutorum vel secundorum et cet. sic facies si ex addicione inferioris ad superiorem provenerit minus .60. pones id pro superiori eo deleto. Si autem .60. delebis quidem quod erat superius sed nichil scribes ibi nisi cifram proximo autem loco ante versus dextram dabis unitatem quia .60. sexagesime faciunt unum integrum in loco precedente. In huiusmodi autem addicione inferioris ad superiorem si est supra aliquam summam nichil ponam eam supra se. Racio et exemplum patent.

Keine Figur, weder in der Handschrift noch in der Druckausgabe. Die Druckausgabe hat im Satze, der daselbst keine besondere Nummer besitzt, „phisicis“ statt „philosophicis“, und die ausführliche Darstellung der Handschrift ist daselbst durch die Bemerkung: „Facile est cum eas quae sunt eiusdem generis addideris, ut integra integris, minuta minutis, secunda secundis & tertijs“ (!) ersetzt.

11. *Datis minuciis sive vulgaribus sive philosophicis qualiter quedam ab aliis subtrahende sint exponere.*

De vulgaribus primo loquar. Aut ergo date minucie sunt unius denominacionis. aut si non sunt fiant. Deinde subtrahatur numerus numerans a numerante et perfectum erit negocium. quod probari potest per secundam huius considerato quid sit unum ab alio subtrahere.

Si autem dantur minucie philosophice scribatur supra illa que non est minor. et altera subtus ita scilicet ut sint integra sub integris. minuta sub minutis. et cet. Deinde subtrahe numerum integrorum si ibi mavis incipere a numero integrorum. et si quid remanet scribe in loco superiori. Similiter fac in aliis locis et totum feceris. Si vero non potes in aliqua differencia subtrahere numerum inferiorem a numero superposito si hoc est in loco integrorum frustra laboras. Minus est enim quod supra est. Si vero est alibi subtrahe unitatem in ordine superiori a loco proximo versus integra et valebit ipsa .60. in loco unde debes facere subtractionem. A numero ergo unde trahere debes et non potes et a .60. adiectis sub [Bl. 279r] trahe quod debes et scribe residuum pro superiori et totum feceris. Racio patet et exemplum non est opus poni.

Satz 10 der Druckausgabe, welche nur die folgende Bemerkung enthält: „In vulgaribus patet ratio ex secunda. cum sint ad minutias eiusdem denominationis reductae. In phisicis ex se manifestum est.“ Keine Figur, weder in der Handschrift noch in der Druckausgabe.

12. *Duplacionem et deduplacionem in minuciis tam vulgaribus quam philosophicis edocere.*

Minuciam vulgarem duplasti duplato eius numerante ut patet per secundam huius. vel deduplato eius denominante si par est numerus ut patet ex quinta huius. Quatuor enim tercie ad quatuor sextas duple sunt. Item minuciam vulgarem deduplasti duplato eius denominante ut patet per quintam huius. Nam due quarte dimidium sunt duarum medietatum.

Aut deduplato numerante si par est. Quod si impar subtracta unitate deduplabis residuum immo duplabis ut dixi denominantem ut nullus sit error ex omissione residui.

In minuciis vero philosophicis numero integrorum duplato scribes in loco eorum quicquid provenerit in aliis locis si excreverit minus quam .60. scribes illud. Si .60. scribes in loco numeri duplati cifram et unitatem dabis proximo loco versus integra. Si plus quam .60. scribes in loco duplati quantum excessum et pro .60. dabis unitatem proximo loco versus integra. In deduplacione vero si alicubi digitus impar occurrit si ipse est primus sui loci versus dextram scilicet subtracta unitate dimidietur reliquum et pro dimidio unitatis dentur .30. proximo loco versus sinistram qui locus recedit ab integris. Si autem in ulteriori differencia unius loci digitus impar occurrit subtracta unitate dimidietur residuum et pro unitate dentur .5. digito precedentis figure. ut si deduplare velis 75. minuta de .5. dimidia .4. et da in locum secundorum .30. deinde subtracta unitate de .7. dimidia .6. et da dimidio quaternarii quinque. et ad hunc modum fac in aliis. Racio nulli dubia est.

Satz 11 der Druckausgabe, die statt der obigen Ausführungen nur eine kurze Bemerkung (6 Druckzeilen) hat. Keine Figur, weder in der Handschrift noch in der Druckausgabe.

13. *Qualiter in vulgaribus minuciis multiplicandum sit expedire.* | Corelarium | Eritque patens quod minucia numerata a numero producto ex numerante unius numeri in numerantem alterius numeri et denominata ab eo qui producitur ex denominante ducto in denominantem sic se habet ad alteram minuciarum sicut reliqua ad integrum.

Multiplicabitur minucia per minuciam si ducatur numerans in numerantem et denominans in denominantem tunc enim processerit minucia habens numerantem eum numerum qui procedit ex numerante in numerantem ducto et denominantem eum numerum qui producitur ex ductu denominacionis in denominacionem.

Verbi gracia sint [Fig. 9] due minucie .*ac*. et .*df*. ducatur .*a*. numerans in .*d*. numerantem et fiat .*b*. ducatur .*c*. denominans in .*f*.

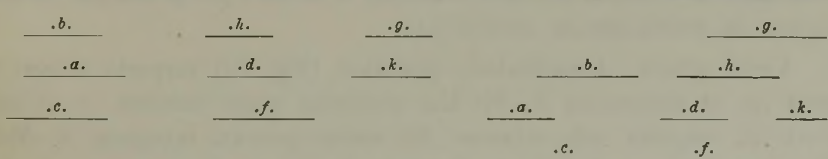


Fig. 9.

denominantem et fiat .*h*. Dico ex .*ac*. in .*df*. produci minuciam .*bh*. Ducatur autem .*b*. numerans minucie .*bh*. in .*f*. denominantem minucie .*df*. et procedat .*g*. Item .*d*. numerans minucie .*df*. in .*h*. denominantem minucie $.bh.$ et fiat $.k.$ ergo ex tercia huius proporcio $.bh.$ minucie ad minuciam $.df.$ est sicut proporcio numeri $.g.$ ad $.k.$ numerum. Item $.a.$ ducitur in $.d.$ et provenit $.b.$ et $.h.$ ducitur in $.d.$ et procedit $.k.$ ergo que est $.a.$ ad $.h.$ ea est $.b.$ ad $.k.$ quia eadem est proporcio producencium et productorum. ergo permutatim que est $.a.$ ad $.b.$ ea est $.h.$ ad $.k.$ Item $.b.$ in $.f.$ et fit $.g.$ $.c.$ in $.f.$ et fit $.h.$ ergo que est $.b.$ ad $.c.$ ea est $.g.$ ad $.h.$ Sit ergo $.a.$ primum $.b.$ secundum $.c.$ tercium. Sit iterum $.g.$ primum $.h.$ secundum $.k.$ tercium. Vides ergo quod proporcio $.a.$ primi ad $.b.$ secundum in uno ordine est sicut $.h.$ secundum ad $.k.$ tercium in alio ordine et que est $.b.$ secundi ad $.c.$ tercium ea est $.g.$ primi ad $.h.$ secundum ergo ex antepenultima quinti Euclidis proporcio $.a.$ ad $.c.$ est sicut proporcio $.g.$ ad $.k.$ ergo proporcio minucie $.bh.$ ad minuciam $.df.$ est sicut proporcio $.a.$ ad $.c.$ ergo ex prima huius proporcio minucie $.bh.$ ad minuciam $.df.$ est sicut proporcio minucie $.ac.$ ad integrum. ergo ex descripcione eius quod est minuciam multiplicari in minuciam apparet propositum.

Si autem plures minucie per plures multiplicande sunt reducantur tam iste ad unam denominacionem quam ille ad unam et aggregantur tam multiplicate in unam quam alie in unam et cum ex omnibus duas feceris fac ut modo osten [Bl. 279r] sum est. Quod si integra dantur cum minuciis reduc integra ad minucias et fac ut scis si premissa scis. Nichil igitur restat quod in multiplicacione vulgarium doceri amplius oporteat. Nota tamen quod minucia per minuciam non est vulgariter multiplicanda nisi utraque sumatur respectu eiusdem integri id est nisi utraque numeretur et denominetur respectu eiusdem integri. Quod si dantur minucie diversorum integrorum fac de uno integro minuciam reliqui. tunc ergo habes minuciam integri iam factam et minuciam huius minucie. Qualiter minucia minucie numeretur et denominetur respectu primi integri docet proposicio que sequitur.

Satz 12 der Druckausgabe, deren Darstellung viel kürzer ist.

14. *Pars partis est pars tocius numerata a numero qui fit ex ductu numerantis in numerantem et denominata a numero qui producitur ex denominante in denominantem multiplicato.*

Verbi gracia. Quantitatem quandam [Fig. 10] respectu integri numeret $.a.$ et denominet $.b.$ Sit alia quantitas quem numeret $.c.$ et denominet $.d.$ respectu $.ab.$ minucie. Sit autem primum integrum $.z.$ Multiplicetur $.a.$ in $.c.$ et fiat $.f.$ Ducatur $.b.$ in $.d.$ et procedat $.g.$ Dico quod quantitatem $.cd.$ numerat $.f.$ et denominat $.g.$ respectu $.z.$ integri Si enim non $.cd.$ sumatur quantitas maior vel minor que sic numeretur et sic denominetur respectu $.z.$ integri. et sit ipsa quantitas $.q.$ Ducam igitur eciam .*a*. in .*d*. et fiat .*h*. Ex posicione igitur et prima huius patet quod proporcio minucie .*ab*. ad .*z*. integrum est sicut proporcio .*a*. numeri ad .*b*. numerum. Similiter proporcio .*cd*. minucie ad minuciam .*ab*. que est suum integrum est sicut proporcio .*c*. numeri ad .*d*. numerum sed .*c*. se habet ad .*d*. sicut .*f*. ad .*h*. quia ex .*c*. in .*a*. fit .*f*. ex .*d*. in .*a*. fit .*h*. ergo que est .*cd*. minucie ad quantitatem .*ab*. ea est .*f*. numeri ad .*h*. numerum. Item ex .*a*. in .*d*. fit .*h*. ex .*b*. in .*d*. fit .*g*. ergo que est .*a*. ad .*b*. ea est .*h*. ad .*g*. ergo eciam que est .*ab*. minucie ad .*z*. integrum ea est .*h*. ad .*g*. ergo que est .*f*. ad .*g*. eadem est .*cd*. quantitatis ad .*z*. integrum. sed positum est quod .*q*. quantitatem numerent et denominent .*f*. et .*g*. respectu .*z*. integri. ergo ex prima huius que est .*f*. ad .*g*. eadem est .*q*. quantitatis ad .*z*. integrum. sed eadem est .*cd*. quantitatis ad .*z*. integrum. ergo .*q*. quantitas equalis est .*cd*. quantitati. non ergo minor vel maior. Oportet igitur ut .*cd*. minuciam minucie .*ab*. numeret .*f*. et denominet .*g*. respectu .*z*. integri. quod fuit demonstrandum.

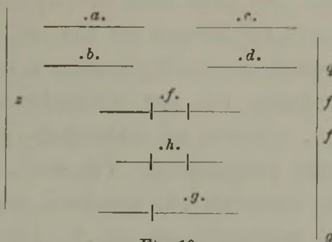


Fig. 10.

Satz 13 der Druckausgabe, deren Beweis mit dem obigen übereinstimmt.

15. *Si numerus numerans philosophice minucie multiplicetur in se et de producto fiat numerans minucie philosophice tantum distantis a priore quantum eadem prior ab integris necesse est minuciam integris propiorem inter ulteriorem et integrum medio loco esse proporcionalem.*

Verbi gracia. sumatur [Fig. 11] ad libitum data minucia in terciis et sit eius numerans .*a*. quo in se multiplicato fiat .*c*. Numeret hic

.a.			.a.			locus
60			60			inte-
.d.			.b.			grorum

sexta	quinta	quarta	tercia	secunda	minuta	In-
.c.			.a.			te-
60			60			gra
.d.			.b.			

Fig. 11.

numerus aliquam minuciam philosophicam in sextis. Locus enim sextorum tantum recedit a terciis quantum terciorum locus ab integris. Dico ergo quod que est proporcio .*c*. sextorum ad .*a*. terciorum eadem est .*a*. terciorum ad integrum. Inveniam enim proximam denominacionem a terciorum quem habent respectu primorum integrorum. De hiis enim sermo est. Sit autem hec denominacio .*b*. sed sicut denominantur tercia respectu integrorum ita eciam sexta respectu terciorum propter equalem distanciam. ergo per proximam multiplicatur .*b*. in .*b*. et procedet denominacio sextorum ad integra sit illa .*d*. ergo sexta sunt minucia .*cd*. patet autem ex operacione multiplicacionis in vulgaribus minuciis quod ex minucia .*ab*. producta est per multiplicacionem minucia .*cd*. ergo que est proporcio .*cd*. minucie ad minuciam .*ab*. ea est minucie .*ab*. ad integrum. Ex hoc patet propositum. Vel sic. .*a*. numerus radix est .*c*. quadrati. similiter .*b*. numerus .*d*. quadrati. ergo ex .11. 8[1]. EUCLIDIS proporcio .*c*. ad .*d*. est proporcio .*a*. ad .*b*. duplicata. sed que est .*c*. ad .*d*. ea est .*cd*. minucie ad primum integrum. et que est .*a*. ad .*b*. ea est .*ab*. minucie ad integrum. ex prima huius ergo proporcio minucie .*cd*. ad integrum est proporcio .*ab*. [Bl. 280ʳ] minucie ad idem duplicata. ergo que est .*cd*. ad .*ab*. eadem est .*ab*. ad integrum. Ex hoc licet inferre proposito tuo (!) .... tegra (!). Infer ex hoc quod proponitur.

Satz 14 der Druckausgabe, deren Beweis mit dem obigen übereinstimmt. — Zwischen „tuo“ et „tegra“ befindet sich in der Handschrift ein leerer Raum; die Druckausgabe endet: „Ex hoc licet inferre propositum“.

16. *Datis duabus minuciis philosophicis si numerans alterius in numerantem relique ducatur procedit numerus numerans minucie philosophice tantum distantis ab una datorum quantum reliqua ab integris et habentis se in proporcione ad alteram datorum sicut reliqua ad integrum sive sint eiusdem loci sive diversorum date minucie. nichil differt quantum ad denominacionem.*

Sint autem exempli gracia [Fig. 12] date minucie .*b*. tercia et .*a*. quarta. ex ductu .*a*. in .*b*. fiat .*c*. Dico quod proporcio .*c*. septimorum ad .*a*. quartorum est sicut .*b*. terciorum ad integrum. Sit enim .*d*. denominacio terciorum ad integrum. sit eciam .*f*. denominacio quartorum ad integrum. patet autem quod ita denominantur septima respectu quartorum ut tercia respectu integrorum propter eandem distanciam. est igitur .*d*. denominacio septimorum respectu quartorum. ergo ex multiplicacione .*f*. in .*d*. procedit denominacio ad integra per proximam proxime. sit illa numerus .*g*. ergo .*c*. septima sunt .*cg*. minucia. sed ex ductu .*bd*. in .*af*. procedit minucia .*cg*. ut patet ex operacione multiplicacionis vulgarium. et que est proporcio .*cg*. minucie ad minuciam .*af*. ea est eciam .*bd*. minucie ad integrum.

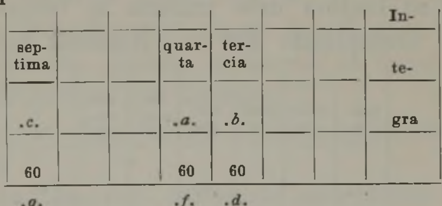


Fig. 12.

Satz 15 der Druckausgabe, deren Beweis mit dem obigen übereinstimmt.

17. *Qualiter in multiplicacione philosophicarum minuciarum faciendum sit notificare sit propositum.*

Ponatur in uno ordine summa multiplicanda et summa multiplicans subtus ita ut primus id est integrorum locus inferioris ordinis sit sub ultimo superioris. Deinde per numerantem ultime inferioris multiplica numerantem ultime superioris, et quod procedit si est minus .60. pone in loco supra locum minucie multiplicantis. Si vero .60. relinque illum locum vacuum et unitatem pone in loco proximo versus integra. Si est plus quam .60. subtrahe .60. quociens potes et residuum si quid est pone supra minuciam multiplicem. Quociens autem subtraxisti .60. tot unitates id est numerum tot unitatum pone in proximo loco versus integra. Eodem modo fac in aliis.

Sed nota quod si dantur integra cum minuciis cum ad minuta venitur antequam de illis aliud fiat reduci debent integra in minuta et addi minutis prius habitis. vel pocius fiat hoc in principio operacionis. Cum ergo per minuta id est minucias loco integrorum proximas multiplicaveris minuta loco integrorum superposita invenies nichil in loco integrorum. Multiplica ergo per nichil eandem superpositam minuciam et procedet nichil. Hoc scribe in loco superposito deleto eo quod prius ibi erat. Deinde transfer locum integrorum inferioris ordinis sub minucia proxima versus integra et loca sequencia continua et operare ut modo sed hec que cederet ex multiplicacione numerancium in numerantes addes hiis que invenies in locis ubi ipsa poni debent si qua processerunt ex priori multiplicacione que ibi sunt posita. Ita ergo facies donec ponantur integra sub integris et tunc facta operacione erit integrum. Sed cave ne aliquem locum vel in superiori vel inferiori ordine omittas.

Si enim velis multiplicare minuta et secunda per quarta et quinta inferius ponenda non debes omittere in ordine superiori locum integrorum quamvis integra non sint ponenda. nec in ordine inferiori omittenda sunt loca terciorum. secundorum. minutorum. et integrorum. Sed quamvis vacare debeant signanda sunt tamen. Sicut enim in operacione integrorum non debet omitti cifra ita nec hic loca ne omissis locis precedentibus minucie ponantur in locis non suis.

Racio huius operacionis. Velim [Fig. 13] per .*a*. quarta et .*b*. minuta multiplicare .*f*. quarta et .*g*. tercia et .*h*. minuta et .*k*. integra Ponam ergo locum integrorum ordinis sub .*f*. et scribam scribenda hinc inde nullo loco omisso qui ante .*a*. vel ante .*f*. esse debeat. Deinde multiplicabo numerantem .*a*. in .*f*. numerantem et procedat .*c*. numerus. ponam eam super .*a*. sic enim tantum distabit .*c*. ab .*f*. quantum [Bl. 280v] .*f*. ab integris. Apparet ergo per proximam vel ei proximam quod minucia philosophica quam in tali loco numerat .*c*. procedat ex ductu minucie philosophice quam in suo loco numerat .*a*. in minuciam philosophicam quam in suo loco numerat .*f*. Quod si loca vacua intermiscerem et posuissem .*a*. iuxta .*b*. et .*g*. iuxta .*h*. et .*f*. continuo

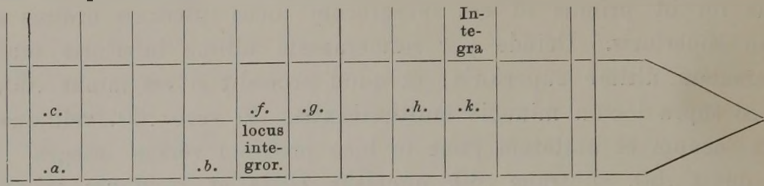


Fig. 13.

continget .*c*. octava scribi in sextorum loco. Cum autem ex multiplicacione numerantis in numerantem producitur plus quam .60. non scribo totum numerantem in loco sue minucie sed de .60. facio unum integrum. et ideo quociens possum subtrahere .60. tot unitatum numerum scribo in proximo loco versus integra Hinc totum patet.

Commodius autem fit hec operacio si tam summa multiplicans quam summa que multiplicanda est congregetur in unum locum et deinde ducatur numerans in numerantem et quod procedit numeret minuciam philosophicam tantum distantem ab altera summarum quantum reliqua ab integris. Ut si velis multiplicare integra et minuta et secunda et tercia fac iuxta octavam huius de integris minuta. de minutis secunda. et ex illis tercia. Si autem summa multiplicans sit integra et minuta et quarta reduc eciam hanc summam ad quarta et tunc multiplica per quarta. tercia vel e contrario ducendo numerantem in numerantem et numerum qui procedet pone in locum tantum distantem ab altera summarum quantum reliqua ab integris utpote in loco septimorum. Si autem vis scire de septimis exeuntibus quantum faciant divide numerantem per .60. et quod exibit erit numerus sextorum. Quo numero diviso iterum per .60. exibit numerus quintorum. et ad hunc modum fac quousque divisio non possit fieri per .60. et scias quantum sit in summa procedente ex multiplicacione. Racio patet.

Satz 16 der Druckausgabe, deren Darstellung nur einen Teil der „Ratio operationis“ umfaßt.

18. *Quomodo minucia vulgaris per aliam dividenda sit manifestum facere. Erit autem patens quod quantitas numerata a numero exeunte in divisione numerancium et denominata a numero qui exit in divisione denominancium ita se habet ad integrum sicut divisa minucia ad dividentem.*

Facta una minucia de summa per quam facienda est divisio. Itemque una ex illa summa que debet dividi divide si potes numerantem dividende per numerantem alterius et signa numerum exeuntem. Divide eciam denominantem per denominantem sufficienter si potes et feceris totum. tunc enim exivit quantitas numerata a numero exeunte in divisione numerancium et denominata a numero qui exit in divisione denominancium. Ipsa enim sic se habet ad integrum sicut divisa fractio ad dividentem.

Verbi gracia sit [Fig. 14] *.cd.* minucia dividenda per minuciam *.ab.* et possint dividi sufficienter *.c.* per *.a.* et exeat *.f.* Itemque *.d.* per *.b.* et exeat *.g.* Dico minuciam *.fg.* sic se habere ad integrum sicut minucia *.cd.* ad minuciam *.ab.* Quia enim *.c.* numero diviso per *.a.* exit *.f.* et *.d.* numero diviso per *.b.* exit *.g.* oportet ut ex ductu *.f.* in *.a.* fiat *.c.* et *.g.* multiplicato in *.b.* fiat *.d.* ergo ex ductu minucie *.fg.* in minuciam *.ab.* fit minucia *.cd.* ergo ex corelario .13. proporcio minucie *.cd.* ad minuciam *.ab.* est sicut proporcio minucie *.fg.* ad integrum. ergo minucia *.fg.* exit ex divisione minucie *.cd.* per minuciam *.ab.* Ex descripcione divisionis habes ergo propositum.

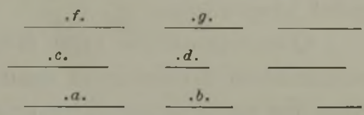


Fig. 14.

Et nota quod omnis minucia per quamlibet aliam divisibilis est sufficienter sed non semper in propositis numeris Sepe enim numerus per numerum dividi non potest sufficienter quia aliquid habundat sepe non potest quia dividendum est minor. Tunc ergo reducende sunt minucie ad tales numeros in quibus possit fieri divisio. Ut autem facere hoc scias sequentem considera.

Satz 17 der Druckausgabe, deren Darstellung mit dem Absatz: „Verbi gratia“ beginnt.

19. *Datas minucias sic numerare et denominare ut numeri dividende minucie per numeros alterius sine superfluitate dividantur. Apparebit autem minuciam que exit in divisione unius minucie per alteram numerari a numero quem producit numerans dividende ductus in denominantem relique et denominari a numero qui fit denominacione dividende in numerantem alterius multiplicato.*

Sint [Fig. 15] date minucie *.ab.* et *.cd.* nec possim dividere *.c.* per *.a.* nec *.d.* per *.b.* Ducam ergo numeros minucie que dividere debet in se. hoc est *.a.* in *.b.* et fiat *.f.* Deinde ducam *.f.* tam in *.c.* et procedat [Bl. 281r] *.g.* quam in *.d.* et fiat *.h.* Dico quod minucia *.gh.* est minucia *.cd.* et quod *.g.* sufficienter dividitur per numerum *.a.* ita ut exeat numerus qui fit ex ductu *.c.* in *.b.* sit autem ille *.k.* et quod *.h.* numerus sufficienter dividitur per *.b.* numerum exeunte numero quem producit *.d.* in *.a.* multiplicatus. hunc vero vocemus *.m.*

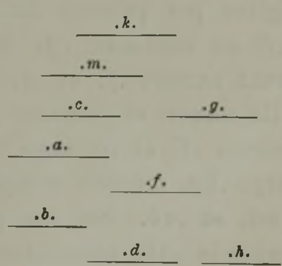


Fig. 15.

Quia enim ex .a. in .b. fit .f. oportet ut .a. sit pars .f. denominata a numero .b. Similiter .f. est pars .g. denominata a .c. ergo ex .13. .a. est pars .g. denominata a numero .k. ergo ex ductu .a. in .k. fit .g. ergo .g. sufficienter dividitur per .a. et exit .k. Simili modo proba quod .h. dividitur sufficienter per .b. et exit numerus .m. ergo ex divisione minucie .cd. sive .gh. per minuciam .ab. exit minucia .km. Hinc patet propositum.

Quocienscumque ergo dividenda est minucia una per alteram duc numerantem dividende in denominantem alterius et numerum qui producitur fac numerantem. Duc eciam denominantem dividende in numerantem relique et quod procedit fac denominantem et habebis minuciam exeuntem. Ut si per .ab. minuciam velis dividere minuciam .cd. duc .c. in .b. et fiat .k. duc eciam .d. in .a. et procedat .m. necesse est minuciam .km. exire in divisione .cd. minucie per minuciam .ab. Ipsa enim sic se habet ad integrum sicut minucia .ab. ad .cd. quod ex tercia et prima huius promptum est videri. et hoc est quod sciri voluimus.

Satz 18 der Druckausgabe, deren Darstellung etwas kürzer als die obige ist.

20. *Datis duabus minuciis si una per alteram sufficienter dividitur in numeris propositis ita se habet divisa ad dividentem sicut exiens nume-*
Secunda pars
rancium ad exeuntem denominancium. Et si inequales sunt date minucie superfluitas earum est minucia tocius denominata a denominacione divisa et numerata a numero qui fit numerante divisore multiplicato per differenciam duorum exeuncium.

Sint [Fig. 16] date minucie .cd. dividenda et .ab. divisiva. Dividatur .c. per .a. et exeat .f. dividatur .d. per .b. et exeat .g. et nichil hinc inde supersit. Non est opus ut probatur quod minucia .cd. ad minuciam .ab. se habet sicut minucia .fg. ad integrum. hoc enim patet. Constat

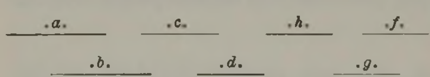


Fig. 16.

igitur per primam huius quod ita se habet .cd. ad .ab. sicut numerus .f. ad numerum .g. Sint autem inequales date minucie. ergo inequales sunt numeri .f. et .g. et si maior est .f. maior est minucia .cd. si ille minor et minucia .cd. Ponamus ergo .h. esse differenciam numerorum .f. et .g. ergo minucia .hg. est differencia minucie .fg. et integri. ergo .hg. minucia sumpta respectu minucie .ab. est differencia minuciarum .cd. et .ab. Sed ex posicione et .13. huius patet quod .hg. minucia minucie .ab. numeratur respectu integri per numerum qui fit ex ductu .h. in .a. et denominatur a numero qui fit ex ductu .g. in .b. Sed ex

.g. in *.b.* fit *.d.* quia diviso *.d.* per *.b.* exit *.g.* Habes ergo propositum. Erat autem propositum differenciam minuciarum *.ab.* et *.cd.* esse minuciam tocius denominatam a numero *.d.* et numeratam a numero qui fit ex ductu *.h.* in *.a.* et hoc habes. Habes igitur quod habere debes.

Satz 19 der Druckausgabe, deren Beweis etwas kürzer als der obige ist.

21. *Si vero totus consumitur denominans et non totus numerans tunc si exeuntes sunt equales minucia divisa superat alteram parte integri denominata a denominacione divisa et numerata a superfluo divisionis numerancium.* Secunda pars *Quod si minor est exiens numerancium minucia dividens excedit divisam parte tocius denominata a denominacione divisa et numerata a numero qui est differencia numeri in divisione relicta et numeri quem producit exeuncium differencia in numerantem minucie dividentis multiplicata* Pars .3. *Si vero maior est exiens numerancium excessus divise super alteram est minucia tocius quam denominat divisa denominacio et numerat numerus congregatus ex addicione numeri in divisione superflui ad eum qui fit differencia exeuncium in numerantem minucie dividentis multiplicata.*

Consumat [Fig. 17] *.b.* dividendo totum *.d.* et exeat *.g.* Diviso autem *.c.* per *.a.* exeat *.f.* equalis numero *.g.* et relinquatur in divisione numerus *.h.* Dico quod minucia *.cd.* excedit minuciam *.ab.* parte integri quam denominat *.d.* et numerat *.h.* hoc est minucia *.hd.*

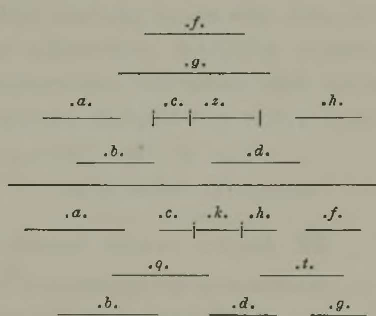


Fig. 17.

Si enim *.a.* non consumpsit dividendo totum *.c.* consumpserit partem numeri *.c.* que sit numerus *.z.* ergo minucia *.zd.* dividitur sufficienter per minuciam *.ab.* et exit *.fg.* ergo minucia *.zd.* et minucia *.ab.* sunt equales ex prima parte precedentis [Bl. 281v] sed minucia *.cd.* excedit minuciam *.zd.* minucia tocius que est *.hd.* quia *.c.* numerans vincit *.z.* numerantem numero *.h.* ergo eciam minucia *.cd.* vincit minuciam *.ab.* minucia *.hd.* quod prima pars secunde partis proposuit.

Item sit *.f.* minor *.g.* numero. differencia eorum sit *.k.* numerus. Quo in *.a.* multiplicato fiat *.q.* differencia *.q.* et *.h.* sit *.t.* Dico quod minucia *.ab.* maior est et excedit divisam minucia *.cd.* in minucia *.td.* respectu tocius sumpta. Ad hoc sic. Numero *.c.* diviso per *.a.* consumptus est *.z.* et remansit *.h.* et exivit *.f.* minor numero *.g.* ergo minucia *.zd.* minor est quam minucia .*ab*. et exceditur ab ea fractione .*qd*. ex secunda parte prime partis presentis. ergo .*zd*. et .*qd*. minucie valent minuciam .*ab*. Item .*h*. numerus minor est .*a*. numero. quia .*c*. diviso per .*a*. remansit .*h*. ergo .*q*. numerus quem multiplicacionem producit .*a*. in .*k*. maior est .*h*. numero. ergo minucia .*hd*. minor est fractione .*qd*. ergo maior est minucia .*ab*. quam minucia .*cd*. quia minucia .*cd*. valet minuciis .*zd*. et .*hd*. minores minuciis .*zd*. et .*qd*. quas valet minucia .*ab*. Sed minucia .*qd*. excedit minuciam .*hd*. minucia .*td*. ergo addita communiter .*zd*. minucie .*zd*. et .*qd*. valentes minuciam .*ab*. addunt .*td*. minuciam super minucias .*zd*. et .*hd*. que valent minuciam .*cd*. Ex hoc habetur secunda pars huius secunde partis.

Item sint .*f*. maior numero .*g*. Dico quod minucia .*cd*. addit super minuciam .*ab*. minuciam quam denominat .*d*. et numerat numerus compositus ex numeris .*q*. et .*h*. Ad hoc sic. Maior est .*f*. numero .*g*. ergo maior est minucia .*zd*. fractione .*ab*. et addit super eam minuciam .*qd*. ex secunda parte prime partis presentis propositionis. ergo minucie .*ab*. et .*qd*. valent minuciam .*zd*. sed minucie .*zd*. et .*hd*. valent minuciam .*cd*. ergo minucia .*cd*. valet tres minucias scilicet .*ab*. et .*qd*. et .*hd*. Ex hoc patet quod proponit pars tercia secunde partis huius .19e(!).

Si autem vis scire de duabus minuciis quarum unus denominans denominantem alterius non totum consumit dividendo sive numerans numerantem dividat sufficienter sive non si inquam de talibus minuciis scire vis quid una super alteram addit commodissime hoc scias quantum ad presens artificium reducendo minucias ad eandem denominacionem tunc enim sive numerans numerantem sufficienter dividat sive non invenies quod queris per aliquam parcium presentis proposicionis.

Satz 20 der Druckausgabe, deren Beweis wesentlich mit dem obigen übereinstimmt.

22. *Integra integris minucialiter dividere.*

Utilitas huius operacionis hec est ut scias per eam quanta proporcio datorum integrorum inter aliquas res equaliter dividendorum contingat unamquamque illarum rerum quibus dividi debet. Sit ergo [Fig. 18] numerus integrorum dividendorum numerus .*b*. sit item divisor id est numerus numerans res quibus facienda est divisio numerus .*a*. Aut ergo equales sunt hii numeri et tunc nichil est opus operacione. Aut unus minor altero. Sit primo minor .*b*. dividendorum numerus. faciam ergo minuciam alicuius dividendorum quam numeret .*b*. et denominet .*a*. divisor. Dico igitur quod in hac operacione exit .*ba*. minucia alicuius datorum integrorum si sint data integra unius maneriei et eiusdem valoris et quantitatis. De talibus enim agitur. Hec enim ita se habent ad integrum sicut .*b*. dividendus numerus ad .*a*. divisorem ex prima huius. et dico quod si .*b*. integra dividas singula in partes sic numeratas et sic denominatas tot habebit tantas partes equales quot sunt unitates in divisore qui est numerus .*a*.

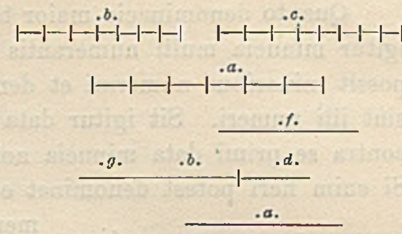


Fig. 18.

Si enim velim reducere .*b*. integra ad minuciam quarum denominacio sit .*a*. ducam .*a*. in .*b*. et numerus procedens qui sit .*c*. erit numerus numerans minucie denominate ab .*a*. et equantis sicut docet probacio .8ᵉ. huius. ergo minucia .*ca*. valet .*b*. integra. Sed .*b*. ducitur in .*a*. et fit .*c*. ergo quociens est unitas in .*a*. tociens est .*b*. in .*c*. ergo eciam ex huius secunda tociens est minucia .*ba*. in minucia .*ca*. que valet data integra. Ex hoc habes propositum cum minor est numerus dividendorum.

Si vero maior est numerus dividendorum id est numerus .*b*. numero .*a*. tunc si .*a*. dividit sufficienter .*b*. patet quod quamlibet unitatem .*a*. divisoris tot integra contingere quot sunt unitates in numero exeunte. Si vero aliquid remanet in divisione sit numerus remanens .*d*. et numerus [Bl. 282ʳ] exiens .*f*. faciam ergo minuciam alicuius datorum integrorum quam numeret .*d*. et denominet .*a*. et dico quod quamlibet unitatem divisoris contingunt .*f*. integra et .*da*. minucia unius integri. Sit enim pars numeri .*b*. tota consumpta per divisionem .*a*. numeri fit inquam .*g*. numerus ergo ex .*g*. et .*d*. numeris constat numerus .*b*. Diviso autem .*g*. per .*a*. exit .*f*. ergo de .*g*. integris contingunt quamlibet unitatem divisoris .*f*. integra. Hoc enim patet. Si autem .*d*. integra dividas per .*a*. contingit quamlibet unitatem divisoris minucia .*da*. sicut patet ex principio presentis probacionis. Ex hiis iam scis quotcumque datos panes quotlibet pauperibus exequor dividere. Habes igitur communem scienciam operandi in divisione vulgarium minuciarum.

Sed hoc attende quod sepe noticia rei que queritur in huiusmodi operacione tam in multiplicando quam dividendo impeditur propterea quod habitudo minucie ad minuciam non cognoscitur vel ideo quia multus est numerus denominans et similiter numerans numerus. vel quia minucia habet denominacionem quam vulgus non attendit ut si dicas. 4ᵒʳ octave denarii non cognoscit vulgus minuciam quia non solet denarius in octavas incidere. Utile est igitur maiorem denominacionem cum fieri potest tum in minorem vertere tum in datam commutare. Quod qualiter et quando fieri possit due sequentes docebunt.

Satz 21 der Druckausgabe, deren Darstellung nur 11 Druckzeilen umfaßt.

id est maioris denominacionis

23. *Subtiliores minucias in grossiores reducere.*

Quanto denominacio maior tanto minucia minor et ita subtilior. Data igitur minucia multi numerantis et multe denominacionis ostendam utrum possit minoribus numerari et denominari. et si potest quomodo inveniendi sint illi numeri. Sit igitur data minucia .*ab*. si numeri .*a*. et .*b*. sunt contra se primi data minucia non numeratur et denominatur a minoribus. Si enim fieri potest denominet eam [Fig. 19] .*d*. numerus minor .*b*. numero et numeret eam .*c*. numerus minor .*a*. numero. ergo minucia .*ab*. est minucia .*cd*. ergo mediante prima huius que est proporcio .*a*. ad .*b*. ea est .*c*. ad .*d*. ergo .*a*. et .*b*. non sunt in sua proporcione minimi. sed ipsa sunt ad invicem primi ut positum est. ergo ex .22. .7^i. euclidis sunt in sua proporcione minimi. contrarium autem prius intuli.

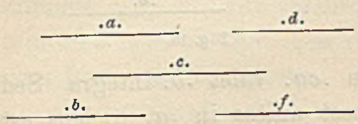


Fig. 19.

Si autem dati numeri sint communicantes tunc fieri potest quod debet. Scies autem per primam .7^i. euclidis utrum .*a*. et .*b*. sint primi ad invicem. Quod si non primi ad invicem sunt communicantes. Invenies ergo per secundam .7^i. maximum ambos numerantes. Est autem ille maximus numerans ambos qui in huiusmodi divisione qualem prima .7^i. iubet fieri primus consumit totum quod dividit. sit autem ille numerus .*c*. Divide ergo .*a*. per .*c*. et exeat .*d*. Deinde .*b*. per .*c*. et exeat .*f*. Dico quod minucia .*ab*. est minucia .*df*. quia que est proporcio .*a*. ad .*b*. ea est .*d*. ad .*f*. ergo iuxta sextam huius minucie sunt equales. patet autem quod .*d*. minor est .*a*. et quod .*f*. minor est quam numerus .*b*. Habes ergo propositum sic cum haberi potest. Item cum numeri minucie sunt contra se primi fac quod potes si quid potes divide numerantem si potes in plures numeros quorum uterque vel quilibet sit communicans denominacioni. ut si partes numeri .*a*. sint .*t*. et .*x*. et .*z*. communicantes numero .*b*. reducere poteris minucias .*tb*. et .*xb*. et .*zb*. valentes minucias .*ab*. quamlibet in grossiorem denominacionem.

Satz 22 der Druckausgabe, deren Darstellung nur 13 Druckzeilen umfaßt.

24. *Datam minuciam a dato numero denominare cum fieri potest.*

Non enim hoc semper fieri potest sed tunc tantum cum ad datum numerum aliquis numerus sic se habet sicut numerus numerans datam minuciam ad suam denominacionem. Sit ergo data minucia .*ab*. datus numerus .*d*. Si vis scire utrum aliquis numerus sic se habeat [Fig. 20] ad .*d*. ut .*a*. ad .*b*. et quis si aliquis duc .*a*. in .*d*. et excrescat .*h*. divide .*h*. per .*b*. et si totus .*h*. consumitur numerus exiens qui sit .*c*.

se habet ad .d. ut .a. ad .b. Tunc enim ex .c. in .b. fiet .h. Sit ergo .a. primum .b. secundum .c. tercium .d. quartum. Intende sic. Quod fit ex primo in quartum equum est eo quod ex secundo in tercium. ergo ex .19. .7[i]. proporcio .a. ad .b. est sicut .c. ad .d. Invento ergo numero sic se habente ad .d. datam denominacionem sicut .a. ad .b. sit ille .c. fiat ergo hic numerus numerans. et dico quod minucia .ab. est minucia .cd. Inferes enim hoc ex sexta huius constantibus premissis.

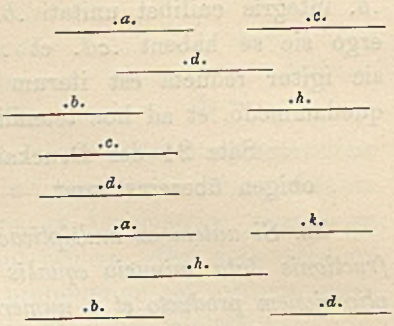


Fig. 20.

Si autem numerus .h. non totus consumitur per numerum .b. dividendo impossibile est [Bl. 282v] .ab. minuciam reduci ad denominacionem .d. numeri. fiat enim si potest et sit .ab. minucia equalis vel eadem .kd. minucie. ergo que est .a. ad .b. ea est .k. ad .d. ergo qui numerus ex .a. in .d. fit eciam ex .k. in .b. ergo ex sufficienti divisione .h. per .b. exit .k. Dictum est autem .h. per .b. totum consumi non posse. Habes ergo propositum si haberi potest.

Satz 23 der Druckausgabe, deren Beweis wesentlich derselbe wie der obige, aber viel kürzer abgefaßt worden ist.

25. *Si vero numero numerante datam minuciam ducto in datam denominacionem numerus procedens maior quid est quam denominacio date minucie equalis est duabus habentibus datam denominacionem si una earum denominetur respectu primi integri et numeretur a numero exeunte in divisione. reliqua numeretur a numero in divisione superfluo et denominetur respectu partis prime integri denominate a numero qui datam minuciam denominat.*

Verbi gracia. sit [Fig. 21] data minucia .ab. data denominacio sit .d. Ducam .a. in .d. et fiat .h. numerus maior numero .b. Dividam ergo .h. per .b. et exeat .c. et remaneat .z. Dico ergo quod minucia .ab. valet minuciam .cd. respectu eiusdem integri sumptam respectu cuius sumitur .ab. et minuciam .zd. respectu unius .b. sumptam.

Multiplicem enim .a. in .b. et fiat .k. ergo .kb. minucia et .hd. minucia sunt equales. quia que est proporcio .h. ad .d. ea est .k. ad .b. sed si .b. integris dividerem .hd. minucias secundum modum operandi qui ostenditur in .20a. presentis cuilibet unitati .b.

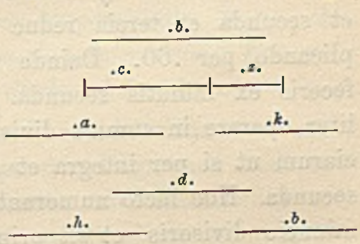


Fig. 21.

numeri caderet .*cd*. et .*zd*. unius .*b*. quia .*h*. diviso per .*b*. exit .*c*. et remanet .*z*. Si vero .*kb*. minucia secundum eundem modum dividerem .*b*. integris cuilibet unitati .*b*. cederent .*ab*. quia .*k*. per .*b*. exit .*a*. ergo sic se habent .*cd*. et .*zd*. unius .*b*. ad .*hd*. sicut .*ab*. ad .*kb*. sic igitur reducta est iterum data minucia ad datam denominacionem quodammodo. et ad hoc tetendit intencio.

Satz 24 der Druckausgabe, deren Beweis wesentlich mit dem obigen übereinstimmt.

26. *Si autem ex multiplicacione productus est minor denominacione date fractionis data minucia equalis est minucie numerate a numero per multiplicacionem producto et a numero denominante datam minuciam denominate respectu unius partis quam data denominacio respectu unius integri denominat.*

Verbi gracia. data minucia sit [Fig. 22] .*ab*. data denominacio sit .*d*. ex .*a*. in .*d*. fiat .*z*. numerus minor .*b*. numero. Dico quod minucia .*ab*. unius integri valet .*zb*. unius .*d*. Ducatur enim .*d*. eciam in .*b*. et procedat .*q*. ergo ex .13. huius .*zb*. unius .*d*. est .*zq*. minucia unius integri. sed .*d*. ducitur in .*a*. et fit .*z*. Item .*d*. in .*b*. et fit .*q*. ergo que est proporcio .*a*. ad .*z*. ea est .*b*. ad .*q*. ergo ex sexta huius equales sunt .*ab*. et .*zq*. minucie cum sint sumpte respectu eiusdem integri. Ex hoc patet quod minucia .*ab*. unius integri est equalis .*zb*. minucie unius .*d*. et ita scis quo adjecto possit .*ab*. fieri unum .*d*. ut ita ad datam denominacionem (!).

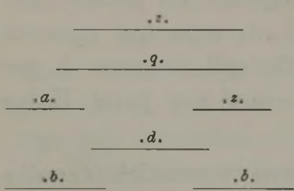


Fig. 22.

Satz 25 der Druckausgabe, deren Beweis etwas kürzer als der obige ist.

27. *Modum philosophice dividendi pertractare.*

Commodissime sic facies et certissime totam summam dividendam reduc ad minucias ultimi generis datarum minuciarum et similiter summam divisuram. Verbi gracia. si dividere debeas aliquot integra et minuta et secunda et tercia reduc per .8^{am}. huius integra ad minuta multiplicando per .60. Deinde minutorum numerum multiplica per .60. et feceris ex minutis secunda. sic eciam fac ex secundis et terciis. Similiter operare in summa divisura reducendo eas ad extremas suarum minuciarum ut si per integra et secunda debeas dividere fac ex tota summa secunda. Hoc facto numerantem dividende minucie divide per numerantem minucie divisoris et sit primo quod totum eum consumat. Accipe ergo numerum exeuntem et numera per eum minuciam philosophicam tantum distantem ab integris quantum divisa a dividente. Ipsa enim exit in hac operacione.

Verbi gracia. velim [Fig. 23] per .*a*. minuta dividere .*c*. quarta. Dividam ergo .*c*. numerantem per .*a*. numerantem et exeat .*b*. et nichil sit superfluum. Et quia quarta distant a minutis per duo loca interme [Bl. 283ʳ] dia dico quod in divisione exeunt .*b*. tercia. Illa enim distant ab integris per duo loca interposita. Si enim multiplicarem .*a*. minuta per .*b*. procederent .*c*. sicut patet ex operacione multiplicacionis. ergo que est proporcio .*c*. quartorum ad .*a*. minuta eadem est .*b*. terciorum ad integrum. ergo ex divisione .*c*. quartorum per .*a*. minuta exeunt .*b*. tercia. quod volui probare. Sed nota quod sic operandum est quando minucia dividens propinquior est integris quam minucia divisa. Nam quomodo operandum in divisione minucie loco integrorum propioris per remocionem postea dicetur.

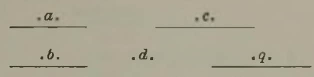


Fig. 23.

Si autem in divisione huiusmodi quam nunc dixi superfluit aliquid post hic autem contingit quando diviso numerante minucie dividende per numerantem relique relinquitur aliquid. Tunc ergo multiplicando per .60. numerantem minucie dividende reduc ipsam ad tam remotas fractiones utpote ad octava vel nona vel si opus est diligenti operacione adhuc ulterius ut videlicet numerans dividende tam multus fiat ut possit dividi per numerantem minucie divisoris sufficienter. Si vero tunc aliquid remanet non curetur propter minucie exiguitatem. Insensibilem enim facit errorem omisso paucorum decimorum vel aliquorum citra vel ultra. semper autem quod exit in operacione locandum est ubi dixi.

Si autem minucia dividenda propinquior est integris quam minucia divisor transfer eam hoc est dividendam multiplicando per .60. eius numerantem donec distet quantum vis ab integris et sit minucia divisor inter eam et integra propinquior integris. Exemplum patet et racio est in evidenti.

Satz 26 der Druckausgabe, deren Darstellung viel kürzer als die obige ist. Die Handschrift hat keine Figur; die obige ist aus der Druckausgabe entnommen.

28. *Si fuerint minucie ab integro continue proporcionales tercia ab integro quadrata erit et deinceps quelibet sequens una intermissa. Itemque quarta ab integro cubica erit et quelibet sequens duabus intermissis.*

Sit [Fig. 24] ut que est proporcio integri ad .*a*. minuciam ea sit .*a*. minucie ad .*b*. minuciam et huius ad .*c*. minuciam. Dico quod tam .*b*. tercia ab integro quam .*d*. quinta ab ipso quadrata est. Ducatur in se .*a*. minucia et producatur .*f*. minucia. ergo .*f*. est quadrata et oportet ut proporcio integri ad .*a*. sit ut proporcio .*a*. ad .*f*. ergo .*f*. est .*b*. et ita .*b*. est minucia quadrata. Item que est proporcio integri ad .*a*. ea est .*b*. ad .*c*. et que est .*a*. ad .*b*. ea est .*c*. ad .*d*. ergo que est integri ad .*b*. ea est .*b*. ad .*d*. Ex hoc sequitur ut modo quod minucia .*d*. quadrata sit habens radicem .*b*. minuciam. et sic habemus primam propositi partem. Item dico quod minucia .*c*. quarta ab integro cubica est. et si minucie .*d*. adiunxero in proporcionalitate continua minucias .*g*. et .*h*. dicam .*h*. minuciam cubicam esse. Que est enim proporcio .*c*. ad .*b*. ea est .*a*. ad integrum. ergo ex ductu .*a*. in .*b*. fit .*c*. ergo ex ductu .*a*. radicis in suam quadratam minuciam .*b*. fit .*c*. ergo .*c*. cubica est. hoc est enim aliquid in se bis duci in se et in productum. patet eciam quod numeri .*c*. minucie cubici sunt quia eos producunt numeri .*a*. minucie in se et in productos in numeros videlicet .*b*. minucie multiplicati. Item que est integri ad .*b*. eadem est .*d*. ad .*h*. hoc enim patet. ergo ex ductu .*b*. in .*d*. fit .*h*. sed .*b*. est radix minucie .*d*. ergo ut iam dixi oportet .*h*. minuciam cubicam esse. Ex hoc habes utramque propositi partem.

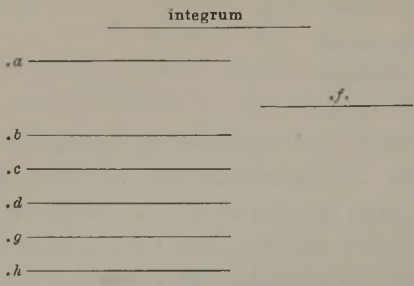


Fig. 24.

Satz 27 der Druckausgabe, deren Beweis etwas kürzer als der obige ist.

29. *Datam minuciam quadrare aut quod fieri hoc non potest ostendere. Itemque datam minuciam ad cubicos numeros reducere vel quod possibile non sit hoc fieri demonstrare.*

Quadrare minuciam est assignare ei numeros quadratos a quibus numeretur et denominetur. Sit autem data minucia .*cd*. Utrum ergo possit quadrari sic vide. Multiplica numerantem per denominantem et vide de producto utrum sit quadratus querendo eius radicem. Si enim est quadratus eius radix est medio loco proporcionalis inter numeros producentes quia si numerus quem primus et tercius in se ducti producunt fit ex secundo in se multiplicato oportet ipsam secundum inter primum et tercium esse medio loco proporcionalem. Si ergo inter numerantem et denominantem cecidit aliquis numerus medio loco proporcionalis dico illam minuciam quadrari posse.

[Bl. 283ᵛ] Verbi gracia. data minucia est [Fig. 25] .*cd*. sit autem inter .*c*. et .*d*. medio loco. proporcionalis nnmerus .*f*. faciam ergo minuciam quam numeret .*f*. et denominet .*d*. denominacio minucie .*cd*. ergo ex secunda huius que est proporcio .*c*. ad .*f*. ea est minucie .*cd*. ad minuciam .*fd*. et tunc que est .*f*. ad .*d*. ea est minucie .*fd*. ad integrum ex prima huius. ergo minucia .*fd*. radix est minucie .*cd*. Ducam ergo .*f*. in se et fiat .*h*. Item .*d*. in se et procedat .*x*. ergo minucia .*hx*.

ita se habet ad minuciam .*fd*. sicut se habet .*fd*. ad integrum. ergo .*cd*. est .*hx*. quod eciam sic videre potes .*f*. numerus est medio loco proporcionalis inter .*c*. et .*d*. ergo ex .*c*. in .*d*. fit quadratus .*f*. numeri. ergo procedit .*h*. Item ex .*d*. in se fit .*x*. numerus ergo que est .*c*. ad .*d*. ea est .*h*. ad .*x*. ergo minucia .*cd*. est minucia .*hx*. ex sexta huius. sed .*h*. et .*x*. sunt numeri quadrati. ergo quadrata est minucia .*cd*. Vel sic commodius inveniri per $.33^{am}$. $.7^{i}$. tres numeros minimos in proporcionalitate .*c*. et .*f*. et .*d*. sint ipsi .*h*.*z*. et .*q*. ergo ex corelario secunde $.8^{i}$. per quam hoc est inveniendum .*h*. et .*q*. sunt quadrati. sed eorum proporcio est sicut .*c*. et .*d*. ergo minucia .*cd*. quadratus in numeris .*h*. et .*q*.

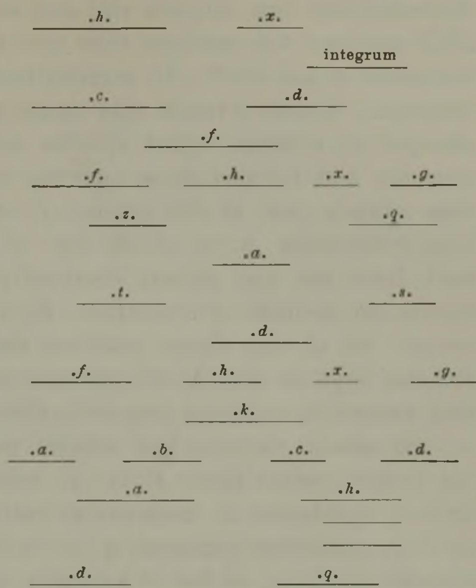


Fig 25.

Si vero inter numerantem et denominantem date minucie nullus cadit numerus medio loco proporcionalis dico datam minuciam quadrari non posse. Sit enim ut inter .*c*. et .*d*. nullus sit medius in proporcione et dicatur quadrari posse minucia .*cd*. quadretur ergo et sit .*h*. numerus quadratus eam numerans. denominet vero eam .*z*. numerus similiter quadratus. patet autem ex corelario secunde noni EUCLIDIS quod .*h*. tetragonus in .*z*. quadratum multiplicatus producit quadratum. ergo radix producti est medio loco proporcionalis inter .*h*. et .*z*. sed minucia .*hz*. est minucia .*cd*. ergo iuxta conversam sexte huius quam facile est videre oportet ut proporcio .*h*. ad .*z*. sit ut .*c*. ad .*d*. ergo quia inter .*h*. et .*z*. cadit numerus medio loco proporcionalis necesse est propter secundam $.8^{i}$. EUCLIDIS ut eciam inter .*c*. et .*d*. intercadat numerus aliquis medio loco proporcionalis. at iam erat positum contrarium.

Alia probacio. sit inter .*c*. et .*d*. medio loco proporcionalis .*f*. Aut ergo .*c*.*f*. et .*d*. sunt in sua proporcionalitate minimi aut non. Si sunt minimi ergo .*c*. et .*d*. sunt quadrati ex corelario secunde $.8^{i}$. Si non per eandem secundam tres minimos illius proporcionalitatis numeros et erunt extremi quadrati et habent proporcionem .*c*. et .*d*. ergo ipsi numerant et denominant minuciam .*cd*. et ita quadrata est data minucia. Si vero inter .*c*. et .*d*. nullus est numerus medius in proporcione non potest quadrari data minucia.

Item si vis ad formam cubicam reducere datam minuciam vide primo utrum hoc fieri possit tali artificio. Vide utrum inter numerantem et denominantem date minucie sint duo numeri in proporcionalitate continua id (!) quociens tali artificio vide que sit proporcio numerantis ad denominantem et per .33^{am}. .7^{i}. euclidis inveni minimos eiusdem proporcionis numeros. Quibus inventis vide utrum alter ipsorum non sit cubicus. an uterque sit cubicus. Quod si alter non est cubicus constat inter datos numeros non inveniri duos numeros continue proporcionales. Sit enim data minucia $.ad.$ et sint numeri $.f.$ et $.g.$ minimi secundum proporcionem numerorum $.a.$ et $.d.$ Si ergo $.f.$ et $.g.$ non sunt ambo cubici non sunt inter eos duo numeri continue proporcionalitatis. Hoc enim dicit corelarium secunde .8^{i}. euclidis. Si vero $.f.$ et $.g.$ sunt ambo cubici necesse est ut iam dicam inter eos esse duos numeros continue proporcionales. ergo ex octava .8^{i}. euclidis eciam inter $.a.$ et $.d.$ cadunt totidem numeri in continua proporcionalitate.

Si autem vis scire qui numeri cadant inter $.a.$ et $.d.$ vide primo qui numeri cadant inter $.f.$ et $.g.$ cubicos. Hos autem sic invenies. Sit cubi $.f.$ quadratus $.z.$ numerus et radix amborum numerus $.t.$ sit eciam cubi $.g.$ quadratus numerus $.q.$ et radix amborum $.s.$ numerus. Multiplicetur $.s.$ in $.z.$ et fiat $.h.$ ducatur quoque $.t.$ in $.q.$ et procedat $.x.$ Dico quod proporcio $.f.$ ad $.h.$ est sicut $.h.$ ad $.x.$ et $.x.$ ad $.g.$

Probacio. ex ductu $.t.$ in $.z.$ fit $.f.$ et ex ductu $.s.$ in $.z.$ fit $.h.$ ergo que est $.t.$ ad $.s.$ ea est $.f.$ ad $.h.$ Item ex ductu $.t.$ in $.q.$ fit $.x.$ ex ductu $.s.$ in $.q.$ [Bl. 284^{r}] fit $.g.$ ergo que est $.t.$ ad $.s.$ ea est $.x.$ ad $.g.$ ergo que est $.f.$ ad $.h.$ ea est $.x.$ ad $.g.$ Quod autem eadem sit proporcio $.h.$ ad $.x.$ ita probo. Ex ductu $.z.$ in $.t.$ fit $.f.$ ex ductu $.q.$ in $.t.$ fit $.x.$ ergo que est $.z.$ ad $.q.$ ea est $.f.$ ad $.x.$ sed proporcio $.z.$ ad $.q.$ cum sint ambo quadrati est sicut proporcio $.t.$ ad $.s.$ duplicata. sunt enim radices $.t.$ et $.s.$ ergo proporcio $.f.$ ad $.x.$ est sicut proporcio $.t.$ ad $.s.$ duplicata. ergo eciam proporcio $.f.$ ad $.x.$ est sicut proporcio $.f.$ ad $.h.$ duplicata. ergo proporcio $.f.$ ad $.h.$ est sicut proporcio $.h.$ ad $.x.$ Hiis habitis si vis habere numeros cadentes inter $.a.$ et $.d.$ fac ut dicam. oportet propter .30^{am}. .7^{i}. euclidis ut quia $.f.$ et $.g.$ minimi sunt in sua proporcione et in eadem sunt $.a.$ et $.d.$ oportet inquam ut $.f.$ numeret $.a.$ et $.g.$ numeret $.d.$ secundum unum et eundem numerum. sit ipsa $.k.$ Multiplicetur $.k.$ in $.h.$ et fiat $.b.$ itemque in $.x.$ et fiat $.c.$ quia ergo multiplicium et submultiplicium una est proporcio oportet ut que est $.f.$ ad $.h.$ ea sit $.a.$ ad $.b.$ et que est $.h.$ ad $.x.$ ea $.b.$ ad $.c.$ et que est $.x.$ ad $.g.$ ea $.c.$ ad $.d.$ Habes ergo hoc. sed eo fortasse non multum indiges.

Ut igitur ad propositum veniam si vis ad cubicos numeros reducere minuciam datam vide secundum artificium quod prima .7^{i}. ponit utrum

.*a*. et .*d*. sint contra se primi. Si enim sunt ad invicem primi sunt eciam in sua proporcione minimi ex .33. .7[1]. tunc si uterque est cubus habes propositum. Si alter non laboras in vanum ut post patebit.

Si autem .*a*. et .*d*. non sunt in sua proporcione minimi inventis minimis vide utrum uterque sit cubicus et tunc fac unum numerantem et alterum denominantem et datam minuciam feceris cubicam quod patet ex .6. huius. Si autem alter non est cubicus nichil proficis. Non est enim cubica .*ad*. minucia nec potest ad cubicos numeros reduci. si autem potest reducatur et numeret eam .*h*. et denominet .*q*. ambo cubici ergo que est .*h*. ad .*q*. ea est .*a*. ad .*d*. sed inter .*h*. et .*q*. sunt duo numeri in continua proporcionalitate quia sunt ambo cubici. ergo eciam inter .*a*. et .*d*. ergo inventis minimis huius proporcionalitatis numeris erunt extremi cubici. Iam autem positum est huic contrarium.

Habes igitur totum huius propositi negocium cujus summa hec est. Si inter numerantem et denominantem date minucie cadit aliquis numerus medio loco proporcionalis minucia quadratur in primo et tercio numerorum in illa proporcionalitate minimorum. Si nullus minucia nec est quadrata nec potest quadrari. Item si inter numerantem et denominantem cadunt duo numeri in proporcionalitate continua minucia cubicatur in primo et quarto numerorum illius proporcionalitatis minimorum. Si non duo minucia nec est cubica nec potest cubicari. Que ex premissis manifesta sunt. Hoc est igitur quod intendimus.

Satz 28 der Druckausgabe, deren Darstellung etwas kürzer als die obige ist; in dieser Darstellung fehlt der Schluß: „Habes igitur ... intendimus“.

30. *Si minucia philosophica imparis loci numeratur a quadrato numero ipsa est quadrata. Quod si minucia quarti loci vel cuiuslibet sequentis deinceps. duobus semper locis intermissis numerantem habet cubicum cubica est. procreatis enim per multiplicacionem vulgaribus denominacionibus ex philosophica necesse est in locis imparibus quadratas in quartis denominaciones cubicas inveniri.*

Sit imparis loci minucia philosophica quam denominet .*a*. numerus quadratus. Dico eam esse quadratam. Inveniatur enim [Fig. 26] radix .*a*. numeri et sit .*b*. ponam ergo .*b*. ut numeret minuciam intermedii loci inter locum .*a*. et integra. cum ex ductu .*b*. in se fiat .*a*. oportet propter .14^{am}. huius ut minucia philosophica quam numerat .*b*. sit medio loco proporcionalis inter minuciam philosophicam quam numerat .*a*. et integrum. ergo ex ductu minucie philosophice quam numerat .*b*. in se ipsam fit minucia philosophica quam numerat .*a*. ergo minucia philosophica quam numerat .*a*. quadrata est. quod eciam sic videbis. Sit .*c*.

philosophica denominacio igitur .*bc*. denominatur a numero .*c*. philosophice respectu unius proximarum minuciarum antepositarum. Multiplica igitur .*c*. denominacionem philosophicam tum in se tum in productum quamdiu opus est donec secundum .13^{am}. huius procedat vulgaris denominacio .*bc*. minucie. sit autem illa .*z*. numerus. Sed propter equalem locorum distanciam necesse est ut numerus .*z*. qui .*bc*. denominat respectu [Bl. 284^{v}] integri denominet eciam .*ac*. minuciam philosophicam respectu unius minucie denominate a numero .*z*. respectu primi integri. ergo per .13. huius numerus .*z*. in se multiplicatus semel producit denominacionem. sed .*bz*. in se ductus producit numerantem .*ac*. philosophice minucie respectu integri. sit vero denominacio producta .*x*. Vides ergo quod minucia philosophica .*ac*. que est minucia vulgaris .*ax*. quadrata est. et vides eciam quod denominacio vulgaris videlicet .*x*. in loco impari occurrens est quadrata. Patet ergo una pars propositi.

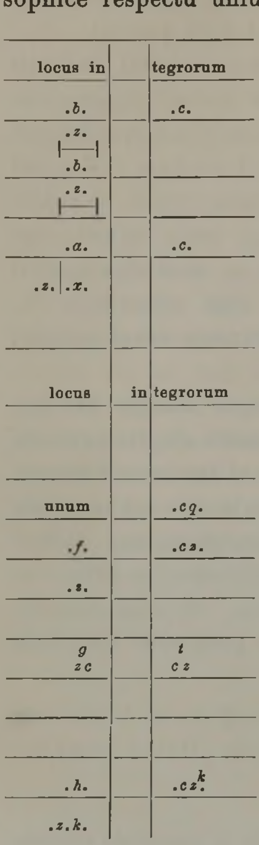


Fig. 26.

Item ut modo sit denominacio philosophica .*c*. numerus et numeret minucias philosophicas quarti loci .*f*. numerus cubicus. Item septimi loci qui est quartus a quarto minucias philosophicas numeret .*g*. cubus similiter. Itemque decimi loci qui est quartus a septimo quasdam minucias philosophicas numeret .*h*. cubus. dico minucias .*fc*. et .*gc*. et .*hc*. cubicas esse. Sumatur enim unus .*c*. de tercio loco constat quod respectu unius secundi denominat .*c*. numerus minuciam philosophicam .*fc*. sed et unum secundum respectu unius minuti et unum minutum respectu unius primi integri denominat .*c*. numerus ergo ex .13. huius unum secundum unius integri primi denominat numerus factus ex .*c*. in se multiplicato. sit ille .*q*. Minuciam igitur philosophicam .*fc*. denominat .*c*. et numerat .*f*. respectu unius .*q*. ergo .*q*. et .*c*. multiplicatis uno in alterum et procedente numero .*z*. denominabit .*z*. numerus .*fc*. minuciam respectu integri ex .13. huius. sed .*q*. numerus est quadratus .*c*. radicis. ergo .*z*. est cubicus. ergo verum est quod in quarto loco cubici occurrit denominacio et quod .*fc*. minucia philosophica que est .*fz*. minucia vulgaris cubica est. probo eciam quod .*gc*. minucia philosophica in .7^{0}. loco cubica est. quia propter equalem distanciam ita denominatur .*gc*. respectu unius .*z*. sicut unum .*z*. respectu integri. ergo denominacio .*gc*. minucie respectu unius .*z*. est numerus .z. ergo ex .13. huius .z. numerus in se multiplicatus producit denominacionem .gz. minucie respectu integri. sit illa .t. numerus. Ex ductu autem unitatis unum .z. numerantis in .g. fit .g. ergo ex .13. huius .gz. minuciam unius .z. de quarto loco numerat .g. cubicus et denominat .t. respectu integri. Est vero .t. cubicus quia .z. cubus in se multiplicatus producit eum. Cubus enim in cubum ductus producit cubum ex quarta noni EUCLIDIS. In .7°. igitur loco invenies quod promisi. ostendam iterum quod in decimo loco habetur denominacio vulgaris cubica et quod minucia philosophica .hc. illius loci cubica est cum sit .h. numerans cubicus. Denominatur enim .hc. minucia respectu unius .t. sicut unum .t. respectu unius .z. in quarto loco positi. Est igitur hec denominacio .z. numerus. Ducatur igitur unitas unum .t. respectu integri numerans in .h. et remanebit .h. Ducatur eciam .t. in .z. et procedat .k. ergo ex .13. huius .hz. unius .t. est .hk. unius integri. Est autem .k. numerus cubicus ex tercia noni quia fit ex ductu .t. cubici in .z. cubicum. Habes itaque totum propositum. Nam secundum aliquem istorum modorum probabitur propositum quecumque fiat non falsa posicio.

Satz 29 der Druckausgabe, deren Beweis viel kürzer als der obige ist.

31. *Datam minuciam sive ad quadratam sive ad cubicam malueris denominacionem reducere.*

Sit [Fig. 27] data minucia .ab. cui velim primo invenire quadratam denominacionem. Ducam igitur .b. denominacionem in se et fiat numerus .d. Ducam quoque .a. in .b. et procedat .c. numerus. Dico ergo quod minucia .ab. est .cd. habens .d. quadratam denominacionem. Ducatur enim .a. in .b. et fit .c. itemque .b. in .b. et fit .d. ergo que est .a. ad .b. eadem est .c. ad .d. ergo ex sexta huius minucia .ab. est minucia .cd. Habes igitur unam promissi partem.

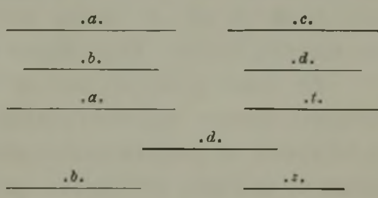


Fig. 27.

Ut autem ad cubicam denominacionem reducas datam minuciam sit .ab. data minucia. Ducatur igitur denominacio .b. in se et fiat .d. deinde ducatur .a. in .d. et fiat .t. itemque .b. in .d. et procedat .z. igitur que est proporcio .a. et .b. ductorum pariter in .d. numerum ea est .t. ad .z. qui numeri ex multiplicacione producuntur. et ita minucia .ab. est minucia .tz. Est autem numerus .z. cubicus quia fit ex ductu .b. radicis in .d. suum quadratum. Habes ergo totum quod proposui.

Satz 30 der Druckausgabe, deren Darstellung sich auf Satz 6 beruft und darum viel kürzer als die obige geworden ist.

[Bl. 285r] **32.** *Radicem minucie vulgaris extrahere.*

Sit [Fig. 28] data minucia .*ab*. primum ergo vide per artificium .30. huius utrum quadrabilis sit. primum agam de radice quadrate minucie et si est quadrabilis. et inveni radicem numerantis et similiter denominantis et fac minuciam radicem. Si non est quadrabilis ergo nec est quadrata. Non potest igitur habere radicem veram sed facies ut fit in numeris. invenies scilicet radicem cuiusdam quadrate minucie minoris data minucia cui adiecto eo quod in operacione residuum erit recrescet data minucia.

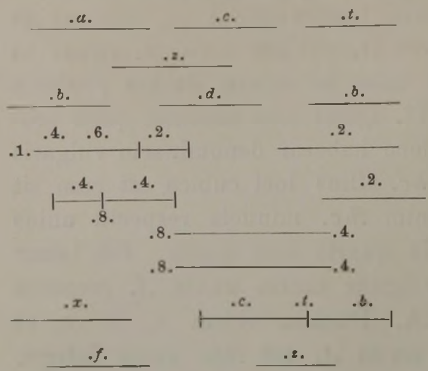


Fig. 28.

Verbi gracia. date minucie .*ab*. si non habet quadratam denominacionem fac denominacionem quadratam per proximam. Habeat autem ne moves pro nichilo. Accipe igitur radicem .*b*. quadrati et fit .*d*. deinde radicem .*a*. numerantis accipe quantum potes propinquius et sit ipsa numerus .*c*. remaneat vero de numero .*a*. in operacione .*z*. numerus. Item ducatur .*c*. in se et fiat .*t*. numerus. ducatur eciam .*d*. in se et fit .*b*. Dico ergo quod .*cd*. est radix minucie .*tb*. Hoc enim patet. et quod minuciam .*tb*. excedit minucia data .*ab*. fractione .*zb*. que in operacione superfuit. Cum enim quererem radicem .*a*. numeri inveni .*c*. et superfuit .*z*. sed ex ductu .*c*. in se fit .*t*. ergo .*t*. et .*z*. valent .*a*. numerum. sed que est .*t*. et .*z*. ad .*a*. eadem est proporcio .*tb*. et .*zb*. minuciarum ad .*ab*. ex secunda huius. Ergo habes ex hoc quod proposui.

Et nota quod si nec .*a*. nec .*b*. esset quadratus et velles in hiis numeris querere radicem quanto propinquius posses peccares. Non enim contingeret ut inventa radice et ea in se multiplicata non inquam contingeret ut minucia proveniens quadrata et minucia in operacione residua id est illa quam numerat residuum numerantis et denominat residuum denominantis equaret datam minuciam. Verbi gracia. dentur $\frac{6}{.8.}$ in quibus operando inveniam radicem duas medietates et de numerante consumentur .4. et remanebunt duo. Item de nominante consumentur similiter .4. et remanebunt .4. superfluunt ergo in operacione aut $\frac{2}{.4.}$ aut $\frac{2}{.8.}$ Cum autem in se multiplicavero $\frac{2}{.2.}$ radicem scilicet procedent $\frac{4}{.4.}$ que sunt $\frac{8}{.8.}$ quibus sive duas quartas sive duas octavas addideris fiet multo plus sex octavis. Propter hunc igitur errorem declinandum oportet datam minuciam si quadrari non potest ad quadratam denominacionem reduci ad minus.

Velim nunc querere radicem cubicam minucie vulgaris. Sit autem data minucia $.tz.$ quod si ad cubicos numeros potest reduci quod docet videri proxima proxime fiat hoc et inventa utriusqué cubi radice inventa erit radix date minucie. Si autem non potest detur tamen ea cubica denominacio nisi eam habeat. Quare autem hoc fieri commodum sit patet ex iam dictis. Sit autem ut habeat et sit $.z.$ numerus cubicus. radix eius sit $.f.$ numerus. Queratur igitur radix $.t.$ numeri quanto potest propinquius et sit $.x.$ que in se cubice ducta consumat de $.t.$ numero $.b.$ numerum et relinquat $.c.$ numerum. Dico quod radix $.xf.$ in se cubice ducta producit $.bz.$ minuciam. cum $.cz.$ minucia equantem minuciam $.tz.$ datam. Nam $.f.$ in se cubice ductus producit $.z.$ sed $.x.$ producit $.b.$ et relinquebatur in operacione numerus $.c.$ Igitur minucia $.xf.$ est radix $.bz.$ minucie cubice. Sequitur quoque ex dictis ut $.c.$ et $.b.$ valeant $.t.$ ergo eciam $.cz.$ et $.bz.$ valent minuciam $.tz.$ Habes ergo quod radix inventa producit minuciam cubicam que cum residua hoc est cum $.cz.$ minuciam perficit $.tz.$ minuciam datam non habentem veram radicem in minuciis numeros habentibus. Vides igitur modum operandi in hoc negocio patetque operis racio. Ostensum est igitur quod intendi.

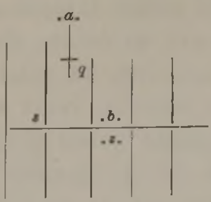
Satz 31 der Druckausgabe, deren Darstellung viel kürzer als die obige ist (nur 22 Druckzeilen).

33. *Philosophicarum minuciarum radicem investigare.*

Sive dentur integra cum minuciis sive sole minucie reduc datam summam ad minucias unius generis. Semper autem reducantur ad locum imparem. Si queris quadrate minucie radicem ibi enim invenies quadratam denominacionem. Inveni ergo aut veram aut quanto verius potes radicem numerantis et ponam eam in medio inter minuciam et integrum principale. et minucia ibi sic numerata est radix quesita.

Verbi gracia. Reduxerim datam summam ad quarta que sunt in quinto loco et sit minucia ibi facta. $.a.$ [Bl. 285ᵛ] Queram ergo radicem $.a.$ numerantis sicut in numeris solet queri radix quadrati. Inveniam autem [Fig. 29] $.b.$ radicem et sit primo numerus $.a.$ totus consumptus. Ponam ergo numerum ut numeret secunda que tercio loco posita mediique locum tenent inter $.4^a.$ et integra. Dico modo quod $.b.$ secunda sunt vera radix $.a.$ quartorum.

Probacio. denominet $.z.$ numerus secunda respectu integrorum ergo idem denominabit $.a.$ quarta respectu secundorum. ergo $.z.$ numerus in se multiplicatus producit denominacionem $.a.$ quartorum respectu integrorum. ergo $.z.$ numerus est radix denominacionis quadrate quam habent $.a.$ quarta respectu integrorum sed $.b.$ est radix $.a.$ numerantis. ergo $.bz.$ minucia est radix $.a.$ quartorum quod est equipollens numero idem proposito. Sit modo ut .b. numerus sit non vera sed proxima radix .a. numerantis et consumat de .a. numerum .q. et relinquat .s. numerum



Dico quod .b. secunda sunt radix .q. quartorum Hoc enim patet et superfuerunt in operacione .s. quarta que addita .q. quartis perficiunt .a. quarta. Nam .q. et .s. valent .a. Hoc planum quia .q. quarta et .s. quarta valent .a. quarta. patens est igitur operacio in querendo radicem quadratam minucie philosophice.

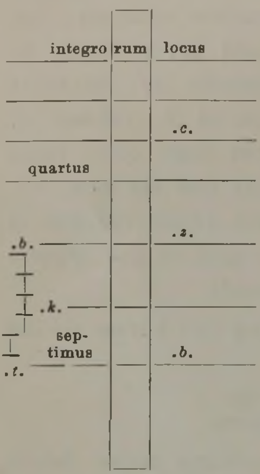


Fig. 29.

Superest cubice minucie philosophice radicem extrahere. Cum igitur collegeris unam summam datam ad aliquem quartorum locorum. verbi gracia. ad quartum vel septimum vel decimum vel aliquem talium quere radicem cubicam numerantis. ubi autem ponenda sit radix inventa sic vide. Inter quemlibet quartorum locorum et integrorum locum duo loca sunt ita se habencia in posicione quod ab integrorum ad alterum illorum et ab eo ad reliquum et ab illo iterum ad datum quartum locum una et eadem est distancia. In eo igitur illorum duorum qui integris propior est pones radicem. et minucia ibi numerata a radice est vera radix date summe. si numerans cuius radix querebatur totus consumptus fuit. Si vero non totus radix illa radix est minucie cubice cui adiecta minucia quam numerat in dato quarto loco numerus in operacione superfluus perficitur data minucia.

Verbi gracia. Reduxerim datam summam ad locum septimum et sit ibi numerans .b. huius radix cubica sit .c. numerus et sit primo vera eius radix. ponam igitur .c. ut sit numerans secundorum in tercio loco. Dico ergo quod .c. secunda sunt radix cubica .b. sextorum quorum locus est septimus ab integris.

Probacio. ex ductu .c. in se fiat .z. ergo ex ductu .c. secundorum in se fiunt .z. quarta ex .14. huius ergo .z. quarta sunt minucia quadrata. sed ex ductu .c. in .z. fit .b. quia enim .b. est cubus habens radicem .c. quam quadrat numerus .z. oportet ut .b. cubus fiat ductu .c. sue radicis in suum quadratum .z. ergo ex .15. huius ex ductu .c. secundorum in .z. quarta fiunt .b. sexta. Est igitur necesse ut .b. sexta sunt cubica minucia cum fiant ex ductu radicis in suum quadratum. Sunt enim .c. secunda radix .z. quartorum. Sit modo ut .c. non sit vera radix cubica numeri .b. sed in se cubice ducta consumat .k. et relinquat .t. Dico quod .c. secunda sunt radix cubica .k. sextorum. Hoc autem probetur prout modo processum est. et quod .*t*. sexta que in operacione superfuerunt cum .*k*. sextis faciunt .*b*. sexta. sed nec hoc dubium .*k*. enim numerus et .*t*. valent .*b*. numerum. ergo .*k*. sexta et .*t*. sexta faciunt .*b*. sexta Habes itaque hanc operacionem cum sua racione.

Satz 32 der Druckausgabe, deren Darstellung viel kürzer als die obige ist (nur 22 Druckzeilen).

34. *Omnium duorum quadratorum proximorum maior supra minorem addit numerum qui ex amborum radicibus aggregatis componitur.*

Sint [Fig. 30] .*a*. et .*b*. duo proximi quadrati. sitque .*z*. numerus radix .*a*. quadrata et .*x*. radix .*b*. quadrata. ponam vero .*b*. maiorem. Dico quod .*b*. numerus valet .*a*. et .*z*. et .*x*. numeros. quia enim .*b*. est proximus quadratus maior quadrato .*a*. oportet ut .*x*. maioris radix sit unitate maior quam radix .*z*. Idem est ergo multiplicare .*x*. in se quod multiplicare .*z*. et unitatem in se et unitatem. Multiplicando autem .*z*. in se et unitatem procedit .*a*. cum .*z*. Multiplicata vero unitate in se et .*z*. procedit .*x*. ergo multiplicando .*x*. in se procedunt .*a*. et .*z*. et .*x*. ergo hii numeri valent .*b*. quadratum. patet igitur propositum.

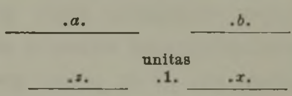


Fig. 30.

Satz 33 der Druckausgabe, deren Beweis ein wenig anders redigiert ist.

[Bl. 286r] **35.** *Omnis cubus addit super proximum minorem cubum numerum congregatum ex quadratis amborum et numero facto ex ductu radicis unius in radicem alterius.*

Verbi gracia. sint [Fig. 31] cubi duo proximi maior .*x*. et minor .*z*. radix maioris .*b*. radix minoris .*a*. patet ergo quod .*b*. numerus habet super .*a*. unitatem. Sit autem quadratus .*x*. cubi numerus .*c*. quadratus alterius numerus .*d*. Dico quod cubus .*x*. maior est .*z*. cubo numero qui colligitur ex .*c*. et .*d*. et numero qui fit ex ductu .*a*. in .*b*. qui fit .*s*. Fit enim .*x*. ex .*a*. et unitate in .*c*. ductis. sed ex uno in .*c*. fit .*c*. ex .*a*. in .*c*. fit cubus numeri .*a*. et quadratus eius .*d*. et .*s*. sicut probabo. Idem est enim ducere .*a*. in .*c*. et ducere .*b*. in .*a*. et in productum ex .37. precedentis. ergo idem fit ex .*a*. in .*c*. quod ex .*b*. in .*s*. ergo eciam idem fit ex uno et .*a*. in .*s*. sed ex uno in .*s*. fit .*s*. Collige ergo et videbis quod ex .*b*. in .*c*. fit .*c*. et .*s*. et hoc quod fit ex ductu .*a*. in .*s*. sed ducendo .*a*. in .*s*. duco per equipollens .*a*. in .*b*. et in productum ergo duco .*a*. in .*a*. et in unitatem et in productum. sed ducendo .*a*. in

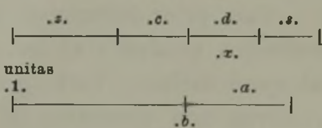


Fig. 31.

unitatem et in productum produco $.d.$ et ducendo $.a.$ in $.a.$ et in productum facio $.z.$ cubum numeri $.a.$ ergo ex $.b.$ in $.c.$ fiunt $.c.$ et $.d.$ et $.s.$ et $.z.$ Ex istis igitur constat $.x.$ ergo addit super $.z.$ cubum minorem $.c.$ et $.d.$ quadratos et $.s.$ numerum factum ex ductu radicis unius in radicem alterius et hoc est quod fuit demonstrandum.

Satz 34 der Druckausgabe, deren Beweis etwas besser redigiert ist. Daselbst steht unrichtig „37. praeceptis“ statt „37. precedentis“; in Wirklichkeit wird auf Satz 37 des „Algorismus de integris“ verwiesen.

36. *Si quadratus in non quadratum ducatur et addat non quadratus super maximum suum quadratum non minus radice ipsius producitur ex multiplicacione numerus non quadratus habens quadratum maiorem eo quadrato qui fit ex primo quadrato in maximum prioris non quadrati quadra-*
glo sa Pars
tum multiplicato. Instanciam habet hec prior pars in quaternario solo. *Si*
secunda
vero non quadratus addit super maximum suum quadratum minus radice ipsius tunc si quidam quadratus in non quadratum ducatur et deinde in productum. itemque in productum et huiusmodi multiplicaciones tociens fiant quociens excessus non quadrati super suum maximum quadratum continet radicem eius et adhuc semel necesse est ut ad minus in ultima multiplicacione producatur non quadratus. cuius maximus quadratus maior sit eo qui fit ex ductu primi quadrati in maximum quadratum non quadrati ex penultima
glo
multiplicacione producti. Quod ex ductu quadrati in quadratum fiat quadratus et ex ductu non quadrati vel e converso fiat non quadratus dicit
sa.
corelarium secunde noni EUCLIDIS.

Pars prior instanciam habet tantum in quaternario. In omnibus enim maioribus quadratis ad huiusmodi multiplicacionem assumptis necessarium est quod dicitur. Verbi gracia. sit [Fig. 32] $.a.$ datus quadratus. sit $.b.$ numerus non quadratus in quo maximus quadratus. sit $.c.$ habens radicem $.z.$ excedat autem numerus $.b.$ numerum $.c.$ numero $.t.$ non minori quam est numerus $.z.$ Dico quod ex ductu $.a.$ in $.b.$ fit non quadratus habens maximum quadratum maiorem eo qui fit ex $.a.$ in $.c.$ Fiat enim ex $.a.$ in $.b.$ numerus $.q.$ itemque ex $.a.$ in $.t.$ numerus $.h.$ ex $.a.$ in $.c.$ quadratus $.k.$ ergo ex $.h.$ et $.k.$ constat $.q.$ numerus. Dico autem quod in $.q.$ numero maior est quadratus quam numerus $.k.$ Ita dico si $.a.$ non est quaternarius sed maior.

Sit enim radix quadrati $.a.$ numerus $.m.$ radix $.k.$ quadrati numerus $.s.$ quia igitur ex $.a.$ in $.c.$ fit $.k.$ necesse est eius radicem hoc est numerum .*s*. esse medio loco proporcionalem inter .*a*. et .*c*. ex quo sequitur numerum .*s*. fieri ex ductu .*m*. in .*z*. quod ita videri potest. Ex .*m*. in .*m*. fit .*a*. ex .*m*. in .*z*. fiat .*y*. ergo que est .*m*. ad .*z*. ea est .*a*. ad .*y*. Item ex .*m*. in .*z*. fit .*y*. sed ex .*z*. in .*z*. fit .*c*. ergo que est .*m*. ad .*z*. ea est .*y*. ad .*c*. ergo que est .*a*. ad .*y*. ea est .*y*. ad .*c*. ergo .*y*. est .*s*. Fit igitur ex .*m*. in .*z*. numerus .*s*. sed ex .*a*. in .*t*. fit .*h*. Cum ergo .*t*. non fit minus numero .*z*. et .*a*. quadratus fit ad minus triplus ad .*m*. suam radicem oportet ut numerus .*h*. sit ad minus triplus ad .*s*. ergo [Bl. 286v] numerus .*q*. addit super .*k*. quadratum plus numero qui colligitur ex radice .*s*. et proxima radice maiori. habet itaque .*q*. numerus maiorem quadratum numero .*k*. ex .30. habes itaque propositum si .*a*. non est quaternarius.

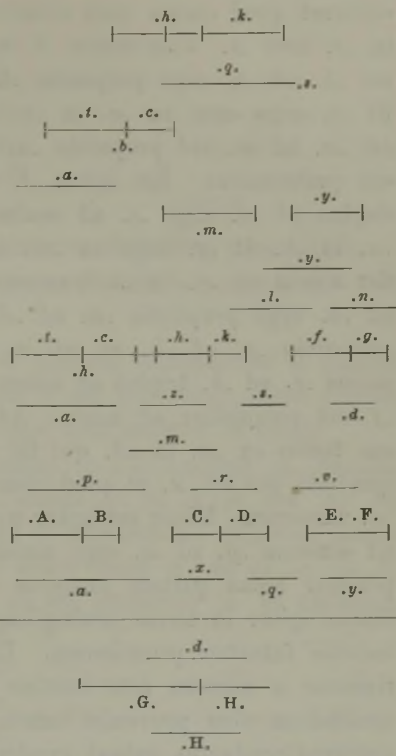


Fig. 32.

Si enim .*a*. sit quaternarius non necesse est semper evenire quod dicitur. Sit enim .*a*. quaternarius et sit .*t*. equalis numero .*z*. tunc tamen non provenit propositum. quia tunc ex .*a*. in .*t*. fit duplum ad .*s*. Unde .*q*. addit supra .*k*. numerum duplum .*s*. numeri. Quadratus vero proximo maior .*k*. quadrato addit super eum duplum numeri .*s*. et unitatem. Si autem .*a*. est quaternarius et .*t*. numerus equalis est .*z*. radici tunc multiplicato .*a*. in .*q*. procedet numerus non quadratus quadratum habens maiorem .*k*. quadrato maximo in numero .*q*. Si autem .*t*. sit vel una unitate maior numero .*z*. provenit propositum sive .*a*. sit quaternarius sive maior quadratus sicut patet attendenti. Hec est ergo prior pars proposicionis hoc loco proposite.

Sit vero ut .*t*. numerus minor sit numero .*z*. sit autem ad .*t*. numerum sextuplus .*z*. numerus ducaturque .*a*. in .*tc*. et fiat .*hk*. in hunc ductus .*a*. producit .*fg*. In hunc eciam ducatur et fiat .AB. Item in hunc eciam et procedat .CD. in quem eciam ductus .*a*. fiat .EF. et in hunc multiplicatus procedet .GH. sit vero .*g*. quadratus productus ex .*a*. in .*k*. ex .*a*. in .*g*. producatur .B. ex .*a*. in .B. producatur .D. ex .*a*. in .D. producatur .F. ex .*a*. in .F. fiat .H. Oportet igitur ut ex .*a*. in .*t*. producatur .*h*. ex .*a*. in .*h*. fiat .*f*. ex .*a*. in .*f*. procedat .A. ex .*a*.

in .A. fiat .C. ex .a. in .C. fiat .E. ex .a. in .E. fiat .G. Dico igitur quod ad minus in numero .GH. et quadratus maior .H. quadrato. In uno autem occurret quod quero. quia enim ex .a. in .c. fit .k. necesse est ex .m. in .z. fieri .s. Fiat autem .l. ex .a. in .z. ergo que est .z. ad .t. ea est .l. ad .h. ergo proporcio .l. ad .h. est sextupla. sed ex .m. in .z. fit .s. ergo cum ex .a. in .z. fiat .l. ea est proporcio .l. ad .s. que est .a. ad m. sed proporcio .a. ad .m. dupla est ad minus utpote si .a. est quaternarius. Est igitur .l. numerus ad .h. sextuplus .l. ad minus duplus ad .s. ergo .s. ad maius est triplus ad .h. numerum. Item ex .a. in .k. fit .g. ergo ex .m. in .s. fit radix quadrati .g. sit illa .d. fiat autem ex .a. in .s. numerus .n. ergo que est .a. ad .m. ea est .n. ad .d. ergo proporcio .n. ad .d. dupla est ad minus. sed item que est proporcio .s. ad .h. ea est .n. ad .f. est igitur .n. ad .f. triplus ad maius .z. ad .h. triplus ad maius .z. ad .d. duplus ad minus. ergo .d. ad .f. est sesquialter ad maius. Ad hunc modum videri potest quod numerus factus ex .a. in .d. qui fit .p. duplus est ad minus ad radicem .B. quadrati que sit .x. et quod idem numerus .p. est ad maius sesquialter ad .A. numerum. Minor est igitur proporcio .p. numeri ad .A. numerum quam sit eiusdem .p. ad .x. ergo maior est .A. numerus numero .x. ergo iuxta priorem huius partem numerus habet maiorem quadratum quadrato .B. Habes igitur in tercia multiplicacione quod ad tardius in sexta multiplicacione futurum promiseram. Unde videre potes quod quamvis .t. contineatur a numero non omnino sexies sed quinquies eum teneat et aliquantulum plus proveniet tamen ad tardius in quinta multiplicacione ut numerus productus habeat quadratum maiorem quadrato qui fit ex .a. in maximum quadratum numeri ex quarta multiplicacione procreati. Si vero quod non credo in quinta multiplicacione non occurrerit ultra sextam propositum morari non posset. transfer igitur ad numeros quod in literis dicitur et videbis quod dico verum esse.

Satz 35 der Druckausgabe, deren Beweis etwas kürzer als der obige ist.

37. *Si duo proximi quadrati et numerus factus ex ductu radicis in radicem congregentur in unum numerum numerus totalis una unitate habundabit super triplum numeri producti ex radice in radicem multiplicata.*

Verbi gracia. sint [Fig. 33] .a. et .b. due proxime radices erit igitur .b. que sit maior erit inquam .a. et unitas. Probabo autem quod .c. exeunte quadrato numeri .a. quadrati .b. et .a. numerorum valent bis .a. et bis .c. et unitatem. Sit enim .d. quadratus numeri .b. ergo ex .33[a]. .d. constat ex .a. et .b. et .c. ergo constat ex .a. bis et unitate et .c. ergo adiecto .c. qui [Bl. 287r] est quadratus .a. numeri totus numerus constans ex .*c*. et .*d*. constat ex .*a*. bis et .*c*. bis. et unitate sed ex duplo numeri .*a*. in .*a*. fit bis .*c*. et ex duplo numeri .*a*. in unitatem fit bis .*a*. ergo ex duplo numeri .*a*. in .*b*. fit bis .*a*. et bis .*c*. ergo bis .*a*. et bis .*c*. duplum est ad id quod fit ex .*a*. in .*b*. quod sit .*h*. ergo quod congregatur ex bis .*a*. et bis .*c*. et numero .*h*. est triplum ad .*h*. Adde ergo unitatem quia .*c*. et .*d*. valent bis .*a*. et bis .*c*. et unitatem. ergo .*d*. et .*c*. et .*h*. habundant super triplum ad .*h*. in unitate. et videbis propositum.

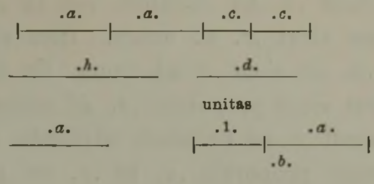


Fig. 33.

Satz 36 der Druckausgabe, deren Beweis wesentlich mit dem obigen übereinstimmt.

38. *Si duorum numerorum alter in alterum multiplicetur et quidam tercius in productum fiet numerus equalis ei qui producitur altero duorum multiplicato in totum multiplicem reliqui quot sunt unitates in tercio.*

Verbi gracia. sint [Fig. 34] tres numeri .*a*.*b*.*c*. quorum .*a*. ducatur in .*b*. vel e contrario et fiat .*d*. Item ducatur .*c*. in .*d*. et fiat .*h*. Sit autem .*z*. numerus multiplex numeri .*a*. et numeret .*a*. numerus numerum .*z*. secundum .*c*. numerum. Dico eciam quod .*h*. fit ex .*z*. in .*b*. multiplicato. Que est enim .*h*. ad .*d*. ea est proporcio .*c*. ad unitatem. ergo que est .*h*. ad .*d*. ea est .*z*. ad .*a*. et que est .*d*. ad .*b*. ea est .*a*. ad unitatem. ergo que est .*h*. ad .*b*. ea est .*z*. ad unitatem. ergo facto .*h*. primo et .*b*. secundo. item .*z*. tercio et unitate quarto oportet ut quod fit ex .*h*. in unitatem sit equum ei quod fit ex .*b*. in .*z*. sed ex .*h*. in unitatem fit .*h*. ex hoc fac sequi propositum.

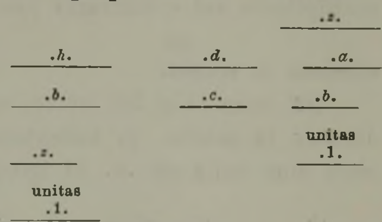


Fig. 34.

Satz 37 der Druckausgabe, deren Beweis wesentlich mit dem obigen übereinstimmt. — Dieser Satz ist übrigens im Grunde derselbe als Satz 38 des „Algorismus de integris".

39. *Oportet ut una radice in alteram multiplicata procedat radix cubi qui producitur cubis illarum radicum altero in alterum multiplicatis.*

Patet quod quadrato in quadratum multiplicato producitur quadratus cuius radix producitur ex radicibus quadratorum multiplicancium. Simile autem probabo in cubis. Sint enim [Fig. 35] .*a*.*z*. et .*q*. tres cubi quorum .*q*. fiat ex ductu .*a*. in .*z*. et sit .*c*. radix .*a*. cubi et .*t*. radix .*z*. cubi ex .*c*. in .*t*. fiat .*x*.

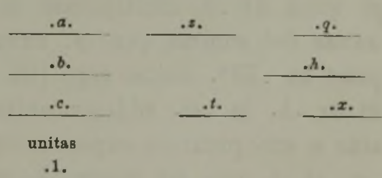


Fig. 35.

dico quod .*x*. est radix cubi .*q*. Si enim non sit eius radix .*h*. sit quoque .*b*. quadratus .*c*. radicis et .*a*. cubi. Est igitur proporcio .*q*. ad .*z*. sicut .*a*. ad unitatem. sed ex .*c*. in .*c*. fit .*b*. ergo proporcio .*b*. ad .*c*. est sicut .*c*. ad unum. Item ex .*c*. in .*b*. fit .*a*. ergo proporcio .*a*. ad .*b*. est sicut .*c*. ad unum. Ex hoc patet quod proporcio .*a*. ad unitatem est sicut proporcio .*c*. ad unum triplicata. ergo proporcio .*q*. ad .*z*. est sicut .*c*. ad unitatem triplicata. sed que est .*x*. ad .*t*. ea est .*c*. ad unum. ergo proporcio .*q*. ad .*z*. est proporcio .*x*. ad .*t*. triplicata. sed eadem est proporcio .*h*. ad .*t*. triplicata, ergo ex .11. octavi Euclidis .*h*. est .*x*. Ex hoc planum est factum quod proponebatur explicandum.

Satz 38 der Druckausgabe, deren Beweis kürzer als der obige ist.

40. *Si trium cuborum primus non est octonarius et ductus in secundum producit tercium tunc si quadratus primi cubi non est minor radice tercii idem primus ductus in numerum constantem ex cubo secundo et quodam numero habundante super radicem tercii ad minus binario producit nume-*
glo
rum in quo est maior cubus eo qui ex primo in secundum producitur. Quod cubo in cubum alium vel in se ipsum multiplicato cubus procedat patet ex tercia et quarta noni Euclidis. Quod vero ex cubo in non cubum multiplicato vel e contrario producitur non cubus dicit corelarium quinte
sa
eiusdem in eodem.

Sit enim [Fig. 36] ut .*c*. cubus cuius quadratus .*b*. et radix .*a*. sit ducatur in cubum .*q*. habentem .*x*. radicem et producat .*g*. cubum tercium eius radix sit .*k*. fit igitur .*k*. ex .*a*. in .*x*. sit eciam ut numerus .*z*. excedat numerum .*k*. ad minus binario et .*b*. quadratus primi cubi non sit minor .*k*. numero. Fiat autem ex .*c*. in .*zq*. numerus .*fg*. Dico in numero .*fg*. esse maiorem cubum numero cubico .*g*. ponam enim ut .*h*. triplum sit numeri .*k*. proxima vero ulterior radix post .*k*. sit .*m*. Cum igitur .*c*. cubus sit maior octonario erit .*a*. non minus ternario. sed .*b*. non est minus .*k*. ergo .*c*. non est minus .*h*. Si autem ei quod fit .*k*. multiplicato in .*m*. et ternario in productum addatur unitas fiet summa qua .*g*. cubus exceditur a proximo maiori cubo sicut patet ex .33[a]. huius. ergo [Bl. 287v] sicut patet ex .34. huius si ei quod fit ex .*h*. in .*m*. addatur unitas fiet summa qua idem .*g*. cubus superatur a suo proximo superiori cubo. sed .*z*. ad minus una unitate excedit .*m*. et .*c*. non est minus .*h*. ergo plus quam illa summa fit ex .*c*. in

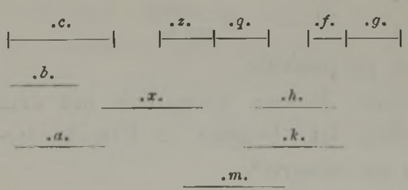


Fig. 36.

.*z*. ergo .*f*. est plus quam illa summa ergo in numero .*fg*. est maior cubus .*g*. Hoc autem fuit ostendendum.

Satz 39 der Druckausgabe, deren Beweis wesentlich mit dem obigen übereinstimmt.

41. *Si vero quomodolibet aliter res se habuerint necesse est nichilominus ut cubo in cubum et aliquid multiplicato et deinde in productum et item in illud productum et sic aliquociens necesse est inquam ut in numero ex ultima multiplicacione producto ad minus sit cubus maior eo qui fit ex primo cubo ducto in cubum maximum illius numeri qui ex penultima multiplicacione procreatur.*

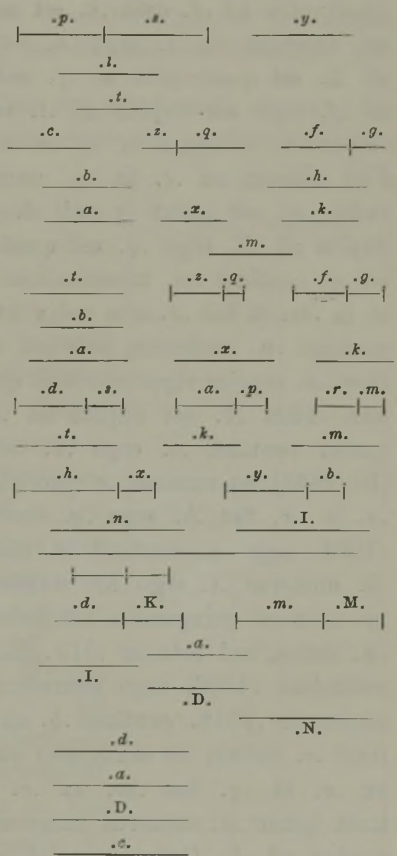


Fig. 37.

Sit primo ut maneant omnia predicta hoc solo excepto quod dictum est .*c*. non esse octonarium. sit autem [Fig. 37] .*c*. octonarius. contingere ergo potest quod in .*fg*. non est maior cubus .*g*. cubo. ut si .*b*. sit equalis .*k*. et numerus .*z*. tantum unitate excedat numerum .*m*. quia enim ex .*a*. binario in .*b*. fit .*c*. erit .*c*. duplum ad .*b*. sed .*h*. est triplum ad .*k*. ergo .*c*. est minus numero .*h*. tercia sua parte. sed .*z*. sola unitate vincit .*m*. numerum. ergo ex .*c*. in .*z*. fit minus quam ex .*h*. in .*m*. ex quo sequitur in .*fg*. numero .*g*. esse maximum cubum. sed tunc si ex .*c*. in .*f*. fiat .*p*. et ex .*c*. in .*g*. fiat .*s*. necesse est in numero .*ps*. esse maiorem cubicum .*s*.

Sit enim .*t*. radix cubi .*s*. triplus numeri .*t*. sit .*l*. proxima maior radix sit .*d*. Fit igitur .*t*. ex .*a*. in .*k*. ergo .*t*. est duplum ad .*k*. ergo eciam ad .*b*. ergo .*t*. numerus est equalis numero .*c*. ergo numerus .*l*. qui est triplus ad .*t*. est eciam triplus ad .*c*. sed ex .*c*. in .*z*. fit .*f*. ergo .*f*. est octuplus ad .*z*. ergo est plusquam octuplus ad .*k*. ergo est plusquam quadruplus ad .*t*. ergo est plusquam quadruplus ad .*c*. sed .*c*. in .*f*. fit .*p*. ergo .*p*. est octuplus ad .*f*. et .*f*. est plusquam quadruplus ad .*c*. ergo .*p*. continet .*c*. plusquam tricecies bis. sed sola unitate exceditur .*c*. numerus a numero .*d*. ergo .*p*. continet .*d*. plusquam vigesies octies. Item .*l*. est triplus ad .*t*. sed .*t*. est octuplus ad unitatem ergo *.l.* vigesies quater continet unitatem. sed ex ductu *.l.* in *.d.* fiat *.y.* ergo *.y.* continet vigesies quater *.d.* numerum. ergo maior est *.p.* numerus numero *.y.* et addit super eum plus unitate. ergo in numero *.ps.* est maior cubus numero *.s.* et hoc volui ostendere.

Sit autem ut *.k.* radix sit quadrupla ad numerum *.b.* et sit pro libito sedecupla ad numerum *.z.* et fiat ex *.c.* in *.f.* numerus *.d.* ex *.c.* in *.g.* numerus *.s.* cuius radix *.t.* Item ex *.c.* in *.d.* procedat *.q.* ex *.c.* in *.s.* fiat *.p.* cuius radix *.b.* sic ergo ad *.b.* duplus est ad minus *.c.* Sit vero duplus hoc est octonarius. ergo *.a.* est binarius. sed ex *.a.* in *.k.* fit *.t.* quia ex *.c.* in *.g.* fit *.s.* ergo *.t.* est duplus ad *.k.* ergo est quadruplus ad *.f.* quia *.k.* est sedecuplus ad *.z.* et *.f.* ex *.c.* in *.z.* factus est octuplus ad *.z.* ergo *.k.* est duplus ad *.f.* ergo *.t.* qui est duplus ad *.k.* est quadruplus ad *.f.* sed ex *.c.* in *.f.* fit *.d.* ergo *.d.* est octuplus ad *.f.* ergo est duplus ad *.t.* sed *.b.* est duplus ad *.t.* quia *.b.* fit ex *.a.* in *.t.* eo quod ex *.c.* in *.s.* fiat *.p.* ergo *.d.* et *.b.* sunt equales. Fiat adhunc ex *.c.* in *.q.* numerus *.r.* et ex *.c.* in *.p.* fiat *.l.* cuius radix *.m.* est igitur *.q.* ad *.d.* octuplus ergo eciam ad *.k.* sed *.m.* est duplus ad *.b.* ergo *.q.* est quadruplus ad *.m.* ergo *.r.* qui est octuplus ad *.q.* continet *.m.* tricecies bis. Multiplicetur iterum *.c.* in *.r.* et fiat *.h.* et in *.m.* et fiat *.x.* eius radix sit *.n.* Est igitur *.n.* duplus ad *.l.* ergo *.r.* continet *.n.* numerum sedecies. sed *.h.* est octuplus ad *.r.* ergo *.h.* continet *.n.* cencies vigesies octies. quia ex octo in .16. fiunt .128. Tene igitur hoc. Item *.k.* est duplus ad *.c.* quia est quadruplus ad *.b.* ergo *.t.* quater continet *.c.* ergo *.b.* octies. ergo *.m.* sedecies. ergo *.n.* tercies [Bl. 288^r] bis continet *.c.* procedam iterum. et ex *.c.* in *.h.* faciam *.y.* ex *.c.* in *.x.* fiat *.b.* ergo *.y.* continet *.h.* octies. sed ex .8. in .128. fiunt .1024. ergo *.y.* continet *.n.* milies vigesies quater. Sit autem radix cubi *.b.* numerus .I. ergo hic numerus est duplus ad *.n.* ergo continetur in *.y.* numero quingencies duodecies. continet igitur *.d.* numerus numerum *.y.* octies. sed octo in .512. faciunt .4096. ergo in *.d.* est .I. numerus secundum .4096. ergo secundum eius dimidium hoc est secundum hunc numerum .2048. continet *.b.* numerus numerum *.l.* numerus ergo *.l.* continet *.c.* cubum bis sexagesies quater hoc est cencies vigesies octies. Item ex *.c.* in *.y.* fiat *.m.* ex *.c.* in *.m.* fiat .M. cuius radix sit .D. continet igitur *.n.* numerus numerum .D. milies vigesies quater. quia *.n.* est duplus ad *.l.* Cubus vero *.t.* continetur in numero *.n.* ducencies quinquagesies sexies. Sit autem *.a.* triplus ad .D. ergo *.d.* numerus continet *.a.* plusquam trecencies quadragesies. Item sit .N. proxima radix post *.n.* excedens eam unitate nota tamen quod continet .N. numerus numerum *.c.* ducencies quinquagesies sepcies. pluries ergo continet .M. numerus numerum .H. quam numerus .N. numerum *.c.* Sit ergo *.d.* primum .A.

secundum. tercium .*n*. quartum .*c*. quia ergo maior est proporcio primi ad secundum quam tercii ad quartum necesse est ex .*d*. in .*c*. plus fieri quam ex .H. in .*n*. Ex hoc infer quod in numero .LM. est maior cubus .M. cubo et ita habes quod voluisti. Vides igitur quod posito octonario qui minimus est cuborum provenit tandem propositum. multo ocius proveniet posito maiori cubo. Ad hunc itaque modum negocianti necesse est etsi non statim aliquando tamen quod querit occurrere.

Satz 40 der Druckausgabe, deren Darstellung mit dem obigen übereinstimmt. Der Schluß des Beweises ist indessen in der Handschrift so verstümmelt, besonders in betreff der Zeichen, daß ein Versuch, die Darstellung durch einfache Verbesserungen zu berichtigen, sich als erfolglos erwies; der Gang des Beweises ist jedenfalls klar.

42. *In minuciis radicem non habentibus non potest radix non vera tam propinque inveniri ut propinquius haberi non possit sive quadrate sive cubice fractionis radicem querere sit propositum.*

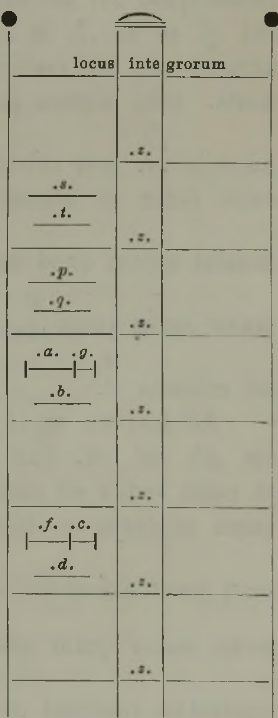


Fig. 38.

Hec est propter quam premisse sunt tricesima (!) et eam hucusque sequentes. Ut ergo primo agam de philosophicis minuciis et primum de radice quadrata. sit [Fig. 38] data minucia $\frac{ag}{.b.}$ quod non possit quadrari sed sit .*b*. eius denominans quadratus. Hoc enim in omni minucia haberi potest. Numerus vero .*ag*. qui est numerans non sit quadratus. Sit item denominacio philosophica .*z*. ex quo numero multiplicato in se et in productum et item in id et sic deinceps quociens opus est productus sit .*b*. numero in aliquo imparium locorum sicut oportet occurrens. Occurrat autem in quinto ubi est locus quartorum. Sunt igitur $\frac{ag}{.b.}$ unius integri $\frac{ag}{.z.}$ unius tercii huius minucie scilicet $\frac{ag}{.b.}$ radix queratur. et inventa radice huius numerantis .*ag*. verius fieri potest. sit ipsa numerus .*s*. qui in se ductus consumat .*g*. de .*ag*. Item radix .*b*. numeri quadrati sit .*t*. numerus. Est igitur $\frac{s}{.t.}$ vera radix minucie $\frac{g}{.b.}$ vere quadrate. Dico quod minucie $\frac{ag}{.b.}$ potest inveniri propinquior radix hoc est propinquius eam consumens si in seipsam multiplicetur.

Verbi gracia. transferatur minucia .$\frac{ag}{b}$. ad ulteriorem locum utpote ad septimum ubi est locus sextorum nonne autem hoc faciam sic. Multiplicando per denominacionem philosophicam per .*z*. videlicet numerum .*ag*. et tunc .*z*. ducatur in productum. tunc autem fiat .*fc*. eruntque .$\frac{ag}{b}$. unius integri .*fc*. sexta. Si autem velim habere denominacionem sextorum quam habent respectu integrorum nonne ducam .*z*. in .*b*. et deinde in productum. fiat autem tunc .*d*. Hoc patet attendenti naturam philosophicarum minuciarum et octavam et .13^{am}. huius. Est igitur minucia .$\frac{ag}{b}$. equalis immo eadem minucie .$\frac{fc}{d}$. Sed vide quod multiplicavi .*z*. in .*ag*. et in productum et processit .*fc*. ergo per .37. prioris ex ductu .*l*. qui sit quadratus numeri .*z*. in .*ag*. fit .*fc*. Similiter ex .*l*. in .*b*. fit .*d*. unde palam quod .$\frac{ag}{b}$. est equalis .$\frac{fc}{d}$. minucie. Ponam autem ut ex .*l*. in .*a*. fiat .*f*. et ex .*l*. in .*g*. quadratum fiat .*c*. quadratus. Vtrum ergo in numero .*fc*. sit maior quadratus .*c*. quadrato potest sciri inspectis numeris. sciri inquam potest ex .32. huius. quod si non est dico quod de minucia .$\frac{fc}{d}$. non extrahi[Bl 288^{v}]tur maior radix quam est radix .$\frac{s}{t}$. Sit enim radix .*d*. numeri numerus .*q*. radix numeri .*c*. sit .*p*. numerus. constat autem quod non extrahitur ex minucia .$\frac{fc}{d}$. habente hos numeros maior radix quam .$\frac{p}{q}$. Habebo ergo propositum probato quod minucia .$\frac{p}{q}$. est minucia .$\frac{s}{t}$.

Ad hoc sic. ex .*l*. in .*g*. fit .*c*. et ex .*l*. in .*b*. fit .*d*. ergo minucia .*gb*. est .*cd*. Cum ergo quadrata minucia sit eadem quadrate oportet ut radix radici sit eadem. Quod si in .*fc*. numero est maior quadratus quam numerus .*c*. tunc eciam extrahitur de .*fc*. maior radix .*p*. et ita sicut patet extrahitur de minucia .$\frac{fc}{d}$. maior radix quam minucia .$\frac{p}{q}$. ergo eciam maior quam minucia .$\frac{s}{t}$. Quod si in numero .*fc*. non occurrit maior quadratus quadrato .*c*. transferatur minucia .$\frac{fc}{d}$. in novum per multiplicacionem numeri .*l*. in numerantem et denominantem sicut modo facta est translacio de quinto loco ad septimum et deinde si opus est de nono ad .xi^{m}. et ita donec occurrat numerans habens maiorem quadratum eo qui producitur ex .*l*. in maximum precedentis numerantis quadratum ducto. Quod autem hoc tandem eveniat patet ex secunda parte .32^{e}.

Ex hoc ergo apparet rem diligenter intuenti quod quanto ulterius et remocius ab integris deducitur minucia tanto propinquius radix invenitur in extractione radicis quadrate minucie. Quod autem idem contingat in cubicarum radicibus extrahendis ita considera. Sit data minucia philosophica in septimo loco qui est secundus quartus et est sextorum et sit [Fig. 39] eius numerans *.ab.* habens *.b.* maximum cubum cum ipse non sit cubicus. Apparet autem ex .34. quod sextorum denominacio cubica respectu integri sit illa *.c.* cuius radix sit *.s.* extrahatur autem cubice radix numeri *.ab.* et sit *.q.* erit itaque *.q.* vera radix *.b.* cubi. Extracta est igitur *.qs.* radix $\frac{ab}{c}$ minucie quanto propinquius fieri potuit in hiis numeris. dico haberi posse propinquiorem hoc est maiorem radicem. Quanto enim radix non vera maior tanto propinquior. Traducatur ergo minucia $\frac{ab}{c}$ ad tercium quartorum locorum hoc est ad decimam ubi est locus nonorum. Faciam autem sic. Multiplicabo per philosophicam denominacionem que sit *.p.* numerum *.ab.* et ducam iterum *.p.* in productum et item in illum productum et fiat *.fg.* Et si ducatur *.p.* in *.c.* cubum et in productum et item in productum et fiat *.h.* Dico quod *.fg.* nona sunt $\frac{fg}{h}$ minucia unius integri. Ad hoc sic. numerus *.s.* est radix numeri cubici *.c.* erit igitur ut patet intuenti *.s.* denominacio secundorum respectu integri cum *.c.* sit denominacio sextorum respectu integri. est igitur *.s.* quadratus numeri *.p.* cum *.p.* sit denominacio minutorum respectu integri quod patere potest per .13. huius. Fiat autem ex *.p.* in *.s.* numerus *.m.* ergo *.m.* est cubus *.p.* numeri. Ostendam autem quod ex *.m.* in *.c.* fit *.h.* Fiat enim ex *.p.* in *.c.* numerus *.n.* in

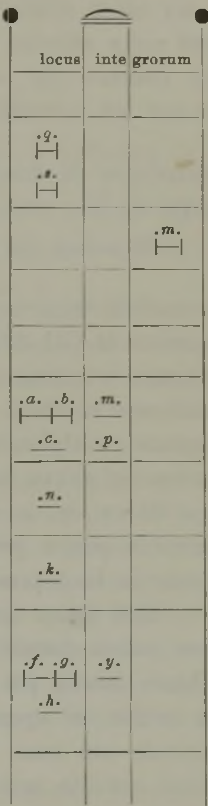


Fig. 39.

hunc *.p.* faciat *.k.* ergo ex *.p.* in *.k.* fit *.h.* Item in *.c.* ducatur *.p.* et fit *.n.* in *.n.* ducatur *.p.* et fit *.k.* ergo ex ductu *.s.* in *.c.* fit *.k.* ex .37. nonne ergo *.s.* in *.c.* multiplicatur et fit *.k.* et *.p.* in *.k.* et fit *.h.* Sed quociens *.p.* continet unitatem tociens *.m.* continet *.s.* ergo ex .34. ex *.m.* in *.c.* fit *.h.* eadem racione ex *.m.* in *.ab.* facto *.fg.* ergo $\frac{ab}{c}$ est minucia $\frac{fg}{h}$ Item ex *.p.* in *.s.* fit *.m.* ergo *.m.* est denominacio terciorum. sed ex terciis in sexta fiunt nona. ergo cum ex *.m.* in *.c.* fiat *.h.* oportet ut nonorum denominacio ad integrum sit numerus .h. ergo .$\overset{fg}{h}$. sunt .fg. nona. Recte ergo traduxi sexta ad nona multiplicando numeros per .m. cubum philosophice denominacionis.

Ponam autem quod ex .m. in .b. fiat .g. si ergo in .fg. est .g. maximus cubus radix extracta in hiis numeris de minucia .$\overset{fg}{h}$. erit vera radix minucie .$\overset{g}{h}$. sed minucia hec est minucia .$\overset{b}{c}$. ergo radix unius est radix alterius. Non ergo inventa est ad hunc maior radix Si vero in numero .fg. est maior cubus numero sit ille .y. ergo minucia .h. maior est minucia .c. ergo eciam habet maiorem radicem. sed eius radix extrahitur de minucia .$\overset{fg}{h}$. si .y. est maximus cubus in numero .fg. Habes ergo ex hiis viam rei quam queris.

Si autem in numero .fg. maximus cubus est .g. multiplicata per .m. numerum minucia .$\overset{fg}{h}$. et reduxeris eam ad .13^{m}. locum qui est duodecimorum et [Bl. 289^{r}] est quartus quartorum locorum. et si ibi invenis in numero numerante maiorem cubum illo qui fit ex .m. in .g. invenies ibi maiorem radicem. Sive autem hoc sit sive non si numeros ibi inventos iterum multiplicaveris per .m. traduxeris minuciam ad locum .16^{um}. quod autem in aliqua tali traductione invenies in numerante maiorem cubum eo qui fit ex .m. in maximum cubum prioris numerantis patet ex probacione secunde partis proxime. Hoc autem invento invenies maiorem radicem quam in loco precedenti.

Sive igitur quadratam sive cubicam radicem queris ubi vera inveniri non potest quanto minuciam nec quadratam nec cubicam magis ab integris distare feceris per modum quem dixi tanto propinquius radicem invenies et minus in operacione relinquis. Non tamen necesse est in infinitum procedi sed cum illic veneris ubi tam modicum aliquid relinquitur ut illius omissio non faciat errorem sensibilem procedi ultra superfluit. Si autem vulgaris minucie nec quadrate nec cubice radicem queris per quemlibet quadratum si radicem quadratam et per quemlibet cubum si cubicam radicem queris multiplica numeros minucie ad quadratam vel cubicam denominacionem reducte. et quanto sepius multiplicaveris tanto propinquiorem radicem invenies sicut ex premissis patere potest.

Hec sunt que de minuciis scienda et ideo colligenda putavi et eia (!) finit.

Satz 41 der Druckausgabe, deren Beweis mit dem obigen übereinstimmt.

Kommentar.

In der Einleitung definiert GERNARDUS erst die Kunstwörter:

„pars multiplicativa“ oder „pars quota“ oder „pars“ (= Bruch mit dem Zähler 1), „denominatio“ oder „numerus denominans“ (= Nenner), „minucia“ oder „fractio“ (= Bruch im allgemeinen) und „numerus numerans“ (= Zähler). Es wird bemerkt, daß Brüche auch $= 1$ oder > 1 sein können.

Ferner gibt er an, welche Bedeutung die Ausdrücke

„multiplicare“, „dividere“, „quadratus“, „cubus“, „radix“

bei den Brüchen haben. Multiplikation der Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ bedeutet die Ermittelung eines Bruches $\frac{A}{B}$, der der Bedingung $\frac{A}{B} : \frac{a}{b} = \frac{c}{d} : 1$ genügt, und ebenso bedeutet Division des Bruches $\frac{a}{b}$ durch den Bruch $\frac{c}{d}$ die Berechnung eines Bruches $\frac{C}{D}$, der der Bedingung $\frac{C}{D} : 1 = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ genügt. — Dann geht GERNARDUS zu den zwei Hauptarten von Brüchen, nämlich den Sexagesimalbrüchen („minutiae philosophicae“) und gewöhnlichen Brüchen („minutiae vulgares“) über; als unterscheidendes Merkmal gibt er die Schreibweise an. Bei den gewöhnlichen Brüchen wird der Zähler oberhalb des Nenners geschrieben, aber ohne Bruchstrich; bei den Sexagesimalbrüchen werden die Nenner überhaupt nicht geschrieben, sondern nur die Zähler, und zwar wird von links nach rechts (vgl. Satz 10) erst die ganze Zahl, wenn eine solche vorhanden ist, dann der Zähler der Minuten, weiter der Zähler der Sekunden usw. geschrieben, so daß der Wert jedes Zählers durch seine Stelle angegeben wird. In betreff der gewöhnlichen Brüche wendet GERNARDUS allerdings, wenn Zähler und Nenner Buchstaben sind in der Regel die Schreibweise *ab* (*a* Zähler, *b* Nenner) an, sicherlich aus rein graphischen Gründen.

Die 42 Sätze besagen, wenn man sie in unsere mathematische Sprache übersetzt:

1. $a : b = \frac{a}{b} : 1$. — „Demonstratio de minutiis“ Satz **1** (= „Tractatus minutiarum“ Satz **1**).

2. $\frac{a}{b} : \frac{c}{b} = a : c$. — Spezialfall des Satzes **2** der „Demonstratio de minutiis“ (= „Tractatus minutiarum“ Satz **2**).

3. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$. — „Demonstratio de minutiis“ Satz **2** („Tractatus minutiarum“ Satz **2**).

4. $1 : \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = \frac{bd}{ad + bc}$. — „Demonstratio de minutiis“ Satz **3** (= „Tractatus minutiarum“ Satz **3**).

5. $\frac{a}{b} : \frac{a}{c} = c : b$. — Spezialfall des Satzes **2** der „Demonstratio de minutiis“ (= „Tractatus minutiarum“ Satz **2**).

6. Wenn $a : c = b : d$, so ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, und umgekehrt folgt aus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, daß $a : c = b : d$. — Die Umkehrung befindet sich im Satze **6** der „Demonstratio de minutiis“ (fehlt im „Tractatus minutiarum“).

7. Brüche gleichnamig machen. — „Demonstratio de minutiis“ Satz **7** (= „Tractatus minutiarum“ Satz **6**).

8. $a = \frac{ab}{b}$. — Spezialfall des Satzes **4** der „Demonstratio de minutiis“ (= „Tractatus minutiarum“ Satz **4**).

9. Addition in gewöhnlichen Brüchen. Wenn nur zwei Brüche gegeben sind, verfährt man nach der Regel $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$. Kommen noch mehrere Addende vor, addiert man weiter den dritten Bruch zu der Summe, der zwei ersten, dann den vierten Bruch zu dieser Summe usw. — „Demonstratio de minutiis“ Satz **9** (= „Tractatus minutiarum“ Satz **8**).

10. Addition in Sexagesimalbrüchen. Man kann entweder links oder rechts beginnen, sonst ist das Verfahren das gewöhnliche. Es wird ausdrücklich angegeben, daß man die Brüche von links nach rechts (also nicht wie bei Jordanus) schreiben soll. — „Demonstratio de minutiis“ Satz **9** (= „Tractatus minutiarum“ Satz **8**).

11. Subtraktion. Bei gewöhnlichen Brüchen verfährt man nach der Regel $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$. Bei Sexagesimalbrüchen kann man entweder links oder rechts beginnen und verfährt sonst, wie jetzt üblich ist. — „Demonstratio de minutiis“ Satz **10** (= „Tractatus minutiarum“ Satz **9**).

12. Verdopplung und Halbierung. Die Regeln sind dieselben wie in der „Demonstratio de minutiis“ Satz **11—12** (= „Tractatus minutiarum“ Satz **10—11**).

13. Multiplikation in gewöhnlichen Brüchen nach der Regel $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{acd}{bcd} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; wenn ganze Zahlen vorhanden sind, wird der gemischte Bruch in einen unechten verwandelt. — „Demonstratio de minutiis“ Satz **13, 23** (Spezialfälle), **24—25** (= „Tractatus minutiarum“ Satz **12, 22, 23—24**).

14. $\frac{a}{b}$ von $\frac{c}{d} A$ ist $\frac{ac}{bd}$ von A; hier hat „pars“ die Bedeutung: „Bruch im allgemeinen“. — Verallgemeinerung des Satzes **14** der „Demonstratio de minutiis“ (= „Tractatus minutiarum“ Satz **13**).

15. $\frac{a^2}{60^{2n}} : \frac{a}{60^n} = \frac{a}{60^n} : 1$. — Im wesentlichen ein Spezialfall des Satzes **20** der „Demonstratio de minutiis“ (= „Tractatus minutiarum“ Satz **19**).

16. Wenn α_1, α_2 die Zähler zweier Sexagesimalbrüche mit den Nennern 60^m, 60^n sind, so ist $\frac{\alpha_1 \alpha_2}{60^{m+n}} : \frac{\alpha_1}{60^m} = \frac{\alpha_2}{60^n} : 1$; der Satz ist allerdings nicht ganz gut redigiert. — Im wesentlichen identisch mit dem Satze **20** der „Demonstratio de minutiis" (= „Tractatus minutiarum" Satz **19**).

17 Multiplikation in Sexagesimalbrüchen. GERNARDUS lehrt zwei Verfahren, von denen das erste dem Verfahren bei ganzen Zahlen nachgebildet ist; man betrachtet also die ganze Zahl sowie die Zähler der Minuten, Sekunden usw. als die sukzessiven Ziffern, und nach jeder Partialmultiplikation wird die untere Zahl nach links versetzt. Das andere Verfahren ist das gewöhnliche; man bringt also erst die zwei Brüche auf ihre niedrigsten Minutien und führt dann die Multiplikation der Zähler aus. — „Demonstratio de minutiis" Satz **25** (= „Tractatus minutiarum" Satz **24**).

18. Division in gewöhnlichen Brüchen (Spezialfall); wenn $a = hc$, $b = kd$, so ist $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{h}{k}$. — „Demonstratio de minutiis" Satz **30** (= „Tractatus minutiarum" Satz **25**).

19. Division in gewöhnlichen Brüchen (allgemeiner Fall) nach der Regel $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{acd}{bcd}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$. — „Demonstratio de minutiis" Satz **30** (= „Tractatus minutiarum" Satz **25**).

20. I. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}}$. — II. $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{c\left(\frac{a}{c} - \frac{b}{d}\right)}{b}$. I ist eigentlich mit dem Satze **18** oben identisch; II fehlt in der „Demonstratio de minutiis".

21. I. Wenn $a = mc + \beta$ $(c > \beta > 0)$ und $b = md$, so ist $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{\beta}{b}$. — II. Wenn $a = (m - \alpha)c + \beta$ $(\alpha < m,\ c > \beta > 0)$ und $b = md$, so ist $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{\alpha c - \beta}{b}$. — III. Wenn $a = (m + \alpha)c + \beta$ $(c > \beta > 0)$, $b = md$, so ist $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{\alpha c + \beta}{b}$. — Fehlt in der „Demonstratio de minutiis".

22. „Bruchdivision" ganzer Zahlen, d. h. gewöhnliche Division mit Restglied in Bruchform. — Fehlt in der „Demonstratio de minutiis".

23. Brüche kürzen. — „Demonstratio de minutiis" Satz **8** (= „Tractatus minutiarum" Satz **7**). — Am Ende bemerkt GERNARDUS, daß, wenn eine direkte Kürzung unmöglich ist, der Zähler zerlegt werden kann, so daß man eine Summe von Partialbrüchen mit kleineren Nennern erhält.

24. Einen gegebenen Bruch, wenn irgend möglich, auf einen gegebenen Nenner bringen. Wenn $\frac{a}{b}$ der gegebene Bruch und d der gegebene Nenner ist, muß ad ein Multipel von b sein, und die Regel lautet $\frac{a}{b} = \frac{\frac{ad}{b}}{d}$. — Fehlt in der „Demonstratio de minutiis".

25. Wenn $ad = mb + \alpha\,(b > \alpha > 0)$, so ist $\frac{a}{b} = \frac{m}{d} + \frac{\alpha}{bd}$. — Fehlt in der „Demonstratio de minutiis".

26. Wenn $ad < b$, so ist $\frac{a}{b} = \frac{ad}{b} \cdot \frac{1}{d}$. — „Demonstratio de minutiis" Satz **4** (= „Tractatus minutiarum" Satz **4**).

27. Division in Sexagesimalbrüchen. Am bequemsten bekommt man das Resultat, wenn man erst die zwei Brüche auf ihre niedrigsten Minutien bringt und dann die Zähler des Dividendus durch den Zähler des Divisors dividiert. Im Bedarfsfalle hat man den Dividendus oder den bei der Division erhaltenen Rest noch weiter zu reduzieren, und von welcher Art der Quotient ist, bestimmt man unter Bezugnahme auf die Arten der behandelten Brüche. Kleine Reste, z. B. „decima", kann man ohne Ungelegenheit weglassen. — „Demonstratio de minutiis" Satz **30** (= „Tractatus minutiarum" Satz **25**).

28. Wenn $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ eine ununterbrochene Reihe von einfachen Sexagesimalbrüchen ist, und wenn $\alpha_1 : \alpha_2 = \alpha_2 : \alpha_3 = \cdots$, so sind $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6 \ldots$ Quadratzahlen, $\alpha_3, \alpha_6, \alpha_9 \ldots$ Kubikzahlen. — In betreff der Quadratzahlen stimmt der Satz mit der „Demonstratio de minutiis" Satz **16** (= „Tractatus minutiarum" Satz **15**) überein.

29. Man soll, wenn irgend möglich, einen Bruch quadratisch oder kubisch machen, d. h. auf die Form $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ oder $\frac{\alpha^3}{\beta^3}$ bringen. Kunstwörter: „quadrare" (das also nicht zum Quadrat erheben bedeutet), „ad cubicum numerum reducere". Die Regeln sind $\frac{a}{b} = \frac{ab}{b^2}$, $\frac{a}{b} = \frac{ab^2}{b^3}$, und die Bedingung ist, daß ab eine Quadratzahl bzw. ab^2 eine Kubikzahl ist. Im Texte kommt einmal das Wort „tetragonus" statt „quadratus" vor. — Fehlt in der „Demonstratio de minutiis".

30. Wenn ein Sexagesimalbruch mit dem Nenner 60^{2n} einen quadratischen Zähler hat, ist der Bruch quadratisch, und ebenso kubisch, wenn der Nenner 60^{3n} und der Zähler kubisch ist. — Der erste Teil des Satzes stimmt mit der „Demonstratio de minutiis" Satz **18** (= „Tractatus minutiarum" Satz **17**) überein.

31. Einen gegebenen Bruch auf quadratischen oder kubischen Nenner bringen. Dieser Satz ist eigentlich unnötig, da das Verfahren, um das es sich handelt, schon am Anfange des Satzes **29** gelehrt worden ist. — Für quadratische Nenner siehe „Demonstratio de minutiis“ Satz **31** (fehlt im „Tractatus minutiarum“).

32. Quadrat- und Kubikwurzelausziehung bei gewöhnlichen Brüchen nach den Regeln $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$, $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}$. — Gernardus weist durch ein Beispiel nach, daß, wenn weder a noch b eine Quadratzahl ist, ein Näherungswert nicht erzielt wird, wenn man ganzzahlige Näherungswerte sowohl für $\sqrt{a}$ wie für $\sqrt{b}$ berechnet und dann $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ setzt. — Für Quadratwurzelausziehung siehe „Demonstratio de minutiis“ Satz **35** (= „Tractatus minutiarum“ Satz **26**).

33. Quadrat- und Kubikwurzelausziehung bei Sexagesimalbrüchen. Man bringt den gegebenen Bruch auf einen Nenner von der Form 60^{2n} bzw. 60^{3n}, der nicht kleiner als der Nenner der niedrigsten Minutie des Bruches ist, und zieht die Wurzel aus dem Zähler. — Für Quadratwurzelausziehung siehe „Demonstratio de minutiis“ Satz **35** (= „Tractatus minutiarum“ Satz **26**).

34. $(a+1)^2 = a^2 + a + (a+1)$. — Fehlt in der „Demonstratio de minutiis“.

35. $(a+1)^3 = a^3 + a^2 + (a+1)^2 + a(a+1)$. — Fehlt in der „Demonstratio de minutiis“.

36. Wenn $\mathfrak{Q}[x]$ die größte in x enthaltene ganze Quadratzahl bedeutet und $a \geqq \mathfrak{Q}[a] + \sqrt{\mathfrak{Q}[a]}$, $\alpha > 2$, so ist $\mathfrak{Q}[\alpha^2 a] > \alpha^2 \mathfrak{Q}[a]$. Ebenso gibt es, wenn $a < \mathfrak{Q}[a] + \sqrt{\mathfrak{Q}[a]}$, immer eine ganze Zahl n, die so beschaffen ist, daß $\mathfrak{Q}[\alpha^{2n} a] > \alpha^2 \mathfrak{Q}[\alpha^{2n-2}]$. Die Zahl n ist höchstens $= \mathrm{E}\left[\frac{\sqrt{\mathfrak{Q}[a]}}{a - \mathfrak{Q}[a]}\right] + 1$. Nach dem Wortlaute des Satzes sollte allerdings n höchstens $= \mathrm{E}\left[\frac{a - \mathfrak{Q}[a]}{\sqrt{\mathfrak{Q}[a]}}\right] + 1$ sein, aber auf Grund der Bedingung $a < \mathfrak{Q}[a] + \sqrt{\mathfrak{Q}[a]}$ ist das erste Glied dieses Ausdruckes immer Null. Die Berichtigung kann man übrigens sofort aus dem Beweise ausfindig machen. — Fehlt in der „Demonstratio de minutiis“.

37. $a^2 + (a+1)^2 + a(a+1) = 3a(a+1) + 1$. — Fehlt in der „Demonstratio de minutiis“.

38. $(ab)\cdot c = a\cdot(bc) = b\cdot(ac)$. — Dieser Satz ist derselbe als der Satz **37** des „Algorismus Gernardi de integris“. — Fehlt in der „Demonstratio de minutiis“.

39. $ab = \sqrt[3]{a^3 b^3}$. — Fehlt in der „Demonstratio de minutiis“.

40. Wenn $\mathfrak{K}[x]$ die größte in x enthaltene ganze Kubikzahl bedeutet, und wenn $\alpha^2 \geqq \alpha a$, $k \geqq 2$, $\alpha > 2$, so ist $\mathfrak{K}[\alpha^3(a^3 + \alpha a + k)] > \alpha^3 a^3$. — Fehlt in der „Demonstratio de minutiis".

41. Wenn $\mathfrak{K}[x]$ dieselbe Bedeutung wie früher hat, gibt es immer eine ganze Zahl n, die so beschaffen ist, daß

$$\mathfrak{K}[\alpha^{3n}(a^3 + k)] > \alpha^3\, \mathfrak{K}[\alpha^{3(n-1)}(a^3 + k)].$$

— Fehlt in der „Demonstratio de minutiis".

42. Wenn die Wurzel aus der Zahl a nur näherungsweise ausgezogen werden kann, und wenn man einen Näherungswert berechnet hat, kann man immer einen noch genaueren Wert ausfindig machen. — Fehlt in der „Demonstratio de minutiis".

Vergleicht man jetzt unter Bezugnahme auf die oben mitgeteilten Angaben die „Demonstratio Jordani de minutiis" mit dem „Algorismus Gernardi de minutiis", findet man, daß diesem die Sätze **5**, **15**, **17**, **19**, **21**, **22**, **26**—**29**, **32**—**34** fehlen. Indessen sind die fraglichen Sätze von sehr untergeordneter Bedeutung (die sechs letzten fehlen übrigens auch im „Tractatus minutiarum"), so daß ihr Fehlen eigentlich keinen wirklichen Unterschied zwischen den zwei Schriften bezeichnet. Dagegen unterscheiden sie sich bestimmt in betreff der Terminologie und der Schreibweise, teilweise auch hinsichtlich der Definitionen und des methodischen Verfahrens. Die gewöhnlichen Brüche heißen bei Jordanus „minutiae vagae sumptionis", bei Gernardus „minutiae vulgares". Jordanus behandelt nicht speziell Sexagesimalbrüche, sondern ihre Verallgemeinerung, d. h. wenn man statt 60 eine beliebige ganze Zahl annimmt, und nennt solche Brüche „minutiae ordinariae consimiles"; dagegen beschäftigt sich Gernardus ausdrücklich mit Sexagesimalbrüchen, die er „minutiae philosophicae" nennt. Die Schreibweise ist auch in den zwei Schriften verschieden. Bei Sexagesimalbrüchen schreibt Jordanus $\begin{matrix}2\\10\\32\\57\end{matrix}$ statt $2^0\,10'\,32''\,57'''$ während Gernardus 2 10 32 57 setzt. Jordanus schreibt eigentlich nie gewöhnliche Brüche in Bruchform, sondern benutzt immer Worte[1]) (z. B. für $\frac{b}{c}$ „minutie numerate a b, denominate a c"), während Gernardus für $\frac{a}{b}$ gewöhnlich ab, zuweilen $\begin{matrix}a\\b\end{matrix}$ schreibt. Hinsichtlich der Definitionen mache ich besonders auf die Erklärung des Wortes „multiplicare" auf-

1) Nur ganz ausnahmsweise wird (z. B. im Beweise des Satzes 26 der „Demonstratio Jordani de minutiis" der Bruch $\frac{b}{a}$ durch ab (also nicht ba) bezeichnet („Sint minucie dividende numerate a b et denominate ab a ... minucie ab sunt minucie cd").

merksam; JORDANUS hat eine nichtssagende Definition, weil darin das Wort „productus“ vorkommt; dagegen bringt GERNARDUS eine Realdefinition. Auch vom methodischen Gesichtspunkte aus vertritt GERNARDUS meines Erachtens einen höheren Standpunkt, z. B. in betreff des doppelten Verfahrens bei Multiplikation von Sexagesimalbrüchen (siehe oben die Bemerkung zum Satze **17**). Im Grunde stimmt das erste Verfahren mit dem THEONschen überein, aber die allmähliche Versetzung des Multiplikators nach links rührt vielleicht von GERNARDUS selbst her.

Untersuchen wir zuletzt, welche Sätze des GERNARDUS in der „Demonstratio de minutiis“ fehlen, finden wir, daß ihre Zahl 15 beträgt; diese Sätze sind: **20—22**, **24—25**, **29**, **34—42**. Sieht man vom Satze **22** ab, der eigentlich unnötig ist, kann man sagen, daß die übrigen von einer nicht unbedeutenden Gewandtheit, mit allgemeinen Zahlen zu rechnen, zeugen. Am interessantesten sind die Sätze **34—42**, die eigentlich nichts mit Bruchrechnen zu tun haben, sondern aufgestellt sind, nur um den letzten Satz, nämlich, daß man zu jedem Näherungswert einen noch genaueren Näherungswert finden kann, zu beweisen. Von unserem Gesichtspunkte aus ist allerdings GERNARDUS hier unnötigerweise weitläufig geworden, denn es handelt sich im Grunde nur darum, festzustellen, daß es zwei Zahlen h und k gibt, die so beschaffen sind, daß

$$E[\sqrt{h^2(a^2+1)}] > hE[\sqrt{a^2+1}], \quad E[\sqrt[3]{k^3(a^3+1)}] > kE[\sqrt[3]{a^3+1}];$$

offenbar genügt es, $h = 2a + 1$, $k = 3a^2 + 1$ zu setzen. Anderseits ist die Frage, mit der sich GERNARDUS in den Sätzen **36**, **40**, **41** beschäftigt, als ein für die Mathematiker des Mittelalters recht schwieriger Gegenstand zu betrachten.

Zur Geschichte der unendlichen Reihen im christlichen Mittelalter.

Von H. Wieleitner in Pirmasens.

1. Einleitung. Auf S. 393 des dritten Bandes seiner *Études sur Léonard de Vinci* (Paris 1913) teilt P. Duhem mit, ohne übrigens das Verfahren anzudeuten, daß Nicole Oresme († 1382) in einem Werke mit dem Titel *De difformitate qualitatum*, das nur handschriftlich überliefert wurde[1]), eine Reihe richtig summierte, die man in die algebraische Form bringen kann:

$$(1) \qquad \frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+\ldots \text{ in inf.}$$

Da ich über das Vorkommen solcher (rekurrenter) Reihen vor Jakob Bernoulli[2]) nirgends Belege finden konnte, fragte ich bei Herrn Eneström an, ob über die Summierung ähnlicher Reihen im Mittelalter etwas bekannt sei. Unter Verneinung dieser Frage wies Herr Eneström zugleich auf eine andere Stelle (S. 540/41) in dem zitierten Band von Duhems Werk hin, wo angegeben wird, daß bei einem anderen Scholastiker namens Alvarus Thomas in einem 1509 gedruckten Werke *Liber de triplici motu* eine Reihe betrachtet werde, deren Summe sich, wie Herr Eneström hinzufügte, leicht vermittels des natürlichen Logarithmus von 2 ausdrücken lasse, die aber Thomas immerhin zwischen zwei nicht zu weite Grenzen eingeschlossen habe. Herr Eneström regte zugleich an, ich sollte nachsehen, ob der Traktat des Thomas in München vorhanden sei, um die immerhin überraschende Aufstellung Duhems zu verifizieren. Die Münchner Hof- und Staatsbibliothek besitzt tatsächlich ein Exemplar dieses Werkes, das von später Hand als „liber rarissimus“ auf dem Titelblatte bezeichnet ist.[3])

1) Dieses Werk bildete die Grundlage für eine verkürzte Bearbeitung, die später unter dem Titel *Tractatus de latitudinibus formarum* weite Verbreitung fand. Vgl. meinen Artikel in Bibliotheca Mathematica **13**$_3$, 1912/13, S. 115—145, sowie eine in derselben Zeitschrift demnächst erscheinende zweite Abhandlung.

2) *Positiones arithmeticae de seriebus infinitis* I, Basileae 1689, prop. XIV; *Opera* **1**, Genevae 1744, S. 384—385.

3) Ganz vor kurzem hat die Königl. Bibliothek in Berlin ein Exemplar erworben auf Veranlassung von Herrn G. Valentin, dem ich von der Sache kurze Mitteilung gemacht hatte.

Als ich die Stelle aufgeschlagen und mich etwas hineingelesen hatte, erkannte ich bald, daß nicht bloß DUHEMS Angabe vollkommen richtig war, sondern daß ich hier eine systematische Darstellung der Verwendung unendlicher Reihen vor mir hatte. Ich glaube, dieser Gegenstand ist interessant genug, um weiteren Kreisen bekannt gemacht zu werden.

2. Bibliographisches. Da das Werk von THOMAS eine so große Seltenheit zu sein scheint, darf ich wohl von ihm ein paar Worte mehr, als sonst gerechtfertigt wäre, sagen, obwohl es nicht zu den Inkunabeln gehört. Das Format ist ein kleines Folio (Satzspiegel ohne Kolumnentitel 18,8 cm × 21,3 cm). Die Bogen sind in der Regel zu Ternionen vereinigt (es kommen mehrfach auch Doppelbogen vor) und dann mit k. 1., k. 2., k. 3. beispielsweise, später mittels Versalien signiert. Kustoden sind nicht angewandt. Das ganze Werk hat 152 Blätter[1]) und ist zweispaltig, in Gotisch (etwas hohes Petit mit großem Bild) kompreß gedruckt, mit mäßiger Verwendung von Abbreviaturen. Im Anfang auf mehreren Blättern, am Schluß auf dem letzten Blatt ist für Überschriften auch Rot benützt.

Das erste Blatt ist das Titelblatt. Es zeigt auf der Vorderseite einen sehr gut ausgeführten Holzschnitt[2]), Maria auf einem Thron mit dem Jesusknaben im Schoß, der ein übermäßig großes T-förmiges Kreuz hält, das von einem Engel gestützt wird. Ein anderer Engel krönt Maria. Im Vordergrund links lagert ein Einhorn mit einem Wappen auf der Brust, rechts kniet ein Mann (der Drucker). Ein Spruchband über ihm enthält die Worte: „memento mei, O mater dei“[3]), ein anderes unter ihm seinen Namen: „Guilke anabat“. Unter diesem rechteckigen Bild ist ein Feld, in das mit Rot der Titel des Werkes gedruckt ist:

> Liber de triplici motu proportionibus annexis ‖ magistri Aluari Thome. Ulixbonensis philosophi ‖ cas Suiseth calculationes ex parte declarans.[4])

Das Ganze ist umrahmt von einer aus 5 Stöcken zusammengesetzten Renaissanceleiste.[5]) Die zweite Seite enthält eine Widmung von ALUARUS

1) Beim Münchner Exemplar hat eine frühe Hand auf die letzte Seite fälschlich geschrieben *„folia 142“*. Auch hat dieses Exemplar jemand, ebenfalls ziemlich früh, mit den Ziffern 1—300 paginiert, wobei das Titelblatt und das letzte Blatt nicht mitgezählt sind. DUHEM gibt 162 Blätter an. Das ist wohl auch ein Zählfehler.

2) Ich weise darauf hin, daß die DÜRERschen Meisterholzschnitte etwa um dieselbe Zeit erschienen (Apokalypse 1498, Marienleben 1511).

3) Natürlich sind sowohl hier wie auch im Titel und sonst Abbreviaturen verwendet, die ich alle ausschreibe.

4) Das von DUHEM benützte Exemplar hat hier noch eine Bemerkung über den Verlag des Buches.

5) Das Münchner Exemplar trägt auf dem Titelblatt noch die mit Tinte sehr früh geschriebenen Worte: *„Collegij Paris. Soc. JESV.“*, sowie den etwas später, aber

Thomas an Petrus de meneses, der, wie man dem Text entnehmen kann, einmal zu Athen Magister war, außerdem zwei Gedichte, eines von Joannes de haxa[1]) an Hermannus lethemate (sic) de gouda germane nationis procuratori, das andere von Dionysius faber vindocinensis an den Leser gerichtet. Das Kolophon steht auf Bl. (E. 4.)^r, Sp. 2 und lautet:

> ℭ Explicit liber de triplici motu compositus per Magistrum Aluarum Thomam vlixbonensem Regentem Parrhisius in Collegio Coquereti. Anno domini. 1509. Die Februarii. 11.

Auf der Rückseite dieses Blattes sind Druckfehler vermerkt. Ferner ist u. a. dort noch ein Gedicht von Johannes de haya an jenen Hermannus lethmate (sic) de gouda, auf der Vorderseite des Blattes (E. 5) Schreiben von Georgius bruniau vindocinensis an Aluarus Thomas und von Joannes de haya an denselben Hermannus lethmate (sic) de guoda (sic) und ein Gedicht auf den Drucker Anabat. Die Rückseite des Blattes (E. 5) enthält einen ebenso großen Holzschnitt wie das Titelblatt, darstellend den Jesusknaben im Tempel, darunter in Rot das Impressum, welches lautet:

> Impressum parisius per Guillermum Anabat ‖ commorentem (sic) apud paruum pontem ante hospitium dei ‖ ad intersignium licornie.[2]) Omnia pro meliori.

Die Umrahmung ist aus denselben 5 Stöcken in etwas anderer Weise gebildet wie beim Titelblatt. Das letzte Blatt des Buches ist leer.

Über Alvarus Thomas ist nichts bekannt, außer was sich aus dem Kolophon ergibt; daß er also ein Portugiese war, aus Lissabon gebürtig und im Anfang des 16. Jahrhunderts „Regens“[3]) des sonst ziemlich unbekannten Kollegiums Coqueret in Paris.

3. Teilung einer Strecke in Abschnitte, die eine geometrische Reihe bilden. Ich habe nicht die Absicht, hier einen Bericht über den Inhalt des soeben beschriebenen Werkes zu geben, das sich ja durchaus in den Bahnen der scholastischen Naturphilosophie bewegt, sondern will nur das herauszusuchen trachten, was sich auf mein Thema bezieht. Das Werk beginnt, wie viele der scholastischen Traktate über den Aristotelischen Begriff des „motus“, mit einer Darstellung der Lehre von den Verhält-

---

gewiß noch im 17. Jahrhundert geschriebenen Spruch mit Unterschrift: *„Vacatis et videtis Kenelme Digby“*. Es ist sehr wahrscheinlich, daß Digby (1603—1665; vgl. Cantors *Vorl.* 2², Leipzig 1900, S. 786) das selbst geschrieben hat.

1) Wohl Druckfehler für haya, wie er später genannt wird.

2) Auch dieses Impressum ist bei dem von Duhem benützten Exemplar am Schlusse anders und länger. Das Motto ist wieder dasselbe. Über das Berliner Exemplar will Herr Valentin selbst eine Notiz veröffentlichen.

3) Dieser Ausdruck ist noch heute in katholischen Priesterseminaren, auch in Deutschland, üblich.

nissen („proportiones"). Auch irrationale Verhältnisse werden in Betracht gezogen. Das einzige grundlegende Verhältnis ist aber das der Quadratdiagonale zur Seite („diametri ad costam"), aus dem die anderen durch Bildung der Differenz und rationale Teilung der Strecken hervorgehen. Das 5. Kapitel dieses ersten Teiles beginnt uns zu interessieren. Es hat die Überschrift (Bl. (a. 5.)[r], Sp. 1):

> ℭ Capitulum quintum in quo agitur de diuisione corporis in partes proportionales qua proportione rationali quis voluerit.

Wir finden da zuerst den Satz (3. suppositio): Wenn irgendwelche Zahlen stetig in einem geometrischen Verhältnis stehen, so stehen die Differenzen der aufeinander folgenden Zahlen in demselben Verhältnis. Als Beispiel sind angegeben die Zahlen 8, 4, 2, wo, wie wir schreiben, $8:4=4:2=2$ ist, und 2 sei eben auch das Verhältnis von $(8-4):(4-2)$. Für den Beweis ist auf eine Stelle verwiesen, die ich nicht gleich finden konnte, aber auch nicht ernstlich suchte, da der Satz ja eine unmittelbare Folge des Satzes V:19 der *Elemente* Euklids ist. Die 4. suppositio beginnt so:

Si aliquod corpus diuidatur in infinitas partes: et deperdendo primam illarum perdit aliquam proportionem puta *a.* hoc est efficitur in *a.* proportione minus: et perdendo secundam post primam iterum efficitur in *a.* minus: et perdendo tertiam post secundam iterum efficitur in *a.* minus. et sic consequenter ille partes sunt omnes partes proportionales illius corporis proportione *a.*

Wenn irgendein Körper in unendlich viele Teile geteilt wird und wenn er, sobald man den ersten der Teile von ihm wegnimmt, irgendein Verhältnis, z. B. *a*, verliert, d. h. in diesem Verhältnis *a* kleiner wird, und wenn er, sobald man den zweiten Teil wegnimmt, wieder im Verhältnis *a* kleiner wird, und bei Wegnahme des dritten Teiles auf dieselbe Weise usf., so sind jene Teile des Körpers alle „partes proportionales" nach dem Verhältnis *a*.

Wenn ich als Körper eine Strecke AB zugrunde lege, so ist also angenommen, daß AB in den Punkten P_1, P_2, P_3, etc. (vgl. Fig. 1) so geteilt ist, daß

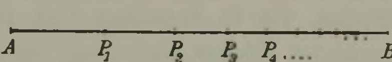


Fig. 1.

$$AB:P_1B=a,\quad P_1B:P_2B=a,\ldots P_iB:P_{i+1}B=a,\ldots \text{ in inf.},$$

und es ist behauptet, daß dann die Teilstrecken

$$AP_1,\quad P_1P_2,\quad P_2P_3,\ldots P_iP_{i+1},\ldots \text{ in inf.}$$

eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $\frac{1}{a}$ bilden. Der Beweis ist bei Thomas natürlich in scholastischer Form geführt und nimmt eine ganze Spalte ein. Er stützt sich auf die vorhergehende, oben zitierte suppositio, aus der der Satz für uns ja ohne weiteres hervorgeht. Der Begriff der Teilung in „partes proportionales“ war offenbar gang und gäbe, da er nicht weiter erläutert ist.

Auf der Rückseite des Blattes erscheint dann sofort die 1. conclusio, d. i. die Umkehrung des bewiesenen Satzes, nämlich: Wenn ein Körper [in der angegebenen Weise] nach irgendeinem Verhältnis geteilt wird, so steht der ganze Körper zu der Summe („aggregatum“) aller auf den ersten folgenden Teile in demselben Verhältnis. Thomas wußte also, modern ausgedrückt, wenn

$$AP_1 : P_1P_2 = P_1P_2 : P_2P_3 = \ldots = P_iP_{i+1} : P_{i+1}P_{i+2} = \ldots = a$$

gemacht und für den Augenblick $AB = 1$ gesetzt wird, daß dann $AP_1 = 1 - \frac{1}{a}$ ist.

Der Rest des 5. Kapitels dient auch nur dazu, diese Tatsache für die verschiedenen Arten der Verhältnisse unter Angabe spezieller Zahlenwerte näher auseinanderzusetzen, und im nächsten Kapitel wird noch erläutert, daß der Satz für die irrationalen Verhältnisse der angegebenen Art in derselben Weise gilt.

4. Reihen der Form $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$ in inf.[1]) Die „proportiones“ umfassen im ganzen 53 Seiten.[2]) Dann beginnt erst der eigentliche „liber de triplici motu“, der aus vier „tractatus“ besteht. Der erste „tractatus“ handelt „de motu quo ad causam“, der zweite „de velocitate et tarditate motus penes effectum, exordiendo primo a motu locali tanquam a priori“, der dritte „de motu rarefactionis et condensationis“ und der vierte „de motu alterationis“. Der zweite also bezieht sich auf die eigentliche Bewegung (den „motus localis“), und in ihm finden wir die Anwendung des mitgeteilten Satzes auf die Bewegungslehre.

Ich erwähne hier nur ganz flüchtig, daß der Satz: Die Wegstrecke, die ein Körper bei gleichförmig beschleunigter Bewegung („motus uniformiter difformis“) in einer gewissen Zeit zurücklegt, ist gleich der Wegstrecke, die in derselben Zeit ein gleichförmig („uniformiter“) sich bewegender Körper zurücklegt, dessen Geschwindigkeit gleich ist der halben Summe aus Anfangs- und Endgeschwindigkeit des ersten Körpers, daß dieser Satz, den man bis vor kurzem für eine „Entdeckung“ Galileis[3])

1) x soll hier und im folgenden immer < 1 und positiv angenommen werden.

2) Es ist eine erst noch zu leistende Arbeit, die zahlreichen scholastischen Traktate über die Lehre von den Verhältnissen vergleichend zu untersuchen.

3) Diese Legende hat am gründlichsten Duhem in dem eingangs zitierten Bande zerstört. Unabhängig davon hatte ich den Satz bei einem Kommentator des Oxforder Scholastikers Heytesbury (lat. Hentisberus; lebte um 1330) gefunden, den Duhem

hielt, von Thomas natürlich in allen Varianten abgehandelt wird. Diese Dinge, wie alles folgende, stehen in dem 3. Kapitel des zweiten „tractatus“, dessen Überschrift lautet (Bl. o. 3.v, Sp. 2):

> ℭ Capitulum tertium in quo ostenditur modus cognoscendi siue commensurandi motum uniformiter difformem et difformiter difformem quo ad tempus quo ad velocitatem et tarditatem in omni specie. etc.

So einfache Verhältnisse, wie sie bei der gleichförmigen Bewegung vorliegen, genügten aber den alles zergliedernden Scholastikern nicht. Sie teilten, wozu Thomas auf Bl. (p. 4.)v, Sp. 2 systematisch übergeht, die dem Bewegungsvorgang zugrunde liegende Zeit in „partes proportionales“, legten den einzelnen Zeitabschnitten gesetzmäßig fortschreitende verschiedene Geschwindigkeiten bei und suchten die zurückgelegte Wegstrecke zu berechnen. Es handelt sich dabei immer um dasselbe wie bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung, nämlich eine Geschwindigkeit zu finden, mit welcher ein gleichförmig sich bewegender Körper in der nämlichen Zeit dieselbe Wegstrecke zurücklegen würde. Zuvor wird aber des langen und breiten die Frage hin und her gewendet, ob es denn eine solche — wir würden sagen mittlere — Geschwindigkeit für jede Bewegung gebe. Nachdem Thomas allerlei Gegenargumente rein formaler Art beigebracht hat, die zeigen wollen, daß dies nicht der Fall sein könne, sagt er schließlich (Bl. (o. 6.)r, Sp. 2):

> In oppositum tamen est vniuersalis opinio communiter philosophantium que in hac parte multum vigoris ac roboris habet Preterea per quemlibet talem motum difformem in totali tempore adequate pertransitur aliquod spacium adequate: et tale spacium in tali tempore ab aliqua velocitate uniformi natum est pertransiri: igitur illa velocitas uniformis est tanta quanta est velocitas illius motus uniformis[1]) quo illud spacium in eodem tempore pertransitur adequate.

Die eigentliche Schwierigkeit, die darin läge, daß die erhaltene unendliche Reihe nicht konvergiert, übersieht Thomas nicht ganz. Das kommt später. Das erste und grundlegende dieser Beispiele ist nun das der 2. conclusio[2]) (Bl. (p. 4.)v, Sp. 2): Es sei ein gewisser Zeitraum in „partes proportionales“ geteilt nach irgendeinem Verhältnis, und im ersten Zeitabschnitt habe ein Körper („mobile“) eine gewisse Geschwindigkeit, im zweiten Zeitabschnitt die doppelte, im dritten die dreifache usw. durch

---

ebenfalls anführt (s. meinen Artikel in Zeitschr. für mathem. Unterr. 45, 1914, S. 209/28).

1) Das Original hat „difformis“. Das ist wohl ein Druckfehler.

2) In der 1. conclusio wird nur auf den „fundamentalen“ Satz über die Teilung in „partes proportionales“ hingewiesen, den wir soeben wiedergegeben haben.

alle ganzen Zahlen hindurch, so wird behauptet, daß die mittlere Geschwindigkeit der Bewegung („tota velocitas totius temporis") sich zur Geschwindigkeit im ersten Zeitabschnitt verhalte wie der ganze Zeitraum zum ersten Zeitabschnitt. In der 4. conclusio (Bl. q. 1.r, Sp. 2) wird dann das dahin erweitert, daß die in der ganzen Zeit zurückgelegte Wegstrecke zur Wegstrecke des ersten Abschnitts im quadrierten Verhältnis („in proportione duplicata") der ganzen Zeit und des ersten Zeitabschnitts stehe. Das wird durch Zusammensetzung der Verhältnisse bewiesen. Thomas gibt auch gleich ein Beispiel. Das gegebene Verhältnis sei $\frac{3}{2}$, so ist das Verhältnis der Zeiten 3, das der Geschwindigkeiten also auch 3, das der Wege 9. Allgemein können wir sagen: Ist die Zeit 1 nach dem Verhältnis $g\ (>1)$ geteilt, so ist der erste Zeitabschnitt $1-\frac{1}{g}$. War die anfängliche Geschwindigkeit c, so ist die mittlere Geschwindigkeit $c:\left(1-\frac{1}{g}\right)$, welcher Ausdruck zugleich den Gesamtweg darstellt. Der Weg im ersten Zeitabschnitt ist aber $c\cdot\left(1-\frac{1}{g}\right)$, das Verhältnis der Wege also $1:\left(1-\frac{1}{g}\right)^2$. Im seinem allgemeinen Beweise benutzt Thomas wirklich den Buchstaben g für das gegebene Verhältnis und f für unser $1:\left(1-\frac{1}{g}\right)$, dann ergibt sich bei ihm die „duplex proportio f" für die Wegstrecken. Wie f aus g berechnet wird, ist ihm bekannt; er kann es nur nicht allgemein ausdrücken.

Nun dieser Beweis! Bei Thomas ist er ganz in Worten geführt. Er wird aber sofort viel leichter verständlich, wenn man ihm die graphische Darstellung unterlegt, die Oresme in dem zitierten Werk systematisch auseinandersetzte, vielleicht sogar mit diesem Werk einführte. Nun findet sich bei Thomas allerdings keine Andeutung dieser Darstellung und er scheint sie wirklich haben vermeiden wollen. Es gab nämlich offenbar schon damals so etwas wie eine „arithmetische Schule" (s. unten S. 167). Daß Thomas die geometrische Versinnlichung kannte, ist aber zweifellos, und es erscheint mir bis auf weiteres fraglich, ob ohne eine solche die Scholastiker auf eine abstrakte Darstellung dieser Dinge überhaupt hätten kommen können. Ich will jedenfalls hier den Gedankengang des Thomas mit der Darstellung Oresmes verbinden. Oresme errichtet eine der Geschwindigkeit proportionale Strecke jeweils als Senkrechte in einem Punkte der den Zeitraum vorstellenden Strecke und erhält dann als Maß des zurückgelegten Weges die Fläche zwischen der Grundstrecke, den beiden begrenzenden Senkrechten und der oberen Grenzlinie, die eine Parallele zur Grundstrecke im Falle der gleichförmigen, eine schiefe Gerade im Falle der gleichförmig beschleunigten Bewegung ist. Im Falle $g=\frac{3}{2}$ hätten wir also bei der in Frage stehenden Bewegung die in Fig. 2 dargestellte Summe von immer schmäler und immer höher werdenden Rechtecken zu bilden, um den Gesamtweg zu erhalten. Diese Summe läßt sich aber sofort durch eine andere Summe von Rechtecken ersetzen, die alle die Höhe c haben und deren Grundlinien eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $\frac{1}{g}$ bilden (nämlich $1, \frac{1}{g}, \frac{1}{g^2}, \frac{1}{g^3}$ usw.). Daß aber die Summe dieser Reihe f ist (oder, wie Thomas sagt, zum ersten Glied das Verhältnis f hat), weiß er.[1]) Die mittlere Geschwindigkeit ist also cf, wie wir sagen. Der Gesamtweg ist auch cf, der Weg im ersten Zeitabschnitt $\frac{c}{f}$, das Verhältnis der Wege f^2. Thomas will ja nun allerdings nur die mittlere Geschwindigkeit erhalten; und er sagt also nicht, daß er die Wege addiert. Aber er läßt ebenfalls die Geschwindigkeiten sich über die Reststrecken ausdehnen, die sich ergeben, wenn man den ersten, dann den zweiten usw. Zeitabschnitt weggenommen hat, und er sagt dann, daß die erste Geschwindigkeit ausgedehnt über die ganze „Stunde“ „aliquid facit ad intensionem totius velocitatis“ und ebenso von den übrigen, die zweite „mache“ aber im Verhältnis g weniger als die erste, die dritte wieder im Verhältnis g weniger als die zweite usw., weil die Zeiten in diesem Verhältnis abnähmen. Schließlich sagt er: „igitur denominatio totius illius velocitatis componitur ex infinitis continuo se habentibus in proportione g“, woraus er sofort auf das Verhältnis f der ganzen Summe zum Anfangsglied schließt. Der Gedankengang ist also genau derselbe wie bei der nach Oresme gegebenen Darstellung, wo sofort die Wege summiert werden.

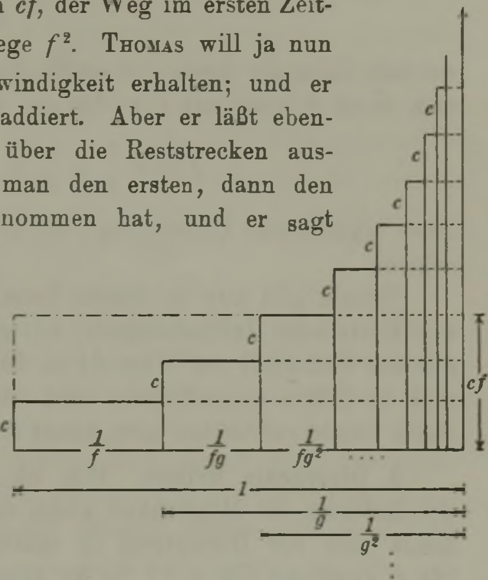


Fig. 2.

Schreibt man die Reihe der ursprünglichen Rechtecke der Fig. 2 algebraisch an, so lautet die Reihe mit ihrer Summe

$$(2)\qquad \frac{c}{f}\left(1+\frac{2}{g}+\frac{3}{g^2}+\frac{4}{g^3}+\ldots\right)=cf=\frac{c}{f}\cdot f^2,$$

und f^2 ist gleich $1:\left(1-\frac{1}{g}\right)^2$. Der algebraische Vorgang, der der geometrischen Umformung in die andere Rechteckreihe entspricht, wäre folgender, wobei ich mich auf die in der Klammer stehende Reihe beschränke. Man löst diese Reihe in die Doppelreihe auf:

1) Der Satz über die Summe der geometrischen Reihe, der ja schon Archimedes bekannt war, ist wohl irgendwo im „tractatus proportionum“ bewiesen. Es ist kein Hinweis gegeben.

$$
(3) \qquad \begin{aligned}
1 + \frac{1}{g} + \frac{1}{g^2} + \frac{1}{g^3} + \dots \\
+ \frac{1}{g} + \frac{1}{g^2} + \frac{1}{g^3} + \dots \\
+ \frac{1}{g^2} + \frac{1}{g^3} + \dots \\
+ \frac{1}{g^3} + \dots,
\end{aligned}
$$

wo jede Zeile die Reihe der ersten Zeile als Faktor enthält. Bezeichnet man deren Summe mit f, so ist also die ganze Doppelreihe gleich

$$f\left(1 + \frac{1}{g} + \frac{1}{g^2} + \frac{1}{g^3} + \dots\right) = f^2.$$

Diese algebraische Umformung[1]) ist ja auch leicht aus der Fig. 2 zu entnehmen.

THOMAS gibt nun zu diesem Satze in der 5. conclusio und einer Reihe von Korrelarien Zahlenbeispiele; mit ganzen Zahlen geht er bis $g = 8$, so daß das Verhältnis der Wege 64 zu 49 wird, welche Werte ausnahmsweise auch in Ziffern angeschrieben sind. Am Schlusse sagt er, wer die 4. conclusio richtig verstanden habe, könne noch unzählige Korrelarien beibringen.

5. Divergente Reihen. Wie ich oben schon andeutete, entging den Scholastikern die Möglichkeit nicht, daß die mittlere Geschwindigkeit und damit auch der Gesamtweg in endlicher Zeit unendlich werden könnte. Die 6. conclusio (Bl. q. 2.r, Sp. 2) bringt einen solchen Fall. Es werde wieder die Zeit in „partes proportionales" geteilt, die Geschwindigkeit wachse aber so, daß sie in irgendeinem Abschnitt zu der des vorhergehenden Abschnittes ein Verhältnis hat, das gleich dem Teilungsverhältnis $g\,(> 1)$ oder noch größer als dieses sei, dann ist die mittlere Geschwindigkeit unendlich und der durchlaufene Weg aus demselben Grunde unendlich, sagt THOMAS. Der Grund ist ja sehr einfach. Denn wenn die Geschwindigkeit in geometrischer Reihe mit dem Quotienten g wächst, während die zugehörigen Zeitabschnitte in geometrischer Reihe mit dem Quotienten $\frac{1}{g}$ abnehmen, so entsteht für die Gesamtstrecke eine Reihe von unendlich vielen unter sich gleichen Gliedern. Ist aber der Quotient der Geschwindigkeitsreihe gar noch größer als der reziproke Wert des Quotienten der Zeitreihe, so erhält man für die Wegstrecke eine Summe von unendlich vielen steigenden Gliedern. Das ist auch der Gedankengang bei THOMAS.

---

1) Diese Umformung wird noch heute benützt (s. z. B. E. CESÀRO, *Algebr. Analysis* etc., Leipzig 1904, S. 174). Am einfachsten erhält man ja die Summenformel für $1 + 2x + 3x^2 + \dots$, wenn man diese Reihe als Differentialquotienten der Reihe $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ auffaßt.

6. Reihen von der Form $1 + \lambda x + \lambda^2 x^2 + \lambda^3 x^3 + \ldots$ in inf. für $1 < \lambda < \frac{1}{x}$ und für $\lambda < 1$. Der moderne Leser wird ja gleich sehen, daß die beiden unterschiedenen Fälle sich in den einen $\lambda x < 1$ zusammenfassen lassen und daß damit die Konvergenz der Reihe, die ja eine geometrische ist, schon entschieden ist. Für THOMAS sind es aber zwei Fälle, da im einen die Geschwindigkeiten steigen, im andern abnehmen. Es sei also zunächst ein Zeitraum wieder in Proportionalteile geteilt nach dem Verhältnis $g\,(> 1)$, die Geschwindigkeiten in den einzelnen Abschnitten sollen in geometrischer Reihe steigen, deren Quotient $f < g$ sei, und es sei $\frac{g}{f} = h$ („excedat proportio g. proportionem f. mediante proportione h."), dann verhält sich, so sagt THOMAS in der 7. conclusio, der Gesamtweg zum Weg im ersten Zeitabschnitt wie etwas nach dem Verhältnis h in „partes proportionales" Geteiltes zu seinem ersten Teil, also in unserer Ausdrucksweise wie $1 : \left(1 - \frac{1}{h}\right)$. Der Beweis folgt ja einfach aus der Zusammensetzung der Verhältnisse der Zeitabschnitte und der zugehörigen Geschwindigkeiten. Die Zahlenbeispiele können wir hier füglich übergehen.

Der zweite Fall wird in der 8. conclusio betrachtet. Die Zeitstrecke sei wie immer nach dem Verhältnis $g\,(> 1)$ geteilt, und die Geschwindigkeiten sollen abnehmen in geometrischer Reihe nach dem Verhältnis $f\,(> 1)$, dann fallen natürlich die Wegstrecken stetig in dem zusammengesetzten Verhältnis $f \cdot g = h$. Und die Summe verhält sich dann zum ersten Glied wie $1 : \left(1 - \frac{1}{h}\right)$. Ich will aber doch einmal hier die Gelegenheit ergreifen und mitteilen, in welcher Form das letztere von THOMAS immer wieder gegeben wird. Er sagt (Bl. q. 3.r, Sp. 2):

> ergo totale spacium pertransitum in tota hora componitur ex infinitis continuo se habentibus in proportione h. igitur totale spacium se habet ad primum illorum spaciorum quod est pertransitum in prima parte proportionali in proportione in qua se habet aliquod totum diuisum per partes proportionales proportione h. ad primam eius partem quod fuit probandum.

Der Verfasser gibt natürlich noch ein paar Zahlenbeispiele, die jedesmal ebenso weitläufig ausgeführt werden wie der allgemeine Satz mit seiner Erläuterung und seinem Beweis.

7. Reihen von der Form $1 + x + \lambda x^2 + \mu x^3 + \lambda^2 x^4 + \mu^2 x^4 + \ldots$ In der 9. conclusio macht THOMAS die Voraussetzung, daß die Geschwindigkeiten in den ungeraden und geraden Zeitabschnitten je für sich in geometrischer Reihe wachsen (oder auch abnehmen), und er gibt die Wegsummen zunächst getrennt an, indem er ganz richtig die Zeitabschnitte, wenn die Zeit im Verhältnis g wie oben immer geteilt ist, im Verhältnis g^2

als abnehmend voraussetzt und hinzufügt, daß der Gesamtweg für die geraden oder ungeraden Abschnitte unendlich wird, wenn die Geschwindigkeiten in einem Verhältnis wachsen, das größer als g^2 ist. In den Beispielen setzt er dann auch eine Beziehung zwischen den Anfangsgeschwindigkeiten im ersten ungeraden und ersten geraden Zeitabschnitt fest, so daß er den Gesamtweg angeben kann. Ich gebe hier zum ersten correlarium eine Figur (Fig. 3). Die Zeit soll im Verhältnis 2 geteilt sein, das Verhältnis der steigenden Geschwindigkeiten in den ungeraden Zeitabschnitten ist ebenfalls 2, in den dazwischenliegenden geraden Zeitabschnitten soll die Geschwindigkeit jedesmal gleichmäßig von Stufe zu Stufe zunehmen. Das Verhältnis der mittleren Geschwindigkeiten in diesen geraden Zeitabschnitten ist dann auch 2, und der Weg im zweiten Abschnitt ist $\frac{3}{4}$ des Weges im ersten, der als Strecke von einem Fuß Länge angenommen wird („unum pedale"). Es ist dann leicht zu berechnen, daß der Gesamtweg

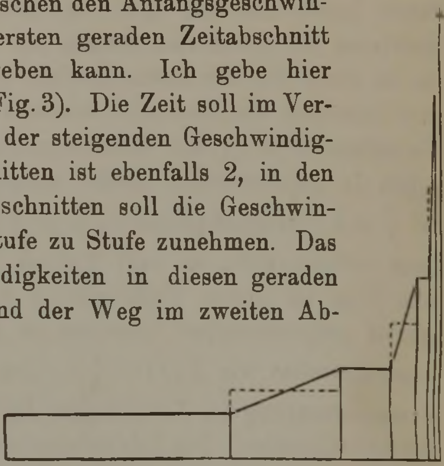


Fig. 3.

$3\frac{1}{2}$ Fuß beträgt. Im zweiten correlarium nimmt Thomas das Verhältnis der Zeitabschnitte zu 4, das der ungeraden Geschwindigkeiten zu 3, die geraden läßt er wachsen, wie in Fig. 3. Der Gesamtweg ergibt sich dann zu $\frac{24}{13}$ des Weges im ersten Zeitabschnitt. In einem dritten correlarium gibt er dann noch andere Beispiele, zum Teil als Fragen, bei denen z. B. das Verhältnis der beiden Anfangsgeschwindigkeiten gegeben ist und auch darauf hingewiesen wird, daß man, wenn ich es modern ausdrücke, Reihen von der Form

$$(4) \qquad 1 + x + x^2 + x^3 + \lambda x^4 + \mu x^5 + \nu x^6 + \varrho x^7 + \lambda x^8 + \dots$$

mit beliebigen Zwischenräumen betrachten könne (wobei den Gliedern x, x^2, x^3 noch beliebige Koeffizienten beizufügen wären, die sich bei den entsprechenden Gliedern immer wiederholen würden). Thomas findet aber selbst schließlich, daß sich weitere Beispiele jeder Leser selbst machen könne und sagt:

> Ideo calculator his dedaleis laberinthulis implicitus: verbisque multiplicibus multiformibusque proportionibus implicatus: inflate bucce garritum contineat.

8. Reihen von der Form $1 + \left(c + \frac{a}{b}\right)x + \left(c + \frac{a}{b\lambda}\right)x^2 + \left(c + \frac{a}{b\lambda^2}\right)x^3 + \dots$ Die 10. conclusio (Bl. (q. 4.)$^{\mathrm{v}}$, Sp. 1) beginnt Thomas sofort mit einem Beispiel, das ich wohl gleich in der Form schreiben darf:

$$(5) \qquad 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{2^3} + \dots$$

Ich setze dabei, wie in den Überschriften bisher immer, sowohl den ersten Zeitabschnitt wie die erste Geschwindigkeit gleich 1. Wenn THOMAS nicht lediglich das Verhältnis der Summe zum ersten Glied angibt, nimmt er gewöhnlich „2 pedalia" als Anfangsgeschwindigkeit, versteht aber darunter öfters, daß der Körper im ersten Zeitabschnitt wirklich 2 Fuß Weg zurücklege. Das ändert die ganze Reihe nur um einen Faktor, den ich im folgenden immer, ohne es eigens zu sagen, unterdrücke. Es sind dann in der Reihe (5) die Zeitabschnitte $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots$ und die bezüglichen Geschwindigkeiten $1, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{8}, \ldots$ THOMAS behandelt nun die Reihe (5) so, daß er von ihr die Reihe

(6) $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$$

abtrennt, so daß eine weitere geometrische Reihe

(7) $$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2^3} + \ldots$$

übrig bleibt. Die Gesamtsumme gibt er richtig zu $\frac{7}{3}$ an.

Ebenso behandelt er die Reihe

(8) $$1 + \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{11}{8} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{19}{16} \cdot \frac{1}{2^3} + \ldots,$$

deren Summe $\frac{5}{2}$, und die Reihe

(9) $$1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{13}{12} \cdot \frac{1}{2^3} + \ldots,$$

deren Summe $\frac{20}{9}$ ist. Daß er aber ganz gut das in der Überschrift ausgedrückte allgemeine Fortschreitungsgesetz erkennt, das er nur in Worten nicht angeben kann, zeigt sich im Schlußparagraphen, der beginnt:

> ℭ Innumera talia correlaria possunt inferri diuidendo horam aliis speciebus per proportiones: et faciendo excessus quibus alie partes excedunt primam in certa proportione continue se habere.

Und er konstruiert, um das zu bekräftigen, gleich noch zwei weitere Beispiele, die er aber nicht mehr ausführt, nämlich

(10) $$1 + 2\tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 2\tfrac{1}{6} \cdot \frac{1}{3^2} + 2\tfrac{1}{18} \cdot \frac{1}{3^3} + \ldots$$

und

(11) $$1 + 3\tfrac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} + 3\tfrac{1}{10} \cdot \frac{3^2}{5^2} + 3\tfrac{1}{20} \cdot \frac{3^3}{5^3} + \ldots$$

Es liegt ihm also nur daran, daß auch die Restreihe eine geometrische ist. Die kleine Schwierigkeit bei den Reihen (10) und (11), daß das erste Glied isoliert steht, hätte er sicher leicht überwunden.

9. Reihen von der Form $1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3}x^2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4}x^3 + \ldots$ Es soll, so beginnt Thomas die 11. conclusio (Bl. (q 5.)^r, Sp. 2), die Stunde wie bisher eingeteilt sein in beliebige „partes proportionales“, der Körper aber soll sich im zweiten Zeitabschnitt $\frac{3}{2}$ mal so schnell bewegen wie im ersten, im dritten Zeitabschnitt $\frac{4}{3}$ mal so schnell wie im zweiten, dann der Reihe nach $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$ usw. mal so schnell wie im vorhergehenden. Man könne dann freilich eine allgemeine Regel für den in der ganzen Stunde zurückgelegten Weg nicht angeben, aber nichtsdestoweniger diesen Weg in jedem einzelnen Falle bei beliebiger Teilung des Zeitraums bestimmen. In diesem Sinne gibt Thomas nur zwei Beispiele, und zwar die Reihen

$$1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2^3} + \ldots = 3 \tag{12}$$

und

$$1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{2} \cdot \frac{2^2}{3^2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{2^3}{3^3} + \ldots{}^{1)} = 6. \tag{13}$$

Schon durch die Art, wie ich diese Beispiele hier wiedergab, wollte ich andeuten, daß Thomas sehr wohl die Reduktion der ursprünglich in Produktform angenommenen Koeffizienten (bzw. Geschwindigkeiten) auf einfache Brüche erkannte. Er redet darüber gar nicht weiter. Die Art der Behandlung ist so, daß er die Reihe

$$1 + \frac{3}{2}x + \frac{4}{2}x^2 + \frac{5}{2}x^3 + \frac{6}{2}x^4 + \ldots \tag{14}$$

zerlegt in die Summe der beiden Reihen

$$\begin{aligned} &1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots \\ &\quad + \frac{1}{2}x + \frac{2}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{4}{2}x^4 + \ldots, \end{aligned} \tag{15}$$

deren zweite ja schon aus der 2. conclusio bekannt ist, hier aber für beide Beispiele wiederum ganz von vorn behandelt wird. Am Schlusse gibt er noch eine zweite Zerlegung an, nämlich

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \ldots \\ &+ \frac{1}{2} + \frac{2}{2}x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^4 + \ldots, \end{aligned} \tag{16}$$

die ja auf dieselben Reihengattungen führt.

---

1) Hier nimmt Thomas z. B. bei der Reihe (12) die Anfangsgeschwindigkeit zu 2 und den damit in der ganzen Stunde zurückgelegten Weg zu 4, bei der Reihe (13) dieselbe Anfangsgeschwindigkeit 2, den damit in der Stunde zurückgelegten Weg aber zu 3 an. Das sind natürlich nur Auffassungsverschiedenheiten, verursacht durch die mangelhafte Definition von „Geschwindigkeit“.

10. Reihen von der Form $1 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \ldots$ für $1 < \lambda_i \leqq i + 1$. In der 12. und letzten conclusio (Bl. (q. 5.)[v], Sp. 2) betrachtet Thomas Reihen von der Form $1 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \ldots$, wo die λ_i nach einem bestimmten Gesetz fortschreiten, aber einerseits immer > 1 sind, anderseits niemals größer werden als das zugehörige Glied aus der Reihe 2, 3, 4, 5, 6, ... Da Thomas die Summen der Reihen $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ und $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$ kennt, kann er demnach die Behauptung aufstellen, daß die Summe der von ihm betrachteten Reihen immer zwischen den Summen dieser beiden Reihen liegt. Er tut das zwar nicht allgemein, weil ihm dazu die Ausdrucksmittel fehlen, aber daß er die Kenntnis dieses allgemeinen Satzes besitzt, geht aus seinen Beispielen hervor.

Hier treten nun gleich zwei Reihen auf, die wir heute durch die Logarithmusfunktion zu summieren imstande sind, nämlich die Reihen

$$1 + \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \ldots = 2 + \ln 2 \tag{17}$$

und

$$1 + \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{2^2}{3^2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{2^3}{3^3} + \ldots = 3 + \ln \frac{3}{2}. \tag{18}$$

Thomas gibt für die erste an, daß ihre Summe zwischen 2 und 4, für die zweite, daß sie zwischen 3 und 9 liegt. Setzen wir allgemein

$$s = 1 + \frac{2}{1} x + \frac{3}{2} x^2 + \frac{4}{3} x^3 + \ldots, \tag{19}$$

so können wir ja schreiben

$$\begin{aligned} s &= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \\ & + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \ldots \\ &= \frac{1}{1-x} + \ln \frac{1}{x}.^{1)} \end{aligned} \tag{20}$$

Thomas wußte für jeden Wert von x, daß

$$\frac{1}{1-x} < s < \frac{1}{(1-x)^2}. \tag{21}$$

Daß hier dem Scholastiker logarithmische Reihen unterkamen, ist ja natürlich reiner Zufall. Ich benutze aber doch diese Gelegenheit, die Ausführungen des Verfassers über die Reihe (17) im Original wiederzugeben, um zu gleicher Zeit dem Leser eine deutlichere Vorstellung der scholastischen Behandlungsweise zu vermitteln, als dies durch die bisher mitgeteilten kurzen Proben geschehen konnte. Die 12. conclusio beginnt:

---

1) Vgl. die von G. Eneström gegebene Ausführung zu der Reihe (17) in diesem Bande der Biblioth. Mathem. S. 89.

Si sit aliquod tempus diuisum per partes proportionales proportione dupla et in prima parte proportionali mobile moueatur aliquanta velocitate: et in secunda in duplo velocius quam in prima: et in tertia in sexquialtero velocius quam in prima: et in quarta in sexquitertio velocius quam in prima. et sic consequenter procedendo per omnes species proportionis superparticularis[1]): spatium pertransitum in totali tempore est maius quam duplum ad spatium pertransitum in prima parte proportionali et minus quam quadruplum. Probatur prima pars quia diuisa sic hora per partes proportionales proportione dupla: et mobili moto continuo vniformiter illo motu quo mouetur in prima parte proportionali spacium pertransitum adequate in tota hora esset adequate duplum ad spacium pertransitum in prima parte proportionali vt patet ex se: sed modo mobile velocius mouetur quam tunc cum in qualibet parte proportionali dempta prima modo velocius mouetur quam tunc et in prima eque velociter sicut tunc: igitur pertransit plus quam duplum spacium ad spacium pertransitum in prima parte proportionali. Probatur secunda pars: quia si illud mobile mouetur in prima parte proportionali aliquantum velociter: et in secunda in duplo: et in tertia in triplo velocius quam in prima: et sic consequenter vt ponitur in casu quarte conclusionis: tunc adequate pertransiret quadruplum spacium ad spacium pertransitum in prima parte proportionali: vt patet ex quarta conclusione: sed modo mouetur in totali hora tardius quam tunc per omnes partes proportionales dempta prima et secunda. et in prima et secunda equaliter sicut tunc: igitur modo pertransit minus spacium quam tunc in totali hora: et tunc quadruplum pertransit ad spacium pertransitum in prima parte proportionali: igitur modo minus quam quadruplum quod fuit probandum. Et sic patet conclusio.

Im 1. correlarium wird mit genau derselben Ausführlichkeit die Reihe (18) behandelt. Das 2. correlarium bringt das Beispiel

---

1) Die „proportio superparticularis" bedeutet ein Verhältnis (>1), bei dem das Vorderglied das Hinterglied um einen aliquoten Teil des letzteren übertrifft, im besonderen hier die Zahlen der Form $a + \frac{1}{n}$, wie $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$ usw., die der Reihe nach „proportio sexquialtera, sexquitertia, sexquiquarta etc." heißen. Im Gegensatz dazu steht die „proportio suprapartiens"; z. B. ist die „proportio suprabipartiens tertias" gleich $\frac{5}{3}$. Betragen die Ganzen mehr als 1, so wird das in der Weise ausgedrückt, wie es die folgenden Spezialfälle zeigen. Es ist z. B. $2\frac{1}{4}$ die „proportio dupla sexquiquarta", $3\frac{2}{3}$ die „proportio tripla suprabipartiens tertias", $\frac{64}{49}$ (s. oben S. 158) ist die „proportio superquindecimpartiens quadragesimasnonas". Von der Schwerfälligkeit des Textes kann sich der Leser hiernach wohl einen kleinen Begriff machen.

$$(22)\quad 6\tfrac{1}{4}\,[1] > 1 + \frac{7}{4}\cdot\frac{3}{5} + \frac{7}{4}\cdot\frac{11}{8}\cdot\frac{3^2}{5^2} + \frac{7}{4}\cdot\frac{11}{8}\cdot\frac{19}{16}\cdot\frac{3^3}{5^3} + \dots > 2\tfrac{1}{2},$$

das 3. correlarium das Beispiel

$$(23)\quad 2\tfrac{1}{4} > 1 + \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{7}{5}\cdot\frac{1}{3^2} + \frac{9}{7}\cdot\frac{1}{3^3} + \dots > \frac{3}{2},$$

endlich das 4. correlarium die Reihe

$$(24)\quad 1\tfrac{7}{9} > 1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{4^2} + \frac{7}{4}\cdot\frac{1}{4^3} + \frac{7}{5}\cdot\frac{1}{4^4} + \frac{11}{8}\cdot\frac{1}{4^5} + \dots > \frac{4}{3},$$

wobei die Koeffizienten der ungeraden Glieder immer Zahlen der Form $1 + \frac{2}{n}$, die der geraden Glieder Zahlen der Form $1 + \frac{3}{n}$ sein sollen. Nur für das zweite Glied ist offenbar eine Ausnahme gemacht, damit dieser Koeffizient nicht > 2 wird. Für diese letzteren drei Reihen gibt Thomas nur die Resultate an, indem er sagt, daß diese so wie bei dem 1. correlarium bewiesen würden.

In betreff der letzten drei Reihen hat mir Herr G. Eneström die folgenden Bemerkungen zur Verfügung gestellt.

Das allgemeine Glied der Reihe (22) ist offenbar

$$\frac{(2^2+3)(2^3+3)(2^4+3)\cdots(2^n+3)}{2^2\cdot\ \ 2^3\cdot\ \ 2^4\cdot\ \cdots\ 2^n}\cdot\frac{3^{n-1}}{5^{n-1}},$$

und der Koeffizient hat also einen Faktor $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}(n+2)(n-1)}$. Man dürfte hieraus mit recht großer Wahrscheinlichkeit folgern können, daß die Summe der Reihe nicht einmal durch Zuhilfenahme der Jacobischen Thetafunktionen ermittelt werden kann. Um die Reihen (23) und (24) zu summieren, genügt es, die Formeln

$$a + aq + aq^2 + \dots = \frac{a}{1-q},$$
$$2\left(h + \frac{h^3}{3} + \frac{h^5}{5} + \dots\right) = \ln\left(\frac{1+h}{1-h}\right)$$

zu benutzen. Für die Reihe (23) ist $h = \frac{1}{\sqrt{3}}$, für die Reihe (24) ist $h = \frac{1}{4}$. Nachdem man im ersten Falle die logarithmische Reihe summiert hat, ist nur eine geometrische Reihe übrig; im zweiten Falle hat man drei Reihen dieser Art zu summieren. Als Resultat bekommt man

für die Reihe (23)

$$\sqrt{3}\ln(\sqrt{3}+2) - \frac{1}{2} = 1{\cdot}78,$$

für die Reihe (24)

$$4\ln\left(\frac{5}{3}\right) - 2 + \frac{4}{3} + \frac{12}{31} - \frac{1}{4} = 1{\cdot}51.$$

---

1) Im Original steht (wohl nur aus Versehen) „sexdecuplum sexquiquartum".

Für Thomas ist es eine sehr peinliche Sache, daß er den Weg des Körpers bei Reihen der hier gekennzeichneten Art nicht genau bestimmen kann. Denn es scheint bei den damals im Schwange befindlichen dialektischen Diskussionen öfters vorgekommen zu sein, daß ein bösartiger Disputant („illiberalis atque acerrimus calculator[1])“) den Gegner durch Stellung solcher tückischer Beispiele in die größte Verlegenheit brachte („grandia verba trutinando inflata bucca: supercilio eleuato: rugataque fronte: atque ore tragico ... multisque clamoribus respondentem vulgo superatum atque deuictum nitetur ostendere“).

Es ist interessant, daß Thomas die Unmöglichkeit nicht in der Sache selbst sieht, sondern nur für eine unangenehme Folge der Beschränktheit des menschlichen Verstandes hält („impossibile est naturaliter intellectum finite capacitatis talem velocitatem sic difformem ad vniformitatem redigere“). Er glaubt aber, daß die Seelen später das alles erkennen werden („Credo tamen animas separatas a corpore et intelligentias in imperspecto tempore omnia ista cognoscere“). Trotz dieser Resignation gibt er dem Disputanten doch den Rat, wenn eine solche Frage „in publica et celebri litteraria palestra“ auftrete, zunächst nach dem Vorbild von Oresme („nicholaus horen“)[2]) zu behaupten, daß eine Irrationalzahl herauskommen müsse („spacia pertransita irrationalia esse“). Das dürfte ja auch in der Mehrzahl der Fälle richtig sein. Da er es aber auch dann noch für möglich hält, daß der „calculator“ sich so beträgt, wie oben geschildert, gibt er dem Disputanten noch zwei rhetorische Kniffe an, durch die er sich gegebenenfalls aus der Schlinge ziehen möge.[3])

* * *

1) „Calculator“ war ein Gelehrter, der sich besonders mit der Untersuchung des „motus“ befaßte, wo natürlich immer, wenn auch meist einfache, Zahlenbeispiele benützt wurden. Im besonderen wurde jener Suiseth „Calculator“ genannt, der von allen späteren Scholastikern zitiert wird und den unser Autor auf dem Titelblatt nennt. Es sei angemerkt, daß in einer Handschrift der *Calculationes*, die sich in der Bibliothèque Nationale zu Paris befindet, der Verfasser Riccardus de Ghlymi Eshedi genannt wird; vgl. Duhem a. a. O. S. 418.

2) Hierzu gibt Thomas keinen Verweis. Er führt sonst von Oresme nur den *Tractatus proportionum* (gedruckt Venedig 1505) an, in welchem aber derartige Dinge gar nicht behandelt werden.

3) Vgl. darüber Duhem a. a O. S. 542/43. Die erste dieser „Cautelen“ besteht darin, die Forderung des Calculators lächerlich zu machen, u. a. dadurch, daß man Feder und Tintenfaß verlange, um das Verlangte zu berechnen („petaturque calamus et atramentarium vt specie multiplicationis ceterisque algorismi speciebus calculari valeat velocitatis intensio in casu per eum posito“). Jedenfalls ist kein Zweifel, daß die Pariser Scholastiker im Rechnen „auff der Federn“ (so drückten sich die im Anfang des 16. Jahrh. erschienenen deutschen Rechenbücher gern aus) gut zu Hause waren.

Mein Bericht über das 3. Kapitel des *Liber de triplici motu* von ALVARUS THOMAS ist zu Ende. Es scheint nicht, daß THOMAS auch noch an anderen Stellen seines Werkes unendliche Reihen benutzt. Wenn ich aber meinem Aufsatz einen allgemeineren Titel gegeben habe, so kann ich dies damit begründen, daß ja die Hauptteile der Lehre von THOMAS schon bei ORESME vorkommen, der selbst wahrscheinlich ebensowenig der Erfinder ist. ORESME kennt schon die Teilung einer Strecke nach einer geometrischen Reihe von beliebigem Verhältnis[1]) und er wendet die Summen der Reihen $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ und $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$ an. Auch eine Bewegung von der durch Fig. 3 dargestellten Art betrachtet er. Die späteren Scholastiker haben ORESMES Beispiele nicht übersehen Im 2. Kapitel der *Calculationes* jenes sog. SUISETH, der nur wenig jünger sein kann als ORESME, und in einem anonymen Traktat *A est unum calidum*, der vor 1390 geschrieben sein muß, finden sie sich wieder.[2]) Aber die Oxforder Schule, der diese beiden Werke entstammen, verschmähte schon, wie später ALVARUS THOMAS, die geometrische Versinnlichung. Dasselbe tut der Florentiner Arzt und Philosoph BERNHARD TORNIUS oder TORNI(o) († 1500) in seiner Schrift *In capitulum de motu locali HENTISBERI quedam annotata*, wo er nur andere Verhältnisse als ORESME benutzt, nämlich 3 und $\frac{3}{2}$, nach denen die Zeitstrecke in „partes proportionales" geteilt wird.[3]) Ebensowenig benutzt eine graphische Darstellung der Genter Philosoph JOHANNES DULLAERT († 1513), der am Kollegium zu Montaigu lehrte und in seinen *Questiones in libros phisicorum ARISTOTELIS* (gedruckt Paris 1506) Beispiele nach ORESME formte, indem er als grundlegendes Verhältnis 4, 5 und 6 einführte.[4])

Bei all diesen Reihen bildeten die Koeffizienten entweder selbst eine geometrische Reihe (aber nur mit dem Quotienten $\frac{1}{2}$) oder die Reihe 1, 2, 3, 4, ... Wenn nicht weitere Vorgänger noch aufgefunden werden,

---

1) Aus DUHEM (a. a. O. S. 393, S. 531 und S. 540) muß man schließen, daß ORESME nur das Verhältnis 2 in Betracht zog. Das ist keineswegs der Fall. Ich sehe aus den von Herrn DUHEM gemachten, mir in freundlichster Weise zur Verfügung gestellten Auszügen aus der zitierten Handschrift, daß z. B. im 9. Kapitel des 3. Teiles das Teilungsverhältnis 4 zugrunde gelegt wird. Sicherlich hatte also schon ORESME den allgemeinen Begriff der Teilung in „partes proportionales".

2) Vgl. DUHEM, a. a. O. S. 479 und S. 476. Der Traktat *A est unum calidum* ist nur handschriftlich vorhanden. Die Druckausgaben der *Calculationes* (o. J.; 1488; 1498; 1520) sind bei DUHEM (a. a O. S. 415/16) näher beschrieben.

3) Vgl. DUHEM, a. a. O. S. 501. TORNIS Schrift wurde zuerst 1484 zu Pisa gedruckt (DUHEM S. 495), dann in die Kommentare zu dem *Tractatus GULIELMI HENTISBERI de sensu composito et diviso* (Venedig 1494, s. meinen Aufsatz in Biblioth Mathem. $\mathbf{3}_3$, 1912/13, S. 117/18) aufgenommen.

4) Vgl. DUHEM, a. a. O. S. 531 und S. 527, Fußnote 1.

wäre also Thomas die Kombinierung dieser beiden Reihenarten zu verschiedenartigen Beispielen und die erste systematische Darstellung der ganzen Lehre zuzuerkennen. Die Tatsache der Summierung der Reihe $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$ ist aber schon ein ganz neues Faktum im christlichen Mittelalter und die Thomassche Darstellung eine weitere bemerkenswerte Erscheinung auf dem Felde der Behandlung unendlicher Reihen vor der Erfindung der Differentialrechnung.[1]) Eine Betrachtung über die Konvergenz der summierten Reihen habe ich nicht finden können, wiewohl mindestens Reihen wie (22) schon geeignet gewesen wären, eine Bemerkung darüber zu veranlassen. Die vorkommenden divergenten Reihen sind sämtlich solche, bei denen die Divergenz selbstverständlich ist. Wir werden aber den Scharfsinn dieser Gelehrten auch in mathematischen Dingen nicht unterschätzen, wenn wir bedenken, wie außerordentlich dürftig ihre mathematischen Kenntnisse waren. Duhem fragt mit Recht, was man wohl von jenen Männern — und es waren deren nicht wenige, die das hier Auseinandergesetzte damals beherrschten — hätte erhoffen dürfen, wenn es ihnen vergönnt gewesen wäre, Archimedes zu lesen, ja man darf vielleicht hinzufügen, wenn sie auch nur von Euklid etwas mehr als die allerersten Bücher gekannt hätten.

1) Ich weise auf eine Arbeit von G. Eneström hin (Biblioth. Mathem. 12_3, 1911/12, S. 135—148), in welcher er zeigte, daß P. Mengoli in einem Buche *Novae quadraturae arithmeticae* (Bononiae 1650) lange vor Jakob Bernoulli die Divergenz der harmonischen Reihe bewies, mehrere andere Reihengattungen summierte und sich überhaupt allgemein mit Konvergenzfragen beschäftigte.

Berichtigung zu meinem Artikel: *Zwei Bemerkungen zu Stirlings Lineae tertii ordinis Neutonianae* dieses Bandes: S. 57 Z. 20 v. u. lies „ν-fachen Punkt“ statt „$(n - \nu)$-fachen Punkt“.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage[1]) von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik".

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen".
BM = Bibliotheca Mathematica.

Über frühere Bemerkungen siehe BM 14_3 (1913/14), S. 63—83.

1^3 : 437. Hier hat Herr Cantor in die dritte Auflage den Passus (Z. 15—19)

> Natürlich ist die hier gezeigte Konstruktion falsch, indem die Diagonale des Quadrates von rationaler Seitenlänge irrational ist; aber um immer nähere Werte zu erhalten, mußte man geometrisch von der falschen Hypothese einer rationalen Diagonale ausgehen

eingeschaltet. Vielleicht ist Herr Cantor durch eine Bemerkung von G. Loria dazu veranlaßt worden; dieser wies nämlich im Jahre 1902 (siehe *L'aritmetica dei Greci,* Modena 1902, S. 89) darauf hin, daß die fragliche Konstruktion von einer recht kühnen Hypothese ausgeht, nämlich daß ein Dreieck mit den Seiten 1, 1, 1, d. h. ein gleichseitiges Dreieck, als rechtwinklig betrachtet werden darf.

Unter solchen Umständen wäre wohl besser, den fraglichen Versuch, die Erfindung des Satzes von Theon geometrisch zu erklären, wegzulassen. Um die Namen, Seiten- und Diametralzahl verständlich zu machen, braucht man gar nicht, wie man aus dem oben zitierten Passus vermuten muß, falsche Konstruktionen zu benutzen (vgl. F. Hultsch, *Die Pythagoreischen Reihen der Seiten und Diagonalen von Quadraten;* Biblioth Mathem. $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 11).

G. Eneström.

---

2 : 109. Daß Montucla nicht am Ende des 18. Jahrhunderts „sein Meisterwerk der Geschichte der Mathematik schuf", hätte Herr Cantor bei der Bearbeitung der 2. Auflage des 2. Bandes der *Vorlesungen* aus dem 3. Bande lernen können, denn daselbst wird (Ausg. 1, Leipzig 1898, S. 481) richtig angegeben, daß die erste Auflage der *Histoire des mathématiques* schon 1758 erschien.

Da Herr Cantor (Z. 10—12) zuversichtlich behauptet, daß man dem Werke Montuclas „heute noch keinen weiteren Fehler vorwerfen kann, als daß es nicht mehr und nichts Anderes enthielt, als damals den Gelehrtesten bekannt war",

1) Dritte Auflage des 1. Bandes, zweite Auflage der 2. und 3. Bände.

erlaube ich mir hier einige Zeilen aus dem Urteile Nesselmanns (*Die Algebra der Griechen,* Berlin 1842, S. 18—19) wiederzugeben:

> Schade, daß dieses sonst so werthvolles Buch nicht immer genau genug, seine Nachrichten nicht immer zuverlässig sind. .... Montucla hat die Quellen flüchtig, zum Theil wohl auch gar nicht gelesen ... Einige Falsa werde auch ich ihm öfter (!) nachzuweisen haben, aber wir wollen darum nicht ein Werk verdammen, dessen Verfasser so viel geleistet hat wie Montucla.

Es scheint fast, als ob Herr Cantor wohl Unvollständigkeit aber nicht Unzuverlässigkeit und Oberflächlichkeit unter die Fehler einer mathematisch-historischen Arbeit rechnete.

In betreff der Angabe der Fußnote, daß der dritte Band der neuen Auflage der *Histoire des mathématiques* von Lalande bearbeitet wurde, verweise ich auf meine Bemerkung zu **3** : 501 (BM $\mathbf{13}_3$, 1912/13, S. 172).

G. Eneström.

---

2 : 110. Was Herr Cantor hier über den Cod. Basil. F. II. 33 sagt, ist seit einigen Jahren so veraltet, daß es sinnlos wäre, es noch einmal zum Abdruck zu bringen. Björnbo hat nämlich teils in der Bibliotheca Mathematica ($\mathbf{3}_3$, 1902, S 63—64), teils in den Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften (**26** : 3, 1911, S. 124—129) nähere Auskunft über die fragliche Handschrift gegeben, wodurch die drei Fragen des Herren Cantor (Z. 17—24):

> Ist die Übersetzung anderer in dem gleichen Sammelbande befindlicher Schriften erst im XIV. Jahrhunderte angefertigt? Sind sie bereits Abschriften der Ergebnisse früherer Untersuchungsarbeit? Sehen wir in ihnen ... den Fleiß emsiger Mönche, der Werthvolles aus alter wie aus für damals jüngerer Zeit aufzubewahren half?

beantwortet werden können. Die erste Frage ist mit Nein zu beantworten, denn die meisten Übersetzungen rühren von Gherardo Cremonese oder seiner Schule her, während keine einzige, soweit bekannt, im 14. Jahrhundert angefertigt wurde. Die zweite Frage kann teilweise mit Ja (besonders in betreff der übersetzten Schriften), teilweise mit Nein beantwortet werden, weil Cod. Basil. F. II. 33 auch Traktate von Dominicus de Clavasio, Levi ben Gerson, Nicole Oresme und anderen Mathematikern des 14. Jahrhunderts enthält. Die dritte Frage endlich kann wenigstens teilweise mit Ja beantwortet werden, weil unter den Abschreibern „Frater Nicolaus“ vorkommt. Da ein anderer Abschreiber nur „Engelbertus“ genannt wird, dürfte man hieraus folgern können, daß nicht alle Abschreiber Mönche waren.

G. Eneström.

---

2 : 111. Statt der Worte (Z. 17—19):

> fordert eine Untersuchung nur um so dringender heraus, als umbra, die Tangente der heutigen Trigonometrie, eine den Arabern besonders eigenthümliche Winkelfunction war

sollte ganz einfach „fordert eine Untersuchung heraus“ gesetzt werden. Schon vor der Drucklegung der 1. Hälfte des zweiten Bandes der zweiten Auflage der *Vorlesungen* war der Cantorsche Ausspruch veraltet, weil P. Tannery 1897 die Abhandlung des Meisters ROBERTUS ANGLICUS über den Quadranten herausgegeben hatte. In dieser Abhandlung kommen nämlich (vgl. z. B S. 59 des Sonderabdruckes der Arbeit P. TANNERYS *Le traité du quadrant de maître Robert Anglès,* Paris 1897) die Terme „umbra recta" und „umbra versa" vor, und die Tatsache hat Herr CANTOR selbst S. 96 angedeutet.

Nunmehr wäre es sinnlos, den CANTORschen Ausspruch unverändert abzudrucken, da es allgemein bekannt ist, daß die Terme „umbra recta" und „umbra versa" schon seit dem 12. Jahrhundert im christlichen Abendlande geläufig waren (vgl. z. B. M. CURTZE, BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 342; A. A. BJÖRNBO, *Festskrift til H. G. Zeuthen,* Köbenhavn 1909, S. 10). G. ENESTRÖM.

---

2 : 112. Der ganze Passus, der am Ende der Seite 111 mit den Worten „Englische Gelehrte" beginnt und Seite 112 (Z. 9) mit den Worten „ein weiterer Anonymus mit einer Schrift: De tribus notis" endet, ist nunmehr längst so veraltet, daß es sinnlos wäre, denselben noch einmal abzudrucken. Als Beleg für diese Bemerkung sei beispielsweise auf die *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* **1** (Leipzig 1900) von A. VON BRAUNMÜHL und auf die Abhandlung M. CURTZES *Urkunden zur Geschichte der Trigonometrie im christlichen Mittelalter* (BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 321—416) hingewiesen. G. ENESTRÖM.

---

2 : 115. Es ist natürlich nicht richtig (Z. 20—23), daß BRADWARDIN den Satz: „Vollzieht man das Gleiche bei dem entstandenen Sternvielecke erster Ordnung, so entsteht ein Sternvieleck zweiter Ordnung, aus welchem immer durch das gleiche Verfahren ein Sternvieleck dritter Ordnung hervorgeht" bewiesen hat. BRADWARDIN weiß nämlich sehr gut, daß es zwei Sternvielecke zweiter Ordnung gibt, aus welchen kein Sternviereck dritter Ordnung hervorgeht, so daß „in der Regel" stets „immer" gesetzt werden soll. Ob hier ein einfacher Flüchtigkeitsfehler des Herrn CANTOR oder ein Mißverständnis der Worte BRADWARDINS: „et sic semper ultra usque in infinitum potest procedi", die einen ganz anderen Sinn haben, vorliegt, ist mir nicht bekannt. G. ENESTRÖM.

---

2 : 127. Z. 11—12 sollten die Worte: „welcher sich durch eine sonst nirgend wahrgenommene Erörterung auszeichnet" sowie das Wort „nämlich" gestrichen werden. In dem schon 1857 von B. BONCOMPAGNI herausgegebenen Traktate *Liber algorismi de pratica arismetrice* kommt (S. 49 der BONCOMPAGNIschen Ausgabe) die Bemerkung:

> Licet cuiuslibet numeri partium denominatio possit fieri infinitis modis secundum infinitos numeros, placuit tamen Indis, denominationem suarum fractionum facere a sexaginta

vor, so daß die Sexagesimalrechnung gewissermaßen als ein Spezialfall betrachtet wird. Noch ausdrücklicher ist dieser Gesichtspunkt in den zwei Algorismusschriften, die in einigen Handschriften dem JORDANUS NEMORARIUS beigelegt werden, hervorgehoben, und daselbst findet sich für die allgemeinere Art von Brüchen ein besonderer Term, nämlich „Ordinaria consimilis partium sumptio", welchen Term ich durch „Regelmäßige Brüche" übersetzt habe (vgl. BM $\mathbf{14}_3$, 1913/14, S. 43, 45). In einigen Sätzen dieser zwei Schriften ist der fragliche

Gesichtspunkt so herrschend, daß nur der allgemeine Fall behandelt wird. Als Beleg drucke ich hier den Satz **16** der „Demonstratio de minutiis" nebst seinem Beweise ab (vgl. a. a. O. S. 50).

Consimilis denominationis minutie a numeris ab unitate proportionalibus denominantur respectu totius, quod si a numeris proportionalibus denominantur consimilis quoque denominationis erunt ad invicem. Sit integrum a, b pars a, c pars b, d pars c, et sint consimilis denominationis ad invicem que denominatio sit e. Numerus e in se ductus faciat f et item e ductus in f faciat g rursumque e ductus in g faciat h. Patet igitur per VIII. librum elementorum, quod $e\,f\,g$ sunt continue proportionales ab unitate. Cum ergo b denominetur ab e et c prout est pars b denominetur ab e, patet per antepremissam quod c est pars a denominata ab f. Item d est pars c denominata ab e, sicut c est pars a dicta ab f ergo per antepremissam d est pars a denominata a g. Si sit etiam pars d denominata ab e, ipsa erit pars a denominata a h. Per eandem converso modo sint $b\,c\,d$ partes a denominate respectu a totius a numeris continue proportionalibus ab unitate $e\,f\,g$. Ex VIII ergo Euclidis ex e in se fit f et ex e in f fit g et ex e in g fit h. Per coniunctum autem V^te^ propositionis de partibus que est proportio e ad f ea est c ad b, sed que est e ad f, ea est unitas ad e a descriptione dicti numeri, cum ex e in se fiat f. Ergo sicut est unitas ad e, ita est c ad b, ergo c est pars b denominata ab e. Item que est f ad g, ea est d ad c ex coniuncto V^te^ de partibus. Sed ex e in f fit g, ut ostensum est, ergo sicut d ad c, ita unitas ad e. Ergo d est pars c denominata ab e, et ita d et c et b sunt partes similis denominationis ad invicem relate. Constet ergo. Pro corollario sumi potest, quod partes sic sumpte a prima continue proportionalium ab unitate denominationum illas partes relatas ad totum denominantur relate ad invicem.

Der weitschweifige Beweis will ganz einfach feststellen, daß aus $b = \frac{a}{e}$, $c = \frac{b}{e}$, $d = \frac{c}{e}$ unmittelbar $c = \frac{a}{e^2}$, $d = \frac{a}{e^3}$ folgt und umgekehrt $c = \frac{b}{e}$, $d = \frac{c}{e}$ aus $b = \frac{a}{e}$, $c = \frac{a}{e^2}$, $d = \frac{a}{e^3}$. Hier wird nicht einmal angedeutet, daß e in der Regel gleich 60 ist.

G. Eneström.

---

2 : 206. Z. 14—19 kommt folgender Passus vor:

Mit eben diesem [Sacrobosco] trifft Beldomandi bei der Kubikwurzelausziehung zusammen, wenn auch die Bildung des Kubus nach der Formel

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a\,(a + b)\,b + b^3$$

bei Sacrobosco nicht so klar wie bei Beldomandi hervortritt, diesem Letzteren also mehr oder weniger anzugehören scheint.

Es ist mir indessen nicht klar, was die Worte „wenn auch ... hervortritt" bedeuten. Herr Cantor verweist in der Fußnote 5 auf S. 101 der bekannten Monographie Favaros, und daselbst wird bemerkt: „la regola additata è compresa nella formula $a^3 + 3a\,(a + b)\,b + b^3$." Hat Herr Cantor vielleicht seine Angabe aus dieser Bemerkung entnommen? Allein Favaro fügt selbst hinzu: „cioè, trovato a, si cerchi il b, che congiunto ad a e fatto il prodotto $3a(a+b)b$ ed aggiunto b^3, il tutto stia nelle tre seguenti figure e sia insieme il massimo aggregato simile che star vi possa. Lo stesso metodo, salvo lievi modificazioni si riscontra nell' *„algorismus“* di SACROBOSCO.“

Nun lautet die Stelle bei SACROBOSCO, die FAVARO meint (vgl. die Ausgabe von CURTZE, Kopenhagen 1897, S. 17—18):

> inveniendus est quidam digitus, qui ductus in se cubice deleat totum suprapositum respectu sui, vel quantum vicinius potest. Quo facto triplandus est ille digitus, . . . Deinde inveniendus est quidam digitus . . . qui cum subtriplo ductus in triplatum, postea sine subtriplo ductus in productum deleat totum suprapositum respectu triplati, deinde ductus in se cubice deleat totum suprapositum respectu sui, vel quantum vicinius potest.

Auch SACROBOSCO subtrahiert also von der gegebenen Zahl a^3 und zieht dann vom Reste erstens $3a(a+b)b$, zweitens b^3 ab. Dasselbe Verfahren lehrt auch GERNARDUS (siehe BM **13**$_3$, 1912/13, S. 324—325), mit dem unwesentlichen Unterschied, daß bei ihm statt $3a(a+b)b$ das Produkt $3ab(a+b)$ abgezogen wird. In beiden Fällen ist die Bildung des Kubus nach der Formel $(a+b)^3 = a^3 + 3a(a+b)b + b^3$ ebenso klar oder unklar wie bei PROSDOCIMO DE BELDOMANDI.

G. ENESTRÖM.

---

2 : 208. Der Grund, warum Herr CANTOR hier (Z. 24—35 nebst einer Figur) die von BELDOMANDI gegebene Lösung des Problems „ein Parallelogramm zu zeichnen, welches einem Dreiecke flächengleich ist“ mitteilt, ist mir unbekannt. Das Problem wird bekanntlich von EUKLIDES im 42. Satze des 1. Buches der *Elementa* erledigt, aber auf eine allgemeinere Weise, weil daselbst ein Winkel des Parallelogramms nach Belieben gewählt werden kann. Die Lösung BELDOMANDIS setzt voraus, daß ein Winkel des Parallelogramms einem Winkel des gegebenen Dreiecks gleich sei; für diesen Spezialfall wird die EUKLIDische Lösung genau dieselbe wie die des BELDOMANDI. Diese Lösung ist also für die Geschichte der Mathematik ohne Interesse.

G. ENESTRÖM.

---

2 : 217. Der Passus (Z. 19—22):

> und wir dürfen uns wiederholend jene Namensnennung so deuten, daß es schwer halte, des Glaubens sich zu erwehren, daß, wer so bestimmt sich ausdrückte wie jene Rechenmeister des XV. und XVI. Jahrhunderts, die Schrift APPULEIUS' selbst vor Augen hatte, von der freilich keine Handschrift mehr vorhanden ist

sollte gestrichen werden. Für einen geschulten Historiker der Mathematik ist natürlich kein Beweis für den Unwert der CANTORschen Bemerkung nötig, sonst könnte man ganz einfach auf die folgende Stelle (S. 777 Z. 28—31) der zweiten Auflage des zweiten Bandes der *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* von MORITZ CANTOR:

> PELL, der die Übersetzung [der *Teutschen Algebra* von G. H. RAHN] veranlaßt hatte, gab auch einige Zusätze, und unter diesen ist der wiederholte Abdruck der englischen Auflösung von $ax^2 + 1 = y^2$ zu finden

hinweisen. Wollte man hier die CANTORsche Schlußweise: „Wer so bestimmt sich ausdrückte, hatte wahrscheinlich die fragliche Schrift vor Augen“ benutzen, so würde man zu einem nachweislich falschen Resultate gelangen. In Wirklichkeit hat Herr Cantor, obgleich er nicht ausdrücklich irgendeine zweite Quelle zitiert, nie die englische Übersetzung des Rahnschen Buches vor Augen gehabt, und auf eine Frage, die G. Wertheim 1901 an ihn stellte, antwortete er offenherzig: „Ich habe Rahns Buch nie gesehen, weder Original noch Übersetzung. Was ich davon gesagt habe, stammt aus zweiten Quellen, hauptsächlich aus Hankel.“

Wie ich in einer früheren Bemerkung (BM $\mathbf{12}_3$, 1912/13, S. 245) betont habe, ist es gar nicht unwahrscheinlich, daß die Notiz über Appuleius auf Isidorus von Sevilla zurückgeht. Im übrigen verweise ich auf meine Bemerkungen in BM $\mathbf{7}_3$, 1906/07, S. 282, 289.

G. Eneström.

---

2 : 313. Die Angabe (Z. 22—23): „welches mit einem uns ähnlich schon bekannten Ausdrucke *a galea* heißt“, ist richtig, denn Herr Cantor meint offenbar die Notiz S. 304, daß in der Arithmetik von Treviso der Ausdruck „partire per batello“ vorkommt. Anderseits wäre es wenigstens ebenso angebracht, hervorzuheben, daß gerade der Ausdruck *a galea* schon vor Paciuolo benutzt wurde, beispielsweise bei Widman (siehe BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 263; vgl. auch S. Günther, *Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter,* Berlin 1887, S. 319 Z. 7–8).

G. Eneström.

---

2 : 316. Der Passus (Z. 7—11 v. u.):

> Unter den algebraischen Zeichen sind die Wurzelzeichen, nämlich ℞ mit nachfolgendem Wurzelexponenten, zu bemerken. Für ℞2 steht auch ℞ allein. Dann folgt ℞3 oder ℞cu, ℞4 oder ℞℞ und dann nur mit Zahlenzeiger weiter bis ℞30 für die dreißigste Wurzel

sollte gestrichen werden. In Wahrheit handelt es sich bei Paciuolo Bl. 67ᵛ nicht um Wurzelgrößen, sondern um die sukzessiven Potenzen x^0, x^1, x^2, . . ., x^{29} der unbekannten Größe. In dem Absatz, der mit den Worten „Ora tornando al proposito“ beginnt, sagt Paciuolo: „E quelle figure denanze poste: che comenzano .℞. prima .℞. secunda .℞. terza etc. fin .℞30ª. sonno denominationi de la pratica de Alghebra“. Nähere Auskunft über die Bedeutung der Zeichen gibt Paciuolo Bl 143ʳ—143ᵛ und hebt dabei z. B. hervor, daß „℞ 3ª. via ℞.4ª fa ℞.6“. Selbstverständlich bedeutet dies, daß $x^2 \cdot x^3 = x^5$, aber nicht daß $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x} = \sqrt[6]{x}$, was ja unsinnig wäre.

Auf diese Unrichtigkeit der Cantorschen Darstellung hat inzwischen J. Rey Pastor (*Los matemáticos españoles del siglo XVI*, Oviedo 1913, S. 36) aufmerksam gemacht.

G. Eneström

---

2 : 388. Hier hat Herr Cantor (Z. 13—16) in die zweite Auflage der *Vorlesungen* ohne jede Hinweisung den Zusatz:

> welche hergestellt werden konnten, indem man sich eines neuerdings seit 1894 wieder bekannt gewordenen Verfahrens das Heron von Alexandria bediente, von welchem überhaupt zahlreiche Spuren vermuthet werden

eingefügt. In betreff dieses Zusatzes ist folgendes zu bemerken.

A. Das Verfahren, das Herr Cantor andeutet, ist, wie der Sachkundige sofort ausfindig macht, das, worüber P. Tannery im Jahre 1894 berichtet hat (siehe *Sur un fragment inédit des métriques de Héron d'Alexandrie;* Bullet. d. sc. mathém **18**$_2$, 1894, S. 18—22. — *Un fragment des métriques de Héron;* Zeitschr. für Mathem. **39**, 1894, Hist. Abt. S. 13—15), und das Herr Cantor in der 1907 erschienenen dritten Auflage des 1. Bandes der *Vorlesungen* (S. 372), allerdings nicht ganz genau, nach der Angabe Herons (*Metrika,* Ausg. von H. Schöne S. 18 - 20) auseinandergesetzt hat. Wenn man $\sqrt{A}$ näherungsweise berechnen soll, nimmt Heron die A nächstliegende (συνεγγίζων) ganze Quadratzahl a^2 und setzt $\sqrt{A} \sim \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right)$; will man einen noch besseren Näherungswert bekommen, soll man nach Heron $\frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right)$ statt a anwenden und bekommt also den neuen Wert

$$\sqrt{A} \sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right) + \frac{A}{\frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right)}\right)$$

Die zwei Formeln können, wenn b die Differenz zwischen A und a^2 bedeutet, leicht auf die folgende Form zurückgeführt werden:

$$\sqrt{A} \sim a \pm \frac{b}{2a}; \quad \sqrt{A} \sim a + \frac{\pm 4a^2 b + b^2}{8a^3 \pm 4ab}.$$

Das obere Zeichen entspricht offenbar dem Fall $A > a^2$, das untere Zeichen dem Fall $A < a^2$.

Nun sind ja die meisten Leser der *Vorlesungen* keine Fachmänner auf dem mathematisch-historischen Gebiete, und wenn die Absicht des Herrn Cantor gewesen ist, seine Leser durch den Zusatz zu belehren, sollte er das Heronsche Verfahren wenigstens angedeutet haben.

B. Der Passus: „Von welchem überhaupt zahlreiche Spuren vermuthet werden" ist nicht gut redigiert. Meint man das Verfahren, das bei Heron tatsächlich vorkommt, so sind zahlreiche Fälle bekannt, in denen das Verfahren ausdrücklich gelehrt worden ist. Meint man dagegen, daß die Anwendung des Verfahrens in zahlreichen Fällen unmittelbar oder mittelbar auf Heron zurückgehen dürfte, ist es wenig angebracht, eine solche Vermutung, die weder bewiesen noch widerlegt werden kann, bei dem Berichte über Ortega zu erwähnen.

C. In Wahrheit ist die Behauptung des Zusatzes nicht ganz genau. Allerdings bekommt man den Wert $\sqrt{128} = 11\frac{16}{51}$, wenn man $128 = 144—16$ setzt und dann das Heronsche Verfahren zweimal anwendet. Allein nach Heron soll man die der Zahl 128 nächstliegende ganze Quadratzahl nehmen und diese ist nicht 144, sondern 121, so daß man nach Heron $128 = 121 + 7$ setzen soll. Man bekommt mithin erst $\sqrt{128} = \frac{1}{2}\left(11 + \frac{128}{11}\right) = 11\frac{7}{22}$ und weiter $\sqrt{128} = \frac{1}{2}\left(11\frac{7}{22} + \frac{128}{11\frac{7}{22}}\right) = 11\frac{3437}{10956}$ also jedenfalls nicht $11\frac{16}{51}$.

D. Wenn ein Fachmann die Herleitung der drei von Herrn Cantor angegebenen Wurzelwerte des Ortega auf das fragliche Verfahren zurückführen wollte, so würde er sicherlich nicht in erster Linie auf den Artikel von P. Tannery verweisen, sondern viel eher auf Bl. 45 der *Summa* des Paciuolo, aus welcher Arbeit Ortega sehr leicht direkt seine Kenntnis des Prinzips des

Verfahrens entnommen haben konnte. Bekanntlich entspricht das Verfahren Paciuolos den zwei Formeln

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b}{2a}, \quad \sqrt{A} = \sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b}{2a} - \frac{\left(a + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(a^2 + b\right)}{2\left(a + \frac{b}{2a}\right)}.$$

Aus der letzten Formel bekommt man sofort

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{4a^2b + b^2}{8a^3 + 4ab}.$$

G. Eneström.

---

3 : 79. Unter Bezugnahme auf die Randnote Leibnizens

> Hoc pulchrum, et hinc etiam elegantissimum compendium pro mea circuli dimensione ope transformationis facta. Et pro aliis transformationibus

bemerkt Herr Cantor: „Er [Leibniz] war also in unbefangenster Sicherheit über sein Anrecht an die oft erwähnte Reihe [d. h. die Reihe für $\frac{\pi}{4}$]“. Ich muß indessen gestehen, daß diese Bemerkung für mich durchaus sinnlos erscheint. Die Randnote bezieht sich auf die Entwicklung von $(d + e)^{-\frac{1}{3}}$ in eine unendliche Reihe mittels des Binomialtheorems, und meiner Ansicht nach will Leibniz sagen, daß man durch Benutzung des Binomialtheorems viel leichter dasselbe erzielt, was er durch direkte Division oder durch ein geometrisches Verfahren, das eigentlich eine versteckte Division ist, hergeleitet hatte.

Meint man mit „Anrecht an die Reihe für $\frac{\pi}{4}$“ das Anrecht an die erste Entdeckung der Reihe, so findet sich hierüber gar nichts in der Randnote, und übrigens mußte Leibniz auf Grund des Briefes von Oldenburg vom 12. April 1675 wissen, daß Gregory, der sich weit früher mit ähnlichen Reihen beschäftigt hatte, die Arcustangensreihe entdeckt hatte (vgl. Biblioth. Mathem. **10**$_3$, 1909/10, S. 70—71); er konnte also 1676 nicht sicher sein, daß man sein Anrecht an die erste Entdeckung der Reihe nicht in Abrede stellen würde. Meint Herr Cantor dagegen mit „Anrecht an die Reihe“ hier etwas anderes, sind die Worte „in unbefangenster Sicherheit“ sinnlos. Daß Leibniz sich selbst bewußt war, die Reihe durch seine Transformationsmethode hergeleitet zu haben, ist ohne weiteres klar, und um zu wissen, daß er sowohl vor wie nach 1676 das Anrecht, die Reihe selbständig entdeckt zu haben, aufrecht gehalten hat, braucht man sich nicht auf die Randnote zu berufen. G. Eneström.

---

3 : 91. Es wäre angebracht, die Worte (Z. 2—4):

> Die drei anderen Persönlichkeiten haben sich keine solchen Verdienste erworben, daß ihr Name besonders erhalten zu werden beanspruchen könnte

zu streichen. Es handelt sich um drei der Verteidiger der Disputationen *De seriebus infinitis* Jakob Bernoullis, und wenn Herr Cantor deren Verdienste um die Mathematik meint, so sind solche Verdienste, so viel ich weiß, überhaupt nicht vorhanden, so daß der Ausspruch eigentlich zu schwach ist. Meint Herr CANTOR dagegen, dem Wortlaut nach, ihre Verdienste im allgemeinen, sollten die Worte entschieden gestrichen werden, denn Herr CANTOR ist ganz gewiß nicht kompetent, diese Verdienste zu beurteilen, und übrigens gehört ein Urteil darüber kaum in eine Geschichte der Mathematik. In einer vollständigen schweizerischen Gelehrtengeschichte wird natürlich der später in Basel als Professor der Eloquenz tätige NIKOLAUS HARSCHER (1683—1742) immer einen Platz beanspruchen können wegen seiner Schriften medizinischen und literarischen Inhalts.

G. ENESTRÖM.

---

3 : 96. Z. 1 soll das Wort „erstmalig" gestrichen werden. Soweit jetzt bekannt, wurde die Reihe der reziproken Quadratzahlen erstmalig von P. MENGOLI in der 1650 erschienenen Schrift *Novae quadraturae arithmeticae* in Angriff genommen (siehe BM $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 135—148). Später, aber jedenfalls vor 1689, wurde die Aufmerksamkeit LEIBNIZens auf die Reihe gelenkt (vgl. a. a. O. S. 147).

G. ENESTRÖM.

---

3 : 205. Z. 31 sollte meines Erachtens „ausdrücklich beilegte" statt „beizulegen wagte" gesetzt und der folgende Passus: „Wir dürfen . . . wurde es beseitigt" gestrichen werden. Aus welchem Grunde NEWTON weder 1687 noch 1710 wagen sollte, dem Tangentenbriefe und der „Methodus fluxionum" große Bedeutung beizulegen, ist mir durchaus unverständlich, und für die Umänderung des Scholiums konnte NEWTON sehr wohl andere Gründe als den von Herrn CANTOR vermuteten gehabt haben. Das ursprüngliche Scholium konstatierte nur, daß NEWTON etwa 1676 im Besitze seiner Fluxionsmethode war; durch die Umänderung konnte er beabsichtigt haben, hervorzuheben, daß er schon 1671 eine Abhandlung über die Methode verfaßt hatte, mithin zu einer Zeit, als LEIBNIZ nachweislich noch nicht im Besitze der Differentialrechnung war.

G. ENESTRÖM.

---

3 : 223. Mit der Bemerkung (Z. 30—35):

> Ist dieser Bericht [HÔPITALS über seinen Lehrgang] vollständig wahrheitsgetreu, so war demnach DE l'HOSPITAL im Herbste 1691, als er mit JOHANN BERNOULLI bekannt wurde, bereits im Besitze der Differentialrechnung, und sein Lehrbuch, von welchem weiter unten die Rede sein wird, war das Ergebniss eigenen Nachdenkens, wenn auch eigenen Nachdenkens über fremde Erfindungen

kann ich nicht vollständig einverstanden sein, weil der Ausdruck „im Besitze der Differentialgleichung" allzu schwebend ist. HÔPITAL sagt in dem von Herrn CANTOR zitierten Briefe an LEIBNIZ: „j'y [= in den Acta eruditorum 1684] ai trouvé votre methode des tangentes, qui me plut si fort que je composai des ce temps quelques ecrits, ou je l'expliquois plus au long, et je donnois les demonstrations de toutes vos regles". Es ist darum sehr wohl möglich, daß HÔPITAL im Herbste 1691 nur im Besitze der Methode war, durch Differentiation die Lage der Tangente einer Kurve $y = f\ (x)$ zu bestimmen, und noch nicht versucht hatte, die Differentialrechnung bei der Lösung anderer verwickelter Probleme anzuwenden. Wenn dies der Fall war, kann man sagen, daß nur die 40 ersten Seiten seines Lehrbuches das Ergebnis eigenen Nachdenkens sein müssen, während der Inhalt der übrigen 140 Seiten sehr wohl von Johann Bernoulli herrühren könnte, auch wenn der Bericht Hôpitals vollständig wahrheitsgetreu war.

Auf diese Weise verschwindet auch im wesentlichen der Widerspruch zwischen den Berichten Hôpitals und Bernoullis. Die „certains problèmes", von denen dieser spricht, können sehr wohl andere als Tangentenprobleme gewesen sein, und obgleich Bernoulli „les principes du calcul différentiel" als Gegenstand seines Unterrichtes angibt, ist es nicht ausgeschlossen, daß der Unterricht sich hauptsächlich auf die Anwendung der neuen Methode bei der Lösung schwierigerer geometrischer und mechanischer Probleme bezog. Als eine Stütze der Ansicht, daß Hôpital erst nach dem Zusammentreffen mit Johann Bernoulli begann, sich mit solchen Problemen zu beschäftigen, könnte man vielleicht anführen, daß jener in seinen Briefen an Huygens vom Jahre 1690 gar nicht die Differentialrechnung benutzte, aber dagegen in den Briefen aus dem Jahre 1693 sich mit großer Gewandtheit dieser Rechnung bediente.

G. Eneström.

---

3 : 284. Am Ende der Seite soll die Bemerkung: „Neu scheint . . . das von uns theilweise übersetzte Scholium gegen Schluß der *Quadratura curvarum* gewesen zu sein" modifiziert werden. Die Stelle des *Commercium epistolicum*, die Herr Cantor S. 319 in der Fußnote 7 zitiert, beginnt eben mit den Worten: „Nec sane verisimile est, se anno 1704, cum dictum Scholium adderet fine libri de Quadraturis, oblitum esse . . ." und man hat natürlich keinen Anlaß, die Richtigkeit der Behauptung zu bezweifeln. G. Eneström.

---

3 : 292 Da Herr Cantor hier (Z. 20—24) bemerkt: „Durch eine Randbemerkung wissen wir ferner, daß Leibniz es auch gewesen war, der 1703 [in den Acta eruditorum] ein anderes, die Fluxionsrechnung betreffendes Buch, die *Fluxionum methodus inversa* von George Cheyne (1671—1734) ziemlich günstig besprochen hatte", erlaube ich mir, folgende Aussprüche aus zwei Briefen von Leibniz an Johann Bernoulli (siehe *Leibnizens Mathematische Schriften*, herausg. von C. I. Gerhardt **3** : 2, Halle 1856, S. 725 [Brief vom 2. Oktober 1703], 727 [Brief vom 22. November 1703] hier zum Abdruck zu bringen.

> Cheynaeus Scotus librum suum etiam ad me misit, sed, ut verum fatear, pene Tyronis opus esse videtur in his studiis: adeo nihil reperio, quod non facillime ducas ex pervulgata jam dudum methodo serierum. Nec ullum aggreditur problema alicujus momenti. Quod si vel aliquam seriem novam elegantem exhibuisset, saltem ex labore ejus proficeremus, et tamen supercilium sumit Tales libri quotidie multi scribi possunt non magno operae pretio. Itaque nisi meliora proferat, hominem sibi relinquendum vel potius ad medicinam bene faciendam hortandum censeo.
>
> Cheynaeus mihi vix problemata aggressus videtur, alioqui sensisset, quam non facile sit problematibus per finita solvendis viam monstrare per series infinitas, et serierum abruptio tam variis modis contingere potest, ut nonnisi multa arte eligi possit, quae ad rem faciat. Talium autem artium nulla apud eum vestigia deprehendo.

Auf Grund dieser Auszüge, die ja für Cheyne wenig günstig sind, scheint mir die Zuverlässigkeit der von Herrn Cantor zitierten Randbemerkung bis auf weiteres als verdächtig zu betrachten sein. S. 297 hat Herr CANTOR selbst darauf hingewiesen, daß die Randbemerkungen zuweilen nachweislich unrichtige Angaben enthalten.

G. ENESTRÖM.

---

3 : 507. In betreff der Angabe (Z. 7 v. u.): „Andere Anmerkungen [zu den *Opera* JAKOB BERNOULLIS] rühren offenbar von CRAMER her" bemerke ich, daß CRAMER selbst in der Vorrede auf folgende Weise genaue Auskunft über diese anderen Bemerkungen gibt:

> [NICOLAUS BERNOULLI] me per litteras magnopere hortabatur, ut et ipse . . . ad omnia omnino Opuscula e quibus ista collectio conficitur, meas quoque notas adjungerem. Ego, quamvis . . . sera aliquantulum veniret hortatio, impressis jam plusquam trecentis paginis, nolui tamen omittere quicquam eorum quae, tanti viri judicio, tyronibus faciliorem autoris nostri lectionem efficere possent.

In Wirklichkeit beginnen die Anmerkungen CRAMERS S. 312—313, und weitere Anmerkungen kommen vor S. 320, 323—325, 340—342, 350, 357, 387—392, 396—399, 401—402, 424—426, 433, 435—439, 444, 447, 450—452, 466, 470—471, 479, 483—490, 493—500, 504—505, 513—515, 521—523, 526, 531—532, 535—536, 539—542, 550—559, 562—571, 575, 579—600, 602—603, 605—606, 609—612, 620, 623, 625—626, 629, 631, 633—634, 636, 643—645, 647, 649—652, 654, 656—657, 661, 723, 727, 732—735, 740—743, 758—759, 765—767, 770—772, 774, 776—777, 780, 782—784, 788—794, 797—805, 807—813, 817—819, 834, 853—854, 859—860, 865—867, 872—883, 885—886, 893—894, 911, 915, 918—920, 933, 939—940, 942—944, 946, 950, 962, 966—967, 969—970, 973—974, 977—978, 983—984 sowie am Ende der meisten Seiten der „Varia posthuma".

Die Anmerkungen sind zuweilen sehr kurz, aber oft so ausführlich, daß sie als wirkliche Aufsätze betrachtet werden können. Sie enthalten eine Menge von historischen und kritischen Bemerkungen, die nicht unbeachtet gelassen werden sollen, wenn einmal eine sorgfältige Würdigung GABRIEL CRAMERS als Mathematiker versucht wird. Jedenfalls geben die zitierten Worte des Herrn CANTOR: „Andere Anmerkungen rühren offenbar(!) von CRAMER her" keine richtige Vorstellung von dem Wert dieser Anmerkungen.

G. ENESTRÖM.

---

3 : 673. In der 1743 veröffentlichten Abhandlung *Démonstration de la somme de cette suite* $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+$ *etc.* (Journal littéraire d'Allemagne **2** : 1, S. 115—127) hat EULER noch eine BERNOULLIsche Zahl angegeben, nämlich $\frac{76977927}{27\cdot 2}$, wenn man den Zahlen dieselbe Form wie in der von Herrn CANTOR erwähnten Abhandlung gibt (siehe P. STÄCKEL, *Eine vergessene Abhandlung LEONHARD EULERS über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen;* Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, S. 60) und diese Zahl steht auch in der *Introductio in analysin infinitorum* (**1**, Lausannae 1748, S. 131). Wie Herr CANTOR S. 767 richtig angibt, hat EULER in seinen *Institutiones calculi differentialis* noch zwei BERNOULLIsche Zahlen mitgeteilt.

G. ENESTRÖM

Anfragen.

164. Hat Newton den ersten Mittelwertsatz für bestimmte Integrale in geometrischer Form ausgedrückt? In der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* II : **1** : 1 (Leipzig 1899) befindet sich S. 97—98 folgende Angabe (siehe Fußnote 203) in betreff des ersten Mittelwertsatzes:

> Der Satz . . . findet seinen geometrischen Ausdruck darin, daß ein zwischen zwei Abscissen begrenztes Flächenstück einer Kurve gleich einem Rechteck ist, das zur Höhe eine mittlere Ordinate hat; so schon bei Newton.

Indessen ist es mir nicht gelungen, diese Angabe, die durch keinen Verweis gestützt wird, zu kontrollieren. Allerdings kommt am Ende der *Analysis per aequationes numero terminorum infinitas* eine Stelle vor, die, wenn man sie flüchtig liest, ein Beleg für die Angabe zu sein scheint, nämlich (siehe z. B. *Commercium epistolicum J. Collins et aliorum*, Ausgabe von Biot und Lefort, Paris 1856, S. 73).

> Sit itaque curvae alicujus $AD\delta$ Basis $AB = x$, perpendiculariter applicata $BD = y$, et area $ABD = z$, ut prius. Item sit $B\beta = o$, $BK = v$, et rectangulum $B\beta HK$ (ov) aequale spatio $B\beta\delta D$.

In der von Newton beigefügten Figur ist das Rechteck $B\beta KH$ so gezeichnet, daß seine horizontale Seite KH den Bogen $D\delta$ in einem mittleren Punkte schneidet; die Höhe des Rechtecks ist also in Wirklichkeit eine mittlere Ordinate des Flächenstücks $B\beta\delta D$. Andererseits muß hervorgehoben werden, daß dieses Flächenstück von Newton als unendlich klein betrachtet wird, und daß es für seinen Zweck gleichgültig ist, wie die Gerade KH gezogen wird; sie könnte ebensogut den Bogen in einem Endpunkte D, δ schneiden. Sonst habe ich bei Newton keinen geometrischen Ausdruck für den Mittelwertsatz gefunden, und dies ist gar nicht befremdend, da ja Newton, um eine Fläche zu quadrieren, davon ausgeht, daß ihre Fluxion die letzte Ordinate ist, so daß das Problem auf die Aufsuchung der Fluente einer gegebenen Fluxion zurückgeführt wird.

Hat Newton in seinen Schriften oder Briefen ausdrücklich bemerkt, daß ein zwischen zwei Abszissen begrenztes Flächenstück gleich einem Rechteck ist, das zur Höhe eine mittlere Ordinate hat?

G. Eneström.

Rezensionen.

A. Witting und M. Gebhardt. Beispiele zur Geschichte der Mathematik. Ein mathematisch-historisches Lesebuch. II. Teil. Leipzig, Teubner 1913. 8°, VI + (2) + 61 S. — 80 Pf.

Der nicht ganz deutliche Titel: „Beispiele zur Geschichte der Mathematik" wird durch den Zusatz: „Ein mathematisch-historisches Lesebuch" klar; es handelt sich nämlich um kurze Auszüge in deutscher Sprache aus älteren mathematischen Arbeiten, und zwar sind diese Arbeiten:

1. El-Biruni, Das Buch der Auffindung der Sehnen im Kreise (etwa 1000; Auszug aus der Übersetzung von H. Suter in der Biblioth. Mathem. **11**$_3$, 1910/11).
2. Abraham bar Chijja, *Liber embadorum* (12. Jahrh.; Auszug aus der Übersetzung von M. Curtze in den Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. **12**, 1902).
3. El-Hassar, Rechenbuch (wahrscheinlich aus dem 12. Jahrh.; Auszug aus der Übersetzung von H. Suter in der Biblioth. Mathem. **2**$_3$, 1901).
4. Sibt El-Maridini, Abhandlung über Sexagesimalrechnung (15. Jahrh.; deutsche Übersetzung nach der Bearbeitung von C. de Vaux in der Biblioth. Mathem. **13**$_2$, 1899).
5. Leonardo de Antoniis, *Practica geometriae* (etwa 1400; Auszug aus der Übersetzung von M. Curtze in den Abhandl. zur Gesch. der mathem. Wiss. **13**, 1902).
6. Algebra in deutscher Sprache aus dem Jahre 1461 (Auszug aus der Ausgabe von M. Curtze in den Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **7**, 1895).
7. J. Scheubel, *Algebrae compendiosa facilisque descriptio* (1551; Auszug in deutscher Sprache von A. Witting).
8. J. Regiomontanus, Brief an J. Bianchini (1463; Auszug aus der Übersetzung von M. Curtze in den Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. **12**, 1902).
9. A. Dürer, *Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt* (1525).
10. A. Riese, *Rechnung auff der Linien vnd Federn* (1522; Auszug aus der Ausgabe 1525).
11. A. Riese, *Rechenung nach der lenge, auff den Linihen vnd Feder* (1550).
12. M. Stifel, *Arithmetica integra* (1544; Auszug in deutscher Sprache von A. Witting).
13. J. Scheubel, *De numeris et diversis rationibus seu regulis computationum opusculum* (1545; Auszug in deutscher Sprache von A. Witting).
14. H. Cardanus, *Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus* (1545; Auszug in deutscher Sprache von A. Witting).

15. Chr. Rudolff, *Die Coss. Mit schönen Exempeln der Coss Durch M. Stifel Gebessert vnd sehr gemehrt* (1553—1554).
16. V. Strigelius, *Arithmeticus libellus* (1563; Auszug in deutscher Sprache von M. Gebhardt).
17. R. Gemma-Frisius *Arithmeticae practicae methodus facilis* (1540; deutscher Auszug aus der Auflage 1568 von M. Gebhardt).
18. R. Bombelli, *L'algebra* (1572; Auszug nach der deutschen Übersetzung von G. Wertheim in den Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. 8, 1898).

Für das Titelbild (Rechenunterricht im 16. Jahrhundert) ist die eben erwähnte Arithmetik von R. Gemma-Frisius benutzt worden; als Einleitung dienen einige Verse von A. Riese aus dem Jahre 1529 und zum Schluß werden aus einem ungedruckten Rechenbuche vom Jahre 1676 andere Verse mit der Überschrift „Rechnens-Andacht" abgedruckt. Außer den eigentlichen Auszügen enthält das Büchlein noch erläuternde Anmerkungen.

Die obige Inhaltsangabe zeigt, daß die mitgeteilten Aktenstücke aus den Jahren 1000—1572 herrühren. Warum dieser Zeitabschnitt gewählt worden ist, wird im Vorworte nicht erwähnt, aber da auf dem Titelblatt „II. Teil" steht, kann man vermuten, daß der 1. Teil dem Altertum, der 2. Teil dem Mittelalter und dem 16. Jahrhundert gewidmet ist. Dagegen dürfte es fast unmöglich sein, zu erraten, warum im zweiten Teile eben die von Witting und Gebhardt gewählten Auszüge mitgeteilt werden. Allerdings scheint aus dem Vorworte hervorzugehen, daß der Zweck des Lesebuches ist, die Kenntnis vom Werden der Mathematik zu vermitteln; natürlich ist der fragliche Zweck durch die Auszüge insofern erreicht worden, als diese ermöglichen, den Stand gewisser Teile der Mathematik im Mittelalter und am Anfange der neueren Zeit mit dem heutigen Stand der Wissenschaft zu vergleichen. Formuliert man den Plan des Buches auf diese Weise und nimmt man hinzu, daß Witting und Gebhardt sich in erster Linie an die reifere Jugend wenden, hat man keinen Anlaß, das Resultat ihrer Arbeit zu bemängeln. Im Gegenteil kann man damit einverstanden sein, daß ihr Buch ein dankenswerter Beitrag zur Verbreitung mathematisch-historischer Kenntnisse ist.

Fordert man dagegen von einem mathematisch-historischen Lesebuche, daß es wenigstens in großen Zügen Auskunft über die Entwicklung der Mathematik oder besonderer Teile derselben bieten soll, dürfte das Urteil über die *Beispiele zur Geschichte der Mathematik* etwas anders ausfallen. Nun kann man allerdings einwerfen, daß dies eine Frage ist, die anderwärts behandelt werden sollte, und ich gebe gern zu, daß der Einwurf formell richtig sein kann. Allein da ich im Leitartikel dieses Bandes eben die Bearbeitung eines mathematisch-historischen Lesebuches angeregt habe, und da von befreundeter Seite bemerkt worden ist, daß durch das Buch von Witting und Gebhardt mein Wunsch wenigstens auf einem speziellen Gebiete im voraus erfüllt sein dürfte, benutze ich diese Gelegenheit, das Buch von dem soeben angegebenen Gesichtspunkte aus zu beurteilen.

Wie ich schon angegeben habe, beziehen sich die Beispiele zur Geschichte der Mathematik auf die Jahre 1000—1572 und der wesentliche Inhalt der Auszüge dürfte in aller Kürze auf folgende Weise charakterisiert werden können:

1. (um 1000). Berechnung der Sehne der Summe oder der Differenz zweier Kreisbogen, wenn die Sehnen der Bogen bekannt sind.

2 (12. Jahrh.) Lösung der Gleichung $x^3 - ax = b$.
3. (12. Jahrh.?) Drei Methoden, eine Gleichung ersten Grades zu lösen.
4. (15. Jahrh.) Division von Sexagesimalbrüchen.
5. (um 1400.) Messung von Höhen; Ausmessung von Kreisabschnitten und Kreisrechnung
6. (1461.) Gleichungen zweiten Grades.
7. (1551.) Die cossischen Zeichen
8. (1463.) Gleichungen zweiten Grades mit cossischen Zeichen
9. (1525.) Konstruktion regelmäßiger Vielecke.
10. (1522.) Rechnung auf den Linien und mit der Feder; komplementäre Multiplikation.
11. (1550.) Rechenkunst (Addition von gewöhnlichen Brüchen, Rechenbeispiele, Regeldetri, Proben).
12. (1544.) Quadratur des Kreises.
13. (1545.) Wurzelausziehen (Näherungsformeln).
14. (1545.) Näherungsweise Lösung numerischer Gleichungen.
15. (1553.) Arithmetische und geometrische Reihen.
16. (1563.) Multiplikationstafel.
17. (1540.) Berechnung der Fläche eines Dreiecks aus seinen drei Seiten.
18. (1572.) Quadratwurzelausziehen durch ein kettenbruchähnliches Verfahren.

Aus dieser Inhaltsangabe sieht auch der Laie sofort, wie unvollständig die Kenntnisse sind, die der Leser der „Beispiele" über die Geschichte der Mathematik im Mittelalter und am Anfange der neueren Zeit bekommen kann. So ist ja die Geschichte des Bruchrechnens nur durch Notizen über Division von Sexagesimalbrüchen und Addition von gewöhnlichen Brüchen vertreten. Allein der Sachkundige sieht überdies sogleich, daß die „Beispiele" von einem anderen Gesichtspunkte aus so unvollständige Aufschlüsse geben, daß sie sehr leicht irreleiten können. Nehmen wir in Betracht die Angaben über die cossischen Zeichen! Aus dem Briefe des Regiomontanus findet man, daß 1463 zwei cossische Zeichen (nämlich für x und x^2) benutzt worden sind, und aus der Algebra von Scheubel sieht man, daß 1551 wenigstens 12 solche Zeichen vorhanden waren, von denen das Zeichen für x^3 genau mit dem Zeichen des Regiomontanus für x^2 übereinstimmt. Muß der Leser nicht dadurch leicht veranlaßt werden, anzunehmen, daß die cossische Zeichensprache eigentlich erst um die Mitte des 16. Jahrhunderts ausgebildet wurde? Nur ganz im Vorübergehen wird S. 25 durch die Worte: „als Ersatz dieser schwerfälligen Bezeichnungen hatte schon Grammateus 1521 . . ." angedeutet, daß um das Jahr 1521 gewisse cossische Zeichen (ob andere als die des Regiomontanus, wird nicht gesagt) benutzt wurden — Nehmen wir ferner auf die Angabe über komplementäre Multiplikation Bezug, so ersehen wir aus einem Auszuge, daß diese 1522 gelehrt wurde, aber daß das Verfahren schon seit dem 12. Jahrhundert im Abendlande in Übung war, kann der Leser gar nicht erraten.

Wenn also die „Beispiele" auf Grund ihrer Unvollständigkeit die von mir angeregte Exzerptensammlung nicht ersetzen können, so ist das, was sie wirklich bieten, von der Art, daß ich es kaum in diese Sammlung aufgenommen haben würde, weil es für die Kenntnis der Entwicklung der Mathematik von untergeordneter Bedeutung ist. In der Tat sind ja für diese Kenntnis Aufschlüsse über das erste Auftreten eines Satzes oder einer Methode das wichtigste, und auf die Mitteilung von Auszügen, die solche Aufschlüsse enthalten, haben Witting und

Gebhardt offenbar kein Gewicht gelegt. Aus diesem Grunde kann ihr Buch nicht einmal als Vorarbeit zu dem von mir vorgeschlagenen Lesebuche benutzt werden.

Nach diesen Ausführungen kehre ich zum eigentlichen Gegenstande dieser Rezension zurück, um einige kleine Bemerkungen in betreff der Einzelheiten des von mir besprochenen Buches zu machen. Ich hebe dabei erst hervor, daß ich als ein Verdienst der Herren Witting und Gebhardt betrachte, daß sie nur selten mathematisch-historische Notizen gebracht haben; auf diese Weise haben sie fast vollständig vermieden, zur Verbreitung unrichtiger Notizen dieser Art beizutragen.

S. 4. Es wäre ratsam, Z. 10 vor „12" das Wort „wahrscheinlich" einzuschalten. Über die Lebenszeit El-Hassars weiß man eigentlich gar nichts; der Umstand, daß eine hebräische Übersetzung seines Rechenbuches um die Mitte des 13. Jahrhunderts angefertigt wurde, erlaubt uns, eine untere Grenze für seine Lebenszeit festzustellen, und Suter nimmt, meines Erachtens mit gutem Rechte, an, daß El-Hassar im 12. Jahrhundert lebte.

S. 8. Z. 6 v. u. lies „1899" statt „1898".

S. 19. Die Bemerkung Z. 22: „statt p (partes) steht in der Urschrift überall ^{0} (Grad)" sollte lauten: statt p (partes) hat die von Curtze zum Abdruck gebrachte Handschrift *gr* (gradus), aber in der Curtzeschen Übersetzung steht überall ^{0}".

S. 25. Der Ausspruch (Z. 7—9 v. u.): „als Ersatz . . . hatte Grammateus 1521 den Exponenten, wie wir heute sagen würden, benutzt" kann leicht mißverstanden werden. In Wirklichkeit benutzte Grammateus, wie auch aus den folgenden Zeilen hervorgeht, für die Potenzen Abkürzungen der Namen ihrer Ordnungszahlen, allerdings so, daß er nicht x^2 sondern x selbst als die erste Potenz betrachtet. Z. 6 v. u. soll also n statt $n-1$ stehen und die folgenden Zeilen sind demgemäß zu berichtigen (bei Grammateus kommt „ra" nicht vor).

S. 35. Der Titel der Arbeit von A. Riese ist in betreff des Buchstabierens nicht korrekt wiedergegeben. Auf dem Titelblatte steht

> Rechenung nach der || lenge / auff den Linihen || vnd Feder. || Darzu forteil vnd behendigkeit durch die Proportio= || nes / Practica genant / Mit grüntlichem || vnterricht des visierens. || Durch Adam Riesen. || im 1550. Jar.

S. 39. Die Übersetzung „reine Arithmetik" für „Arithmetica integra" gefällt mir nicht; ich schlage „vollständige Arithmetik" oder vielleicht „allgemeine Arithmetik" vor.

S. 47—49. Die Übersetzung des 30. Kapitels der *Ars magna* von Cardanus bietet große Schwierigkeiten dar, und ich glaube kaum, daß Herr Witting diese vollständig überwunden hat. Beispielsweise übersetzt Witting die Anfangsworte:

> Haec regula rerum, quae in usum veniunt, maximam partem amplectitur, nam quaestione ad positionem deducta, perfectaque operatione, proximam quaerit aestimationem, quae sic habetur

auf folgende Weise:

> Diese Regel ist in allgemeinster Weise zur Auflösung von Gleichungen geeignet.

Allein CARDANO selbst will offenbar sagen:

> Diese Regel umfaßt die meisten der gewöhnlichen Fälle, denn nachdem das Problem auf eine Gleichung zurückgeführt und diese Gleichung auf die Normalform gebracht worden ist, lehrt die Regel einen Näherungswert der Gleichung zu finden, und zwar auf folgende Weise.

Bei seiner sehr freien Übersetzung übergeht also WITTING stillschweigend den Umstand, daß CARDANO ausdrücklich sein Verfahren als ein Näherungsverfahren bezeichnet. Zuweilen hat WITTING darauf verzichtet, einige Worte zu übersetzen, z. B. den Passus „idem fiet, ubi aequatio sit denominationis alicuius ad numerum, ac denominationes, ut in exemplis patebit", der meiner Ansicht nach von wirklicher Bedeutung ist (vgl. Biblioth. Mathem. $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 162). Der Passus kann auf folgende Weise übersetzt werden: „auf dieselbe Weise verfährt man, wenn eine Potenz der Gleichungskonstanten und einer Anzahl anderer Potenzen gleich ist."

S. 51. Die Behauptung: „das vierte Beispiel unterscheidet sich, wie man leicht sieht, von den anderen nur dadurch, daß in ihm $c = 0$ ist!" ist irreleitend. Wenn die Gleichung $f(x) = c$ geschrieben wird, ist im vierten Beispiele c offenbar entweder -200 oder $+200$, je nachdem man $f(x) = x^4 - 10x^3 + 6x^2 - 12x$ oder $f(x) = -x^4 + 10x^3 - 6x^2 + 12x$ setzt.

S. 60. Die Bemerkung: „Der Leser kann . . . zeigen, daß die Regel nichts anderes enthält als die Kettenbruchentwicklung . . ." könnte meines Erachtens etwas besser ausgedrückt werden. Die BOMBELLIsche Regel lautet in modernen Zeichen

$$a_{n+1} = a + \frac{b}{a + a_n},$$

wenn $a^2 + b$ die gegebene Zahl ist $(b < 2a + 1)$ und a_{n+1}, a_n zwei sukzessive Näherungswerte bedeuten. Eine independente Darstellung von a_{n+1} kommt dagegen bei BOMBELLI nicht vor, und erst bei einer solchen Darstellung tritt ein Kettenbruch auf.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik, herausgegeben von K. von Buchka, H. Stadler, K. Sudhoff. Leipzig. 8°. [1
6 (1913).

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8°. [2
14_3 (1913/14) : 1.

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8°. [3
16 (1914) : 1.

Isis. Revue consacrée à l'histoire de la science, publiée par G. Sarton. Vondelgem-lez-Gand. [4
1 (1913) : 4.

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la société mathématique d'Amsterdam par H. de Vries, J. Cardinaal, J. C. Kluyver, W. Kapteyn, F. Schuh. Amsterdam. 8°. [5
21 : 2 (octobre 1912—avril 1913). — Tables des matières contenues dans les cinq volumes XVI—XX (1908—1913) suivie d'une table générale par noms d'auteurs. Amsterdam 1913. (3) + 171 + (1) S.

Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. Unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen herausgegeben von Felix Auerbach und R. Rothe. 3 (1913). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 20_2, 1914, 201—202. (G. A. Miller.) — Bullet. d. sc. mathém 38_2, 1914, 27—31. (de Baillehache.) — Monatsh. für Mathem. 25, 1914; Lit.-Ber. 13—14 (W. G.) [6

Sarton, G., Les tendances actuelles de l'histoire des mathématiques. [7
Isis 1, 1913/14, 577—589.

Eneström, G., Die mathematisch-historische Forschung und der mathematisch-historische Schulunterricht. [8
Biblioth. Mathem. 14_3, 1913/14, 1—8.

***Cantor, M.,** Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Zweiter Band. Von 1200—1668. Unveränderter Neudruck der zweiten Auflage. Leipzig, Teubner 1913. [9
8°, XII + 943 S. — [26 Mk.] — [Kleine Bemerkungen zu 3^2 (1901):] Biblioth. Mathem. 14_3, 1913/14, 69—83. (G. Eneström.)

***Boutroux, P.,** Les principes de l'analyse mathématique. Exposé historique et critique. Tome I. Les nombres. Les grandeurs. Les figures. Le calcul combinatoire. Le calcul algébrique. Calcul des fonctions. L'algèbre géométrique. Paris, Hermann 1914. [10
8°, XI + 548 S. — [14 fr.] — [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 25_3, 1914, 252—253. (R. d'Adhémar.) — Isis 1, 1913/14, 734—742. (E. Turrière.)

Brunschvicg, L., Les étapes de la philosophie mathématique. Paris, Alcan 1912. [11
8°, XI + 591 S. — [10 fr.] — Bibliothèque de la philosophie contemporaine. — [Rezension:] Isis 1, 1913/14, 721—734. (E. Turrière.)

Zeuthen, H. G., Die Mathematik im Altertum und im Mittelalter (1912). [Rezension:] Isis 1, 1913/14, 719—721. (V. B.) [12

***Mitzscherling, A.,** Das Problem der Kreisteilung. Ein Beitrag zur Geschichte seiner Entwicklung. Mit einem Vorwort von H. Liebmann. Leipzig, Teubner 1913. [13
8°, VI + 214 S. — [7 Mk.]

Sommerville, D. M. Y., Bibliography of non-euclidean geometry (1911). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 16, 1914, 15—16. (G. L.) [14

Dannemann, Fr., Die Naturwissenschaften in ihrer Entwicklung und in ihrem Zusammenhange. [15
Archiv für d. Gesch. d. Naturw. und d. Technik 6, 1913, 39—45.

Jourdain, Ph. E. B., The principle of least action (1913). [Rezension:] Archiv der Mathem. 22_3, 1914, 271. (A. Korn.) [16

***Pitoni, R.,** Storia della fisica. Torino, Soc. tip.-ed. nazionale 1913. [17
8°. — [4 lire.] — [Rezension:] Isis 1, 1913/14, 742—744. (A. Mieli.)

Haas, A. E., Die Elektronenhypothese in ihrem Verhältnis zu älteren physikalischen Theorien. [18
Archiv für d. Gesch. d. Naturw. und d. Technik 6, 1913, 144—149.

Duhem, P., Le système du monde. Histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic. Tome premier. Paris, Hermann 1913. [19
8°, (5) + 512 S.

Tannery, P., Mémoires scientifiques. I—II (1912—1913). [Rezension des 1. Bandes:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 16, 1914, 6—13. (T. L. Heath.) — The mathem. gazette 6, 1912, 403—406. — Revue du mois 15, 1913, 239—240. — Revue scient. 18_5, 1912, 478. — [Rezension des 2. Bandes:] Archiv der Mathem. 22_3, 1914, 256—257. (E. Löffler.) [20

Müller, Felix, Gedenktagebuch für Mathematiker (1912). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 20_2, 1913, 157—158. (E. W. Ponzer.) — Monatsh. für Mathem. 25, 1914; Lit.-Ber. 15. (W. G.) [21

Loria, G., Le glorie matematiche della Granbretagna. [22
Isis 1, 1913/14, 637—654.

Mikami, Y., Notes on the native Japanese mathematics. II. [23
Archiv der Mathem. 22_3, 1914, 183—199.

Smith, D. E. and Mikami, Y., A history of Japanese mathematics. Chicago, Open court publishing company 1914. [24
8°, V + (2) + 288 S.

b) Geschichte des Altertums.

Bezold, C., Zenit- und Äquatorialgestirne am babylonischen Fixsternhimmel (1913). [Bemerkungen zu einer Rezension:] Deutsche Literaturz. 35, 1914, 27—28. (C. Bezold.) — [Antwort auf die Bemerkungen:] Deutsche Literaturz. 35, 1914, 28—29. (B. Meissner.) [25

Heiberg, J. L., Naturwissenschaften und Mathematik im klassischen Altertum (1912). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 16, 1914, 21. (G. L.) [26

Loria, G., Le scienze esatte nell'antica Grecia. Seconda edizione (1914). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 25_3, 1914, 274—284. (H. Bosmans.) — Isis 1, 1913/14, 714—716. (A. Mieli.) — L'enseignement mathém. 16, 1914, 75. (E. Chatelain.) — L'interméd. d. mathém. 20, 1913; Supplément n° 11, 2. [27

Vogt, H., Zur Entdeckungsgeschichte des Irrationalen. [28
Biblioth. Mathem. 14_3, 1913/14, 9—29.

Zeuthen, H. G., Geometriske Synsmaader för Platon. [29
Nyt Tidsskr. for Mathem. 24, 1913. A. 20 S.

Zeuthen, H. G., Sur les connaissances géométriques des Grecs avant la réforme Platonicienne. [30
Kobenhavn, Vidensk selsk., Oversigt 1913, 431—473.

Mansion, P., Sur un passage géométrique d'Aristote. [31
Biblioth. Mathem. 14_3, 1913/14, 30—32.

Archimedis Opera omnia. Iterum edidit J. L. Heiberg. II (1913). [Rezension:] Archiv der Mathem. 22_3, 1914, 265—266. (E. Löffler.) [32

Favaro, A., Archimede (1912). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 16, 1914, 20—21. (G. L.) [33

Heath, Th. L., The Method of Archimedes (1912). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 16, 1914, 22. (G. L.) [34

Kierboe, T., Bemerkungen über die Terminologie des Archimedes. [35
Biblioth. Mathem. 14_3, 1913/14, 33—40.

Corpus agrimensorum romanorum. Recensuit C. Thulin. Vol. 1, fasc. I. Opuscula agrimensorum veterum. Leipzig, Teubner 1913. [36
8°, IV + (1) + 171 S. + 48 Taf. — [7 Mk.] — Bibliotheca scriptorum graecorum et romanorum Teubneriana.

Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia. IV. Ed. J. L. Heiberg (1912). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 35, 1914, 58—59. (A. Olivieri.) [37

*Firmicus Maternus, J.,** Matheseos libri VIII. Ediderunt W. Kroll, F. Skutsch et K. Ziegler. Fasciculus posterior libros 4 posteriores cum praefatione et indicibus continens. Leipzig, Teubner 1913. [38
8°, LXX + 558 S. — [12 Mk.]

*Procli Diadochi Hypotyposis astronomicarum positionum. Una cum scholiis antiquis e libris manu scriptis edidit, germana interpretatione et commentariis instruxit C. Manitius. Leipzig, Teubner 1909. [39
8°, XLVI + 378 S. — [Rezension] Deutsche Literaturz. 34, 1913, 3129—3130. (A. Olivieri.)

c) Geschichte des Mittelalters.

Smith, D. E. and Karpinski, L. C., The hindu-arabic numerals (1911). [Rezension] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 16, 1914, 18—19 (G. L.). — The mathem. gazette 6, 1912, 344—345. [40

Eneström, G., Das Bruchrechnen des Jordanus Nemorarius. [41
Biblioth. Mathem. 14_3, 1913/14, 41—54.

Eneström, G., Über die Geschichte der Kubikwurzelausziehung im Mittelalter. [42
Biblioth. Mathem 14_3, 1913/14, 83—84. — Anfrage.

Carlebach, J., Levi ben Gerson als Mathematiker (1910). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 16, 1914, 13—15. (G. L.) [43

Bensaude, J., L'astronomie nautique au Portugal à l'époque des grandes découvertes (1912). [Rezension:] Isis 1, 1913/14, 716—718. (J. Mascart.) [44

d) Geschichte der neueren Zeit.

Würschmidt, J., Joannes Verneri de meteoroscopiis (1913). [Rezension:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 22, 1913, *225*. (E. Wiedemann.) [45

Rey Pastor, J., Los matemáticos españoles del siglo XVI (1913). [Rezension:] Biblioth. Mathem. 14_3, 1913/14, 85—90. (G. Eneström.) [46

Grabowski, J., „Arithmetica linearis" von Benedictus Herbestus (Cracoviae 1577). [47
Cracovie, Acad. d. sc., Bulletin 1913, A: 63—64.

Bosmans, H., Sur quelques exemples de la méthode des limites chez Simon Stevin (1913). [Bericht:] *Bruxelles*, Soc. scient., Annales 37: 1, 1912/13, 66—67. (P. Mansion.) [48

Poske, Fr., Galilei und der Kausalbegriff. [49
Archiv für d. Gesch. d. Naturw. und d. Technik 6, 1913, 288—293

Favaro, A., Nuove ricerche per una iconografia Galileiana. [50
Venezia, Istituto Veneto, Atti 73: 2 1913/14, 105—134.

Favaro, A., Scampoli Galileiani. XXIII. [51
Padova, Accad. d. sc., Atti e memorie 30, 1914, 43—77.

Favaro, A., Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. XXX. Niccolo Aggiunti. [52
Venezia, Istituto Veneto, Atti 73: 2, 1913/14, 1—77.

Giacomelli, R., Un contemporaneo di Galileo. G. Ballo (1913). [Résumé:] *Napoli* Accad. d. sc., Rendiconti 18_3, 1912, 166. [53

Favaro, A., Contribuzioni inedite al carteggio di Evangelista Torricelli. [54
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 16, 1914, 1—6.

Hoppe, Marie-Luise, Die Abhängigkeit der Wirbeltheorie des Descartes von William Gilberts Lehre vom Magnetismus. Halle 1913. [55
8°, 61 + (2) S. — Inauguraldissertation.

Whittaker, E. T., A history of the theories of aether and electricity from the age of Descartes (1910). [Rezension:] Scientia 12, 1912, 265—270. [56

Hoecken, K., Die Rechenmaschinen von Pascal bis zur Gegenwart, unter besonderer Berücksichtigung der Multiplikationsmaschinen. [57
Archiv der Mathem. 22_3, 1914, 8—29.

Ball, W. W. R., The Cambridge school of mathematics. [58
The mathem. gazette 6, 1912, 311—323.

Krygowski, Z., Newtoniana: Woolsthorpe i Grantham. [59
Wiadomości matem. 17, 1913, 331—337.

Eibe, Thyra og Meyer, Kirstine, Ole Römers Adversaria (1910). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 25_3, 1914, 285—290. (H. Bosmans.) [60

Wieleitner, H., Zwei Bemerkungen zu Stirlings „Lineae tertii ordinis Neutonianae" [61
Biblioth. Math 14_3, 1913/14, 55—62.

Mikami, Y., On the formula for an arc of a circle in the „Kwatsuyō Sampō" and allied subjects. [62
Tôkyô, Sûgaku-Buturigakkwai, Kizi 7_2, 1913, 157—170.

Mikami, Y., The parabola and hyperbola in Japanese mathematics. [63
Tôhoku mathem. journ. 3, 1913, 29—37.

Mikami, Y., On Aida Ammei's solution of an equation. [64
Porto, Acad. polyt., Annaes 8, 1913, 210—216.

Gulyás, K. [Der Briefwechsel des Grafen Samuel Teleki mit ausländischen Mathematikern]. [65
Mathematikai és physikai lapók (Budapest) 21, 1912, 194—223. — Briefe aus den Jahren 1761—1764 von und an Daniel Bernoulli, Joh. II Bernoulli, Condamine und Clairaut.

Eneström, G., Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers. 2 (1913). [Rezension:] Archiv der Mathem. 22_3, 1914, 255—256. (W. Ahrens.) [66

Leonhardi Euleri Opera omnia I: 1 (1911). [Rezension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 45, 1914, 199. (W. Lietzmann.) — II: 1—2 (1912). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 38_2, 1914, 5—21. (E. Doublet.) [67

Eneström, G., Über die Eulerschen Manuskripte der Petersburger Akademie. [68
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 22, 1913, *191—205*. — Bericht an die Eulerkommission der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft.

Doublet, E., Montucla. L'historien des mathématiques. [69
Lyon, Observatoire, Bulletin 1913 n° 5. 8 S.

Doublet, E., L'abbé Sigorgne. Un mathématicien oublié de la région lyonnaise. [70
Lyon, Observatoire, Bulletin 1913 n° 3. 7 S.

Bortolotti, E., I primordî della teoria generale dei gruppi di operazioni e la dimostrazione data da Paolo Ruffini della impossibilità di risolvere con funzioni transcendenti esatte le equazioni algebriche generali di grado superiore al quarto. [71
Modena, Accad. di sc., Memorie (sc. matem.) 12_3, 1903. 17 S.

Takeda, U. [Berechnung und Anwendung von Wada's Integraltafeln in der japanischen Mathematik]. II. [72
Tôhoku mathem. journ. 2, 1912, 182—207. — Japanisch.

Bachmann, P., Über Gauß' zahlentheoretische Arbeiten (1911). [Rezension:] Archiv der Mathem. 22_3, 1914, 263—264. (E. Löffler.) [73

Schlesinger, L., C. F. Gauß. Fragmente zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels. Über Gauß' Arbeiten zur Funktionentheorie (1912). [Rezension:] Archiv der Mathem. 22_3, 1914, 264. (E. Löffler.) [74

Jourdain, Ph. E. B., The origin of Cauchy's conceptions of a definite integral and of the continuity of a function. [75
Isis 1, 1913/14, 661—703.

Muir, Th., The theory of determinants in the historical order of development. II (1911). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 16, 1914, 16—17. (G. L.) — Monatsh. für Mathem. 25, 1914; Lit.-Ber. 19. (Schrutka.) [76

Lecat, M., Bibliographie du calcul des variations (1913). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 25_3, 1914, 264—267. (H. B.) [77

Lecat, M., Histoire de la théorie des déterminants à plusieurs dimensions (1911). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 16, 1914, 18. (G. L.) [78

Hahn, H., Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen (1911). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 16, 1914, 17. (G. L.) [79

Fueter, R., Die Klassenkörper der komplexen Multiplikation und ihr Einfluß auf die Entwicklung der Zahlentheorie. Bericht (1911). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 16, 1914, 18. (G. L.) [80

Darboux, G., Eloges académiques et discours (1912). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 16, 1914, 19—20. (G. L.) [81

***Rougier, L.,** Henri Poincaré et la mort des vérités nécessaires. Paris, Crès 1913. [82
8°, 22 S.

***Autonne, L.,** Notice sur les recherches mathématiques de Léon Autonne. Paris, Gauthier-Villers 1913. [83
4°, 36 S.

Klug, J., Die nachgelassenen Schriften Emil Wohlwills. [84
Archiv für d. Gesch. d. Naturw. und d. Technik 6, 1913, 216—221.

e) Nekrologe.

Cesare **Arzelà** (1847—1912). [85
Bologna, Accad. d. sc., Rendiconto 16_1, 1912, 159—179. (S. Pincherle.)

Giuseppe **Bardelli** (1837—1913?) [86
Milano, Istituto Lombardo, Rendiconti 46_2, 1913, 695—706. (G. Vivanti.)

George **Chrystal** (1851—1911). [87
Edinburgh, Royal soc., Proceedings 32_5, 1911/12, 477—503. (J. Sutherland, C. G. Knott.)

George Howard **Darwin** (1845—1912). [88
London, Mathem. soc., Proceedings 12_2, 1913, LV—LIX (A. E. H. L.). — *St. Pétersbourg*, Acad. d. sc., Bulletin 7_6, 1913, 1—2. (O. Backlund.)

Rinaldo **Ferrini** (1831—1908). [89
Milano, Istituto Lombardo, Rendiconti 46_2, 1913, 52—60. (A. Menozzi.)

Wilhelm **Fiedler** (1832—1912). [90
Schweizerische Naturf. Ges., Verhandlungen 96: II, 1913, Nekrologe 20—27 + Bildnis [mit Schriftenverzeichnis]. (M. Grossmann.)

Paul **Gordan** (1837—1912). [91
London, Mathem. soc., Proceedings 12_2, 1913, LI—LIV. (A. Y.) — Mathem. Ann. 75, 1914, 1—41 [mit Schriftenverzeichnis]. (M. Noether.)

Spiru C. **Haret** (1851—1912). [92
Bucarest, Acad. roumaine, Bulletin (sect. sc.) 1, 1912/13, 49—50. (St. C. Hepites.)

Hermann **Kinkelin** (1832—1913). [93
Schweizerische Naturf. Ges., Verhandl. 96: II, 1913, Nekrologe 34—48 + Bildnis [mit Schriftenverzeichnis]. (H. Fäh, G. Schärtlin.)

František **Koláček** (1851—1912?). [94
Časopis pro pěstov. mathem. 41, 1912, 275—303 (F. Záviška); 432—442 (V. Novák.)

Alexander **Macfarlane** (1851—1913). [95
Madrid, Soc. matem. española, Revista 3, 1913, 23—24. (L. Octavio de Toledo.)

Henri **Poincaré** (1854—1912). [96
Bucarest, Acad. roumaine, Bulletin (sect. sc.) 1, 1912/13, 50—65. (S. C. Haret.) — La revue du mois 15, 1913, 129—183. (V. Volterra, P. Boutroux.) — Revue scient. 18_5, 1912, 628—629. (F. Masson.)

Michel **Rinonapoli** (1818—1907). [97
Napoli, Accad. Pontaniana, Atti 17_2, 1912 n° 4. 2 S. (R. MARCOLONGO.)

Theodor **Spieker** (1823—1913). [98
Zeitschr. für mathem. Unterr. 45, 1914, 194—198 [mit Bildnis]. (P. OTTE.)

Fedor **Suvoroff** (1845—1911?). [99
Kazan, Soc. phys. math., Bulletin 18_2, 1912, 33—35 (M. F. EFIMOFF); 140—143 (S. SLUGINOFF).

Peter Guthrie **Tait** (1831—1901). [100
Scientia 12, 1912, 434—438.

Joseph **de Tilly** (1837—1906). [101
Mathesis 4_4, 1914, Supplément. 54 S. [mit Schriftenverzeichnis]. (P. MANSION.)

Hermann **Valentiner** (1850—1913). [102
L'enseignement mathém. 15, 1913, 513.

Heinrich **Weber** (1842—1913). [103
Zürich, Naturf. Ges., Vierteljahrsschr. 58 (1913), 1914. 2 S.

Augustus **Witkowski** (1854—1913). [104
Wiadomości matem. 17, 1913, 211—224. (K. ZAKRZEWSKI.)

f) Aktuelle Fragen.

Voss, A., Über das Wesen der Mathematik. Aufl. 2 (1913). [Rezension:] Mathesis 4_4, 1914, 264. (P. M.) [105

Study, E., Das Wesen der Mathematik. [106
Deutsche Literaturz. 35, 1914, 325—329.

Baker, H. F., The place of pure mathematics. [107
Science 38_2, 1913, 347—355.

Schirmer, A., Der Wortschatz der Mathematik nach Alter und Herkunft untersucht (1912). [Rezension:] Monatsh. für Mathem. 25, 1914; Lit.-Ber. 15. [108

[Die Euler-Ausgabe.] [109
Schweizerische Naturf. Ges., Verhandl. 96, 1913, 1: 86—90; II: 136—137 (F. RUDIO). — *Zürich*, Naturf. Ges., Vierteljahrsschr. 58 (1913), 1914. 6 S.

Fehr, H., Enquête de l'„Enseignement mathématique" sur la méthode du travail des mathématiciens. Avec la collaboration de TH. FLOURNOY et ED. CLAPARÈDE. Deuxième édition conforme à la première, suivie d'une note sur l'Invention mathématique par H. POINCARÉ. Paris, Gauthier-Villers 1912. [110
8°, 137 S.

[Deutsche Mathematikerversammlung in Wien 1913.] [111
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 20_2, 1913, 120—131. (V. SNYDER.) — L'enseignement mathém. 16, 1914, 59—62.

[Italienische Mathematikerversammlung in Siena 1913.] [112
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 20_2, 1913, 162.

[Schweizerische Mathematikerversammlung in Frauenfeld 1913.] [113
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 20_2, 1914, 214—215.

[Skandinavische Mathematikerversammlung in Kristiania 1913.] [114
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 20_2, 1914, 214.

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— „Lecturer" H. F. Baker in Cambridge zum Professor der Astronomie und Geometrie an der Universität daselbst.

— „Instructor" A. F. Carpenter in Seattle zum Professor der Mathematik an der „Washington university" daselbst.

— „Instructor" Elizabeth B. Cowley am „Vassar college" zum Professor der Mathematik daselbst.

— Dr. W. Duane zum Professor der Physik an der „Harvard university" in Cambridge, Mass.

— B. Gambier zum Professor der Mathematik an der Universität in Rennes.

— Privatdozent A. E. Haas in Wien zum Professor der Geschichte der Physik an der Universität in Leipzig.

— Professor H. Hergesell in Straßburg zum Direktor des aëronautischen Observatoriums in Lindenberg.

— Dr. C. E. Love in Ann Arbor zum Professor der Mathematik an der Universität von Michigan daselbst.

— Professor A. Obrecht zum Direktor der Sternwarte in Santiago.

— Professor O. Perron in Tübingen zum Professor der Mathematik an der Universität in Heidelberg.

— Lektor J. Plassmann in Münster zum Professor der Astronomie an der Universität daselbst.

— Professor O. W. Richardson in Princeton zum Professor der Physik am „Kings college" in London.

— Privatdozent H. Rothe in Wien zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule daselbst.

— C. G. Simpson in New York zum Professor der Mathematik am „Pennsylvania state college".

Todesfälle.

— Seth Carlo Chandler, Astronom, gestorben 1913, 67 Jahre alt.

— David Gill, früher Direktor der Sternwarte in Cape Town, geboren in Aberdeen den 12. Juni 1843, gestorben in London den 23. Januar 1914.

— Victor Mortet, Bibliothekar an der Sorbonne, Mathematisch-historischer Verfasser, gestorben in Paris den 15. Januar 1914, 58 Jahre alt.

— Benjamin Osgood Peirce, Professor der Mathematik an der „Harvard university" in Cambridge, Mass., geboren in Beverly, Mass., den 11. Februar 1854, gestorben den 14. Januar 1914.

— Per Gustaf Rosén, früher Professor der Geodäsie im schwedischen Generalstabe, geboren in Linköping den 17. Juni 1838, gestorben zu Lidingö bei Stockholm den 10. Januar 1914.

— Winslow Upton, Professor der Astronomie an der „Brown university" gestorben den 8. Januar 1914, 61 Jahre alt.

— Adalbert von Waltenhofen, früher Professor der Physik an der Technischen Hochschule in Wien, geboren zu Admontbühel in Steiermark den 14. Mai 1828, gestorben 1914.

— Calvin Milton Woodward, früher Professor der Mathematik an der „Washington university" in St. Louis, geboren in Fitchburg, Mass., den 25. August 1837, gestorben daselbst den 10. Januar 1914.

Gekrönte Preisschriften.

— *Académie de Belgique à Bruxelles*; Un prix a été décerné en 1913 à M. M. Stuyvaert pour la réponse à la question: „Résumer les travaux sur les systèmes de cubiques gauches et faire de nouvelles recherches sur ces systèmes."

Preisaufgaben gelehrter Gesellschaften.

— *Academia de ciencias de Madrid.* Concurso del año 1914. Deducción matemática de las modificaciones imprescindibles en los teoremas y fórmulas principales de la Mecánica general, racional ó teórica, á consecuencia del cambio ó cambios esenciales que, por causas ó hechos perfectamente comprobados, puedan tener alguna ó algunas de las leyes fundamentales de aquella Ciencia. Transcendencia de tales modificaciones á las Ciencias que tienen su apoyo en ella y principalmente á la Astronomía — Concurso del año 1915. Suscinta exposición de los principios fundamentales de la Nomografía, extrictamente necesarios para la composición y fácil inteligencia de un sistema de ábacos ó nomogramas, desconocidos hasta ahora y aplicables con manifiesta ventaja sobre cualquier otro procedimiento, á la resolución de una serie de cuestiones, interesantes en teoría y de utilidad en la práctica, referentes á las ciencias fisico-matemáticas.

— *Académie des sciences de Paris.* Concours pour l'année 1916. Appliquer les méthodes d'Henri Poincaré à l'intégration de quelques équations différentielles linéaires, algébriques, choisies parmi les plus simples. — Concours pour l'année 1917. Déterminer et étudier toutes les surfaces qui peuvent, de deux manières différentes, être engendrées par le déplacement d'une courbe invariable.

Vermischtes.

— Mit dem Beginn des 45. Jahrganges der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht sind die Herren W. Lietzmann und H. Grimsehl in die Redaktion der Zeitschrift eingegangen.

Über den Funktionsbegriff und die graphische Darstellung bei Oresme.

Von HEINRICH WIELEITNER in Pirmasens.

„... ganz abgesehen davon, daß man sich doch wohl die Gedankenarmut der mittelalterlichen Mathematik tiefer vorstellt, als sie ist, so darf der Historiker an den Epochen des Tiefstandes nicht achselzuckend vorübergehen; er muß mit hinunter und auch die dünnsten Fäden beachten, woran die Kontinuität der Entwickelung hängt."
J. L. HEIBERG, Biblioth. Mathem. 12_3, 1911/12, S. 338/39.

1. — Einleitung.

Im vorigen Jahrgang der Bibliotheca Mathematica habe ich einen Aufsatz veröffentlicht[1]) über jene zuerst durch M. CURTZE[2]) bekannt gewordene Schrift nach ORESME, die von dem Wachsen und Abnehmen der ARISTOTELischen Formen, wie Wärme, Feuchtigkeit und besonders »Bewegung« im allgemeinen ARISTOTELischen Sinne handelt und offenbar bis ins 16. Jahrhundert hinein viel gelesen worden war. Ich hatte die von CURTZE benützte Handschrift mit den bekannten Druckausgaben[3]) des *Tractatus de latitudinibus formarum* verglichen und die von CURTZE aufgestellten Urteile revidiert. Insbesondere hatte ich festgestellt, daß die Scholastiker wohl daran dachten, jene Formen als Funktionen der räumlichen Erstreckung oder der Zeit aufzufassen, wie wir sagen, daß ihre graphische Darstellung aber rein spekulativ war, und daß diese Darstellung mit unserer heutigen Koordinatenmethode nur entfernte Ähnlichkeiten auf-

1) *Der „Tractatus de latitudinibus formarum" des ORESME;* Biblioth. Mathem. 13_3, 1912/13, S. 115—145.

2) In der Abhandlung: *Über die Handschrift R. 4°. 2, Problematum EUCLIDIS explicatio der Königl. Gymnasialbibliothek zu Thorn*; Zeitschr. Math. Phys. 13, 1868, Suppl. S. 45—104, bes. S. 92—97.

3) Padue 1486; Venetijs 1505, in dem Bande *Questio de modalibus BASSANI POLITI*; Vienne 1515, in dem Bande *Contenta in hoc libello.* Eine Ausgabe Padue 1482 ist nur bibliographisch bekannt. — Von dem sehr seltenen Bande *Questio de mod.* besitzt, wie mir Herr E. RATH mitgeteilt hat, die Königl. Landesbibliothek Stuttgart ein vollständiges Exemplar. Ein unvollständiges ist zu Wolfenbüttel (s. meinen ersten Aufsatz S. 117/18); in Berlin und München ist das Buch nicht vorhanden.

weise. Wohl wußte ich, daß meine Arbeit nicht abschließend sein konnte, da eine größere Schrift Oresmes als in verschiedenen Handschriften vorliegend bekannt war, die offensichtlich eine ausgedehntere Bearbeitung des *Tract. de lat. form.* darstellte, aber noch niemals näher untersucht worden war. Trotzdem wagte ich am Schlusse meiner Abhandlung die Hoffnung auszusprechen, daß die von mir vertretene Auffassung des *Tract. de lat. form.* auch durch zukünftige, eingehendere Untersuchungen über die spärlichen Spuren der Mathematik in den scholastischen Traktaten nicht mehr wesentlich verändert werden würde.

Ich wußte damals nicht, daß solche Untersuchungen gerade zu der Zeit, als ich das schrieb, schon im Gange waren, und erfuhr davon erst als P. Duhem den 3. Band seiner Studien über Leonardo da Vinci herausgegeben hatte.[1]) Duhem hat in diesem Bande alle Pariser Scholastiker behandelt, die als Vorläufer der Galileischen Mechanik zu betrachten sind. Daß dabei der »Latitudo«-Begriff und die umfangreiche schriftstellerische Tätigkeit Oresmes eine große Rolle spielen mußten, war von vornherein zu erwarten. In der Tat hat Duhem eine der in Paris befindlichen Kopien der oben erwähnten größeren Oresmeschen Schrift studiert und wichtige Bruchstücke aus ihr mitgeteilt. Man kann sich denken, wie groß mein Erstaunen war, als ich dort (S. 375) die Kapitelüberschrift las: „Nicole Oresme inventeur de la Géométrie analytique“, als ich etwas weiter zurück (S. 386) auf die Frage stieß: „N'est il donc pas juste de dire que la Géométrie analytique à deux dimensions a été créée par Oresme?“ Sollte wirklich diese nie gedruckte Abhandlung Oresmes etwas so ganz anderes enthalten haben als der *Tract. de lat. form.*?

Schon die genauere Lektüre der von Duhem dieser Oresmeschen Schrift gewidmeten Kapitel überzeugte mich aber, daß dies nicht der Fall ist. Eines freilich ist daraus mit Deutlichkeit zu ersehen. Der *Tract. de lat. form.* ist kein bloßer Auszug aus der großen Schrift, sondern eine eigens gefertigte Bearbeitung desjenigen Teiles des Originals, der sich auf die graphische Darstellung des Variierens der Formen bezieht, unter Weglassung der vielfachen Anwendungen, die Oresme davon machte. Duhem hat nun (im ganzen Werk) die Originalstellen, die er anführt, mit wenigen Ausnahmen ins Französische übersetzt. Sollte ich aber ganz klar sehen können, so mußte ich bei der Subtilität der Begriffe, die sich noch dazu nicht immer mit heutigen Begriffen decken, den lateinischen Wortlaut

---

1) *Études sur Léonard de Vinci.* III^e^ Série: *Les précurseurs parisiens de Galilée.* Paris, A. Hermann, 1913. Die erste und zweite Reihe dieser Studien waren ebendort erschienen 1906 bzw. 1909 mit dem Untertitel: *Ceux qu'il a lus et ceux qui l'ont lu.* In dieser Abhandlung wird unter „a. a. O.“ immer nur der III. Band zitiert.

haben. Ich kann Herrn Duhem nicht genug dankbar sein, daß er mir seine eigenen Auszüge[1]) aus der umfangreichen Handschrift zur Verfügung stellte. Ich glaube, daß ich dadurch in den Stand gesetzt bin, die Frage nach der Art und Auffassung der graphischen Darstellung bei den Scholastikern in einem gewissen Sinne abschließend zu behandeln. Ich werde im folgenden ziemlich alles, was sich darauf bezieht, im Wortlaut wiedergeben. Für die Beurteilung selbst würde ja weit weniger genügen. Aber einerseits könnte dann irgendwer denken, es möchte gerade in den weggelassenen Stellen noch Wichtiges stehen, anderseits besteht in diesem Falle nicht wie bei gedruckten Werken die Möglichkeit, sich darüber zu vergewissern, und drittens dürfte die ganze Oresmesche Schrift, die doch für die graphische Darstellung grundlegend zu sein scheint, schwerlich einmal völlig abgedruckt werden.

2. — Der Begriff »latitudo«.

Bevor ich zur Besprechung der in Rede stehenden Schrift Oresmes übergehe, will ich ein Wort sagen über den »Latitudo«-Begriff, den Oresme ja, wie ich schon in meinem ersten Artikel hervorhob, bereits vorfand. Auch über die Entstehung und Einführung dieses Begriffes hat Duhem neue Aufklärungen gebracht.[2]) Nach ihm diskutierten die Theologen und Philosophen schon vor Joh. Duns Scotus († 1308) und vor Thomas von Aquin (1225—1274) über das Wachsen und Abnehmen („de intensione et remissione“) gewisser Eigenschaften. Duhem führt diese Diskussionen auf eine Stelle in des Petrus Lombardus († 1164) *Sententiarum libri quatuor* zurück, wo dieser berühmte Theologe von der verschieden großen Stärke der Tugend der Liebe im Menschen zu verschiedenen Zeiten spricht.[3]) Die Betrachtungen über die Liebe wurden dann auf andere, besonders physikalische »Formen« übertragen. Das Wort »latitudo« hat

---

1) Duhem hat natürlich nur diejenigen Kapitel abgeschrieben, die ihm Beziehung zur Mechanik zu haben schienen. Den bunten Inhalt der übrigen wird man aus den S. 221/2, 227 mitgeteilten Überschriften einigermaßen ersehen.

2) a. a. O., bes. S 314—342.

3) Lib. I, Dist. XVII. Die Stelle lautet im Original (bei Duhem, a. a. O. S. 316/17 französisch):

'Hic queritur, si charitas Spiritus sanctus est, cum ipsa augeatur et minuatur 'in homine, et magis et minus per diversa tempora habeatur; utrum concedendum 'sit, quod Spiritus sanctus augeatur vel minuatur in homine et magis vel minus 'habeatur.'

Siehe z. B. *Petri Lombardi Opera omnia*, Tom. II, 1855, S. 566 (= *Patrologiae cursus completus*. Accurante J.-P. Migne. In via dicta d'Amboise, prope portam Lutetiae Parisiorum vulgo d'Enfer nominatum, seu petit-Montrouge. Series latina, tom. CXCII).

Duhem zum ersten Male bei Henricus Goethals aus Gent (1217—1293) gefunden. Dieser sagt in seinen *Quodlibeta*[1]):

'... intensio et remissio in formis habent fieri in essentia formarum 'ex ipsa natura qua in sua essentia latitudinem habent. Et ideo non ex 'natura subiecti: sed ex natura ipsi forme secundum se investiganda est 'ratio et causa augmentationis.'

Man sieht, daß der Begriff »latitudo« hier in ähnlicher Bedeutung auftritt wie in der von »Spielraum« oder »Schwankungsbereich«, den das Wort »latitude« noch heute im Französischen hat und in welcher Bedeutung es sogar ins Deutsche als allerdings nur mehr selten gebrauchtes Fremdwort überging. Man würde es hier vielleicht am besten mit »Schwankungsmöglichkeit« wiedergeben.

Daß diese Bedeutung die ursprüngliche war, geht aus einer anderen Stelle noch besser hervor, auf die Duhem ebenfalls hinweist. Die Stelle befindet sich in einer *Summa logicae*, die sich unter den *Opuscula* des Thomas von Aquin befindet, sicher aber etwas jünger ist.[2]) Ich verzichte auf die Wiedergabe dieser (etwas längeren) Ausführungen und gebe statt dessen hier eine Stelle aus Bradwardins († 1349) *Tractatus proportionum*, die offenbar einen ähnlichen Sinn hat[3]):

'Et notandum, quod latitudo qualitatis vocatur illa distantia que est 'inter gradus distantes: et sicut in omni linea sunt infinita puncta: et in 'omni tempore infinita instantia: sic in omni latitudine sunt infiniti gradus.'

Im Anfang des 14. Jahrhunderts war der so umschriebene Begriff »latitudo« allgemein im Schwange. Einige, wie Duns Scotus, scheinen nur gerade das Wort nicht benutzt zu haben.[4]) Dafür geht aber von Duns Scotus und von einem anderen Franziskaner, Richard von Middleton († um 1300), eine entscheidende Wendung aus, die wir berühren müssen. Die Fragen, um die sich die Philosophen stritten, betrafen hauptsächlich das Wie der Veränderung einer »Form«. Es gab vor allem zwei Richtungen. Die eine vertrat die Aristotelische Ansicht, daß eine »qualitas«

1) *Quodlibeta Magistri Henrici Goethals a Gandavo doctoris solemnis* ... In chalcographia Iodoci Badii Ascensii ... Anno domini MDXVIII. Quodl. V, quæst. XIX; fol. CXCV, r⁰ u. v⁰. — Duhem gibt das Zitat französisch (a. a. O. S. 319).

2) *Opuscula omnia Divi Thomæ Aquinatis.* Opusc. XLVIII. *Totius logicæ Aristotelis summa*; tract. II: De prædicamentis, cap. IV. (Ausgabe Lugduni 1562, S. 336 Sp. 1 bis S. 337 Sp. 2.) Bei Duhem (französisch), S. 321. Dieses „Opusculum" fehlt in verschiedenen alten und neuen Ausgaben der *Opuscula*. — Ich erwähne hier dankend, daß mir bei Feststellung dieser Zitate Herr Kollege G. Lindner in München in liebenswürdiger Weise behilflich war.

3) Siehe den Band *Questio de modalibus Bassani Politi* (Venetijs 1505), Bl. (9)ᵛ Sp. 2.

4) Siehe meinen ersten Aufsatz S. 123, Fußnote 3. Auch Duhem erwähnt bei Duns Scotus das Wort »latitudo« nicht.

aus ihrem inneren Wesen heraus wachse und abnehme, nicht durch Aneinanderfügung von Teilen, wie eine »quantitas«. Diese Richtung, die noch mehrere Parteien zählte, war, wie es scheint, bis gegen das Ende des 13. Jahrhunderts die herrschende. Daneben muß es schon ziemlich früh auch die entgegengesetzte Ansicht gegeben haben, daß zwischen der Veränderung einer »qualitas« und der einer »quantitas« kein Wesensunterschied sei. Diese zweite Richtung gewann mit den beiden genannten Ordensgenossen die Oberhand. Beide unterscheiden zwischen einer »quantitas molis«, der eigentlichen Quantität, und einer »quantitas virtutis« (auch »qu. virtualis«, »qu. perfectionis«), d. i. der Intensität einer »qualitas«.[1])

Diese Fragen könnten uns wohl gleichgültig sein, wenn nicht an die letztere Ansicht die Möglichkeit des Vergleichs einer »qualitas« mit einer stetigen Größe, also z. B. einer Strecke, sich anschlösse. Auf einem solchen Vergleich beruht aber die graphische Darstellung. Eine »Wärme«, eine »Weiße«, eine »Geschwindigkeit« ist nach der letzteren Theorie ein Ding, an das man einen Maßstab anlegen darf. Eine solche Ansicht stellte für Thomas von Aquin noch eine Unmöglichkeit dar. Im 14. Jahrhundert sehen wir aber allenthalben die starre Schranke, die Aristoteles zwischen »qualitas« und »quantitas« aufgestellt hatte, gebrochen. Nach Duhem spricht schon im Jahre 1344 Gregor von Rimini[2]) von einer »latitudo«, die doppelt so groß ist als eine andere. Man wendet das Zahlensystem auf die »latitudines« an. Damit macht aber zugleich der Begriff »latitudo« eine Schwenkung. Er bedeutet jetzt auch — die erste Bedeutung bleibt immer bestehen — die Intensität selbst. Diese Zweideutigkeit hatte mich schon bei der Beurteilung des *Tract. de lat. form.* gestört. Wenn aber die »latitudines« dann eingeteilt werden, wie eben z. B. im *Tract. de lat. form.*, in »uniformes« und »difformes«, die letzteren wieder in »uniformiter difformes« und »difformiter difformes«, so tritt das Wort »latitudo« eigentlich in einer dritten Bedeutung auf, die allerdings der ersten nahesteht. Es bedeutet die sämtlichen Grade (»gradus«) der »qualitas« als Ganzes betrachtet in Hinsicht auf die Art ihrer Veränderung. Es ist ein Versuch einer Einteilung der Funktionen. In die Zeit dieser Diskussionen hinein fällt nun Oresmes Tätigkeit, vor allem die Schrift, zu deren eingehendem Studium wir uns nun wenden.

1) *Clarissimi Theologi Magistri Ricardi de Mediavilla super quatuor libros Sententiarum Petri Lombardi quæstiones subtilissimæ.* Brixiæ MDXCI. Lib. I, Dist XVII, art. II, quæst. I — Bd. I, S. 162.

Ioannis Duns Scoti Doctoris Subtilis IV libri super Sententias. Lib. I, Dist. XVII, quæst. III (s. z. B. Bd. X der *Opera omnia juxta editionem Waddingi*, Parisiis MDCCCXCIII, S. 54 Sp. 1 bis S. 101 Sp. 2).

2) Gregorius de Arimino: *Lectura in primo Sententiarum.* Dist. XVII, quæst IV (in der Ausgabe von Paulus de Genazano, Venetijs 1503, Bl. 91v⁰ bis 97v⁰).

3. — Allgemeines über die zu untersuchende Handschrift.

Wann Oresme geboren ist, weiß man nicht genau. Da aber bekannt ist, daß er im Pestjahr 1348 im Pariser Collège de Navarre sich befand, um Theologie zu studieren, und die Stipendiaten dort wohl zwischen 20 und 30 Jahren alt waren, hat man daraus geschlossen, daß er um 1323 geboren sein müsse.[1]) Am 4. Dezember 1361 verließ er dieses Collège, dessen Vorsteher er zuletzt gewesen war. Da in dem Collège Lateinzwang herrschte, müssen natürlich seine französisch geschriebenen Arbeiten nach 1361 datiert werden. Lateinisch geschriebene aber, wie etwa die jetzt zu besprechende Handschrift, die den Titel trägt: *Tractatus de figuratione potentiarum et mensurarum difformitatum*[2]) könnten auch später entstanden sein. Nun habe ich freilich in meiner ersten Abhandlung darauf hingewiesen, daß Oresme schon am 4. Dezember desselben Jahres 1361 eine Schrift gegen die Astrologen in französischer Sprache mit dem (lateinischen) Titel *Liber de Divinacionibus* veröffentlichte.[3]) Und ich legte nahe, daraus zu schließen, daß auch der *Tractatus de lat. form.* oder, wie ich jetzt verbessern muß, die in Rede stehende Handschrift, schon vor 1361 entstanden sei. Aber ich halte heute diesen Schluß für weniger bindend. Denn die wissenschaftliche Sprache der Philosophie hätte sich Oresme aus der »langue vulgaire« erst schaffen müssen, während sie im Lateinischen fertig vorlag. Das war ja auch der Grund, daß man noch Jahrhunderte später gewisse Sachen lieber lateinisch schrieb, oder daß man den in der Landessprache gehaltenen Haupttext mit lateinischen Sätzen und Wendungen spickte.

Freilich hat Oresme wirklich in mehreren anderen Fällen die französischen Kunstausdrücke gebildet. Wie dem aber sei, es ist ganz gewiß, daß der *Tract. de figur. potent.* vor 1371 entstand. Spätestens in jenem Jahre übersetzte und kommentierte Oresme im Auftrage Karls V. die „Politik“ des Aristoteles, und in dieser Übersetzung hat er den *Tract. de figur.*

1) Vgl. Francis Meunier, *Essai sur la vie et les ouvrages de Nicole Oresme.* [Thèse], Paris 1857, S. 3/4, und M. Curtze, *Die mathematischen Schriften des Nicole Oresme (circa 1320—1382)*, Berlin 1870, S. 2. Curtze hat die bibliographischen Angaben Meuniers, der offenbar Literat war, in Hinsicht auf die mathematischen Schriften wesentlich verbessert. Die in Rede stehende Handschrift hat Meunier z. B. als „Traité contre l'astrologie“ bezeichnet (a. a. O. S. 31). Weitere Literatur bei Duhem, a. a. O. S. 346/47.

2) Bibl. nat. Paris, fonds lat. 7371 (olim Colbertinus 4650), fol. 214^r—fol. 266^r. Die Handschrift stammt aus dem 15. Jahrhundert. Eine spätere Hand hat hinzugefügt: *De latitudinibus formarum ab Oresme.* Ich werde die Handschrift in Zukunft einfach mit Hs. bezeichnen.

3) Siehe M. Curtze, *Extrait d'une lettre*; Bull. sc. math. 6, 1874, S. 57—60.

potent., wenn auch unter etwas anderer Bezeichnung, zweimal zitiert.[1]) Der Titel ist überhaupt schwankend in den Handschriften, die man von dem *Tract. de fig. potent.* kennt. Die Bibliothèque nationale von Paris besitzt deren noch zwei. Die eine hat den Titel *De uniformitate et difformitate intentionum* und ist im Kolophon ebenso bezeichnet.[2]) Aber auch unsere Handschrift hat im Kolophon die nämliche Benennung. Es ist das wohl überhaupt der treffendste Titel. Die zweite Pariser Handschrift[3]) hat gar keine Aufschrift. Das Kolophon aber lautet: „Explicit tractatus de configuracionibus qualitatum . . . Nycolai Orem." Eine weitere Kopie des Werkes befindet sich in Florenz in der Biblioteca Magliabecchiana. Sie hat keinen Titel und kein eigentliches Kolophon.[4]) Auch die in der öffentlichen Bibliothek zu Basel befindliche Handschrift[5]) scheint keinen Titel zu haben, und das Kolophon lautet nur: „Explicit tractatus utilis sicut patet intuenti diligenter M. Oreb (!)." Duhem hat nur die eine Pariser Handschrift benutzt. Es ist aber nicht anzunehmen, daß die anderen wesentlich Verschiedenes enthalten, wenn auch die Kapitelanzahlen ein wenig schwanken. Die Titel der Handschriften wollen ja auch alle dasselbe besagen. Der unserer Handschrift steht etwas isoliert. Das Wort »potentia«, das gewiß hier nichts anderes bedeuten will als eben eine »qualitas«, die »latitudo« besitzt, kommt in dem von Duhem exzerpierten Teil des Werkes nicht mehr vor. Das übrige werden wir aus dem Inhalt selbst ersehen. Nach dem oben erwähnten Pseudotitel und einer vom Kopisten vorausgeschickten Anrufung der Hl. Maria steht auf Bl. 214r die folgende kurze Einleitung[6]):

1) *Traduction des „Politiques" d'Aristote* (gedruckt Paris 1489), livre VIII, chap. 8: „Par art magique et naturelment, si comme je declaray autrefoiz en j traictié appelé de Deformitate qualitatum." Ebenda livre VIII, chap. 12: „Et les causes et la maniere comment tele chose puet estre naturelment, je mis en j traictié appelé de Difformitate qualitatum". Zitiert nach Meunier a. a. O. S. 31 (vgl. auch S. 17).

2) Fonds lat. 14 579 (olim fonds St. Victor n° 111); fol. 18r — fol. 40v.

3) Fonds lat. 14 580 (olim fonds St. Victor n° 100); fol. 37r — fol. 60v.

4) Conventi soppressi I. IX. 26; fol. 14r —36r. — Über die bis jetzt aufgeführten Handschriften gibt noch genauere Auskunft M. Curtze in seiner oben zitierten bibliographischen Schrift über Oresme, S. 11—13.

5) N° F. III 31 (4°); fol. 2r — fol. 29r. — Über diese Handschrift hat M. Curtze in dem zitierten Aufsatz des Bull. sc math. einiges mitgeteilt.

6) Da es sich im folgenden ja nicht um eine textkritische Ausgabe handeln soll, nehme ich alle selbstverständlichen, von Duhem schon am Text vorgenommenen Verbesserungen ohne weiteres auf und erwähne auch nicht, was ich selbst noch an kleinen Änderungen beigefügt habe. Vorgeschlagene Änderungen oder Ergänzungen werden in eckige Klammern gesetzt. Mehrere dieser Vorschläge stammen von Herrn F. Hofinger (München), der die große Freundlichkeit hatte, das Ganze vom Standpunkt der Philologie aus durchzusehen. Ich gebe aber nicht an, ob ein Vorschlag von Duhem, Hofinger oder mir herrührt. Dasselbe gilt für die in runden Klammern beigefügten Fragezeichen, die sich auf die Lesart oder auch auf den Sinn beziehen.

'Cum ymaginationem veterum[1]) de difformitate et uniformitate inten-'tionum ordinare cepissem, occurerunt [mihi quedam alia] que huic pro-'posito intento sunt consona, ut iste tractatus non solum excitato[rie] 'procederet, sed etiam distinctive; in quo ea que aliqui alii utuntur circa 'hoc confuse sentire et obscure eloqui ac inconvenienter aptare, studui 'dearticulatim et clare tradere et quibusdam aliis materiis utiliter applicare.'

Hierauf folgt der wirkliche Titel. Dann eine Inhaltsübersicht, zuerst über die drei Hauptteile, nämlich

'Prima pars: De figuratione et potentiarum uniformitate et difformi-'tate. — Secunda pars: De figuratione et potentiarum successivorum (sic). — 'Tertia pars: De acquisitione et mensura qualitatis et velocitatis.'

Schließlich werden die Kapitel mit ihren Überschriften aufgezählt, 39 für den ersten, 40 für den zweiten, 13 für den dritten Teil. Ich gebe diese Überschriften unten an den geeigneten Stellen.[2]) Auf Bl. 215ᵛ beginnt dann der Text, den ich im folgenden wiedergebe und mit Anmerkungen begleite.[3])

4. — Teil 1, Kap. 1: De continuitate intentionis.

215ᵛ 'Omnis res mensurabilis extra numeros ymaginatur ad modum quan-'titatis continue. Ideo opportet pro ejus mensuratione ymaginare puncta, 'superficies et lineas aut istorum proprietates, in quibus, ut voluit ARISTO-'TELES, mensura seu proportio per prius reperitur. In aliis autem cogno-'scitur in similitudine, que per intentum referuntur ad ista et si vel sunt 'puncta individualia aut linee, tamen oportet ea fingere pro earum men-'suris et earum proportionibus cognoscendis. Omnis igitur intensio suc-'cessive acquisibilis ymaginanda est per lineam rectam perpendiculariter 'erectam super aliquod punctum aut aliquot puncta [ex]tensibilis spacii 'vel subjecti.[4]) Verbi gratia, nam qualiscunque proportio reperitur inter

Stockfleckige oder sonst ganz unlesbare Stellen, auch fehlende Figuren, gebe ich durch /////// wieder. Punktierung . . . bedeutet, daß ich eine Auslassung gemacht habe. In besonderen Fällen mache ich Fußnoten. Die Interpunktion ist modern. An der Orthographie aber habe ich gegenüber meiner Vorlage nichts geändert. Einige Absätze habe ich selbst in schwer übersehbaren Darlegungen eingeführt. Die Abteilungszeichen, die sich wohl in der Hs. befanden, hat DUHEM nicht kopiert.

1) Dieses Wort „veterum" ist sicher verderbt und durch das in den anderen Handschriften befindliche „meam" zu ersetzen; eine der Handschriften hat „veterum vel meam" (vgl. G. ENESTRÖM, Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/7, S. 287).

2) Im Kontext selbst scheinen die Überschriften nur teilweise wiederholt zu sein. Wenn ich also sage, das und das Kapitel „trägt die Überschrift", so ist das nicht immer wörtlich zu nehmen.

3) Die Fußnoten sollen zugleich denjenigen Leser, der nur eine flüchtige Übersicht gewinnen will, auf die Hauptpunkte aufmerksam machen.

4) Unvermittelt tritt also hier der Gedanke auf, daß man veränderliche Intensitäten durch Strecken darstellen soll, die man »senkrecht« über den Punkten des »Subjekts« errichtet.

‘intensionem et intensionem, de intensionibus que sunt ejusdem rationis,
‘similis proportio invenitur inter lineam et lineam, et e converso, quemad-
‘modum una linea alteri linee est commensurabilis et alteri incommensu-
‘rabilis, ita et conformiter de intensionibus, quia quedam sunt commen-
‘surabiles ad invicem et quedam incommensurabiles quomodolibet | propter 216r
‘continuitatem corporum. Ergo mensura intentionum potest ymaginari
‘congrue sicut linearum mensura, cum etiam intentio possit eodemmodo
‘sicut linea in infinitum diminui et quantum est //////// in infinitum augeri.’

‘Et rursum intensio, secundum quam aliquod dicitur magis tale
‘aut minus, ut minus album aut magis velox, ipsa quidem secundum quod
‘intensio vel extensio puncti est tantum uno modo divisibilis et //////// in
‘infinitum ad modum continui,[1]) ideo non potest convenientius ymaginari
‘quam per illam speciem continui que primo est divisibilis et uno modo
‘tantum, scilicet per lineam. Et quoniam linearum quantitas sive pro-
‘portio notior est et facilius a nobis concipitur, ideo linea est in prima
‘specie continuorum, ideo per lineas ymaginanda est intentio talis. Maxime
‘vero et convenientissime per illas que subjecto applicate super ipsum
‘perpendiculariter eriguntur, quarum consideratio ad cujuslibet intentionis
‘notitiam naturaliter juvat et ducit, prout in 4⁰ capitulo sequenti plenius
‘apparebit ideoque intentiones equales [per equalem lineam, et duplas] per
‘duplam lineam et semper proportionaliter procedendo[2]), et istud est uni-
‘versaliter intelligendum de omni intentione ad ymaginationem demonstra-
‘bili (?), sive sit intentio qualitatis active, sive non active, sive sensibilis,
‘sive insensibilis subjecti aut objecti, sive medii ut de luce corporis solis
‘et de lumine medii vel de specie in medio vel influentia aut virtute dif-
‘fusa et sic de aliis. Excepta forsitan intentione curvitatis, de qua dicetur
‘ad partem in capitulis XX⁰ et 21⁰ hujus partis. Hujusmodi vero linea
‘intentionis, de qua nunc dicendum est, non extenditur extra punctum vel
‘extra subjectum secundum rem, sed per ymaginationem et ad quamvis
‘partem nisi quod convenientius ymaginatur sursum perpendiculariter stare
‘super subjectum qualitate formatum.’[3])

5. — Teil I, Kap. 2: De latitudine qualitatis.

‘Omnis igitur intentio per predictam lineam designata proprie debet
‘vocari longitudo illius qualitatis; propter quid? quia in alteratione conti-

1) Die Hs. hat hier „et ideo“.

2) Nach langatmigen Ausführungen über das Entsprechen von Intensitäten und Strecken wird jetzt der Gedanke der »senkrecht« errichteten (»applicate«!), die Stärke der Intensität darstellenden Strecken etwas genauer formuliert.

3) Es sei also nur eine Vorstellung und liege nicht in der Natur der Sache, daß die darstellende Strecke sich vom Subjekt aus erhebe. Außerdem sei es eigentlich gleichgültig, nach welcher Richtung man die Linie ziehe; die »senkrechte« (Verf. meint darunter offenbar zunächst die »vertikale«) sei nur die bequemste.

216v 'nua[1]) essentialiter non exigitur successio [vel] extensio scilicet | secundum 'partes subjecti, quia potest totum simul intensive alterari, sed requiritur 'successio secundum intentionem, ideo sicud in motu locali illa dimensio 'diceretur longitudo spacii sive vie, secundum quam exigitur successio, ita 'conformiter hujusmodi intentio, secundum quam [exig]itur successio, deberet 'dici longitudo ipsius qualitatis ...[2]) Item nulla qualitas in alteratione 'acquisibilis potest ymaginari sine intensione aut divisibilitate secundum 'intensionem, sed potest bene ymaginari sine extensione; modo (?) qualitas 'subjecti indivisibilis ut anime vel angeli non habet extensionem. Cum 'igitur ymaginatur longitudo sine latitudine mathematice et non e con-'trario et tamen intensio sit referenda ad aliquam dimensionem ut patet 'in precedenti capitulo, ipsa referenda est ad longitudinem et non ad lati-'tudinem et nomine [longitudinis] magis proprie appellanda. Unde patet, 'quod qualitas subjecti indivisibilis proprie non habet latitudinem. Sed 'multi theologi locuntur improprie de latitudine caritatis, quia si per lati-'tudinem intelligunt intensionem, tunc contingeret invenire latitudinem 'sine longitudine[3]) et eorum transsumptio videtur incongrua. Verumtamen 'hujusmodi intensionem verbo latitudine qualitatis [designemus] prout 'dicatur plenius in capitulo isto sequenti.'

6. — Teil I, Kap. 3: De longitudine qualitatis.

'Cujuslibet qualitatis extense sua extensio debet vocari latitudo et 'predicta extensio designari potest per lineam in subjecto descriptam, super 'quam linea intentionis qualitatis ejusdem perpendiculariter erigitur, modo 'cum omnis talis qualitas habeat intentionem et extensionem, que in ejus 'mensura sit attendenda, ideo si ejus intensio diceretur [longitudo], tunc ex-'tensio, que esset 2ª dimensio, vocaretur latitudo, et etiam e contrario, si 'intensio dicatur latitudo, extensio vocabitur longitudo. Sicut generaliter(?) 'corporis superficiei linea longitudinis et linea latitudinis perpendiculariter 'se invicem dividunt, ita et extensio qualitatis que debet dici ejus latitudo
217r 'ymaginanda est per | lineam perpendiculariter adjacentem linee longitu-

1) Die »alteratio« ist die qualitative Veränderung.

2) Es wird nochmals zum Ausdruck gebracht, daß die Intensität bei qualitativer Veränderung, gleich der Geschwindigkeit bei Ortsbewegung, als »longitudo« bezeichnet werden sollte. Im folgenden wird das zu begründen versucht, im letzten Absatz aber versichert, daß der übliche Sprachgebrauch, der die Intensität mit »latitudo« bezeichne, beibehalten werden wolle.

3) Es ließe sich entgegenhalten, daß auch bei unteilbarem Subjekt ja immer die Zeit als Subjekt genommen werden könnte. Wahrscheinlich wurde beim ersten Gebrauch des Wortes »latitudo« (s. oben S. 196) gar nicht an den Gegensatz zu »longitudo« gedacht. Von einer Beziehung zur geographischen Länge und Breite, wie sie Curtze annahm, ist jedenfalls keine Spur zu entdecken.

'dinis qualitatis ejusdem.[1]) Et quemadmodum in permanentibus extensio 'debet dici latitudo qualitatis et intentio longitudo, ita conformiter in 'successivis, cujusmodi sunt motus et sonus et similia[2]), extensio eorum in 'tempore voceretur latitudo et intensio longitudo . . .[3]) Extensio igitur 'qualitatis in nomine dicti vocetur ejus longitudo et intensio ipsius voce'tur ipsius altitudo vel latitudo.[4]) Sed qualis[5]) sit, patet ex dictis; quod 'quidam moderni[6]) vocant latitudinem qualitatem propriam totam, sicut 'abusio est pro latitudine superficiei intollere (intelligere?) totam super'ficiem vel figuram, quia alique latitudines superficierum vel figurarum 'inequalium sunt equales, ita similiter, sicut patebit per consequentia, multe 'latitudines qualitatum inequalium sunt equales vel etiam e contrario.'

7. — Teil I, Kap. 4: De quantitate qualitatis.

'Cujuslibet qualitatis quantitas linealis[7]) est ymaginanda per super'ficiem cujus longitudo vel basis[8]) est linea in subjecto quali protracta ut 'dicit capitulum precedens, et cujus latitudo sive altitudo[9]) designatur per 'lineam super basim productam perpendiculariter erectam, sicut dicit capi'tulum 2m . . . Quod enim quantitas talis qualitatis per hujusmodi super-

1) Die Erstreckung des Subjekts (»extensio«) will Verf. also eigentlich als zweite Dimension aufgefaßt und mit »latitudo« bezeichnet haben. Es wird jetzt genauer gesagt, daß die beiden aufeinander senkrecht gedacht werden sollen.

2) Die »permanentes« sind Gegenstände, die gemäß ihrer körperlichen Erstreckung veränderlich sind, wie etwa ein Stab, der an verschiedenen Stellen in verschiedenem Grade weiß ist. Siehe auch meinen ersten Aufsatz S. 136.

3) Verf. sagt in dem weggelassenen Absatz, da es nun aber einmal gebräuchlich sei, die Wörter im umgekehrten Sinne zu verwenden und die Bezeichnung ja schließlich nichts ausmache, wolle er das Verständnis seiner Arbeit nicht durch seine Ausdrucksweise erschweren.

4) Auch im *Tract. de lat. form.* steht mehrfach »altitudo« statt »latitudo«. Vgl. meinen ersten Aufsatz S. 140. Ich halte es nicht für unmöglich, daß das Wort »altitudo« erst durch die Abschreiber in die Texte hineingebracht wurde.

5) Die Hs. hat „qualisque".

6) Ich habe hier ein „non" weggelassen, das in der Hs. steht. Jetzt sagt der Satz: die Bedeutung von »longitudo« und »latitudo« möge man aus dem Vorhergehenden entnehmen; einige »Moderne« verstünden nämlich unter »latitudo« die »Eigenschaft« in ihrer Gesamtheit. Das stellten wir ja schon oben (S. 197) fest, und es ist das auch im allgemeinen der Standpunkt des *Tract. de lat. form.* Das gegenüber Curtze auszuführen, war ein Hauptzweck meines ersten Aufsatzes.

7) Von dieser »quantitas« der »qualitas«, die also durch die Fläche der die »qualitas« darstellenden Figur ausgedrückt wird, werden wir noch hören (S. 228f.).

8) »Longitudo« oder »basis« ist also auch hier wie im *Tract. de lat. form.* die ganze Grundstrecke, und es gibt keine Stelle, die den Begriff »longitudo« als mit »Abszisse« verwandt erweisen würde.

9) Hier und im folgenden kann »latitudo« (oder »altitudo«) natürlich mit dem Begriff »Ordinate« in Beziehung gebracht werden. Im *Tract. de lat. form.* war das nur ausnahmsweise der Fall. — Nun folgt ein Loblied auf die graphische Darstellung.

'ficiem possit ymaginari patet, quia contingit dare superficiem illi quanti-'tati equalem (!) in longitudine sue extensioni et similem (!) in altitudine
217v 'eidem quantitati in | intentione, ut post patebit, [sc.][1]) per hoc debeamus 'ymaginare qualitatem, ut omnes dispositiones levius cognoscantur. [Sc.][2]) 'quia ejus uniformitas et difformitas citius, facilius et clarius perpen-'duntur, quando in figura superficiali aliquod simile describitur, quod ab 'ymaginatione velociter et perfecte capitur, quando in exemplo visibili 'declaratur. Satis enim difficile videtur, quid sit qualitas uniformiter dif-'formis, sed quid facilius [contra[3])] trianguli rectanguli altitudo est uni-'formiter difformis, certe hoc apparet ad propositum. Cum igitur intensio 'hujusmodi qualitatis per altitudinem talis trianguli fuit figurata et ei 'assimilata, sicut fiet in conjuncto capitulo, tunc de facili cognoscetur 'hujusmodi qualitatis difformitas, dispositio, figuratio et mensura, nec alio 'modo posset species diversimode difformitatis agnosci, nec aliter assignari, 'sicut patebit in capitulis 14⁰ et 15⁰ hujus partis ...[4]) Sed nunc ad pro-'positum intendo sicut [superficialis[5])] qualitas ymaginatur ut corpus, '[cujus[6])] corporis ymaginati basis est superficies ipsa informata qualitate sicut 'patebit plenius in processu. Cum autem in corpore quasi infinite sunt 'superficies equales et cujuslibet earum qualitas ymaginatur ut corpus, non 'est inconveniens, sed oportet imaginare unum corpus secundum situm 'esse ubi aliud, vel etiam quodlibet simile, per penetrationem vel etiam 'per mathematicam superpositionem secundum similes partes corporum sic 'situatorum, que tamen penetratio non est in re et quamvis qualitas [super-
218r 'ficialis[7])] ymaginatur per corpus et non contingit | esse vel ymaginare '4am dimensionem, tamen qualitas corporalis ymaginatur habere duplicem 'corporeitatem, unam veram ad extensionem subjecti secundum omnem 'dimensionem, aliam vero solum ymaginatam ab intensione ipsius quali-'tatis infinities replicate secundum multitudinem superficierum subjecti, 'cujus ymaginationis oportunitas prius tacta est et postea[8]) plenius patebit.'

8. — Teil I, Kap. 5: De figuratione qualitatis.

'Omnis qualitas linearis figuratur ad modum alicujus superficiei super 'subjectam lineam perpendiculariter erecte. Sit enim AB linea informata

1) Statt „sc." hat die Hs. „sed quod".
2) Auch hier steht in der Hs. „sed" statt „sc.". 3) In der Hs. steht hier „quo".
4) Ich habe hier einen theologischen Vergleich weggelassen.
5) Die Hs. hat »punctualis«. Es ist aber, modern ausgedrückt, eine Funktion von zwei unabhängigen Variablen gemeint. Diese ist später auch mit »superficialis« bezeichnet und steht zwischen der »qualitas linealis« und der unten erwähnten »qu. corporalis«, die, wie der Verfasser richtig erkennt, auf ein 4-dimensionales Gebilde führen würde, das er freilich ablehnt. Eine »qu. punctualis« wäre eine solche, die nur »longitudo« hat (vgl. Teil III, Kap. 1, S. 128). 6) Die Hs. hat hier ein „quid".
7) Die Hs. hat »sensibilis«. 8) Nämlich im Teil I, Kap. 18 (s. S. 215/16).

'qualitate et quia per precedens capitulum qualitas ista designatur per 'superficiem, oportet quod ymaginetur figurata sicut superficies per quam 'ipsa designatur vel ymaginatur. Cujus quidem superficiei altitudo de-'signat intentionem qualitatis et oportet, quod illius superficiei vel figure 'quilibet punctus extra lineam *AB* subjectam stet perpendiculariter super 'eandem lineam *AB* ut patet per primum [capitulum]. Aliter enim qua-'litas [et] [in]tensio[1]) essent extra subjectum quia illud quod secundum 'istam ymaginationem [est] [super] subjectum, est secundum rem in sub-'jecto et e contra, propter quod si quid ymaginetur super subjectum et 'non perpendiculariter, id esset secundum rem extra subjectum[2]), unde 'patet quod nulla qualitas ymaginanda est per superficiem vel figuram, 'cujus angulus secundum basim sit major recto, sicut esset quadrangulus '*ABCD*, aut per circuli portionem semicirculo majorem sicut esset portio '*EFG*.[3]) Sed per quamlibet aliam figuram planam potest imaginari qua-'litas linearis.'

9. — Teil I, Kap. 6: De figurarum dearticulatione.
Kap. 7: De figurarum coaptatione.

Das 6. Kapitel handelt davon, daß für jede »qualitas« eine besondere »figura« nötig sei. | Wenn z. B. auf *AB* irgendein Punkt *C* liege, und 218v
die »intensio« sei in *C* das Doppelte von der in *A*, und in *B* das Dreifache von der in *A*, so müsse das auch in der Figur zum Ausdruck kommen, und eine solche »qualitas« könne also nicht durch ein Rechteck oder einen Halbkreis dargestellt werden.[4])

1) Die Hs. hat »extensio«.

2) Dieses Kapitel ist für die ganze Auffassung sehr wichtig. Es handelt sich also nur um Betrachtung der Veränderung innerhalb eines gewissen Intervalls, das durch die Grundstrecke *AB* dargestellt wird. Alles was links bzw. rechts von den beiden auf *AB* in *A* und *B* errichteten Loten liegt, gehört nicht zum »Subjekt«. Ein moderner Leser wird ja wohl fragen: Ja, wenn nun aber etwa eine Bewegung über die Stunde hinaus, die durch *AB* dargestellt wird, verfolgt werden soll, was dann? Das fragte aber eben weder Oresme, noch, soweit ich sehen kann, irgendeiner seiner scholastischen Vorgänger und Nachfolger. Wie wir noch genauer sehen werden, waren eben diese scholastischen Betrachtungen durchaus theoretisch, und es wurde gar kein wirklicher Vorgang verfolgt.

3) Die Hs. hat keine Figuren. Nur an einigen Stellen sind bedeutungs- oder auch sinnlose kleine Zeichnungen. Der Kopist verstand eben von der ganzen Sache nichts. Was ich also an Figuren im folgenden gebe, ist ergänzt, meist nach Duhem. Hier ist jedenfalls ein Trapez gemeint mit stumpfen Winkeln an der Basis *AB* und ein Kreissegment über der Basis *EG*, das größer als ein Halbkreis ist. Vgl. meinen ersten Aufsatz S. 137.

4) Von den Strecken, die die Intensitäten darstellen, heißt es: „. . . terminatarum [linearum] in summitate talis figure . . .“. Hiernach könnte man meinen, »summitas« solle die obere Begrenzungslinie der Figur heißen. Bald darauf steht aber »summitas« für »latitudo« oder »altitudo«: „. . . vel cujus summitas sit in

Das 7. Kapitel ist wieder von prinzipieller Wichtigkeit. Es lautet:
‘Quelibet qualitas linearis per omnem figuram planam designari potest
‘que super ipsam [basim] perpendiculariter ymaginata, proportionalis est
‘in altitudine eidem qualitati in intentione. Figura autem [erecta] super
‘lineam informatam qualitate dicitur proportionalis in altitudine qualitati
‘in intensione, quando quelibet recte linee perpendiculariter erecte super
‘ipsam lineam que est basis usque ad figure vel superficiei summitatem (!)
‘sunt proportionales in altitudine punctis (?), super que stant in intensione.

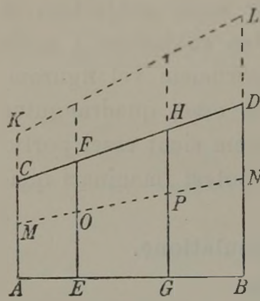


Fig. 1.

‘Verbi gratia: Est linea AB, super quam statuetur
‘superficies $ABCD$, eriganturque super basim due
‘linee EF et GH et igitur talis sit proportio EF
‘ad GH, qualis est proportio intentionis in puncto E
‘ad intentionem in puncto G. Et ceteris punctis
‘et lineis expositis dico quod hec superficies
‘vel figura est proportionnalis in altitudine huic
‘qualitati in intensione, ita quod altitudo superficiei
‘similis est intensioni qualitatis, quare per talem
219r ‘figuram vel superficiem qualitas | illa convenien-
‘tissime designatur. Cum autem super eandem lineam AB pluries
‘superficies possunt erigi proportionnales vel similes in altitudine, quedam
‘majores, alie minores, verbigratia superficies $ABKL$ major et superficies
‘$ABMN$ minor (vgl. Fig. 1) et quelibet alie que essent consimilis altitu-
‘dinis licet inequalis, sequitur quod ista qualitas linee AB poterit indiffe-
‘renter per earum quamlibet designari, ita tamen quod si ipsa qualitas
‘ymaginetur per aliquam istarum figurarum signatarum, tunc stante illa
‘figuratione qualitas dupla ad istam consimilis intensionis designabitur per
‘duplo altiorem figuram consimilis altitudinis et proportionalis, quantum-
‘libet fuit qualitas major vel minor, nihilominus prima qualitas potuit
‘ymaginari in principio per quamlibet majorem vel minorem superficiem
‘vel figuram. Iste autem superficies majores vel minores sunt simpliciter
‘inequales et dissimiles in figura et etiam in altitudine inequales et tamen
‘sunt in altitudine similes seu proportionnales. Unde si in duabus sectio-
‘nibus signentur duo puncta O et P eodemmodo quo patet in figura ultimo
‘nunc posita, tunc si proportio GH ad EF sit sicut proportio GP ad EO;
‘et sic de aliis quibuslibet duabus lineis erectis conformiter super ipsam
‘basim AB: dico quod superficies $ABCD$ et superficies $ABMN$ sunt con-
‘similis altitudinis sive proportionis.’ [1])

---

duplo major super C quam super A . .“. Im 7. Kapitel kommt »summitas« wieder im ersteren Sinne vor (s. S. 209).

1) Der langen Rede kurzer Sinn ist, daß man beim Auftragen der »altitudines« verschiedene Maßstäbe benutzen darf, z. B. alle »altitudines« verdoppeln usw., und

10. — Teil I, Kap. 8: De qualitate trianguli rectanguli.

‘Omnis qualitas ymaginabilis per triangulum habentem [rectum] angulum super basim potest ymaginari per omnem triangulum habentem rectum angulum super eandem basim et per nullam aliam figuram potest ymaginari. Quod enim talis qualitas sit ymaginabilis per talem triangulum patet ex capitulo precedenti eo quod aliqua [qualitas] potest esse proportionalis in intensione tali triangulo in altitudine et ista vocatur communiter qualitas uniformiter difformis terminata in intensione ad non gradum que tamen magis proprie posset dici qualitas uniformiter inequalis intensione sicut triangulus, cum ipsa proportionnalis est altitudine | uniformiter inequalis. 219^{v} Similiter ipsa deberet magis dici terminari ad privationem quam ad non gradum.[1]) Sed quoniam alia locutio magis est apud modernos affecta[ta] et est satis transmutabilis (?), ideo eam in hoc tractatu recipio et admitto . . .[2]) Sed quod indifferenter ista qualitas per omnem triangulum habentem rectum angulum super basim possit congrue ymaginari probatur sic: et sint duo trianguli tales, scilicet *ABC* minor et *ABD* major, super basim *AB* (vgl. Fig. 2); deinde erigatur perpendiculariter *EF* in majori triangulo, que secet lineam *AC* in puncto *G*; quoniam igitur duo trianguli *ABD* et *AEF* sunt equianguli, erit per 4^{tam} 6^{ti} Euclidis proportio *BD* ad *EF* sicut proportio *BA* ad *AE*. Duo quoque trianguli *ABC* et *AEG* sunt equianguli, quare per eandem 4^{tam} 6^{ti} Euclidis, proportio *BC* ad *EG* est sicut proportio *AB* ad *AE*; ergo per II 5^{ti} proportio *BD* ad *EF* est sicut proportio *BC* ad *EG*, et ita arguitur de quibuscunque lineis conformiter erectis; ergo isti trianguli scilicet triangulus *ABC* et triangulus *ABD*, sunt in altitudine similes seu proportionales et sic de quibuscunque triangulis habentibus rectum angulum super basim *AB*.[3]) Igitur cuicunque eorum assimilatur aliqua qualitas,

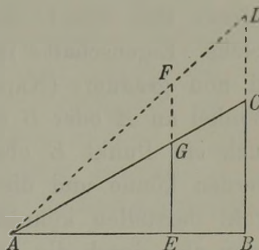


Fig. 2.

daß alle dergestalt möglichen Figuren (über einer und derselben »basis«) die nämliche »qualitas« darstellen können. Diese wichtige Bemerkung ist im *Tract. de lat. form.* nicht oder nur undeutlich zu finden (s. unten S. 239). Der Sachverhalt ist schon an einer Stelle in Kap. 4, die ich durch Ausrufungszeichen angemerkt habe, angedeutet.

1) Auch dieser Verbesserungsvorschlag zur Terminologie wurde von den Nachfolgern nicht aufgenommen, besonders jedenfalls deshalb nicht, weil Oresme ja seine eigenen Vorschläge nicht durchführte.

2) Unter Hinweis auf das 6. Kapitel wird ausgeführt, daß für die fragliche Eigenschaft nur das rechtwinklige Dreieck in Betracht kommen könne.

3) Dieser geometrische Beweis zeigt, daß Oresme eine ganz präzise Vorstellung von dem hatte, was er im 7. Kapitel von der »coaptatio figurarum« sagte.

'eadem quoque potest cuilibet eorum assimilari et per eum ymaginari, sic 'tamen ut si aliqua qualitas signaretur per unum triangulum, duplo inten-'s[ior] similis intentionis signanda est per duplo altiorem triangulum et 'sic proportionaliter semper, ut dictum est in capitulo precedenti.'

11. — Teil I, Kap. 9: De qualitate aliter triangulari. Kap. 10: De qualitate quadrangulari.

220r | Im 9. Kapitel werden die »Eigenschaften« betrachtet, die sich durch ein beliebiges Dreieck ABC über der Grundstrecke AB darstellen lassen. Oresme fällt von C das Lot CD auf AB, erklärt zuerst, daß sich eine solche »Eigenschaft« immer aus zwei »uniformiter difformibus terminatis ad non gradum« (Kap. 8) zusammensetze, da ja (nach Kap. 5) stumpfe Winkel an A oder B ausgeschlossen seien, sodann, daß auf dem Lot CD auch ein Punkt E oberhalb oder ein Punkt F unterhalb C genommen werden könne und die Dreiecke AEB bzw. AFB die »qualitas« ebensowohl darstellen könnten wie das Dreieck ACB. Die Winkel der Figur seien also durch die »qualitas« nicht bestimmt.[1])

Das 10. Kapitel lautet:

220v | 'Quedam qualitas ymaginabilis est per quadrangulum rectangulum 'et per quemlibet talem super basim eandem constitutum, et per nullam 'aliam figuram designari potest; hec ultima pars patet per dicta in capi-'tulo 6°. Sit itaque quadrangulus rectangulus $ABCD$, possibile est igitur 'quod qualitas linee AB sit proportionalis in intensione huic quadrangulo 'in latitudine[2]), igitur erit proportionalis cuilibet quadrangulo rectangulo 'super AB constituto eo quod omnis talis est proportionalis alterius quam-'vis inequalis, ergo per capitulum 7m ipsa qualitas est ymaginabilis per 'quadrangulum $ABCD$ et similiter per quadrangulum $ABEF$ majorem sive 'etiam per minorem quemlibet.[3]) [Quelibet] autem talis qualitas dicitur uni-'formis seu equalis intensionis in omnibus partibus ejus. Rursum scien-'dum est, quod aliqua qualitas ymaginabilis est per quadrangulum haben-'tem duos [rectos] equales angulos super basim et alios angulos [inequales], 'sicut per quadrangulum $ABCD$[4]), et per omnem quadrangulum propor-'tionalis altitudinis super basim AB constitutum, sive fuerit major, sive 'minor ut patet 9° capitulo[5]); quelibet autem talis qualitas dicitur uni-

1) Es kommt der Satz vor: „dum tamen ambarum partium duo trianguli in eorum summitate terminentur". »Summitas« bedeutet also hier etwa »oberer Teil«.

2) Nachdem in den letzten Kapiteln nur »altitudo« gebraucht worden war, steht hier einmal wieder »latitudo«.

3) Es sind natürlich Rechtecke gemeint.

4) Gemeint ist ein Trapez, das in A und B rechte Winkel hat.

5) Besser würde das 7. Kapitel angeführt. Im 9. Kapitel ist auf die vorliegende Figur nur kurz hingewiesen.

‘formiter difformis utrinque terminata ad gradum, ita quod extremum in-
‘tensius designatur in angulo *DC* acuto et extremum remissius designatur
‘in obtuso. Superior vero linea, sicut est *CD* dicitur linea summitatis vel
‘in relatione ad qualitatem potest vocari linea intentionis quia secundum
‘varietatem ipsius variatur intentio.’[1])

12. — Teil I, Kap. 11, 12, 13: De qualitate uniformi et difformi.

Das 11. Kapitel hat den Wortlaut:

‘Omnis igitur qualitas uniformis ymaginatur per quadrangulum rect-
‘angulum et omnis qualitas uniformiter difformis terminata ad non gradum
‘ymaginabilis est per triangulum rectangulum, omnis vero qualitas uni-
‘formiter difformis terminata utrinque ad gradum ymaginanda est per
‘quadrangulum habentem rectos angulos super basim et alios inequales.
‘Omnis autem alia linearis qualitas dicitur difformiter difformis et est
‘ymaginanda per figuras aliter dispositas; secundum multifariam variatio-
‘nem ejus aliqu[a] nomin[a] postea videbuntur. Pre-
‘dicte | differentie intentionum non melius, nec 221r
‘clarius, nec facilius declarari vel notari possunt
‘quam per tales ymaginationes et relationes et
‘figuras, quamvis quedam alie descriptiones seu
‘notificationes dari possunt que etiam per hujus-
‘modi figurarum ymaginationes sunt note. Ut si
‘diceretur qualitas uniformis est que in omnibus

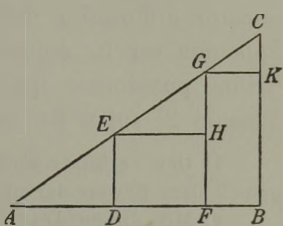


Fig. 3.

‘partibus subjecti est equaliter intensa, qualitas vero uniformiter dif-
‘formis est cujus omnium trium punctorum proportio distantie inter
‘primum et secundum ad distantiam inter 2^m et 3^m est proportio sicud
‘proportio excessus primi super 2^m ad excessum 2^i super 3^m in intentione,
‘ita quod punctum interiorem illorum trium voco primum. Istud igitur
‘declaratur de ea qualitate uniformiter difformi, que terminatur ad non
‘gradum, que signaretur seu ymaginaretur per triangulum *ABC*. [Erectis]
‘itaque tribus perpendicularibus lineis *BC*, *FG* et *DE* (vgl. Fig. 3) pro-

1) Jetzt endlich wird deutlich gesagt, daß ‘die obere Begrenzungslinie »linea summitatis« oder »linea intentionis« heißen soll. Ich habe schon früher (s. meinen ersten Aufsatz S. 129, Fußn. 2) hervorgehoben, daß im *Tract. de lat. form.* diese obere Begrenzungslinie nur eine sekundäre Rolle spielt. In der vorliegenden Arbeit ist ihre Bedeutung fast noch mehr zurückgedrängt, da die Einteilung durchaus nach den »Figuren« gemacht wird. So wird die hier definierte »qualitas uniformiter difformis utrinque terminata ad gradum« von der im 8. Kapitel definierten »qu. uniformiter difformis terminata ad non gradum« getrennt und mit der »qu. uniformis« zusammen betrachtet, weil beide durch ein »Viereck« darstellbar sind. Erst das nächste Kapitel bringt die natürlichere Einteilung etwas mehr zur Geltung. Vgl. auch das 13. Kapitel (S. 211).

'trahatur HE equedistans linee DF et similiter KG equedistanter FB, 'fient igitur duo trianguli scilicet GHE et CGK, qui sunt equianguli; ergo 'per 4am //////// proportio GK ad EH est sicut proportio CK excessus ad 'GH excessum, et quoniam GK est equalis FB [et EH equalis DF, pro-'portio FB] ad DF, que quidem linee sunt distantie trium punctorum 'ipsius basis, sicut proportio CK ad GH, qui sunt excessus altitudinis 'proportionalis intentionis eorundem punctorum ...[1]) Per eundem modum 'predicta descriptio sive proprietas potest ostendi de qualitate uniformiter 'difformi terminata ad gradum et sic ////// que ymaginatur per quadran-
221v 'gulum $ABCD$. | Protrahatur linea DE equedistans basi AB et fiat tri-'angulus DEC, deinde protrahantur linee altitudinis in quadrangulo et 'alie transversales equedistantes basi in isto triangulo faciendo parvos tri-'angulos et tunc facile poterit argui de illis excessibus et distantiis in isto 'triangulo sicut prius arguebatur in demonstrato, prout intuenti leviter 'potest apparere. Omnis autem qualitas se habens alio modo a predictis 'dicatur difformiter difformis et potest describi negative, scilicet qualitas 'que non est in omnibus partibus subjecti equaliter intensa nec omnium 'trium punctorum ipsius proportio excessus [1i] super secundum ad ex-'cessum 2i super 3m est sicut proportio distantie eorum.'[2])

1) Der Verfasser wiederholt nochmals ausführlich, daß das gezeichnete Dreieck gemäß dem Beweis der ursprünglich beschriebenen Eigenschaft entspreche.

2) Mit diesen Ausführungen umschreibt also ORESME deutlich den Begriff der »qu. uniformiter difformis« und erklärt dann eine »qu. difformiter difformis« als eine solche, die nicht die Grundeigenschaft der »qu. uniformiter difformis« besitzt. Diese Grundeigenschaft ist, wie wir es ausdrücken würden, die Proportionalität von Abszissendifferenzen und Ordinatendifferenzen für je drei beliebige Punkte. Aber ich bemerke gleich, daß bei ORESME nur Ordinatendifferenzen vorkommen. Die Strecken DF, FB sind ihm einfach »distantiae punctorum«. Eine Andeutung, daß ORESME geneigt ist, Strecken auf AB von A (oder B) aus zu zählen, kann ich auch hier nicht finden. Dazu kommt, daß ORESME immer nur das Geradenstück zwischen den in A und B errichteten Loten betrachtet, so daß er auch hier zwei Fälle unterscheiden muß. Nur unter diesen nicht ganz belanglosen Einschränkungen kann ich DUHEM zustimmen, wenn er sagt (a. a. O. S. 386), daß ORESMES Aufstellung unserer Gleichung

$$\frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_3} = \frac{y_1 - y_2}{y_2 - y_3} \tag{1}$$

entspricht.

Wenn aber DUHEM im Anschluß daran die Frage stellt, die ich oben anführte (S. 194), ob man nicht gerechterweise ORESME die Schöpfung der analytischen Geometrie zuschreiben müsse, so muß ich mit einem glatten „Nein“ antworten. Das wäre wirklich nicht gerecht. Denn an diese Gleichungsform hat die Entwicklung der analytischen Geometrie in gar keiner Weise angeknüpft. Ja ich glaube bestimmt sagen zu können, daß die Gleichung einer Geraden, die durch zwei gegebene Punkte geht, vor 1750 überhaupt nicht auftritt. Sie kommt sicher nicht vor in den analytisch-geometrischen Werken von DESCARTES, FERMAT, VAN SCHOOTEN, DE WITT, DEBEAUNE, WALLIS, L'HOSPITAL, DE LA HIRE, OZANAM, NEWTON und STIRLING, auch nicht in dem

Das 12. Kapitel ist nur überschrieben: „De eisdem aliter" und in ihm führt der Verfasser alle (5) bisher betrachteten »Eigenschaften« nochmals vor, nämlich die »qu. uniformis« und die 4 »qualitates uniformiter difformes«, die zu je zweien einem Dreieck und einem Viereck entsprechen und entweder steigen oder fallen. Er läßt sie entstehen, indem er längs AB einen Punkt D sich bewegen läßt, an den die »qualitas« gebunden ist.[1]) Der Schluß ist nicht uninteressant:

'Sed si D regulariter moveatur et irregulariter intendatur vel remit-'tatur, aut e converso, describet qualitatem difformiter difformem. Posset 'tamen contingere | quod punctus D irregulariter moveretur et irregulariter 222r 'alteraretur tali recompensatione seu equivalentia quod describeret quali-'tatem uniformiter difformem seu [uniformem], quandoque non foret talis 'recompensatio, describeret qualitatem difformiter difformem.'

Das 13. Kapitel ist ebenfalls nur mit: „De eisdem aliomodo" betitelt. Der Verfasser geht jetzt von der oberen Grenzlinie, der »linea intentionis« oder »linea summitatum« aus. Wenn diese Linie parallel der Grundstrecke sei, habe man die »qu. uniformis«, wenn sie aber sonstwie geradlinig sei, dann liege die »qu. uniformiter difformis« vor, wo wieder die zwei Fälle des Dreiecks und Vierecks unterschieden werden. Daß eine »qualitas« auf beiden Seiten »ad non gradum« endige, sei nur möglich, wenn die »linea intentionis« krumm oder aus mehreren Linien zusammengesetzt sei. Dann sei die »qualitas« aber »difformiter difformis«.

---

großen Kommentar des Paters Cl. Rabuel zu Descartes und nicht in Eulers *Introductio*. Über den Zeitraum zwischen 1750 und 1800 bin ich noch nicht so genau unterrichtet. In Riccati-Saladinis *Instit. analyt.* (I. Band, Bologna 1765) ist aber z. B. keine Spur einer Gleichung wie (1) zu finden. G. Loria hat (Verh. III. Int. Math.-Kongr., Leipzig 1905, S. 579) dargelegt, daß die Gerade überhaupt erst systematisch von J. B. Biot in seinem *Essai de géométrie analytique* etc. (Paris 1802; öfter aufgelegt) berücksichtigt wurde. Und bis auf weiteres bin ich geneigt anzunehmen, daß dort wirklich zum erstenmal die Gleichung einer Geraden durch zwei Punkte gesucht wurde. In der 1. Auflage des *Essai*, die den Titel trägt *Traité analytique des courbes et des surfaces du second degré* (Paris, an X—1802), ist (S. 25) die Gleichungsform

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x') \tag{2}$$

auf analytischem Wege abgeleitet, die Dreiecksähnlichkeit also gar nicht benutzt. Übrigens fehlt der Betrachtung Oresmes zum »analytisch-geometrischen« ein wesentlicher Bestandteil, das »analytische«, völlig. Sonst könnte man mit ebenso gutem Rechte behaupten, daß die Gleichung der Geraden, und zwar unter der Form $\frac{y}{x-a} = k$, schon bei Pappos (*Collectio*, ed. F. Hultsch 2, Berlin 1877, S. 664) vorkommt.

Es sei noch bemerkt, daß im *Tract. de lat. form.* die hier gegebene allgemeine Formulierung nicht auftritt (vgl. meinen ersten Aufsatz S. 127 und S. 140).

1) Das gleichförmige Wachsen und Abnehmen ist hier durch »regulariter intendi« und »reg. remitti« wiedergegeben.

13. — Teil I, Kap. 14: De simplici difformiter difformi. Kap. 15: De 4^{or} generibus difformit[atis] difformis.

‘Difformis difformitatis, de qua nunc agitur, duo sunt modi. Quedam
‘est simplex, alia est composita, et primo dicendum de simplici. Est igitur
‘simplex difformitas difformis que designabilis est per figuram cujus linea
‘summitatum seu linea intensionis est una· non composita ex pluribus.
‘Oportet igitur quod sit linea curva; quia si foret recta, jam foret uni-
222ᵛ ‘formitas | simpliciter aut uniformis difformitas ut patet ex capitulo pre-
‘cedenti et etiam quod ejus curvitas non attingat ad circuli portionem
‘majorem semicirculo, ita quod angulus super basim sit major [angulo]
‘recto, ut patuit capitulo 7^0. Potest tamen fieri, ut angulus super basim
‘sit minor recto et quantumlibet. Sit igitur, gratia exempli, linea AB
‘cujus qualitas sit designabilis per semicirculum ABC, quod est possibile
‘ut patet ex capitulo 7^0. Nunc itaque dico quod eadem qualitas linee AB
‘est ymaginabilis seu designabilis per figuram majoris altitudinis aut etiam
‘minoris isto semicirculo et quantumlibet. Protrahatur enim linea CD
‘perpendicularis super centrum D et iterum protrahatur una alia linea
‘perpendicularis que sit EF super lineam AB. Cum igitur sit possibile
‘duas lineas minores istis duabus super eadem puncta perpendiculariter
‘stare se habentes invicem in eadem proportione sicut et iste due que
‘sunt CD et EF, vel conformiter possunt fieri linee majores aut minores
‘super omnia puncta linee AB stante simul eadem proportione inter eas
‘que est inter perpendiculares super AB erectas in semicirculo ACB, se-
‘quitur quod super AB basim potuerit erigi figura minus alta et tamen
‘erit proportionalis altitudinis huic semicirculo ABC, et pari ratione magis
‘alta et quantumlibet. Igitur, per 7^m capitulum, per quamlibet istarum
223ʳ ‘figurarum potest qualitas linee AB recte ymaginari indifferenter ... | ...[1])
‘Quelibet tamen figura, per quam est ymaginabilis ista qualitas linee AB
‘est curva. Utrum nunc figura minor quam semicirculus, per quem ista
‘qualitas potest ymaginari, sit portio circuli [vel non], discutandum relin-
‘quo, sed dico quod per nullam majorem potest designari [que] sit portio
‘circuli ...’[2])

Im 15. Kapitel werden nun die nicht zusammengesetzten »qualitates difformiter difformes« eingeteilt:

1) Ein »Beweis«, daß die Annahme der eindeutigen Darstellbarkeit der »qualitas« zu Absurdem führen würde, ist hier weggelassen.

2) Als einfachstes Beispiel einer »qu. difformiter difformis« nimmt Oresme den Halbkreis. Auch hierauf wendet er nun, wie wir sagen, verschiedene Maßstäbe beim Auftragen der »altitudines« an. Da er aber von Ellipsen keine Ahnung hat, läßt er die Frage offen, ob bei Verkleinerung des Maßstabes ein Kreissegment entsteht. Hingegen beweist er, daß die Vergrößerung des Maßstabes kein Kreissegment ergeben kann. Diesen etwas langatmigen Beweis habe ich weggelassen.

‘Omnis igitur simplex difformis difformitas aut est ymaginabilis per
‘figuram que non est portio circuli nec [proportionalis in] altitudin[e] alicui
‘circuli portioni, sed [cujus] summit[as] determinatur curvitate irrationali 223v
‘aut ymaginabilis est per figuram cujus summitas determinatur rationali,
‘scilicet circulari vel ei proportionali in altitudine et utroquemodo dupli-
‘citer, videlicet aut [convexe] aut concave, et secundum istas 4^{or} differen-
‘tias sunt 4^{or} genera difformitatis simpliciter difformis, videlicet rationalis
‘convexa, rationalis concava, irrationalis convexa, irrationalis concava.[1])
‘Post has autem differentias sunt alie differentie accidentales sicud termi-
‘nari ad gradum vel ad von gradum. Unde difformitas convexa tam ratio-
‘nalis quam irrationalis potest terminari ad gradum utrolibet sicut hic ////////,
‘vel in uno extremo ad gradum et in alio ad non gradum sicut hic ////////,
‘vel [utrobi]que ad non gradum sicut hic ////////. Concava vero, sive sit
‘rationalis, sive sit irrationalis, non potest terminari utrobique ad non
‘gradum, sed potest utrobique terminari ad gradum sicut hic ////////, vel
‘ita in altero extremo tantum sicut hic ////////.’[2])

14. — Teil I, Kap. 16: De difformitate composita et qualitati[bus] hujusmodi secundum species.

‘Divisa igitur varietate difformitatis que provenit ex diversis acciden-
‘tibus qu[e] sunt terminari ad gradum vel non gradum, de quibus sufficiat
‘quod dictum est ante, adhuc post 4^{or} genera simplicis figurationis quali-
‘tatis in capitulo [precedenti] posita, sunt alia duo superius assignata,
‘scilicet uniformit[as] simplex et difformitas uniformis et sic sunt 6 genera
‘simplicia figurationis intellec[ta] qualitative. Cum autem difformitas dif-
‘formis composita possit effici ex pluribus figurationibus simplicibus, aut
‘unius generis, aut duorum, aut 3^{m}, aut 4^{or}, aut 5, aut 6, sequitur per
‘regulas arismetice, quod de quolibet genere simplici singulo potest fieri
‘aliqua combinatio seu compositio et sic habemus 6 species difformitatis
‘difformis composite. Item de singulis duobus generibus simplicibus fiunt
‘combinationes et species composite usque ad 15. Item de singulis tribus
‘fiunt [20]. Item de simplicibus quatuor fiunt [15]. Item de singulis 5
‘fiunt [6]. Item de omnibus simul | fit una, et ita sunt in summa 62 spe- 224r
‘cies difformitatis difformis composite.[3]) Et in qualibet specie potest fieri

1) Es muß also bemerkt werden, daß Oresme eine »difformitas«, die sich durch ein Kreis- oder Ellipsensegment darstellen läßt, als »rational«, alle anderen als »irrational« bezeichnet.

2) Ich überlasse es dem Leser, die einfachen und eindeutig bestimmten Figuren zu ergänzen.

3) Statt 20 steht in der Hs. „duo“, 15 ist durch einen Stockflecken ausgelöscht, statt 6 heißt es 5 in der Hs. Daß dies nur Schreibfehler der Kopisten sind, leuchtet

'compositio ex duabus figurationibus simplicibus, vel tribus, vel 4^{or} et sic 'in infinitum et secundum hoc in qualibet specie potest fieri variatio in 'infinitum et ratione ordinis seu dispositionis simplicium figurationum ex 'quibus iste species componuntur. Ut autem hoc manifestius videatur 'ponam in quibusdam speciebus exempla. [Potest] igitur difformis diffor-'mitas composita fieri ex pluribus unius generis simplicis, sicut ex duabus 'vel pluribus uniformibus ut hic //////// et talis potest vocari qualitas seu 'difformitas graduata. Item in alio genere simplici, sicut ex duabus vel 'pluribus uniformiter difformibus ut hic //////// vel hic ////////. Item ex 'duabus convexis rationalibus, ut hic //////// et conformiter discernendo per 'illa 6 genera supradicta. Rursus potest fieri compositio ex duabus sicut 'ex uniformi et [difformi] sicut hic //////// vel ex pluribus istorum generum 'ut hic ////////. Item ex duobus aliis generibus, ut ex concava rationali 'et uniformi, ut hic ////////, vel ex pluribus istorum generum potest fieri '[configurationis] mixtio in aliis duobus generibus ////////[1]) usque ad 15 'mixtiones vel 15 species et sic ut supra dictum de [ali]quibus exemplis 'sufficit, possunt intelligi per predicta . . .'[2])

15. — Teil I, Kap. 17: De qualitate superficiali.

224^{v} | 'Sicut in 4^{0} capitulo dicebatur, qualitas superficialis est ymagina-'bilis per figuram corpoream perpendiculariter sitam super superficiem 'qualitate informatam tanquam super basim suam; cujus quidem figure 'notitiam potest haberi ex cognitione similium figurarum per quas quali-'tates lineares figurantur et de quibus quantum potuimus ad precedentem 'materiam tractatum est sufficienter; sicut enim qualitatum linearum que-'dam est uniformis, alia difformis aut uniformiter aut difformiter et multi-'pliciter, ita recte conformiter est de qualitatibus superficialibus. Tunc

---

ein, da ja die Summe 62 von $\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}$ richtig angegeben ist, wobei freilich der letzte Fall ungezählt blieb. DUHEM weist darauf hin, daß man zur Zeit ORESMES die Bildung der Anzahlen der Kombinationen (ohne Wiederholung) als bekannte Regel betrachtet habe. MARSILIUS VON INGHEN spricht z. B. ganz wie vor ihm BOËTIUS (vgl. HEIBERG, Philologus 43, 1884, S. 475—476) die allgemeine Formel $\binom{n}{2}=\frac{1}{2}n(n-1)$ in Worten aus (s. *EGIDIUS cum MARSILIO et ALBERTO de generatione*, Venetijs 1518. *Questiones . . . MARSILII INGUEN super libris de generatione et corruptione*, lib. II, quæst. XII, fol. 116^{r}). Über diese Kenntnisse des christlichen Mittelalters in der Kombinationslehre wußte man bisher recht wenig (vgl. G. LANGE, *Sefer Maassei Choscheb. Ein Werk des LEVI BEN GERSCHOM*, Frankfurt a. M. 1909, S 47/55).

1) Die Hs. hatte hier nochmals „in aliis duobus".

2) Ich überlasse die Figuren wiederum der Phantasie des Lesers. Einige Typen von den Figuren, die sich in den Drucken des *Tract. de lat. form.* befinden, habe ich in meinem ersten Aufsatz (S. 138) abgebildet. Am Schlusse faßt ORESME die Ergebnisse nochmals zusammen und erklärt, daß man zu dieser genauen Einteilung der Arten der »difformitas« nicht gut anders kommen könne als durch die figürliche Darstellung.

'sicut qualitas linearis uniformis ymaginabilis est per quadrangulum rect-'angulum, ita superficialis qualitas uniformis ymaginanda est per corpus 'habens 8 angulos rectos corporeos, et tal[is qualitas] potest ymaginari 'per corpus altius vel minus altum manente eadem qualitate, sicut de 'qualitate lineari dictum est in capitulo 7° et in 10°; et quemadmodum 'dictum est autem de qualitate uniformi et difformi, ita correspondenter 'dicendum est de qualitate superficiali; summitas namque figure, per quam 'ymaginatur similiter qualitas uniformis, [est] superficies plana equidistans 'basi subjecte, que quidem basis subjecta ymaginatur esse superficies plana. 'Summitas autem illius figure per quam ymaginatur qualitas superficialis 'uniformiter difformis est superficies plana non equidistans basi. Summitas 'autem illius, per quam ymaginatur qualitas difformiter difformis est super-'ficies curva vel angularis composita. Consimili modo possunt distincti-'ones, descriptiones, notificationes et species et differentie prius posite 'omnes simul applicari ad superficiei qualitatem.[1]) Omnia autem premissa 'dicta sunt ac si basis subjecta informata qualitate esset linea recta vel 'superficies plana sive recta et hoc tantum fecimus ut predicta facilius 'intelligerentur; quamvis enim basis subjecta sepissime aliter figuretur, 'intelligatur tamen rectificari, et tunc de ea verificabuntur cuncta supra-'dicta. Adhuc autem qualitercunque fuit | potest universaliter dici quod 225r
'summitas figure per quam ymaginatur qualitas uniformis, est equidistans 'basi subjecte. Summitas vero figure designantis qualitatem uniformiter 'difformem est continue et ordinate per par[tes] ipsius [equaliter] proxi-'mior (sic) basi subjecte, et si usque ad basim subjectam descendat, ter-'minatur ad non gradum. Sed vero non ips[a] terminatur utrinque ad [non] 'gradum. Summitas vero figure designantis qualitatem difformiter diffor-'mem est continue secundum partes ipsius inequaliter propinquior [sive] 'remotior a base subjecta et ista possunt [ex] predictis faciliter declarari 'et conveniunt tam qualitati lineari quam superficiali.'

16. — Teil I, Kap. 18: De corporea qualitate et ejus multiplici figuratione. Kap. 19: De figuratione contrariorum.

'Corporea qualitas secundum ymaginationem precedentem quantum ad 'extra subjectum secundum quamlibet sui partem figuratur, secundum figu-'rationem qualitatum superficialium ejusdem corporis.[2]) Unde ex prius

1) Sind auch die Ausführungen über die »qu. superficialis« recht unbestimmt, so ist es doch verwunderlich, wie weit man durch reine Spekulation kommen kann. Im folgenden denkt Oresme sogar daran, die »basis« nicht gerade oder eben anzunehmen. Das Wort »summitas« ist hier im Sinne von »oberer Begrenzung« verwendet.

2) Wie im 4. Kapitel (S. 204) angedeutet, denkt sich Oresme im Körper, der das »subjectum« bildet, unendlich viele Flächen — wie, das ist nicht genau gesagt —

'dictis patet quod de omni genere omnimodo figurarum solidarum potest 'aliqua qualitas ymaginari sive figurari, dum tamen a quolibet puncto 'illius figure possit linea perpendiculariter ad basim in eadem figura pro-'trahi, sic quod nihil illius linee sit extra figuram per quam hujusmodi 'qualitas designatur; et ideo nulla qualitas designatur per figuram per-'foratam vel per figuram subconcavam sicut esset ista //////// vel ista //////// 'vel aliqua talis quomodolibet[1]); alio modo est aliqua qualitas figurabilis 'ita quantum ad ymaginationem et similitudinem sepe dictam. Aliqua 'qualitas corporalis est pyramidalis seu ymaginabilis ad modum pyramidis 'aut ex pyramidalibus qualitatibus aut pyramidibus rotundis aut multilatis. 'Similiter quedam ex pyramidibus majoris acutiei aut minoris ad aliam 'comparata.[2]) Similiter quedam figurabilis est ad modum portionis spere 'vel columpne et sic de aliis diversimodis variationibus in infinitum secun-'dum genera uniformitatis et difformitatis posita in capitulis 15 et 16. 'Ita etiam una est [figurabilis] in uno modo, verbigratia sicut caliditas,
225ᵛ 'alia ejusdem cor[poris alio modo] | vel eodem ut albedo, et forsan alia 'aliter, ut dulcedo, et sic de aliis.'[3])

Der Gedanke des 19. Kapitels läßt sich mittels der dort gegebenen Beispiele kurz so wiedergeben. Wenn in einem »subjectum« zwei entgegengesetzte Eigenschaften, wie Wärme und Kälte, vereinigt vorkommen, so kann das »subjectum« doch »equaliter densum« sein und also die ganze »qualitas« durch ein Rechteck dargestellt werden, wenn die Figur der Wärme durch die Figur der Kälte zu einem Rechteck ergänzt wird. In dem Rechteck *ABCD* stellt dann z. B. das Dreieck *ABC* die Wärme, das Dreieck *DCA* die Kälte vor. Beide Teileigenschaften sind dann »uniformiter difformes«. Wäre aber die eine Teilfigur konkav, so müßte die andere

---

und über jeder Fläche den Körper errichtet, der die betreffende »qu. superficialis« darstellt. Die Gesamtheit all dieser »qualitates superficiales« soll dann, indem die Körper übereinandergreifen, die »qu. corporalis« ergeben.

1) Diese Einschränkung ist das Gegenstück zu der vom Schluß des Kap. 5 (S. 205). Es ist ja gerade hier sehr schade, daß die Figuren fehlen. Jedenfalls sollte also die »figura« der »qu. corporea« weder eine Durchbohrung noch eine innere Höhlung haben.

2) Diese Beschreibung würde viel eher auf eine »qu. superficialis« passen. Es ist mir recht zweifelhaft, ob sich Oresme von der »figuratio« seiner »qu. corporalis«, die ja, wie wir sagen würden, eine Funktion von drei unabhängigen Variablen ist, eine Vorstellung machen konnte. Die »pyramis rotunda« ist der Kreiskegel; s. z. B. das von A. Gogava (1548) herausgegebene, von J. L. Heiberg und E. Wiedemann behandelte Bruchstück aus einer arabischen Schrift über Brennspiegel (Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/11, S. 196 und S. 203).

3) Wenn wir es modern ausdrücken, so sagt also Oresme, daß die »Wärme« eine andere oder auch dieselbe Funktion der Raumelemente eines Körpers sein könne, wie die »Weiße« oder die »Süßigkeit« desselben Körpers.

konvex sein usw. Ähnliches gelte auch von der »qu. superficialis« und der »qu. corporalis«.

17. — Teil 1, Kap. 20: De modo dicendi de curvitate quantum ad ejus difformitatem.

‘Nunc restat de curvitate dicendum. Habet namque curvitas, ad mo‘dum aliarum qualitatum, extensionem et intensionem, qu[an]dam uniformem, ‘alia[m] difformem. Sed non est manifestum de proportione curvitatum in ‘intensione, utrum scilicet una sit dupla ad aliam vel in alia proportione, ‘aut si sint inproportionales dici; nobis ignotum est enim, penes quid vel ‘contra quid intensio curvitatis attenditur[1]) et pro nunc non apparet nisi ‘un[us] alt[er] duorum modorum, unus est, quod ‘majoritas curvitatis attenditur penes [rec]essum ejus ‘a rectitudine et distantiam a rectitudine que est se‘cundum quantitatem anguli constituti ex recta et ‘curva sicut est angulus contingentiae aut forsan unus ‘alter etiam constitutus ex curva et [curva].[2]) Verbi‘gratia, sit linea AB cui con[jun]guntur duo linee in ‘puncto A, qui sunt AC et AD (s. Fig. 4); diceretur igitur, quod linea ‘AD est curvior quam linea AC, tanto quanto BAD angulus est major ‘angulo BAC. Nunc autem ita est quod angulus ex recta et curva et ‘angulus ex duabus curvis sunt improportionales, ut posset demonstrari ex ‘15^0 3^{ii} Euclidis et ejus comento[3]) et per Dei gratiam hoc ostendam in ‘tractatu de perfectionibus figurarum; igitur angulus BAC et angulus ‘[B]AD sunt improportionales partiali angulo CAD et non ////////[4]) | eum 226▼
‘secundum aliquam proportionem que recipiatur in numeris nec in quibus‘cunque continuis que sunt ejusdem rationis, ut inter lineam et lineam et ‘[inter] superficiem [et superficiem] et sic de aliis. Ex quo sequitur quod ‘curvitas major et curvitas minor sunt improportionales et alterius rationis, ‘quod adhuc aliter ostenditur.

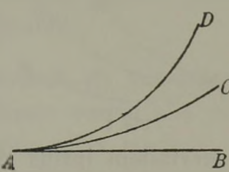


Fig. 4.

1) Der Ausdruck »attendi penes alqd.« ist in allen scholastischen Traktaten über »intensio et remissio« stehender Ausdruck für »eine Funktion von etwas sein«, wie wir heute sagen würden.

2) Wenn ich die folgenden Ausführungen trotz ihrer Breite ungekürzt aufnehme, so ist es deswegen, weil an den Begriff »Kontingenzwinkel« sich auch später mehrfach Diskussionen geknüpft haben. Cantor sagt (*Vorl.* 2^2, Leipzig 1900, S. 533): „Diese Winkel hatten Campanus [um 1260] Schwierigkeiten bereitet, aber seither [bis zu Cardano, 1570], also etwa 300 Jahre lang, hatte man sich nicht weiter darum gekümmert“. Diese an sich schon ganz unbegründete Behauptung wird jedenfalls durch Oresmes Ausführungen widerlegt. Auch Gregor von Rimini benutzt den Kontingenzwinkel als Beispiel (s. an dem S. 197[2]) angegebenen Orte, Bl. 97r°, Sp. 1).

3) Oresme meint wohl die Bearbeitung des eben erwähnten Campanus, die im Druck zu Venedig 1482 herauskam. 4) Hier könnte man wohl „mensurant“ ergänzen.

‘Et sit unus angulus ex duabus lineis similiter curvis et similis cur-
‘vitatis ad eandem partem; sit tamen major quam sit angulus contingentie,
‘et sit iste angulus [*BA*]*C* (Fig. 5); igitur potest dividi [in partes equales]
‘per lineam consimiliter curvam que sit *AD*; dico igitur quod impossibile
‘est istum angulum *BA*[*C*] consimiliter dividi per lineam rectam, quod
‘faciliter patet, quia aut ipsa cadit extra lineam *AD* aut intra, et quo-
‘cunque dato, totalis angulus *BAC* non dividetur per medium[1]); et pari
‘ratione non potest dividi per lineam rectam in duas partes, quarum una
‘sit ad aliam dupla nec secundum aliquam proportionem sive rationalem
‘[sive] irrationalem, que possit mensurari in continuis
‘que sunt ejusdem rationis. Et per eamdem rationem
‘demonstrabitur, quod angulus jam datus non potest
‘dividi per equalia vel proportionalia per aliquam lineam,
‘que sit ad lineam *AD*, que sit dissimilis in curvitate
‘sicut prius.[2]) Aut ipsa linea dividens intraret infra

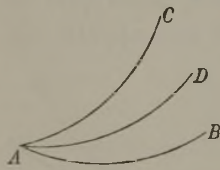


Fig. 5.

‘curvitatem ipsius *AD* aut esset extra, et quocunque dato non divider[et]
‘talem angulum per medium; ex quo demonstrabili vel jam demonstrato
‘concluditur probabiliter, quod sicut hoc non potest facere linea recta, sci-
‘licet talem divisionem, quia ipsa est alterius rationis a linea curva, ita
‘etiam non potest major curvitas, propter hoc quod ipsa est alterius
‘rationis a curvitate minori et improportionabilis illi.[3])

‘Ergo s[i] ita est, oportet dicere quod curvitas difformis componitur
‘ex infinitis partibus alterius [rationi]s et sic improportionabilibus et quod
227r ‘quemadmodum nullus | angulus ex curvitatibus similibus potest esse duplus
‘alicui angulo cui linee sunt inter se dissimilis curvitatis, nec potest
‘esse ei aliqualiter proportionalis, sic nunquam curvitates dissimiles sunt
‘invicem proportionales, ita quod nulla intensio curvitatis difformis potest
‘esse proportionalis alteri curvitati dissimili ejusdem difformis curvitatis
‘in proportione dupla vel in proportione que est medietas duple, nec com-
‘mensurabili, nec incommensurabili, universaliter in aliqua proportione que
‘reperiri possit inter lineam et lineam. Unde patet consequenter quod in-
‘tensio curvitatis non est per lineas ymaginanda, nec est aliqua curvitas

1) Oresme versteht natürlich unter dem „Winkel *BAC*“ das ganze Winkelfeld. Der Begriff dieses »Winkels« und seiner »Teilung« ist ja nach unserer Auffassung überhaupt unklar.

2) Diese wahrscheinlich verderbte Stelle bedeutet wohl „. . . durch keine Linie, die eine andere Krümmung hat als *AD*“.

3) Dieses letztere soll offenbar durch die im Sinne des Autors unbestreitbare Tatsache bewiesen werden, daß *AD* durch keine andere mehr oder weniger gekrümmte Linie ersetzt werden kann. Das Entscheidende liegt darin, daß Vergleichungen von Winkeln dieser Art nur möglich sind, wenn die Schenkel bei beiden Winkeln gleiche Krümmung haben.

'similis in intensione alicui alteri curvitati de alia specie, nec curvitas est 'ymaginanda per aliquam figuram, nec ejus intensio alicui figure est assi'milanda, eo quod omnis figure latitudo per lineas designatur. Ulterius 'patet quod nulla curvitas est uniformiter difformis, quia de ratione acci'dentali uniform[is] difformitatis est quod si[t] per totum subjectum ejus'dem rationis et quod proportio intensionis ad intensionem vel excessus 'intentionis in diversis partibus sit sicut proportio distantie ad distantiam, 'et per consequens sicut proportio linearum, prout patet ex descriptionibus '11[1] capituli, sicut nunc dictum est. Et non potest convenire curvitati 'difformi, et inde sequitur ulterius quod omnis curvitas difformis est dif'formis aliqualiter aliter quam aliqua alia qualitas alterius generis possit 'esse et quadam extranea, mirabili et diversa difformitate.'

18. — Teil I, Kap. 21: De quodam alieno modo dicendi de curvitate.

'Omnis curvitas circularis est uniformis et e contrario omnis alia cur'vitas est difformis. Nunc igitur de utraque tangatur alius modus[1]) et 'primo de uniformi, ut dicatur quod intentio ejus attenditur vel secundum 'quantitatem semidyametri circuli, cujus ipsa curvitas est, vel esse potest 'circonferentia aut proportio circonferentie ita quod quanto illa semidya'meter [fit?] minor, tanto [proportio?] curvitatis erit major. Verbigratia 'sit circulus major cujus s[emi]|dyameter sit AB et circulus minor cujus 227v
'semidyameter sit AC, tunc si sit semidyameter AB dupla ad semidya'metrem AC, curvitas minoris circuli erit duplo intensior curvitate majoris 'et ita [de aliis?] proportionibus et curvitatibus. Unde patet quod secundum 'istum modum sunt proportionales et ejusdem rationis; ita forsan[2]) 'probabiliter ad dictum in precedenti [capitulo] diceretur, quod quamvis 'curvitas major et curvitas minor faciant in angulis improportionem, 'sicut faciunt linea recta et linea curva, forte tamen ex hoc non sequitur, 'quod propter hoc curvitates sunt improportionales et alterius rationis, 'quoniam etiam secundum veritatem non in tantum sunt incomparabiles 'due linee curve sicut una linea recta et alia curva; de curvis namque 'diceretur quod una est magis curva quam altera; sed sic non potest dici 'de curva et recta; ymo nunquam recta dicitur magis recta quod curva 'sit curva (?). Forte tamen diceretur quod recta et curva sunt incompa'rabiles proprie; sed due curve sunt proprie comparabiles in curvitate vero 'proportionales, sicut angulus ex recta et curva et angulus ex duabus 'curvis sunt incomparabiles et improportionales, et hoc est pro modo 'posito in [20°] capitulo; verumptamen utrum curvitates inequales sunt

1) Zu Anfang des vorigen Kapitels (S. 217) sagte Oresme, man könne die »intensio« der »Krümmung« nur auf eine von zwei Arten betrachten. Es scheint mir, daß jetzt erst die zweite Art in Angriff genommen werden soll.

2) Die Hs. hat hier „forsan quod".

'proportionales vel non, hoc determino pro nunc. Vos qui hoc legeritis, 'judicate.

'Sed tamen posito, juxta predicta in presenti capitulo, quod intensio 'curvitatis attenditur penes semidyametri parvitatem, sequitur inde quod 'omnium circumferentiarum circularium curvitates sunt simpliciter equales, 'quoniam sicud postea videbitur, in 3ª parte hujus, si aliqua qualitas sit 'intensior alia et illa alia sit proportionaliter extensior seu magis extensa, 'ille due sunt simpliciter equales[1]); nunc autem est ita quod proportio 'circumferentiarum in quantitate est sicut proportio semidiametrorum cir-'culorum, quorum sunt circumferentie, ut patet [per] 5ᵃᵐ conclusionem 'ARCHIMEDIS de curvis superficiebus[2]); ergo curvitas duple circumferentie 'est duplo [ex]tensior[3]) quam curvitas circumferentie subduple et per posi-
228ʳ 'tum | eadem curvitas duple circumferentie et curvitas subduple sunt 'equales, et sic de aliis.[4]) Igitur omnium circumferentiarum circularium 'sunt equales [curvitates?] et eodemmodo dicitur quod omnes proportiones 'similes circumferentiarum inequalium portiones ejusdem proportionis sunt 'equales secundum curvitatem, sicut medietas unius cum medietate alterius, '4ª pars cum 4ª parte, quia una circumferentia non magis circuit quam 'alia respectu centri, nec una portio circumferentie quam alia major sibi 'similis. Igitur curvitates tales sunt equales simpliciter, quamvis inequa-'liter sint extense et inequaliter intense.

'H[ec] autem ratio videtur quodammodo facere contra primum modum, 'seu contra aliud capitulum. Si enim due curvitates dissimiles [sunt?] in inten-'tione proportionnales, cum ipse sint proportionnales in extensione, ips[as 'esse?] oportet simpliciter improportionnales et inequales. Si igitur intentio 'curvitatis secundum illum modum attendatur penes semidyametrum ////////, 'omnis curvitas tam uniformis quam difformis erit similis alicui alteri 'qualitati; ita etiam, ad modum alterius qualitatis erit ymaginabilis per 'figuram, cujus figure ipsa linea curva vel superficies ymaginata rectiline-'aris vel etiam ipsa stante curva secundum descriptionem vel ymaginationem 'positam in 16⁰ capitulo. Verumptamen in hujusmodi curvitatis noticiam

1) Siehe Kap. 5—7 des III. Teils. Es ist die »mensura« oder »quantitas« der »qualitas« gemeint, welche Größe durch die Fläche der Figur dargestellt wird.

2) ORESME zitiert hier die in mehreren Handschriften erhaltene Zusammenstellung ARCHIMEDischer Sätze, deren Verfasser meistens mit JOHANNES DE THIN̄ (in einer Handschrift mit JOHANNES DE TINENNIE) bezeichnet wird. Vgl. A. A. BJÖRNBO, Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 242.

3) Die Hs. hat „intensior".

4) Auf alle Fälle will ORESME sagen, daß die »curvitas«, die eigentlich dem Radius umgekehrt proportional sei, doch deswegen, weil die Umfänge der Kreise den Radien direkt proportional sind, bei allen Kreisen gleich ist. Da aber der Begriff »curvitas« gar nicht näher umschrieben ist, wird wohl schwer zu erkennen sein, was der Verfasser eigentlich meint.

‘et uniformitatis ac diverse difformitatis ejusdem convenientius ac facilius
‘devenitur per ymaginationem motus localis quam figure. Ita quod circa
‘centrum *A* quiescens sit linea sive dyameter *AB* et ymaginatur circum-
‘duci seu moveri. Si igitur punctus *C* continue movetur super *B* extremi-
‘tatem semidyametri circumducentis ipsum *B* vel *C*, describes curvitatem
‘uniformem, videlicet circularem. Si autem punctus *B* continue descen-
‘deret super dyametrum appropinquando ad centrum velocitate uniformi et
‘eadem semidyametro //////// uniformiter circumducto, tunc dico quod punc-
‘tus *C* describet curvitatem uniformiter difformem; et eodem modo si
‘ipsum *C* recederet uniformiter a centro, describeret curvitatem uniformiter
‘difformem. Unde simpliciter in tempore in quo punctus *B* pertransit
‘totam circumferentiam, punctus *C* pertransit totum dyametrum precise
‘uniformiter ////////. | Sed si semidyameter[1]) equevolvitur, in hoc casu 228ᵛ
‘punctus *C* describeret lineam curvitatis uniformiter difformis quam mathe-
‘matici vocant elycam, forsan sic dictam a [linea] quadam se [habente] con-
‘similiter, que secundum Plinium dicitur helix; et per talem lineam demonstrat
‘Archimedes circuli quadraturam. Si autem semidyameter circumducatur
‘uniformiter et punctus *C* accedat vel recedat a centro difformiter, aut e
‘contrario, vel etiam si semidyameter circuat vel accedat aut recedat utro-
‘bique difformiter difformitate irrecompensabili, tunc punctus *C* describeret
‘curvitatem difformiter difformem, et hoc potest multipliciter variari et
‘diversificari; et breviter totidem et similibus differentiis ////////, illis eis-
‘dem potest hujusmodi difformitas variari, de quibus dictum est ante in
‘capitulo 15° et 16°.

‘Ex premissis itaque satis sufficienter poterit apparere de figuratione
‘intentionis in unaquaque [specie] qualitatis corporee permanentis, nec
‘[addatur?][2]) ad hoc quedam alia intentio videlicet acutiei angularis in qua
‘non est reperibilis uniformitas neque difformitas permanens, sed tantum (?)
‘successiva, de qua in sequentibus apparebit.’

19. — Die übrigen Kapitel des 1. Teiles.

Die übrigen Kapitel des I. Teiles hat Duhem nicht kopiert, da sie sichtlich keinen mathematischen bzw. physikalischen Inhalt haben. Damit der Leser aber doch eine Vorstellung von dem ganzen Inhalt des Werkes bekomme, teile ich ihre Überschriften mit. Diese lauten:

22. De diversitate actionum quæ provenit ex varietate difformitatum qualitatum.

---

1) Die Hs. hat hier „non“, das aber wohl zu tilgen ist. Der Verfasser nennt jetzt die »curvitas« des Kreises »uniformis«, die der Archimedischen Spirale (»elyca«) »uniformiter difformis«, die anderer Spiralen »difformiter difformis«.

2) Statt „addatur“ hat die Hs. „quod“.

23. De differentia (?) passionum que possunt ex predictis erui.
24. De varietate virtutum universalium secundum hujusmodi figurationem.
25. Qualiter per predicta cause quorundam effectuum possunt reddi.
26. De pulcritudine figurationis qualitatum simpliciter dicta et ejus perfectione.
27. De pulcritudine figurationum ad aliud relata et de causis inimicitie et amicitie naturalis.
28. De causis occultarum quarundam naturalium actionum.
29. De causis tripliciter amicitie in eadem specie.
30. De causis delectationis sensus vel ymaginationis.
31. De difformitate in potentiis cognoscitivis.
32. De imitatione istius difformitatis.
33. De causis visionum anime.
34. De quodam impeto visionum anime.
35. De quibusdam differentiis visionum anime.
36. De quadam differentia animarum providentium.
37. De differentia rerum visarum (?) in relatione ad situm.
38. De differentia visionum per distantiam.
39. De enigmatibus visionum.

20. — Teil II, Kap. 1—7: Allgemeine Ausführungen über »motus« und »velocitas«.

Der zweite Teil der Handschrift *De figuratione potentiarum* ist den verschiedensten Anwendungen der im ersten Teil entwickelten Theorie gewidmet und enthält 40 Kapitel. Duhem hat nur von den ersten 11 Abschrift genommen, da die übrigen offenbar keine mathematische oder physikalische Ausbeute geben. Aber auch von diesen 11 können wir die letzten zwei ganz außer Betracht lassen.

236r | Im ersten Kapitel, das die Überschrift hat „De difformitate motus", legt Oresme seine allgemeinen Ansichten über die Bewegung dar, die gegenüber den anderen zeitgenössischen nichts Eigentümliches haben.[1]) Er kritisiert wieder an den gebräuchlichen Bezeichnungen herum, behält aber diese schließlich doch bei. Insbesondere würde er, wie übrigens auch Albert von Sachsen[2]), die Wörter »uniformis« und »difformis« lieber nur für die Geschwindigkeit in bezug auf die einzelnen Teile des Subjekts gebrauchen, dagegen für das Verhalten der Geschwindigkeit in der Zeit

1) Vgl. Duhem, a. a. O. S. 389.

2) Es kommen hier besonders dessen *Tractatus proportionum* (Ausgaben z. B. Venedig 1487 und Venedig 1496) und auch seine *Questiones in libros de celo et mundo* (Druckausgaben z. B. Venedig 1492 und Venedig 1516) in Betracht.

die Ausdrücke »regularis« und »irregularis« verwenden.[1]) Die Bewegung des Himmels wäre dann »difformis«[2]) und »regularis«, der Fall schwerer Körper hingegen »uniformis« und »irregularis«. Von Interesse ist für unseren Gesichtspunkt der Satz:

'... due autem extensiones possunt ymaginari quodammodo orthogo-'naliter se invicem ad modum rectarum intersecantes.'

Unter diesen beiden »extensiones« versteht er die Ausdehnungen der Bewegung in Rücksicht auf das Subjekt und in Rücksicht auf die Zeit, und er wäre geneigt, die »intensio« der Geschwindigkeit »localis altitudo« zu nennen und von den zwei »extensiones« die letztere »longitudo« und die erstere »latitudo«. Er stellt aber fest:

'Sed si juxta premissa in 3° capitulo prime partis in tempore velo-'cit[as] appellatur communiter latitudo; tunc utraque extensionum ad in-'tensionem comparata potest dici longitudo, et sic velocitas habebit dup-'licem longitudinem ...'[3])

Das 2. Kapitel: „De tempore, quid sit et quod non sit difforme", enthält rein philosophische Betrachtungen über den Zeitbegriff. Die Zeit sei 236v „non aliqualiter intensa, sed tantummodo extensa secundum prius et posterius", sie sei auch nicht im eigentlichen Sinne »uniformis«, noch viel weniger natürlich »difformis«.

| Das kurze 3. Kapitel: „De quantitate velocitatis" entspricht nicht 237r ganz dieser Überschrift. Nur im Anfang ist von der »quantitas motus« die Rede, und es wird bezüglich dieses Begriffes auf den III. Teil des Werkes verwiesen. Am Schluß wird über die Veränderlichkeit der Geschwindigkeit gesagt:

'Verbi gratia, in motu locali, ille gradus motus vel velocitatis est 'major vel intensior quo plus pertransiretur de spatio vel distantia; et in 'alteratione simpliciter ille gradus velocitatis est major quo plus acquiritur 'vel deperditur de intensione qualitatis, et ita in augmentatione, quo plus 'acquireretur de quantitate, et in diminutione, quo plus deperderetur de 'quantitate vel extensione, et ita generaliter, ubicunque reperitur motus.'[4])

---

1) Oresme hat diese Wörter schon oben gelegentlich gebraucht (s. S. 211[1])).

2) Weil die Rotationsgeschwindigkeit mit der Entfernung vom Weltzentrum wächst.

3) Man darf das alles nicht so auffassen, als ob Oresme an die zwei »extensiones« oder »longitudines« als an zwei unabhängige Variable dächte und die Geschwindigkeit als dritte, abhängige Variable betrachtete. Es wird immer nur die Geschwindigkeit in bezug auf eine der beiden »longitudines« betrachtet.

4) Man unterschied nach Aristoteles (*Physic.* V, 2) gewöhnlich entweder drei Arten von »motus«, nämlich den »motus localis«, den »m. alterationis« und den »m. augmentationis«, oder indem man den »m. diminutionis« eigens rechnete und noch den »m. generationis« und den »m. corruptionis« dazunahm (vgl. Aristoteles, *Physic.*

Im 4. Kapitel: „De diversis modis velocitatis" spricht ORESME zuerst
ein Langes und Breites von verschiedenen Arten der Geschwindigkeit,
237v ähnlich wie dasselbe in ALBERTS VON SACHSEN *Tractatus proportionum* aus-
geführt ist. Plötzlich erscheint eine interessante Stelle:

'Verbi gratia: gradus velocitatis descensus est major, quo subjectum
238r 'mobile magis descendit vel descenderet, si continuaretur simpliciter . . .'

Das ist wie eine Intuition des modernen Begriffes der momentanen Geschwindigkeit, die ja in der graphischen Darstellung als »latitudo« einen exakten Ausdruck fand, die aber vor der Begründung der Infinitesimalrechnung in Worten nicht genau definiert werden konnte.

Aber auch den Begriff der Beschleunigung definiert ORESME in ganz klarer Weise. Darauf hinzuweisen hat DUHEM offenbar übersehen.[1]) Im 5. Kapitel: „De quibusdam aliis successionibus in motu", das sonst nichts besonders Bemerkenswertes enthält, heißt es nämlich:

'. . . omnis enim velocitas est intensibilis et remissibilis; ejus vero
'continua intensio vocatur velocitatio; et hec [quidem] velocitatio seu
'augmentatio velocitatis potest fieri velocius aut tardius. Unde quandoque
'contingit quod velocitas intenditur et velocitatio remittitur, quandoque
'vero utraque simul intenditur. Et similiter hujusmodi velocitatio ali-
238v 'quando fit uniformiter, aliquando difformiter et diversimode . . . | . . .'[2])

III, 1), auch sechs Arten. Hiervon führt unser Verfasser vier ausdrücklich an; im 4. Kapitel erwähnt er auch noch die »rarefactio« (»Verdünnung«), die im Gegensatz steht zur »condensatio«, welche beiden Begriffe aber unter die »augmentatio« gerechnet werden können.

1) In dem *Tractatus proportionum* ALBERTS VON SACHSEN findet sich nichts Ähnliches. Ich habe die Schrift selbst daraufhin durchgesehen, wobei ich die Ausgabe Venexie (sic) M. cccc. xxxlvii (sic) benutzte. In den *Questiones subtilissime* ALBERTI DE SAXONIA *in libros de celo et mundo* (Venetijs 1492, fol.) kommt der Begriff und Ausdruck »velocitatio« vor, bes. in Lib. II, Questio XIIII (Utrum omnis motus regularis sit velocior in fine quam in principio), Bl. F2 v⁰ Sp. 2 bis Bl. (F4) r⁰ Sp. 2. Eine Erklärung des Begriffes konnte ich aber auch hier nirgends finden.

DUHEM hat übrigens nachgewiesen, daß um dieselbe Zeit der Beschleunigungsbegriff von der Oxforder Schule diskutiert wurde (a. a. O. S. 459, 470, 505—508). Insbesondere hat W. HEYTESBURY den Begriff der Beschleunigung (»velocitas [bzw. latitudo] intensionis vel remissionis motus«) in ähnlicher Weise definiert wie ORESME (vgl. *Tractatus* GUILELMI HENTISBERI *de sensu composito et diuiso* etc., Venetijs 1494, Bl. 43 v⁰ Sp. 2) und seine Kommentatoren haben das weiter ausgebaut.

2) Ist die »velocitatio« »uniformis«, so ist eben die »velocitas« »uniformiter difformis«, wenn aber die Beschleunigung »difformis« ist, so ist die Geschwindigkeit »difformiter difformis«. Die naheliegende Unterteilung der letzteren Art in »velocitates uniformiter difformiter difformes« und in »vel. difformiter difformiter difformes«, je nachdem die »velocitatio« »uniformiter difformis« oder »difformiter difformis« ist (vgl. die Auszüge aus dem *Tract. de lat. form.* in meinem ersten Artikel S. 128 f.), kommt in dem vorliegenden Originalwerke von ORESME, wenigstens soweit DUHEMS Exzerpte reichen, nicht vor.

Im 6. Kapitel: „De difformitate velocitatis per partes quantitativas" wird zuerst ausgeführt, daß alles, was im I. Teil über die »uniformitas« und »difformitas« der »qualitates permanentes«, auch in Hinsicht auf deren »configuratio«, gesagt worden sei, sich auf die Geschwindigkeit übertragen lasse. Dann ist die Rede von der Bewegung einer Linie AB. Die Geschwindigkeit ist »uniformis secundum partes subjecti«, wenn alle Punkte von AB dieselbe Geschwindigkeit haben; sie ist »uniformiter difformis terminata ad non gradum in puncto B«, wenn (kurz gesagt) Proportionalität herrscht.[1]) Die anderen Möglichkeiten der »difformitas« sind nur kurz angedeutet. Auf eine »velocitas superficialis« und eine »velocitas corporalis« ist nur hingewiesen unter Anführung der Kapitel 11, 12 und 13 des ersten Teiles.

Auch das 7. Kapitel handelt von der Bewegung einer Strecke »secundum partes quantitativas subjecti«. Es hat die Überschrift: „De quadam 239r
differentia inter motum localem et alterationem", und der Verfasser behauptet, die Strecke könne nur dann, wenn die Bewegung entweder »uniformis« oder »uniformiter difformis« in bezug auf die aufeinanderfolgenden Punkte der Strecke sei, geradlinig bleiben.[2]) Das ist weitläufig ausgeführt und soll einen Gegensatz bilden zur »alteratio«, bei der es natürlich gleichgültig ist, von welcher Art von »difformitas« die »Bewegung« ist.

21. — Teil II, Kap. 8: De difformitate velocitatum. Kap. 9: De comparatione istarum difformitatum.

Erst im 8. Kapitel kommt der Verfasser ausführlicher auf die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit zu sprechen. Ich muß hier die hauptsächlichsten Stellen wieder im Wortlaut geben:

‘Omnis velocitas tempore durat. Tempus itaque sive duratio erit
‘ipsius velocitatis longitudo et ejusdem velocitatis intensio est sua lati-
‘tudo; et quamvis tempus et linea sint incomplexa in quantitate, tamen
‘nulla proportio reperitur inter tempus et tempus, que non inveniatur inter

1) Also im Falle der Rotation der Strecke um den Endpunkt B.

2) Offensichtlich ist aber die Behauptung Oresmes falsch. Denn wenn man eine Strecke AB um einen außerhalb ihr liegenden Punkt O rotieren läßt, so sind die momentanen Geschwindigkeiten y ihrer einzelnen Punkte D den Radienvektoren $\varrho = OD$ proportional; ϱ und $x = AD$ stehen aber in solcher Beziehung, daß sich eine quadratische Gleichung der Form $\varrho^2 = (x - a\cos\varphi)^2 + a^2 \sin^2\varphi$ ergibt (s. Fig. 6). Würde man also die Werte $y = \lambda\varrho$ in den Punkten D senkrecht zu AB auftragen, so ergäbe sich als »linea summitatis« ein Hyperbelbogen. In allen anderen Fällen allerdings ist es richtig, daß „hoc non potest esse nisi linea [AB] replicetur et curvetur aut frangatur in partibus ejus."

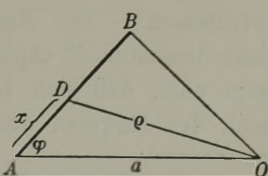


Fig. 6.

'lineas seu in lineis et e contra ... Et similiter est de intensione velo-'citatis videndum quod omnis proportio que reperitur inter intensionem et 'intensionem velocitatis, reperitur inter lineam et lineam; similiter sicut 'in aliis intensionibus in 2^0 capitulo prime partis, idem quoque in noti-'ciam velocitatis difformitatum invenire possumus per ymaginationem line-'arum et figurarum. Signetur ergo, gratia exempli, linea recta que sit AB 'et moveatur D mobile per tempus EF, sive sit motu circulari, sive recto, 'sive alteratione, et sive sit super lineam AB, sive super aliam. Eri[gan]-
239v 'tur quoque super lineam AB perpendiculariter linee | per totum in super-'ficie, que quidem superficies sive figura sit proportionnalis in altitudine 'velocitati ipsius D in intensione. Dico igitur quod illi superficiei vel 'figure poterit velocitas D mobilis [assimilari] et per eam congrue yma-'ginari, ita quod linea AB, [que] est hujusmodi linee longitudo, designabit 'longitudinem[1]) durationis hujus velocitatis, et altitudo hujus figure de-'signabit intensionem hujus velocitatis.'

Im weiteren werden nun wieder die längst bekannten Beispiele, das Rechteck und das rechtwinklige Dreieck, ausführlich besprochen, und bezüglich der übrigen Unterscheidungen wird auf das 11. bis 16. Kapitel des I. Teiles verwiesen. Am Schlusse heißt es:

'Sunt igitur difform[is] difformit[atis] quoad tempus ipsius velocitatis '4^{or} species simplices et 62 composite[2]), in quorum cognitionem per yma-'ginationem figurarum faciliter devenitur, et nulla est ad hoc alia via; ut 'si sit illa, est incomparabiliter difficilior quam sit ista.'

Im 9. Kapitel werden die »difformitas subjectiva« und die »difformitas temporalis« miteinander verglichen. Es kommt dabei nicht viel Beachtenswertes heraus. Von Interesse kann sein, daß hier ausdrücklich gesagt
240r wird: „Sed punctualis[3]) velocitas instantanea (!) est ymaginanda per | lineam rectam.“ Die »punctualis velocitas temporalis« ist dann (wie wir schon wissen) durch eine Fläche darstellbar. Wenn es hierauf heißt: „temporalis autem velocitas linee ymaginatur per corpus“, so kann man das als einen Anlauf zu dem Versuch auffassen, die Geschwindigkeit gleichzeitig als Funktion des Ortes auf der Linie und als Funktion der Zeit aufzufassen.[4]) Der Nachsatz „quia non contingit dare 4^{am} dimensionem, sicut dicebatur 4^0 capitulo prime partis“, der hier gar keinen Sinn hat[5]), zeigt aber, daß sich Oresme kaum viel dabei dachte. Schließlich wird noch des längeren ausgeführt, daß die »difformitas subjectiva« der Ge-

1) Es bedeutet also auch hier »longitudo« nur die Gesamtstrecke AB.

2) Es sollte ja eigentlich 63 heißen; vgl. Teil I, Kap. 16 (S. 213/14).

3) »Punctualis« heißt hier »eines Punktes«. 4) Vgl. oben S. 223 [3]).

5) Man müßte denn von einer »velocitas temporalis« einer Fläche sprechen, was Oresme aber nicht tut.

schwindigkeit einer Linie AB, wie wir sagen würden, dieselbe oder eine andere Funktion ergeben kann, als die »difformitas temporalis« eines Punktes D der Linie, der sich bewegt.

22. — Die übrigen Kapitel des II. Teiles.

Die weiteren 31 Kapitel des II. Teiles der vorliegenden Handschrift haben folgende Überschriften:

10. De causis quorundam effectuum per prius dicta.
11. De pulcritudine figurationum velocitatum.
12. De figuratione celestis velocitatis.
13. De difformitate quorundam successivorum.
14. Qualiter quorundam effectuum cause debent ex predictis [assignari].
15. De natura et difformitate sonorum.
16. De pulcritudine soni qui dicitur unus simpliciter.
17. De pulcritudine soni qui dicitur unus secundo modo.
18. Declaratio predictorum per exempla et effectus.
19. De pulcritudine soni qui dicitur unus 3^0 modo.
20. De pulcritudine soni qui dicitur unus 4^0 modo.
21. Recollectio predictorum.
22. De aliis circumstantiis quæ faciunt ad son[or]um pulcritudinem vel aliud aliquid.
23. De causis assignandis multorum effectuum per predicta.
24. Persuasio quod erit musica in alio seculo.
25. De applicatione difformitatum sonorum ad magicam artem.
26. De fundamento artis magice et prima ejus radice.
27. De probatione prius dictorum ex diversitate sectarum et complexionum.
28. Argumentatur ad idem ex etatibus hominum.
29. Argumentatur ad idem ex alteratione et reclusione divine (?).
30. Argumentatur ad idem ex sequentibus et concordantibus signis.
31. De radice 2^a artis magice.
32. De quadam specialitate radicum.
33. De 3^a radice artis magice.
34. De modis deceptionis per artem magicam.
35. Determinatio quorundam premissorum.
36. De difformitate accidentium anime.
37. De causis quorundam effectuum in subjecto proposito ex predictis.
38. De causis quorundam effectuum in corpore alieno per predicta.
39. De difformitate penarum.
40. De difformitate gaudiorum.

23. — Die ersten sechs Kapitel des III. Teiles.

Der III. Teil enthält wieder wichtige Dinge. Er ist in 13 Kapitel
259r geteilt, die Duhem sämtlich kopiert hat. | Im 1. Kapitel, das die Überschrift
hat: „Quomodo ymaginanda est acquisitio qualitatum“, ist nicht viel zu
holen. Oresme erklärt nur, wie man sich die »successio in acquisitione«
bei einer »qualitas« oder »velocitas« vorzustellen habe. Diese »acquisitio«
wird zuerst wieder nach der »extensio« und der »intensio« abgeteilt. In
jedem Falle wird sodann die »acquisitio« bewerkstelligt gedacht, indem
ein Punkt eine Linie, eine Strecke eine Fläche, und eine Ebene einen
Körper durch Darübergleiten (»fluere«, »fluxus«) erzeugt. Hier wird also
wirklich (vgl. S. 204, Fußnote 5) der »qualitas linearis«, die durch eine Fläche
darstellbar ist, die »qu. punctualis«, deren »extensio« sozusagen Null ist,
259v vorangestellt. Was von der »acquisitio« gesagt worden sei, gelte dann |
auch von der »perditio«.

bis Auch das 2. Kapitel: „Applicatio predictorum ad uniformitatem et
difformitatem“ bietet nichts für uns Interessantes. In ihm wie in dem
261r 3. Kapitel: „De quibusdam correlariis“ und in Kap. 4 mit dem Titel:
„Addit adhuc alia correlaria“ sind mehr philosophische Ausführungen über
den stetigen Übergang verschiedener Arten von »Eigenschaften« in andere,
sowie überhaupt von krummen Linien in gerade und umgekehrt, enthalten.

Mit dem 5. Kapitel aber, das die Überschrift trägt: „De mensura qualitatum[1]) et velocitatum“ werden neue Begriffe eingeführt. Das Kapitel beginnt:

‘Universaliter omnium duarum qualitatum ac etiam velocitatum men-
‘sura sive proportio est sicut figurarum, per quas ad invicem comparate
‘ymaginantur. Dicte autem ad invicem comparate propter unum notatum
‘capitulo septimo prime partis.[2]) Pro mensuris igitur et proportionibus
‘qualitatum seu velocitatum habendis realiter (?) redeundum est ad geo-
‘metriam . . . Dico itaque primo quod omnium qualitatum uniformium
‘equalium graduum proportio est sicut duorum subjectorum, sicut etiam
‘omnium quadrangulorum equalis altitudinis proportio est sicut proportio
‘duarum [ex]tensionum suarum vel longitudinum. Item omnium qualita-
‘tum //////// uniformium equalium subjectorum proportio est sicut suarum
‘intensionum, ut si subjecta sint equalia, et una sit duplo intensior quam
261v ‘alia, illa intensior erit ad aliam dupla. | . . .’[3])

1) In der Hs. ist hier noch eingeschaltet „et uniformitatum“.

2) Das Verhältnis zweier »Eigenschaften« oder »Geschwindigkeiten« soll also bestimmt sein durch das Verhältnis [der Flächen] der zugehörigen Figuren, sofern bei beiden die »intensiones« in demselben Maßstabe aufgetragen sind. Jetzt wird auch die mir seinerzeit unverständliche 7. Bemerkung im *Tract. de lat. form.* (s. meinen ersten Aufsatz S. 143).

3) Den Schluß bilden philosophische Ausführungen über das Wachsen und Abnehmen durch »condensatio« und »rarefactio«.

Das 6. Kapitel hat den Titel „Adhuc de eodem“ und lautet:

‘Rursum ad propositum eundo, dico quod omnium qualitatum uni-
‘formium inequalium extensive ac etiam intensive proportio majoris ad
‘minorem est composita ex proportione extensionis ad extensionem et pro-
‘portione intensionis ad intensionem. Si autem magis [in]tensa sit minus
‘extensa, tunc proportio[1]) extensionis ad extensionem est subtrahenda[2]) a
‘proportione intensionis ad intensionem aut e contra et remanebit proportio
‘unius qualitatis ad alteram ... Verbi gratia: Sit A qualitas 3^0 extensior
‘quam B qualitas, et similiter sit in duplo intensior[3]); igitur est proportio
‘dupla addenda ad proportionem triplam et proportio composita est sex-
‘tupla, scilicet proportio sex ad unum; in tali igitur proportione excedit A
‘qualitas B qualitatem. Sed ponatur quod A qualitas sit duplo magis
‘extensa quam B et B triplo magis intensa quam A; tunc subtrahenda
‘est proportio dupla a proportione tripla et remanebit proportio sesqui-
‘altera scilicet proportio trium ad duo; et quando B est ////////// propor-
‘tionis, scilicet triple, ideo B qualitas est major | quam A qualitas in pro- 262r
‘portione predicta, scilicet in sesquialtera. Qualiter autem unaquaque pro-
‘portio addatur alteri vel ab altera subtrahatur, ego dicam in quodam trac-
‘tatu quod voc[e]m algorismum proportionum.[4]) In predicta vero mensura-
‘tione semper accipienda est tota extensio qualitatis, sive fuerit [ista] line-
‘aris, sive superficialis, sive etiam corporea; et sicut dictum est de men-
‘sura qualitatis linearis, ita dicendum est de mensura velocitatis, nisi quod
‘per extensionem capiatur tempus durationis ipsius velocitatis et accipiatur
‘intensio gradualis, et sic de aliis singularibus. Verbi gratia, velocitas uni-
‘formis, que durat per tres dies, est equalis velocitati triplo intensiori, que
‘datur per unum diem, et ita de delectatione ac pena et etiam de lumine,
‘si ymaginetur ens successivum ...’[5])

---

1) Hier steht in der Hs. noch: „intensionis ad intensionem et“.

2) »Subtrahieren« von Verhältnissen bedeutet in unserer Sprache »dividieren«, ebenso sagt Oresme (weiter unten) »addieren« statt »multiplizieren«. Die Oresmesche Ausdrucksweise kommt schon in des Jordanus Nemorarius (13. Jahrh.) *Arithmetica* vor (Ed. Faber Stapulensis, Paris 1496, V : 1, Bl. b v[v]).

3) Hier steht in der Hs. „addenda“. Ich habe dieses Wort weiter unten eingefügt.

4) Das hier angekündigte Werk, das in mehreren Handschriften vorliegt, hat M. Curtze in der eingangs erwähnten Thorner Handschrift entdeckt und im Druck herausgegeben unter dem Titel: *Der Algorismus Proportionum des Nicolaus Oresme*, Berlin 1868. Einen kurzen Bericht gab er darüber in der Zeitschr. Math. Phys. **13**, 1868; Suppl. S. 70—73. Die Arbeit rief deswegen Aufsehen hervor, weil in ihr Regeln gegeben werden, die sich mit unseren Regeln für Bruchexponenten in Parallele setzen lassen. Oresme hat außerdem auch einen (sich nicht über das Landläufige erhebenden) *Tractatus proportionum* verfaßt, der aber schon früh gedruckt wurde (in dem Bande *Questio de modalibus Bassani Politi*, Venedig 1505).

5) Der Inhalt dieses Kapitels ist, kurz gesagt, der, daß zwei »qualitates uni-

24. — Teil III, Kap. 7: De mensura qualitatum et velocitatum difformarum.

ʿOmnis qualitas, si fuerit uniformiter difformis, secundum gradum puncti
ʿmedii ipsa est tanta, quanta qualitas ejusdem subjecti[1]), et hoc intelligo
ʿsi qualitas secundum gradum puncti fuerit linearis, et si fuerit super-
ʿficialis, secundum gradum linee medie, [et si fuerit corporea,] secundum
ʿgradum medie superficiei, semper conformiter intelligendo. Istud osten-

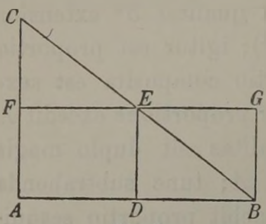


Fig. 7.

ʿditur de lineari. Sit igitur una qualitas ymagi-
ʿnabilis per triangulum ABC (Fig. 7), que est uni-
ʿformiter difformis terminata ad non gradum in
ʿpuncto B, et sit D punctus medius subjective linee,
ʿcujus quidem puncti gradus vel intensio ymagi-
ʿnetur per lineam $D[E]$; igitur qualitas, que est
ʿper totum significatum gradum, ymaginabilis est
ʿper quadrangulum $AFGB$, ut per capitulum prime
ʿpartis constat, et per 26^{am} primi EUCLIDIS, duo trianguli EFC et EGB
ʿsunt equales; [tri]angulus, qui designat qualitatem uniformiter difformem
ʿet quadrangulus $AFGB$, qui etiam designat qualitatem uniformem se-
ʿcundum [gradum] puncti medii, sunt equales; igitur qualit[ates] per hujus-
ʿmodi triangulum et quadrangulum ymaginabiles sunt equales, et hoc est
ʿpropositum.[2]) Eodem modo arguitur de qualitate uniformiter difformi

---

formes« sich verhalten wie die Rechtecke, durch die sie dargestellt werden. Am Schlusse habe ich ein belangloses Beispiel weggelassen.

1) Ich glaube, daß so, wie ich sie hier gesetzt habe, die Kommata richtig stehen.

2) Daß eine »qu. uniformiter difformis« durch eine »qu. uniformis« mit dem »mittleren Grad« als gleichmäßiger »intensio« identisch sei in bezug auf ein gewisses Etwas, das eben ORESME die »mensura« nennt, kommt in allen gleichzeitigen und späteren Schriften über ähnliche Dinge vor. Diejenigen, die eine geometrische Versinnlichung anwenden, beweisen es wie hier ORESME, als wenn es nur ein geometrischer Satz wäre, so BIAGIO PELICANI in seinen *Questiones super tractatu de latitudinibus formarum* (siehe z. B. die Neuausgabe durch F. AMODEO in den Annali ist. tecn. Napoli 25, 1909, S. 19/21 des Sonderabdruckes), diejenigen aber, die keine graphische Darstellung benutzen, umschreiben die Sache so, daß man unwillkürlich an das geometrische Bild denkt. So sagt z. B. der sog. SUISETH in seinen *Calculationes* (Ausgabe Pavia 1498, Bl. a5 v^{0} Sp. 2):

'Primo arguitur . . . calidum uniformiter difforme suo gradui medio correspon-
'dere: et hoc sic iuxta ponentes 1^{am} positionem. Capiatur talis caliditas seu tale
'calidum: et remittatur una medietas ad gradum medium. et intendatur alia ad medium
'equelo^{r} (equevelociter?): et sequitur totum non intendi nec remitti: eo quod tantam
'latitudinem acquiret secundum unam medietatem seu partem: sicut deperdet secundum
'aliam partem equalem: et in fine erit uniforme sub tali gradu medio: igitur nunc
'correspondet tali gradui.'

Ich merke noch an, daß SUISETH hier das Wort »latitudo« in allgemeinerem Sinne gebraucht.

'terminata utrinque [ad gradum], | sicut esset qualitas ymaginabilis per 262v
'quadrangulum $ABCD$ . . .[1]) Conformiter posset argui de qualitate super-
'ficiali ac etiam de corporali. De velocitate vero omnino dicendum est 'sicut de qualitate lineari, dicendum loco puncti medii, instantis medii 'temporis hujus velocitatis mensuratur.[2]) Sic itaque patet cuivis qualitati 'aut velocitati uniformi adequatur qualitas sive velocitas uniformiter dif-'formis. Proportio autem qualitatis et velocitatis uniformiter difformis 'est sicut proportio qualitatis et velocitatis uniformium simpliciter, 'quibus adequatur; et de mensura et de proportione istarum uniformium 'dictum est in capitulo precedenti. Si autem qualitas seu velocitas fuerit 'difformiter difformis, tunc si componatur ex partibus uniformibus aut uni-'formiter difformibus, tunc ipsa poterit mensurari per suas partes; de 'quarum mensura dictum est ante. Si autem qualitas fuerit aliter difformis, 'sicut difformitate illa, que per curvitatem designatur, tunc oportet recur-'rere ad mensuram figurarum curvarum, aut earum cum rectis figuris [com-'parationem?], et hoc est alterius speculationis.'

25. — Teil III, Kap. 8: De mensura et extensione in infinitum quorundam difformitatum.

'Superficie[i] summitas potest fieri quælibet, vel alta(?), per variatio-'nem extensionis absque augmento ipsius; [figura enim?] habet longitu-'dinem; et possibile est ipsam secundum unam dimensionem quantumlibet 'augeri, ipsa tamen non augmentata, simpliciter, [si?] modo secundum 'aliam dimensionem proportionnaliter minuatur et ita est de ///////.[3])
'Verbi gratia de superficie; accipiatur superficies ///////////////[4]) [pe]dalis
'cujus basis linea AB[, et] sit | alia superficies similis et equalis, cujus 263r
'basis sit CD, que ymaginetur in infinitum dividi per partes continue pro-'portionnales secundum proportionem duplam [?][5]) super basim CD 'eodem modo divis[am] et sit E prima pars, F secunda, G 3ª, et sic de 'aliis. Sumatur ergo prima istarum partium, scilicet E, que est medietas 'totius subjecti et ponatur super primam superficiem versus extremum; deinde 'super totum ponatur pars 2ª, scilicet F, et iterum super totum hoc ponatur 3ª 'pars, scilicet G, et ita de aliis in infinitum. Quo facto, ymaginetur basis AB 'dividi per partes proportionnales continue secundum proportionem duplam, 'eundo versus B, et statim [provenit?], quod supra partes proportionales prime 'linee AB stat superficies alta [super 1am partem per unum pedem et super 2am

1) Den geometrischen Beweis für das Trapez habe ich weggelassen.

2) Eine »velocitas uniformiter difformis« wird also nach der Geschwindigkeit im mittleren Zeitpunkt »gemessen«.

3) Diese wohl etwas verderbte Stelle wird durch das Folgende immerhin dem Sinne nach verständlich.

4) Hier ist wohl „altitudinis" zu ergänzen.

5) Hier ist wohl eine Auslassung.

‘partem] per duos pedes et super 3^{am} per 3^{es} et super 4^{am} per quatuor et sic ‘ulterius in infinitum, et tamen totalis superficies [habet?] nisi duo pedalia, ‘prius dicta in nullo augment[ata], et per consequens totalis superficies que ‘stat super lineam AB, est precise quadr[upla] ad illam sui partem, que ‘stat super primam partem ejusdem linee AB.[1]) Ista igitur velocitas sive ‘qualitas, que proportionnaliter in intensione huic ‘[figure?][2]) in altitudine erit, [est] precise quadrupla ‘ad partem sui que foret in prima parte temporis ‘vel subjecti secundum hujusmodi dimensionem. ‘Verbi gratia, sit prima pars proportionalis secun‘dum proportionem duplam ipsius linee AB versus ‘extremum A alba seu calida aliqua[ntum], et 2^a ‘in duplo albior, 3^a 3^{la}, 4^a 4^{pla}, et sic consequenter ‘utrinque secundum superficiem minorem. Tunc ex ‘predictis patet, quod tota latitudo linee AB est ‘precise quadr[upla] ad altitudinem[3]) prime partis, ‘et ita erit de altitudine superficiali et corporali, si ‘conformiter esset intensa. Eodem modo, si aliquod ‘mobile moveretur in prima parte proportionnali alicujus temporis taliter

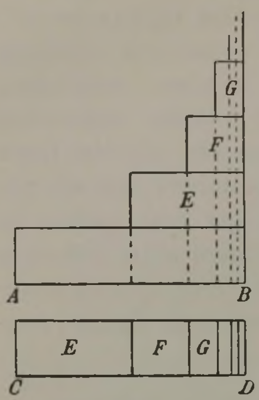


Fig. 8.

1) Trotz mancher Mängel der Hs. in diesem Kapitel läßt sich das Ganze doch in folgender Weise deuten. Es sind zwei kongruente Rechtecke über AB und CD, beide von der Höhe 1 Fuß gegeben (vgl. Fig. 8). Die Grundlinie CD wird so geteilt, daß die Teile E, F, G eine unendliche geometrische Reihe mit dem Quotienten $\frac{1}{2}$ bilden. Diese Teile werden über dem Rechteck (AB) in der durch die Figur angegebenen Weise aufeinander gestellt. Teilt man jetzt AB so, wie vorher CD, so steht über dem ersten Teil (links) ein Rechteck von der Höhe 1 Fuß, über dem zweiten ein solches von der Höhe 2 Fuß usw., und die ganze Summe ist eben doppelt so groß als das ursprüngliche Rechteck (AB) oder viermal so groß als dessen (linke) Hälfte. Das Ganze ist nichts anderes als eine geometrische Summation der Reihe

$$1+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2^2}\cdot 3+\frac{1}{2^3}\cdot 4+\cdots \text{ in inf.}$$

Auf das Vorkommen solcher Reihen bei ORESME und anderen Scholastikern hingewiesen zu haben, ist DUHEMS Verdienst (siehe meinen Aufsatz: *Zur Geschichte der unendlichen Reihen im christlichen Mittelalter*; Biblioth. Mathem. 14_3, 1914, S. 150—168). Woher die Scholastiker diese Kenntnis bezogen, ist bis auf weiteres unbekannt. ORESME setzt einfach voraus, daß man weiß, was unter Teilung einer Strecke »per partes continue proportionales« zu verstehen ist.

Für die Leser des eben zitierten Aufsatzes sei erwähnt, daß nach freundlicher Mitteilung von Herrn E. RATH das Werk *Liber de triplici motu* von A. THOMAS (Paris 1509) auch in der Kgl. Landesbibliothek Stuttgart vorhanden ist.

2) Die Hs. hat »forme«.

3) Hier treten »latitudo« und »altitudo« zum ersten und einzigen Male bei ORESME im Sinne der Gesamtheit aller »intensiones« auf. Es heißt hier aber auch »tota latitudo«.

'divisi aliquali velocitate, et in 2^a duplo velocius, et in 3^a 3^{plo}, et sic 'semper intendendo velocitatem, talis esset quadrupla precise ad altitu'dinem prime partis, ita quod illud mobile in tota hora pertransiret 4^{plum} 'precise ad illud, quod pertransivit in prima medietate vel //////// parte 'proportionnali; [ut si in prima parte proportionnali] pertransiret unum 'pedem, in toto residuo pertransiret 3^{es} pedes, et in toto tempore pertrans'iret quatuor pedes.[1]) [posset?] [Etiam?] aliter demonstrari demonstratione 'subtiliori et dif[ficiliori]; sed ita est magis conveniens huic tractatui, et 'sufficit ideo //////////////////.' | 263ᵛ

26. — Teil III, Kap. 9: De quodam exemplo.
Kap. 10: Quoddam aliud exemplum.

Das 9. Kapitel bringt folgendes Beispiel: Es werde die Strecke AB wie vorhin »per partes continue proportionales« geteilt, aber nach der Verhältniszahl 4, so daß der erste Teil $\frac{3}{4}$ der ganzen Strecke, und jeder folgende $\frac{3}{4}$ des Restes ist[2]), den die vorhergehenden auf der Strecke übrig lassen (Beispiel: ganze Strecke 64; Teile 48, 12, 3, $\frac{3}{4}$ usw.). Über der ersten Teilstrecke denke man sich ein Rechteck von irgendeiner Höhe, über der zweiten ein doppelt so hohes, über der dritten ein viermal so hohes usw. immer »duplando«, so daß also jedes Rechteck („pars superficialis“) viermal so schmal, aber doppelt so hoch ist als das vorhergehende. Oresme findet dann natürlich, daß die Rechtecke im Verhältnis $\frac{1}{2}$ abnehmen. Er sagt dann ohne weiteren Beweis:

'ergo totius aggregati ex omnibus infinitis prima pars est medietas 'et 2^a medietas residui, et sic ultra. Ergo totum aggregatum est precise 'duplum ad primam ejus partem ...'

Das könne man wie im vorigen Kapitel auf jede »qualitas« oder »velocitas« anwenden. Oresme gibt noch das Beispiel eines 12 Stunden enthaltenden Tages, der nach einer geometrischen Reihe in die Teile 3 Stunden, $\frac{3}{4}$ Stunden usw. eingeteilt sein soll. Während dieser Zeit soll ein »mobile« sich so bewegen, wie durch die allgemeinen Ausführungen angedeutet wurde. Es würde dann das »mobile«, wenn es in dem ersten Zeitteil »unam leucam« | zurücklegte, »in tota die integra pertransiret 264ʳ solum duas leucas, et tamen in infinitum velociter moveretur«.

---

1) Erst an dieser Stelle sagt Oresme deutlich, daß er die Fläche der Figur, wenn die »intensiones« Geschwindigkeiten sind, und die »longitudo« als Zeit gedeutet wird, als Weg in der betreffenden Zeit auffaßt. Einer Erklärung scheint ihm das also nicht bedürftig zu sein.

2) Ich schließe mich möglichst an die Ausdrucksweise Oresmes an. Das ganze Beispiel zeigt, daß Oresme mit der Theorie der unendlichen geometrischen Reihe vollkommen vertraut war.

Das 10. Kapitel gebe ich wieder wörtlich, weil eine neue Vorstellung darin auftritt.

‘Sit linea *AB* in infinitum divisa per figurationem partium propor-
‘tionalium secundum proportionem [sub]duplam, [ut] continuiter solet
‘fieri, ita quod prima pars proportionnalis sit medietas residui, et sic in
‘infinitum; sic quod qualitas prime partis [sit] uniformis aliquo gradu, et
‘qualitas 2^{e} partis sit uniformiter difformis ab ejus gradu usque ad gra-
‘dum duplum, et qualitas 3^{e} sit uniformis illi gradu, et qualitas 4^{te} uni-
‘formiter difformis ab illo gradu duplo, usque ad duplum illius dupli, et
‘sic consequenter alternatim de aliis partibus ad similitudinem ejus figure
‘////////.[1]) Dico ergo quod qualitas totius erit [tripla] sexquialtera ad qua-
‘litatem prime partis ejusdem, ita quod proportio totius ad illam primam
‘partem erit sicut 7 ad 2. Et conformiter potest dici de qualitate super-
‘ficiali ac etiam corporali. Conclusio sic probatur. Sumantur partes de-
‘nominate numero impari, scilicet prima, [3^{a}], 5^{a}, 7^{a} et tunc etiam patet
‘ex casu, quod prima pars est quadrupla ad 3^{am} in extensione et similiter
‘3^{a} est 4^{la} ad 5^{am} in extensione, et 5^{a} ad 7^{am} et sic de aliis. Rursum
‘patet ex casu, quod e contra qualitas 3^{a} est similiter dupla in intensione
‘et sic consequenter. Ergo per dicta in 6^{0} capitulo hujus partis, qualitas
‘prime partis ad qualitatem 3^{e} dupla, 3^{a} vero ad qualitatem 5^{am} [dupla]
‘et sic de aliis. Ergo totum aggregatum ex omnibus denominatis numero
‘impari est precise duplum ad primam partem, que denominatur unitate,
‘que quidem unitas tenet locum imparem in serie numerorum.[2]) Per eun-
‘dem modum ostendi posset, quod qualitas 2^{e} partis dupla est ad quali-
‘tatem 4^{te}, et 4^{ta} ad qualitatem 6^{te}, et sic de aliis partibus numeris paribus
‘denominatis.[3]) Sed adhuc aliter procedatur. Qualitas enim 2^{e} partis est
‘uniformiter difformis; ergo per 7^{m} capitulum hujus partis ipsa est tanta,
‘quanta fuisset uniformis secundum gradum puncti medii. Ex casu quoque
‘statim sequitur, quod ille gradus puncti medii est sesquialter ad gradum
‘prime partis, scilicet sicut [3] ad [2] et sic de aliis. Ergo qualitas partis
‘2^{e} tanta est, quanta si esset uniformiter intensior quam prima secundum
‘proportionem sesquialteram et ipsa est minus extensa [secundum propor-
264ᵛ ‘tionem duplam; ergo secundum] | 6^{tum} capitulum hujus partis, ipsa qua-

1) Eine Figur zu diesem Fall entwirft sich der Leser ja leicht selbst. Ich habe eine solche gegeben in dem erwähnten Aufsatz der Biblioth. Mathem. 14_3, 1914, S. 160.

2) Die Scholastiker (denn Oresme steht da gewiß nicht allein) hielten also im Gegensatz zu Boëtius, Alkhwarismi und anderen (s. J. Tropfke, *Geschichte der Elementar-Mathematik* 1, Leipzig 1902, S. 154/55) die Eins wirklich für eine Zahl.

3) Oresme meint wohl keine von der im folgenden auseinandergesetzten Methode wesentlich verschiedene Betrachtungsart, sondern nur die direkte Berechnung der Summe der geraden Flächenstücke.

'litas prime partis est sesqui[tertia] ad qualitatem 2^{e}, ita quod se habet 'ad eam sicut 4 ad 3; sed sicut se habet prima ad 2^{am}, ita se habet 3^{a} 'ad 4^{am}, et 5^{a} ad 6^{am}; ita ergo totum aggregatum ex [partibus] denomi-'natis numeris imparibus est sesqui[tertium] ad totum aggregatum ex par-'tibus denominatis numeris paribus. Sit ergo, gratia exempli, prima pars 'hujus qualitatis sicut duo; ita totum aggregatum ex ipsa et aliis im-'paribus est sicut 4, ut preostensum est. Est igitur totum aggregatum 'ex omnibus partibus [paribus] sicut 3, ut statim ostensum est. Ergo 'talis qualitas est sicut 7. Est itaque proportio totius qualitatis ad pri-'mam sui partem sicut 7 ad 2, id est tripla sesquialtera, quod fuit pro-'positum. Et simile potest probari de velocitate, et applicari ad veloci-'tatem, sicut factum fuit in capitulo precedenti.'

27. — Teil III, Kap. 11, 12, 13: »Qualitates« mit sich ins Unendliche erstreckender »extensio«.

Im 11. Kapitel, das den Titel hat: „De mensura et extensione in infinitum qualitatis finite seu velocitatis" dreht der Verfasser die dem 8. Kapitel (s. S. 232) zugrunde liegende Figur um einen rechten Winkel, so daß »intensio« und »extensio« vertauscht werden. Die »figura« besteht dann aus unendlich vielen Rechtecken, alle mit gleicher Grundlinie und mit den Höhen 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ usw. Ihre Summe ist natürlich wie früher das Doppelte des ersten Rechtecks. Das prinzipiell Verschiedene ist nur, daß jetzt das »subjectum« »in infinitum extensum« ist. Der Schluß des kurzen Kapitels lautet:

'Similiter si aliquod mobile moveretur una die aliquanta velocitate,
'et 2^{a} die duplo tardius, et in 3^{a} die $[2]^{lo}$ tardius quam in 2^{a}, | et sic 265r
'in infinitum, nunquam in eternum pertransiret duplum ad pertransitum 'in prima die; sed quocunque spatio dato minori quam duplo ad pertran-'situm prima die, tantumdem spatium aliquando pertransiret.'

Ob man sich bei dem Inhalte der letzten zwei Kapitel wirklich etwas Greifbares vorstellen kann, ist mir nicht recht klar geworden. Ich gebe die Kapitel aber wieder, da sie doch eine Erweiterung der bisherigen Ideen darstellen und geeignet sind, zu zeigen, auf welche Spekulationen diese Männer mangels experimenteller Anhaltspunkte geführt wurden.

Das 12. Kapitel ist überschrieben: „De infinita extensione propter quid et mensura qualitatis finite et uniformis." Es lautet:

'Corporea qualitas trinam habet dimensionem subjectivam, cujus sub-'jecti seu qualitatis configuratio potest multipliciter variari. Et gratia 'exempli, sit *A* corpus pedale divisum [significative] per partes continue 'proportionnales secundum proportionem duplam, et sit prima *B*, 2^{a} *C*,

3^a *D*, et sic in infinitum.[1]) Accipiaturque prima pars et fiat de ea unus [circulus][2]), deinde sumatur 2^a et adjungatur latitudo ipsius 2^e, quod totalis [circulus] sit duplo magis extensus quam ante, et ipsa pars secunda fiat proportionnaliter minus profunda, quod potest fieri absque augmentatione et absque rarefactione istius partis 2^e, sed per solam transfigurationem. Deinde proportionnaliter adjungatur 3^a pars ipsius, que est *D*, et fiat circulus quadruplo latior; et postea conformiter fiat de aliis; et semper sine augmento et rarefactione per solam transfigurationem. Hoc facto patet, quod *A* corpus erit in infinitum longum et in infinitum latum, et tamen non erit augmentatum, sed precise equale pedali.[3]) Nunc autem ad propositum. Eodem modo possibile est ad ymaginationem quod aliqua qualitas, sicut gravitas hujus [corporis], sit in infinitum longa et in infinitum lata, et cum hoc ubique uniformis, quoniam subjectum, quod est uniformiter grave et unius libre, potest transfigurari et extendi modo predicto absque alteratione gravitatis. Possibile est igitur quod talis qualitas sit extensa et uniformis et possibile etiam est quod esset difformiter difformis, sed non esset possibile, quod esset uniformiter difformis. Quod videndum aliquibus mirabile.[4]) Et tamen pulcrum est et facile speculari. Si enim a puncto *B* protrahatur linea recta infinita in corpore prius

---

1) Schon im vorigen Kapitel hat ja ORESME darauf hingewiesen, daß man die Betrachtungen auch auf »qualitates superficiales« und »qu. corporeas« ausdehnen könne. Aber er hat nicht definiert, was dann unter der Teilung des Subjekts »per partes continue proportionales« zu verstehen sei. Auf welche Weise er also hier den »einen Fuß langen (?) Körper« teilt, ist ganz unklar.

2) Die Konjektur »circulus« für das hier und weiter unten in der Hs. stehende »triangulus« stammt von DUHEM. Ich bin damit einverstanden. ORESME will offenbar aus seinen »Teilen« Zylinder machen, die immer breiter (das Wort »latitudo« hat hier wohl den natürlichen Wortsinn) und immer niedriger werden, und zwar durch einfache geometrische Umformung („per solam transfigurationem"). Man denke sich etwa den Körper, der durch Rotation des oberen Teiles der Fig. 8 um *AB* entstünde.

3) Ich kann damit keine genaue Vorstellung verbinden.

4) Hieraus darf man schließen, daß auch andere sich mit einer solchen Ausdehnung eines räumlichen »Subjekts« auf den ganzen unendlichen Raum befaßt haben. Betrachtungen, die den hier angestellten in etwas ähnlich sind, kommen im 7. und 8. Absatz einer jedenfalls auch aus dem 14. Jahrhundert stammenden Schrift *De proportione dyametri quadrati ad costam ejusdem* vor, die H. SUTER aus dem Codex A. 50 der Berner Stadtbibliothek in der Zeitschr. f. Math. u. Phys. **32**, 1887; Hist. Abt. S. 41—56 (s. besonders S. 48) zum erstenmal herausgab. SUTER schrieb die Abhandlung ALBERT VON SACHSEN zu, was aber nicht genügend gesichert erscheint (vgl. dazu P. DUHEM, *Études sur LÉONARD DE VINCI*, Ière Série, Paris 1906, S. 341/44 und G. ENESTRÖM, Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/07, S. 381). Beiläufig sei hier zu der a. a. O. (S. 381/82) von G. ENESTRÖM gemachten zweiten Bemerkung erinnert, daß der anonyme Verfasser, wie der Text deutlich besagt, die Reihe seiner Kugelschalen für eine geometrische Reihe hält, deren Konvergenz ihm ja selbstverständlich war.

‘fabricato, illius linee qualitas linearis uniformis est designabilis per figuram
‘[superficialem] infinitam, finite alt[am] uniformiter et in infinitum [longam] | 265v
‘et per consequens simpliciter infinitam. Sed implicat contradictionem,
‘nec est imaginabile quod sit superficies in infinitum longa, cujus latitudo
‘sit uniformiter difformis, unde patet quod qualitas uniformiter difformis
‘non potest esse extensa modo predicto.[1]) Item autem in corpore predicto
‘esset superficies infinita, cujus qualitas uniformis esset designabilis per
‘corpus simpliciter infinitum, licet non undique[2]), et tamen totalis qualitas
‘corporea esset simpliciter finita. Inde potest sumi argumentum, quod
‘punctus non est aliquid, nec linea, nec superficies, sicut arguebatur
‘4^0 capitulo hujus [partis]. Adhuc autem posset ex hoc argui, quod in-
‘telligere est corpus agens agere secundum ejus profundum et non solum
‘secundum ejus superficiem terminantem. Si enim esset corpus finitum
‘lucidum modo predicto extensum et ageret solum secundum superficiem
‘extremam indivisibilem, jam sequitur, quod ista lux superficialis finita
‘ageret in medio propinquo ad extra lumen simpliciter infinitum, et quod
‘effectus agentis finiti esset simpliciter infinitus.’[3])

Das letzte Kapitel bildet die Fortsetzung des vorigen. Es ist überschrieben: „De extensione simpliciter infinita qualitatis finite atque difformis“ und lautet:

‘Qualitas finita potest ymaginari in infinitum extendi simpliciter un-
‘dique sine ejus augmento, aut tamen ejus intensio proportionnaliter minu-
‘atur, sed non potest fieri sine difformitate difformi. Sit enim A unum
‘corpus simpliciter infinitum undique, scilicet ad omnem partem, et quod
‘totum occupet. Sit itaque una qualitas quecunque sit, ut ponatur qualitas
‘unius libre que ymaginatur dividi per partes proportionnales continue
‘secundum proportionem duplam. Accipiam utique medietatem illius qua-
‘litatis et ymaginatur poni (?) in una superficie quantumlibet signata ubi-
‘libet in isto corpore infinito, que sit [B]. Deinde sumatur secunda pars
‘proportionnalis, scilicet medietas residui illius qualitatis, et ponatur in
‘una superficie equali prime et circumdet cum centro illa primam sump-
‘tam, et sit C. Et quoniam ista gravitas est duplo minor quam prima
‘et equaliter extenditur, ideo proportionnaliter, scilicet in duplo, fit minus
‘intensa. Postea sumatur 3^a pars proportionnalis gravitatis premisse et ex-
‘tend[a]tur vel inform[e]tur [illa?] superficiem equalem et concentricam prime
‘vel 2^e, que sit D, et sit [tertia] qualitas ista proportionnaliter minus ex-

1) Wenn die Gerade nach beiden Seiten ins Unendliche geht, ist eine »qu. uniformiter difformis«, sofern man, wie der Autor, die »intensiones« nur nach einer Seite abgetragen denkt, in der Tat auf ihr nicht darstellbar.

2) Das heißt, wohl nach Länge und Breite, aber nicht nach der Höhe.

3) Ich vermag diesem Beispiele keinen Sinn unterzulegen.

266r 'tensa; et sic fiat de aliis conformiter, et sic | consequenter in infinitum. 'Igitur si esset aliquod corpus simpliciter et undique infinitum, non re-'pugnaret, quin ali[qua] qualitas sicut gravitas foret extensa a //////// sicut 'gravitas unius libre extenderetur in casu nunc posito. Quo dato, statim 'patet, quod hujusmodi gravitas est extensa in infinitum undique et quod 'ubique in isto corpore infinito est aliquod illius gravitatis finite. Non 'oportet igitur, ut corporis infinit[i] virtus sit infinita, nisi ipsa foret uni-'formiter intensa, aut difformitate difformi reducibili vel equivalenti uni-'formitate [in] infinitum extens[a].[1]) Multa quidem alia possunt ex predictis 'inferri. Sed hec tanquam quedam elementa sufficiunt gratia exercicii et 'exempli, et hoc de uniformitate et difformitate dictum sit tantum. Et sic 'est finis hujus tractatus. Deo laus Amen.'

Der Schreiber fügte dem Werke noch folgende Subscriptio bei:

'Explicit tractatus magistri NICHOLAII ORESME de uniformitate et dif-'formitate intensionum. Deo gratias. Amen. Qui plus vult scribere scribat. 'Ego nolo plus.'

Vielleicht denkt ja der Leser, der bis hierher gefolgt ist, ähnlich wie der arme Schreiber. Wer aber mehrere scholastische Traktate eingesehen hat, wird doch mit dem vorliegenden recht zufrieden sein. Hier ist nichts zu finden von jenen zahllosen, oft kindischen Einwürfen fingierter Gegner, die alle einzeln und ausführlich widerlegt werden, so daß man häufig seitenlang im Unklaren ist, welche Meinung denn der Autor selbst vertritt. Hier fließt alles zwar in breiter, aber zu allermeist klarer Sprache dahin. Und was den mathematischen Gehalt betrifft, so muß man bedenken, daß ORESME eigentlich kein Mathematiker war. Für ihn und seinesgleichen war die Mathematik nur Hilfswissenschaft. Wenn man das berücksichtigt, wird man erst das Ganze gerecht beurteilen.

28. — Schlußwort.

Über das Verhältnis des *Tract. de lat. form.*[2]) zu dem hier besprochenen Originalwerk des ORESME habe ich schon in den Fußnoten so viel gesagt,

1) Was der Verfasser im ganzen will, erkennt man ja. Aber ob dieses Beispiel dazu beiträgt, sein Verfahren im einzelnen verständlicher zu machen, weiß ich nicht.

2) Herr E. RATH war so freundlich, mir mitzuteilen, daß sich auch auf der Königl. Landesbibliothek zu Stuttgart eine Abschrift des *Tractatus de latitudinibus formarum*, mit diesem Titel, ohne Angabe eines Verfassers, befindet (Signatur: H. B. X. Cod. philos. 10, fol. 146—151). Der Text steht der Fassung der Druckausgabe von 1505 recht nahe. Die Kopie hat keine Figuren und stammt etwa aus dem Jahre 1480. In diesem Jahre wurde nämlich der direkt vorhergehende Traktat (von derselben Hand) geschrieben.

Ferner verdanke ich Herrn H. DINGLER einige Auskünfte über die drei Münchner Kopien des *Tract. de lat. form.* (vgl. meinen ersten Aufsatz S. 122). Die drei Kopien enthalten zwei Fassungen, die sich aber in Sinn und Anordnung weder voneinander, daß ich mich hier kurz fassen kann. Der *Tract. de lat. form.* ist keineswegs ein Auszug, sondern eine mehr lehrbuchartige, kompendiöse Darstellung der Grundlagen der wahrscheinlich von Oresme selbst eingeführten graphischen Darstellung. Auch ist in ihm die Ausdrucksweise, abgesehen von stehenden Bezeichnungen, wie »uniformis«, »difformis« usw., durchaus verschieden von der Oresmes. Das sieht jeder, der sich nur die Mühe nimmt, die von mir in meinem ersten Aufsatz veröffentlichten Bruchstücke zu vergleichen. Da mir nicht der vollständige *Tractatus de figuratione potentiarum* vorliegt, kann ich natürlich nicht mit Sicherheit behaupten daß die wenigen Dinge, in denen der *Tract. de lat. form.* über den *Tract. de fig. potent.* hinausgeht, wirklich nicht in dem letzteren Traktate stehen.[1]) Was aber der *Tract. de lat. form.* an wichtigen, auf unser Thema bezüglichen Sätzen nicht enthält, will ich kurz angeben. Das sind vor allem die Anwendungen auf das »Maß« einer »Eigenschaft« oder »Geschwindigkeit«, also auch alle Ausführungen über Erstreckung ins Unendliche und über unendliche Reihen; ferner fehlen die Ausführungen über den Kontingenzwinkel und die Krümmung. Die allgemeine Eigenschaft der »qualitas uniformiter difformis« (vgl. S. 209) fehlt im *Tract. de lat. form.*, wie schon erwähnt, gleichfalls. Die prinzipiell wichtigen Darlegungen Oresmes über die Darstellbarkeit einer und derselben »qualitas« durch verschiedene Figuren, je nach Wahl der Längeneinheit beim Auftragen der »intensiones« (Teil I, Kap. 7, vgl. oben S. 206), scheint der Bearbeiter des *Tract. de lat. form.* nicht verstanden zu haben. Alles, was er in dieser Richtung sagt, beschränkt sich nämlich auf das, was ich in meinem ersten Aufsatze

---

noch von den Druckausgaben wesentlich unterscheiden. Die eine Fassung ist gegeben durch cod. lat. 26 889, 4°, saeculi XV., fol. 201—205, wovon der Text in cod. lat. 4377, 4°, saeculi XV., fol. 138—142 (bis auf Kleinigkeiten) eine genaue Kopie ist. Auch die Figuren, die klein und sehr flüchtig an den Rand gezeichnet sind, stimmen überein, bis auf eine, die in der Abschrift fehlt. Es sind im ganzen 21 (bzw. 20) Figuren. Die zweite Fassung findet sich in cod. lat. 4377, 4°, saeculi XV., fol. 120—123. Sie hat 100 an die Ränder gezeichnete Figuren, die mit denen der Drucke von 1486 und 1505 im Wesen durchaus übereinstimmen. Vor allem sind die Fig. 7 und 8 meines ersten Aufsatzes (S. 137) sowie die Fig. 9 und 10 (S. 138), dazu noch mehr Variationen dieser Art, vorhanden. Auch die Fig. 11 (S. 140) ist (mit Vertauschung von rechts und links) da, und eine Figur der »latitudo uniformiter difformis« mit eingezeichneten Treppenstufen, die das gleichmäßige Wachsen andeuten sollen (wie ich eine solche S. 127 erwähnt habe). Von einer »parabelförmigen Punktreihe« (s. meinen ersten Aufsatz S. 129) ist natürlich auch nicht eine Andeutung zu finden.

1) Ich hebe nur noch hervor, daß wenigstens in dem von Duhem exzerpierten Teil des *Tract. de fig. potent.* von »Formen« überhaupt nicht die Rede ist. Da ferner die Unterteilung der »difformis difformitas« nicht gegeben wird (vgl. oben S. 224 [2])), fehlen auch die Unrichtigkeiten, die ich in meinem ersten Aufsatz (S. 130/31 und S. 140) gerügt habe.

S. 139 mitgeteilt habe. Jener Absatz kann aber als eine unklare Darstellung von Teil , Kap. 10 des *Tract. de fig. potent.* (s. oben S. 208/9) angesehen werden. In den Hauptsachen der graphischen Darstellung und der Einteilung der »latitudines« ist aber auch der *Tract. de lat. form.* völlig klar, und gerade die konzise Form machte ihn eben geeignet zu der weiten Verbreitung, die er erlangte. Es ist also sicher etwas zu stark ausgedrückt, wenn DUHEM von ihm sagt, er gebe nur eine „pauvre idée" von dem Originalwerke ORESMES, und wenn er ihn als „médiocre imitation" hinstellt.[1])

In demselben Zusammenhange[2]) kommt DUHEM nochmals auf die Beziehungen des ORESMEschen Verfahrens zu der DESCARTESschen analytischen Geometrie zu sprechen, indem er sagt, daß M. CURTZE und M. CANTOR, trotzdem sie den Gedanken ORESMES nur aus der kleinen Schrift eines Schülers kennen gelernt hätten, doch nicht gezögert hätten, ORESME als Vorläufer von DESCARTES anzusehen. Darüber muß ich noch ein Wort sagen. Vor allem möchte ich CANTOR ganz aus dem Spiele lassen und ihn nicht in einem Atem mit CURTZE nennen.[3]) Gegenüber CURTZE aber habe ich gesagt[4]), daß man doch ein großes Fragezeichen machen müsse zu dem von ihm supponierten engeren Zusammenhang zwischen den »latitudines formarum« und der Geometrie DESCARTES'. Von dem, was ich in meinem ersten Aufsatz über den *Tract. de lat. form.* äußerte, habe ich auch heute kein Jota zurückzunehmen. Daß aber der *Tract. de fig. potent.* in dieser Hinsicht neue Anhaltspunkte gebracht hätte, wird der aufmerksame Leser mit mir verneinen müssen. Daß ORESME selbst mit »latitudo« (oder »altitudo«) das bezeichnet, was wir »Ordinate« nennen würden, während der Ausdruck »latitudo« im *Tract. de lat. form.* gewöhnlich die dargestellte Funktion selbst bedeutet, ist ja ein rein formaler Unterschied. Für das, was wir etwa (in beschränktem Sinne) »Abszisse« heißen würden, haben beide Traktate keine eigene Benennung. Sowohl CURTZE als DUHEM

1) Über den Verfasser des *Tract. de lat. form.* und die Zeit der Bearbeitung dieses Traktates hat man bis jetzt keinerlei Anhaltspunkte. Vermutlich ist aber auch der *Tract. de lat. form.* noch im 14. Jahrhundert fertiggestellt worden. Da die Schüler eines Meisters doch gewöhnlich auch dessen Ausdrucksweise übernehmen, der *Tract. de lat. form.* aber durchaus die Bezeichnungsweise derjenigen hat, die ORESME als die »Modernen« bezeichnet (s. oben S. 203, 207), so ist es wohl unwahrscheinlich, daß der Verfasser des *Tract. de lat. form.* ein direkter »Schüler« ORESMES war.

2) a. a. O. S. 400.

3) CANTOR hat, wenn ich nicht sehr irre, nicht einen einzigen scholastischen Traktat im Original durchgelesen und die ganze Zeit der Scholastik nur nach sekundären Quellen bearbeitet. In welcher Weise er das im vorliegenden Falle getan hat, wird voll ermessen können, wer sich nur die Mühe nimmt, meine diesbezüglichen Fußnoten im ersten Aufsatze zu sammeln.

4) Siehe meinen ersten Aufsatz S. 144.

haben sich da getäuscht.[1]) Überhaupt ist der Koordinatenbegriff (wenn man so sagen will) bei Oresme ein so ganz anderer als bei Descartes, daß man, selbst wenn Descartes die Oresmesche Schrift gekannt hätte, im Zweifel sein könnte, ob sie ihn zu seiner Behandlungsart geometrischer Aufgaben hätte anregen können.[2]) Daß dies mindestens bei der Geraden, für die allein Oresme ein Gesetz angab, das sich analytisch hätte deuten lassen, nicht der Fall war, habe ich schon hervorgehoben.[3])

Es erhebt sich da die weitere Frage, ob sich die Oresmesche Darstellung überhaupt in irgendeiner Form bis auf Descartes' Zeit fortpflanzte. Diese Frage kann seit der Auffindung des Beeckmannschen Tagebuches (1905) unbedingt bejaht werden. Denn aus diesem Tagebuch, das in der Provinzialbibliothek zu Middelburg aufbewahrt wird, sieht man, daß der 23jährige Descartes im November oder Dezember 1618 eine Darstellung des Gesetzes vom freien Falle gab, die sich auf das schon von Oresme benutzte Dreieck (s. oben S. 230) stützt.[4]) Außerdem hat Descartes die graphische Darstellung der Scholastiker auch in einer ganz kurzen und etwas dunklen Notiz, die offenbar von Zinseszinsen mit momentaner Verzinsung handelt[5]), benutzt. Er nimmt nur in beiden Fällen die Grund-

1) Siehe oben S. 203[8]).

2) Die Descartessche Koordinatenmethode, mit der diejenige Fermats im Wesen durchaus übereinstimmt, kann man bequem und richtig aus den Bemerkungen Eneströms in Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/11, S. 241/43 ersehen. Ich habe seitdem auch das Descartessche Fragment über die Ovale kennen gelernt, das nach dem Urteil P. Tannerys vor 1629 zu datieren ist (s. *Œuvres de Descartes*, éd. Ch. Adam et P. Tannery, 10, Paris 1908, S. 310—324 mit Erläuterungen von P. Tannery S. 325—328). Die dort angewendete Methode kann durchaus als eine Vorstufe zu der allgemeineren Darstellung der *Géométrie* von 1637 (in denselben *Œuvres* 6, Paris 1902, S. 367—485) gelten, schwerlich aber aus dem Oresmeschen Verfahren abgeleitet werden.

3) Siehe oben S. 210/11.

4) Siehe die soeben angeführten *Œuvres de Descartes* 10, S. 58/61, S. 75/78, S. 219/20, dazu *Œuvres* 1, S. 69—75 und S. 230. Die Ausführungen Descartes' sind im übrigen zum Teil falsch. Darüber siehe näheres bei Duhem a. a. O. S. 566—574 und in meinem Aufsatze: *Das Gesetz vom freien Falle in der Scholastik, bei Descartes und Galilei*; Zeitschr. math. nat. Unterr. 45, 1914, S. 209—228.

5) „. . . de reditu redituum. Qui si singulis momentis augeri imaginetur, & quæratur quid hoc vel illo tempore debeatur . . ."; s. Bd. 10 der *Œuvres*, S. 78 und S. 222/23; an letzterer Stelle die Figur. An der ersten Stelle spricht Descartes sogar davon, daß man zu dem gewünschten Zwecke die Grundstrecke nicht „in partes arithmeticas, hoc est aequales, sed in geometricas, sive proportionales" teilen müsse. Auch die merkwürdige Teilung der Grundstrecke nach einer geometrischen Reihe hat sich also bis ins 17. Jahrhundert fortgepflanzt (über eine ähnliche Teilung bei Fermat vgl. seine Abhandlung *De aequationum localium transmutatione; Œuvres*, publ. par P. Tannery et Ch. Henry 1, Paris 1891, S. 255/56). — Ich lernte die Stellen im Bd. 10 der *Œuvres* Descartes' erst nach Veröffentlichung meines ersten Aufsatzes (im Mai 1913) kennen. In der Veröffentlichung ist mir dann Duhem zuvorgekommen.

strecke vertikal statt horizontal, grenzt aber wie ORESME die Figur durch zwei Lote zur Grundstrecke ab. Die obere Begrenzungslinie (die ja ein Bogen einer Exponentialkurve sein müßte) nennt er »linea proportionum«, und er scheint sie als transzendente Kurve zu erkennen, indem er sie mit der »Quadratrix« in Parallele setzt.

Trotz dieser unleugbaren Tatsache, daß DESCARTES die graphische Darstellung der Scholastiker kannte und verwendete, führe ich die Entstehung seiner Koordinatenmethode (wie die der Methode FERMATS) auch heute noch auf die Beschäftigung mit der antiken Geometrie, insbesondere mit APOLLONIUS, zurück. Ja ich halte es für möglich, daß DESCARTES die gemeinsame Wurzel der beiden Verfahren (d. i. des griechischen und des scholastischen) nicht erkannte und daß diese Identität nur uns, die wir einen viel allgemeineren Begriff von Koordinaten haben, so selbstverständlich erscheint.

Meine Vermutung[1]), daß GALILEI, als er 1638 in den *Discorsi e dimostrazioni matematiche* die Fallgesetze in der oft gerühmten Art theoretisch behandelte, Kenntnis hatte von der scholastischer Darstellung dieser Dinge, ist durch DUHEM bestätigt worden.[2]) Es ist dadurch außerordentlich wahrscheinlich geworden, daß GALILEI die Beobachtungen, von denen er in dem berühmten Brief vom 16. Oktober 1604 an PAOLO SARPI spricht[3]), auf Grund seiner in den scholastischen Vorlesungen erlangten Kenntnisse unternahm. Diese Wahrscheinlichkeit allein würde meines Erachtens hinreichen, dem hier behandelten Werke ORESMES großes Interesse zu verleihen. Denn wenn es auch unwahrscheinlich ist, daß ORESME jenen Satz von Teil III, Kap. 7 (s. S. 230) von der Äquivalenz einer gleichförmig beschleunigten Bewegung mit einer gleichförmigen Bewegung vom mittleren Geschwindigkeitsgrade selbst gefunden hat[4]), so tritt er doch bei ihm, soweit das Material bis jetzt zugänglich gemacht wurde, zum ersten Male in der geometrischen Form auf, die GALILEI als Ausgangspunkt seiner

---

1) Siehe meinen ersten Aufsatz S. 132 Fußnote.

2) Vgl. DUHEM, a. a. O. S. 562/66 und S. 574/83. Die Tatsache scholastischer Unterweisungen bleibt bestehen, auch wenn, was DUHEM übersehen hat, die scholastischen Jugendarbeiten GALILEIS wahrscheinlicherweise gar nicht von ihm selbst stammen, sondern Nachschriften von Kollegien sind. Vgl. A. FAVARO im Vorwort (S. 10—12) des Bandes 1 der „Edizione nazionale" der *Opere* GALILEIS (Firenze 1890). Siehe auch meinen zitierten Aufsatz der Zeitschr. math. nat. Unterr. **45**, 1914, S. 223.

3) Er sagt dort: „Ripensando circa le cose del moto, nelle quali, per dimostrare li accidenti da me osservati, mi mancava principio totalmente indubitabile da poter porlo per assioma, . . ." Siehe *Le opere di GALILEO GALILEI*, Ediz. naz. **10** (Firenze 1900), S. 115. — Auf die Sache selbst gehe ich hier nicht weiter ein.

4) Über diese Frage s. DUHEM, a. a. O. S. 457/59.

theoretischen Erörterungen nahm.[1]) Und wenn auch Oresme schwerlich als Vorläufer Descartes' in der Erfindung der analytischen Geometrie betrachtet werden kann[2]), so verlieren die scholastischen Spekulationen über die Abhängigkeit einer Größe von einer anderen und die — freilich sehr theoretische — Diskussion der dabei möglichen graphischen Bilder, nichts an unmittelbarem Interesse. Auch diese Spekulationen sind der Ausdruck des Strebens nach Erweiterung unserer Erkenntnis, eines Strebens, das, wie mir scheint, in den Scholastikern[3]) so mächtig war wie nur bei irgendeinem modernen Physiker der rein phänomenologischen Richtung.

---

1) Siehe die *Opere*, Ediz. naz. 8 (Firenze 1898), S. 208/9. Übers. von A. v. Oettingen in Ostwalds Klassikern d. exakt. Wiss., Nr. 24, 3. Aufl., Leipzig 1913, S. 21/22.

2) Vielleicht sehen sich infolge des vorliegenden Artikels auch die mathematischen Autoren der *„Kultur der Gegenwart“* veranlaßt, ihre Aussprüche über Oresme etwas zu modifizieren. Sowohl H. E. Timerding nämlich (vgl. *Die Verbreitung mathematischen Wissens und mathematischer Auffassung,* „Kultur der Gegenwart“, Teil III, Abt. I, A, Leipzig 1914, S. 86), als A. Voss (vgl. *Über die mathematische Erkenntnis,* „Kultur der Gegenwart“ Teil III, Abt. I, E, Leipzig 1914, S. 114) haben aus meinem ersten Artikel über den *Tract. de lat. form.* noch keinen Nutzen gezogen. Bei letzterem ist aber schon der *Tract. de fig. potent.* gestreift, den freilich Duhem nicht erst „entdecken“ mußte. Ich füge hinzu, daß an der letztzitierten Stelle auch die Äußerungen über Fermat und Descartes einer Revision bedürftig sind.

3) Über die Begriffsbestimmung der „Scholastiker“ siehe das ausgezeichnete Werk von M. de Wulf, *Geschichte der mittelalterlichen Philosophie,* Dtsch. [nach der 4. Aufl. des Originals] von R. Eisler; Tübingen 1913, S. 75—92.

Über einen deutschen Algorismus aus dem Jahr 1488.

Von E. Rath in Stuttgart.

Die Stuttgarter Landesbibliothek besitzt unter der Signatur HB. XI. 22 einen handschriftlichen deutschen Algorismus aus dem Jahr 1488, der Curtze bei seiner Studienreise[1]) entgangen ist. Da deutsche Rechenbücher aus dem 15. Jahrhundert selten sind und der vorliegende Algorismus sich von den bekannten Rechenbüchern dieser Zeit, dem sog. Bamberger Rechenbuch von 1483, dem Widmannschen Rechenbuch von 1489 sowie von dem aus der Mitte des 15. Jahrhunderts stammenden Algorismus Ratisponensis[2]) in mancher Beziehung unterscheidet, so sei im folgenden einiges über die Handschrift mitgeteilt.

Die Handschrift enthält 24, neuerdings paginierte Blätter im Format 19,5 : 14,5 cm. Weder über ihren Verfasser noch über ihre Herkunft ist etwas bekannt. Der Anfang lautet auf S. 1: „Algorithmus. Item es ist zu wissen das in der matery der rechnung die genandt ist algorithmus nit mer den X artickel oder figuren gemacht werdent also 0. 1. 2 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. Vnd die erst haisset ziffra vnd bedittet nichtz. Aber sy gytt ainer yeder figur die nach ir geschriben wirt zu beditten. Item es mag kain artikel geschriben werden eß sy den die erst figur ain ziffra. Ziffra wird och genant nulla oder figura nihel vnd die andren 9 figuren nempt man digitos finger."

Die Ziffern 4 und 7 weisen noch die ältere Form auf.[3]) Bemerkenswert ist die Anwendung der Bezeichnung „nulla" neben den andern, damals üblichen „ziffra" und „figura nihil". Es dürfte dies, soviel mir bekannt ist, das früheste Auftreten dieses Namens in einem deutschen Rechenbuch sein. Weder das Bamberger Rechenbuch noch Widmann gebrauchen den Ausdruck „Null"; später erscheint diese Bezeichnung erst 1514 bei Böschensteyn, während sie außerhalb Deutschlands schon 1484

1) Centralblatt für Bibliothekswesen **16**, 1899, S. 257—306.

2) Siehe Biblioth. Mathem. 13_3, 1912/13, S. 17—22.

3) Siehe J. Tropfke, *Geschichte der Elementar-Mathematik* **1**, 1902, S. 17, Nr. 11.

bei Piero Borgi und Chuquet, sodann 1494 bei Luca Paciuolo vorkommt.[1])

Es folgt nun S. 2 die Einteilung der Zahlen in „finger", „artikel" und „zusamengesetzte zalen", während in den angeführten Zeilen „artikel" synonym mit „figur" gebraucht wird.

S. 3—7 werden die acht „gestalten", d. h. Spezies, im allgemeinen erklärt, nämlich: „numeracio, subtractio, duplacio, mediacio, divisio, progressio". Bei der Einzelbehandlung der Spezies wechseln „duplacio" und „mediacio" den Platz.

S. 7 „regule addicionis". Kunstausdruck: „sumiren". Es wird, wie üblich, rechts angefangen.

S. 8 „regule subtractionis". Kunstausdruck: „ein zal von der andern zihen". Auch hier wird rechts angefangen. Ist die Subtrahendusziffer größer als die Minuendusziffer, so wird nach der heute üblichen Art verfahren, wie z. B. von Sacrobosco und Meister Gernardus[2]), also nicht wie im Bamberger Rechenbuch oder im Algorismus Ratisponensis.

S. 11 „regule mediacionis". Kunstausdrücke: „halbteilung", „halbteilen", „medieren". Hier wird links angefangen, wie im Algorismus Ratisponensis, während Sacrobosco und Gernardus rechts anfangen.

S. 12 „regule duplacionis". Kunstausdrücke: „zwifaltig machung", „zwifaltig machen". Im Unterschied von Sacrobosco und Gernardus wird hier rechts angefangen.

S. 14—17 „regule multiplicacionis". Kunstausdrücke: „merung", „vilmachung", „merer", „multiplicieren". Es wird zunächst für die Multiplikation mit Hilfe der dekadischen Ergänzung die Regel $a \cdot b = a \cdot 10 - (10 - b)a$ gegeben. Mehrstellige Zahlen werden in der gewöhnlichen Weise mit Einrücken multipliziert, wobei die Faktoren untereinander geschrieben werden, also nicht wie z. B. im Bamberger Rechenbuch.[3]) Es wird rechts angefangen (bei Sacrobosco und Gernardus links). Die Einmaleinstafel wird erst später, nach dem Linienrechnen, gegeben.

S. 17—21 „regule diuisionis". Kunstausdrücke: „dailung", „tailer", „divisor", „quotient"; eine Bezeichnung für Dividend fehlt. Die Anordnung ist so, daß der Divisor unterhalb, der Quotient rechts vom Dividenden steht. Als Bedingung wird aufgestellt, daß der Divisor kleiner

---

1) Siehe F. Müller, *Zur Terminologie der ältesten mathematischen Schriften in deutscher Sprache;* Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik 9, 1899, S. 319. — M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* 2^2, S. 305, 310. — J. Tropfke, a. a. O. S. 8.

2) G. Eneström, *Der „Algorismus de integris" des Meisters Gernardus*; Biblioth. Mathem. 13_3, 1912/13, S. 328.

3) Cantor, a. a. O. 2^2, S. 223.

als der Dividend, und der Quotient nie größer als 9 sein solle. Ein größeres Zahlenbeispiel wird nicht durchgerechnet und das „Überwärtsdividieren", das im Algorismus Ratisponensis und im Bamberger Rechenbuch sich findet, wird nicht gelehrt.

S. 21—24 „regule progressionis". Kunstausdruck: „übertreffung". Für die arithmetische Progression werden zwei Regeln aufgestellt, je nachdem das letzte Glied gerade oder ungerade ist. Der für die geometrische Progression $1+q+q^2+\cdots+q^n$ gegebenen Regel liegt die Formel $q=\frac{q^n-1}{q-1}+q^n$ zugrunde, die Curtze im Cod. lat. Monac. 14908 nachgewiesen hat[1]) und die sich auch im Bamberger Rechenbuch findet.[2]) Für $q=2$ wird die Regel auch lateinisch ausgesprochen: „per duplicacionem ultime sume et subtractionem prime a suma duplata manet residuum recte". Außerdem werden die Fälle $q=3, 4, 5$ behandelt.

Auf S. 25 schließt dieser erste, die acht Spezies in ganzen Zahlen behandelnde Teil des Algorismus mit den Worten: „Geschriben im 88 jar". Die Bruchrechnung und das Wurzelausziehen fehlen.

Der zweite Teil beginnt mit den Worten: „Sequitur regula detry" und enthält Anwendungen dieser Regel. Die sonst, z. B. im Algorismus Ratisponensis und im Bamberger Rechenbuch gebrauchte Benennung „Goldene Regel" fehlt hier.

Als Einleitung zur Regel detri wird auf S. 26—35 einiges über das Linienrechnen gesagt, ohne daß jedoch die einzelnen Spezies besonders behandelt würden. Es wird die Voraussetzung ausgesprochen, daß „billich ein jeder von synem vnderwyser der rechnung gentzlichen der lingen bedüttung des fingers griff clarlichen bericht sol werden vnd wie man vff die regel setzen mag in mengerlay weg".

Im Anschluß an das Multiplizieren auf Linien erscheint auf S. 31 nachträglich die Einmaleinstafel in quadratischer Form. Nach einigen Münz- und Gewichtsrechnungen wird auf S. 36 die Regel detri ausgesprochen. Die einzelnen Fälle, die sich ergeben, wenn eines oder mehrere Glieder ein Bruch oder die Einheit sind, werden im Unterschied vom Bamberger und anderen Rechenbüchern nicht besonders behandelt.

Nun folgen Anwendungen der Regel auf Kauf und Verkauf (S. 36—39). Hierbei wird einiges wenige von der nicht behandelten Bruchrechnung nachgeholt. Kunstausdrücke: „von geprochen stucken", „bruch", „prechen", „nenner". Der Bruchstrich wird angewendet. S. 39—50 kommt die Gesellschafts- und Mischungsrechnung, und den Schluß der Handschrift bilden auf S. 51—57 „räterschen", d. h. Rätsel oder arithmetische Scherzaufgaben.

---

1) Biblioth. Mathem. 9_2, 1895, S. 114. 2) Cantor, a. a. O. 2^2, S. 223.

Die behandelten Aufgaben sind zum Teil ähnlicher Natur wie die des Algorismus Ratisponensis und des Bamberger Rechenbuchs; es ist jedoch nur eine Aufgabe der Handschrift (eine Teilungsrechnung) in den beiden genannten Werken mit denselben Zahlwerten enthalten. Im folgenden seien einige Aufgaben angeführt.

S. 44 kommt die Aufgabe vom sterbenden Gatten, die in etwas anderer Form auch im Bamberger Rechenbuch, im Algorismus Ratisponensis, bei Alkuin und schon bei den römischen Juristen sich findet.[1])

In der folgenden Aufgabe (S. 44. 45) gibt ein Mann von einer Summe dem ersten Sohn 1 fl. und $\frac{1}{9}$ des Restes; dem zweiten 2 fl. und $\frac{1}{9}$ des Restes, dem dritten 3 fl. und $\frac{1}{9}$ des Restes usw., und zwar soll jeder gleich viel erhalten. Die Lösung (64 fl. und 7 Söhne) wird ohne Begründung gegeben, wie auch im Algorismus Ratisponensis, wo sich eine ähnliche Aufgabe findet.[2]) In einer vermutlich von Chuquet herrührenden Aufgabensammlung sind ähnliche Beispiele enthalten.[3])

Auf S. 49 handelt es sich um das Erraten von 3 mit einem Würfel geworfenen Zahlen. Diese Aufgabe steht auch in Cod. lat. Mon. 14908.[4])

Die bekannte Aufgabe vom Hasen und Hund (S. 52) kommt mit anderen Zahlwerten im Algorismus Ratisponensis, im Bamberger Rechenbuch (Bl. 54[a]) und schon bei Alkuin[5]) vor.

Auf S. 52—53 wird eine durch 7 teilbare Zahl gesucht, die durch 2, 3, ... 6 geteilt je den Rest 1 gibt. Als Lösung wird 721, nicht die kleinste Lösung 301 angegeben. Diese Aufgabe findet sich schon bei Leonardo Pisano und früher.[6])

Die Scherzfrage (S. 54) von 3 Frauen mit Eiern in verschiedener Anzahl, die bei gleichem Preis gleichviel lösen sollen, steht mit anderer Einkleidung in Cod. lat. Mon. 14684 (14. Jahrh.)[7]) sowie in Cod. Vindob. 3029 (Bl. 73[b]).

Die Aufgabe (S. 55) von dem Roßhirten, der für jeden Arbeitstag 10 ₰ bekommt und für jeden Feiertag 12 ₰ geben muß, entspricht der Aufgabe vom Arbeiter im Weinberg des Bamberger Rechenbuchs (Bl. 46[b]) und des Algorismus Ratisponensis (§ 167).

---

1) Cantor, a. a. O. 1^3, S. 562, 838.

2) In § 106 nach der von Curtze herrührenden Einteilung. Siehe Biblioth. Mathem. $\mathbf{13}_3$, 1912/13, S. 18.

3) Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche **14**, 1881, S. 450.

4) Siehe Biblioth. Mathem. $\mathbf{9}_2$, 1895, S. 18.

5) Cantor, a. a. O. 1^3, S. 838.

6) Siehe die Anfrage 79 von G. Eneström in Biblioth. Mathem. $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 274. — Cantor, a. a. O. 2^2, S. 25.

7) Siehe Biblioth. Mathem. $\mathbf{9}_2$, 1895, S. 79.

Die Umfüllungsaufgabe auf S. 55f. findet sich auch in Cod. lat. Mon. 14684[1]) sowie nach Ahrens[2]) schon in den Annales Stadenses aus der Mitte des 13. Jahrhunderts und bei Chuquet (1484). Die Lösung ist die erste der beiden von Ahrens angegebenen.

Auf S. 56—57 schließt die Handschrift mit den Worten: „Also vil sy gesagt fon der materi der rechnung die genant ist regula detry vnd ander regel vnd brichen durch welhe regel man ain jede rechnung vil oder wenig vff den kirtzesten weg finden mag. Amen. Dominica post Jacoby 1488.“

Die Abweichungen des vorliegenden Algorismus von den eingangs genannten Rechenbüchern sind, wie die Inhaltsübersicht zeigt, so groß, daß eine direkte Abhängigkeit des Algorismus von ihnen nicht anzunehmen ist. Vor allem hat dieser in Beziehung auf Umfang und Darstellung des gebotenen Stoffes einen viel elementareren Charakter als jene. Insbesondere fehlt eine genügende Darstellung der Bruchrechnung, ebenso das Wurzelausziehen. Ferner vermißt man die sonst immer gelehrten Rechenproben. Dagegen ist das zu jener Zeit in Deutschland allgemein verbreitete Linienrechnen, das im Algorismus Ratisponensis fehlt und im Bamberger Rechenbuch nur kurz erwähnt wird, aufgenommen. Das alles, zusammen mit der unsystematischen Anordnung des Stoffes, deutet darauf hin, daß der Algorismus bescheidenere Ziele verfolgte als die obengenannten Rechenbücher und mehr für die Bedürfnisse des Volks bestimmt war. Vielleicht dürfen wir als Verfasser des Buches einen jener „Modisten“[3]) vermuten, die außer der Schreibkunst auch die Anfänge der Rechenkunst lehrten. Der häufige Gebrauch lateinischer Ausdrücke sowie das Auftreten der Verdopplung und Halbierung als besonderer Spezies könnte auf einen lateinischen Algorismus als Quelle hinweisen; dagegen spricht jedoch der Umstand, daß die lateinischen Algorismen bei der Halbierung rechts, bei der Verdopplung und Multiplikation links anzufangen pflegen, während unser Algorismus umgekehrt verfährt.

---

1) Biblioth. Mathem. 9_3, 1895, S. 80, 83.

2) W. Ahrens, *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*, 2. Aufl. **1** (Leipzig 1910), S. 105.

3) Cantor, a. a. O. 2^2, S. 173.

Eine Ausgabe des „Liber de triplici motu" des Alvarus Thomas.

Von G. Valentin in Berlin.

In seinem Aufsatz: *Zur Geschichte der unendlichen Reihen im christlichen Mittelalter*[1]) gibt Herr H. Wieleitner eine Beschreibung des in der Münchner Hof- und Staatsbibliothek vorhandenen *Liber de triplici motu* des Alvarus Thomas. Ich habe nun vor wenigen Wochen ein Exemplar dieses Werkes für die Berliner Königl. Bibliothek erworben, das einige Abweichungen von der Wieleitnerschen Beschreibung zeigt und sich dadurch als eine andere Ausgabe dieses Werkes erweist. Bei der Seltenheit dieser Schrift[2]) halte ich es daher für angezeigt, eine genaue Beschreibung des Berliner Exemplars zu geben, und folge dabei der Wieleitnerschen Beschreibung, um die Vergleichung zu erleichtern.

Das Format ist ein kleines Folio. Der Satzspiegel ohne Kolumnentitel ist 20,5 $\times$ 13,2 cm, letztere Zahl vergrößert sich bei Marginalien um 1,4 cm bei jeder Kolumne, so daß, wo zufällig zwei Randbemerkungen zu der gleichen Zeile der linken und rechten Kolumne gehören, der Satz die Breite von 16 cm hat. Die Bogen bestehen in fast regelmäßiger Abwechslung aus 2 oder 3 Lagen, nämlich $a_6\, b_6\, c_4\, d_6\, e_4\, f_6\, g_4\, h_6\, i_4\, k_6\, l_4\, m_6\, n_4\, o_6\, p_4\, q_6\, r_4\, s_6\, t_4\, v_6\, x_6\, y_4\, z_6\, A_4\, B_6\, C_4\, D_4\, E_5$. Die ersten 3 bzw. 2 Blätter tragen die Signaturen 1, 2, 3 bzw. 1, 2, beispielsweise $k_1\, k_2\, k_3, l_1\, l_2$. Das Werk enthält demnach 141 Blatt mit Einschluß des Titelblattes. Der Text des Werkes ist doppelspaltig, dagegen die Widmung auf der Rückseite des Titels und die Briefe auf dem letzten Blatt (Vorder- und Rückseite) in fortlaufendem Satze gedruckt. Die Schrift ist gotisch mit vielen, wenn auch nicht überreichlichen Abbreviaturen. Rot ist nur auf dem Titelblatt verwandt.

---

1) Biblioth. Mathem. 14_3, 1913/14, S. 150—166.

2) Mir sind außer den beiden genannten Exemplaren in Berlin und München nur noch solche in der Bibliothek des Britischen Museums in London und der Bibliothèque nationale in Paris bekannt.

Das Titelblatt enthält in der Mitte das Emblem des Verlegers: zwei aufgerichtete Drachen, die einen zwischen ihnen stehenden Baum halten, in dessen Krone drei Vögel sitzen; die Mitte des Stammes ist durch ein Schild verdeckt, auf dem die durch eine Schnur verbundenen Buchstaben PLP stehen. An den Seiten ragen zwei andere Bäume in das Bild hinein, deren jeder ein Kind trägt. Unter diesem Emblem, aber noch dazugehörig, steht der Name des Verlegers in lateinischen Buchstaben: Poncet Le Preux.[1]) Über dem Emblem ist der Titel des Werkes in gotischer Schrift rot und schwarz (die Worte in Rotdruck gebe ich in Sperrdruck):

> Liber de triplici motu pro ‖ portionibus annexis magi ‖ stri Aluari Thome. Vlixbo ‖ neñ philosophicas Suiseth ‖ calculatões ex parte declarãs.

Titel und Emblem sind von einer sehr reichen, aus sechs Stöcken (je zwei oben und unten und je eine zu beiden Seiten) bestehenden Renaissanceleiste umgeben. Unterhalb der beiden unteren Stöcke, wieder in gotischer roter und schwarzer Schrift, steht:

> Venundantur parrhisiis 7 a ponceto lepreux ‖ eiusdē ciuitatis bibliopola ad signum potti stã ‖ nei in vico sancti iacobi prope diui yuonis edē ‖ cōmorante.

Dieser Verkaufsvermerk ist links von einem weiblichen, rechts von einem männlichen Brustbild flankiert, und unter diesen dreien (Verkaufsvermerk und den beiden Köpfen) das Titelblatt durch zwei voneinander verschiedene Stableisten abgeschlossen.

Die Rückseite des Titels stimmt mit der von Herrn Wieleitner gegebenen Beschreibung überein, nur ist in dem Berliner Exemplar richtig Ioannes de Haya[2]) ... hermaño lethmate[3]) de gouda gedruckt.

Das Kolophon auf Bl. E 4^r Col. 2 lautet:

> Explicit liber de triplici motu cōposit^9 per Ma ‖ gistrū Aluarū Thomam vlixbonensem Regentem ‖ Parrhisius in Collegio Coquereti. Anno domi= ‖ ni. 1509. Die Februarii 11.

Die Rückseite dieses Blattes enthält ein Druckfehlerverzeichnis, ferner 4 Distichen des Johannes de haya ad hermanū lethmate, 7 Distichen desselben Verfassers ad lectores, 9 Verse überschrieben: Ad librum phaleution carmen, und 6 Verse überschrieben: Liber, dagegen fehlt das Gedicht auf den Drucker Anabat.

---

1) Er lebte in Paris 1498—1556 (vgl. Ph. Renouard, *Imprimeurs Parisiens, libraires...*, Paris 1898, p. 336).

2) Über Johannes de Haya (Jean de la Haye?) habe ich nichts auffinden können.

3) Hermannus Lethmatius oder a Noortwyck aus Gouda, gest. als bischöflicher Generalvikar in Utrecht 6. Dez. 1555 (Jöcher und Adelung).

Das Schlußblatt endlich E 5 enthält auf der Vorderseite einen Brief mit der Überschrift:

Georgius bruneau[1]) vindocinesis || suo aluaro thome Salutem

und den Schluß:

Vale ex edibus nostris coq̄reticis septimo Idus Februarii.

darunter zwei Distichen mit der Überschrift:

Dionisius faber[2]) vindocinēsis ad lectorem.

Auf der Rückseite (E 5v) befindet sich ein Brief mit der Überschrift:

Ioannes de haya dn̄m hermanū lethmate de gouda germa || ne nationis procuratoriam salute plurima iubet impartire.

und dem Schluß:

Vale. Ex edibus coquereticis qnto idus februarii.

Es folgt: Registrum, enthaltend das Anfangswort jedes mit Signatur versehenen Blattes (a1 a2 a3, b1 b2 b3 usf.) und endlich das Impressum:

Impressum parriß. per Guillermum Ana= || bat cōmorantē apud paruum pontem an= || te hospitiū dei prope intersignium Impera || [t]oris. ex[p]ensis pōseti le preux eiusdē ciuitatis || bibliopole || Omnia pro meliori.

In dem Berliner Exemplar sind die einzelnen Blätter mit Ausnahme des Titelblattes von alter Hand von 1—140 gezählt. Das Werk ist in Schweinsleder gebunden und enthält auf der inneren Fläche des Vorderdeckels ein Exlibris: einen nach rechts sehenden aufrecht stehenden Greif, der mit beiden Vordertatzen einen Äskulapstab hält, darunter ein Wappenschild mit den Worten: Ex libris Ios. Martini Luc.[3])

Das von P. Duhem in seinem Werke: *Léonard de Vinci* (Paris 1913) auf S. 531—561 beschriebene Pariser Exemplar scheint, soweit die nicht sehr genaue äußere Beschreibung erkennen läßt, mit dem Berliner übereinzustimmen, wenigstens kommt in dem Impressum auch „intersignium Imperatoris“ vor. Dieser Annahme würde allerdings die angegebene Anzahl von Blättern: 162 (S. 532) widersprechen; aber hat P. Duhem wirklich richtig gezählt?

Noch kurz vor Absendung dieses Aufsatzes geht mir das Münchner Exemplar zur Vergleichung zu. Es zeigt sich, daß die beiden Exemplare im Titelblatt (a1r) und in Blatt E 5 verschieden sind, sonst aber völlig Blatt für Blatt übereinstimmen, nur daß in dem Münchner Exemplar die

---

1) Auch über Georgius Bruneau habe ich nichts weiteres auffinden können.

2) Dionysius Faber, geb. 1484 in Vendôme, gest. 1536 in Paris, Cölestinermönch.

3) Ein Jos. Martini schrieb: *Theatrum Basileae Pisanae,* Romae: de Rubeis 1705. — *Appendix ad Theatrum* . . . ib. 1723. Ob dies der Besitzer des Berliner Exemplars war?

Briefadresse und die erste Zeile auf a1v, die erste Zeile der ersten Kolumne auf a2r, und dann alle Kapitelüberschriften und die erste Zeile jedes Kapitels der ersten Pars, sowie die einzige darin vorkommende Figur in Rot, in dem Berliner Exemplar alles schwarz gedruckt ist. Dieser Übereinstimmung widerspricht auch die von Herrn WIELEITNER angegebene Paginierung von 1—300 durch alte Hand nicht; dem alten Besitzer ist das Versehen passiert, bei der Paginierung von 103 auf 124 gesprungen zu sein; zieht man diese fehlenden 20 Zahlen von 300 ab, so erhält man 280 Seiten = 140 Blatt. Unerklärlich bleiben mir aber die von Herrn WIELEITNER angegebenen Maße des Satzspiegels und welches der vier Gedichte auf E 4v er auf den Drucker Anabat bezieht.

Girard Desargues und D. A. L. G.

Von G. Eneström in Stockholm.

Im Jahre 1630 erschien zu Paris eine Schrift mit dem Titel:

Examen ‖ dv livre des ‖ recréations ‖ mathematiques: ‖ et de ses problemes ‖ en Geometrie, Mechanique Opti- ‖ que & Catoptrique ‖ Ou sont aussi discutées & restablies plusieurs ‖ expériences Physiques y proposées. ‖ Par Clavde Mydorge Escuyer Sieur de la Maillarde, Conseiller du Roy, & Treso- ‖ rier general de France en Picardie ‖ A Paris, ‖ Chez Rolet Boytonné au Palais, à l'en- ‖ trée de la petite gallerie des Prisonniers en la ‖ deuxième boutique. ‖ M. DC. XXX. ‖ Avec Privilege dy Roy.

8°, (16) + 280 S.

Die Schrift enthält teils einen Abdruck der *Récréations mathématiques* (1624) von J. Leurechon, teils Bemerkungen mit der Überschrift „Examen" und die meisten mit der Unterschrift D. A. L. G.[1]) Daß die mit D. A. L. G. unterzeichneten Bemerkungen von Mydorge herrühren, ist meines Wissens bis auf unsere Tage nicht bezweifelt worden, und dies um so weniger, als die Arbeit *Prodromi catoptricorum et dioptricorum libri* von Mydorge ebenfalls

1) Nach der Vorrede des *Examen du livre des récréations mathématiques* hat D. A. L. G. schon zu einer Auflage der *Récréations mathématiques* einige anonyme Bemerkungen geliefert. Vermutlich ist diese Auflage die 1626 in Paris vom Verleger Rollet Boutonné herausgegebene (vgl. O. Terquem, Bullet. de bibliogr., d'hist. et de biogr. mathém. 2, 1856, S. 96—97). Dann hat D. Henrion in einer folgenden Auflage der *Récréations mathématiques* (vermutlich aus dem Jahre 1627) unter der Signatur „D. H. P. E. M." andere Bemerkungen mitgeteilt (vgl. *Oeuvres de Descartes* publiées par Ch. Adam et P. Tannery 10, Paris 1908, S. 547). Die Bemerkungen Henrions sind ebenfalls im *Examen du livre des récréations mathématiques* zum Abdruck gebracht; in der mir zurzeit vorliegenden Auflage, nämlich der in Rouen 1643 erschienenen, befinden sich die Bemerkungen Henrions am Ende der „Troisiesme partie des récréations mathématiques" (34 nicht paginierte Seiten nach dem Ende des Inhaltsverzeichnisses). In dieser Auflage fehlt die Unterschrift D. A. L. G. nur bei dem „examen" der Probleme 10, 22, 28, 39, 74 (teilweise) und 88 : 7. Ob die Unterschrift an diesen Stellen auch in der Auflage Paris 1630 fehlt, kann ich gegenwärtig nicht entscheiden und offenbar ist die Frage bedeutungslos.

auf dem Titelblatte vor dem Druckort die Buchstaben D. A. L. G. hat. Vor einigen Jahren ist indessen ein Liebhaber der Geschichte der Mathematik, Herr A. Aubry, auf den Gedanken gekommen, die Buchstaben als „Des Argues Lyonnais Girard" zu deuten[1]), und Herr H. Brocard hat eine formelle Verbesserung der Deutung gebracht, indem er D. A. L. G. als „Des Argues Lyonnais Géomètre" liest.[2]) Da diese Deutung von dem Herausgeber der Werke von Descartes, Herrn Ch. Adam, gutgeheißen wurde[3]) und dadurch in weite Kreise verbreitet worden ist, erlaube ich mir, in den folgenden Zeilen die Frage, ob die Signatur D. A. L. G. Desargues zuzuweisen sei, näher zu untersuchen.

Die Gründe, die man für eine solche Zuweisung angeführt hat, sind, so viel ich weiß[4]):

1. daß die Signatur D. A. L. G. sehr gut für Desargues paßt, aber als Signatur für Mydorge unerklärlich erscheint;
2. daß einige Bemerkungen von D. A. L. G. in betreff der Ausdrucksweise an Desargues erinnern, andere sehr wohl von Desargues herrühren können.

Man sieht sofort, daß diese Gründe nicht besonders überzeugend sind; nur wenn es sich als unwahrscheinlich herausstellt, daß Mydorge die Signatur D. A. L. G. benutzt hat, können sie von Belang werden. Allein um eine solche Unwahrscheinlichkeit zu begründen, genügt es natürlich nicht, darauf aufmerksam zu machen, daß die Buchstabenfolge D. A. L. G. nicht aus den Initialen der zwei Namen Claude und Mydorge stammt. Ich hatte vor vielen Jahren einen Freund, dessen zwei Namen mit den Buchstaben R und A begannen, aber er zeichnete sich oft L. L., weil sein Vorname ins Lateinische übersetzt „lupus laudatus" gelautet hätte!

Anderseits gibt es wichtige Gründe, die gegen die Zuweisung der Signatur D. A. L. G. an Desargues sprechen. Die Vertreter dieser Deutung haben offenbar angenommen, daß D. A. L. G. gewissermaßen einen Kommentar zur Arbeit des Mydorge geliefert hat. Diese Annahme ist indessen nicht ganz richtig. Das meiste des *Examen du livre des récréations mathé-*

---

1) Siehe *Oeuvres de Descartes* **11**, Paris 1909, Errata S. VIII: ,H. Brocard nous donne la clé des quatre initiales D. A. L. G. que l'on trouve dans l'*Examen du livre des Récréations Mathématiques* (publié par Mydorge en 1630) . . . A. Aubry avait proposé de lire les trois premières lettres D. A. L. Des Argues Lyonnais." — Vgl. H. Brocard, *Analyse d'autographes et d'autres écrits de Girard Desargues*, Bar-le-Duc 1913, S. 21—23.

2) Siehe *Oeuvres de Descartes* **11**, Paris 1909, Errata S. VIII: „M. Brocard propose avec raison Géomètre". — Vgl. H. Brocard, a. a. O. S. 22—23.

3) Siehe *Oeuvres de Descartes* **12**, Paris 1910, S. 250: „Nous adoptons, pour la signatuie de cette note D. A. L. G., l'interprétation Des Argues Lyonnais Géomètre".

4) Siehe H. Brocard, a. a. O. S. 21—23.

matiques ist, wie oben angegeben wurde, ein Abdruck aus den *Récréations mathématiques* von Leurechon, und das übrige besteht aus Bemerkungen, die fast alle mit D. A. L. G. unterzeichnet sind. Wenn nun diese Signatur nicht Mydorge bedeutet, bleibt für ihn vom Inhalte des Buches fast gar nichts übrig, obgleich er auf dem Titelblatte ausdrücklich als Verfasser genannt wird.

Ferner wird man durch die Hypothese, daß D. A. L. G. Desargues bedeutet, fast gezwungen, diesem auch einen größeren oder kleineren Teil der Arbeit *Prodromi catoptricorum et dioptricorum libri* zuzuweisen[1]), obgleich man bisher nicht den geringsten Grund gehabt hat, in Abrede zu stellen, daß diese Arbeit ausschließlich von Mydorge angefertigt wurde.

Es gibt noch einen ähnlichen Umstand, wodurch es wenigstens zweifelhaft wird, ob der Benutzer der Signatur D. A. L. G. mit Desargues identifiziert werden kann. Zu Paris erschien nämlich 1625 ein Buch mit dem Titel:

> L'vsage de l'vn et l'avtre || astrolabe particvlier || et vniversel. || Expliqué tant en la declaration de leurs par- || ties, qu'exposition fidelle & facile de leur || practique en Astronomie || & Geometrie. || Le tout accommodé aux petits traictez de la Sphere, || de l'Astrolabe, & du Quarré Geometrique de || Dominique Iacquinot Champenois par || mesme moyen corrigez, augmentez, & || remis en meilleur ordre. || D. A. L. G. || A Paris, || Chez Iean Moreav, ruë Sainct || Iacques, à la Croix Blanche. || M. DC. XXV. || avec privilege dv roy.
>
> 8°, (24) + 371 + (1) S.

Daß der D. A. L. G., der mit dieser Schrift zu tun gehabt hat, derselbe wie der Kommentator der *Récréations mathématiques* ist, muß schon von vorn herein als höchst wahrscheinlich betrachtet werden und die Wahrscheinlichkeit wird zur Gewißheit, wenn man den folgenden Passus[2]) des *Examen du livre des récréations mathématiques:*

> Voyez donc la différence, faute d'auoir apporté les precautions tousiours necessaires, sçauoir . . . la remarque precise du poinct au miroir ... auec ancre (!) ... Mais cecy est plus amplement & particulierement examiné ailleurs & en son propre lieu dans nos notes sur le Quarré Geometrique de l'Astrolabe, où nous y auons rapporté toutes les precautions necessaires selon toutes sortes de rencontre. D. A. L. G.

mit dem folgenden Passus[3]) des Buches *L'usage de l'un et l'autre astrolabe:*

---

1) In Wirklichkeit hat H. Brocard (a. a. O. S. 24) diese Schlußfolgerung aus seiner Hypothese gezogen.

2) In der Ausgabe Rouen 1643 befindet sich der Passus S. 192

3) Siehe S. 287.

> Il faut tousiours obseruer que le mesme poinct du miroir pris pour distance ou de la chose à mesurer ou du mesureur, soit le mesme par lequel on voye . . . & partant pour plus de seureté on se doit volontiers seruir d'vn poinct marqué au milieu du miroir.

vergleicht. Es ist also festgestellt, daß der D. A. L. G. des *Examen du livre des récréations mathématiques* mit dem D. A. L. G. des Buches *L'usage de l'un et l'autre astrolabe* identisch ist. Wer ist nun der Kommentator der zweiten Schrift? Ist es Mydorge oder Desargues? Nach dem Vorworte weder der eine noch der andere, sondern der Buchhändler Iean Moreau, der das Vorwort unterzeichnet hat und offenbar selbst als Kommentator gelten will. Beispielsweise wird im Vorworte bemerkt: „Si en l'explication desdites propositions ie me suis vn peu arresté que l'ordinaire, i'espere que cette longueur ne sera point trouuee ennuyeuse". Allein bei diesem Ergebnis darf man nicht stehen bleiben, denn der Verleger der Ausgabe 1630 des *Examen du livre des récréations mathématiques* sagt im Vorworte, daß der Verfasser der Bemerkungen ein Freund des damals schon verstorbenen Iean Moreau gewesen sei[1]), mithin ist D. A. L. G. nicht Iean Moreau. Anderseits verdient hervorgehoben zu werden, daß das „Privilège" der Schrift *L'usage de l'un et l'autre astrolabe* vom 28. August 1621 datiert ist, so daß der Verfasser der Bemerkungen schon damals im Verkehr mit Moreau gewesen sein dürfte. Nun kennt man allerdings recht wenig über die Lebensverhältnisse von Desargues vor 1626, aber jedenfalls hat man keinen besonderen Grund anzunehmen, daß dieser, der sich ja „Lyonnais" nannte, schon 1621 in Paris wohnhaft und mit Moreau näher bekannt war.

Ich kehre jetzt zu dem *Examen du livre des récréations mathématiques* zurück, um zu untersuchen, ob man wirklich aus dem Inhalte des Buches etwas über den Kommentator der *Récréations mathématiques* erfährt. Wie ich schon erwähnt habe, ist es bemerkt worden[2]), daß gewisse Redewendungen an Desargues zu erinnern scheinen, aber dieser Bemerkung kann ich gar keine Bedeutung beimessen, bevor es nicht nachgewiesen ist, daß die fraglichen Ausdrücke nur von Desargues benutzt worden sind. Ebenso geringen Wert haben für unsere Frage einige Äußerungen von D. A. L. G. aus dem Jahre 1630, worauf man ebenfalls aufmerksam gemacht hat[3]), z. B. daß er sich besonders mit den physikalischen und geometrischen

---

1) „Mais comme ce sien trauail fut pres à ietter sous la presse, et que pour cét effect il en eust voulu gratifier Maistre Iean Moreau Libraire, auquel il portoit vne particuliere amitié, le deceds suruenu dudit Moreau fut cause qu'il en retira sa minute."

2) Siehe H. Brocard, a. a. O. S. 22.

3) Siehe H. Brocard, a. a. O. S. 21—22.

Fragen der *Récréations mathématiques* beschäftigen werde, daß eine gewisse Art von Spiegeln „s'en vend volontiers proche de la porte de la Saincte Chappelle" in Paris, oder daß er später seine „Disquisitions physico-mathématiques" herausgeben werde. Auch nicht aus dem oben zitierten Vorworte des Verlegers der Auflage 1630 des *Examen du livre des récréations mathématiques* kann irgendeine Angabe entnommen werden, wodurch wahrscheinlich gemacht wird, daß die Signatur D. A. L. G. Desargues gehört. Endlich bemerke ich, daß ich selbst bei genauem Durchlesen des *Examen du livre des récréations mathématiques* keine Äußerung ausfindig gemacht habe, die ich geneigt wäre, in erster Linie Desargues zuzuweisen. Im Gegenteil habe ich die Ansicht bekommen, daß Mydorge viel eher die daselbst eingefügten Bemerkungen hätte schreiben können. Ich gebe hier nur einen einzigen Beleg für meine Ansicht. Die Bemerkung zum 33. Probleme[1]) zeigt, daß sich D. A. L. G. 1630 sehr für die Frage der Quadratur des Kreises interessierte, und er bemängelte dabei das Ergebnis des Longomontanus[2]). Allein im Jahre 1646 hat Mydorge eben diese Frage in einem recht langen, gegen Longomontanus gerichteten Brief an Cavendish behandelt.[3])

Bis auf weiteres muß also die Hypothese des Herrn A. Aubry als eine durchaus unbelegte und sehr unwahrscheinliche Mutmaßung betrachtet werden.

Wie man D. A. L. G. deuten soll, weiß ich nicht, und diese Frage ist für mich von geringem Interesse. Wenn ich eine Konjektur wagen wollte, würde ich sagen, daß D. A. L. G. vielleicht ursprünglich gar nicht eine eigentliche Signatur, sondern vielmehr ein Motto war, etwa wie D. S. G. [= deo soli gloria], und daß man möglicherweise D. A. L. G. als „deo altissimo laus, gratia" oder etwas Ähnliches deuten könnte.

Es kann vielleicht wundernehmen, daß ich mich hier so ausführlich mit einer Frage beschäftigt habe, die für die Geschichte der Mathematik von sehr untergeordneter Bedeutung ist. Allein prinzipiell ist die Sache leider nicht bedeutungslos. Für die Mathematik ist es ganz gleichgültig, ob Bauräte, Pastoren, Apotheker und andere Liebhaber der Mathematik

---

1) Siehe die Ausgabe Rouen 1643, S. 59—65.

2) Wahrscheinlich wendet sich D. A. L. G. gegen die Schrift von Longomontanus *Cyclometria vere ac absolute in ipsa natura circuli, cum rectilineo inventa* (Hamburg 1627), weil er 1630 bemerkt, daß die fragliche Kreisquadratur „il y a ià quelques années" veröffentlicht sei. Nicht ganz unmöglich ist es indessen, daß es sich um die ältere Schrift von Longomontanus *Cyclometria ex lunulis reciproce demonstrata* (Kopenhagen 1612) handelt.

3) Siehe *Controversiae de vera circuli mensura anno* CIↃ IↃ C XLIV *exortae ... pars prima,* Amsterdam 1647, S. 90—94

vermeintliche Beweise der schwierigsten mathematischen Sätze veröffentlichen, denn die Fehlerhaftigkeit dieser Beweise wird leicht konstatiert, und die Beweise selbst werden ohne weiteres totgeschwiegen. Auf dem mathematisch-historischen Gebiete liegt die Sache dagegen so, daß es zurzeit keine Angabe gibt, die so unzuverlässig ist, daß sie nicht weiter verbreitet werden kann, und jede tatsächliche Verbreitung einer unzuverlässigen Angabe bedeutet einen mehr oder weniger gefährlichen Angriff auf die exakte mathematisch-historische Forschung, so lange sie noch eine „ecclesia militans" sein muß. Es ist darum sehr wichtig, wiederholt die Aufmerksamkeit der Liebhaber der Geschichte der Mathematik auf diesen Umstand zu richten, und eben darum habe ich gegen den hier behandelten Versuch, eine durchaus unbegründete Erklärung der Signatur D A. L. G. zu verbreiten, das Wort ergriffen.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage[1]) von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik".

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen".
BM = Bibliotheca Mathematica.

Über frühere Bemerkungen siehe BM 14_3 (1913/14), S. 63—83, 169—179.

1^3 : 801. Für die Geschichte des Bruchrechnens im Mittelalter kann es vielleicht von Interesse sein zu bemerken, daß der *Liber algorismi de pratica arismetrice* die Divisionsregel gewöhnlicher Brüche auf folgende Weise ableitet (siehe die Ausgabe von Boncompagni, Rom 1857, S. 70—71):

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd} = \frac{ad}{bc}.$$

Die allgemeine Regel kommt allerdings daselbst nicht vor, aber man kann sie aus dem Beispiele $\frac{262}{13} : \frac{10}{3}$ ausfindig machen. Es wird nämlich gelehrt, daß man die zwei Brüche gleichnamig machen soll, wodurch man $\frac{786}{39} : \frac{130}{39}$ bekommt, und dann den Zähler des Dividendus durch den Zähler des Divisors zu dividieren hat.

G. Eneström

---

2 : 34. Siehe unten die Bemerkung zu **2** : 39.

2 : 37. In betreff des Beweises der Heronschen Dreiecksformel, der in der *Practica geometriae* Leonardo Pisanos vorkommt, hat M. Curtze schon 1885 darauf hingewiesen, daß die Konstruktion mit der des *Liber trium fratrum de geometria* übereinstimmt (siehe M. Curtze, *Der Liber trium fratrum de geometria;* Nova acta der Deutschen Akademie der Naturforscher (Halle) **49**, 1885, S. 162). Der Ausspruch (Z. 10—12): „Die heronische Dreiecksformel ist mit einem Beweise versehen, welcher dem als heronisch überlieferten ähnlich ist, ohne ihm völlig gleich zu sein", ist ja so vorsichtig redigiert, daß er nicht direkt als unrichtig bezeichnet werden kann, aber tatsächlich sind andere mathematisch-historische Verfasser dadurch veranlaßt worden, mehr oder weniger ausdrücklich den Beweis dem Leonardo selbst zuzuweisen (vgl. z. B. J. Tropfke, *Geschichte der Elementarmathematik* **2**, Leipzig 1903, S. 244: „Der Beweis Leonardos"). Daß Leonardo seinen Beweis nicht direkt aus dem *Liber trium fratrum de geometria* entnommen hat, erweist sich durch eine Vergleichung als höchst wahrscheinlich, aber ganz gewiß verdient nicht sein Beweis ohne weiteres „Der Beweis Leonardos" genannt zu werden.

G. Eneström.

---

1) Dritte Auflage des 1. Bandes, zweite Auflage der 2. und 3. Bände.

2 : 39. Die Behauptung (Z. 34—35): „[In betreff der Gleichung $x^2 + c = bx$ wird] ebensowenig wie im 15. Abschnitte des Abacus (S. 34) der Möglichkeit gedacht, es könne auch einmal $\frac{b^2}{4} \leqq c$ sein“, ist hinsichtlich des 15. Abschnittes des *Liber abbaci* falsch. Leonardo Pisano bemerkt nämlich (Ausg. von Boncompagni, Rom 1857, S. 409, Z. 9—12):

> Et cum occurrerit, quod census, et numerus equentur radicibus, scias hoc fieri non posse, nisi numerus fiat equalis, vel minor quadrato medietatis radicum: qui si equalis fuerit, habebitur pro radice census numerus medietatis radicum.

Hier wird also ausdrücklich gesagt: Die Gleichung $x^2 + c = bx$ ist unmöglich, wenn nicht $c \leqq \left(\frac{b}{2}\right)^2$; wenn $c = \left(\frac{b}{2}\right)^2$ ist $x = \frac{b}{2}$. G. Eneström.

---

2 : 66. Herr Cantor berichtet hier über die im Satze 17 des 2. Teiles der *Algorithmus demonstratus* gelehrte Ableitung der Divisionsregel gewöhnlicher Brüche. Allein schon im Satze 3 der Schrift wird eine einfachere Ableitung der Regel gebracht, nämlich

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd} = \frac{ad}{bc}.$$

Ich benutze diese Gelegenheit um zu bemerken, daß die „Demonstratio Jordani de minutiis“ im 26. Satze eine Ableitung der Regel bringt, die im Grunde kaum von der des 17. Satzes des 2. Teiles des *Algorithmus demonstratus* verschieden ist. Ich gebe hier unten die Ableitung nach dem Cod. lat. Berol. 4⁰. 510 wörtlich wieder.

> Sint minutie dividende numerate a b, denominate ab a, et sind dividende per minutias denominatas a c, numeratas a d. Ducatur ergo d in a et fiet e, et c in b et fiat f. Dico minutias denominatas ab e, numeratas ab f esse dividentes minutiarum denominatarum ab a, numeratarum a b. Fiat enim ex d in b g, ex c in e h, ex d in f k, ex c in f i. Per 13 ergo de partibus denominate a h minutie et numerate a k fiunt ex minutiis cd in minutias ef. Item ex c in b fit f, ex d in b fit g, ergo sicut est c ad d, ita f ad g. Item sicut est e ad f, ita h ad i, quia ex c in e fit h et ex c in f fit i, et sicut est f ad g, ita est i ad k, quia sicut est c ad d, ita i ad k, quia ex c in f fit i et ex d in f fit k, ergo sicut est e ad g, ita est h ad k, at sicut est e ad g, ita a ad b. Quia ex d in a fit e et ex d in b fit g, ergo sicut est a ad b, ita est h ad k, ergo permutatim [sicut est a ad h, ita est b ad k] ergo per .V. de partibus minutie ab sunt minutie hk. Sed ex minutiis cd in minutias ef fiunt minutie hk, ergo etiam minutie ab, ergo minutie cd dividunt minutias ab per minutias ef et convertitur et sic constat quod statutum est.

Der lange Beweis besagt ganz einfach, daß

$$\frac{b}{a} = \frac{bcd}{acd} = \frac{d}{c} \cdot \frac{bc}{ad}, \quad \text{also} \quad \frac{\frac{b}{a}}{\frac{d}{c}} = \frac{bc}{ad},$$

und diese Regel kann man also dem Jordanus beilegen. G. Eneström.

---

2 : 112. Über die mathematischen Schriften des Z. 7 — 8 ganz im Vorübergehen erwähnten französischen (nicht spanischen) Juden Levi ben Gerson besitzen wir seit einigen Jahren genaue Kenntnisse durch Abhandlungen von G. Lange (*Sefer Maassei Choscheb. Die Praxis des Rechners. Ein hebräisch-arithmetisches Werk des Levi ben Gerschom aus dem Jahre 1321. Zum ersten Male herausgegeben und ins Deutsche übertragen.* Frankfurt a. M. 1909) und J. Carlebach (*Lewi ben Gerson als Mathematiker. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik bei den Juden.* Berlin 1910). Zurzeit werde ich mich auf einen Bericht über die Sätze Levis aus dem Gebiete der Kombinatorik beschränken.

Dieser Gegenstand wird teils am Ende des 1. Abschnittes, teils im 4. Kapitel des 2. Abschnittes (S. 47—55, 84—85 bei Lange; S. 171—179, 186 bei Carlebach) behandelt. Die sechs Sätze (63—68) des Levi ben Gerson besagen in moderner mathematischer Sprache:

63. Wenn P_n die Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Elementen bedeutet, so ist $P_{n+1} = (n+1) P_n$, folglich $P_n = 1.2.3....n$, weil $P_1 = 1$.

64. Wenn $V_{k/n}$ die Anzahl der Variationen k^{ter} Klasse von n verschiedenen Elementen bedeutet, so ist $V_{2/n} = n(n-1)$.

65. Im allgemeinen ist $V_{k+1/n} = (n-k)\, V_{k/n}$, folglich

$$V_{k/n} = (n-k+1)(n-k+2)\ldots n.$$

66. Wenn $K_{k/n}$ die Anzahl der Kombinationen k^{ter} Klasse von n verschiedenen Elementen bedeutet, so ist $V_{k/n} = K_{k/n} \cdot P_k$.

67. Folglich ist $K_{k/n} = \frac{V_{k/n}}{P_k}$, mithin ist auf Grund der Sätze 63 und 65 $K_{k/n} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)\ldots n}{1.2\ldots k}$.

68. Man hat immer $K_{n-k/n} = K_{k/n}$.

Das vierte Kapitel bringt keine neuen Sätze, sondern nur Zahlenbeispiele z. B. $K_{5/8} = \frac{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = 56$.

Die älteste von Lange benutzte Handschrift stammt aus dem Jahre 1462.

G. Eneström.

---

2 : 177. Der Text gegen das Ende der Seite gibt zu verschiedenen Bemerkungen Anlaß. Z. 25 sollte statt: „Dieses vollzog Johann von Gemunden" etwa: „Dieser höheren Einheit bediente sich Johann von Gemunden", gesetzt werden. Johann beruft sich ja selbst, wie Herr Cantor Z. 31—32 ausdrücklich hervorhebt, auf die Alfonsinischen Tafeln. Nun hat A. Wegener (BM **6**$_3$, 1905, S. 178) darauf hingewiesen, daß der Originaltext der Tafeln nicht diese „signa" sondern die „signa communia" enthält, so daß Johann von Gmünden wahrscheinlich die Bearbeitung von Johannes de Saxonia meint, aber jedenfalls wurden die „signa physica" schon im 14. Jahrhundert benutzt, und die Behauptung des Herrn Cantor Z. 33, daß die 60gradigen Zeichen vor Johann von Gmünden „keine Nachahmung fanden" ist lediglich eine kühne Mutmaßung. Z. 27—29 sollten meiner Ansicht nach die Worte: „die keineswegs als eine ganz unbedeutende zu erachten ist, da sie ein deutliches Erfassen des Grundgedankens der Sexagesimalrechnung verräth" gestrichen werden. Erstens ist es zum mindesten höchst unsicher, ob Johann von Gmünden, als er die „signa physica" benutzte, wirklich den Grundgedanken der Sexagesimalrechnung erfaßte, zweitens hat es sich tatsächlich herausgestellt, daß dieser Grundgedanke praktisch wertlos sei. Z. 33 ist „1272" statt „1252" zu setzen (vgl. Wegener, a. a. O. S. 176). G. Eneström.

2 : 178. Der Bemerkung (Z. 2—4): „Johannes von Gemunden zeigt nun an einem Beispiele die Verwerthung der Stellung [der Zähler] zur Angabe des Ranges der Sexagesimalbrüche" fügt Herr Cantor die Worte hinzu:

> Auch davon war bei Jordanus keine Rede und konnte vermöge der rein theoretischen Anlage seines *Algorithmus demonstratus,* in welchem Zahlenbeispiele grundsätzlich bald gar keine, bald eine Nebenrolle spielten, kaum die Rede sein. Johannes von Gemunden dagegen lehrt 2 Zeichen 24 Grade 36 Minuten 45 Secunden werden .2. 24. 36. 45. geschrieben.

Allein dieser Zusatz ist zum mindesten irreleitend, auch wenn man davon absieht, daß der *Algorithmus demonstratus* nichts mit Jordanus zu tun hat. Aus den Cantorschen Worten muß nämlich der nicht sachkundige Leser die Auffassung bekommen, daß die fragliche Schreibweise von Johann von Gmunden herrührt (vgl. z. B. J. Tropfke, *Geschichte der Elementarmathematik* **1**, Leipzig 1902, S. 87). Nun kommt allerdings die Schreibweise, soviel ich weiß, nicht in der 1534 erschienenen Druckausgabe des *Algorismus de minutiis* des Meisters Gernardus vor, aber sie wird ausdrücklich gelehrt in der Handschrift dieser Abhandlung, die ich herausgegeben habe (siehe BM $\mathbf{14}_3$, 1913/14, S. 105, 111, 143) und die aus dem 14. Jahrhundert stammt. Auch aus der Druckausgabe kann man unmittelbar folgern, daß der Verfasser des *Algorithmus demonstratus* entweder diese Schreibweise oder eine damit prinzipiell übereinstimmende benutzt hat (vgl. z. B. daselbst den folgenden Passus aus dem Beweis, des Satzes 26: „locus enim tertiorum distat ab integris per duo loca interposita, sicut locus quartorum a minutis").

Ich habe soeben von einer Schreibweise in betreff der Sexagesimalbrüche gesprochen, welche Schreibweise prinzipiell mit der bei Johann von Gmünden vorkommenden übereinstimmt. Eine solche Schreibweise lehrt schon der Verfasser der Algorismusschrift aus dem 12. Jahrhundert, die Curtze 1898 herausgegeben hat (siehe Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **8**, 1898, S. 12, 22) und sie kommt auch in der *Demonstratio Jordani de minutiis* vor (siehe BM $\mathbf{14}_3$, 1913/14, S. 47). Der Unterschied dabei ist nur, daß man die Brüche nicht horizontal von links nach rechts, sondern vertikal von oben nach unten schreibt, also $\begin{matrix}2\\10\\32\\57\end{matrix}$ für $2^0\,10'\,32''\,57'''$. G. Eneström.

2 : 307. Die Worte (Z. 30—24):

> da damals ein italienischer Kaufmann es einfach für lächerlich gehalten hätte, von einem Deutschen, einem Franzosen Gegenstände der Rechenkunst oder der Lehre von den Gleichungen erlernen zu sollen

müßten gestrichen werden. Erstens kann Herr Cantor natürlich nicht wissen, was ein italienischer Kaufmann am Ende des 15. Jahrhunderts für lächerlich gehalten hätte, so daß der Ausspruch unter keinen Umständen in eine Arbeit paßt, die wenigstens beansprucht wissenschaftlich zu sein. Zweitens handelt es sich um PACIUOLO, und dieser war gar nicht ein italienischer Kaufmann. Herr CANTOR hat selbst S. 306—307 nähere Auskunft über den Lebensgang PACIUOLOS gegeben, und man ersieht daraus, daß dieser ein Franziskanermönch war, der an verschiedenen Orten als Lehrer der Mathematik tätig war. Als junger Mann war er Erzieher der Söhne eines Kaufmannes und nach der Vermutung des Herrn CANTOR legte PACIUOLO damals wohl den Grund zu kaufmännischen Kenntnissen, von denen seine Schriften Zeugnis ablegen. Aber man kann natürlich kaufmännische Kenntnisse besitzen, ohne jemals Kaufmann gewesen zu sein, und es gibt noch in unseren Tagen wirkliche Gelehrte, die als junge Männer Erzieher der Söhne eines Kaufmanns gewesen sind.

G. ENESTRÖM.

2: 347. In der Fußnote 1 wird ganz wie in der ersten Auflage auf die biographische Notiz über CHUQUET im Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **13**, S. 585—592 verwiesen; hier ist 585 Druckfehler für 555. Wer den Verweis benutzen will, entdeckt natürlich sofort den Fehler; andererseits bekommt der Leser der *Vorlesungen* durch den Druckfehler eine unrichtige Vorstellung von der Ausführlichkeit der biographischen Notiz. G. ENESTRÖM.

---

2 : 507. Der Ausspruch (Z. 23—24): „keinesfalls verdient die goldene Regel den wegwerfenden Namen eines wilden Näherungsverfahrens", der offenbar gegen HANKEL (*Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter*, Leipzig 1874, S. 369) gerichtet ist, ist eigentlich nicht unrichtig, aber ein Mathematiker würde sich kaum auf diese Weise geäußert haben. Man beurteilt am leichtesten die goldene Regel CARDANOS, wenn man sie geometrisch darstellt. Sei die gegebene Gleichung auf die Form $f(x) = k$ gebracht, wo $f(x)$ eine rationale (ganze oder gebrochene) Funktion von x ist, die kein von x unabhängiges Glied enthält, so sind die reellen Wurzeln der Gleichung Abszissen der Schnittpunkte der Kurve $y = f(x)$ und der Geraden $y = k$. Weiß man nun, daß eine und nur eine Wurzel zwischen a und $a + 1$ liegt, so besagt die goldene Regel erstens, daß, wenn man die Punkte der Kurve, deren Abszissen a und $a + 1$ sind, durch eine Gerade verbindet, die Abszisse des Schnittpunktes dieser Geraden und der Geraden $y = k$ ein erster Näherungswert x_1 von x ist. Zweitens gibt die goldene Regel an, daß man einen noch besseren Näherungswert bekommt, wenn man den Punkt der Kurve, dessen Abszisse x_1 ist, mit einer der oben genannten Punkte der Kurve durch eine Gerade verbindet, und die Abszisse x_2 des Schnittpunktes dieser Geraden und der Geraden $y = k$ bestimmt; ob der Kurvenpunkt $x = a$ oder der Kurvenpunkt $x = a + 1$ gewählt werden soll, beruht auf dem Zeichen der Größe $f(x_1) - k$. Endlich lehrt die goldene Regel, daß man durch Wiederholung des Verfahrens immer genauere Näherungswerte von x bekommen kann. Geometrisch kann die goldene Regel also gutgeheißen werden, aber arithmetisch darf man sie wild nennen, weil sie ganz unnötigerweise äußerst verwickelte arithmetische Rechnungen erfordert. Statt x_1 zu berechnen, kann man nämlich ganz einfach den Wert $a + \frac{1}{2}$ wählen, und ebenso kann man für x_2 entweder $a + \frac{1}{4}$ oder $a + \frac{3}{4}$ anwenden, je nachdem $f(a + \frac{1}{2}) - k$ und $f(a + 1) - k$ gleiche oder verschiedene Zeichen haben.

Natürlich kann auch die Chuquetsche „regle des nombres moyens" ebenso gut zur Anwendung kommen, und rechnerisch ist diese dem Verfahren Cardanos entschieden vorzuziehen. Allerdings wurde das *Triparty* von Chuquet bekanntlich erst in unseren Tagen veröffentlicht. G. Eneström.

---

2 : 611. In betreff der Angabe, daß 1556—1557 eine dreibändige *Arithmetique* von Forcadel erschien, bemerke ich ergänzend, daß die drei Bände (*L'arithmetique, Le second livre de l'arithmetique, Le troysieme livre de l'arithmetique*) bzw. 100, 114, 116 Blätter enthalten (vgl. die bibliographische Notiz von B. Boncompagni im Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **2**, 1869, S. 425—426; D. E. Smith, *Rara arithmetica,* Boston 1908, S. 284—285). Nach Boncompagni hat auch das erste Buch das Druckjahr 1557 und Boncompagni gibt an, daß er ein Exemplar der Universitätsbibliothek in Turin benutzt hat. Fontès gibt dagegen ausdrücklich 1556 als Druckjahr an und teilt mit, daß das Widmungsschreiben des ersten Buches vom 27. Februar 1555 datiert ist.

Z. 22 ist natürlich $x = z^3 - 1$ Druckfehler statt $x = z^2 - 1$.

Hinsichtlich der Darstellung der Binominalkoeffizienten als die Ziffern der Zahlen $(11)^2$, $(11)^3$, $(11)^4$, usw. kann bemerkt werden, daß Initius Algebras, der sicherlich älter als Forcadel war, diese Koeffizienten durch die Ziffern der Zahlen $(10001)^2$, $(10001)^3$, $(10001)^4$, usw. ersetzte, wodurch die Einführung „zweiziffricher" Ziffern auch nicht bei der Berechnung der Koeffizienten des Ausdruckes $(a + b)^9$ nötig wird (siehe M. Curtze, Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. **13**, 1902, S. 446, 542). G. Eneström.

---

2 : 652. Hier ist die scheinbar durchaus berechtigte Ausstellung, die Herr Cantor durch die Worte: „Im XV. Jahrhundert hat Leonardo von Pisa gelebt" gegen Blancanus richtet, für die Cantorsche Geschichtsschreibung besonders kennzeichnend. Die Worte werden als ein letzter Beleg für die haarsträubende Unzuverlässigkeit des Blancanus geboten, und auch ein Fachmann hätte ja übersehen können, daß bis gegen das Ende des 18. Jahrhunderts keine Aktenstücke bekannt waren, aus denen man die richtige Lebenszeit des Leonardo ermitteln konnte. Allein S. 109 hat Herr Cantor behauptet, daß man heute noch dem Geschichtswerke Montuclas „keinen weiteren Fehler vorwerfen kann, als daß es nicht mehr und nicht Anderes enthielt, als damals den Gelehrtesten bekannt war", und auch Montucla setzte selbstverständlich (siehe *Histoire des mathématiques* **1**, Paris 1758, S. 441; Nouv. éd. **1**, Paris an VII, S. 536) Leonardo Pisano in das 15. Jahrhundert! Erst am Ende des 2. Bandes der neuen Auflage (S. 714—715) berichtigt Montucla nach Cossali seine Angabe dahin, daß Leonardo ein paar Jahrhunderte früher lebte; aber Cossali ist mehr als hundert Jahre nach Blancanus geboren. Denselben Fehler, den Herr Cantor bei Montucla selbstverständlich findet, betrachtet er mithin bei Blancanus als eine haarsträubende Unzuverlässigkeit. Im Namen des Blancanus konnte man also an Cantor die ironischen Worte Montuclas an Cossali richten: „C'est en effet une grossière bévue à moi que de n'avoir pas su que dans quelques bibliothèques d'Italie existoit un manuscrit de ce Léonard, propre à fixer le temps où il vivoit. Ne dois-je pas mourir de honte de n'en avoir pas su à cet égard plus que Baldi qui même avoit écrit une Histoire des mathématiciens".

G. Eneström.

2:712. Die Angabe (Z. 19—22): „[LONGOMONTANUS] veröffentlichte seine vermeintliche Entdeckung [der Kreisquadratur] in Schriften von 1638 und 1644" ist leicht irreleitend, wenn auch nicht direkt falsch. Herr CANTOR verweist ausdrücklich in der 3. Fußnote auf KÄSTNER, und dieser erwähnt nicht nur die Schriften von 1638 und 1644, sondern auch eine ältere Schrift mit dem Titel: *Cyclometria vere et absolute in ipsa natura circuli cum rectilineo inventa et ita quidem ut circino et regula exquisite tractari possit* (Hamburg 1627). Auch in dieser Schrift lehrt LONGOMONTANUS die Konstruktion, die Herr CANTOR mitteilt, und die zu $\pi = \frac{\sqrt{18252}}{43}$ führt.

Es gibt eine noch ältere Schrift von LONGOMONTANUS über die Kreisquadratur, nämlich: *Cyclometria ex lunulis reciproce demonstrata, unde tam area quam perimetri circuli exacta dimensio, et in numeros deductio sequuta est, hactenus ab omnibus mathematicis unice desiderata* (Hauniae 1612). Ich habe die Schrift nicht gesehen, vermute aber, daß sie dieselbe Konstruktion wie die Schrift von 1627 enthält.

Beiläufig bemerke ich, daß in der Schrift *Controversiae de vera circuli mensura anno CIↃIↃCXLIV exortae* (Amsterdam 1647, S. 84—85) nicht weniger als 15 Schriften von LONGOMONTANUS über Kreisquadratur verzeichnet werden.

G. ENESTRÖM.

---

2 : 748. Am Ende der Seite (Z. 30—32) gibt Herr CANTOR an (die Angabe ist übrigens von ihm selbst durch gesperrte Schriften hervorgehoben), daß FAULHABER

> Summenformeln für die Potenzen der aufeinanderfolgenden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe bis zur Summe der elften Potenzen einschließlich

gab, und aus den Worten (Z. 28): „Von 1612 bis 1619 gaben diese Beiden [d. h. FAULHABER und REMMELIN] Schriften heraus", muß man wohl folgern, daß die Schriften FAULHABERS, die die fraglichen Summenformeln enthalten, aus der Zeit 1612—1619 herrühren. Überdies verweist Herr CANTOR, der offenbar die angedeuteten Schriften nicht selbst zur Verfügung gehabt hat, auf KÄSTNERS *Geschichte der Mathematik* **3** (Göttingen 1799), S. 29—33, 114—124. Ich habe den Verweis benutzt, und allerdings sagt KÄSTNER daselbst (S. 29 Z. 1—3 v. u., S. 30 Z. 1—3 v. u.) ausdrücklich, daß FAULHABER den Wert von Σn^r für $r = 5, 6, 8, 9, 10, 11$ angegeben hat, aber daß bei FAULHABER der Wert von Σn^4 und Σn^7 sich befindet, habe ich nicht an den von Herrn CANTOR zitierten Seiten bei KÄSTNER entdecken können. Im Gegenteil bemerkt KÄSTNER (S. 123 Z. 3—5): „Hie verlangt also F. einen allgemeinen Ausdruck für die Summen der vierten Potenzen, den Ausdruck selbst gibt er nicht an" und etwas weiter unten (S. 123 Z. 3—6 v. u.) sagt KÄSTNER in betreff der „Aggregate" (der Summen von Summen): „die vierte (Frage) verlangt Aggregate von vierten Potenzen, . . . giebt aber den cossischen Ausdruck nicht, sondern verlangt denselben anzugeben". Ob anderseits der Wert von Σn^4 in der von REMMELIN 1619 veröffentlichten Schrift *Sphyngis Victoris triumphi splendide ab eius victore triumphante adornati Remora* vorkommt, wage ich nicht auf Grund des KÄSTNERschen Berichtes (S. 129 Z. 12—13) zu entscheiden. Dagegen behauptet KÄSTNER, soviel ich verstehen kann, S. 137 (Z. 6—7, 10—11) ausdrücklich, daß Faulhaber in der 1622 erschienenen Schrift *Miracula arithmetica*, die Herr Cantor nicht einmal andeutet, den cossischen Ausdruck für Σn^4 angegeben hat, und auch der Wert von Σn^7 und Σn^{12} dürfte nach Kästner (S. 137—138) daselbst zu finden sein. Endlich hat Faulhaber nach dem Kästnerschen Berichte (S. 144) in der Schrift *Academia algebrae* vom Jahre 1631 auch den cossischen Ausdruck für Σn^{13} mitgeteilt. Jedenfalls sollte also, vorausgesetzt, daß der Kästnersche Bericht korrekt ist, bei Herrn Cantor Z. 28 die Jahreszahl 1619 in 1631 geändert werden und Z. 32 „dreizehnten" statt „elften" stehen.

Soviel ich weiß, haben die Verfasser der neuesten Kompendien der Geschichte der Mathematik, die Faulhabers Summenformeln erwähnen, ohne nähere Prüfung die Cantorsche Angabe benutzt (siehe J. Tropfke, *Geschichte der Elementarmathematik* **2**, Leipzig 1903, S. 318; H. G. Zeuthen, *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert,* Leipzig 1903, S. 166). Dieser Umstand ist eigentlich nicht auffallend, da man noch vor 10 Jahren die Cantorschen *Vorlesungen* als eine im großen und ganzen zuverlässige Arbeit betrachtete und der Bericht Kästners recht weitschweifig, zum Teil nicht ganz klar ist.

G. Eneström.

---

2 : 753. Herr Cantor berichtet hier Z. 14—22 über die Beschäftigung Fermats mit der Summierung beliebiger Potenzen der ganzen Zahlen, hat aber dabei nur den Brief an Roberval vom 16. Dezember 1636 benutzt. Indessen gibt es einen früheren Brief Fermats an Roberval vom 4. November 1636 (vgl. B. Boncompagni, *Intorno alla somma delle quarte potenze dei numeri naturali;* Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **10**, 1877, S. 298), worin derselbe Gegenstand berührt wird, und daselbst gibt Fermat ausdrücklich an, daß ihm keine frühere Untersuchung über die Summierung der 4ten, 5ten usw. Potenzen der natürlichen Zahlen bekannt sei (siehe *Oeuvres de Fermat*, publ. par P. Tannery et Ch. Henry **2**, Paris 1894, S. 84). Die Worte „ganz gewiß" (Z. 19) könnten also gestrichen und durch einen Verweis auf den Brief vom November 1636 ersetzt werden.

Ferner erwähnt Fermat, daß ihm die Lösung des Problems große Mühe verursacht habe („j'en suis venu à bout avec beaucoup de peine") und gibt als Beispiel die Lösung für die Summe der 4ten Potenzen auf folgende Weise an:

> Si quadruplum maximi numeri binario auctum ducas in quadratum trianguli numerorum, et a producto demas summam quadratorum a singulis, fiet summa quadratoquadratorum quintupla,

also

$$5\,\Sigma n^4 = (4n+2)\left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2 - \Sigma n^2.$$

Nun ist ja

$$\Sigma n^3 = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2$$

und mithin kann die Fermatsche Lösung

$$5\,\Sigma n^4 = (4n+2)\,\Sigma n^3 - \Sigma n^2$$

geschrieben werden. Anderseits findet sich bei Ibn el-Heitam (siehe H. Suter, BM **12**, 1911/12, S. 325) die Formel

$$\frac{4}{5}\Sigma n^3\left(n+\frac{1}{2}\right)=\Sigma n^4+\frac{1}{5}\Sigma n^2,$$

die ja durch eine sehr einfache Transformation in

$$5\,\Sigma n^4=(4n+2)\,\Sigma n^3-\Sigma n^2$$

übergeht. Man könnte also versucht sein, anzunehmen, daß FERMAT auf demselben Wege als IBN EL-HEITAM zu seinem Resultate gekommen ist.

G. ENESTRÖM.

---

2 : 867. Die Z. 1—10 gegebene Darstellung des Ausgangspunktes der FERMATschen Lehre von den Quadraturen ist nicht unrichtig, aber jedenfalls nicht gut redigiert. Herr CANTOR sagt Z. 1—3, daß FERMAT die Grundlinien der ihrer Höhe nach rasch abnehmenden Rechteckchen zunehmen läßt, und fügt in einem neuen Punkte hinzu, daß die Zunahme nach Maßgabe eines zweiten Hilfssatzes, den Herr CANTOR auch angibt, erfolgt. Aber FERMAT selbst gibt direkt die einfache Regel der Bildung der Grundlinien an, und zwar durch die Worte: „Fingantur termini progressionis geometricae in infinitum extendendi, quorum primus sit AG, secundus AH, tertius AO, etc. in infinitum", und diese Worte sagen ja direkt aus, daß die Abszissen der sukzessiven Ordinaten eine geometrische Reihe bilden, wie Herr CANTOR auch nachträglich Z. 8—10 angibt. In der Fortsetzung bemerkt FERMAT, daß die Differenzen der Abszissen ins Unendliche abnehmen.

Das FERMATsche Verfahren hat nunmehr ein großes historisches Interesse bekommen, weil es sich herausgestellt hat, daß die Teilung einer Linie in Strecken, die eine solche geometrische Reihe bilden, schon im Mittelalter zur Anwendung gekommen ist (vgl. H. WIELEITNER, BM $\mathbf{14}_3$, 1913/14, S. 153).

In betreff des Hilfssatzes, den Herr CANTOR Z. 3—7 erwähnt, würde ein Fachmann wahrscheinlich nicht unterlassen haben, auf das Vorkommen der Umkehrung des Satzes bei NIKOMACHOS und BOETIUS hinzuweisen (vgl. BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 379). Für Herrn CANTOR ist allerdings ein solcher Hinweis unmöglich gewesen, weil er die betreffende Stelle bei NIKOMACHOS falsch verstanden hat (siehe *Vorlesungen* $\mathbf{1}^3$, Leipzig 1907, S 431). G. ENESTRÖM.

---

3 : 426. Da Herr CANTOR hier die von LEIBNIZ herrührende Besprechung der *Enumeratio linearum tertii ordinis* erwähnt, benutze ich die Gelegenheit, darauf aufmerksam zu machen, daß LEIBNIZ neun Jahre später eine genauere Prüfung der Angaben der NEWTONschen Arbeit anregte. In seinem Briefe an JOHANN BERNOULLI vom 10. Januar 1714 schrieb er nämlich (siehe *LEIBNIZENS Mathematische Schriften,* herausgegeben von C. I. GERHARDT **3** : 2, Halle 1856, S. 927):

> Paralogismi, quos in scriptis ejus [= NEWTONI] notasti, faciunt, ut dubitare cogamur, utrum recte numerum Curvarum tertii gradus determinaverit. Digna foret disquisitio illa cura Dni. Agnati Tui [= NIC. I BERNOULLI], quem consilio Tuo ad profunda ejusmodi eruenda juvare posses.

Hierauf antwortet JOHANN BERNOULLI am 28. Februar 1714 (a. a. O. S. 929):

An Newtonus non erraverit in Enumeratione linearum tertii ordinis, omittendo forte quasdam, quasdam alias bis sumendo, ... asseverare non ausim: ejus enim Tractatum hac de materia ut examinarem, nondum a me impetrare potui... Frater meus aliquando hoc vadum tentavit; quo vero successu non memini, fortasse in Scriptis ejus aliquid invenire est.

Vermutlich teilte Johann Bernoulli mündlich seinem Neffen die Bemerkung von Leibniz mit, denn am 28. Februar 1714 schrieb Nikolaus Bernoulli an diesen (a. a. O. S. 992):

Newtonum in enumeratione linearum tertii ordinis errasse, non mihi videtur verisimile; examinabo tamen, quia ita jubes, ejus hac de re scriptum, quam primum per otium licuerit.

Wann Nikolaus Bernoulli diese Untersuchung vornahm, weiß ich nicht, und nur aus einer Bemerkung von Murdoch in der 1746 erschienenen Schrift *Newtoni genesis curvarum per umbras sive perspectivae universalis elementa* ist mir bekannt, daß sie wirklich zu einem Ergebnis führte (siehe W. W. R. Ball, *On Newtons classification of cubic curves;* Transactions of the London mathem. soc. **22**, 1891, S. 118). In den *Opera* Jakob Bernoullis habe ich dagegen nichts über die Zahl der Kurven dritter Ordnung gefunden.

Nebenbei bemerke ich, daß auch R. Cotes sich mit der Ergänzung der Newtonschen Resultate beschäftigt hat. In einem wahrscheinlich nicht abgesandten Briefe an Newton aus der Mitte des Jahres 1712 bemerkte er nämlich (siehe J. Edleston, *Correspondence of I. Newton and Cotes,* London 1850, S. 119), daß dieser eigentlich einen fünften Hauptfall in Betracht gezogen haben sollte, nämlich

$$x^2y + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

und daß die Gleichung des dritten Hauptfalles

$$y^3 + gx^2y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

sein sollte. Vermutlich entdeckte Cotes recht bald, daß seine Bemerkung unzutreffend war.

G. Eneström.

---

3 : 635. Es ist richtig, daß schon Fermat die Frage nach der Teilung von Einsätzen vor eingetretener Entscheidung auf mehr als zwei Spieler ausdehnte, aber es ist nicht ganz bedeutungslos, darauf hinzuweisen, daß diese Ausdehnung in einem Briefe an Pascal vom 25. September 1654 vorkommt, welcher Brief erst 1779, also viele Jahre nach Moivres Tode veröffentlicht wurde (vgl. BM $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 240). Aus diesem Grunde wäre es angebracht gewesen, wenigstens eine vor 1738 erschienene Schrift zu erwähnen, in welcher die Ausdehnung vorkommt. Bekanntlich wurde eine solche Schrift schon 1657 herausgegeben, nämlich die Abhandlung von Huygens *De ratiociniis in ludo aleae*, wo im Satze 9 das Teilungsproblem auf eine beliebige Anzahl von Spielern ausgedehnt wird. Später wurde die Frage auch von Montmort behandelt (*Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, Paris 1708, S. 175—176; éd. 2, Paris 1713, S. 242—243, 247—248), allerdings ohne besonders großen Erfolg.

G. Eneström.

Anfragen.

165. Über die Geschichte der Stammbrüche im Mittelalter. Es ist allgemein bekannt, daß Leonardo Pisano ausführlich die Zerfällung gewöhnlicher Brüche in Stammbrüche gelehrt hat, und daß wenigstens seit dem Anfange des 16. Jahrhunderts in den Rechenbüchern eine Rechnungsart, die sogenannte „Welsche Praktik", vorkommt, die sich zum Teil auf die Zerfällung von Brüchen in Stammbrüche stützt. Dagegen scheint die Geschichte der Stammbrüche im Mittelalter bisher nicht eingehend behandelt worden zu sein, und die Notizen über diesen Gegenstand, die in den mathematisch-historischen Handbüchern geboten werden, sind sehr dürftig. Beispielsweise bemerkt Tropfke (*Geschichte der Elementarmathematik* **1**, Leipzig 1902, S. 76), nachdem er die Schreibart in Stammbruchform bei Leonardo Pisano erwähnt hat, nur, daß die Schreibart „nunmehr bei verschiedenen mittelalterlichen Schriftstellern zu verfolgen" sei, ohne auch nur einen einzigen Verweis auf einen solchen Schriftsteller hinzuzufügen.

Im *Algorismus de minutiis* des Meisters Gernardus kommt eine leise Andeutung von Zerfällung in Stammbrüche vor, denn im Cod. Vatic. Reg. S. 1261 wurde am Ende des Satzes 23 bemerkt (siehe Biblioth. Mathem. **14**$_3$, 1913/14, S. 118):

> Cum numeri minucie sunt contra se primi . . . divide numerantem si potes in plures numeros quorum uterque vel quilibet sit communicans denominacioni ut si partes numeri .*a*. sint .*t*. et .*x*. et .*z*. communicantes numero .*b*. reducere poteris minucias .*tb*. et .*xb*. et .*zb*. valentes minucias .*ab*. quamlibet in grossiorem denominacionem.

Es handelt sich also hier um Zerfällung in Brüche mit kleineren Nennern, aber daß der Zähler 1 sein soll, wird nicht ausdrücklich gesagt. Dagegen wird die Frage der Zerfällung in Stammbrüche direkt in einer anderen Algorismusschrift mit dem Titel „Brevis ars minutiarum" (Cod. Vatic. Ottob. 309 Bl. 120—127) behandelt; die Handschrift dürfte spätestens aus der Mitte des 14. Jahrhunderts stammen. Ich drucke hier die fragliche Stelle (Bl. 125$^{\text{v}}$ Sp. 1—2) ab.

> Minuciam ad minucias grossiores sic potes reducere. Franges numeratorem in numeros communicantes cum denominatore. Minucie ergo ab illis particulis numerate et dicto denominatore denominate valebunt dictam minuciam propositam. Propositarum ergo quamlibet, si ad grossiorem minuciam, ad quam potest reduci, predicto modo reduxeris, feceris quod erat faciendum. Quod si denominator sit numerus primus aut si compositus a paucis tantum numeris numeratus, tum minuciam tuam in subtiliorem reducas cum numero a multis numeris numerato et tales sunt .12.24.36.60. et alii. De hac igitur minucia subtiliori fatigando numeratorem et ulterius ut prius operaberis. Minuciam iterum tuam non ab unitate numeratam et minorem integro si reducere velis ad minucias grossiores, ad quas possibile est ipsam reduci, ita quod unica pars unius generis habeatur, divides denominatorem per numeratorem. Aut igitur totus denominator consumitur, et tunc facies numerum exeuntem denominatorem et unitatem numeratorem et habes optatam. Habes enim unam partem grossiorem que potest inveniri, videlicet equalem minucie proposite. Verbi gracia. 4. 20.$^{\text{me}}$ valent unam 5.$^{\text{am}}$ Aut non consumatur denominator per numera-

torem et tunc numero quociens addes unitatem. Scias igitur quod minucia proposita maior est quam minucia ab unitate numerato et a numero aggregato predicto denominata, et impossibile est invenire partem illa parte grossiorem, que quidem minor sit quam minucia proposita. Talem igitur potes habere grossiorem, veram nequaquam. Scribes igitur unitatem pro numeratore et dictum aggregatum pro denominatore et sic scripseris grossiorem minuciam quam potes invenire. Verbi gracia. Si dentur 6. 20.me dico quod una quarta est minor quam minucia data, non autem una tercia sed maior, nec una medietas, sed multo maior. Simili quoque modo pars grossior, que sumi potest minor .4. trecesimis est una octava. Ut igitur scias quid remaneat dempta parte predicta de minucia tua, per eundem aggregatum divide denominatorem minucie date. Aut igitur consumitur denominator et tunc numerum in hac divisione exeuntem subtrahes de numeratore minucie tue. Scias igitur quod data minucia valet predictam partem, hoc est minuciam unitate numeratam et aggregato predicto denominatam et insuper aliam minuciam numero videlicet in predicta subtractione relicto numeratam et denominatore minucie date denominatum. Verbi gracia. 6. 20.me valent unam quintam et unam 20.mam. Item .12.20. valent unam secundam sive medietatem et duas .20.mas Itemque .13.20.me valent unam medietatem et .3.20.mas Item .18.20.me valent .1. medietas et .8.20.mas Aut non consumitur per predictum aggregatum denominator et tunc duces ipsum numerum aggregatum in numeratorem et denominatorem minucie date et productos facies numeratorem et denominatorem unius minucie quam scias equalem esse minucie circa cuius laboras reductionem. Ab illius igitur secunde minucie numeratore subtrahes denominatorem minucie tue proposite. Scias igitur quod minucia numerata numero relicto et minucia denominata denominatore eiusdem secunde minucie cum minucia predicta grossa nuper inventa, hoc est cum minucia ab aggregato predicto denominata et unitate numerata, valet minuciam propositam. Minuciam ergo sic vel sic relictam ad grossiorem quam poteris, ut de tota minucia iam dictum est, reduces, relictam iterum ad grossiorem et sic quousque ad finem pervenias et sic exquisite operando invenies quod .13.20.me valent unam mediatatem et unam .7.mam et unam .140.mam et quod .18.20.me valent unam mediatatem et unam quartam et unam septimam et unam .140.mam Hanc autem reductionem propter hoc docui ut scias data qualibet minucia ad grossius ad quod erit possibile eam reducere.

Aus dem obigen ersieht man, daß das erste Verfahren im Grunde mit der letzten Methode des Leonardo übereinstimmt, obgleich für die Erweiterungszahl keine Grenzen vorgeschrieben werden. Bei dem zweiten Verfahren, das ausführlich gelehrt wird, geht der Verfasser des Traktates von der Identität: $\frac{a}{b} = \frac{1}{n+1} + \frac{(n+1)a-b}{(n+1)b}$ aus, wo $n = \mathrm{E}\left(\frac{b}{a}\right)$, und dieses Verfahren stimmt genau mit einer der Methoden des Leonardo überein. Allerdings stimmen die Resultate $\frac{13}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{140}$, $\frac{18}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{140}$ nicht mit denen des Leonardo überein.

Gibt es andere mittelalterliche Schriftsteller, die Regeln für die Zerfällung in Stammbrüche gelehrt haben?

G. Eneström.

Rezensionen.

H. E. Timerding. Die Verbreitung mathematischen Wissens und mathematischer Auffassung.

Die Kultur der Gegenwart: Die mathematischen Wissenschaften. Zweite Lieferung. Leipzig, B. G. Teubner 1914. A 50—A 161. M. 6,—.

Wie ich in meiner Rezension der 3. Abteilung des Bandes „Die mathematischen Wissenschaften“ (Biblioth. Mathem. 13_3, 1912/13, S. 179) erwähnte, sollte dieser Band, nach dem vorläufigen Plane, außer den drei rein historischen Abteilungen 3, 4, 5 noch drei andere Abteilungen enthalten, nämlich: 1. Die Beziehungen der Mathematik zur allgemeinen Kultur. 2. Mathematik und Philosophie. 6. Mathematischer Unterricht. Indessen ist der Plan jetzt insofern modifiziert worden, als die zweite Abteilung *Die Verbreitung mathematischen Wissens und mathematischer Auffassung* behandelt und die 6. Abteilung sich mit der mathematischen Erkenntnis beschäftigen wird. Die rein oder wenigstens überwiegend historischen Abteilungen sind also tatsächlich vier geworden.

Ich bringe hier unten eine Übersicht des Inhaltes der Arbeit des Herrn Timerding, indem ich ganz einfach ihre Kapitelüberschriften und Randangaben zum Abdruck bringe.

Einleitung (S. 50—56). Aufgabe der Arbeit. Zweierlei Bildung. Stellung der Mathematik innerhalb der Gesamtheit des Unterrichts. Bedeutung der mathematischen Bildung für die Allgemeinheit. Verhältnis des mathematischen Unterrichts zur mathematischen Forschung. Zweckbestimmung im mathematischen Unterricht. Ausbreitung des mathematischen Denkens. Die didaktische Mathematik. Historischer Charakter der folgenden Betrachtung.

1. Die mathematische Bildung der Ägypter (S. 56—61). Die Anfänge der Mathematik bei den Ägyptern. Die Harpedonapten. Praktische Mathematik. Aufkeimen des theoretischen Interesses. Idee der allgemeinen Bildung. Erzieherische Verwendung der Mathematik bei den Ägyptern.

2. Die mathematische Bildung der Griechen (S. 62—78). Anfänge der griechischen Mathematik. Thales. Pythagoras. Die Zahl. Das pythagoreische Bildungsideal. Umgrenzung der Mathematik. Die verschiedenen Zweige der mathematischen Wissenschaft. Entstehung des Begriffes der Mathematik im heutigen Sinne. Die ersten mathematischen Lehrbücher. Ägyptische Einflüsse. Die Quadratur des Kreises. Andere Probleme. Die griechische Geometrie ein geistiger Sport. Geringe Verbreitung der wissenschaftlichen Mathematik bei den Griechen. Zähigkeit der primitiven Mathematik. Platon. Die Mathematik vermittelt den Übergang von den vergänglichen Erscheinungen zu der ewigen Idee. Die Dialektik. SOKRATES. PROTAGORAS. Der Gegensatz praktischer und theoretischer Bildung. ZENON. EUDOXOS. EUKLID. EUKLIDS Einfluß. Weitere Entwicklung der griechischen Mathematik. PAPPUS. Die Astronomie. HERON. Reaktion gegen die mathematische Erkenntnis. Fortdauern der Arithmetik. Die römische Mathematik. VARRO. Die Agrimensoren. Übergang zum Mittelalter.

3. **Die mathematische Bildung des früheren Mittelalters** (S. 78—83). Der Einfluß des Christentums. AUGUSTIN. Mathematikfeindliche Stimmen. CASSIODORUS. RABANUS MAURUS. Zustand des mathematischen Unterrichts im frühen Mittelalter. Übungsaufgaben. Widerstand gegen die Mathematik. Die Wissenschaft als heidnisch verrufen. Die Musik. Das Buchwissen den Geistlichen vorbehalten. Entwicklung der Laienschule.

4. **Die mathematische Bildung in der Zeit des Scholastizismus** (S. 83—87). Wendung zum Besseren. EUKLIDübersetzungen. LIONARDO PISANO. Andere mathematische Schriftsteller. Aufkommen der scholastischen Mathematik. Mathematischer Unterricht an den Universitäten.

5. **Die mathematische Bildung der Renaissance** (S. 87—98). Die künstlerische Mathematik. Die Perspektive. Entwicklung der Algebra. Entstehung der algebraischen Formelsprache. Die Trigonometrie. Praktische Geometrie. Kartographie. Astronomie. Die Mathematik auf den Universitäten. Das kaufmännische Rechnen. Mathematisches Studium. Praktische Mathematik. Rückkehr zur unmittelbaren und unbefangenen Betrachtung der Natur. Drang zur universellen Betätigung. Enzyklopädischer Charakter der mathematischen Lehrwerke. Allgemeiner Charakter der mathematischen Literatur des 16. Jahrhunderts. Beginn der modernen Naturforschung.

6. **Die mathematische Bildung des 17. und 18. Jahrhunderts** (S. 98—112). Das 17. Jahrhundert das mathematische Jahrhundert. Mathematische Entdeckungen. Mathematische Philosophie. Verbindung von Mathematik und Experiment in England. Grundlegung der mathematischen Physik. Entwicklung der neuen Analysis. Erste Versuche zur Popularisierung der mathematischen Betrachtung. Das Wissenschaftsideal des 18. Jahrhunderts. Ausbreitung der mathematischen Bildung. Anwendungen auf das moralische Gebiet. Die Mathematik an der Akademie FRIEDRICHS des Großen. Verhältnis FRIEDRICHS des Großen zur Mathematik. Die Mathematik an den Universitäten. Ansätze zur Besserung. CHRISTIAN WOLFFS Anfangsgründe. POLLACKS Mathesis forensis. EULERS Algebra. Kein allgemein verbreiteter und bestimmt umrissener mathematischer Schulunterricht. Die Reform des Unterrichts in der französischen Revolution. Gründung der Ecole polytechnique.

7. **Der mathematische Unterricht in Deutschland während des 19. Jahrhunderts** (S. 112—136). Hervorkehren einer deutschen Nationalbildung. Entwicklung der philosophischen Fakultät. Einfluß der Philologie. Loslösung des Lehrerberufes von der Theologie. Einfluß der napoleonischen Zeit auf die Ausgestaltung unserer Schulen. Nationale deutsche Elemente in der Entwicklung des Bildungswesens. Das Ideal der formalen Bildung. HERDER. SCHILLER. Wortkultur. Die Schulen Veranstaltungen des Staates. Das Abiturientenexamen. Stellung der Mathematik im Examen. Probe eines Abiturientenzeugnisses. Aufgabensammlungen. MEIER-HIRSCH. Der SÜVERNsche Lehrplan. Gegen übertriebene Anforderungen in der Mathematik. Universa-

listische Tendenz der maßgebenden Kreise. Abwendung von der Wirklichkeit. Stimmen für die Mathematik. BESSEL. HERBART. Das klassische Altertum als Grundlage christlicher Erziehung. Widerstreit gegen den Utilitarismus. Die Mathematik als gottlos und vaterlandsfeindlich verschrien. Abnehmende Wertschätzung der Mathematik unter den Gebildeten. Aufschwung der wissenschaftlichen Mathematik in Frankreich. Aufkommende Pflege der wissenschaftlichen Mathematik in Deutschland. A. L. CRELLE. C. G. J. JACOBI. Hervorkehrung des rein wissenschaftlichen Prinzips in der Lehrerausbildung. Entwicklung der Realschulen. Die Volkserziehung. PESTALOZZI. K. v. RAUMER. FRÖBEL. Das technische Bildungswesen. Die Hochschulen. Die mittleren und niederen Fachschulen.

8. **Die Ausgestaltung des modernen mathematischen Bildungswesens** (S. 136—159). Das Prinzip der formalen Bildung. Die Kreidephysik. Lehrzwang und Lehrfreiheit. BALTZERS Elemente der Mathematik. Abgrenzung der Elementarmathematik. Abgrenzung der Schulmathematik. Der Funktionsbegriff. Graphische Darstellungen. Infinitesimalrechnung auf der Schule. Einfluß der steigenden äußeren Kultur auf den Unterricht. Langsame Entwicklung. Die Braunschweiger Beschlüsse. Fortschreiten der Unterrichtsreform (F. KLEIN). Wiederhervorkommen der „angewandten Mathematik". Die französische Unterrichtsreform. Die Meraner Lehrpläne. Unterrichtsausschüsse. Der moderne Standpunkt. Der mathematische Unterricht an den preußischen Mädchenschulen. Die neuen württembergischen Lehrpläne. Gegensatz der alten und der neuen Auffassung. Rechnung und Zeichnung. Verbindung des formalen und realen Momentes. Bedeutung der Mathematik für die allgemeinen Schulen. Anwendungsgebiete der Mathematik. Physik. Geodäsie und Astronomie. Beziehung zum bürgerlichen Leben. Fühlung mit der Technik. Historische Gesichtspunkte. Volks- und Bürgerschulen. Die Lehrerseminare. Die Fachschulen. Antimathematische Strömung in Deutschland. Verhalten der verschiedenen Fachschulen. Widerstände gegen die Mathematik an den allgemeinen Schulen. Die Navigationsschulen. Die Mathematik in der Ingenieurausbildung. Physiker. Zweckbestimmung des mathematischen Unterrichts.

Literatur (S. 160—161).

Nach dem oben angeführten Titel sollte die Arbeit des Herrn TIMERDING die Verbreitung mathematischen Wissens und mathematischer Auffassung schildern, und der Titel selbst enthält keine Beschränkung auf besondere Völker noch auf besondere Zeitabschnitte. Anderseits sieht man schon aus dem Inhaltsverzeichnisse, daß weder die Babylonier noch die Chinesen noch die Inder behandelt worden sind und, was viel wichtiger ist, daß die Darstellung in betreff des 19. Jahrhunderts sich fast ausschließlich auf Deutschland, nebenbei ein wenig auf Frankreich bezieht. Ob eine direkte Motivierung dieses Verfahrens von Herrn TIMERDING gegeben worden ist, weiß ich nicht — ich habe seine Arbeit nicht überall Zeile für Zeile durchgelesen — aber ich habe selbst eine recht wahrscheinliche Erklärung ausfindig gemacht. Aus einer Bemerkung, die er in der Einleitung bringt, geht nämlich hervor, daß die Schilderung der Verbreitung mathematischen Wissens und mathematischer Auffassung für den Verfasser eigentlich nur ein Mittel ist, um einen anderen Zweck zu erzielen, und über diesen Zweck gibt der folgende Passus der Seite 55 Auskunft:

> Es ist ja klar, daß, wenn die Mathematik eine erzieherische und bildende Bedeutung wirklich besitzt, diese Bedeutung sich im Laufe der Zeiten offenbart haben muß. Die Vergangenheit liefert so nicht bloß den Schlüssel zum Verständnis der gegenwärtigen Zustände, sondern sie klärt auch den Blick für die Erkenntnis der wahren Aufgaben des mathematischen Unterrichtswesens und seiner Stellung in der Gesamtheit der Bildung.

Allein wenn man die Vergangenheit von diesem Gesichtspunkte aus betrachtet, ist es ja nicht nötig, auf die ganze Vergangenheit Bezug zu nehmen, sondern es genügt, die besonders typischen Teile derselben zu untersuchen. Ob Herr TIMERDING die objektiv richtige Auswahl getroffen hat, lasse ich hier beiseite; dagegen wage ich zu behaupten, daß seine Auswahl teilweise unbefriedigend geworden ist, weil seine mathematisch-historischen Kenntnisse auf weiten Gebieten sehr mangelhaft sind. Es ist nämlich selbstverständlich, daß die Vergangenheit keinen wahren Schlüssel zum Verständnis der gegenwärtigen Zustände liefern kann, wenn man eine allzu unvollständige oder sogar eine fehlerhafte Kenntnis dieser Vergangenheit hat.

Meine Ansicht in betreff des Gehaltes der mathematisch-historischen Kenntnisse des Herrn TIMERDING stütze ich auf eine recht große Zahl der in seiner Arbeit vorkommenden Angaben hinsichtlich der älteren Mathematik, besonders hinsichtlich der Mathematik des Mittelalters und der Renaissance. Hier unten erwähne ich einige dieser Angaben und füge meine Bemerkungen hinzu.

S. 77. Die Angabe, daß bei VITRUVIUS der Wert $3\frac{1}{8}$ für π vorkommt, ist jetzt als veraltet zu betrachten (vgl. z. B. Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, S. 299); in Wirklichkeit muß man aus der betreffenden Stelle bei VITRUVIUS folgern, daß er $\pi = 3$ setzt.

S. 80. Der Ausspruch: „Erst gegen Ende des ersten Jahrtausends nach Christus kommt das Rechenbrett, der Abakus, auf" ist zu kategorisch. Die ältesten uns bekannten Handschriften, die Notizen über den Abakus enthalten, stammen nachweislich oder wahrscheinlich aus der zweiten Hälfte des 10. Jahrhunderts, aber schon etwa 970 war der Gebrauch des Abakus recht bekannt (vgl. z. B. N. BUBNOV, *GERBERTI Opera mathematica,* Berlin 1899, S. 197—204), und das Rechenbrett wird in einem Traktate erwähnt, der möglicherweise schon aus dem 9. Jahrhundert stammt (vgl. z. B. A. NAGL, *GERBERT und die Rechenkunst des 10. Jahrhunderts;* Sitzungsber. der Akad. d. Wiss. in Wien (Phil. Cl.) **116**, 1888, S. 919).

S. 82. In betreff des Verfassers der *Geometria BOETII* wird bemerkt: „Sein Verfahren besteht darin, daß er die EUKLIDischen Lehrsätze zusammenstellt, ohne die Beweise hinzuzufügen, die offenbar (!) weder er verstanden hat noch seine Leser verstanden haben würden", aber die Bemerkung ist ungenau. Allerdings wurden im Traktate die Lehrsätze ohne Beweise zusammengestellt, aber am Ende (S. 389—392 der FRIEDLEINschen Ausgabe) werden als Proben („ut animus lectoris non obscuritate deterreatur, sed a nobis potius alicuius exempli luce infusa delectetur") die Beweise der drei ersten Sätze des ersten Buches der Elemente wiedergegeben. Als Beispiel drucke ich hier den Beweis des ersten Satzes ab:

> Quoniam igitur A punctum centrum est $BCED$ circuli, aequa est AB ei, quae est AC. Rursus quoniam B punctum est centrum $ACFD$ circuli, aequa est AB ei, quae est BC. Sed et AB ei, quae est CA aequa esse monstrata est. Et AC igitur ei, quae est BC, erit aequalis.

Tres igitur, quae sunt *CA, AB, BC,* aequae sibi invicem sunt. Aequilaterum igitur est *CAB* triangulum et constitutum est supra datam rectam lineam terminatam eam, quae est *AB*: quod oportebat facere.

Daß der Verfasser des Traktates die EUKLIDischen Beweise offenbar (!) nicht verstanden hat, ist also eine durchaus unbegründete Behauptung, und da ausdrücklich angegeben wird, die drei Beweise seien hinzugefügt, um dem Leser dadurch ein Vergnügen zu bereiten, ist es recht kühn, wenn ein Verfasser des 20. Jahrhunderts behauptet, derselbe Leser würde die Beweise offenbar (!) nicht verstanden haben. Nebenbei bemerke ich, daß es noch in unseren Zeiten nicht ganz ungewöhnlich ist, Sätze ohne Beweise mitzuteilen, obgleich es offenbar ist, daß sowohl der Verfasser als die Leser die Beweise verstehen könnten (vgl. z. B. die große mathematische Enzyklopädie!).

S. 83. Die Angabe, daß ATELHARD von Bath ein Mönch war, ist unzuverlässig und beruht wahrscheinlich auf einer Verwechslung (vgl. z. B. Biblioth. Mathem. **11**$_3$, 1910/11, S. 332). — Auch die Mutmaßung, daß die Algebra ALKHWARISMIS von ATELHARD übersetzt worden sei, muß auf einer Verwechslung beruhen. Man kennt augenblicklich drei lateinische Übersetzungen oder Bearbeitungen der Algebra, die erste von ROBERTUS CESTRENSIS 1144 angefertigt (vgl. Biblioth. Mathem. **11**$_3$, 1910/11, S. 125—131), die zweite dem GHERARDO CREMONESE zugeschrieben (vgl. BONCOMPAGNI, *Della vita e delle opere di GHERARDO CREMONESE*, Roma 1851, S. 28—51) und die dritte anonym (vgl. LIBRI, *Histoire des sciences mathématiques en Italie* **1**, Paris 1838, S. 253—297; allerdings wird auch diese Übersetzung in einer Handschrift dem GHERARDO CREMONESE zugewiesen). Anderseits hat man versucht, wahrscheinlich zu machen, daß die lateinische Übersetzung der ALKHWARISMIschen Arithmetik von ATELHARD herrührt (vgl. Biblioth. Mathem. **1**$_3$, 1900, S. 520). — Da Herr TIMERDING Z. 28—29 erwähnt, daß die ATELHARDsche EUKLIDübersetzung aus dem Arabischen stammt, wäre es angebracht, besonders zu bemerken, daß die Z. 36—37 angedeutete EUKLIDübersetzung direkt aus dem Griechischen angefertigt wurde (vgl. A. A. BJÖRNBO, Archiv für d. Gesch. d. Naturw. und d. Technik **1**, 1909, S. 389).

S. 84. Über die Bedeutung des LEONARDO PISANO für die Mathematik äußert sich Herr TIMERDING auf folgende Weise: „LIONARDO war ein so großer Geist, daß er die ganze Tradition in sich aufzunehmen und selbständig zu verarbeiten vermochte. Was in seinen Schriften enthalten ist, teils aus fremden, meist arabischen Quellen, teils an eigenen Forschungen, geht so weit, daß die ganze mathematische Entwicklung der nächsten vier Jahrhunderte darin vorgebildet liegt.“ Indessen wage ich es, zu behaupten, daß dieses Urteil unzutreffend ist, und zwar so, daß Herr TIMERDING die Bedeutung LEONARDOS wesentlich übertrieben hat. Persönlich bin ich der Ansicht, daß man im früheren christlichen Mittelalter kaum von einer mathematischen Tradition sprechen kann, aber wenn man wirklich dieses Wort benutzen will, muß man darunter auch den wesentlichen Inhalt der EUKLIDischen Elemente und der Arithmetik des BOETIUS einbegreifen, und bekanntlich beschäftigt sich LEONARDO sehr wenig mit der theoretischen Geometrie, fast noch weniger mit der theoretischen Arithmetik. Geradezu sinnlos ist meines Erachtens die Behauptung, daß die ganze mathematische Entwicklung der nächsten vier Jahrhunderte [also bis zum Jahre 1600!!] in den Schriften LEONARDOS vorgebildet liegt. Man denke nur beispielsweise an die Theorie der Kegelschnitte, die von vielen Verfassern des 16. Jahrhunderts, aber von LEONARDO gar nicht behandelt worden ist! — Daß die quadratischen Gleichungen bei LEONARDO „voll ausgebildet sind", ist eine ungenaue Bemerkung. Daß LEONARDO nicht die imaginären Wurzeln in Betracht zieht, ist ja selbstverständlich, aber auch nicht auf die negativen Wurzeln nimmt er Bezug, und nicht einmal der Satz, daß die Gleichung $x^2 + b = 2ax$ für $b < a^2$ immer zwei Wurzeln hat, findet sich bei ihm ausdrücklich ausgesprochen (vgl. Biblioth. Mathem. **8**$_3$, 1907/8, S. 190; **9**$_3$, 1908/9, S. 245).

S. 85. Z. 9—14 bemerkt Herr TIMERDING „Auch das angenäherte Ausziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln, das sich bei LIONARDO findet, rührt von den alten Ägyptern her. Diese Tatsache . . . ist äußerst merkwürdig". Es ist schade, daß kein Beleg für diese Behauptung gebracht wird. Oder betrachtet Herr TIMERDING vielleicht HERON als einen alten Ägypter? Allein auch nicht bei HERON kommt die Kubikwurzelausziehung vor, die von LEONARDO gelehrt wird. — Die Angabe: „Er [JORDANUS] schrieb auf Grund einer arabischen Quelle ein Buch Über die Dreiecke, das zum erstenmal dem Abendland eine bedeutsame Fortführung der Geometrie bot" sollte etwas vorsichtiger abgefaßt worden sein. Daß ein Teil des Inhalts des fraglichen Traktates auf arabische Quellen zurückgeht, ist wohl faßt sicher, aber um zu behaupten, daß JORDANUS eine arabische Quelle benutzt hat, muß man die Quelle ausfindig gemacht haben, und, so viel ich weiß, ist diese Frage bisher kaum ernstlich in Angriff genommen. Und was meint Herr TIMERDING mit dem Ausspruch, daß JORDANUS zum erstenmal dem Abendland eine bedeutsame Fortführung der Geometrie bot? Will er dadurch feststellen, daß JORDANUS seinen Traktat vor der „Practica geometriae" LEONARDOS geschrieben hat oder daß die „Practica geometriae" keine bedeutende Fortführung der Geometrie bietet? Nebenbei bemerke ich, daß der Traktat des JORDANUS allerdings in der CURTZEschen Ausgabe „Geometria vel de triangulis libri IV" heißt, daß aber der ursprüngliche Titel unbekannt ist (vgl. Biblioth. Mathem. **13**$_3$, 1912/13, S. 83—84) und daß der Traktat jedenfalls nicht nur die Lehre von den Dreiecken behandelt.

S. 85. Die Behauptung, daß JORDANUS NEMORARIUS als ein Neubegründer der mathematischen Wissenschaft anzusehen ist, dürfte ein wirklicher Kenner der mittelalterlichen Mathematik kaum gutheißen können. Herr TIMERDING fügt unmittelbar hinzu: „Von ihm stammt die Bezeichnung allgemeiner Zahlen durch Buchstaben, welche die Grundlage der modernen mathematischen Formelsprache gebildet hat", aber diese Angabe ist zum mindesten höchst irreleitend (vgl. meine ausführliche Behandlung dieses Gegenstandes in der Biblioth. Mathem. **13**$_3$, 1912/13, S. 181—183). Was Herr TIMERDING weiter über JORDANUS bemerkt, genügt auch nicht, die von mir beanstandete Behauptung zu beweisen. Besonders mache ich darauf aufmerksam, daß es zurzeit fast unmöglich ist, festzustellen, welches die mechanischen Grundsätze sind, die von JORDANUS selbst herrühren (vgl. über diese schwierige Frage P. DUHEM, *Les origines de la statique* **1**, Paris 1905, S. 112—134).

S. 85. Der Passus gegen das Ende der Seite: „Zeichen des erwachsenden mathematischen Interesses sind auch die Übersetzungen griechischer Texte. Neben der bereits genannten EUKLIDübersetzung des CAMPANUS sind die Übersetzungen anzuführen, die . . . WILHELM VON MÖRBECKE . . . anfertigte" ist irreführend, weil der Leser veranlaßt wird, anzunehmen, daß die EUKLIDübersetzung, die allgemein dem CAMPANUS beigelegt worden ist, aus dem griechischen Originale stammt. Auch nicht S. 83 wird gesagt, daß die fragliche Übersetzung aus dem Arabischen angefertigt wurde.

S. 85—86. Die Bemerkung „Durch diese Übersetzung [WILHELMS VON MÖRBEKE] ist uns die Schrift des ARCHIMEDES über Hydrostatik erhalten worden“ ist zum mindesten irreleitend. Im Jahre 1906 entdeckte nämlich HEIBERG in Konstantinopel eine fast vollständige Handschrift des Originals (*Περὶ ὀχουμένων*) der fraglichen Schrift (vgl. Biblioth. Mathem. $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 321), und der Originaltext liegt seit 1913 in der zweiten Auflage des zweiten Bandes der HEIBERGschen ARCHIMEDES-Ausgabe (S. 318—413) vor.

S. 86. In betreff der Angabe: „In der Lehre von den Latitudines formarum steckt der erste Anfang der späteren Differentialrechnung“ verweise ich ganz einfach auf die Untersuchungen von J. TIMTSCHENKO (Biblioth. Mathem. $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 515—516) und H. WIELEITNER (a. a. O. $\mathbf{13}_3$, 1912/13, S. 141—142).

S. 86—87. Der Ausspruch: „Das Rechnen galt als eine kaufmännische Spezialwissenschaft. Aber die große Bedeutung, welche der Handel überhaupt erlangte, brachte die Arithmetik auch an die Universitäten“ ist unzutreffend. Um ausfindig zu machen, daß das Rechnen im Mittelalter nicht eine kaufmännische Spezialwissenschaft war, braucht man nur die ältesten Algorismusschriften einzusehen. Beispielsweise wäre es kaum möglich, ein für den Kaufmann weniger passendes Rechenbuch zu schreiben als die „Demonstratio JORDANI de algorismo“ (vgl. Biblioth. Mathem. $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 24—37; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 135—153; $\mathbf{14}_3$, 1913/14, S. 41—54). Nicht ganz ohne Bedeutung ist es übrigens, darauf hinzuweisen, daß die einzige bisher bekannte lateinische Algorismusschrift, die nachweislich spätestens aus der Mitte des 12. Jahrhunderts stammt, als Einleitung zu einem astronomischen Traktate auftritt („Incipit liber ysagogarum alchorismi in artem astronomicam“; vgl. Biblioth. Mathem. $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 416). Daß das kaufmännische Rechnen auch im Mittelalter als eine kaufmännische Spezialwissenschaft galt, braucht ja nicht besonders hervorgehoben zu werden.

S. 87. Den Ausspruch: „LUCA PACIUOLO ist im eigentlichen Sinne der Mathematiker der Renaissance“ kann ich nicht gutheißen, am wenigsten, wenn man wie Herr TIMERDING die Renaissance bis zum Ende des 16. Jahrhunderts dauern läßt, denn in diesem Falle gibt es meines Erachtens keinen eigentlichen Mathematiker der Renaissance. Aber auch wenn man die Renaissance auf das 15. Jahrhundert und den Anfang des 16. Jahrhunderts beschränkt, verstehe ich nicht, warum nicht REGIOMONTANUS, allerdings in einem etwas anderen Sinne, ein noch eigentlicherer Mathematiker der Renaissance geheißen werden kann.

S 90. Die Behauptung, daß bei FERMAT die Formelsprache voll entwickelt auftritt, ist recht überraschend, da FERMAT bekanntlich in betreff der Formelsprache sich sehr nahe an VIÈTE anschließt. Ich bringe hier unten einige kleine Beispiele der Formelsprache FERMATS (vgl. *Oeuvres*, publiées per P. TANNERY et CH. HENRY **1**, Paris 1891, S. 94, 121, 138, 154):

$$R \text{ in } A + S \text{ in } E - A \text{ in } E \text{ aequabitur } Dpl.$$

$$\text{A } \textit{qu. cub. cub.} + \text{B } \textit{pl. pl. sol.} \text{ in A aequari Z } \textit{pl. sol. sol.}$$

$$\frac{Bq. \text{ in } A \text{ in } E + A \text{ in } Ec. - B \text{ in } A \text{ in } Eq. \text{ bis}}{Bq. \text{ in } E \text{ bis} - B \text{ in } Eq.}$$

$$A + lat\ (B \text{ in } A - A \text{ quad}) \text{ aequabitur } O.$$

S. 90. Über die Geschichte der algebraischen Formelsprache gibt Herr Timerding folgende Auskunft:

> Wie diese Formelsprache entstanden ist, davon können folgende kurze Daten einen Begriff geben: 1489 verwendete Widmann die Zeichen + und — für Addition und Subtraktion. . . . Die Angabe der Multiplikation durch einfaches Nebeneinanderstellen der zu multiplizierenden Größen . . . findet sich schon 1202 bei Lionardo Pisano. . . Der Haken $\surd$ für die Quadratwurzel findet sich zuerst 1524 bei Adam Riese. In der Rudolffschen Coss vom Jahre 1525 begegnet uns zuerst das Zeichen für die Unbekannte in einer Gleichung, das später einfach als ein x geschrieben worden ist. Der Franzose Vieta hat endlich 1591 die konsequente Verwendung von Buchstaben zur Bezeichnung von Zahlengrößen in Verbindung mit Operationszeichen, sowie den Zusammenschluß durch verschieden gestaltete Klammern und damit die moderne Formelschreibweise eingeführt.

In betreff dieser Angaben habe ich folgendes zu bemerken.

1. Allerdings benutzt Widmann 1489 das Zeichen + für Addition, aber das Zeichen ist noch nicht ein gewöhnliches Additionszeichen geworden, sondern bedeutet ganz einfach „und" und wird in dieser Bedeutung angewandt, auch wenn es sich nicht um Addition handelt. Es ist auch richtig, daß bei Widmann das Zeichen — zuweilen als Subtraktionszeichen vorkommt, aber es wird nicht regelmäßig benutzt, und der Leser kann nicht einmal ersehen, wann und wie es zur Anwendung kommen soll (vgl. hierüber Biblioth. Mathem. $\mathbf{9}_3$, 1908/09, S. 155—157). Die Angabe des Herrn Timerding in betreff der Zeichen + und — ist darum unvollständig und sollte ergänzt werden durch die Bemerkung, daß die Zeichen + und — für Addition und Subtraktion erst 1521 von Grammateus in einer gedruckten Schrift regelmäßig benutzt werden.
2. Die Angabe der Multiplikation durch einfaches Nebeneinanderstellen der zu multiplizierenden Größen kommt nicht bei Leonardo Pisano vor. Vielmehr bezeichnet dieser das Produkt ab durch: „factus ex $.a.b.$" d. h. wörtlich: „das Produkt von a und b". Allerdings gibt es bei Leonardo eine Stelle, woraus man bei flüchtigem Durchlesen möglicherweise folgern könnte, daß das Produkt aec durch „coniunctio $.a.e.c.$" angegeben wird, aber an dieser Stelle muß „coniunctio" durch Kombination oder etwas Ähnliches übersetzt werden (vgl. hierüber Biblioth. Mathem. $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 335—336).
3. Die Schrift Rieses vom Jahre 1524 ist nur handschriftlich aufbewahrt worden, und der Wurzelhaken kommt ebenfalls in der gedruckten Algebra Rudolffs vom Jahre 1525 vor. Man hat darum keinen besonderen Anlaß, die Einführung des Wurzelhakens mit dem Namen Rieses zu verbinden.
4. Die Angabe in betreff des Zeichens x ist durchaus irreleitend. Das Zeichen für die Unbekannte, das bei Rudolff vorkommt, hat gar nichts mit dem Buchstaben x zu tun, sondern ist das cossische Zeichen, das schon im 15. Jahrhundert angewandt wurde und noch bei Clavius (1608) vorkommt. Unser x ist erst von Descartes (1637) eingeführt worden, und zwar aus dem Grunde, weil dieser die unbekannten Größen durch

die letzten Buchstaben des Alphabets darstellte (vgl. hierüber Biblioth. Mathem. 6_3, 1905, S. 316—317, 405—406).

5. Herr TIMERDING hat die Bedeutung VIETES für die Formelsprache wesentlich übertrieben. Die moderne Formelschreibweise rührt recht wenig von VIÈTE her, wie die oben (S. 277) angeführten Proben aus FERMATS Schriften bezeugen.

Was Herr TIMERDING über die Geschichte der algebraischen Formelsprache mitteilt, ist mithin als sehr unbefriedigend zu bezeichnen.

S. 91. LEVI BEN GERSON war kein Araber, sondern ein französischer Jude, der sein ganzes Leben in Frankreich zubrachte und sogar höchst mangelhafte Kenntnisse der arabischen Sprache besaß (vgl. J. CARLEBACH, *Lewi ben Gerson*, Berlin 1910, S. 15, 17, 19, 98). — Die Ordnungsfolge: LEVI BEN GERSON, ALBATTANI, DSCHABIR ist ein wenig auffallend, denn der erste lebte 1288—1344, der zweite starb 929 und der dritte starb wahrscheinlich etwa 1150; am meisten hat REGIOMONTANUS DSCHABIR benutzt.

S. 93. Der Passus: „Wie tief das mathematische Studium auf den Universitäten stand, kann man daraus entnehmen, daß die Universitätslehrer vielfach die Verfasser von Rechenbüchern sind, die zuerst als Kompendien für ihre Vorlesung gedacht waren" sollte vielleicht auf andere Weise redigiert werden. Von unserem Standpunkte aus muß ganz gewiß das Vorhandensein von Universitätsvorlesungen über die gemeine Rechenkunst einen Tiefstand des mathematischen Universitätsstudiums bezeichnen, aber die Kenntnis dieses Tiefstandes braucht man gar nicht aus dem von Herrn TIMERDING angegebenen Umstande zu entnehmen. Bekanntlich mußten die Universitäten damals die Studenten annehmen, auch wenn sie gar keine mathematischen Kenntnisse besaßen, und dies war leider in betreff der meisten Studenten der Fall. Übrigens enthält das von Herrn TIMERDING als Beispiel zitierte Rechenbuch HEINRICH SCHREIBERS zugleich einen kurzen Lehrgang der Algebra und spielt als solches wirklich eine Rolle in der Geschichte der Mathematik (vgl. z. B C. I. GERHARDT, *Geschichte der Mathematik in Deutschland,* München 1877, S. 51—54).

S. 93. Die Angabe: „Das älteste uns erhaltene Rechenbuch in deutscher Sprache ist das von ULRICH WAGNER (1482)" ist nicht unrichtig, aber die meisten Leser dürften nicht erraten können, was hier mit „erhalten" gemeint wird. In Wirklichkeit sind von diesem Rechenbuch nur neun kleine Pergamentstreifen in der Größe einer Visitenkarte vorhanden, so daß man so gut wie gar nichts über den Inhalt des „erhaltenen" Buches ausfindig machen kann (vgl. F. UNGER, *Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwicklung,* Leipzig 1888, S. 36). Dagegen ist ein Bamberger Rechenbuch vom Jahre 1483 wirklich erhalten worden, so daß die Worte des Herrn TIMERDING: „Ihm folgte 1489 das von WIDMANN" nicht ganz zutreffend sind.

S. 93. Die Angabe des Herrn TIMERDING: „Die Stoffanordnung im zweiten Teile [des Rechenbuches von WIDMANN] ist im wesentlichen genau dieselbe, wie sie sich heute noch in unseren Schulbüchern findet" ist kaum zutreffend. Als Beleg für meine Behauptung bringe ich hier unten die Überschriften der verschiedenen Regeln WIDMANNS:

Regula Detri. Regula inventionis. Regula fusti. Regula pulchra. De tri conversa. Regula transversa. Regula ligar. Regula posicionis. Regula pulchra. Regula equalitatis. Regula legis. Regula augmenti.

Regula augmenti et decrementi. Regula plurima. Regula pulchra. Regula sententiarum. Regula suppositionis. Regula residui. Regula excessus. Regula colleccionis. Regula pulchra. Regula pulchra (!). Regula quadrata. Regula cubica. Regula reciprocacionis. Regula bona. Regula lucri. Regula pagamenti. Regula alligacionis. Regula falsi.

S. 97. Z. 11—12 v. u. soll „die ARCHIMEDESübersetzung *De insidentibus aquae*" statt die „EUKLIDübersetzung" stehen. Allerdings hat TARTAGLIA eine EUKLIDübersetzung herausgegeben, aber diese ist in italienischer Sprache und hat nichts mit WILHELM VON MÖRBEKE zu tun.

S. 99. Die Angabe: „GALILEI und PASCAL entdeckten ferner ein neues merkwürdiges Anwendungsgebiet der Mathematik, die Wahrscheinlichkeitsrechnung" hat mich sehr überrascht. Allerdings wußte ich, daß 1718 aus dem Nachlasse GALILEIS ein sehr kleiner Aufsatz über die Anzahl der mit drei sechsflächigen Würfeln möglichen Würfe herausgegeben wurde (vgl. *Le opere di GALILEO GALILEI. Edizione nazionale* 8, Firenze 1898, S. 591—594), und daß GALILEI darin das Problem behandelte: Auf wie viele Weisen kann jede der Zahlen 3, 4, . . ., 18 als Summe von dreien der Zahlen 1, 2, . . ., 6 (mit oder ohne Wiederholung) dargestellt werden. Ich wußte auch, daß man aus diesem Grunde zuweilen GALILEI als einen der Vorgänger der Wahrscheinlichkeitsrechnung betrachtet hat, daß aber GALILEI einer der Entdecker dieser Rechnung war, wußte ich nicht. Ich suchte darum im Registerbande der *Edizione nazionale* das Wort „Probabilità" auf, fand es aber leider nicht, und ebenso erfolglos waren meine Bemühungen, auf anderen Wegen etwas über die angebliche Entdeckung GALILEIS zu erfahren. Ich muß darum bis auf weiteres annehmen, daß die Angabe des Herrn TIMERDING unzuverlässig ist. Liegt vielleicht hier ein einfacher Schreibfehler („GALILEI" statt „HUYGENS") vor?

S. 107. Die Bemerkung: „Um seine Zuhörer festzuhalten, mußte der Professor den Gegenstand so leicht und fesselnd wie möglich machen" ist natürlich an sich richtig, aber vielleicht fast ohne Interesse, wenn es sich darum handelt, die Stellung der Mathematik an den Universitäten bis gegen Ende des 18. Jahrhunderts zu kennzeichnen. Anderseits ist meiner Ansicht nach der Beleg, den Herr TIMERDING für seine Bemerkung bietet, nämlich der Hinweis auf die Vorlesungen BARROWS, nicht gut gewählt, und ich glaube diese Vorlesungen, sofern sie gedruckt vorliegen, wenigstens ebenso gründlich wie Herr TIMERDING studiert zu haben. Daß Herr TIMERDING von den Vorlesungen BARROWS an der Oxforder Universität spricht, beruht wohl lediglich auf einem Schreibfehler, da Herr TIMERDING selbst angibt, daß BARROW der Lehrer NEWTONS war.

Was ich im vorhergehenden mitgeteilt habe, genügt meiner Ansicht nach, um zu beweisen, daß Herr TIMERDING nicht die mathematisch-historischen Kenntnisse besitzt, die nötig sind, um die Verbreitung des mathematischen Wissens nach dem von ihm entworfenen Plane zu schildern. Das Konstatieren dieser Tatsache hat mir übrigens gar keine Überraschung bereitet. Im Gegenteil hätte ich im voraus wetten können, daß in seiner Arbeit zahlreiche mathematisch-historische Ungenauigkeiten zu finden wären. Wenn ein Mathematiker, der nicht zugleich Historiker im eigentlichsten Sinne dieses Wortes ist, sich vornimmt, die Geschichte der mathematischen Entdeckungen zu schreiben, ist dies für ihn eine recht schwierige Aufgabe, aber doppelt schwieriger ist es, über die Verbreitung mathematischen Wissens zu berichten, ohne die eingehendste Kenntnis der älteren mathematischen Literatur zu besitzen. Daß Herr TIMERDING eine solche Kenntnis nicht besitzen kann, ist selbstverständlich, aber auch nicht die mathematisch-historische Literatur beherrscht er in genügendem Maße. Sonst würde er ganz gewiß nicht S. 160 ohne weiteres bemerkt haben, daß die geschichtlichen Darstellungen des Unterrichts in manchen Punkten durch die „umfassenden“ *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* von M. CANTOR „ergänzt“ werden. Ein Kenner der mathematisch-historischen Literatur würde nämlich ausdrücklich darauf hinweisen, daß die Ergänzungen von sehr zweifelhaftem Werte sind, weil man, sofern man nicht eine besondere Prüfung vornimmt, immer im Verdacht haben muß, daß die CANTORschen Angaben unzuverlässig sind. Die Bemerkungen zu den *Vorlesungen,* die ich schon in der Bibliotheca Mathematica veröffentlicht habe, nehmen, auch wenn man von den Verweisen auf frühere Bemerkungen absieht, einen Raum von etwa 640 Druckseiten ein, und die Zahl der daselbst vorkommenden Berichtigungen CANTORscher Angaben dürfte etwa 2000 betragen. Allein dieser Umstand scheint der Aufmerksamkeit des Herrn TIMERDING vollständig entgangen zu sein, denn S. 160—161 zitiert er nicht einmal die Bibliotheca Mathematica. Anderseits nennt er daselbst als „anregend“ die SIMONsche *Geschichte der Mathematik im Altertum* (1909) und die HANKELsche Arbeit *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter* (1874), von denen die erste höchst unzuverlässig, die zweite durch die neueren mathematisch-historischen Forschungen zum großen Teil veraltet ist.

Man werfe nicht ein, daß eine eingehende Kenntnis der älteren mathematischen Literatur allerdings nötig sei, wenn man sehr ausführlich über die Verbreitung mathematischen Wissens Auskunft geben will, während die fragliche Kenntnis weniger wichtig sei, wenn man diese Verbreitung nur in ihren großen Zügen darzustellen hat. Erstens bezieht sich die Darstellung des Herrn TIMERDING nicht ausschließlich auf die großen Züge; um nur von unzuverlässigen Notizen zu sprechen, gibt er an, daß VITRUVIUS für π den Wert $3\frac{1}{8}$ benutzte sowie daß ATELHARD ein Mönch und LEVI BEN GERSON ein Araber war. Zweitens ist es in vielen Fällen unmöglich, ohne eingehende Kenntnisse der Einzelheiten ein allgemeines Urteil richtig zu formulieren. Ich könnte aus der Arbeit des Herrn TIMERDING eine beträchtliche Zahl allgemeiner Urteile zitieren, die eben auf Grund seiner mangelhaften mathematisch-historischen Kenntnisse oberflächlich oder schief geworden sind; ich begnüge mich indessen, hier als Probe auf sein oben S. 275 erwähntes Urteil über LEONARDO PISANO hinzuweisen. Hätte Herr TIMERDING die Schriften LEONARDOS wirklich durchgearbeitet, so würde er sicherlich nicht das fragliche Urteil gefällt haben.

Ich habe mich bisher mit der Ausstellung, die ein Vertreter der exakten mathematisch-historischen Forschung gegen die Arbeit des Herrn TIMERDING machen muß, beschäftigt. Für einen Historiker der Mathematik liegt es auch nahe, zu untersuchen, inwieweit die Notizen, die Herr TIMERDING bringt, wirklich auf die Verbreitung des mathematischen Wissens und nicht auf die Geschichte der mathematischen Entdeckungen sich beziehen, d. h. zu untersuchen, ob Herr TIMERDING nicht auf Fragen eingegangen ist, die eigentlich von den Herren ZEUTHEN, STÄCKEL und N. N. behandelt werden sollten (vgl. die oben S. 280 zitierte Angabe, die sich auf die Entdeckung der Wahrscheinlichkeitsrechnung bezieht). Indessen würde man kaum behaupten können, daß Herr

TIMERDING eben durch sein Eingreifen auf das Gebiet der drei genannten Herren der exakten mathematisch-historischen Forschung geschadet hat, und übrigens würde es sich um eine interne Redaktionsfrage handeln, so daß ich von der fraglichen Untersuchung Abstand nehme.

Ich füge darum nur hinzu, daß die Arbeit des Herrn TIMERDING natürlich auch unstreitige Verdienste hat. Der Plan ist ansprechend, und die Ausführung zeugt davon, daß Herr TIMERDING sich einer recht großen Mühe unterzogen hat, um die schwierige Aufgabe zu lösen; übrigens bin ich inkompetent, die Abschnitte über den mathematischen Unterricht während des 19. Jahrhunderts selbständig zu beurteilen. Aber eben die Verdienste seiner Arbeit bewirken, daß die unbefriedigende Behandlung der Verbreitung mathematischen Wissens vor dem Anfange des 18. Jahrhunderts besonders schädlich wird. Es wäre darum sehr erwünscht, daß in einer neuen Auflage diese Behandlung durch eine andere ersetzt werden würde, und zwar so, daß Herr TIMERDING nur ausgewählte, besonders kennzeichnende Bruchstücke dieser Verbreitung mitteilte sowie daß jede dabei gebotene mathematisch-historische Angabe auf ihre Richtigkeit geprüft würde.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik, herausgegeben von K. von Buchka, H. Stadler, K. Sudhoff. Leipzig. 8°. [1
5 (1913/14): 3—4.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8°. [2
14_3 (1913/14): 2.

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8°. [3
16 (1914): 2.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von E. Lampe. Berlin. 8°. [4
42 (1911): 3.

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la société mathématique d'Amsterdam par H. de Vries, J. Cardinaal, J. C. Kluyver, W. Kapteyn, F. Schuh. Amsterdam. 8°. [5
22: 1 (avril—octobre 1913).

Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. Unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen herausgegeben von Felix Auerbach und R. Rothe. 3 (1913). [Rezension:] Archiv der Mathem. 22_3, 1914, 352. (E. Regener.) [6

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 1^3 (1907). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 14_3, 1913/14, 169. (G. Eneström.) — 2^2 (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 14_3, 1913/14, 169—176. (G. Eneström.) — 3^2 (1901). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 14_3, 1913/14, 176—179. (G. Eneström.) [7

***Bioche, Ch.,** Histoire des mathématiques. Paris, Belin 1914. [8
16°, VI + 93 S. — [1.75 fr.]

Witting, A. und Gebhardt, M., Beispiele zur Geschichte der Mathematik. II (1913). [Rezension:] Biblioth. Mathem. 14_3, 1913/14, 181—185. (G. Eneström.) [9

Boutroux, P., Les principes de l'analyse mathématique, exposé historique et critique. I (1914). [Rezension:] *Madrid*, Soc. matem. española, Revista 3, 1914, 253—255. (L. Octavio de Toledo.) — Nouv. ann. de mathém. 14_4, 1914, 130—132. (R. B.) [10

Mitzscherling, A., Das Problem der Kreisteilung Ein Beitrag zur Geschichte seiner Entwicklung. (1913). [Rezension:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 23, 1914, 77. (E. Löffler.) — Bullet. d. sc. mathém. 38_2, 1914, 86—91. (G. Loria.) [11

***Beutel, E.,** Die Quadratur des Kreises. Leipzig, Teubner 1913. [12
8°, IV + 76 S. — [1 Mk.] — [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 25_3, 1914, 631—633. (H. B.)

***Hobson, E. W.,** Squaring the circle. A history of the problem. Cambridge, University press 1913. [13
8°, VII + 57 S. — [3 sh.] — [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 38_2, 1914, 153—154. (E. Ouivet.)

Wieleitner, H., Das Gesetz vom freien Falle in der Scholastik, bei Descartes und Galilei. [14
Zeitschr. für mathem. Unterr. 45, 1914, 209—228.

Duhem, P., Le système du monde. Histoire des doctrines cosmologiques. I (1913). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 25_3, 1914, 649—653. (J. Thirion.) [15

Decourdemanche, J. A., Note sur l'estimation de la longueur du degré terrestre chez les Grecs, les Arabes et dans l'Inde. [16
Journ. asiatique 1_{11}, 1913, 427—444, 669—673.

Bruns, H., Von Ptolemäus bis Newton (1912). [Wieder abgedruckt:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 23, 1914, 12—28. [17

Horovitz, K., Die geschichtliche Entwicklung des physikalischen Relativitätsgedankens. [18
Archiv für d. Gesch. d. Naturw. und d. Technik 5, 1914, 251—265.

Tannery, P., Mémoires scientifiques. II (1913). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 35, 1914, 1278—1279. (F. Boll.) [19

***Bôcher, M.,** Mathématiques et mathématiciens français. Paris 1914. [20
8°.

Mikami, Y., The development of mathematics in China and Japan (1913). [Rezension:] Archiv der Mathem. 22_3, 1914, 352—354. (E. Löffler.) [21

b) Geschichte des Altertums.

Decourdemanche, J. A., Note sur les premiers éléments connus de l'arithmétique et de la métrologie antique. [22
Lyon, Observatoire, Bulletin 1, 1914, 125—134.

Michnik, H., Untersuchung der temporären Stundenlinien antiker Sonnenuhren Leipzig 1914. [23
4°, 12 S. — Beilage zu dem Jahresbericht des Gymnasiums zu Beuthen.

Loria, G., Le scienze esatte nell'antica Grecia. Seconde edizione (1914). [Rezension:] *Madrid*, Soc. matem. española, Revista 3, 1914, 173—174. (J. A. Sánchez Pérez.) — Bullet. d. sc. mathém. 38_2, 1914, 101—106. (J. Pérez.) [24

Heath, Th. L., The method of Archimedes recently discovered (1912). [Rezension:] Nature 90, 1913, 28. — Revue scient. 19, 1913, 638—639. [25

Heath, Th. L., Diophantus of Alexandria. Second edition (1910). [Rezension:] Mathesis 4_4, 1914, 72. [26

***Vitruvius,** De architectura libri decem. Edidit F. Krohn. Leipzig, Teubner 1912. [27
8°, XI + 291 S. — [4.60 Mk.] — Bibliotheca scriptorum graecorum et romanorum Teubneriana. — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 35, 1914, 1506—1508. (A. Krämer.)

***Sass, C.,** De Heronis Alexandrini quae feruntur definitiones geometricis. Greifswald 1913. [28
8°. — Dissertation.

Arendt, F., Eine Interpolation des Eutokios in unserem Apolloniostext. [29
Biblioth. Mathem. 14_3, 1913/14, 97—98.

c) Geschichte des Mittelalters.

Decourdemanche, J. A., Sur la filiation des chiffres européens modernes et des chiffres modernes des Arabes. [30
Paris, Institut ethnographique international, Revue 1912. 11 S.

Bortolotti, E., Ancora sul nome „Algorismo". [31
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 14, 1914, 33—38.

Hee, L. van, Li-Yé, mathématicien chinois du XIII^e siècle. [32
T'oung-pao 14, 1913, 537—568.

Karpinski, L. C., The algebra of Abu Kamil. [33
The americ. mathem. monthly 21, 1914, 37—48.

Wiedemann, E., Ein arabisches Gefäß, das sich stetig mit Wasser füllt und dies dann plötzlich ausgießt. [34
Zeitschr. für mathem. Unterr. 45, 1914, 240—241.

Eneström, G., Der „Algorismus de minutiis" des Meisters Gernardus. [35
Biblioth. Mathem. 14_3, 1913/14, 99—149.

Duhem, P., Les précurseurs parisiens de Galilée. [36
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 25_3, 1914, 612—620. — Abdruck der Vorrede des 3. Teiles der „Etudes sur Léonard de Vinci" (Paris 1913).

Duhem, P., Etudes sur Léonard de Vinci. Les précurseurs parisiens de Galilée. [37
Roma, Accad. d. Lincei, Rendiconti 22_5:2, 1913, 429—431.

Wieleitner, H., Zur Geschichte der unendlichen Reihen im christlichen Mittelalter. [38
Biblioth. Mathem. 14_3, 1913/14, 150—168.

Bensaude, J., L'astronomie nautique au Portugal à l'époque des grandes découvertes (1912). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 35, 1914, 1086—1088. (K. Bopp.) [39

d) Geschichte der neueren Zeit.

Würschmidt, J., Joannes Verneri de meteoroscopiis (1913). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 25_3, 1914, 635—640. (H. B.) — Bullet. d. sc. mathém. 38_2, 1914, 76—77. (P. Duhem.) [40

Grabowski, J., Benedykta Herbesta Arithmetica linealis, Cracoviae 1577. [41
Kraków, Akad. umiej., Rozpravy 53, 1913, 401—415.

***Brahe, T.,** Opera omnia edidit J. L. E. Dreyer. Tomus I. Scripta astronomica. I. Hauniae 1913. [42
4°, LIX + 320 + (2) S. — [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 25_1, 1914, 640—648. (H. Bosmans.)

Waard, C. de, Zur Vorgeschichte des Thermometers. [43
Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 13, 1914, 177—179.

***Heilbronn, J.,** Die mathematischen und naturwissenschaftlichen Anschauungen des Josef Salomo Medigo, dargestellt nach seinem Sefer Elim. Erlangen 1913. [44
8°, 92 S. — Dissertation.

***Panhölzl, V.,** Wie man im 17. Jahrhundert das Problem von der Quadratur des Zirkels zu lösen suchte. Budweis 1913. [45
8°, 15 S. — Programm.

Eneström, G., Hat Newton den ersten Mittelwertsatz für bestimmte Integrale in geometrischer Form ausgedrückt? [46
Biblioth. Mathem. 14_3, 1913/14, 180. — Anfrage.

Doublet, E., Les Bernoulli et le Bernoullianum. [47
Revue philomatique de Bordeaux et du Sudouest 16 (1913), 17 (1914). 44 S.

*Leonhardi Euleri Opera omnia. Sub auspiciis societatis scientiarum naturalium Helveticae edenda curaverunt F. Rudio, A. Krazer, P. Stäckel. I: 12. Leipzig, Teubner 1914. [48
4°, 13 + 542 S. — [28 Mk.] — Institutiones calculi integralis. Ediderunt F. Engel et L. Schlesinger. Volumen secundum. Adiectae sunt Laurentii Mascheronii Adnotationes ad calculum integralem Euleri.

***Varićak, V.,** Matematički rad Boškovićev. Dio I. Ktomu dodano. Ulomak Boškovićeve korrespondencije. G. V. Schiaparelli o Boškoviću. Boškovićeve bilješke o apsolutnom i relativnom kretanju Drugi ulomak Boškovićeve korrespondencije. Zagreb 1910—1912. [49
8°, XIV + 130 + CDXLV (?) S. — [Rezension:] Wiadomości matem. 17, 1914, 346—347.

Doublet, E., Le bicentenaire de l'abbé de la Caille. [50
Bordeaux, Acad. d. sc., Actes 1914. 53 S.

Archibald, R. C., Time as a fourth dimension. [51
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 20_2, 1914, 409—412. — Historische Notiz.

Guareschi, I., Sulla legge della dilatazione dei gas di Volta. Notizie storiche. [52
Archiv für d. Gesch. d. Naturw. und d. Technik 5, 1914, 142—154, 209—225.

Darboux, G., Notice historique sur le général Meusnier. [53
Paris, Acad. d. sc., Mémoires 51, 1910, I—XXXVIII.

***Bützberger, F.,** Über bizentrische Polygone, Steinersche Kreis- und Kugelreihen und die Erfindung der Inversion. Leipzig, Teubner 1913. [54
8°, VIII + 60 S. — [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 20_2, 1914, 412—415. (A. Emch.)

Bessel, F. W., Briefe. [55
Leipzig, Astron. Ges., Vierteljahrsschr. 47, 1912, 7—19, 368—386. — An Encke, Weiße, Rudzki und N. Fuß.

Octavio de Toledo, L., Algunos de los descubrimientos realizados en la teoria y resolución de ecuaciones durante el siglo XIX. Madrid 1914. [56
8°, (3) + 57 S. — Discurso leído ante la real academia de ciencias exactas, fisicas y naturales. — Der obige Titel befindet sich S. 4; S. 43—57 enthalten eine „Contestación" von M. Vegas. — [Rezension:] *Madrid*, Soc. matem. española, Revista 3, 1914, 181—182.

Пономаревъ, П. А., Къ біографіи Лобачевскаго. [57
Kasan, Soc. phys.-mathém., Bulletin 19_2, 1913. 27 S. — Ponomareff, P. A., Zur Biographie Lobatchewskis.

Lecat, M., Bibliographie du calcul des variations (1913). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 38_2, 1914, 113. (Er. L.) [58

Muir, Th., The theory of bigradients from 1859 to 1880. [59
Edinburgh, Royal soc., Proceedings 34, 1913/14, 32—59.

Hée, L. van, Bibliotheca mathematica sinensis Pé-Fou. [60
T'oung-pao 15_2, 1914, 111—164. — Bericht über ein chinesisches mathematisches Handbuch, das etwa 1875 unter der Redaktion von Ting Ts'iutchong veröffentlicht wurde.

***Guldberg, A.,** Verzeichnis über den wissenschaftlichen Nachlaß von Sophus Lie. Zweite Mitteilung. [61
Kristiania, Vidanskabsselskabet, Skrifter 1913. (3) + 40 S.

Liebmann, H. und Engel, F., Die Berührungstransformationen. Geschichte und Invariantentheorie. Zwei Referate der deutschen Mathematiker-Vereinigung erstattet. Leipzig 1914. [62
8°, (6) + 79 S. — [3 Mk.] — Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. Ergänzungsband 5.

Männchen, Ph., Lösungen und Löser des großen Fermatschen Problems [63
Zeitschr. für mathem. Unterr. 45, 1914, 81—93.

Lebon, E., Gabriel Lippmann (1911). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 20_2, 1914, 326—327. (E. B. Wilson.) [64

Sánchez Pérez, J. A., Los inventos de Torres Quevedo. Madrid 1914. [65
8°, 24 S.

Lampe, E., Mathematik. [66
Deutschland unter Kaiser Wilhelm II., Berlin 1914, 1213—1236. — Geschichte der Mathematik in Deutschland während der letzten 25 Jahre.

*Royal society of London. Catalogue of scientific papers 1800—1900. Subject index. Volume III. Physics. Part I. Generalities, heat, light, sound. Cambridge, University press 1912. [67
Groß 8°, 550 + VII S.

e) Nekrologe.

Jacob **Amsler-Laffon** (1823—1912). [68
Österreich. Zeitschr. für Vermessungswesen 10, 1912, 101—104. (E. Doležal.)

Samuel Hawksley **Burbury** (1831—1911) [69
London, Royal soc., Proceedings 88, 1913; Obituary notices I—IV.

George Howard **Darwin** (1845—1912). [70
Nature 90, 1912, 413—415. (J. L.)

Iwan **Dolbnia** (1853—1912). [71
Kasan, Soc. phys.-mathém., Bulletin 18_2, 1912, 78—81. (A. Vassilieff.) — *Moskwa*, Matem. obschtch., Sbornik 28, 1912, 473—491. (D. Mordukai-Boltorskij.)

Wilhelm **Fiedler** (1832—1912). [72
Leopoldina 48, 1912, 109.

Paul **Gordan** (1837—1912). [73
Nature 90, 1913, 597.

Max **Happasch** (1845—1913). [74
Zeitschr. für mathem. Unterr. 45, 1914, 244—250. (Leman.)

Fritz **Kötter** (1857—1912). [75
Leopoldina 48, 1912, 86.

Antonio **Pacinotti** (1841—1912). [76
Napoli, Accad. d. sc., Rendiconto 18_3, 1912, 95—100. (M. Cantone.) — Periodico di matem. 9_3, 1912, 190—192. (G. A. Maggi.)

Benjamin Osgood **Peirce** (1854—1914). [77
Science 39_2, 1914, 274—277. (A. G. Webster.)

Henri **Poincaré** (1854—1912). [78
Paris, Ecole normale, Annales 30_3, 1913, 463—482. (E. Picard.) — Internationale Monatsschr. 7, 1912, 546—555. (L. Margaillan.) — Mathem.-naturw. Blätter 9, 1912, 161—163. (H. Weyl.) — The monist 22, 1912, 611—617. (Ph. E. B. Jourdain, W. B. Smith.) — Nature 89, 1912, 535—536; 90, 1912, 353—356 [mit Bildnis]. — Revue de métaphysique et de morale 21, 1913, 585—718. (L. Brunschwicg, J. Hadamard, A. Lebeuf, P. Langevin) — Revue scient. 19, 1913, 475—476; 20, 1913, 144—146 (P. Appell).

Iwan **Ptaszycki** (1854—1912). [79
Charkow, Matem. obchsch., Soobchtch. 13_2, 1912, 247—252. (K. A. Posse.)

Jean Charles Rodolphe **Radau** (1835—1911). [80
Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus 155, 1912, 1277—1279. (G. Lippmann.)

Osborne **Reynolds** (1842—1912). [81
London, Royal soc., Proceedings 88, 1913; Obituary notices XV—XXI. — Nature 88, 1912, 590—591.

Abbott Lawrence **Rotch** (1861—1912). [82
Meteorolog. Zeitschr. 29, 1912, 333—334. — Nature 89, 1912, 195.

Alois **Strnad** (1852—1912). [83
Časopis pro pěstov. mathem. 41, 1912, 553—557. (J. Sobotka.)

William **Thomson** (1824—1907). [84
Russel, A., *Lord Kelvin, his life and works.* London, Jack 1912.
8°, 93 S. — The peoples books Nr. 22.

Joseph **de Tilly** (1837—1906). [85
Bruxelles, Acad. d. sc., Annuaire 1914. 87 S. (P. Mansion.) — [Bericht über diese Biographie:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 25_3, 1914, 667—668. (J. T.)

August **Töpler** (1836—1912). [86
Leipzig, Ges. d. Wiss., Berichte 64, 1912, 479—497. (W. Hallwachs.) — Leopoldina 48, 1912, 48

Winslow **Upton** (1853—1914). [87
Science 39_2, 1914, 202—204. (R. C. Archibald.)

Ricardo **Vázquez-Illa** (1843—1912). [88
Madrid, Acad. de ciencias, Anuario 1914, 145—148. (F. de P. Arrillaga.)

Karl **von der Mühll** (1841—1912). [89
Basel, Naturf. Ges., Verhandl. 23, 1912, 1—5 [mit Bildnis]. (M. Knapp.) — Leopoldina 48, 1912, 62.

Calvin Milton **Woodward** (1837—1914). [90
Science 39_2, 1914, 496—498. (C. Waldo.)

f) Aktuelle Fragen.

Haas, A. E., Der Wert der geschichtlichen Methode im physikalischen Unterricht. [91
Zeitschr. für mathem. Unterr. 45, 1914, 281—286.

Pahl, F., Geschichte des naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterrichts (1913). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 35, 1914, 1532—1534. (M. Gebhardt.) [92

Königsberger, L., Die Mathematik eine Geistes- oder Naturwissenschaft? (1913). [Wieder abgedruckt:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 23, 1914, 1—12. [93

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— Dr. A. Becker zum Professor der Physik an der Universität in Heidelberg.

— „Répétiteur" A. Boulanger in Paris zum Professor der Mathematik am „Conservatoire national des arts et métiers" daselbst.

— Professor P. Debye in Utrecht zum Professor der Physik an der Universität in Frankfurt a. M.

— Dr. T. H. Gronwall in Princeton zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Privatdozent E. Hellinger in Marburg zum Professor der Mathematik an der Universität in Frankfurt a. M.

— Professor A. Ivanoff in St. Petersburg zum Direktor der Sternwarte daselbst.

— Privatdozent R. König in Leipzig zum Professor der Mathematik an der Universität in Tübingen.

— Professor A. Korn in Berlin zum Professor der Physik an der Technischen Hochschule daselbst.

— R. J. Pocock in Oxford zum Direktor der Sternwarte in Hyderabad.

— Privatdozent E. Regener in Berlin zum Professor der Physik an der Landwirtschaftlichen Hochschule daselbst.

— Professor Fr. Slocum zum Professor der Astronomie am „Wesleyan university" in Middletown, Conn.

— Privatdozent Fr. Strunz in Wien zum Professor der Geschichte der Naturwissenschaften an der Technischen Hochschule daselbst.

— Privatdozent W. Vogt in Karlsruhe zum Professor der Mathematik an der Universität in Heidelberg.

Todesfälle.

— Iwan Borgmann, Professor der Physik an der Universität in St. Petersburg, geboren in St. Petersburg den 12. Februar 1849, gestorben 1914.

— Georg James Burch, früher Professor der Physik am „University college" in Reading, geboren zu Sewardstone (Essex) den 11. Mai 1852, gestorben 1914.

— Iwan Dolbnia, Professor der Mathematik am Berginstitut in St. Petersburg, geboren den 31. Januar 1853, gestorben den 2. Februar 1912.

— W. T. Dutton, Professor der Mathematik am „Allegheny college" in Meadville, Pa., gestorben den 24. März 1914, 62 Jahre alt.

— Georg Hettner, Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Berlin, geboren in Jena den 21. September 1854, gestorben den 24. Mai 1914.

— George William Hill, früher Mitarbeiter am „American ephemeris and nautical almanach", geboren in New York den 3. März 1838, gestorben in West Nyack, N. Y., den 16. April 1914.

— Edward Singleton Holden, früher Direktor des „Lick observatory", geboren in St. Louis den 5. November 1846, gestorben den 15. März 1914.

— John Sturgeon Mackay, früher „master of the Edinburgh academy", geboren zu Auchencairn bei Kirkcudbright den 22. Oktober 1843, gestorben in Edinburg den 25. März 1914.

— George M. Minchin, früher Professor der Mathematik am „Royal Indian engineering college" zu Coopers Hill, Surrey, geboren im Mai 1845, gestorben den 23. März 1914.

— Jules Molk, Professor der Mechanik an der Universität in Nancy, geboren in Straßburg den 8. Dezember 1857, gestorben in Nancy den 7. Mai 1914.

— Max Nath, Direktor des Realgymnasiums in Pankow-Berlin, geboren zu Kreuzbergerhütte den 13. September 1859, gestorben den 11. Juli 1913.

— Charles Santiago Sanders Peirce, Mathematiker und Philosoph, geboren in Cambridge, Mass., den 10. September 1839, gestorben in Milford, Pa., den 19. April 1914.

— Armande de Polignac, Mathematiker, geboren zu Millemont (Seine-et-Oise) den 16. Februar 1832, gestorben in Paris den 15. November 1913.

— John Henry Poynting, Professor der Physik an der Universität in Birmingham, gestorben den 30. März 1914, 61 Jahre alt.

— Charles Ruchonnet, früher Professor der Mathematik an der Universität in Lausanne, gestorben 1914, 82 Jahre alt.

— Hans von Schaper, Oberlehrer an der Seefahrtsschule in Bremen, geboren in Potsdam den 21. November 1875, gestorben den 8. November 1913.

— Julius Schreiner, Professor der Astrophysik an der Universität in Berlin, gestorben den 30. Dezember 1913, 55 Jahre alt.

— Alois Strnad, Direktor der Realschule in Kuttenberg, geboren den 1. Oktober 1852, gestorben in Kuttenberg den 26. Mai 1912.

— Ricardo Vásquez-Illa, Oberst a. D., Mathematischer Verfasser, geboren in Betanzos den 11. August 1843, gestorben in Valladolid den 6. Dezember 1912.

Vorlesungen über Geschichte der mathematischen Wissenschaften.

— An der Universität in Berlin hat Professor W. Förster für das Sommersemester 1914 eine zweistündige Vorlesung über Geschichte der mittelalterlichen Astronomie angekündigt.

— An der Universität in Brüssel hat Professor E. Brand für das Sommersemester 1914 eine einstündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik angekündigt.

— An der Universität in Cambridge hat Professor E. W. Hobson für das Sommersemester 1914 eine dreistündige Vorlesung über die Geschichte der Erfindung der Analysis angekündigt.

— An der Universität in Lüttich hat Professor C. le Paige für das Sommersemester 1914 eine einstündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik angekündigt.

— An der Universität in Straßburg hat Professor M. Simon für das Sommersemester 1914 eine zweistündige Vorlesung über die Geschichte der Mathematik im Mittelalter angekündigt.

Preisaufgaben gelehrter Gesellschaften.

— *Académie de Belgique à Bruxelles.* Concours de l'année 1915. On demande une contribution importante à la géométrie infinitesimale des surfaces courbes. — Résumer les travaux sur les systèmes de coniques dans l'espace et faire de nouvelles recherches sur ces systèmes.

— *Jablonowskische Gesellschaft in Leipzig.* Preisaufgabe für 1916. Die Theorie der linearen Funktionaldifferentialgleichungen ist in irgendeiner Richtung zu fördern. Besonders wünschenswert wäre eine ganz durchgreifende Behandlung neuer Spezialfälle.

Zu Archimedes.

Von F. Arendt in Templin.

I. *Chronologisches und Verwandtes.*

T. Kierboe hat in einem Aufsatz *Bemerkungen über die Terminologie des Archimedes*[1]) hauptsächlich aus der Entwicklung der Archimedeischen Terminologie, wie sie sich aus den ihrer Zeitfolge nach sicher einzuordnenden Schriften feststellen läßt, Schlüsse für die chronologische Stellung von *Ἐπιπέδων ἰσορροπίαι* II, *Ἔφοδος*, *Περὶ ὀχουμένων* gezogen. Daraus ergibt sich folgende Chronologie für die erhaltenen Schriften des Archimedes (bei der nur *Στομάχιον*, *Κύκλου μέτρησις*, *Ψαμμίτης* keinen Platz erhalten):

Ἐπιπέδων ἰσορροπίαι I.
Τετραγωνισμὸς παραβολῆς.
Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου I, II.
Περὶ ἑλίκων.
Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων.
Ἐπιπέδων ἰσορροπίαι II (sowie die verlorene Schrift *Ἰσορροπίαι*).
Ἔφοδος.
Περὶ ὀχουμένων I, II.

Ich war bereits früher auf demselben Wege zu genau den gleichen Ergebnissen gelangt. Ich schicke also voraus, daß ich den Ausführungen des dänischen Gelehrten fast in allen Einzelheiten zustimme, und möchte nun zunächst einige Ergänzungen dazu geben.

a) *Ἔφοδος.*

Kierboe hat[2]) gezeigt, daß die Termini *ἄξων* bei Segmenten der Umdrehungskörper aus Kegelschnitten sowie *ἁ ποτεοῦσα τῷ ἄξονι* beim Umdrehungshyperboloid Neuerungen der Schrift „Über Konoide und Sphäroide" sind und daß deshalb die *Ἔφοδος*, die Heiberg vor *Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* angesetzt hatte, ohne bisher ernstlichen Widerspruch zu finden, später sein muß, weil in ihr diese Termini (sowie *ἀμβλυγώνιον κωνοειδές* und *ὀξυγώνιον κωνοειδές*) vorausgesetzt werden. Die späte Abfassung der *Ἔφοδος* ergibt sich nun noch aus weiteren Gründen.

1) Biblioth Mathem. 14₃, 1913/14, S. 33—40.
2) a. a. O. S. 35, 39.

1. Der Terminus ἄξων findet sich wie in *Περὶ ὀχουμένων* I[1]) auch von Kugelsegmenten gebraucht[2]); auch diese Neuerung (früher hieß es ὕψος) war, wie Kierboe[3]) betont, erst nach Veröffentlichung der Schrift „Über Konoide und Sphäroide" möglich. Aber die Ἔφοδος geht sogar noch einen Schritt weiter. Denn bisher handelte es sich doch wenigstens stets um Segmente von Rotationskörpern; aber nunmehr tritt auch ein ἄξων πρίσματος[4]) auf. Man sieht, wie für Archimedes ἄξων allmählich die Bedeutung „Mittellinie" erhalten hat.

2. Auch von der Terminologie abgesehen ist es nicht möglich, daß Archimedes schon vor der Veröffentlichung von *Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων* in irgendeiner Schrift, sei es nun die Ἔφοδος selbst oder eine andere ihr noch vorausgehende Schrift (wie Zeuthen früher anzunehmen geneigt war), Mitteilungen über den Rauminhalt von Umdrehungshyperboloiden und Ellipsoiden gemacht hat. In dem bekannten Schreiben an Konon nämlich, in dem eine Anzahl von Lehrsätzen und Aufgaben aufgestellt war und dessen Inhalt wir aus der Einleitung zu der Schrift *Περὶ ἑλίκων*[5]) erfahren, war, wie Kierboe[6]) betont, wohl vom Umdrehungsparaboloid, nicht aber vom Umdrehungshyperboloid und den Ellipsoiden die Rede.[7])

Die Erklärung für diese Tatsache gewinnen wir aus der Einleitung zu *Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων*. Dort lesen wir nämlich folgendes:

Ἀποστέλλω τοι γράψας ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ τῶν τε λοιπῶν θεωρημάτων τὰς ἀποδείξιας, ὧν οὐκ εἶχες ἐν τοῖς πρότερον ἀπεσταλμένοις, καὶ ἄλλων ὕστερον ποτεξευρημένων, ἃ πρότερον ἤδη πολλάκις ἐγχειρήσας ἐπισκέπτεσθαι δυσπόθοδον[8]) *ἔχειν τι φανείσας*	Ich schicke Dir in diesem Buche die schriftliche Ausarbeitung der Beweise für die übrigen Sätze, für die Du sie in den früheren Sendungen nicht bekommen hattest, und für andere später hinzugefundene Sätze. Diese hatte ich schon früher oft zu unter-

1) Kierboe, a. a. O. S. 36, 40.

2) Archimedes, *Opera omnia* ed. J. L. Heiberg 2² (Leipzig 1913), S. 464 9 (Halbkugel), 470 1, 476 2. Natürlich muß es auch in der Ergänzung von Satz 7 für τὸ ὕψος p. 470 3 ὁ ἄξων und 470 4 τὸν ἄξονα heißen.

3) a. a. O S. 35, 36.

4) Zuerst S. 432 30, wo Heiberg (S. 433 not. 6) Anstoß zu nehmen geneigt ist; doch wird jeder Zweifel beseitigt durch die mehrfache Wiederholung: 486 10, 1; 488 5; auch 486 18.

5) Archimedes, *Opera* 2, S. 4 4 sqq. 6) a. a. O. S. 39.

7) Bei Zeuthen, Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/07, S. 343 heißt es: „Da die Mitteilung an Konon — soweit wir sie kennen — nur Sätze vom Paraboloid enthält". Das ist irreführend. Archimedes sagt in der Einleitung zu *Περὶ ἑλίκων* ausdrücklich, daß er hier sämtliche an Konon gesandte Sätze aufführt: βούλομαι δὲ καθ' ἓν ἕκαστον αὐτῶν προενέγκασθαι.

8) δυσπόθοδον, nicht δύσκολον (Rivaltus) ist für das überlieferte δυσποτολον zu schreiben.

μοι τὰς εὑρέσιος ἀπόρησα. διόπερ, οὐδὲ συνεξεδόθεν τοῖς ἄλλοις αὐτὰ τὰ προβεβλημένα. ὕστερον δὲ ἐπιμελέστερον ποτ᾽ αὐτοῖς γενόμενος ἐξεῦρον τὰ ἀπορηθέντα. ἦν δὲ τὰ μὲν λοιπὰ τῶν προτέρων θεωρημάτων περὶ τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος προβεβλημένα, τὰ δὲ νῦν ἐντι ποτεξευρημένα περί τε ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος καὶ περὶ σφαιροειδέων σχημάτων, ὧν τὰ μὲν παραμάκεα, τὰ δὲ ἐπιπλατέα καλέω.[1]

suchen mich bemüht, aber da mir die Auffindung des Beweises Schwierigkeiten zu bereiten schien, wieder aufgegeben. Später wandte ich mich ihnen mit größerer Sorgfalt zu und fand die früher aufgegebenen Beweise. Es war aber der Rest der früheren Sätze über das rechtwinklige Konoid aufgestellt, die jetzigen Sätze sind hinzugefunden über das stumpfwinklige Konoid und über Sphäroide, die ich teils oblong, teils flach nenne.

Archimedes hatte also die Sätze über das Hyperboloid und über die Ellipsoide schon aufgestellt, als er den Brief an Konon sandte; die strikten geometrischen Beweise hatte er aber noch nicht gefunden. Deshalb veröffentlichte er damals nicht einmal die Sätze selbst (*διόπερ οὐδὲ συνεξεδόθεν τοῖς ἄλλοις αὐτὰ τὰ προβεβλημένα*), ein Zeichen für seine große Gewissenhaftigkeit. Führte er aber die Sätze über das Hyperboloid und über die Ellipsoide nicht an, so war es auch zwecklos, die Definition dieser Körper zu geben. Da somit das Paraboloid das einzige Konoid war, das er vorläufig definierte, so war der unterscheidende Zusatz *ὀρθογώνιον* noch nicht nötig.

Wann Archimedes die strikten Beweise für die Sätze über das Hyperboloid und über die Ellipsoide gefunden hat, geht aus der zitierten Äußerung nicht deutlich hervor; daß es verhältnismäßig spät geschehen ist, zeigen die Worte *πολλάκις ἤδη ἐγχειρήσας ἐπισκέπτεσθαι*. Eine weitere Vermutung scheint aber hierüber noch möglich. In dem Briefe an Konon standen die Sätze über die Spirale ganz am Schlusse. Der Grund ist klar ausgesprochen mit den Worten: *ἐντὶ δὲ ὥσπερ ἄλλο τι γένος προβλημάτων οὐδὲν ἐπικοινωνέοντα τοῖς προειρημένοις.*[2] Dann war es aber auch das Gegebene, die Beweise dieser Sätze erst zuletzt, also nach denen über Konoide und Sphäroide zu veröffentlichen. Aber schon in der Einleitung zu *Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* II schreibt er:

ὅσα δὲ δι᾽ ἄλλης εὑρίσκονται θεωρίας, τά τε περὶ ἑλίκων καὶ τὰ περὶ τῶν κωνοειδῶν, πειράσομαι διὰ τάχους ἀποστεῖλαι.[3]

was aber auf Grund anderer Lehrsätze[4] gefunden wird, nämlich die Sätze über Spiralen und über die Konoide, will ich Dir bald zu senden versuchen.

---

1) Archimedes, *Opera* 1^2 (Leipzig 1910), S. 246 2 sq.

2) Archimedes, *Opera* 2, S. 8 15.

3) Archimedes *Opera* 1, S. 168 23.

4) *δι᾽ ἄλλης θεωρίας* steht dem vorhergehenden *διὰ τούτων τῶν θεωρημάτων* gegenüber; es ist also hier nicht Abstractum zu *θεωρεῖν*, sondern Collectivum zu *θεώρημα*.

Und so gibt er tatsächlich *Περὶ ἑλίκων* vor *Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων* heraus. Der Grund kann kaum ein anderer sein, als daß er auch bei Herausgabe von *Περὶ ἑλίκων* noch nicht mit den Beweisen für das Hyperboloid und die Ellipsoide im reinen war. Hätte er also vor *Περὶ ἑλίκων* und erst recht vor *Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* Sätze über Volumina (und nun gar über Schwerpunkte!) von Hyperboloid und Ellipsoiden in irgendeiner Form veröffentlicht (auch mit der Untersuchung vermittelst der infinitesimal-mechanischen Methode, die er ja nicht als strengen Beweis gelten läßt), so wäre er dem Prinzip untreu geworden, das ihn bei dem Briefe an Konon leitete und das er in der Einleitung zu *Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων* noch anerkennt: keinen Satz mitzuteilen, für den er nicht den strikten Beweis schon gefunden hat.

3. Mit dem eben Gesagten in nahem Zusammenhange steht folgendes: Nachdem Archimedes die beiden neuen Lehrsätze, die er in der *Ἔφοδος* beweisen will, angeführt hat, fährt er fort:

συμβαίνει δὲ ταῦτα τὰ θεωρήματα διαφέρειν τῶν πρότερον εὑρημένων. ἐκεῖνα μὲν γὰρ τὰ σχήματα τά τε κωνοειδῆ καὶ τὰ σφαιροειδῆ καὶ τὰ τμήματα αὐτῶν, τῷ μεγέθει τμήμασι κώνων καὶ κυλίνδρων συνεκρίναμεν.[1])	Es trifft sich aber, daß sich diese Sätze von den früher gefundenen unterscheiden; denn jene Körper, die Konoide und Sphäroide und ihre Segmente, verglichen wir ihrer Größe nach mit Figuren von Kegeln und Zylindern.

Er bezeichnet also die Sätze über Konoide und Sphäroide als *εὑρημένα*. Von einem *εὑρίσκειν* oder *ἐξευρίσκειν* spricht aber Archimedes in der *Ἔφοδος* und in den meisten anderen Schriften nur bei wirklich bewiesenen Lehrsätzen[2]), nicht bei solchen, die nur vorläufig untersucht sind; der Ausdruck hierfür ist *θεωρεῖν*. Vgl. besonders den Gegensatz zwischen *ὧν Εὔδοξος ἐξηύρηκεν πρῶτος τὴν ἀπόδειξιν* und *Δημοκρίτῳ πρώτῳ τὴν ἀπόφασιν . . . ἀποφηναμένῳ.*[3]) Ganz gleich ist der Gebrauch von *εὕρεσις, ἐξευρίσκειν, ποτεξευρίσκειν* auch gerade in der Schrift „Über Konoide und Sphäroide".[4]) Den zitierten Satz konnte also Archimedes erst schreiben,

1) Archimedes, *Opera* 2, S. 428 7.

2) Die Stellen der *Ἔφοδος* sind: *εὑρίσκειν* 426 4, 5; 428 8, 15; 430 18.
ἐξευρίσκειν 430 2; 437 20.

3) Archimedes, *Opera* 2, S. 430 2, 7.

4) Archimedes, *Opera* 1, S. 246 4, 7, 9, 12. Auch für *Περὶ ἑλίκων* gilt dasselbe: 2, S. 2 15; auch S. 2 24 (*οἱ φάμενοι μὲν πάντα εὑρίσκειν, ἀπόδειξιν δὲ αὐτῶν οὐδεμίαν ἐκφέροντες*) widerspricht dem natürlich nicht. Nicht ganz so klar ist das Verhältnis von *θεωρεῖν, εὑρίσκειν, ἀποδεικνύναι* z. B. noch im *Τετραγωνισμὸς παραβολῆς*. Zunächst ergibt hier der Vergleich von S. 262 11 (*πρότερον μὲν διὰ μηχανικῶν εὑρεθέν, ἔπειτα δὲ διὰ τῶν γεωμετρικῶν ἀποδειχθέν*) mit 264 27 (*τὰς ἀποδείξιας ἀποστέλ-*

nachdem die Sätze über Konoide und Sphäroide bewiesen, d. h. nachdem ihre Beweise von ihm selbst in der Schrift *Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων* veröffentlicht waren.

4. Wie Kierboe[1]) weiter bemerkt, zeigt die Form, in der die Sätze 2, 4, 5[2]) der *Ἔφοδος* gegeben werden, daß Archimedes die Sätze selbst als bekannt voraussetzt und nur zeigen will, wie sie sich mittels der angegebenen Methode finden lassen. Worauf sollte sich auch in den Worten: *καὶ γάρ τινα τῶν πρότερόν μοι φανέντων μηχανικῶς ὕστερον γεωμετρικῶς ἀπεδείχθη*[3]) der Plural *τινά* beziehen, wenn von den hierher gehörenden Sätzen bisher nur die Parabelquadratur bewiesen war?

Es wäre ferner sehr merkwürdig, wenn Archimedes in dieser Schrift eine ganze Anzahl von bisher unbekannten oder doch unbewiesenen Sätzen durch die mechanische Methode herleitete, aber nur für die beiden unter ihnen, die von den den Mathematikern seiner Zeit geläufigen Sätzen am weitesten ablagen (die Sätze über den Zylinderhuf und die beiden sich durchdringenden Zylinder) außerdem den exakten Beweis gäbe; daß er gerade diese beiden Sätze früher an Eratosthenes gesandt hat, wäre doch schwerlich ein hinreichender Grund. Dagegen wird alles klar, wenn eben diese beiden Sätze die einzigen von allen in der Schrift erwähnten waren, für die der exakte Beweis noch ausstand.

Dies Problem läge freilich noch etwas anders, wenn die *Ἔφοδος* wirklich, wie Heiberg annimmt, eine Wiederholung des exakten Beweises der Parabelquadratur enthalten hätte. Aber das ist sicher nicht der Fall gewesen. Die Sache ist an sich unwahrscheinlich; und der Text von S. 438 18—21, der es zu besagen scheint, kann nicht in Ordnung sein. Das in der Partizipialkonstruktion Ausgesprochene: „*διόπερ ἡμεῖς ὁρῶντες μὲν οὐκ ἀποδεδειγμένον, ὑπονοοῦντες δὲ τὸ συμπέρασμα ἀληθὲς εἶναι*“ galt nur, so-

---

λομες, πρῶτον μὲν ὡς διὰ τῶν μηχανικῶν ἐθεωρήθη, μετὰ ταῦτα δὲ καὶ ὡς διὰ τῶν γεωμετρουμένων ἀποδείκνυται), daß es sich auch an der ersten Stelle um den mechanischen Beweis im *Τετραγωνισμὸς παραβολῆς* selbst handelt, nicht wie Heiberg (Hermes **42**, 1907, 299 not. 1) annimmt, um den infinitesimal-mechanischen der *Ἔφοδος*. Als Beweis wird nun, wie die zweite Stelle (*τὰς ἀποδείξιας ἀποστέλλομες*) zeigt, auch der mechanische Beweis des *Τετραγωνισμὸς παραβολῆς* anerkannt; andererseits zeigt aber die Gegenüberstellung von *ἀποδεικνύναι* zuerst gegen *εὑρίσκειν*, dann gegen *θεωρεῖν*, daß als völlig befriedigend nur der rein geometrische Beweis gilt. — 262 9 endlich (*γεωμετρικῶν θεωρημάτων, ὃ πρότερον μὲν οὐκ ἦν τεθεωρημένον, νῦν δ' ὑφ ἁμῶν τεθεώρηται*) ist *θεωρεῖν* einfach das Verbum zu *θεώρημα* (wie auch sonst, z. B. **1**, S. 4 4, 5).

1) a. a O. S. 39.

2) S. 438 22, 454 9, 458 20. An der ersten dieser Stellen heißt es z. B.: *ὅτι δέ . . . ἐστιν, ὧδε δεωρεῖται κατὰ ⟨τὸν⟩ τρόπον τόνδε* (die Ergänzung von *τόν* scheint mir notwendig).

3) S. 428 26.

lange der exakte Beweis noch nicht gefunden war; die Partizipien können also nur einem Tempus der Vergangenheit, nicht einem Futurum (*τάξομεν*) untergeordnet sein. Ich vermute, daß noch vor der Umschreibung in die *κοινή* in Z. 20 *ἐξευρόντες* aus *ἐξεύρομες* verderbt ist, gerade wie 2, S. 4 3 *κομίζοντες* für *κομίζομες* und 4 4 *δοκιμάζοντες* für *δοκιμάζομες* überliefert ist. Diese Verderbnis zog dann weiter die Entstellung des vor *τὴν γεωμετρουμένην ἀπόδειξιν* Stehenden nach sich; es kann dort ein Partizipium gestanden haben, das etwa dasselbe bedeutete, wie das an einer ganz analogen Stelle I 246 9 stehende *ἐπιμελέστερον ποτ' αὐτοῖς γενόμενος* (*ἐξεῦρον τὰ ἀπορηθέντα*). Ein solches Partizipium, das sich von den überlieferten Schriftzügen (*τάξομεν*) nicht allzu weit entfernt, ist *ἐτάζοντες*. Das in Prosa sonst nicht häufig belegte Simplex *ἐτάζω*[1]) findet sich bei dem dorisch schreibenden Pythagoreer Polos (*διαφανέστερον δέ κα γένοιτο τὸ ταύτας κράτος ἐτάζουσιν ἁμῖν τὰς ἄλλας ἕξιας* bei Stob. flor. 3 9; III 362 8 Hense); und gerade das seltene Wort mußte der Verderbnis besonders ausgesetzt sein. Daß bei Archimedes *ἐτάζοντες* dann ohne Objekt steht, ist unbedenklich: *αὐτό* ergänzt sich von selbst. Endlich schreibe ich noch Z. 21 *αὐτοῦ* für *αὐτοί* (das *ι* bezeichnet Heiberg als unsicher), so daß die Stelle nun lautet:

διόπερ ἡμεῖς ὁρῶντες μὲν οὐκ ἀποδεδειγμένον, ὑπονοοῦντες δὲ τὸ συμπέρασμα ἀληθὲς εἶναι, ἐτάζοντες τὴν γεωμετρουμένην ἀπόδειξιν ἐξεύρομες αὐτοῦ τὴν ἐκδοθεῖσαν πρότερον.[2])	Da ich also sah, daß es nicht bewiesen war, aber vermutete, daß das Resultat richtig sei, prüfte ich es und fand den früher herausgegebenen geometrischen Beweis dafür.

Durch diese, wie ich hoffe, in allem Wesentlichen überzeugende Richtigstellung des Textes erledigt sich die Annahme, der exakte Beweis der Parabelquadratur sei in der *Ἔφοδος* wiederholt gewesen, und damit das Bedenken gegen das zuletzt angeführte Argument für die späte Abfassung der *Ἔφοδος*.

5. Ein weiteres Argument kann ich nicht zu voller Sicherheit erheben. Es scheint sich in der *Ἔφοδος* ein direkter Hinweis auf *Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων* zu finden: *Χρησόμεθα δὲ καὶ ἐν τῷ προγεγραμμένῳ Κωνοειδῶν τῷδε τῷ θεωρήματι.*[3]) Es folgt der erste Satz aus *Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων*. Hier klammert nun Heiberg die Worte *ἐν τῷ προγεγραμμένῳ Κωνοειδῶν* ein mit der Begründung: „et forma neglegentiore et collocatione prava interpolata esse monstrantur."[4]) Dagegen habe ich ein Bedenken. Archimedes hat in mehreren Schriften vor den Beginn

1) Herr Prof. Crönert teilt mir freundlich 13 Stellen der Septuaginta mit.

2) Ich lasse natürlich die Formen der *κοινή*, abgesehen von dem einen dorischen *ἐξεύρομες*, stehen. 3) S. 434 3. 4) S. 434 not. 1.

der eigentlichen Untersuchung eine Anzahl von Hilfssätzen gestellt. Diese werden in *Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* I mit folgenden Worten eingeführt: *γράφονται πρῶτον τά τε ἀξιώματα καὶ τὰ λαμβανόμενα εἰς τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν.*[1]) In *Περὶ ἑλίκων* lauten die entsprechenden Worte: *πρόκεινται δέ, ὡς καὶ τῶν ἄλλων γεωμετρουμένων, τὰ χρείαν ἔχοντα εἰς τὰν ἀπόδειξιν αὐτῶν.*[2]) Fünfmal aber findet sich dafür *προγράφειν*, dem ja die beiden anderen Ausdrücke nahe genug stehen; nämlich im *Τετραγωνισμὸς παραβολῆς*: *προγράφεται δὲ καὶ στοιχεῖα κωνικὰ χρείαν ἔχοντα ἐς τὰν ἀπόδειξιν*[3]), im *Στομάχιον*: *προγράφομεν οὖν τι θεώρημα εἰς αὐτὸ συντεῖνον*[4]), in der *Ἔφοδος*: *τοῦτο γὰρ προγράφεται* mit Beziehung auf Hilfssatz 10[5]), vor allem aber im *Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων* selbst vor den Hilfssätzen: *προγράψαντες οὖν τά τε θεωρήματα καὶ τὰ ἐπιτάγματα τὰ χρείαν ἔχοντα εἰς τὰς ἀποδείξιας αὐτῶν μετὰ ταῦτα γραψοῦμές τοι τὰ προκείμενα*[6]) und nach den Hilfssätzen (hinter Satz 20): *τούτων προγεγραμμένων ἀποδεικνύωμες τὰ προβεβλημένα ⟨περὶ⟩ τῶν σχημάτων.*[7]) — *Προγράφειν* ist also bei Archimedes fast stehender Ausdruck für diese vorausgeschickten Hilfssätze. Es ist also sehr wohl denkbar, daß er einen von ihnen (und um einen solchen handelt es sich hier ja in der Tat) unter Anwendung dieses Wortes zitiert, während ein Interpolator den Archimedes schon recht aufmerksam gelesen haben mußte, um auf den Gedanken zu kommen, dies Wort in diesem Zusammenhange zu verwenden. Archimedes kann etwa geschrieben haben:

χρησόμεθα δὲ καὶ τῶν προγεγραμμένων ἐν τῷ Περὶ κωνοειδῶν τῷδε τῷ θεωρήματι.[8])	Ich werde auch folgenden unter den in der Schrift über Konoide vorausgeschickten Sätzen benutzen.

Mir scheint unter diesen Umständen die Annahme dieser nicht allzu schweren Verschreibung wahrscheinlicher als die der Interpolation.

6. Auch die Stellung des Archimedes zu Demokrit wird nur bei Annahme der späten Abfassung der *Ἔφοδος* verständlich. In der *Ἔφοδος* heißt es von den Sätzen über die Volumina des Kegels und der Pyramide:

1) Archimedes, *Opera* 1, S. 4 22.

2) Archimedes, *Opera* 2, S. 12 4. 3) a. a. O. S. 266 3.

4) a. a. O. S. 418 3; darauf wird S. 420 10 mit den Worten *διὰ τὸ προκείμενον θεώρημα* bezug genommen.

5) S. 478 28. Dagegen wird dieselbe Wendung S. 480 14 mit Beziehung auf Satz 7, also nicht auf einen Hilfssatz, gebraucht.

6) Archimedes, *Opera* 1, S. 258 16. 7) a. a. O. S. 344 19.

8) Zur Wortstellung (Vorausnahme des Genetivs) vgl: *λαμβάνω δὲ καὶ ἐν τούτοις τῶν ἐν τοῖς πρότερον ἐκδεδομένοις βιβλίοις λῆμμα τόδε* (2, S. 12 6), wo allerdings Heiberg wohl mit Recht *ὡς* für *τῶν* vermutet; ferner *ἐπροχειριξάμεθα δὲ ἀποστεῖλαι τοι γράψαντες ὡς Κόνωνι γράφειν ἐγνωκότες ἦμες γεωμετρικῶν θεωρημάτων, ὅ κτέ* (wo ich übrigens *ὧν* für *ὡς* zu schreiben vorschlage).

διόπερ καὶ τῶν θεωρημάτων τούτων ... οὐ μικρὰν ἀπονείμαι ἄν τις Δημοκρίτῳ μερίδα πρώτῳ τὴν ἀπόφασιν ... χωρὶς ἀποδείξεως ἀποφηναμένῳ.[1])	Deshalb kann man auch für diese Lehrsätze einen bedeutenden Teil des Verdienstes dem Demokrit zuerkennen, der zuerst den Ausspruch über sie ohne Beweis getan hat.

Dagegen heißt es in *Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* I von denselben Sätzen:

καὶ γὰρ τούτων προϋπαρχόντων φυσικῶς περὶ ταῦτα τὰ σχήματα πολλῶν πρὸ Εὐδόξου γεγενημένων ἀξίων λόγου γεωμετρῶν συνέβαινεν ὑπὸ πάντων ἀγνοεῖσθαι μηδ' ὑφ' ἑνὸς κατανοηθῆναι.[2])	Denn auch diese Eigenschaften hafteten diesen Körpern von Natur schon immer an; aber sie blieben, obwohl es viele bedeutende Mathematiker vor Eudoxos gegeben hat, allen unbekannt und wurden von keinem einzigen entdeckt.

Mag auch Archimedes das *θεωρεῖν* mittels einer infinitesimalen Methode wie es in irgendeiner Form offenbar auch Demokrit angewandt hat, noch so wenig als Beweis angesehen haben, so konnte er doch, wenn er die Äußerung des Demokrit einmal kannte, unmöglich von einer so völligen Unkenntnis in betreff der beiden Sätze vor Eudoxos reden, wie sie die zitierten Worte mit starker Emphase ausdrücken. Archimedes hat den Ausspruch des Demokrit erst nach Veröffentlichung von *Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* I kennen gelernt; damit ist alles erklärt.

b) Die mechanischen Schriften.

Kierboe folgert[3]) aus dem Vorkommen des Terminus *διάμετρος* für ein Kurvensegment, der erst in der Schrift „Über Konoide und Sphäroide" eingeführt ist, in *Επιπέδων ἰσορροπίαι* II, daß diese Schrift nach der „Über Konoide und Sphäroide" anzusetzen ist.[4]) Er läßt aber dabei die Frage offen, ob *'Επιπέδων ἰσορροπίαι* II ein selbständiges Werk oder nur ein Bruchstück ist. Ich glaube, diese Frage entscheiden zu können.

1. In den Archimedeischen Schriften finden sich zahlreiche Verweise auf Sätze, die teils von Archimedes selbst (in derselben oder in einer

---

1) S. 430 1. 2) Archimedes, *Opera* 1, S. 4 9. 3) a. a. O. S. 36.

4) Kierboe hält diesen Schluß allerdings nur dann für nötig, wenn *'Επιπέδων ἰσορροπίαι* II ein selbständiges Werk ist, da er meint, im andern Falle könne eine Erklärung dieses Terminus vorangegangen sein. Demgegenüber sei an die Bemerkung Zeuthens (*Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, Kopenhagen 1886, S. 68) erinnert, daß in Abhandlungen im Gegensatz zu Lehrbüchern nur wirklich Neues erklärt wurde. Wäre also schon früher der Terminus *διάμετρος τμήματος* erklärt worden, so hätte ihn Archimedes sicher nicht in *Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων* wo er ihn kaum braucht, noch einmal erklärt. Im übrigen vgl. zur Terminologie von *'Επιπέδων ἰσορροπίαι* II das weiter unten (unter 3.) Gesagte.

früheren Schrift), teils von anderen bereits bewiesen sind. Heiberg hat eine ganze Anzahl dieser Verweisungen aus verschiedenen Gründen für unecht erklärt. Ich glaube, daß noch erheblich mehr von diesen Verweisen gestrichen werden müssen; doch würde mich die Erörterung darüber hier zu weit führen. Ich will daher nur auf eine besondere, durch wenige Beispiele vertretene Gruppe dieser Verweise eingehen, weil zu ihr eine Stelle gehört, die für die Beurteilung der mechanischen Schriften wichtig ist.

α) Im *Τετραγωνισμὸς παραβολῆς* werden die ersten drei Hilfssätze ohne Beweis angeführt, am Schluß wird hinzugefügt: *ἀποδέδεικται δὲ ταῦτα ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις* (sc. des Aristaios und Euklid).[1] In Satz 4 wird nun Satz 3 angewandt, und es folgt in unserem Text die Bemerkung: *ἀποδέδεικται γὰρ τοῦτο.*[2] Heiberg bemerkt dazu richtig, daß dies nicht auf Satz 3 der Schrift selbst verweisen könne, da er dort nicht bewiesen sei, sondern nur auf die alten *Κωνικὰ στοιχεῖα.* Ein derartiger erneuter Verweis widerspricht aber durchaus der alles Überflüssige meidenden Art des Archimedes; und so fehlt er auch an den entsprechenden sonstigen Stellen dieser Schrift[3] sowie der übrigen Schriften mit Ausnahme der beiden gleich zu besprechenden Stellen. Die Worte „*ἀποδέδεικται γὰρ τοῦτο*“ in Satz 4 des *Τετραγωνισμὸς παραβολῆς* sind also nach meiner Überzeugung nicht nur, wie Heiberg sagt, „fortasse interpolata“, sondern sicher unecht.

β) Die zweite Stelle findet sich in *Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων.* Dort ist in Satz 3 zunächst der Potenzsatz für die Kegelschnitte ohne Beweis angeführt und dann die Bemerkung hinzugefügt: *ἀποδέδεικται δὲ τοῦτο ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις.*[4] Trotzdem bietet unser Text bei der Anwendung des Satzes wieder die Worte: *δέδεικται γὰρ τοῦτο.*[5] Ihre Athetese erscheint mir wiederum notwendig.

γ) Ich gehe zur dritten Stelle über, auf die es mir hier eigentlich ankommt. In der *Ἔφοδος* wird unter den Hilfssätzen an fünfter Stelle[6] der Satz angeführt, daß der Schwerpunkt des Dreiecks der Schnittpunkt der Mitteltransversalen ist (*Ἐπιπέδων ἰσορροπίαι* I 14), hier allerdings ohne die Angabe, wo der Satz früher bewiesen ist. Doch ist es klar, daß es sich bei sämtlichen elf Hilfssätzen um früher bewiesene Sätze handelt; ich vermute auch, daß hinter 430 26 eine einleitende, dies ausdrücklich besagende Bemerkung ausgefallen ist; darauf läßt erstens die Analogie der übrigen Schriften schließen und zweitens das *καί* in den Worten *χρησό-*

---

1) Archimedes *Opera* 2, S. 268 3.
2) a. a. O. S. 268 14.
3) a. a. O. S. 270 21, 27.
4) Archimedes, *Opera* 1, S. 270 15—24.
5) a. a. O. S. 310 24.
6) S. 432 19.

μεθα δὲ καὶ ... τῷδε τῷ θεωρήματι[1]), besonders wenn meine oben[2]) angegebene Herstellung der Worte richtig ist. — Aus dem angeführten Satze ist nun die Schlußfolgerung, daß die Mitteltransversale durch den Schwerpunkt im Verhältnis 2 : 1 geteilt wird, an einer Stelle des ersten und an einer Stelle des zweiten Buches von *'Επιπέδων ἰσορροπίαι* stillschweigend gezogen[3]), wie Archimedes solche Folgerungen öfter zieht, ohne sie zu beweisen[4]) In dieser Form findet der Satz nun in der Herleitung der Parabelquadratur in der *Ἔφοδος* Anwendung; und es folgen dort die Worte *δέδεικται γὰρ ἐν τοῖς 'Ισορροπικοῖς.*[5]) Die Worte können nicht echt sein, weil der Satz, aus dem der hier gebrauchte für Archimedes eine selbstverständliche Folgerung ist, in derselben Schrift vorher als bereits bewiesener Hilfssatz angeführt ist, d. h. weil die Worte auf gleicher Stufe mit den beiden oben von mir für unecht erklärten Stellen stehen.

Somit ist der Titel *'Ισορροπικά* nicht als von Archimedes authentisch für *'Επιπέδων 'Ισορροπίαι* I bezeugt anzusehen. Es bleiben nunmehr noch zwei Stellen übrig, wo Archimedes auf dieses Buch mit Nennung des Titels verweist: erstens im *Τετραγωνισμός* 6, wo es sich um dieselbe Folgerung aus *'Επιπέδων ἰσορροπίαι* I 14 handelt, wie in den drei genannten Stellen.[6]) Hier wird sie mit den Worten: *δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς Μηχανικοῖς*[7]) begründet. Die zweite Stelle steht in *Περὶ ὀχουμένων* II 2, wo der Satz *'Επιπέδων ἰσορροπίαι* I 8 angeführt wird mit dem Zusatz: *δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς Στοιχείοις τῶν μηχανικῶν.*[8]) So scheint mir nunmehr die schon von Heiberg ausgesprochene Vermutung, daß *'Επιπέδων ἰσορροπίαι* I ursprünglich den Titel *Στοιχεῖα τῶν μηχανικῶν* oder *Μηχανικά* geführt hat, festzustehen. Wie der jetzige Titel entstanden sein kann und ob das Buch früher umfangreicher war als jetzt, darüber will ich weiter unten eine Vermutung äußern.

3. Ich komme jetzt zu *'Επιπέδων ἰσορροπίαι* II. Hier möchte ich zunächst eine ergänzende Bemerkung über die Terminologie einfügen. Es

---

1) S. 434 4. 2) S. 295.

3) Archimedes, *Opera* 2, S. 160 13, 176 25.

4) Die Möglichkeit, daß die Folgerung in einem verlorenen *πόρισμα* in *'Επιπέδων ἰσορροπίαι* I 14 ausgesprochen war, wäre an sich nicht von der Hand zu weisen, wird aber angesichts der ganz analogen Lage in der *Ἔφοδος* sehr unwahrscheinlich. 5) S. 438 2.

6) Da diese Folgerung hier als in den *Μηχανικά*, die, wie sich zeigen wird, im wesentlichen mit *'Επιπέδων ἰσορροπίαι* I identisch sind, in der interpolierten Stelle der *Ἔφοδος* als in den *'Ισορροπικά* bewiesen zitiert wird, so meinte der Interpolator mit *'Ισορροπικά* sicher *'Επιπέδων ἰσορροπίαι*, und es erledigt sich Heibergs Vermutung (Hermes 42, 1907, S. 250, Anm. zu Z. 29), daß hier ein anderes Werk, etwa die *'Ισορροπίαι* — die der Interpolator schon gar nicht mehr gehabt haben wird — gemeint sei. 7) Archimedes, *Opera* 2, S. 274 7. 8) a. a. O. S. 350 21.

wurde oben[1]) im Anschluß an Kierboe, wenn auch nicht in voller Übereinstimmung mit ihm, betont, daß aus dem Vorkommen des Terminus *διάμετρος τμήματος* unbedingt zu folgern sei, daß *Ἐπιπέδων ἰσορροπίαι* II nach *Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων* abgefaßt ist. Dazu scheint das Vorkommen des Ausdruckes *τεταγμένως καταγμέναι* (d. h. Ordinaten) gut zu stimmen; denn auch diesen kann Archimedes, wenn überhaupt, erst spät geschaffen haben: er findet sich bei ihm nur einmal in *Ἐπιπέδων ἰσορροπίαι* II[2]) und zweimal in der *Ἔφοδος*.[3]) Wenn man hier nicht, was ich doch für unwahrscheinlich halte, Interpolation nach der Terminologie des Apollonios annehmen will, so bleibt nur übrig, daß dieser Terminus[4]) sowie das einmal[5]) vorkommende *ἀρχικὰ τᾶς τομᾶς* in der verlorenen Einleitung zu der Schrift, von der *Ἐπιπέδων ἰσορροπίαι* II ein Teil war, erklärt war.

4. Daß nämlich *Ἐπιπέδων ἰσορροπίαι* II nur ein Bruchteil aus einem größeren Werke ist, will ich jetzt zu zeigen suchen. Ich gehe wieder davon aus, einige Bemerkungen Kierboes[6]) zu ergänzen.

Nach der von mir dargelegten Auffassung müssen sämtliche in der *Ἔφοδος* erwähnten Sätze (bis auf die zwei neuen an Eratosthenes gesandten) schon früher bewiesen sein. Nun werden aber in ihr eine ganze Anzahl von Schwerpunktsbestimmungen angeführt, nämlich für Paraboloidsegment (458 20), Halbkugel (464 8), Kugelsegment (474 17), Sphäroid (483 31), Hyperboloid (484 16). Der erste, vierte und fünfte dieser Sätze können selbstverständlich erst nach *Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων* veröffentlicht sein. Wir haben aber gesehen, daß auch die Schwerpunktsbestimmungen für Parabelsegmente (d. h. das jetzige Buch *Ἐπιπέδων ἰσορροπίαι* II) erst nach *Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων* veröffentlicht sind; diese gehen aber offenbar den Schwerpunktsbestimmungen für Halbkugel und Kugelsegment und diese wieder denen für Konoide und Sphäroide voraus. Sämtliche hier genannten Sätze über Schwerpunkte, sowohl die in *Ἐπιπέδων ἰσορροπίαι* II bewiesenen, wie die in der *Ἔφοδος* erwähnten, sind also nach *Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων* und vor der *Ἔφοδος* veröffentlicht. Dadurch wird an sich schon wahrscheinlich, wofür ich weiter unten[7]) noch einen weiteren Grund anführen werde, daß alle Sätze in e i n e m Werke gestanden haben, von dem also *Ἐπιπέδων ἰσορροπίαι* II ein Teil war.

Wir kennen den Titel dieses Werkes. *Περὶ ὀχουμένων* II 2 wird der Satz über den Schwerpunkt des Paraboloidsegmentes angeführt und mit den Worten eingeleitet: *δέδεικται γὰρ ἐν ταῖς Ἰσορροπίαις*.[8]) In diesem,

---

1) S. 296. 2) *Opera* 2, S. 206 10. 3) *Opera* 2, S. 436 2, 456 8.
4) Den Apollonios dann ähnlich wie *ἄξων* von Archimedes übernommen hat
5) *Opera* 2, S. 206 8. 6) a. a. O. S. 38, 39. 7) S. 301.
8) *Opera* 2, S. 350 14.

Ἰσορροπίαι betitelten Werke hatte Archimedes offenbar die zuerst durch die mechanische Methode ermittelten Schwerpunkte der Flächen und Körper hergeleitet, deren Flächeninhalt bzw. Volumen er ebenfalls zuerst durch die mechanische Methode ermittelt und dann im Laufe der Zeit streng geometrisch hergeleitet hatte. In diese Reihe gehören aber nicht Kreis, Prisma und Zylinder, Pyramide und Kegel, deren Schwerpunkte doch *Ἔφοδος* Hilfssatz 7—10[1]) als bekannt vorausgesetzt werden. Ich nehme also an, daß diese Schwerpunkte nicht in den *Ἰσορροπίαι*, sondern schon in den *Μηχανικά* (ein drittes Werk dafür in Anspruch zu nehmen liegt kein Grund vor) hergeleitet waren.[2])

5. Das Gesamtergebnis dieser Überlegungen wäre also etwa folgendes: Archimedes ging in der bedeutsamsten und für uns am besten kenntlichen Reihe seiner Untersuchungen von der Mechanik aus: Definition des Begriffes Schwerpunkt[3]), Schwerpunktsbestimmung einfacher Flächen (und Körper) — *Μηχανικά* oder *Στοιχεῖα τῶν Μηχανικῶν*. Dabei entdeckte er seine infinitesimal-mechanische Methode; diese verhalf ihm alsbald (noch vor Veröffentlichung der Parabelquadratur) zu einer Reihe wichtiger geometrischer Entdeckungen, für die er nun in langer Arbeit die exakten Beweise feststellte und veröffentlichte — *Τετραγωνισμὸς παραβολῆς*, *Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* I, II, *Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων*.[4]) Nunmehr wandte er sich zur theoretischen Mechanik zurück und bestimmte die Schwerpunkte für alle genannten Flächen und Körper — *Ἰσορροπίαι* Damit war diese Reihe von Untersuchungen in der Tat abgeschlossen, und es blieb nun noch die Bekanntmachung der Methode — *Ἔφοδος*.

---

1) *Opera* 2, S. 432 25 sqq.

2) Dagegen ließe sich freilich ein Argument geltend machen, nämlich daß in dem *λῆμμα* 9 der *Ἔφοδος* (S. 432 29), das den Schwerpunkt des Prismas angibt, der Terminus *ἄξων* fürs Prisma angewandt wird; wenn dieser Terminus überhaupt von Archimedes definiert war, so konnte das nach den obigen Auseinandersetzungen (S. 290) erst nach *Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων*, also schwerlich wo anders als in den *Ἰσορροπίαι*, geschehen sein; in diesem Falle müßte aber der Schwerpunkt des Prismas und damit natürlich auch der von Zylinder, Pyramide und Kegel in ihm bestimmt gewesen sein. Doch ist es wohl möglich, daß Archimedes in der *Ἔφοδος*, wo es ihm hauptsächlich auf Darstellung der Methode ankommt, den Terminus *ἄξων* auf das Prisma ohne ausdrückliche Erklärung anwendet. Eine Analogie böte sich in der Verwendung des leichtverständlichen *ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλος* in *Ἐπιπέδων ἰσορροπίαι* I (*Opera* 2, S. 126 1), während der Terminus erst *Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* I (*Opera* 1, S. 6 6) definiert wird. — Eine sichere Entscheidung wage ich hier nicht.

3) Darauf deutet Pappus, *Collectionis quae supersunt,* ed. F. Hultsch 3: 1, Berlin 1878, S. 1030 11 sq.

4) *Περὶ ἑλίκων* gehört nur scheinbar in diese Reihe, weil die Sätze in dem Briefe an Konon mit aufgestellt waren. In Wahrheit steht es abseits (*ἐντὶ δὲ ὥσπερ ἄλλο τι γένος προβλημάτων οὐδὲν ἐπικοινωνέοντα τοῖς προειρημένοις* [*Opera* 2, S. 815]).

6. Aus dem Vergleich des so erschlossenen ursprünglichen Sachverhaltes mit dem jetzigen Zustande dürfte sich über das Schicksal der mechanischen Schriften etwa folgendes ergeben: Es wurde später, als man mit den mathematischen Texten so willkürlich verfuhr, wie es unsere Archimedesüberlieferung auf Schritt und Tritt zeigt, eine veränderte Anordnung dieser mechanischen Schriften beliebt. Man faßte nämlich aus beiden Schriften die Schwerpunktsbestimmungen ebener Gebilde zusammen (von der zweiten waren das nur die Sätze über Parabelsegmente) und nannte das so entstandene Werk, das man in zwei Bücher zerlegte, *Ἐπιπέδων ἰσορροπίαι*, in Anlehnung an den von Archimedes selbst herrührenden Titel *Ἰσορροπίαι*; das konnte man aber nur tun, wenn wenigstens ein Teil des neuentstandenen Werkes ursprünglich den *Ἰσορροπίαι* angehört hatte; da das für *Ἐπιπέδων ἰσορροπίαι* I ausgeschlossen ist, so muß *Ἐπιπέδων ἰσορροπίαι* II tatsächlich von vornherein ein Bestandteil der *Ἰσορροπίαι*, nicht ein selbständiges Buch gewesen sein.[1]) Der Titel *Ἐπιπέδων ἰσορροπίαι* hat zudem nur Sinn, wenn es daneben ein Werk *στερεῶν ἰσορροπίαι* gab; so hatte man also das zweite bei der Neueinteilung entstandene Werk (das alle erwähnten Schwerpunktsbestimmungen von Körpern enthalten haben muß) benannt. Dieses Werk muß bald verschollen sein.[2]) Auch *Ἐπιπέδων ἰσορροπίαι* ist, wie längst erkannt ist, und wie auch meine Darlegungen zu bestätigen scheinen, verstümmelt; doch mag manches aus den ursprünglichen *Μηχανικά* der Neueinteilung von vornherein zum Opfer gefallen sein. Jedenfalls ist es so mit der von mir oben (S. 299) angesetzten und ohnehin anzunehmenden Vorrede der *Ἰσορροπίαι* ergangen.

7. Soviel über diese Bücher. — Für die übrigen mechanischen Schriften des Archimedes sind die Anhaltspunkte zu spärlich, als daß ich für jetzt einigermaßen wahrscheinliche Schlüsse wagen könnte. Ganz unklar ist z. B. der Inhalt von *Περὶ ζυγῶν*, abgesehen von dem einen sicheren Zitat bei Pappus (a. a. O. 1068 19 = frgm. 14 Heiberg). Der dort angeführte Satz (*οἱ μείζονες κύκλοι κατακρατοῦσι τῶν ἐλασσόνων κύκλων, ὅταν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ἡ κύλισις αὐτῶν γίνηται*) ergibt aber jedenfalls im Verein mit meinen Darlegungen, daß eine Identifikation von *Περὶ ζυγῶν* mit den *Ἰσορροπίαι*, wie sie noch Heiberg[3]) für möglich hält, ausgeschlossen ist.

1) Die Möglichkeit, daß es so ist, hat übrigens schon Heiberg (Hermes 47, 1907, S. 299) zugegeben.

2) Die Folge war, daß man nun das Werk *Ἐπιπέδων ἰσορροπίαι* auch einfach *Ἰσορροπίαι* (Pappus, a. a. O. 1034 3) oder *Ἰσορροπικά* (in der interpolierten Stelle der *Ἔφοδος* und in der Überschrift des 2. Buches in unseren Handschriften) — vgl. die übrigen Stellen bei Hultsch in Pauly-Wissowas *Realencyklopädie* II 529 45 f. — nannte. Den Titel *Κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων* können wir hier auf sich beruhen lassen.

3) Hermes 42, 266, not. zu Z. 11.

c) Κύκλου μέτρησις.

Daß die *Κύκλου μέτρησις* nach *Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* I fällt, ist schon früher festgestellt worden.[1]) Andererseits ist sie jedenfalls vor der *Ἔφοδος* verfaßt. Das ergibt, zumal wenn man daran festhält, daß die *Ἔφοδος* nicht auf Unveröffentlichtes Bezug nimmt, die Art, wie in ihr der erste Satz der *Κύκλου μέτρησις* zitiert wird.[2]) Vielleicht kann man daraus, daß hier die Sätze über Kugel und Kreis zueinander in enge Beziehung gebracht werden, weiter schließen, daß die *Κύκλου μέτρησις* bald nach *Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* I, vielleicht noch vorm zweiten Buch dieses Werkes anzusetzen ist.

d) Schlußfolgerungen.

Nachdem so Kierboes Ansichten über die Reihenfolge der Schriften bestätigt und ergänzt sind — zu *Περὶ ὀχουμένων*, dem Kierboe am Ende seines Aufsatzes[3]) seine Stelle nach der *Ἔφοδος* zuweist, weiter unten[4]) noch eine kleine Bemerkung —, will ich nunmehr versuchen, die Zeit der Abfassung selbst für einige Schriften ungefähr festzustellen und daraus weitere Schlüsse zu ziehen.

1. Konon hat noch die Rückkehr Ptolemaios' III. von seinem großen Feldzuge, die 243 oder 242 anzusetzen sein wird, erlebt, wie Kallimachos' *Βερενίκης πλόκαμος* (= Catull 66) beweist. Er kann also auf keinen Fall lange vor 240, sehr wohl aber nach diesem Jahre gestorben sein.[5]) In der Reihe der Schriften des Archimedes, deren zeitliches Verhältnis feststeht, folgen nun bekanntlich aufeinander *Τετραγωνισμὸς παραβολῆς*, *Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* I, II, *Περὶ ἑλίκων*. Bei der Veröffentlichung der letzten unter den eben aufgezählten Schriften sagt Archimedes ausdrücklich, daß seit Konons Tode viele Jahre verflossen seien.[6]) Wir werden also damit doch wohl wenigstens nahe an das Jahr 230 herangekommen sein. Nach *Περὶ ἑλίκων* fallen nun zunächst *Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων* und *Ἰσορροπίαι*, beides umfangreiche Schriften, deren Fertigstellung gewiß längere Zeit in Anspruch nahm.[7]) Erst nach der Veröffentlichung auch der letzten unter diesen Schriften kann er nach dem, was sich uns ergeben hat, mit der Ausarbeitung der *Ἔφοδος* begonnen haben. Sie kann

---

1) Hultsch bei Pauly-Wissowa, *Realencyklopädie* II, 522 31 f.; s. auch Heibergs Verweise Archimedes, *Opera* 2, S. 233 not. 4; 235 Z. 4 und not. 5.

2) *Opera* 2, S. 446 9. 3) a. a. O. S. 39. 40. 4) S. 306.

5) „† etwa 240 v. Chr." heißt es auch in Geffcken-Ziebarths Neubearbeitung von Lübkers *Reallexikon des klassischen Altertums* (Leipzig 1914), S. 558 a.

6) *Μετὰ δὲ τὰν Κόνωνος τελευτὰν πολλῶν ἐτέων ἐπιγεγενημένων*; *Opera* 2, S. 2 18.

7) Damit stehen die Worte der Einleitung zu *Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* II (*Opera* I 168 23): *ὅσα δὲ δι' ἄλλης εὑρίσκονται θεωρίας, τά τε περὶ ἑλίκων καὶ τὰ περὶ τῶν κωνοειδῶν, πειράσομαι διὰ τάχους ἀποστεῖλαι* schwerlich im Widerspruch.

daher nicht wohl vor dem Ende der 20er Jahre erschienen sein; der runde Ansatz 220 dürfte nicht zu spät sein[1]) Nach der *Ἔφοδος* brauchen wir nur noch Platz für *Περὶ ὀχουμένων*, und der findet sich in den Jahren von 220 bis zum Beginne der Belagerung von Syrakus (214) oder auch bis zum Tode des ARCHIMEDES (212) ganz gewiß.

2. Die Einleitung zum *Τετραγωνισμὸς παραβολῆς* erweckt den Eindruck, daß sie ganz kurz nach KONONS Tode geschrieben ist. Dann werden die *Μηχανικά* (*Ἐπιπέδων ἰσορροπίαι* II) vor KONONS Tode veröffentlicht sein; dies ist aber auch die einzige erhaltene Schrift, für die wir das annehmen müssen; möglich ist es nur noch für das *Στομάχιον*. Dagegen besitzen wir eine Fülle von wichtigen Schriften, die sicher nach KONONS Tode veröffentlicht sind. Der Schluß ist also unabweislich, daß die Hauptmasse von ARCHIMEDES' Schriftstellerei nach dem Tode seines Freundes, d. h. nach 243 fällt. Damit wird die Angabe des ohnehin unzuverlässigen TZETZES, daß ARCHIMEDES 75 Jahre alt geworden[2]), also 287 geboren sei, recht unwahrscheinlich. Setzen wir seine Geburt etwa 275, so widerfährt der Angabe des POLYBIOS (VIII 9 8), er sei bei der Belagerung von Syrakus *πρεσβύτης* gewesen, noch immer ihr Recht. Auch die Notiz bei PROKLOS: *οὗτοι* (ARCHIMEDES und ERATOSTHENES) *γὰρ σύγχρονοι ἀλλήλοις, ὥς πού φησιν Ἐρατοσθένης*[3]) läßt sich mit diesem Ansatz wohl vereinigen, selbst wenn ERATOSTHENES wirklich schon 284 geboren war.

3. Das Verhältnis des ARCHIMEDES zu ERATOSTHENES rückt nun in ein völlig anderes Licht. Die Vermutung OPPERMANNS[4]), daß die Bosheit über die alles beweisenden Leute in *Περὶ ἑλίκων*[5]) auf ERATOSTHENES gehe, ist ein für allemal erledigt. Und mußte schon nach der früheren Auffassung das Urteil des verhältnismäßig noch jungen ARCHIMEDES über ERATOSTHENES wertvoll erscheinen, so will es doch etwas ganz anderes heißen, wenn der völlig gereifte Mann diese Schrift, die man nun wohl, obschon sie nicht die letzte ist, als sein wissenschaftliches Testament bezeichnen kann, dem großen Mitarbeiter auf dem weiten Felde echter Wissenschaft widmet.

---

1) Man bedenke, daß zwischen KONONS Tod und *Ἔφοδος* zum mindesten noch *Κύκλου μέτρησις* fällt. Auch daraus, daß an der oben (S. 292) zitierten Stelle die neugefundenen Körper nur mit den Konoiden und Sphäroiden, nicht mit der Kugel, die ebensogut gepaßt hätte, verglichen werden, scheint zu folgen, daß damals, als ARCHIMEDES die *Ἔφοδος* veröffentlichte, der Satz über das Kugelvolumen schon den Reiz der Neuheit verloren hatte, d. h. seine Veröffentlichung schon lange zurücklag.

2) *χρόνους τε ἑβδομήκοντα καὶ πέντε παρελαύνων*, Chil. II 33, v. 105.

3) *In primum* EUCLIDIS *elementorum librum commentarii*, ed. G. FRIEDLEIN, Leipzig 1873, S. 68 18.

4) s. HEIBERG, Hermes **42** (1907), S. 298. — Vgl. übrigens HEIBERG, Weltall 9 (1908/9), S. 166.

5) *Opera* 2, S. 2 24.

Diese Tatsache beweist noch mehr als die in der Einleitung ausgesprochene Anerkennung, wie hoch Archimedes in Wahrheit von den mathematischen Kenntnissen und vor allem von dem mathematischen Verständnisse des Eratosthenes dachte. Erst so finden auch Wilamowitz' Worte[1]) ihre volle Bestätigung: „Dieser selbe Mann ist zugleich der Adressat, dem Archimedes nicht nur seine neuen Resultate mitteilt, sondern über seine Methode Aufklärung gibt, der also nicht nur für die Ergebnisse Verständnis hat, sondern als echter Platoniker in den Fortschritten des mathematischen Denkens die Methode wissenschaftlicher Untersuchung überhaupt gefördert sieht.“[2])

Auch das *πρόβλημα βοεικόν* erscheint in neuer Beleuchtung; doch ist hier nicht der Ort, darauf einzugehen.

II. *Textkritisches zur Κύκλου μέτρησις.*

Ich wende mich nun der Textgestalt der *Κύκλου μέτρησις* zu und möchte vor allem Satz 2 dieser Schrift betrachten. — Ich muß dazu etwas weiter ausholen

1. Heron zitiert den Archimedes nicht selten. Daß er dabei unter Umständen recht frei verfährt, mag ein Beispiel zeigen: Archimedes *Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων* 5[3]) steht der Satz:

πᾶν χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ποτὶ πάντα κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν διαμέτρων τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τοῦ κύκλου διαμέτρου τετράγωνον.

Jede von einem Schnitt eines spitzwinkligen Kegels (einer Ellipse) umschlossene Fläche hat zu jedem Kreise dasselbe Verhältnis wie das Rechteck aus den Durchmessern (Achsen) des Schnittes des spitzwinkligen Kegels zum Quadrat über dem Durchmesser des Kreises.

Es ist genau genommen erst eine Folgerung aus diesem Satze oder, wenn man will, ein Spezialfall von ihm, daß das Rechteck aus den Achsen der Ellipse gleich dem Quadrat über dem Durchmesser des ihr flächengleichen Kreises ist. Dennoch sagt Heron *Metrica* I 34[4]):

ἐν τοῖς Κωνοειδέσιν Ἀρχιμήδους δείκνυται, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ἀξόνων δύναται κύκλον ἴσον τῇ ἐλλείψει.

In den „Konoiden“ des Archimedes wird gezeigt, daß das Rechteck aus den Achsen gleich dem Quadrat über dem Durchmesser eines der Ellipse gleichen Kreises ist.

---

1) *Kultur der Gegenwart* I 8³ (Leipzig 1912), S. 141.

2) Mit Recht betont Wilamowitz gerade dieses. So sind die Worte: *φιλοσοφίας προεστῶτα ἀξιολόγως* (S. 428 18) nicht Phrase, sondern haben eine tiefere Beziehung zum Inhalt der Schrift; in ihr lebt philosophischer Geist.

3) *Opera* 1, S. 280 17.

4) Heronis *Opera* 3, ed. H. Schöne, Leipzig 1903, S. 82 26.

Man sieht, daß dabei auch die Ausdrucksweise völlig verändert ist, insbesondere die Termini des Apollonios ἔλλειψις und ἄξων Anwendung finden. Sicherlich ist hier Herons δείκνυται genau so sehr oder so wenig berechtigt wie des Archimedes' eigenes „δέδεικται" im Τετραγωνισμὸς παραβολῆς 6 mit Beziehung auf Ἐπιπέδων ἰσορροπίαι I 14, worüber ich oben (S. 297) ausführlich gesprochen habe.

Nun findet sich in unserem Archimedestext zwischen den beiden Beweisen des Satzes Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου II 2[1]):

παντὶ τμήματι [τῆς][2]) σφαίρας ἴσος ἐστὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὕψος δὲ εὐθεῖαν, ἥτις πρὸς τὸ ὕψος τοῦ τμήματος τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν συναμφότερος ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος πρὸς τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος.	Jedem Kugelsegment ist gleich ein Kegel, der dieselbe Basis hat wie das Segment und dessen Höhe eine Gerade ist, die sich zur Höhe des Segmentes verhält wie die Summe aus dem Kugelradius und der Höhe des übrigbleibenden Segmentes zur Höhe des übrigbleibenden Segmentes.

folgendes *πόρισμα*:

καὶ φανερόν, ὅτι γίγνεται καθόλου τμῆμα σφαίρας πρὸς κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον, ὡς συναμφότερος ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ ἡ κάθετος τοῦ λοιποῦ τμήματος πρὸς τὴν κάθετον τοῦ λοιποῦ τμήματος.[3])	Und offenbar ergibt sich allgemein: ein Kugelsegment verhält sich zum Kegel mit derselben Basis und gleicher Höhe wie die Summe aus dem Kugelradius und der Höhe des übrigbleibenden Segmentes zur Höhe des übrigbleibenden Segmentes.

Dieses *πόρισμα* ist wahrscheinlich unecht. Zunächst spricht es kaum für die Echtheit, daß Archimedes in der Ἔφοδος Satz 7[4]) nicht den Satz Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου II 2 selbst, sondern eben dies *πόρισμα* herleitet, es also nach dem oben[5]) Ausgeführten als bekannt voraussetzen muß denn wir haben gesehen[6]), daß Archimedes auch sonst einleuchtende Folgerungen aus bewiesenen Sätzen stillschweigend zieht. — Dagegen entstehen Zweifel an der Echtheit aus folgenden Gründen: Erstens ist es unsinnig, ein *πόρισμα* zwischen zwei Beweise desselben Satzes zu stellen.[7]) Zweitens ist die Ausdrucksweise ganz unarchimedisch: für *κάθετος* müßte es *ὕψος* heißen, was freilich Eutokios in einem gelegentlichen Zitat[8]) hat; *καθόλου*

1) *Opera* 1, S. 174 4. 2) *τῆς* muß gestrichen werden.

3) *Opera* 1, S. 180 2. 4) S. 468 26. 5) S. 292. 6) Oben S. 298.

7) Freilich wäre auch die Echtheit des zweiten Beweises von Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου II 2 noch zu untersuchen.

8) Archimedes, *Opera* 3 (Leipzig 1881), S. 237 9. Wenn man aber dies ohnehin in der Form indirekter Rede gegebene Zitat bei Eutokios betrachtet (ἐλέγετο γὰρ τὸ

findet sich sonst nirgends bei Archimedes; wohl aber müßte es statt *καθόλου τμῆμα σφαίρας* heißen: *πᾶν τμῆμα σφαίρας*; denn dies ist die ständige Ausdrucksweise des Archimedes bei Lehrsätzen, die nicht mit einem durch *ἐάν, εἴ κα* eingeleiteten Konditionalsatz anfangen. Abgesehen von *Κύκλου μέτρησις* 2, worüber noch zu sprechen ist, finden sich Ausnahmen hiervon nur an einer Stelle der *Ἔφοδος*[1]) und häufig in *Περὶ ὀχουμένων*, besonders das ständige: *τὸ ὀρθὸν τμᾶμα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος*; vielleicht ein Beweis mehr, daß diese Schrift wirklich die späteste von den erhaltenen ist.[2]) Diese spät auftretende Abweichung aber schon für eine auch sonst bedenkliche Stelle in *Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* in Anspruch zu nehmen, wäre sehr gewagt. — Endlich wäre auch statt *γίγνεται πρὸς κῶνον . . . ὡς . . .* bei Archimedes das Normale *πρὸς κῶνον . . . λόγον ἔχει, ὅν . . .* Das sind zuviel Abnormitäten, um sie alle auf das Konto des Umschreibers, der doch sonst nicht so verfahren ist, zu setzen, wie Heiberg für *κάθετος* annimmt.

Nun erhebt sich dagegen allerdings ein Bedenken: Heron[3]) zitiert das *πόρισμα* zu *Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* I 34[4]) mit den Worten:

Ἀρχιμήδης ἐν τῷ Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου δείκνυσιν ὅτι κτέ.	Archimedes zeigt in dem Buche „Über Kugel und Zylinder", daß usw.

Bald darauf lesen wir[5]):

πάλιν οὖν ὁ αὐτὸς Ἀρχιμήδης δείκνυσιν ὅτι πᾶν τμῆμα σφαίρας πρὸς τὸν κῶνον τὸν τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντα αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον λόγον ἔχει, ὃν ἡ τοῦ λοιποῦ τμήματος κάθετος μετὰ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν αὐτὴν κάθετον.	Wieder zeigt derselbe Archimedes, daß sich jedes Kugelsegment zum Kegel mit derselben Basis und gleicher Höhe verhält, wie die Höhe des übrigbleibenden Segmentes mit dem Kugelradius zur selben Höhe.

τμῆμα πρὸς τὸν ἐν ἑαυτῷ κῶνον τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου [τοῦ] τῆς σφαίρας καὶ τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος πρὸς τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος), so sieht man, daß er hier in ähnlicher Weise frei zitiert wie Heron, also für die ursprüngliche Fassung des *πόρισμα* nicht in Anspruch genommen werden darf. Das richtige *ὕψος* mußte ihm aus Archimedes so geläufig sein, daß er es fast unwillkürlich schrieb.

1) *ὅτι δὲ τοῦ τμήματος κτέ.*, S. 458 20; *ὅτι ὁ κύλινδρος*, S 446 17 ist von Heiberg ergänzt.

2) Sonstige Ausnahmen sind nur scheinbar: *Περὶ ἑλίκων* 86 7 und sonst ist *τὸ περιλαφθὲν χωρίον* durch das folgende *τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας* gefordert; *Ἐπιπέδων ἰσορροπίαι* I 126 6 u. s. ist *τὰ . . . ἰσορροπέοντα = εἴ κα ἰσορροπῇ*.

3) *Metrica* II 11; a. a. O. S 120 28.

4) Archimedes, *Opera* 1, S. 130 5. 5) a. a. O. S. 122 16.

Daß sich zunächst HERON hier auf *Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου*, nicht auf *Ἔφοδος* Satz 7 bezieht, zeigt der Vergleich mit der zuerst angeführten Stelle ganz deutlich. Aber auch dadurch wird die Echtheit des *πόρισμα* nicht erwiesen. Es liegt zunächst die Annahme nahe, daß HERON schon den interpolierten Text vor sich gehabt hat und diesen wieder unter sehr freier Handhabung des Wortlautes zitiert; denn so gut wie *ἡ ... κάθετος μετὰ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου* für *συναμφότερος ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου ... καὶ ἡ κάθετος* sowie *τὴν αὐτὴν κάθετον* für *τὴν κάθετον τοῦ λοιποῦ τμήματος* sicher ihm angehören, wird auch das dem ARCHIMEDES gemäßere *πᾶν τμῆμα* und *λόγον ἔχει ὅν* (welch letzteres freilich auch wieder bei EUTOKIOS steht) auf seine Rechnung zu setzen sein; vorausgesetzt immer, daß er das interpolierte *πόρισμα* überhaupt schon las. Denn die Möglichkeit darf nicht von der Hand gewiesen werden, daß HERON das *πόρισμα* noch nicht vorfand, sondern aus Satz II 2 in ähnlicher Weise wie in dem besprochenen Konoidenzitat selbst die Folgerung zog und trotzdem wieder bei dem „*Ἀρχιμήδης δείκνυσιν*" blieb. Dann müßte das *πόρισμα* später (vielleicht eben aus HERON) interpoliert worden sein. Auch der Lösung dieser Frage werden wir weiter unten noch näher kommen.

2. Ich komme nunmehr zum zweiten Satz der *Κύκλου μέτρησις*. Für diesen glaube ich den Nachweis der Unechtheit mit voller Bestimmtheit führen zu können.

Der Satz lautet:

Ὁ κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν ια πρὸς ιδ.[1])	Der Kreis verhält sich zum Quadrat über dem Durchmesser wie 11 zu 14.

Es ist längst bemerkt worden, daß dieser Satz erst nach dem dritten (der für die Zahl π die Grenzen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ bestimmt) stehen dürfte.[2]) Man hilft sich nun wieder mit der Annahme, daß er ursprünglich wirklich nach Satz 3 gestanden habe und erst durch den „transscriptor" vor Satz 3 gebracht sei.[3]) Man sieht nur nicht, was den Umschreiber dazu veranlaßt haben sollte. Man wird daher diese an sich unwahrscheinliche Annahme fallen lassen, wenn noch weitere Argumente dafür sprechen, daß der Satz überhaupt interpoliert ist.

Der Satz ist nun so, wie er dasteht, sachlich falsch. Es müßte mindestens heißen: *λόγον ἔχει ἔγγιστα, ὃν ια πρὸς ιδ*, wie in der noch zu besprechenden HERONstelle. Aber auch eine derartige Fassung kann wohl

1) *Opera* 1, S. 234 19.

2) TANNERY, Mémoires de la société des sciences de Bordeaux, 4 2, 1882, S. 213 sagt sogar: „Le troisième (théorème) . . . devait logiquement devancer les deux autres", was mir nicht einleuchtet.

3) HEIBERG, not. 2 zu ARCHIMEDES, *Opera* 1, S. 237.

dem Praktiker genügen, dem es nur auf die möglichst bequeme zahlenmäßige Lösung von Berechnungsaufgaben ankommt, nicht aber dem strengen Theoretiker. Archimedes hätte das Verhältnis $\frac{\pi}{4}$, auf das es hier ankommt, sicher zwischen die Grenzen $\frac{11}{14}$ und $\frac{223}{284}$ eingeschlossen, was schon durch die Symmetrie mit Satz 3 gefordert war. Aber geben wir einmal für einen Augenblick zu, daß Archimedes sich mit der Fassung *λόγον ἔχει ἔγγιστα, ὃν* begnügt hätte, und daß das *ἔγγιστα* durch Abschreiberversehen ausgefallen wäre, so bliebe im Beweis eine ganz grobe Nachlässigkeit: es wird ein rechtwinkliges Dreieck $AΓΔZ$ mit den Katheden r und $3\frac{1}{7}r$ konstruiert und von diesen heißt es: *τὸ δὲ ΑΓΔΖ τρίγωνον τῷ ΑΒ κύκλῳ ἴσον ἐστί*[1]); und dann fällt dem Verfasser auf einmal in der Begründung ein, ein „*ἔγγιστα*" hinzuzufügen. Hier ist keine Änderung möglich; damit verbietet sie sich auch im Satze selbst. Die Begründung:

ἐπεὶ ἡ μὲν ΑΓ κάθετος ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, ἡ δὲ βάσις τῆς διαμέτρου τριπλασίων καὶ τῷ ζ' ἔγγιστα ὑπερέχουσα δειχθήσεται[2])	Denn die Kathete $AΓ$ ist gleich dem Radius, die Basis aber, wie gezeigt werden wird, dreimal so groß wie der Durchmesser und noch ungefähr um $\frac{1}{7}$ größer

ist zudem völlig unlogisch[3]); gemeint ist: „Die Basis aber ist $3\frac{1}{7}$ des Durchmessers, also ungefähr gleich der Peripherie des Kreises; denn diese ist, wie gezeigt werden soll, nahezu $3\frac{1}{7}$ des Durchmessers." Diese mangelhafte Logik steht der umständlichen Art des Schließens im Anfang des Satzes[4]), auf die Heiberg[5]) hinweist, sehr nahe.[6])

Gegenüber diesen entscheidenden Anstößen haben rein sprachliche Bedenken wenig zu bedeuten. In Betracht kommt vor allem *ὁ κύκλος* statt *πᾶς κύκλος*[7]), während doch in Satz 1 und 3 richtig *πᾶς κύκλος*, bzw. *παντὸς κύκλου* steht[8]) (vgl. darüber das oben Gesagte); ferner *τὸ ΑΓΖ πρὸς τὸ ΑΓΔ ἐστιν ὡς κβ πρὸς ζ*[9]); diese Form findet sich statt

---

1) *Opera* **1**, 236 1.

2) Da sich gegen den ganzen übrigen Satz Bedenken ähnlicher Art wie gegen diese Begründung (236 2—5), die ohnehin kaum entbehrt werden kann, erheben, besteht natürlich kein Anlaß mehr, diese drei Zeilen einem anderen Verfasser als dem übrigen Satz zuzuschreiben, was Heiberg (*Opera* 1, S. 237 not. 2) tun mußte, da er den Satz im ganzen noch für echt hielt.

3) „locus mire confusus." Heiberg a. a. O. 4) S. 234 23 sq.

5) *Quaestiones Archimedeae*, Kopenhagen 1879, S. 77.

6) Wie weit echt Archimedeisches entstellt werden konnte, zeigt Satz 1 der *Κύκλου μέτρησις*, über den Heiberg a. a. O. S. 76 sq. zu vergleichen ist.

7) S. 234 9. 8) S. 232 3, 236 8. 9) S. 234 25.

λόγον ἔχει ὃν bei Zahlen, soviel ich sehe nur noch *Περὶ ὀχουμένων* II 10: *ἁ ΓΒ ποτὶ ΒΔ ἐστιν, ὡς δύο ποτὶ ε.*[1])

Es fehlt aber auch nicht an äußeren Zeugnissen dafür, daß dieser Satz früher einmal nicht vorhanden war.

Zunächst ist es sehr fraglich, ob ihn Eutokios schon gelesen hat. Die Worte in seinem Kommentar:

βούλεται γὰρ ἐπιδεῖξαι, τίνι χωρίῳ εὐθυγράμμῳ ἴσος ἂν εἴη κύκλος[2])	Denn er will zeigen, welcher geradlinigen Fläche ein Kreis wohl gleich ist

gehen offenbar auf Satz 1; und auch sonst findet sich keine Erwähnung von Satz 2 bei ihm. Dazu betrachte man nun das Zitat aus dem Archimedesbiographen Herakleides

δείκνυσιν γὰρ [sc. *Ἀρχιμήδης*], *ὅτι ἡ περιφέρεια τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλασία καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάττονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις*[3])	Denn Archimedes zeigt, daß der Umfang dreimal so groß ist wie der Kreis und noch um weniger als $\frac{1}{7}$, aber um mehr als $\frac{10}{71}$ größer

und den Hinweis auf Poros von Nikaia

ὥστε οὐδὲ Πόρος ὁ Νικαιεὺς εὔκαιρον εὑρεθήσεται μέμψιν ἐπάγων Ἀρχιμήδει ὡς μὴ ἀκριβῶς εὑρόντι, ποίᾳ εὐθείᾳ ἴση ἐστὶν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια.[4])	Daher wird sich zeigen, daß auch der Vorwurf des Poros von Nikaia gegen Archimedes nicht berechtigt ist, er habe nicht genau gefunden, welcher Geraden der Kreisumfang gleich ist.

Beide beziehen sich nur auf Satz 3, während ihnen Satz 2, wenn sie ihn gekannt hätten, ebenso nahe hätte liegen müssen; also auch für Herakleides und Poros ergibt sich eine gewisse Wahrscheinlichkeit, daß sie Satz 2 nicht gelesen haben. — Doch diese drei testimonia ex silentio sind unsicher. Völlig klar liegt es dagegen mit einem vierten solchen Zeugnis.

Theon von Smyrna will an einer Stelle seiner Schrift Über die zur Platonlektüre erforderlichen mathematischen Kenntnisse[5]) den Nachweis führen, daß die Kugelgestalt der Erde auch durch die höchsten Berge nicht nennenswert beeinflußt wird und weist dazu nach, daß der höchste Berg (10 Stadien nach Eratosthenes und Dikaiarchos), wenn er kugelförmig wäre, sich zur Erde etwa verhielte wie ein Hirsekorn zu einer Kugel von 1 Fuß Durchmesser. Der Gedanke und die Art der Beweisführung stehen offenbar unter dem Einfluß von Archimedes' *Ψαμμίτης*, aus ihm sind auch die Termini *πρῶτοι, δεύτεροι, τρίτοι ἀριθμοί*[6]) ent-

---

1) *Opera* 2, S. 388 15.
2) Archimedes, *Opera* 3, S. 264 12. 3) a. a. O. S. 266 2. 4) a. a. O. S. 300 22.
5) Theo Smyrnaeus, *Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium*, rec. Ed. Hiller, Leipzig 1878, S. 124 7 sqq. 6) a. a. O. S. 126 6.

lehnt (die Grenzen sind freilich bei Archimedes 10^8, 10^{16}, 10^{24}; bei Theon dagegen 10^4, 10^8, 10^{12}). Schon dies zeigt, daß der Verfasser (dessen Eigentum diese Darlegung doch wohl ist) mit Archimedes' Schriften einigermaßen vertraut ist. Archimedes wird nun auch zweimal ausdrücklich zitiert, zuerst[1]) der Satz *Κύκλου μέτρησις* 3 (Verhältnis der Peripherie zum Durchmesser); dann[2]) das *πόρισμα* zu *Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* I 34 (Volumenverhältnis von Zylinder und Kugel). Der Zusammenhang ist hier folgender: Theon gibt zu dem angegebenen Zweck — übrigens unnötigerweise — das Volumen der Kugel von 10 Stadien Durchmesser und das Erdvolumen zahlenmäßig an[3]) und leitet dann die Formel für das Kugelvolumen ab. Der Gang des Beweises ist kurz der:

Kreisdurchmesser	: Kreisperipherie	$= 7 : 22$
Durchmesserquadrat	: Kreisinhalt	$= 14 : 11$
Würfel	: Zylinder	$= 14 : 11$
Zylinder	: Kugel	$= 3 : 2$
Würfel	: Kugel	$= 14 : 7\frac{1}{3}$.

Die Formel: „Durchmesserquadrat : Kreisinhalt = 14 : 11“ ist also für Theon nicht einmal das Ziel seiner Beweisführung. Trotzdem wird, nachdem *Κύκλου μέτρησις* 1 ohne Nennung des Archimedes, aber auch ohne Beweis (durch ein bloßes *πάλιν γὰρ ἀποδείκνυται*) in veränderter Form angeführt ist, diese Formel, d. h. also unser Satz *Κύκλου μέτρησις* 2, vollständig hergeleitet.[4]) Das konnte, nachdem *Κύκλου μέτρησις* 3 ausdrücklich als archimedisch zitiert, *Κύκλου μέτρησις* 1 wenigstens ohne Beweis angeführt und damit als bereits bewiesen anerkannt war, noch dazu unmittelbar vor einem erneuten ausdrücklichen Archimedeszitat (*Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* I 34 *πόρισμα*, s. o.) nur geschehen, wenn Theon von Smyrna unseren Satz *Κύκλου μέτρησις* 2 noch nicht las.

1) a. a. O. S 124 12. 2) a. a. O. S. 127 3.

3) a. a. O. S. 126 3 sq.

4) Ich setze den Text her. Zunächst erscheint *Κύκλου μέτρησις* 1 in dieser Form (S. 126 8): *πάλιν γὰρ ἀποδείκνυται σχῆμα τὸ ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς κύκλου περιφερείας εἰς εὐθεῖαν ἐξαπλουμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον τετραπλάσιον εἶναι τοῦ ἐμβαδοῦ τετάρτου μέρους τῆς σφαίρας, ἴσου τῷ ἐμβαδῷ τοῦ κύκλου.* Dann folgt die Herleitung der bezeichneten Formel: *διόπερ εὑρίσκεται τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου λόγον ἔχον, ὃν ιδ πρὸς ια· ἐπεὶ γάρ ἐστιν ἡ περιφέρεια τῆς διαμέτρου τριπλασία καὶ ἔτι τῷ ἑβδόμῳ μείζων, οἵων ἐστὶν ἡ διάμετρος ζ, τοιούτων ἡ περιφέρεια γίνεται κβ· τὸ δὲ τέταρτον αὐτῆς ε∟. ὥστε καὶ οἵων τὸ τετράγωνον μθ, τοιούτων ὁ κύκλος λη∟, καὶ διὰ τὸ ἐπιτρέχον ἥμισυ διπλασιασθέντων οἵων τὸ τετράγωνον Ϛη, τοιούτων ὁ κύκλος οζ. τούτων δὲ ἐν ἐλαχίστοις καὶ πρώτοις ἀριθμοῖς λόγος ὡς ιδ πρὸς ια· ἀμφοτέρων γὰρ αὐτῶν μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ ζ ἀριθμός, ὅστις τὸν μὲν Ϛη μετρεῖ τεσσαρεσκαιδεκάκις, τὸν δὲ οζ ἑνδεκάκις.*

Dieser Schluß scheint mir so zwingend, daß auch ein scheinbarer Widerspruch nicht mehr allzu schwer wiegt, zumal er sich, wie ich glaube, beheben läßt. Es scheint nämlich wiederum, als ob HERON bereits den Satz gelesen hätte. Träfe das zu, so entstände eine große Schwierigkeit; denn selbst wenn HERON jünger ist als THEON (der doch wohl mit Recht mit dem Zeitgenossen des KLAUDIOS PTOLEMAIOS identifiziert wird), so ist der zeitliche Abstand doch auf keinen Fall sehr groß; und es wäre mißlich, den Zeitpunkt der Interpolation in diese höchst problematische Epoche zu setzen. Aber sehen wir die Stelle näher an: Es heißt bei HERON, *Metrica* I 26[1]):

Ἀρχιμήδης μὲν οὖν ἐν τῇ τοῦ Κύκλου μετρήσει δείκνυσιν, ὅτι ια τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἴσα γίγνεται ὡς ἔγγιστα ιδ κύκλοις.	ARCHIMEDES zeigt in der „Kreismessung", daß 11 Quadrate über dem Kreisdurchmesser nahezu gleich 14 Kreisen sind.

Wenn HERON *Κύκλου μέτρησις* 2 wirklich vor Augen gehabt hätte, so hätte er hier wieder ganz frei zitiert. Die an sich äußerst geringe Wahrscheinlichkeit, daß er den interpolierten Satz schon gelesen, wird aber dadurch noch vermindert, daß er das korrekte „*ὡς ἔγγιστα*" hat, das in der *Κύκλου μέτρησις*, wie wir oben sahen, nie gestanden haben kann. Denken wir nun an das, was wir oben über HERONS Zitierweise festgestellt haben, so bleibt auch hier der Schluß, daß HERON aus *Κύκλου μέτρησις* 1 + *Κύκλου μέτρησις* 3 den Schluß gezogen hat und trotzdem kurz sagt: *Ἀρχιμήδης δείκνυσιν.*[2]) Also auch HERON hat nach meiner Meinung den Satz *Κύκλου μέτρησις* noch nicht bei ARCHIMEDES gelesen; er ist nach seiner und THEONS, vielleicht erst nach des EUTOKIOS Zeit interpoliert worden, weil er oft gebraucht wurde, wie ja eben die Beispiele des THEON und HERON zeigen. Wenn es aber hier so liegt, so wird man wohl auch für das oben besprochene *πόρισμα* zu *Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* II 2 annehmen dürfen, daß es erst nach HERON interpoliert ist.

3. Daß uns auf der anderen Seite die *Κύκλου μέτρησις* stark verstümmelt überliefert ist, steht jetzt bekanntlich fest. Doch vermag ich die Fragen, die sich wegen der Sätze über Kreissektor und Kreissegment erheben, noch nicht sicher zu beantworten und gehe deshalb nicht auf sie ein.

---

1) a. a. O. S. 66 6 (= Pseudo-HERO, *Geometria*; HERONIS *Opera* 4, ed. J. L. HEIBERG, Leipzig 1912, S. 386 16).

2) Folgende Stelle der pseudoheronischen Stereometrie gibt, von ihrer Autorschaft abgesehen, eine gute Parallele (HERONIS *Opera* 5, ed. J. L. HEIBERG, Leipzig 1914, S. 8 6): *δείκνυσιν Ἀρχιμήδης, ὅτι ια κύβοι ἴσοι γίνονται κα σφαίραις.* Im echten HERON heißt es freilich (*Metrica* II 11, S. 122 9) nur: *κατὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον δείκνυται, ὅτε ια κύβοι οἱ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας ἴσοι γίγνονται κα σφαίρα⟨ις⟩.*

On an Integration ante-dating the Integral Calculus.

By FLORIAN CAJORI in Colorado Springs.

An examination of EDWARD WRIGHT's *Certaine Errors in Navigation*[1], London 1599, with the view of determining the validity of a claim made by a certain author that WRIGHT published a table of logarithms long before NAPIER[2]), revealed a point of historic interest of a different kind; namely, the inception of an integration which ante-dates the Integral Calculus and, in modern symbols, is

$$\int_0^\theta \sec \Theta \, d\Theta = \log \tan \frac{90^\circ - \Theta}{2}.$$

WRIGHT points out[3]) that the ordinary sea chart is incorrect, for 'what places soeuer are described therein, the length of them (from East to West) hath a greater proportiō to the bredth (from North to South) than indeede it ought to haue (except it be at the aequinoctiall):', and 'although[4]) GERARDUS MERCATOR in his vniuersall Mappe of the worlde seemeth to correct them, by making the distances of the paralels greater and greater towardes the poles: yet none of them[5]) teacheth any certaine way how to amend such grosse faults'. WRIGHT shows[6]) that 'the parts of the meridian at euery poynt of latitude must needs increase with the same proportion wherewith the Secantes or hypotenusae of the arke, inter-

---

1) *Certaine Errors in Navigation, Arising either of the ordinarie erroneous making or vsing of the sea Chart, Compasse, Crosse staffe, and Tables of declination of the Sunne, and fixed Starres detected and corrected.* By E. W. Printed at London by Valentine Sims, 1599.

2) See F. CAJORI, *Algebra in NAPIER's Day and alleged prior invention of Logarithms*, to appear in the volume of papers read at the *NAPIER Tercentenary Celebration* in Edinburgh.

3) E. WRIGHT, *op. cit.*, p. 1 (The pages are unnumbered.)

4) E. WRIGHT, *op. cit.*, p. 12.

5) G. MERCATOR, MARTINE CORTESE and PETRUS NONIUS.

6) E. WRIGHT, *op. cit*, p. 17, 18.

cepted betweene those pointes of latitude and the aequinoctiall do increase. Now then wee haue an easie way layde open for the making of a table (by help of the Canon of Triangles) whereby the meridians of the Mariners Chart may most easily and truely be diuided into parts, in due proportion from the aequinoctiall towards either pole. For ... by perpetuall addition of the Secantes answerable to the latitudes of each point or parellel vnto the summe compounded of all the former secantes, beginning with the secans of the first parallels latitude, and thereto adding the secans of the second parallels latitude, and to the summe of both these adioyning the secans of the third parallels latitude, & so forth in all the rest, we may make a table which shall shew the sections and points of latitude in the meridians of the nautical planisphaere: by which sections, the parallels are to be drawne. As in the table following, we make the distance of each parallel from other, to be one minute: and wee suppose the space betweene any two parellels each next to other in the planisphaere to containe so many parts as the secans answerable to the distance of the furthest of those parallels frō the aequinoctial: and so by perpetuall addition of the secans of each minute to the summe compounded of all the former secantes I make the whole table. As for example, the secans of one minute is 10,000,000. which also sheweth the section of one minute of the meridian from the aequinoctiall in the nauticall planisphaere. Whereunto adde the secans of 2. minutes, that is 10,000,002, the sūme is 20,000,002. which sheweth the section of the second minute of the meridian from the aequinoctial in the planisphaere: to this summe adde the secans of 3. minutes, which is 10,000,004, the summe will be 30,000,006. which sheweth the section of third min. of the meridian from the aequinoctial: and so forth in all the rest: sauing that in this table wee haue of purpose omitted in euery secans the 3 first ciphers next the right hand: not onely for the easier, but also for the truer making of the table, because that indeede at euery poynt of latitude, a min. of the meridian in this nauticall planisphaere, hath somewhat lesse proportion to a minute of the parallel adioyning towardes the aequinoctial, then the secans of that parallels latitude hath to the whole sine. But in this table it was thought sufficient to vse such exactnesse as that thereby (in drawing the lineaments of the nauticall planisphaere) sensible errour might be auoyded'.

'Vpon further aduice' the table as published in 1599 was abridged so as to proceed by intervals of 10′ of latitude, and the three right hand figures in the value of the 'meridian of the nauticall planisphaere' were omitted. It was called 'A Table for the true diuiding of the meridians in the sea Chart' and covered six printed pages. In the second edition, 1610, of Wright's book the table is called 'Table of Latitudes', and is published unabridged, to every minute. The table of 1599 gives values as follows: $0^\circ 30'$, 300; $0^\circ 40'$, 400; $30^\circ 0'$, 18884; $60^\circ 0'$, 45277; $89^\circ 50'$, 226223; $90^\circ 0'$, Infinite.

Our quotations from WRIGHT explain themselves; they show that he computed approximate arithmetical values for the integral $c\int_0^\theta \sec\Theta d\Theta$, corresponding to different values of Θ, $0 \leq \Theta < 90^\circ$, where c is a constant depending upon the units chosen. The results are obtained by summation of many small parts, $c \sec\Theta d\Theta$, $d\Theta$ being the equivalent of $1'$. He intimates the reason why his results are only approximate.

This subject commanded the attention of WILLIAM OUGHTRED who at one time, as he himself states[1]), was deeply interested in an account he had received of the researches of CAVALIERI, but never published his own elaborations of that subject. In *An Addition vnto the Yse of the Instrument called the Circles of Proportion* (London 1633), in chapter VI of the part on *Navigation*, p. 39, OUGHTRED mentions, but does not explain, on artifice, which he had discovered, by which it may be effected that the small parts of the meridian 'be not one minute of a degree, which on the face of the earth answereth to above an English mile, but the hundred-thousanth, or if need be the millioneth part of a minute, scarce exceeding one fifteenth part of an inch (which thing by the helpe of God the giver of all light I have discovered, and am able to performe in tables unto the Radius 10 000 000, yet nothing at all differing either in their forme or manner of working from those that are now commonly in use) all that inequality will be taken away ... By what artifice this is done, together with other secrets of that nature, I may per adventure hereafter be induced to declare ...' But, so far as we know, this declaration was never made.

The second event in our narrative is indicated by EDMUND HALLEY[2]) in the following statement:

'It was first discovered by chance, and as far as I can learn, first publisht by Mr. HENRY BOND, as an addition to NORWOODS *Epitome of Navigation*, about 50 Years since, that the *Meridian Line was Analogous to a Scale of Logarithmick Tangents of half the Complements of the Latitudes*. The difficulty to prove the truth of this Proposition, seemed such

---

1) RIGAUD, *Correspondence of Scientific Men of the 17th Century*, London 1841, Vol. I, p. 87.

2) E. HALLEY, *An Easie Demonstration of the Analogy of the Logarithmick Tangents to the Meridian Line or sum of the Secants: with various Methods for computing the same to the utmost Exactness;* Philosophical Transactions Vol. XIX (For the Years 1695—1697), London 1698, p. 202.

to Mr. Mercator, the Author of *Logarithmotechnia*, that he proposed to wager a good sum of Money, against whoso would fairly undertake it, that he should not demonstrate either, that it was true or false: And about that time Mr. John Collins, holding a Correspondence with all the Eminent Mathematicians of the Age, did excite them to this Enquiry.'

N. Mercator leads one to infer that Bond's discovery resulted from the drawing of graphs. Says Mercator.[1])

'The line of *Artificial Tangents*, or the *Logarithmical Tangent-line*, beginning at 45. deg. and taking every half *degree* for a whole one, is found to agree pretty neer with the *Meridian-line* of the *Sea-Charte*; they both growing, as it were, after the same Proportion. But the Table of *Meridional* degrees being calculated onely every *Sexagesimal* minute of a degree, shews some small difference from the said *Logarithmical Tangent-line.* Hence it may be doubted, whether that difference doe not arise from that little errour, which is committed by calculating the Table of *Meridional* degrees *onely* to every minute'

The great interest taken in the problem by John Collins, is shown by the following quotation from a letter which he wrote in 1665 or 1666 to John Wallis[2]):

'Moreover that the meridian line of Mercator's chart should seem (as it doth) to be the same with the logarithm tangents, (viz. that the adding of natural secants should constitute a logarithm tangent, though to an unwonted ratio,) is Mysterium aliquod grande proposed long since to Mr. Briggs and Mr. Gunter, but not approved or disproved. See my Plane Sailing, herewith sent, the Navigation part, pp. 117, 44, 45, 60, 61, 62. And admitting that the meridian line were the same with a log. tangent, it would not want a geometrical way to describe it, by such curves as pure geometry will reject. But in regard I hope to have the honour to attend you at your arrival here, I cease enlargement, or to cumber you with some later thoughts of my own about the said chart, curves, or meridian line.'

A copy of Norwood's *Epitomie* of 1659 is annotated by De Morgan thus: 'In this work, as noted by Halley, occurs, and probably for the first time, the statement of the connexion between Wright's meridional parts and the logarithmic tangents. It is therefore one of the incunabula of the integral calculus — for this is the first instance in which what was before an integral found by quadratures is reduced to an equivalent form. — A. De Morgan, Oct. 10, 1852. — The first of the editions in which Henry Bond inserted this statement is said by Wilson to have

1) Philosophical Transactions, Vol. I (For Anno 1665, and 1666). London, p. (215).

2) Rigaud, *op. cit.,* Vol. II, p. 461. See also a letter dated Jan. 2, 1665, p. 459.

been 1645.' On p. 14 it is stated that logarithmic tangents may be used in place of WRIGHT's Latitudes. Similar remarks are introduced by BOND in the 1653 edition of GUNTER's *Works*, 2. Bk of the Crosse-Staffe, p. 99. It thus appears that, as a result of WRIGHT's calculation and BOND's observation, *the definite integral*

$$\int_0^\theta \sec \Theta d\Theta = c \log \tan \frac{90^\circ - \Theta}{2}$$

was established, by arithmetical approximation combined with sensuous observation, in the first half of the seventeenth century. In the absence of an actual demonstration it was not known whether the relation was exact or merely approximate.

According to HALLEY [1]) the identity of the meridian-line and logarithmic line was *demonstrated* by JAMES GREGORY (at one time professor at St. Andrews university and shortly before his death in 1675 inaugurated professor at the university of Edinburgh) in his *Exercitationes geometricae* [2]), 1668. GREGORY proceeds geometrically, he marks off the value of sec Θ, $0 \leq \Theta < 90^0$, along that element of a right cylinder which passes through the point (r, Θ) in the circumference of the base. Then he represents $\int_0^\theta \sec \Theta d\Theta$ by an area on the curved surface of the cylinder, and shows this area to be equal to a certain plane area which, in turn, is equal to double the area of an hyperbolic sector. It is through this hyperbolic sector that connection of $\int_0^\theta \sec \Theta d\Theta$ with the logarithmic function is established. At first the integral presents itself in the form log (sec Θ — tan Θ), then, by trigonometry, the form $\log \tan \frac{90^0 - \Theta}{2}$ is reached. GREGORY expresses his result thus:

Linea Meridiana Planisphaerii Nautici est Scala Logarithmorum excessuum, quibus Secantes Latitudinum superant earundem Tangentes, posito radio loco unitatis (p. 17); and later (p. 19): *Ex praedictis manifeste patet Lineam Meridianam Planisphaerii Nautici esse scalam tangentium artificialium arcuum, qui sunt semisses complementorum latitudinum, posito radio loco unitatis, quoniam (ut patet ex Trigonometria) praedictae differentiae sunt eaedem cum dictis tangentibus.*

1) HALLEY, *loc. cit.*, p. 203.

2) *Exercitationes Geometricae* a JACOBO GREGORIO, Scoto, è R. Societate. Londini anno M. DC. LXVIII, p. 14—19; see also G. ENESTRÖM, Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/7, p. 94.

Gregory proceeds in somewhat the same manner to establish the integral which in modern symbols is $\int_0^\Theta \tan \Theta d\Theta = \log \sec \Theta$.[1])

About the same time, this subject was treated by Isaac Barrow in his *Lectiones geometricae*[2]), where the sum of the secants of Θ, $0 \leq \Theta < 90^0$, is shown to be equal to a certain hyperbolic space. The results are stated with reference to the drawings which accompany the text. The word 'logarithm' and the names of trigonometric functions are not used. If we translate Barrow's results into a form divorced from geometric figures, using the language of trigonometry and logarithmic theory, we obtain

$$\int_0^\Theta \sec \Theta d\Theta = \tfrac{1}{2} \{\log (1 + \sin \Theta) - \log (1 - \sin \Theta)\}.$$

Barrow gives also the integral of $\int_0^\Theta \tan \Theta d\Theta$.

The problem of the 'collection of secants' is attacked from a different side by John Wallis.[3]) While Wright, Gregory and Barrow gave solutions which were truly summations, Wallis effected the result by infinite series, a process intuitively less evident and somewhat more subtle than that of his predecessors. Infinite series had been used in quadratures before; for instance, in the quadrature of the asymptotic spaces of the hyperbola. Applying the method of his arithmetic of infinites, Wallis obtains

$$\int_0^\Theta \sec \Theta d\Theta = c \left(S + \frac{S^3}{3} + \frac{S^5}{5} + \frac{S^7}{7} + \cdots\right)$$

where c is a constant dependent on the units used[4]) and $S = \sin \Theta$. Wallis remarks: 'This (because S is always less than $R = 1$) may be so far con-

---

1) J. Gregory, *op. cit.*, p. 21. It is given also on pages 25 and 26, as was pointed out by G. Heinrich in Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, p. 91, who got his information from von Braunmühl. See A. von Braunmühl, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* II, p. 41.

2) *Lectiones geometricae; in quibus (praesertim) Generalia curvarum linearum Symptomata Declarantur.* Auctore Isaaco Barrow Collegii S. S. Trinitatis etc., Londini, M.DC.LXX, Lect. XII, *Appendicula* I, p. 110—114. Barrow's results are described by H. G. Zeuthen, *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert* (übers. v. R. Meyer), Leipzig 1903, p. 360.

3) Philosophical Transactions of the Royal Soc. of London, Vol. 15 (for the year 1685), Oxford 1686, p. 1193.

4) To get approximately Wright's tabular values of the year 1599, take $c = \frac{360 \cdot 60 R}{2\pi}$, where $R = 10$, i.e. $R = 10,000,000$ with the six right hand figures of the result discarded, as explained in our quotations from Wright.

tinued, till some power of S become so small as that it (and all which follow it) may be safely neglected.'

WALLIS gives a similar determination, by infinite series, of $\int_0^\theta \tan\Theta\, d\Theta$.

The researches of JAMES GREGORY, BARROW and WALLIS were reviewed by EDMUND HALLEY. Of GREGORY'S solution he says that it involved 'a long train of Consequences and Complication of Proportions, whereby the evidence of the Demonstration is in a great measure lost, and the Reader wearied before he attain it'. Nor did BARROW reach his result, HALLEY says, 'with less work and apparatus'. Moreover, neither WALLIS nor BARROW 'touched upon the aforesaid relation of the Meridian-line to the *Logarithmick Tangent;* nor hath any one, that I know of, yet discovered the Rule for computing independently the interval of the *Meridional parts* answering to any two given Latitudes'.[1]) HALLEY proceeds to give his own 'very facile and natural demonstration' and to exhibit 'the difference of *Meridional parts,* between any two parallels of Latitude, without finding both the Numbers whereof they are the difference'. It is doubtful whether HALLEY'S demonstration is as short as that of BARROW. HALLEY gives lemmas on stereographic projection and makes connection with the logarithmic function by the aid of the stereographic projection of the rhumb line, which is the logarithmic spiral. Using results on the computation of logarithms deduced in one of his previous papers[2]), he obtains the following expression (p. 208):

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sec\Theta\, d\Theta = \frac{2}{m}\left(\frac{t}{\tau} + \frac{t^3}{3\tau^3} + \frac{t^5}{5\tau^5} + \cdots\right),$$

where t is the difference between, and τ the sum of, $\tan\frac{90^\circ - \Theta_1}{2}$ and $\tan\frac{90^\circ - \Theta_2}{2}$, and where m is a constant depending upon the units chosen. Taking $\frac{1}{m} = 3437 \cdot 746 \cdots$ times R, he obtains values corresponding to WRIGHT'S tables. This last integral, in which the lower limit of integration is different from 0 and is a variable like the upper limit, *is a unique result for a period as early as 1695/6.*

HALLEY suggests several other infinite series yielding the same value as the above. Instead of this series involving *tangents* he suggests series involving *sines,* or *cosines,* or *versed sines,* or *secants* or *radians.* Computing the meridional parts in MERCATOR'S map for $89^0\ 59'$, HALLEY obtains 30374,9634311414228643 'and not 32348,5279 as Mr. WRIGHT has it,

1) E. HALLEY, *loc. cit.*, p. 203.

2) No. 216, p. 58 of the Philosophical Transactions.

by the addition of the *Secants* of every whole Minute: Nor 30249,8 as Mr. OUGHTRED's Rule makes it, by adding the *Secants* of every other half Minute. Nor 30364,3 as Sir JONAS MOOR[1]) had concluded it by I know not what method, tho' in the rest of his Table he follow OUGHTRED.'

The history of the integral of $\int_0^\theta \sec \Theta d\Theta$ constitutes an interesting example of the manner in which practical problems may stimulate the development of pure mathematics.

---

1) Should be Sir JONAS MOORE.

Die Behandlung der Perspektive durch Murdoch.

Von H. Wieleitner in Pirmasens.

Das Werk von P. Murdoch, das man häufig mit dem abgekürzten Titel „*Neutoni Genesis Curvarum per Umbras*" (London 1746) zitiert findet, ist gleichwohl nur wenigen Autoren zu Gesicht gekommen. Chasles, in seinem *Aperçu historique* etc. (Bruxelles 1837) erwähnt es nur ganz flüchtig[1]), Cantor sagt ausdrücklich, daß er die Schrift nie gesehen habe[2]), und in dem Bericht, den G. Loria im IV. Band der Cantorschen *Vorlesungen* über Perspektive und darstellende Geometrie gab, wird nur beiläufig auf eine französische Übersetzung hingewiesen.[3]) E. Kötter hat in seinem Referat *Die Entwicklung der synthetischen Geometrie* einen kurzen Bericht auch über das Buch von Murdoch gegeben.[4]) Aber auch er gesteht (S. 6), daß ihm das Werk nicht zugänglich war, und gibt an, daß er sich auf Mitteilungen Cayleys stütze.[5]) Nun bin ich nach Einsichtnahme des Werkes selbst zu der Ansicht gekommen, daß Murdoch weder in sachlicher noch in methodischer Hinsicht einen wesentlichen Fortschritt gegenüber seinen Vorgängern gemacht hat, und wenn ich im folgenden doch einen genaueren Bericht über das Murdochsche Verfahren gebe, so mag dies hauptsächlich mit der Seltenheit des Buches begründet werden, die es dem kritischen Historiker sehr erschwert, ein darüber gefälltes Urteil nachzuprüfen. Daß ich aus demselben Grunde mich ganz genau an die Ausdrucks- und Bezeichnungsweise des Verfassers anschließen werde, ist selbstverständlich.

1) A. a. O. S. 146; dtsch. Übers. v. L. A. Sohncke, *Geschichte der Geometrie* usw. (Halle 1839), S. 142.

2) *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* 3^2, Leipzig 1901, S. 799.

3) A. a. O. S. 600. Da Loria gegenwärtig eine umfangreichere Geschichte der darstellenden Geometrie bearbeitet, fragte ich bei ihm an, ob er das Buch kenne. Er schrieb mir aber: „Io non ho mai potuto procurarmi l'operetta del Murdoch e La invidio sinceramente per aver potuto porre la mane su quel tesoro. . . . . La traduzione da me citata credo sia oggi altrettanto rara dell' originale."

4) Jahresber. d. Deutsch. Math.-Vereinigung **5**, 1896 (herausg. 1901), bes. S. 431.

5) Vgl. A. Cayley, *On the Classification of Cubic Curves;* Transactions Cambridge Philos. Soc. **11**, 1871, S. 81, und *On the Inflexions of the Cubical Divergent Parabolas;* The Quarterly Journ. of pure and applied Math. **6**, 1864, S. 199—203. — Auf die Cayleyschen Angaben scheinen überhaupt alle späteren Notizen über das Buch zurückzugehen.

I.

Zuerst einige Worte über das Buch als solches. Es ist ein kleiner, sehr groß gedruckter Oktavband (Satzspiegel 14,9 cm×8 cm; Schriftgröße Tertia, Corps 16) von X + 126 S. mit 12 Tafeln. Auf dem Titelblatt steht:

> NEUTONI Genesis Curvarum per Umbras. Seu Perspectivæ universalis Elementa; Exemplis Coni Sectionum et Linearum Tertii Ordinis illustrata. [Vignette.] Londini: Apud A. Millar. M. DCC. XLVI.[1])

Der Name des Verfassers findet sich erst auf S. (III), die die Widmung trägt: „V. C. MARTINO FOLKES, Regiae Societatis Praesidi, Tractatum hunc, Honoris et Officii Causâ, d. d. PATRICIUS MURDOCH".[2]) In der Vorrede, die S. V beginnt, teilt er mit, daß er seine Aufzählung der Linien zweiter und dritter Ordnung im Jahre 1732 schon vollendet gehabt habe, jetzt aber erst zur Veröffentlichung Zeit finde. Im übrigen ist nur auf EUKLIDS *Optica* und auf PAPPUS, Lib. VI, Prop. 54 hingewiesen und bemerkt, daß vor NEWTON niemand diese „Optik" auf die Geometrie im allgemeinen angewendet habe.

Das Werk ist in vier Abschnitte geteilt mit folgenden Überschriften: Sectio I: Perspectivae Linearis Principia (S. 1—18); Sectio II: 1. De generalibus Projectionum Symptomatis Geometricis (S. 19—30), 2. De Aequatione Algebraica Projectionem Curvilineam designante (S. 31—36); Sectio III: De Projectione Sectionum Conicarum (S. 37—73); Sectio IV: Genesis Linearum tertii Ordinis ex Umbris quinque Parabolarum divergentium (S. 74—126).

---

1) Daß eine Ausgabe Leyden 1740, die öfters (u. a. auch in der *Encyklop. d. Math. Wiss.* III C 5, S. 462; Artikel von G. KOHN) angeführt wird, wahrscheinlich nicht existiert, hat schon G. ENESTRÖM hervorgehoben (Biblioth. Mathem. 14_3, 1913/14, S. 82/3). Die Vorrede des Buches ist nicht datiert, und es sind auch keine Druckprivilegien oder sonstigen datierten Vermerke vorhanden. Aber auf S. 101 sagt der Verfasser, MAC LAURIN habe ihm ein Theorem über die Linien dritter Ordnung brieflich unter dem 18. Februar 1717—18 mitgeteilt, und er fährt weiter: „quod et nunc eximio Operi de *Fluxionibus* insertum video." MACLAURINS *Treatise of Fluxions*, den der Verfasser auf S. 70 nochmals zitiert, ist aber bekanntlich im Jahre 1742 erschienen. Wenn die Ausgabe 1746 wirklich eine zweite Auflage wäre, müßte sich doch darüber wohl irgendwo eine Bemerkung in dem Buche finden. Aber keine Spur davon! — Das mir vorliegende Exemplar gehört der K. Universitätsbibliothek Göttingen. Die 12 Tafeln sind ihm am Schluß beigebunden, wiewohl auf jeder, wie das zu jener Zeit üblich war, die Seite angegeben ist, gegenüber der sie hätte eingeheftet werden sollen.

2) PATRICK MURDOCH ist, nach den Angaben im *Dictionary of National Biographies* (Band 39, London 1894), geboren zu Dumfries in Südschottland (wann, das weiß man offenbar nicht), studierte in Edinburgh, war später „Rektor" (natürlich war er als solcher geistlichen Standes) verschiedener Schulen und starb zu London im Oktober 1774. Er lieferte u. a. 8 Arbeiten für die Philos. Transactions, darunter solche über Trigonometrie und Kartenprojektion (vgl. S. GÜNTHER, *Geschichte der Erdkunde*, Wien 1904, S. 189). M. FOLKES (1690—1754) war ein vermögender Privatmann mit wissenschaftlichen Interessen.

Ich habe die Absicht, im folgenden in der Hauptsache über die beiden ersten Abschnitte zu sprechen.

In der Fig. 1, die bei Murdoch die ganze Tafel I einnimmt[1]), ist die Ebene *EF* die „Basis", die Ebene *MN* das „Planum Projectionis", *LS* die „Linea Baseos", Punkt *Z* (außerhalb der Ebene *MN* in endlicher Entfernung)

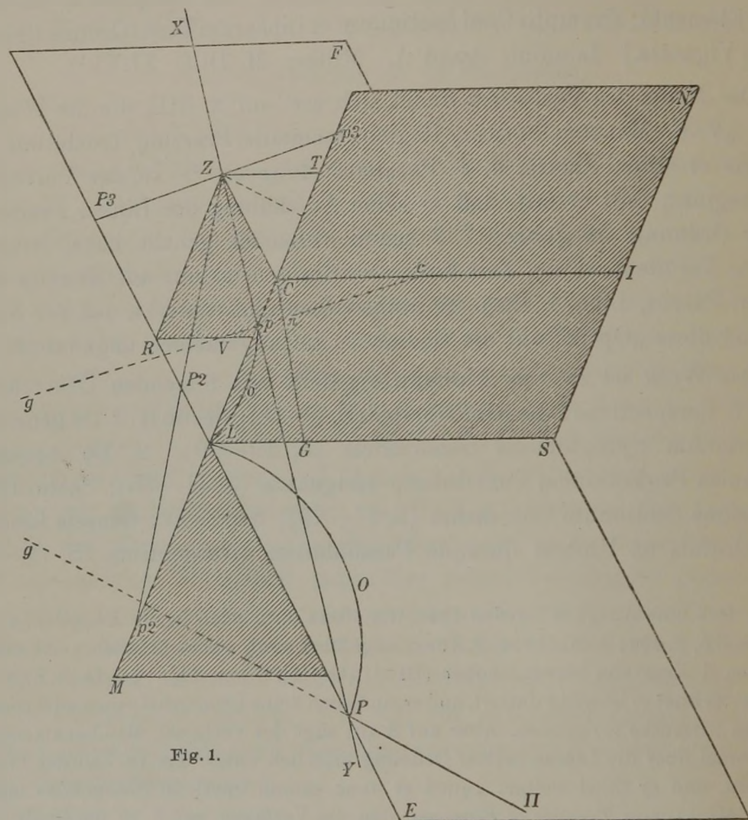


Fig. 1.

das „Polum". In der Basisebene ist eine „Linea exposita" liegend gedacht, die gerade ist, wie *PL* oder krumm, wie *POL*. Die „Projectio" *pL* bzw. *poL* wird dann auf der Projektionsebene ausgeschnitten durch eine Ebene oder einen Kegel mit der Spitze *Z*, wird also selbst eine gerade bzw. krumme Linie. Die Ebene *ZCI* ist parallel zur Basisebene gelegt und wird „Planum Horizontale" genannt, *CI* „Linea Horizontalis". Ebene *ZRV*, parallel zur Projektionsebene, hat keinen besonderen Namen. Die Gerade *RV* aber heißt „Linea Extremorum", „quia sc. Lineae huic contigua in extrema Projectionis abeunt" (S. 5). Durch den Pol *Z* wird ferner eine Ebene *ZCG*

1) Unsere Fig. 1 ist gegen das Original auf $^2/_3$ reduziert. Bei Murdoch sind die Buchstaben, die sich auf die Figuren beziehen, nicht kursiv.

gelegt, senkrecht zur Basis- und Projektionsebene. Sie heißt „Planum Verticale", ihre Schnittlinie ZC mit der Horizontalebene „Axis Projectionis", der Punkt C „Centrum Projectionis", die Gerade CG „Radius". Wenn man statt der Vertikalebene eine andere, schiefe, wie $Zcpgp\pi$ benütze, gebrauche man dieselben Benennungen, mit dem Zusatz „Secundarius".

Nach diesen Definitionen geht der Verfasser zu dem Problem über (S. 5): „Gegeben der Pol Z, die Projektionsebene MN und ein Punkt P; dessen Projektion (p) zu finden." Er löst die Aufgabe, indem er durch

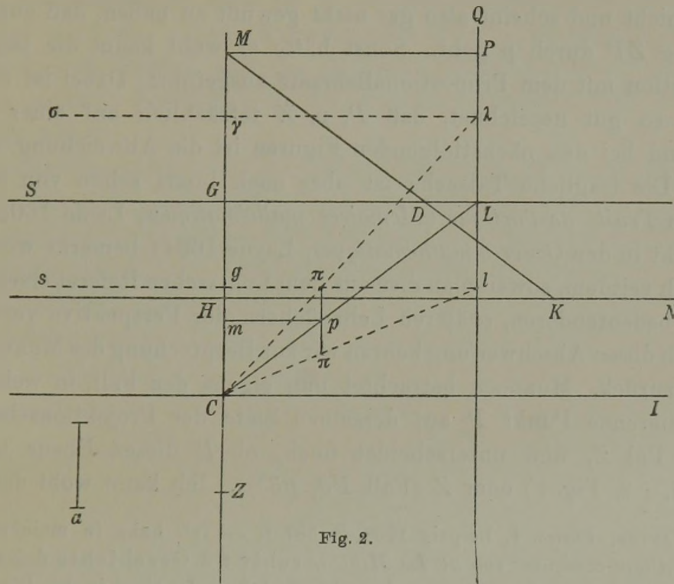


Fig. 2.

die Achse ZC und den Punkt P eine Ebene legt, die mit der Basis- und der Projektionsebene die Schnittlinien PL bzw. CL hat, und findet p als Schnittpunkt von CL mit ZP. Aus den ähnlichen Dreiecken PLp und ZCp erhält er sodann die Proportion

$$PL+ZC : PL :: CL : Lp,$$

woraus sich Lp bestimmen läßt.

Dieses Ergebnis setzt er nun in eine ebene Konstruktion folgendermaßen um (Fig. 2[1]) auf Tafel II): SL, CI, CG und PL bedeuten die nämlichen Größen wie in Fig. 1, während statt RV hier HN gewählt ist. Murdoch sagt es zunächst nicht, aber man muß sich denken, daß die Ebene MN um LS gedreht und in die Ebene EF umgelegt ist. Punkt p muß auf CL liegen. Murdoch macht nun $HK = CL$, zieht $PM \parallel SL$ und verbindet M mit K. Ist D der Schnittpunkt von MK mit LS, so ist Lp

1) Unsere Fig. 2 stimmt auch in der Größe mit Murdochs Figur überein.

gemäß obiger Proportion gleich GD zu nehmen, wie man sofort sieht. Erst nachdem diese Betrachtung erledigt ist, sagt Murdoch, man solle $CZ = GH$ machen, dann den Teil $ICGL$ der Figur aufrichten längs der Geraden LS bis zu einem beliebigen Winkel mit der Basis, und den Teil ICZ längs CI umknicken, so daß er parallel zur Basis wird. Dann gehe das vorliegende Schema in das frühere über und die Gerade ZP laufe durch p.

Was nun hier vor allem auffällt, ist, daß Murdoch den umgelegten Punkt Z nicht zur Konstruktion benützt. Er tut dies auch im weiteren Verlauf nicht und scheint also gar nicht gewußt zu haben, daß auch in der Umlegung ZP durch p geht. Sonst hätte er wohl kaum die langweilige Konstruktion mit dem Proportionallehrsatz ausgeführt. Dabei ist die Fig. 2 bei ihm so gut gezeichnet, daß P, p, Z tatsächlich auf einer Geraden liegen, und bei den nächstfolgenden Figuren ist die Abweichung nur ganz gering. Die fragliche Tatsache ist aber nach Loria schon von S. Stevin in seinem *Traité de l'optique* (*Mémoires mathématiques*, Leide 1608, wieder abgedruckt in den *Oeuvres mathématiques*, Leyde 1634) bemerkt worden und findet sich seitdem, soweit man dies aus dem Loriaschen Referat ersehen kann, in allen bedeutenderen, späteren Lehrbüchern der Perspektive verwendet.[1])

Nach dieser Abschweifung kehren wir zur Besprechung des Murdochschen Werkes zurück. Murdoch betrachtet nun eigens den Fall, in welchem der zu projizierende Punkt P auf derselben Seite der Projektionsebene liegt wie der Pol Z, und unterscheidet noch, ob P dieser Ebene näher ist (Fall $P2$, $p2$, Fig. 1) oder Z (Fall $P3$, $p3$[2])). Ich kann wohl darauf ver-

1) Cantor, *Vorles.* 4, Leipzig 1908, S. 587 f. — Ich habe in meinem Aufsatze *Über die „Plani-coniques" von de La Hire* (Archiv f. d. Geschichte d. Naturwiss. u. d. Technik 5, 1913, S. 49—55) nachgewiesen, daß de La Hire in den *Plani-coniques* die in Rede stehende Umlegung in ganz moderner Weise durchführte mit der einzigen Einschränkung, daß er die Fluchtlinie, die bei Murdoch CI heißt, nicht benützte. Das hebe ich deswegen hervor, weil in Lorias Bericht La Hire nicht erwähnt wird. Die *Plani-coniques* bilden einen Anhang zu dem Buche *Nouvelle Méthode en Géométrie* etc. (Paris 1673), der erst den nach Ablauf eines Jahres etwa noch unverkauften Exemplaren beigefügt wurde. Offenbar hat auch Brook Taylor in seinen *New Principles of Linear Perspective* (London 1719) die Umlegung des Augpunktes verwendet. Ich kann dies allerdings nur aus der französischen Übersetzung konstatieren, die 1757 erschien (s. u.). Taylor löst dort die Fundamentalaufgabe auf dreifache Art in der Ebene. Aber die Murdochsche Lösung ist nicht darunter. Murdoch scheint dieses wichtige Buch wirklich nicht gekannt zu haben.

2) Man beachte hier die Indicesstellung neben dem Buchstaben. Im Original sind allerdings sog. Mediävalziffern verwendet, so daß es folgendermaßen aussieht P2, p2, P3, p3. Siehe zur Frage der Indicesbezeichnung die Bemerkung von G. Eneström Biblioth. Mathem. 11_3, 1910/11, S. 170/71) und den Aufsatz von D. Mahnke *Die Indexbezeichnung bei Leibniz* etc. (Biblioth. Mathem. 13_3, 1912/13, S. 250/60). In meiner *Geschichte der Mathematik* II1 (Leipzig 1911, S. 4) sind die Indexziffern bei F. van Schooten und Newton fälschlich klein gedruckt.

zichten, diese Unterfälle hier darzulegen, zu denen Murdoch je eine der Fig. 2 entsprechende Figur gab.

Dem behandelten Problem folgen 13 Korollare (S. 10—18). Zuerst, daß die Projektion einer Geraden $P\Pi$ (Fig. 1) die Verbindungslinie $p\pi$ der Projektionen der Punkte P, Π ist. Dann, daß die Projektionen aller zu LS parallelen Geraden (auch außerhalb der Basisebene) unter sich und zu LS parallel sind. Rückt eine dieser Geraden ins Unendliche („quae in infinitam abiit distantiam"), sei es nach der einen oder der andern Seite der Projektionsebene, so wird sie in die Horizontale CI selbst projiziert. Umgekehrt wird die „Linea Extremorum" RV ins Unendliche projiziert. Dazu wird noch gefügt, daß die Projektionen irgendwelcher Abschnitte auf einer solchen Parallelen zu LS dasselbe Verhältnis haben wie die Abschnitte selbst.

Das Korollar 4 sagt (S. 11): Wenn eine Gerade PL in der Basisebene zu der Basislinie LS senkrecht („normalis") ist, so geht die Projektion Lp (ev. die Verlängerung) durch das Zentrum C. Liegt die Gerade in der Vertikalebene selbst, so wird ihre Projektion zur Basislinie senkrecht („perpendicularis"). Wenn sie sich aber von der Vertikalebene unendlich weit entfernt, so wird ihre Projektion die Horizontallinie.

Im Korollar 5 (S. 12) setzt Murdoch für ZC, PL, CL die Buchstaben a, d, r und findet so $Lp = \frac{rd}{a+d}$. Dann denkt er d um x vermehrt, was die Projektion $\frac{r \times \overline{d+x}}{a+d+x}$ ergibt, zieht davon $\frac{rd}{r+d}$ ab und erhält als Projektion der Strecke x den Ausdruck $\frac{arx}{\overline{a+d} \times \overline{a+d+x}}$.[1]) Das gibt ihm Veranlassung, den Satz auszusprechen: Wenn ein Punkt in der Geraden LP sich gleichförmig bewegt, so wird er in der Geraden LC sich mit einer Geschwindigkeit zu bewegen scheinen, die dem Quadrat des Abstandes des Punktes von der „Linea Extremorum" umgekehrt proportional ist.[2])

Im 6. Korollar (S. 12/13) wird bewiesen, daß die Projektionen aller Geraden, die zu einer bestimmten $P\Pi$, die schief gegen LS ist, parallel sind, durch einen vom primären Zentrum verschiedenen Punkt c der Horizontallinie gehen. Auch von diesen Parallelen werde diejenige, die ins Unendliche rücke, in die Horizontale CI projiziert. Damit ist jetzt für alle Geraden, die in irgendeiner Richtung ins Unendliche hinausrücken, gezeigt, daß ihre Projektion in die Horizontallinie fällt. In dieser Form

1) Ich schreibe die Ausdrücke genau so, wie sie bei Murdoch gedruckt sind.

2) Das Murdochsche Verfahren ist natürlich mit der Bildung des Differentialquotienten von Lp nach d identisch. Man braucht in dem zuletzt angegebenen Ausdruck nur noch mit x zu dividieren und dann $x \to 0$ zu nehmen, um diesen Differentialquotienten, nämlich $\frac{ar}{(a+d)^2}$ zu erhalten.

ist der Gedanke auch keineswegs neu; die Idee freilich, alle diese unendlich vielen, unendlich fernen Geraden durch eine einzige zu ersetzen, der schon in Desargues' *Brouillon proiect* etc. (Paris 1639) ziemlich deutlich auftritt[1]), scheint den Mathematikern der Mitte des 18. Jahrhunderts immer noch recht fern gelegen zu haben.

Bei allen [Geraden] würden, so fährt Murdoch im 7. Korollar weiter, die Schnittpunkte mit der „Linea Extremorum" ins Unendliche projiziert, und Gerade, die sich auf dieser Linie schneiden, gingen also in Parallele über und umgekehrt. Daraus ginge (nach den Korollaren 4 und 6) die völlige Reziprozität der Basis- und der Projektionsebene hervor, wenn man nur auch die „Linea Extremorum" und die Horizontallinie vertausche.

Dann gibt Murdoch im 8. Korollar (S. 14/15) an, daß und wie man die Winkel der Projektionen CL bzw. cg (wobei g den Schnittpunkt mit LS bedeutet) mit der Horizontalen finden kann. Im ersten Falle erhält man sofort die Tangente des Winkels GCL[2]), im zweiten Falle ist erst $C\pi$ durch Proportionalität zu berechnen, und dann ist Dreieck $C\pi c$ der Art nach bekannt, also auch der Winkel $C\pi c$.

Im 9. Korollar endlich werden auch Gerade in Betracht gezogen, die nicht in der Basisebene liegen. Der Verfasser sagt, daß Gerade, die der Projektionsebene parallel sind, in Parallele projiziert werden und daß die Projektionen anderer parallelen Geraden nach dem Punkt laufen, in welchem eine durch den Pol zu ihnen parallel gezogene Gerade die Projektionsebene trifft.[3])

Im Korollar 10 (S. 15/16) wird vorausgesetzt, daß die Projektionsebene auf der Basisebene senkrecht steht („ponatur rectum") und daß alle außerhalb der Basisebene liegenden Punkte auf diese durch Lote bezogen seien. Um dann das Bild eines Punktes Π zu bestimmen, der im Abstand a senkrecht oberhalb oder unterhalb P steht, macht er in Fig. 2 Ll (bzw. $L\lambda$) $= a$, zieht Cl (bzw. $C\lambda$) und legt durch p eine Parallele zu PL, die auf Cl (bzw. $C\lambda$) den gesuchten Punkt π ausschneidet. Seine Erklärung findet dieses Verfahren darin, daß Murdoch sich die Basisebene durch den Punkt Π gelegt denkt, wodurch der „Radius", der vorher CG war, zu $CG \mp a$, d. h. zu Cg (bzw. $C\gamma$) wird, während alles übrige bleibt.[4])

---

1) Vgl. z. B. St. Chrzasczewski (= St. Haller), Archiv d. Mathem. u. Physik 16_2, 1898, S. 121.

2) „In stilo Arithmetico, ut CG ad GL: ita Radius ad Tangentem Anguli GCL."

3) Dieser allgemeine Satz geht bis auf G. del Montes *Perspectivae libri sex* (Pisauri 1600) zurück. Vgl. Loria in Cantors *Vorles.* 4, Leipzig 1908, S. 585.

4) Daß in der Murdochschen Figur lg durch π geht, ist natürlich Zufall. Wenn man das Lot $P\Pi$ in die Basisebene um den Fußpunkt P längs der Geraden PL umlegen würde, so daß es zu $P\Pi'$ würde, so lägen Z, π, Π' in einer Geraden.

Die Korollare 11 und 12 zu erwähnen, ist überflüssig. Auch das Korollar 13 (S. 17/18) enthält an Sachlichem nur die Bemerkung, daß die Projektion zu einer „orthographischen“ werde, wenn man den Pol Z ins Unendliche verlege.

Wir kommen somit zum zweiten Abschnitt, dessen erster Paragraph von den allgemeinen geometrischen Eigenschaften der Projektionen handelt. Hier werden zuerst ziemlich allgemeine Betrachtungen angestellt, die darauf abzielen, den Leser mit der durch die Projektion bewirkten Umwandlung einer in der Basisebene gegebenen Kurve vertraut zu machen. Diese Betrachtungen sind an keine eigene Figur geknüpft und wenden sich nur an die Anschauung. Es wird gesagt, daß die unendlichen Äste einer Kurve sich in die Horizontallinie projizieren, ob aber die Horizontale die Projektion berühre oder durchschneide oder Asymptote sei, das erkenne man aus der Projektion der Tangente, die die Grundkurve im Unendlichen habe. Auch wohin die Bildkurve („Curva Genita“) ihre konvexe Seite wendet, und ob sie an der Horizontallinie eine Inflexion („contrarium flexum“) hat, wird ein bißchen erläutert. Dann wird erklärt, daß eine Parallelverschiebung der Projektionsebene die Art der Bildkurve nicht ändert, daß aber durch eine Veränderung der Neigung der beiden Ebenen oder eine Verschiebung der Grundkurve („Curva Genetrix“), solange letztere nur auf derselben Seite der „Linea Extremorum“ bleibt, wohl die „Species homologa“ geändert wird (von einigen „projectionibus subcontrariis“ abgesehen[1]), aber nicht die „Species homonoma“ oder das „nomen commune“ der Figur.[2]) Aus jedem Schnitt der Grundkurve mit der „Linea Extremorum“ aber gehen zwei hyperbolische Äste hervor.[3]) Wenn zwei Gerade, die die Grundkurve in deren Schnittpunkten P, P mit der „Linea Extremorum“ berühren, sich in Q schneiden, so schneiden sich die beiden entsprechenden Asymptoten in dem Bildpunkt von Q. Wird die Kurve so verschoben, daß die beiden Punkte P, P zu einem Berührungspunkt mit der „Linea Extremorum“ zusammenrücken, so verschwinden die Asymptoten („nusquam reperientur“), und die hyperbolischen Äste[3]) werden zu parabolischen.

Grund- und Bildkurve sind zueinander reziprok (S. 23), wie die Basis- und Projektionsebene und die beiden Fluchtlinien. So würden Asymptoten der Grundkurve eine Berührung der Bildkurve mit der Horizontallinie hervorrufen. Daraus wird abgeleitet, daß eine geradlinige Asymptote die Kurve

1) Murdoch denkt dabei wohl vor allem an die zwei Kreisschnittsysteme des elliptischen Kegels, die er später auch behandelt.

2) D. h. die Figur bleibt zwar nicht ähnlich, aber doch dem Namen nach dieselbe: Ellipse bleibt z. B. Ellipse.

3) Nach dem damaligen Sprachgebrauch sind das zwei Äste mit einer gemeinsamen Asymptote; ähnlich bei parabolischen Ästen.

nur in einer Anzahl von Punkten schneiden kann, die um 2 geringer ist als deren Ordnung. Ferner wird bemerkt, daß zwei parabolische Äste einer Kurve die Zahl der Asymptoten um 2 vermindern. Es wird ausgeführt, daß bei der Projektion Schnittpunkt in Schnittpunkt, Berührung in Berührung übergeht und daß Knoten, Spitze und Inflexion sich reproduzieren, sofern diese Vorkommnisse nicht in der „Linea Extremorum“ liegen. Daraus folge, daß Grund- und Bildkurve von derselben Ordnung seien; falle aber ein Schnittpunkt einer Geraden mit der Grundkurve [n^{ter} Ordnung] in die „Linea Extremorum“, so bleiben nur noch $n-1$ Schnittpunkte in der Projektion und das ist der Grund, daß die Ordinaten, die einer Asymptote parallel sind, um eine Dimension weniger haben, als der Grad der Kurve ist.[1])

All diese Dinge werden in 12 Nummern ohne eigentliche Beweise aufgeführt. Es folgt nun ein Scholium (S. 26), in welchem zur Einübung des Projektionsverfahrens ein Dreieck, dessen Seiten verlängert gedacht sind, projiziert wird, einmal so, daß die „Linea Extremorum“ das [endliche] Dreieck nicht schneidet (Fig 6 auf Tfl. III), das anderemal so, daß die „Linea Extremorum“ quer durch das [endliche] Dreieck geht (Fig. 7 auf Tfl. IV). In beiden Fällen werden die Lagen der Punkte vor und nach der Projektion diskutiert. Der Verfasser verwendet dabei implicite auch den Satz, daß eine Gerade und ihre Projektion sich auf der Basislinie LS schneiden. Aber erst in einem zweiten Scholium (S. 30) spricht er diesen Satz aus. Von einer Verwendung des Poles ist auch hier keine Spur zu finden. In dem zweiten Scholium formuliert er noch folgenden Satz: Sind P, T sowie p, t irgend welche Punkte, zieht man durch den Schnittpunkt σ von PT und pt eine beliebige Gerade $L\sigma S$ und läßt man einem Punkte R einen Punkt r so entsprechen, daß RP, rp sich in einem Punkte π, RT, rt sich in einem Punkte τ von LS schneiden, so durchläuft r, wenn man R längs irgendeiner Kurve bewegt, eine Kurve derselben Ordnung.

Der kürzere zweite Paragraph des zweiten Abschnittes handelt, wie schon angedeutet, von der Umsetzung der projektiven Transformation ins Algebraische. Murdoch unterscheidet zwei Fälle. Zuerst behandelt er den Fall (S. 31—34), daß die Schnittlinie der Vertikalebene mit der Basisebene oder eine zu ihr Parallele die Abszissenachse („Linea Abscissarum“) sei für die Grundkurve. Er rechnet die Abszissen von der „Linea Extremorum“ bzw. von der Horizontallinie (d. h. vom Zentrum C) aus und setzt

1) Vgl. den viel allgemeineren Satz bei Stirling (*Lineae tertii ordinis Neutonianae*, Oxoniae 1717), den ich in meinen Bemerkungen zu diesem Buch (Biblioth. Mathem. 14_3, 1913/4, S. 57) wiedergegeben habe.

(Fig. 2) $HM = x$, $Cm = z$, $CG = r$, $ZC = HG = a$[1]). Dann findet er aus Fig. 2, sowie aus den Figuren 3, 4, die den zwei anderen Lagen von Z und P entsprechen, die Proportion

$$\begin{aligned} HM : HG &: : MK : DK \\ &: : CL : Cp \\ &: : CG : Cm, \end{aligned}$$

oder also $x = \frac{ar}{z}\cdot$ Ferner setzt er die Ordinaten $PM = y$, $pm = v$, so daß er aus $CG : Cm : : GL(PM) : pm$ sofort findet $y = \frac{rv}{z}\cdot$

Diese Ableitung ist im Wesen mit der (1740) von de Gua gegebenen identisch. Ja für die Abszissen macht Murdoch eine eigene Figur (Fig. 8 auf Tfl. IV), die die Linien der Vertikalebene allein wiedergibt, und die an dieser Figur gemachte Ableitung stimmt vollständig mit der de Guaschen überein.[2])

Murdoch zeigt nun an einigen Beispielen, zuletzt an der allgemeinen Gleichung $y^m = px^n + qx^{n-1} + sx^{n-2} + tx^{n-3} + \text{etc.} + w$, wie man durch die gefundene Substitution die Gleichung der projizierten Kurve erhält, und bemerkt zum Schluß, die entstandene Gleichung unterscheide sich, wenn die Abszissenachse („Abszissa“) eine der Projektionsachse parallele Gerade sei, wie QL (Fig. 2) in der Form nicht von der vorhin abgeleiteten, nur sei statt des primären Radius CG der sekundäre Radius $CL = r$ zu nehmen, und die neuen Ordinaten seien schief zur „Abszisse“.[3])

---

1) Nicht zu verwechseln mit der in Fig. 2 wirklich angegebenen Strecke a, die gleich $Ll (= L\lambda)$ ist.

2) Vgl. *Usages de l'Analyse de Descartes. Pour découvrir, sans le secours du Calcul Differentiel, les Proprietés, ou Affections principales des Lignes Géométriques de tous les Ordres.* Par Jean Paul de Gua de Malves, Prêtre, . . ., Académicien de l'Académie Royale de Bordeaux. A Paris, Chez Briasson, . . . [et] Piget, . . . — M.DCC.XL. S. 200—202. S. a. Cantors *Vorles.* 3², Leipzig 1901, S. 797 und P. Sauerbeck, *Einleitung in die analytische Geometrie der höheren algebraischen Kurven nach den Methoden von Jean Paul de Gua de Malves* (= Abhandl. z. Gesch. d. Math. Wissensch. XV. Heft), Leipzig 1902, S. 94/95. Sauerbeck gibt die Figur (im Wesen) und die Ableitung ganz nach de Gua wieder. De Gua nimmt die Horizontalebene als Bildebene und nennt Murdochs „Linea Extremorum“ „Directrice“, die „Linea Horizontalis“ „Antidirectrice“. Ob Murdoch das de Guasche Büchlein kannte, sei dahingestellt. Er erwähnt es nicht. Ob de Gua der erste war, der diese wichtigen Transformationsgleichungen aufstellte, weiß ich ebenfalls nicht. Es ist das nicht unwahrscheinlich. Denn de Gua benutzt sonst jede Gelegenheit, seine Vorgänger zu nennen, um an ihnen herumzukritisieren. Hier sagt er aber nichts von Vorgängern.

3) Die neue Abszissenachse wird eben in diesem Falle CL, während die zugehörigen neuen Ordinaten zu LS parallel bleiben. Es sei bemerkt, daß die alten Analytiker von Descartes und Fermat an bis über die Mitte des 18. Jhrb. hinaus häufig von vorneherein die Koordinaten schiefwinklig zueinander nahmen oder schiefwinklige Koordinaten eigens einführten. Ersteres hat wohl den Grund, daß für viele Dinge

Ganz ähnlich macht es Murdoch in dem zweiten Falle (S. 34/35), wenn die Abszissenachse[1]) die „Linea Extremorum“ schief schneidet. Diese Achse sei in der Fig. 1 die Gerade $P\Pi$ und sie treffe LS in g, RV in H. Die Projektion von $P\Pi$ ist dann $gp\pi c$. Diese Gerade wird zur neuen Abszissenachse genommen und $H\Pi = x$, $c\pi = z$, $Zc = a$, $cg = r$ gesetzt. Dann erhält man wie vorhin $x = \frac{ar}{z}$. Nun denkt sich Murdoch die Grundkurve so transformiert, daß ihre Ordinaten zur „Linea Extremorum“ parallel werden. Dann hängt das neue y wie im ersten Falle durch die Gleichung $y = \frac{rv}{z}$ mit v und z zusammen. Den Schluß des zweiten Abschnittes bilden einige allgemeine Bemerkungen, in denen auf Stirlings *Lineae tertii Ordinis* [Oxford 1717] und auf Maclaurins *Geometria organica* [London 1720] hingewiesen wird.

Bevor ich nun Weiteres über die folgenden zwei Abschnitte des Murdochschen Werkes mitteile, möchte ich ein paar Worte über die schon erwähnte Übersetzung sagen. Das Buch, in dem diese enthalten ist, hat den Titel:

> Nouveaux Principes de la Perspective linéaire, Traduction de deux Ouvrages, L'un Anglois, du Docteur Brook Taylor. L'autre Latin, de M. Patrice Murdoch. Avec un Essai sur le Mêlange des

---

(Kegelschnittgleichungen, Newtonsche divergente Parabeln) der Koordinatenwinkel wirklich belanglos ist, letzteres scheint mir dadurch veranlaßt zu sein, daß diese alten Geometer noch nicht recht mit Funktionen von Winkeln algebraisch zu rechnen wußten (vgl. meine Bemerkung Biblioth. Mathem. 14_3, 1914, S. 61, Fußnote 1).

1) Eine „Ordinatenachse“ ist Murdoch, wie den meisten seiner Vorgänger, noch fremd. Wohl findet sich eine solche da und dort, wo ihre Benutzung in der Natur der Sache lag, schon früher. Auch Anläufe zu einer konsequenten Einführung der zweiten Achse trifft man an. Man sehe z. B. die Ausführungen auf S. 127/28 der *Commentaires sur la Géométrie de M. Descartes.* Par le R. P. Claude Rabuel, de la Compagnie de Jesus. — A Lyon, Chez Marcellin Duplain, Ruë Merciere. — MDCCXXX. Man lese auch die Vorwürfe, die de Gua auf S. 366/67 des angeführten Werkes Newton macht, daß er bei seiner Aufzählung der Kubiken die „Directrice des x“, worunter er die y-Achse versteht, gegenüber der „Directrice des y“ vernachlässigt habe. Ich konnte aber bisher nicht sehen, daß vor G. Cramer (in der *Introduction à l'Analyse des Lignes Courbes Algébriques,* Genève MDCCL) irgend jemand die beiden Koordinaten und deren Achsen von vorneherein als ganz gleichberechtigt eingeführt hat (s. dort S. 3/4). In L. Eulers kurz vorher erschienenen *Introductio in Analysin Infinitorum* (Tom. II, Lausannae MDCCXLVIII) ist das noch keineswegs der Fall, wiewohl auch dort ein Anlauf gemacht ist (s. S. 14/15). Man sieht den Unterschied am besten, wenn man in beiden Werken die Figuren zum Cap. II, das in jedem von der Koordinatentransformation handelt, vergleicht (Cramer, S. 38f., Euler, S. 12f.). Freilich haben auch die Cramerschen Figuren die Eierschalen der ursprünglichen Auffassung noch nicht abgestreift, und seine y-Achsen wissen noch gar nicht recht, wozu sie eigentlich da sind.

Couleurs, par NEWTON. Avec Figures. [Vignette.] A Amsterdam, Chez Westein. — M. DCC. LVII.[1])

Wenn man mit dem Titelblatt zu zählen beginnt, so hat das Buch (12) + liv + (2) + 127 + (1) Seiten 8°. Die Ausstattung ist fast genau dieselbe wie bei dem Werk von MURDOCH. Am Schlusse sind sechs Tafeln mit 29 Figuren beigegeben[2]), von denen nur die letzten vier zur MURDOCHschen Schrift gehören. Die ersten 12 unpaginierten Seiten enthalten außer dem Titelblatt nur ein Druckfehlerverzeichnis und eine sehr ausgedehnte Table des Matières. Die 54 römisch paginierten Seiten werden eingenommen von der Préface du Traducteur (S. j—xxix), von einer kurzen geometrischen Erläuterung der Hauptaufgabe der Perspektive (S. xxix—xxxvij) und der Übersetzung von TAYLORS Einleitung (S. xxxvij—liv). Auf den zwei nächsten Seiten teilt der (nirgends genannte) Übersetzer mit, daß soeben auch eine italienische Übersetzung des TAYLORschen Werkes durch den Minimenpater FRANÇOIS JACQUIER erschienen sei.[3]) Die französische Übersetzung nimmt hier sodann die ersten 88 Seiten ein. Von dem MURDOCHschen Werk ist nur der erste Abschnitt übersetzt (S. 109/10 Titelblatt, dann S. 111—127). Dazwischen ist ein „Supplément" eingeschoben mit zwei Artikeln, die auch von TAYLOR zu stammen scheinen. In dem ersten (S. 89—92) ist ein, wie der Verfasser selbst sagt, noch nie in die Praxis umgesetztes Verfahren beschrieben, um Projektionen auf irgendeiner unregelmäßigen Fläche zu entwerfen, in dem zweiten Artikel (S. 93—108) wird eine ebenfalls nur theoretisch ausgedachte Methode zum Mischen der Farben beim Malen angegeben, die aus NEWTONS *Optik* [London 1704] abstrahiert ist.[4])

Die Übersetzung des Abschnittes aus MURDOCH[5]) ist, abgesehen von ein paar Kleinigkeiten, ziemlich wörtlich[6]), nur daß der Herausgeber die

1) Ich benütze das Exemplar der K. Hof- und Staatsbibliothek München, doch hat auch z. B. die K. Landesbibliothek Stuttgart ein Exemplar. Das Buch ist also ursprünglich 1757 erschienen und nicht 1759, wie LORIA (a. a. O.) und CHR. WIENER, *Lehrbuch d. darstell. Geometrie*, I. Bd., Leipzig 1884, S. 20 angeben. An der letzten Stelle ist außerdem noch alles übrige durcheinander geworfen.

2) Bei MURDOCH sind die Figuren nicht durchnumeriert, sondern zum Teil mit AA, BB usw. bezeichnet.

3) *Elementi di prospettiva secondo li principi di BROOK TAYLOR con varie aggiunte spettanti all'ottica e alla geometria.* Roma 1755. (Zitat nach LORIA, a. a. O. S. 601.)

4) Die Angabe auf dem Titelblatt ist also etwas irreführend.

5) Es sei erwähnt, daß auch dieser Übersetzer nur von einer Ausgabe London 1746 weiß (s. S. xxxviij).

6) In den Mémoires pour l'Histoire des sciences et beaux-arts commencés ... 1701 à Trevoux (Paris Aoust 1758, S. 2073/76) befindet sich eine (nicht gezeichnete) Rezension der *Nouveaux Principes,* in der es auch nur heißt (S. 2074): „Quant à la Traduction Françoise qu'on nous donne, elle paroît aussi de bonne main".

Ausdrücke, die er in der Übersetzung des Taylorschen Buches gebraucht hatte, auch hier anwendet. So sagt er für den Pol „point de l'œil", für die Projektionsebene „tableau", für die Basisebene „plan objectif". Er nennt die Linie LS „l'intersection" der Objektebene, die Horizontallinie CI „ligne de fuite" der Objektebene, die Achse ZC „distance du tableau", den Punkt C „centre du tableau". Für die Ebene ZRV führt er die Benennung „plan de direction" ein, und die „Linea Extremorum" erhält den Namen „ligne de direction". Die Figuren sind den Murdochschen nicht gerade kongruent, entsprechen ihnen aber in allem Wesentlichen.[1])

II.

Ich kehre zu Murdochs Original zurück. Der dritte Abschnitt (S. 37–73) ist Beispielen gewidmet, in denen hauptsächlich gezeigt wird, wie Kegelschnitte aus einem Kreis durch Projektion gewonnen werden können. Ich glaube nicht, daß dieser Abschnitt etwas wesentlich Neues enthält. Hat doch schon de La Hire die ganze Polarentheorie der Kegelschnitte entwickelt, indem er diese als Projektionen des Kreises betrachtete.[2]) Auch war die Lehre von den Kegelschnitten um 1746 schon längst so ausgebaut, daß Murdochs Anwendungen der Perspektive auf die Lösung von Aufgaben, wie der, einen Kegelschnitt durch fünf Punkte zu legen, kein Interesse bieten können vom Standpunkt der geschichtlichen Entwicklung aus.[3]) Auch was er über die stereographische und gnomonische Projektion

---

Nach der *Bibliothèque de la Compagnie de Jésus* von de Backer et Sommervogel ist aber der Verfasser der Übersetzung Antoine Rivoire (1709—ca. 1789) gewesen. Dort ist auch angegeben, daß eine zweite Auflage der Übersetzung zu Lyon 1759 in 8° erschien, die nicht anonym gewesen sein soll. Auch die erste Auflage soll übrigens in Wirklichkeit in Lyon herausgekommen sein.

1) In der Fig. 26, die Murdochs und unserer Fig. 1 entspricht, ist rechts und links vertauscht. Auch sind die Indices dort vor die Buchstaben geschrieben ($2P$, $3p$), während sie im Text (S. 118/19) als Exponenten gesetzt sind (P^2, p^3). Bei dieser Gelegenheit sei erwähnt, daß sich die erstere von Schooten 1649 eingeführte Indexbezeichnung ($2P$; s. o. die Fußnote 2 auf S. 324) durch das ganze 18. Jahrhundert hindurch fortpflanzte. Sie findet sich z. B. noch in der 3. Auflage von A. G. Kaestners *Anfangsgründen der Analysis endlicher Größen* (= *Der mathem. Anfangsgründe III. Teil* (2 Bände, Göttingen 1794; vgl. Band 1, S. 398).

2) Zuerst in der schon erwähnten *Nouvelle Méthode* etc. (Paris 1673), dann besser und ausführlicher in dem großen Werk *Sectiones Conicae* etc. (Paris 1685). Murdoch stellt (für den Kreis) auch einige Polareigenschaften zusammen (S. 69—73), ohne aber von der harmonischen Teilung auszugehen. Er verweist auch nur auf de l'Hospitals ‚Erfindungen" und die Zusätze von Maclaurin in Art. 609 seines *Treatise of Fluxions*.

3) Murdoch nennt die Schnittpunkte von AB und CE einerseits, BC und AD andrerseits M und N, projiziert die fünf Punkte A, B, C, D, E dann so, daß MN ins Unendliche rückt und im Bild ab, ce sowie bc, ad parallel werden. Durch a, b, c, d, e denkt er dann den Kegelschnitt gelegt und zurückprojiziert.

sagt, war ja längst bekannt. Vielleicht ist aber erwähnenswert, daß Murdoch nachweist, die „Transmutatio Curvarum", die Newton im 22. Lemma des ersten Buches seiner *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* [London 1687] anwende[1]), sei mit der perspektiven Umformung identisch.

Am meisten wird Murdochs Werk wohl zitiert wegen des vierten Abschnittes (S. 74—126), der fast die Hälfte des Buches umfaßt und zu dem das Vorhergehende in der Tat nur die Vorbereitung bildet. Man sagt, er habe einen Beweis geliefert für den Newtonschen Satz[2]), daß alle Kurven 3. Ordnung aus fünf Formen, den sog. divergenten Parabeln, durch Projektion abgeleitet werden können. Wenn man es so faßt, dann ist Murdochs „Beweis" allerdings ungefähr 50 Seiten lang. Denn was Murdoch gibt, ist einfach eine Aufzählung aller Formen. Er erteilt, von jeder der fünf divergenten Parabeln ausgehend, der „Linea Extremorum" alle möglichen Lagen, indem er sie zunächst parallel zu den Ordinaten der Grundkurve verschiebt und dann um einen festen Punkt der Kurve sich drehen läßt.[3]) Der Beweis besteht dann eben darin, daß durch konsequente Anwendung dieses Verfahrens alle Formen sich ableiten lassen. Irgend etwas wesentlich Neues gibt Murdoch auch in diesem Abschnitt nicht. Denn der Satz selbst war schon von Fr. Nicole[4]) und A. C. Clairaut[5]) bewiesen worden, und auch das, was de Gua in dem öfters schon angeführten Werke auf S. 223/24 sagt, kann als Beweis für den fraglichen Satz angesehen werden.[6]) Murdochs Verdienst liegt nur in der völligen Durchführung des Gedankens.

1) Murdoch druckt das ganze Lemma im Wortlaut ab.

2) *Enumeratio Linearum tertii Ordinis.* Anhang zu Newtons *Opticks* (London 1704), Abschnitt XXIX.

3) Daß Newton selbst durch wirkliche Projektion auf die verschiedenen Formen gekommen ist, scheint aus noch vorhandenen Manuskripten hervorzugehen. W. W. Rouse Ball, der über die *Enumeratio* einen auch historisch interessanten Artikel geschrieben hat, zweifelt kaum, daß Newton sich wesentlich auf das oben erwähnte 22. Lemma des I. Buches der *Principia* stützte. Siehe W. W. Rouse Ball, *On Newtons Classification of Cubic Curves;* Proceedings of the London Math. Society **22**, 1891, S. 104—143, bes. S. 123.

4) *Manière d'engendrer dans un corps solide toutes les lignes du troisième ordre.* Mém. Acad. Paris, Année 1731, Paris 1733, S. 494—510 (eingereicht 1. Dez. 1731).

5) *Sur les courbes que l'on forme en coupant une surface courbe quelconque par un plan donné de position.* Ebenda S. 490—493 (eingereicht 12. Dez. 1731).

6) R. Ball hat dies offenbar übersehen. Sauerbeck aber weist darauf hin (a. a. O. S. 97). Es sei erwähnt, daß auch Ball eine Ausgabe des Murdochschen Werkes Leyden 1740 anführt und unsere Ausgabe für eine zweite Auflage erklärt (S. 124), und scheinbar zitiert er nach der Leydener Ausgabe (S. 118). Die Zitate stimmen aber jedenfalls durchweg mit der Ausgabe London 1746.

Man sagt ferner, Murdoch habe zu den 72 Newtonschen und den vier von Stirling ergänzten Arten[1]) noch zwei weitere gefügt. Aber die Priorität für diese beiden Arten gebührt, was den Zeitpunkt der Veröffentlichung betrifft, de Gua.[2]) Ferner hat auch E. Stone in einem Brief vom 31. Juli 1736 auf dieselben beiden Arten aufmerksam gemacht.[3]) Außerdem sagt Murdoch von der einen Art selbst[4]), daß ihr Fehlen schon Nikolaus Bernoulli bemerkt[5]), und daß ihn Cramer auf sie hingewiesen habe.

Neu scheint bei dieser Aufzählung nur zu sein, daß Murdoch bei der „Parabola pura", d. i. der nicht singulären Form ohne Oval, drei Formen unterschied, indem er aus der Gleichung $y^2 = x^3 + kx^2 + h^2x + kh^2$ die horizontalen Tangenten bestimmte (S. 90/91), deren es entweder zwei reelle oder zwei imaginäre Paare gibt, während im Übergangsfalle zwei Doppelpaare existieren, die mit den Wendetangenten identisch sind. Ich setze Murdochs eigene Worte hierher. Auf S. 95 sagt er:

> „Tangentes autem in Parabolâ *Campaniformi* coibunt ad Partes verticis, in *Ampullatâ* ad Partes Crurum, vel in eâ quae inter utramque *Media* est erunt sibi invicem parallelae."

Nach unserer Ausdrucksweise ist die „Parabola ampullata" eine „Viereckskurve", weil sie in den Vierecken des durch die drei Wendetangenten und die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte gebildeten vollständigen Vierseits verläuft, die „Parabola campaniformis" eine Dreieckskurve, und die dritte steht inmitten.[6]) Murdochs Verdienst wäre aber weit größer,

1) J. Stirling, *Lineae tertii Ordinis Neutonianae*, Oxoniae 1717, S. 99 u. 102.

2) S. dessen *Usages* etc., Paris 1740, S. 367/68. Ich nehme allerdings an, daß die Ausgabe Leyden 1740 von Murdochs Werk nicht existiert.

3) Der Brief wurde erst veröffentlicht in Nr. 456 der Philosoph. Transactions, Vol. XLI, Part I, 1739/40, London 1744, S. 318/20.

4) S. 87/88; die andere Art ist S. 77 aufgeführt.

5) Auch Ball (siehe a. a. O. S. 118) wußte offenbar nicht, wo Nik. Bernoulli die Bemerkung gemacht hat (vgl. G. Eneström, Biblioth. Mathem. 14_3, 1913/14, S. 267/68).

6) „Media" kann man, obwohl es im Text hervorgehoben ist, doch wohl nicht als eine Artbezeichnung nehmen. Auch auf S. 91 sagt Murdoch: „*Si* $\frac{1}{9}k^2 = \frac{1}{3}h^2$, erit inter *Campaniformam*(!) et *Ampullatam* media", verwendet das Wort „media" also nur im Satz und ohne Hervorhebung. G. Loria teilt in seinem Werke *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven* (Leipzig 1902, S. 18; 2. Aufl., I. Bd., Leipzig 1910, S. 18) unrichtigerweise mit, daß Murdoch die Mittelform „neutralis" genannt habe. Übrigens stammt nur der Ausdruck „ampullata" von Murdoch. Die Bezeichnung „campaniformis" hatte schon Newton (*Enumeratio*, Abschn. XXVII) für die „Parabola pura" überhaupt, wobei er allerdings wohl nur an die flache Form dachte, gebraucht. In meinem Büchlein *Algebraische Kurven*. I (Sammlung Göschen, Nr. 435, Leipzig 1914) ist die eine Kurve der Fig. 6 (S. 19) „ampullata", die eine Kurve der Fig. 5 (S. 16) die Zwischenform, während die Gestalt der „Parabola campaniformis" aus dem unendlichen Zweig der Kurve *II* von Fig. 14 (S. 32) ersehen werden kann, wo Kurve *I* ebenfalls „ampullata" ist.

wenn er diese drei Formen nun auch als eigene Arten gebucht hätte, wie das später von A. F. Möbius geschehen ist.[1]) Die ganze innere Haltlosigkeit des Newtonschen Einteilungsprinzips geht aber schon daraus hervor, daß diese drei Formen nur eine Art bilden, während diejenigen drei Projektionen, bei denen die Verbindungslinie der drei reellen Wendepunkte die unendlich ferne Gerade ist, als drei Arten aufgezählt werden[2]), hingegen diejenigen Projektionen, bei denen nur ein Wendepunkt unendlich fern ist, wieder als eine Art gelten.[3]) Doch will ich auf diese Einteilungsfragen nicht weiter eingehen.

Wenn ich noch erwähne, daß Murdoch zwischen die Aufzählung der Kubiken hinein ein paar Sätze einschiebt, die von den Schnittpunkten der Verbindungslinien handeln, die zwischen den Berührungspunkten gewisser Tangenten gezogen werden können, Sätze, die aber im Jahre 1746 durch Maclaurin überholt waren[4]), so habe ich wohl alles Wesentliche beigebracht, was über Murdochs Werk gesagt werden kann. Und ich knüpfe an mein eingangs angedeutetes Urteil an. Ich glaube nicht, daß Murdoch etwas bringt, was im Jahre 1746 nicht schon bekannt war oder was zu jener Zeit[5]) nicht jeder Geometer zweiten Ranges, der imstande war, die Schriften derjenigen ersten Ranges[6]) zu verstehen, nicht ebenso gut hätte ausführen können. Aber es war vielleicht nützlich, dieses Urteil durch ausgedehntere Belege zu bekräftigen.

---

1) *Über die Grundformen der Linien 3. Ordnung.* Abhandl. d. Königl. Sächs. Gesellschaft d. Wissensch. in Leipzig (math.-phys. Klasse) 1, 1852, S. 1—82, bes. S. 81 (= *Gesammelte Werke* 2, Leipzig 1886, S. 89—176, bes. S. 175).

2) Es sind das die Species 22, 23 und 32 bei Newton, die durch die Figuren 28, 29 und 38 wiedergegeben sind.

3) Die Species 45 von Newton. Dazu gibt Newton selbst zwei Figuren, die der „ampullata“ (Fig. 48) und der „campaniformis“ (Fig. 49) entsprechen.

4) Es handelt sich um Sätze der Art, wie einen die Fig. 46 (S. 185) meiner *Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung* (Leipzig 1905) darstellt, jedoch noch nicht so allgemein. Murdochs Theoreme und Lemmata sind nur Spezialfälle der (zwei) Maclaurinschen Sätze, für die Murdoch den Artikel 401 des *Treatise of Fluxions* [Edinburgh 1742, 1, S. 335] anführt.

5) Das nämliche gilt auch für das Jahr 1740, wenn etwa wirklich eine erste Auflage schon 1740 erschienen wäre.

6) Zu diesen letzteren wäre ich auch geneigt de Gua zu zählen.

Jules Molk (1857–1914) als Förderer der exakten mathematisch-historischen Forschung.

Von G. Eneström in Stockholm.

Durch die Überschrift dieses Artikels habe ich hervorheben wollen, daß es sich nicht um einen eigentlichen Nachruf für den kürzlich hingeschiedenen Mathematiker und Universitätslehrer handelt. Nur als Einleitung bringe ich einige biographische Daten.

Am 8. Dezember 1857 in Straßburg geboren, hat Jules Molk erst am protestantischen Gymnasium daselbst, dann an der Gewerbe- und Realschule in Mülhausen seine Elementarbildung bekommen. Im Jahre 1874 ging er nach Zürich, wo er am eidgenössischen Polytechnikum studierte und 1877 diplomiert wurde. Seine wissenschaftlichen Studien setzte er in Paris und Berlin fort; in Berlin hatte er Kronecker zum Lehrer und in Paris wurde er 1884 „docteur ès sciences mathématiques". Kurze Zeit nachher wurde er Privatdozent an der Universität in Rennes, siedelte 1885 nach Besançon über, erst als Privatdozent, dann (1888) als Professor der Mechanik an der Universität. Seit 1890 war er Professor an der Universität in Nancy, 1890—1898 für angewandte Mathematik und seit dem 26. Dezember 1898 für rationale Mechanik. Jules Molk starb daselbst am 7. Mai 1914.

Weder über Molks selbständige wissenschaftliche Arbeiten noch über seine Verdienste als Universitätslehrer habe ich hier zu berichten, sondern ich beschränke mich auf seine Wirksamkeit als Herausgeber der französischen Ausgabe der mathematischen Enzyklopädie. Auch mit der großen Mühe, welcher er sich in dieser Eigenschaft unterzogen hat, werde ich mich nur insofern beschäftigen, als das Unternehmen beabsichtigt, mathematisch-historische Kenntnisse zu verbreiten.

Im Jahre 1902 ist Molk zum Herausgeber der *Encyclopédie des sciences mathématiques* erwählt worden, und am 11. August 1904 wurde das erste Heft des Werkes in Heidelberg dem dritten internationalen Mathematikerkongresse vorgelegt. Noch nach mehr als zehn Jahren erinnere ich mich lebhaft meiner angenehmen Überraschung, als ich im Ausstellungssaale des Kongresses vom Inhalt des Heftes Kenntnis nahm und dabei fand, wie zahlreich und gut redigiert die mathematisch-historischen Notizen waren. Einen Ausdruck gab ich meiner Freude etwas später in einem Artikel der Bibliotheca Mathematica.[1])

Daß die *Encyclopédie des sciences mathématiques* von Anfang an großes Gewicht auf korrekte mathematisch-historische Angaben legte, war nicht ausschließlich das Verdienst des Herausgebers selbst, sondern zum großen Teil seinem Freunde Paul Tannery zu verdanken. Allein dieser starb schon wenige Monate nach dem Erscheinen des ersten Heftes der *Encyclopédie.* Da es nun unmöglich war, wenigstens in Frankreich einen Ersatz für ihn zu finden, hätte man fürchten können, daß der Herausgeber, der ja kein Fachmann auf dem mathematisch-historischen Gebiete war, sich begnügt hätte, die historischen Notizen der deutschen Ausgabe mehr oder weniger wörtlich wiederzugeben. Jetzt kam indessen glücklicherweise das Interesse zum Vorschein, das Molk selbst für die Geschichte seiner Wissenschaft hegte. Schon ein paar Monate nach dem Tode Paul Tannerys ergriff er Maßregeln, um einen Ersatz für den verstorbenen Mitarbeiter zu finden, und am 3. Februar 1905 schrieb er mir:

> Voulez-vous collaborer à notre édition française de l'Encyclopédie . . .? Ce serait un bien pour le développement des études scientifico-historiques en France où nous en aurions grand besoin.

Ich erklärte mich bereit, die Arbeit zu übernehmen, und damit begann ein neunjähriger, ab und zu sehr lebhafter Briefwechsel zwischen uns in betreff der historischen und bibliographischen Angaben der *Encyclopédie des sciences mathématiques.* Auf Grund dieses Briefwechsels dürfte ich recht kompetent sein, zu beurteilen, wie sorgfältig Molk verfuhr, um die Angaben möglichst korrekt und vollständig zu machen.

Über den allgemeinen Standpunkt Molks in betreff des Nutzens, mathematisch-historische Notizen in die *Encyclopédie* einzufügen, gibt der folgende Auszug aus seinem Briefe vom 3. Februar 1905 nähere Auskunft:

> Vos critiques [2]) sont excellentes, mais elles ne contribuent pas, dans la même mesure, au développement de la science de l'histoire des mathématiques en France, parceque tout naturellement les lecteurs s'attachent tout d'abord au texte et aux notes ... Voulez-vous nous donner votre appui pour l'atteindre [3]) du côté des recherches concernant l'histoire de la science? Je ne vous dis pas que tous nous vous en serions reconnaissants, cela va de soi . . . Je vous dis que je crois que ce serait faire œuvre utile pour le progrès de la science.

1) G. Eneström, *Ein neues literarisches Hilfsmittel zur Verbreitung mathematisch-historischer Kenntnisse;* Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 398—406.

2) Ich hatte die Veröffentlichung einer Sammlung von Berichtigungen und Verbesserungen der historischen Angaben des erschienenen Heftes der *Encyclopédie* angeregt und einen ersten Beitrag dazu geliefert.

3) Molk hatte als Ziel der *Encyclopédie* angegeben, eine möglichst verbesserte Redaktion der deutschen Ausgabe zu bringen.

Der Gedanke, daß die historischen Angaben der *Encyclopédie* dazu beitragen sollten, in Frankreich das Interesse für die Geschichte der Mathematik zu erwecken, kommt in Molks Briefen oft zum Ausdruck. So z. B. schrieb er am 14. Februar 1905:

> notre édition française sera, je crois, vraiment l'occasion d'un *réveil* en France du goût de l'histoire des mathématiques

und am 21. Oktober 1905 spricht er noch einmal von dem Nutzen, bei dem Leser der *Encyclopédie* „éveiller le goût des études historiques en mathématiques".

Daß Molk als Mathematiker großes Gewicht darauf legen würde, gute Übersichten der historischen Entwicklung der besonderen Theorien zu bieten, liegt in der Natur der Sache, und daß seine Bemühungen in dieser Richtung erfolgreich waren, wird der sachkundige Leser leicht konstatieren können. Beispielsweise ist das „Aperçu historique" des Artikels „Nombres complexes"[1]) meiner Ansicht nach die beste und zuverlässigste bisher veröffentlichte Übersicht der Geschichte der imaginären Zahlen. Es mag sein, daß Molk in diesem Falle nur geringe eigene Mühe gehabt hat, weil der Verfasser des Artikels, Herr E. Cartan, selbst im Besitze der nötigen mathematisch-historischen Kenntnisse war und sie für das „Aperçu historique" verwerten konnte, aber in gewissen anderen Fällen ist Molk nachweislich wirksam gewesen, um die historischen Übersichten zu ergänzen oder zu verbessern.

Der Umstand, daß Molk sich sehr für die Korrektheit der einzelnen historischen und bibliographischen Angaben der *Encyclopédie* interessierte, kann dem Mathematiker von untergeordneter Bedeutung erscheinen, aber in Wahrheit ist dieser Umstand gar nicht bedeutungslos. Wie ernstlich Molk selbst seine Aufgabe in betreff solcher Angaben faßte, davon zeugen seine Briefe an mich, und als Beispiel drucke ich hier die folgenden Auszüge ab.

> [J. Molk den 31. Mai 1905.] J'ai à vous demander si (Note 171 de l'article I 3) l'ouvrage cité[2]) de Tacquet est de **1656** ou de **1665**. Dans l'article cité de la Bibl. math. on dit, il est vrai, 1656, mais partout sans cela je trouve 1665. Et si c'était 1665, ce serait bien après Wallis. Y a-t-il peut-être en 2 éditions, l'une en 1656 et l'autre en 1665?

> [J. Molk den 28. Dezember 1905.] Dans l'article I 1 j'ai cité aux notes 95, 180 et 188 le 2ième *Trattati* de Boncompagni avec l'année d'édition Rome 1858. Dans l'article I 3 j'ai cité ce même *Trattati* avec la même année d'édition à la note 94. J'ai fait cela d'après l'exemplaire de la Bibl. royale de Berlin que j'ai consulté à Berlin, car il n'existe pas à Paris. Il y a donc des feuilles de

1) *Encyclopédie des sciences mathématiques* I: **1**:3, Leipzig 1908, S. 329—339.

2) Siehe a. a. O. I: **1**:2, Leipzig 1907, S. 179. — Genaue Auskunft über die Frage bringt Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 287.

couverture portant 1858 et d'autres portant 1857. Et nous pouvons, je crois, dans ces conditions, citer soit 1857 soit 1858. Pour ne pas m'attirer de lettres m'indiquant une divergence dans ma façon de citer le même ouvrage, je serais d'avis de continuer à mettre 1858 conformément à l'exemplaire de Berlin. Et de dire dans la Tribune publique[1]) l'observation que le 2ième *Trattati* porte en réalité 1858 sur la couverture de certains exemplaires et 1857 sur la couverture d'autres exemplaires.

[J. Molk den 30. April 1906] Un passage de J. A. Serret, *Algèbre sup.* me gène beaucoup. On y dit que Labatie a déjà donné sa méthode bien connu en 1832 sans dire où, et personne à Paris n'a pu me renseigner à ce sujet. Son petit livre est de 1835. Avez-vous quelque idée à ce sujet? Cela doit être exact, sans quoi Serret ne l'aurait pas dit expressément après avoir cité 1835 comme l'année d'édition de l'ouvrage connu[2])

Auch um die schon gebrachten mathematisch-historischen Angaben zu berichtigen, opferte Molk einen verhältnismäßig großen Teil seiner Zeit. In meinem oben zitierten Artikel aus dem Jahre 1904 hatte ich die Veröffentlichung eines Korrespondenzblattes für den fraglichen Zweck angeregt, und dieser Anregung folgte Molk durch Herausgabe der Tribune publique, deren erste Nummer am 20. März 1906 als Beilage des Heftes I: 4 : 1 der *Encyclopédie* erschien; von der Tribune publique sind zusammen 25 Nummern veröffentlicht worden, die letzte am 15. März 1915 als Beilage zum Heft IV: 1 : 1. Alle Notizen der Tribune publique, die nicht französisch geschrieben waren, hat Molk selbst übersetzt und überdies nicht selten die Redaktion der Notizen verbessert. In einigen Fällen repräsentieren diese Notizen die neuesten Resultate der mathematisch-historischen Forschung. Im Jahre 1910 begann Molk die Bearbeitung der Notizen, die sich auf den Band I : 1 beziehen, um sie am Ende dieses Bandes abzudrucken. Am 26. August 1910 schreibt er:

Je vais vous faire envoyer un ou deux placards, à titre d'essai, du commencement des compléments du tome I volume 1 de l'édition française de *l'Encyclopédie* . . . Après avoir discuté avec Gauthier-Villars et vous la disposition à adopter, je ferai mettre ces deux placards en pages et je les ferai imprimer et tirer sous leur forme définitive. Ils serviront de type au véritable travail définitif qui ne commencera qu'au printemps prochain.

Indessen hatte er, soviel ich weiß, diese endgültige Arbeit noch im Mai 1914 nicht begonnen.

Für die meisten Benutzer der historischen Angaben der *Encyclopédie des sciences mathématiques* muß das Werk in erster Linie ein Nachschlagebuch sein, und von diesem Gesichtspunkte aus ist es von großem Belang, daß das Werk mit einem ausführlichen Namen- und Sachregister versehen

1) Siehe Tribune publique 3, 1907, S. 7.

2) Vgl. über diese Frage *Encyclopédie des sciences mathématiques* I: 2 : 1, Leipzig 1907, S. 123.

wird. Dieser Umstand war nicht der Aufmerksamkeit des Herausgebers entgangen. In einem Artikel aus dem Jahre 1906[1]) hatte ich den Umstand besonders hervorgehoben, und als ich einen Sonderabdruck des Artikels an Molk gesandt hatte, schrieb er am 12. November 1906:

> J'ai lu avec attention votre communication concernant les Index des publications des types de notre *Encyclopédie*. C'est la même thèse dont j'ai parlé à Gauthier-Villars ... D'ailleurs quand d'ici un an environ il s'agira de faire effectivement le premier Index de l'édition française de l'*Encyclopédie*, vous savez bien que j'aurai soin d'entrer avec vous en correspondance à ce-sujet. Peut-être (et ce serait le mieux) pourrions-nous nous arranger à nous rencontrer (à Copenhague par exemple) pour discuter à fond les détails d'une question si importante pour l'utilisation de l'*Encyclopédie*.

Unser Zusammentreffen wurde indessen verschoben, weil die Herausgabe des Bandes I : **1** sich verzögerte. Erst vier Jahre später schrieb Molk am 26. August 1910 über denselben Gegenstand:

> Les renseignements bibliographiques et les Index sont déjà dans mon tiroir pour le volume 1 mais sous une forme amorphe.

Leider ging es sehr langsam mit der Herstellung des Registers, und erst am 18. November 1913 teilte mir Molk mit, daß er begonnen hatte, sich ernstlich mit der Arbeit zu beschäftigen. Allein im März 1914 war der Index noch nicht fertig, und zwei Monate später ist Molk gestorben.

* * *

Von den produktiven Mathematikern kann man natürlich nur ausnahmsweise direkte Mitarbeit an der mathematisch-historischen Forschung verlangen. Dagegen dürfte es erlaubt sein, von ihnen zu fordern:

1. daß sie nicht, sei es durch weitere Verbreitung unzuverlässiger Angaben, sei es durch Empfehlung von Werken, die eine große Menge solcher Angaben enthalten, der exakten Forschung schaden;
2. daß sie, soweit es ihnen möglich ist, die Arbeit der exakten Forschung befördern.

Diese beiden Forderungen hat Jules Molk als Herausgeber der *Encyclopédie des sciences mathématiques* auf eine sehr anerkennenswerte Weise erfüllt. Er war unablässig bemüht, um, wenn irgend möglich, nur exakte historische Angaben zu bieten, und er ist in der Lage gewesen, sein Interesse für exakte mathematisch-historische Forschung wirksam zu betätigen. Wann werden wir einen Förderer dieser Forschung bekommen, der den hingeschiedenen ersetzen kann?

---

1) G. Eneström, *Über Bearbeitung von Bandregistern zu mathematischen Zeitschriften oder Sammelwerken;* Biblioth. Mathem. 7_3, 1906—1907, S. 193—202.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage[1]) von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“.

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen“. BM = Bibliotheca Mathematica.

Über frühere Bemerkungen siehe BM **14**$_3$ (1913/14), S. 63—83, 169—179, 259—268.

2 : 33. Die Seite beginnt:

> Bei der zuerst genannten Gattung [d. h. über in stetigem Verhältnisse stehende Zahlen] von Aufgaben [des 15. Abschnittes des *Liber abbaci*] sind die Zahlengrößen regelmäßig durch Strecken versinnlicht, welche bald zwei Buchstaben, bald nur einen als Bezeichnung führen. Im letzteren Falle bedeutet die einfache Nebeneinanderstellung zweier Buchstaben deren Summe,

und als Beleg für die letztere Behauptung bringt Herr Cantor in der 1. Fußnote folgendes Zitat (*Liber abbaci,* Ausg. von Boncompagni, S. 395 Z. 32—33): „quia est sicut *a* ad *b* ita *g* ad *d*, erit ergo ut *ab* ad *b* ita *gd* ad *d*“. Der Beleg scheint ja für den nicht sachkundigen Leser befriedigend zu sein, aber dennoch ist die fragliche Behauptung des Herrn Cantor so irreleitend, daß sie fast als unrichtig bezeichnet werden kann. Um dieses nachzuweisen, muß ich den größten Teil des Absatzes, aus dem Herr Cantor eine Stelle zitiert, hier abdrucken. Die Stelle selbst habe ich durch gesperrte Schriften hervorgehoben.

> Sed si preponatur, quod summa numerorum *.a.b.* sit 14, et numerus *.g.* sit 22, et numerus *.d.* sit 6; et uis scire quantum sit numerus *.a.*, uel numerus *.b.*; quia est sicut *.a.* ad *.b.*, ita *.g.* ad *.d.*, erit ergo ut *.a.b.* ad *.b.*, ita *.g.d.* ad *.d.*, quare multiplicabis coniunctum ex *.a.*, et *.b.*, scilicet 14, per *.d.*, hoc est per 6, erunt 84; que diuide per iunctum ex *.g.d.*, hoc est per 28, uenient .3. pro numero *.b.*; quibus extractis ex 14, remanent 11 pro numero *.a.*: similiter procedes, si numeri *.a.* et *.b.*, nec non et summa ignotorum *.g.d.* fuerit nota. Item si fuerit ignotus unusquisque numerorum *.a.g.*; sed summa eorum sit nota, et sint etiam noti numeri *.b.d.*, erit sicut summa *.b.d.* nota ad notum *.d.*, ita *.a.g.* notum ad *.g.* ignotum; quare multiplicabis coniunctum ex *.a.g.* in *.d.* et diuides per coniunctum ex numeris *.b.d.*; et quod prouenerit erit

1) Dritte Auflage des 1. Bandes, zweite Auflage der 2. und 3. Bände.

numerus $.g.$; quod (!) extracto ex summa numerorum $.a.g.$ remanebit numerus $.a.$ notus: similiter facies, cum ignoti fuerint numeri $.b.d.$, et eorum summa sit nota, nec non et unusquisque numerorum $.a.g.$ sit notus.

Sieht man nun von den gesperrten Worten ab, kann man sagen, daß bei Leonardo $.a.b.$ nicht „$a+b$“ sondern ganz allgemein „a und b“ bedeutet; beispielsweise geht es natürlich nicht an, den Ausdruck „unusquisque numerorum $.a.g.$ sit notus“ durch: „jede der Zahlen $a+b$ sei bekannt“ zu übersetzen. Für die Summe zweier Zahlen benutzt Leonardo Ausdrücke wie „summa numerorum $.a.b.$“, „coniunctum ex $.a.$ et $.b.$“, „iunctum ex $.g.d.$“ usw., ausnahmsweise hat an der von Herrn Cantor zitierten Stelle $.a.b.$ die Bedeutung $a+b$, $.g.d.$ die Bedeutung $g+d$ und an einer anderen Stelle $.a.g.$ die Bedeutung $a+g$. Herr Cantor hat also drei Ausnahmefälle (vielleicht Flüchtigkeitsfehler eines Abschreibers) als für die Bezeichnungsweise Leonardos maßgebend bezeichnet.

G. Eneström.

2: 37. Nachdem Herr Cantor die Ungleichung $\frac{1440}{458\frac{4}{9}} < \pi < \frac{1440}{458\frac{1}{5}}$ Leonardo Pisanos erwähnt hat, fährt er fort: „Das arithmetische Mittel von $\frac{4}{9}$ und $\frac{1}{5}$ ist $\frac{29}{90}$ oder beinahe $\frac{1}{3}$. Leonard von Pisa sagt $\frac{1440}{458\frac{1}{3}}$ sei *in medio* zwischen den genannten Grenzen.“ Hier wäre es meines Erachtens nützlich, wenn auch nicht notwendig, nach „sagt“ die Worte „indessen nur“ einzuschalten, um ausdrücklich hervorzuheben, daß die Berechnung $\frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{5}\right)=\frac{29}{90}\sim\frac{1}{3}$ nicht von Leonardo selbst herrührt. Ohne dieses Hervorheben kann der Leser leicht auf den Gedanken kommen, das Chuquetsche Näherungsverfahren sei möglicherweise schon bei Leonardo nachzuweisen. In der Tat sollte man nach diesem Verfahren $\pi \sim \frac{2\cdot 1440}{458\frac{4}{9}+458\frac{1}{5}} = \frac{1440}{458+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{5}\right)}$ setzen. Indessen gibt es keinen besonderen Grund anzunehmen, daß Leonardo auf die fragliche Weise verfahren ist.

G. Eneström.

2: 49. Die Darstellung des ganzen Absatzes Z. 13—34 und die Fragestellung (Z. 23—25): „Woher stammt Leonardo's Wissen von der Möglichkeit negativer Gleichungswurzeln?“ beruhen auf einer unrichtigen Voraussetzung, denn der Begriff einer negativen Gleichungswurzel war dem Leonardo durchaus unbekannt. An der von Herrn Cantor erwähnten Stelle behandelt Leonardo zwei Probleme, die er ausdrücklich als „insolubiles“ bezeichnet. Um nachzuweisen, daß das erste Problem in der gegebenen Form unlösbar sei, leitet er die Gleichung $4\frac{2}{5}x+6\frac{3}{5}y=2\frac{12}{13}x+\frac{9}{13}y$ her; diese ist nach ihm offenbar unmöglich, weil $4\frac{2}{3}x>2\frac{12}{13}x$ und $6\frac{3}{5}y>\frac{9}{13}y$, so daß die linke Seite der Gleichung, unabhängig von den Werten der Größen x und y, immer größer als die rechte Seite bleibt. Ebenso führt er die Lösung des zweiten Problemes auf die Gleichung $x+\frac{1}{2}\cdot 72=33$ zurück und folgert hieraus, daß das Problem in der gegebenen Form unlösbar ist, weil $\frac{1}{2}\cdot 72>33$ und also $x+\frac{1}{2}\cdot 72$ immer größer als 33 sein muß. Anderseits bemerkt Leonardo, daß die Probleme lösbar werden, wenn man ihre Wortstellung ein wenig ändert, so daß der eine der Männer nicht einen Anteil, sondern eine Schuld hat, denn in diesem Falle bekommt man die Gleichungen

$$4\frac{2}{3}x - 6\frac{3}{5}y = 2\frac{12}{13}x - \frac{9}{13}y, \quad \frac{1}{2}\cdot 72 - x = 33,$$

und diese Gleichungen können gelöst werden. Von unserem Standpunkte aus bedeutet natürlich die Bemerkung, daß in den ursprünglichen Gleichungen y bzw. x einen negativen Wert hat, aber für LEONARDO selbst war der Begriff einer negativen Gleichungswurzel durchaus unsinnig.

Wie irreleitend die CANTORsche Darstellung ist, ersieht man am leichtesten aus dem Umstande, daß A. VOSS in seiner Schrift *Die Beziehungen der Mathematik zur Kultur der Gegenwart* (Leipzig 1914, S. 13) ausdrücklich dem LEONARDO die Benutzung negativer Zahlen zuschreibt. Auch die Behauptung TROPFKES (*Geschichte der Elementarmathematik* **1**, Leipzig 1902, S. 165): „LEONARDO [kommt] zu einer negativen Lösung" ist unrichtig, denn in Wirklichkeit versucht LEONARDO gar nicht, die Gleichungen zu lösen, die er als Belege für die Unmöglichkeit gewisser Probleme aufstellt. G. ENESTRÖM.

---

2 : 179. Die Zeilen 11—17:

> Wir haben somit in JOHANN VON GEMUNDEN einen Mathematiker und Astronomen kennen gelernt, der in mancher Leistung, als Schriftsteller (wofür wir auch eine Abhandlung *De arcubus et sinibus* anführen könnten) wie als Lehrer, über das schon Vorhandene hinausging, der aber trotzdem es nicht verschmähte, noch dem Bildungsgange der damals Studirenden gegenüber es verschmähen durfte, ab und zu das niedrigste Rechnen mit ganzen Zahlen zu lehren

sollten eigentlich gestrichen werden. Was JOHANN VON GMUNDEN als Astronom oder als Lehrer der Astronomie geleistet hat, liegt außerhalb der Grenzen einer Geschichte der Mathematik, wie sie von Herrn CANTOR gezogen worden sind. Daß jener als Schriftsteller in mancher Leistung über das schon Vorhandene hinausging, ist zum mindesten recht zweifelhaft, und die CANTORschen Belege dafür sind wertlos. Durch diese vermeintlichen Belege scheint Herr CANTOR feststellen zu wollen, daß JOHANN VON GMUNDEN

A. die Zusammenfassung von 60 Graden in eine höhere Einheit (*„signum phisicum"*) vollzog;
B. die Verwertung der Stellung des Zählers eines Sexagesimalbruches zur Angabe des Ranges des Bruches zeigte;
C. bei gewissen Rechnungen gleichzeitig Sexagesimalbrüche und Dezimalbrüche benutzte.

Allein keines dieser Verfahren rührt von JOHANN VON GMUNDEN her (vgl. BM $\mathbf{14}_3$, 1913/14, S. 262; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 192—193) und übrigens ist es sehr fraglich, ob die Verfahren A und C wirklich als Fortschritte zu betrachten sind. Nun hat allerdings BRAUNMÜHL (*Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* **1**, Leipzig 1900, S. 110—111) bemerkt, daß JOHANN VON GMUNDEN bei der Vermengung des Sexagesimal- und Dezimalsystems insofern über das schon Vorhandene hinausging, als er den Radius seiner Sinustafel gleich 600000 setzte, aber auch in diesem Falle ist es, wie BRAUNMÜHL selbst hervorhebt, unsicher, ob die Neuerung von JOHANN VON GMUNDEN stammt. G. ENESTRÖM.

2: 430. Z. 24 muß „die Coss Adam Rieses“ statt „das Rechenbuch Adam Rieses“ gesetzt werden. Stifel selbst gibt keinen Titel an, sondern zitiert nur einen „libellum Adami Risen“, aber da er sagt, daß er dieses Büchlein für den dritten Abschnitt („De numeris cossicis et de regula eorum“) der *Arithmetica integra* benutzt habe, kann es kaum zweifelhaft sein, welche Schrift von Riese gemeint wird. Überdies gibt Stifel Bl. 250ᵛ an, daß er die Regeln, die Riese für Gleichungen aufstellte, verbessert habe, und Bl. 272ʳ kommt ein Beispiel vor, das auch Riese in seiner Coss behandelt (vgl. B. Berlet, *Adam Riese*, Leipzig 1892, S. 45). G. Eneström.

2: 431. Herr Cantor erwähnt, daß Milich den Namen *Arithmetica integra* vorgeschlagen hatte, aber meiner Ansicht nach wäre es für den Leser der *Vorlesungen* ebenso erwünscht zu erfahren, welchen Sinn Stifel dem Namen beilegte. Ich gebe darum hier unten die Begründung des Namens wieder, die Stifel an der von Herrn Cantor erwähnten Stelle bietet.

> Datus est libro titulus ille, quod numeros rationales et irrationales tractat, quod tractat numeros absolutos et relativos, quod tractat numeros abstractos et contractos, quod tractat numeros denominatos proportionaliter et improportionaliter, quod docet algorithmos Arithmeticos, Geometricos, Musicos, Astronomicos, et Cossicos: quod docet Algebrae rationem perfectissimam.

Die Übersetzung „reine Arithmetik“ scheint mir darum nicht ganz exakt zu sein (vgl. BM **14**$_3$, 1913/14, S. 184), sondern ich ziehe „vollständige Arithmetik“ oder möglicherweise „allgemeine Arithmetik“ vor. Allerdings dürfte Herr Cantor selbst keine Übersetzung des Titels gebracht haben.

G. Eneström.

2: 441. Letzte Zeile des Textes lies 216 statt 116.

2: 716. Z. 18—19 wird die bekannte Schrift von Huygens *De circuli magnitudine inventa* erwähnt. Da der Titel der Schrift von verschiedenen Verfassern verschieden übersetzt wird, erlaube ich mir zu bemerken, daß die richtige Übersetzung nicht „Über die gefundene Größe des Kreises“ (siehe F. Rudio, *Vier Abhandlungen über die Kreismessung*, Leipzig 1892, S. 83) und auch nicht „Über die Erfindung der Größe des Kreises“ (vgl. Huygens, *Oeuvres complètes* **12**, La Haye 1910, S. 120: „Sur l'invention de la grandeur du cercle“) sein dürfte, sondern vielmehr „Neue Sätze über die Größe des Kreises“ (vgl. M. Koppe, BM **2**$_3$, 1901, S. 224). Beispielsweise sagt Schooten in seinem Kommentar zur zweiten lateinischen Ausgabe der Descartesschen Geometrie (Amsterdam 1659, S. 258): „De quo egit nobilissimus D. Hugenius ultimo problematum illustrium, quae de circuli magnitudine inventis adjecit.“ Hier sieht man ja deutlich, daß man nach Schooten nicht „De inventa magnitudine“ sondern „Inventa de magnitudine“ lesen soll. G. Eneström.

2: 748. Nachdem meine frühere Bemerkung (BM **14**$_3$; 1913/14, S. 265—266) redigiert und gedruckt worden war, habe ich das Exemplar der *Miracula arithmetica* (Augsburg 1622), das im Besitze der Bibliothek der Polytechnischen

Hochschule in Zürich ist, eingesehen, und kann jetzt bezeugen, daß darin (S 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12) die Summenformeln für die Potenzen der natürlichen Zahlen bis zur Summe der zwölften Potenzen einschließlich gebracht werden. Ich gebe hier unten die Ausdrücke für die Summen erst mit den von FAULHABER benutzten Zeichen, dann in unserer Zeichensprache wieder.

$$\Sigma n^2 = \frac{2\,\mathfrak{C} + 3\,\mathfrak{Z} + 1\,\text{℞}}{6} = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n),$$

$$\Sigma n^3 = \frac{3\,\mathfrak{Z}\mathfrak{z} + 6\,\mathfrak{C} + 3\,\mathfrak{z}}{12} = \frac{1}{12}(3n^4 + 6n^3 + 3n),$$

$$\Sigma n^4 = \frac{6\,\text{ß} + 15\,\mathfrak{z}\mathfrak{z} + 10\,\mathfrak{C} \div 1\,\text{℞}}{30} = \frac{1}{30}(6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n),$$

$$\Sigma n^5 = \frac{2\,\mathfrak{z}\mathfrak{C} + 6\,\text{ß} + 5\,\mathfrak{Z}\mathfrak{z} \div 1\,\mathfrak{z}}{12} = \frac{1}{12}(2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2),$$

$$\Sigma n^6 = \frac{6\,\text{Bß} + 21\,\mathfrak{Z}\mathfrak{C} + 21\,\text{ß} - 7\,\mathfrak{C} + 1\,\text{℞}}{42} = \frac{1}{42}(6n^7 + 21n^6 + 21n^5 - 7n^3 + n),$$

$$\Sigma n^7 = \frac{3\,\mathfrak{Z}\mathfrak{z}\mathfrak{z} + 12\,\text{Bß} + 14\,\mathfrak{Z}\,\text{Cub} \div 7\,\mathfrak{Z}\mathfrak{z} + 2\,\mathfrak{z}}{24}$$
$$= \frac{1}{24}(3n^8 + 12n^7 + 14n^6 - 7n^4 + 2n^2),$$

$$\Sigma n^8 = \frac{40\,\text{Ccub} + 180\,\mathfrak{z}\mathfrak{z}\mathfrak{z} + 240\,\text{Bß} \div 168\,\text{ß} + 80\,\text{C} \div 12\,\text{℞}}{360}$$
$$= \frac{1}{360}(40n^9 + 180n^8 + 240n^7 - 168n^5 + 80n^3 - 12n),$$

$$\Sigma n^9 = \frac{18\,\mathfrak{Z}\text{ß} + 90\,\mathfrak{C}\mathfrak{C} + 135\,\mathfrak{Z}\mathfrak{z}\mathfrak{z} \div 126\,\mathfrak{Z}\mathfrak{C} + 90\,\mathfrak{Z}\mathfrak{z} \div 27\,\mathfrak{z}}{180}$$
$$= \frac{1}{180}(18n^{10} + 90n^9 + 135n^8 - 126n^6 + 90n^4 - 27n^2),$$

$$\Sigma n^{10} = \frac{6\,\text{Cß} + 33\,\mathfrak{Z}\text{ß} + 55\,\text{CCub} \div 66\,\text{Bß} + 66\,\text{ß} \div 33\,\text{Cub} + 5\,\text{℞}}{66}$$
$$= \frac{1}{66}(6n^{11} + 33n^{10} + 55n^9 - 66n^7 + 66n^5 - 33n^3 + 5n),$$

$$\Sigma n^{11} = \frac{2\,\mathfrak{Z}\mathfrak{z}\text{cub} + 12\,\text{Cß} + 22\,\mathfrak{Z}\text{ß} \div 33\,\mathfrak{Z}\mathfrak{z}\mathfrak{z} + 44\,\mathfrak{Z}\text{cub} \div 33\,\mathfrak{Z}\mathfrak{z} + 10\,\mathfrak{z}}{24}$$
$$= \frac{1}{24}(2n^{12} + 12n^{11} + 22n^{10} - 33n^8 + 44n^6 - 33n^4 + 10n^2),$$

$$\Sigma n^{12} = \frac{210\,\text{Dß} + 1365\,\mathfrak{Z}\mathfrak{z}\text{Cub} + 2730\,\text{Cß} \div 5005\,\text{CC} + 8580\,\text{Bß} - 9009\,\text{ß} + 4550\,\text{C} \div 691\,\text{Rad}}{2730}$$
$$= \frac{1}{2730}(210n^{13} + 1365n^{12} + 2730n^{11} - 5005n^9 + 8580n^7 - 9009n^5 + 4550n^3 - 691n).$$

Ich habe die Ausdrücke nachgeprüft und sie richtig befunden.

Hier hat also FAULHABER tatsächlich die sechs ersten BERNOULLIschen Zahlen $\frac{1}{6}, -\frac{1}{30}, \frac{1}{42}, -\frac{1}{30}, \frac{5}{66}, -\frac{691}{2730}$ angegeben, während bei JAKOB BERNOULLI selbst (*Ars conjectandi*, Basileae 1713, S. 97) nur die fünf ersten Zahlen stehen. Überdies hat die *Ars conjectandi* als letztes Glied von Σn^9 unrichtig $-\frac{1}{12}nn$, während das Glied $-\frac{27}{180}n^2 = -\frac{3}{20}n^2$ bei FAULHABER richtig ist.

G. ENESTRÖM.

2 : 767—768. Herr Cantor bringt hier eine Übersetzung einiger Zeilen aus der Vorrede der zweiten Auflage (1624) der *Problèmes plaisans* von Bachet, und dabei kommt auch der Ausdruck: „mit des Himmels Hilfe ist Diophant im Erscheinen begriffen“ vor. Anderseits erschien die Diophantos-Ausgabe, wie Herr Cantor S. 767 richtig angibt, schon 1621 (das Vorwort ist sogar vom 1. September 1620 datiert) und die Vorrede zur zweiten Auflage der *Problèmes plaisans* ist entweder 1623 oder 1624 geschrieben, weil Bachet erwähnt, daß elf Jahre nach dem ersten Erscheinen (1612) dieses Buches verflossen seien. Der aufmerksame Leser muß darum fragen: „Wie ist es möglich, daß Bachet noch 1623 von der 1621 herausgegebenen Diophantos-Ausgabe als im Erscheinen begriffen sprechen kann?“ Die Antwort auf diese Frage, die Herr Cantor eigentlich sich selbst gestellt haben sollte, bekommt man sofort, wenn man die Vorrede Bachets einsieht. Dieser sagt nämlich:

> Maintenant que i'ay veu, que ce petit ouurage [d. h. die erste Auflage der *Problèmes plaisans*] a esté fauorablement accueilly des plus beaux esprits de la France, et qu'auec l'ayde du Ciel, Diophante voit le iour, et me rend aussi la recompence attenduë de mon trauail . . .

Hier darf man natürlich die Worte „Diophante voit le jour“ nicht wie Herr Cantor „Diophant ist im Erscheinen begriffen“ übersetzen und dies um so weniger, als dadurch die folgenden, von Herrn Cantor nicht übersetzten Worte „et me rend aussi la recompence attenduë de mon travail“ kaum verständlich sein würden. Vielmehr geht aus dem Zusammenhange hervor, daß in diesem Falle „voit“ gleichbedeutend mit „a vu“ ist. G. Eneström.

---

2 : 768—769. Über die 1630 erschienene Arbeit von Mydorge gibt Herr Cantor folgende Auskunft:

> Claude Mydorge gab 1630 im Anschlusse an die rasch verbreiteten *Récréations* [von Leurechon] ein *Examen du livre des récréations mathématiques et de ses problèmes* heraus, vielleicht etwas höher zu schätzen als das Buch, dessen Prüfung ausgesprochene Aufgabe war, aber den geometrischen Leistungen Mydorge's nicht ebenbürtig.

Im Vorübergehen bemerke ich, daß das Wort „Anschluß“ nicht ganz zutreffend ist, wenn es sich um das 1630 von Mydorge herausgegebene Buch handelt. Der größte Teil dieses Buches ist nämlich eben ein Abdruck der *Récréations mathématiques* selbst, was Herrn Cantor unbekannt gewesen sein dürfte.

Um das Cantorsche Urteil über das Buch Mydorges bewerten zu können, muß ich erst einige Aufschlüsse über die Bemerkungen geben, die im Buche vorkommen.

Im systematischen Inhaltsverzeichnis, das am Anfange des *Examen du livre des récréations mathématiques* vorkommt, werden die Probleme in arithmetische, geometrische, mechanische, optische, musikalische und kosmographische eingeteilt. Mit den vier letzten Arten haben wir ja hier nichts zu tun, und ich bemerke nur, daß Mydorge sich in erster Linie für die optischen Probleme interessiert. In betreff der arithmetischen Probleme bemerkt er selbst, daß er prinzipiell von einem Kommentar derselben Abstand nimmt. Ich drucke hier seine eigenen Worte (S. 3—4 der Ausgabe Rouen 1643) ab:

Le Lecteur sera aduerty sur ce premier Probleme qu'il ne se doibt promettre dans cette presente impression aucune note ou examen sur aucun Probleme qui concerne les nombres ... mais pour la speculation des choses Physiques ou Geometriques proposées en la pluspart des Problemes de ce liure, c'est à quoy nous nous sommes particulierement arrestez.

In betreff der elf Probleme (22, 23, 32, 33, 34, 59, 61, 66, 72, 78, 90), die im Inhaltsverzeichnis als geometrisch bezeichnet sind, hat Mydorge fünf (61, 66, 72, 78, 90) mit keinem Kommentar versehen. Die übrigen sechs Probleme sind folgende.

22. *Faire passer un mesme corps dur, et inflexible par deux trous bien diuers.*

Der Kommentar (16 Druckzeilen) enthält eigentlich nur eine leichte Lösung eines etwas allgemeineren Problems.

23. *Faire passer à mesme condition que dessus, vn mesme corps par trois sortes de trous.*

Der Kommentar (17 Druckzeilen) ist von derselben Art wie der des vorhergehenden Problems.

32. *Descrire vn cercle par trois poincts donnez.*

Der Kommentar (5 Druckzeilen) verweist nur auf eine Erörterung von D. Henrion.

33. *Changer vn cercle en vn parfaict quarré sans rien adiouster, ou diminuer.*

Der Kommentar (etwa 6 Druckseiten) ist eigentlich unmittelbar gegen D. Henrion und mittelbar gegen die Kreisquadratur von Chr. Longomontanus gerichtet; Mydorge weist nach, daß diese Kreisquadratur falsch ist.

34. *Auec vn mesme compas, et mesme ouuerture d'iceluy, descrire deux cercles inégaux.*

Im Kommentar (43 Druckzeilen) wird hervorgehoben, daß man bei der Lösung des Problems von der Länge der Schenkel des Zirkels abhängig ist, so daß man zwar beliebig kleine, aber nicht beliebig große Kreise herstellen kann.

59. *Descrire vne ouale tout d'vn coup auec le compas vulgaire.*

Im Kommentar (21 Druckzeilen) wird bemerkt, daß die Ovale, die konstruiert wird, nicht eine gewöhnliche Ovale, d. h. eine Ellipse sei.

Jetzt dürfte es erlaubt sein, zu behaupten, daß das Urteil, das Herr Cantor über das *Examen du livre des récréations mathématiques* fällt, sofern es sich um die rein mathematischen Bemerkungen Mydorges handelt, für den Sachkundigen ganz einfach lächerlich erscheinen muß. Auch wenn man davon absieht, daß diese Bemerkungen zusammen nur etwa neun Oktavseiten in Anspruch nehmen, während die *Prodromi catoptricorum et dioptricorum libri* mehr als 300 Folioseiten umfassen, ist es sinnlos, die zwei Arbeiten von Mydorge zu vergleichen, da die erste nur einige gelegentliche Bemerkungen über sehr spezielle Probleme enthält, die zweite eine durchgeführte Behandlung eines wichtigen Gegenstandes bietet.

G. Eneström.

2:780. Die Frage (Z. 2—3), woher Fermat die Anregung zur Erfindung seiner Methode der unendlichen Annahme erhalten haben mag, dürfte etwas verwickelter sein, als der nicht sachkundige Leser auf Grund des Ausspruches des Herrn Cantor (Z. 3—6): „Man wird kaum irre gehen, wenn man den letzten Zusatz des Campanus zu Euklid IX, 16 als die Quelle nennt, aus der Fermat schöpfte“, annehmen muß. Fermat könnte viel eher seine Methode aus der Lefèvreschen Ausgabe der *Arithmetica* von Jordanus entnommen haben, denn die 4. „Petitio" daselbst lautet eben: „Nullum numerum in infinitum decrescere". Dieser Grundsatz wird auch im 11. Satze des 5. Buches benutzt, um zu beweisen, daß bei dem goldenen Schnitte die Maßzahlen der Teilstrecken nicht rationale Zahlen sein können (vgl. BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 153).

Ob der Grundsatz der Methode der unendlichen Annahme von Jordanus selbst oder erst von Lefèvre ausgesprochen wurde, ist eine Frage, die in diesem Zusammenhange bedeutungslos ist. Ich mache darum nur beiläufig darauf aufmerksam, daß nach Curtze (*Über eine Handschrift der Königl. öffentlichen Bibliothek zu Dresden;* Zeitschr. für Mathem. **28**, 1883, Hist. Abt. S. 2) der Cod. Dresd. Db. 86 eine Abschrift der *Arithmetica* des Jordanus aus dem Anfange des 14. Jahrhunderts enthält, in welcher Abschrift nur drei „Petitiones" vorkommen.

Was Herr Cantor Z. 6—17 sagt, sollte auf Grund der obigen Bemerkung entweder gestrichen oder auf andere Weise redigiert werden. Ganz besonders unzutreffend ist der Ausspruch:

> In jenen 300 Jahren haben Tausende vor und gleichzeitig mit Fermat den Grundgedanken der Methode der unendlichen Annahme genau so wie er kennen gelernt. Sie alle haben nicht eingesehen, welcher Ausdehnung die einmalige Anwendung des Gedankens durch Campanus fähig war, sie alle gingen achtlos vorüber, die Perle im Fruchthaufen verschmähend, bis Fermat sie entdeckte und ihr die richtige Fassung verlieh.

Der Grundgedanke der Methode der unendlichen Annahme war eben in der Lefèvreschen Ausgabe der *Arithmetica* von Jordanus ausgesprochen, und der natürliche Grund, warum die Methode vor Fermat nur ausnahmsweise benutzt wurde, war offenbar, daß gewisse vor Fermat behandelte zahlentheoretische Probleme früher nicht ernstlich in Angriff genommen waren.

G. Eneström.

2 : 804. Es wäre angebracht, den Schluß der ersten Fußnote: „Die Darstellung in Klügels Mathematischem Wörterbuche II, 953 ist ganz ausnahmsweise durchaus mangelhaft" zu streichen, weil sich die Mangelhaftigkeit nicht auf die Darstellung der Fermatschen Eliminationsmethode bezieht, sondern darin besteht, daß Klügel die Fermatsche Ausgangsgleichung ein wenig modifiziert hat, obgleich er ausdrücklich sagt: „Hier ist das Beyspiel, wodurch Fermat seine Vorschrift erläutert hat." Das Fermatsche Beispiel lautet in modernen Zeichen:

$$\sqrt[3]{a^2c - a^3} + \sqrt[3]{a^3 + ab^2} = k$$

aber Klügel geht von der Gleichung

$$\sqrt[3]{a^2b + b^3} + \sqrt{bc + c^2} = b$$

aus. Anderseits bekommt man durch die Klügelsche Darstellung einen durchaus korrekten Aufschluß über die Methode, um welche es sich handelt.

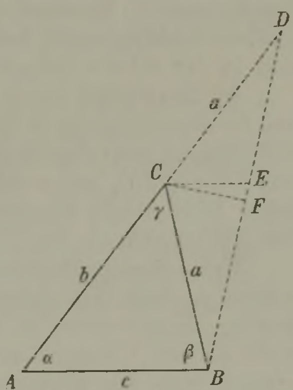
G. Eneström.

3 : 534—535. Herr Cantor gibt hier einen Bericht über das Werk: *Trigonometry, Plane And Spherical; With the Construction and Application of Logarithms.* By Thomas Simpsom, F. R. S. — London: Printed for J. Nourse 1748 (8^0, 77 S.). Als A. v. Braunmühl seine *Vorlesungen über Geschichte der*

Trigonometrie bearbeitete, konnte er, wie er im II. Teil (Leipzig 1903, S. 93) angibt, nur die zweite Auflage (London 1765) des Simpsonschen Buches einsehen. Er fand darinnen (S. 61—62) „elegante geometrische Ableitungen jener beiden Formeln der ebenen Trigonometrie, die bisher dem Astronomen Mollweide zugeschieben wurden". Er fügt hinzu, daß auch Simpson nicht der erste gewesen sei, der sie fand, da die eine schon bei Newton [in der *Arithmetica universalis*, London 1707] sich finde und beide vereinigt und rechnerisch abgeleitet bei Fr. Wilh. v. Oppel [in der *Analysis triangulorum*, Dresdae et Lipsiae 1746[1]), 2°] vorkämen. In einer Fußnote sagt Braunmühl dann: „[Die Mollweideschen Formeln] scheinen nähmlich in der ersten Auflage von Simpsons Schrift nicht zu stehen, da sie Cantor, dem die letztere vorlag, nicht erwähnt".

Das war im Jahre 1903, als man noch nicht aus vielfältigen Beispielen wußte, mit welch großer Flüchtigkeit Cantor seine Quellen angesehen hatte. Ich hielt es, nachdem ich selbst jetzt schon mancherlei derartige Erfahrungen hinter mir habe, als ich die Stelle bei Braunmühl las, für sehr leicht möglich, daß die Formeln genau so in der ersten Auflage von 1748 stehen, daß aber Cantor sie eben einfach übersehen hatte.

Nachdem eruiert war, daß ein Exemplar des fraglichen Buches sich auf der Universitätsbibliothek zu Königsberg i. Pr. befindet[2]), ersuchte ich Herrn W. Fr. Meyer, dort nachzusehen. Die Auskunft lautete, daß die erste Mollweidesche Formel als Prop. VII in der Auflage von 1748 auf S. 59 steht, die zweite als Prop. VIII auf S. 60—61. Da der Beweis, den Oppel gibt, von Braunmühl nicht angegeben wird und er von dem Newtonschen völlig verschieden ist, teile ich hier nach der freundlichen Mitteilung von Herrn Meyer den Beweis für die erste Mollweidesche Formel mit (gekürzt und in heutiger Bezeichnung).



Es sei ABC das Dreieck, AC um $CD = a$ verlängert, $CE \parallel AB$ und $CF \perp BD$. Dann ist $\sphericalangle D = \frac{1}{2}\gamma$, ferner $\sphericalangle DCB = \alpha + \beta$, also $\sphericalangle BCF = \sphericalangle DCF = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. Daraus folgt aber, daß $\sphericalangle ECF = \sphericalangle BCE - \sphericalangle BCF = \beta - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$. Nun ist nach dem Sinussatz im Dreieck ABD

$$c : (a + b) = \sin \tfrac{1}{2}\gamma : \sin (ABD).$$

Da aber $\sin (ABD) = \sin (CED) = \sin (FEC) = \cos (ECF)$, so findet sich

$$c : (a + b) = \sin \tfrac{1}{2}\gamma : \cos \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha).$$

Die zweite Formel wird ganz analog abgeleitet. H. Wieleitner.

---

1) Auf S. 93 a. a. O. schreibt Braunmühl 1748. Das ist wohl nur ein Versehen. Cantor kannte weder das Vorkommen bei Newton, noch überhaupt das wichtige Werk von Oppel. Das soll aber kein Vorwurf sein, sondern nur deswegen angeführt werden, weil auch heute noch vielfach das Cantorsche Werk als „von unerreichter Vollständigkeit" hingestellt wird.

2) Vielleicht ist es auch von Interesse, daß das Buch dort mit Simpsons *Treatise of Algebra* (1745) und seiner *Doctrine of Annuities* (1747) zusammengebunden ist. Cantor erwähnt den *Treat of Alg.* nicht, von der zweiten Schrift nur eine Ausgabe 1742.

3:535—536. In meiner Abhandlung: *GIROLAMO SACCHERI nella vita e nelle opere* (Giorn. di matem. **52**, 1914, S. 229—251) habe ich die Resultate einiger Untersuchungen über das Leben und die Werke von GIROLAMO SACCHERI veröffentlicht. Viele Notizen sind aus einer in Rom aufbewahrten Handschrift entnommen; diese Handschrift, die etwa 1733 von FR. GAMBARANA angefertigt wurde, schickte das Jesuitenkollegium von Pavia an den General der Jesuiten.

Aus den Akten des Archivs der Kirche von S. Siro in Sanremo geht hervor, daß GIOVANNI GIROLAMO SACCHERI zu Sanremo während der Nacht vom 4.—5. September 1667 geboren wurde; sein Vater war wahrscheinlich ein Notar. Als achtzehnjähriger Jüngling trat er am 24. Mai 1685 in Genua dem Jesuitenorden bei; hier blieb er bis etwa 1690 und vollendete sein Noviziat. Seine Vorgesetzten schickten ihn dann nach dem berühmten Kollegium Brera in Mailand, um dort philosophische und theologische Studien zu treiben. Hier machte er mit den Brüdern TOMMASO und GIOVANNI CEVA Bekanntschaft. Jenem, Professor der Mathematik an der Brera, verdankt man großenteils, daß SACCHERI vorzugsweise Mathematik studierte.

Die erste Arbeit von SACCHERI ist von den Brüdern CEVA angeregt worden und über ihren Inhalt gab VINCENZIO VIVIANI ein günstiges Urteil; die Arbeit, deren Titel: *Quaesita geometrica a comite RUGERIO DE VIGINTIMILLIIS omnibus proposita a HIERONYMO SACCHERIO genuensi Soc. Jesu soluta* (Mediolani 1693) lautet, enthält Lösungen von 12 Aufgaben, welche RUGGERO DI VENTIMIGLIA (1670—1698) gestellt hatte. Die Lösungen SACCHERIS wurden zum zweitenmal in der Schrift *Sphynx geometra* (Parma 1694) zum Abdruck gebracht.

Im Jahre 1694 wurde SACCHERI zum Lehrer der Philosophie und Theologie am Jesuitenkollegium in Turin berufen und blieb dort drei Jahre. Aus dieser Zeit stammt seine *Logica demonstrativa* (Turin 1697; neue Auflagen Pavia 1701 und Köln 1735), auf welche er mehrmals in seinem Hauptwerk verweist. Im Jahre 1697 wurde SACCHERI nach Pavia versetzt, wo er 1699 zum Professor der Mathematik an der Universität ernannt wurde.

Unter Bezugnahme auf ein 1699 von T. CEVA veröffentlichtes Buch *De natura gravium* gab SACCHERI 1708 eine Schrift mit dem Titel *Neo-Statica* heraus. Hier beweist er viele Lehrsätze unter der Annahme, daß die Kraft, wodurch ein Volumenelement eines Körpers nach einem festen Punkte angezogen wird, dem Abstande zwischen dem Element und dem Punkte proportional sei; diese Annahme hatte übrigens J. DE BEAUGRAND schon im Jahre 1636 aufgestellt (vgl. P. DUHEM, *Les origines de la statique*, **2**, 1906, S. 262).

Von SACCHERIS theologischen Arbeiten sind sechs anonym herausgegeben worden; vier andere befinden sich handschriftlich in der Stadtbibliothek in Como.

Sein Hauptwerk *EUCLIDES ab omni naevo vindicatus* erschien bekanntlich 1733 in Mailand, und in Mailand ist er am 25. Oktober 1733 gestorben.

ALBERTO PASCAL.

---

3 : 577. Als eine kleine Ergänzung meiner früheren Bemerkung (BM $\mathbf{13}_3$, 1912/13, 173—174) erwähne ich, daß das Eliminationsverfahren, das DE GUA 1740 lehrte, und das LEIBNIZ schon 1683 in einem zurückgelegten Briefe an TSCHIRNHAUS benutzte, auch in den „Notae et animadversiones tumultuariae" von JAKOB BERNOULLI, die am Ende (S. 423—468) des zweiten Teiles der Ausgabe 1695 der Geometrie von DESCARTES hinzugefügt wurden (vgl. JAKOB

Bernoulli, *Opera* **2**, Genevae 1744, S. 704—705) zu finden ist. Bernoulli wählt als Beispiel die zwei Gleichungen

$$d^3 - ad^2 - 2abd + 2a^2b, \quad d^4 - (b^2 + a^2)d^2 + a^2b^2.$$

In diesem Falle wird allerdings das Resultat der Elimination eine identische Gleichung, weil die zwei Polynome den gemeinsamen Faktor $d - a$ besitzen. Zuletzt hebt Bernoulli hervor, daß dieses Verfahren nicht wesentlich von dem Huddeschen (vgl. BM $\mathbf{12}_3$, 1911/12, S. 259) verschieden ist.

G. Eneström.

3: 616. Ich bin jetzt in der Lage, meine Angabe (siehe BM $\mathbf{12}_3$, 1912/13, S. 172) über die Abfassungszeit der Krafftschen Abhandlung *De numeris amicabilibus atque aliis ad hanc doctrinam spectantibus* auf Grund ungedruckter Briefe von Krafft an Euler zu präzisieren. Schon am 23. Juni 1746 schickte Krafft an Euler eine Abhandlung über befreundete Zahlen, und in einem verloren gegangenen Briefe teilte dann Euler mit, er selbst habe sich schon eingehend mit diesen Zahlen beschäftigt. Hierauf antwortete Krafft am 29. August 1746:

> wo ich mit meinen Formeln in einen numerum amicabilem eingehen will; so finde ich: Regium Euleri ingenium illam iam occupavit.

Weitere Mitteilungen über seine Untersuchungen brachte Euler in einem anderen ebenfalls verloren gegangenen Brief an Krafft, und anläßlich derselben schrieb dieser am 20. Oktober 1746:

> Über die neue Vermehrung der numerorum amicabilium gratulire Ew. Hochwohlgeb. ergebenst.

Auf Grund der Eulerschen Mitteilungen nahm nun Krafft eine Umarbeitung seiner schon eingereichten Abhandlung vor und sandte das neue Manuskript am 10. November 1746 an Euler. Es ist also nicht ganz richtig zu sagen, daß sich Krafft durch Euler veranlaßt mit den befreundeten Zahlen beschäftigte; anderseits ist die zweite Redaktion der Krafftschen Abhandlung, d. h. die Abhandlung der Novi commentarii, von Eulers Untersuchungen beeinflußt worden.

G. Eneström.

---

3 : 616—617. Zu dem, was bereits G. Eneström (BM $\mathbf{6}_3$, 1905/6, S. 214 und 408; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 263) und K. Hunrath (BM $\mathbf{10}_3$, 1909/10, S. 80—81) in bezug auf das vorliegende Cantorsche Referat gesagt haben, mögen noch einige ergänzende und abschließende Bemerkungen hinzugefügt werden.

Euler hat den befreundeten Zahlen drei Abhandlungen gewidmet, die in dem Eneströmschen Verzeichnis die Nummern 100, 152 und 798 tragen. Die von Cantor nicht erwähnte, nur drei Seiten umfassende Abhandlung 100 besteht, abgesehen von einigen historischen Notizen, im wesentlichen aus einer Tafel von 30 Paaren befreundeter Zahlen, von denen Nr. I—III schon vor Euler bekannt waren. Von den übrigbleibenden 27 Paaren muß, wie zuerst Hunrath (l. c.) bemerkt hat, Nr. XIII, nämlich das Paar $2^4 \cdot 19 \cdot 8563$ und $2^4 \cdot 83 \cdot 2039$, als unrichtig gestrichen werden. Zum Beweise hat sich Hunrath die unnötige Mühe genommen, die sämtlichen Teiler der beiden Zahlen einzeln auszurechnen und zu summieren. Die Sache erledigt sich aber in der Eulerschen Rechnungsweise sofort durch die einfache Bemerkung, daß die beiden Zahlen

$\int 19 \cdot 8563 = 20 \cdot 8564 = 171280$ und $\int 83 \cdot 2039 = 84 \cdot 2040 = 171360$, statt miteinander übereinzustimmen, um $80 = 20 \cdot 4$ differieren; woraus man dann auch gleich erkennt, daß durch eine Vermehrung der Zahl 2563 um 4 die Differenz gehoben würde — falls nämlich 2567 eine Primzahl wäre. Da dies aber nicht der Fall ist, so läßt sich der Schaden nicht heilen und Nr. XIII muß fallen. Die anderen Paare habe ich geprüft und in Ordnung befunden.

Die postume Abhandlung 798 gehört nicht mehr in das Gebiet des CANTORschen Referates. Sie enthält übrigens auch, abgesehen von etwas reichlicheren historischen Notizen, nichts, was sich nicht im wesentlichen schon in der Abhandlung 152 fände, jedenfalls keine neuen Paare befreundeter Zahlen. Wir haben es also nur noch mit Opus 152 und dem darauf bezüglichen CANTORschen Referate zu tun.

Nach den ersten grundlegenden Sätzen über die Divisorensummen (s. ENESTRÖM, BM $\mathbf{6}_3$, 1905/6, S. 214 und 408) stellt EULER eine umfangreiche Tabelle auf, in der er für alle Primzahlen $n < 1000$, sowie auch für n^2 und n^3, die Divisorensummen $\int n$, $\int n^2$ und $\int n^3$ angibt, und zwar in Primfaktoren ausgedrückt. Bei den kleineren Primzahlen geht EULER noch wesentlich höher, nämlich bis zu $2^{36}, 3^{15}, 5^9, 7^{10}, 11^9, 13^7, 17^5, 19^5, 23^4$. Die Tabelle ist wohl niemals nachgeprüft worden. Von CANTOR wäre das ja auch nicht zu erwarten gewesen, wohl aber vielleicht von den Herausgebern der *Commentationes arithmeticae*. Ich habe die Tabelle sorgfältig durchgerechnet und nicht weniger als 15 Fehler darin gefunden, die alle auch in die *Commentationes arithmeticae* übergegangen sind. Meistens sind es ja Druckfehler, aber doch nicht immer solche, die gleich auf den ersten Blick zu erkennen wären. Interessant ist dabei der Vergleich mit einem Entwurfe zu der Tabelle, den ENESTRÖM in dem vierten der zu den Petersburger Manuskripten gehörenden Notizbüchern EULERS gefunden hat. Aus diesem Entwurfe, der übrigens mit der Primzahl 523 abbricht, geht deutlich hervor, daß EULER dabei als Vorlagen die Tabellen benutzt hat, die schon WALLIS in seinem *Treatise of Algebra*, London 1685, Addit. Treat. IV, p. 140—144, für die Divisorensummen, allerdings nur bis $\int 499^2$ und $\int 199^3$, veröffentlicht hat. So findet sich z. B. bei EULER wie bei WALLIS der Fehler $\int 149^3 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 101$, während es heißen muß $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11101$, d. h. $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 653$; für $\int 173^2$ hatte EULER mit WALLIS zunächst das richtige 30103 notiert, um es dann nachträglich durchzustreichen und durch das unrichtige $67 \cdot 449$ zu ersetzen, wie es denn auch gedruckt wurde; umgekehrt enthält der EULERsche Entwurf für $\int 367^2$ und $\int 461^2$ in Übereinstimmung mit WALLIS die unrichtigen Werte $7 \cdot 101 \cdot 191$ und $13 \cdot 37 \cdot 443$, die dann aber nachträglich in die richtigen $3 \cdot 13 \cdot 3463$ und $373 \cdot 571$ korrigiert wurden. Für weiteres kann ich auf den im Drucke befindlichen und demnächst erscheinenden ersten Band der zahlentheoretischen Abhandlungen EULERS (*LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 2) verweisen, wo alle fehlerhaften Zahlen der EULERschen Tabelle namhaft gemacht und korrigiert sind.

Für die Auffindung befreundeter Zahlen setzt EULER einen gemeinsamen Teiler a voraus und entwickelt dann in 5 Problemen verschiedene Methoden, befreundete Zahlen am und an zu gewinnen. Dabei ist in den vier ersten Problemen a gegeben und für m und n werden der Reihe nach passende Zusammensetzungen in Faktorenform gesucht; beim fünften Problem aber wird umgekehrt für gegebene Formen von m und n nach einem passenden Teiler a gefragt. Diese fünfte Methode, die in der Abhandlung einen besonders großen Raum einnimmt und die sich auch als besonders ergiebig erweist, ist im CANTORschen Referate nicht erwähnt.

Zum Schlusse gibt EULER eine Tabelle von 61 Paaren befreundeter Zahlen, von denen 41 in der Abhandlung selbst gewonnen worden sind, während die anderen 20 ohne weitere Begründung mitgeteilt werden. In diesen 61 Paaren sind auch jene 30 der Abhandlung 100 enthalten bis auf die vier, auf die P. H. FUSS in dem Prooemium der *Commentationes arithmeticae* (p. XXVI und LXXXI) ausdrücklich hinweist mit der Bemerkung, daß er eigentlich durch sie zum Abdruck der kleinen Abhandlung 100 veranlaßt worden sei. Zu diesen 4 Paaren — sie tragen die Nummern VIII, IX, XIII und XXVIII — ist aber folgendes zu sagen. Zunächst muß, wie schon erwähnt, das Paar XIII gestrichen werden. Sodann hat ENESTRÖM (BM $\mathbf{9}_3$, S. 263) darauf aufmerksam gemacht, daß das Paar XXVIII mit dem Paare XLIII der späteren Tabelle übereinstimme, wenn man in diesem die Zahl 57 durch 47 ersetze, und daß 57 wohl nur ein einfacher Druckfehler sei. In der Tat ergibt sich dies nicht nur daraus, daß 57 keine Primzahl ist, sondern vor allem daraus, daß eine Zahl nicht mit zweien befreundet sein kann. Nach dieser selbstverständlichen Korrektur bleiben also aus der früheren Tabelle nur noch die beiden Paare VIII und IX übrig. Daß diese in der späteren Tabelle fehlen, kann nur auf einem Versehen beruhen. Es ist das freilich um so unverständlicher, als die beiden Paare in der Abhandlung selbst zu wiederholten Malen (§§ 68, 78, 113) hergeleitet werden und sie überdies zu den einfachsten ihrer Art gehören und daher auch in der Abhandlung 798 an erster Stelle erscheinen.

Danach hätte also EULER in den beiden Abhandlungen 100 und 152 im ganzen $63 = 2 + 61$ Paare befreundeter Zahlen mitgeteilt. Leider aber ist diese Zahl noch weiter zu reduzieren. Zunächst muß nämlich das Paar XXXIV, das aus den Zahlen $3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 11 \cdot 220499$ und $3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 89 \cdot 29399$ besteht, gestrichen werden. EULER hat dabei offenbar die Zahl 220499 als Primzahl angesehen. Aber selbst wenn sie das wäre, so wären jene beiden Zahlen doch noch nicht befreundet. Man hätte zwar alsdann $\int 11 \cdot 220499 = 2646000 = \int 89 \cdot 29399$, aber die Zahlen $\int 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \int 11 \cdot 220499 = 548992080000$ und $3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 (11 \cdot 220499 + 89 \cdot 29399) = 549209934000$ wären voneinander verschieden. Nun ist überdies $220499 = 311 \cdot 709$. Also ist das Paar XXXIV nicht zu retten. Günstiger verhält sich die Sache bei dem Paare XXXVII, das aus den Zahlen $3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29$ und $3^3 \cdot 5 \cdot 31 \cdot 89$ besteht. Auch diese Zahlen sind nicht befreundet. Es ist zwar $\int 7 \cdot 11 \cdot 29 = 2880 = \int 31 \cdot 89$, aber $\int 3^3 \cdot 5 \int 7 \cdot 11 \cdot 29 = 691200$ und $3^3 \cdot 5 (7 \cdot 11 \cdot 29 + 31 \cdot 89) = 673920$ stimmen nicht überein. Daraus folgt aber auch, daß der Fehler nur in dem gemeinsamen Teiler gesucht werden kann. Setzt man daher für diesen die Unbekannte z, so ergibt sich aus

$$z (7 \cdot 11 \cdot 29 + 31 \cdot 89) = \int z \int 7 \cdot 11 \cdot 29 \quad \text{oder} \quad 4992\, z = 2880 \int z$$

nach der oben erwähnten fünften Methode EULERS

$$\frac{z}{\int z} = \frac{2880}{4992} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 13} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 13} \boxed{\frac{5}{6}} \frac{3^2}{13} \boxed{\frac{3^2}{13}}, \quad \text{also } z = 3^2 \cdot 5.$$

Die beiden befreundeten Zahlen sind dann $3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29$ und $3^2 \cdot 5 \cdot 31 \cdot 89$. Nimmt man nun an, daß im Paare XXXVII der Faktor 3^3 nur durch einen Druckfehler aus 3^2 entstanden sei, so wäre also dieses Paar für Euler gerettet.

Ich habe auch alle übrigen Paare nachgerechnet und kann als endgültiges Ergebnis einer sorgfältigen Nachprüfung sagen: Alles in allem hat Euler genau 62 Paare befreundeter Zahlen mitgeteilt, er hat also zu den dreien, die vor ihm bekannt waren und von denen das erste von den Pythagoreern, das zweite von Fermat und das dritte von Cartesius herrührt (Eneström, BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 263), 59 neue hinzugefügt. Danach sind also die Angaben Cantors zu korrigieren, die Bachmann auch in die *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* aufgenommen hat (siehe daselbst Bd. 1^2, p. 579, wo Theorie und Geschichte der „noch wenig untersuchten" befreundeten Zahlen in nicht ganz 6 Zeilen abgetan ist).

Es sei noch bemerkt, daß Euler in § 95 seiner großen Abhandlung 152 als Ergebnis des dritten Problems ein Zahlenpaar ableitet, nämlich $16 \cdot 1409 \cdot 129503$ und $16 \cdot 17 \cdot 151 \cdot 66739$, von dem er, ohne eine Entscheidung zu treffen, sagt, daß es befreundete Zahlen darstelle, sofern 129503 eine Primzahl sei (die Primzahltabellen der damaligen Zeit reichten nicht so weit). Nun ist aber $129503 = 11 \cdot 61 \cdot 193$, also hat das Paar keine Gültigkeit. Es steht aber auch nicht in der Tabelle und hat daher bei der Zählung nicht mitgewirkt.

Ferdinand Rudio.

Anfragen.

166. Auf welche Weise hat Viète die analytische Geometrie vorbereitet? Im Artikel „Gegensatz von synthetischer und analytischer Geometrie in seiner historischen Entwicklung im XIX. Jahrhundert" (*Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften* III: **1**:2, Leipzig 1907, S. 225) gibt G. Fano an, daß Viète „die Punkte einer geraden Linie durch Zahlen bestimmte". Anderseits behauptet G. Guareschi im Artikel „Grundlagen der analytischen Geometrie" des *Repertorium der höheren Geometrie*, herausg. von H. E. Timerding, II:1 (Leipzig 1910, S. 86) unter Verweisung auf die *Opera mathematica* ed. F. van Schooten (1646), daß Viète „die Punkte einer Geraden durch ihre Abszisse bestimmte".

Aus welchen Quellen diese Angaben stammen, ist mir nicht bekannt und ich habe auch nicht in den Schriften Viètes Belege für dieselben ausfindig machen können. Meint man, daß der Punkt B einer Strecke AB durch die Zahl 5 bestimmt wird, wenn man der Länge der Strecke den Zahlenwert 5 gibt, hat Viète natürlich Punkte durch Zahlen bestimmt. Allein dann ist die Angabe des Herrn Fano als historische Notiz wertlos, denn dasselbe Vorgehen muß immer stattfinden, wenn man ein numerisches planimetrisches Problem behandelt (vgl. z. B. Heron, *Metrika*, ed. H. Schöne, Leipzig 1903, S. 6). Meint man dagegen, daß Viète ausdrücklich den Punkten einer Geraden Zahlenwerte gab, so ist diese Angabe, so viel ich weiß, unrichtig. Ebenso unrichtig wäre es meiner Ansicht nach zu behaupten, daß Viète in irgendeiner der gedruckten Schriften ausdrücklich die Punkte einer beliebigen Geraden auf die Punkte einer festen Abszissenachse bezog.

Es wäre also von Interesse, Auskunft über die Stellen bei Viète, worauf die Herren Fano und Guareschi sich gestützt haben, zu bekommen.

G. Eneström.

Rezensionen.

A. Gutzmer. Zum Jubiläum der Logarithmen. Rede beim Antritt des Rektorats der Vereinigten Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg am 12. Juli 1914. Leipzig, B. G. Teubner 1914. Gr. 4^0, 16 S.

Die deutschen Rektoratsreden mathematisch-historischen Inhalts haben zuweilen wertvolles Material für die wissenschaftliche Forschung auf dem fraglichen Gebiete gebracht und als Beispiele verweise ich auf den dankenswerten Beitrag *Zur Geschichte des Umkehrproblemes der Integrale* (1908; gedruckt 1909) von A. Krazer sowie auf die fleißige Arbeit über *Die exakten Wissenschaften im alten Japan* (1905) von P. Harzer. Die meisten Reden beanspruchen indessen im wesentlichen nur, einige der schon vorhandenen Forschungsresultate in ansprechender und leichtverständlicher Form den Zuhörern vorzulegen, und von dieser Art ist die Rede des Herrn Gutzmer. Nach einigen einleitenden Worten (S. 3—4) gibt er (S. 4—5) kurze Notizen über die ältere Geschichte der Rechenkunst und beschäftigt sich (S. 6—9) etwas ausführlicher mit dem numerischen Rechnen im 16. Jahrhundert, sowie mit der Arbeit Stifels an der Vorbereitung der Erfindung der Logarithmen. Dann geht er (S. 9—12) zur Geschichte dieser Erfindung über, berichtet kurz über die Arbeiten von Bürgi, Neper, Briggs, Kepler, und sucht ferner (S. 12—15) in möglichst populärer Form einige Andeutungen über die Rolle zu geben, die die logarithmische Funktion in der höheren Analysis spielt. Am Ende seiner Rede hebt Herr Gutzmer hervor, daß die Geschichte der Logarithmen insofern von besonderem Interesse ist, als sie zeigt, daß die Meinung, man erfasse am besten ein Problem, wenn man es historisch verfolge, nicht immer richtig ist; im Gegenteil ist das Studium der historischen Entwicklung der Theorie der Logarithmen sehr wenig geeignet, als Einführung in die Theorie selbst zu dienen.

In betreff der historischen Angaben, die Herr Gutzmer in seiner Rede mitgeteilt hat, bemerke ich hier folgendes.

S. 4. Die Angabe: „Im Abendlande wurde durch Gerbert . . . das Rechnen auf dem Abakus wieder eingeführt" kann nicht vom Standpunkte der heutigen mathematisch-historischen Forschung gutgeheißen werden. Auch wenn man nicht mit Herrn Bubnov in betreff der Existenz eines bisher unbekannten Lehrganges der Rechenkunst, des sog. „Anonymus Bubnoviensis" (vgl. Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik **39**, 1908, S. 53—54) einverstanden sein kann, muß man als bewiesen ansehen, daß die Meinung, Gerbert habe das Rechnen auf dem Abakus wieder eingeführt, auf allzu schwachen Füßen steht. Statt: „wieder eingeführt" wäre es darum angebracht, „verbreitet" zu setzen.

S. 4—5. Die Angaben über die Einführung des arabischen Rechnungsverfahrens in Europa sollten teilweise modifiziert werden. Die Behauptung:

„Um 1200 trat allmählich eine Veränderung in der Rechnungsweise ein", ist zum mindestens leicht irreleitend; in Wirklichkeit begann die allmähliche Veränderung schon um die Mitte des 12. Jahrhunderts, und man hat allen Anlaß anzunehmen, daß das arabische Rechnungsverfahren um 1200 in Europa recht große Verbreitung erreicht hatte; selbstverständlich spreche ich nur von den Kreisen, innerhalb derer die arabische Rechenkunst im Mittelalter verbreitet werden konnte. Allerdings besitzen wir, soweit jetzt bekannt ist, nur eine einzige Algorismus-Handschrift, die nachweislich aus dem 12. Jahrhundert stammt (vgl. M. Curtze, Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **8**, 1898, S. 3—27), aber aus anderen Umständen kann man mit großer Wahrscheinlichkeit schließen, daß im Abendlande schon um 1150 die arabische Rechenkunst durch Übersetzungen arabischer und hebräischer Schriften in Übung gekommen war. So zum Beispiel wird in den bisher untersuchten Handschriften des *Liber embadorum*, der im Jahre 1145 (vgl. Biblioth. Mathem. $\mathbf{11}_3$, 1910/11, S. 332—333) von Platone Tiburtino aus dem Hebräischen übersetzt wurde, diese Rechnungsweise benutzt und vielleicht rührt die von B. Boncompagni 1857 herausgegebene lateinische Übersetzung der Arithmetik des Alkhwarismi eben aus derselben Zeit her; es ist sogar nicht unwahrscheinlich, daß die von Boncompagni benutzte Handschrift vor 1200 angefertigt wurde. Entschieden unzutreffend ist meiner Ansicht nach die Behauptung: „Das neue Rechnungsverfahren beruht in der Hauptsache auf dem Wirken und den Werken des Italieners Lionardo Pisano und des deutschen Dominikanermönches Jordanus Nemorarius." Vermutlich hat Herr Gutzmer in betreff des Leonardo Pisano auf den Ausspruch Hankels (*Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter*, Leipzig 1874, S. 343): „[Leonardo Pisanos] *Liber abaci* ist für Jahrhunderte die Fundgrube gewesen, aus der die Rechenmeister (Algoristen) . . . ihre Weisheit geschöpft haben" Bezug genommen, aber dieser Ausspruch ist unzuverlässig. Daß Leonardo überhaupt die Entwicklung der Rechenkunst außerhalb Italiens beeinflußt hat, ist bisher nicht nachgewiesen worden. Um anderseits seine Bedeutung für die Rechenkunst in seinem Vaterlande beurteilen zu können, muß man erst nähere Auskunft über die Verbreitung der arabischen Rechenkunst in Italien um 1200 besitzen, und hierüber fehlt uns gegenwärtig jede genaue Kenntnis. Wie Herr Gutzmer dazu gekommen ist, Jordanus als Beförderer der Einführung der arabischen Rechenkunst in Europa zu betrachten, weiß ich nicht; ist er vielleicht der Ansicht, daß die Algorismus-Schrift, die Schöner 1534 unter dem Titel *Algorithmus demonstratus* herausgab, von Jordanus herrührt? Allein diese Ansicht stützt sich nur auf eine unwahrscheinliche Mutmaßung (vgl. Biblioth. Mathem. **13**, 1912/13, S. 289).

S. 5. Die Angabe: „es wird darin [d. h. im *Liber abaci* des Leonardo] die Null . . . eingeführt" ist nicht gut redigiert; bekanntlich wurde die Null schon im 12. Jahrhundert durch die lateinischen Übersetzer aus dem Arabischen in Europa eingeführt.

S. 6. Da man aus den Worten: „das damals wichtige deutsche Lehrbuch der Algebra, die Coss von Christoph Rudolff" die Auffassung bekommen kann, Rudolff habe selbst sein Lehrbuch „die Coss" genannt, bemerke ich, daß der Titel der Originalausgabe von 1525 lautet: *Behend vnnd Hubsch Rechnung durch die Kunstreichen regeln Algebre / so gemeincklich die Coss genent werden.* Für Rudolff ist also die Coss die Zusammenfassung der algebraischen

Regeln und erst STIFEL hat in seiner Bearbeitung des RUDOLFFschen Lehrbuches „die Coss“ als Titel benutzt.

S. 6. Hinsichtlich der Bemerkung: „Wir erkennen in STIFEL einen selbständig denkenden Zahlentheoretiker, der sich eigene Bahnen bricht, ganz neue Probleme stellt und zu ihrer Lösung schreitet“, verweise ich auf meine Ausführungen in der Biblioth. Mathem. **12**$_3$, 1911/12, S. 256, 345—346; **13**$_3$, 1912/13, S. 340—342; **8**$_3$, 1907/08, S. 209—210, woraus hervorgehen dürfte, daß die Bemerkung nicht unwesentlich modifiziert werden sollte.

S. 8. Was Herr GUTZMER hier über die Vorgeschichte des Begriffes Logarithmus mitteilt, ist so unvollständig, daß der Leser das Verdienst STIFELS überschätzen muß. Wenn man der Zusammenstellung einer geometrischen Reihe mit der arithmetischen Reihe der Exponenten den Namen Logarithmentafel gibt, so findet sich eine solche Tafel schon bei RUDOLFF und zwar umfaßt diese Tafel ebenfalls zwei Zeilen mit je 10 Zahlen. Allerdings beginnt bei RUDOLFF die obere Zeile mit 0 und endet mit 9, ferner ist die Basis nicht 2, sondern eine beliebige Zahl. Diese Tafel benutzt RUDOLFF sowohl bei Multiplikation wie bei Division (siehe *Behend vnnd Hubsch Rechnung durch die Kunstreichen regeln Algebre,* Straßburg 1525, Bl. Dvi^a—Dvi^b, Dvii^b—Dviii^a). Hinsichtlich der Vorgeschichte des Begriffes Logarithmus wäre vielleicht auch auf PACIUOLO (*Summa de arithmetica*, Venedig 1494, Bl. 143^a—143^b) und INITIUS ALGEBRAS (siehe M. CURTZE, Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. **13**, 1902, S. 508) zu verweisen. Man könnte sogar sagen, daß die Proportionslehre des Mittelalters schon durch ihre Terminologie den Begriff des Logarithmus antezipiert hat. Beispielsweise drückt ORESME die Multiplikation zweier Proportionen durch: „Proportionem proportioni addere“ aus (siehe M. CURTZE, *Der Algorismus proportionum des NIKOLAUS ORESME*, Berlin 1868, S. 14).

S. 12. In bezug auf die Bemerkung: „Und da war es eine schöne Entdeckung von NIKOLAUS MERKATOR, daß die Quadratur der Hyperbel mit den Logarithmen innig zusammenhängt“, verweise ich auf Biblioth. Mathem. **11**$_3$, 1910/11, S. 238—239, wo darauf aufmerksam gemacht wird, daß und auf welche Weise diese Entdeckung schon vor MERCATOR bei SARASA (1648) und J. GREGORY (1667) zu finden ist.

S. 13. Die Angabe: „HUDDE . . . rechnete mit algebraischen Ausdrücken ruhig weiter, auch wenn sie bei Einführung von Zahlenwerten für die Buchstaben auf negative Größen führten“, beruht vielleicht auf einem Mißverständnis. In Wirklichkeit verdankt man HUDDE die Benutzung ein und desselben Buchstabens als Zeichen sowohl einer positiven wie einer negativen Größe. Noch bei DESCARTES bedeutet ein Buchstabe immer eine positive Größe; wenn die Koeffizienten einer Gleichung sowohl positiv wie negativ sein können, läßt er das Zeichen weg und setzt vor die Buchstaben Punkte (siehe z. B. *La géométrie*, Ausg. Paris 1886, S. 67). Bei HUDDE können dagegen die Buchstaben auch negative Größen bedeuten (siehe die zweite lateinische Ausgabe von DESCARTES' Geometrie, Amsterdam 1659, S. 439: „Brevitatis causâ, quantitatem cognitam 2^{di} termini, adfectam suis signis + et —, vocabo p“). Auch vor HUDDE rechnete man mit algebraischen Ausdrücken, ohne sich darum zu bekümmern, ob der Zahlenwert eines Ausdruckes positiv oder negativ sei. So behandelte GIRARD (siehe *Invention nouvelle en l'algebre*, Réimpression Leiden 1884, Bl. D$_2$^{a} — D$_2$^{b}) die Gleichung $x^3 = 13\,x + 12$, obgleich er wußte, daß eine Wurzel -1 war, so daß die beiden Seiten der Gleichung den Zahlenwert -1 haben konnten. Man könnte sogar sagen, daß jeder Mathematiker, der die Regel $(a-b)(c-d) = ac - ad - bc + bd$ angab, in Wirklichkeit mit den negativen Größen $-b$ und $-d$ rechnete und die Regel $(-b)\cdot(-d) = +bd$ kommt eigentlich schon bei DIOFANTOS vor (vgl. *Opera omnia*, ed. P. TANNERY **1**, Leipzig 1893, S. 12).

Durch die vorhergehenden kleinen Bemerkungen habe ich nicht beabsichtigt, die Verbreitung unrichtiger mathematisch-historischer Notizen zu verhindern; in der Tat ist es kaum anzunehmen, daß ein Mathematiker, der etwas über Geschichte der Rechenkunst und der Logarithmen zu erfahren wünscht, die kleine Rede des Herrn GUTZMER zu Rate zieht. Meine Absicht ist vielmehr gewesen, eine Gelegenheit zu benutzen, um die Aufmerksamkeit der Mathematiker darauf zu lenken, wie schwierig es gegenwärtig ist, korrekte mathematisch-historische Notizen zu bieten. Durch wiederholte Benutzung solcher Gelegenheiten darf man sich der Hoffnung hingeben, daß die Mathematiker zuletzt darauf verzichten werden, die Angaben, die sie nötig haben, aus unzuverlässigen mathematisch-historischen Handbüchern zu entnehmen.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

Bemerkung zur Rezension von Wittings und Gebhardts „Beispielen zur Geschichte der Mathematik“ (oben S. 181—185).

S. 184 Z. 27—29 sollen die Worte: „Z. 6 v. u. soll also n statt $n-1$ stehen und die folgenden Zeilen sind demgemäß zu berichtigen (bei GRAMMATEUS kommt „ra“ nicht vor)“ gestrichen werden. Ich hatte nämlich übersehen, daß es sich Z. 6 v. u. nicht um GRAMMATEUS sondern um SCHEYBL handelt.

G. ENESTRÖM.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8°. [1

14_3 (1913/14) : 3.

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8°. [2

16 (1914) : 3.

Isis. Revue consacrée à l'histoire de la science, publiée par G. Sarton. Vondelgem-lez-Gand. [3

2 (1914) : 1.

Proceedings of the fifth international congress of mathematicians 1912 (1913). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 35, 1914, 2341—2345. (K. Boehm.) [4

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 1^3 (1907). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 14_3, 1913/14, 259. (G. Eneström.) — 2^2 (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 14_3, 1913/14, 259—267. (G. Eneström.) — 3^2 (1901). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 14_3, 1913/14, 267—268. (G. Eneström.) [5

Bioche, Ch., Histoire des mathématiques (1914). [Rezension:] L'enseignement mathém. 16, 1914, 296. [6

Zeuthen, H. G., Die Mathematik im Altertum und im Mittelalter. (1912.) [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 38_2, 1914, 199—200. (G. Darmois.) [7

Witting, A., und Gebhardt, M., Beispiele zur Geschichte der Mathematik. II (1913). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 26_3, 1914, 249—251. (H. B.) — Archiv der Mathem. 23_3, 1914, 56—57. (E. Löffler.) [8

Timerding, H., Die Verbreitung mathematischen Wissens und mathematischer Auffassung. Leipzig 1914. [9

Die Kultur der Gegenwart III: 1, A 50—A 161. — [Rezension:] Biblioth. Mathem. 14_3, 1913/14, 271—282. (G. Eneström.)

Boutroux, P., Les principes de l'analyse mathématique, exposé historique et critique. I (1914). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 21_2, 1914, 32—36. (J. B. Shaw.) [10

Cajori, F., History of the exponential and logarithmic concepts (1913). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 16, 1914, 94—95. [11

***Versluys, J.,** Zes en negentig Bewijzen van het Theorema van Pythagoras. Amsterdam, Versluys 1914. [12

8, 104 S. — [1 fl.]

Mitzscherling, A., Das Problem der Kreisteilung. Ein Beitrag zur Geschichte seiner Entwicklung (1913). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 21_2, 1914, 99. (R. D. Carmichael.) — L'enseignement mathém. 16, 1914, 402—403. — Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturw. 13, 1914, 477—478. (H. Wieleitner.) [13

Hobson, E. W., Squaring the circle (1913). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 21_2, 1914, 82—93. (R. C. Archibald.) [14

***Dannemann, Fr.,** Die Naturwissenschaften in ihrer Entwicklung und ihrem Zusammenhange. Vierter Band. Das Emporblühen der modernen Naturwissenschaften seit der Entdeckung des Energieprinzips. Leipzig, Engelmann 1913. [15

8°, X + 509 S. — [13 Mk.] — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 35, 1914, 1982—1983. (F. Strunz.) — Isis 2, 1914, 218—222. (G. S.)

Oppenheim, S., Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit. Aufl. 2 (1912). [Rezension:] Monatsh. für Mathem. 25, 1914; Lit.-Ber. 39. [16

Duhem, P., Le système du monde. Histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic. Tome II. Paris, Hermann 1914. [17

8°, (3) + 522 S. — [Rezension des 1. Bandes:] Bullet. d. sc. mathém. 38_2, 1914, 193—199. (G. Loria.) — Isis 2, 1914, 203—204. (G. S.) — Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturw. 13, 1914, 499. (H. Wieleitner.)

Pitoni, R., Storia della fisica (1913). [Rezension:] Scientia 15, 1914, 264—266. (A. Mieli.) [18

***Meyer-Bjerrum, Kirstine,** Die Entwicklung des Temperaturbegriffes im Laufe der Zeiten sowie dessen Zusammenhang mit den wechselnden Vorstellungen über die Natur der Wärme. Übersetzt aus dem Dänischen von Irmgard Kolbe und mit einem Vorwort von E. Wiedemann. Braunschweig, Vieweg 1913. [19

8°, VII + 160 S. — [4.80 Mk.] — Die Wissenschaft, Heft 48. [Rezension:] Archiv der Mathem. 23_3, 1914, 167. (K. Scheel.) — Monatsh. für Mathem. 25, 1914; Lit.-Ber. 62—63. (W. Michl.)

Sarton, G., Soixante-deux revues et collections relatives à l'histoire des sciences. [20

Isis 2, 1914, 133—161.

Smith, D. E. and Mikami, Y., A history of Japanese mathematics (1914). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 26_3, 1914, 251—253. (H. B.) [21

Bourgeois, L., Les anciennes mathématiques japonaises. [22

La revue du mois 16, 1913, 129—160.

Moritz, R. E., Memorabilia mathematica. The philomath's quotation book. New York, Macmillan 1914. [23

8°, (9) + 400 S. — [3 doll.]

Tannery, P., Mémoires scientifiques. II (1912). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 38_2, 1914, 200—204. (P. Duhem.) [24

b) Geschichte des Altertums.

Bezold, C., Zenit- und Äquatorialgestirne am babylonischen Fixsternhimmel (1913). [Rezension:] Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturw. 13, 1914, 498—499. (H. Wieleitner.) [25

***Kopff, A.,** Aus einem Briefe an C. Bezold [über babylonische Mathematik und Astronomie]. [26

Zeitschr. für Assyriologie 28, 1913, 352—361. — [Rezension:] Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturw. 13, 1914, 498—499. (H. Wieleitner.)

Loria, G., Le scienze esatte nell' antica Grecia. Seconda edizione (1914). [Rezension:] Archiv der Mathem. 23_3, 1914, 144—145. (E. Löffler.) [27

Zeuthen, H. G., Sur les connaissances géométriques des Grecs avant la réforme Platonicienne (1913). [Rezension:] Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturw. 13, 1914, 479—480. (H. Wieleitner.) [28

Rudio, F., Zur mathematischen Terminologie der Griechen. [29

Festgabe für Hugo Blümner (Zürich 1914), 287—295.

Mansion, P., Sur un passage géométrique d'Aristote (1914). [Rezension:] Mitteil. zur Gesch. der Medizin und d. Naturw. 13, 1914, 480. (H. Wieleitner.) [30

Mieli, A., Le teorie delle sostanze nei presokratici greci. I.—II. [31

Scientia 14, 1913, 165—181, 329—344.

***Lackenbacher, H.,** Beiträge zur antiken Optik. [32

Wiener Studien. Zeitschrift für klassische Philologie 1913, 34—61.

Heath, Th., Aristarchus of Samos, the ancient Copernicus (1913) [Rezension:] Scientia 15, 1914, 261—263. (A. Mieli.) [33

Archimedes, Opera omnia. Iterum edidit J. L. Heiberg. II (1913). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 20_2, 1914, 489—491. (D. E. Smith.) [34

Heath, Th., Archimedes' Werke. Deutsch von Fr. Kliem (1914). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 20_2, 1914, 491—492. (D. E. Smith.) — Archiv der Mathem. 23_3, 1914, 58—60. (E. Löffler.) — Bullet. d. sc. mathém. 38_2, 1914, 300—301. (P. Duhem.) [35

Kierboe, T., Bemerkungen über die Terminologie des Archimedes (1914). [Rezension:] Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturw. 13, 1914, 480. (H. Wieleitner.) [36

Manitius, K., Des Claudius Ptolemäus Handbuch der Astronomie. I—II (1912—1913). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 26_3, 1914, 253—255. (H. B.) [37

c) Geschichte des Mittelalters.

Karpinski, L. C., The algebra of Abu Kamil (1914). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 16, 1914, 95. [38

Eneström, G., Das Bruchrechnen des Jordanus Nemorarius (1914). [Rezension:] Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturw. 13, 1914, 480—481. (H. Wieleitner.) [39

Eneström, G., Über die Geschichte der Stammbrüche im Mittelalter. [40

Biblioth. Mathem. 14$_3$, 1913/14, 269—270. — Anfrage.

Eneström, G., „Der Algorismus de integris" des Meisters Gernardus (1914). [Rezension:] Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturw. 13, 1914, 480—481. (H. Wieleitner.) [41

Mieli, A., Les précurseurs de Galileo. [42

Scientia 15, 1914. 8 S.

Smith, D. E., The place of Roger Bacon in the history of mathematics. [43

Roger Bacon. Essays collected and edited by A. G. Little (Oxford, Clarendon press 1914), 153—183.

T[hirion], J., Roger Bacon. Septième centenaire de sa naissance. [44

Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 26$_3$, 1914, 227—240.

Angelitti, F., Sugli accenni danteschi ai segni, alle costellazioni ed al moto del cielo stellato da Occidente in Oriente di un grado in cento anni. [45

Rivista di astronomia e scienze affini 6—7 (1912—1913). — [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 16, 1914, 31.

Wieleitner, H., Über den Funktionsbegriff und die graphische Darstellung bei Oresme. [46

Biblioth. Mathem. 14$_3$, 1913/14, 193—243.

***Klug, R.**, Der Astronom Johannes von Gmunden und sein Kalender. Linz 1912. [47

8°, 35 S. — Gymnasialprogramm.

Duhem, P., Etudes sur Léonard de Vinci. I—III (1906—1913). [Rezension:] Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturw. 13, 1914, 466—468. (H. Wieleitner.) [48

Rath, E., Über einen deutschen Algorismus aus dem Jahre 1488. [49

Biblioth. Mathem. 14$_3$, 1913/14, 244—248.

Bensaude, J., L'astronomie nautique au Portugal à l'époque des grandes découvertes (1912). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 26$_3$, 1914, 216—227. (H. Bosmans.) [50

d) Geschichte der neueren Zeit.

Würschmidt, J., Joannis Verneri de meteoroscopiis (1913). [Rezension:] Archiv der Mathem. 23$_3$, 1914, 57—58. (E. Löffler.) — Isis 2, 1914, 205—206. (G. S.) [51

Valentin, G., Eine Ausgabe des „Liber de triplici motu" des Alvarus Thomas. [52

Biblioth. Mathem. 14$_3$, 1913/14, 249—252.

Guimarães, R., Sur la vie et l'oeuvre de Pedro Nunes. [53

Porto, Acad. polyt., Annaes 9, 1914, 54—64, 96—117.

Vollgraff, J. A., Pierre de la Ramée et Wilebrord Snel van Royen. [54

Janus 18, 1913, 595—625.

Gutzmer, A., Zum Jubiläum der Logarithmen. Rede beim Antritt des Rektorats der Vereinigten Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg am 12. Juli gehalten. Leipzig, Teubner 1914. [55

Groß-4°, 16 S.

Cajori, F., Merchiston Castle and John Napier. [56

The Merchistonian 1912/3. 14 S.

Carslaw, H. S., The discovery of logarithms by Napier of Merchiston. [57

Sidney, Royal soc. of N. S. Wales, Journal and Proceedings 48, 1914, 42—72.

***Hobson, E. W.**, John Napier and the invention of logarithms. Cambridge, University press 1914. [58

8°, 48 S. — [1½ sh.]

***Galilei, G.**, Dialogue concerning two new sciences. Translated from the Italian and Latin into English by H. Crew and A. de Salvio. With an introduction by A. Favaro. New York, Macmillan 1914. [59

8°, XXI + 300 S. — [2 doll.]

Favaro, A., Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. XXX. Niccolò Aggiunti (1914). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 16, 1914, 93. [60

Turrière, E., La notion de transcendance géométrique chez Descartes et Leibniz. L'interscendance leibnizienne et l'hypertranscendance. [61

Isis 2, 1914, 106—124.

Whittaker, E. T., A history of the theories of aether and electricity from the age of Descartes to the close of the nineteenth century (1910). [Rezension:] Isis 2, 1914, 222—224. (S. Magrini.) [62

Eneström, G., Girard Desargues und D. A. L. G. [63

Biblioth. Mathem. 14$_3$, 1913/14, 253—258.

Podetti, Fr., La teoria delle proporzioni in un manoscritto inedito di Evangelista Torricelli. [64

Bollet. di bibliogr. d. sc. matem. 16, 1914, 65—76.

Favaro, A., François Blondel et ses études sur les „Nuove scienze" de Galilée (1913). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 16, 1914, 93. [65

Geer, P. van, Johan de Witt als wiskundige. [66

Amsterdam, Wisk. genoots., Nieuw archief 11_2, 1914, 98—126.

Wieleitner, H., Über die „Plani-coniques" von de La Hire (1913). [Selbstreferat:] Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturw. 13, 1914, 484—485. [67

Geer, P. van, De strijd over de uitvinding der differentiaalrekening. [68

Wiskundig tijdschrift 10, 1914, 23—29, 81—86, 129—133.

Jourdain, Ph. E. B., The principles of mechanics with Newton from 1666 to 1679. [69

The monist 24, 1914, 188—234. — [Rezension:] Isis 2, 1914, 209. (J.)

Newton, I., Bernoulli, D. und **Arcy, P.,** Abhandlung über jene Grundsätze der Mechanik, die Integrale der Differentialgleichungen liefern. Aus dem Lateinischen und Französischen übersetzt von A. v. Öttingen. Herausgegeben von Ph. E. B. Jourdain. Leipzig, Engelmann 1914. [70

8°, 110 S. — [2.80 Mk.] — Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 191.

***Klüger, R.,** Die pädagogischen Ansichten des Philosophen Tschirnhaus. Leipzig 1913. [71

8°, 68 S. — Dissertation. — [Rezension:] Archiv der Mathem. 23_3, 1914, 75. (H. Wieleitner.)

Mikami, Y., The determinant theory of Seki Kôwa and subsequent commentaries and corrections. [72

Isis 2, 1914, 1—36.

***Bernoulli, J.,** Die erste Integralrechnung. Eine Auswahl aus Bernoullis mathematischen Vorlesungen über die Methode der Integrale und anderes, aufgeschrieben zum Gebrauch des Herrn Marquis de l'Hospital in den Jahren 1691 und 1692, als der Verfasser sich in Paris aufhielt. Aus dem Lateinischen übersetzt und herausgegeben von G. Kowalewski Leipzig, Engelmann 1914. [73

8°, 197 S. — [5 Mk.] — Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 194.

Pascal, A., Girolamo Saccheri nella vita e nelle opere. [74

Giorn. di matem. 52, 1914, 229—251.

Jourdain, Ph. E. B., The principle of least action (1913). [Rezension:] Scientia 15, 1914, 263. (A. Mieli.) [75

Opere matematiche di G. C. de' Toschi di Fagnano. I—III (1912). [Rezension:] Monatsh. für Mathem. 25, 1914; Lit.-Ber. 33—34. [76

Wieleitner, H., Zwei Bemerkungen zu Stirlings „Lineae tertii ordinis Newtonianae" (1914). [Selbstreferat:] Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturw. 13, 1914, 484. [77

Doublet, E., L'abbé Bossut. (A l'occasion du centenaire de sa mort.) [78

Bullet. d. sc. mathém 38_2, 1914, 93—96, 121—125, 158—160, 187—190, 220—224.

Bortolotti, E., I primordi della teoria generale dei gruppi di operazioni (1913). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 16, 1914, 94. [79

Boulanger, A., Sur les premières démonstrations de l'équivalence des figures symétriques. [80

Mathesis 4_4, 1914, 103.

***Löber, K.,** Beiträge zur Lösung und Geschichte des Malfattischen Problems und seinen Erweiterungen. Berlin 1914. [81

8°, 8 + 63 S. + 3 Taf. — [2 Mk.] — Dissertation. (Halle a. S.)

Doublet, E., L'astronome Bessel considéré surtout comme vulgarisateur. [82

Lyon, Observatoire, Bulletin 1, 1914. 11 S.

Ahrens, W., Karl Friedrich Gauss im Spiegel der Zeitgenossen und der Nachwelt. [83

Die Braunschweiger GNC. Monatsschrift 1914, 428—444.

Stäckel, P., Wolfgang und Johann Bolyai. Geometrische Untersuchungen. I—II (1913). [Rezension:] Archiv der Mathem. 23_3, 1914, 67—69. (E. Hoppe.) — Bullet. d. sc. mathém. 38_2, 1914, 257—261. (G. Giraud.) — Deutsche Literaturz. 35, 1914, 2525—2528. (L Schlesinger.) [84

Bützberger, F., Über bizentrische Polygone, Steinersche Kreis- und Kugelreihen und die Erfindung der Inversion (1913). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 38_2, 1914, 214—215. (Ch. Bioche.) [85

Pitollet, C., Pour la bibliographie critique de Guillaume Libri. Le comte Georges Libry falsificateur de lettres de change d'après les dossiers de ses procès à Lyon en 1813, et 1815—16. [86

Il libro e la stampa 7, 1913, 4—54, 165—188. 238—268. — [Rezension:] Bollett. d. bibliogr. d. sc. matem. 16, 1914, 94.

***Lebon, E.,** Emile Picard. Biographie, bibliographie analytique des écrits. Seconde édition, entièrement refondue. Paris, Gauthier-Villars 1914. [87

Groß-8°, VII + 96 S. + Bildnis. — [7 fr.] — [Rezension:] Mathesis 4_4, 1914, 186.

Darboux, G., Eloges académiques et discours (1912). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 35, 1914, 1593—1594. (E. Lampe.) [88

e) Nekrologe.

John Sturgeon **Mackay** (1843—1914). [89
Edinburgh, Mathem. soc., Proceedings 32, 1913/14. 9 S. (G. A. Gibson.)

Jules **Molk** (1857—1914). [90
L'enseignement mathém. 16, 1914, 380—383. (H. Vogt.)

Henri **Poincaré** (1854—1912) [91
d'Adhémar, R., *Henri Poincaré*. Paris, Blond 1914. 16°, 64 S. — [0.60 fr.]

Giovanni **Schiaparelli** (1835—1910). [92
Casavelle, G., *L'astronomo Giovanni Schiaparelli*. Torino 1914. 8°, 90 S. + Bildnis.

Ludwig **Tuschel** (1886—1913). [93
Monatsh. für Mathem. 25, 1914, 177—178. (Emil Müller.)

f) Aktuelle Fragen.

Pahl, F., Geschichte des naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterrichts (1913). [Rezension:] Archiv der Mathem. 23, 1914, 71—72. (H. Wieleitner.) [94

Barwell, Miss M. E., The advisability of including some instruction in the school course on the history of mathematics. [95
The mathem. gazette 7, 1913, 72—79.

Voss, A., Die Beziehungen der Mathematik zur Kultur der Gegenwart. Leipzig 1914. [96
Die Kultur der Gegenwart III: 1 A 1 — A 49.

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— S. G. Barton zum Professor der Astronomie an der Universität von Pennsylvania in Philadelphia.

— Dr. Susan Rose Benedict zum Professor der Mathematik am „Smiths college".

— Dr. H Blumberg in Lincoln zum Professor der Mathematik an der Universität von Nebraska daselbst.

— Professor W. H Bragg in Leeds zum Professor der Physik an der „Yale university" in New Haven.

— Dr. C. E. Brooks in Cambridge, Mass., zum Professor der Mathematik an der Universität von California.

— Dr. H. T. Burgess in Madison zum Professor der Mathematik an der Universität von Wisconsin daselbst.

— Professor P. Debye in Utrecht zum Professor der Physik an der Universität in Göttingen.

— Professor L. L. Dines in Arizona zum Professor der Mathematik an der Universität von Saskatchewan.

— „Instructor" E. L. Dodd in Austin, Tex., zum Professor der Versicherungsmathematik an der Universität daselbst.

— Professor E. P. R. Duval zum Professor der Mathematik an der Universität von Oklahoma.

— Dr. M. R. Harkins zum Professor der Physik an der Universität von Pennsylvania in Philadelphia.

— Dr. E. Haynes am „Lick observatory" zum Professor der Astronomie am „Beloit college".

— Direktor H. Hergesell in Lindenburg zum Professor der Aeronautik an der Universität in Berlin.

— L. S. Hill zum Professor der Mathematik an der Universität von Montana.

— Dr. W. F. Holman in Minneapolis zum Professor der Mathematik an der Universität von Minnesota daselbst.

— Dr. W. A. Hurwitz in Ithaca zum Professor der Mathematik an der „Cornell university" daselbst.

— Dr. D. H. Kabakjian zum Professor der Physik an der Universität von Pennsylvania in Philadelphia.

— Professor P. Köbe in Leipzig zum Professor der Mathematik an der Universität in Jena.

— Professor W. C. Krathwohl am „Ripon college" zum Professor der Mathematik am „Armour institute of technology".

— Professor M. Laue in Zürich zum Professor der Physik an der Universität in Frankfurt a. M.

— Professor W. Marshall zum Professor der Mathematik an der Universität von Arizona.

— Dr. H. H. Mitchell in Philadelphia zum Professor der Mathematik an der Universität von Pennsylvania daselbst.

— „Instructor" Anna Pell in South Hadley, Mass., zum Professor der Mathematik am „Mount Holyoke college" daselbst.

— Professor T. G. Rogers in Silver City zum Professor der Mathematik an der „Normal university" von New Mexico in East Las Vegas.

— Professor R. Rothe in Hannover zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Berlin.

— Dr. J. E. Rowe am „Dartmouth college" zum Professor der Mathematik am „Pennsylvania state college".

— Professor Fr. A. Sanders an der „Syracuse university" zum Professor der Physik am „Vassar college".

— Dr. C. Shaw zum Professor der Mathematik an der Universität von Idaho.

— Dr. L. H. Slobin in Minneapolis zum Professor der Mathematik an der Universität von Minnesota daselbst.

— Dr. Clara E. Smith in Wellesley zum Professor der Mathematik am „Wellesley college" daselbst.

— Dr. Ch. Snow zum Professor der Mathematik an der Universität von Idaho.

— Instructor R. B. Stone in Lafayette, Ind., zum Professor der Mathematik an der „Purdue university" daselbst.

— Dr. E. B. Stouffer in Urbana zum Professor der Mathematik an der Universität von Kansas.

— Professor E. Swift in Princeton zum Professor der Mathematik an der Universität von Vermont.

— Professor L. Tonelli in Cagliari zum Professor der Analysis an der Universität in Parma.

— Dr. M. O. Tripp in Muncie, Ind., zum Professor der Mathematik am „Olivet college".

— Professor Marion Ballantyne White in Lawrence zum Professor der Mathematik am „Michigan state normal college" in Ypsilanti.

— Dr. A. N. Whitehead in London zum Professor der angewandten Mathematik am „Imperial college of science and technology" daselbst.

— Dr. E. E. Withford in New York zum Professor der Mathematik am „College of the city of New York".

— Dr. K. P. Williams in Bloomington zum Professor der Mathematik an der „Indiana university" daselbst.

— Dr. E. B. Wiley in Chicago zum Professor der Mathematik an der „Denison university".

Todesfälle.

— C. F. Adams, Professor der Physik an der „Detroit central high school", gestorben den 29. Oktober 1914, 60 Jahre alt.

— Karl Bädecker, Professor der Physik an der Universität in Jena, geboren in Leipzig den 3. Februar 1877, im Felde gefallen den 6. August 1914.

— Friedrich Bidlingmaier, Kustos der Sternwarte in München, im Felde gefallen 1914, 37 Jahre alt.

— Heinrich Burkhardt, Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in München, geboren in Schweinfurt den 15. Oktober 1861, gestorben daselbst den 2. November 1914.

— Emil Cherbuliez, früher Direktor der Gewerbe- und Realschule in Mühlhausen, geboren in Genf den 3. März 1837, gestorben in Zürich den 20. November 1914.

— Wilhelm Deimler, Privatdozent der Mathematik an der Technischen Hochschule in München, im Felde gefallen 1914, 30 Jahre alt.

— Nils Christofer Dunér, früher Professor der Astronomie an der Universität in Uppsala, geboren zu Billeberga in Schweden den 21. Mai 1839, gestorben in Stockholm den 10. November 1914.

— Ernst Grimsehl, Direktor der Oberrealschule auf den Uhlenhorst zu Hamburg, geboren in Hannover den 6. August 1861, im Felde gefallen am 30. Oktober 1914.

— Giovanni Battista Guccia, Professor der höheren Geometrie an der Universität in Palermo, geboren in Palermo den 21. Oktober 1855, gestorben den 29. Oktober 1914.

— Karl Eugen Hoffmann, früher Konrektor am humanistischen Gymnasium in Speyer, geboren in Speyer den 6. Mai 1848, gestorben daselbst den 10. Mai 1914.

— Hermann Klein, Astronom, Besitzer einer Privatsternwarte in Köln, geboren in Köln den 14 September 1844, gestorben daselbst 1914.

— Rudolf Lehmann-Filhés, Professor der Astronomie an der Universität in Berlin, geboren in Berlin den 12. April 1854, gestorben den 15. Juni 1914.

— Eduardo Leon y Ortiz, Professor der Astronomie an der Universität in Madrid, geboren in Valencia den 29. September 1846, gestorben in Madrid den 9. September 1914.

— Julius Liebmann, Observator an der Sternwarte in Berlin, im Felde gefallen 1914.

— George Manning, Professor der Physik am „Robert college" in Konstantinopel, gestorben in Florenz 1914, 50 Jahre alt.

— William J. Milne, Präsident der „New York state college of teachers" in Albany, gestorben in Albany den 4. September 1914, 71 Jahre alt.

— Maximilian Reinganum, Professor der Physik an der Universität in Freiburg i. B., geboren in Frankfurt a. M. den 2. Januar 1876, im Felde gefallen den 4. September 1914.

— Albert de Saint-Germain, Professor der Mechanik an der Universität in Caen, geboren in La Bréqueille den 17. Mai 1839, gestorben in Caen den 1. September 1914.

— Ludwig Tuschel, früher Assistent für Geometrie an der Technischen Hochschule in Wien, geboren in Wien den 11. März 1886, gestorben in Strebersdorf den 3. September 1913.

Vorlesungen über Geschichte der mathematischen Wissenschaften.

— An der „Columbia university" in New York hatte Professor C. J. Keyser für die „summer session" (6. Juli—14. August) 1914 eine Vorlesung über Geschichte und Bedeutung der mathematischen Grundbegriffe angekündigt.

— An der Universität in Neapel hat Professor F. Amodeo für das akademische Jahr 1914—1915 eine dreistündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik im Altertum angekündigt.

— An der Universität von Illinois in Urbana hatte Dr. E. B. Lytle für das Wintersemester 1914 eine zweistündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik angekündigt.

Vermischtes.

— Miss M. E. Wells am „Mount Holyoke college" ist zum „Instructor in mathematics" am „Oberlin college" ernannt.

— Miss M. A. Colpitts ist zum „Instructor in mathematics" am „Tabor college" ernannt.

— Miss M. Daniels ist zum „Instructor in mathematics" am „Iowa state college" ernannt.

— Der Alfred Ackermann-Teubner Gedächtnispreis zur Förderung der mathematischen Wissenschaften ist vom Stifter Herrn Felix Klein zugesprochen worden.

Namenregister.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.