BIBLIOTHECA MATHEMATICA.

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN.

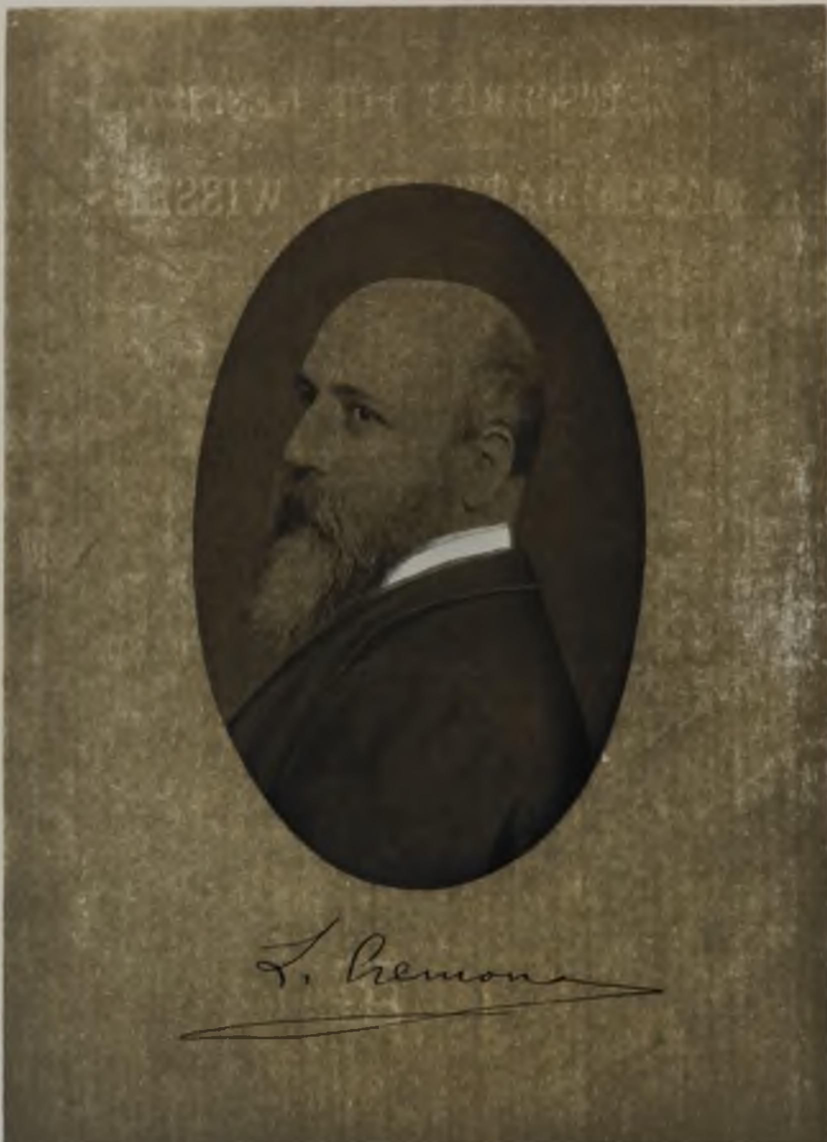
HERAUSGEGEBEN VON

GUSTAF ENESTRÖM
IN STOCKHOLM.

DRITTE FOLGE. FÜNFTER BAND.

MIT DEM BILDNIS VON L. CREMONA ALS TITELBILD,
SOWIE 21 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1904.


L. Cremona

Inhaltsverzeichnis.

Autoren-Register.

Bosmans, 18.
Braunmühl, 24.
Duhem, 16.
Eneström, 1—5, 11, 12, 14, 15, 21, 23, 26, 27, 33—36.
Enkle, 2.
Favaro, 17, 22.
Gerland, 19.
Gräfe, 2.
Hoffmann, 28.
Hultsch, 9.
Körner, 25.
Kutta, 6.
Loria, 30, 31.
Müller, 2, 32.
Rath, 29.
Suter, 10.
Tannery, 8, 13.
Wallner, 20.
Zeuthen, 7.

Sach-Register.

Aktuelle Fragen, 33—36.
Albattani, 10.
Algebra, 23.
Algorismus, 12, 13.
Algorithmus demonstratus, 15.
Anfragen, 11, 12, 14, 21, 23, 27.
Antworten, 13, 22, 29.
Anziehung, 28.
Arabische Mathematik, 10.
Arithmetik, 7—9, 12, 13, 15.
Astronomie, 10.
Ball, 4
Bernoulli, 26.
Bibliographie, 37.
Binomischer Lehrsatz, 23.
Biographie, 17, 30.
Braunmühl, 6.
Briefe, 26.
Cantor, 2.
Cavalieri, 21, 22.
Ceva, 31.
Cotes, 24.
Cremona, 30, 31.
Curtze, 12, 13.
Datierung von Zeitschriftenartikel, 34.
Ernennungen, 38.
Eukleides, 9, 14.
Euler, 26.
Eulersche Summenformel, 27.
Gambioli, 4.
Geometrie, 11, 14, 21, 22, 29.
Griechische Mathematik, 7—9.
Heronsche Dreiecksformel, 11.
Historische Entwickelung, 1.
Indische Mathematik, 7.
Infinitesimalrechnung, 20, 24.
Integralrechnung, 24.
Jahrbuch üb. d. Fortschritte der Mathematik, 32.
Jordanus Nemorarius, 15, 16.
Leonardo Cremonese, 17.
Literarische Notizen, 38.
Materieller Punkt, 25.
Mathematik im allgemeinen, 2—5.
Mathematiker-Versammlungen, 38.
Mathematische Geschichtsschreibung, 1.
Mathematische Rezensionen, 35.
Mathematische Zeichen, 8.
Mathematisch-historische Hilfsmittel, 36.
Mathematisch-historische Kongresse, 38.
Mathematisch-historischer Universitätsunterricht, 33.
Mathematisch-historische Vorlesungen, 38.
Maximalprobleme, 28.
Mechanik, 19, 25, 28.
Nallino, 10.
Neuerschienene Schriften, 37.
Newton, 24.
Pascal, 23.
Pendeluhr, 19.
Philotechnes, 16.
Pisano, 14.
Preisfragen, 38.
Puliti, 4.
Reihen, 23, 27.
Rezensionen, 3—6, 10, 35.
Roomen, 18.
Sexagesimalrechnung, 9.
Spirallinie, 21, 22.
Sturm, 5.
Subtraktionszeichen, 8.
Summenformel, 27.
Technik, 19.
Todesfälle, 38.
Torsion, 29.
Trigonometrie, 6, 18.
Wissenschaftliche Chronik, 38.
Zeuthen, 3.

Allgemeines über Geschichte der Mathematik.

Seite

1. Über regelmäßige und unregelmäßige historische Entwickelung auf dem Gebiete der Mathematik. Von G. Eneström . . . . 1—4
2. Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik". Von G. Eneström, J. Enkle, F. Graefe, Felix Müller . 68—72, 200—208, 305—310, 407—414
3. Zeuthen, Forelaesninger over Mathematikens Historie II (1903). — Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert (1903). Rezension von *G. Eneström* . . . . 211—220
4. Ball, Breve compendio di storia delle matematiche. Versione dall' inglese di Gambioli e Puliti. I—II (1902—1903). Rezension von *G. Eneström* . . . . 313—316
5. Sturm, Geschichte der Mathematik (1904). Rezension von *G. Eneström* 417—420
6. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. II (1903). Rezension von *W. M. Kutta* . . . . 74—78

Geschichte des Altertums.

7. Sur l'arithmétique des Grecs et des Indiens. Par H. G. Zeuthen. Mit 4 Textfiguren . . . . 97—112
8. Sur le symbole de soustraction chez les Grecs. Par Paul Tannery 5—8
9. Die Sexagesimalrechnungen in den Scholien zu Euklids Elementen. Von Friedrich Hultsch . . . . 225—233

Geschichte des Mittelalters.

10. Nallino, Al-Battânî Opus astronomicum. 1 (1903). Rezension von *Heinrich Suter* . . . . 78—88
11. Über die Geschichte der Heronschen Dreiecksformel im christlichen Mittelalter. [Anfrage 118.] Von G. Eneström . . . . 311—312
12. Über den Verfasser einer von Curtze (1898) herausgegebenen Algorismus-Schrift aus dem 12. Jahrhundert. [Anfrage 119.] Von G. Eneström 312
13. Sur l'auteur d'un texte algorithmique du 12e siècle publié par Curtze. [Antwort auf die Anfrage 119.] Par Paul Tannery . 416
14. Woher hat Leonardo Pisano seine Kenntnisse der Elementa des Euklides entnommen? [Anfrage 120.] Von G. Eneström . . . 414—415
15. Ist Jordanus Nemorarius Verfasser der Schrift: „Algorithmus demonstratus"? Von G. Eneström . . . . 9—14

Seite

16. Un ouvrage perdu cité par Jordanus de Nemore: le Philotechnes. Par P. Duhem . . . . 321—325

17. Nuove ricerche sul matematico Leonardo Cremonese. Di Antonio Favaro . . . . 326—341

Geschichte der neueren Zeit.

18. Note sur la trigonometrie d'Adrien Romain. Par H. Bosmans . 342—354

19. Über die Erfindung der Pendeluhr. Von E. Gerland. Mit 3 Textfiguren . . . . 234—247

20. Entwickelungsgeschichtliche Momente bei Entstehung der Infinitesimalrechnung. Von C. R. Wallner . . . . 113—124

21. Cavalieri und der Satz von der Fläche einer Spirallinie. [Anfrage 116.] Von G. Eneström . . . . 208—209

22. Cavalieri ed il teorema dell' area delle spirali. [Antwort auf die Anfrage 116.] Di A. Favaro 415

23. Pascal und der binomische Lehrsatz für nicht ganzzahlige Exponenten. [Anfrage 115.] Von G. Eneström . . . . 72—73

24. Beiträge zur Geschichte der Integralrechnung bei Newton und Cotes. Von A. von Braunmühl Mit 3 Textfiguren . . . . . . 355—365

25. Der Begriff des materiellen Punktes in der Mechanik des achtzehnten Jahrhunderts. Von Theodor Körner. Mit 1 Textfigur 15—62

26. Der Briefwechsel zwischen Leonhard Euler und Johann I Bernoulli. II. Von G. Eneström. Mit 2 Textfiguren . . . . 248—291

27. Über die Geschichte einer Summenformel, die mit der Eulerschen verwandt ist. [Anfrage 117.] Von G. Eneström . . . . 209—210

28. Die Entwickelung der verschiedenen Probleme der Maxima der Anziehung. Von Erich Hoffmann. Mit 8 Textfiguren . . . . . 366—397

29. Über die Geschichte des Termes „Torsion". [Antwort auf die Anfrage 114.] Von E. Rath 73

30. Luigi Cremona et son œuvre mathématique. Par Gino Loria. Mit Bildnis in Photolithographie als Titelbild . . . . 125—195

31. Un article de L. Cremona sur Giovanni Ceva. Par G. Loria 311

32. Das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 1869—1904. Von Felix Müller . . . . 292—297

Aktuelle Fragen.

33. Die Geschichte der Mathematik und der Universitätsunterricht. Von G. Eneström . . . . 63—67

Seite

34. Ist es zweckmäßig, daß mathematische Zeitschriftenartikel datiert werden? Von G. Eneström . . . . 196—199

35. Welche Forderungen sind an Rezensionen mathematischer Arbeiten zu stellen? Von G. Eneström . . . . 298—304

36. Ein neues literarisches Hilfsmittel zur Verbreitung mathematisch-historischer Kenntnisse. Von G. Eneström . . . . 398—406

---

37. Neuerschienene Schriften . . . . 89—93, 221—223, 317—318, 421—425

Autoren-Register. — Zeitschriften. Allgemeines. — Geschichte des Altertums. — Geschichte des Mittelalters. — Geschichte der neueren Zeit. — Nekrologe. — Aktuelle Fragen.

---

38. Wissenschaftliche Chronik . . . . 94—96, 224, 319—320, 426—429

Ernennungen. — Todesfälle. — Demnächst erscheinende mathematisch-literarische Arbeiten. — Mathematisch-historische Arbeiten in Vorbereitung. — Vorlesungen über Geschichte der mathematischen und physischen Wissenschaften. — Neuer Kongreß für Geschichte der mathematischen und physischen Wissenschaften in Genf 1904. — Preisfragen gelehrter Gesellschaften. — Mathematiker-Versammlungen im Jahre 1904. — Vermischtes.

Namenregister . . . . 430—442

Berichtigung zum Inhaltsverzeichnis des vorigen Bandes.

S. IV Nr. 8 lies 321—325 statt 221—225; Nr. 13 lies 326 statt 226.

Über regelmäßige und unregelmäßige historische Entwickelung auf dem Gebiete der Mathematik.

Von G. Eneström in Stockholm.

Am Anfange des Artikels „Über kulturhistorische und rein fachmäßige Behandlung der Geschichte der Mathematik“ [1]) habe ich im Vorübergehen von den Fällen gesprochen, in denen keine Erklärung der historischen Entwickelung der Mathematik nötig ist, und in solchen Fällen habe ich die Entwickelung als regelmäßig bezeichnet. Damit ist aber nur ausgesagt worden, daß die fragliche Entwickelung von unserem Gesichtspunkte aus als regelmäßig erscheint, und auf die Frage, inwieweit dieselbe auch an sich als regelmäßig betrachtet werden kann, hatte ich damals keinen Anlaß einzugehen. Indessen ist diese letzte Frage für die Würdigung der älteren Mathematik nicht ohne Interesse, und ich werde sie darum hier zum Gegenstand einer näheren Untersuchung machen.

An der soeben zitierten Stelle hatte ich als Kennzeichen der regelmäßigen Entwickelung angegeben, daß die chronologische Ordnungsfolge der besonderen Sätze oder Methoden wesentlich mit der systematischen zusammenfällt. Nun ist es aber klar, daß diese letztere im allgemeinen nicht *a priori* festgestellt werden kann, sondern daß vielmehr innerhalb einer gewissen Theorie die systematische Ordnungsfolge wenigstens bis zu einem gewissen Grade von dem zeitweiligen Stande dieser Theorie abhängig ist. So z. B. ist ja jetzt die systematische Darstellung der Theorie der Differentialgleichungen eine ganz andere als am Anfange des 19. Jahrhunderts, und der historische Verlauf der Entwickelung dieser Theorie im 18. Jahrhundert, der vor 100 Jahren als wesentlich regelmäßig betrachtet werden konnte, darf gewiß nicht von uns in demselben Sinne regelmäßig genannt werden. Verfolgt man diesen Gedankengang, so könnte man versucht werden zu behaupten, daß wir überhaupt nie zu beurteilen

1) G. Eneström, *Über kulturhistorische und rein fachmäßige Behandlung der Geschichte der Mathematik;* Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 1.

vermögen, ob der historische Entwickelungsgang auf dem Gebiete einer besonderen Theorie an sich regelmäßig ist oder nicht, und daß es also durchaus unnütz ist sich mit dieser Frage zu beschäftigen.

Sieht man indessen von dem trivialen Sachverhältnisse ab, daß überhaupt keine Entwickelung *vollständig* regelmäßig oder *vollständig* unregelmäßig sein kann, so ist diese Behauptung kaum stichhaltig. Freilich finden sich viele mathematische Theorien, welche durch die weitere Entwickelung der Wissenschaft in ganz neue Bahnen gebracht werden können, aber auf gewissen Gebieten ist es wohl mit einem sehr großen Grade von Wahrscheinlichkeit vorauszusehen, daß dies nicht der Fall sein wird, und übrigens gibt es Arten von systematischer Anordnung des Stoffes, die von der weiteren Entwickelung der Mathematik wesentlich unabhängig sind. Darum darf man beispielsweise behaupten, daß der historische Verlauf der Theorie der algebraischen Gleichungen insofern wirklich regelmäßig gewesen ist, als zuerst die Gleichungen ersten Grades, dann nacheinander die Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades gelöst worden sind, worauf schließlich der Beweis gebracht wurde, daß die allgemeine Gleichung höheren Grades algebraisch unlösbar ist. Ebenso ist es erlaubt zu sagen, daß eine Theorie, deren historische Entwickelung einen Übergang von Spezialuntersuchungen zu allgemeinen Methoden aufzuweisen hat, in methodischer Hinsicht einen an sich regelmäßigen Verlauf gehabt hat. Aber jedenfalls soll man nicht ohne reifliche Erwägung und ohne Hinzufügung der nötigen Einschränkungen die Entwickelung auf einem gewissen Gebiete als regelmäßig bezeichnen.

Kaum weniger schwierig ist es im allgemeinen zu entscheiden, ob der historische Verlauf in betreff einer besonderen Theorie wirklich unregelmäßig gewesen ist, aber auch hier kann man wenigstens einige Fälle angeben, in denen die Entscheidung ziemlich leicht ist. Hat man sich auf dem fraglichen Gebiete *fortgesetzt* mit Problemen beschäftigt, zu deren Erledigung die zur Verfügung stehenden Hilfsmittel offenbar durchaus unzureichend waren, so kann man wohl hier von einer unregelmäßigen Entwickelung auf diesem Gebiete sprechen[1]); ebenso wenn zufälligerweise ein wichtiger Satz entdeckt worden ist, dessen Wert man lange Zeit nicht verstand, so daß die Entdeckung für die Wissenschaft vorläufig unfruchtbar blieb. Ist es auf der anderen Seite vorgekommen, daß man Methoden, die für einen besonderen Zweck mit Erfolg benutzt worden waren, auf solche Fälle anwendete, für die sie nicht passen, und dadurch zu un-

---

1) Dagegen kann das Vorhandensein eines einzigen solchen Versuches, Probleme mit offenbar ungenügenden Hilfsmitteln zu lösen, natürlich nicht ein Zeichen sein, daß der Verlauf unregelmäßig gewesen ist.

richtigen Resultaten gelangte, so kann auch dieser Verlauf der Entwickelung als unregelmäßig bezeichnet werden.

Ich habe oben bemerkt, daß die Frage der Regelmäßigkeit der Entwickelung für die Würdigung der älteren Mathematik nicht ohne Interesse ist. Freilich kann man sich eine solche Würdigung denken, die von der Frage der Regelmäßigkeit unabhängig ist, wenn man nämlich nur untersucht, ob die in Betracht gezogenen mathematischen Arbeiten zur Lösung der Probleme, um deren Erledigung es sich handelte, genügten, und ob die Lösung scharfsinnig war. Von diesem Gesichtspunkte aus würde z. B. die „Regula falsi“ ebenso große historische Bedeutung haben wie die direkten Methoden zur Lösung der Gleichungen ersten Grades, und die Erfindung der prosthaphäretischen Rechnung fast ebenso verdienstvoll sein wie die der Logarithmen.[1]) Ich will gewiß nicht in Abrede stellen, daß es Fälle gibt, in denen man ohne Ungelegenheit auf diese Weise argumentieren kann, aber meines Erachtens gibt es einen höheren Standpunkt für die Würdigung der mathematischen Forschungsarbeit. In der Tat kann man wohl behaupten, daß diese Arbeit im allgemeinen um so erfolgreicher wird, je mehr die wirklich erstrebten und erzielten Errungenschaften einen *bleibenden* Wert besitzen, und je mehr die Errungenschaften einen natürlichen Fortschritt der Wissenschaft repräsentieren. Auf diese Weise wird nämlich in der Regel mit der geringsten Kraftanstrengung das möglichst größte Resultat erzielt.

Aber aus dem, was ich soeben gesagt habe, folgt fast unmittelbar, daß gerade der regelmäßige Verlauf der Entwickelung einer besonderen mathematischen Theorie im allgemeinen bei der Behandlung der Geschichte der Mathematik die größte Beachtung verdient. Dabei ist natürlich nicht ausgeschlossen, daß, weil ausnahmsweise z. B. die unrichtige Anwendung einer schon vorhandenen Methode zu neuen Entdeckungen führen kann, zu denen man auf dem richtigen Wege erst weit später hätte gelangen können, aus diesem Grunde ein einzelner unregelmäßiger Verlauf für die Darstellung der Geschichte der Mathematik von hervorragender Bedeutung sein kann; aber durch solche Ausnahmefälle wird die allgemeine Regel nicht aufgehoben.

---

1) Diesen Standpunkt scheint H. G. Zeuthen in einem kürzlich erschienenen Artikel zu vertreten. „Vaerdien af en i aeldre Tid anvendt Fremgangsmaade“, sagt er in der Oversigt over det danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger 1903, S. 555, „beror ikke paa den större eller mindre ydre Lighed med dem, „hvis Nytte vi nu kende, men paa det, hvortil de i sin Tid kunde bruges og virkelig „bleve brugte.“ Aber vielleicht beabsichtigt seine Bemerkung nur hervorzuheben, daß man die ältere Mathematik nicht einseitig vom modernen Gesichtspunkte aus beurteilen soll.

Eine sehr wichtige Aufgabe der mathematisch-historischen Forschung ist es also meines Erachtens, die Spuren der regelmäßigen Entwickelung zu entdecken. Zuweilen kann man dabei unsicher sein, ob eine Methode, die im Grunde mit der jetzigen übereinstimmt, aber der Form nach von dieser abweicht, als ein Glied der regelmäßigen Entwickelung betrachtet werden soll oder nicht, und tatsächlich sind in solchen Fällen die Fachgenossen verschiedener Ansichten gewesen. Für meinen Teil bin ich geneigt mehr die Übereinstimmung als die Abweichung zu berücksichtigen, und darum möchte ich nicht sogleich der älteren Mathematik eine Methode aberkennen, nur weil das ältere entsprechende Verfahren gewisse Begriffsbestimmungen vermeidet, die jetzt als notwendige Grundlagen der Methode betrachtet werden. So z. B. wäre es meines Erachtens nicht angebracht, aus dem Umstande, daß die griechischen Mathematiker den Grenzbegriff im strengen Sinne nicht benutzen, *unmittelbar* zu folgern, daß ihnen die Exhaustionsmethode unbekannt war.

Es ist schon hervorgehoben worden, daß in einzelnen Ausnahmefällen ein unregelmäßiger Verlauf der Entwickelung besonders beachtet werden muß, und auch sonst kann ein solcher Verlauf dem mathematisch-historischen Forscher großes Interesse darbieten. In einer ausführlichen Darstellung der Geschichte der Mathematik soll man darum auch der unregelmäßigen Entwickelung die gebührende Aufmerksamkeit schenken und dieselbe wenn irgend möglich zu erklären versuchen.[1]) Handelt es sich aber darum, in einer Vorlesung oder in einem Lehrbuche eine kurze Übersicht über die Geschichte der Mathematik zu geben, so bin ich der Ansicht, daß die Schilderung der Fälle, wo der Entwickelungsgang unregelmäßig gewesen ist, wesentlich knapper als die übrige Darstellung sein soll.

1) Vgl. Eneström, a. a. O. S. 1.

Sur le symbole de soustraction chez les Grecs.

Par Paul Tannery à Pantin.

Dans la précieuse édition princeps qu'Hermann Schöne nous a donnée des *Μετρικά* de Héron d'Alexandrie[1]), on lit, page 156, l. 8 et 10, pour un nombre qui doit certainement être $73\frac{13}{14}$, la forme grecque $\textit{ογ}\ \textit{ιγ}^{\textit{ιδ'}}$, tandis que l'apparat critique donne, comme leçon du manuscrit unique, *οδ⋔ι'δ'*, et ajoute: „correxi dubitanter, fortasse *μ(ονάδων) τεσσαρεσκαιδεκάτου δεουσῶν*", c'est à dire que cette leçon signifierait $74 - \frac{1}{14}$.

Que cette signification soit exacte, il ne peut y avoir le moindre doute. Le symbole qui, dans le manuscrit, sépare le nombre d'unités et la fraction, est bien, en effet, le *ψ* tronqué et renversé qui équivaut pour Diophante, à notre signe de soustraction. La présence de ce symbole dans un manuscrit de Héron est d'autant plus intéressante qu'elle semble attester son usage deux siècles environ avant Diophante. A la vérité, comme on ne le rencontre que dans ce passage, la preuve n'est pas rigoureusement acquise, car il pourrait n'y avoir là qu'une abréviation byzantine; cependant cette dernière hypothèse n'est guère vraisemblable. Le manuscrit des *Metrica* est en effet antérieur lui même de plus de deux siècles au plus ancien manuscrit de Diophante que l'on possède; il parait représenter fidèlement un prototype au moins aussi ancien que celui auquel remonte notre texte des *'Αριθμητικά*; enfin ce dernier ouvrage a été très peu étudié chez les Byzantins jusqu'à la fin du XIII^{e} siècle, et les procédés et symboles qu'on y rencontre ont été trop peu vulgarisés pour qu'on puisse facilement croire à un emprunt dans le cas dont il s'agit. D'autre part, il n'est pas inutile de remarquer que le texte des *Metrica* est actuellement le plus ancien connu où l'on trouve l'expression technique de *δυναμοδύναμις* (voir l'*Index verborum*), employée par Diophante pour désigner la quatrième puissance de l'inconnue.

---

1) *Heronis Alexandrini opera quæ supersunt omnia.* Vol. III (Leipzig, Teubner 1903).

Mais sur l'énonciation en langue grecque de l'expression numérique symbolisée dans le manuscrit de HÉRON, la conjecture de l'éditeur ne me paraît point satisfaisante. A la vérité, il aurait eu, en tous cas, raison d'écarter la tradition relative à DIOPHANTE, d'après laquelle il faudrait dire: *μονάδων οδ λείψει τεσσαρεσκαιδεκάτου* (unités 74 par manque de $\frac{1}{14}$). Quoique j'aie moi-même respecté cette tradition dans mon édition de DIOPHANTE[1]), je suis, depuis assez longtemps déjà, convaincu qu'elle est fausse. Avant tout, la locution (*λείψει* suivi du génitif) est étrangère au grec classique, et même en admettant qu'elle se soit introduite dans le langage technique dès l'époque de DIOPHANTE, on n'est pas par là même autorisé à l'attribuer à HÉRON. Pour DIOPHANTE lui-même, comme j'ai cru (peut-être à tort) que le symbole de soustraction a été originairement une forme archaïque du *sampi* grec, plutôt qu'un monogramme se rattachant à la racine de *λεῖψις*, j'ai depuis huit ans cherché dans le même sens que H. SCHÖNE, en supposant toutefois, pour respecter l'ordre des signes, des formes comme serait la suivante *μονάδες οδ δεόμεναι τεσσαρεσκαιδεκάτου*. Mais il s'agissait aussi pour moi de reconnaître si chez des auteurs assez voisins de l'époque de DIOPHANTE, il n'y avait pas des locutions d'un caractère technique et nouveau; or PAPPUS, qui reste fidèle aux habitudes du langage géométrique classique, n'offrant aucune ressource à cet égard, mes recherches ne pouvaient guère aboutir à une conclusion suffisamment fondée.

Le passage précité des *Metrica* de HÉRON ayant attiré mon attention, je suis remonté jusqu'à PTOLÉMÉE, auteur assez rapproché du mécanicien d'Alexandrie. Or j'ai trouvé dans la *Syntaxe* (éd. HEIBERG, vol. II) des textes qui me conduisent à rattacher, pour cette époque, le symbole de soustraction à la racine de *λεῖψις* ou, plus exactement, du verbe *λείπειν* (laisser).

P. 312, 14: *τὸ ἀπὸ τῆς* $Z\Gamma$ *λεῖψαν τὸ ἀπὸ τῆς* $\Gamma\varDelta$, (c'est à dire $\overline{Z\Gamma}^2$ ayant laissé $\overline{\Gamma\varDelta}^2$, ou $\overline{Z\Gamma}^2 - \overline{\Gamma\varDelta}^2$).

P. 319,15: *τὴν ὑπὸ* AZB *γωνίαν λείπουσαν τὴν ὑπὸ* ABK, (c'est à dire l'angle AZB laissant l'angle ABK ou $\sphericalangle AZB - \sphericalangle ABK$). Ainsi le symbole représente un participe actif (présent ou aoriste) du verbe *laisser*, qui doit être suivi de l'accusatif. Mais il est à remarquer que PTOLÉMÉE, pour $\overline{Z\Gamma}^2 - \overline{\Gamma\varDelta}^2$, dit aussi fréquemment *τὸ ἀπὸ τῆς* $\Gamma\varDelta$ *λειφθὲν ὑπὸ τοῦ ἀπὸ τῆς* $Z\Gamma$ (c'est à dire $\overline{\Gamma\varDelta}^2$ laissé par $\overline{Z\Gamma}^2$). On serait par là suffisamment justifié à énoncer l'expression héronienne:

1) *DIOPHANTI Alexandrini opera omnia, cum graecis commentariis.* Vol. I, II (Leipzig, Teubner 1893, 1895).

μονάδες οδ λειφθέντος τεσσαρεσκαιδεκάτου, à prendre en un mot le symbole comme représentant un participe passif au génitif absolu, s'accordant avec le terme à soustraire.

Or cette possibilité d'énoncer la partie négative d'une expression de deux façons passablement différentes, quoique aussi régulières l'une que l'autre, est peut-être la seule qui permette d'expliquer les anomalies que présente le texte du ms. A de DIOPHANTE, où le symbole (résolu ou non) est suivi, tantôt de l'accusatif, tantôt du génitif; ainsi dans un même probleme (II, 21), nous trouvons *λείψει τοῦ λοιποῦ* (p. 114, 25) et *λείψει τὸν μείζονα* (p. 116, 3). Au lieu de vouloir ramener ces deux expressions à une même forme grammaticale, il est plus rationnel de penser que le symbole a été mal résolu d'une seule façon et qu'il faut restituer *λειφθέντος τοῦ λοιποῦ* et *λείψας τὸν μείζονα*.

Je ne voudrais pas prolonger ici cette discussion avec la minutie qui ne pourrait être de mise que dans un recueil consacré à la philologie; mais je crois au moins devoir rappeler les conclusions auxquelles je m'étais arrêté dans mon édition de DIOPHANTE, et exposer celles que je voudrais leur substituer.

Tout en conservant en principe, dans mon édition, la forme *λείψει* suivie du génitif, j'ai fait remarquer, dans les prolégomènes du second volume (p. XXXV-XXXVI), que le symbole de soustraction servait dans les mss. pour diverses formes du verbe *λείπειν*, et que dans le cas où les mss. A et B_1 s'accordent pour écrire *λείψει* suivi de l'accusatif, il fallait nécessairement, comme je l'ai fait au reste, rétablir le participe aoriste.

J'ai fait ressortir également que dans les équations le manuscrit A donne assez souvent de première main (en fait presqu'exactement dans la moitié des cas) la résolution au nominatif *λεῖψις* (suivi du génitif)[1]) au lieu de la résolution *λείψει* au datif.

C'est MAXIME PLANUDE qui a fait définitivement triompher cette dernière forme, tandis que PACHYMÈRE (DIOPHANTE II, p. 122) conserve *λεῖψις*. Ces deux formes remontent probablement au prototype perdu qui a été copié au VIII^e^ ou IX^e^ siècle; à cette époque, la tradition était absolument perdue, le mot *λεῖψις* a été adopté parce que DIOPHANTE lui-même l'avait donné comme symbolisé par le signe à résoudre; la forme *λείψει* s'est introduite comme plus grammaticale, mais l'une et l'autre sont à laisser au compte des Byzantins.

Or des deux formes entraînaient forcément le génitif pour les mots suivants; il ne semble pas cependant que le texte ait été corrigé, au

---

1) Trois ou quatre fois, on trouve aussi dans les équations le datif: *λεῖψις ἀριθμοῖς*. Ici il faut supposer soit une fausse lecture du copiste, soit une assimilation erronée avec l'usage pour le verbe *ὑπερέχειν*.

moins systématiquement; par suite, en dehors des cas où le mot suivant le symbole ou le terme *λεlψει* ne provient pas lui-même d'une résolution, comme il arrive pour les équations, il est prudent de conserver la forme (à l'accusatif ou au génitif) du ms. A, en la faisant précéder du participe actif ou du participe passif suivant le cas.

Dans les équations, il faut de préférence supposer le participe actif suivi de l'accusatif, conformément aux exemples cités de Ptolémée. Ce participe actif, qui s'accorde avec le terme à diminuer, doit plutôt être à l'aoriste, par analogie avec l'usage de Diophante pour le participe qui indique au contraire l'addition (*προσλαβών* et non au présent *προσλαμβάνων*) Quant aux deux formes *λεlψας* et *λιπών*, pour le participe aoriste de *λεlπειν*, le choix entre elles semble permis; cependant il est probable que la seconde a été surtout introduite par les Byzantins.

Ist Jordanus Nemorarius Verfasser der Schrift „Algorithmus demonstratus“?

Von G. Eneström in Stockholm.

Seit mehr als einem Dezennium ist es unter den mathematisch-historischen Forschern zur Gewohnheit geworden, als festgestellt anzusehen, daß Jordanus Nemorarius Verfasser der von Johann Schöner im Jahre 1534 herausgegebenen kleinen Schrift *Algorithmus demonstratus* ist. Bekanntlich wurde diese Schrift noch vor 25 Jahren Regiomontanus zugeschrieben,[1]) offenbar lediglich aus dem Grunde, weil das Manuskript, das Schöner für seine Ausgabe benutzte, von jenem geschrieben war. Aber Schöner hat selbst in seiner Vorrede ausdrücklich angegeben, daß Regiomontanus wahrscheinlich ein damals in Wien befindliches Manuskript abgeschrieben hatte, und übrigens besitzen wir Handschriften des *Algorithmus demonstratus* aus dem 14. Jahrhundert, so daß die Annahme, Regiomontanus sei Verfasser der Schrift, keiner weiteren Widerlegung bedarf.

---

1) Den älteren Geschichtsschreibern der Mathematik scheint der *Algorithmus demonstratus* unbekannt gewesen zu sein; wenigstens habe ich eine Erwähnung derselben weder bei Vossius noch bei Heilbronner noch bei Montucla noch bei Kästner auffinden können. So viel ich weiß, war Chasles der erste, der in seinem *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (Bruxelles 1837) die Aufmerksamkeit der Fachgenossen auf das Buch lenkte. Chasles behauptet ausdrücklich (siehe S. 528 der Originalausgabe oder S. 621 der Sohnckeschen Übersetzung), Regiomontanus habe ein Werk über praktische Arithmetik geschrieben, und dies Werk sei von Schöner unter dem Titel *Algorithmus demonstratus* herausgegeben. Daß diese bestimmte Angabe von Chasles ohne weiteres von vielen anderen Verfassern wiederholt wurde, ist sehr natürlich, und noch am Anfange des Jahres 1879 dürfte der Fürst B. Boncampagni keinen sicheren Anlaß gehabt haben die Richtigkeit derselben zu bezweifeln, denn auf Seite 130 des **12.** Bandes seines Bullettino findet sich in einer von A. Favaro verfaßten Abhandlung die Angabe von Chasles wiederholt. Auf der anderen Seite hatte C. I. Gerhardt 1877 in seiner *Geschichte der Mathematik in Deutschland* (S. 21) hervorgehoben, daß der *Algorithmus demonstratus* kaum von Regiomontanus verfaßt sein konnte; vielleicht ist dieselbe Bemerkung schon früher von M. A. Stern und M. Cantor gemacht worden (vgl. S. Günther, *Geschichte des mathematischen Unterrichtes im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525*, Berlin 1887, S. 221).

Auf der andern Seite gibt die gedruckte Ausgabe des *Algorithmus demonstratus* keinen Aufschluß über den Verfasser der Schrift, und anonym sind auch die drei Handschriften, die meines Wissens von einem Fachmanne näher untersucht worden sind. Diese Handschriften sind:

1) Cod. Basil. F. II. 33 (14. Jahrh.);[1])
2) Cod. Dresd. Db. 86 (14. Jahrh.);[2])
3) Cod. Vindob. 5203 (von Regiomontanus geschrieben und von Schöner für seine Ausgabe benutzt)[3]).

Dazu hat M. Curtze im Vorübergehen[4]) eine vierte Handschrift erwähnt, nämlich Cod. Vindob. 5277, die etwa 1525 von J. Vögelin geschrieben ist und sicherlich ebensowenig wie die drei anderen irgend einen direkten Aufschluß über den Verfasser der Schrift bringt.

Der erste mathematisch-historische Forscher, der den Namen des Jordanus Nemorarius in Verbindung mit dem *Algorithmus demonstratus* gebracht hat, ist wohl P. Treutlein, der 1879 im Vorworte zu seiner Abhandlung: *Der Tractat des Jordanus Nemorarius „De numeris datis“*[5]) im Vorübergehen jene Schrift zitiert. Freilich sagt Treutlein nicht bestimmt, daß Jordanus Nemorarius der Verfasser ist, sondern begnügt sich darauf hinzuweisen, daß der *Algorithmus demonstratus* vielleicht gleichzeitig mit dem *Liber abbaci* verfaßt worden und vielleicht Jordanus zuzuweisen ist. Daß diese Konjektur von Treutlein nicht sogleich allgemeine Zustimmung fand, dürfte daraus hervorgehen, daß Curtze 1883 eine Handschrift des *Algorithmus demonstratus* beschrieb[6]), ohne denselben Jordanus zuzuweisen, und daß S. Günther noch 1887 sich darauf beschränkte zu sagen[7]), daß diese Schrift eine Behandlung der Algebra in dem Sinne des

---

1) Vgl. M. Curtze, *Verba filiorum Moysi, filii Sekir. Id est Maumeti, Hameti et Hasen. Der Liber trium fratrum de geometria;* Nova Acta der deutschen Akademie der Naturforscher **49** (Halle 1885), S. 111.

2) Vgl. M. Curtze, *Über eine Handschrift der königlichen Bibliothek zu Dresden;* Zeitschr. für Mathem. **28**, 1883, Hist. Abt. S. 4.

3) Vgl. M. Curtze, *Jordani Nemorarii de triangulis libri quatuor;* Mitteilungen des Coppernicus-Vereins in Thorn **6**, 1887, S. VII.

4) M. Curtze, *Eine Studienreise;* Centralbl. für Bibliotheksw. **16**, 1899, S. 285.

5) P. Treutlein, *Der Tractat des Jordanus Nemorarius „De numeris datis“;* Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **2**, 1879, S. 132.

6) M. Curtze, *Über eine Handschrift der königlichen Bibliothek zu Dresden;* Zeitschr. für Mathem. **28**, 1883, Hist. Abt. S. 4. — M. E. Wachtchenko-Zakartchenko, der ebenfalls im Jahre 1883 eine Geschichte der Mathematik in russischer Sprache herausgab, führt (S. 222) den *Algorithmus demonstratus* unter Regiomontanus auf, bemerkt aber in einer Anmerkung, daß diese Schrift von einigen Verfassern dem Jordanus zugeschrieben wird.

7) S. Günther, *Geschichte des mathematischen Unterrichtes im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525* (Berlin 1887), S. 220.

JORDANUS NEMORARIUS enthält. Auf der andern Seite hatte CURTZE schon 1885 bei der Erwähnung einer andern Handschrift des *Algorithmus demonstratus* hinzugefügt[1]): „Der früher fälschlich dem REGIOMONTANUS zugeschriebene Tractat, jetzt dem JORDANUS vindiciert“; zwei Jahre später führte CURTZE den Traktat[2]) ohne weiteres unter die Schriften des JORDANUS NEMORARIUS auf, und im Jahre 1890 äußerte er sich auf folgende Weise[3]): „Es ist wohl jetzt allseitig anerkannt, daß JORDANUS der Verfasser ist“. Endlich bemerkte M. CANTOR 1892 im 1. Hefte des 2. Bandes seiner *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*[4]), daß der *Algorithmus demonstratus* mit an Gewißheit streifender Wahrscheinlichkeit dem JORDANUS zugewiesen worden sei, und lenkte die Aufmerksamkeit auf einen Umstand, der seiner Ansicht nach als eine unmittelbare Bestätigung des JORDANUS als Verfasser der Schrift zu betrachten sei, und seitdem ist wohl die Frage als erledigt angesehen worden[5]).

Die Gründe, aus denen man JORDANUS NEMORARIUS als Verfasser des *Algorithmus demonstratus* bezeichnet hat, sind, so viel ich weiß, die folgenden:

1) Die Schrift trägt denselben Charakter, wie die von JORDANUS NEMORARIUS verfassten Arbeiten *Arithmetica* und *De numeris datis;*[6])
2) Der *Algorithmus demonstratus* findet sich in einigen Handschriften neben Schriften, die entschieden von JORDANUS NEMORARIUS herrühren[7]);
3) REGIOMONTANUS, der die Absicht hatte, eine andere Arbeit des JORDANUS herauszugeben, hat den *Algorithmus demonstratus* abgeschrieben[8]);

---

1) M. CURTZE, *Verba filiorum MOYSI, filii SEKIR. Id est MAUMETI, HAMETI et HASEN. Der Liber trium fratrum de geometria;* Nova Acta der deutschen Akademie der Naturforscher **49** (Halle 1885), S. 111.

2) M. CURTZE, *JORDANI NEMORARII de triangulis libri quatuor;* Mitteilungen des Coppernicus-Vereins in Thorn **6,** 1887, S. VII.

3) M. CURTZE, *Commentar zu dem „Tractatus de numeris datis“ des JORDANUS NEMORARIUS.* Buch I und II. Thorn 1890, S. 3; [wieder abgedruckt:] Zeitschr. für Mathem. **36,** 1891, Hist. Abt. S. 3.

4) M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* II (Leipzig 1892), S. 58.

5) Siehe z. B. W. W. R. BALL, *A short account of the history of mathematics*, 3d edition (London 1901), S. 177, 211. — J. TROPFKE, *Geschichte der Elementar-Mathematik.* I (Leipzig 1902), S. 8.

6) M. CANTOR, a. a. O. II, S. 58 (2. Aufl. S. 63). — M. CURTZE, *Commentar zu dem „Tractatus de numeris datis“ des JORDANUS NEMORARIUS;* Zeitschr. für Mathem. **36,** 1891, Hist. Abt. S. 3.

7) M. CANTOR, a. a. O. II, S. 58 (2. Aufl. S. 63).

8) M. CANTOR, a. a. O. II, S. 58 (2. Aufl. S. 64).

4) Lazarus Schonerus, ein Enkel des Herausgebers des *Algorithmus demonstratus*, beruft sich in einer 1586 zum erstenmal herausgegebenen Schrift auf den 33. Satz des „*Algorithmus demonstratus* des Jordanus".[1])

Von diesen Gründen kann der erste gewiß nicht entscheidend sein, und nur wenn es sicher wäre, daß der *Algorithmus demonstratus* etwa um 1200 verfaßt wurde, könnte man demselben irgend eine Bedeutung beimessen, aber die ältesten bisher untersuchten Handschriften stammen ja aus dem 14. Jahrhundert. Auch der zweite Grund beweist eigentlich fast nichts, denn die zwei Handschriften aus dem 14. Jahrhundert enthalten Arbeiten verschiedener Verfasser, und die Schriften des Jordanus Nemorarius bilden darin keine von den übrigen getrennte Abteilung. Im Cod. Basil. F. II. 33 ist der *Algorithmus demonstratus* sogar in zwei Teile, nämlich „Algorismus de minuciis" und „Algorismus demonstratus de integris", gespaltet, zwischen denen ein Werk von Oresme sich befindet. Der von Regiomontanus geschriebene Cod. Vindob. 5203 enthält teils Schriften von G. Peurbach, teils zwei Arbeiten von Jordanus Nemorarius, und zuletzt den *Algorithmus demonstratus*, aber ob Regiomontanus die drei letzten Schriften aus einer und derselben Handschrift entnommen hat, weiß man gar nicht. Der dritte Grund ist vielleicht noch schwächer als die zwei ersten, denn bekanntlich war der *Tractatus de numeris datis* des Jordanus Nemorarius keineswegs die einzige Schrift, deren Herausgabe Regiomontanus in Aussicht genommen hatte.

Etwas größere Beachtung verdient ohne Zweifel das vierte Argument, denn hier haben wir ja mit einer bestimmten Angabe zu tun. Dennoch möchte ich auf den Umstand, daß Lazarus Schonerus ein Enkel des Herausgebers der *Algorithmus demonstratus* war, kein Gewicht legen, denn offenbar hat dieser Umstand nur dann irgend eine Bedeutung, wenn man annimmt, das Johann Schöner als Verfasser der von ihm herausgegebenen Schrift Jordanus Nemorarius erkannt und diese Kenntnis seinem Enkel mitgeteilt hatte, aber diese Annahme schwebt vollständig in der Luft. Eher bin ich geneigt die Angabe als weniger zuverlässig anzusehen, gerade weil sie von Lazarus Schonerus herrührt. Dieser war ein großer Verehrer von Ramus, mit dessen Schriften er sich eingehend beschäftigt hatte, und es ist darum denkbar, daß die Angabe unmittelbar oder mittelbar von Ramus herstammt. Aber wenn dies der Fall ist, möchte ich sie vorläufig als verdächtig betrachten, denn Ramus schreibt dem Jordanus den Beweis des Heronschen Satzes für die Dreiecksfläche zu[2]), und diese Be-

1) M. Cantor, a. a. O. II, S. 563 (2. Aufl. S. 613).

2) Siehe M. Chasles, *Geschichte der Geometrie, ubertr. von L. A. Sohncke* (Halle 1839), S. 605.

hauptung kann sehr wohl darauf beruhen, daß RAMUS ohne weiteres die anonymen Anhänge[1]) der Schrift *De ponderibus* als von JORDANUS NEMORARIUS verfaßt betrachtet hat[2]). Auf ganz dieselbe Weise könnte RAMUS, wenn er in einer Handschrift den *Algorithmus demonstratus* unmittelbar nach einer Arbeit des JORDANUS NEMORARIUS gefunden hatte, ohne weiteres angenommen haben, daß diese beiden Schriften demselben Verfasser angehörten. Aber sei dem, wie ihm wolle, unter keinen Umständen darf LAZARUS SCHONERUS hier als eine Autorität gelten, und so lange die Quelle seiner Angabe nicht bekannt ist, hat diese für mich keinen Belang; vielmehr scheint mir die Tatsache, daß J. SCHEUBEL, der für sein Buch *De numeris* (1545) den *Algorithmus demonstratus* benutzt hat, keinen Verfasser dieser Schrift angeben konnte[3]), dafür zu sprechen, daß man auf die Aussage des LAZARUS SCHONERUS kein großes Gewicht legen soll[4]).

Die Argumente, die man bisher für JORDANUS NEMORARIUS als Verfasser des *Algorithmus demonstratus* geltend gemacht hat, sind also meines Erachtens schwach, und eine an Gewißheit streifende Wahrscheinlichkeit kann ich denselben gar nicht beimessen. Dagegen gibt es einen Umstand, der möglicherweise zu der Annahme veranlassen könnte, JORDANUS NEMORARIUS sei nicht der Verfasser. Handschriftlich ist nämlich ein „Algorismus JORDANI" aufbewahrt[5]), und ein Exemplar dieser Arbeit hat M. CHASLES gekannt und erwähnt[6]), aber ohne darauf hinzuweisen, daß sie mit dem gedruckten *Algorithmus demonstratus*, den CHASLES genau studiert hatte[7]), identisch ist. Könnte man nicht versucht sein, daraus zu

---

1) Vgl. A. A. BJÖRNBO, Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissensch. **14,** 1902, S. 147—148.

2) Oder hat RAMUS vielleicht seine Angabe aus der posthumen Schrift des TARTAGLIA: *JORDANI Opusculum de ponderositate NICOLAI TARTALEAE studio correctum* (Venetiis 1565) entnommen? Diese seltene Schrift ist mir nicht zugänglich. Nach einer Bemerkung von A. A BJÖRNBO, a. a. O. S. 147 scheint die gedruckte Ausgabe diesen Anhang nicht zu enthalten.

3) Siehe H. STAIGMÜLLER, *JOHANNES SCHEUBEL, ein deutscher Algebraiker des XVI. Jahrhunderts;* Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **9,** 1899, S. 464, 466.

4) Auch P. FORCADEL, der den *Algorithmus demonstratus* 1570 ins Französische übersetzte (vgl. Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 206) scheint es vollständig unbekannt gewesen zu sein, wer der Verfasser der Schrift war.

5) Vgl. z. B. J. CH. HEILBRONNER, *Historia matheseos universae* (Leipzig 1742), S. 618. — M. CANTOR, a. a. O. II^2, S. 59—60. — E. WAPPLER, *Beitrag zur Geschichte der Mathematik;* Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **5,** 1890, S. 161.

6) Siehe M. CHASLES, *Geschichte der Geometrie, übertr. von L. A. SOHNCKE*, S. 603. — *Sur la nature des opérations algébriques attribuées à Fibonaco;* Comptes rendus de l'acad. d. sc. de Paris **12,** 1841, S. 743—744. — *Sur quelques points de l'histoire de l'algèbre;* Comptes rendus de l'acad. sc. de Paris **13,** 1841, S. 507

7) Vgl. M. CHASLES, *Geschichte der Geometrie, übertr. von L. A. SOHNCKE,* S. 621—622.

folgern, daß der *Algorithmus demonstratus* eine andere Arbeit als der „Algorismus Jordani“ ist?[1])

Aus dem vorhergehenden scheint mir jedenfalls klar zu sein, daß der Verfasser des *Algorithmus demonstratus* noch nicht mit Gewißheit bekannt ist, und daß er erst durch eine neue eingehende Untersuchung ermittelt werden kann. Bei dieser Untersuchung müssen in erster Linie umfassende Nachforschungen nach Handschriften des *Algorithmus demonstratus* und des „Algorismus Jordani“ gemacht werden, und sodann soll untersucht werden, ob es vielleicht solche Handschriften aus dem Anfang des 13. Jahrhunderts gibt. Im Zusammenhang hiermit wäre es angezeigt in Betracht zu ziehen, ob möglicherweise der „Algorismus“ des angeblichen magister Genardus oder Gernardus[2]) dem Jordanus Nemorarius zu vindizieren ist. Gelingt es eine ziemlich große Anzahl von Handschriften aufzufinden, so ist wohl zu hoffen, daß das Material genügen wird, um die Frage zu entscheiden.

Auch eine andere Frage könnte dabei erledigt werden. Die gedruckte Ausgabe des *Algorithmus demonstratus* enthält nämlich einen Anhang über Proportionen, und der Verfasser dieses Anhanges ist noch nicht ermittelt. Zwar ist derselbe dem Jordanus Nemorarius zugewiesen worden[3]), aber sicherlich nur aus dem Grunde, weil er in der gedruckten Ausgabe des *Algorithmus demonstratus* vorkommt. Wahrscheinlich ist er mit einer kleinen Schrift *De proportionibus*[4]) identisch, die mit dem *Algorithmus demonstratus* nichts zu tun hat.

---

1) Merkwürdigerweise hat Chasles S. 511 in seiner soeben zitierten Abhandlung *Sur quelques points de l'histoire de l'algèbre* im Vorübergehen eine Redeweise angewendet, aus der man veranlaßt sein könnte etwas ganz anderes herauszulesen. Er sagt nämlich in betreff des *Quadripartitum numerorum* des Johannes de Muris: „Ce traité d'algèbre est le seul, avec celui de Jordan, que Regiomontanus ait désigné en parlant des plus savants ouvrages de l'antiquité et du moyenâge: „Habetur apud nostros *Quadripartitum numerorum,* opus insigne admodum“. Aber an der betreffenden Stelle bei Regiomontanus wird (vgl. z. B. Gerhardt, a. a. O. S. 21) unmittelbar nach dem *Quadripartitum numerorum* der *Algorithmus demonstratus* erwähnt. Indessen ist es wohl ziemlich sicher, daß Chasles sich hier auf die Worte des Regiomontanus: „Tres libros de datis numerorum pulcherrimos edidit Jordanus“ bezieht.

2) Vgl. G. Eneström, Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 206.

3) Siehe M. Cantor, a. a. O. II², S. 66—67.

4) Vgl. A. A. Björnbo, *Die mathematischen S. Marcohandschriften in Florenz;* Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 243. — E. Wappler, a. a. O. S. 165.

Der Begriff des materiellen Punktes in der Mechanik des achtzehnten Jahrhunderts.

Von Theodor Körner in Hamburg.

Inhaltsverzeichnis.

Vorbemerkung.

Einleitung.

Die Zeit vor Newton.

Das 18. Jahrhundert.

I. Newton.
1. Besprechung der „Mathematischen Prinzipien der Naturwissenschaft".
2. Newtons Verdienste um den Begriff des materiellen Punktes.
3. Newtons physikalisch-philosophische Grundanschauung.

II. Die Zeit von Newton bis Euler.
1. Joh. Bernoulli.
2. Dan. Bernoulli.
3. Clairaut.
4. Der Begriff des materiellen Punktes in Beziehung zur Physik und Philosophie.
5. Fontaine.

III. Euler.
1. Die „analytische Mechanik" vom Jahre 1736.
2. Eulers Ansicht über das Unendlichkleine und die Konstitution der Materie.
3. Die „Mechanik der starren Körper" vom Jahre 1765.
4. Neue Momente in der Eulerschen Auffassung.

IV. Die Zeit nach Euler.
1. D'Alembert.
2. Lagrange.
3. Laplace.

Schluß.

I. Zusammenfassende Darstellung und Kritik der Anschauungen des 18. Jahrhunderts.
II. Allgemeine Betrachtungen über den Begriff des materiellen Punktes.

---

1. Trotz dem Interesse, das man ungefähr seit dem Jahre 1880 den Prinzipien der Mechanik entgegenbringt, ist eigentümlicherweise die Mechanik des 18. Jahrhunderts weniger gewürdigt worden als ihre Leistungen verdienen; sehen wir doch, daß, um nur zwei der hauptsächlich in Betracht kommenden Autoren zu nennen, sowohl bei Mach[1]) wie besonders bei

1) E. Mach, *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt* (4. Aufl. Leipzig 1901).

Dühring[1]) eine eingehende Besprechung des 18. Jahrhunderts[2]) fehlt. Dies mag die Ursache gewesen sein, daß ein Begriff, wie der des materiellen Punktes, dessen erste allgemeine Verwendung und Hauptentwickelung in das 18. Jahrhundert fällt, in den geschichtlichen Darstellungen der Mechanik bis jetzt wenig oder gar nicht Beachtung gefunden hat. Erst ein Autor der allerneuesten Zeit, Freycinet,[3]) hat auf die Schwierigkeiten hingewiesen, die entstehen, wenn man den Begriff des materiellen Punktes namentlich in Verbindung mit dem Massenbegriff betrachtet. Eine ausführliche prinzipielle oder historische Klarlegung findet sich jedoch unseres Wissens nirgends in der Literatur. So beschränkt sich auch A. Voss in der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*[4]) auf eine Anmerkung, in der er einige kurze, hauptsächlich historische Notizen gibt. Auf diese Stelle wies mich Herr Prof. Stäckel in Kiel hin und forderte mich auf, näher zu untersuchen, in welcher Weise sich der Begriff des materiellen Punktes vorzugsweise in der Mechanik des 18. Jahrhunderts entwickelte. Für diese Anregung, die den unmittelbaren Anlaß zur Abfassung der vorliegenden Arbeit bildet, sowie für manchen wertvollen Ratschlag während der Ausführung möchte ich Herrn Prof. Stäckel auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank aussprechen.

2. Eine besondere Schwierigkeit lag in der Begrenzung des Themas. Wie die analytische Mechanik ein Grenzgebiet ist, auf dem sich Mathematik, Physik und Philosophie treffen, ist auch der Begriff des materiellen Punktes verschiedenen Einwirkungen unterworfen. Sobald man den Körper als aus materiellen Punkten zusammengesetzt betrachtet, ist die Vorstellung von der Konstitution der Körper, schließlich die Annahme einer kontinuierlichen oder diskontinuierlichen Raumerfüllung zu besprechen. Andererseits machen sich Anschauungen geltend, die die Physik und Chemie gebildet haben, die Lehre von den Atomen und Molekülen kann man ebenfalls mit der Auffassung vom Begriff des materiellen Punktes in Verbindung bringen. Alle derartigen Erörterungen werden wir im folgenden nach Möglichkeit zu vermeiden suchen.[5]) Unsere Aufgabe soll in der Hauptsache eine

---

1) E. Dühring, *Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik* (3. Aufl. Leipzig 1887).

2) Wir haben im folgenden auch Newton (1642—1727) mit zum 18. Jahrhundert gerechnet; von ihm gilt jedoch das hier Gesagte nicht.

3) C. de Freycinet, *Sur les principes de la mécanique rationnelle* (Paris 1902); vergl. p. 29—31.

4) *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* IV: 1. A. Voss: *Die Principien der rationellen Mechanik*, p. 24 Anmerk. 39.

5) Für die mehr philosophische Seite unseres Themas vergl. K. Lasswitz, *Geschichte der Atomistik* (I—II, Hamburg und Leipzig 1890). Lasswitz weist mehrfach auf den Zusammenhang zwischen der Korpuskulartheorie und der Mechanik hin, so namentlich Bd. I, p. 358.

mathematische sein: wir wollen die Entwickelung betrachten, die der Begriff des materiellen Punktes im 18. Jahrhundert genommen hat, sobald man ihn dazu verwendet, um Bewegungserscheinungen mit mathematischen Methoden zu untersuchen. Ganz werden sich, wie eben angedeutet, derartige Betrachtungen aus der Physik und Philosophie ja nicht vermeiden lassen; wir werden sie aber nur insoweit berücksichtigen, wie sie zum Verständnis der mathematischen Entwickelung unbedingt nötig sind.

Einleitung.

1. Die Entwickelung, die der Begriff des materiellen Punktes genommen hat, setzt nicht erst im 18. Jahrhundert ein, sondern reicht viel weiter zurück. Wollte man ganz gründlich vorgehen, so müßte man unzweifelhaft auf das Altertum, d. h. auf die Griechen zurückgreifen. Die kleinsten Teilchen, aus denen man sich die Körper und schließlich den ganzen Kosmos zusammengesetzt dachte, sind wohl als Vorläufer des materiellen Punktes zu betrachten. Diese Untersuchungen waren naturgemäß nicht sowohl mathematischer als physikalischer Natur; ja, weil in der damaligen Zeit Physik und Philosophie noch nicht als getrennte Disziplinen existierten, bewegten sie sich häufig auf dem Gebiete philosophischer Spekulation. Die eigentlich mathematisch-mechanische Gestaltung des Begriffes beginnt erst dort, wo man ihn verwendet, um Gleichgewicht und Bewegung der Körper zu bestimmen.

Abgesehen von Aristoteles, dessen Mechanik aber noch von philosophischen Spekulationen durchzogen ist, wäre Archimedes der erste, der in Betracht käme. Die Schwerpunktsbestimmungen, die er ausführte, zeigen, daß man in bestimmten Fällen einen Körper durch einen Punkt ersetzen kann. Wenn man z. B. einen Körper in seinem Schwerpunkte unterstützt, so ist ihm damit die Möglichkeit genommen, nach unten zu fallen; der Schwerpunkt repräsentiert also in diesem bestimmten Falle den ganzen Körper. Daneben ist vielleicht die sogenannte „Sandrechnung“ des Archimedes zu berücksichtigen, die als ein erster Versuch aufgefaßt werden kann, dem Wesen des Unendlichen auf exakt mathematischem Wege beizukommen; denn es ist klar, daß die Frage nach dem Unendlichen für uns in Betracht kommt, sobald man von dem materiellen Punkte als unendlichkleinem Bestandteil eines endlichen Körpers spricht.

2. Aus der auf Archimedes folgenden Zeit ist, abgesehen von einigen philosophischen Erörterungen über den Unendlichkeitsbegriff, für unser Thema lange nichts zu bemerken. Die mathematischen Untersuchungen setzen im 15. und 16. Jahrhundert da ein, wo Archimedes aufgehört hatte, bei den Betrachtungen über den Schwerpunkt. Hier sind unter

anderen LIONARDO DA VINCI, MAUROLICUS und COMMANDINUS zu nennen, die Schwerpunktsbestimmungen für Körper verschiedenster Art und Gestalt durchgeführt haben. Aber alle diese Dinge können nur angedeutet werden, ebenso wie die Hydrostatik von STEVIN, aus der z. B. M. CANTOR eine Stelle anführt, wo STEVIN von „beliebig kleinen Körpern"[1]) spricht.

Nun geht's mit raschen Schritten vorwärts. CAVALIERI meint, man habe sich den Körper als eine Art Buch zu denken, das aus parallelen Blättern zusammengesetzt ist, und spricht damit eine Anschauung aus, die der des materiellen Punktes vollkommen analog ist. Den allerwesentlichsten Einfluß aber hatte die neu erwachsende Astronomie. Die Himmelskörper, über deren Größe man noch nichts Genaues wußte, erschienen wegen ihrer großen Entfernung als Punkte, die sich in regelmäßigen Bahnen bewegten. Sie sind materielle Punkte im wahren Sinne des Wortes. So sind die Arbeiten von COPPERNICUS und KEPLER hier zu erwähnen. KEPLER ist auch aus dem Grunde besonders bemerkenswert, weil er als einer der bedeutendsten Vorgänger NEWTONS für das Gravitationsgesetz und damit den Massenbegriff gelten kann.[2]) Auch GILBERT mit seinen magnetischen Untersuchungen ist zu berücksichtigen. Dadurch daß man sich die Anziehung der Körper, sowohl magnetische wie gravitierende, aus den Anziehungen der einzelnen Teilchen dieser Körper zusammengesetzt dachte, war der Anstoß gegeben, diese Teilchen auch bei der Lösung anderer Probleme, vielleicht aller mechanischen Aufgaben zu verwenden.

3. Als letzter in der Reihe dieser Forscher und zugleich als erster einer neuen Wissenschaft erscheint GALILEI. Seine Arbeiten bilden das Bindeglied zwischen den früheren und den NEWTONschen Untersuchungen. Die Kugeln, die er in einer geneigten Rinne herunterrollen läßt,[3]) um die Fallgesetze experimentell zu bestätigen, sind als materielle Punkte im heutigen Sinne zu verstehen. Allerdings muß, wie auch MACH ausdrücklich hervorhebt, bemerkt werden, daß GALILEI den Energieverlust, der durch das Rollen der Kugeln entstand, nicht beachtete und daher im strengen Sinne nicht berechtigt war, die so gefundenen Resultate ohne weiteres auf den freien Fall zu übertragen.[4]) Die Identifikation von Kugel und materiellem Punkt ist übrigens ein Umstand, auf den wir im Verlaufe der Arbeit ausführlicher zu sprechen kommen. Für die Kugel, die nicht nur

---

1) MORITZ CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* 2[2] (Leipzig 1900), p. 578: „corps donné, si petit puisse-il estre", vergl. überhaupt für die letzten Ausführungen die betreffenden Stellen bei CANTOR.

2) Vergl. E. GOLDBECK, *KEPLERS Lehre von der Gravitation* (Abhandlungen zur Philosophie und ihrer Geschichte **6**, Halle 1896).

3) Siehe MACH, a. a. O. p. 132.

4) Siehe MACH, a. a. O. p. 377.

Galilei, sondern auch Huygens, namentlich bei Pendelversuchen verwandte, wird häufig in der Beschreibung das Wort „corpus“ gesetzt; und zwar bedeutet „corpus“ dann im weiteren Verlaufe meistens: schwerer Punkt, und nicht: Körper endlicher Ausdehnung. „Corpus maius“ oder „corpus minus“ heißt ein Punkt von größerer oder kleinerer Masse oder, richtiger gesagt, größerem oder kleinerem Gewicht; denn der Unterschied zwischen Masse und Gewicht tritt bei Galilei noch nicht hervor. Huygens wurde auf ihn durch Pendelbeobachtungen geführt, aber Newton ist der erste, bei dem die Scheidung klar vollzogen ist. Das ist ein Hauptgrund, weshalb wir unsere Darstellung mit Newton beginnen; denn der Begriff des materiellen Punktes konnte eine konsequente Durchbildung erst erfahren, nachdem Newton dem Gravitationsgesetz und damit der Masse eine grundlegende Bedeutung in der Mechanik gegeben hatte. Ferner hat Newton zum erstenmal die analytische Mechanik systematisch dargestellt und damit auch den Begriff des materiellen Punktes als Grundbegriff eingeführt. Schließlich aber sind die Newtonschen *Principia* vorbildlich gewesen für fast alle Arbeiten aus der Mechanik bis auf den heutigen Tag. Damit kommen wir zu unserem eigentlichen Thema, dem 18. Jahrhundert, wo wir zuerst eine möglichst objektive Darstellung der Meinung der einzelnen Autoren geben wollen, um dann zum Schlusse in eine zusammenfassende und kritische Besprechung einzutreten.

I. Isaac Newton.

Die Absicht Newtons in den „mathematischen Prinzipien der Naturphilosophie“[1]) war die, möglichst alle physikalischen Hypothesen zu vermeiden und eine auf mathematischer Grundlage ruhende Darstellung der Mechanik zu geben. Von wenigen axiomatischen Grundsätzen ausgehend sucht er, analog wie in der Geometrie, auf synthetischem Wege ein streng geschlossenes System aufzubauen. Inwieweit diese Absicht erreicht wird, das zu untersuchen ist hier nicht der Ort. Eins aber wird durch diese kurze Bemerkung verständlich: die Grundannahmen in der Mechanik werden fast ohne alle Diskussion eingeführt, sie treten als selbstverständliche Axiome auf, ohne die das System nicht bestehen kann. Diese Darstellungsweise hat auch den weitgehendsten Einfluß auf die Anschauung vom Begriff des materiellen Punktes gehabt, die Newton in seiner Mechanik vertritt.

---

1) I. Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Londini 1687); zweite Ausgabe: Cambridge 1713; dritte: London 1726. Wir zitieren im folgenden nach der Originalausgabe.

1. In den ersten Kapiteln werden die allgemeinen Bewegungsgesetze abgeleitet. Die betrachteten Objekte sind Punkte, die Beweglichkeit haben und den am Anfang der *Principia* ausgesprochenen Grundgesetzen gehorchen. So verfährt NEWTON hier gemäß seiner angedeuteten Absicht und gibt eine möglichst phoronomische Darstellung. Allerdings erscheint es auf den ersten Blick, als wenn dieser Zweck nicht vollkommen erreicht wäre, denn für den Ausdruck „punctum", den man erwartet, tritt fast immer das Wort „corpus" ein. Aber „corpus" ist nicht mit „Körper", sondern eben mit „Punkt" zu übersetzen; „corpus" bedeutet, ebenso wie schon bei GALILEI, nichts weiter als einen Punkt, der eine bestimmte Masse repräsentiert. So gelten die hier abgeleiteten Sätze im strengen Sinne nicht für Körper endlicher Ausdehnung, sondern nur für Punkte, denen bestimmte Eigenschaften zugeschrieben werden. Allerdings ist die Unterscheidung zwischen Körper und Punkt nicht immer konsequent durchgeführt, wie es schon die Figuren vermuten lassen, die dem Text beigegeben sind. Die bewegten Objekte werden nie als Punkte sondern als kleine Kugeln dargestellt und zwar als Kugeln von verschiedener Größe, je nach der Masse, die sie repräsentieren. Geometrisch operiert wird jedoch nur mit ihren Mittelpunkten, so daß die Kugelgestalt mehr als etwas Äußerliches erscheint, das die Vorstelluug eines bewegten „Punktes" erleichtern soll. Doch ist an dieser Stelle nicht begründet, weshalb man berechtigt ist, die Kugel bei einer translatorischen Bewegung durch ihren Mittelpunkt zu ersetzen. Dies geschieht erst später.

Ganz einspruchsfrei und in ganz abstrakter Form tritt nur eine Art des materiellen Punktes, der Schwerpunkt, auf; hier sagt NEWTON ausdrücklich, daß diese Punkte aufzufassen sind als „rein mathematische Punkte."[1]) Diese Formulierung ist wohl aus dem in der Einleitung erwähnten Umstande zu erklären, daß Schwerpunktsbetrachtungen schon lange bekannt und auch gerade von Mathematikern angestellt waren.

Nahe verwandt mit den Schwerpunkten sind die sog. „Kraftzentren",[2]) die im weiteren Verlauf der Darstellung erwähnt werden. Denn nachdem KEPLER und GILBERT gezeigt hatten, daß ein mathematischer Punkt keinerlei Wirkung ausüben kann, sondern nur ein Punkt, in dem man sich die Materie eines Körpers konzentriert denkt, wird das Kraftzentrum zu einer Abart des materiellen Punktes. Und schließlich, wenn man die Wechselwirkung der Körper aufeinander betrachtet, wird jeder Massenpunkt zum Sitz einer Kraft, so daß es am Ende prinzipiell einerlei ist, ob man von Massenzentren oder Kraftzentren ausgeht. Masse ohne Kraft, und Kraft ohne Masse ist in der Mechanik schlechterdings undenkbar. —

---

1) p. 4. u. 5: „vel centris (quae sunt puncta Mathematica)".

2) z. B. p. 37: „immobile centrum virium".

2. Bis jetzt war der materielle Punkt einzeln oder in Wechselwirkung mit einem entfernt von ihm liegenden aufgetreten. Solange war eine rein formale Deduktion verhältnißmäßig einfach; hatte man einmal die Berechtigung zugegeben, von bewegten Punkten zu sprechen, dann lagen die Schwierigkeiten, die zu überwinden waren, mehr auf mathematischem als auf mechanischem Gebiete. Und so beruhte denn auch, abgesehen von einigen Äußerlichkeiten, die Verwendung des materiellen Punktes, sowohl rechnerisch wie geometrisch, auf mathematischer Auffassung. Anders wird die Sache, wenn wir zu Körpern endlicher Ausdehnung, speziell zur Bewegung der Kugeln[1]) kommen. NEWTON denkt sich den Körper in kleinste Teilchen zerlegt und die Bewegung des Körpers aus der Bewegung dieser Elemente entstanden. Durch die Annahme, daß diese Teilchen als materielle Punkte im alten Sinne[2]) aufzufassen sind, ist der Zusammenhang zwischen den vorhergegangenen, oft abstrakt erscheinenden Betrachtungen und den Bewegungsvorgängen in der wirklichen Körperwelt hergestellt. Inwieweit dieser Übergang einwandfrei zu nennen ist, werden wir am Schluß unserer Arbeit zu untersuchen haben.

Eins ist aber hier hervorzuheben: von dieser Stelle an tritt ein wesentlicher Unterschied in der Auffassung ein, der Begriff des materiellen Punktes verliert immer mehr seinen mathematischen Charakter und nimmt eine physikalische Gestaltung an. Dies zeigt am deutlichsten folgende Stelle: „ebenso sind unter den Punkten, aus denen Linien, Oberflächen und feste Körper bestehen sollen, gleichwertige Teilchen zu verstehen, deren Größe man vernachlässigen kann.“[3]) Wir haben es also nicht mehr wie früher mit „rein mathematischen Punkten“ zu tun, sondern mit wirklichen Elementen des Körpers, die unendlich klein zu denken sind, so daß man ihre Größe vernachlässigen kann.

Mit den so definierten Punkten und der aus seinen Gesetzen folgenden Bewegung der Kugel hat NEWTON sich bestimmte Grundtypen geschaffen, die für die Verallgemeinerung der bisher gefundenen Sätze von größter Fruchtbarkeit sind. Dadurch, daß er zeigt, daß die anziehende Kraft einer Kugel nach außen hin durch die eines einzigen Punktes ersetzt werden kann: „Die Kraft einer Kugel wirkt so, als ob sie von einem Punkte im Zentrum der Kugel ausginge“,[4]) hat er, wenigstens für gewisse

1) p. 152: „de motu sphaericorum“.

2) p. 152: „videamus igitur, quibus viribus corpora sphaerica, *ex particulis modo iam expositis constantia,* debeant in se mutuo agere et quales motus inde consequantur“.

3) p. 196, Scholium: „similiter per puncta, ex quibus lineae, superficies, et solida componi dicuntur, intelligendae sunt particulae aequales magnitudinis contemnendae“.

4) p. 201: „vis sphaerae eadem est, ac si prodiret de corpusculo unico in centro sphaerae“.

Probleme, Kugel und Punkt identifiziert. Gelingt es also, die Bewegung beliebiger Körper auf die Bewegung von Kugeln zu reduzieren, so ist die Aufgabe gelöst. Demgemäß fährt er fort: „Die gesamte Kraft aller Teilchen eines beliebigen Körpers ist dieselbe, als wenn der Körper unter Wahrung des Schwerpunktes Kugelgestalt annähme“.[1]) Ebenso wurden mehrere Körper ersetzt durch eine Kugel von gleicher Masse, deren Mittelpunkt der gemeinschaftliche Schwerpunkt ist. Die Begründungen als solche interessieren uns hier nicht, für uns ist nur noch von Wichtigkeit, daß für alle diese Überlegungen die notwendige Voraussetzung die ist, daß alle materiellen Punkte der betrachteten Körper von gleicher Beschaffenheit sind, daß es „gleichwertige und gleich anziehende Teilchen“ sind.[2]) Auch diese Bemerkung zeigt, wie der materielle Punkt immer mehr zum konkreten Bestandteil des Körpers wird, während er im Anfang, losgelöst von allen Beziehungen zur Wirklichkeit, als bestimmter Begriff auftritt, der sich der mathematischen Entwickelung zwanglos einfügt.

3. In noch größerem Maße als bisher muß eine physikalische Gestaltung des Begriffes hervortreten, wenn NEWTON zur Mechanik der Flüssigkeiten kommt und damit ein Gebiet betritt, für das damals eine mathematische Behandlung so gut wie gar nicht vorlag. Bei den festen Körpern waren die einzelnen Elemente nur mit einem bestimmten Massenwerte behaftet und hatten dem Gravitationsgesetze gehorcht; bei den flüssigen Körpern tritt die weitere Eigenschaft hinzu, daß die einzelnen Teilchen jedem beliebigen Drucke nachgeben und sich leicht gegeneinander verschieben.[3])

Charakteristisch ist es, daß an dieser Stelle, wo die Darstellung ein mehr physikalisches Gepräge annimmt, von neuem ausdrücklich hervorgehoben wird, daß die gegebenen Entwickelungen einen rein mathematischen Charakter haben sollen: „die Frage, ob die elastischen Flüssigkeiten wirklich aus Teilchen bestehen, die sich voneinander zu entfernen suchen, gehört in die Physik; wir haben die Eigenschaften der Flüssigkeiten, die aus solchen Teilchen bestehen, mathematisch bewiesen.“[4]) Doch sind solche Bemerkungen nicht so genau zu nehmen, denn durch die Annahme der

---

1) p. 217: „eadem est igitur vis tota particularum omnium corporis cuiuscunque, ac si corpus illud, servato gravitatis centro, figuram globi indueret“.

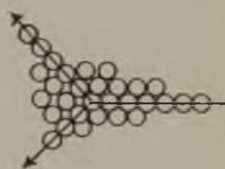
2) p. 195, 213: „particulae aequales et similiter attractivae“.

3) p. 290: „fluidum est corpus omne, cuius partes cedunt vi cuicunque illatae et cedendo facile moventur inter se“.

4) p. 303: „an vero fluida elastica ex particulis se mutuo fugantibus constent, quaestio physica est. Nos proprietatem fluidorum ex eiusmodi particulis constantium mathematice demonstravimus“.

geschilderten Teilchen zeigt NEWTON eben, daß er von ihrem Vorhandensein überzeugt ist; im anderen Falle wären ja die auf diesem Grunde aufgebauten Entwickelungen nichts weiter als eine mathematische Theorie ohne jeden Zusammenhang mit der Wirklichkeit. Durch derartige eingeschaltete Bemerkungen wollte, wie auch ROSENBERGER[1]) hervorhebt, NEWTON wohl weiter nichts, als allen weitläufigen physikalischen Diskussionen aus dem Wege gehen; er wollte produktiv schaffen und sich nicht mit entgegengesetzten Meinungen herumschlagen.

Als weiteren Beweis für die konkrete Auffassung des materiellen Punktes führen wir folgendes an. Bis jetzt war nie die Rede gewesen von einer bestimmten Gestalt oder Anordnung der kleinsten Teilchen im betrachteten Körper; denn wenn auch in den ersten Abschnitten die materiellen Punkte als kleine Kugeln dargestellt wurden, so erledigte sich die Frage nach der Berechtigung dieser Darstellung durch die später gemachte Überlegung, daß nicht eigentlich die Bewegung der Kugel, sondern die ihres Mittelpunktes betrachtet wurde. Dies wird anders bei der Fortpflanzung des Druckes in Flüssigkeiten. Die Sache wird wohl am deutlichsten, wenn wireine kleine Skizze (siehe die Fig.), die NEWTON selbst gibt, mit den betreffenden Worten hierhersetzen: „Ein Druck pflanzt sich in einer Flüssigkeit nur dann gradlinig fort, wenn die Flüssigkeitsteilchen in gerader Linie liegen.“[2]) Der Gegensatz zu früher ist evident: nicht nur die Anordnung der Teilchen ist von allerwesentlichstem Einfluß, es scheint auch die Annahme gemacht worden zu sein, daß man sich die kleinsten Teilchen als Kugeln vorstellen könne.



Schließlich ist noch eine Auffassung zu erwähnen, die sich sowohl bei festen als auch bei flüssigen Körpern findet. NEWTON führt neben den materiellen Punkten materielle Flächen ein, wenn wir uns einmal so ausdrücken dürfen. Bei bestimmten Aufgaben denkt er sich eine Kugel in lauter konzentrische Schalen zerlegt, deren Dicke unendlich klein, deren Anzahl unendlich groß ist.[3]) Die Schalen sind so dünn zu denken, daß ein Übergang von einer zur anderen nicht zu merken ist, und daß eine auf die ganze Anzahl ausgeübte Wirkung kontinuierlich von

---

1) F. ROSENBERGER, *NEWTON und seine physikalischen Principien* (Leipzig 1895), p. 171.

2) p. 354: „pressio non propagatur per fluidum secundum lineas rectas, nisi ubi particulae fluidi in directum jacent“.

3) p. 292: „superficiebus sphaericis innumeris distinguatur fluidum in orbes concentricos aequaliter crassos . . . . prima superficies . . . . secunda . . . . etc“.

der äußersten zur innersten hingeht.[1]) Eine weitere Besprechung der Flächen erübrigt sich, da für sie dieselben Momente in Betracht kommen wie für materielle Punkte. Bemerkt mag noch werden, daß NEWTON hier dieselbe Auffassung eines Körpers ausspricht, die schon CAVALIERI und KEPLER gehabt hatten.

4. Um vollständig zu sein, wollen wir zuguterletzt auch auf die formale Seite unseres Gegenstandes zu sprechen kommen. Die Ausdrücke, die bei NEWTON mit „materieller Punkt" übersetzt werden dürfen, sind „punctum", „particula" und „corpusculum". Alle drei werden ganz unterschiedslos gebraucht, nur, je nachdem die Behandlung mehr mathematisch oder physikalisch ist, treten, aus leicht erklärlichen Gründen, entweder „punctum" oder „corpusculum" in den Vordergrund. Als viertes, jedoch nicht gleichberechtigtes Wort tritt „corpus" hinzu, das aber nur in den ersten Abschnitten in der Bedeutung „materieller Punkt", später in der eigentlichen als „Körper" zu verstehen ist.

Newtons Verdienste um den Begriff des materiellen Punktes. Durch NEWTON ist der Begriff des materiellen Punktes in die analytische Mechanik eingeführt und zum Grundbegriff geworden. Mögen die vorangehenden Untersuchungen von KEPLER, GALILEI und HUYGENS auch für diesen Gegenstand vielerlei Neues und Anregendes gebracht haben, so kommt doch erst durch NEWTON der einheitliche Gedanke hinein, durch den der materielle Punkt zu den Fundamenten der Mechanik gehören wird. Die grundlegende Auffassung rührt von zwei schon in der Einleitung erwähnten Umständen her, erstens von der zum erstenmale durchgeführten systematischen Darstellung der analytischen Mechanik, und zweitens von der klaren und konsequenten Unterscheidung zwischen Gewicht und Masse. Dies Letztere ist für unser Thema besonders zu beachten; denn dadurch ist für den Begriff des materiellen Punktes erst das geschaffen, was MACH einmal allgemein als Abstraktion oder Idealisierung bezeichnet, die immer nötig ist, wenn man sinnliche Erlebnisse gedanklich nachbilden und begrifflich formen will.[2]) Die Kugeln, die GALILEI rollen ließ, die kleinen Körper, die HUYGENS verwandte, waren nicht materielle Punkte im Sinne NEWTONS; sie waren ganz bestimmte Körper von bestimmtem Gewicht. Als Körper hatten sie alle Eigenschaften des Körpers; Luftwiderstand, Reibung etc. mußten berücksichtigt werden. Dabei tut es prinzipiell nichts zur Sache, daß diese Umstände in manchen Fällen gegenüber der Anziehungskraft

---

1) p. 293: „si modo orbium augeatur numerus et minuatur crassitudo in infinitum sic ut actio gravitatis a superficie infima ad supremam continue reddatur"; ähnlich p. 192, 196 u. a.

2) Siehe MACH, a. a. O. p. 33.

der Körper vernachlässigt werden können; solange das Gewicht das Maßgebende ist, treten die störenden Nebenumstände noch zu sehr in den Vordergrund, ist eben die Idealisierung noch nicht genügend fortgeschritten. Bei Newton ist der materielle Punkt etwas Anderes, er repräsentiert eine bestimmte Masse, d. h. in bestimmtem Umfange eine Eigenschaft des Körpers, die unmittelbar nicht wahrgenommen werden kann, auf die man erst geführt wird, wenn man das Wesentliche vom Unwesentlichen sondert. Die Masse eines Körpers ist auch nicht gleich, sondern nur proportional dem Gewicht. Wenn ein solcher materieller Punkt sich bewegt, ist ohne weiteres von Reibung, Luftwiderstand etc. abzusehen; es ist damit die Abstraktion geschaffen, deren Notwendigkeit oben hervorgehoben wurde.

Allerdings müssen hier zwei Einschränkungen gemacht werden. Erstens fragt es sich, ob Newton sich der Wirkung seiner Unterscheidung für Masse und Gewicht auch für diesen Gegenstand bewußt geworden ist. Ausgesprochen ist dies nirgends, und bei dem Bestreben Newtons, derartigen kritischen Betrachtungen aus dem Wege zu gehen, ist die Frage wohl von vornherein mit Nein zu beantworten. Zweitens aber ist die Auffassung des materiellen Punktes nicht konsequent durchgeführt. Wir hatten Gelegenheit, zu zeigen, wie eine Wandlung eintritt, ein Übergehen von der abstrakten, idealisierten Auffassung zur konkreten, sinnlichen. Der materielle Punkt erscheint in gewisser Weise als Doppelwesen, als mathematischer und als physischer Punkt, wenn wir uns kurz so ausdrücken wollen. Das ist ein Widerspruch, den zu lösen Newton seinen Nachfolgern überließ. Jedenfalls ist aber dadurch, daß der Begriff des materiellen Punktes zum Grundbegriff der analytischen Mechanik gemacht wird, der Anfang für die ganze spätere Entwickelung gegeben. Und dadurch, daß Newton feste und flüssige Körper nach einem und demselben Prinzip behandelt, d. h. bei beiden von der Bewegung gewisser kleinster Teilchen ausgeht, ist der Grund zu einer einheitlichen Auffassung der gesamten Mechanik gelegt; für die analytische Betrachtung sind feste und flüssige Körper nicht von wesentlicher, sondern nur von gradueller Verschiedenheit.

Newtons physikalisch-philosophische Grundanschauung. Doch können wir hiermit unsere Betrachtungen noch nicht abschließen, denn in dem Anhange, den Newton seiner Mechanik gibt, in dem *Weltsystem*, bekommen wir einen tieferen Einblick in die philosophisch-physikalischen Grundlagen, aus denen heraus die Darstellung der Mechanik und speziell der Begriff des materiellen Punktes erwachsen sind. Diese Erörterungen treten in der ersten Ausgabe der *Principia* nur in kurzer Form auf, nehmen dagegen in der zweiten und dritten Auflage einen weit größeren

Raum ein.[1]) Das ist wieder ganz bezeichnend für NEWTON, der, wie wir schon mehrfach hervorhoben, in erster Linie die mathematische Entwickelung im Auge hatte. Aber er konnte sich doch denjenigen nicht mathematischen Erörterungen, die notwendig zu seiner Darstellung gehörten, auf die Dauer nicht verschließen. So wurden die anfänglich spärlichen Notizen in den späteren Ausgaben des Werkes entsprechend ergänzt.

NEWTON ist Atomistiker., Die Körper bestehen nach ihm aus diskreten Massenteilchen, denen im kleinen dieselben Eigenschaften zukommen wie dem Körper, den sie bilden: „Die Ausdehnung, Härte, Undurchdringlichkeit, Beweglichkeit und Trägkeit eines endlichen Körpers entspringt aus der Ausdehnung, Härte, Undurchdringlichkeit, Beweglichkeit und Trägheit der Teile. .... Dieser Satz ist die Grundlage der gesamten Naturwissenschaft"[2]) Das ist eine Hypothese, über deren Richtigkeit man sehr wohl im Zweifel sein kann, zumal eine direkte experimentelle Bestätigung ausgeschlossen ist. Es ist aber andererseits eine Annahme so allgemeiner und fundamentaler Natur, daß sehr viel gewonnen ist, wenn man aus ihr heraus den Begriff des materiellen Punktes entwickeln kann. Man muß sich nämlich aufs sorgfältigste hüten, die hier erwähnten „Teile" oder, wie er sie an einer späteren Stelle nennt, „kleinsten Teile"[3]) ohne weiteres mit den in der Mechanik verwandten materiellen Punkten zu identifizieren. Denn wenn auch der Ausdruck — früher „particula", jetzt „minima pars" — dasselbe bedeutet, und wenn auch der materielle Punkt oft so konkrete Gestaltung annahm, daß er als physikalischer Bestandteil des Körpers erschien, so findet doch eine Identität nicht statt. Man hat stets den Zusammenhang zu bedenken, in dem beide Ausdrücke auftreten: früher waren es mathematische Entwickelungen, jetzt sind es physikalisch-philosophische Erörterungen. Deshalb ist hier „pars minima" nicht mit „materieller Punkt", sondern mit „Atom" oder „Molekül" zu übersetzen. Dies beweist am besten folgende Stelle: „Ferner wissen wir aus der Physik, daß die einzelnen aneinander haftenden Teile der Körper voneinander getrennt werden können; *daß aber die unteilbaren Elemente in der Theorie noch weiter in kleinere Teile gespalten werden können, ist aus der Mathematik bekannt.*"[4]) Hier

1) Von hier an zitieren wir die Seitenzahlen der *Principia* nach der zweiten Auflage (Cambridge 1713).

2) p. 358: „extensio, durities, impenetrabilitas, mobilitas, vis inertiae totius oritur ab extensione, duritie, impenetrabilitate, mobilitate, viribus inertiae partium. ... Et hoc est fundamentum philosophiae totius".

3) p. 358: „partes minimae".

4) p. 358: „porro corporum partes divisas et sibi mutuo contiguas ab invicem separari posse, ex phaenomenis novimus, et partes indivisas in partes minores ratione distingui posse ex mathematica certum est".

ist die klarste Bestätigung: Physikalisch betrachtet bestehen die Körper aus „unteilbaren Elementen", eben aus „Atomen" (*ἄτομος*), geht man dann aber mit mathematischen Überlegungen an die Erscheinungen heran, so können diese „unteilbaren Elemente" noch weiter — soweit es eben die Mathematik erfordert — geteilt werden; sie werden zu materiellen Punkten. *Die materiellen Punkte sind also, kurz gesagt, die durch die Mathematik geforderte begriffliche Abstraktion der Atome.*

Hierdurch gewinnt der Begriff des materiellen Punktes eine überaus anschauliche Gestaltung; eine andere Frage ist es allerdings, ob sich nicht aus der konsequenten Durchführung einer derartigen Auffassung neue Schwierigkeiten ergeben, die die anfängliche Klarheit und Anschaulichkeit in Frage stellen. Auf diese Frage kommen wir später im Zusammenhange zurück.

II. Die Zeit von Newton bis Euler.

Nach dem Erscheinen der NEWTONschen *Principia* entstand eine Reihe größerer Arbeiten, in denen mechanische Probleme behandelt wurden. Da sich diese Untersuchungen aber in den meisten Fällen speziellen Aufgaben zuwandten und mehr eine Weiterentwickelung als eine Fundamentierung der Mechanik anstrebten, kommen sie für unser Thema weniger in Betracht. Aus diesem Grunde können wir auf eine Einzelbesprechung der verschiedenen Arbeiten verzichten und bei jedem Autor eine Gesamtübersicht geben.

Joh. Bernoulli.[1]) In gewisser Beziehung stimmt JOH. BERNOULLI vollkommen mit NEWTON überein. Auch er spricht von „Körpern" und versteht darunter bald materielle Punkte, bald Körper endlicher Ausdehnung.[2]) Die materiellen Punkte werden in der Zeichnung teils als Punkte, teils als kleine Kugeln[3]) von verschiedener Größe dargestellt. Aber auch hier ist Kugelform nur etwas Äußerliches, eigentlich betrachtet

1) Die hier in Betracht gezogenen Abhandlungen von JOHANN BERNOULLI sind: *Extrait de la réponse à Monsieur HERMANN* (Mém. de l'acad. d. sc. de Paris 1710, p. 521 ff. = *Opera omnia* I, p. 470—480); *De motu corporum gravium, pendulorum et projectilium* (Acta Eruditorum 1713, p. 77 ff. = *Opera omnia* I, p. 514—558); *Meditatio de natura centri oscillationis* (Acta Eruditorum 1714, p. 257 ff. = *Opera omnia* II, p. 168—186); *Discours sur les loix de la communication du mouvement,* Paris 1727 = *Opera omnia* III, p. 1—107); *Propositiones variae mechanico-dynamicae; Opera omnia* IV, p. 253—313). Wir zitieren hier nach den *Opera omnia* (Bd. I—IV, Lausannae et Genevae 1742), und geben bei den Zitaten die betreffende Jahreszahl in Klammern an.

2) Bd. I, p. 472: „corps" (1710), Bd. I; p. 514, 538: „corpus grave" = Körper endlicher Masse (1713).

3) Z. B. Bd. II, p. 170 (1714).

werden die geometrischen Mittelpunkte der Kugeln; man muß sich deshalb die Kugeln auch nicht als rollend, sondern als reibungslos gleitend vorstellen. Die Bewegung der Körper endlicher Ausdehnung reduziert sich auf Punktbewegung dadurch, daß BERNOULLI sich die Körper aus unendlich vielen kleinen Körperchen zusammengesetzt denkt, auf die er die Punktgesetze anwendet. [1])

Soweit stimmen NEWTON und BERNOULLI überein. Anders wird es, wenn wir auf die physikalischen Grundanschauung, auf die Ansicht von der Konstitution der Körper zu sprechen kommen. BERNOULLI ist im Grunde, bis zu einem gewissen Grade, Anhänger einer Kontinuitätstheorie. Alle Materie ist gleichartig; im Anfang befindet sie sich im kontinuierlichen Zusammenhang, als eine Art Flüssigkeit. Aus dieser flüssigen Masse heraus bilden sich durch Anhäufung sog. „Elementarmoleküle“[2]). Aus diesen sind die Körper zusammengesetzt, und aus der verschiedenen Gestalt, Anordnung und Beweglichkeit der Elemente erklärt sich die Verschiedenheit der Körper. [3]) Das ist ein wesentlicher Gegensatz zu NEWTON. Bei NEWTON entsprang, um ein Beispiel zu nehmen, die Härte der Körper aus der Härte der Moleküle,[4]) bei BERNOULLI aus dem Bestreben der einzelnen Teilchen, aneinander zu haften. [5]) Dadurch sind alle Körper im Grunde gleich, ihre Verschiedenheit beruht nicht auf einer wesentlichen Verschiedenheit der Materie sondern auf einer Ungleichheit in der Anordnung der letzten Teilchen. Inwieweit sich andrerseits aus dieser Hypothese die verschiedenen physikalischen und besonders chemischen Eigenschaften der Körper erklären lassen, ist eine Frage, deren Beantwortung nicht hierher gehört.

Daniel Bernoulli. Eine etwas weiter ausgeführte Darstellung der Auffassung von JOH. BERNOULLI gibt DANIEL BERNOULLI in seiner Hydrodynamik.[6]) Auch er meint, daß z. B. die verschiedene Schwere eines Körpers nicht herrührt von einer verschiedenen Schwere der letzten Teilchen, sondern von ihrer Anzahl in einem bestimmten Volumen; alle letzten Teilchen haben dieselbe spezifische Dichte.[7]) Zwischen diesen

1) Z. B. Bd. IV, p. 276: „fingamus corpus percutiendum divisum in infinita corpuscula minima“ (1742).

2) Bd. III: *Discours sur les loix de la communication du mouvement* (1727), p. 11: „molécules élémentaires“.

3) Ibid. p. 11, vgl. auch p. 8—9.

4) Siehe Anmerk. 2, S. 26.

5) Ibid. p. 13: „un corps sera donc dur conformément à l'idée que nous venons de donner de la dureté, lorsque ses parties sensibles changent difficilement de situation“.

6) DANIEL BERNOULLI, *Hydrodynamica* (Argentorati 1738).

7) Ibid. p. 249 ff.: „particulae ultimae“, auch „minimae“. Merkwürdig ist, daß BERNOULLI p. 251 der Ansicht ist, die Partikeln der Planeten besäßen verschiedene Dichte.

Teilchen flutet im Körper der Äther, die „subtile Materie“, wie BERNOULLI sie nennt; durch ihren Wirbel wird die Gravitation hervorgebracht.[1]) Auch die letzten Teilchen sind noch keine Continua, sondern haben Poren, durch die wieder eine noch feinere, noch subtilere Materie hindurchdringt.[2]) Diese Anschauungen sind ziemlich unklar und scheinen zu keinem rechten Ende zu kommen.

Was schließlich die mathematisch-formale Seite anbetrifft, so spricht BERNOULLI von „particula“, „globulus“, „guttula“, „corpusculum“; jedoch kommt er nicht zu einem klaren mathematischen Begriff, wie denn überhaupt die ganze Arbeit, wie er selbst sagt, in erster Linie physikalischer Natur ist.[3])

Clairaut. Mehr als die beiden BERNOULLI ist CLAIRAUT ein Schüler NEWTONS. In den 1735 und 1738 erschienenen Abhandlungen über Pendelschwingungen[4]) geht CLAIRAUT, was den Begriff des materiellen Punktes anbelangt, vollkommen in den Spuren seines großen Lehrers. Der Ausdruck „Körper“ wird in dem Sinne von Punkt gebraucht; die materiellen Punkte werden durch Kugeln von verschiedener Größe dargestellt.

Ein Unterschied gegen die NEWTONsche Ansicht zeigt sich in der 1743 erschienenen Arbeit über „die Theorie der Erdgestalt“.[5]) Von den durch NEWTON gegebenen Prinzipien der Hydrodynamik ausgehend versucht CLAIRAUT, die Gestalt der Erde zu bestimmen. Die durch das Thema gebotene physikalische Betrachtung hat den allerwesentlichsten Einfluß auf die Auffassung vom Begriff des materiellen Punktes gehabt. Die rein abstrakte Fassung und mathematische Formulierung, wie wir sie teilweise bei NEWTON fanden, ist vollkommen geschwunden. Der materielle Punkt ist identisch mit dem physikalisch kleinsten Bestandteil des Körpers, mit einem Wort: *materieller Punkt und Atom sind dasselbe.* Das ist ein Unterschied gegen NEWTON; aber aus der ganzen Darstellung CLAIRAUTS geht hervor daß diese Verschiedenheit nicht auf einem prinzipiellen Gegensatze beruht, sie rührt vielmehr her von einer gewissen achtlosen Darstellungsweise oder überhaupt einer Indifferenz derartigen Betrachtungen gegenüber. Deshalb muß man sich hüten, aus diesem Buche voreilige Schlüsse etwa auf CLAIRAUTS Ansicht von der Konstitution der Körper zu ziehen. So treten z. B. die materiellen Punkte meistens als Kugeln auf: „denken wir uns zuerst, daß ein beliebiges *Atom* des Planeten . . .“, und gleich darauf von demselben Atom: „ . . . daß alle Kräfte Mm, welche

1) p. 250.

2) p. 250: „longum subtilius fluidum“.

3) Ibid. p. 16.

4) Mémoires de l'académie des sciences de Paris 1735 und 1738.

5) CLAIRAUT, *Théorie de la figure de la terre* (Paris 1743).

auf die kleinen *Kugeln* im ersten Augenblicke wirken";[1]) hieraus darf man aber nicht ohne weiteres folgern, daß CLAIRAUT sich die Atome nun auch als Kugeln vorstellte. In der Ausdrucksweise zieht sich die Identifikation von Atom und materiellem Punkt durch die ganze Arbeit; es genügt daher, hier die Ausdrücke zu nennen, die mit „materieller Punkt" zu übersetzen sind; es sind: „particule", „corpuscule", „partie", „point", „corps", „particule de matière", „atôme", „globule", „élément"; man sieht, die gebotene Auswahl ist eine reichliche.

Der Begriff des materiellen Punktes in Beziehung zur Physik und Philosophie. Die bei den letzten Autoren gemachten Ausführungen schweifen etwas vom eigentlichen Thema ab, aber sie mußten gemacht werden, um zu zeigen, wie mancherlei Fragen mit dem Begriff des materiellen Punktes verknüpft sind, Fragen, die vom Gebiete der Mathematik in das der Physik und Philosophie hinübergehen. Solange man freilich den materiellen Punkt als mathematische Fiktion auffaßt, als einen Hilfsbegriff, der dazu dient, rechnerisch die Bewegungen zu verfolgen, fehlen alle derartigen Erörterungen. Sie treten aber sofort in ihr Recht, sobald man den materiellen Punkt als kleinsten Teil eines Körpers faßt, als wirklich existierendes Element; denn dann hat er nicht nur mathematischen Forderungen zu genügen, sondern er muß sich auch den allgemeinen physikalischen Gesetzen fügen. Da nun im Anfang — vor NEWTON — die Mechanik in viel engerem Zusammenhange mit der Physik als mit der Mathematik stand, läßt sich schon von vornherein vermuten, daß die konkret-physikalische Auffassung die ursprüngliche gewesen ist. Faßte man den materiellen Punkt als bestimmtes, wirklich im Körper existierendes Element, so brachte man die neuen mechanischen Gesetze in Zusammenhang mit einer alten Hypothese von der Konstitution der Körper. Ob dieser Zusammenhang den genannten Autoren immer klar zum Bewußtsein gekommen ist, ist nicht gewiß, ja ist sogar unwahrscheinlich bei der geringen Wichtigkeit, die derlei Untersuchungen gegenüber ihren anderen Arbeiten haben. Das ist jedoch auch nebensächlich; denn daß derartige Betrachtungen, wenn auch unbewußt, mit Einfluß gehabt haben, zeigen eben die angeführten Ausführungen, die im Zusammenhange mit den Bewegungsgesetzen auftraten. Schon bei NEWTON fand sich eine bestimmte Hypothese, um die Eigenschaften der Körper zu erklären, wenn man sie aus kleinsten Teilchen zusammengesetzt dachte; JOH. und DAN. BERNOULLI hatten eine andere Anschauung. Sich für die eine oder andere Auffassung von unserem Stand-

---

1) *Théorie de la figure de la terre*, introduction p. XXXVII: „imaginons d'abord qu'un atôme quelconque de la planète . . ."; ib. p. XXXVIII: „que toutes les forces telles que Mm, qu'avoient les globules dans le premier instant".

punkt aus, d. h. nach ihrer Nützlichkeit für den Begriff des materiellen Punktes zu entscheiden, geht nicht an; denn diese Hypothesen wollen weit mehr geben, sie wollen, wie NEWTON sich ausdrückt, „fundamentum philosophiae totius“ sein.[1]) Es ist aber entschieden mancherlei gewonnen, wenn sich die Mechanik auch durch den materiellen Punkt der allgemeinen Physik angliedert.

Als ein konkretes Beispiel zu diesen allgemeinen Ausführungen wollen wir einen Umstand anführen, der bei CLAIRAUT in Betracht kommt und sicherlich Einfluß auf die konkret sinnliche Auffassung des materiellen Punktes gehabt hat. Es ist dies die Überzeugung von der Richtigkeit der Emissionstheorie des Lichtes. In seiner 1739 veröffentlichten Abhandlung über die CARTESIsche und NEWTONsche Erklärung der Lichtbrechung[2]) stellt CLAIRAUT sich ganz auf den Boden der NEWTONschen Hypothese, die er durch neue Überlegungen und Tatsachen zu stützen sucht. Er gebraucht hier genau dieselben Ausdrücke für die Lichtteilchen, die wir oben für den materiellen Punkt gefunden hatten, und zwar sind es hauptsächlich die Worte „corpuscule“ und „particule“.[3]) Diese Ausdrücke repräsentieren immer etwas ganz Konkretes, sie bedeuten wirklich vorhandene Elemente der Materie. Wir haben bestimmte, unendlich kleine Korpuskeln, die sich mit unendlicher Geschwindigkeit bewegen und durch ihren Anprall auf die Netzhaut die Lichtempfindung hervorrufen. Der ganze Vorgang ist ein rein mechanischer. Hier also waren kleinste Teilchen mit gutem Erfolge verwandt, man konnte die Erscheinungen mit ihnen verstehen und verfolgen; daher wird diese Anschauung zweifellos auf die Auffassung des Massenpunktes in der Mechanik eingewirkt haben. Und ebenso ist es einzusehen, daß man später, als die HUYGENSsche Theorie immer mehr Geltung fand, leichter zu abstrakten und weniger sinnlichen anschaulichen Auffassungen kommen konnte, ohne viel zu fragen, ob der Abstraktion nun auch wirklich ein realer Inhalt entsprach. Denn wenn man zurückblickte auf die Lichttheorie, so sah man, daß die Erscheinungen im Anfang, als noch wenig bekannt war, ganz gut durch verschiedene Theorien, die Emissions- und Undulationstheorie, beherrscht werden konnten. Dadurch wurde eine größere Freiheit und Beweglichkeit der Anschauungen hervorgerufen. An direkten Tatsachen läßt sich allerdings der Einfluß derartiger Überlegungen nicht nachweisen, er wird aber doch wohl nicht zu leugnen sein.

Fontaine. Recht im Gegensatz zu den letzten Betrachtungen steht

---

1) cf. Anmerk. 2, S. 26.

2) Mémoires de l'académie des sciences de Paris 1739: *Sur les explications, CARTESIENNE et NEWTONIENNE, de la réfraction de la lumière.*

3) Z. B. p. 262: „des corpuscules de lumière“.

die Abhandlung FONTAINEs über die Bewegung der Körper,[1]) die, obwohl schon 1739 verfaßt, doch erst 1764 gedruckt wurde. Jedoch ist sie, wie in der Vorrede ausdrücklich hervorgehoben wird, 1739 allen bekannten Mathematikern mitgeteilt worden.[2]) Es ist daher zu vermuten, daß EULER sie gekannt und daß auch CLAIRAUT vor der Veröffentlichung seiner späteren Arbeiten von ihr Kenntnis genommen hat.

FONTAINEs Arbeit stellt den Versuch dar, die Prinzipien der Mechanik in rein mathematischer Entwickelung zu geben, sie bedeutet daher auch für den Begriff des materiellen Punktes einen bedeutenden Fortschritt in der abstrakten Formulierung. An der Spitze stehen Definitionen, die präzis abgefaßt große Klarheit versprechen, Sect. I, 7: „Unter einem Punkte versteht man ein Raumgebilde, das keinerlei Ausdehnung hat";[3]) und gleich darauf Sect. I, 8: „Ein materieller Punkt ist ein Gebilde, dessen Ort und Volumen ein Punkt ist".[4]) Hier ist also alles erfüllt, was man von einer abstrakten Fassung verlangen kann. Schade ist es nur, daß FONTAINE sich nicht immer strikte an diese Definition hält. Schon eine Seite später kommt eine Bemerkung, die uns stutzen läßt, Sect. I, 14: „Eine Richtung ist die Verlängerung der Zentralen zweier Punkte";[5]) wollte FONTAINE streng nach der Definition gehen, so war es offenbar unlogisch, von den Zentren zweier Punkte zu reden, denn die von ihm definierten Punkte haben keine Ausdehnung, also auch keine Mittelpunkte.[6]) Im folgenden tritt sonderbarerweise an Stelle des in den Definitionen verwandten „point de matière" der Ausdruck „corps". Allerdings wird ausdrücklich hervorgehoben, daß man eigentlich nicht die Bewegung des „corps", sondern die seines „point massif", seines „Massenmittelpunktes" betrachtet.[7]) Immerhin ist aber hin und wieder ein leises Abweichen von den zu Anfang gegebenen präzisen Definitionen nicht zu verkennen.

---

1) A. FONTAINE, *Principes de l'art de résoudre les problèmes sur le mouvement des corps;* Mémoires donnés à l'académie royale des sciences (Paris 1764).

2) Inhaltsübersicht, Schluß.

3) Sect. I, 7: „Un point est ce que l'on conçoit dans l'espace n'avoir aucune étendue".

4) Sect. I, 8: „Un point de matière est ce dont le lieu et le volume est un point".

5) Sect. I, 14: „Une direction est le prolongement des centres de deux points contigus".

6) MACH glaubt p. 294 die Schwierigkeit beim Ziehen einer Verbindungslinie zwischen zwei ausgedehnten Massen dadurch zu beseitigen, daß er die Masse in genügend kleine Teile teilt und zwischen diesen Teilen die Verbindungslinien zieht. Dies ist jedoch nicht angängig, denn eine Verbindungs*linie* kann *nur* zwischen zwei Punkten gezogen werden.

7) Sect. I, 22: „... point massif (nous verrons dans la suite, quel est le point dans un corps que l'on peut prendre pour le corps, ou dans lequel l'on peut supposer que *réside toute la masse*".

Dieser Eindruck verstärkt sich besonders, wenn man die formale Seite berücksichtigt. Zu den bisher gebrauchten Ausdrücken „point de matière“ und „corps“ für „materieller Punkt“ treten zwei neue: „point massif“ und „particule massife“.[1]) Dabei ist darauf zu achten, daß der hier gebrauchte „point massif“ keineswegs mit dem oben genannten „point massif“, der Massenmittelpunkt bedeutete.[2]) zu verwechseln ist, obwohl dieser Wechsel nirgends erwähnt ist. So werden nun mehrere solche Massenpunkte und ihre Wirkungen aufeinander betrachtet; dabei treten die Punkte teils einzeln, teils in Verbindung miteinander auf. War früher der Körper, der unter dem Einfluß bestimmter Kräfte stand, durch einen Massenmittelpunkt ersetzt worden, so werden jetzt die Punkte, oder vielmehr ihre Wirkungen, ersetzt durch ein Kräftezentrum,[3]) das allerdings meistens mit dem Schwerpunkt des Systems zusammenfällt.

Der Übergang vom Punkt zum starren Körper vollzieht sich bei FONTAINE ganz glatt und logisch. Dadurch, daß er in den bisher betrachteten Punktsystemen die Anzahl der Punkte ins Unendliche wachsen läßt und solche Kräfte postuliert, daß die gegenseitige Lage der Punkte bei einer Ortsveränderung dieselbe bleibt, ist der starre Körper fertig; er stellt sich dar als „ein Raum, angefüllt mit starr aber gewichtslos untereinander verbundenen Punkten“.[4]) Dadurch, daß jede physikalische Erörterung außer Acht gelassen ist, daß Fragen wie die nach dem Zusammenhange des materiellen Punktes mit den Atomen vollkommen beiseite gelassen sind, erhalten die Ausführungen einen festen, durch keinerlei Abschweifung gelockerten Zusammenhang.

Nur aus einer einzigen Stelle könnte man eine Vermutung schöpfen über die Art und Weise, wie sich FONTAINE die Konstitution der Materie dachte. In Sect. I, 4 spricht er von den „Zwischenräumen, die sich zwischen den Teilen der Körper befinden“,[5]) und hieraus scheint zu folgen, daß er sich den Körper aus diskreten Massenpartikelchen bestehend dachte. Hier ist aber zu bemerken, daß er nicht sagt „vuides entre les points de matière“ oder „vuides entre les particules“, sondern „vuides entre les parties“. Was sind aber „parties“? Sind es Atome oder Massenpunkte oder keins von beiden? Wir werden wohl am richtigsten gehen, wenn wir annehmen, FONTAINE stand als Mathematiker allen diesen Betrachtungen zu fern und hatte sich über die Konstitution der Materie überhaupt keine

---

1) Sect IV, 1, 2, 18 u. a.

2) cf. Anmerk. 7, S. 32.

3) Sect. IV, 7: „centre de force“.

4) Sect. IV, 1: „concevez un espace raide dénué d'inertie et doué de points massifs *A*, *B*, *C*, *D* etc. or un corps quelconque“.

5) Sect. I, 4: „... tous les vuides, qui se trouvent entre les parties“.

klaren Vorstellungen gemacht; oder aber, und das ist das Wahrscheinlichste, er glaubte, derartige Auseinandersetzungen gehörten nicht hierher; und aus diesem Grunde wählte er dann den unbestimmten Ausdruck „partie". Eine bestimmte Meinung kann man auf keinen Fall aus dieser Äußerung nachweisen.

Erwähnen wir schließlich noch die formale Seite unseres Themas, so ist zu bemerken, daß FONTAINE mit seinen Ausdrücken „point de matière" und „point massif" dem später allgemein gebräuchlichen terminus technicus „materieller Punkt" von allen bisher besprochenen Autoren am nächsten kommt. Wenn auch eine einheitliche Ausdrucksweise nicht durchgeführt ist — es kommen neben den beiden genannten noch „corps" und „particule massife" vor — so zeigt sich doch auch hier, namentlich in den zu Anfang ausgesprochenen Definitionen, ein Streben nach exakter und scharfer Formulierung. Dies Letztere gilt ganz allgemein von FONTAINE, und deshalb ist seine Arbeit als Versuch, eine streng mathematische Darstellung der elementarsten Bewegungsgesetze zu geben, trotz ihrer Kürze außerordentlich interessant und bemerkenswert. Sie ist aber auch aus dem Grunde hier ausführlich erwähnt worden, weil sie in der Literatur so gut wie gar nicht besprochen wird und keine ihrem Inhalte entsprechende Würdigung gefunden hat.[1])

III. Leonhard Euler.

Die „analytische Mechanik" vom Jahre 1736. Die zweite Stufe in der Entwickelung der analytischen Mechanik wird durch das große Werk von EULER bezeichnet.[2]) War die Darstellung NEWTONS und seiner Schüler zum größten Teil synthetisch gewesen, so ist EULER der erste, der die mechanischen Probleme mit allen Hilfsmitteln der inzwischen mächtig geförderten Analysis zu meistern sucht. Was aber uns die vorliegende Arbeit wertvoll macht, ist die gründliche Darstellung der Prinzipien der Mechanik. EULER ist der erste, der den Leser einen tiefen Einblick tun läßt in das ganze Werden und Wachsen der Entwickelung aus bestimmten Grundanschauungen heraus. So finden sich die Auseinandersetzungen über den materiellen Punkt nicht wie bei NEWTON in versteckten Anmerkungen und am Schluß, sondern dort, wohin sie gehören, am Anfang.

1) Das gilt auch von A. VOSS. Dieser sagt bei Besprechung des D'ALEMBERTschen Prinzips p. 76 Anmerk. 207a): „Nach MONTUCLA, histoire 3 p. 44 und 627 hat A. FONTAINE schon 1739 ein ähnliches Princip ausgesprochen". Durch obige Ausführung ist diese Anmerkung, wenn auch nach einer anderen Seite hin, ergänzt worden.

2) L. EULER, *Mechanica sive motus scientia analytice exposita* Bd. I—II (Petropoli 1736).

1. Schon in der Vorrede lesen wir: „Die Bewegung eines Körpers von endlicher Größe kann nämlich nicht anders vollkommen bestimmt werden, als daß man untersucht, welche Bewegung jedes Teilchen desselben oder jeder Punkt hat. Diese Abhandlung über Punktbewegung ist daher die Grundlage und der Hauptteil der ganzen Mechanik, worauf alle übrigen Teile sich stützen.“[1]) Allerdings muß man sagen, daß die Begründung, die EULER der Punktmechanik gibt, an dieser Stelle keine befriedigende ist; er sagt: „die Natur der Körper führte mich darauf, zuerst die Bewegung unendlich kleiner Körper oder, sozusagen, die Bewegung von Punkten zu untersuchen“.[2]) So ohne weiteres kann man mit diesem Ausdruck „die Natur der Körper“ nichts Rechtes anfangen; wir kommen jedoch auf die Anschauungen EULERs über diesen Punkt später im Zusammenhange zu sprechen. Jedenfalls geht aus der eben angeführten Bemerkung hervor, daß EULER die Wichtigkeit der Punktmechanik klar erkannt hat; und Hand in Hand mit einer derartigen Erkenntnis muß naturgemäß eine ausführliche Darstellung der Annahme gehen, die er macht, und speziell eine intensive Beschäftigung mit dem Grundbegriff dieser Annahme, dem materiellen Punkt.

Ganz allgemein für die EULERsche Anschauung gilt die mehr physikalische Fassung. Überall — und das gilt nicht nur für den materiellen Punkt — sucht EULER den Zusammenhang mit der Wirklichkeit zu wahren; so treten die mechanischen Probleme nicht als Aufgaben auf, die sich aus der mathematischen Theorie ergeben, sondern als solche, die sich aus der Physik entwickeln. Infolgedessen ist der materielle Punkt kein mathematischer sondern ein physischer, „ein unendlich kleiner Körper, den man als Punkt betrachten kann“.[3])

Doch liegt die Sache bei EULER nicht so einfach wie man nach diesen Bemerkungen annehmen könnte, wir werden vielmehr bei ihm eine ganz neue und eigenartige Auffassung zu konstatieren haben, die uns bisher noch nicht entgegengetreten ist. Auf den ersten fünfzig Seiten seiner Mechanik ist der Massenbegriff überhaupt nicht erwähnt. Die Verschiedenheit der materiellen Punkte ist eine rein formale, sie wird charakterisiert durch bestimmte Symbole, die, etwa mit den Buchstaben A, B, C, etc., als multiplikative Konstanten in die Rechnung eingehen. Damit ist natürlich

1) Praef. p. 6: „namque corporis finitam habentis magnitudinem motus aliter considerari et determinari non potest, nisi ut definiatur, qualem quaeque eius particula seu punctum habeat motum. Quocirca haec de motu punctorum tractatio est fundamentum et praecipua pars totius mechanicae, cui reliquae partes omnes innituntur“.

2) Praef. p. 5: „ipsa corporum indoles mihi hanc suppeditavit divisionem ut primo corporum infinite parvorum et tamquam punctorum motum investigarem.“

3) p. 37: „corpora infinite parva seu quae tamquam puncta spectari possunt“.

keinerlei Aussage über das Verhalten der einzelnen Punkte gegenüber einer Kraft gemacht; ob etwa, da die Punkte nach EULER als physische aufzufassen sind, ihre Größe, Gestalt, Oberfläche oder sonst eine andere physikalische Eigenschaft Einfluß auf die Bewegung hat, wissen wir nicht. Anders wird es, wenn EULER zu der Wirkung verschiedener Kräfte auf einen Punkt kommt: „bald werden wir die Wirkung verschiedener Kräfte betrachten, und auch bei den durch Kräfte angetriebenen Punkten eine Verschiedenheit der Größe annehmen“.[1]) Von nun an haben wir wirklich verschiedene Punkte. Eine Unterscheidung hatte ja auch bei früheren Autoren statt, und zwar wurden die einzelnen Punkte meistens durch Kugeln mit größerem oder kleinerem Radius dargestellt. Aber diese Verschiedenheit war eine rein äußerliche, da nur die geometrischen Mittelpunkte mit den in ihnen konzentrierten Wirkungen betrachtet wurden. Bei EULER liegt die Sache anders; hier sind die Punkte wirklich verschieden groß, wir haben „einfache“ und „zusammengewachsene“ Punkte.[2]) Diese konkret-physikalische Auffassung ist nicht eine zufällige, nur hin und wieder vorkommende, sondern zieht sich durch die ganze Mechanik hindurch. Ja, sie scheint einen tieferen Zweck zu haben, nämlich den, die Masse eines Körpers ungezwungen einzuführen: „um einen großen Punkt dieselbe Geschwindigkeit wie einem kleinen zu erteilen, bedarf man einer größeren Kraft, und zwar einer desto größeren, je mehr jener Punkt diesen an Größe übertrifft. Dieser Satz enthält die Grundlage zur Bestimmung der Trägheitskraft, denn aus demselben folgt, daß in der Mechanik die Materie oder Masse eines Körpers in Betracht gezogen werden muß.“[3]) Das also ist's: aus dem verschiedenen Verhalten der verschieden großen Punkte folgt die Notwendigkeit des Massenbegriffes. Und dann weiter; die Masse wird noch enger mit den materiellen Punkten verknüpft: „man hat nämlich die Zahl der Punkte zu beachten, aus denen der Körper zusammengesetzt ist, und die Masse des letzteren ihr proportional zu setzen“.[4]) *Die Masse ist also direkt proportional der Anzahl der materiellen Punkte.*

---

1) p. 53: „quomodo autem se habeant diversarum potentiarum effectus, mox sumus expositurі, atque etiam in punctis, quae a potentiis sollicitantur, diversitatem ponemus“.

2) p. 53: „possunt enim duo plurave in unum coalescere concipi, quod, quanquam simplicibus est maius, infinite tamen exiguae manet magnitudinis“.

3) p. 55: „ad eandem ergo maiori puncto celeritatem inducendam, quam minori, opus est maiori potentia, idque tanto maiori, quantum illud punctum maius est quam hoc“. „Propositio ista fundamentum complectitur ad vim inertiae metiendam, hac enim nititur omnis ratio, quare corporum materia seu massa in mechanicis considerari debeat“.

4) p. 55—56: „attendi enim oportet ad punctorum numerum, ex quibus corpus movendum est conflatum, eique massa corporis proportionalis est ponenda“.

Prüfen wir einmal diese Auffassung EULERS; dabei wollen wir ganz davon absehen, was man sich für Punkte bei dieser letzten Definition zu denken hat, ob „einfache“ oder „zusammengesetzte“.

2. Wir haben im vorhergehenden von physikalischen Punkten, d. h. wirklichen Körpern oder Elementen von Körpern gesprochen; dann wurde gesagt, daß Punkte von verschiedener Größe — man beachte auch das Wort „Größe“ — ein und derselben Kraft verschiedenen Widerstand entgegensetzen, und zwar einen Widerstand, der im Verhältnis der Größe steht. Was heißt das aber anderes, als daß schon hier, bei den verschieden großen Punkten, die verschiedene Masse in Betracht gezogen wird. Also hier schon wird, zwar stillschweigend, die Bedeutung der Masse vorausgesetzt, wenn ihre Einführung auch durch das Wort „Größe“ verschleiert ist. Wie aber EULER dann aus dem verschiedenen Verhalten der Punkte den Massenbegriff erklären oder gar seine Bedeutung für die Mechanik erweisen will, ist nicht recht klar. Denn ganz abgesehen von den Irrtümern, die durch den Ausdruck „Größe des Punktes“ hervorgerufen werden können, als käme es nur auf die Dimensionen des Punktes an; ganz abgesehen auch davon, ob ein so elementares Erfahrungsgesetz wie es der Widerstand der Massen ist, durch eine so ideelle Operation, wie die Teilung eines zwar unendlich kleinen aber doch reellen Punktes in wieder kleinere, überhaupt erklärt oder anschaulich gemacht werden kann, ist dieser Beweis auch gar kein Beweis; denn es ist nach den gemachten Ausführungen doch wohl klar, daß wir einen einfachen Zirkelschluß vor uns haben. Wollte EULER einmal von physikalischer Grundlage ausgehen, so war der umgekehrte Weg der richtige: als Erfahrungstatsache steht fest, daß verschiedene Körper gegen ein und dieselbe Kraft verschiedenen Widerstand üben; dieser Widerstand rührt her von einer ihrer Eigenschaften, die wir Masse nennen, und ist direkt proportional der Masse. Daraus folgt dann, daß auch materielle Punkte verschiedener Masse, solange sie als Körperelemente oder beliebig kleine Körper betrachtet werden, dasselbe Verhalten zeigen.

Kann man so den Beweis nicht als gelungen betrachten, so ist bemerkenswert, daß EULER selbst dies mit den später folgenden Worten zugibt: „man muß aber solche Punkte als gleich annehmen, auf welche dieselbe Kraft gleiche Wirkung ausübt, nicht aber die, welche gleich groß sind“.[1]) Hier wird doch offenbar die Masse eingeführt und ihre Bedeutung im Gegensatz zu der einfachen räumlichen Ausdehnung des Körpers hervorgehoben, nur daß der terminus Masse fehlt.

1) p. 56: „puncta vero ea inter se aequalia censeri debent, non quae aeque sunt parva, sed in quae eadem potentia aequales exerit effectus“.

Als Kuriosum wollen wir noch folgende Operation erwähnen, die mit dem materiellen Punkte vorgenommen wird. Bei der Aufgabe, die Wirkung einer beliebigen Kraft auf einen Punkt zu finden, wenn die Wirkung einer anderen Kraft auf diesen Punkt bekannt ist, denkt sich EULER die Kraft in zwei gleiche Kräfte zerlegt, die jede für sich auf die Hälfte des betrachteten Punktes wirken und diese Hälften in einer bestimmten Zeit an einen bestimmten Ort bringen würden. Nun sind aber in Wirklichkeit diese Hälften nicht vorhanden, deshalb denkt EULER sie sich nach Vollendung der Bewegung durch eine ungeheuer große und ungeheuer plötzlich wirkende Kraft wieder zusammenschnellen.[1] Der Vereinigungspunkt ist dann der wahre Ort des bewegten Punktes. Dazu muß man doch wohl sagen, daß es EULER bei dem Bestreben, alle Erscheinungen möglichst anschaulich und plausibel zu machen, widerfahren ist, daß die versuchten Erklärungen weit schwieriger zu verstehen sind als das Geschehnis selbst. EULER scheint selbst das Unnatürliche dieser Erklärung erkannt zu haben; denn er nennt gleich darauf die Kraft, die die Verbindung der Teilchen wieder herstellt, eine „imaginäre und unbestimmte Kraft“.[2]

Doch damit haben diese Erörterungen ein Ende erreicht; von jetzt an herrscht der Begriff der Masse, und eine Auseinandersetzung über etwaige Größe und Gestalt des materiellen Punktes findet sich nirgends mehr.

Auch im zweiten Bande der Mechanik kommt für unseren Gegenstand nichts Neues hinzu, so daß eine Besprechung nur eine Wiederholung des eben Gesagten sein würde.

Eulers Auffassung des Unendlichkleinen und der Konstitution der Körper. Wir haben die vorstehenden Ausführungen bis auf die Definition der Masse ohne jede Kritik gegeben, indem wir einfach der Darstellung EULERS folgten. Die kritischen Betrachtungen, die gerade durch die Auffassung des materiellen Punktes als unendlichkleinen physikalischen Körpers hervorgerufen werden, mögen im Zusammenhange im Schluß ihren Platz finden. An dieser Stelle haben wir noch eine Frage zu erledigen, die mit dem eben Gesagten nahe zusammenhängt.

1. Wie schon im Anfang hervorgehoben ist, war EULER der erste, der im weitesten Umfange die Infinitesimalrechnung auf die Mechanik anwandte. In der Infinitesimalrechnung werden nun fortwährend unendlichkleine Größen, Differentiale, gebraucht, analog wie in der Mechanik der materielle Punkt als unendlichkleiner Körper aufgefaßt wird. Es fragt sich daher, ob die Auffassung des Differentials und des materiellen Punktes in Bezug auf das Unendlichkleine gemeinsame Seiten haben oder nicht.

---

1) p. 59.

2) p. 69: „vis restituens est vis illa imaginaria et infinita“.

Die Auffassung, die Euler von den Differentialen hatte, findet man in seiner Differentialrechnung vom Jahre 1755.[1]) Die Differentiale sind nach Euler der Null gleichzusetzen, sie verschwinden absolut;[2]) denn wenn sie nicht als vollkommen der Null gleich angesehen werden, können sie nicht neben einer endlichen Zahl fortgelassen werden. Mag man zu richtigen Resultaten kommen, wenn man die Differentiale nur unendlichklein, aber doch größer als Null annimmt, so sagt das gar nichts; Fehler können sich fortheben, aber nie kann man für ein derartiges Verfahren mathematische Strenge beanspruchen.[3]) Wenn man auch die Differentiale gleich Null annimmt, so hindert das keineswegs, daß man sie, etwa in der Zeichnung, durch deutlich wahrnehmbare Größen darstellt; wenn man sie aber vernachlässigt, muß man zur Grenze Null übergehen, und nur dann kann man schreiben $a + dx = a$.[4]) Nach dieser strengen Auffassung ist also jeder Differentialquotient, etwa $\frac{dx}{dy}$, gleich $\frac{0}{0}$; dieser Bruch $\frac{0}{0}$ bedeutet aber doch eine bestimmte endliche Zahl; denn es gibt — und das ist das Charakteristische an Eulers Auffassung — *verschiedene* Nullen. Zwar ist $a + dx = a + dy = a + 0 = a$, aber doch ist $\frac{dx}{dy}$ eine bestimmte Zahl. Daß es verschiedene Nullen gibt, folgt aus dem einfachen Beispiel $2:1 = 0:0$; hier ist offenbar 2 doppelt so groß wie 1, folglich muß, damit die Proportion richtig bleibt, auch die erste Null doppelt so groß sein wie die zweite;[5]) und da allgemein $n:1 = 0:0$ ist, hat man Nullen, von denen die eine das beliebig Vielfache der andern ist. Mag aber etwa $\frac{0}{0} = n$ sein, so ist doch, wenn man diese beiden selben Nullen nimmt, $0 - 0 = 0$. So kommt Euler aus der konsequenten Durchführung der Annahme, daß die Differentiale vollkommen gleich Null sind, zu der eben skizzierten eigenartigen Auffassung. Inwieweit und ob sie zu Recht besteht, das zu untersuchen ist nicht unsere Aufgabe.

Für uns werden diese Betrachtungen um deswillen von Bedeutung, weil Euler in Verbindung mit ihnen seine Anschauung über die Teilbarkeit der Materie behandelt. Hierbei werden noch einmal das Unendlichkleine und auch das Unendlichgroße von einem höheren Standpunkt als nur mit Rücksicht auf ihre Verwendung in der Differentialrechnung behandelt.

---

1) L. Euler, *Institutiones calculi differentialis* (Petropoli 1755).

2) Praef. p. IX: „vocantur itaque differentialia quae cum quantitate destituantur; quae igitur sua natura ita sunt interpretanda ut omnino nulla seu nihilo aequalia reputentur". Ebenso praef. p. VIII, X.

3) Praef. p. X: „rigor geometricus".

4) Praef. p. XIV.

5) p. 78.

Daher erscheinen die Erörterungen über die Konstitution der Materie gleichsam als Beweis der früheren Ausführungen und zugleich als Beispiel, wie in der Natur an wirklichen Körpern Unendliches und Endliches vereint ist. EULERS Auffassung ist ungefähr die folgende.[1]) Jede Ansicht von einer endlichen Anzahl letzter Teilchen, mag man diese nun ausgedehnt oder unausgedehnt annehmen, führt notwendigerweise zu Widersprüchen; man muß daher sagen, die Materie ist ins Unendliche teilbar. Diese Auffassung, — meint EULER — scheint für den ersten Augenblick unverständlich zu sein, denn sie besagt, daß man mit einer Teilung nie zu einem Ende kommt, daß man also schließlich die ganze Materie in ein Nichts auflöst. So ist das aber nicht zu verstehen. Wenn man ein endliches Stück Materie, etwa einen bestimmten Körper, hat, kann man es teilen; und da nichts im Wege steht, kann man die Teilung beliebig weit fortsetzen. So wird man schließlich zu Teilchen kommen, die zwar keineswegs die letzten, aber doch so unendlich klein sind, daß sie kleiner sind als jede angebbare Zahl.[2]) Diese Teilchen kann man als unendlichklein und damit als Nullen ansehen.[3]) So hat EULER durch die Wendung Null = unendlichklein = kleiner als jede angebbare Zahl zu zeigen versucht, wie man sich Endliches aus Unendlichkleinem, das als Null betrachtet wird, zu denken hat.

Ob das Verfahren berechtigt ist oder nicht, können wir hier nicht weiter verfolgen, so viel ist aber wohl klar, daß die beiden Definitionen des Unendlichkleinen, einmal als Null, dann als verschwindend klein, schwerlich miteinander zu vereinigen sind. Für uns kommt eine andere Frage in Betracht, das ist die: hat die hier geschilderte Anschauung vom Unendlichkleinen einen wesentlichen Einfluß auf die Auffassungen EULERS in der Mechanik gehabt?

2. EULER faßt das Unendlichkleine in der Mechanik, wenigstens soweit es den materiellen Punkt angeht, in doppelter Weise. Einerseits ist der materielle Punkt nur sehr klein im physikalischen Sinne, d. h. seine Größe kann unter bestimmten Umständen vernachlässigt werden. In manchen Fällen jedoch reicht diese Definition nicht aus. Wenn die Masse eines Körpers der Anzahl der in ihm enthaltenen materiellen Punkte proportional gesetzt wird, dann ist der materielle Punkt zweifelsohne nur als sehr klein im physikalischen Sinne zu nehmen. Dann ist es sehr wohl möglich, daß ein Aggregat von n materiellen Punkten, von denen jeder gegenüber einem Körper von m Punkten zu vernachlässigen ist, größer ist als dieser Körper,

---

1) Vgl. besonders p. 70—80.

2) p. 73.

3) p. 77: „sed quantitas infinite parva nil aliud est nisi quantitas evanescens, ideoque revera erit = 0“.

wenn nur $n > m$ ist. Wenn EULER aber anderseits beliebig viele materielle Punkte „zusammenwachsen“ läßt und dadurch einen neuen Punkt erhält, der, wie er sagt, zwar größer als die einzelnen aber doch noch unendlichklein ist, so muß hier das Unendlichkleine im mathematischen Sinne gefaßt werden, denn nur dann gibt das Unendlichkleine in endlicher Summierung immer wieder etwas Unendlichkleines. In dieser Annahme, in dem Zusammenwachsen der Punkte und der dadurch entstehenden Verschiedenheit trotz der unendlichen Kleinheit, ist eine deutliche Analogie zu der Auffassung der verschiedenen Nullen in der Differentialrechnung zu erkennen. Aber doch steht die Auffassung in der Mechanik auf viel schwächeren Füßen als in der Differentialrechnung. Denn erstens hat EULER ausdrücklich hervorgehoben, daß die materiellen Punkte physikalische Gebilde seien; von ihnen konnte er also nicht ein für allemal behaupten, daß sie in endlicher Anzahl vereinigt wieder etwas Unendlichkleines ergeben. Zweitens aber verträgt sich die genannte Auffassung durchaus nicht mit der Definition der Masse. Wo ist der Unterschied zwischen Körper und Punkt? Hat man ein Gebilde von n materiellen Punkten als Körper oder Punkt anzusehen? Das ist ein unlöslicher Widerspruch, der um so mehr hervortritt, als die Anschauung von dem Zusammenwachsen der Punkte und die Massendefinition unmittelbar nebeneinanderstehen.

Nach diesen Auseinandersetzungen, bei denen wir wieder hervorgehoben haben, daß der materielle Punkt bei EULER ein physikalisches Gebilde ist, ist es wohl ohne weiteres klar, daß die bei der Besprechung der Konstitution der Materie erwähnten kleinsten Teilchen nicht mit den materiellen Punkten zu identifizieren sind. Man muß stets bedenken, daß die Erörterungen über die Zusammensetzung der Materie doch wohl in's Gebiet der Philosophie gehören. Daß diese Anschauungen über die Konstitution und Teilbarkeit der Materie wirklich mehr philosophischen Charakter haben, zeigt EULERS Ansicht von der Zusammensetzung der Körper, die Körper als physikalische Gebilde betrachtet, die der experimentellen Forschung unterworfen sind; denn hier kommen wesentlich andere Gesichtspunkte zur Geltung. Wir haben auch diese Hypothese zu prüfen und zu sehen, wie weit sie mit der Auffassung des materiellen Punktes zusammenhängt.

3. In einer kleinen Abhandlung über die kleinsten Teilchen der Materie[1]) finden wir diese Anschauungen im Zusammenhange ausgeführt. EULER hütet sich hier vor vager Spekulation und Aufstellung von Hypothesen, denen ein realer Untergrund fehlt; er stellt nur die Eigenschaften fest,

---

1) *Recherches sur les moindres particules de la matière; Opuscula* (Berolini 1746).

die sich seiner Meinung nach aus dem Wesen der Schwere ergeben; eine allgemeine Lösung der Frage hält er für ausgeschlossen. Das Resultat, zu dem er kommt, ist kurz folgendes. Die Körper sind zusammengesetzt aus kleinsten Teilen, aus Molekülen; und zwar sind Moleküle gleicher Größe auch gleich schwer, möge der betreffende Körper nun Gold, Silber oder irgend etwas anderes sein.[1]) Die Moleküle schließen sich nicht lückenlos aneinander, sondern haben Poren zwischen sich, durch die der Äther frei in die Körper eindringt, so daß die Moleküle sozusagen in ihm schwimmen. Die Moleküle sind aber nicht die kleinsten Teile des Körpers, sondern bestehen wieder aus Unterabteilungen, aus Elementen.[2]) Diese Elemente schließen sich in den Molekülen entweder lückenlos aneinander oder lassen derartig kleine Poren frei, daß nicht einmal eine so subtile Materie wie der Äther hindurchdringen kann. Die Hauptsache ist also: alle Moleküle haben dieselbe Dichte.[3]) Ob aber die Verschiedenheit der Körper herrührt von einer verschiedenen Gestalt der einzelnen Moleküle oder von einer verschiedenen Anordnung gleichartiger Moleküle, darüber, erklärt EULER, könne man keinen Aufschluß geben.

Diese Anschauungen EULERS haben entschieden größeren Einfluß auf die Gestaltung des Begriffes des materiellen Punktes gehabt. Der Grundgedanke von der gleichen spezifischen Dichte aller Moleküle findet sich in der Mechanik wieder. Denn nur unter der Voraussetzung, daß die materiellen Punkte der verschiedenen Körper alle dieselbe spezifische Dichte haben, ist es möglich, die Masse mit der Anzahl der materiellen Punkte in Verbindung zu bringen. Allerdings ist aus der EULERschen Mechanik nicht ersichtlich, ob die gegebene Massendefinition nur für Körper ein und derselben Art oder überhaupt allgemein gelten soll. Weiter aber darf man nicht gehen. Man ist in keiner Weise berechtigt, die eben genannten Moleküle mit den materiellen Punkten zu identifizieren; denn außer der zu Anfang angeführten Bemerkung, wo EULER von der „Natur der Körper" spricht,[4]) findet sich an keiner Stelle der bisher besprochenen Mechanik eine Äußerung über einen derartigen Zusammenhang. Aus diesem einen Wort aber darf man keine voreiligen Schlüsse ziehen; denn wenn EULER aus Überlegungen über die Konstitution der Körper zum Begriff des materiellen Punktes gekommen wäre, hätte er sicher weitere Erläuterungen in seiner Mechanik nicht unerwähnt gelassen, da gerade er alle Grundbegriffe mit breitester Anschaulichkeit darstellt und länger bei ihnen ver-

---

1) p. 7—10.
2) p. 7.
3) p. 10: „toutes les molécules ont la même densité".
4) Vergl. S. 35, Anm. 2.

weilt als alle seine Vorgänger. Aber er wußte sehr wohl, daß er da ein schwieriges Gelände betrat, auf dem einen Weg zu finden weder Experiment noch Überlegung vollkommen ausreichten. Vielleicht sollte geradezu durch das Fehlen derartiger Überlegungen angedeutet werden, daß die physikalische Konstitution der Körper für die Mechanik etwas ganz Nebensächliches sei und in ein anderes Gebiet gehöre. Damit wird der materielle Punkt losgelöst von allem Zusammenhang mit den Molekülen oder Atomen und erscheint als ein lediglich durch die analytische Mechanik bedingter Begriff, der dazu dient, die Bewegungsgesetze zu erforschen. Das ist wichtig und festzuhalten.

Die „Mechanik der starren Körper“ vom Jahre 1765. Nach diesen etwas abschweifenden Ausführungen kehren wir zur eigentlichen Mechanik Eulers zurück, und zwar kommen wir jetzt zu seiner „Mechanik starrer oder fester Körper.“[1]) Sie ist im Jahre 1765 erschienen, wenn sie auch schon einige Jahre vorher fertiggestellt war; sie stammt also aus einer wesentlich späteren Zeit als die beiden ersten Bände und auch als die Differentialrechnung und die Untersuchungen über die kleinsten Teilchen der Materie. Wir haben jetzt zu prüfen, ob sich die Auffassung des materiellen Punktes geändert hat, und ob etwa auf diesen letzten Teil der Mechanik die vorher genannten Untersuchungen einen wesentlichen Einfluß gehabt haben.

Aus dem späten Erscheinen dieses letzten Werkes erklärt es sich, daß es ein abgeschlossenes Ganzes für sich bildet, obwohl es die Fortsetzung der beiden früheren Bände ist. Aus demselben Grunde wird ferner die ziemlich ausführliche Wiederholung der Betrachtungen über die Mechanik der Punkte verständlich. Der in der Vorrede zum ersten Bande ausgesprochene Gedanke, daß die Mechanik der materiellen Punkte „fundamentum et praecipua pars totius mechanicae“ sei, wird hier aufs neue hervorgehoben. Vor allem aber sind die früher oft zerstreuten Ausführungen vereinigt, und die jetzt gegebenen Entwickelungen sind von einem einheitlichen Gedanken beherrscht. Wir werden uns im folgenden bemühen, nur das wesentlich Neue hervorzuheben.

1. Vor allem ist zu bemerken, daß in der Mechanik der starren Körper der Massenbegriff mit aller Entschiedenheit in den Vordergrund gestellt wird. Die Masse eines Körpers und damit seine Trägheit und Undurchdringlichkeit sind die Grundannahmen, auf denen sich die Betrachtungen aufbauen.[2]) Das Hervorheben eines grundlegenden Prinzipes und das

1) L. Euler, *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum* (Rostock und Greifswald 1765; zweite Ausgabe 1791).

2) Wolfers geht in der Vorrede zu seiner Übersetzung des dritten Bandes (Greifswald 1848) zu weit, wenn er behauptet, daß in den früheren beiden Bänden

Bestreben, mit allen Betrachtungen die Bewegung endlich ausgedehnter Körper, wie sie in der Natur wirklich vorkommen, vorzubereiten, hat für den Begriff des materiellen Punktes zweierlei zur Folge. Erstens tritt er in der Darstellung mehr zurück, und zweitens gewinnt er noch mehr an physikalisch-konkretem Aussehen. Waren im ersten Bande die Anfangsbetrachtungen, wo der materielle Punkt nur als Symbol, als multiplikative Konstante in die Rechnung eintrat, hauptsächlich auf mathematische Überlegung gegründet, so tritt er uns jetzt fast ausschließlich als physikalisches Gebilde von unendlichkleinen Dimensionen entgegen. Dadurch aber, daß alle physikalisch-philosophischen Erörterungen und alle Spekulationen über den Zusammenhang des materiellen Punktes mit den Atomen oder Molekülen des Körpers auch hier fehlen, gewinnt die Darstellung ein abgeschlossenes und berechtigtes Aussehen. Nur ganz vereinzelte und im Zusammenhange versteckte Bemerkungen erinnern einen aufmerksamen Leser an den alten Widerspruch zwischen mathematischer und physikalischer Auffassung, so, wenn es heißt: „die Bestimmung der Lage der Punkte ist eine geometrische“,[1]) und gleich darauf von denselben Punkten: „hierbei kommt es nicht darauf an, ob man solche Punkte für Elemente des Körpers halten kann oder nicht“,[2]) oder an einer anderen Stelle: „auf ähnliche Weise steht nichts im Wege, die Punkte A, B, C, D, auf welche ich die Lage des Punktes O bezogen habe, als reelle anzusehen, da sie Grenzen sind, welche in wirklichen Körpern existieren“.[3]) Dabei ist natürlich die Berechtigung dieses Grenzüberganges von den physischen zu den mathematischen Punkten mit keinem Wort bewiesen. Aber abgesehen von solchen ganz vereinzelten Bemerkungen ist die einmal gewählte Formulierung konsequent durchgeführt.

Auch die Ausdrucksweise zeigt die mehr physikalische Fassung. Sprach EULER früher hauptsächlich von „Punkten“, so gebraucht er jetzt meistens „Element des Körpers“ und „körperlicher Punkt“.[4]) Diese Worte zeigen schon, daß wir uns von den abstrakten Punktbewegungen nunmehr mit schnellen Schritten mehr konkreten Problemen, der Mechanik der festen Körper nähern.

---

der Begriff der Masse überhaupt nicht vorkam; wie wir erwähnt haben, hat EULER schon damals die Masse eingeführt und sogar ausdrücklich definiert. Vgl. S. 36 Anmerk. 3 und 4.

1) p. 4: „cum haec situs cuiuscunque puncti determinatio est geometrica“.

2) p. 5: „neque hic interest, utrum talia puncta pro corporum elementis haberi possunt necne“.

3) p. 5: „simili modo ea puncta A, B, C, D, ad quae situm puncti retuli, realitati minime repugnant, cum sint termini in veris corporibus existentes“.

4) „Elementum corporis, punctum corporeum“ p. 32, 34, 43 etc.

2. Die Überleitung vom Punkt zum Körper vollzieht sich ohne Schwierigkeit: „wir werden daher einen Körper als einen starren betrachten, wenn die Verbindung seiner Teilchen hinreichend fest ist, so daß nicht einmal zwei Elemente durch die Kräfte, welche er wirklich auszuhalten hat, einander genähert oder voneinander getrennt werden können“.[1]) Das ist so klar, daß es keiner weiteren Erörterung bedarf. Die translatorischen Bewegungen erledigen sich durch ihre Zurückführung auf Punktbewegung. Aber auch bei der Rotation sucht Euler immer wieder auf den Grundbegriff, auf den materiellen Punkt, zurückzukommen. So denkt er sich den Körper in unendlich viele Scheiben zerteilt[2]) und dann die Masse jeder Scheibe in ihrem Schwerpunkt konzentriert. Am deutlichsten zeigt sich dies schrittweise Vorgehen vom Einfachen zum Zusammengesetzten bei der Bewegung beliebig gestalteter Körper. Da untersucht er zuerst „einen dünnen, geradlinigen Faden“,[3]) dann einen „kreisförmig gekrümmten, sehr dünnen Faden“,[4]) und drittens eine „sehr dünne, ebene, dreieckige Scheibe“.[5]) Der Grund für dieses Verfahren ist klar und wird von Euler selbst mit den Worten angegeben: „weil man sehr dünne Fäden und Scheiben als Linien und Oberflächen betrachten kann“.[6]) Die Berechtigung dieses Verfahrens wird hier, ebenso wie vorher beim materiellen Punkt nicht bewiesen. Wollen wir uns überhaupt die Ansicht vergegenwärtigen, die Euler von der Methode, die Bewegung endlicher Körper zu behandeln, hatte, so tun wir das am besten mit seinen eigenen Worten: „Soll man die Bewegung eines beliebigen starren Körpers bestimmen, so zerlegt man die ganze Untersuchung bequem in zwei Teile, einen geometrischen und einen mechanischen“.[7]) Das klingt sehr einfach, und ist es auch, allerdings muß doch wohl, um ganz streng zu sein, die Berechtigung dieser Trennung nachgewiesen werden.

Der leise Widerspruch zwischen physikalischer und mathematischer Formulierung, der trotz aller Konsequenz der Grundauffassung hin und wieder durchklingt, findet sich auch in den für den materiellen Punkt ver-

---

1) p. 130: „corpus igitur ut rigidum spectabimus, quando nexus inter eius partes satis est firmus, ut ne duo quidem elementa a viribus, quae actu sustinet, vel propius ad se invicem cogi vel longius a se invicem divelli queunt“.

2) p. 159—160.

3) p. 184: „si corpus fuerit filum tenuissimum rectum“.

4) p. 185: „si corpus fuerit filum tenuissimum in peripheriam circuli incurvatum.“

5) p. 185: „si corpus fuerit lamina tenuissima plana triangularia.“

6) p. 183—184: „quoniam fila tenuissima et laminas tenuissimas tamquam lineas et superficies considerare licet“.

7) Diese Anmerkung ist der Übersetzung von Wolfers p. 557 entnommen, der die zweite Ausgabe vom Jahre 1791 zugrunde gelegt hat, sie fehlte in der von uns benutzten lateinischen Ausgabe vom Jahre 1765.

wandten Ausdrücken wieder. Wir haben da, wenn wir an dieser Stelle alle in den drei Bänden verwandten Worte zusammenfassen, zu nennen: „punctum“, „particula“, „minima particula“, „corpusculum“, „punctum corporeum“, „elementum corporis“. Schon die Vielheit und Verschiedenheit der Ausdrücke läßt vermuten, daß auch die Sache nicht ganz in Ordnung ist. Denn wenn sich bei einem Forscher ein Begriff, und noch dazu ein Grundbegriff klar kristallisiert hat, so pflegt dieser auch eine einzige, konsequent durchgeführte Bezeichnung dafür einzusetzen; und andererseits wenn die Bezeichnung schwankend ist, wird man vermuten, daß der Begriff noch unbestimmt ist, „denn eben, wo Begriffe fehlen, da stellt ein Wort zur rechten Zeit sich ein“. Und nicht nur die Vielheit des Ausdruckes, auch die Art der Bezeichnung bestätigt unsere Vermutung. Sehen wir uns einmal Anfang und Ende unserer Reihe an, da stehen sich „punctum“ und „elementum corporis“ gegenüber; beide erwecken bei dem Unbefangenen ganz verschiedene Vorstellungen, das erste eine mathematische, das zweite eine physikalische. Und ferner überwiegen die Ausdrücke physikalischer Gestaltung weitaus. Daher hat man, wenn man diese Auseinandersetzungen gelten lassen will, auch eine formale Bestätigung unserer sachlichen Beweisführung.

Fortschritt. Damit haben wir unsere Ausführungen über die Eulersche Mechanik beendet; wir haben gezeigt, daß die Betrachtungen der Differentialrechnung und ebenso die Untersuchung über die kleinsten Teile der Materie auch für den dritten Band der Mechanik keinen wesentlichen Einfluss auf die Gestaltung des materiellen Punktes gehabt haben; und zweitens sahen wir, daß die konkret-physikalische Auffassung auch hier die vorherrschende war. Der materielle Punkt dient nur dazu, die Bewegungsgesetze zu erforschen; er ist zwar ein bestimmtes physikalisches Gebilde, steht sonst aber in keinem Zusammenhange mit anderen, etwa im Körper vorkommenden Elementen. Das ist ein Gegensatz zu Newton und seinen Schülern; bei ihnen war der materielle Punkt teils gleich den Atomen, teils aus ihnen hervorgegangen. So scheint Eulers Auffassung auf den ersten Blick einen Rückschritt zu bedeuten, da der Zusammenhang mit der wirklichen Gestaltung der Körper verloren geht. Wenn man aber bedenkt, wie geteilt die Meinungen über die Konstitution der Materie sein können, und welche Schwierigkeiten bei einer Identifikation von Atom und materiellem Punkt entstehen können, so wird man der Eulerschen Auffassung zuneigen. Euler hat, von Fontaine abgesehen, zuerst den materiellen Punkt als einen nur durch die analytische Mechanik bedingten Begriff erfaßt, mit dem man in der Erforschung der Bewegungsgesetze zu richtigen Resultaten kommt. Dabei hat er, wieder nächst Fontaine, die konsequenteste Auffassung des in Frage stehenden Begriffes von allen bisher besprochenen

Autoren gehabt. Eulers Anschauung läßt sich kurz dahin präzisieren: der materielle Punkt ist ein von allen physikalischen und philosophischen Spekulationen losgelöster Hilfsbegriff der analytischen Mechanik; er ist aufzufassen als ein körperliches Element von so kleinen Dimensionen, daß er in der Rechnung als mathematischer Begriff zu verwenden ist. Die mit diesem Begriff auf geometrischem oder analytischem Wege gewonnenen Gesetze bilden die Grundlage der gesamten Mechanik. Das ist in wenigen Zeilen der Kern all der Erörterungen, die wir im vorhergehenden gegeben haben.

Mit dieser Auffassung ist eine neue Entwickelung in die Bahnen geleitet, die wir nun bei den beiden nächsten Autoren, d'Alembert und Lagrange, weiter zu verfolgen haben.

IV. Die Zeit nach Euler.

D'Alembert. Die von Euler zuerst im weitesten Umfang angewandte analytische Methode stellte der Folgezeit die Aufgabe, die Ansätze, die man gemacht hatte, zu vervollkommnen und zu verbessern. Daher sehen die folgenden Autoren die Mechanik in erster Linie als eine Disziplin der sich immer mehr entwickelnden Analysis an. Hand in Hand mit dieser Auffassung geht naturgemäß eine Vernachlässigung der spezifisch mechanischen Probleme und speziell eine Vernachlässigung der kritischen Betrachtungen, die sich auf die Grundannahmen beziehen. Die Prinzipien der Mechanik werden als etwas Gegebenes und Selbstverständliches hingenommen, an deren Richtigkeit man nicht zweifeln kann. Infolgedessen können wir uns bei d'Alembert kurz fassen.

1. Die Grundlage seiner 1743 erschienen Dynamik[1]) sind Betrachtungen über den Punkt. Für den materiellen Punkt tritt durchweg der Ausdruck „corps" auf, der überhaupt von den französischen Autoren mit Vorliebe gebraucht wird. Wir werden im allgemeinen nicht fehl gehen, wenn wir uns einer Anmerkung anschließen, die Korn in seiner Übersetzung gibt: „d'Alembert denkt bei seinen Körpern stets an das, was wir einen materiellen Punkt nennen",[2]) doch bedarf dies „stets" einer kleinen Einschränkung, denn d'Alembert gebraucht das Wort „corps" auch wirklich im Sinne eines räumlich ausgedehnten Körpers, allerdings gibt er dann meistens ein Beiwort und spricht von einem „corps pesant" oder „corps inflexible", oder sagt direkt „corps d'une masse finie".[3])

1) D'Alembert, *Traité de dynamique* (Paris 1743).

2) Oswalds Klassiker der exacten Wissenschaften, No. **106**, p. 187, No. 7. Wir zitieren im folgenden die deutschen Stellen nach dieser Übersetzung.

3) Z. B. p. 43, 91 u. a.

Der Unterschied zwischen mathematischer und physikalischer Fassung tritt bei D'ALEMBERT weniger hervor. Doch rührt dies nicht her von einer logischen Verbindung beider Teile, sondern von einem Unerwähntlassen der Schwierigkeiten und der möglichen Auffassungen überhaupt. Die Stellen, an denen D'ALEMBERT über den Begriff des materiellen Punktes spricht, sind äußerst selten. Auf Seite 166 lesen wir einmal, daß man sich den „Körper“ nicht als mathematischen Punkt sondern als Gebilde von bestimmter, wenn auch unendlich kleiner Ausdehnung vorzustellen habe;[1]) der materielle Punkt ist also ein physischer Punkt. Dagegen steht an einer anderen Stelle eine Auffassung, die wir zum Teil zuerst bei EULER fanden, daß nämlich die mechanischen Aufgaben „Probleme sind, welche mindestens in demselben Maße der Geometrie angehören wie der Mechanik, und in denen die Schwierigkeit eine rein rechnerische ist, vorausgesetzt, daß der bewegte Körper als ein Punkt betrachtet wird“.[2]) Hier also ist der materielle Punkt wieder vollkommen ein mathematischer Begriff. Eine Vereinigung oder auch nur eine Besprechung beider Auffassungen findet, wie gesagt, nicht statt.

Erwähnen wir hier, um die formale Seite zu erledigen, die Ausdrücke, die neben „corps“ mit „materieller Punkt“ übersetzt werden dürfen, so sind es „corpuscule“, „corps d'une étendue infiniment petite“, „partie“, „particule“, „élément“, „point“; man sieht, es ist wieder eine ziemliche Anzahl vorhanden, die man der größeren Deutlichkeit wegen gerne beschränkt sähe.

2. Die Überleitung vom Punkt zum Körper geschieht in einer mehr mathematischen Weise, wie wir sie zuerst bei FONTAINE gefunden hatten; der materielle Punkt erscheint nicht sowohl als Element des Körpers als vielmehr der Körper als Aggregat von Punkten. D'ALEMBERT denkt sich erst zwei, drei oder mehrere Punkte miteinander verbunden, sei es durch Fäden oder unbiegsame Stäbe;[3]) d. h. die Punkte können entweder ihren Abstand zwar verkleinern aber nicht vergrößern, resp. die Punkte müssen in konstanter Entfernung bleiben. Lassen wir im letzten Falle die Anzahl der Punkte über alle Grenzen wachsen, so ist der starre Körper fertig. Klar ausgesprochen ist dieser letzte Satz bei D'ALEMBERT allerdings nicht, doch liest man ihn zwischen den Zeilen. Immer aber wird, wenn irgend möglich, auf den Punkt zurückgegangen. So wird z. B. der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft[4]) zuerst bewiesen für frei bewegliche Punkte,

1) p. 253: „imaginons d'abord deux corps A, B d'une étendue infiniment petite“.

2) p. 26: „... sont des problèmes qui appartiennent pour le moins autant à la géométrie qu'à la mécanique et dans laquelle la difficulté n'est que de calcul, pourvu que le mobile soit regardé comme un point“.

3) Z. B. p. 96: „des corps qui se tirent par des fils ou par des verges“.

4) p. 259 ff.

dann für Punkte, die durch Fäden oder Stäbe miteinander verbunden sind, schließlich für Punkte, die durch Federn vereinigt werden, d. h. für elastische Körper. Die allgemeine Voraussetzung ist hierbei immer, daß man sich die Verbindungen massenlos zu denken habe.

Ebenso wie die festen Körper denkt sich d'Alembert die Flüssigkeiten in kleinste Teile zerlegt und, analog den früheren Autoren, betrachtet auch er materielle Punkte und, wie wir sie genannt haben, materielle Flächen: „wir wollen hierzu die Flüssigkeit in gleiche und unendlich-kleine Scheibchen zerteilt denken". [1]) Prinzipiell Neues kommt jedoch hier nicht hinzu.

Erwähnen können wir vielleicht noch, daß der materielle Punkt, sobald er als Flüssigkeitspartikel auftritt, ein mehr physikalisches Aussehen gewinnt. Überhaupt ist die noch unentwickelte Theorie der Flüssigkeiten die Hauptursache der physikalischen Gestaltung des materiellen Punktes. Anders wird es schon in der Mechanik fester Körper; die Körper treten uns in der Darstellung immer mehr als mathematische Gebilde denn als konkret-physikalische Gegenstände entgegen. Ihre Eigenschaften werden ausgedrückt durch bestimmte Festsetzungen, die zwischen den materiellen Punkten existieren, und daraus sich ergebend durch Bedingungsgleichungen, denen sie bei ihrer Bewegung gehorchen müssen. Der materielle Punkt wird dabei immer mehr zum mathematischen Hilfsbegriff, der das physikalische Gewand, das Euler ihm noch gegeben hatte, abzustreifen beginnt.

Lagrange. Lagranges Auffassung vom Begriff des materiellen Punktes bedeutet den Abschluß der Entwickelung, deren Anfang wir bei Euler gefunden hatten. Euler, d'Alembert und Lagrange fassen den materiellen Punkt als Hilfsbegriff der Mechanik, ohne seinen Zusammenhang mit anderen Gebieten, sei es Physik oder Philosophie, weiter zu berücksichtigen. Herrschte bei Euler weitaus die physikalische Gestaltung vor, so war bei d'Alembert ein Schwanken zwischen mathematischer und physikalischer Auffassung zu verzeichnen; Lagrange schließlich vollendet die Entwickelung und faßt den materiellen Punkt rein als mathematischen Hilfsbegriff. Dies rührt in erster Linie von der immer stärkeren Verwendung der Analysis her. Noch mehr als bei seinem Vorgänger d'Alembert gilt bei Lagrange der Satz, daß die Mechanik eine Domäne der Analysis ist. Die Schwierigkeiten sind nicht sowohl mechanischer als mathematischer Natur; es gilt vor allem, einfache und zusammenfassende Formeln zu finden und aus ihnen elegante Lösungen für die Spezialfälle

1) p. 271: „nous imaginerons le fluide partagé en tranches égales et infiniment petites". Vgl. auch d'Alembert, *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides* (Paris 1744), z. B. p. 12, 19 etc.

abzuleiten. In der Vorrede zu seiner Mechanik[1]) spricht LAGRANGE es deutlich aus, daß er sogar geometrische Beweise und daher auch alle Zeichnungen vermeiden und sich ausschließlich auf „opérations algébriques“,[2]) d. h. auf analytische Entwickelungen beschränken wolle.

1. Gehen wir nun zur eigentlichen Besprechung seiner Mechanik, so scheint ein flüchtiger Überblick gerade das Gegenteil von dem eben Vorgebrachten zu zeigen. Denn sieht man sich die Ausdrücke an, die mit „materieller Punkt“ zu übersetzen sind, so findet man: „point“, „point de la masse“, „particule du corps“, „partie matérielle“, „particule“, „corps“, „élément“, „molécule“, „partie“, „corpuscule“. Man sieht, die ganze Reihe der verschiedenen Nuancierungen ist durchlaufen: vom rein abstrakten „point“ bis zum ganz konkret klingenden „molécule“. Diese Vielheit des Ausdruckes scheint auf ein Schwanken in der Auffassung hinzuweisen, von einer rein mathematischen bis zu einer extrem physikalischen. Dem ist jedoch nicht so. Alle die genannten Ausdrücke bedeuten sachlich dasselbe; der Begriff des materiellen Punktes ändert sich nicht, wie sehr auch der Ausdruck dafür wechselt. Diese Konstanz der Auffassung zeigt sich nicht nur in der Mechanik, sondern auch in den 1773, 1781 und 1783 in den Mémoiren der Pariser Akademie erschienenen Arbeiten über Mechanik, deren besondere Besprechung sich damit erledigt. Allerdings rührt die einheitliche Fassung nicht her von einer bestimmten Definition und einem strikten Festhalten an derselben, sondern, ähnlich wie bei D'ALEMBERT, von dem Fehlen jeder Definition und besonders von dem Fehlen aller Erörterungen über den materiellen Punkt selbst. Nirgends finden sich Auseinandersetzungen, ob man sich den materiellen Punkt mathematisch oder physikalisch vorzustellen habe; er tritt uns als ein nicht weiter definierter Begriff entgegen, dem im Körper ein beliebig geformtes Massenquantum entspricht. Die festen Körper sind Anhäufungen solcher Punkte,[3]) zwischen denen bestimmte Bedingungsgleichungen statthaben. In der Hydrostatik und Hydrodynamik gilt das Gleiche. LAGRANGE spricht zuerst die schon bei NEWTON konstatierte Anschauung klar aus, daß die Mechanik der Flüssigkeiten keine besondere Theorie erfordert, sondern sich der Mechanik der festen Körper nebenordnet.[4]) Daß die früher verwandten Hilfsmittel, wie Zerlegung in Scheiben, Konzentration in dem Schwerpunkt usw. sich auch bei LAGRANGE finden, ist selbstverständlich.

---

1) LAGRANGE, *Mécanique analytique* (Paris 1788).

2) Siehe Avertissement I

3) Z. B. p. 80, 286 etc.

4) p. 174.

Damit ist alles gesagt, was über die Verwendung des materiellen Punktes zu sagen ist. Zu erwähnen ist noch eine Stelle, die wichtig ist, weil sich hier, der dann allgemein gewordene Ausdruck „materieller Punkt" zum erstenmale explizite findet: „Ein Körper von beliebigem Volumen und beliebiger Gestalt ist also nur eine Anhäufung von materiellen Teilen oder *materiellen Punkten*".[1])

2. Wir haben uns jetzt zu fragen, wie der Begriff des materiellen Punktes bei LAGRANGE definiert werden kann. Die Antwort auf diese Frage wird sich schwer aus der analytischen Mechanik selbst ergeben, denn nirgends findet sich, wie schon erwähnt, eine klare Definition noch eine Auseinandersetzung über den Begriff des materiellen Punktes. Wir kommen aber zu einem Resultate, wenn wir uns vergegenwärtigen, welche Ansicht LAGRANGE allgemein von der Verwendung der Infinitesimalrechnung hatte; denn wir werden sehen, daß sich aus dieser Auffassung der Begriff des materiellen Punktes ergibt.

Will man Differentialrechnung anwenden,[2]) so muß man nach LAGRANGE die geometrischen und mechanischen Gebilde in unendlichkleine Elemente derselben Gattung zerlegen wie die ganzen Gebilde, also Linien in Linienelemente, Oberflächen in Oberflächenelemente, Körper in Körperelemente, Massen in Massenelemente. Es ist falsch, aus Anhäufung von Punkten ausgedehnte Gebilde erzeugen zu wollen. Die Punkte entsprechen den Differentialen von EULER, die Massenelemente aber den von Null verschiedenen Differentialen.

Der „point matériel" ist bei LAGRANGE also nicht in dem Sinne von FONTAINE aufzufassen als ein Gebilde, „dont le lieu et le volume est un point", sondern als ein kleines körperliches Element. Deshalb tritt zum Ausdruck point auch meistens ein anderer, erklärender hinzu, so z. B.: „wir betrachten die Körper endlicher Masse als Anhäufungen von unendlich vielen Punkten oder kleinen Körperchen".[3]) Am deutlichsten tritt der Zusammenhang zwischen der Auffassung vom Begriff des materiellen Punktes und der Verwendung der Differentialrechnung aus folgender Stelle hervor: „ich bemerke hierzu, daß man die gegebene Masse nicht betrachten muß als eine Anhäufung von unendlich vielen zusammenhängenden *Punkten*, sondern vielmehr, *gemäß dem Sinn der Infinitesimal-*

---

1) p. 80: „or un corps d'un volume et d'une figure quelconque, n'étant que l'assemblage d'une infinité de parties ou *points matériels*". Diese Bemerkung zeigt, daß sich die Auffasssung von A. Voss, *Encycl. d. math. Wiss.* IV: 1 p. 24, Anm. 39: „LAGRANGE kennt die Bezeichnung „materieller Punkt" noch nicht, ..." nicht halten läßt.

2) Vgl. hierzu LAGRANGE, *Théorie des fonctions* (*Oeuvres* t. 9), Introduction.

3) p. 80: „considérer les corps de masse finie comme des assemblages d'une infinité de points ou corpuscules."

4*

rechnung, sie ansehen muß als eine Zusammensetzung von *unendlichkleinen Elementen, die von derselben Größenordnung sind wie die ganze Masse*".[1]) Der materielle Punkt ist also nach LAGRANGE ein Körper-, ein Massenelement.

Mit dieser Auffassung ist jedoch keinerlei Aussage über eine etwaige Zusammensetzung der Körper gemacht; die physikalische Konstitution der Materie kommt gar nicht in Betracht. Denn sieht man sich einmal die Ausdrücke an, die verwandt sind, so bemerkt man sofort, daß z. B. „molécule", „corpuscule", „partie matérielle" stets dasselbe bedeuten, daß also „molécule" nichts mit dem zu tun hat, was man gewöhnlich unter Molekül versteht. Ferner meint LAGRANGE, man dürfe sich einen Körper, je nach der zu behandelnden Aufgabe, in ganz beliebige Elemente teilen; so denkt er sich z. B. einmal eine Flüssigkeit in lauter rechtwinkelige Parallelepipeda zerlegt, deren Seiten den Axen X, Y, Z parallel sind.[2]) Dies Vorgehen ist offenbar nicht erlaubt, wenn die „points matériels" in irgend einen Zusammenhange ständen mit etwa im Körper wirklich existierenden kleinsten Elementen. Daraus geht also klar hervor, daß der materielle Punkt bei LAGRANGE nichts weiter ist als ein Begriff, der durch die Methode der Differentialrechnung erfordert wird. Der materielle Punkt ist zu verstehen als ein Massenelement, dessen Größe, Gestalt und Verwendung zu bestimmen aber einzig und allein in dem Ermessen des Analytikers liegt.

So ist hier die bei EULER einsetzende Entwickelung vollendet, die den materiellen Punkt als mathematischen Hilfsbegriff faßt.

Laplace. LAPLACE, der letzte große Mathematiker des 18. Jahrhunderts, steht im scharfen Gegensatz zu seinem unmittelbaren Vorgänger LAGRANGE. Die Fassung des Begriffes des materiellen Punktes ist bei ihm hervorgewachsen aus der konsequenten Anschauung einer atomistischen Konstitution der Materie; der materielle Punkt ist, mit einem Wort gesagt, gleichzusetzen den wirklich im Körper existierenden Teilchen, mag man sie nun Atom, Molekül oder sonstwie anders nennen. Zugleich aber ist stillschweigend die Voraussetzung gemacht, den so definierten Punkt in

---

1) p. 81: „je remarque ensuite, qu'au lieu de considérer la masse donnée comme un assemblage d'une infinité de *points* contigus, il faudra, *suivant l'esprit du calcul infinitésimal*, la considérer plutôt comme composée *d'élémens infiniment petits, qui soient du même ordre de dimension que la masse entière*".

2) p. 188: „qu'on suppose la figure de cette particule une parallélipède rectangulaire, dont les côtés sont parallèles aux axes des x, y, z; cette supposition est très permise, puisqu'on peut imaginer le fluide partagé en élémens infiniment petits d'une figure quelconque".

der Rechnung als mathematischen Begriff zu verwenden. Eine Erklärung hierfür fehlt; es fehlen auch alle die beiläufigen Bemerkungen, daß man sich den materiellen Punkt bald als mathematischen, bald als physischen zu denken habe. Die beiden Gegensätze stehen sich schroff gegenüber.

Gleich auf der ersten Seite seiner „himmlischen Mechanik“[1]) tritt uns der zuerst von LAGRANGE an einer Stelle gebrauchte terminus „point matériel“ ohne jede Erklärung entgegen. Die Körper bestehen aus einer unendlichen Anzahl von materiellen Punkten; ihre Verschiedenheit erklärt sich aus einer Verschiedenheit der Lage, eventuell einer wesentlichen Verschiedenheit der Punkte.[2]) Doch sind derartige Erörterungen für die Mechanik belanglos, für sie genügt es, wenn die beiden Annahmen gelten, daß zwei materielle Punkte, die mit gleicher Geschwindigkeit aufeinander stoßen, im Gleichgewicht sind, und zweitens, daß für sie das NEWTONsche Attraktionsgesetz gilt.[3])

Sind so alle materiellen Punkte als gleich angenommen, ist es erklärlich, wenn die Masse eines Körpers einfach der Anzahl der materiellen Punkte gleichgesetzt wird,[4]) und analog die Dichte gleich der Zahl der Punkte in einem bestimmten Volumen.[5])

Aber seltsamerweise verschwindet der Ausdruck „materieller Punkt“, der im Anfang unumschränkt herrscht, ohne jemals durch andere Bezeichnungen ersetzt zu werden, nach den ersten 40 Seiten vollkommen. Auf den noch folgenden etwa 2000 Seiten tritt an seine Stelle das Wort „molécule“. Doch ist glücklicherweise dieser Wechsel nur ein Wechsel im Ausdruck, nicht in der Sache; dadurch daß das „molécule“ in alle Rechte des „point matériel“ eintritt, bleibt alles beim alten. LAPLACE hat diesen Wechsel wohl vorgenommen, um auf das deutlichste zu zeigen, daß der materielle Punkt eben ein ganz bestimmtes, konkretes Element ist; andererseits aber schließen sich an das „molécule“ auch die physikalischen Erörterungen, die er gerne gibt, zwangloser an.

Bei den flüssigen Körpern tritt zu den beiden oben erwähnten Annahmen noch die hinzu, daß die Moleküle frei beweglich untereinander sind.[6]) Aber auch die gasförmigen Körper muß man sich analog vorstellen, auch sie bestehen aus einer unendlichen Anzahl von Molekülen. Ganz interessant ist hier, um ein Beispiel zu geben, die Anschauung,

---

1) LAPLACE, *Mécanique céleste* (Paris 1799).

2) I, p. 37.

3) I, p. 37.

4) I, p. 36: „la masse d'un corps est le nombre de ses points materiels“.

5) I, p. 37: „la densité des corps dépend du nombre des points matériels qu'ils renferment sous un volume donné“.

6) Bd. II, p. 216, 222 u. a.

die sich LAPLACE macht, wenn verschiedene Gase zusammentreffen. Denken wir uns etwa drei Gase, die sich im Verhältnis 1 : 2 : 3 mischen. Um die Bewegung dieses Konglomerates zu erforschen, betrachtet man ein Molekül; dann sind in diesem Molekül wieder alle drei Gase vereinigt, und zwar im Verhältnis 1 : 2 : 3.[1]) LAPLACE denkt sich also — wenigstens für die mechanische Behandlung — die Gase, wenn wir uns einmal so ausdrücken dürfen, nicht als Gemenge, sondern als Verbindung. Eine weitere Erklärung wird nicht gegeben, wohl aber erwartet LAPLACE, daß einst die Chemie auf diese feinsten und subtilsten Fragen Antwort geben werde.[2])

Das ist die Ansicht von LAPLACE. Der Begriff des materiellen Punktes wird durch eine ganz bestimmte Formulierung eingeführt und erweist seine Berechtigung dadurch, daß man mit ihm zum Ziele kommt. Irgend welche Diskussionen über ihn fehlen vollkommen. Man kann über diese Art und Weise der Darstellung zweierlei Meinung sein: man bedauert, daß eine solche Grundannahme ohne jede Diskussion oder auch nur Erklärung gemacht wird, zumal wenn man von ihrer inneren Berechtigung nicht überzeugt ist; oder man erklärt, daß es das Vernünftigste ist, in den exakten Wissenschaften solche Prinzipien, über die man zu einer objektiven Entscheidung doch nicht gelangen kann, einfach als Axiome einzuführen. Wir stehen auf dem ersteren Standpunkt und müssen daher LAPLACEs Auffassung als einen gewissen Rückschritt gegenüber der Entwickelung EULER, D'ALEMBERT, LAGRANGE bezeichnen. Andrerseits darf man die Klarheit und Konsequenz nicht verkennen, die in LAPLACEs Formulierung und Verwendung liegt. In ihm reichen sich Anfang und Ende des 18. Jahrhunderts die Hände; denn in seiner Auffassung der atomistischen Grundlage geht er vollkommen auf den Begründer der analytischen Mechanik, auf NEWTON zurück. Aber alles, was bei NEWTON unbestimmt und schwankend und erst am Schlusse seines Werkes, gleichsam als Rechtfertigung auftritt, steht bei LAPLACE am Anfang klar und scharf ausgesprochen und konsequent durchgeführt.

Schluß.

I. Zusammenfassende Darstellung der Ansichten des 18. Jahrhunderts. Das 18. Jahrhundert ist, was den Begriff des materiellen Punktes angeht,

---

1) Bd. V, p. 94: „on peut donc concevoir le mélange comme un gaz simple dont chaque molécule serait un groupe infiniment petit des molécules des divers gaz, mêlées dans la même proportion que dans le mélange total“.

2) Bd. IV, p. 68.

zu keinerlei Abschluß und zu keiner allgemein angenommenen Formulierung gekommen. Ansichten über den Zusammenhang des materiellen Punktes mit der physikalischen Konstitution der Körper finden sich im Anfang, verschwinden dann, und sind am Ende wieder da; mathematische Abstraktionen treten auf einen Augenblick mit aller Schärfe hervor und gehen wieder, scheinbar spurlos, unter. So ist eine sich durch die Mechanik des ganzen Jahrhunderts hindurchziehende einheitliche Entwickelung nicht zu konstatieren. Das liegt zum Teil darin, daß der betrachtete Zeitraum ausgefüllt war durch eine rastlos schaffende Produktivität, die für kritische Arbeiten im einzelnen keine Zeit hatte; zum anderen Teil aber im Wesen des Begriffes selbst.

Der Begriff des materiellen Punktes verdankt, wie wir mehrfach hervorhoben, seine Formulierung nicht nur ausschließlich mechanischen Betrachtungen, sondern auch scheinbar weiter entfernt liegenden mathematischen, physikalischen und philosophischen Erörterungen. Bevor wir daher mit unserer Besprechung an die eigentliche Auffassung des 18. Jahrhunderts herangehen, haben wir uns kurz die Einflüsse zu vergegenwärtigen, die zu Beginn und in den ersten Zeiten des 18. Jahrhunderts auf die Gestaltung des Begriffes einwirken konnten.

1. Philosophische Überlegungen kommen hauptsächlich nach zwei Richtungen hin für den materiellen Punkt in Betracht: in der Frage nach dem Wesen der Materie und im Unendlichkeitsbegriff. Schon früh hatte man den Versuch gemacht, die Mannigfaltigkeit der Körperwelt auf wenige Grundbedingungen zu reduzieren; man dachte sich den ganzen Kosmos aufgebaut aus kleinen und kleinsten Teilchen. Durch derartige Betrachtungen war der Versuch gemacht, Erscheinungen des Endlichen, Augenfälligen aus dem Verhalten und den Eigenschaften gewisser kleinster, unsichtbarer Grundelemente zu erklären. Nahm man diese Erklärung an, so konnte man den Versuch machen, die Anschauung vom materiellen Punkt mit ihr zu verknüpfen. Dann aber traten sofort zwei Fragen auf, erstens: soll man den materiellen Punkt mit den genannten kleinsten Teilchen identifizieren oder nicht?, und zweitens: wie viel solcher materieller Punkte hat man sich in einem endlichen Körper zu denken, unendlich oder endlich viele? Damit sind aus der historischen Entwickelung heraus die beiden Fragen angedeutet, die wir einerseits bei den Bernoullis und Clairaut, und andererseits bei Euler ausführlich besprochen haben.

Im engen Zusammenhange mit derartigen Erörterungen über die Zusammensetzung der Körper treten gewisse physikalische Betrachtungen auf. Wir denken hier speziell an Optik und Chemie, wenn wir diese letztere zur Physik im weitesten Sinne rechnen. In beiden Gebieten ging man auf kleinste Teilchen zurück, um mit ihnen die Erscheinungen zu erklären; da lag es auch für die Mechanik nahe, solche Teilchen zur Erklärung der Bewegungsgesetze zu benutzen.

Neben diese Überlegungen treten Einflüsse mathematischer Art. Hier sind es vor allem die Betrachtungen über den Schwerpunkt. Der Schwerpunkt ist ein mathematischer Punkt, in dem man sich bestimmte Eigenschaften des Körpers konzentriert denkt, Eigenschaften, deren Einfluß man durch geeignete Maßregeln in diesem Punkte vernichten kann. Die ganze Anschauung und Bestimmung des Schwerpunktes abstrahiert von den unmittelbar wahrnehmbaren Tatsachen; durch sie war einer mathematischen Fiktion vorgearbeitet, die mit der Anschauung vor der Konstitution der Körper nichts zu tun hatte.

Ähnlich stand es, wenn man in der Astronomie in gewissen Fällen die Planeten als Punkte ansah. Auch hier fand ein Zusammenziehen statt; der ganze Planet wurde in einem Punkte konzentriert. Aber der Grund des Konzentrierens war hier ein anderer wie beim Schwerpunkt. Man darf sich die Schwerewirkung eines Planeten als von seinem Mittelpunkt ausgehend nur vorstellen, weil der Planet näherungsweis als Kugel angesehen werden kann, und weil seine Dimensionen gegenüber der Entfernung von einem anderen Planeten verschwinden. Dies Letztere barg einen neuen wichtigen Gedanken für den Begriff des materiellen Punktes in sich: die Möglichkeit gewisser Vernachlässigungen. Wenn man sagte, die Planeten bewegen sich in Ellipsen um die Sonne, so dachte man an ganz bekannte, geometrisch genau bestimmte Kurven, ohne an die, nach irdischen Verhältnissen gemessen, ungeheure Breite des Weges zu denken, die der Planet wirklich im Weltenraum beschreibt. An den Dimensionen der Ellipse gemessen, sind die Abweichungen, die durch die Ausdehnung des Planeten hervorgerufen werden, verschwindend klein. So fand der Begriff des materiellen Punktes aus diesen Betrachtungen zweierlei vor: erstens die Möglichkeit der Konzentration, zweitens die Berechtigung, Nebenumstände zu vernachlässigen.

Am eindringlichsten jedoch mußte eine mathematische Gestaltung durch die in der analytischen Mechanik gewollte Methode gefördert werden. Sobald man mit mathematischen Operationen, seien es geometrische oder analytische, an die Bewegungserscheinungen heranging, mußte man mathematische Begriffe, mußte man mathematische Punkte vorziehen.

2. In dieser Weise war dem Begriff des materiellen Punktes von verschiedenen Seiten vorgearbeitet, fördernd und hemmend. Fördernd dadurch, daß sich Analogien auf anderen Gebieten fanden, die bereits länger bekannt waren; hemmend, daß diese Anregungen von verschiedenen Disziplinen ausgehend einer allgemein angenommenen Definition im Wege

standen. Alle Einflüsse vereinigten sich und gingen dann in zwei Richtungen auseinander, in die physikalische und die mathematische Auffassung.

Die physikalische Formulierung, die den materiellen Punkt als konkretes, wirklich im Körper existierendes Element betrachtet, schließt sich — die Richtigkeit der Atomtheorie zugegeben — eng an unsere Grundauffassung der Naturerscheinungen an. Im 18. Jahrhundert hat sie entschieden das Übergewicht, doch tritt sie bei den verschiedenen Autoren nicht in einheitlicher Form auf, sondern variiert vornehmlich in zwei Richtungen. Die extreme Seite vertreten LAPLACE und CLAIRAUT, die den materiellen Punkt einfach mit dem Atom oder Molekül des Körpers identifizieren; eine vorsichtigere Auffassung findet sich bei EULER und D'ALEMBERT, die den materiellen Punkt in der Hauptsache zwar auch als physikalisches Gebilde fassen, aber meinen, daß man nicht ohne weiteres sagen könne, ob er mit den Atomen gleichzusetzen sei; bei ihnen tritt immer mehr das Streben in den Vordergrund, den materiellen Punkt als Hilfsbegriff der Mechanik zu verwenden. Bei dieser letzten Auffassung erhebt sich die Frage, mit welchem Rechte man von derartigen Teilchen, die in Wirklichkeit gar nicht existieren, ausgehen kann, um aus ihrer Bewegung auf die Bewegung des Ganzen zu schließen. Die logische Begründung der letzten Auffassung ist entschieden schwieriger als die der völligen Identifikation von Atom und materiellem Punkt.

Aber dieser Nachteil verschwindet gegenüber anderen, die beiden Seiten der physikalischen Formulierung gemeinsam sind. Nirgends war die physikalische Auffassung konsequent durchgeführt, immer wieder fanden sich, bald stärker, bald weniger klar ausgedrückt, Bemerkungen, die besagen, daß man in gewissen Fällen den materiellen Punkt als mathematischen Punkt, d. h. ohne alle Ausdehnung auffassen müsse. Und das ist ganz erklärlich, denn es ist eo ipso unmöglich, konsequent an einer physikalischen Definition festzuhalten. Sobald die Rede auf Schwerpunkte, Massenmittelpunkte, Rotationszentren etc. kommt, schwindet jede physikalische Anschaulichkeit. Mag man noch so kleine physikalische Gebilde nehmen, stets haben sie einen Schwerpunkt; diesen Punkt mit einem bestimmten Molekül oder einem konkreten, im Körper vorhandenen kleinsten Teilchen zu identifizieren, ist nicht angängig. Die Schwerpunkte sind eben vollkommen mathematische Punkte.

Eine letzte und größte Schwierigkeit ergibt sich aus der Größe des materiellen Punktes. Soll er als physikalisches Gebilde aufgefaßt werden, so hat er eine ganze bestimmte Ausdehnung; diese kann kleiner und kleiner gedacht werden, sie kann sehr klein werden, aber nie unendlich klein im mathematischen Sinne. Ganz abgesehen davon, daß man bei der Identifikation des materiellen Punktes mit den Atomen eine bestimmte

Gestalt oder sogar Oberfläche unberücksichtigt lassen muß, muß man bei jeder Auffassung die Ausdehnung „vernachlässigen“. Diese Vernachlässigung mag in vielen Fällen erlaubt sein, und man kann, um sie noch glaubwürdiger zu machen, von vornherein festsetzen: der materielle Punkt soll so klein genommen werden, daß seine Ausdehnung neben allen anderen in der Rechnung vorkommenden Größen vollkommen verschwindet. Diese Forderung ist jedoch, wie ein kurzes Nachdenken zeigt, nicht durchzuführen. Sobald man mit Hilfe der Differentialrechnung Bewegung im Unendlichkleinen verfolgt, ist es nicht mehr möglich, die Dimensionen eines solchen Punktes — wenn überhaupt die Ausdehnung einen Einfluß auf die Bewegung hat — zu „vernachlässigen“. Ein physikalisches Gebilde, mag es noch so klein sein, hat stets eine ganz bestimmte Größe, die neben dem mathematisch Unendlichkleinen immer in Betracht zu ziehen ist. Wenn man den materiellen Punkt als physischen Punkt faßt, kann man von vornherein gar nicht auf richtige Resultate rechnen. EULER selbst, der eine physikalische Auffassung vertritt, sagt in der Einleitung zu seiner Differentialrechnung, wo er das Differential absolut der Null gleich setzt, daß es nicht angängig sei, das Differential nur als sehr klein zu nehmen; das werde in vielen Fällen wohl ausreichen, aber es ließe sich auch sehr gut denken, daß in einer Rechnung der durch eine genügend große Summation aller kleinen Vernachlässigungen begangene Fehler sehr wohl ein endlicher werden könne. Nun, das gilt auch in unserem Falle. Die Meinung, man sei berechtigt, die Ausdehnung des materiellen Punktes vernachlässigen zu dürfen, beruht somit auf einer ungenauen Auffassung des Unendlichkleinen, speziell auf einer Verkennung des Unterschiedes, der zwischen dem, was wir unendlich klein, d. h. verschwindend klein im physikalischen Sinne nennen, und dem mathematisch Unendlichkleinen.

So drängt alles zu einer mathematischen Formulierung. Eine Übergangsstellung nimmt im 18. Jahrhundert NEWTON ein. Bei ihm ist die Auffassung des materiellen Punktes aus der atomistischen Vorstellung durch mathematische Überlegungen hervorgegangen. Zeitweilig, und das im großen Umfange, tritt der materielle Punkt jedoch rein als mathematischer Punkt auf, was NEWTON ausdrücklich betont. Auf eine solche Anschauung wurde NEWTON schon dadurch gebracht, daß er eine möglichst von allen physikalischen Erörterungen freie Darstellung der Bewegungsgesetze geben wollte.

Die Vertreter einer rein formalen Auffassung sind FONTAINE und LAGRANGE. FONTAINE ist bemerkenswert, weil er zuerst klar und präzis ausgesprochen hat, daß der materielle Punkt ein streng mathematischer Begriff ist. LAGRANGE gibt als Grund seiner Auffassung die gewollte Verwendung der Infinitesimalrechnung an. Hier kommt also schließlich das in Betracht, was wir über den Begriff des Unendlichkleinen gesagt haben: der materielle Punkt muß als mathematischer Punkt gefaßt werden, sobald man in exakter Weise mit mathematischen Überlegungen die Bewegung verfolgen will.

II. Allgemeine Betrachtungen. 1. Wenn wir diese letzten Betrachtungen etwas allgemeiner fassen und in ihren Konsequenzen verfolgen, so stellt sich der materielle Punkt als mathematischer Punkt dar, dem jeder beliebige Massenwert als Koeffizient zuerteilt werden kann; dieser Koeffizient gibt an, in welchem Maße der betrachtete Punkt bestimmten Gesetzen unterworfen ist. Dabei braucht man sich keinerlei Vorstellung darüber zu machen, wie man sich eine endliche Masse in einem Punkt konzentriert denken kann. Die Masse als Raumerfüllendes interessiert uns gar nicht, nur die Wechselwirkung der Massen untereinander. Daher kann man den materiellen Punkt ebensogut als Kraftzentrum wie als Massenpunkt auffassen. Denkt man sich weiter den Körper aus materiellen Punkten zusammengesetzt, so hat man mit dem Körper als physikalischem Gebilde nichts zu tun, sondern nur als mathematischem; er wird zu einem Raumvolumen, das mit einer bestimmten, sei es endlichen oder unendlichen, Anzahl von Punkten angefüllt ist. Diese Punkte gehorchen gewissen Bedingungsgleichungen, die die physikalischen Eigenschaften des Körpers in die Sprache der Mathematik übertragen.

Mit einer solchen Definition geht natürlich jede physikalische Anschaulichkeit verloren. Aber da wir sahen, daß diese stets auf Widersprüche stieß und konsequent nicht durchzuführen war, ist sie im Grunde eine äußerliche, die nur in bestimmten Fällen ausreicht. Die mathematische Formulierung genügt jedoch immer. Allerdings könnte man an eine Schwierigkeit denken: wenn jede physikalische Berechtigung für die Einführung des materiellen Punktes in der genannten Weise fehlt, so fragt es sich, ob man überhaupt mit ihm zum Ziele kommt. Diese Frage ist a priori nicht zu beantworten. Es ist keineswegs selbstverständlich, daß die analytische Mechanik auf diesem Wege zum Ziele kommt. Nur die Erfahrung, und diese allein kann zeigen, ob die auf solcher Grundlage aufgestellten Rechnungen mit dem Verlauf der Naturerscheinungen übereinstimmen. Und sie hat es getan, deshalb ist die Annahme berechtigt. Ihre Richtigkeit läßt sich von vornherein vermuten, weil hier nur eine allgemein gebräuchliche Methode verwandt ist, die zur Geltung kommt, wenn man mit der Mathematik an Naturerscheinungen herangeht: alle physikalischen Eigenschaften werden dargestellt durch bestimmte formale Gesetze zwischen bestimmten mathematischen Begriffen. Ein solcher mathematischer Begriff ist auch der materielle Punkt. Die Berechtigung, ihn zu verwenden, muß im System der analytischen Mechanik eventuell durch ein Axiom gefordert werden, das innerhalb der Beobachtungsgrenzen eben nur durch die Erfahrung verifiziert werden kann.

Wenn es so als allein richtig erscheint, den materiellen Punkt als mathematischen Begriff zu fassen, so könnte man doch zwei, anscheinend sehr gewichtige Einwürfe machen, erstens: Reicht der materielle Punkt als verschwindend kleines Element gefaßt nicht immer aus, wenn man sich mit einer angenäherten Darstellung der Tatsachen begnügt, d. h. wenn man die Mechanik als Gebiet der Approximationsmathematik betrachtet? Und zweitens: Woher erklären sich bei der schwankenden und vielfach inkorrekten Auffassungsweise des in Frage stehenden Begriffes die ungeheueren Erfolge, die die analytische Mechanik gerade im 18. Jahrhundert errungen hat?

Beide Fragen kommen im Grunde auf dasselbe hinaus, und ihre Beantwortung wird sich ohne Schwierigkeit ergeben, wenn man die mathematische Auffassung konsequent verfolgt und anwendet.

2. Wenn der materielle Punkt — nun noch einmal physikalisch aufgefaßt — zu den Grundbegriffen der analytischen Mechanik gezählt wird, so ist das richtig zu verstehen. Er gehört zu einer ganz anderen Art von Prinzipien wie etwa der Trägheitssatz oder der Satz der Gleichheit von actio und reactio. Der Trägheitssatz gibt bis zu einem gewissen Grade eine Erklärung der Bewegung, der materielle Punkt nicht. Der materielle Punkt ist, kurz gesagt, ein rein formaler Begriff, der mit dem Körper als solchem, als physikalischem Gebilde nichts zu tun hat, sondern erst durch uns in ihn hineingetragen wird. Was diesem formalen Begriff im Körper entspricht, ist fürs erste nebensächlich, er ist nur ein Symbol, ein Punkt, eine Zahl im mathematischen Sinn. Demnach ist klar, daß eine physikalische Fassung nicht nur nicht vorteilhaft, sondern, streng genommen, überhaupt nicht erlaubt ist. *Alle Definitionen, die im Sinne darauf hinauskommen, den materiellen Punkt als Materiequantum von unendlichkleinen Dimensionen zu definieren, bedeuten einen logischen Fehler.*

Nun fragt es sich, ob man diese scharfe mathematische Definition nicht fallen lassen kann oder fallen lassen muß, wenn man ins Gebiet der Approximationsmathematik kommt und sich mit einer angenäherten Berechnung der Bewegung begnügt. Aber Approximationsmathematik heißt nicht angenäherte Mathematik, sondern Mathematik der angenäherten Beziehungen; nicht die Begriffe als solche, mit denen man operiert, sondern nur die Beziehungen, die zwischen diesen Begriffen statthaben, werden angenähert darstellt. Dies wird für unseren Fall vielleicht am besten durch ein konkretes Beispiel klar. Wenn man im Laboratorium die Richtigkeit des Gravitationsgesetzes $\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ auf irgend eine Weise aus der

Anziehung zweier Kugeln nachprüfen will, so hat man den Zentralabstand dieser beiden Kugeln zu bestimmen. Diese Messung ist nicht absolut genau auszuführen, sondern wird mit einem gewissen Fehler behaftet sein, der mit in Rechnung zu ziehen ist. In den Nenner der angeführten Formel tritt also statt r etwa $r \pm \varrho$, wobei $r \pm \varrho$ heißt, daß die Entfernung zwischen den Werten $r + \varrho$ und $r - \varrho$ schwankt. Dies könnte man sich nun so vorstellen, daß man sich die Anziehungszentra beider Kugeln nicht als Punkte sondern als kleine Kugeln vom Radius $\frac{\varrho}{2}$ denkt und dann die Entfernung von irgend einem Punkte der einen Kugel zu irgend einem anderen Punkte der anderen Kugel mißt. Das ist aber nicht angängig; denn die Richtung von r muß zusammenfallen mit der Richtung der Attraktionswirkung, diese aber kann bei einer Kugel, mag sie noch so klein sein, nur als von ihrem Mittelpunkte ausgehend gedacht werden und nicht von einem anderen Punkte. Zwischen zwei Kugeln kann man immer unendlich viel Linien ziehen, und allein zwischen zwei Punkten nur eine. Man darf sich also den materiellen Punkt nicht als kleine Kugel denken, sondern muß ihn als einen Punkt betrachten, der die verschiedenen Lagen innerhalb der kleinen Kugel annehmen kann. Analog ist es in anderen Fällen.

Der materielle Punkt als physikalisches Gebilde hat seine Berechtigung und seinen, oft großen, Wert nur dann, wenn er dazu dient, abstrakte Überlegungen anschaulich zu machen; er ist ein sinnlich wahrnehmbares oder die sinnliche Vorstellung erleichterndes Symbol für einen in der Überlegung verwandten, bestimmt definierten Begriff. Wenn man geneigt ist, in diesem Sinne den materiellen Punkt als physikalisches Gebilde zu definieren, so ist dagegen wohl nichts einzuwenden.

In diesen letzten Bemerkungen liegt auch die Antwort auf unsere zweite Frage, die Erklärung der großen Erfolge des 18. Jahrhunderts. Denn im Grunde ist alles das, was wir im 18. Jahrhundert als berechtigt nicht anerkennen können, nichts weiter als ein Streben nach Anschaulichkeit und ein Anknüpfen an Bekanntes. Denn sobald der materielle Punkt in die Rechnung eintrat, wurde er zum mathematischen Punkt, zur bestimmten Zahl, nur daß der Widerspruch zwischen Definition und Verwendung nicht erkannt wurde. Daher ist die ungestörte Entwickelung sehr wohl erklärlich; denn das Bestreben, den Begriff des materiellen Punktes in möglichster Klarheit und Präzision herzustellen, entspringt in erster Linie nicht einem sachlichen, sondern einem ästhetischen oder formalen Bedürfnis. Für den Ausgang der Rechnung ist es in vielen Fällen vollkommen ohne Belang, ob man den materiellen Punkt als physikalisches oder mathematisches Gebilde betrachtet, der Effekt wird derselbe sein. Für den Wunsch aber nach einer möglichst formvollendeten und logisch einwandfreien Darstellung ist die Art der Vorstellung und die Entscheidung für die eine oder andere Auffassung von allerwesentlichster Bedeutung. Wenn man will, ist dies Interesse ein untergeordnetes, und die Geschichte lehrt ja auch, daß es sich erst herausbildete, als die sachliche Entwickelung zu einem gewissen Abschluß gekommen war. Wenn man aber andererseits bedenkt, daß gerade in der Natur das Zweckmäßigste oft auch das Formvollendetste ist, treffen beide Interessen, das sachliche und das formale, wieder zusammen.

3. Aus der strengen Auffassung des materiellen Punktes als mathematischen Begriffes folgt dann noch ein Letztes. Da die angewandte Methode den Begriff erfordert, bestimmt sie ihn auch, und wenn sich die Methode ändert, muß sich auch der Begriff in gewisser Weise ändern. Daher ist es nicht möglich, ihn aus dem Zusammenhang herauszureißen und nach allen Seiten hin festzulegen, sondern man kann, wie wir es eben versucht haben, nur bestimmte Grundlagen festlegen, die im großen und ganzen wohl immer gelten müssen. Aber je nach der Darstellung der analytischen Mechanik muß er andere Formen annehmen; er ist ein anderer, wenn man von der Erfahrung ausgeht, als wenn man mit rein hypothetischen Voraussetzungen beginnt; wenn man die Masse in den Vordergrund stellt, als wenn man die Kraft zum obersten Prinzip macht; usw.; immer wird er an einer anderen Stelle, im anderen Zusammenhange und auch in anderer Auffassung eingeführt werden. Je mehr sich daher die analytische Mechanik zu einem zusammenhängenden, logisch geschlossenen System entwickelt, desto schwieriger wird es, den Begriff des materiellen Punktes für sich kritisch zu betrachten.

Die Geschichte der Mathematik und der Universitätsunterricht.

Von G. Eneström in Stockholm.

Seit mehr als dreißig Jahren sind an Universitäten Vorlesungen über Geschichte der Mathematik gehalten worden,[1]) und während der letzten Jahre hat sich die Zahl der Hochschulen, an denen solche Vorlesungen regelmäßig gehalten werden, nicht unerheblich vermehrt;[2]) auch mathematisch-historische Seminarübungen gibt es jetzt, freilich bis auf weiteres eigentlich nur an der Technischen Hochschule in München.[3]) Fast ohne Ausnahme[4]) dürfte der mathematisch-historische Unterricht von einem Professor oder Privatdozenten der Mathematik, der auch andere mathematische Vorlesungen hält, erteilt werden. Je mehr aber die Geschichte der Mathematik zu einer besonderen Wissenschaft ausgebildet wird, um so schwieriger muß es werden, wirklich gute Vorlesungen über diesen Gegenstand zu halten ohne im eigentlichsten Sinne Fachmann zu sein; der Leiter des mathematisch-historischen Unterrichts muß dadurch veranlaßt werden, sich eingehend mit historischen Forschungen zu beschäftigen, und früher oder später wird es wohl notwendig werden, besondere Universitätslehrer für Geschichte der Mathematik zu haben.

Seit einigen Jahren gibt es aber Bemühungen, den mathematisch-historischen Universitätsunterricht in eine ganz andere Bahn zu lenken.

1) Über die ältesten Vorlesungen über Geschichte der Mathematik siehe G. Eneström, *Om matematikens historia såsom studieämne vid nordens högskolor;* Tidsskr. for Mathem. 4_4, 1880, S. 62–73.

2) Vgl. P. Mansion, *Programme du cours d'histoire des mathématiques de l'université de Gand;* Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, S. 232, sowie die Notizen über mathematisch-historische Universitätsvorlesungen in der „Wissenschaftlichen Chronik" der letzten Bände der Bibliotheca Mathematica.

3) Siehe die Notizen von A. von Braunmühl in der Biblioth. Mathem. 9_2, 1895, S. 89—90; 11_2, 1897, S. 113—115; 3_3, 1902, S. 403—404.

4) Ausnahmsweise sind von Nesselmann in Königsberg und von P. Tannery in Paris Vorlesungen über Geschichte der Mathematik gehalten worden.

Der erste internationale Kongreß für Geschichte der Wissenschaften,[1]) der 1900 in Paris gehalten wurde, sprach nämlich den Wunsch aus, es möchten an den größten französischen Hochschulen besondere Vorlesungen über die allgemeine Geschichte der Wissenschaften eingerichtet werden, und die Geschichte der Wissenschaften ein besonderes Prüfungsfach bilden.[2]) Auf dem zweiten internationalen Kongresse für Geschichte der Wissenschaften in Rom 1903 wurde dieselbe Frage noch einmal behandelt, und der Kongreß sprach dabei den Wunsch aus, es möchten an den Universitäten vier besondere Vorlesungen über Geschichte der Wissenschaften gehalten werden, nämlich 1) für Mathematik und Astronomie, 2) für Physik und Chemie, 3) für Naturgeschichte, 4) für Medizin, und erlaubt werden, sich als Privatdozent für Geschichte der Wissenschaften zu habilitieren.[3]) Freilich wurde es nicht ausdrücklich gesagt, daß die ganze Geschichte der Wissenschaften zu einem besonderen Lehrfach vereinigt werden sollte; im Gegenteil scheint es die Ansicht des zweiten Kongresses gewesen zu sein, daß es z. B. spezielle Privatdozenten für Geschichte der Mathematik und Astronomie geben könnte.[4]) Indessen dürfte es kaum vermieden werden können, daß die Erfüllung der Wünsche der zwei Kongresse als Konsequenz die Gründung von Professuren für allgemeine Geschichte der Wissenschaften ergeben würde. Schon der Umstand, daß die Versammlungen, auf welchen die Anträge allgemeine Zustimmung fanden, gerade den Zweck hatten, ein Zusammenwirken der Arbeiter auf dem Gebiete der Geschichte der Wissenschaften anzuregen, scheint mir dafür zu sprechen, zumal wenn man in Betracht zieht, daß es viel leichter sein muß, eine Professur für allgemeine Geschichte der Wissenschaften als vier Professuren für die oben genannten besonderen Arten derselben zu bekommen.

Diese Konsequenz kann aber meines Erachtens für das wissenschaftliche Studium der Geschichte der Mathematik gefährlich werden. Ich will nicht in Abrede stellen, daß von einem höheren Gesichtspunkte aus die Vereinigung der Geschichte der besonderen Wissenschaften zu einem einzigen Lehrfach berechtigt werden kann, und daß die allgemeine Geschichte der Wissenschaften etwas mehr als nur eine Juxtaposition der Darstellung des historischen Verlaufes der einzelnen Zweige umfaßt. Indessen bin ich mit

---

1) Ich brauche in diesem Artikel *der Kürze halber* das Wort „Wissenschaften" als Übersetzung des französischen „sciences" und des italienischen „scienze". Richtiger wäre natürlich „Mathematik und Naturwissenschaften".

2) Vgl. Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, S. 142.

3) Vgl. Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 280—281.

4) Vgl. P. Tannery, *L'histoire des sciences au congrès de Rome 1903* (Paris 1903), S. 7: „L'abilitazione alla libera docenza possa essere concessa anche per la storia delle scienze, *secondo la divisione del 1. comma.*"

Herrn P. Tannery[1]) darüber einig, daß diese allgemeine Geschichte der Wissenschaften noch nicht so weit bearbeitet worden ist, daß die Mehrzahl der Fachmänner, und noch weniger das Publikum, eine klare Vorstellung derselben haben kann. Aus diesem Grunde ist es zu befürchten, daß bei den eventuellen Ernennungen der Professoren für Geschichte der Wissenschaften es oft vom Zufall abhängen würde, welche Forderungen an die Inhaber gestellt werden. Die eine Behörde könnte in Betracht ziehen, daß ein Gelehrter, der die Geschichte jeder einzelnen Wissenschaft eingehend behandeln will, sich vorzugsweise auf den Stand derselben im Altertum und im Mittelalter beschränken muß, und auf Grund dieser Erwägung einen Mann zum Professor ernennen, dem die Geschichte der modernen Wissenschaft fremd wäre. Eine andere Behörde könnte dagegen von demselben Ausgangspunkte zu dem Resultate gelangen, daß man von dem Professor überhaupt keine eingehenden historischen Arbeiten fordern soll, sondern zum Inhaber der Professur einen Mann ernennen, der nur die historische Entwickelung der wissenschaftlichen *Methoden* mehr oder weniger gründlich studiert hat. Aber weder der eine noch der andere würde ein wissenschaftliches Studium der Geschichte der Mathematik befördern können; im Gegenteil wäre es zu befürchten, daß der Professor zu einer oberflächlichen Beschäftigung mit dem Gegenstande veranlassen könnte.

Nun kann man ja einwenden, daß die Übelstände, die möglicherweise mit einer noch nicht befindlichen Anordnung verbunden werden können, leicht übertrieben werden, wenn man von vorn herein die fragliche Anordnung nicht billigt, und daß es zu früh ist, sich hierüber auszusprechen, bevor irgend eine Erfahrung vorliegt. Aber unglücklicherweise liegt in Wirklichkeit schon eine solche Erfahrung vor, die die Richtigkeit meiner soeben auseinandergesetzten Ansicht durchaus bestätigt. Bekanntlich gibt es seit 1892 am „Collège de France“ in Paris eine Professur für allgemeine Geschichte der Wissenschaften, deren erster Inhaber Pierre Laffitte wurde. Als dieser am Anfange des Jahres 1903 gestorben war, wurde nach längerem Zögern als sein Nachfolger teils Herr Paul Tannery von 21 Stimmenden, teils Herr Georges Wyrouboff von 15 Stimmenden vorgeschlagen.[2]) Wer die wissenschaftliche Wirksamkeit der beiden Kandidaten kennt, muß sofort die Ansicht bekommen, daß es sich hier um einen prinzipiellen Meinungsunterschied unter den Stimmenden handelte. Vergleicht man nämlich die Verdienste der Herren Tannery und Wyrouboff um die Geschichte der Wissenschaften, so ist es durchaus unmöglich,

1) Tannery, a. a. O. S. 7—8.

2) Siehe P. Baudin, *La chaire d'histoire générale des sciences au Collège de France* (Paris 1904), S. 3.

zweifelhaft zu sein, wer vorgeschlagen werden sollte. Herr Tannery ist ein sehr vielseitiger, scharfsinniger und produktiver Historiker, der auf mehr als einem Gebiete als eine anerkannte Autorität ersten Ranges gilt, während Herr Wyrouboff ein Chemiker ist, der sich nie mit eigentlichen Forschungen auf dem historischen Gebiete beschäftigt hat. Nun wies ja das Stimmungsresultat darauf hin, daß der wirkliche Fachmann auf gerade dem Gebiete, das die Professur umfaßte, die Mehrzahl der Stimmenden für sich hatte, und insofern konnte man hoffen, daß in diesem Falle die sonst zu befürchtenden Übelstände beseitigt waren; in dieser Hoffnung wurde man noch mehr befestigt, als das „Institut de France“ sich fast einstimmig zugunsten des Herrn Tannery aussprach. Aber gegen die Vermutung fast aller Interessierten wurde am 29. Dezember 1903 Herr Wyrouboff vom französischen Unterrichtsminister zum Professor für Geschichte der Wissenschaften am „Collège de France“ ernannt, und als Gegenstand seiner ersten Vorlesung hat er die moderne Evolution der physisch-chemischen Theorien gewählt. Auf diese Weise ist tatsächlich für die Geschichte der Wissenschaften (und ganz besonders für die Geschichte der Mathematik) eine schon vorhandene Professur verloren gegangen, und zwar gerade in einem Falle, in dem man die kräftigsten Gründe anzunehmen hatte, daß die Professur für ihren eigentlichen Zweck gewahrt werden könnte. Ich benutze absichtlich den Ausdruck „die *kräftigsten* Gründe“, denn Herr Tannery hat sich ja in so eminentem Grade für eine solche Professur meritiert, daß sie eigentlich für seine Rechnung begründet werden sollte, wenn sie noch nicht existierte.

Wenn ich bisher nur die Übelstände hervorgehoben habe, die die Begründung von Professuren für allgemeine Geschichte der Wissenschaften mit sich führen, so bedeutet dies nicht, daß meiner Ansicht nach ähnliche Übelstände in betreff einer Professur für Geschichte der Mathematik durchaus undenkbar sind. Nehmen wir an, daß es schon eine solche Professur gäbe, und daß entweder Herr Paul Tannery oder ein anderer Mathematiker, der sich nie mit eigentlichen historischen Forschungen beschäftigt hat, ernannt werden sollte, so ist es gewiß nicht undenkbar (es wird immer Fälle geben, in denen man befürchten muß, daß der alte Satz: „stat pro ratione voluntas“ zur Anwendung kommt), aber dennoch sehr unwahrscheinlich, daß dieser die Professur bekäme. In der Tat gibt es ja jetzt eine sehr reichhaltige mathematisch-historische Literatur, und an vielen Universitäten werden regelmäßig Vorlesungen über Geschichte der Mathematik gehalten, so daß man in weiten Kreisen eine klare Vorstellung von dem Begriff dieses Lehrfaches haben muß; ein prinzipieller Meinungsunterschied in betreff der Bedeutung des Ausdruckes „Geschichte der Mathematik“ ist darum kaum denkbar, und es war gerade die Möglichkeit eines Meinungsunterschiedes dieser Art, die ich oben als den größten Übelstand hinsichtlich der Professuren für Geschichte der Wissenschaften hervorgehoben hatte.

Ich bin also der Ansicht, daß man, um den Universitätsunterricht der Geschichte der Mathematik zu befördern, in erster Linie die Lehrer der Mathematik anregen soll, Vorlesungen über die Geschichte ihrer Wissenschaft zu halten; dann soll man versuchen, an den größten Universitäten besondere Lehrer, und wenn irgend möglich besondere Professoren für diesen Gegenstand zu bekommen. Das Streben, die allgemeine Geschichte der Wissenschaften als Lehrfach an den Universitäten einzuführen, kann möglicherweise indirekt dem mathematisch-historischen Studium nützlich werden, aber auf der anderen Seite darf man meines Erachtens nicht die Übelstände übersehen, die dadurch entstehen können.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“.

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen“. BM = Bibliotheca Mathematica.

1:12, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265. — **1:15,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 323. — **1:22, 29, 34,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265—266. — **1:36, 64,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137. — **1:103,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1:135,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137. — **1:144, 155, 169, 171,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137—138. — **1:190,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1:195,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 56. — **1:197, 202,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1:207,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 283. — **1:225, 234,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 138. — **1:255,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 238. — **1:272,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 396. — **1:283,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1:284, 321,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266—267. — **1:370,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 319. — **1:383,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:395,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 323. — **1:400,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:429,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 324. — **1:432,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:434—435,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 396—397. — **1:436,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 138. — **1:437, 440,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:457,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 238. — **1:463,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139, 324. — **1:466,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 397. — **1:467, 469,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:475,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267—268; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 283. — **1:476,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268.

1: 508. In V. Roses neuer Ausgabe von Vitruvius ist der Text in betreff des Durchmessers des von Herrn Cantor erwähnten Rades berichtigt; statt 4 ist $4\frac{1}{6}$ zu lesen, so daß der Näherungswert von π nicht $3\frac{1}{8}$ sondern $\frac{12\frac{1}{2}}{4\frac{1}{6}} = 3$ wird (vergl. W. Schmidt, Biblioth. Mathem. $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 299).

1:510, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 314. — **1:519—520,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **1:537, 540, 542,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1:622,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143. — **1:641,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:661,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1:662,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:663,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 405. — **1:671,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1:687—689,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143—144; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 205—206. — **1:694,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 284. — **1:704, 706, 708, 714, 735, 736, 744, 748,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499—500. — **1:749,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1:756, 757, 767,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 500—501. — **1:794,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:804, 805, 807, 808, 812, 823, 852,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268—269. — **1:853,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900; S. 501. — **1:854,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 324; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 206. — **1:855,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501.

---

2 : 7, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351. — **2** : 8, 10, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501—502. — **2** : 14—15, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144. — **2** : 20, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **2** : 25, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 274. — **2** : 31, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351—352; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239—240. — **2** : 34, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144. — **2** : 37, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2** : 38, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2** : 39, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2** : 41, 57, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2** : 59, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2** : 63, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 206. — **2** : 70, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 417. — **2** : 73, 82, 87, 88, 89, 90, 92, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502—503. — **2** : 97, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2** : 98, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 269—270. — **2** : 100, siehe BM $\mathbf{3}_3$. 1902, S. 140. — **2** : 101, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325. — **2** : 104—105, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 397—398. — **2** : 111, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2** : 116, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2** : 122, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503—504. — **2** : 126, 127, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2** : 128, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2** : 132, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 515—516. — **2** : 143, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2** : 157, 158, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2** : 163, 166, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2** : 175, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2** : 210, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352—353. — **2** : 218, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 284. — **2** : 219, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353. — **2** : 229, 242, 243, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504—505. — **2** : 253, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353. — **2** : 273, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 505. — **2** : 274, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325. — **2** : 282, 283, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353—354. — **2** : 284, 286, 287, 289, 290, 291, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506—507. — **2** : 296, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354. — **2** : 313, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507.

---

2 : 317. Die Angabe, daß bei Vitruvius einmal der Näherungswert $3\frac{1}{8}$ für π vorkommt, ist unter Bezugnahme auf die Bemerkung zu **1**: 508 (oben S. 68) zu berichtigen.

---

2 : 328, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 285. — **2** : 334, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2** : 353, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87. — **2** : 358, 360, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87. — **2** : 381, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2** : 385, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 81; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 207. — **2** : 386, 395, 401, 405, 425, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507—508. — **2** : 430, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 145. — **2** : 440, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 285. — **2** : 442, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325. — **2** : 449, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2** : 454, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 242. — **2** : 474, 480, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140—141. — **2** : 481, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 508. — **2** : 482, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 508; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 240. — **2** : 484, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2** : 486, 489, 490, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2** : 497, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87. — **2** : 509, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270, 509. — **2** : 510, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2** : 512, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2** : 514, 516, 517, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2** : 530, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354—355; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2** : 532, 535, 541, 548, 549, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509—510. — **2** : 550, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 355. — **2** : 554, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2** : 555, 565, 567, 568, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 285—286. — **2** : 569, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2** : 572—573, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2** : 576, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 355—356. — **2** : 579, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 145. — **2** : 580—581, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 207. — **2** : 582, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2** : 583, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 356.

---

2 : 585. Herr Cantor macht darauf aufmerksam, daß Viète für die Dreiteilung eines Winkels dieselbe Konstruktion angibt, die sich in einer dem Archimedes zugeschriebenen arabischen Schrift findet, welche Schrift aber erst nach Viètes Tode in lateinischer Übersetzung veröffentlicht wurde. Dann fügt Herr Cantor hinzu: „daraus geht hervor, daß die Dreiteilung des Winkels, welche Vieta lehrte, kein Anlehen bei einem alten Schriftsteller, sondern selbständige Nacherfindung war“. Diese Schlußfolge ist indessen nur dann berechtigt, wenn es bestätigt wird, daß die fragliche Konstruktion von keinem abendländischen Mathematiker vor 1593 gelehrt wurde, und soviel ich weiß, sind noch keine eingehenden Untersuchungen über diese Frage angestellt worden. An sich ist es ja gar nicht unwahrscheinlich, daß diese Konstruktion, die bekanntlich den arabischen Mathematikern geläufig war, durch eine Übersetzung oder Bearbeitung aus dem Arabischen im Abendlande bekannt, und von einem Mathematiker des 16. Jahrhunderts in einer gedruckten Schrift erwähnt worden ist.

Aber angenomman, daß die angedeuteten Untersuchungen wirklich ein negatives Resultat ergeben würden, so scheint mir dennoch die Schlußfolge des Herrn Cantor nur bis zu einem gewißen Grade berechtigt. In der Tat hat er selbst S. 82 hervorgehoben, daß die bei Jordanus Nemorarius vorkommende, von den drei Brüdern entlehnte Winkeldreiteilung im Grundgedanken mit dem 8. Lemma des Archimedes nahe verwandt ist, und S. 105 angegeben, daß gerade dies Verfahren des Jordanus in einem Anhange zum 4. Buche der Ratdoltschen Euklid-Ausgabe von 1482 gelehrt wird. Aber dieser Anhang findet sich auch in vielen folgenden Euklid-Ausgaben, und dem Viète kann das Verfahren kaum unbekannt gewesen sein. Nun gibt Chasles (siehe *Geschichte der Geometrie, übertr. durch L. A. Sohncke*, S. 597) ganz bestimmt als Prinzip des Verfahrens die Archimedische Konstruktion an, und wenn dies richtig ist, wäre es wohl mehr angebracht Viètes Winkeldreiteilung eine wenig wesentliche Modifikation eines schon vor ihm allgemein bekannten Verfahrens zu nennen.

G. Eneström.

2:592, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2:594,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270. — **2:597,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270; **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2:599—600,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2:602, 603—604,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270—271. — **2:611,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 356—357. — **2:612,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2:613,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2:614, 620,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2:621, 623,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146—147. — **2:638,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 147. — **2:642, 643,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271. — **2:655,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2:656,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 286. — **2:659, 660,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 147—148. — **2:665,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271. — **2:674,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 88. — **2:683,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148. — **2:693,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 287. — **2:700, 701, 703, 704, 705,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271—273. — **2:719,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2:720,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 287. — **2:721,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2:742,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273; **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2:746,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2:747,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 173; **2**$_3$, 1901, S. 225. — **2:749,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 88. — **2:766,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2:767,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148, 357—358. — **2:770,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 208. — **2:772, 775,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 358—359. — **2:777,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148; **3**$_3$, 1902, S. 204. — **2:783,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359; **4**$_3$, 1903, S. 88—89. — **2:784,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148. — **2:802,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 208. — **2:812,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 37. — **2:820, 825, 840,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148—149. — **2:843,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 328. — **2:856,** 865, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149. — **2:876,** 878, 879, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511. — **2:891,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2:898,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 37, 208. — **2:901,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511. — **2:VIII** (Vorwort), siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2:IX, X** (Vorwort), siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511—512.

3:9, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359. — **3:10,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 518. — **3:11,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209. — **3:12, 17,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512. — **3:22,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512; **4**$_3$, 1903, S. 209. — **3:24,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209. — **3:25,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209, 399. — **3:26,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359. — **3:45—48, 49, 50,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512—513. — **3:70,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 360. — **3:100,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149. — **3:112,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209—210. — **3:116,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513. — **3:117,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 518. —

3 : 123, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513; **4**$_3$, 1903, S. 399. — **3 : 124,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 407—408; **4**$_3$, 1903, S. 400. — **3 : 126,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 288. — **3 : 131,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 210. — **3 : 151,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 326. — **3 : 167, 172—173,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 400. — **3 : 174,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149—150. — **3 : 183,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 432. — **3 : 188,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 241. — **3 : 201,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513. — **3 : 207,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 519. — **3 : 215,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 150. — **3 : 218,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513. — **3 : 220,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 326. — **3 : 224,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514. — **3 : 225, 228,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 150. — **3 : 232,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514. — **3 : 246,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514; **2**$_3$, 1901, S. 151. — **3 : 250,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514. — **3 : 303,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 155. — **3 : 330—331,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 241—242. — **3 : 447, 455,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 151. — **3 : 473,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 154—155; **4**$_3$, 1903, S. 401. — **3 : 477, 479,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 151—152.

---

3 : 507. Als Erscheinungsjahr der vier Bände der *Opera omnia* von Johann Bernoulli gibt Herr Cantor 1742 an, und diese Angabe ist insofern richtig, als alle vier Bände auf dem Titelblatt 1742 als Druckjahr tragen. Da aber das Vorwort des Herausgebers am Anfange des ersten Bandes vom 1. März 1743 datiert ist, so folgt schon daraus, daß das richtige Erscheinungsjahr nicht 1742 sondern 1743 ist. Übrigens geht aus einem Passus eines von Fuss (*Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII*$^{\text{ème}}$ *siècle*, tome II, p. 511) veröffentlichten Briefes von Daniel Bernoulli an Euler hervor, daß der vierte Band am Ende des Jahres 1742 noch nicht fertig war. Daniel Bernoulli schreibt nämlich am 12. Dezember 1742: „Sonsten werden meines Vaters sämmtliche opera in Lausanne in vier tomis in 4^0 gedruckt. Es wird eine überaus schöne Edition seyn, und wird solche in 4 oder 5 Monaten ganz fertig seyn, indem allbereits 3 tomi völlig gedruckt sind". Der vierte Band kann also jedenfalls nicht vor April 1743 erschienen sein. In diesem Bande gibt es übrigens eine Datierung, die nicht nur inkorrekt, sondern wesentlich irreleitend ist, und welche ich darum hier erwähne, obgleich es sich nicht um eine Abhandlung der reinen Mathematik handelt, sondern um die „Hydraulica" (S. 387—488). Der Titel dieser Abhandlung lautet: „Hydraulica. Nunc primum detecta ac demonstrata directe ex fundamentis pure mechanicis. Anno 1732", aber sie besteht aus zwei Teilen, von denen der erste am 7. März 1739 der Petersburger Akademie der Wissenschaften überreicht wurde, und der zweite zuerst am 31. August 1740 fertig war (vgl. Biblioth. Mathem. **2**$_3$, 1901, S. 447) — der Brief von Euler, dessen Anfang als Einleitung zur Abhandlung dient, ist vom 18. Oktober 1740, was freilich die *Opera omnia* verschweigen. Ich sagte soeben, daß die Datierung nicht nur inkorrekt, sondern auch wesentlich irreleitend ist; in der Tat bekommt der Leser dadurch die unrichtige Vorstellung, Johann Bernoulli sei schon im Jahre 1732 im Besitze vieler der Sätze, die Daniel Bernoulli 1738 in seiner *Hydrodynamica* veröffentlichte (vgl. Fuss, a. a. O. S. 530), gewesen.

Beiläufig bemerke ich, daß in dem oben zitierten Briefe von Daniel Bernoulli an Euler (siehe Fuss, a. a. O. S. 510) folgender Passus vorkommt: „Ich habe auch dieses Alles meinem Bruder, scriptorum paternorum editori, demonstrirt", und daß man hieraus folgern könnte, Johann II. Bernoulli sei Mitherausgeber der *Opera omnia* gewesen (vgl. P. Merian, *Die Mathematiker Bernoulli*, Basel 1860, S. 31, 49). Indessen ist es möglich, daß sich diese

Worte des Daniel Bernoulli nicht auf die *Opera omnia*, sondern nur auf die in den Commentarii der Petersburger Akademie veröffentlichten Abhandlungen beziehen. G. Eneström.

---

3 : 521, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441. — **3 : 535,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 401. — **3 : 565, 571,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 326—327.

---

3 : 571. Einen weiteren, freilich nicht sehr bedeutenden Schritt in das Gebiet der Maxima und Minima von beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen machte Maclaurin etwas später in seinem *Treatise of fluxions* (1742). Dort bewies er nämlich (Art. 920, 921), daß das Produkt

$$xy^n z^m \ldots\ldots \qquad (x+y+z+\ldots\ldots=k)$$

ein Maximum wird, wenn

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{n}=\frac{z}{m}=\ldots$$

ist, und daß ebenso das Produkt

$$\sin^m x\cdot\sin^n y\cdot\sin^r z\cdot\sin^s v\ldots\ldots \qquad (x+y+z+v+\ldots\ldots=k)$$

ein Maximum wird, wenn

$$\frac{\operatorname{tg}x}{m}=\frac{\operatorname{tg}y}{n}=\frac{\operatorname{tg}z}{r}=\frac{\operatorname{tg}v}{s}=\ldots$$

ist.

G. Eneström.

---

3 : 578, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 327. — **3 : 614,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 89—90. — **3 : 636—637,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441. — **3 : 652,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 446. — **3 : 660, 667, 689, 695,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441—442. — **3 : 750, 758, 760, 766,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 446—447. — **3 : 774, 798,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 442—443. — **3 : 845,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 447; **3**$_3$, 1902, S. 327—328. — **3 : 848, 881,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 443. — **3 : 882,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 447. — **3 : 890,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 401. — **3 : 892,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 143. — **3 : IV** (Vorwort), siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 443.

Anfragen und Antworten.

115. Pascal und der binomische Lehrsatz für nicht ganzzahlige Exponenten. Im vierten Bande seiner *Opera omnia* hat Johann Bernoulli (S. 169—192) „Remarques sur le livre intitulé Analyse des infiniment petits, comprenant le calcul intégral, dans tout son étendue etc. par M. Stone“ veröffentlicht. Dort findet sich (S. 173) in betreff der Binomialreihe für einen beliebigen Exponenten folgende Bemerkung: „Nous avous trouvé ce théorème, aussi bien que Mr. Newton, d'une manière plus simple que la sienne. Feu Mr. Pascal a été le premier qui l'a inventée“. Der erste Teil dieser Bemerkung bezieht sich selbstverständlich auf die 48. Lektion der „Lectiones mathematicae de methodo integralium, aliisque“ (*Opera omnia* III, S. 522—525), wo Johann Bernoulli den binomischen Lehrsatz für einen beliebigen Exponenten angegeben hat. Dagegen ist es schwierig zu verstehen, wie die Worte: „feu M. PASCAL a été le premier qui l'a inventée“ verstanden werden sollen. Zwar hat PASCAL die allgemeine Formel für die Herstellung der Zahlen, die in der Binomialreihe als Koeffizienten vorkommen, aufgestellt, aber teils hat JOHANN BERNOULLI selbst (siehe *Opera omnia* I, S. 460) hervorgehoben, daß PASCAL diese figurierten Zahlen nicht mit der Binomialreihe in Verbindung gebracht hatte, teils habe ich in PASCALS Schriften keine Stelle auffinden können, wo eine Binomialreihe mit nicht ganzzahligen Exponenten auch nur angedeutet ist.

Hat man irgend einen Grund anzunehmen, daß JOHANN BERNOULLI eine jetzt verlorene oder wenigstens bisher ungedruckte Schrift von PASCAL gekannt hat, worin die fragliche Formel vorkam? G. ENESTRÖM.

Antwort auf die Anfrage 114 über die Geschichte des Termes „Torsion“. SAINT-VENANT führt in seinem *Mémoire sur les lignes courbes non planes* (Journ. éc. polyt. T. **18** [Cah. 30], 1845, S. 55) die Bezeichnung „Torsion“ auf L. L. VALLÉE zurück, der in seinem *Traité de géométrie descriptive,* 1819, ch. III, n^os^ 671, 673 diese Bezeichnung vorgeschlagen habe. In der mir vorliegenden zweiten Auflage dieses Werks vom Jahr 1825 findet sich die Bezeichnung „torsion“ und „angle de torsion“ in Nr. 774 (S. 295), eine Begründung dieser Bezeichnung in der Note zu Nr. 776 (auf S. 296 u. 297). VALLÉE schlägt auch den Ausdruck „courbes gauches“ statt „courbes à double courbure“ vor (S. 295). SAINT-VENANT beanstandet die Bezeichnungen „flexion“ für die 1., „torsion“, „seconde courbure“ für die 2. Krümmung und schlägt für die erste Krümmung „courbure“, für die zweite „cambrure“ vor (l. c. S. 54—62).

Stuttgart. E. RATH.

Rezensionen.

A. von Braunmühl. **Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie.** Zweiter Teil. Von der Erfindung der Logarithmen bis auf die Gegenwart. Leipzig, Teubner 1903. XI + 264 S. 8^0. Mark 10.

Der erste Band der Vorlesungen v. Braunmühls über Geschichte der Trigonometrie erschien 1900, und man erwartete seitdem mit gespanntem Interesse den nun vorliegenden zweiten Band. Bei einer flüchtigen Durchsicht dieses letzteren schon wird man den Eindruck gewinnen, daß die seit 1900 verflossenen drei Jahre kaum dem Verfasser dazu genügt haben würden, das ungemein umfangreiche Material in der Art, wie es hier geschehen ist, zu bewältigen und zu sichten; es mag wohl schon beim Erscheinen des ersten Bandes vieles für den zweiten vorbereitet gewesen sein. Von vornherein war es klar, daß hier noch ganz andere Schwierigkeiten zu überwinden sein mußten, als beim ersten Teil. Zunächst erstreckten sich die Vorarbeiten größeren Umfanges, wie etwa Cantors großes Werk, nur bis ungefähr in die Mitte des 18. Jahrhunderts. Was darüber hinaus reicht, d. h. die zweite Hälfte des vorliegenden Bandes, mußte nicht nur ganz in Einzelnen aus der überaus reichen Literatur besonders des 19. Jahrhunderts zusammengesucht werden, sondern es waren hier auch die Gesichtspunkte, die für die Entwickelung maßgebend sind, und nach denen eine Ordnung des Materials zu erfolgen hatte, erst aufzustellen. Gerade dies wird bei einer Geschichte der Trigonometrie durch einen im übrigen günstigen Umstand erschwert. Da nämlich bei ihr das praktische Formelgebäude schon vor 1800 im wesentlichen fest stand, so besteht die weitere Fortentwickelung in einem Ausbau des Vorhandenen nach sehr verschiedenen, und divergierenden Richtungen hin, ohne daß doch dabei Resultate von umwälzender, und deshalb durchaus charakteristischer Bedeutung auftreten. Es handelt sich meist außer um Kritik und um Verallgemeinerungen speziell auch um neue Auffassungen des schon Bekannten, durch welche Beziehungen zu anderen Zweigen der mathematischen Wissenschaften gewonnen werden. Ein einheitlicher Gesichtspunkt für die Entwickelung ist hier, im Vergleiche mit anderen Gebieten der Mathematik, schwerer, oder kaum aufzustellen; andererseits auch eine Abgrenzung des behandelten Stoffes nur individuell zu treffen, und deshalb stets Einwänden ausgesetzt.

Dazu kommt noch eine andere Schwierigkeit, die ganz allgemein eine ausführliche Darstellung der Geschichte der Mathematik bis in die Gegenwart hinein zu einer nahezu kaum lösbaren Aufgabe macht — wenn sie allerdings auch gerade bei der Geschichte der Trigonometrie nicht ganz so stark in Betracht kommt. Die Methoden, deren sich die Mathematik bis zum Ende des 17., ja des 18. Jahrhunderts bediente, sind dem durchschnittlichen Mathematiker heutzutage im ganzen bekannt und geläufig; auch die damals gewonnenen Resultate gehören der Hauptsache nach zum Bestande seiner Kenntnisse. Für die spezialisierteren und zahlreicheren Arbeiten insbesondere des 19. Jahrhunderts gilt dies ganz und gar nicht mehr. Sobald es sich hier also um eine ins einzelne gehende historische Darstellung handelt, die mehr als eine Charakteristik der großen wissenschaftlichen Strömungen und Gesamtresultate geben soll, ist der Mittelweg zwischen einem Literaturverzeichnis und einer vollständigen Enzyklopädie des betreffenden Wissenszweiges nicht leicht zu finden. Anders gesagt, es ist schwer, die einzelnen Momente des Fortschrittes der Wissenschaft auch dem der Spezialität ferner stehenden Leser zum wirklichen Verständnis zu bringen, ohne ihn mehr, als unbedingt nötig, mit den Details zu ermüden, und ohne den zur Verfügung stehenden knappen Raum zu überschreiten. Daß dies im vorliegenden Werke im großen und ganzen gelungen ist (man sehe z. B. den Bericht über die Untersuchungen von Möbius und die daran anknüpfenden, etc.), betrachten wir als einen der bedeutsamsten Vorzüge desselben; daß dabei für manche schwierigere Untersuchungen, die an der Grenze des behandelten Gebietes liegen (wie die über die Transzendenz von π) nur die einschlägigen Arbeiten und ihre Resultate ohne Darlegung ihrer Methoden angegeben sind, war nicht zu umgehen.

Durchblättern wir den Band, um einen Überblick über den Inhalt zu gewinnen, so finden wir zunächst die Geschichte der Erfindung der Logarithmen und der sich daran anknüpfenden Umformungen der trigonometrischen Formeln, die man von nun an, anstatt durch Summen, durch Produkte und Quotienten darzustellen bemüht war. Die Beziehung der Bürgischen wie der Neperschen Logarithmen zu den natürlichen wird als eine sehr lose erkannt, insofern sie bloß besagt, daß zwei aufeinander bezogene Reihen, von deren die eine in geometrischer, die andere in arithmetischer Folge fortschreitet, durch geeignete Division auf die Formen $(1+\varepsilon)^n$ und $\pm\, \varepsilon n$ gebracht werden kann, was für kleine ε der angenäherten Basis $e^{\pm 1}$ entspricht. Weiter hervorgehoben wird dann die geistreiche, von Neper einwandfrei bewiesene, später von Lambert genau ebenso wieder aufgenommene Beziehung der zirkulären Stücke eines rechtwinklig sphärischen Dreiecks, die neuerdings auf eine gruppentheoretische Deutung geführt hat. Endlich wird ein Bericht über die damals erschienenen Tafelwerke gegeben, und auf die dabei verwendeten genialen neuen Differenzenmethoden kurz hingewiesen. In den folgenden beiden Kapiteln wird zunächst eine Übersicht der trigonometrischen Lehrbücher des 17. Jahrhunderts gegeben, wobei außer den durch Einführung der Logarithmen direkt bedingten Änderungen gegenüber der früheren Darstellung noch die erste Benutzung von Hilfswinkeln erwähnenswert ist. Es folgen die Methoden zur Berechnung kleiner Winkel aus ihren Sehnen und Sinus, wie sie Huygens in so geistreicher Weise entwickelte, und die Überholung dieser Methoden durch die der neu erfundenen Differential- und Integralrechnung besonders auf dem Gebiete der Reihenlehre. Die Bemühungen um goniometrische Formeln für sinus und cosinus der Vielfachen eines Winkels führten zur Entdeckung des Moivreschen Satzes, dessen Bedeutung im Sinne der Einführung des Rechnens mit imaginären Größen allerdings weit über die Grenzen der Trigonometrie hinausgriff. Ebenfalls in die ersten Jahrzehnte des 18. Jahrhunderts fallen De Lagnys goniometrische Untersuchungen, die ihn über J. Gregorys Behauptung der Unmöglichkeit der Kreisquadratur hinaus zu der sehr einsichtig formulierten Behauptung der Unmöglichkeit des rationalen Zusammenhanges zwischen Bogen und Tangente führten. Freilich ist sein Beweis nicht minder trügerisch, als es der Gregorys gewesen war.

Das Ende des dritten Kapitels bildet wieder eine Besprechung der bis zu Eulers Arbeiten im 18. Jahrhundert erschienenen Lehrbücher der Trigonometrie, von denen besonders dasjenige von Fr. W. von Oppel über die Wiederholung des längst Bekannten hinausgeht.

Das vierte Kapitel ist ganz der vielseitigen Tätigkeit Eulers gewidmet. Sie war ebenso bahnbrechend in Aufstellung neuer, an Eleganz wie an Menge unübertroffener, Formeln für numerische Berechnungen, wie für die Einführung einer definitiven Bezeichnungs- und Schreibweise bei trigonometrischen Größen und Figuren. Mochte die Notwendigkeit solcher Bezeichnungen und Abkürzungen seit Girard sich geltend machen, und mochten von Oughtred bis Fr. Ch. Maier und Oppel die Bemühungen, ein konsequentes und praktisches System für sie zu gewinnen, nicht aussetzen, es blieb dem praktischen Genie Eulers vorbehalten, der Bezeichnung Eingang zu verschaffen, die uns jetzt als selbstverständlich erscheint, und die sofort zu einer Übersichtlichkeit der Formeln führte, die eine gute Illustration zu der bekannten These von Clebsch bildet: „Maximum in mathesi est ratio designandi". Und ebenso wie Euler die Behandlung der trigonometrischen Funktionen als Verhältnisse, und ihr Zeichen in den verschiedenen Quadranten gab, so ging er andererseits nach der Richtung der Verallgemeinerung der Vorstellungen der Trigonometrie für andere Flächen als die Kugel als erster voran.

Seit Eulers Zeit ist die Trigonometrie im alten, elementaren Sinne im wesentlichen als dem Inhalte und den Resultaten nach vollendet zu betrachten; es treten von nun an Bestrebungen in den Vordergrund, einerseits das gewonnene Instrument für spezielle Anforderungen der Praxis noch geschmeidiger zu machen — hierher gehört die Umformung der Formeln zur Berechnung kleiner Winkel, die Aufstellung der Differentialbeziehungen bei Änderung eines Stückes, die Ersetzung eines kleinen sphärischen Dreiecks durch ein ebenes — andererseits eine Ausdehnung der gefundenen Formeln und Theoreme für Kreisfunktionen auf andere Funktionen (wie die Hyperbelfunktionen) und für Dreiecke auf beliebige Polygone, zu geben — endlich den alten Fragen von der Kreisquadratur in dem neuen seit Gregory und De Lagny dafür gewählten Gewande der Frage nach der rationalen Zusammengehörigkeit von Winkeln und Winkelfunktionen näher zu treten. Mit allen drei Beziehungen ist Lamberts Gestalt verknüpft; größtenteils steht sie ganz im Mittelpunkte des Interesses, wie sie denn auch das fünfte Kapitel beherrscht. Erwähnenswert sind hier schließlich noch die großen neuen Tafelwerke, die zur Zeit der französischen Revolution unter Legendres und Delambres Mitwirkung berechnet wurden, und unter den Compendien der damaligen Zeit Klügels *Analytische Trigonometrie*, wo zuerst ausdrücklich die trigonometrischen Funktionen als Zahlenverhältnisse zweier Seiten im rechtwinkligen Dreieck definiert sind.

Die Trigonometrie des 19. Jahrhunderts, die im sechsten Kapitel dargestellt ist, führte die oben charakterisierten Betrachtungen weiter fort. Daneben aber treten teils rein analytische Ableitungen sämtlicher Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen, die von der Funktionstheorie ihren Ausgang nehmen — wie die Ableitung der Periodizität aus dem Reihenansatz, oder die Herleitung des sinus und cosinus aus dem Additionstheorem — dann auch, entsprechend der allgemeinen Tendenz der Entwickelung der Mathematik nach der kritischen Seite hin besonders die Bemühung, den ganzen Aufbau allen Anforderungen der mathematischen Präzision entsprechend auf möglichst geringen Voraussetzungen zu bewerkstelligen oder mit neuen Zweigen der Mathematik, wie der Gruppen- und der Invariantentheorie zu verknüpfen. In diese Richtung fallen in gewissem Sinne schon die vom Cosinussatze ausgehenden Rechnungen von LAGRANGE; dann aber die CARNOTschen Theorien der inversen Größen und der korrelativen Systeme, weit später die Arbeiten von MÖBIUS, und wieder ein halbes Jahrhundert später die von KLEIN und STUDY; sowie viele minder wichtige dazwischen. Weiter finden wir in neuerer Zeit eine Tendenz zu Verallgemeinerungen, wie sie sich z. B. ergeben, wenn statt des Dreiecks das Tetraeder den Untersuchungen zugrunde gelegt wird, oder wenn man statt von Kreis oder Hyperbel von höheren Kurven ausgeht, wenn die Quaternionen benützt werden, etc. Daß diese letzterwähnten Dinge, wie auch die aus der Geodäsie herstammenden Fragestellungen vielfach nur sehr kurz behandelt, oder, wie etwa die Winkelbeziehungen im n-dimensionalen Raume, bei Seite gelassen werden, liegt in der Natur der Sache, da eine eingehende Behandlung doch mehr Raum erfordern würde, als hier zur Verfügung steht, und als im allgemeinen auch der praktischen Bedeutung besonders der Verallgemeinerungen entspricht.

Wie diese kurze Inhaltsangabe zeigt, bietet der vorliegende Band einem jeden Mathematiker eine reiche Fülle von interessanten und anregenden Mitteilungen und neuen Gesichtspunkten. Von ganz besonderem Werte wird das Werk aber für den sein, der selbst auf demselben Gebiete weiter zu arbeiten wünscht. Wenn in dem gewaltigen Material, das hier zusammengetragen ist, einzelnes fehlen sollte, so wird es gerade ein wünschenswerter Erfolg des Buches sein, derartige Ergänzungen zu veranlassen. Jedenfalls wird es von nun an keine Entschuldigung mehr dafür geben, wenn immer wieder längst aufgestellte Formelsysteme oder Ableitungen der Trigonometrie aus Unkenntnis der vorhandenen Literatur als neu veröffentlicht werden. Niemand aber wird das Buch aus der Hand legen, ohne dem Verfasser für die mühevolle Arbeit, durch die er aus dem unübersehbaren Stoffe ein so übersichtlich interessantes und belehrendes Werk zu gestalten wußte, aufrichtigen Dank zu wissen.

Wir erwähnen noch einige Versehen, resp. Druckfehler, die uns beim Durchlesen des Bandes aufgefallen sind:

pag. 6. Zeile 6 sollte stehen: $\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdot 10^7$ statt $\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot 10^7$.

pag. 13. Bei Vergleichung der zirkulären Stücke der Dreiecke BSP und CPS soll es heißen:

$$\begin{matrix} CZ = 90^0 - \sphericalangle S & \text{statt} & CZ = BS \\ 90^0 - \sphericalangle Z = BS & & 90^0 - \sphericalangle Z = 90^0 - \sphericalangle S. \end{matrix}$$

pag. 47. Zeile 19 ist AM statt AC zu setzen.
Zeile 24 ist δ nicht Fußpunkt der Senkrechten von B, sondern derjenigen vom höchsten Punkte des Kreises CMB über Kreis CMA (so daß also $M\delta = \cos C$ ist).

" 57. In der Formel $\varphi > \ldots$ der Anmerkung 3 fehlt rechts von $>$ der Summand $+\sin\varphi$.

" 62. Zeile 5 ist $2(x-x^2)$ statt $2x-x^2$ zu lesen. Ferner fehlt hier das Moment BK.

" 94. Zeile 6 ist φ_2 zu streichen.

" 95. Zeile 10. In der Formel ist y vor $\frac{az}{c}$ einzufügen.

pag. 97. Zeile 10. ZP ist nicht gegeben, also zu streichen.
„ 109. Zeile 3 von unten ist einmal sin statt cos verdruckt.
„ 134. Zeile 21 ist $\sin h$ und $\cos h$ vertauscht, ferner unter diesen Zeichen statt φ u zu setzen.
„ 225. Zeile 7. Im Nenner der Formel soll $(4m+3)$ statt $(4m+3)^2$ stehen. Weiter ist die Bemerkung von Lucas, daß diese Reihe rasch konvergiert, ziemlich optimistisch, da sie in der Art von $\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m^5}$ fortschreitet.
„ 233. Zeile 8 von unten ist $2\varepsilon =$ zu streichen.

München. W. M. Kutta.

Al-Battânî sive Albatenii opus astronomicum. Ad fidem codicis escurialensis arabice editum, latine versum, adnotationibus instructum a Carolo Alphonso Nallino. Pars I. Versio capitum cum animadversionibus. Mediolani 1903. LXXX + 327 S. 4⁰. (Pubblicazioni del R. Osservatorio di Brera in Milano, No. XL. P. I.)

In dieser Zeitschrift (**1**$_3$, 1900, p. 285—286) wurde der III. Teil dieses Werkes, den arabischen Text enthaltend, einer kurzen Besprechung unterzogen, jetzt folgt nach vier Jahren auch die lateinische Übersetzung nach. Wer die 51 Bogen dieses Großquartbandes auch nur flüchtig überblickt, der wird über die ungeheure Arbeit, die in diesem Bande aufgespeichert ist, erstaunen, und deshalb den Zeitraum, der zwischen der Ausgabe der beiden Teile liegt, wohl begreifen können.

Die Vorrede umfaßt ohne das Verzeichnis der benutzten Quellen und die Addenda und Emendanda 64 Seiten, die Übersetzung des arabischen Textes nimmt 150 Seiten in Anspruch, den Anmerkungen („adnotationes") kommen die letzten 177 Seiten des Bandes zu. Vorrede und Anmerkungen enthalten eine Fülle des interessantesten Materials zur Geschichte der Astronomie und Mathematik bei den Arabern sowohl, als auch bei den Griechen, Babyloniern, Indern etc., und lassen die großen historischen und astronomischen Kenntnisse Nallinos, sowie auch die schon längst bekannten seines berühmten Mitarbeiters Giov. Schiaparelli in schönstem Lichte erscheinen; wir erhalten durch diese Arbeit eine nahezu vollständige Kenntnis des astronomischen Wissens der Araber, vollständiger und richtiger als sie bis jetzt irgendwo auseinandergesetzt worden ist.

Auf rein astronomische und auf sprachliche Fragen trete ich im folgenden im allgemeinen nicht ein, sondern überlasse die Besprechung des Werkes nach diesen Seiten hin den Fachgelehrten; ich werde nur diejenigen Punkte hervorheben, die für die Geschichte der mathematischen Wissenschaften von Bedeutung sind, und besonders auch auf gewisse Stellen meines Buches *(Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke;* Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissenschaften, **10**, 1900) zu sprechen kommen, die durch vorliegende Arbeit in irgend einer Weise alteriert werden.

Praefatio, p. VIII, Note 13: Die Stelle in el-Battânis Lebensbeschreibung: *wawarada ilâ Bagdâd . . . . fî ẓulâmat kânat lahum*, habe ich (s. mein Buch p. 46) mit Andern übersetzt durch: „Wegen der Unterdrückungen, die ihnen (nämlich ihm und den Benî el-Zaijât) zu teil wurden, zog er mit diesen nach Bagdad"; es soll aber nach Nallino (vergl. auch Dozy, *Suppl. aux dictionn.*

arabes II, 291) heißen: „er kam nach Bagdad, um einen Tribut, der ihnen (den Benî el-Zaljât) ungerecht auferlegt worden war, rückgängig zu machen."

p. XI—XVIII handelt Nallino über Geburtsort, Abstammung, Glauben und Tod el-Battânîs, und kommt zu dem Schlusse, dem wir nach näherer Prüfung wohl beistimmen können, daß el-Battânîs Vorfahren, vielleicht der Vater noch, Harrânische Sâbier (wohl zu unterscheiden von den Sâbiern des Qorâns) gewesen seien, daß er selbst aber als Muhammedaner geboren sei, was schon sein Name Muhammed beweise, und worauf auch schon Ibn Challikân und Abûl-Fedâ aufmerksam gemacht haben. Ob Battân oder Bittân ein Ort im Gebiete von Harrân, oder nur ein Quartier oder nur eine Straße von Harrân gewesen sei, läßt sich bis jetzt noch nicht entscheiden. Dagegen ist als sicher anzunehmen, daß der Ort, wo el-Battânî gestorben ist, das Schloß el-Ġiss (oder Ġass), von dem Chalifen el-Moʿtasim in der Nähe von Sâmarrâ erbaut, gewesen ist, und nicht die Stadt el-Hadr, die damals schon in Ruinen lag.

p. XIX—XXIII kommt Nallino auf die kleinern Schriften el-Battânîs zu sprechen. Wir müssen hier die Titel zweier Schriften berichtigen, die wir (in unserm Buche p. 46) teils infolge falscher Lesarten, teils aus Unkenntnis der darin auftretenden astrologischen Kunstausdrücke nicht richtig übersetzt haben: „Über die Kenntnis der Aufgänge der Häuser nach den vier Quadranten der Sphäre" soll heißen: „Über die Kenntnis der Aufgänge der Tierkreiszeichen, die zwischen den vier Hauptpunkten der Ekliptik liegen"; es handelt sich hier um die Berechnung der sog. *directiones*, für deren Erklärung ich auf p. 313—317 der Anmerkungen verweise. „Abhandlung über die Verifizierung der Wirkungen der Konjunktionen" soll heißen: „Ein Brief über die Verifizierung der Größen der *applicationes*"; über diesen astrologischen Begriff vergleiche man p. 305—313 der Anmerkungen; überhaupt enthalten die letzten Seiten der Anmerkungen (304—327) eine Reihe von Aufschlüssen über astrologische Dinge, über die bis jetzt viele noch im Unklaren sein mögen; ich trete des Raumes halber nicht auf dieselben ein, sondern erwähne hier nur, daß nach Nallino von den mittelalterlichen Kommentatoren astrologischer Schriften Henricus Bates das größte Verständnis für diese Fragen bekundet hat.

p. XX—XXIII zeigt Nallino, was auch schon Ahlwardt (*Verzeichnis der arabischen Handschr. der k. Biblioth. zu Berlin*, V p. 274) bemerkt hat, daß der Berliner Codex 5875 nur Auszüge aus dem *Quadripartitum* des Ptolemäus und keinen Kommentar el-Battânîs dazu enthält; ferner ist der Codex 966,2^0 des Escorial, der diesen Kommentar enthalten haben soll, verloren gegangen.

p. XXIII—XXXI behandelt Nallino Schriften, die el-Battânî fälschlich zugeschrieben werden, woraus wir folgendes hervorheben: p. XXV und auch p. XLIX nennt Nallino Rudolphus Brugensis (oder Bruggensis) als den Übersetzer von Maslamas Rezension des *Planisphäriums* des Ptolemäus; es ist hier darauf aufmerksam zu machen, daß Björnbo (in Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, p. 130—133) nachgewiesen hat, daß Hermannus Secundus der Übersetzer dieser Schrift ist, und daß als Jahr der Übersetzung 1143 (nicht 1144) zu lesen ist (p. XLIX steht richtig 1143, p. XXV aber 1144); Nallino konnte diese Abhandlung noch nicht kennen. — p. XXVI zitiert Nallino eine Schrift von Abû Maʿšar, betitelt *mudâkarât* (= *colloquia*), enthaltend Antworten auf astrologische Fragen, die Abû Saʿîd Sâdân b. Bahr an ihn gerichtet hatte (vorhanden in Cambridge, Nr. 1028, nach E. Browne, *A handlist of the muham.*

manuscr. of Cambridge, 1900); diese Schrift fehlt in meinem Buche, ich kannte damals das Verzeichnis von E. BROWNE noch nicht. — p. XXVIII—XXX gibt NALLINO meiner Ansicht nach überzeugende Gründe dafür an, daß die Werke: *Centiloquium, de horis planetarum, de ortu triplicitatum,* die einem BETHEN oder BETHEM zugeschrieben werden, nicht von EL-BATTÂNI stammen, was ich schon auf gütige briefliche Mitteilung NALLINOS hin in meinen *Nachträgen und Berichtigungen* (Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissensch., **14**, 1902, p. 164) richtig gestellt habe; daß der Name BETHEN (auch BERENI kommt vor) aber mit BELENI, BELINI (= APOLLONIUS VON THYANE) identisch sein könnte, möchte ich, entgegen NALLINO, für wahrscheinlich halten.

p. XXXI—LXIV behandelt NALLINO in erschöpfender Weise das Hauptwerk. Er scheint von seiner früheren Ansicht, die er mir brieflich mitgeteilt hat, daß das Werk nicht in zwei Ausgaben erschienen sei, zurückgekommen zu sein, denn p. XXXII bemerkt er, TÂBIT b. QORRA, der im Febr. 901 gestorben ist, erwähne schon eine Stelle aus dem 52. Kapitel, während im Codex des Escorial und in der PLATOnischen Übersetzung zwei wichtige Beobachtungen aus dem Januar und August des Jahres 901 angegeben werden; das vorliegende Werk würde also die zweite Ausgabe bilden; in diesem Sinne ist also meine Anmerkung 20[a] (in meinem Buche, p. 211) und die Stelle „Zu Art. 89“ (in den *Nachträgen,* etc. p. 164) abzuändern. — p. XXXIII erwähnt NALLINO eine Schrift eines anonymen Schülers von AHMED B. MUḤ. EL-SIGZÎ, betitelt *tasṭîḥ el-ṣuwar we tabṭîḥ el-kuwar,* über die Konstruktion der Astrolabien, die noch in Leiden (1068, nicht 1078, wie NALLINO hat) vorhanden ist, und in der EL-BATTÂNI zitiert wird, wozu NALLINO in Note 4) die Bemerkung hinzufügt, dieses Werk fehle bei BROCKELMANN und bei mir: da die Schrift anonym ist, so habe ich sie eben grundsätzlich nicht aufgenommen. — p. XXXV spricht NALLINO in Note 5) die Vermutung aus, der HUMENUS (oder auch EUMATHIUS), dessen astronomische Tafeln *(qânôn)* von EL-ZARQÂLI verbessert herausgegeben wurden, und von denen noch ein Manuskript in München (Nr. 853) existiert (vergl. mein Buch, p. 109, Note d), sei der Alexandriner AMMONIUS (der Sohn des HERMIAS, Ende des 5. Jahrh.), welcher nach STEPHANUS PHILOSOPHUS (erste Hälfte des 8. Jahrh.) Tafeln für die Ära des PHILIPPUS ARIDÄUS (Halbbruders ALEXANDERS des Großen) verfaßt habe. — p. XXXVI, Note 1) zeigt NALLINO, daß die hinter GERHARDS *Theoricae planetarum* (Bologna 1480), gedruckte Abhandlung *De motu octave spere* nicht diejenige TÂBITS über diesen Gegenstand sei, wie STEINSCHNEIDER (Zeitschr. f. Mathem. **18**, 1873, p. 331—338, u. a. O.) behauptet hat, sondern die eines Anonymus; ferner trage die Schrift, die 1518 in Venedig herausgegeben wurde, und die von STEINSCHNEIDER ebenfalls als diejenige TÂBITS *De motu octave spere* hingestellt wurde, den Titel: *Tebith de imaginatione spere;* meine Angaben *(Nachträge und Berichtigungen,* p. 163) sind also in diesem Sinne zu berichtigen. — p. XXXIX widerlegt NALLINO die oft wiederholte irrtümliche Behauptung, EDM. HALLEY habe aus den Beobachtungen EL-BATTÂNIS die säkulare Beschleunigung der Mondbewegung hergeleitet; eine solche habe erst 1749 R. DUNTHORNE durch Vergleichung der damaligen Mondbewegung mit den Angaben EL-BATTÂNIS vermutet. — Weiter kommt dann NALLINO noch auf unrichtige Auffassungen über EL-BATTÂNIS Leistungen bei LALANDE, BAILLY, MONTUCLA und DELAMBRE zu sprechen, besonders der letztere hat bekanntlich aus EL-BATTÂNIS trigonometrischen Formeln mehr herausgelesen als darin steht, wir kommen hierauf später noch zurück. — p. XLI kommt Nallino auf die Quellen zu sprechen, auf die sich el-Battânî in seinem Werke stützt, rühmt seine große Bescheidenheit und seine Ehrfurcht vor seinem großen Vorbilde Ptolemäus, dessen Fehler er stillschweigend, oder ihren Urheber sogar entschuldigend (vergl. p. 127—128 der Übersetzung) verbessert. Er erwähnt dann, wie el-Battânî geflissentlich technische Ausdrücke indischen und persischen Ursprungs vermeide; so kommt bei ihm weder *aug* (= *Apogeum*), noch *ǵaib* (= *sinus*), noch *buht* (= ungleiche tägliche Bewegung der Planeten) vor, die sich bei andern arabischen Astronomen finden. Dann vergleicht Nallino das Werk el-Battânîs mit dem *Almagest*, die Fehler und die Vorzüge des einen und andern hervorhebend, spricht von der oft schwer verständlichen Ausdrucksweise des Verfassers, die auch an dem scharfen Urteile schuld ist, das Regiomontan und Delambre, besonders das 26. Kapitel betreffend, abgegeben haben. — Es mag auch von Interesse sein zu erfahren, welcher Instrumente sich el-Battânî bei seinen Beobachtungen bedient hatte; er erwähnt an verschiedenen Stellen das *Astrolabium*, das Sehrohr *(umbûb = tubus)*, das hier zum erstenmal bei den Arabern erwähnt wird, den *Gnomon*, den Himmelsglobus mit fünf Ringen, das *Triquetrum* oder die parallaktischen Lineale, den Mauerquadranten und die Sonnenuhren. Was den *tubus* Walafried Strabos anbelangt, den Nallino ebenfalls zitiert (p. 272), so muß hier bemerkt werden, daß sich diese Notiz auf eine Arbeit P. Martys im Einsiedler Schulprogramm von 1856/57 stützt, betitelt: „Wie man vor 1000 Jahren lehrte und lernte“; nun stammt aber nach einer brieflichen Mitteilung Martys an den Verfasser dieser Besprechung (vergl. Zeitschr. f. Mathem. **29**, 1884; hist.-litterar. Abteil. p. 178 f.) diese Arbeit nicht aus einem wirklich vorhandenen Tagebuche Strabos, sondern ist größtenteils ein Produkt der Phantasie Martys, das immerhin in gewissen Punkten einer historischen Grundlage nicht entbehrt, denn in der Tat existiert im Codex 18 der St. Galler Stiftsbibliothek (aus dem 10. Jahrh.) p. 43 ein Bild eines Mönchs, der auf einem Schemel stehend durch ein langes Fernrohr nach dem Himmel blickt (in Holzschnitt reproduziert in den Mitteilungen der antiquarischen Gesellschaft zu Zürich **19**, 1877).

Die Trigonometrie al-Battânîs. Wir fassen unter diesem Titel alles zusammen, was wir in der Vorrede, der Übersetzung und den Anmerkungen für diese Besprechung der Erwähnung wert gefunden haben.

p. XLVI—XLVIII anerkennt Nallino, daß erst in v. Braunmühls *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* die Fehler, die Delambre und andere hierin begangen haben, erkannt und verbessert worden seien. Wir unterlassen es also, hier das zu wiederholen, was in dem genannten Werke sich hierüber befindet, und geben nur noch einige Zusätze, die v. Braunmühl bei Unkenntnis des arabischen Textes entgehen mußten.

Den *Sinussatz* für das ebene Dreieck spricht allerdings el-Battânî noch nicht als allgemein gültigen Satz aus; es findet sich aber doch eine Formel, in der er enthalten ist: p. 85 (Kap. XL) gibt el-Battânî zwei Lösungen der Aufgabe, die Entfernung des Mondes von der Erde zu berechnen, die aber durch eine Lücke im Text bei Plato von Tivoli zu einer unverständlichen zusammengeflossen sind; diese Lücke haben nun Nallino und Schiaparelli in sehr geschickter und der Wahrheit ohne Zweifel entsprechenden Weise ergänzt, die erste Lösung lautet nun: „Multipliziere den Radius (der Erde) mit dem Sinus der scheinbaren Zenitdistanz (des Mondes), und teile das Produkt durch den

Sinus der Mondparallaxe, was sich ergibt, ist die Distanz des Mondes von der Erde", also

$$d = \frac{r \, . \, \sin z}{\sin p}.$$

Nallino hält es für wahrscheinlich, daß el-Battânî diese Formel aus zwei rechtwinkligen Dreiecken erhalten hat, und gibt p. 265 eine dementsprechende Ableitung. Hierzu ist nun zu bemerken, daß Nallino in den *Addenda* (p. LXXIII) uns eine für die Geschichte der Mathematik bei den Arabern höchst wichtige Notiz bringt, die zuerst Nallino selbst (vergl. p. 181) und leider auch mir entgangen ist, daß nämlich der Sinussatz für das ebene Dreieck schon von el-Bîrûnî (gest. 1048) und nicht erst von Naṣîr ed-dîn ausgesprochen worden ist: in seiner *Chronologie der alten Völker* (Arab. Text von E. Sachau, p. 184, englische Übersetzung von demselben, London 1879, p. 166) heißt es in ungezwungener Übersetzung aus dem Arabischen: „Es ist aber denjenigen, welche die Geometrie studiert haben, schon bekannt, daß das Verhältnis einer Seite zu einer andern Seite in einem Dreieck gleich ist dem Verhältnis des Sinus des der einen Seite gegenüberliegenden Winkels zum Sinus des der andern Seite gegenüberliegenden Winkels." El-Bîrûnî stellt also diesen Satz als einen den Geometern schon bekannten hin; wäre es da nicht möglich, daß ihn auch el-Battânî schon gekannt hätte? Diese Stelle el-Bîrûnîs, auf die also Nallino zum erstenmal aufmerksam gemacht hat, ist geeignet, uns zu der Annahme zu verleiten, daß alles was in dem trigonometrischen Lehrgebäude *(šakl el-qaṭṭâ')* des Naṣîr ed-dîn uns geboten wird, schon vor ihm den arabischen Mathematikern bekannt gewesen sein möchte.

Wir finden auch bei el-Battânî (p. XLVII, p. 78—79, Kap. 39) eine astronomische Aufgabe, in welcher der Fall vorkommt, in einem ebenen Dreieck, von welchem zwei Seiten und ein Gegenwinkel gegeben sind, die dritte Seite direkt zu berechnen, er tut dies nach der Formel

$$a = \frac{b \cos C}{r} + \sqrt{c^2 - \frac{b^2 \sin^2 C}{r^2}},$$

welche Nallino für aus der Figur des *Almagestes* (V, 13) abgeleitet hält und auch selbst wieder ableitet (p. 255—256). —

Wie im *Almagest*, so findet man auch bei el-Battânî die vier ersten Fundamentalformeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck, aber die Tangente stets durch sin : cos ersetzt, da er wohl die beiden Funktionen tg und cot kannte, für dieselben aber nur Tafeln für die Gnomonlänge 12^p (statt 60^p, wie der Radius bei den Sinustafeln angenommen ist) zur Bestimmung der Sonnenhöhe dienend, berechnet hatte. Bekanntlich hat dann Ḥabaš, el-Battânîs Zeitgenosse, Tangenten- und Cotangententafeln für den Radius $= 60^p$ berechnet. — Daß el-Battânî auch den sphärischen Sinussatz für das rechtwinklige Dreieck gekannt habe, hält Nallino, aus verschiedenen Formeln zu schließen, für ziemlich sicher (sehr wahrscheinlich hat ihn Tâbit b. Qorra schon gekannt);. wir haben nur seine Verweisung auf Formel α) (p. 183) zu beanstanden:

$$\sin \text{ differ. horizon.} = \frac{\sin h . \sin \varphi}{\cos \varphi}$$

kann nicht durch Anwendung des sphärischen Sinussatzes auf ein rechtwinkliges Dreieck entstanden sein; ebenso handelt es sich p. 194, worauf Nallino ebenfalls verweist, um den Sinussatz für das schiefwinklige Dreieck und nicht um denjenigen für das rechtwinklige.

Die meisten Formeln aber leitet EL-BATTÂNÎ nach der Projektionsmethode ab, d. h. aus Orthogonalprojektionen der Himmelskugel auf den Horizont und auf den Meridian. Besonders wichtig sind die Formeln, die er auf diese Weise zur Bestimmung eines Stückes eines sphärischen Dreieckes findet, von dem zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind; vor allem hervorzuheben ist hier die Formel des 26. Kapitels (p. 37—40 und 200—204), durch welche EL-BATTÂNÎ die Bogendistanz zweier Sterne darstellt, und welche, wenn man den Radius $= 1$ setzt und die modernen Bezeichnungen einführt, in unsere heutige Formel übergeht:

$$\cos \text{dist.} = \sin \beta \sin \beta' + \cos \beta \cdot \cos \beta' \cdot \cos (L - L')$$

wo β und β' die Breiten und L und L' die Längen der beiden Sterne sind. Die Lösung ist von derjenigen des GEORG AMIRUCIUS (vergl. S. GÜNTHER, *Studien zur Gesch. der math. und phys. Geographie*, 1877, p. 307; v. BRAUNMÜHL, *Vorlesungen über Gesch. d. Trigonometrie*, I, p. 134; und CANTOR, *Vorlesungen*, II², p. 416—417) nicht wesentlich verschieden; statt wie AMIRUCIUS (vergl. die Figur a. a. O.) die Sehne cd nach der Formel $cd = \sqrt{bd^2 - bf^2 + fc^2}$ berechnet, verwandelt EL-BATTÂNÎ diese in $\sqrt{(fc + bf)(fc - bf) + bd^2}$ oder $\sqrt{bc \cdot de + bd^2}$, also in eine für die Berechnung einfachere Formel; die Sehnen bc, de und bd berechnet EL-BATTÂNÎ auf trigonometrische Weise, so ist z. B. $bc = 2 \sin \left(\frac{L - L'}{2}\right) \frac{\cos \beta}{r}$ usw., während AMIRUCIUS nur Sehnentafeln anwendet. Es ist nicht unwahrscheinlich, daß AMIRUCIUS seine Lösung derjenigen EL-BATTÂNÎS entnommen hat. Dieselbe Aufgabe wird von EL-ḤASAN B. ʿALÎ aus Marokko (vergl. SÉDILLOT, *Traité des instrum. astron. des Arabes*, Paris 1834, T. I, p. 321—322) und in den *Prolegomena* zu den Tafeln ULÛG BEGS (Übersetzung v. SÉDILLOT, Paris, 1853, p. 116—119) mit Hilfe rechtwinkliger sphärischer Dreiecke gelöst. Alle diese Lösungen beweisen zur Genüge, daß den arabischen Astronomen, wie schon v. BRAUNMÜHL (*Vorlesungen über Gesch. d. Trigonometrie* I, p. 53) richtig bemerkt hat (entgegen DELAMBRE, dem die neuern bis auf v. BRAUNMÜHL gefolgt sind), der sphärische Cosinussatz nicht bekannt war.

Wir müssen hier noch auf einen für die Geschichte der Trigonometrie nicht unwichtigen Punkt eintreten. Wir haben oben gesehen, daß EL-BATTÂNÎ es vermeidet, Tangenten und Cotangenten in seine Formeln einzuführen; in auffallendster Weise zeigt sich dies bei der Formel, die EL-BATTÂNÎ im 5. Kapitel für die Rektaszension der Sonne oder irgend eines Punktes der Ekliptik mit der Deklination δ gibt:

$$\sin \alpha = r \cdot \frac{\sin \delta \,.\, \cos \varepsilon}{\cos \delta \,.\, \sin \varepsilon}$$

wo ε die Schiefe der Ekliptik bezeichnet. Nun teilt uns NALLINO p. 163 mit, daß ḤABAŠ, der nach ihm ein Zeitgenosse von EL-BATTÂNÎ gewesen sein soll, diese Formel in folgender Weise gibt:

$$\sin \alpha = r \cdot \operatorname{tg} \delta \cdot \cot \varepsilon.$$

Also in einem Werke, das, wie NALLINO selbst zugibt, nur wenig später (höchstens 10 Jahre) als die Astronomie EL-BATTÂNÎS veröffentlicht wurde, treten die genannten Funktionen, die letzterer geflissentlich vermeidet, in den astronomischen Formeln auf. Diese Erscheinung läßt sich nur auf zwei Arten erklären: entweder wurden sofort nach dem Erscheinen der Astronomie des BATTÂNÎ Tangenten- und Cotangententafeln für den Radius = 60^p hergestellt, oder die Tafeln, die das Berliner Manuskript 5750 dem HABAŠ zuschreibt, sind nicht von diesem, sondern von einem spätern Astronomen. Nun teilt mir NALLINO, dem ich meine Zweifel hierüber geaussert hatte, in einem Briefe so gewichtige Gründe für die Echtheit der Berliner Tafeln des HABAŠ mit, daß ich gezwungen bin, die erste der beiden Annahmen als die richtige anzuerkennen. HABAŠ, in dessen noch vorhandenen „erprobten" oder „arabischen" Tafeln wir zum erstenmal Tangenten und Cotangenten für den Radius = 60^p angewendet finden, wird also erst nach 925 gestorben sein; in diesem Sinne sind also meine Angaben (in meinem Buche p. 12—13) zu ändern; ebenso soll es in Anmerkung 5^b (ibid. p. 208) heißen, das Berliner Ms. enthalte die „erprobten" Tafeln des HABAŠ.

p. XLIX—LX spricht NALLINO über die Übersetzungen des vorliegenden Werkes, erwähnt die verlorene des ROBERTUS RETINENSIS, die noch vorhandene des PLATO von Tivoli, und eine spanische, von der noch ein Exemplar in Paris (Biblioth. arsenalis Nr. 8322) existiert. — p. L, Note 3) wird ein Fehler WÜSTENFELDS rektifiziert, der auch in unser Buch (p. 46) übergegangen ist, daß ROBERTUS RETINENSIS nur die Tafeln EL-BATTÂNÎS und zwar nach einem Auszuge, den MASLAMA EL-MAGRÎTÎ aus denselben gemacht hatte, übersetzt habe; wie viel er vom Werke EL-BATTÂNÎS übersetzt hat, ist nicht bekannt, und MASLAMA hat nur die Tafeln der Gleichungen der Sonne, des Mondes und der fünf Planeten aus dem Werke EL-BATTÂNÎS ausgezogen. Der Fehler mag daher kommen, daß ROBERTUS die Tafeln EL-BATTÂNÎS für alle mittleren Bewegungen dem Meridian von London angepaßt und herausgegeben hat. — p. LVII stellt NALLINO die Behauptung STEINSCHNEIDERS richtig, der Kommentar des AHMED B. JÛSUF B. EL-DÂJE zum *Centiloquium* des PTOLEMÄUS sei nicht von JOH. HISPALENSIS, sondern von PLATO von Tivoli ins Lateinische übersetzt worden, weil der erstere in seinen Zeitangaben sich nie der arabischen Zeitrechnung bedient habe; nun weist aber NALLINO nach, daß in der Übersetzung des ALFRAGANUS, die unbestritten von JOH. HISPALENSIS stammt, in verschiedenen Codices das Datum der Vollendung in arabischer Zeitrechnung angegeben ist; die Übersetzung des Kommentars zum *Centiloquium* ist also, wie es bis auf STEINSCHNEIDER immer geschehen ist, dem JOH. HISPALENSIS zuzuschreiben.

Auf die Beschreibung des Codex des Escorial, die NALLINO p. LX—LXII gibt, trete ich hier nicht ein.

p. LXVI. NALLINO hält den Namen ABÛ MUH. ʿABDELGABBÂR B. ʿABDELGABBÂR EL-CHARAQÎ, den wir in unserm Buche (p. 116, Art. 276), als den unrichtigen betrachtet haben, für den richtigen dieses Autors, und nicht ABÛ BEKR MUH. B. AHMED B. ABÎ BIŠR EL-CHARAQÎ, was wahrscheinlich aus der Verwechslung unseres Autors mit dem berühmten Juristen letztern Namens (gest. 1138/39) entstanden sein wird.

p. LXXVI weist NALLINO nach, daß das dem TÂBIT b. QORRA zugeschriebene Werk *De quantitatibus stellarum* etc., das in verschiedenen Exemplaren noch vorhanden ist, sehr wahrscheinlich unecht sei.

p. LXXVIII und p. 301 erwähnt NALLINO das von EL-BIRÛNÎ in seiner *Chronologie* (Übersetzung von E. SACHAU, p. 322) zitierte, von den Arabern dem PTOLEMÄUS zugeschriebene Werk *Introductio ad artem sphaericam*; er vergißt hinzuzufügen, daß nachgewiesen ist, daß dieses Werk die in einer spätern Umarbeitung noch griechisch vorhandene *Isagoge* des GEMINUS ist (vergl. die

Ausgabe derselben durch C. Manitius, Leipzig, 1898); die von el-Birûnî zitierte Stelle findet sich leider infolge einer Lücke nicht im griechischen Text, dagegen im lateinischen der Codices von Dresden und Florenz (Laurent. 168), aus denen Manitius die erwähnte Lücke ergänzt hat (l. c. p. 286).

Es folgt nun p. 1—150 die lateinische Übersetzung des Textes des Battânî (ohne die Tafeln); auf eine Vergleichung dieser Übersetzung mit dem arabischen Texte trete ich, wie ich schon im Anfange bemerkt habe, hier nicht ein, ich hebe nur das große Verdienst Nallinos hervor, den wahren Wortlaut und Sinn mancher verdorbener Stellen des Textes richtig erkannt, und uns so eine tadellose, die Platonische hoch überragende Übersetzung dieses wichtigen Buches gegeben zu haben.

Zu p. 10—11, wo über die ganzen Sehnen und Sinusse, die also el-Battânî *chordae integrae*, bezw. *chordae* nennt, gehandelt wird, gibt Nallino p. 154—156 Erläuterungen, die sich besonders auf die Geschichte der Wörter *jyâ* (oder *jîvâ*) = *ǵaib* = *sinus* beziehen; wir heben hieraus eine bis jetzt noch nicht gegebene Richtigstellung einer Übersetzung Athelards heraus; dieser gab in den Tafeln des Chowârezmî *ǵaib maʿkûs* durch *gaib*[1]) *diminutus* wieder, es soll aber heißen *ǵaib versus* = *sinus versus*; auch *gaib planus* für *ǵaib mustawî* ist keine gute Wiedergabe, besser wäre *ǵaib rectus*; es scheint, als ob Athelard diese Ausdrücke nicht verstanden habe. — Zu p. 11 bemerkt Nallino in Note c) p. 156, daß das Berliner Ms. 5752 die Sinustafeln des Ibn Jûnis von Minute zu Minute berechnet enthalte.

p. 12—13 (Kap. IV) handelt von der Schiefe der Ekliptik; hierzu macht Nallino p. 157—162 interessante Zusätze, aus denen wir entnehmen, daß den arabischen Astronomen nach el-Battânî, wie z. B. ʿAbderrahmân el-Châzinî und Nasîr ed-dîn el-Tûsî die Abnahme der Schiefe der Ekliptik wohl bekannt war; der letztere knüpft eine Reihe von Folgerungen an diese Tatsache an.

Zu p. 23 (Kap. XI) macht Nallino p. 185 in Note 1) die Bemerkung, die Ansicht v. Braunmühls (*Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* I, 52 Note 1), daß Regiomontan die Beweise des Albategnius, die in der Druckausgabe nicht angeführt sind, doch kannte, sei nicht richtig; für Regiomontan war es keine große Schwierigkeit, die Beweise selbständig zu finden.

p. 36—37 (Kap. XXV). Daß die Formeln dieses Kapitels sämtlich falsch sind, zeigen Nallino und Schiaparelli p. 197—199; sehr wahrscheinlich liegt hier eine spätere Einschiebung in den Text vor.

p. 40—42 (Kap. XXVII) spricht el-Battânî über die Länge des Jahres und erwähnt, daß die Ägypter und Babylonier die Jahreslänge zu $365^d\ 6^h\ 12^m$ angenommen hätten; Nallino weist in den Anmerkungen hierzu (p. 204—209) nach, daß wenigstens die Babylonier (Chaldäer) der spätern Zeit (c. 100 v. Chr.) das siderische Jahr gekannt haben, und daß es wahrscheinlich von ihnen auf die Inder und Perser übergegangen sei; er führt aber auch die neuesten Arbeiten von F. X. Kugler an (*Die babylonische Mondrechnung* etc., Freiburg i. Br. 1900, p. 91), aus denen hervorgeht, daß die Babylonier schon im 3. und 4. Jahrh. v. Chr. die Länge des siderischen Jahres zu $365^d\ 6^h\ 13^m\ 43^s$ angegeben haben. — p. 42 gibt el-Battânî den Zeitpunkt seiner Beobachtung eines Herbstäquinoctiums in Raqqa an; nach den Tafeln R. Schrams (*Hilfstafeln für Chronologie*, in den Denkschriften der Akademie der Wissenschaften

1) Athelard übersetzte das Wort *ǵaib* nicht.

zu Wien (mathematische Klasse) **45**, 1882) fand dasselbe im Jahre 882, am 18. September, 11^{h} 49^{m} statt (Greenw. Zeit), Nallino weist nach, daß die Angabe el-Battânîs mit derjenigen Schrams bis auf 1^{h} 10^{m} stimmt: gewiß ein ausgezeichnetes Resultat, wenn man die astronomischen Hilfsmittel jener Zeit in Berücksichtigung zieht! Und nicht ausgeschlossen ist, daß auch in den Berechnungen Schrams ein Fehler liegen könnte.

p. 44 (Kap. XXVIII) wird über die eigene Bewegung des Apogeums gesprochen, die el-Battânî, wie schon Delambre richtig bemerkt hat, infolge der schwierigen Beobachtung der Länge des Apogeums nicht erkannt hat; hierzu zitiert Nallino p. 217 eine Stelle Abû'l-Ḥasans von Marokko (Sédillot, *Traité des instrum. astron. des Arabes* I, p. 132), die bis jetzt unberücksichtigt geblieben ist, nach welcher el-Zarqâlî eine Vorwärtsbewegung (im Sinne der Zeichen) des *Apogeums* von 1° in 299 Jahren gefunden habe, was mit der heutigen Beobachtung von 11,46″ per Jahr sehr schön übereinstimmt; allerdings nahm el-Zarqâlî diese Bewegung wie die Präzession periodisch vorwärts und rückwärts gehend an.

p. 49 (Kap. XXIX). Aus den letzten Sätzen dieses Kapitels schließt Schiaparelli (p. 223, Note d), daß el-Battânî zwei wichtige Facta schon erkannt habe, nämlich daß erstens die Zeitgleichung sich langsam mit der säkularen Bewegung des Apogeums ändere, und daß zweitens die Ansicht des Ptolemäus von der Unveränderlichkeit des Abstandes des Sonnenapogeums vom Frühlingspunkte falsch sei.

p. 56—63 (Kap. XXX) werden von el-Battânî zwei Sonnen- und zwei Mondfinsternisse besprochen; p. 226—237 zeigt Schiaparelli, daß die Angaben el-Battânîs mit den Berechnungen von Oppolzer, Ginzel und Schram recht schön stimmen. — p. 236 bemerkt Nallino, daß el-Battânî im Gegensatz zu Ptolemäus die Variabilität des scheinbaren Sonnendurchmessers erkannt habe, er gibt als Minimum 31′ 20″, als Maximum 33′ 40″ an.

p. 77 (Kap. XXXIX) wird von den *Parallaxen* gehandelt; bekanntlich hatte Ptolemäus die Parallaxen aller fünf Planeten als unmerklich erklärt; diesem widersprechen el-Fargânî und el-Battânî wenigstens in Bezug auf Merkur und Venus; hierzu führt Nallino (p. 252) eine Stelle Ǧâbir b. Aflaḥs an (lib. VII, p. 103), worin dieser mit Recht Ptolemäus angreift, weil er der Sonne eine Parallaxe von 2′ 51″ zuschreibe, den näher an der Erde sich befindenden Planeten Merkur und Venus aber keine.

p. 85—92 (Kap. XLI) kommt el-Battânî auf die schwierige Aufgabe, die Zeit der ersten Sichtbarkeit der Mondsichel nach dem Neumonde zu berechnen; Schiaparelli gibt zu diesem nicht leicht zu verstehenden Kapitel einen interessanten Kommentar (p. 266—268), an dessen Schlusse er bemerkt: „Tota haec theoria ingeniosissime et elegantissime condita est . . . . Tamen hodie etiam difficillimum est melius facere“.

p. 99—100 (Kap. XLIII) wird die Fläche der verdunkelten Mondscheibe bei einer Mondfinsternis berechnet; Schiaparelli gibt p. 276 eine sehr schöne Ableitung der Regeln el-Battânîs und nennt dessen Lösung mit Recht „vere elegantissima“.

p. 115 (Kap. XLVII). Das in der lateinischen Übersetzung des Plato an zwei Stellen vorkommende, bis jetzt unverständliche Wort *effregion* lautet im arabischen Text nicht an beiden Stellen gleich, sondern an der ersten Stelle *afîgijûn* (= $\dot{\alpha}\pi\acute{o}\gamma\epsilon\iota o\nu$), an der zweiten *ferîgijûn* (= $\pi\epsilon\varrho\acute{\iota}\gamma\epsilon\iota o\nu$); sie sind von el-Battânî aus dem ins Arabische übersetzten *Almagest* hinübergenommen.

p. 120—124 (Kap. L) handelt über die Entfernungen der Planeten von der Erde; Nallino gibt hierzu eine Reihe von Stellen arabischer und griechischer Autoren wieder (p. 286—289), aus denen wir nur eine hervorheben: el-Bîrûnî erwähnt in seiner *Indischen Chronik* (Edit. Sachau, Text II, p. 234—236, Übersetzung II, p. 68—69) ein Buch des Ptolemäus, betitelt *el-manšûrât* (= *res vulgatae*); Nallino vermutet, daß dies die *Hypotyposes* des Proklus seien; hierzu ist nur zu bemerken, daß dieses Werk des Proklus in der arabischen Literatur nirgends genannt wird, und daß in demselben Ptolemäus mehrmals zitiert wird, was die arabischen Autoren, und besonders einen Bîrûnî auf den Gedanken hätte bringen sollen, daß dasselbe nicht von Ptolemäus herstamme; immerhin ist die Möglichkeit von Nallinos Hypothese nicht ausgeschlossen.

p. 123 finden sich Angaben über die scheinbaren Durchmesser von Sonne, Mond und der Planeten, die von den übrigen im Werke vorkommenden sich hierauf beziehenden Zahlen sehr abweichen; p. 290—292 zeigen Schiaparelli und Nallino überzeugend, daß diese Stelle von einem Westaraber interpoliert worden ist.

p. 126 (Kap. LII) spricht el-Battânî über die Theorie der Trepidation der Fixsterne und verwirft sie; p. 298—304 gibt Nallino eine Reihe von Stellen aus griechischen und arabischen Astronomen wieder, um die Geschichte dieser Theorie zu beleuchten; die arabischen Astronomen schöpften sie teils aus griechischen, teils aus indischen Quellen; Abraham bar Chijjâ berichtet, daß die Weisen Indiens, des oströmischen Reiches und der Chaldäer diese Vorstellung von der Hin- und Herbewegung der Fixsterne gehabt hätten; el-Betrogî (Alpetragius) und Abraham Zachut führen als Gewährsmann den mythischen Astrologen Hermes an. Die ostarabischen Astronomen ließen diese Theorie bald nach 1000 fallen, bei den Westarabern und im christlichen Abendland hielt sie sich viel länger.

p. 128 (Kap. LIII) wird von der sogenannten *revolutio annorum* gehandelt. Dieser so oft vorkommende astrologische Ausdruck, den ich in meinem Buche mit „Umlauf der Jahre“ übersetzt habe, wäre nach Nallino (p. 304) besser durch *conversio* (= Umwandlung) *annorum* wiederzugeben; er gibt dazu folgendes Beispiel: „Jemand ist am 26. Ailûl 1100 (der Seleucid. Ära) um $17^{h}\,45^{m}$ geboren, da die Sonne im Grade x der Ekliptik stand, es wird der Zeitmoment gesucht, in welchem im Jahre 1126, da der Betreffende 26 Jahre zurückgelegt hat, die Sonne zum selben Punkte zurückkehrt“. Diese Berechnung wird also *conversio annorum nativitatum* = Umwandlung der Geburtsjahre genannt; für Ereignisse der Völker, Städte, etc. heißt die analoge Berechnung „Umwandlung der Jahre der Welt“.

p. 139—141 (Kap. LVII) gibt el-Battânî eine interessante Beschreibung einer Armillarsphäre, zu der Schiaparelli eine entsprechende Zeichnung in vorzüglicher Weise entworfen hat. p. 143—144 werden die parallaktischen Lineale beschrieben.

Es folgen nach dem LVII. Kapitel acht Anhänge, welche Nallino, den vierten und sechsten ausgenommen, als echt betrachtet, obgleich sie in der Übersetzung des Plato fehlen; da sie sich meistens auf die Tafeln beziehen, hat sie wohl Plato wie diese selbst weggelassen.

p. 310, Note 3: In meinem Buche (*Die Mathematiker und Astronomen der Araber*, p. 14, Z. 21 v. o.) ist nach NALLINO statt „*Almagest*übersetzung“, die RABBAN EL-TABARÎ gemacht haben soll, zu lesen „Übersetzung des *Quadripartitum*“; dementsprechend sind auch Z. 26 v. o. die Worte in der Klammer „sollte heißen: ISḤÂQ B. ḤONEIN“ zu streichen, denn ḤONEIN hat in der Tat das *Quadripartitum* übersetzt.

p. 318 bespricht NALLINO EL-BATTÂNÎs Berechnung des Azimutes der Qibla; es ist richtig, daß EL-BATTÂNÎs Formel (p. 137) nur eine angenäherte ist, sie entspricht eben der einfachen Konstruktion, die er auf der Sonnenuhr (l. c.) gibt. In der Herleitung der genauen Formel für das Azimut der Qibla, die NALLINO hierauf folgen läßt, begeht er aber zwei Fehler, indem er erstens das Dreieck ABC als bei C rechtwinklig voraussetzt, während ja die Ost-Westlinie auf dem Meridian des Beobachtungsortes und nicht auf demjenigen von Mekka senkrecht steht, und zweitens $\cos A = R \cdot \frac{\sin AC}{\sin AB}$ statt $= R \cdot \frac{\operatorname{tg} AC}{\operatorname{tg} AB}$ setzt; so kommt er auf die Formel: $\cos \mathrm{az} \cdot = R \cdot \frac{\sin (L-L') \cos \varphi'}{\sin \mathrm{dist.}}$ statt auf die richtige: $\cos \mathrm{az} \cdot = R \cdot \frac{\sin (L-L') \cos \varphi}{\sin \mathrm{dist.}}$.

Zum Schlusse dürfen wir einen wesentlichen Vorzug dieses ausgezeichneten Werkes nicht unerwähnt lassen: es ist dies die Korrektheit der Wiedergabe fremdsprachlicher Zitate; ein Vorrecht, das bekanntlich seit langer Zeit die deutschen Gelehrten für sich in Anspruch genommen haben, ist, wie gewiß alle unparteiischen Leser zugestehen werden, mit dieser Leistung glänzend durchbrochen worden; das haben wir nur den großen Sprachkenntnissen NALLINOS und seinem gewissenhaften und sorgfältigen Arbeiten zu verdanken.

Möchten andere arabische Astronomen und Mathematiker bald eine Ausgabe erhalten, wie sie hier EL-BATTÂNÎ zu teil geworden ist.

Kilchberg, b. Zürich. HEINRICH SUTER.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

Ahrens, 82.
Alasia, 58.
Amodeo, 60.
Bashforth, 34.
Baudin, 89.
Bertrand, 13.
Beyel, 93.
Björnbo, 23, 28.
Blaserna, 81.
Boccardini, 50.
Boffito, 17.
Bopp, 49.
Bosscha, 41.
Braunmühl, 11.
Bryan, 80, 83.
Burkhardt, 55.
Cajori, 48.
Cantor, 6, 72.
Cardinaal, 4.
Carrara, 12.
Crespi, 18.
Curtze, 25.
Dannemann, 15.
Darmstädter, 7.
De la Campa, 37.
Des Marez, 43.
Dickstein, 68.
Du Bois Reymond, 7.
Duhem, 14, 31.
Dünner, 27.
Duporcq, 5.
Egoroff, 76.
Eneström, 1, 24, 38, 56, 92.
Favaro, 32, 40, 51.
Fazzari, 81.
Feldhaus, 39.
Gauss, 67.
Godefroy, 53.
Goodspeed, 22.
Guttmann, 26.
Heiberg, 19, 21.
Hettner, 62.
Hlibowicky, 71.
Kapteyn, 4.
Klores, 69.
Kluyver, 4.
Konigsberger, 73.
Korteweg, 4.
Krazer, 97.
Lagrange 46.
Lampe, 3, 84, 85.
Lazzarini, 29, 30.
Le Chatelier, 83.
Lorey, 16, 47.
Loria, 2, 94.
Mach, 13.
Mackay, 57.
Mascart, 88.
Maupin, 42.
Mlodziejowski, 75.
Muir, 59.
Muller, Felix, 90, 91.
Noether, 86.
Oettingen, 78.
Oudemans, 41.
d'Ovidio, 81.
Papperitz, 33.
Picard, 13.
Poggendorff, 78.
Ptolemaios, 21.
Richter, 95.
Rosanes, 63.
Saccheri, 50.
Scheffers, 77.
Schmidt, 20.
Schoute, 4.
Schreiber, 44.
Shedd, 45.
Simon, 65.
Stäckel, 64.
Staude, 54.
Streit, 66.
Tannery, 96.
Toledo, 36.
Tropfke, 8.
Vailati, 52.
Veronese, 81.
Viterbi, 86.
Wallenberg, 3.
Wallner, 35.
Ward, 79.
Wilson, 97.
Wolffing, 61.
Zeuthen, 9, 10.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8⁰. [1

4_3 (1903) : 4. — [Rezension des Bandes 3_3, 1902:] *Bruxelles,* Soc. scient., Revue des quest. scient. 5_3, 1904, 282—284. (H. Bosmans.)

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8⁰. [2

1903 : 4. — 1904 : 1.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik herausgegeben von E. Lampe und G. Wallenberg. Berlin. 8⁰. [3

32 (1901) : 3.

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la société mathématique d'Amsterdam par P. H. Schoute, D. J. Korteweg, J. C. Kluyver, W. Kapteyn, J. Cardinaal. Amsterdam. 8⁰. [4

12 : 1 (avril — octobre 1903).

Compte rendu du deuxième congrès international des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900. Procès-verbaux et communications publiés par E. Duporcq (1902). [Rezension:] Zeitschr. für Mathem. **49**, 1903, 469. (Wolffing.) — Jornal de sc. mathem. **15**, 1903, 89. (G. T.) [5

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. — **1²** (1894). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 396—397. (G. Eneström.) — **2²** (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 397—398. (G. Eneström.) — **3²** (1901). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 399—401. (G. Eneström, A. von Braunmühl.) [6

***Darmstädter, L.** und **Du Bois-Reymond, R.,** 4000 Jahre Pionier-Arbeit in den exakten Wissenschaften. Berlin, Stargardt 1904. [7

8⁰, V + 389 S. — [5 M.] — [Rezension:] Deutsche Literaturz. **25**, 1904, 106—108. (E. Gerland.)

Tropfke, J., Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. II (1903). [Rezension:] Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 404—412. (G. Eneström.) [8

Zeuthen, H. G., Forelaesninger over Mathematikens Historie. II (1903). [Résumé:] *Kobenhavn,* Vidensk. Selsk., Oversigt 1903, 553—572. (H. G. ZEUTHEN.) — [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 27_2, 1903, 298—299. [9

Zeuthen, H. G., Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert. Deutsche Ausgabe (1903). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 27_2, 1903, 298—299. [10

Braunmühl, A. von, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. II (1903). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 10_2, 1903, 153—157. (F. CAJORI.) [11

Carrara, B., I tre problemi classici degli antichi in relazione ai recenti risultati della scienza. II (1903). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 5_3, 1904, 285—287. (H. BOSMANS.) [12

***Mach, E.**, La mécanique. Etude historique et critique de son développement. Traduite sur la quatrième édition allemande par E. BERTRAND. Avec une introduction par E. PICARD. Paris, Hermann 1904. [13
8, VIII + 496 S. — [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 27_2, 1903, 261—283; *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 5_3, 1904, 198—217. (P. DUHEM.)

Duhem, P., L'évolution de la mécanique. [14
Revue génér. d. sc. 14, 1903. — [Sonderabzug:] Paris, Joanin 1903. 8⁰, (3) + 348 S. — [Polnische Übersetzung von S. DICKSTEIN:] Wiadomósci matem. 7, 1903, 113—168, 244—288.

Dannemann, F., Grundriß einer Geschichte der Naturwissenschaften. II. Aufl. 2 (1903). [Rezension:] Naturwiss. Rundschau 18, 1903, 618. (P. R.) [15

b) Geschichte des Altertums.

Lorey, W., Die Mathematik und das klassische Altertum. [16
Zeitschr. für das Gymnasialwesen (Berlin) 57, 1903, 815—822.

***Boffito, G.**, Cosmografia primitiva, classica e patristica. [17
Roma, Accad. pontif. dei N. Lincei, Memorie 19—20, 1903. — [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 5_3, 1904, 287—288. (H. BOSMANS.)

Crespi, A., Intorno all' interpretazione di un luogo matematico di Platone. [18
Rivista di filosofia (Bologna) 5 : 1, 1903, 343.

Heiberg, J. L., Paralipomena zu Euklid (1903). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 5_3, 1903, 284—285. (H. BOSMANS.) [19

Schmidt, W., Über den griechischen Mathematiker Dionysodoros. [20
Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 321—325.

Cl. Ptolemaei Opera. Edidit J. L. HEIBERG. I : 2 (1902). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 25, 1904, 242—243. (K. MANITIUS.) [21

***Goodspeed, E. J.**, The Ayer papyrus. [22
Americ. mathem. monthly 10, 1903, No. 5.

c) Geschichte des Mittelalters.

Björnbo, A. A., Über ein bibliographisches Repertorium der handschriftlichen mathematischen Literatur des Mittelalters. [23
Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 326—333.

Eneström, G., Über einen Brief von Gerbert an Adelbold. [24
Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 402. — Anfrage.

Curtze, M., Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance (1902). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 5_3, 1904, 288—295. (H. BOSMANS.) — Nyt Tidsskr. for Mathem. 14, 1903, B : 67. [25

Guttmann, M., Abraham bar Chijja Savasorda geometriájának III. fejezete mint adalék Euclidesnek Περι διαιρεσεων βιβλιον czimü elveszett munkájahoz bölcsészettudori értekezés két Müncheni codex alapján kiadta, forditotta és jegyzetekkel ellátta. Budapest 1903. [26
8⁰, 28 + 15 + (1) S + 1 Taf. — Das 3. Kapitel der Geometrie des ABRAHAM BAR CHIJJA SAVASORDA, als Beitrag zur Kenntnis der verlornen Schrift EUKLID's Περὶ διαιρέσεων βιβλίον. Nach zwei Münchener Handschriften herausgegeben, übersetzt und erläutert.

Dünner, L., Die älteste astronomische Schrift des Maimonides (1902). [Rezension:] Zeitschr. für Mathem. 49, 1903, 387. (C. W. WIRTZ.) [27

Björnbo, A. A., Die mathematischen S. Marcohandschriften in Florenz (1903). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 25, 1904, 370—371. [28

Lazzarini, M., Leonardo Fibonacci, le sue opere e la sua famiglia. [29
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 6, 1903, 98—102; 7, 1904, 1—7.

Lazzarini, M., I giuochi aritmetici di Leonardo Pisano. [30
Supplemento al Periodico di matem. 7, 1903, 2—7.

Duhem, P., Léonard de Vinci et la composition des forces concourantes. [31
Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 338—343.

Favaro, A., Sul matematico cremonese Leonardo Mainardi. [32
Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 334—337.

d) Geschichte der neueren Zeit.

Papperitz, E., Über die wissenschaftliche Darstellung der neueren Geometrie und ihre Entwickelung (1901). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 24, 1903, 2840. [33

***Bashforth, F.**, Historical sketch of the experimental determination of the resistance of the air to the motion of projectiles. Cambridge 1903. [34
8⁰, 30 S. + 1 Taf. — [1 sh.]

Wallner, C. R., Über den deutschen Mathematiker Andreas Alexander. [35
Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 403. — Antwort auf eine Anfrage.

Toledo, L. O. de, Dos versiones españolas de los Elementos de Euclides. [36
Rivista trimestrial de matem. 3, 1903, 65—66.

De la Campa, S., Traducciones castellanos de los Elementos de Euclides. [37
Rivista trimestrial de matem. 3, 1903, 113—114.

Eneström, G., Über einen geometrischen Quadranten von 1594. [38
Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 403. — Antwort auf eine Anfrage.

***Feldhaus, F. M.,** Die Begründung der Lehre von Magnetismus und Elektrizität durch William Gilbert († 1603). Heidelberg, Winter 1904. [39
8⁰. — [0.80 M.]

Favaro, A., Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. IX. Giovanni Camillo Gloriosi. [40
Venezia, Istituto Veneto, Atti 63 : 2, 1903, 1—48.

Oudemans, J. A. C. et **Bosscha, J.,** Galilée et Marius (1903). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 5_3, 1904, 295—297. (H. Bosmans.) [41

Maupin, G., Opinions et curiosités touchant la mathématique. II (1902). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 10_2, 1904, 206—207. (F. Cajori.) — Revue génér. d. sc. 14, 1903, 520. [42

***Des Marez, G.,** Notices sur les documents relatifs à Michel-Florent van Langren conservés aux archives de la ville de Bruxelles. [43
Revue des bibliotheques et archives de Belgique 1903.

Schreiber, P. J., Christoph Scheiner und seine Sonnenbeobachtungen (1902). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 5_3, 1904, 297—298. (H. Bosmans.) [44

Shedd, J. C., The word Barometer. [45
Science 19_2, 1904, 108—110.

Lagrange, Ch., Newton et le principe de la limite (l'infiniment petit absolu). [46
Bruxelles, Acad. de Belgique, Bulletin 1903, 659—683.

Lorey, W., Nachtrag zu der Notiz über Newtons Grabdenkmal. [47
Zeitschr. für mathem. Unterr. 35, 1904, 88.

Cajori, F., War die Binomialreihe auf Newtons Grabstein eingemeiselt? [48
Zeitschr. für mathem. Unterr. 35, 1904, 89.

Bopp, K., Antoine Arnauld, der große Arnauld als Mathematiker (1902). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 6, 1903, 124—125. [49

***Saccheri, G.,** Euclide emendato. Traduzione e note di G. Boccardini. Milano, Hoepli 1904. [50
16⁰, 24 + 126 S. — [Rezension:] Periodico di matem. 19, 1903, 149—150.

Favaro, A., Due lettere inedite del P. Girolamo Saccheri a Vincenzo Viviani, pubblicate ed illustrate. [51
Rivista di fisica (Pavia) 4, 1903. 15 S.

Vailati, G., Di un opera dimendicata del P. Gerolamo Saccheri („Logica demonstrativa", 1697). [52
Rivista filosofica (Pavia) 1903. 15 S.

Godefroy, M., La fonction gamma. Théorie, historique, bibliographie (1901). [Rezension:] Arch. der Mathem. 7_3, 1904, 149—151. (R. Haussner.) [53

Staude, O., Die Hauptepochen der Entwickelung der neueren Mathematik (1902). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 24, 1903, 2960—2961. [54

Burkhardt, H., Entwickelungen nach oscillierenden Functionen (1901—1903). [Résumé:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 12, 1903, 563—565. (H. Burkhardt.) [55

Eneström, G., Der Briefwechsel zwischen Leonhard Euler und Johann I. Bernoulli. I. [56
Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 344—388. — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 25, 1904, 499.

Mackay, J. S., Mathematical correspondence. Robert Simson, Matthew Stewart, James Stirling. [57
Edinburgh, Mathem. soc., Proceedings 21, 1903, 2—39.

***Alasia, C.,** Sul stato della teoria delle congruenze binomie avanti il 1852. [58
Rivista di fisica (Pavia) 4 : 2, 1903, 149—208.

Muir, Th., The theory of axisymmetric determinants in the historical order of development up to 1841. [59
Edinburgh, Royal soc., Proceedings 24, 1903, 555—571.

Amodeo, F., Nicolo Fergola. [60
Napoli, Accad. Pontaniana, Atti 33, 1903. 32 S.

Wölffing, E., Mathematischer Bücherschatz. I (1903). [Rezension:] *New York,* Americ. mathem. soc., Bulletin 10_2, 1904, 261—263. (D. E. Smith.) — Arch. der Mathem. 7_3, 1904, 137—146. (F. Müller.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 6, 1903, 109—110. (G. L.) — Bullet. d. sc. mathém. 27_2, 1903, 343. (G. D.) — L'enseignement mathém. 6, 1904, 83. (H. Fehr.) [61

Hettner, G., Alte mathematische Probleme und ihre Klärung im neunzehnten Jahrhundert. Berlin 1904. [62
4⁰, 18 S. — Rede in der Technischen Hochschule in Berlin am 26. Januar 1904.

Rosanes, J., Charakteristische Züge in der Entwickelung der Mathematik des 19. Jahrhunderts. [63
Deutsche Mathem.-Verein, Jahresber. 13, 1904, 17—30. — Rektoratsrede.

Stäckel, P., Über die Geschichte des Begriffes „zweite Krümmung" und des Termes „Torsion". [64
Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 402. — Anfrage.

Simon, M., Zur Geschichte der regulären Sternpolyeder. [65
Arch. der Mathem. 7_3, 1904, 109. — Über ein Zitat von Poisson (1809).

***Streit, H.,** Die Fortschritte auf dem Gebiete der Thermoelektrizität von der

Entdeckung bis zur Mitte des vorigen Jahrhunderts. Kattowitz 1903. [66
8⁰, 84 S. + 2 Tabellen + 1 Taf. — [Rezension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 35, 1904, 79. (Meyer.)

Gauss, C. F., Werke. Herausgegeben von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen. Band 9. Göttingen 1903. [67
4⁰, (3) + 528 S. — [26 M.] — [Rezension:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 13, 1904, 59—60. (F. Klein.)

Dickstein, S., Jan Joachim Livet (1783—1812). [68
Wiadomosci matem. 7, 1903, 225—243.

***Klöres, C.,** Zur Geschichte der Steinerschen Konstruktionen einer Fläche zweiter Ordnung. Rostock 1903. [69
8⁰, 39 S. + 2 Taf.

Niels Henrik Abel. Mémorial publié a l'occasion du centenaire de sa naissance (1902). [Rezension:] Journ. des savants 1903, 109—119. (E. Picard.) [70

***Hlibowicky, K.** [Niels Henrik Abel und seine Bedeutung in der Mathematik]. [71
Lemberg, Ševčenko-Gesellsch., Abhandlungen 9, 1903, No. 1. 88 S. — In kleinrussischer Sprache.

Cantor, M., Ferdinand Schweins und Otto Hesse (1903). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 6, 1903, 127. [72

Königsberger, L., Hermann von Helmholtz (1902—1903). [Rezension:] Arch. der Mathem. 7_3, 1904, 158—159. (E. Jahnke.) — Nature 68, 1903, 193. — Philos. magazine 5_6, 1903, 288. — Zeitschrift für mathem. Unterr. 35, 1904, 60—68. (A. Wangerin.) [73

Lord Kelvin and his first teacher in natural philosophy. [74
Nature 68, 1903, 623—624.

***Mlodziejowski, B. K.** [Karl Michailovitch Peterson und seine geometrischen Arbeiten]. [75
Moskwa, Matem. obchtch., Sbornik 24, 1903, 1—21. — Russisch.

***Egoroff, D. Th.** [Die Arbeiten von K. M. Peterson auf dem Gebiete der partiellen Differentialgleichungen]. [76
Moskwa, Matem. obchtch., Sbornik 24, 1903, 22—29. — Russisch.

Scheffers, G., Über Integrationstheorien von Sophus Lie. Vorläufiger Bericht. [77
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 12, 1903, 525—539.

J. C. Poggendorffs Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. Vierter Band (die Jahre 1883 bis zur Gegenwart umfassend), herausgegeben von A. J. von Oettingen. Lief. 12—17. Leipzig, Barth 1903. [78
8⁰, S. 793—1224. — [18 M.] — Rezension der Lief. 1—13:] Zeitschr. für Mathem. 49. 1903, 469—470. (E. Wolffing.)

Ward, R. De C., Meteorological bibliographies. [79
Science 18_2, 1903, 795.

e) Nekrologe.

Karl Anton **Bjerknes** (1825—1903). [80
Nature 68, 1903, 133. (G. H. Bryan.)

Luigi **Cremona** (1830—1903). [81
Roma, Accad. d. Lincei, Rendiconti 12_5: 2, 1903, 664—678 [mit Schriftverzeichnis]. (G. Veronese.) — *Torino,* Accad. d. sc., Atti (sc. fis.) 38, 1903, 549—551. (E. d'Ovidio.) — Il Pitagora 10, 1903, 1—3 [mit Porträt]. (G. Fazzari.) — Nature 68, 1903, 393—394. (P. Blaserna.)

Hermann **Gerlach** (1826—1903). [82
Zeitschr. für mathem. Unterr. 34, 1903, 583—590 [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (W. Ahrens.)

Josiah Willard **Gibbs** (1839—1903). [83
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 7, 1904, 29. — Nature 68, 1903, 11. (G. H. Bryan.) — Revue génér. d. sc. 14, 1903, 644—648. (H. Le Chatelier.)

Meyer **Hamburger** (1838—1903). [84
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 13, 1904, 40—53 [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (E. Lampe.)

Julius **Lange** (1846—1903). [85
Berlin, Deutsche physik. Gesellsch. 6, 1904, 85—100. (E. Lampe.)

Sophus **Lie** (1842—1899). [86
Giorn. di matem. 41, 1903, 145—180. (Übersetzung durch A. Viterbi des Nekrologes von M. Noether in den Mathem. Ann. 53, 1900.)

Léon **Ripert** (1840?—1903). [87
L'enseignement mathém. 6, 1904, 69—70. (C. A. L.)

George Gabriel **Stokes** (1819—1903). [88
Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus 136, 1903, 841—846. (J. Mascart.)

f) Aktuelle Fragen.

Baudin, P., La chaire d'histoire générale des sciences au Collège de France. Lettre au ministre de l'instruction publique. Paris 1904. [89
8⁰, 7 S. — Abdruck aus der Zeitung „Le siècle" 31. Januar 1904. — Über die Ernennung des Herrn Wyrouboff zum Professor anstatt des in erster Linie vorgeschlagenen Kandidaten Herrn Paul Tannery.

Müller, Felix, Welche Bedeutung hat für den Lehrer der Mathematik die Kenntnis der Geschichte, Literatur und Terminologie seiner Wissenschaft? [90
Zeitschr. für Gymnasialwesen (Berlin) 57, 1903, 801—815. — [Résumé:] Verhandl. d. 47. Vers. deutscher Philol. und Schulm. (Leipzig 1904), S. 160—162.

Müller, Felix, Zur Frage der Begründung einer mathematischen Zentralbibliothek. [91
Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 389—391.

Eneström, G., Über Ausstellungen mathematischer Literatur. [92
Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 392–395.

Beyel, Chr., Die Bezeichnung in der darstellenden Geometrie. [93
Zeitschr. für mathem. Unterr. 34, 1903, 542–550.

Loria, G., Les femmes mathématiciennes. [94
Revue scient. 21_4, 1903, 385–392.

Richter, A., Die Studenten der Mathematik auf den technischen Hochschulen. [95
Zeitschr. für mathem. Unterr. 34, 1903, 473–479.

[Verhandlungen des Kongresses für Geschichte der Mathematik und Physik in Rom 1903.] [96
Revue internationale de l'enseignement (Paris) 1903. 8 S. (P. Tannery.)

[Verhandlungen der deutschen Mathematiker-Vereinigung in Kassel 1903.] [97
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 12, 1903, 517–524. (A. Krazer.) — *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 10_2, 1904, 230–239. (R. E. Wilson.) — L'enseignement mathém. 6, 1904, 59–60.

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— Dr. H. F. Baker in Cambridge (England) zum „Lecturer of mathematics“ an der Universität daselbst.

— Dr. G. A. Bliss in Minneapolis zum Professor der Mathematik an der Universität in Chicago.

— J. W. Brister zum Professor der Mathematik an der Universität in Nashville.

— Professor J. B. Dale in Cambridge zum Professor der Mathematik am „Kings college“ in London.

— Professor G. B. Halsted in Texas zum Professor der Mathematik am „Kenyon college“, Gambier (Ohio).

— Professor F. W. Hanawalt in Mount Pleasant (Iowa) zum Professor der Mathematik und Astronomie am „Albion college“ (Michigan).

— Dr. E. W. Hobson in Cambridge (England) zum „Lecturer of mathematics“ an der Universität daselbst.

— Professor E. Lacour in Nancy zum Professor der Mathematik an der Universität in Rennes.

— M. A. Mackenzie in Toronto zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Dr. H. C. de Mott zum Professor der Mathematik an der „Illinois Wesleyan university“.

— Dr. H. C. Richards zum Professor der Physik an der Universität von Pennsylvania.

— Professor H. Struve in Königsberg zum Professor der Astronomie an der Universität in Berlin.

— Professor E. Study in Greifswald zum Professor der Mathematik an der Universität in Bonn.

— S. A. F. White in Oxford zum Professor der Mathematik am „Kings college“ in London.

— Professor F. G. Wrenn zum Professor der Mathematik am „Tufts college“.

Todesfälle.

— Marcus Baker, Kartograph an der geologischen Untersuchung der Vereinigten Staaten, geboren in Kalamazoo (Mich.), den 23. September 1849, gestorben in Washington den 12. Dezember 1903.

— Giovanni Ferretti, Doktor Philosophiae in Rom, geboren in Mestre den 24. April 1879, gestorben in St. Moritz (Schweiz) den 28. August 1903.

— Adolph Edmund Hess, Professor der Mathematik an der Universität in Marburg, geboren in Marburg den 17. Februar 1843, gestorben daselbst den 24. Dezember 1903.

— Léon Ripert, pensionierter „Chef de bataillon“, geboren 1840 (?), gestorben im August 1903.

— George Salmon, „Provost“ der Universität in Dublin, geboren in Dublin den 25. September 1819, gestorben daselbst den 22. Januar 1904.

— Wilhelm Schell, Professor der Mechanik und synthetischen Geometrie an der technischen Hochschule in Karlsruhe, geboren in Fulda den 31. Oktober 1826, gestorben in Karlsruhe den 13 Februar 1904.

Demnächst erscheinende mathematisch-literarische Arbeiten.

— In einem der nächsten Bände der Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften wird eine *Einführung in die mathematische Literatur* von Felix Müller erscheinen. Das Buch wird ungefähr 12—15 Bogen umfassen. Es soll keine mathematische

Bibliographie sein, sondern den Studierenden und Lehrer der Mathematik in der Literatur seiner Wissenschaftszweige orientieren. Der Verf. hat bei Abfassung seines Buches die Ratschläge und Studienpläne berücksichtigt, die den Studierenden der Mathematik von den Dozenten der Universitäten Göttingen, Jena, Leipzig, Greifswald u. a. wiederholt gegeben wurden. In diesen wird ausdrücklich betont, daß das in den Vorlesungen und Übungen erworbene Wissen durch privates Studium vervollständigt werden muß, und auf die Wichtigkeit frühzeitigen Literaturstudiums hingewiesen, das die Fähigkeit entwickelt, sich in fremde Gedanken hineinzuleben. Die *Einführung in die mathematische Literatur* soll dieses Studium erleichtern. Zu dem Zweck wird eine systematische Übersicht über die wichtigsten Originalschriften, Einzelwerke sowohl wie Journalabhandlungen, der einzelnen Disziplinen gegeben, sowie auf einführende Lehrbücher, Kompendien, Aufgaben-Sammlungen, Tafeln u. dgl. hingewiesen. Die systematische Anordnung der Disziplinen ist dieselbe, die für die Redaktion der Fortschritte der Mathematik sich bewährt hat. Den einzelnen Abschnitten gehen kurze Notizen über die Entstehung, den Zweck und den Inhalt der einschlägigen Disziplinen voraus. Das Buch soll zugleich dem Lehrer der Mathematik die literarischen Hilfsmittel an die Hand geben, Lücken in einzelnen Zweigen zu ergänzen, und ihn in den Stand setzen, in späteren Jahren der weiteren Entwickelung der Wissenschaft zu folgen.

Neuer Kongreß für Geschichte der mathematischen und physischen Wissenschaften.

— L'intérêt excité, au premier congrès de philosophie, par des communications purement historiques faites à la section de logique et histoire des sciences, a provoqué dans ce congrès même la proposition de dédoubler à l'avenir cette section. Le comité d'organisation du 2me congrès international de philosophie, qui sera tenu à Genève 4—8 septembre 1904, a cru intéressant, au moins à titre d'essai, de donner suite au désir ainsi manifesté. De la sorte, la section de logique et philosophie des sciences serait réservée aux communications et aux discussions concernant les questions de méthode et de théorie de la connaissance scientifique. Dans la section d'histoire des sciences, les savants peuvent d'autre part traiter librement des questions purement historiques, qu'ils aient d'ailleurs ou non des préoccupations philosophiques particulières. En leur offrant ainsi de former une section autonome dans un congrès de philosophie, le comité d'organisation a désiré à la fois témoigner de l'intérêt majeur que présente l'histoire des sciences pour les philosophes et donner à ceux-ci une occasion de se familiariser avec l'esprit et les méthodes des travaux historiques en matière de sciences.

La section d'histoire des sciences sera organisée au reste avec le concours et sous la direction de la commission internationale permanente nommée par la section correspondante du congrès des sciences historiques de Rome 1903. Toutes les communications relatives à cette section doivent être adressées au président de la commission, M. Paul Tannery, directeur des tabacs, Pantin (Seine), à France. Les adhésions seront reçues par le secrétaire général du congrès de philosophie, M. Ed. Claparède (Champel 11, Genève), auquel on peut aussi faire parvenir le montant de la cotisation (20 francs).

Preisfragen gelehrter Gesellschaften.

— *Academia de ciencias exactas, fisicas y naturales de Madrid.* Estudio completo de una clase especial de integrales singulares, procedentes de aquellas ecuaciones diferenciales en que los valores de las derivadas resulten indeterminados, siempre que existan ciertas relaciones entra los valores simultaneos de las variables principales. (Étude complète d'une classe spéciale d'intégrales singulières provenant des équations différentielles pour lesquelles les valeurs des dérivées deviennent indéterminées quand il existe certaines relations entre les valeurs simultanées des variables principales.)

Vermischtes.

— L'académie des sciences de Paris a décerné en 1903 le prix Binoux à M. H. G. Zeuthen pour ses magistrales études sur l'historie des sciences. Ce même prix sera décerné aussi en 1905 à un auteur de travaux dans l'histoire des sciences.

— Die bibliographische Kommission der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (siehe Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 419) hat die deutschen Mathematiker aufgefordert, Verzeichnisse von solchen Werken und Zeitschriften, welche sie sich im Verlaufe ihrer Arbeiten gar nicht oder nur schwer verschaffen konnten, einzusenden. Solche Schriften, die auf sämtlichen deutschen Bibliotheken fehlen, werden bei passender Gelegenheit zur Anschaffung an irgend einem Orte vorgeschlagen werden.

— Unter dem Titel Mathematisch-naturwissenschaftliche Blätter wird seit dem Anfange des Jahres 1904 mit Herrn P. Oestreich in Barmen-Wupperfeld als Redakteur und im Kommissionsverlage von B. G. Teubner in Leipzig ein Organ des Verbandes mathematischer und naturwissenschaftlicher Vereine an Deutschen Hochschulen herausgegeben. Die Zeitschrift erscheint monatlich, und der Abonnementspreis beträgt 3 Mark für das Jahr.

Sur l'arithmétique géométrique des Grecs et des Indiens.

Par H. G. ZEUTHEN à Kjöbenhavn.

On sait qu'ALKARCHI démontre le théorème

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots n)^2$$

de la manière suivante.[1]) Soit AC (fig. 1) un carré dont le côté $AB = 1 + 2 + \ldots + n$, et soient $BB' = n$, $B'B'' = n - 1$, $B''B''' = n - 2$, etc. Qu'on construise également des carrés sur AB', AB'', AB''', ... Alors le gnomon $BC'D = BB' \,.\, BC + DD' \,.\, C'D' = n\,(BC + C'D')$. Or $BC = \frac{1}{2} n\,(n+1)$, $C'D' = \frac{1}{2} n\,(n-1)$, donc $BC + C'D' = n^2$, et par conséquent $BC'D = n^3$; de même $B'C''D' = (n-1)^3$, ... Le carré AC se compose donc des gnomons n^3, $(n-1)^3$, ... 1, c. q. f. d. —

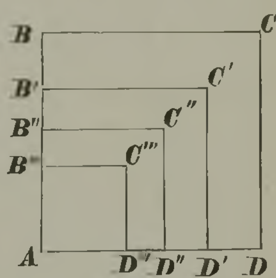


Fig. 1.

Tout en se servant du nom grec de „gnomon", HANKEL cite expressément cette démonstration comme exemple de la manière indienne de concevoir ce genre de questions. Étant donné, en effet, que les Indiens ont connu le résultat en question et que, d'autre part, ils se sont servis d'illustrations géométriques, il est bien possible qu'ils en aient fait usage dans ce cas; mais pour en montrer la probabilité, HANKEL aurait dû tâcher de trouver aussi dans les sources indiennes des exemples d'un procédé semblable; car les Indiens étaient assez bons calculateurs pour avoir pu obtenir le résultat par voie d'une induction numérique. Cependant HANKEL avait bien saisi la nature intuitive du savoir géométrique des Indiens, qu'il opposait aux notions exactes qui font la base des conclusions de la géométrie grecque, et il désirait montrer par un meilleur exemple que n'en offrait la littérature indienne qui était à sa disposition,

---

1) Nous citons ici la démonstration avec les notations de HANKEL: *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter* (Leipzig 1874), p. 192 note.

l'emploi de cette géométrie intuitive. Nous verrons plus loin que des découvertes faites après sa mort ont confirmé en partie ses vues sur la nature de la géométrie indienne; malheureusement cette mort prématurée l'a empêché de s'occuper assez de l'époque la plus brillante de la géométrie grecque[1]) pour se rendre compte du rôle considérable qu'a joué l'intuition, même dans la géométrie exacte des Grecs. En effet, l'algèbre algébrique, dont les procédés sont assez bien définis pour être exacts en même temps qu'intuitifs, rend aux géomètres grecs les mêmes services que demandent les modernes aux symboles de l'algèbre littérale. Les figures de l'une aussi bien que les formules de l'autre revêtent les conclusions exactes d'une forme que peut saisir l'intuition et qui permet ainsi d'embrasser en pensée, de retenir en mémoire et de représenter tout ce qui fait l'objet des conclusions. De même que l'algèbre littérale est applicable aussi aux nombres entiers, de même l'algèbre géométrique grecque comprend une arithmétique grecque, qui semble l'avoir précédée.

Après avoir expliqué ces méthodes dans mon *Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le mogen âge*, et après les avoir illustrées par des exemples, j'ai pu faire[2]) de la démonstration d'ALKARCHÎ une application tout à fait différente de celle qu'en fait HANKEL. Pour montrer qu'un résultat presque équivalent à celui d'ALKARCHÎ, et qui se trouve indiqué dans NICOMAQUE sans démonstration expresse, était à la portée des méthodes grecques dont j'avais déjà rendu compte, j'ai cité la démonstration d'ALKARCHÎ. J'avoue que j'y ai joint la supposition que le résultat plus complet de l'auteur arabe était connu des Grecs, supposition que semble confirmer un fait historique sur lequel je reviendrai plus tard.

Cependant comme M. ENESTRÖM a mis en doute mes conclusions à ces différents égards[3]), je ne crois pas inutile de montrer ici que NICOMAQUE lui-même mentionne expressément tous les éléments dont se compose la démonstration d'ALKARCHÎ; ce n'est que la dernière des conclusions tirées par cet auteur arabe qui manque chez lui.

Pour s'expliquer son absence et pour bien comprendre la forme des contributions de NICOMAQUE à notre connaissance de l'arithmétique grecque, il faut se rappeler qu'il n'est pas un auteur original au point de vue mathématique: la plupart des propriétés des nombres dont il s'occupe devaient être à la portée de tout lecteur d'EUCLIDE. En revanche il nous fournit des renseignements précieux concernant la forme sous laquelle

---

1) Abstraction faite de l'admirable fragment qu'il a laissé (l. c. p. 389—410) sur la théorie des proportions d'EUCLIDE.

2) Édition allemande p. 244, édition française p. 205.

3) Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, p. 146.

les Grecs se rendaient compte de ces propriétés trop simples pour être l'objet des recherches des grands géomètres.

On trouve surtout dans son livre la description de ces arrangements géométriques des unités, représentées par des points (ou d'autres signes), qui ont donné lieu aux noms géométriques de différentes classes de nombres, tels que plans et solides, carrés et cubiques, triangulaires, polygonaux, pyramidaux, ainsi qu'à l'application arithmétique du gnomon que nous venons de rencontrer dans la démonstration d'ALKARCHI. Les dénominations remontent aux anciens Pythagoriciens; l'usage des arrangements qu'ils expriment doit remonter aussi loin. EUCLIDE s'en sert pour déterminer d'une manière générale les triangles rectangles à côtés commensurables, et ces figures étant justement celles qui servent à exprimer géométriquement les opérations algébriques, on a dû avoir à cette époque l'habitude de les manier. Quant aux propriétés des nombres qu'énonce NICOMAQUE sans démonstration expresse, les dits arrangements en donnent des vérifications assez immédiates pour justifier cette absence de démonstrations, et ils nous aident à comprendre le sens numérique de ses énoncés de forme géométrique.

Lorsque, par exemple, au n° 12 du second livre de son arithmétique, NICOMAQUE dit qu'un nombre quadrangulaire ou carré se compose de deux nombres triangulaires consécutifs, c'est sa manière d'exprimer que

$$(1+2+3+\ldots+n)+(1+2+3+\ldots n-1)=n^2;$$

car, d'après ce qui a été énoncé au n° 8, un nombre triangulaire est la somme des nombres naturels. Le résultat se présente immédiatement (fig. 2) si l'on arrange les nombres d'après leurs dénominations.

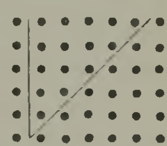


Fig. 2.

Le même arrangement montre que le nombre triangulaire $1+2+\ldots+n$ est la moitié du rectangle ou du nombre hétéromèque $n(n+1)$, les nombres hétéromèques étant les produits de deux nombres entiers consécutifs. On le voit en ajoutant (fig. 2) une série de n points au carré n^2, décomposé comme au n° 12.

NICOMAQUE n'énonce pas formellement ce théorème, qui serait l'expression grecque de notre formule

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

et qui était connu par ARCHIMÈDE, mais il se montre assez versé dans les sommations de séries arithmétiques, soit par la décomposition d'un carré en deux triangles que nous venons de citer, soit par ses énoncés des relations que nous exprimerions par les formules

$$n^2+n(n+1)=1+2+3+\ldots+2n,$$
$$n(n+1)+(n+1)^2=1+2+\ldots+2n+1.$$

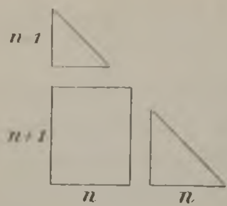


Fig. 3.

On se sera persuadé alors de la justesse de ces deux relations, soit en plaçant (fig. 3) le long des côtés de l'étéromèque les deux triangles inégaux qui résultent de la décomposition du carré, soit en faisant une addition semblable des deux triangles égaux dont se compose l'hétéromèque au carré.

Ici comme toujours les figures sont les formules de la mathématique grecque.

L'absence d'un énoncé formel du résultat de la sommation $1 + 2 + \ldots + n$, qui serait aujourd'hui la source de la connaissance des différents théorèmes énoncés par NICOMAQUE, et qui conduit immédiatement à la sommation générale des progressions arithmétiques, s'explique peut-être par le fait que ses arrangements géométriques des nombres conduisent tout aussi facilement à tous ces résultats différents, de façon qu'on n'a pas besoin d'en souligner un seul. Il ne faut pas du reste chercher dans son livre un exposé bien systématique au point de vue mathématique, et il dépend de circonstances étrangères à la mathématique, quelles seront les connaissances arithmétiques des Grecs qu'il nous découvrira. En effet, en bon néopythagoricien, il avait en vue un autre système plus philosophique. Les tripartitions, par exemple, possèdent à ses yeux une beauté systématique; et pour en établir partout il classifie les nombres impairs de la manière suivante: nombres premiers, nombres décomposables et — catégorie intermédiaire — nombres qui sont premiers relativement à un autre nombre.

C'est à cette tendance systématique de l'auteur, philosophe plutôt que mathématicien, que nous devons la transmission du théorème dont celui d'ALKARCHÎ n'est qu'une conséquence presque immédiate. NICOMAQUE commence par rappeler les rapports qui ont lieu entre les carrés et les nombres impairs. Un carré (n^2) est la somme des premiers nombres impairs ($1 + 3 + \ldots + (2\,n - 1)$). Dans une progression géométrique commençant par un, les termes à numéro impair sont des carrés. A ces remarques NICOMAQUE se réjouit de pouvoir ajouter (II, 20) que les nombres cubiques, qui présentent dans une dimension de plus la même égalité de côtés qui caractérise les nombres carrés, sont dans un rapport semblable avec les nombres impairs. „En effet, si en commençant par un, on écrit tous les nombres impairs, le premier sera le premier nombre cube, la somme des deux suivants, sera le second cube, la somme des trois suivants, le troisième, celle des quatre suivants, le quatrième, et ainsi de suite.“ On n'aura qu'à écrire la série des nombres impairs, comme le prescrit NICOMAQUE, et se rappeler ce qu'il a dit un peu plus haut sur la somme de tous les nombres impairs depuis 1, pour déduire de son dernier théorème la formule

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2.$$

Il est vrai que NICOMAQUE ne démontre pas expressément son théorème, qui pourrait être ainsi le résultat d'une induction numérique; mais dans ce qui le précède il a donné tout ce qu'il faut pour en vérifier la généralité. La décomposition d'un nombre carré en une somme de nombres impairs, y a été présentée comme la décomposition d'un carré en une unité entourée de gnomons successifs de la largeur 1, et représentant les nombres impairs (II, 9). En composant successivement les deux premiers, les trois suivants, etc.. les n suivants gnomons, on aura précisément la décomposition du carré $(1 + 2 + \ldots + n)^2$ qu'emploie ALKARCHI. Et quant à la sommation d'où dépend son calcul de ces gnomons, nous venons de la trouver énoncée expressément dans le n° 12.

Probablement c'est de quelque démonstration complète de la sommation des premiers nombres cubiques que NICOMAQUE a tiré la relation entre les nombres cubiques et les nombres impairs, relation qui, à cause de l'analogie qu'elle présente avec celles qui ont lieu entre les nombres carrés et les nombres impairs, l'intéressait plus que le résultat final de cette sommation. Il devait en être autrement pour ses prédécesseurs plus mathématiciens. En effet, le problème de la somme des nombres cubiques devait se présenter de lui-même dès qu'ARCHIMÈDE eut trouvé la sommation des nombres carrés et qu'il eut reconnu l'utilité de cette sommation, et de celle des nombres naturels, pour résoudre les mêmes questions que nous faisons aujourd'hui dépendre des quadratures $\int x^2 dx$ et $\int x dx$. Il est même assez probable, comme le présume M. P. TANNERY[1]), qu' ARCHIMÈDE lui-même, dont nous ne possédons pas tous les travaux, et dont l'*ἐφοδικόν* a contenu, à côté de ses deux quadratures de la parabole, d'autres déterminations infinitésimales,[2]) a ajouté aux deux sommations que nous venons de citer celle des nombres cubiques, qui peut être employée pour la solution des questions que nous faisons dépendre de la quadrature $\int x^3 dx$, par exemple pour la détermination du centre de gravité des pyramides. Cette sommation qu'on peut faire dépendre d'opérations dans le plan, ce que nous venons de voir, aurait alors présenté moins de difficultés que celle des nombres carrés.

Aussi sa détermination de la somme des nombres carrés nous intéresse-t-elle au point de vue de l'arithmétique géométrique; elle est en effet identique à la détermination des nombres pyramidaux quadrilatères.

---

1) Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, p. 257—258.

2) *HERONS Vermessungslehre,* ed. SCHÖNE (Leipzig 1903), p. 130—131.

Néanmoins ARCHIMÈDE ne tient nullement compte de l'arrangement stéréométrique des unités qui donne lieu à ce nom. Au contraire, sa démonstration est algébrique. Elle a, bien entendu, la forme géométrique que donnaient les Grecs aux opérations algébriques, et cette forme a amené un arrangement des segments $1a$, $2a$, $3a$, ..., na dont il s'agit de sommer les carrés et des mêmes segments pris dans l'ordre inverse suivant l'hétéromèque, arrangement qui conduit immédiatement à l'expression $\frac{n(n+1)}{2}a$ de leur somme: le reste se fait à l'aide de l'expression du carré d'un binôme et moyennant de simples additions. Il démontre ainsi que

$$3\sum_1^n n^2 = (n+1)\,n^2 + \sum_1^n n. \tag{1}$$

Cette démonstration pourrait sembler indiquer que du temps d'ARCHIMÈDE on ne se soit pas occupé des nombres pyramidaux, ou du moins pas assez pour supposer connues des expressions résultant de cette représentation stéréométrique. En effet, la plus simple de ces expressions serait celle d'un nombre pyramidal triangulaire, $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. En en profitant et en décomposant une pyramide numérique et quadrilatère en deux pyramides triangulaires de la même manière dont nous avons vu NICOMAQUE décomposer un quadrilatère plan et numérique, ARCHIMÈDE en aurait pu conclure immédiatement

$$\sum_1^n n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{6}.$$

Cependant SPEUSIPPE, élève de PLATON, cite expressément[1]) les nombres pyramidaux comme appartenant aux nombres pythagoriciens, et il serait difficile d'expliquer une si longue durée de l'intérêt attaché à ces arrangements si l'on n'avait même pas su en déduire le calcul d'un nombre pyramidal triangulaire, calcul dont nous allons voir la simplicité et la connexion avec les procédés stéréométriques les mieux connus.

Nous serions disposés à croire que du temps d'ARCHIMÈDE on connaissait bien ce calcul, peut-être aussi celui des nombres pyramidaux quadrilatères; mais qu'ARCHIMÈDE ne voulait pas faire usage dans la géométrie de ces connaissances arithmétiques auxquelles on n'avait pas donné cette forme rigoureusement exacte qu'il observe toujours et qui devait lui sembler particulièrement nécessaire pour bien établir ses nouvelles déterminations infinitésimales. Il préfère donc y appliquer les formes ordinaires de l'algèbre des Grecs, et alors il en fait application à une détermination

---

1) P. TANNERY, *Pour l'histoire de la science hellène* (Paris 1887), p. 387.

directe de la somme des carrés sans s'occuper aussi des nombres pyramidaux triangulaires.

Quoi qu'il en soit, nous sommes informés par une source romaine et bien postérieure, sur laquelle nous allons revenir, qu'à une époque dont on ignore la date, les Grecs ont trouvé une règle générale pour calculer tous les nombres pyramidaux; à moins qu'on ne veuille attribuer à un Romain cette découverte faite sur un terrain labouré par les Grecs depuis les Pythagoriciens.

On a donc raison de se demander, comment cette règle a pu résulter des procédés dont se servent ailleurs les Grecs, soit dans la géométrie, soit dans les décompositions dont parle NICOMAQUE dans ses communications sur les nombres polygonaux. Si nous parvenons ainsi à des formes que nous retrouvons chez ARCHIMÈDE et dans notre source romaine, il n'est pas encore bien certain que nous ayons reproduit le détail de la déduction grecque; mais alors nous aurons du moins expliqué que ces résultats étaient à la portée des méthodes que nous avions déjà rencontrées dans les mathématiques grecques, et nous aurons montré un véritable usage qu'on a pu faire de l'arrangement stéréométrique des nombres dits pyramidaux.

Désignons, avec M. CANTOR,[1]) par p_m^n le nombre m-gonal dont les côtés et diagonales sortant d'un sommet contiennent n unités, et par P_m^n le nombre pyramidal à m faces et dont les arêtes contiennent n unités. On sait alors que $p_3^n = \frac{n(n+1)}{2}$, et on voit par la décomposition de NICOMAQUE d'un m-gone en un $(m-1)$-gone au côté n et un triangle au côté $n-1$ que

$$p_m^n = p_{m-1}^n + p_3^{n-1}. \tag{2}$$

En appliquant la même décomposition à une pyramide P_m^n on trouve que de même

$$P_m^n = P_{m-1}^n + P_3^{n-1}. \tag{3}$$

Ensuite il ne s'agit que de trouver une expression de P_3^n. A cet effet, il suffit de décomposer le prisme triangulaire numérique, $(n+1)\,p_3^n$, à la hauteur $n+1$ et à la base p_3^n, de la même manière dont on décompose un véritable prisme triangulaire pour calculer le volume d'une pyramide. Commençant par la décomposition en une pyramide triangulaire et une pyramide quadrilatère on aura

$$(n+1)\,p_3^n = P_3^n + P_4^n.$$

1) *Vorl. über Geschichte der Mathem.* I², p. 519. Selon moi sa démonstration de la même expression profite trop des transformations que permet la forme moderne de l'algèbre.

En appliquant ensuite à P_4^n la décomposition indiquée par la formule (3), on trouvera

$$(n+1)\,p_3^n = 2\,P_3^n + P_3^{n-1},$$

ou bien, puisque $P_3^{n-1} + p_3^n = P_3^n$ et $p_3^n = \frac{n(n+1)}{2}$,

$$P_3^n = \frac{1}{3}\left((n+1)\,p_3^n + p_3^n\right) = \frac{n+1}{6}\left(2p_3^n + n\right) = \frac{n+2}{3}\,p_3^n. \qquad (4)$$

Remarquons d'abord l'analogie que la première de ces expressions présente avec celle (1) qu'Archimède avait donnée pour le calcul de P_4^n. Pour la voir il suffit de se rappeler que

$$n^2 = p_4^n,\ \sum_1^n n^2 = P_4^n \text{ et } \sum_1^n n = p_3^n.$$

Nous pouvons ajouter que même la démonstration algébrique d'Archimède équivaut à peu près à une décomposition du parallépipède $(n+1)\,p_4^n$ analogue à celle que nous venons d'appliquer au prisme $(n+1)\,p_3^n$; mais il serait difficile de trouver directement par une décomposition semblable de prismes n-gonaux les expressions des autres nombres pyramidaux. On les aura plutôt trouvées par un usage successif de la décomposition stéréometrique que nous avons exprimée par la formule (3). Remarquons, pour parvenir immédiatement au résultat général, qui a été sans doute, dans l'antiquité, le fruit d'extensions successives, qu'en substituant $P_3^{n-1} = \frac{n+1}{3}\,p_3^{n-1}$ dans la formule (3), et en éliminant ensuite p_3^{n-1} de cette formule et de (2), on trouve

$$P_m^n - \frac{1}{3}(n+1)\,p_m^n = P_{m-1}^n - \frac{1}{3}(n+1)\,p_{m-1}^n. \qquad (5)$$

Ces expressions sont donc indépendantes de la valeur de m. En faisant usage de l'expression (4) de P_3^n, on trouve qu'elles seront égales à $\frac{1}{3}p_3^n$ ou à $\frac{n(n+1)}{6}$. Il en résulte que

$$P_m^n = \frac{n+1}{6}\left(2p_m^n + n\right), \qquad (6)$$

formule qui exprime précisément la règle du calcul d'un nombre pyramidal quelconque qui a été communiquée par l'auteur romain Epaphrodite.[1])

Que cet auteur n'ait pas trouvé les règles qu'il énonce mécaniquement, nous le pouvons inférer de cette circonstance qu'il ne sait pas même faire la distinction de mesures géométriques et de nombres d'unités ordonnées suivant une figure donnée. Il ne faut pas non plus lui attribuer la sommation des nombres cubiques dont nous trouvons le premier énoncé formel dans son livre. Nous nous rangeons au contraire du côté de M. Cantor dans la discussion qu'il vient d'avoir sur ce point avec

1) Cantor, *Die römischen Agrimensoren* (Leipzig 1875), p. 124.

M. Eneström[1]) et croyons que ce résultat lui a également été fourni par quelque auteur grec. Il est vrai que, comme le fait observer M. Eneström, une facile induction numérique fait découvrir la loi générale; mais cette facilité même le rend encore moins vraisemblable que la formule, dont Nicomaque possédait la démonstration complète, soit échappée aux Grecs.

On voit qu'Alkarchi peut avoir été conduit à son résultat par la lecture du livre de Nicomaque, assez connu aux Arabes, et qu'il a pu y puiser ensuite toute la démonstration que nous avons prise pour point de départ. Peut-être a-t-il trouvé et le résultat et sa démonstration chez un auteur antérieur à Nicomaque. Il était du reste assez bon mathématicien et assez versé dans les procédés grecs pour réinventer lui-même le théorème et le démontrer de cette manière grecque. D'un autre côté il est très peu probable que les suggestions soient venues du côté indien à cet admirateur enthousiaste des Grecs qui néglige même de mentionner les grands avantages du calcul indien.

Et lorsqu'il s'agissait comme ici d'établir rigoureusement une loi générale, il n'a pas eu tort de se laisser inspirer plutôt par les Grecs que par la géométrie indienne. Le caractère intuitif même que lui attribue Hankel, aurait rendu celle-ci moins faite pour des recherches de cette nature. D'ailleurs on a émis des doutes sur le caractère original de la géométrie indienne en considérant les prétendus résultats d'une intuition géométrique comme dus à l'influence de la géométrie grecque.

Cependant, les découvertes littéraires qu'on a faites après la mort de Hankel sont venues affaiblir plusieurs des arguments qui avaient été allégués en faveur de l'influence grecque, et servent ainsi à confirmer l'hypothèse émise par ce savant sur l'originalité des vues géométriques des Indiens. Nous faisons allusion aux découvertes des *Śulbasūtras* indiens et des *Métriques* de Heron.

La publication, en 1875, d'une partie des *Śulbasūtras*, qui contiennent des règles pour tout ce qui avait égard aux sacrifices des Indiens, pour l'orientation et la construction géométrique des autels, etc., ne prouvait encore rien parce qu'à ce moment il n'était pas possible d'en faire remonter les dates à une époque assez ancienne pour exclure l'influence grecque. M. Cantor[2]) a donc pu, même dans la nouvelle édition de la première partie de ses *Vorlesungen*, attribuer à cette influence la

---

1) Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, p. 5, 115, 231.

2) Je cite M. Cantor parce qu'il a donné un exposé suivi des faits qui lui semblent indiquer une influence grecque; mais, il faut l'avouer, ses vues à cet égard avaient été adoptées par la plupart des historiens des mathématiques — y compris l'auteur de ces lignes.

concordance desdites règles avec des procédés connus par les Grecs; mais cela n'est plus possible après la publication, en 1901, de l'*Apastamba-Sulbasūtra*, du moins si les remarques chronologiques que l'éditeur, M. Albert Bürk, y joint dans son introduction[1]) sont aussi bien fondées que la plupart de ses remarques géométriques. Selon lui, le *Sulbasutra* en question appartient au plus tard au 4e ou au 5e siècle avant Jésus-Christ, et les règles rituelles qu'il nous fait connaître doivent dater d'une époque plus ancienne, probablement même beaucoup plus ancienne. Ces règles supposent la connaissance: 1° du „théorème de Pythagore", 2° de ses applications à la construction d'un carré égal à la somme ou à la différence de deux carrés donnés, à la multiplication d'un carré et même à la transformation d'un rectangle en un carré, et 3° de la détermination de triangles rectangles à côtés rationnels. La troisième de ces connaissances, qui est celle de solutions entières de l'équation indéterminée

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

s'obtient selon M. Bürk, précisément comme chez les Grecs depuis Pythagore, par la considération des gnomons de carrés. La différence des deux carrés z^2 et y^2 est représentée sous la forme d'un gnomon à la largeur $z - y$. Tandis qu'Euclide en fait usage[2]) pour trouver la solution générale du problème, les *Sulbasūtras* se bornent à traiter un certain nombre de cas assez simples. Les gnomons dont la largeur $z - y = 1$ seront les nombres impairs; tous les carrés impairs fourniront donc des solutions de l'équation. On aura ainsi la règle attribuée à Pythagore; les *Sulbasūtras* en contiennent les cas suivants (3, 4, 5) (5, 12, 13), (7, 24, 25). Pour la largeur 2 du gnomon on obtient la règle attribuée à Platon; les *Sulbasūtras* en contiennent les cas (8, 15, 17) et (12, 35, 37).

On y trouve encore certains triangles dont les côtés sont le même multiple d'un de ces groupes de nombres. Lorsque Baudhâyana, qui a précisément pour but d'illustrer le „théorème de Pythagore", cite dans son *Sulbasūtra*, à côté de trois triangles dérivés au moyen d'un gnomon à la largeur 1, le triangle (15, 36, 39), cet exemple peut avoir eu trait à une construction pratique où on a fait un usage effectif d'un triangle dont les côtés sont ces multiples d'une unité donnée; mais il est aussi possible que, comme le présume M. Bürk,[3]) ce cas doit servir d'exemple de triangles dérivés d'un gnomon à la largeur 3. Quoi qu'il en soit, la formation, par multiplication, de nouveaux triangles n'était pas inconnue à ses prédécesseurs.

---

1) Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft 55, 1901, p. 543—577.

2) *Elementa*, livre X, prop. 28.

3) Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft 55, p. 571.

Jusque-là la plus ancienne géométrie indienne est à peu près identique à la plus ancienne géométrie grecque, à celle qu'on peut essentiellement faire remonter à PYTHAGORE et à ses élèves. La transformation d'un rectangle en un carré se fait de la même manière que dans le second livre des *Elementa*[1]): on commence par transformer le rectangle en un gnomon ou bien en la différence de deux carrés et fait usage ensuite du „théorème de PYTHAGORE“. Cette construction a été pour les Grecs un des premiers pas dans cette voie d'une algèbre géométrique qui devait les conduire assez vite à de brillantes découvertes; mais nous ne rencontrons rien de semblable chez les Indiens. Et même si plus tard nous les trouvons en possession de quelque vérité géométrique, ils ont eu le plus souvent trop d'occasions de la tenir de source grecque pour qu'il soit nécessaire d'y voir une découverte indépendante. Comme source grecque M. CANTOR a cité en première ligne HÉRON. Toutefois, les renvois à cet auteur grec par lesquels M. CANTOR veut démontrer l'existence d'erreurs communes à lui et aux Indiens, renvois qui du reste illustrent mieux les connexions historiques que les vérités connues dans les deux pays différents, perdent leur force probante par la découverte du texte des *Métriques* de HÉRON qui ne contient pas ces erreurs. Il faut au contraire y voir des additions byzantines dérivant de source indienne plutôt que l'inverse.

A côté de vérités géométriques que les Indiens ont pu emprunter aux Grecs, il existe en tout cas, dans la géométrie indienne de l'époque qui nous est la mieux connue, un groupe de recherches assez immédiatement liées aux anciennes recherches dont nous venons de parler et se présentant sous une forme assez originale pour qu'on y reconnaisse un travail propre aux Indiens. Et nous verrons que précisément ces recherches semblent avoir donné de féconds résultats.

Il s'agit d'une continuation de l'étude des figures à côtés rationnels. Les triangles rectangles aux côtés (3, 4, 5) et (5, 12, 13) étant connus, il était assez naturel de former du premier, par multiplication, le triangle (9, 12, 15) et de former ensuite, par juxtaposition des deux triangles à un côté commun, le triangle aux côtés (13, 14, 15) dont l'aire sera rationnelle à cause de cette formation. On n'a donc pas besoin de croire à un rapport de dépendance pour expliquer que HÉRON et les Indiens se servent de ce même exemple très commode pour illustrer les calculs relatifs à un triangle à côtés donnés. Et les Indiens n'en sont pas restés là. En étendant à quatre cette juxtaposition de triangles

1) Prop. 14. EUCLIDE ne dit pas comment il trouve sa construction; conformément à sa représentation synthétique, il la démontre après coup. Mais l'analyse résultant de l'inversion de sa démonstration synthétique exprimerait le procédé prescrit dans les *Śulbasūtras*.

rectangles à un sommet commun, ils ont formé la figure qui par une traduction peu heureuse a obtenu le nom de trapèze de Brahmagoupta. En réalité ce quadrilatère n'est pas un trapèze dans le sens de ce mot admis depuis Euclide; mais il résulte de la construction suivante:

Soient a, b, c et a', b', c',

où $c^2 = a^2 + b^2$, $c'^2 = a'^2 + b'^2$

les côtés de deux triangles rectangles. On en forme quatre nouveaux triangles en multipliant les côtés de l'un par les côtés de l'angle droit de l'autre. Ensuite on formera le „trapèze de Brahmagoupta" $ABCD$ par la juxtaposition de ces quatre triangles que montre la fig. 4.

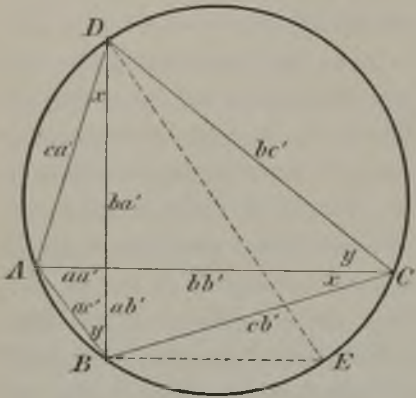


Fig. 4.

Avant la construction de ce „trapèze", Brahmagoupta nous fait connaître quelques propriétés appartenant à certains quadrilatères, tout en négligeant de nous indiquer quels sont ces quadrilatères. Il y a toutefois des propriétés dont il dit expressément qu'elles ne sont pas applicables aux trapèzes. Brahmagoupta a donc vu, et probablement il a voulu dire, que les „trapèzes," dont il va s'occuper presque immédiatement après, possèdent les autres propriétés en question. Pour le croire on n'a pas même besoin de voir avec Hankel dans cet ordre, inverse à celui qui est le plus naturel à nous autres élèves des Grecs, une finesse particulière aux Indiens: il suffit de se rappeler que Brahmagoupta ne donne dans ce chapitre (le 12ᵉ) que des lemmes utiles pour l'étude de l'astronomie, lemmes qui étaient sans doute connus avant lui. Dès lors il n'est pas certain qu'il les ait énoncés dans l'ordre le plus logique.

Brahmagoupta a donc connu les propriétés suivantes de ses trapèzes (voir fig. 4):

(1) $$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA,$$

(2) $$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + BC \cdot CD}{AB \cdot BC + CD \cdot DA},$$

propriétés qu'au moyen d'un simple calcul on déduit des expressions des côtés et des diagonales (eu égard aux relations $c^2 = a^2 + b^2$ et $c'^2 = a'^2 + b'^2$).

(3) Le trapèze est inscrit à un cercle au diamètre cc'. La vérité de cet énoncé se voit si l'on donne (voir fig. 4) au triangle ABC la position CEA. Alors les angles DCE et DAE seront droits, et DE, hypoténuse commune à deux triangles rectangles aux côtés bc', ac' et ca', cb', sera

égale à cc'. Elle sera en même temps diamètre d'un cercle passant aussi par A, B et C. Elle sera encore hypoténuse d'un triangle rectangle aux côtés $BD(= ab' + ba')$ et $BE(= bb' - aa')$. La figure illustre donc en même temps la relation numérique très usitée par les Indiens:

$$(ab' + ba')^2 + (bb' - aa')^2 = (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2),$$

relation qui sert à déduire de deux triangles rectangles et rationnels un nouveau triangle de la même nature.

Connaissant par les *Śulbasûtras* le point de départ de la géométrie indienne on n'a besoin d'aucune influence grecque pour expliquer la connaissance de ces trois propriétés des „trapèzes“. Il est vrai que la première constitue un cas particulier du „théorème de PTOLÉMÉE“, et il est *possible* qu'une influence se soit fait valoir à son égard; mais dans ce cas les Indiens ont au moins donné à ce théorème et à ses applications une forme individuelle et conforme à leur propre géométrie. Pour ce qui est de (4) l'expression $\sqrt{(s-\alpha)(s-\beta)(s-\gamma)(s-\delta)}$ de l'aire du trapèze, où α, β, γ, δ sont les côtés, s leur demi-somme, expression qui a surtout interessé les géomètres modernes, je crois volontiers à une influence grecque. En effet, cette expression indique la connaissance antérieure de l'expression analogue de l'aire d'un triangle et la manière dont celle-ci est mentionnée dans les *Métriques* de HÉRON fait supposer qu'elle a été bien connue avant lui, c'est-à-dire longtemps avant BRAHMAGOUPTA. La nature de ces deux expressions est aussi très différente de celle des autres qu'on trouve dans la géométrie indienne. D'un autre côté, il aura été très facile à BRAHMAGOUPTA de vérifier après coup l'application de l'expression à ces trapèzes, donnés numériquement. Il serait du reste très intéressant de savoir si quelque Grec ou Indien a su que cette expression est applicable à tous les quadrilatères inscriptibles.

Pour le moment c'est la construction des trapèzes et leurs trois premières propriétés qui nous intéressent. Soient a, b, c, a', b', c' des nombres entiers (rationnels): on a alors déduit de la connaissance de deux triangles rectangles à côtés entiers celle d'un trapèze dont les diagonales, l'aire et le diamètre du cercle circonscrit sont également entiers (rationnels).

Quel est maintenant l'avantage obtenu par ces déterminations de figures à côtés exprimables par des nombres entiers? On en aura une idée en se demandant comment il a été possible aux Indiens, qui ne connaissaient pas l'artifice d'exprimer par une lettre un nombre connu mais quelconque, d'exécuter les opérations que nous avons exprimées ici par les symboles algébriques et qui servent à vérifier les trois premières propriétés des trapèzes. En effet, nous autres mathématiciens modernes, qui apprenons depuis notre enfance l'usage de symboles, permettant d'exécuter des calculs insurmontables sans eux, nous sommes trop des enfants gâtés lorsqu'il s'agit de se passer de nos instruments. Euclide, Archimède et Apollonius se servent à leur défaut de l'algèbre géométrique, en représentant géométriquement les quantités connues mais quelconques; mais Diophante nous apprend un autre moyen. Il attribue à ces quantités des valeurs déterminées et assez simples, dont il se sert pour exécuter les calculs; ensuite il retient en mémoire plutôt ces calculs que leurs résultats numériques, ce qui lui permet de voir immédiatement ce qu'on aurait obtenu en attribuant d'autres valeurs aux quantités supposées connues. En attribuant de même des valeurs déterminées aux quantités inconnues, on obtient de pouvoir effectuer un calcul d'essai qui fait souvent découvrir ensuite la véritable valeur cherchée. Les Indiens, dans leur résolution des équations indéterminées du second degré, se montrent très versés dans cet emploi de nombres choisis arbitrairement.

Pour bien manier les calculs effectués ainsi et pour en tirer les lois générales et indépendantes des nombres arbitrairement choisis, jouant seulement le rôle de nos symboles, il faut que non seulement les nombres choisis mais aussi ceux qu'on en tire successivement soient assez simples. Voilà le but de la recherche de solutions entières d'équations indéterminées. Voilà en même temps dans la géométrie élémentaire, où les irrationnalités s'introduisent par le „théorème de Pythagore", l'utilite des triangles rectangles à côtés entiers. Les „trapèzes" de Brahmagoupta montrent combien il est commode d'en connaître deux. Ses commentateurs font en particulier usage de ceux où

$$a = 3,\ b = 4,\ c = 5 \text{ et } a' = 5,\ b' = 12,\ c' = 13.$$

On pourrait qualifier de géométrie arithmétique un tel usage des nombres obtenus originairement par l'arithmétique géométrique; mais pour justifier cette dénomination, il faut montrer que la recherche peut avoir un autre but plus géométrique et général qu'une telle construction de nouvelles figures rationnelles. Or, dans le triangle rectangle (voir fig. 4) DBE que nous avons construit pour montrer la justesse de la détermination du diamètre du cercle circonscrit, l'angle BED est égal à la somme $x + y$ des angles x et y opposés à a et a' dans les deux triangles donnés. L'expression de sin $(x + y)$ est donc représentée par la figure. Notre sinus tabulaire serait immédiatement BD si $c = c' = 1$ et par conséquent aussi $DE = cc' = 1$; car alors $a = \sin x$, $b = \cos x$, $a' = \sin y$, $b' = \cos y$, $BD = ba' + ab' = \sin(x + y)$; mais même sans cette hypothèse plus moderne il était facile de rapporter à un rayon quelconque les sinus qui correspondent aux rayons c, c' et cc'.

On voit que de la même manière l'autre diagonale fournira l'expression de $\cos (x - y)$. Le trapèze de BRAHMAGOUPTA a donc pu servir à représenter la proposition fondamentale [1]) de la trigonométrie, et nous savons que celle-ci était connue aux Indiens et qu'ils en faisaient usage pour calculer des tables de sinus.

Qu'on se soit proposé en effet un tel but trigonométrique, c'est ce qui semble encore résulter de ce fait que les théories géométriques exposées dans le 12e chapitre de l'œuvre de BRAHMAGOUPTA devaient servir de lemmes à cette œuvre astronomique, et ses autres chapitres nous informeraient peut-être, s'ils étaient connus, de l'usage effectif qu'on en a fait; mais en tout cas ce chapitre montre que les Indiens disposaient des moyens nécessaires pour construire une trigonométrie indépendante. De l'autre côté celle qu'ils possédaient montre son indépendance de celle d'HIPPARCHE et de PTOLÉMÉE par son emploi de tables de sinus au lieu de tables de cordes.[2])

C'est un double but que nous avons ainsi attribué aux figures de BRAHMAGOUPTA: 1° la formation de figures à côtés entiers et 2° la démonstration du théorème fondamental de la trigonométrie. Ce qui explique le double emploi des figures dont le premier a son origine dans la plus ancienne géométrie des Indiens, et le second conduit à la plus utile application qu'ils en ont faite, c'est que les figures à côtés entiers leur étaient nécessaires pour se représenter à leur façon, c'est-à-dire par des calculs numériques, les opérations générales qui font la base théorique de la trigonométrie. Du reste on retrouve ailleurs dans l'histoire des mathématiques ces doubles emplois de la formule en question, savoir à la trigonométrie et à la théorie des nombres. En effet, VIÈTE, qui ne connaissait certainement pas les mathématiques indiennes, se sert aussi, dans ses Notes à la Logistique spécieuse, des expressions du sinus et du cosinus de la somme de deux angles pour déduire de deux triangles rectangles à côtés entiers un troisième de la même nature.

Quant à l'application de la trigonométrie à la sphère, nous ne retrouvons plus la même indépendance des procédés grecs. Ceux des Indiens

---

1) J'avais déjà en 1876 attiré l'attention sur ces faits, dans un article publié dans le Tidsskrift for Mathematik.

2) Le diamètre étant pris pour unité, les cordes de ces tables grecques sont toutefois de véritables sinus, mais seulement des moitiés des arcs auxquels ils sont rapportés.

sont, en effet, à peu près les mêmes qu'on trouve dans l'*Analemme* de Ptolémée.[1]) Ils les doivent donc probablement aux Grecs dont les recherches à cet égard sont très antérieures à celles des Indiens dont la connaissance est arrivée jusqu'à nous.

1) Voir ma *Note sur la trigonométrie de l'antiquité;* Biblioth. Mathem. $\mathbf{1}_3$, 1900, p. 20.

Entwickelungsgeschichtliche Momente bei Entstehung der Infinitesimalrechnung.

Von C. R. Wallner in München.

Es ist meistens sehr schwer oder ganz unmöglich, die treibenden Kräfte anzugeben, deren Zusammenwirken die exakten Wissenschaften ihre Weiterentwickelung verdanken, wie denn der innere Anlaß aller natürlichen Entwickelung noch völlig unbekannt ist. Wir müssen zufrieden sein, wenn wir wenigstens diejenigen Einflüsse ermitteln können, die eine solche Entwickelung überhaupt möglich machten. Diese Aufgabe ist schwer genug; denn neben der langsamen normalen Weiterbildung zeigt die Geschichte der Wissenschaften oft Epochen, die sich durch eine Fülle scheinbar gänzlich unvorbereiteter neuer Erkenntnisse auszeichnen. In der Geschichte der Mathematik speziell bedeuten die 50 Jahre, innerhalb derer die Infinitesimalrechnung entstanden ist, einen Aufschwung, der in keinem Verhältnis zu den Gesamtleistungen früherer Jahrhunderte zu stehen scheint; trotzdem ist die erste Anlage der beiden Haupterrungenschaften jener Epoche, des Grenz- und des Differentialbegriffs, die vorher der Mathematik vollkommen fehlten, schon weit früher in den Werken Archimeds und in der mittelalterlichen Philosophie zu finden.[1])

Können wir demnach die inneren Ursachen, die jene lang angelegten Keime zur plötzlichen Entwickelung und Reifung brachten, kaum erkennen, so sind wir doch imstande, innere Umstände anzugeben, welche die Entwickelung hintangehalten oder verzögert haben. In unserm Falle ist es klar, daß bei den geringen mathematischen Kenntnissen bis zu Beginn des 17. Jahrhunderts herauf die oben erwähnten Keime eines Grenz- und Differentialbegriffs nicht gedeihen konnten; dieser Aufsatz soll daher nur diejenigen Momente bringen, die noch während der Entstehung der Infinitesimalrechnung auf diese hindernd einwirkten. Man sieht, daß z. B.

1) Vgl. die Aufsätze des Verfassers: *Die Wandlungen des Indivisibilienbegriffs von Cavalieri bis Wallis;* Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, 28—47 und *Über die Entstehung des Grenzbegriffes;* ebenda 4_3, 1903, 246—259.

Fermat oder gar Barrow mit ihren Tangentenmethoden dem Differenzieren scheinbar schon sehr nahe gekommen waren, und fragt sich, warum in diesen und ähnlichen Fällen das Naheliegende doch nicht gefunden wurde.

Äußere Gründe, wie der Mangel an Fachzeitschriften usw. kommen hierbei nur in geringerem Maße in Betracht, obwohl ihre Bedeutung durchaus nicht zu unterschätzen ist. So war Fermats Quadratur allgemeiner Parabeln vom Jahre 1636 weiteren Kreisen vollkommen unzugänglich; Wallis glaubte daher noch 1655 in seiner *Arithmetica infinitorum* dieses Problem zuerst behandelt zu haben. Ja Leibniz hatte Barrows *Lectiones tum opticae tum geometricae* mit dessen Tangentenmethode sogar im Besitz, aber allem Anschein nach hat er dieses Werk nicht vollständig studiert,[1]) so daß ihm jene für seine eignen Forschungen höchst wichtige Methode völlig entgangen ist.

Der eigentliche Grund liegt tiefer, nämlich in dem Faktum des historischen Werdens selbst. Je langsamer, je gleichmäßiger eine Entwickelung verläuft, desto weniger tritt der tatsächlich erreichte Fortschritt hervor. Dadurch wird aber leicht bewirkt, daß der Wert, die Bedeutung dieses Fortschritts unerkannt bleibt. Auch bei Erfindung der Infinitesimalrechnung war ganz besonders der Umstand hinderlich, daß man die neugewonnenen Methoden der Körpermessung usw. immer mit dem Verfahren der Alten identifizierte. Dadurch gelangte man lange Zeit nicht zu der Erkenntnis, daß die Probleme der Quadratur, Schwerpunktsbestimmung usw. von denen der gewöhnlichen Geometrie prinzipiell verschieden sind, daß ihnen eine Schwierigkeit innewohnt, die letztere nicht besitzen. Diese Schwierigkeit besteht in einer gewissen Unbestimmtheit der Fragestellung; so ist z. B. im Falle der Kubatur der Inhalt eines beliebigen Körpers von vornherein noch nicht definiert. Solange man aber neue und alte Methoden für gedanklich identisch hielt, konnte auch keine Aussicht bestehen, jene allen Integrationsproblemen eigentümliche Schwierigkeit zu erkennen, und somit konnte auch kein Mittel gefunden werden, dieselbe systematisch zu heben.

Der Grund für die erwähnte Identifizierung lag einerseits in den scheinbar wirklich geringfügigen Unterschieden zwischen alten und neuen Verfahren; man hat dabei immer zu berücksichtigen, daß wir heutzutage jene Unterschiede natürlich leicht konstatieren und ihrer Bedeutung nach würdigen können, weil wir eben auch die Kenntnis späterer Entwickelungsstadien für uns haben, die damals fehlte. Ein andrer Grund war der, daß man jenen neuen Methoden Bürgerrecht verschaffen wollte, indem man sie als vereinfachte alte bezeichnete; dadurch glaubte man dann z. B. die Verwertung der begrifflich ziemlich unbestimmten unendlichkleinen Größen rechtfertigen zu können.

1) Vgl. Cantor, *Vorles. üb. Gesch. d. Mathem.* III², S. 161 u. f.

Anstatt also die gedanklich wesentlich neue Grundlage ihrer Beweisführung zu betonen, haben Mathematiker wie CAVALIERI und PASCAL immer wieder die Verwandtschaft von alter und neuer Behandlungsweise betont. Man ist also durchaus nicht berechtigt anzunehmen, daß jene Mathematiker erkannt hätten, daß die Lösung der verschiedenen Integrationsprobleme nur durch neue Anschauungen und neue Begriffe zu bewerkstelligen ist; wollte doch HUYGENS selbst nach Erfindung der Infinitesimalrechnung die Zweckmäßigkeit der darin verwerteten neuen Begriffe und ihre Überlegenheit gegenüber seiner Methode nicht anerkennen. Auch LEIBNIZ beherrschte schon längst die sog. Integrationsmethoden seiner Zeitgenossen, bis er erkannte, daß es sich dabei um eine neue Rechnungsart handle. Außer ihm und NEWTON hatte nur noch der englische Mathematiker JAMES GREGORY die Idee einer neuen Rechnungsart; derselbe spricht in der Einleitung zu seiner *Vera circuli et hyperbolae quadratura* klar und deutlich aus, daß die Schwierigkeiten der Integrationsprobleme nur durch Einführung einer neuen Rechenoperation, der Grenzwertbildung, überwunden werden können.

Die Erkenntnis, daß es sich bei den Integrationsproblemen um eine Gruppe eigenartiger, nur durch besondere Hilfsmittel zu lösender Probleme handelt, sowie eine ungefähre Abgrenzung dieser Gruppe gegenüber der gewöhnlichen Geometrie, wurde dadurch vorbereitet, daß man allmählich die innere Verwandtschaft von scheinbar ganz verschiedenen Methoden erkannte. Z. B. benützten VALERIO, FERMAT u. a. Quadraturen zu Schwerpunktsbestimmungen, während GULDIN mit Hilfe des bekannten Schwerpunkts Inhaltsbestimmungen vornahm; dadurch kam man dazu, die Methoden der Quadratur und der Schwerpunktsbestimmung als gleichartig anzusehen, da sie sich gegenseitig zu ersetzen vermögen. Ebenso stellte sich heraus, daß die Auffindung von Kurventangenten, Maximalwerten und Doppelwurzeln einer Gleichung durch Methoden geleistet werden kann, die sich ganz analog sind. Dadurch mußte sich dann allmählich die Erkenntnis bilden, daß diese äußerlich ganz verschiedenartigen Probleme innerlich verwandt sind. Auf diese Weise war man noch vor LEIBNIZ dazu gelangt, alle infinitesimalen Probleme in zwei große Hauptgruppen zu ordnen, die unseren heutigen Integrations- und Differentiationsproblemen entsprechen. Während man aber immerhin bis zu einem gewissen Grad erkannte, daß beliebige Probleme ein und derselben Gruppe einer gleichartigen Behandlungsweise fähig sind, so fehlte doch jede Einsicht, daß die Probleme der einen Klasse die umgekehrten Aufgaben der andern sind. Dieser wesentliche Fortschritt war LEIBNIZ und NEWTON vorbehalten.

Aus der Art und Weise des historischen Werdens wird auch die lange Zeit erklärlich, die zur Bildung neuer Begriffe erforderlich ist. Ich habe bereits früher gezeigt, wie langsam und allmählich die Begriffe der Grenze und der unendlich kleinen Größen entstanden sind und wie schwer sie sich in die Mathematik Eingang verschafft haben. Gerade daraus, daß die Hilfsmittel und Begriffsbildungen, die der Infinitesimalrechnung eigentümlich sind, gar kein Analogon in der gewöhnlichen Mathematik besaßen, daß sie alle erst neu geschaffen werden mußten, kann man die gewaltige Gedankenarbeit ermessen, die zu ihrer Auffindung notwendig war. Ohne sie wäre sicher niemals eine Infinitesimalrechnung entstanden; aber sie selbst sind erst aus der Behandlung infinitesimaler Probleme hervorgewachsen. Die Bedeutung dieser Begriffe wird dadurch nicht widerlegt, daß Descartes bei seiner Behandlung des umgekehrten Tangentenproblems, Huygens an dem Problem der Kettenlinie zeigten, daß scharfsinnige Mathematiker mit verhältnismäßig geringen Hilfsmitteln und desto größerem Gedankenapparat Hervorragendes zu leisten imstande sind; denn es ist zu bedenken, daß derartige geistreiche Lösungen gewissermaßen durch Umgehen der der Aufgabe charakteristischen Schwierigkeiten zustande kommen und darum auch ihr eigentliches Wesen nicht erkennen lassen.

Das ist aber gerade der Vorteil von Leibnizens Algorithmus gegenüber der Methode von Huygens, daß er nicht auf Kunstgriffen beruht, sondern die verschiedensten infinitesimalen Probleme alle systematisch auf zwei Grundprobleme: die Bildung des Differentialquotienten und des unbestimmten Integrals, zurückzuführen gestattet, und daß er ferner nicht schwierige Überlegungen erfordert, sondern all das rein mechanisch auf rechnerischem Wege leistet, was Huygens in jedem einzelnen Fall wieder durchdenken muß, denn darin liegt überhaupt der Wert jedes rechnerischen Vorgehens, daß gedankliche Energie eingespart wird, die dann der Bewältigung wieder andrer Schwierigkeiten zugute kommen kann. Noch einen andern Vorteil zeigte die rechnerische Behandlungsweise speziell bei den Methoden von Hudde und Sluze[1] zur Bestimmung von Maxima- und Minimawerten bezw. Kurventangenten. Da sich nämlich diese Methoden ganz schematisch handhaben ließen, so konnten sie den Gedanken an die Möglichkeit formaler Operationen von ganz andrer Bedeutung als die gewohnten Grundrechnungsarten, d. i. an die Existenz eines neuen Kalküls, der Differentialrechnung, anregen. Denn je mehr das gedankliche Element aus einer praktischen Rechnung verdrängt wird, desto leichter gewinnt diese den Charakter einer bloßen Schablone; und der ist nötig, um das Bewußtsein ihrer Entstehungsweise zu ertöten und das Gefühl von ihrer Selbständigkeit und Eigenart zu erwecken.

---

1) Vgl. Cantor, a. a. O. II², S. 917—920.

Wenn wir aber fragen, warum man bei den vielen Vorzügen einer rechnerischen Behandlung der infinitesimalen Probleme nicht schon früher eine solche angewandt hat, so waren hierfür die verschiedensten Gründe maßgebend. Erstlich waren die ursprünglichen derartigen Probleme alle rein geometrischer Natur und die analytische Behandlungsweise, insbesondere die analytische Geometrie selbst, waren noch viel zu wenig entwickelt, um bereits auf diesem Gebiet angewandt werden zu können. CAVALIERI, ROBERVAL, GRÉGOIRE DE ST. VINCENT waren reine Geometer, und auch PASCALS Gedankengang war mehr geometrisch als algebraisch. Ein weiterer Grund war der, daß man ja ursprünglich gar keine Definition des Flächen- oder Rauminhalts besaß, dessen Bestimmung im Anfang die wichtigste Aufgabe bildete. CAVALIERI, ROBERVAL, GRÉGOIRE haben ja nur Kriterien oder Beweismethoden, um zwei Gebilde als inhaltsgleich nachzuweisen, und einige wenig allgemeine Sätze; erst PASCAL definiert die Fläche als Summe unendlich vieler unendlich kleiner Rechtecke, wenn er auch nie wirklich eine solche Summation durchrechnet, sondern sich immer noch des CAVALIERIschen Satzes[1]) bedient. WALLIS ist der erste, der Flächeninhalte faktisch durch Aufsuchen des Grenzwerts der Summe aller der Fläche einbeschriebenen Rechtecke findet. Man darf daher nicht, wie dies schon oft geschehen ist, infinitesimale Untersuchungen vor PASCAL und WALLIS in bestimmten Integralen wiedergeben, da vor diesen nichts vorhanden ist, was unserm Begriff des bestimmten Integrals (im RIEMANNschen Sinne) vergleichbar wäre. Wir haben noch einen wichtigen Grund zu erwähnen, der besonders bei einer Beurteilung der Arbeiten PASCALS nie zu vergessen ist. PASCAL hat ja unzweifelhaft vor LEIBNIZ weitaus das Klarste und Beste auf dem Gebiete der infinitesimalen Probleme geleistet; er hat in die widerstreitenden, verschwommenen Anschauungen über das Unendlichkleine Ordnung gebracht, hat den Begriff des Inhalts eines beliebigen Gebildes definiert, ja sogar Quadratur, Kubatur, Schwerpunktsbestimmung allgemein auf die Ermittlung gewisser algebraischer Summen von ganz charakteristischem Bau zurückgeführt.[2]) Man möchte meinen, daß die schleppende Darstellung dieser Summen in Worten geradezu darauf hingedrängt hätte, eine algebraische Bezeichnung einzuführen. In demselben Momente hätte PASCAL scheinbar auch schon die Hauptformeln der Integralrechnung besessen, so nahe sind seine Sätze mit dieser verwandt. Und warum hat er das Naheliegende dann doch nicht getan? Vielleicht, weil er immer möglichst geometrisch bleiben wollte? Dafür spräche ja, daß er z. B. neue Körper, die „onglet“, aufstellt, nur um durch sie gewisse

---

1) Vgl. *Die Wandlungen des Indivisibilienbegriffs*, S. 36.

2) Besonders deutlich in dem Brief an CARCAVY; vgl. auch CANTOR, a. a. O. II², S. 911 u. f.

algebraische Summen zu veranschaulichen; dafür spräche, daß es ihm bei Quadraturen, bei Rektifikationen immer um die Auffindung von inhaltsgleichen bezw. gleichlangen geometrischen Gebilden und nur um die Ermittelung von Zahlenwerten zu tun ist. Dennoch erklären diese Gründe die Sache nicht; man frage sich vielmehr: was hätte Pascal mit seinem Integralalgorithmus anfangen sollen? Er hätte dann wohl Formeln besessen, welche die Struktur, den inneren Bau einer Raumgröße deutlich hätten erkennen lassen, aber in jedem einzelnen Fall hätte er doch wieder den Cavalierischen Satz verwenden müssen, den er auch so benutzte. Wir finden ja heutzutage den Wert eines bestimmten Integrals ganz anders; meistens gehen wir vom unbestimmten Integral aus, suchen dasselbe mit Hilfe einer eignen Rechenoperation als Funktion seiner oberen Grenze zu ermitteln und setzen dann erst die speziellen Grenzen ein. Pascal kennt weder den Begriff der Funktion noch des unbestimmten Integrals und ohne einen von beiden kann er das Integrieren selbst als Rechenoperation nicht finden. Denn man kann wohl vom unbestimmten Integral leicht zum bestimmten gelangen, aber nicht umgekehrt, da das bestimmte Integral nur den Grenzwert einer Summe darstellt, also auch ohne irgend welche Integrationen ermittelt werden kann. Leibniz, der mit Kurvengleichungen operiert, kommt dagegen zu Ausdrücken wie $\int x = \frac{x^2}{2}$, die noch die unbestimmte Koordinate x enthalten und infolgedessen unbestimmte Integrale sind.

Jetzt ist auch klar, daß, solange der Funktionsbegriff fehlte, ohne analytische Geometrie nie ein Integralalgorithmus entstanden wäre. Dieser bedingt nämlich wegen der impliziten Verwertung des Funktionsbegriffes eine Schreibung in Variabeln, zu einer solchen konnte aber nur die Anwendung der analytischen Geometrie Veranlassung geben. So verdankte also die Infinitesimalrechnung der Präexistenz der analytischen Geometrie ihre Entstehung, hat aber dafür dann umgekehrt auf die Entwickelung der letzteren den mächtigsten Einfluß geübt.

Wegen dieser Bedeutung für die Erfindung der Infinitesimalrechnung wollen wir etwas auf die Entstehung der analytischen Geometrie eingehen. Der Ausgangspunkt für dieselbe ist zweifellos in den Werken Viètes zu suchen, denn die Annahme, die analytische Geometrie sei etwa durch graphische Darstellung unbestimmter (Diophantischer) Gleichungen und Beobachtung der verschiedenen dabei entstehenden Kurven gefunden worden, ist durchaus unberechtigt. Erstlich war zu der in Frage kommenden Zeit die graphische Darstellung noch kein mathematisches Untersuchungsmittel, zum andern aber hatte man sich bereits gewöhnt, bei derartigen Gleichungen nur die ganzzahligen Lösungen ins Auge zu fassen.

Vielmehr verdankt die analytische Geometrie ihr Entstehen der Anwendung der Buchstabenrechnung, der Algebra, auf geometrische Fragen. Während man früher algebraische Probleme, insbesondere die Bestimmung der Wurzeln einer gegebenen Gleichung auf geometrischem Wege gelöst hatte, so wandte jetzt umgekehrt Viète systematisch die Resultate der bereits hochentwickelten Algebra auf die Geometrie an. Er brauchte zu dem Zweck nur geometrische Längenrelationen in algebraische Schreibweise einzukleiden, um, unabhängig von Figur und geometrischer Überlegung, rechnen zu können; das Wesen seiner Behandlung geometrischer Probleme liegt in der Aufstellung und Lösung gewisser Gleichungen. Besonders bequem mußte sich für ihn die Untersuchung krummliniger Gebilde gestalten. Hier hatten schon die Alten ihre gewöhnlichen auf dem Prinzip der Strecken- und Winkelvergleichung beruhenden Deckungsmethoden verlassen; schon die Behandlung der Kegelschnitte war ihnen nicht ohne Benutzung einer großen Anzahl von Streckenrelationen, die man heutzutage als Koordinatenrelationen bezeichnen würde, möglich geworden, wenn sie auch den Koordinatenbegriff explizit nicht enthielten. Dieser hatte sich aber im Laufe der Zeit gebildet; schon die römischen Feldmesser gebrauchten den Ausdruck „lineae ordinatae“[1]), die Astronomen des Mittelalters führten systematisch sphärische Koordinaten ein, und bei Luca Valerio treffen wir bereits 1604 die Zusammenstellung „ordinatim applicata“.[2]) Wie sehr der Koordinatenbegriff zu Beginn des 17. Jahrhunderts bereits in die Mathematik eingedrungen war, beweist Cavalieris Indivisibilienmethode, die ja, wie früher gezeigt, indirekt auf ihm beruht.[3])

Während aber bei Viète die Koordinaten dort, wo sie vorkommen, nur zufällig benutzt werden, führen jetzt Fermat und Descartes dieselben mit vollem Bewußtsein planmäßig in die rechnende Geometrie ein. Diese beiden Mathematiker haben aber noch einen Schritt getan, der die algebraische Behandlungsweise geometrischer Probleme erst zur analytischen Geometrie machte: sie erkannten im Gegensatz zu Viète, daß nicht nur für alle Punkte einer Kurve eine gewisse Gleichung gelte, sondern daß umgekehrt auch diese Gleichung die Punkte der Kurve selbst bestimme, daß sie also gewissermaßen das algebraische Bild der Kurve sei.

Im übrigen stehen Fermat und Descartes noch ganz im Banne der Auffassung Viètes; es handelt sich bei ihnen immer noch genau wie bei diesem um die Aufstellung und Lösung gewisser Gleichungen, nur daß

1) Cantor, a. a. O. I², S. 515.
2) Valerius, *De centro gravitatis libri tres*, l. III. pr. 4.
3) *Die Wandlungen des Indivisibilienbegriffs*, S. 36.

die Auffassung derselben als Repräsentantinnen der betreffenden Kurven neu hinzugekommen ist, jeder Funktionsbegriff liegt vollkommen fern. Ja, nicht einmal ein Variabilitätsbegriff ist vorhanden, das beweisen die Ausdrücke „équation“ und „inconnue“ statt der unsern heutigen Anschauungen mehr entsprechenden Funktion und Variable. x und y sind noch lange über Descartes hinaus nicht Veränderliche, nicht Bestimmungsstücke des Kurvenpunktes (x, y) κατ᾽ ἐξοχήν, sondern die Bestimmungsstücke des jeweils gesuchten festen Punktes.[1]) Es wäre ja nach der Anschauung der damaligen Zeit widersinnig gewesen, bei einem Punkt, der nur der einen Beschränkung unterworfen ist, auf einer gegebenen Kurve zu liegen, der also nicht völlig bestimmt ist, von Bestimmungsstücken zu sprechen. Ein Durchlaufenlassen der x-Koordinate von 0 bis ∞ findet sich lange Zeit nirgends; man erteilte höchstens dem x der Reihe nach einzelne bestimmte feste Werte und sah zu, welche Werte dabei y annahm. Immerhin wurde auf diese Weise wenigstens der Begriff der Abhängigkeit vorbereitet, der dann in Verbindung mit dem Variabilitätsbegriff den Funktionsbegriff bilden konnte.

Es ist merkwürdig, daß bereits viel früher einmal ein ziemlich ausgebildeter Funktionsbegriff in der Mathematik vorhanden war, der aber anscheinend auf die Entwickelung der Infinitesimalrechnung und der analytischen Geometrie nicht den geringsten Einfluß ausgeübt hat. Bekanntlich wußte der französische Mathematiker Nicole Oresme (ungefähr 1323—1382) in seinem *Tractatus de latitudinibus formarum* Koordinatenbegriff, Abhängigkeitsbegriff und graphische Darstellung praktisch zu verwenden.

Meiner Ansicht nach ist in Wirklichkeit der Funktionsbegriff folgendermaßen entstanden. Durch die Möglichkeit, in einer Kurvengleichung der einen Koordinate verschiedene Werte beizulegen, sowie ganz besonders durch den Einfluß des Grenzbegriffs, speziell der Vorstellung des Übergehens einer Figur in eine andere, gelangte man zunächst dazu, x und y als variabel anzusehen. In der Tat findet sich der Variabilitätsbegriff (neben der alten Auffassung) häufiger zuerst bei Wallis, der bereits mit dem Grenzbegriff vertraut war. Andrerseits konnte man Differenzieren und Integrieren nicht an Kurvengleichungen selbst, sondern im allgemeinen erst dann vornehmen, nachdem die y-Koordinate durch x dargestellt, d. h.

---

1) Es ist z. B. bezeichnend, daß die Figuren in den *Sectiones conicae* des Wallis aussehen, wie die zu infinitesimalen Problemen gehörigen: es sind nämlich eine Unmasse von Koordinaten gezogen, offenbar um anzudeuten, daß die für einen einzelnen speziellen Kurvenpunkt durchgeführte Untersuchung ebenso auf jeden beliebigen andern angewandt werden kann.

auf die Form einer expliziten Funktion von x gebracht worden war. Durch den Umstand aber, daß man aus praktischen Rücksichten die eine Koordinate als Funktion der andern darstellte, mußte unter gleichzeitiger Verwendung des Variabilitätsbegriffs der Funktionsbegriff selbst entstehen. Dabei ist darauf hinzuweisen, daß in den mechanischen und kinematischen Methoden von DESCARTES und ROBERVAL ja nicht ein verkappter Funktionsbegriff zu suchen ist; denn der innere Zweck dieser Methoden, dessen sich allerdings ihre Erfinder nicht bewußt wurden, ist lediglich der, durch den Begriff der Bewegung Stetigkeitsbetrachtungen oder Grenzübergänge zu ersetzen.

Von ganz andrer Seite gelangte NEWTON zum Funktionsbegriff: bei ihm steht das physikalische Denken im Vordergrund und beherrscht auch seine mathematischen Anschauungen vollkommen. So liegt es ihm viel näher eine Kurve mechanisch erzeugt sich vorzustellen, als in ihr ein Gebilde zu sehen, das durch eine Gleichung definiert ist. Es ist darum begreiflich, wenn er ohne Not (im Gegensatz zu DESCARTES und ROBERVAL) Bewegungsvorstellungen auch in die Geometrie einführt und folglich in der analytischen Geometrie x und y als Koordinaten eines „beweglichen Punktes" ansieht. Außerdem war NEWTON überhaupt schon von der seit GALILEI hochentwickelten Mechanik her mit dem Funktionsbegriff vertraut[1]) und brauchte ihn nur noch auf Algebra und analytische Geometrie zu übertragen.

Nur die Kenntnis von dem gänzlichen Mangel[2]) eines Funktionsbegriffes in der Mathematik vor Erfindung der Infinitesimalrechnung läßt uns auch FERMATS Maxima- und Minimamethode richtig beurteilen.[3]) VIÈTE hatte bereits gezeigt, wie sich in der Gleichung

$$B x^n - x^m = Z$$

die Größen B und Z durch zwei Wurzeln A und E darstellen lassen.[4]) Es bestehen nämlich nach VIÈTES Ausdrucksweise die beiden „aequationes ancipites"

$$BA^n - A^m = Z \text{ und } BE^n - E^m = Z;$$

daraus folgt

---

1) In der Mechanik war es ja ein Hauptproblem, die Koordinaten des Bahnorts eines bewegten Punktes als Funktionen der Zeit zu ermitteln.

2) Abgesehen natürlich von dem oben erwähnten *Tractatus de latitudinibus formarum*.

3) In den meisten Abhandlungen über seine Methode hat FERMAT ihre Entstehung anscheinend absichtlich verheimlicht. Das Schriftstück, auf das sich die Darstellung im Text gründet, findet sich nebst andern wertvollen Arbeiten über die Maximalmethode veröffentlicht in FERMATS Briefwechsel, herausgegeben von P. TANNERY.

4) *De aequationum recognitione et emendatione.*

$$B = \frac{A^m - E^m}{A^n - E^n},$$

ein Ausdruck, der noch mit $A - E$ gekürzt werden kann. Ist B gefunden so ergibt sich Z unmittelbar.

Diese Darstellung kombiniert nun Fermat mit einer Stelle bei Pappus. Dieser hatte nämlich das Minimum eines Verhältnisses als *ὁ μοναχὸς λόγος καὶ ἐλάχιστος*, d. i. „minima et singularis proportio“ nach Commandinos Übersetzung, bezeichnet. Dadurch nun, daß Commandino den Ausdruck „singularis“ nicht zu erklären vermochte, wurde Fermat zu weiterem Nachdenken angeregt und kam so zu der Erklärung, daß das Minimum charakterisiert werde durch das Vorhandensein einer einzigen Lösung eines Problems, das sonst immer zwei Lösungen besitze. Ist z. B. die Aufgabe vorgelegt, das Rechteck größter Fläche mit gegebenem Umfang $2B$ zu finden, so gibt es im allgemeinen zwei Lösungen: Ein Rechteck mit der Grundlinie A und der Höhe E und ein solches mit der Basis E und der Höhe A. In der Nähe des Maximums werden die zwei möglichen Basislängen A und E sehr wenig verschieden sein, für das Maximum selbst zusammenfallen. Nach Viète werden aber A und E die Wurzeln der Gleichung

$$Bx - x^2 = Z$$

sein, wo Z die Fläche der betreffenden Rechtecke ist. Dann ist $B = A + E$. Im Falle des Maximums sind beide Wurzeln gleich zu setzen, d. i. $A = E$. Also wird

$$A = \frac{B}{2}, \quad Z = \frac{B^2}{4}.$$

Damit hat Fermat eine Methode gewonnen, die ziemlich allgemein verwendbar ist; da jedoch praktisch das Kürzen mit $A - E$ Schwierigkeiten machen kann, nennt Fermat die zweite Wurzel von vornherein nicht E, sondern $A - E$, wodurch die frühere Differenz $A - E$ in E übergeht.

Aus allem geht hervor, daß das Fermatsche E ja nicht als eine Variable, sondern nur als eine Unbekannte angesehen werden darf; auch ist der Ausdruck „adaequare“, der in der Beschreibung seiner Tangentenregel[1]) vorkommt, einfach mit „gleichsetzen“ wiederzugeben. So sehr also auch Fermats Methode an unser Differenzieren erinnert, so ist sie doch noch ganz ungeheuer weit davon entfernt; Fermat wird sich ja in keiner Weise bewußt, daß er mit seiner Methode die Denkweise der gewöhnlichen Algebra überschritten und durch das Gleichsetzen seiner

1) Vgl. Cantor, a. a. O. II², S. 858.

Unbekannten A und E bezw. $A—E$ implizit einen Grenzübergang vollzogen hat.

Wir haben jetzt einigermaßen die entwickelungsgeschichtlichen Momente kennen gelernt, die für die Vorgeschichte der Erfindung der Infinitesimalrechnung in Frage kommen Zum Schlusse sei noch eine kurze Übersicht über die Entwickelung der einzelnen damaligen Methoden zur Behandlung von infinitesimalen Problemen gegeben.

Nachdem man allmählich wieder dazu gelangt war, die Schriften der antiken Mathematiker, insbesondere Archimeds, ihrem Inhalt, wenn auch nicht ihrem Geiste nach zu verstehen, erweiterte zuerst Kepler die Zahl der mathematischen Probleme, indem er eine Reihe von Inhaltsbestimmungen teils selbst ausführte, teils den Mathematikern seiner Zeit vorlegte. Wesentlich ist nun hierbei der Punkt, daß die Methoden der Alten nur bereits gefundene Resultate zu beweisen gestatteten; man suchte also jetzt nach Verfahren, die gleichzeitig Neues zu finden erlaubten. Zunächst führte Cavalieri Keplers Untersuchungen nach einer bereits früher ausführlich beschriebenen Methode[1]) fort. Die letztere wurde weiter ausgebildet von Roberval und Pascal, der den Begriff der Fläche mit Hilfe der unendlichkleinen Größen allgemein definierte und das Problem der Inhaltsbestimmung sowie verwandte Probleme zu einem gewissen Abschluß brachte. Wallis arithmetisierte dann seine Resultate. Unabhängig davon entwickelte sich aus den Schriften Archimeds durch Valerio, Grégoire de St. Vincent, Tacquet und Wallis der Grenzbegriff und mit ihm die Theorie der unendlichen Reihen. Der Begriff der unendlichkleinen Größen, zu dessen Entstehen Grégoire unabsichtlich sehr viel beigetragen hatte, wurde von besonderer Wichtigkeit für das Rektifikationsproblem, dessen Behandlung zu einer bald mehr, bald minder bewußten Einführung des Quotienten zweier unendlichkleiner Größen nötigte. Von Differentiationsproblemen wurden anfänglich besonders Tangentenkonstruktionen behandelt. Hier gab Robervals mechanische Erzeugungsweise der Tangente, ausgebildet von Barrow, sowie die kinematische von Descartes sehr elegante Resultate. Rechnerische Methoden waren die von Descartes, die auf dem Gleichsetzen zweier Gleichungswurzeln beruhten, genau wie die Maximamethode Fermats. Die analytischen Tangentenmethoden sind deshalb von so hoher Bedeutung, weil sie den Anstoß zu einem rechnerischen Vorgehen und zur Verwertung der analytischen Geometrie in Fragen infinitesimaler Natur gegeben haben. Es war sehr wichtig, daß durch all die genannten Methoden eine Menge glänzender Resultate, besonders über die Zykloide, schon vor Erfindung

1) Siehe *Die Wandlungen des Indivisibilienbegriffs*, S. 31 u. folg.

des Infinitesimalkalküls entdeckt wurden, sodaß Newton und Leibniz die Möglichkeit hatten, die Richtigkeit ihrer Rechnungen an ihnen zu erproben. Es wird ja begreiflich erscheinen, daß diese beiden Entdecker ein Mittel brauchten, um sich von Zeit zu Zeit von der Zuverlässigkeit ihrer Schritte zu überzeugen. Insbesondere für Leibniz war die Gelegenheit zu einer Kontrolle sehr angenehm, da sein rein formales, abstraktes Vorgehen an Kühnheit bis dahin nicht seines gleichen hatte, während Newton mit seiner mechanischen Grundlage der Fluxionsrechnung immer im Bereich gewohnter Vorstellungen und Methoden blieb.

Luigi Cremona et son œuvre mathématique.

Par Gino Loria à Genova.

Avec un portrait en phototypie comme frontispice.

Table.

1. Enfance et jeunesse.
2. Etudes universitaires. Premières publications.
3. Séjour à Cremone.
4. Recherches de Cremona sur les cubiques gauches.
5. Cremona au lycée de Milan et à l'université de Bologne.
6. Etudes de Cremona sur la théorie des courbes planes.
7. Les transformations birationnelles planes.
8. Recherches de Cremona sur quelques courbes algébriques spéciales.
9. Recherches de Cremona sur quelques surfaces algébriques spéciales.
10. Recherches de Cremona sur la théorie générale des surfaces algébriques planes et particulièrement sur celle du 3e ordre.
11. Cremona professeur de géométrie descriptive et de géométrie analytique.
12. Cremona à l'institut technique supérieur de Milan.
13. Travaux de Cremona sur les courbes du point de vue du genre.
14. Transformations rationnelles de l'espace; leur application à la représentation plane des surfaces.
15. Cremona et le polytechnicum de Rome.
16. Cremona dans l'administration publique et au gouvernement.

Liste chronologique des publications mathématiques de L. Cremona.

All' alta impresa caritade sprona.
Petrarca.

1. Enfance et jeunesse.[1])

Le grand géomètre, dont aujourd'hui on pleure la perte irréparable, appartint à une famille distinguée originaire de Novare qui jouit d'une

1) Pour rédiger la partie biographique du présent travail, des notes écrites par Mme Itala Cozzolino-Cremona (fille de l'illustre géomètre) m'ont été d'un très grand secours. M. L. Berzolari a eu la bonté de faire à ma prière des recherches dans les archives de l'université et du gymnase de Pavie et de mettre à ma disposition leurs remarquables résultats. MM. E. Bertini et Misani m'ont encore fourni des renseignements précieux. Que tous reçoivent mes remercîments les plus sincères. La belle *Commemorazione del socio Luigi Cremona,* faite par M. Veronese à l'académie des „Lincei" le 6 décembre 1903, quoique arrivée lorsque mon travail était fini, m'a servi pour ajouter ou corriger quelques détails.

considérable aisance à une époque pas très éloignée de nous. Sa grand'mère (MARGHERITA FERRARI CREMONA), veuve très jeune et animée de goûts dépensiers, fut la cause principale des revers de fortune de la famille. Quand en 1770 le père du grand homme (GAUDENZIO) vint au monde, le bien paternel était dilapidé; mais, malheureusement il était aussi par nature porté à la dépense, et ne sut pas donner l'énergique coup de barre indispensable pour sauver le bateau du naufrage. A l'age de 25 ans, ayant obtenue à Pavie le degré de docteur en droit, il épousa CATERINA CARNERALI, qui lui donna trois enfants: JOSEPH, JEAN et JEANNE; l'ainé s'établit à Venise et y devint avocat distingué; JEAN, fut maître des comptes; et la jeune fille épousa à Groppello G. B. MAGENTA. En 1818 GAUDENZIO CREMONA fut obligé de quitter Milan, où il était établi pour subvenir à sa famille; et il accepta alors un emploi très humble à la délégation autrichienne de Pavie. Resté veuf, il se maria une seconde fois le 28 novembre 1829; et bien qu'il compta plus que 59 ans, il choisit comme compagne une jeune femme qui n'en comptait que 20. De ce nouveau mariage quatre autres fils naquirent, savoir: le 7 décembre 1830, dans la maison qui porte aujourd'hui le numéro 8 dans la rue Severino Boezio, ANTONIO LUIGI GAUDENZIO GIUSEPPE, celui qui devait acquérir une renommée éternelle dans le champ scientifique au nom de CREMONA; deux ans après PIETRO, mort en 1855, encore étudiant en mathématiques, d'une pthisie pulmonaire qu'il tenait de sa mère; après FRANCESCA, morte à dix ans, victime de la même maladie; et enfin le 10 avril 1837, TRANQUILLO, le futur grand peintre, mort à Milan le 10 juin 1878.

Le second mariage de GAUDENZIO CREMONA, pour des raisons qu'il est facile de comprendre, fut désapprouvé et combattu par les fils du premier lit; toutefois le fils GIUSEPPE ne se refusait pas de secourir souvent une famille qu'il reconnaissait digne non seulement de compassion, mais aussi de la plus haute éstime. Et ces secours devinrent tout-à-fait indispensables, lorsque en 1841 le père CREMONA, à la suite d'une malheureuse chute, fut obligé de garder le lit et mourut au bout d'une année, laissant une veuve qui, à 30 ans et avec une petite pension pour unique ressource, devait toute seule entretenir et élever quatre enfants, dont le plus grand n'avait pas plus de onze ans.

L'émouvant spectacle de la lutte quotidienne, que devait soutenir cette jeune mère et qu'elle soutenait avec une noble et sereine fierté, aura sans doute exercé une influence bienfaisante sur LUIGI CREMONA et contribué puissament à façonner son caractère irréprochable et ferme; on peut dire en effet que dans toute son existence est fidèlement réfléchie l'image de la physionomie morale de sa vénérée mère. A la mort de son père il suivait le dernier cours du gymnase; désirant hâter le jour où il pourrait être utile à sa famille, il redoubla d'ardeur et d'activité à l'étude, de telle sorte que durant les classes secondaires il obtint la note „éminent“ dans toutes les matières et fut toujours le premier de ses condisciples. Pendant son cours „philosophique“ (j'emploie la nomenclature officielle de l'époque) il sentit toujours un grand penchant pour les lettres; c'est ainsi que non seulement se forma cet admirable style que tous les mathématiciens connaissent, mais en même temps il se familiarisa avec le Latin et le Grec presque autant qu'avec l'Italien. Il est bon ici de remarquer qu'il resta, plus âgé, ce qu'il avait été plus jeune; en effet, lorsqu'en 1901 on discuta encore une fois en Italie la suppression du Grec du programme de l'enseignement classique, il se mit du côté des conservateurs, soutenant publiquement que „la vera scuola classica, col latino e col greco, deve rimanere intatta; e tale rimanendo, sarà sempre la scuola preferita dalle intelligenze elette“.[1])

Les héros d'Homère et de Virgile enflammaient le jeune Cremona d'amour pour sa pauvre patrie, qui était alors profondément agitée par ce grand mouvement révolutionnaire qui, préparant la glorieuse année 1848, mettait en effervescence toute la jeunesse studieuse aux universités de Pavie et de Padoue. Si l'on considère encore que parmi les condisciples du futur savant se trouvaient Enrico et Giovanni Cairoli et qu'il passait à Groppello toutes ses vacances avec les deux frères aînées Benedetto et Ernesto, on ne s'étonnera pas d'apprendre que, lorsque le bataillon „Italia libera“, formé de 160 étudiants napolitains allant combattre l'Autriche, traversa Pavie, il abandonna la maison maternelle pour les suivre „senza rimorso (écrivait-il) perchè avrei creduto di mancare ai dettami della più santa delle religioni e di commettere un atto di viltà e inettitudine ricusando di dare il sangue per la patria“. A peu de jours de là, un autre futur grand mathématicien, Enrico Betti, se battait à Curtatone (tout près de Mantoue) sous le commandement de O. F. Mossotti, le célèbre professeur de physique mathématique.

Le bataillon où Cremona avait pris le service, alla le 12 avril 1848 à Ferrare pour rejoindre le général piemontais Durando; celui-ci le dirigea tout de suite sur Polesella et de là, par une marche très fatigante, à Trévise, sous la conduite du capitaine Mauro. C'était toujours avec une émotion grande et profonde que l'obscur jeune homme, devenu une des gloires d'Italie, racontait les épisodes de la guerre à laquelle il prit part, les attaques contre les Autrichiens à Nevesa sur le Piave, le siège de Trévise et particulièrement l'énergique défense du rempart voisin de la porte St. Thomas; „in quel giorno (il disait) sparavamo tanto e così serrato che

1) Voir une lettre à M. Ramorino, datée „Vallombrosa, 29 Luglio 1901“ et insérée dans le cahier d'août 1901 de la revue Atene e Roma, publiée à Florence.

uno squadrone di cavalleria nemica non potè avanzarsi". Son courage et son activité lui valurent sa nomination de caporal, bientôt suivie de celle de sergeant.

Toute résistance étant désormais inutile en campagne ouverte contre un ennemi extrêmement nombreux, le bataillon „Italia libera" courut au secours de Venise qui, par un siège célèbre, retardait l'heure suprême d'une capitulation inévitable. L. CREMONA, arrivé à Venise, se rendit à la maison de son frère aîné GIUSEPPE, plutôt pour avoir des nouvelles de sa pauvre mère que pour lui demander des secours; et après une courte réprimande pour son escapade, son frère, qui était au fond très fier des exploits d'un membre de sa famille, mit à sa disposition sa maison et sa table pour tout le temps de son séjour à Venise. Mais la légion „Italia libera" fut bientôt envoyée à Chioggia (fort de Brondolo), puis à la défense du fort de Marghera. L. CREMONA joua un rôle si actif dans cette défense mémorable, que le capitaine MAURO le montrait aux soldats comme un modèle de vertus civiles et militaires à cause de son courage, de son intelligence, de sa discipline et de sa probité. On sait que cette défense ne finit que lorsqu'un amoncellement de ruines marqua la place du fort de Marghera. Alors la compagnie à laquelle appartenait notre héros, se retira à Venise, où, bien que persécutée par le choléra et par une affreuse disette, elle coopéra à la défense acharnée du pont qui traverse la Lagune. Mais malgré l'héroïsme sans pareil de toute la population, le triste aube du 24 août 1849, la dernière de l'indépendance vénetienne, finit par paraître. Et CREMONA eut au moins une dernière suprême consolation, celle que les débris de l'armée nationale purent défiler avec tous les honneurs des armes, les drapeaux déployés et les tambours battants, devant les généraux autrichiens ébahis en voyant que c'était un petit corps de recrues pâles et décharnées, mal vêtues et à peine chaussées, qui avait tenu en échec pendant plusieurs mois une armée entière de vétérans consommés dans toutes les ruses de la guerre.

2. Études universitaires. Premières publications.

Sans ressources financières, fatigué et malade, LUIGI CREMONA reprit tristement la route de Pavie, accablé par le chagrin de voir qu'après tant de sang versé, sa chère patrie était toujours esclave. Mais sur le seuil de la porte de sa maison une nouvelle et plus grande douleur l'attendait; sa pauvre mère était morte depuis quelque mois. En présence de la désolation du présent, de l'incertitude de l'avenir et des graves responsabilités qui pesaient sur lui, il ne se perdit pas d'esprit, mais il comprit que c'etait le moment de se montrer à la hauteur de la charge que le destin semblait lui avoir confiée. Remis qu'il fut d'une attaque de fièvre typhoïde, dont il avait apporté les germes de Venise, il reprit avec ardeur les études qu'il avait interrompues, et le 27 novembre 1849 il obtient ce degré qu'on appelait alors „assolutoria negli studi filosofici". En conséquence, dans les années suivantes il put suivre dans l'université de Pavie les cours d'ingénieur civil sous la direction de A. Bordoni[1]), A. Gabba[2]), et un peu plus tard de F. Brioschi[3]). Les 5 janvier, 5 mars et 6 mai 1853 il fut admis à subir les „examens de rigueur"[4]) en obtenant dans chacun et par tous les examinateurs (parmi lesquels se trouvait toujours Bordoni et dans les deux premieurs aussi Brioschi) le certificat „valde

1) Quoique à cette époque Bordoni eût déjà dû abandonner la chaire de calcul infinitésimal pour celle de géodésie élémentaire, toutefois, comme directeur des études mathématiques dans la faculté de sciences, il n'avait cessé d'exercer une influence prépondérante.

2) Ce professeur de géométrie supérieure est cité avec reconnaissance par Cremona dans une *Prolusione* dont nous parlerons un peu plus bas.

3) En plusieurs occasions Cremona a déclaré ses dettes de reconnaissance envers Brioschi; d'abord dans la *Prolusione* citée tout-à-l'heure, où il donne „testimonianza di gratitudine all'illustre Brioschi, al quale devo tutto quello che per avventura non ignoro"; plus tard, en 1878, ayant été invité à participer aux fêtes commemoratives du 25e anniversaire de la fondation du polytechnicum de Milan, il écrivit une lettre où l'on lit les phrases suivantes: «Francesco Brioschi comincio ad essermi maestro quando io ne seguii le lezioni di meccanica nell' anno 1851—1852; ma quelle lezioni comunque ricchissime di contenuto non furono se non la parte minima di istruzione matematica onde mi sento a lui debitore. Egli continuò ad assistermi con insegnamenti in privato e con consigli nei successivi anni che passai in Pavia, cioè sino al 1857, mi iniziò allo studio delle funzioni ellittiche ed abeliane e alle opere magistrali di Abel e Jacobi. Non esagero affermando che il Brioschi mi communicò il sacro fuoco ond'egli stesso ardeva e mi dischiuse per primo gl'infiniti orizzonti dell' alta matematica. Quando io lasciai Pavia già cominciavo a sapere studiare e lavorare da me, ma di ciò era pur sempre debitore all' esempio del maestro. Ne' primi tempi ebbi degli scorraggiamenti, ma bastò una sua lettera a dissiparli e d'allora in poi mi crebbero sempre più le forze ed il corraggio. Vero è che i miei studi personali presero ben presto altro indirizzo; mi presi d'amore per la geometria, mentre Brioschi mi aveva avviato per l'analisi. Ma la scienza è una sola; ed è l'analisi che prima mi aveva dato le armi necessarie per penetrare nei misteri della sintesi geometrica . . . Gli anni che passai con Brioschi, come scolaro e poi collega nell' insegnamento, sono gran parte della mia vita; nei primi imparai ad amare la scienza, negli altri poi a trasfonderla in un grande cerchio di uditori. La memoria degli uni e degli altri è un vincolo di affetto, di ammirazione e di gratitudine che mi unisce a Brioschi».

4) Voici les matières sur lesquelles eurent lieu ces examens:

1. Introduction aux mathématiques supérieures. Géodésie et hydrométrie. Économie rurale. Histoire naturelle en général. Dessin géométrique.
2. Calcul différentiel et intégral. Architecture civile; dessin relatif. Géométrie descriptive.
3. Mathématiques appliquées. Architecture hydraulique. Dessin de machines et d'architecture. Législation.

bene", et il fut déclaré ensuite „approbatus p. unanimia cum applausum". Un décret du 9 mai 1853 l'appela à soutenir le jour suivant la discussion publique pour avoir le degré académique de „docteur dans les études d'ingénieur civil et architecte"; ce degré lui fut aussi accordé à l'université et avec acclamation.[1])

Parmi les compagnons d'armes que Cremona eut dans le cours de sa glorieuse campagne, il distingua Nicola Ferrari, jeune génois ami et admirateur de Mazzini.[2]) Ferrari était républicain et Cremona monarchiste; toutefois ils tombaient toujours d'accord dans leur aspiration finale: l'unité de l'Italie et son affranchissement. Nicola lisait souvent à son ami les lettres, frémissantes de patriotisme, que lui écrivait sa soeur Elise, alors directrice de l'asile des enfants de Gênes.[3]) Et Cremona découvrit, à travers ces lettres, la femme digne de devenir sa compagne pour la vie; personnellement il fit sa connaissance à Gênes en 1853, mais elle devint sa femme seulement le 4 août de l'année suivante; à cause du choléra qui sévissait alors sur Gênes, le mariage eut lieu à Groppello dans la maison Magenta. D'après la déclaration de Cremona lui-même[4]), sa femme le conseilla dans toutes les circonstances difficiles de sa vie et toujours sagement; se chargeant de tous les soins domestiques et de l'éducation de ses fils, elle lui a rendu possible le travail continuel et fécond. Elle fut le bon génie de toute sa famille jusqu'au

1) La discussion de doctorat devait se faire sur une des quatre thèses suivantes proposées du candidat:

1. *Mathématiques appliquées:* Lorsqu'on connaît le mouvement du couple de moment *minimum* d'un système invariable de forces dans l'espace, on peut déterminer par une simple construction graphique les moments des couples résultants et composants par rapport à tous les points de l'espace.
2. *Géodésie:* Si toutes les droites tracées sur une feuille de papier restent droites après que cette feuille a été pliée, il existe une relation du premier degré entre les coordonnées d'un point quelconque dans les deux positions.
3. *Géométrie descriptive:* Deux diamètres conjugués de l'ellipse perspective d'une autre sont la perspective du diamètre de l'ellipse objective conjugué à ses cordes parallèles à la trace de son plan sur le tableau et la perspective d'une de ces cordes.
4. *Dessin géométrique:* Les problèmes d'un degré supérieur au second ne peuvent pas se résoudre tous géométriquement par le seul emploi de la règle et du compas.

Cremona choisit le 1er sujet.

2) N. Ferrari mourut jeune et sur sa tombe le grand agitateur écrivit, sous la forme d'une lettre à la soeur d'un décédé, un éloge splendide qui a été publiée. Voir: B. Acquarone, *Ricordo di Elisa Ferrari-Cremona* (Siena, Poggibonsi 1884).

3) Voir: Sofia Albini, *In memoriam* (16 settembre 1882).

4) Voir l'opuscule précité de B. Acquarone et une lettre à M. Bertini, publiée partiellement par M. Veronese dans sa *Commemorazione.*

16 juillet 1882, où elle mourut serainement à Rome; elle mérite ainsi une place d'honneur dans la biographie de son célèbre mari.

Les premières années du mariage de CREMONA furent une époque de souffrances et de luttes continuelles; le gouvernement autrichien n'étant pas disposé à donner une place dans l'instruction publique à l'ancien défenseur de Venise, il dut se résigner à accepter des répétitions dans les meilleures familles de Pavie. Mais enfin, par arrêté du 22 novembre 1855, il fut admis à faire dans le gymnase de Pavie le nécessaire „an d'épreuve". („Probejahr"); le 26 novembre il commençait sa carrière de professeur publique, en s'occupant particulièrement de la physique. Il paraît que les services rendus par lui de cette manière à l'instruction, aient été bien satisfaisants, car il fut nommé pour l'année suivante (par arrêté du 17 décembre 1856) professeur suppléant, aux honoraires annuels de 1620 lires autrichiennes.

Dans les années qui suivirent son doctorat, CREMONA fit la connaissance de E. BELTRAMI, étudiant à l'université de Pavie de 1853 à 1856, et de F. CASORATI, qui prit son degré en 1856. A la même époque, il inaugura son œuvre mathématique. Ses premiers travaux correspondent parfaitement au type qu'on peut construire à *priori* d'un élève de BORDONI et de BRIOSCHI, car ils se rapportent tous à la géométrie analytique élémentaire (voir[1]) [4], [5], [6], [7]) et à l'analyse pure ou appliquée à la géométrie.

Le plus ancien [1], écrit dans l'automne 1855, traite une belle question de géométrie infinitésimale et a été inspiré par la note placée à la fin du mémoire du BORDONI *Sulle figure isoperimetre esistenti in una superficie qualsivoglia.*[2]) Cette note indique une vaste généralisation que peut recevoir la théorie des tangentes conjuguées de DUPIN; si l'on considère une ligne quelconque Γ tracée sur une surface Σ et un système de ∞^1 surfaces dont chacune a avec Σ un contact de l'ordre r en un point P de Γ, alors on a en P deux droites remarquables, savoir, la tangente à Γ et la tangente en P à la correspondante caractéristique de l'enveloppe de ce système de surfaces. Or BORDONI a prouvé que la relation qui existe entre ces deux droites est symétrique; cela explique et justifie le nom de „tangentes conjuguées" qu'il a employé. Lorsque $r = 1$ et que les surfaces considérées sont toutes planes, on retombe sur la notion de tangentes conjuguées ordinaires; mais si, r étant toujours $= 1$, on suppose que ces surfaces soient des sphères, on arrive aux tangentes sphéro-conjuguées de CREMONA.[3])

1) Les nombres entre [ ] renvoient à la liste des publications de CREMONA, placée à la fin de cet article.

2) Publié dans le t. **1** (1832) des Opuscoli matematici e fisici (Milano 1832).

3) Dénomination que M. FELIX MÜLLER ajoutera certainement à une nouvelle édition de son excellent *Vocabulaire mathématique*.

En appliquant une formule générale de BORDONI, ou bien raisonnant directement, notre géomètre prouve la constance du produit des tangentes trigonométriques des angles que deux lignes à tangentes sphéro-conjuguées existant sur une surface et passant par un même point P de cette surface font avec une des lignes de courbure qui passent par P. Il remarque ensuite que si l'on a une série de sphères tangentes à une surface quelconque le long d'une ligne de courbure, elles sont osculatrices à cette ligne en chacun de ses points, offrant ainsi le premier exemple d'une espèce de courbes que plus tard M. DARBOUX a le premier étudiées dans toute leur généralité.[1]) CREMONA ajoute que les droites tangentes en un point P d'une surface aux deux lignes de courbure qui s'entrecroisent en P sont, non seulement conjuguées ordinaires, mais aussi sphéro-conjuguées; cette propriété peut même servir à caractériser les lignes de courbure. Ces propositions subsistent quelle que soit la loi de variation du rayon r de la sphère mobile dans le système considéré; mais il y en a d'autres qui naissent en supposant qu'il existe des relations particulières entre r et les rayons de courbure principaux R_1 et R_2 de la surface au point de contact; CREMONA suppose successivement que r soit moyen arithmétique, géométrique ou harmonique entre R_1 et R_2, et arrive de la sorte à des propositions qui nous semblent assez élégantes pour avoir une place dans les futurs traités de géométrie différentielle.

Cinq ans après, CREMONA est revenu sur ces mêmes questions [21], probablement à cause d'une imperfection qu'il avait remarquée dans son premier travail.[2]) Mais au lieu de refaire simplement ses anciens calculs, il généralisa les questions qui s'y rapportaient; savoir il supposa que, dans la théorie de BORDONI, r étant toujours $= 1$, les ∞^1 surfaces du systeme ne fussent pas des sphères, mais qu'elles eussent la propriété que leurs points de contact avec Σ fussent des ombilics; et, par un procédé d'une élégance parfaite, il arriva à faire acquérir à ses résultats primitifs une généralité extrêmement remarquable. Je ne sais pourquoi les traités de géométrie infinitésimale tiennent un silence complet sur ces recherches de CREMONA, comme sur celles de BORDONI, d'où elles dérivent.

En revenant au groupe d'investigations que CREMONA fit en sortant de l'université, nous signalerons une belle petite note [2] ayant pour but d'établir le théorème d'ABEL dans le cas particulier que l'immortel géomètre

---

1) *Les courbes tracées sur une surface, et dont la sphère osculatrice est tangente en chaque point à la surface* (Comptes rendus Paris 73, 1871, p. 732—736); voir aussi les autres travaux cités à la p. 158 de mon ouvrage *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche* (Torino 1896; 2ª ed.).

2) Cette inexactitude consiste en ceci que dans les formules (1) du mémoire [1] (p. 384) il faut changer en $-$ les signes $+$ des binômes: $b_1\gamma + c_1\beta$, $c_1\alpha + a_1\gamma$, $a_1\beta + b_1\alpha$.

signala dans une lettre célèbre à LEGENDRE.[1]) Avant CREMONA ce cas avait été étudié par O. J. BROCH[2]); mais le raisonnement employé par notre mathématicien est d'une simplicité incomparable. Il est fondé sur une formule de SPOTTISWOODE[3]), dont CREMONA expose une remarquable démonstration due à BRIOSCHI et dont il fit un peu plus tard usage [15] pour établir et préciser[4]) la formule suivante de M. ROBERTS:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha+\delta & \ldots & \alpha+\overline{n-1}\,\delta \\ \alpha+\delta & \alpha+2\delta & \ldots & \alpha \\ \alpha+2\delta & \alpha+3\delta & \ldots & \alpha+\delta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha+\overline{n-1}\,\delta & \alpha+n\delta & \ldots & \alpha+\overline{n-2}\,\delta \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}} \frac{n\delta^{n-1}(2\alpha+\overline{n-1}\,\delta)}{2}.$$

3. Séjour à Cremone.

Ces travaux et les résultats donnés par l'enseignement de CREMONA au gymnase de Pavie montrèrent à l'autorité supérieure qu'il était bien digne d'une place plus élevée et moins précaire que celle qu'on lui avait donnée. En effet, par arrêté du 17 janvier 1857, il fut envoyé au gymnase de Cremone, avec le titre de professeur ordinaire. Il se rendit tout de suite avec sa famille à sa nouvelle destination et dans le deuxième semestre de la même année il donna l'enseignement mathématique aux élèves des six dernières des huit classes qui formaient cet établissement. Pour juger combien lourde était la tâche du nouveau professeur, il suffit de remarquer qu'il devait faire chaque semaine *dix-sept* heures de leçon et montrer l'arithmétique, l'algèbre élémentaire (jusqu'aux progressions, le binôme de NEWTON et les logarithmes), la géométrie intuitive, la géométrie du plan et de l'espace, la trigonométrie et encore des notions sur l'application de l'algèbre à la géométrie.[5]) Du zèle et de l'ardeur deployés par CREMONA dans son rôle de professeur, le souvenir est encore très vif chez un homme qui était alors un de ses élèves, MASSIMO MISANI (actuellement directeur de l'institut téchnique d'Udine), qui rappelle la clarté, la rigueur et l'efficacité de sa méthode didactique; nous tenons aussi de lui que, comme il n'y avait pas alors en Italie de bons textes pour l'enseignement mathématique, CREMONA avait la patience de rédiger des résumés de ses leçons que les élèves copiaient pour leur usage.

---

1) Journ. für Mathem. **6**, p. 73—80; *Oeuvres complètes d'ABEL*, nouv. éd. (1881) t. II, p. 276—277.

2) *Sur quelques propriétés d'une certaine classe de fonctions transcendantes* (Journ. für Mathem. **20**, 1840, p. 178—188).

3) *Elementary theorems relating to determinants* (Journ. für Mathem. **51**, 1856).

4) ROBERTS avait écrit $+$ dans le second membre de l'équation.

5) Voir le Programma dell' I. R. ginnasio liceale di Cremona, 1857.

Cette implicite déclaration du peu d'estime qu'il avait pour les traités qui avaient alors cours dans les écoles italiennes, nous explique la joie qu'il éprouva lorsque parurent les traductions italiennes de l'*Algèbre* de BERTRAND et de la *Géométrie* d'AMIOT; le contentement pour la première nous est connu par le témoignage de ce même élève de CREMONA que nous avons cité ci-dessus, et la satisfaction produite par la seconde se trouva publiquement déclaré dans un savant article bibliographique [22], malheureusement inachevé, que lui consacra notre savant et qui a sans doute contribué puissamment au succès d'un livre qui assura une bonne instruction géométrique à plusieurs générations d'étudiants au déçà des Alpes.

Peu de temps après avoir été nommé professeur ordinaire, CREMONA fut invité à écrire un mémoire scientifique pour le Programme de l'institut dont il faisait partie (c'est un coutume qui subsiste encore en Allemagne et en Autriche); ayant accepté, il choisit comme sujet de son travail [3] quelques théorèmes énoncés par LAFITTE dans le cahier de mai 1857 des Nouvelles annales de mathématiques[1]); pour les démontrer, il employa cette méthode, si élégante et puissante lorsqu'il s'agit de la géométrie de position, que les mathématiciens anglais appellaient „abridged notation". Les théorèmes dont il s'agit se rapportent aux figures homographiques et aux sections coniques; nous n'en rapporterons pas les énoncés; nous remarquerons seulement que, en les établissant, CREMONA s'est montré tout-à-fait le maître du procédé employé, procédé qui, généralisé à l'espace, devait bientôt le conduire à des résultats de la plus grande importance.

De Cremone est encore daté un travail de notre géomètre [8] travail qui bien qu'étant un simple article bibliographique, mérite d'être signalé, avant tout parce qu'il donne la preuve des études supérieures que CREMONA faisait alors, et ensuite parce qu'il renferme des déclarations de principe qui nous semblent importantes. Il s'agit d'une analyse des deux premiers cahiers des *Beiträge zur Geometrie der Lage;* CREMONA n'était pas alors admirateur enthousiaste de la méthode pure du célèbre professeur de Nürnberg, et lorsqu'il disait que „les propriétés descriptives et les propriétés métriques des figures sont si étroitement liées entre elles, qu'il n'est pas avantageux de prononcer entre elles un divorce complet", il prenait rang dans l'armée ayant pour généraux CHASLES et STEINER, où il devait combattre toute sa vie en capitaine plein d'ardeur et de courage.

4. Recherches de Cremona sur la théorie des cubiques gauches.

Pendant son séjour à Cremone notre mathématicien écrivit bon nombre de travaux qui fixèrent sur lui l'attention des savants et qui, même

1) *Neuf théorèmes de géométrie segmentaire* (Nouv. ann. de mathém. 16, 1857, p. 202—207).

aujourd'hui, ont encore une grande importance; j'ai en vue surtout ceux qui ont pour sujet les courbes gauches du troisième ordre.

Le premier de ces ouvrages [9], écrit au printemps 1858, est un mémoire soigné, ayant pour but principal la démonstration des théorèmes énoncés par Chasles dans la note XXXIII de l'*Aperçu historique* et plus complètement dans la note intitulée *Propriétés des courbes à double courbure du troisième ordre.*[1]) Suivant l'exemple de son maître Brioschi (qui, dans la courte note *Sulle costruzioni del Chasles per le linee del terzo e quarto ordine,*[2]) avait prouvé l'utilité de l'algèbre dans l'étude des propriétés descriptives des figures), Cremona eut recours, pour atteindre son but, à une méthode analytique dont le plus éclatant mérite est prouvé par cela qu'il n'a pas été possible de la remplacer par une autre plus élégante et plus féconde: c'est une méthode qui sous une autre forme se trouve dans le *Barycentrischer Calcul* (1827) de Möbius, mais que Cremona découvrit de son côté trente ans après; elle repose sur la remarque que, A, B, C, D étant quatre fonctions linéaires indépendantes des coordonnées cartésiennes d'un point de l'espace, deux cônes ayant une génératrice commune peuvent se représenter par deux équations du type suivant:

$$BD - C^2 = 0, \; AC - B^2 = 0.$$

Cela prouve que la courbe où ils se coupent (on l'appelle cubique gauche, d'après la proposition faite par Cremona et acceptée généralement depuis), peut se représenter analytiquement à l'aide d'un paramètre ω par les formules suivantes:

$$A : B : C : D = \omega^3 : \omega^2 : \omega : 1;$$

la tangente au point (ω) de la courbe est alors représentée par les équations

$$A - 2\omega B + \omega^2 C = 0, \; B - 2\omega C + \omega^2 D = 0,$$

et le plan osculateur par l'équation

$$A - 3\omega B + 3\omega^2 C - \omega^3 D = 0.$$

Tout le monde sait aujourd'hui que cette représentation analytique conduit par le chemin le plus direct et le plus court aux propriétés fondamentales des points, des tangentes et des plans osculateurs de la courbe. A celles que l'on connaissait avant lui, Cremona en ajouta de nouvelles, parmi lesquelles nous choisissons les suivantes: „Si une droite, coupant en un point une cubique gauche, est l'axe d'un faisceau de plans, les couples de points où ces plans rencontrent encore la courbe forment une involution. Un plan osculateur variable d'une cubique gauche coupe un plan fixe π suivant une droite et la développable osculatrice suivant

---

1) Comptes rendus Paris 45, 1857, p. 189—197. Comp. *Rapport sur les progrès de la géométrie en France* (Paris 1870), p. 246—247.

2) Annali d. sc. matem. 6, 1855; ou bien *Opere matematiche di F. Brioschi* t. 1 (Milan 1901), p. 177.

une conique (*inscrite* dans la développable); le pôle de cette droite par rapport à cette conique a comme lieu géométrique une autre conique, dont le plan π' s'appelle *conjoint* au plan π; en particulier lorsque π est à l'infini, on voit que le lieu des centres des coniques inscrites dans la développable osculatrice d'une conique gauche est une section conique. Si un plan π est conjoint à π', inversement π' sera conjoint à π et les intersections de la courbe avec π et π' seront accouplées en involution. — Soient P_1, P_2, P_3, P_4 quatre points quelconques d'une cubique gauche et O un point extérieur; on détermine les points P_{ik} et P_{lm} où la courbe est encore coupée par les deux plans $O\,P_i\,P_k$, $O\,P_l\,P_m$ (i, k, l, m étant un permutation quelconque de 1, 2, 3, 4) et enfin celui P où elle l'est par le plan $O\,P_{ik}\,P_{lm}$; ce point P est indépendant de la permutation $i\,k\,l\,m$, et s'appelle *point opposé* aux quatre points P_1, P_2, P_3, P_4".

Au concept de *plans conjoints* d'après la loi de dualité correspond celui de *points conjoints;* tous les deux sont les fondements d'un nouveau chapitre de la théorie des cubiques gauches, que STAUDT écrivit de nouveau après CREMONA.[1]) Celui-ci développa considérablement cette théorie dans un autre mémoire [10], où il combina ces concepts avec la considération du Nullsystem lié à toute cubique gauche, comme nous allons le montrer. Soient: π un plan quelconque de l'espace; P son foyer; A, B, C les points où π coupe la cubique gauche considérée et p la droite (*directrice*) polaire du point P par rapport à la courbe du troisième ordre formée par les droites BC, CA, AB. Appelons *conjointes* deux coniques de la développable circonscrite lorsqu'elles se trouvent sur deux plans conjoints, *conjoints* les triangles où la cubique gauche est coupée par deux plans conjoints et *conjoints* les deux trièdres formés par les plans osculateurs correspondants. On peut alors prouver les théorèmes suivants: „La droite qui joint les foyers de deux plans conjoints est une corde de la courbe, tandis que l'intersection de ces plans est la directrice de tous les deux. Par un point quelconque de l'espace passent trois directrices réelles ou bien une seule, suivant que par ce point passent trois plans osculateurs ou un seul. Les droites où se coupent les faces correspondantes de deux trièdres conjoints et les deux coniques conjointes relatives appartiennent au même hyperboloïde à une nappe". Etc. etc.

Ces propriétés subsistent pour toutes les cubiques gauches, tandis qu'il y en a d'autres dont la validité dépend de la situation de la courbe par rapport au plan à l'infini. Une classe remarquable de ces propriétés a été étudiée par CREMONA [12] en essayant de généraliser à l'espace les belles propositions relatives aux coniques circonscrites à un quadrangle ou bien

1) *Beiträge zur Geometrie der Lage*, 3. Heft (Nürnberg 1860), p. 278.

inscrites dans un quadrilatère, que venaient alors d'établir ou d'énoncer TRUDI[1]) et STEINER[2]). A cet effet il commença par la remarque que, en choisissant d'une manière convenable les axes cartésiennes, il est toujours possible de représenter une cubique gauche Γ par des équations du type suivant:

$$\frac{x}{a} = \frac{\vartheta^3}{\varphi}, \quad \frac{y}{b} = \frac{\vartheta^2}{\varphi}, \quad \frac{z}{c} = \frac{\vartheta}{\varphi};$$

ϑ est un parametre, $\varphi = (\vartheta - \alpha)^2 \pm \beta^2$, et la constante α peut toujours être supposée égale à 0. Les plans osculateurs de Γ forment une surface développable du 4ᵉ ordre et de la 3ᵉ classe renfermant ∞^4 coniques (*inscrites* dans la développable); or en appliquant les équations ci-dessus, CREMONA trouva que:

1. Si Γ a à l'infini trois points réels, toutes les coniques inscrites sont des hyperboles dont les centres forment une ellipse; par la courbe passent trois cylindres du second ordre, tous hyperboliques.

2. Si au contraire Γ n'a à l'infini qu'un point réel, entre ces coniques il y a ∞^1 ellipses, ∞^1 hyperboles et deux paraboles; le lieu des centres de ces coniques est une hyperbole dont le plan est parallèle et également éloigné des plans de ces deux paraboles; par la courbe ne passe qu'un cylindre du second ordre, qui est elliptique.

Cela prouve la convenance de faire de toutes les cubiques gauches deux grandes catégories. Mais à CREMONA n'échappa pas l'existence de deux sous-classes remarquables, dont l'une comprend les cubiques gauches tangentes au plan à l'infini et qu'on peut représenter par les équations du type suivant:

$$\frac{x}{a} = \frac{\vartheta^3}{(\vartheta - \alpha)^3}, \quad \frac{y}{b} = \frac{\vartheta^2}{(\vartheta - \alpha)^2}, \quad \frac{z}{c} = \frac{\vartheta}{\vartheta - \alpha},$$

et l'autre les cubiques gauches osculatrices au même plan et qui peuvent se représenter par des équations telles que les suivantes

$$\frac{x}{a} = \vartheta^3, \quad \frac{y}{b} = \vartheta^2, \quad \frac{z}{c} = \vartheta.$$

On arrive de la sorte à la classification des cubiques gauches que SEYDEWITZ[3]) avait proposée auparavant, dans un mémoire qui CREMONA ne connut que plus tard.[4]) A la fin de son travail il donne la preuve

1) Mem. dell' acc. d. sc. di Napoli **1**, 1856.

2) *Vermischte Sätze und Aufgaben*, § III (Journ. für Mathem. **55**, 1858, ou bien *Ges. Werke* T. II, p. 678).

3) *Lineare Construction einer Curve doppelter Krümmung* (Arch. der Mathem. **10**, 1847).

4) Cette classification a été de nouveau signalée par notre géomètre au cours de la solution qu'il donna [13] d'une question proposée dans les Nouv. ann. de mathém. touchant les cubiques gauches; lorsque CREMONA connut plus tard le travail de SEYDEWITZ, il accepta la nomenclature que celui avait proposée (comp. [24] §§ V, VI).

qu'il avait dès alors compris combien remarquable est la cubique gauche osculatrice au plan à l'infini; et peu après il établit un beau théorème [17], qui fait voir une frappante analogie entre cette courbe à double courbure et la parabole ordinaire.

Il est bon de remarquer ici que le mémoire [12] que nous venons d'analyser est tout-à-fait analogue à un autre [11] plus ancien relatif aux surfaces du second ordre, qui a aussi été composé dans le but de généraliser à l'espace les théorèmes susmentionés de TRUDI et de STEINER. Dans ce nouveau travail CREMONA, en employant les coordonnées tangentielles, s'est proposé de chercher de quelles espèces étaient les ∞^1 surfaces de 2e classe inscrites dans une développable de la quatrième classe. On sait que parmi ces ∞^1 surfaces il y a quatre coniques, dont les plans forment un tétraèdre autopolaire par rapport à toutes ces surfaces; or CREMONA prend comme origine des coodonnées un sommet de ce tétraèdre et comme axes coordonnés les arêtes sortant de ce sommet; il exclut en conséquence les cas où le tétraèdre dont il s'agit a quelque élément imaginaire; comme ces cas peuvent bien se présenter, son analyse n'est pas complète et (si on ne l'a pas encore fait) il serait à désirer que quelqu'un prît la peine de la compléter 1). — Mais il y a un très remarquable système de quadriques inscrites dans la même développable pour lequel le tétraèdre polaire est toujours complètement réel; c'est le système des quadriques homofocales. CHASLES, dans la Note XXXII de l'*Aperçu historique* et plus tard dans un *Résumé d'une théorie des surfaces du second ordre homofocales* 2), en énonça les propriétés les plus essentielles; or CREMONA dans une importante Revue bibliographique [19], après avoir établi analytiquement les quatre principaux théorèmes énoncés par le grand géomètre français 3), en signala un plus général d'où il sut tirer ces quatre cas particuliers. 4)

Après cette digression, que nos lecteurs voudront bien nous pardonner, nous continuerons l'analyse des travaux de CREMONA sur les cubiques gauches. Le premier que nous trouvons [24], est postérieur d'environ une année au dernier qui nous a occupé [12]. L'activité hors ligne déployée par notre géomètre à donner toujours *unicuique suum* nous permet de déterminer la cause du changement de direction qu'il manifeste; dans cette année il prit connaissance directe des recherches sur les cubiques gauches qu'avaient

1) Il est bon de remarquer que la question corrélative (recherche des différentes espèces de surfaces du 2e ordre d'un faisceau) a été parfaitement résolue plus tard par CREMONA d'une manière synthétique: voir *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen*, p. 276—282.

2) Comptes rendus Paris **50**, 1860, p. 1055—1063, 1110—1115.

3) Comp. *Rapport sur les progrès de la géométrie*, p. 233.

4) Ajoutons qu'un problème spécial relatif aux quadriques homofocales a été résolu par CREMONA dans un autre travail [32].

depuis longtemps accomplies Möbius et Seydewitz et de celles plus récentes que Schröter avait publiées dans les t. 54 et 56 du Journ. für Mathem.; par ces dernières Cremona se fit la conviction que les procédés logiques employés par Schröter sont les plus adaptés pour étudier les cubiques gauches (et aussi d'autres figures géométriques plus compliquées[1]); par conséquence le mémoire [24] nous apparaît doué du plus grand intérêt, car il manifeste une nouvelle direction prise par la pensée de notre mathématicien, direction à laquelle il devait demeurer toujours fidèle et qui lui fit atteindre les sommets de la gloire. Dans ce mémoire Cremona établit avant tout la générabilité de toute cubique gauche à l'aide d'un faisceau de plans et des ∞^1 génératrices d'un système d'une quadrique en correspondance projective, ou bien à l'aide d'éléments corrélatifs, en remarquant des cas spéciaux de ces générations L'utilité de ses methodes de génération est prouvée par Cremona par les solutions de deux questions proposées, l'une par Chasles et l'autre par Steiner; la première consiste dans la construction des (deux) cubiques gauches appartenant à un hyperboloïde à une nappe et passant par cinq points de cette surface; l'autre a pour but la détermination du nombre (quatre) des points dont chacun est l'intersection de quatre plans correspondants en un même nombre de faisceaux projectifs de plans.

L'impression que firent sur Cremona ces travaux de Schröter, non seulement ne s'effaça pas avec le temps, mais on dirait qu'elle devint toujours plus profonde; car au printemps 1861 il jugea utile de reprendre *ex novo* la théorie des cubiques gauches [38], avant tout pour donner un historique détaillé et complet des travaux de ces derniers (Möbius, Chasles, Cayley, Salmon, Seydewitz et Schröter), et après pour exposer sous une forme purement géométrique sa théorie des points conjoints et des plans conjoints par rapport à une cubique gauche, et pour déterminer, sans avoir recours à l'analyse, les espèces de coniques inscrites dans une développable du 4e ordre et de la 3e classe. Ce travail, pour la nouveauté des résultats, n'est certainement pas comparable à d'autres du même auteur, mais à cause de la méthode employée et de la pureté de son style, il est bien digne de l'admiration générale dont il fut l'objet.

S'étant mis en train d'étudier les cubiques gauches au point de vue de la géométrie moderne, Cremona aperçut bientôt la nécessité de résoudre les questions relatives à la construction de ces courbes; il composa en conséquence un remarquable mémoire [39] pour exposer la construction d'une courbe du 3e ordre à double courbure déterminée par n de ses points et $6-n$ de ses cordes ($n=6, 5, \ldots, 0$). Il est bon d'observer que dans le cas $n=0$ le problème a *six* solutions, circonstance que Cremona

1) Comp. aussi Nouv. ann. de mathém. 1_2, p. 291 note.

a remarquée le premier.[1]) Notons encore que CREMONA rencontra, au cours de ses recherches, le corrélatif du théorème suivant: „si deux cubiques gauches n'ont pas de points communs, elles auront dix cordes communes“; proposition qu'il démontra en substituant à une des courbes données le système formé par une conique et une droite qui la coupe; c'est un des premiers exemples (mais pas le seul qu'ait offert CREMONA) d'un fécond procédé de recherche aujourd'hui très employé et qui appartient aux applications du „principe de la conservation du nombre“ de M. SCHUBERT.[2]) C'est peut-être en étendant ce procédé logique que notre auteur parvint à cette autre proposition bien plus générale, qu'il se borna à énoncer: „Si deux courbes gauches des ordres m, m', douées de a, a' points doubles apparents, se coupent en r points, le nombre de leurs cordes communes sera exprimé par

$$\frac{mm'(m-1)(m'-1)}{4} + aa' + \frac{r(r-1)}{2}.“$$

CREMONA donna une autre contribution remarquable à la théorie qui nous occupe maintenant, en cherchant [57] le nombre des quadriques de révolution qui passent par une cubique gauche donnée; la remarque qu'il utilisa pour découvrir ce nombre est qu'une surface du 2e ordre de révolution est bitangente au cercle imaginaire à l'infini, de sorte que le nombre cherché est égal à celui des coniques circonscrites à un triangle donné et bitangentes à une conique appartenant au plan de ce triangle; ce nombre est donc *quatre* lorsqu'il s'agit d'une hyperbole gauche, *deux* si la courbe est une hyperbole parabolique ou bien une hyperbole gauche coupant deux fois le cercle imaginaire à l'infini[3]). Ce dernier cas particulier des courbes du 3e ordre à double courbure a été rencontré par CREMONA, aussi en cherchant [60] le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées des points d'une droite sur les plans projectivement correspondants d'un faisceau; dans cette occasion il proposa

---

1) M. REYE l'attribue au contraire à M. STURM (*Der gegenwärtige Stand unserer Kenntnisse der kubischen Raumkurven übersichtlich dargestellt;* Festschrift der mathem. Ges. in Hamburg, 1890, p. 48).

2) M. R. STURM est arrivé au même résultat par une autre voie dans sa note *Combien y a-t-il des sécantes communes à deux cubiques gauches?* (Annali di matem. 3_2, p. 28—32).

3) DRACH puisa aux mémoires sur les cubiques gauches que nous venons d'analyser, pour écrire son *Einleitung in die Theorie der cubischen Kegelschnitte* (Leipzig 1867). BELTRAMI jugea que l'étroite liaison qui existe entre ce livre et les travaux de CREMONA n'avait pas été indiquée assez nettement par DRACH et il en fit l'observation dans la dernière partie (p. 412—419) de ses notes *Sulla teoria delle cubiche gobbe* (Rend. dell' ist. Lomb. 1_2, 1868); or cette partie polémique du travail de BELTRAMI (qui, pour satisfaire au désir de CREMONA, n'a pas été insérée dans les *Opere matematiche* de BELTRAMI) ne doit pas être oubliée dans l'étude des mémoires du savant dont nous nous occupons, en raison des rectifications qui y sont indiquées et qui proviennent de ce dernier.

de désigner la cubique gauche résultante sous les noms de *cercle gauche* ou *cubique gauche circulaire.*

Cremona, s'étant tourné, par une évolution naturelle de sa pensée, vers l'étude des courbes planes algébriques (voyez plus bas § 5), ne perdit jamais de vue la théorie où pour la première fois il s'était affirmé vraiment original: trois de ses travaux sont là pour le prouver. Dans l'un d'eux [46] il exposa un certain procédé (auquel il donna le nom de *projection hyperboloïdique*) pour établir une correspondance entre les points d'une cubique gauche Γ et ceux d'une section conique; voici comment on y parvient. La projection de Γ faite d'un de ses points S sur un plan π est une conique K circonscrite au triangle ABC, dont les sommets sont les intersections de Γ et π; or K peut se considérer comme la courbe première polaire d'un certain point O de π par rapport au trilatère ABC. En conséquence, à chaque point S de Γ correspond un point O de π, et, lorsque S décrit Γ, O parcourt une conique Ω circonscrite au triangle ABC. De cette manière (suivant l'opinion de Cremona) les problèmes relatifs à la cubique Γ se transforment en autant de questions plus faciles relatives à la conique Ω; mais quels sont les problèmes qui peuvent ainsi se résoudre, ni Cremona, ni personne après lui ne nous l'ont encore dit. — Dans un autre court article [41], notre géomètre a prouvé cet élégant théorème: „Etant données une cubique gauche Γ et une droite r qui ne la rencontre pas, on mène par r un plan quelconque π qui coupe Γ aux points A, B, C; or, par rapport au triangle ABC, à la droite r correspondent un point et une conique comme enveloppes-polaires de la 1e et de la 2e classe; et lorsque π tourne autour de r, P décrit une droite et π une surface du 4e ordre, dont r est la droite double". — Plus étendu est un autre mémoire [54], par lequel Cremona a voulu tenir une ancienne promesse (voir [12]) de s'occuper particulièrement de la cubique gauche osculatrice au plan à l'infini. La longue route que nous devons parcourir nous empêche de rapporter toutes les profondes considérations exposées dans ce travail et les belles conséquences qu'en déduisit Cremona, mais sur un point le devoir de l'historien nous oblige de nous arrêter. C'est le passage où Cremona signale les cas particuliers que peut présenter une parabole gauche caractérisée par la supposition qu'elle ait un terne (et par conséquence ∞^1 ternes) de plans osculateurs par couples orthogonaux, ou bien un terne (et par suite ∞^1) de droites tangentes deux à deux orthogonales. Dans le premier cas il y a une droite qui est le lieu géométrique des sommets des trièdres trirectangles osculateurs à la courbe, et une autre droite par laquelle passent tous les plans déterminés par les ternes de points de contact; par chaque point de la première passent trois des directrices des paraboles inscrites dans la développable circonscrite à la courbe considérée. Eh bien! ces propriétés, caractéristiques d'une catégerie de cubiques gauches, ont été retrouvées vingt ans après par W. FRANZ MEYER[1]) et O. BÖKLEN[2]), à l'attention desquels le mémoire [54] de CREMONA avait certainement échappé. Ajoutons que dans ce travail on rencontre encore le cas spécial de parabole gauche caractérisé par l'existence d'un plan diamétral perpendiculaire aux cordes qu'il coupe en parties égales; notre mathématicien détermine les conditions pour qu'il se présente.

La suite de mémoires de CREMONA sur les cubiques gauches, commencée en avril 1858, ne se termina qu'en avril 1879; elle commence par le premier travail vraiment original de notre mathématicien et finit par celui qu'on pourrait dire le dernier [109]. Dans ce mémoire, la considération de certaines courbes planes étudiées par EMIL WEYR[3]) et G. DARBOUX[4]) est étendue, non seulement à l'espace ordinaire, mais à tous les espaces linéaires. En effet, CREMONA établit avant tout le théorème suivant: „Si dans un espace de m dimensions on a un systeme de ∞^1 plans

$$t = x_0 + \tau x_1 + \tau^2 x_2 + \ldots + \tau^m x_m = 0$$

du genre 0 et de la classe m, et si la surface de l'ordre n

$$\sum \frac{k_{r_1 r_2 \ldots r_{m-1}}}{t_{r_1} t_{r_2} \ldots t_{r_{m-1}}} = 0$$

(où $r_1, r_2, \ldots, r_{m-1}$ sont m nombres différents choisis dans la série $1, 2, \ldots, n+m-1$ et les k sont des constantes), qui contient tous les sommets du polyèdre complet dont les $\binom{n+m-1}{m}$ faces sont les $n+m-1$ plans

$$t_1 = 0,\ t_2 = 0,\ \ldots,\ t_{n+m-1} = 0$$

du système, passe par m des sommets du polyèdre formé par $n+1$ autres plans du même système, elle passera aussi par les autres". Dans le cas $m=3$, ce systeme est formé par les plans osculateurs d'une cubique gauche; sur ce cas CREMONA s'arrête assez longtemps, établissant un système particulier de coordonnées pour les points de l'espace ordinaire (chaque point étant déterminé par les paramètres des trois plans osculateurs de la courbe qui le contiennent) et en en faisant plusieurs applications très élégantes; citons comme exemple la proposition suivante: „Les sommets de trois polyèdres complets, dont chacun est formé par n plans osculateurs d'une cubique gauche, se trouvent toujours dans une surface de l'ordre $n-2$ contenant les sommets de ∞^2 polyèdres analogues". Cela est bien suffisant à prouver que CREMONA a su couronner dignement l'édifice géométrique qu'il avait construit en étudiant les cubiques gauches.

---

1) *Wann besitzt die kubische Parabel eine Directrix?* (Mathem.-naturwiss Mitt. [Stuttgart] 1, 11—16).

2) *Über die kubische Parabel mit Directrix* (Zeitschr. für Mathem. 29, p. 378—782).

3) *Über Involutionen höherer Grade* (Journ. für Mathem. 72, 1870, p. 285—292).

4) *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* (Paris 1873).

5. Cremona au lycée de Milan et à l'université de Bologne.

Le désir de faire paraître la dépendance logique qui relie les différents travaux de notre héros, nous a obligé d'abandonner dans notre narration l'ordre exactement chronologique; mais à présent nous allons reprendre le fil de sa biographie.

Son séjour à Cremone dura moins de trois ans. La Lombardie ayant été libérée du joug étranger, le gouvernement italien (par un arrêté du 28 novembre 1859) le nomma professeur au lycée St. Alexandre (aujourd'hui Beccaria). De Milan est daté un mémoire de géométrie analytique [18], dont un résumé parut dans les Nouvelles annales de mathématiques (voir [16], 2e partie), en réponse à une question (498) de ce journal. La question dont il s'agit est un cas tout particulier de la suivante: „Etant donnés une droite OA, un de ses points O et un point B au dehors d'elle, trouver dans le plan ABO une courbe telle qu'en menant une quelconque de ses tangentes et par B la parallèle à cette tangente, les segments OM, ON de la droite OA compris entre ces droites et le point O soient liés par une relation algébrique du degré n $F(OM, ON) = 0$". C'est précisément le problème général que Cremona a traité en maître, en employant les coordonnées tangentielles. Mais il a encore remarqué que sa solution pourrait servir à résoudre la question analogue de l'espace, que l'on peut énoncer comme il suit: „Étant donnés une droite OA, un de ses points A et deux points B, C au dehors, trouver une surface telle qu'en menant *ad libitum* un de ses plans tangents et par B, C les plans parallèles à ce plan, les segments OL, OM, ON de la droite OA compris entre ces plans et le point O soient liés par une relation algébrique du degré n $F(OL, OM, ON) = 0$".

Cremona ne devait pas rester longtemps au lycée de Milan. La Romagne ayant été réunie au royaume d'Italie, le dictateur Farini institua dans l'université de Bologne une chaire de géométrie supérieure; et T. Mamiani, qui était alors ministre de l'instruction, appela Cremona à l'occuper comme professeur ordinaire (arrêté royal du 10 juin 1860), personne ne lui paraissant mieux indiqué pour être désigné à une chaire analogue à celle illustrée par M. Chasles. Par suite de cette décision notre mathématicien fixa en novembre 1860 son domicile dans le chef-lieu de l'Emilie. „Per me (écrivait-il le 26 novembre 1870; voir [97]) i ricordi de' sei anni vissuti in Bologna sono tutti pieni del nome di Domenico Piani[1]). Egli mi ricevette a braccia aperte al mio primo giungere in cotesta città; e mi preparò, presso i colleghi e gli uomini più chiari per sapere, sì cortesi

1) Voir sur ce mathématicien peu connu: D. Santagata, *Della vita e delle opere di Domenico Piani* (Mem. dell' acc. d. sc. di Bologna 1_3, 1871).

accoglienze che, dove credevo di entrare uomo nuovo, trovai indulgenza e benevolenza. Nè il suo patrocinio mi venne mai meno; anzi coll' andar del tempo si fece sempre più affettuoso ed intimo, e non cessò che colla vita." — Mais PIANI ne fut pas le seul savant qui ait contribué à faire que CREMONA ait trouvé si attrayante la résidence de Bologne; une bonne partie du mérite appartient aussi à E. BELTRAMI (nommé professeur d'algèbre à Bologne, sur la proposition de CREMONA) et D. CHELINI (qui y enseigna la mécanique rationnelle durant les années 1860—64); leur accord fut toujours parfait et l'on peut affirmer que CREMONA, avec BELTRAMI et CHELINI, a fondé la haute réputation mathématique dont jouit encore la moderne faculté des sciences de Bologne. Tous les trois devaient rester amis toute leur vie et se retrouver plus tard à Rome; ayant survécu aux deux autres, CREMONA dédia à leur mémoire des notices biographiques (voir [108], [110], [111], [120]) où l'on admire également le sentiment et la doctrine: et la Collectanea mathematica in memoriam D. CHELINI, nunc primum edita cura et studio L. CREMONA et E. BELTRAMI est et sera toujours un témoignage de sentiments élevés, qui embellissent et ennoblissent la vie humaine.

Ayant été appelé à Bologne pour occuper une chaire de récente création, CREMONA pensa de commencer par un discours d'ouverture le nouvel enseignement, pour en exposer le but et la nature. Ce fut aussi le sentiment de CHASLES lorsqu'il inaugura son cours de géométrie supérieure à la Sorbonne. Mais tandis que le grand géomètre français, déjà mûr et encore tout imbu de ses célèbres recherches historiques, jugea bon de commencer ses leçons en jetant un regard sur ce que la géométrie avait été, le professeur italien, dans l'instant où, jeune et plein d'ardeur, il prenait possession de sa chaire, préféra exposer [25] ce que la géométrie était alors et ce qu'elle aspirait à devenir. L'ancien, mais toujours ardent volontaire, en parlant dans une ville encore toute émue et frémissante de la révolution qui l'avait affranchie de la domination papale, ne crut pas devoir adopter le langage froid de la science abstraite qu'il professait; tout son discours est en conséquence comme un hymne à la science et à la patrie; qu'il me soit permis d'en donner une idée, par la transcription de son éloquente péroraison:

> Giovani alunni, che v' accingete a seguirmi in questo corso di geometria moderna, non v' accostate che con saldo proposito di studi pertinaci. Senza un' incrollabile costanza nella fatica non si giunge a possedere una scienza. Se questo nobile proposito è in voi, io vi dico che la scienza vi apparirà bella e ammiranda, e voi l' amerete così fortemente che d' allora in poi gli studi intensi vi riusciranno una dolce necessità della vita. Me fortunato se potessi raggiungere

lo splendido risultato d' invogliare questa generosa gioventù allo studio ed al culto di una grande scienza che ha già procacciato tanta gloria agli stranieri e che fra noi non ha che rarissimi e solitarii cultori!

Respingete da voi, o giovani, le malevole parole di coloro che a conforto della propria ignoranza o a sfogo d' irosi pregiudizii vi chiederanno con ironico sorriso a che giovino questi ed altri studii, e vi parleranno dell' impotenza pratica di quegli uomini che si consacrano esclusivamente al progresso di una scienza prediletta. Quand' anche la geometria non rendesse, come rende, immediati servigi alle arti belle, all' industria, alla meccanica, all' astronomia, alla fisica; quand' anche un' esperienza secolare non ci ammonisse che le più astratte teorie *matematiche* sortono in un tempo più o meno vicino ad applicazioni prima neppur sospettate; quand' anche non ci stesse innanzi al pensiero la storia di tanti illustri che senza mai desistere dal coltivare la scienza *pura*, furono i più efficaci promotori della presente civiltà — ancora io vi direi: questa scienza è degna che voi l' amiate; tante sono e così sublimi le sue bellezze, ch' essa non può non esercitare sulle generose e intatte anime dei giovani un' alta influenza educativa, elevandoli alla serena e inimitabile poesia della verità! I sapientissimi antichi non vollero mai scompagnata la filosofia, che allora era la scienza della vita, dallo studio della geometria, e PLATONE scriveva sul portico della sua accademia: *Nessuno entri qui se non è geometra.* Lungi dunque da voi questi apostoli delle tenebre; amate la verità e la luce, abbiate fede nei servigi che la scienza rende presto o tardi alla causa della civiltà e della libertà. Credete all' avvenire! questa è la religione del nostro secolo. O giovani felici, cui fortuna concesse di assistere nei più begli anni della vita alla risurrezione della patria vostra, svegliatevi e sorgete a contemplare il novello sole che fiammeggia sull' orizzonte! Se la doppia tirannide dello sgherro austriaco e del livido gesuita vi teneva oziosi e imbecilli, la libertà invece vi vuole operosi e vigili. Nelle armi e nei militari esercizii rinvigorite il corpo; negli studii severi e costanti spogliate ogni ruggine di servitù, e alla luce della scienza imparate ad esser degni di libertà. Se la voce della patria vi chiama al campo, e voi accorrete, pugnate, trionfate o cadete, certi sempre di vincere: le battaglie della nostra indipendenza non si perdono più. Ma se le armi posano, tornate agli studii perocchè anche con questi servite e glorificate l'Italia. L'avvenir suo è nelle vostre mani; il valore dei suoi prodi la strapperà tutta dalle ugne dello straniero, ma ella non durerebbe felice e signora di sè ove non la rendesse onoranda e temuta il senno dei suoi cittadini. Ancora una volta dunque, o giovani, io vi dico: non la turpe inerzia che sfibra anima e corpo, ma i militari e li scientifici studi vi faranno ajutatori alla grandezza di questa nostra Italia che sta per rientrare, al cospetto dell' attonita Europa, nel consorzio delle potenti e libere nazioni, con una sola capitale, Roma, con un solo re, VITTORIO EMANUELE, con un solo e massimo eroe, GARIBALDI.

L'enseignement universitaire de CREMONA répondit-il aux espérances qu'on fondait sur le maître, sur le savant et sur l'auteur de cette magnifique *Prolusione?* C'est opinion universelle que, non seulement il maintint, mais qu'il alla bien plus loin de ce qu'on attendait de lui. Convaincu de la sainteté de la mission confiée à un maître quelconque, il dédiait de longues heures de concentration à préparer ses leçons; son exposition était toujours calme et rigoureuse, mais en même temps vive et attrayante; avec ses élèves il n'était pas avare de conseils et d'assistance; et il leur recommandait sans cesse de se pourvoir d'amples connaissances analytiques, dont il reconnaissait la nécessité pour tout géomètre; on retrouve donc en CREMONA maître, ce mathématicien aux idées larges qui apparaît aux lecteurs de ses mémoires scientifiques. Un groupe de ses nombreux et brillants élèves, ayant désormais une place distinguée dans l'histoire de la géométrie, forme le plus beau témoignage de l'importance de son œuvre didactique: qu'il nous suffise de choisir de ce groupe les noms de A. ARMENANTE, E. CAPORALI, R. DE PAOLIS et EMIL WEYR parmi les morts, E. BERTINI, G. JUNG et G. VERONESE parmi les vivants.

Cette notice sur l'influence de CREMONA sur l'enseignement mathématique contiendrait une déplorable lacune si l'on ne faisait pas mention de l'intérêt qu'il prit toujours et qu'il exprima efficacement à l'enseignement secondaire pendant toute sa vie: nous citerons seulement deux manifestations publiques de cet intérêt. La première se trouve dans la traduction italienne, qu'il commença à faire paraître en 1865, des *Elemente der Mathematik* de R. BALTZER, pour doter les instituts techniques italiens d'un texte conforme aux exigences de la science.[1]) La seconde consiste dans la campagne qu'il soutint à côté de BRIOSCHI et secondé par BETTI, pour obtenir l'introduction des Éléments d'EUCLIDE comme livre de texte dans les écoles classiques; il commença cette campagne en 1867 lorsque, ayant été chargé par le gouvernement de faire une enquête sur l'état de l'enseignement de

---

1) Je cite ici, faute d'une meilleure occasion, un autre ouvrage dont la traduction porte le nom de CREMONA, c'est le suivant: BREMIKER, *Tavole logaritmico-trigonometriche con cinque decimali* (Milano, Hoepli 1877).

la géometrie, il recommanda l'adoption de l'EUCLIDE pur et simple comme texte dans les lycées[1]); cette campagne lui causa bien des chagrins[2]), mais elle eut l'heureux résultat de (j'emploie les mots mêmes de CREMONA[3]) „sbandire innumerevoli libercoli, compilati per pura speculazione, che infestavano appunto quelle scuole dove è maggiore pei libri di testo il bisogno del rigore scientifico e della bontà del metodo".

6. Etudes de Cremona sur la théorie des courbes planes.

Un problème beau, grand et très important marque le commencement des recherches géométriques que CREMONA a faites à Bologne: celui de recueillir, coordonner et exposer sous une forme géométrique et méthodique les nombreuses propriétés qu'on avait découvertes dans les courbes algébriques de tous les ordres; la grande renommée atteinte par l'*Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* [29] fournit la preuve éclatante de la génialité de la solution qu'il en a donnée. D'après les déclarations mêmes de l'auteur, il fut poussé à composer ce travail par le désir d'établir géométriquement les propositions que STEINER avait énoncées sous le titre *Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven;* et comme il résulte de ce que dit le grand géomètre suisse, qu'il avait appliqué amplement la théorie des courbes polaires d'un point par rapport à une courbe plane, CREMONA crut bon de commencer par établir méthodiquement cette théorie; mais pour cela étant nécessaire d'employer d'autres notions, notre géomètre, pour être complet, les réunit dans le 1^er^ chapitre de son ouvrage. Dans celui-ci dominent les concepts de rapport anharmonique et d'involution, qui, malgré les travaux antérieurs des géomètres français et allemands, étaient alors trop peu répandus chez nous; et on y trouve encore largement exposée la théorie des centres harmoniques. Comme nouveautés nous y remarquons une considération et un nom: la considération des quatraines de points ayant des rapports harmoniques fondamentaux égaux et le nom d'équianharmonique pour la valeur commune de ces rapports[4]). Il n'est pas nécessaire de nous arrêter plus longtemps

---

1) Comp. Giorn. di matem. 9, 1871, p. 182—183.

2) Voyez l'avant-propos des *Elementi di geometria projettiva.*

3) Voir une lettre [84] publiée pour répondre à la traduction (faite dans un but polémique évident) d'un discours de J. M. WILSON sur *EUCLIDE come testo di geometria elementare* (Giorn. di matem. 6, 1868, p. 361—368). Au même discours avait déjà répliqué J. HOUEL (Id. 7, 1869, p. 56) qui, sous le titre de *L'enseignement de la géométrie élémentaire en Italie* (Nouv. ann. de mathém. 8_2, 1869, p. 278—283), fit paraître une traduction commentée de cette lettre [84].

4) Dans les travaux de CREMONA on remarque un très grand nombre d'applications de la notion de rapport équianharmonique. Une des plus anciennes se trouve dans le théorème suivant: „Un quadrilatère complet a pour couples de sommets opposés

sur le procédé de démonstration dont CREMONA fit usage; tout le monde en connaît les mérites et les défauts; tout le monde sait que, tout en étant synthétique au dehors, il est au fond analytique, et personne n'ignore les efforts qu'on a faits pour mettre à sa place un procédé où les coordonnées ne jouent pas, comme dans celui de CREMONA, le rôle de *Deus ex machina.* — Dans le 2^d chapitre notre géomètre expose la théorie des polaires, suivant les idées de ses inventeurs (BOBILLIER, PLÜCKER, GRASSMANN, DE JONQUIÈRES) avec des additions d'une valeur considérable et des applications profondes et vastes qui sont autant de trophées des victoires de la géométrie pure et qui ne tardèrent pas à devenir classiques; qu'il suffise de citer les investigations sur les systèmes de courbes et sur les courbes covariantes auxquelles on donne aujourd'hui, d'après CREMONA, les noms de Hessienne, Steinérienne, Cayleyenne et Jacobienne. Sous le rapport de la méthode de raisonnement, signalons sa rigoureuse unité et les nombreuses applications qu'il renferme du principe de la conservation du nombre; des corrections de détail indispensables furent signalées par l'auteur lui-même [56]; M. CURTZE en tint compte dans sa traduction allemande de l'*Introduzione*[1]). — Dans le 3^e chapitre, CREMONA, qui avait déjà exposé dans les deux précédents les propriétés caractéristiques des sections coniques[2]), applique la théorie générale des courbes algébriques à celles du troisième ordre tout-à-fait générales. MACLAURIN (1748), CHASLES (1837), PLÜCKER (1839, 1847), CAYLEY (1844, 1857), HESSE (1844, 1848, 1849), STEINER (1846), ARONHOLD (1850), SALMON (1851, 1859), S. ROBERTS (1860) et CLEBSCH (1861), parcourant des routes différentes, étaient arrivés à un grand nombre de propriétés de ces courbes; CREMONA, après avoir pris connaissance des travaux de

---

aa', bb', cc' et pour diagonales $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$. Chacun des côtés (abc, $ab'c'$, $a'bc'$, abc') du quadrilatère contient trois points; soient ω, ω' les deux points formant avec ces trois là un système équiharmonique. Chacune des diagonales ($aa' \cdot \beta\gamma$; $bb' \cdot \gamma\alpha$; $cc' \cdot \alpha\beta$) contient quatre points; soient i et i' les points doubles de l'involution qu'ils déterminent. Les huit points analogues à ω, ω' et les six analogues à i, i' appartiennent à la même conique". Il a été énoncé par CREMONA [52], puis démontré géométriquement par lui-même [70] et encore étendu à l'espace [53]. Des recherches analytiques de BATTAGLINI et JANNI (Giorn. di matem.; **2**, p. 49—52), de FERRERS (*One the fourteen points conic;* Messenger of mathem. **3**, p. 68—70) et W. A. WITHWORTH (*Quadrilinear coordinates*, Id. p. 77—79 et *On de fiftypoints conicoid*, Id. p. 144—145) prouvent la valeur qu'on a reconnue en Italie et en Angleterre à ce théorème. Comp. SALMON-FIEDLER, *Analytische Geometrie der Kegelschnitte*, 6. Aufl. (Leipzig 1903), p. 636.

1) *Einleitung in die geometrische Theorie der ebenen Kurven. Nach der neuen Redaktion unter Mitwirkung des Verfassers ins Deutsche übertragen* (Greifswald 1865). Du même ouvrage il existe une traduction tchèque due à EM. WEYR (1873).

2) Une application des théorèmes fondamentaux sur les faisceaux de coniques se trouve dans la note [33].

ses devanciers et projetant sur eux la lumière qui émanait de sa théorie générale, réussit à les coordonner parfaitement et à les compléter en plusieurs points importants.[1]) La théorie des courbes planes du 3e ordre que l'on trouva dans l'*Introduzione* comprend presque toutes les différentes questions que cette théorie provoque[2]); toutefois celle de la forme que peuvent prendre ces courbes en est totalement exclue. Or deux belles questions, proposées par SYLVESTER pendant le séjour qu'il fit à Naples en janvier 1864[3]), poussèrent CREMONA à fixer son attention de ce côté. Pour résoudre ces questions, il part [51] du théorème de NEWTON qui affirme la possibilité de projeter toute cubique plane suivant une des paraboles divergentes, c'est-à-dire une des courbes qu'on peut représenter par une équation de la forme

$$ax^3 + 3\,bx^2 + 3\,cx + d = -3\,ey^2.$$

Il prouve que si le discriminant R du premier membre est > 0, la courbe est composée d'une branche infinie et d'une ovale, tandis que si $R < 0$ l'ovale manque; dans le cas $R = 0$ la courbe a un point double ou de rebroussement. CREMONA ajoute que dans le premier cas le rapport anharmonique de la courbe est réel et que dans le second il est toujours imaginaire, hormis le cas de la cubique harmonique; une telle cubique peut donc être formée de deux parties ou d'une seulement, tandis qu'une cubique anharmonique ne peut être formée que d'une branche infinie seule. Cette relation entre la figure et le rapport anharmonique d'une cubique a été trouvée depuis sous une autre forme par DURÈGE;[4]) elle est si importante qu'elle ne doit faire ni fait défaut dans aucun traité complet sur les courbes du troisieme ordre[5]).

CREMONA, croyant avec raison que, pour prouver la fécondité et répandre la connaissance d'une méthode, il n'y a pas de système meilleur que celui d'en montrer des applications différentes, ne laissa échapper aucune occasion favorable pour exposer des corollaires qu'on peut plus ou

1) Une élégante application de la théorie des cubiques planes a été faite par CREMONA [34] à la résolution du „problème de l'homographie" proposé par M. CHASLES et résolu antérieurement par ABADIE (Nouv. ann. de mathém. **14**, p. 42), POUDRA (Id. **15**, p. 58) et DE JONQUIÈRES (Id. **17**, p. 399). Comp. Biblioth. mathem. **3**$_3$, 1902, p. 282.

2) Parmi les questions dont CREMONA ne s'est pas occupé *ex professo*, remarquons les méthodes de génération, pour noter qu'il en a, au moins partiellement, traité dans un article [17] consacré aux générations découvertes par GRASSMANN, article qui pose CREMONA parmi ceux qui furent des premiers à apprécier et employer les méthodes de l'*Ausdehnungslehre*.

3) Giorn. di matem. **2**, p. 29.

4) *Über die Formen der Kurven dritter Ordnung* (Journ. für Mathem. **75** et **76**, 1873).

5) Voir en effet SCHRÖTER, *Die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung* (Leipzig 1888), p. 146.

moins aisément faire découler des théories qui composent l'*Introduzione*. Par exemple il jugea bon de s'arrêter [43] à établir géométriquement quelques beaux théorèmes sur les coniques énoncés par TRUDI, quoique des démonstrations en eussent déjà été publiées. En outre il ne dédaigna pas de prouver [61] que d'élégants théorèmes sur des systèmes de courbes du 2e ordre énoncés par SCHRÖTER n'étaient que des simples conséquences de propriétés de la Cayleyenne d'un réseau. Et des questions, proposées par FAURE et relatives aux lieux des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère ou circonscrites à un quadrangle, le conduisirent à établir les caractères du lieu géométrique analogue pour les courbes d'un degré quelconque [52]. Enfin une question relative au lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées des points d'une conique sur leurs polaires par rapport à une autre conique lui fournit l'occasion d'appliquer [60] les théorèmes de l'*Introduzione* à l'étude du lieu analogue qu'on obtient en substituant à la première conique une courbe algébrique quelconque et même de la question correspondante dans l'espace.

Mais l'application la plus importante (et par suite la plus connue) qu'ait faite CREMONA de la théorie générale des lignes algébriques est (voir [67]; comp. [63]) celle relative à cette merveilleuse courbe que STEINER a signalée dans une célèbre communication faite à l'académie de Berlin le 7 janvier 1856[1]). C'est la courbe enveloppée par les droites de SIMSON de tous les points d'un cercle par rapport à un triangle inscrit; cette courbe est du 4e ordre et de la 3e classe, et tangente à la droite à l'infini du plan aux points circulaires; or CREMONA, pour établir les propositions énoncées par STEINER[2]), part précisément d'une courbe douée de ces propriétés et, en se servant de la 3e partie de l'*Introduzione*, il arrive à tous les théorèmes dont on connaissait déjà l'énoncé et à d'autres nouveaux; p. ex. il parvient à établir que cette courbe est un hypocycloïde à trois rebroussements et à en découvrir la présence dans la théorie des cubiques gauches. La beauté de la méthode géométrique dont se servit CREMONA fit une impression très vive sur un grand analyste, A. CLEBSCH, qui se hâta de prouver[3]) qu'on pouvait la traduire en formules d'une élégance parfaite; c'est une qualité de cette méthode qu'on ne doit pas oublier.

Nous ne pouvons ni ne voulons finir cette rapide analyse des contributions données par notre mathématicien à la théorie des courbes planes sans dire quelques mots du rôle qu'il a joué dans la formation de la théorie

---

1) *Über eine besondere Kurve dritter Klasse* (*und vierten Grades*) (Journ. für Mathem. **53,** 1857).

2) Non seulement dans la note précédente, mais aussi dans quelques *Vermischte Satze und Aufgaben* (Ges. Werke, T. II p. 677—678, no. 6).

3) *Note zur vorstehenden Abhandlung* (Journ. für Mathem. **64,** 1865, p. 124—125)

des systèmes de coniques. Même lorsqu'elle se trouvait dans son enfance, il s'efforçait et réussit [47] à expliquer l'apparente contradiction qu'on trouve lorsqu'on cherche à appliquer la théorie générale des systèmes de courbes à la détermination du nombre des coniques passant par n points données et tangents à $5 - n$ droites données. Mais lorsque CHASLES fit parvenir cette théorie à sa maturité, en substituant ses deux caractéristiques à l'indice de E. DE JONQUIÈRES[1]), CREMONA se hâta de donner [49] des démonstrations lumineuses des théorèmes énoncés par ce géomètre dans sa célèbre communication du 1er février 1864; de cette manière il arriva à effacer le désaccord (noté par CHASLES lui-même) existant entre ces théorèmes et une formule plus ancienne de BISCHOFF.[2]) J'ajoute que sous le modeste cadre d'une revue bibliographique, CREMONA donna [50] un commentaire complet de la théorie des caractéristiques, exposée par CHASLES dans les séances que tint l'Institut de France dans les jours 1 et 15 février, 7 mars, 27 juin, 4 et 18 juillet, 1 et 22 août 1864. Ce commentaire (que M. CURTZE a inseré dans sa traduction de l'*Introduzione*) a sans doute puissamment contribué à faire comprendre et à vulgariser la théorie des systèmes de coniques; comme chose originale il renferme une extension de la méthode de CHASLES aux systèmes de ∞^2 coniques, qui a été jugée par celui-ci assez importante pour être communiquée à l'académie des sciences [55]. — L'intérêt de CREMONA pour la théorie créée par CHASLES ne s'éteignit pas de si tôt; deux de ses publications servent à le prouver: dans l'une [65] on trouve la généralisation aux systèmes de ∞^1 surfaces du 2d ordre des célèbres formules qui lient les caractéristiques d'un système de ∞^1 coniques aux nombres des coniques exceptionnelles qu'il renferme; la seconde (c'est une lettre à M. CHASLES [75]) contient quelques considérations de géométrie à trois dimensions qui amènent à des courbes exceptionnelles d'un système de ∞^1 lieux algébriques, courbes dont l'étude était alors à l'ordre du jour.

7. Les transformations birationnelles planes.

Pendant son séjour à Bologne, CREMONA a jeté les fondements d'une théorie qui lui appartient d'une manière si indiscutable que son nom est pour toujours lié à elle; il est à peine nécessaire de dire que nous voulons parler des transformations birationnelles d'un plan en un autre. CREMONA fut amené à s'en occuper par l'étude d'un mémoire lu

1) Voir mon essai sur *L'œuvre mathématique d'*ERNEST DE JONQUIÈRES (Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, p. 295 et suiv.).

2) *Einige Sätze über die Tangenten algebraischer Kurven* (Journ. für Mathem. **56**, 1859, p. 166—177).

à l'académie des sciences de Turin par un jeune homme destiné à devenir le prince des astronomes italiens;[1]) ce mémoire lui suggéra l'idée d'étudier [35] les transformations planes corrélatives à celles considerées par SCHIAPARELLI, c'est-à-dire celles dans lesquelles à chaque droite correspond une droite et à chaque faisceau de droites une conique inscrite dans un triangle fixe. En employant les coordonnées plückeriennes pour les droites et en imitant le procédé de SCHIAPARELLI, il prouva que, à l'aide de transformations homographiques, on peut réduire la plus générale des dites transformations à deux types très simples, dont les équations sont une des suivantes:[2])

$$\xi' = \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}, \quad \eta' = \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2},$$
$$\xi' = \frac{1}{\eta}, \quad \eta' = \frac{1}{\xi}.$$

Ces formules prouvent que deux droites correspondantes quelconques sont en général parallèles, mais qu'elles coïncident lorsqu'elles sont tangentes respectivement à l'une ou à l'autre des coniques:

$$\xi^2 + \eta^2 = 1, \quad \xi\eta = 1.$$

Dans une transformation du premier type, aux points (x, y) du deuxième plan correspondent les ∞^1 paraboles homofocales

$$x\xi + y\eta + \xi^2 + \eta^2 = 0;$$

tandis que dans une transformation du second type, aux points (x, y) correspondent dans le premier plan les ∞^1 paraboles

$$x\xi + y\eta + \xi\eta = 0.$$

Dans les transformations de tous les deux types, deux droites correspondantes quelconques sont parallèles entre elles, mais dans celles du premier leurs distances de l'origine sont inversement proportionnelles. Etc. etc.

Il y a un cas particulier de ces transformations dont BELTRAMI (parmi autres géomètres) s'est occupé[3]); voici comment on y parvient: „Si aa', bb', cc' sont les trois couples de sommets opposés d'un quadrilatère complet et α, β, γ les points diagonaux, on considère les points conjugués harmoniques des points où une droite quelconque r coupe les diagonales, par rapport aux couples aa', bb', cc'; ces points appartiennent à une autre droite r'[4]); et lorsque r tourne autour d'un point

---

1) *Sulla trasformazione geometrica delle figure ed in particolare sulla trasformazione iperbolica* (Mem. dell' acc. d. sc. di Torino 21_2, 1864, p. 227—319).

2) CREMONA ne les a pas écrites; nous les avons ajoutées, car elles conduisent immédiatement aux propositions qu'il s'est borné à énoncer.

3) Voyez mon essai *EUGENIO BELTRAMI e le sue opere matematiche* (Biblioth. Mathem., 2_3, 1901, p. 427).

4) Les droites r, r' coupent en quatre points harmoniques toute conique inscrite dans le quadrilatère considéré; cette propriété énoncée par CREMONA dans les Educational times a été reproduite comme *Question 872* dans les Nouv. ann. de mathém. 7_2, p. 237.

fixe, r' enveloppe une conique inscrite dans le triangle $\alpha\ \beta\ \gamma$". Or notre géomètre remarqua [71] qu'en supposant que les points i, i' soient les points circulaires à l'infini, les ∞^1 coniques inscrites dans le quadrilatère donné ont toutes comme foyers les quatre points a, a', b, b', et γ comme centre, et que deux droites correspondantes r, r' sont l'une tangente et l'autre normale à la conique du système qui passe par le point rr'. Dans cette transformation, que CREMONA signala à M. FIEDLER,[1]) il a reconnu une méthode rationnelle pour traiter toute la théorie des coniques homofocales; nous la recommandons aux futurs propagateurs de cette importante théorie.

Le mémoire de SCHIAPARELLI, que nous avons cité plus haut, a été le point de départ d'autres recherches de CREMONA, dont l'importance est bien plus grande, et dont nous allons rendre compte. Par la manière dont SCHIAPARELLI posa la question de déterminer les transformations univoques entre les points de deux plans, il fut amené à conclure que les seules de cette nature sont celles où aux droites du plan correspondent des droites ou bien des coniques circonscrites à un triangle fixe. Or l'existence d'autres transformations univoques résultait dès ce temps de quelques phrases qu'on lit dans l'avant-propos (p. VII) de la *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie* (Berlin 1833) de MAGNUS, et encore du résumé, déjà publié, d'un mémoire bien connu de E. DE JONQUIÈRES[2]). Quoique ces phrases et ce résumé paraissent avoir échappé à notre mathématicien, il remarqua que le produit de plusieurs transformations linéaires ou quadratiques est, contrairement à la proposition de SCHIAPARELLI, une transformation univoque en général plus compliquée que les transformations effectuées. Cette remarque le conduisit à se proposer la recherche de toutes les transformations birationnelles entre deux plans, et pour l'accomplir il était admirablement préparé par les études, qu'il venait alors de finir, sur la théorie générale des courbes algébriques planes. La remarque qui sert de base à la solution donnée par CREMONA [36] du problème énoncé, est que dans toute transformation de la nature indiquée, aux droites d'un des plans considérés correspondent dans l'autre ∞^2 courbes unicursales d'un degré n, formant un réseau tel que deux quelconques de ces courbes n'ont qu'un point d'intersection *mobile* (c'est-à-dire n'appartenant pas à toutes). Par conséquent, si ces courbes ont x_r ($r = 1, 2, \ldots, n-1$) points r-tiples communs à toutes, on aura les deux célèbres relations suivantes:

$$\sum_{r=1}^{r=n-1} r^2\, x_r = n^2 - 1, \tag{1}$$

1) Voyez SALMON-FIEDLER, *Analytische Geometrie der Kegelschnitte*, 6. Aufl., Zweiter Teil (Leipzig 1903), p. XXI et 796.

2) Voir Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, p. 309 et suiv. — Il faut bien dire que DE JONQUIÈRES n'a pas „traité les mêmes questions" que CREMONA, comme on lit à la page 561 du t. 2_2 (1863) des Nouv. ann. de mathem.

(2) $$\sum_{r=1}^{r=n-1} \frac{r(r+1)}{2} x_r = \frac{n(n+3)}{2} - 2;$$

d'où il suit

$$\sum_{r=1}^{r=n-1} \frac{r(r-1)}{2} x_r = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

A toute transformation birationnelle du plan correspond une solution des équations (1), (2), mais rien n'autorise à énoncer la proposition réciproque; on peut seulement dire que, pour toute valeur de n, il existe au moins une transformation birationnelle de ce degré; c'est la solution

$$x_1 = 2(n-1),\ x_2 = \ldots = x_{n-2} = 0,\ x_{n-1} = 0;$$

et CREMONA prouve que la transformation correspondante (appelée aujourd'hui „transformation de JONQUIÈRES") peut se construire en sectionnant par deux plans quelconques les ∞^2 droites qui rencontrent une courbe de l'ordre $n-1$ et une droite la coupant en $n-2$ points.

Cette note [36] demeura un peu de temps isolée. Mais quelques années après, son auteur, ayant eu l'occasion d'approfondir certaines questions relatives aux courbes du plan [56], lui donna une suite [66] pleine d'idées originales et d'une importance hors ligne. Telle est la considération des réseaux conjugués existant dans deux plans en correspondance univoque et des courbes jacobiennes de ces réseaux. Par une analyse dont la spontanéité cache la profondeur, il prouva que, un des réseaux conjugués étant donné, l'autre est par suite déterminé, et on peut en découvrir la structure.[1]) Pour éclairer la route qui mène à ce résultat, avant tout il étudia tout au long les cas $n = 2, 3, \ldots, 10$, et ensuite, en élargissant la recherche, il s'occupa de nouveau de la transformation de DE JONQUIÈRES et ensuite des cas $n \equiv 0, 1 \pmod{2}$ ou bien $n \equiv 0, 1, 2 \pmod{3}$ ou enfin $n \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$. Le simple examen du tableau résultant révéla à CREMONA la vérité de la proposition suivante: „si $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ sont deux réseaux conjugués, les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ ne diffèrent que par leur ordre des nombres $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$"; on sait que cette proposition empirique a été démontrée rigoureusement par CLEBSCH[2]). CREMONA remarqua encore qu'une correspondance univoque de l'ordre n entre les points du même plan a $n+2$ points unis; il en tira la généralisation de la méthode, que DE JONQUIÈRES avait proposée,[3]) pour engendrer des courbes gauches d'ordre quelconque,

1) Ce résultat fondamental est résumé dans un théorème que CREMONA chargea son ami T. ARCHER HIRST de faire connaître à la „British association for the advancement of science" [64].

2) *Zur Theorie der CREMONAschen Transformationen* (Mathem. Ann. **4**, 1871, p. 490—496).

3) Comp. Biblioth. mathem. $\mathbf{3}_3$, 1903, p. 309.

c'est-à-dire en prouvant que „deux gerbes de rayons en correspondance univoque de l'ordre n engendrent une courbe de l'ordre $n + 2$", dont il trouva tous les caractères; mais quant au degré de généralité de la courbe résultante, c'est une question que CREMONA ne s'est pas posée et que personne n'a traitée après lui.

Si la valeur des recherches de CREMONA sur les transformations qui portent son nom n'était pas connue de tout le monde, nous pourrions citer deux faits qui la prouvent; c'est: 1°) que les expositeurs ultérieurs de cette théorie[1]) ne lui ont apporté aucun changement essentiel; 2°) que la seule addition vraiment importante qu'elle ait reçue (en même temps par CLIFFORD, NÖTHER, ROSANES) en laissèrent intacte la physionomie générale; or quelle théorie a eu le même sort dans ces dernières années de fiévreux renouvellement pour tous les champs de recherche scientifique?

8. Recherches de Cremona sur quelques courbes gauches algébriques spéciales.

De Bologne sont aussi datés plusieurs autres mémoires de CREMONA qui, sans avoir obtenu la célébrité de ceux que nous avons examinés dans les deux paragraphes précédents, méritent toutefois (même si l'on veut pour un moment ne pas considérer les résultats importants qu'elles renferment) une considération particulière, d'abord parce qu'ils préparent les études plus générales dont nous aurons bientôt à nous occuper (voyez le § suiv.), et ensuite parce qu'ils reflètent cette période historique si attrayante où la géométrie supérieure, assise sur des bases définitives, aspirait à montrer sa valeur par des nouvelles victoires. Et personne, mieux que CREMONA, dans la lutte pour l'hégémonie, si longtemps disputée entre l'analyse et la géométrie, n'a contribué à ce que cette dernière n'ait pas été vaincue.

Dans un mémoire [27] sur les surfaces gauches du 3^e degré, dont nous devrons bientôt nous occuper, CREMONA avait indiqué quelques propriétés de la courbe gauche du 4^e ordre par laquelle passe une seule surface du 2^d ordre, courbe qu'il croyait avoir été découverte par STEINER, tandis que (comme il reconnut plus tard) c'est SALMON qui l'a signalée le premier. Ayant continué à s'en occuper, il la choisit comme sujet de sa première communication à l'institut de Bologne [28]. Si l'on veut juger l'originalité de ces recherches, il faut se ressouvenir que de cette courbe (suivant CREMONA on l'appelle aujourd'hui *courbe gauche du 4^e ordre et de la 2^e*

---

1) Sans parler de la traduction que M. DEWULF fit des travaux [36] et [66] (*Sur les transformations géométriques des figures planes, d'après les mémoires publiés par M. CREMONA et des notes inédites;* Bullet. d. sc. mathém. **5**, 1873, p. 207—240), je me borne à citer la première partie du célèbre mémoire de CAYLEY *On the rational transformation between two spaces.*

espèce) on ne connaissait alors que la propriété d'être l'intersection d'une quadrique avec une surface du 3e degré, la coupant encore suivant deux génératrices du même système; mais que, de la développable qui lui correspond par dualité, Cayley et Salmon s'étaient déjà occupés. Cremona remarqua la constance du rapport anharmonique des plans qui projettent quatre points fixes de la courbe d'une des ∞^1 droits qui la coupent en trois points; il signala différents procédés pour la construire et considéra différentes surfaces réglées naissant de la considération simultanée de la courbe et de deux droites. Il détermina ensuite le nombre des intersections de deux quartiques de la 2e espèce ou bien d'une quartique et d'une cubique gauche situées sur le même hyperboloïde; il considéra, non seulement la développable osculatrice de la courbe mais aussi celle formée par les plans qui coupent cette courbe en quatre points équianharmoniques ou harmoniques; il étudia encore les projections sur un plan d'une des courbes dont il s'agit; etc. En un mot, en employant les ressources que lui offrait la géométrie pure, il explora tous les domaines où regne la courbe gauche du 4e ordre et de la 2e espèce.

Quelques années plus tard, des recherches d'une nature bien différente (voir [72]) l'amenèrent à s'occuper [78] d'une quartique gauche rationnelle très remarquable, dont la découverte appartient à Cayley[1]). Cette courbe est douée de deux points singuliers (A, D), où les tangentes (AB, DC) ont chacune un contact de 2d ordre avec la courbe; si $x=0$, $y=0$, $z=0$, $w=0$ sont les équations des plans ABC, ABD, ACD, BCD, la courbe pourra se représenter par les équations[2])

$$x : y : z : w = \omega^4 : \omega^3 : \omega : 1.$$

Elle se trouve sur l'hyperboloïde $xw - yz = 0$ et sur la surface (réglée) $xz^2 - wy^2 = 0$ L'équation générale du plan osculateur étant

$$x - 2\omega y + 2\omega^3 z - \omega^4 w = 0,$$

la courbe correspond à sa développable osculatrice par rapport à un *Nullsystem*, qui est la source de ses plus belles propriétés.

Le travail de Cremona sur les quartiques gauches unicursales [28] avait été déjà lu à l'institut de Bologne, mais, non encore imprimé, lorsque, le 3 juin 1861, M. Chasles exposa à l'académie des sciences de Paris diverses *Propriétés de l'hyperboloïde à une nappe et d'une certaine surface du 4e ordre.*[3]) La lecture de ce travail prouva tout de suite à Cremona que bon nombre

1) *On a special sextic developpable* (Quart. journ. of mathem. **7**, 1866, p. 105—113).

2) Cette remarquable représentation paramétrique n'échappa pas à Cayley, qui préféra la présenter sous cette forme:

$$a = 2,\ b = -t,\ c = t^3,\ d = -2t^4.$$

3) Comptes rendus Paris **52**, p. 1904—1104.

des propriétés qu'il avait reconnues à ces quartiques étaient des cas particuliers de propriétés dont jouissent deux classes de courbes appartenant à un hyperboloïde (voir [30])[1]. Une de ces classes avait été déjà remarquée par CHASLES; elle comprend des courbes de l'ordre $2m+1$ engendrées chacune par trois faisceaux projectifs formés deux par des plans et le troisième par des surfaces de l'ordre m; les théorèmes que CREMONA énonça à leur sujet ont trait aux relations de ces courbes avec les génératrices de l'hyperboloïde qui les contient, à leurs caractéristiques et à leurs projections planes. Chaque courbe de l'autre de ces classes est engendrée par trois faisceaux de plans, dont deux sont projectifs entre eux et le troisième est formé par les groupes d'une involution de l'ordre m projective aux deux premiers faisceaux. La courbe résultante est de l'ordre $m+2$ (pour $m=1$ c'est une cubique gauche et si $m=2$ une quartique de 2^e^ espèce), dont CREMONA découvrit une foule de belles propriétés, dont quelques unes prouvent qu'une quelconque des courbes en question est la figure corrélative d'une certaine développable déjà étudiée par CAYLEY[2] et SALMON[3] et qu'en conséquence son équation tangentielle a pour premier membre le discriminant de la fonction

$$at^{m+2} + (m+2)\,bt^{m-1} + \ldots,$$

a, b, ... étant des fonctions linéaires des coordonnées homogènes d'un point de l'espace.

9. Recherches de Cremona sur quelques surfaces algébriques spéciales.

Un groupe non moins remarquable de mémoires sur des surfaces algébriques particulières fait pendant à l'ensemble des recherches que nous avons analysées dans le paragraphe précédent.

Les plus anciennes se trouvent dans un mémoire [27] ayant comme principal fondement ce principe de correspondance spécial (entre les points d'une droite et les couples de points d'une involution quadratique projective) que CHASLES énonça et appliqua dans sa note sur la *Construction géométrique des racines des équations du troisième et du quatrième degré*[4]; il semble fournir le moyen le plus naturel pour étudier les surfaces réglées du 3^e^ degré, qui sont précisément le sujet de ce mémoire. On y apprend différents procédés pour déterminer et engendrer une de ces surfaces, plusieurs théorèmes relatifs à leurs directrices, leurs points et leurs plans

1) Ce travail, qui ne renferme que des énoncés, a eu l'honneur d'être cité par CHASLES dans son *Rapport* (p. 249).

2) *Note sur les hyperdeterminants* (Journ. für Mathem. **24**, 1847); *On the developable derived from an equation of the fifth order* (Cambridge and Dublin mathem. journ. **5**, 1850).

3) Cambridge and Dublin mathem. journ. **3**, p. 169 et **5**, p. 152.

4) Comptes rendus Paris **41**, 1855, p. 677—685.

cuspidaux, les plans tangents et les sections planes, etc. Citons encore le beau théorème suivant: „Le lieu des pôles d'une génératrice g d'une surface gauche du 3e degré Φ par rapport aux ∞^1 coniques suivant lesquelles Φ est coupée par des plans passant par g est une droite h, ayant comme lieu géométrique une surface Ψ de la même espèce que Φ". Notre géomètre ne manque pas de signaler la forme générale $[y(x^2 + kw^2) - xzw = 0]$ à laquelle peut toujours se réduire l'équation de toute surface cubique réglée; et il observe que, lorsque les points cuspidaux sont réels, elle peut se représenter par l'équation $x^2z - yw^2 = 0$; alors $r^2t + su^2 = 0$ est l'équation tangentielle de la surface Ψ correspondante; d'où il suit que Ψ est la surface polaire réciproque de Φ par rapport à la quadrique $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0$[1]).

CAYLEY, au reçu d'un extrait de ce travail, se hâta d'avertir CREMONA (lettre du 12 juin 1861) qu'il existe une surface cubique particulière très remarquable, naissant de celle étudiée par notre mathématicien en faisant coïncider la droite directrice simple avec la directrice double, et qu'on peut engendrer d'une manière très simple. Cela engagea CREMONA à reprendre l'étude de ses surfaces [40] pour trouver avant tout des procédés de génération des surfaces générales conservant un sens déterminé dans le cas particulier découvert par CAYLEY, pour établir ensuite des propositions métriques relatives aux surfaces réglées du 3e ordre. P. ex. il prouva que, parmi les coniques qui se trouvent sur une telle surface, il y a trois cercles, et que par chaque génératrice de la surface on peut mener trois plans qui la coupent encore suivant une hyperbole équilatère et deux qui la coupent suivant une parabole; il ne manqua pas d'examiner encore comment il faut énoncer ces propriétés lorsqu'on distingue les cas où la surface a 2, 1 ou 0 points cuspidaux réels, ou bien quand elle a des relations particulières avec le plan à l'infini[2]).

En raison de leur sujet et aussi de la méthode employée, aux deux mémoires que nous venons d'analyser sont étroitement liés deux autres travaux d'une date un peu plus récente. Le premier est une courte note [77] ayant pour but de développer la théorie des surfaces réglées d'un degré quelconque ayant deux directrices rectilignes coïncidentes, que CAYLEY venait alors de signaler[3])

1) Un de ces résultats a été cité avec éloges par BERTRAND dans son article *Étude des surfaces algébriques* inséré au Journal des savants et reproduit au t. 7_2 (1868) des Nouvelles annales de mathématiques.

2) Les mémoires [27] et [40] ont été amplement utilisés par un disciple de CREMONA, EMIL WEYR, lorsqu'il se proposa d'écrire une exposition méthodique de la théorie des surfaces cubiques réglées; voir *Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zweideutiger Gebilde insbesondere der Regelfläche dritter Ordnung* (Leipzig 1870).

3) Voir l'Art. 12 de *A second memoir on skew surfaces otherwise scrolls* (Philos. trans. London **154,** 1864).

et dont la surface réglée du 3e degré de CAYLEY est un cas tout particulier: CREMONA en découvrit bon nombre de propriétés élégantes que le désir d'être bref nous empêche d'énoncer ici. — Le second est un long mémoire [81] qui est sans doute un des plus célèbres parmi ceux de la plume féconde de notre géomètre [1]. Son but est l'étude et la classification des surfaces réglées du 4e degré, sujet dont l'importance est évidente et qui avait déjà occupé deux grands géomètres: CHASLES et CAYLEY; le premier avait dit [2] (sans toutefois le prouver) qu'il existe *quatorze* espèces différentes de surfaces réglées du 4e ordre, tandis que le second n'en avait rencontré que *huit* au cours de ces recherches sur le lieu des ∞^1 droites qui s'appuient en même temps à trois directrices fixes (différentes ou non) [3], et deux autres surfaces avaient été ajoutées par lui à la suite de quelques remarques de SCHWARZ [4]. Or CREMONA, à l'aide de considérations géométriques directes et simples et en choisissant comme critère de classification la considération simultanée de la ligne double de la surface et de sa développable bitangente, trouva douze espèces différentes [5], et découvrit pour chacune les propriétés les plus saisissantes et les principales méthodes de génération. L'histoire de la géométrie dans ces dernières trente-cinq années prouve que cette classification de CREMONA est toujours adoptée; elle a été utilisée même par les constructeurs de modèles, qui durent seulement ajouter des sous-espèces, en introduisant la considération indispensable des éléments réels et imaginaires. [6]

On peut d'ailleurs remarquer que notre mathématicien s'était déjà occupé de surfaces réglées du 4e degré, et précisément de développables, en cherchant et en trouvant [68] des démonstrations géométriques de quelques propositions relatives aux surfaces d'égale pente circonscrites aux coniques; les démonstrations qu'on en lit dans la 1ère édition du *Traité de géométrie descriptive* de LA GOURNERIE sont analytiques, et ce géomètre, dans une lettre publiée au cahier de décembre 1864 du Journal de mathématiques pures et appliquées, avait émis le vœu qu'on en trouvât de géométriques. Or CREMONA, en considérant une des surfaces dont il s'agit comme circonscrite à une conique à distance finie et à une

---

1) Les principaux résultats de ce travail furent communiqués à CAYLEY par l'auteur en date du 22 novembre 1868; voyez CAYLEY, *Collected papers* t. **6**, p. 327.

2) Comptes rendus Paris **53**, 1861, p. 888.

3) *A second memoir on skew surfaces otherwise scrolls* (Philos. trans. London **154**, 1864).

4) *A third memoir on skew surfaces otherwise scrolls* (Philos. trans. London **159**, 1869).

5) Ce résultat, communiqué à CAYLEY par une lettre de CREMONA du 20 novembre 1868, est cité dans une *Addition* au mémoire dont le titre se trouve dans la note précédente.

6) K. ROHN, *Die verschiedenen Arten der Regelflächen 4. Ordnung* (Mathem. Ann. **28**, 1887).

autre bitangente au cercle imaginaire à l'infini, parvint à ces démonstrations d'une manière qui eut la complète approbation de La Gournerie [1]).

Une année auparavant il s'était déjà occupé avec succès [58] de la plus remarquable parmi les surfaces du 4^e degré non réglées, c'est-à-dire de la surface („romaine") de Steiner. On sait que Kummer fit en juillet 1863 une communication à l'académie des sciences de Berlin, où cette surface apparaît comme le dernier élément de la série de surfaces du 4^e ordre dont chacune renferme ∞^1 sections coniques; on sait encore que Weierstrass se hâta de déclarer que cette surface avait été découverte auparavant par Steiner pendant son voyage à Rome en 1844, et Schröter démontra bientôt les propositions relatives découvertes par Steiner et publiées par Weierstrass. Or trois mois après, Cremona écrivit sur le même sujet un mémoire [2]) qui peut servir encore à présent comme base à une exposition synthétique des propriétés de la surface dont il s'agit et qui contient aussi plusieurs belles propriétés de celle-ci qui avaient échappées aux géomètres cités ci-dessus. Mais la propriété dont elle jouit, de pouvoir être représentée univoquement sur le plan, en fournissant la méthode la plus naturelle et la plus féconde pour l'étudier à fond, fit négliger la méthode purement géométrique employée par notre mathématicien; il est bon de remarquer qu'il ne fut pas étranger (voir [72]) à ce résultat, en fournissant dans cette occasion la plus belle preuve qu'il n'était pas un géomètre exclusif et du vues étroites.

Nous finirons cette revue des recherches que Cremona fit à Bologne sur des surfaces particulières en disant quelques mots sur ses études relatives aux surfaces développables du 5^e degré [37]. La développable circonscrite à deux surfaces du second ordre est en général de la 4^e classe et du 8^e ordre; mais son ordre s'abaisse à 6, lorsque les deux surfaces ont entre elles un contact ordinaire en un point, et à 5, lorsque ce contact est stationnaire. L'équation de la développable a été obtenue par Cayley en 1850 dans tous les cas [3]); d'ailleurs Chasles dans son travail *Propriétés des courbes à double courbure du 4^e ordre provenant de l'intersection de deux surfaces du second ordre* [4]) énonça plusieurs théorèmes sur la développable générale: or c'est précisément ce mémoire qui décida Cremona à s'occuper des plus particuliers de ces deux cas. La développable est alors corrélative à son arrêt de rebroussement, et (d'après une remarque de Cayley), elle possède un tetraèdre $ABCD$ remarquable, dont les faces ACD, BCD et les arêtes AD, BC sont respectivement deux plans tangentes et deux génératrices. Si l'on appelle *conjuguées* deux génératrices

1) Voyez la 2e éd. du *Traité de géométrie descriptive*, 2e Partie (Paris 1880), p. 121 note.

2) Chasles en parle dans son *Rapport* p. 355.

3) *On the developable surfaces which arise from two surfaces of the second order* (Cambridge and Dublin mathem. journ. **5**, 1850, p. 46—57).

4) Comptes rendus Paris **54**, 1862, p. 317—324, 418—425.

de la développable situées dans le même plan, *conjugués* leurs points de contact avec l'arête de rebroussement et *conjugués* encore les plans correspondants de la développable, CREMONA fait la remarque tout-à-fait essentielle que deux figures formées par des éléments conjugués se correspondent dans une homologie harmonique dont C est le centre et ABD le plan, et qui donne l'explication des nombreuses et belles propriétés dont jouit la figure en question. Par deux génératrices conjuguées de cette développable passent deux surfaces du second ordre *(associées)* dont l'une est inscrite dans la développable, tandis que l'autre passe par son arête de rebroussement; deux quadriques associés quelconques ont une conique commune (dont le plan passe par la droite BC) et sont inscrites dans le même cône du second ordre (dont le sommet se trouve sur la droite AD); le lieu de toutes ces coniques est une surface du 3e ordre et de la 4e classe, tandis que l'enveloppe de tous ces cônes est une surface (de STEINER) de 4e ordre et de 3e classe; etc. Toutes ces élégantes propositions ne furent qu'énoncées par CREMONA; les démonstrations en furent bientôt données par deux géomètres qui étaient alors au début de leur carrière scientifique: N. SALVATORE-DINO[1]) et E. D'OVIDIO[2]) le premier en employant l'analyse et l'autre en généralisant les procédés logiques utilisés par CREMONA dans une autre occasion (voir [28]). Il est bon d'ajouter que des recherches accomplies par SCHWARZ en juin 1864[3]) ont prouvé que la surface étudiée par CREMONA, au point de vue projectif, est la plus générale développable du 5e ordre.

10. Recherches de Cremona sur la théorie générale des surfaces algébriques et particulièrement sur celle du 3e ordre.

Le monde, qui régulièrement exige d'autant plus qu'il a reçu demandait que l'auteur de l'*Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* écrivit un ouvrage analogue sur la théorie des surfaces algébriques; les travaux que nous avons analysés dans les deux paragraphes précédents le montraient admirablement préparé pour satisfaire les vœux de ses collègues; mais pour le décider à entreprendre cet ouvrage, il fallait une occasion qui, heureusement, ne se fit pas attendre longtemps.

L'académie de Berlin, dans sa séance du 7 juillet 1864, proposa comme sujet de concours pour le prix STEINER de l'année 1866, de démontrer et de compléter les propositions énoncées par le grand géomètre

1) *Sulla sviluppabile di 5o ordine* (Giorn. di matem. **3**, 1865).

2) *Dimostrazione di alcuni teoremi sulla superficie sviluppabile di 5o ordine enunciati dal prof.* CREMONA (Giorn. di matem. **3**, 1865).

3) *De superficiebus in planum explicabilibus primorum septem ordinum* (Journ. für Mathem. **64**, 1865, p. 1—16).

suisse dans son célèbre mémoire *Über die Flächen dritten Grades*[1]). CREMONA se sentit attiré à s'aligner parmi les concurrents; mais au lieu de chercher simplement à demontrer les théorèmes de STEINER, suivant le même ordre d'idées que celui-ci avait adopté, il préféra les faire découler comme des cas particuliers de ceux qui forment la théorie générale des surfaces algébriques, comptant qu'ainsi il aurait pu aussi obtenir d'une manière uniforme les autres propositions sur les mêmes surfaces qu'avaient découvertes auparavant CAYLEY, SALMON, SYLVESTER, SCHLÄFLI, GRASSMANN, AUGUST, BRIOSCHI et CLEBSCH. Le *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre,* qu'il présenta avant le 1er mars 1866 à ce concours et que l'académie de Berlin jugea digne (comme celui présenté par R. STURM) du prix, est rédigé précisément sur ce plan. „Sie gründet nämlich (dit le rapporteur KUMMER) die Theorie der kubischen Flächen auf eine vorausgeschickte ausführliche Untersuchung über die allgemeinen Eigenschaften der Flächen aller Grade. Die STEINERschen Sätze ergeben sich auf diesem Wege sämtlich als spezielle Fälle allgemeiner Theoreme und es tritt eben deswegen die wahre Bedeutung derselben um so klarer hervor. Auch hat sich der Verfasser nicht darauf beschränkt, die von STEINER und anderen Geometern aufgestellten Sätze über die Flächen dritten Grades zu begründen, sondern hat mehrere wertvolle hinzugefügt, die er selbst gefunden hat."[2])

Or ces chapitres d'introduction du *Mémoire* de CREMONA furent le germe et le noyau des *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie* [74], qui, traduits en allemand par M. CURTZE avec le dit *Mémoire,* et enrichis de nombreuses additions de l'auteur, forment encore à présent le

1) Voici l'énoncé complet de la question de concours: „In einer in den Monatsber. der Akademie vom Jahre 1856, sowie dem **53.** Band des CRELLEschen Journ. veröffentlichten Abhandlung hat STEINER eine Reihe von Fundamentaleigenschaften der Flächen dritten Grades mitgeteilt, und dadurch den Grund zu einer reingeometrischen Theorie derselben gelegt. Die Akademie wünscht, daß diese ausgezeichnete Arbeit des großen Geometers nach synthetischer Methode weiter ausgeführt und in einigen wesentlichen Punkten vervollständigt werde. Dazu würde es zunächst notwendig sein, zuerst die größtenteils nur angedeuteten oder gar fehlenden Beweise der aufgestellten Hauptsätze zu geben; dann aber müßte die Untersuchung auch auf die von STEINER nicht berücksichtigten Fälle, in denen die zur geometrischen Konstruktion der in Rede stehenden Flächen dienenden Elemente zum Teil imaginär sind, ausgedehnt werden. Außerdem ist eine genaue Charakterisierung der verschiedenen Gattungen von Raumkurven, in welchen solche Flächen sich schneiden können, zwar nicht unumgänglich erforderlich, würde aber von der Akademie als eine wichtige Ergänzung der STEINERschen Theorie betrachtet werden".

2) Monatsberichte der Akad. d. Wiss. zu Berlin, Sitzung 5. Juli 1866. Voir aussi l'avant-propos de BORCHARDT au t. **68** de son Journal. Ajoutons ici que le prix STEINER fut donné intégralement à CREMONA le 2 juillet 1874 „als Anerkennung für seine ausgezeichneten geometrischen Arbeiten".

meilleur livre de texte pour l'étude géométrique des surfaces algébriques: cette traduction[1]) nous apparaît en conséquence comme une édition définitive des *Preliminari*, et mérite ainsi d'être choisie par nous comme base de la courte analyse que nous allons en faire.

Les *Grundzüge* comprennent trois parties divisées respectivement en huit, dix et sept chapitres. Comme dans l'*Introduzione*, l'auteur y étudie exclusivement les propriétés projectives des figures considérées; les raisonnements sont exposés sous forme géométrique, mais au fond de toute la théorie il n'est pas difficile d'apercevoir des considérations algébriques, qu'on reconnaît particulièrement dans les fréquentes (et très ingénieuses) applications du principe de la conservation du nombre.

Dans la 1e partie, après avoir étendu aux cônes les théorèmes sur les courbes planes, Cremona s'occupe de courbes à double courbure pour parvenir aux célèbres formules de Cayley. Il passe ensuite à l'exposé des propositions essentielles de la théorie des surfaces[2]) et, après les avoir appliquées aux quadriques, il traite des systèmes linéaires de surfaces algébriques; puis, faisant des applications on ne peut plus heureuses de l'induction complète, il offre des exemples extrêmement instructifs d'un procédé que les adeptes de la géométrie à n dimensions ont utilisé, en le généralisant. Il n'est non plus permis d'oublier le splendide chapitre qui traite des surfaces réglées, car il contient cette méthode stéréométrique pour établir le théorème de Riemann sur la conservation du genre d'une courbe par transformations rationnelles qui a provoqué et excite toujours une admiration enthousiaste[3]).

La 2e partie des *Grundzüge* s'ouvre par une exposition de la théorie des surfaces polaires des points de l'espace par rapport à une surface algébrique, à laquelle, dans ces derniers trente ans, on n'a su faire aucun changement substantiel; en introduisant l'hypothèse que la surface fondamentale soit développable, Cremona, profitant de conseils que lui avaient

---

1) *Grundzüge der allgemeinen Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung. Aus dem Italienischen, unter Mitwirkung des Verfassers ins Deutsche übertragen von M. Curtze.* Berlin 1870.

2) Une addition à cet exposé se trouve dans le théorème suivant: „Si deux surfaces ont en commun le point P, qui soit r_1-ple pour l'une d'elles et r_2-ple pour l'autre, la courbe où elles se coupent aura en P la multiplicité $r_1 r_2$ et ce point produira dans le genre de P une diminution de $\frac{1}{2} r_1 r_2 (r_1 + r_2 - 2)$ unités". Il a été énoncé par Cremona et prouvé par N. Salvatore-Dino dans sa note *Sul genere delle curve gobbe* (Rend. dell' acc. d. sc. di Napoli **18**, 1875, p. 133—136).

3) M. F. Lindemann l'a reproduite dans son édition des *Vorlesungen über Geometrie von A. Clebsch* (Leipzig 1876), p. 683; on sait que le raisonnement de Cremona, convenablement présenté, conduit à une formule plus générale; voir Weiss, *Über einen Beweis der Zeuthenschen Verallgemeinerung des Satzes der Erhaltung des Geschlechtes* (Mathem. Ann. **29**, 1887).

donnés CAYLEY[1]) et ZEUTHEN, parvint à projeter une lumière nouvelle sur ces importantes formes géométriques. Il s'occupe ensuite des systèmes linéaires de surfaces algébriques et des figures qu'ils engendrent; quelques-unes des propositions qu'il expose étaient connues auparavant, et quelques autres sont des généralisations assez naturelles de théorèmes connus; mais tout ce qu'on lit dans le chapitre intitulé Complexes symétriques porte la marque d'une originalité si indiscutable qu'on peut dire de notre géomètre qu'il l'a atteinte en d'autres occasions, mais ne la surpassa jamais. Les propriétés des surfaces Hessienne et Steinérienne (dénominations introduites par CREMONA dans la science) en sont de simples corollaires; mais notre géomètre les expose tout au long, car avec raison il les considère comme les bases de toute théorie des surfaces algébriques.

En particularisant ces propositions, CREMONA, dans la 3e partie des *Grundzüge*, arrive à la conclusion que, pour chaque surface du 3e ordre, il en existe une du 4e, douée de dix points doubles et d'un égal nombre de droites, où se superposent l'Hessienne et la Steinérienne; en étudiant avec soin cette surface, il parvient au pentaèdre de SYLVESTER, tandis qu'en appliquant d'autres théorèmes généraux, il arrive aux 27 droites et aux 45 plans tritangents et aux propriétés de la configuration que forment ces éléments. — Un géomètre tel que CREMONA devait prendre un intérêt particulier aux différents procédés de génération d'une surface du 3e ordre, et en effet il fit connaître les plus remarquables et les plus utiles; mais sur l'un d'eux (génération de GRASSMANN par trois gerbes projectives de plans) il s'arrêta assez longtemps, car il conduit à une représentation d'une surface cubique sur le plan, dont ont peut tirer toute la géométrie sur cette surface: CREMONA faisait ainsi les premiers pas sur une route qui devait le conduire plus tard à des pays inconnus avant lui (voir § 12). Et pour épuiser le programme tracé par l'académie de Berlin, il clôt son magistral travail en traitant un ordre de questions dont il ne s'était presque pas occupé auparavant; il s'agit de la classification des surfaces du 3e ordre réelles et générales (c'est-à-dire qu'on peut représenter analytiquement par des équations à coefficients réels); en s'appuyant sur une des générations connues, il arrive à la division de ces surfaces en cinq grandes classes que SCHLÄFLI[2]) avait déjà trouvées à l'aide du calcul[3]).

---

1) Comp. *Collected mathematical papers* t. 8, p. 76 et 87.

2) *On the distribution of surfaces of the third order into species* (Philos. trans. London **153,** 1863).

3) Dans son mémoire couronné et dans les *Preliminari* CREMONA ne considéra que des surfaces du 3e ordre tout-à-fait générales. Mais dans une autre occasion [90] il cita des cas particuliers qu'on obtient en supposant qu'un ou plusieurs des 45 triangles formés par des droites de la surface se réduisent à un point. Or on sait

Cremona s'occupa encore de surfaces du 3e ordre après la publication de son mémoire couronné, ainsi que nous allons voir. En 1870 ramené à cette étude par sa collaboration à la traduction allemande des *Preliminari* et probablement attiré par les nouveaux points de vue signalés par Camille Jordan en appliquant la théorie des substitutions[1]), il chercha un pendant géométrique complet aux résultats de l'éminent géomètre français, et il parvint ainsi [85] à un groupe extrêmement intéressant de propriétés de la configuration formée par les droites d'une surface générale du 3e ordre[2]). Pour établir leur valeur, il suffira de dire que de ces recherches il conclut:

1) la possibilité de répartir ces droites dans les 18 plans d'une des 40 ternes de trièdres conjugués;

2) la notion d'ennéaèdre, groupe de 9 plans tritangents contenant toutes les droites de la surface;

3) la nécessité de distinguer deux espèces d'ennéaèdres et la détermination des nombres (40 et 160) des ennéaèdres de chaque espèce;

4) la découverte des 40 quaternes d'hexaèdres.

Il est bon d'ajouter qu'avec ces recherches Cremona a tracé les premières lignes d'une belle théorie, dont nous sommes redevables à un de ses élèves les plus distingués, M. E. Bertini[3]).

A M. Veronese revient le mérite d'avoir, par ses recherches sur l'*hexagrammum mysticum*, poussé Cremona, sept ans après, à s'occuper de surfaces cubiques (voir [106]; comp. [105]); le résultat auquel il parvint couronne bien dignement trois lustres de travail fécond! Le but que notre géomètre se proposa était de découvir une voie pour arriver, en traversant l'espace ordinaire, aux théorèmes découverts directement par Veronese, et il la trouva dans la considération d'une surface du 3e ordre douée d'un point double et des droites qu'elle renferme[4]). Mais il dut reconnaître bientôt que si cette considération est vraiment indispensable lorsqu'il s'agit d'établir par la géométrie de l'espace les propriétés de l'hexagramme de Pascal, les théorèmes établis en sont tout à fait indépendants, car ils ne présup-

---

que le cas où cette circonstance se présente le plus grand nombre de fois, a été découvert peu après par Clebsch (voir § 16 du mémoire *Über die Anwendung der quadratischen Substitution* etc.; Mathem. Ann. **4**, 1871), tandis que Eckardt a traité plus tard méthodiquement les autres cas (*Über diejenigen Flächen dritten Grades* etc.; Mathem. Ann. **10**, 1876).

1) Voir le grand *Traité des substitutions et des équations algébriques* (Paris 1870).

2) Jordan le cite (Comptes rendus Paris, séance du 14 février 1870).

3) *Contribuzione alla teoria delle 27 rette e dei 45 piani tritangenti d'una superficie di 3⁰ ordine* (Annali di matem. $\mathbf{12}_2$, 1884, p. 301—346).

4) Cette méthode semble assez naturelle pour expliquer qu'elle ait été retrouvée après; voir Richmond, *A symmetrical system of equations* etc. (Quart. journ. of mathem. **23**, 1888).

posent que l'existence d'un système de 15 plans et de 15 droites; or ces plans forment 6 pentaèdres et 20 trièdres, par couples conjugués, dont les sommets se trouvent par quaternes sur 15 droites; ces sommets et ces droites composent un hexaèdre qui représente le noyau de toute la figure et dont les faces sont coordonnées à ces pentaèdres. CREMONA ajouta la remarque importante que cette figure se présente chaque fois qu'on a 15 droites situées en 15 plans; par conséquence elle se présente 36 fois dans toute surface cubique générale; d'où il conclut l'existence de 36 héxaèdres dans chaque surface du 3^e^ ordre (voir aussi [107]); ces héxaèdres appartiennent à une série infinie déjà considérée par M. REYE[1]), mais ils n'avaient pas été signalés auparavant. Parmi les conséquences qu'on peut en tirer remarquons seulement cette belle construction du pentaèdre d'une surface du 3^e ordre: „considérons deux hexaèdres quelconques et les deux développables de la 3^e classe (et du 4^e ordre) déterminés par leurs faces; ils ont cinq plans tangents communs, qui forment précisément le pentaèdre de SYLVESTER de la surface".

11. Cremona professeur de géométrie descriptive et de géométrie analytique.

A partir de 1861 et pendant six années, CREMONA occupa aussi dans l'université de Bologne (presque toujours comme chargé de cours) la chaire de géométrie descriptive. Le plan, suivant lequel il dirigea ses leçons est[2]) celui entrevu déjà par BELLAVITIS[3]) et que M. FIEDLER a depuis développé complètement; il consiste à introduire et appliquer largement dans l'étude de la géométrie descriptive les idées fondamentales de la géométrie moderne. D'ailleurs l'examen attentif du cours qu'il a fait pendant l'année scolaire 1864—1865[4]) prouve qu'il pensait bien à raison qu'un cours de géométrie descriptive *théorique* devait comprendre toutes les méthodes de représentation connues (méthode de MONGE, perspective, projections côtés, axonométrie); il ajoutait aussi la théorie des ombres, système que nous n'approuvons pas tout-à-fait, en considérant qu'elle forme plutôt un chapitre de la géométrie descriptive *appliquée*. Pour la perspective, il faut remarquer que, sous ce nom, notre géomètre embrassait le corps de doctrine basé sur l'ouvrage célèbre de BROOK TAYLOR, qu'il rajeunit en y introduisant bon nombre d'idées de la géométrie moderne, et en en formant ainsi un tout qui ressemble absolument

1) Voir le nº 15 du mémoire *Geometrischer Beweis des SYLVESTERschen Satzes* etc. (Journ. für Mathem. 78, 1874).

2) Voyez l'avant-propos des *Elementi di geometria projettiva.*

3) *Lezioni di geometria descrittiva* (Padova 1851).

4) M. BERTINI qui suivait ce cours, en rédigea un résumé qu'il eut l'extrême courtoisie de mettre a ma disposition.

à la méthode de la projection centrale de M. FIEDLER. Un petit travail pseudonyme [69] — qu'il écrivit pendant qu'il était à la campagne, chez son collègue MAGNI, le célèbre oculiste — fournit une indiscutable preuve de ce que nous venons de dire.

Par arrêté royal du 18 janvier 1863, CREMONA fut nommé professeur de géométrie analytique et descriptive à l'université de Bologne, mais bientôt après (arrêté du 8 avril 1863) il revenait à sa chaire de géométrie supérieure, tout en continuant son enseignement de géométrie descriptive. Ce court séjour dans une chaire de géométrie analytique nous fournit l'occasion de mentionner quelques travaux sur cette matière qui ne rentrent dans aucune autre catégorie de notre cadre. Quelques-uns [42, 44] ne contiennent que l'énoncé de problèmes ou théorèmes relatifs aux applications géométriques de la théorie des formes; leur valeur est prouvée par cela qu'un géomètre tel quel BATTAGLINI ne dédaigna pas de les résoudre ou démontrer[1]; un autre [45] contient un calcul très simple ayant pour but d'établir une formule tout-à-fait élégante pour carrer un segment de section conique, que SYLVESTER avait découverte et que SALMON avait communiquée à notre mathématicien par une lettre du 23 novembre 1863; le calcul de CREMONA eut l'honneur de prendre place dans le plus célèbre traité moderne de géométrie analytique élémentaire[2]).

Comme ces publications correspondent à peu près à l'époque où CREMONA fut professeur de géométrie analytique, on pourrait croire que son intérêt pour cette branche des mathématiques fût né et mort en lui avec cette occupation officielle. Rien de plus faux; on peut dire que cet intérêt dura toute sa vie. Pour s'en persuader, le lecteur n'a qu'à se rappeler quels furent les travaux qu'il écrivit dès son arrivée à Cremone ([3], [4], [5], [6], [7]); de cette ville est aussi datée une note [14] ayant pour but de trouver l'équation homogène de la sphère circonscrite à un tétraèdre, tandis qu'à Milan il écrivait un travail plus long [16] contenant des démonstrations d'une rare élégance des théorèmes donnés par CHASLES dans son *Résumé d'une théorie des coniques sphériques homofocales*[3]); plus tard [62] il se proposa d'appliquer les coordonnées cartésiennes à établir une formule assez remarquable de MANNHEIM. Dans les premiers jours de sa résidence à Bologne il écrivit — en dehors d'un travail dont nous avons déjà parlé [21] et d'une analyse élogieuse du plus grand ouvrage didactique de HESSE [31] — un autre [20] „coll' unico scopo di attirare l'attenzione di qualche benevole lettore su una teoria che promette di

1) Giorn. di matem. **1**, 1863, p. 311—316, 370—378.

2) SALMON-FIEDLER, *Analytische Geometrie der Kegelschnitte*, 6. Aufl. (Leipzig 1903), p. 743.

3) Comptes rendus Paris **50**, 1860, p. 623—633.

essere feconda quanto è quella de' luoghi omofocali, di cui la prima può derivarsi mediante la trasformazione polare". Les premières lignes de cette nouvelle théorie ont été tracées par O. TERQUEM[1]), mais c'est CHASLES qui en fournit les éléments les plus importants[2]); elle a pour base la considération des couples de droites coupant une conique suivant quatre points d'un même cercle, mais il faut reconnaître qu'elle s'est montrée bien moins importante qu'elle ne le paraissait à son début. CREMONA en donna une belle exposition élémentaire; bornons-nous à signaler qu'on y trouve le système de coordonnées, pour les droites d'un plan, corrélatif à celui des coordonnées elliptiques ordinaires. Une addition qu'on trouve dans un autre travail [61], prouve qu'il continua à s'occuper plus tard du même sujet.

Mais de tous les mémoires de géométrie analytique dus à CREMONA, le plus original et le plus important est le dernier qu'il écrivit à Bologne [73]; le lecteur reconnaîtra que nous avons raison de penser ainsi en lisant l'énoncé des théorèmes qu'il renferme, que voici: „Soit

$$\begin{aligned}F(x,y) &= y^2(ax^2+2bx+c)+2y(a'x^2+2b'x+c')+(a''x^2+2b''x+c'')\\ &= x^2(ay^2+2a'y+a'')+2x(by^2+2b'y+b'')+(cy^2+2c'y+c'');\end{aligned}$$

$X(x)$ et $Y(y)$ soient les discriminants de F suivant qu'on la considère comme fonction de y ou de x; X et Y sont deux formes biquadratiques ayant les mêmes invariants".

Cette proposition est aujourd'hui bien connue par des travaux de MM. CAPELLI[3]) et ZEUTHEN[4]); CREMONA déclare qu'il ignore si quelqu'un l'a découverte avant lui et nous aussi n'avons pu la trouver énoncée dans aucune publication antérieure à l'an 1867; jusqu'à preuve contraire, nous la considérons en conséquence comme un théorème de CREMONA. Notre auteur dit qu'on pourrait la prouver par un calcul directe des invariants des formes $X(x)$ et $Y(y)$; mais il en développe une démonstration si belle qu'il faut que nous en donnions ici une idée. Supposons, comme il est permis, $c''=0$, $F(x, y)=0$ est alors l'équation d'une quartique passant par l'origine des coordonnées et ayant des points doubles à l'infini des axes; changeant x, y respectivement en $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, cette courbe se transforme en une cubique passant par ces mêmes points à l'infini, et les équations $X\left(\frac{1}{x}\right)=0$, $Y\left(\frac{1}{y}\right)=0$ représentent les quatraines des tangentes à cette nouvelle courbe parallèles aux axes; or on sait que ces quatraines sont projectives, donc etc.

---

1) *Sur les lignes conjointes dans les coniques* (Journ. de mathém. **3**, 1838).

2) *Mémoire sur les lignes conjointes dans les coniques* (Journ. de mathém. **3**, 1838, p. 385—434).

3) *Sopra la corrispondenza (2,2)* etc. (Giorn. di matem. **17**, 1879, p. 69).

4) *Déduction de différents théorèmes géométriques d'un seul principe* (Proc. of the London mathem. soc. **10**, 1879, p. 196—204).

12. Cremona à l'institut technique supérieur de Milan.

F. Brioschi, qui depuis 1863 était le chef de l'institut technique supérieur de Milan, pensa en 1867 qu'il était nécessaire d'introduire dans l'enseignement des futurs ingénieurs ces méthodes graphiques que Culmann avait imaginées et que, aidé par T. Reye, il répandait de sa chaire au Polytechnicum de Zürich; et il lui sembla que personne en Italie ne convenait mieux que Cremona pour occuper cette place de bataille[1]); en conséquence, sur sa proposition, par arrêté ministeriel du 16 octobre 1867, celui-ci fut chargé (comandato) du cours de géométrie supérieure à Milan (il ne reçut que le 9 novembre 1872 le titre de professeur ordinaire). Ainsi finit une nouvelle période de la vie de notre mathématicien, qui avait duré sept années, et qui, du point de vue strictement mathématique, est sans doute la plus heureusement féconde de toute son existence.[2])

Le changement de résidence de Bologne à Milan exerça une modification radicale sur la direction générale des idées et des recherches scientifiques de Cremona. D'un côté, son séjour dans un institut ayant un but professionnel et l'obligation où il fut d'enseigner la statique graphique, le conduisirent à des recherches ayant trait à des applications, dont il s'était toujours tenu éloigné auparavant; d'ailleurs le contact quotidien avec le grand analyste qu'était son ancien maître Brioschi, l'entraîna insensiblement à abandonner la géométrie du type de Chasles et Steiner, pour se tourner vers les méthodes plus algébriques, qui avaient alors Clebsch comme leur plus illustre et leur plus fécond protagoniste.

Pour se former une idée des concepts directeurs choisis par Cremona en traçant le plan de son cours à l'école polytechnique de Milan, on n'a qu'à parcourir les lithographies qu'on en fit pour servir aux étudiants pendant les années 1867—68 et 1868—69[3]). Ces deux rédactions se trouvent en général d'accord; chacune est divisée en trois groupes de leçons, dont l'un comprend la *géométrie de position*, le second le *calcul graphique* et le troisième la *statique graphique;* mais, tandis que, pour les deux derniers, Culmann est toujours conseillé comme livre de texte, pour le premier Staudt est indiqué une fois et Zech une autre; enfin dans la rédaction plus récente, les applications sont plus développées et nombreuses que dans la première.[4]) Or nous allons prouver

---

1) „L'Italia può gloriarsi d'avere, per la prima, data ospitalità alle nuove idee, e coll' insegnamento e con pubblicazioni originali ed illustrative. In breve volgere d'anni la geometria projettiva e la statica grafica divennero tra noi materia di studio ordinario, ed oggi non vi ha più alcun ingegnere, laureato dopo 1870, che non sia padrone de' metodi grafici.“ Voilà comment s'exprimait notre mathématicien, en mars 1888, dans la préface à La statica grafica (Parte I, Milano 1888) de M. Saviotti.

2) Comparez en effet la liste à la fin de notre article.

3) C'est à l'obligeance de M. Jung que je dois de les avoir pu examiner chez moi.

4) Comme ce cours est souvent cité (voir p. ex. Jung, *Encyklop. der mathem. Wiss.,*

que pour chacune des trois parties du cours professé à Milan par CREMONA, il existe des traces visibles des empreintes personnelles qu'il y a laissées.

En octobre 1874 le gouvernement italien imposa de nouveaux programmes pour l'enseignement des instituts techniques (Obere Realschulen); parmi les nouveautés introduites, remarquons celle (conseillée probablement par CREMONA lui-même) de la théorie des sections coniques basée sur les notions de rapport anharmonique et d'involution. Or pour cette nouvelle branche d'instruction mathématique, il n'existait alors en Italie aucun livre de texte; qui mieux que CREMONA aurait pu le rédiger, mieux que lui qui depuis une

---

t. 4_1 : 3, p. 299, 314) et qu'il a servi de modèle pour plusieurs des cours analogues faits en Italie, je crois utile de donner ici la table des matières traitées, d'après la rédaction la plus récente:

1. *Géométrie de position.*

1. Formes géométriques fondamentales. 2. Systèmes harmoniques. 3. Formes projectives. 4. Involution. 5. Génération des coniques. 6. Théorie des pôles et des polaires. 7. Centre et diamètres des coniques. 8. Exercices et constructions. 9. Théorème de DESARGUES. Formes projectives dans les coniques. 10. Exercices et constructions. 11. Problèmes du 2d degré. 12. Foyers des coniques. 13. Quelques autres problèmes et constructions. 14. Cônes et surfaces du second ordre réglées. 15. Exercices. 16. Propriétés des formes géométriques fondamentales de la 2e espèce. 17. Affinité et similitude des figures planes. 18. Exercices. 19. Génération des surfaces du 2d ordre. 20. Pôles et plans polaires par rapport à une surface du 2d ordre. 21. Diamètres, centre, axes. 22. Affinité, similitude, congruence et symétrie des figures solides. 23. Exercices.

2. *Calcul graphique.*

1. Addition et soustraction des lignes droites. 2. Multiplication ou division d'une droite par un rapport. 3. Élévation à puissances et extraction de racines. 4. Multiplication de droites entre elles. 5. Transformation des aires dont le contour est rectiligne. 6. Tables graphiques. 7. Transformation des figures circulaires. 8. Transformation des figures curvilignes en général. 9. Théorie du planimètre. 10. Cubature de masses régulières. 11. Cubature de masses irrégulières. 12. Calculs graphiques relatifs aux transports des terres.

3. *Statique graphique.*

1. Composition des forces appliquées à un point. 2. Composition de forces placées arbitrairement dans un plan. 3. Correspondance projective entre le polygone des forces et le polygone funiculaire. 4. Exemples et cas particuliers. 5. Moments de forces dans un plan. 6. Couples. 7. Équilibre des forces d'un plan. 8. Composition des forces dans l'espace. 9. Forces parallèles dans un plan. 10. Centres de gravité. 11. Moments d'inertie. 12. Ellipsoïde central. 13. Ellipsoïde d'inertie. 14. Système de forces parallèles dont les intensités sont proportionnelles aux distances des points d'applications d'un plan. 15. Ellipse d'inertie. 16. Système de forces parallèles, agissant sur une région plane, dont les intensités sont proportionnelles aux distances d'un axe neutre. 17. Construction de l'ellipse centrale et du noyau d'une figure plane. 18. Ellipse centrale et noyau profil d'un *rail*. 19. Ellipse centrale et noyau d'un fer à angle. 20. Distribution des forces intérieures dans les sections d'une travure. 21. Application à une travure métallique encadrée à une de ses extrémités.

dizaine d'années exposait de sa chaire les nouvelles méthodes géométriques et par de nombreuses et brillantes applications prouvait qu'il en connaissait jusqu'au fond la nature et l'art de les manier? Notre géomètre sentit le devoir qu'il avait à remplir et s'y prépara. C'est ainsi que naquirent les *Elementi di geometria projettiva* [101], qui, quoique arrêtés au 1^er^ tome[1]) furent vivement appréciés en Italie et à l'étranger[2]), servirent longtemps chez nous à l'enseignement supérieur et furent traduits dans les principales langues[3]); ils sont en conséquence tellement connus qu'il est tout-à-fait inutile d'en faire ici une nouvelle analyse et d'en décrire complètement le plan; nous nous bornerons donc à quelques simples remarques. Relativement au nom employé par CREMONA pour désigner la branche de mathématique qu'il traite, il faut noter qu'il a écarté ceux de *géométrie supérieure* et de *géométrie moderne*, alors en usage, car ils exprimaient des idées trop relatives et passagères, et aussi ceux de *géométrie de position* et de *géométrie dérivée*, dont le premier semblait exclure la considération des relations métriques et le second était d'une signification trop large; alors, pour embrasser l'ensemble des théories ayant comme germe le *Traité des propriétés projectives des figures*, il emprunta à KLEIN le nom de *Géométrie projective*[4]), en le prenant toutefois dans un sens très différent: cette décision obtint l'approbation générale. Relativement à la méthode nous observerons que CREMONA, tout en s'écartent de la route frayée par STAUDT, qui exclut complètement la considération de rapport anharmonique, fit de cette notion un usage un peu plus restreint de ce qu'en avaient fait MÖBIUS, STEINER et CHASLES; il ne suivit non plus STAUDT dans la théorie des imaginaires, car il exclut cette théorie, en préférant de remarquer pour chaque problème du second degré qu'il peut avoir 2, 1 ou 0 solutions. Ajoutons que c'est depuis la publication des *Elementi di geometria projettiva* qu'on a rigoureusement suivi le système de désigner les points par les lettres grandes $A, B, C, \ldots$, les droites par les lettres petites $a, b, c, \ldots$. et les plans par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Les partisans de la fusion de la planimétrie avec la stéréométrie y remarqueront avec plaisir la suivante déclaration: „Le considerazioni stereometriche suggeriscono bene spesso il modo di rendere facile ed intuitivo ciò che in geometria piana sarebbe complicato e di

1) Le 2^d^ tome était déjà commencé lorsque survinrent des changements radicaux dans l'organisation des instituts techniques; CREMONA interrompait alors un travail ingrat, dont il ne voyait plus le but.

2) Voyez les analyses qu'en firent M. ZEUTHEN (Bullet. d. sc. mathém. **5**, 1873, p. 10—15) et BERTINI (Period. di scienze mat. e nat. per l'insegnamento secondario, **1**, 1873, p. 26—27); quelques inexactitudes signalées par le premier ont été corrigées par l'auteur même (voir vol. dernièrement cité p. 56—58).

3) *Eléments de géométrie projective*, trad. par DEWULF (Paris 1875); *Elemente der projectivischen Geometrie;* deutsch von TRAUTVETTER (Stuttgart 1882); *Elements of projective geometry;* translated by C. LEUDESDORF (2^d^ ed., Oxford 1894).

4) Mathem. Ann. **4**, 1871, p. 573.

malagevole dimostrazione", et tout le monde accordera une grande admiration à l'éminent géomètre qui sut tirer la moelle des ouvrages de ses prédécesseurs pour en former un tout homogène, ayant une physionomie bien nette.

Les belles qualités, si répandues dans les *Elementi di geometria projettiva,* se retrouvent dans un petit ouvrage, que CREMONA publia peu apres [102], et que, si j'osais hasarder une hypothèse, je considérerais comme ayant avec le précédent une relation identique à celle que la *Geometrie der Lage* de STAUDT aurait eue avec la *Geometrie des Maasses* qu'il avait projétée. En effet dans les *Elementi di calcolo grafico* se trouvent recueillies et coordonnées toutes les notions et les propositions qui rendent possible le remplacement d'un calcul arithmétique par un diagramme convenablement choisi. Ils commencent par une exposition complète du principe des signes pour les segments rectilignes, les angles et les volumes, puis on y trouve les méthodes graphiques pour effectuer exactement toutes les opérations arithmétiques et pour résoudre, avec telle approximation que l'on voudra, toute équation algébrique. La question traitée ensuite a un intérêt théorique et pratique; elle a occupé aussi les anciens géomètres, qui tracèrent les premieres lignes de sa solution; c'est le problème de la transformation des aires; problème qu'on peut résoudre exactement lorsque le contour est rectiligne et par approximation dans les autres cas. La dernière des questions résolues par CREMONA se trouve sur la limite entre la géométrie et la mécanique; c'est la détermination graphique des centres de gravité; son importance est telle que CREMONA y a consacré avec raison plusieurs développements. Les traductions qui même récemment[1]) honorèrent les *Elementi di calcolo grafico* prouvent que, aujourd'hui encore, on les considère comme la meilleure introduction aux méthodes de CULMANN.

Le troisième des travaux de CREMONA liés à son enseignement au polytechnicum de Milan est encore plus original que les deux autres; il a pour objet la théorie des figures réciproques qu'on rencontre dans le statique graphique. Publié d'abord (1er juin 1872) à l'occasion des noces de la fille de BRIOSCHI, il fut bientôt réimprimé et sept ans après une nouvelle édition fut jugée nécessaire et parut en effet[2]) par les soins de M. JUNG [99]. Pour comprendre et mésurer la valeur de l'innovation introduite par notre géomètre dans la dite théorie, il est nécessaire de se rappeler que CLERK MAXWELL avait observé le premier que le polygone des forces et le polygone funiculaire (qui sont deux figures corrélatives)

1) *Elemente des graphischen Kalkuls;* deutsch von M. CURTZE (Leipzig 1876). *Graphical statics. Two treatises on the graphical calculus and reciprocal figures in graphical statics;* translated by H. BEARE (Oxford 1890).

2) Il a aussi été traduit en anglais (voir ci-dessus) et en français.

peuvent être considérés comme les projections orthogonales de deux polyèdres qui, *après rotation de l'un d'eux de 90⁰ autour d'un axe convenablement choisi*, sont polaires réciproques par rapport à un paraboloïde de révolution. Or CREMONA découvrit que ces deux polygones peuvent aussi être considérés comme les projections orthogonales de deux polyèdres qui, *dans leur position*, se correspondent par rapport à un complèxe linéaire. „Wenn es daher (dit un juge compétent) [1]) auch nicht so wichtig ist, ob bei der Herstellung des reciproken Kräfteplanes das Rotationsparaboloid oder das Nullsystem zu Grunde gelegt wird, so ist doch immerhin durch die Einführung des Nullsystems und die Vermeidung der Drehung des Kräfteplanes in theoretischer Richtung eine Abrundung erzielt." CREMONA est donc justement considéré comme un des „Begründer der Fachwerktheorie" [2]). Et les adeptes de la géométrie de la droite dans l'espace lui sont reconnaissants, car, après leur avoir appris une élégante représentation des droites sur un certain système formé par ∞^4 coniques d'un plan [3]) [100], par une application pratique inattendue et importante, il documenta la valeur d'une branche de géométrie qui poussait alors ses premières fleurs.

13. Travaux de Cremona sur les courbes au point de vue du genre.

L'action didactique de CREMONA à l'institut technique supérieur de Milan ne resta pas entre les bornes indiqués dans le paragraphe précédent; car à cette époque l'établissement dirigé par BRIOSCHI comptait une école normale destinée à former des professeurs pour les instituts techniques [4]), et CREMONA fut chargé d'y faire des leçons et des conférences de mathématiques supérieures. Parmi ceux qui eurent le bonheur de les écouter, notons A. ARMENANTE, G. ASCOLI, E. BERTINI, G. JUNG, M. MISANI et EM. WEYR. Les plus célèbres de ces leçons furent celles que CREMONA fit durant l'année scolaire 1868—69, conjointement à BRIOSCHI et CASORATI, sur la théorie des fonctions elliptiques et abéliennes. Du résumé qu'on en a publié [5]), il résulte que, tandis que BRIOSCHI s'était inspiré de JACOBI et CASORATI de RIEMANN, CREMONA prit pour guide la *Theorie der* ABEL*schen Functionen* de CLEBSCH et GORDAN.

1) HENNEBERG, *Encyklopädie der mathem. Wissenschaften* **4,** p. 363.

2) HENNEBERG, article cité p. 366; voyez aussi HAUCK, *Über die reciproken Figuren der graphischen Statik* (Journ. für Mathem. **100,** p. 366).

3) Ce sont les coniques circonscrites aux triangles circonscrits à une conique fixe.

4) Voir l'art. 16 de l'arrêté royal du 6 mars 1863, par lequel fut fondé le polytechnicum de Milan.

5) A. ARMENANTE e G. JUNG, *Relazione sopra tre corsi paralleli dei professori* BRIOSCHI, CREMONA *e* CASORATI *sulla teoria delle funzioni ellittiche e abeliane.* Giorn. di matem. **7,** 1869, p. 224—234.

Dans la 1ère partie de son cours il exposa, suivant la méthode qu'il avait déjà adoptée dans son *Introduzione*, les théorèmes fondamentaux sur les courbes planes algébriques; dans la 2e, il fit connaître les trois premières sections de cette *Théorie*, en lui donnant un aspect un peu plus géométrique; et dans la 3e, pour prouver l'importance hors ligne du théorème d'ABEL, il exposa les magnifiques recherches que CLEBSCH avait réunies dans ses célèbres mémoires des tomes **64** et **65** du Journal für Mathematik. Si nous ne nous trompons pas, c'est la 2e partie qui offre un plus grand intérêt de nouveauté; elle fournit à CREMONA le sujet d'un mémoire étendu [86], où, à l'aide de considérations géométriques, il arriva, par une voie différente de celle de CLEBSCH et GORDAN, à la réduction des intégrales abéliennes à leurs trois formes typiques, et au théorème d'ABEL.

Une originalité encore plus grande caractérise deux autres trauvaux, ayant aussi leur origine dans ce cours, et dont nous devons dire quelques mots.

Les coordonnées des points d'une courbe hyperelliptique du genre p, peuvent s'exprimer rationnellement à l'aide d'un paramètre λ et de la racine carrée d'une fonction entière $Q(\lambda)$ du degré $2p+2$. CLEBSCH et GORDAN, dans leur ouvrage cité, apprennent à réduire les courbes hyperelliptiques des genres $p=1$ ou 2 à leurs formes typiques; or CREMONA, généralisant le procédé analytique adopté par ces auteurs, et en employant une transformation de JONQUIÈRES convenable, prouva 1) [82] que, quel que soit le genre p, une courbe hyperelliptique du genre p peut se transformer en une courbe de l'ordre $p+2$ à un seul point singulier p-ple M, jouissant de ces deux propriétés: 1) chaque tangente à la courbe au point M coupe celle-ci en $p+2$ points coïncidents en M; 2) on peut mener de M à la courbe $p+2$ droites tangentes ailleurs, leurs points de contact se trouvant sur une droite m. La courbe transformée est homologico-harmonique par rapport au centre M et à l'axe m; elle a $8p$ points d'inflexion et $8p(p-1)$ tangentes doubles. — Remarquons qu'à la classe des courbes hyperelliptiques appartiennent les quartiques douées d'un point double; CREMONA s'en occupa occasionnellement [90] dans l'hypothèse qu'elles fussent homologico-harmoniques, et en détermina leurs coniques quadritangentes et leurs tangentes doubles, en s'aidant de considérations de géométrie de l'espace, signalées auparavant par M. GEISER 2).

Dans l'avant-propos de leur *Théorie*, que nous venons de citer plusieurs fois, CLEBSCH et GORDAN ont fait allusion à la question de savoir

1) Comp. CLEBSCH-LINDEMANN, *Vorlesungen über Geometrie*, 1 Bd. (Leipzig 1876), p. 720.

2) *Über die Doppeltangenten einer ebenen Kurve vierten Grades* (Mathem. Ann. **1**, 1869, p. 509).

si le nombre des modules d'une courbe du genre p est $3p-3$, comme avait dit RIEMANN dans le § 12 de sa *Theorie der ABELschen Functionen,* ou bien $4p-6$, comme croyait CAYLEY[1]); cette question est depuis longtemps résolue, car CAYLEY non seulement a reconnu son erreur, mais il en a découvert la cause[2]). Toutefois, antérieurement à cet événement, CREMONA, en collaboration avec CASORATI, se proposa [83] de chercher quelques raisons en faveur de l'une ou de l'autre de ces questions, et il se plaça du côté de la vérité, car il établit, à l'aide de considérations directes, l'exactitude de la formule de RIEMANN pour $p=5$ ou 6[3]). Si l'on fait attention à l'époque où elle fut écrite et aux procédés qui y sont employés, on verra sans peine que cette note n'est pas indigne de figurer parmi les travaux de notre géomètre.

14. Transformations rationnelles de l'espace; leur application à la représentation plane des surfaces.

Les mémoires de CREMONA, que nous venons d'analyser, sont toutes des preuves du courant sympathique d'idées existant alors entre lui et son ami CLEBSCH (comp. [96]); d'autres preuves vont résulter de l'analyse de ceux qui vont nous occuper maintenant.

Le 21 juillet 1866 CLEBSCH annonçait à CREMONA qu'il avait découvert „durch Integration" que les lignes asymptotiques d'une surface de STEINER sont des courbes gauches du 4e ordre et de la 2e espèce[4]). La beauté de ce résultat fit naître en notre mathématicien le désir d'y parvenir par une voie géométrique et dès le 25 septembre de la même année il pouvait annoncer à son ami qu'il venait d'atteindre son but. L'artifice qu'il employait à cet effet consiste dans la représentation de la surface sur un plan, représentation qui résulte de la première communication de WEIERSTRASS sur cette surface, mais que CLEBSCH (voir le mémoire cité tout-à-l'heure) et CREMONA [72] ont les premiers (et indépendamment l'un de l'autre) développée et appliquée. Les lois de cette représentation sont aujourd'hui si connues qu'il n'est pas nécessaire de les rappeler ici; mais les subtils raisonnements par lesquels CREMONA parvint à la représentation et à la nature des lignes asymptotiques de la surface dont il s'agit, méritent d'être signalés honorablement. CREMONA (non moins que

1) *On the transformation of plane curves* (Proc. of the London mathem. soc. **1,** 1865, p. 1).

2) *Note on the theory of invariants* (Mathem. Ann. **3,** 1871, p. 268).

3) Le cas de $p=4$ avait été déjà épuisé par A. BRILL (Mathem. Ann. **1,** 1869, p. 401).

4) Voyez en effet le mémoire *Über die STEINERsche Fläche,* qui porte la date 24 juillet 1866 et fut publié dans le premier cahier du t. **67** (1867) du Journ. für Mathem.

CLEBSCH) remarqua le cas particulier de la surface de STEINER correspondant à l'hypothèse que deux des droites doubles coïncident, et il ajouta celui, encore plus spécial, où toutes les trois se superposent; et en ayant observé que les surfaces réglées du 3ᵉ degré peuvent se représenter sur le plan d'une manière analogue, il arriva aussi à découvrir les lignes asymptotiques de toutes ces surfaces[1]).

Or ce dernier résultat, certainement remarquable en soi, nous apparaît très important si l'on considère qu'il fut le point de départ des nouvelles recherches, couronnées d'un complet succès, que notre auteur fit [80] sur les surfaces réglées $[m, n]$ de l'ordre $m + n$, douées chacune de deux directrices rectilignes, de multiplicités m et n et de $(m-1)(n-1)$ génératrices doubles. Une telle surface est rationnelle; ses lignes asymptotiques sont toujours algébriques, de l'ordre $2(m + n - 1)$, si les deux directrices sont différentes et de l'ordre $2m + n - 2$, lorsqu'elles coïncident. CREMONA parvint à ces conséquences à travers une foule de considérations et de calculs, où je ne sais ce qu'on doit admirer le plus, la rigueur du raisonnement géométrique ou l'élégance du procédé analytique. Ce qu'il ne faut pas oublier de signaler particulièrement, c'est le moyen employé pour arriver à la représentation sur un plan d'une surface; tandis que, d'ordinaire, pour y parvenir on part de la considération de l'ordre et de la multiplicité de ses lignes et de ses points singuliers, ou bien on transforme d'une manière convenable son équation, CREMONA, ayant avant tout prouvé qu'une surface $[m, n]$ est toujours rationnelle, et généralisant les lois de représentation d'une surface $[2, 1]$, arrive à la représentation générale cherchée; c'est un artifice logique qui mérite d'être considéré, car il peut servir en d'autres cas analogues.

Dans son mémoire sur la surface de STEINER, CLEBSCH obtint les équations différentielles des lignes asymptotiques, et il les intégra. Cette importante application de la représentation plane d'une surface à la résolution d'un problème métrique donna à CREMONA l'idée de chercher si, en général, pour une surface rationnelle, on aurait pu résoudre assez aisément les plus importantes questions de cette espèce. Et en effet, dans un travail très peu connu [88], il trouva, pour toute surface algébrique, dont la représentation univoque sur le plan soit donnée, les équations différentielles des courbes isotropes, des lignes asymptotiques et des lignes de courbure, et il ajouta des remarques utiles pour leur intégration[2]).

1) Ce sont des quartiques d'une espèce particulière que CREMONA étudia *ex-professo* un peu plus tard [78].

2) CREMONA observa que toute surface algébrique a toujours au moins deux lignes de courbure algébriques; c'est-à-dire sa section par le plan à l'infini et sa ligne de contact avec la développable circonscrite à la surface et au cercle imaginaire à l'infini. Ces propositions sont elles nouvelles?

Ces équations générales furent établies par CREMONA (c'est lui qui l'a déclaré) en vue d'applications renvoyées à des occasions futures, qui malheureusement ne se présentèrent plus; mais dans le mémoire dont il s'agit [88], il s'arrêta aux surfaces du second degré, et parvint ainsi à des théorèmes sur leurs lignes de courbure, dont la substance remonte à MONGE, mais qui se présentent sous une forme si belle qu'il est à souhaiter que quelque géomètre applique les formules générales de CREMONA à des surfaces moins connues que les quadriques.

On sait que le mémoire sur la surface de STEINER est bien loin d'être le seul que CLEBSCH ait consacré à la représentation d'une surface sur le plan; en dehors de plusieurs autres exemples remarquables, il a composé un travail très étendu, aujourd'hui classique, sur la théorie générale de cette représentation[1]. Impressionné par la grandeur de ces recherches, CREMONA voulut leur apporter quelques contributions; et, dans une note communiquée à la société de Gottingue le 3 mai 1871, il signala une méthode extrêmement féconde, pour découvrir des surfaces rationnelles et leur représentation sur un plan. Elle consiste dans l'application d'une transformation rationnelle de l'espace à une surface rationnelle déjà connue; CREMONA a considéré tout particulièrement la transformation dans laquelle aux plans de l'espace correspondent ∞^3 surfaces du 3^e ordre passant toutes par une même courbe du 6^e ordre et les transformations qui en sont des cas particuliers. De cette manière il put représenter sur un plan et étudier plusieurs surfaces remarquables, dont *une* du 4^e ordre, *six* du 5^e, *cinq* du 6^e, *quatre* du 7^e et *une* du 8^e.

Poursuivant dans le même ordre d'idées, il remarqua [92] que la surface du 4^e ordre à conique double peut s'obtenir d'une surface du 3^e ordre en lui appliquant la transformation

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1^2 : y_1\, y_2 : y_1\, y_3 : y_2\, y_4 - y_3^2;$$

d'où il suit une nouvelle méthode pour étudier cette surface., à l'aide d'une représentation plane. Et si l'on applique la même transformation à une surface du second ordre, on parvient [93] à un nouveau cas particulier de la même surface, échappé même à KORNDÖRFER; c'est le cas où la surface a, sur la conique double, un point singulier par lequel passent quatre droites de la surface, situées dans le même plan.

Neuf ans après, CREMONA fit de cette transformation quadratique de l'espace une autre importante application [112], c'est-à-dire à l'étude d'une surface du 4^e ordre ayant comme seule singularité un point double uniplanaire, où la surface est tangente à elle-même. Une telle surface, qui avait été signalée

1) *Intorno alla rappresentazione di superficie algebriche sopra un piano* (Rend. dell' ist. Lomb. [Milano] 1_2, 1868). *Über die Abbildung algebraischer Flächen* (Mathem. Ann. **1**, 1869).

par NOETHER dans une communication faite à la societé de Gottingue le 7 juin 1871, appartient à un célèbre groupe de surfaces rationnelles du 4e ordre dépourvues de lignes multiples et de points triples [1]). En un cas particulier elle avait été rencontrée auparavant par CREMONA lui-même [91]; l'étude qu'il fit du cas général peut passer pour complète et définitive.

Non moins remarquable est une autre application qu'il signala des mêmes idées; ayant remarqué que, tandis qu'on connaît un grand nombre de surfaces rationnelles douées de lignes doubles, on n'en connaît presque pas de douées de lignes cuspidales, il se proposa de combler cette regrettable lacune. A cet effet, développant des idées qu'il avait esquissées ailleurs (voir [91], pag. 215, lignes 3—5), il parvint [97] à deux surfaces rationnelles de la dite espèce et à leur représentation sur un plan. Une de ces surfaces résulte de l'application d'une transformation cubique à une quadrique, l'autre d'une transformation quadratique à une surface du 3e ordre douée de point double. La première est la surface (du 5e ordre et de la 3e classe) réciproque de la surface du 3e ordre douée d'un point double uniplanaire; tandis que l'autre est une surface du 4e ordre douée de conique cuspidale, dont il établit le premier les propriétés caractéristiques.

Avant de considérer comme épuisée notre analyse des contributions que CREMONA a données à la théorie de la représentation univoque d'une surface sur un plan, rappelons que CLEBSCH (voir les mémoires cités ci-dessus) et CAPORALI [2]) ont indiqué, avec tous les détails désirables, comment on peut découvrir toutes les propriétés descriptives d'une surface rationnelle, dont on connaît la représentation plane; or CREMONA n'a pas jugé indigne de lui d'appliquer ce procédé à un exemple extrêmement instructif (voir [117] et [118]). Il supposa donné un système de courbes du 6e degré ayant en commun six points doubles, dans lesquels les tangentes forment des involutions données, et il établit qu'elles sont les images des sections planes de la surface corrélative à la surface générale du 3e ordre.

Nous avons vu que l'instrument employé toujours par CREMONA pour arriver à des surfaces rationnelles consiste dans l'application de transformations birationnelles de l'espace. C'est une théorie qui est la généralisation naturelle de celle des transformations crémoniennes du plan, et qui a été cultivée avec succès presque en même temps par CAYLEY et NOETHER [3]).

---

1) NÖTHER, *Über die rationalen Flächen vierter Ordnung* (Mathem. Ann. **33**, 1889).

2) *Sopra i sistemi triplamente infiniti di curve algebriche piane* (Collectanea mathem., Milano 1881).

3) CAYLEY, *On the rational transformation between two spaces* (Proc. of the London mathem. soc. **3**, 1869). NÖTHER, *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen* (Mathem. Ann. **2**, 1870) et *Über die eindeutigen Raumtransformationen* (Mathem. Ann. **3**, 1871).

A cet ordre d'investigations ne pouvait rester étranger notre mathématicien; et, en effet, au printemps de 1871, il fit à l'Istituto Lombardo deux communications importantes sur ce sujet ([94], [95]), et l'année suivante il les refondait, en les complétant du côté théorique, pour former son célèbre mémoire *Sulle trasformazioni razionali dello spazio*[1]) [98]; comme ce mémoire est demeuré inachevé, on ne peut omettre de tenir compte encore de ces deux communications si on veut se former une idée complète de ce que Cremona a fait sur ce sujet.

On sait que, pour établir la théorie des transformations birationnelles entre deux espaces, Cremona part d'un système d'équations du type suivant

$$1)\ x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4,$$

où les φ sont quatre fonctions homogènes en y_1, y_2, y_3, y_4 de même degré ν. Ce système fait correspondre à tout point d'un espace (y) un point de l'espace (x); et si l'on suppose qu'en résolvant le systeme (1) il en naisse un analogue:

$$2)\ y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = \psi_1 : \psi_2 : \psi_3 : \psi_4,$$

où les ψ sont des formes en x_1, x_2, x_3, x_4 du même degré μ, inversement à tout point de (x) correspondra un point déterminé de (y). Dans cette correspondance (μ, ν), au plan d'un des espaces correspondent dans l'autre ∞^3 surfaces formant un système tel que trois quel qu'ils soient de ses éléments se coupent en un seul point variable: pour un tel système Cremona proposa (et tout le monde l'adopta) le nom d'*homaloïdique*, que Sylvester avait déjà employé dans le sens de linéaire[2]). Un système homaloïdique quelconque détermine une transformation rationnelle entre deux espaces et par suite un autre système analogue *conjugué* du premier; la théorie des transformations rationnelles est ainsi réduite à l'étude des systèmes homaloïdiques. Tout système de cette nature a une surface Jacobienne, dont la considération est essentielle et dont les singularités furent déterminées par Nöther analytiquement et par Cremona géométriquement. Mais ce dernier ajouta une remarque de la plus grande valeur, dont personne ne peut lui contester la priorité absolue, c'est qu'il est possible d'obtenir tous les systèmes homaloïdiques auxquels appartient une surface rationnelle donnée Φ. La méthode qu'il a imaginée pour cela, permettant de multiplier à l'infini le nombre des surfaces rationnelles et des transformations birationnelles, est extrêmement féconde et représente peut-être le sommet le plus élevé de sa production géométrique: on peut croire qu'il reconnut très bien toute la valeur de sa découverte, car il jugea

1) Comp. aussi la dernière partie de [91], et Dewulf, *Des transformations rationnelles dans l'espace. Travaux de M. Cremona* (Bullet. des sc. mathém. **7**, 1874, p. 37—48). Du même mémoire [98] il existe une traduction tchèque due à Em. Weyr.

2) *On certain general properties of homogeneous functions* (Cambridge and Dublin mathem. journ. **6**, 1851, p. 1).

utile de l'illustrer par un grand nombre de belles applications, dont nous allons faire un court résumé.

En supposant que Φ soit une surface du 2[d] ordre, CREMONA parvient à trois transformations du 2[d] ordre dont les inverses sont respectivement des ordres 2, 3 et 4. Si Φ est une surface réglée du 3[e] degré, on parvient à trois nouvelles transformations des types (3, 3), (3, 4), (3, 5); tandis que si Φ est encore du 3[e] degré, mais non réglée, on arrive à des transformations du 2[e] degré dont les inverses sont une du 3[e] degré, une du 4[e], deux du 5[e] et deux du 6[e]; introduisant l'hypothèse que la surface du 3[e] degré Φ ait un point double, on trouve des transformations du 3[e] degré dont les inverses sont des degrés 3, 6, 7, 8, 9; si Φ en a deux, on parvient à sept transformations nouvelles; et si enfin elle en a trois, à quatre autres. De nouveaux cas étudiés par CREMONA dans ses plus anciennes publications sur le même sujet reposent sur l'hypothèse que Φ soit une surface du 3[e] ordre douée d'un point uniplanaire, ou bien une surface de STEINER ou enfin une surface de 5[e] ordre ayant une cubique gauche double. Mais plus tard, en partant de la surface du 4[e] ordre de NÖTHER, dont il s'était déjà occupé (voir [112]), il parvint [116] à une transformation birationnelle du 4[e] ordre dont l'inverse est du 6[e]; enfin partant d'une surface du 6[e] ordre douée d'une courbe double du 7[e] ordre à point triple, il arriva [115] à une nouvelle transformation du type (6, 5).

Cette liste des publications de CREMONA sur la théorie des transformations géométriques ne serait pas tout-à-fait complète si l'on n'y trouvait un mot sur un mémoire [103] qui, quoique (c'est l'auteur qui le déclare) n'ayant d'autre but que de fixer l'attention des mathématiciens sur les magnifiques travaux de LIE [1]) „pleins d'idées nouvelles et fécondes", n'est pas indigne de porter la signature de CREMONA [2]). On y trouve avant tout la représentation du complexe linéaire sur l'espace ordinaire; des formules relatives, l'auteur tire cette célèbre transformation de l'espace réglée dans l'espace de sphères qui est un des résultats les plus nouveaux dont la géométrie soit redevable au célèbre mathématicien norvégien. CREMONA avait l'intention de se servir de la représentation du complexe linéaire pour tirer, de la théorie de surfaces généralement connues, de nouveaux systèmes de rayons rectilignes. Mais ce programme de recherches

1) Voir les Forhandl. i Videnskabs-Selsk. i Christiania 1871 et le t. 5 des Mathem. Ann.

2) Cet élégant théorème, qui remonte à décembre 1871, suffirait à le prouver: (voir BELTRAMI dans le T. **10**, 1872, p. 48 du Giorn. di matem.) „Si l'on prend la forme quadratique $x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 + x^2_4 + x^2_5 = 0$ comme représentant *the absolute* de CAYLEY, les x_i étant les coëfficients de l'équation:

$$x_1 (X^2 + Y^2 + Z^2 - 1) + 2 x_2 X + 2 x_3 Y + 2 x_4 Z + i x_5 (X^2 + Y^2 + Z^2 + 1) = 0$$

d'une sphere en coordonnées cartésiennes, la distance entre deux éléments de l'espace équivaut précisément à l'angle de deux sphères au sens ordinaire de ce mot".

que, peu après, notre géomètre reproduisait, en le précisant (voir [104]), est demeuré malheureusement à l'état de projet; au moins le public mathématique ne connaît aucun travail qui en représente l'exécution de quelque manière. Remarquons encore, avant de finir, que le mémoire [103] fait apparaître Cremona comme un des premiers mathématiciens qui surent mesurer la valeur des idées de Lie; plusieurs de ses cours de géométrie supérieure tenus à Rome depuis 1894 prouvent que cette estime ne diminua pas, mais, qu'au contraire, elle devint toujours plus grande, lorsque, de ses idées, les racines devinrent plus robustes, les rameaux plus larges et les fruits plus savoureux.

15. Cremona et le polytechnicum de Rome.

Les nombreux mémoires publiés par Cremona de 1867 à 1873, sa renommée toujours grandissante de professeur éminent, les manifestations publiques de haute estime qui arrivaient jusqu'à lui[1]) de toute part et, mieux encore la respectueuse admiration qu'il inspirait à tous ceux qui l'approchaient, le qualifiaient pour un homme duquel la science et la patrie pouvaient tout espérer. On ne s'étonnera donc pas si en 1873 G. Finali, alors ministre de l'agriculture, insista pour lui faire accepter la place de secrétaire général; mais vivant alors dans un

1) Il sera intéressant de donner ici la liste synoptique (redigée par Cremona lui-même) des académies dont il fut membre et des degrés qu'on lui conféra:

1861. Académie des sciences de Bologne.
1865. Athénée de Venise.
„ Société italienne des sciences (dite des XL).
1867. Académie des sciences de Lisbonne.
1868. Institut Lombard (Milan).
1871. Société mathématique de Londres.
1872. Société des sciences de Bohème (Prague).
„ Académie des „Lincei" (Rome).
1876. Académie danoise des sciences (Copenhague).
1877. Société philosophique de Cambridge.
1878. Académie bavaroise des sciences (Munich).
1879. Société royale de Londres.
1880. Société royale des sciences de Liège.
„ Société des sciences de Gottingue.
1881. Société royale de Naples.
„ Académie hollandaise des sciences (Amsterdam).
1881. Société mathématique de Prague.
1883. Société royale d'Edinburgh.
1884. Doctor of laws, Edinburgh.
1886. Académie prussienne (Berlin).
1887. Institut d'encouragement de Naples.
„ Académie romaine des Beaux Arts (S. Luca).
1889. Académie des sciences de Turin.
1892. Doctor of sciences, Dublin.
„ Académie des sciences de Modène.
1896. Société physico-médicale d'Erlangen.
1898. Académie irlandaise (Dublin).
„ Académie des sciences de Vienne.
1899. Académie de Belgique (Bruxelles).
„ Institut de France.
1901. Académie suédoise (Stockholm).
1902. Académie américaine (Washington).
„ Doctor sc., Christiania.
? Académie des sciences de Lucque.

milieu tout-à-fait scientifique et éloigné de toute occupation n'ayant pas trait à la science et à l'enseignement, CREMONA ne voulut pas accepter. Dans le même temps le comte ALBICINI, vice-maire de Bologne, s'adressa à lui pour obtenir son concours aux études qu'on faisait alors pour instituer dans cette ville une école des ingénieurs. Mais, pendant ces négociations, on élaborait le projet de réorganiser l'ancienne école pontificale des ingénieurs à Rome, et A. SCIALOJA, ministre de l'instruction publique, s'adressa à CREMONA pour diriger cette réorganisation et être le chef de cet institut rajeuni. En conséquence, un arrêté royal du 9 octobre 1873 nomma CREMONA directeur du nouveau polytechnicum et professeur de statique graphique, et mit aussi un terme à la période héroique de sa production scientifique. Ce déplorable résultat n'étonnera personne si on réflechit à la charge particulièrement importante que le gouvernement italien confiait à notre savant et au zèle infatigable qu'il apporta à la remplir. Pour ne pas parler des efforts qu'il dut faire pour que la nouvelle école fût détachée de l'université et installée dans l'ancien couvent de S. Pietro in Vincoli[1]), nous remarquerons, avec le plus ancien et fidèle collaborateur de CREMONA[2]), que son premier soin fut d'établir dans son école une discipline rigoureuse, et d'exciter par son exemple tout le monde à remplir exactement son devoir. Et pour que l'enseignement fût plus conforme au but spécial d'une école d'ingénieurs, tout en renforçant les études théoriques, il donna une ampleur considérable aux matières d'application, dédoublant certaines chaires et en créant de nouvelles. Enfin il donna un grand développement aux exercices pratiques jusqu'alors très négligés, et n'oublia pas de doter les cabinets scientifiques des moyens nécessaires pour effectuer des recherches originales. Le fruit de tant de soins est prouvé par le grand nombre d'ingénieurs distingués qui sortirent de l'école de Rome; si l'Italie, arrivée la dernière dans la lice des études techniques, a désormais rejoint les autres nations les plus avancées, tout le mérite en revient aux fondateurs de ses trois plus grandes écoles polytechniques: Q. SELLA, F. BRIOSCHI et L. CREMONA.

Dès son arrivée à Rome, notre géomètre fonda un cours normal analogue à celui dont il avait été *magna pars* au polytechnicum de Milan[3]). Mais, par suite de la nouvelle direction que prenait toujours plus clairement l'enseignement des mathématiques pures en Italie, ces cours normaux

---

1) Ce changement de domicile eut lieu au printemps 1874.

2) Voir le discours prononcé aux obsèques de CREMONA par M. CERADINI et publié dans le n. 24 du Bollettino della società degli ingegneri ed architetti italiani, 1903.

3) M. BERTINI suivit en 1873—1874 un beau cours sur la théorie des transformations birationnelles dans le plan et dans l'espace.

étaient fatalement destinés à être supprimés. D'ailleurs la vigoureuse organisation que CREMONA avait tout de suite donnée à l'école qu'il dirigeait, transforma bientôt le rôle du directeur, de celui d'organisateur en celui d'administrateur; comme ce rôle n'absorbait plus toute son admirable activité, CREMONA pensa qu'il pouvait bien le laisser à d'autres, et, en revenant à la science pure, remplir les vœux de ceux qui voyaient trop souvent la plume magique du grand mathématicien lombard désœuvrée. Suivant cette idée, il agréa un projet formulé par BETTI et DINI et approuvé aussi par M. BERTINI, d'après lequel il aurait dû occuper la chaire de géométrie supérieure dans l'université de Pise. Mais le ministre de l'instruction publique (M. COPPINO) ne voulut pas perdre sa collaboration savante et ferme, et (appuyé en cela par Q. SELLA) il imposa à CREMONA, comme devoir de bon patriote, de ne pas quitter la capitale du royaume. Toutefois, pour rendre possible son retour à la science pure, un arrêté royal du 10 novembre 1877 lui donna la chaire de mathématiques supérieures à l'université de Rome au lieu de celle de statique graphique qu'il occupait à l'école polytéchnique. Cette disposition du gouvernement n'a pas manqué son but; car elle permit à CREMONA d'exposer de sa chaire les nouvelles méthodes géométriques[1]) et l'entraîna à se tourner encore du côté des mathématiques, chaque fois que son esprit n'était pas occupé ailleurs: des recherches sur les courbes gauches et les surfaces du 3e ordre et sur les transformations de l'espace, dont nous avons déjà parlé, et même d'autres de nature différente [119], sont là pour le prouver.

Pour en finir avec les places occupées par CREMONA dans l'instruction publique, il faut ajouter qu'en 1888—1889 il fit à Rome le premier cours de „géométrie analytique et projective", institué d'après sa proposition. L'importance de ce cours doit se chercher dans l'idée de fondre les méthodes analytique et synthétique dans une seule; le but, plutôt didactique que scientifique, de cette innovation, était de réduire un peu l'enseignement mathématique des futurs ingénieurs. Par conséquence, CREMONA, ayant toujours en vue les théorèmes aussi bien que les démonstrations, exposait toutes les questions, que d'ordinaire on apprend en Italie dans les cours universitaires séparés de géométrie analytique et de géométrie projective, en traitant chacune par le procédé qui lui paraissait le plus simple et le plus élégant; il s'agissait donc plutôt d'un mélange que d'une vraie fusion[2]). Le cours initié par CREMONA subsiste encore à Rome et a été fondé en quelques autres universités italiennes.

---

1) En hiver 1879 il eut GEGENBAUER parmi ses auditeurs.

2) Je dois ces renseignements à M. F. GERBALDI, qui était en 1888—1889 assistant de CREMONA.

16. Cremona dans l'administration publique et au gouvernement.

Par arrêté royal du 16 mars 1879, CREMONA fut élu sénateur; et le sénat ne fut pas pour lui une *sine cura*, mais un champ très noble, où il put développer son intarissable activité. En 1880, le ministre DE SANCTIS le nomma commissaire du gouvernement pour mettre en ordre la bibliothèque „Vittorio Emanuele" de Rome, charge qu'il accepta à contrecoeur et qui lui procura vingt-un mois de travail acharné et ennuyeux, au bout desquels une vie tout-à-fait nouvelle commença pour cet important institut. L'année suivante, SELLA lui offrit le portefeuille de l'instruction publique, mais CREMONA ne jugea pas devoir prendre place dans un ministère succédant à celui qui avait été présidé par son ami personnel et politique B. CAIROLI[1]. Pendant la XX[e] législature, il fut nommé vice-président du sénat (arrêté du 5 avril 1877), charge qu'il dut abandonner pour être ministre de l'instruction publique; mais des événements de politique générale ne le tinrent au pouvoir qu'un mois (1—29 juin 1898); voilà une chose très regrettable, car les écoles italiennes pouvaient attendre un grand benefice d'un homme de superbe intelligence, né pour gouverner, qui depuis quarante ans vivait en continuel contact avec professeurs et étudiants et qui, siégeant souvent au conseil supérieur de l'instruction publique, avait déjà exercé une action très appréciée.[2] En 1900 CREMONA fut nommé président de la commission d'enquête sur les bâtiments publiques de Rome, et peu après (15 décembre 1' 00) président de celle chargée d'un rapport sur les causes de la malheureuse chute des digues du Tibre et sur les moyens d'en empêcher le malheur de se renouveler; le savant rapport général, qu'écrivit CREMONA dans cette occasion[3]), lui coûta trois mois de travail continuel et est vraiment un modèle du genre; l'avoir rédigé, lorsque la maladie le minait, contribua certainement à aggraver l'état déjà précaire de sa santé.

Les nombreux rapports et les beaux discours que CREMONA fit au sénat sur des questions d'enseignement renferment une telle somme de science d'éducation qu'il est à regretter qu'ils soient enfouis dans un

---

1) M. VERONESE a publié dans sa *Commemorazione* la magnifique lettre de renoncement.

2) Le seul acte de CREMONA comme ministre qui nous est connu, est le projet de fonder un grand polytechnicum à Turin, en réunissant l'école d'application des ingénieurs au musée industriel; ce projet (qui, bien qu'approuvé par le conseil des ministres, ne put pas être présenté au Parlement) est à présent en train d'exécution. Comp. A. MOSSO, *Di un politecnico a Torino* (Nuova antologia, 1 décembre 1903).

3) Voyez le beau volume: *Atti della Commissione nominata del Ministro dei lavori pubblici per riferire sui danni ai muraglioni del Tevere e proporre i necessari provvedimenti* (Roma, tipo-litografia del genio civile 1901). 4⁰, 266 p. avec 7 grandes tables.

recueil que personne ne lit sans y être contraint, et je suis sûr que si un éditeur les publiait tous ensemble, tout le monde y pourrait apprendre et gagner. Le point le plus lumineux que présente son œuvre au sénat correspond à l'époque où celui-ci dut s'occuper des nouvelles lois d'instruction supérieure. G. Baccelli, ministre de l'instruction publique, présenta le 1er mars 1884 un projet de loi intitulé „Modificazioni alle leggi vigenti per l'istruzione superiore del Regno", que la chambre des députés avait fini par approuver à une faible majorité, après une discussion qui avait duré 41 séances (20 novembre 1883—28 février 1884). Or le sénat se montra tout de suite hostile au principe d'autonomie universitaire qui formait la base de ce projet; et lorsque M. Coppino eut succédé comme ministre à Baccelli, le bureau du sénat traça les lignes générales d'un contre-projet, en chargeant Cremona de lui donner la forme complète et définitive. Cremona accepta cette tâche et la remplit avec l'énergie et la hauteur qui caractérisent tous les actes de sa vie; et le 15 mars 1885 il put présenter au sénat son contre-projet, précédé d'un long rapport où toutes les questions relatives aux universités sont traitées à fond et où la profondeur de la doctrine n'est surpassée que par la logique rigoureuse de l'ensemble[1]). M. Coppino, qui était encore ministre, accepta les idées fondamentales du rapport de Cremona et le sénat discuta (séances 27 novembre 1886 — 25 janvier 1887) le contre-projet de son bureau et finit par l'approuver[2]). Mais la chute du ministère (29 juillet 1887), ou peut-être cette lassitude qui envahit les assemblées non moins que les hommes lorsqu'elles se sont occupées longtemps d'un même sujet (particulièrement en Italie quand'il s'agit de lois d'instruction) empêchèrent ce beau projet de devenir loi d'état. Le long et sérieux travail fait il y a dix-huit ans par le sénat italien n'a donc pas encore donné de résultats visibles; toutefois je suis persuadé qu'il ne restera pas toujours stérile, et le rapport de Cremona paraît à mes yeux comme une semence précieuse, qui attend du destin un terrain favorable, un air vivifiant et un soleil assez chaud pour donner les fruits auxquels la nature l'a destiné.

Ce combat entre le bureau du sénat et le gouvernement est peut-être celui qui fit le plus grand bruit, mais ce n'est pas le seul dont notre savant ait été le héros. Il faut, en effet, se souvenir que P. Boselli, alors ministre de l'instruction publique, présenta au sénat du royaume d'Italie (séance du 14 juin 1889) un projet de loi ayant pour but de

1) Voyez: *Senato del regno. Sessione 1882—83—84—85—86. Atti interni* Vol. III, 1886. N. 100-A.

2) Voyez: *Atti parlamentari della Camera dei senatori. Discussioni.* Legislatura XVI, Sessione 1886, p. 242 et suiv.

donner une vie nouvelle à l'enseignement pratique dans les écoles d'architecture, dont le niveau était descendu trop bas. Or le 3 février suivant, CREMONA présentait, au nom du bureau, un rapport magnifique, où étaient exposées les raisons, de fait et de principe, pour lesquelles le sénat, tout en applaudissant à l'initiative prise par le gouvernement, déclarait qu'il n'était pas favorable aux moyens indiqués pour atteindre le but désiré et en proposait d'autres meilleurs. Et le ministre, trouvant tout-à-fait sensées les raisons énumérées et les propositions faites, abandonnait son projet pour le contre-projet, qui bientôt obtint l'approbation du sénat[1]).

Pour finir, il nous faut dire quelques mots d'un dernier succès obtenu par CREMONA au sénat. Dans la séance du 15 avril 1902 le ministre de l'agriculture, d'accord avec ses collègues de l'instruction publique et des finances, présentait à cette assemblée un projet de loi, fermé par un seul article, ayant pour titre: „Scambio di alcuni servizi tra il ministero della pubblica istruzione ed il ministero di agricoltura, industria e commercio". Sous la trompeuse modestie de ce titre, se cachait une réforme extrêmement grave, car, si ce projet eut abouti, les instituts techniques auraient subi un démembrement complet. Or le bureau du sénat, mesurant sans peine toute la portée de cette réforme, jugea qu'elle n'était pas mûre et qu'elle pouvait devenir dangereuse; il décida en conséquence de s'y opposer et chargea CREMONA de rédiger le rapport dans ce sens. Notre mathématicien s'acquitta de cette charge d'une manière qu'on ne saurait assez louer[1]); et le sénat, adoptant les idées de son bureau, ajourna toute déliberation sur le projet ministériel et rejeta ce projet: l'intégrité des instituts techniques fut ainsi sauvée.

Ce rapport de CREMONA porte la date 6 mai 1903; le style élevé et vigoureux avec lequel il est écrit, la sobre érudition dont il est rempli, les robustes argumentations qui en forment la squelette et même la fine ironie qui perce sous la forme compassée d'un document officiel, tout prouve la persistante vigueur intellectuelle dont jouissait notre savant, malgré ses 73 ans. Et il faut remarquer que CREMONA s'en occupa dans une époque où il était presque chaque jour attaqué par des crises angineïdales, causées par les progrès de l'artériosclerose. Malgré ses souffrances, le 6 juin dernier, il voulut réunir encore une fois le conseil des professeurs de l'école qu'il dirigeait; vingt-quatre heures plus tard une violente attaque d'angine de poitrine annonçait la fin de sa noble vie; il perdit bientôt l'usage de la parole, et son beau regard ne se ranima plus que par moments à l'approche de sa seconde femme (ANNA MANER MÜLLER) et de ses trois fils: le 10 juin la nouvelle Italie apprenait la perte irréparable du plus grand de ses géomètres.

---

1) Tous les documents relatifs à cette question se trouvent publiés dans le T. 18, 1890, p. 562-605, et 669-690 du Bollettino ufficiale dell' istruzione.

C'est ainsi que tomba le vaillant et courageux combattant, frappé en plein coeur, mais avec les armes à la main et sans avoir donné le moindre signe de faiblesse ou de lassitude. Si l'infatigable ouvrier, arrivé à la fin de sa féconde journée, en prononçant sereinement le *nunc dimittis*, a jeté un regard sur l'œuvre accomplie, il aura pu reconnaître, avec un orgueil bien légitime, que toute sa vie avait été dépensée pour la science et pour la patrie. A l'Italie il offrit le secours de son bras et le sacrifice de sa vie, en bravant la mort dans les luttes pour l'indépendance; le sort l'ayant épargné, il put rendre d'autres grands services à son pays comme professeur, comme sénateur, comme ministre, et s'acquittant avec droiture, intelligence et fermeté des charges difficiles que le gouvernement lui confiait sans cesse. Non moindres sont les obligations que la science a envers lui; ses nombreuses publications mathématiques d'une valeur extraordinaire en raison de l'étendue du champ qu'elles embrassent, de l'importance des résultats qu'elles ont fait acquérir à la science et de la merveilleuse érudition qu'on y trouve, en sont le brillant témoignage.

Sous le rapport de l'*étendue*, bornons-nous à remarquer qu'elles embrassent toutes les branches de la géométrie, depuis l'humble trigonométrie[1]), jusqu'à la superbe théorie des espaces à plusieurs dimensions (voir [98], [103], [109]), et toutes les branches de l'analyse depuis la théorie des déterminants jusqu'à celle des fonctions abéliennes; ajoutons que pour résoudre les questions qu'il rencontrait, Cremona, en s'inspirant à un éclecticisme bien entendu, faisait recours à tous les procédés qui lui semblaient utiles, depuis les méthodes classiques de l'analyse la plus rigoureuse jusqu'à celles, un peu fantaisistes et pour cela encore discutées, de la géométrie énumérative.

Sous le rapport de l'*importance*, observons que les conséquences auxquelles Cremona arriva, sont tellement définitives que l'histoire a prononcé déjà sur elles un jugement sans appel; en effet pour la théorie des cubiques gauches et des surfaces du 3^e^ ordre, il est inscrit parmi les fondateurs; ses traités sur la théorie générale des courbes planes et des surfaces algébriques sont entre les mains d'étudiants et de professeurs de tous les pays civilisés, et sur les propositions qui forment la théorie des transformations rationnelles, il a de droits de propriété que personne n'essaiera jamais de lui contester. Les géomètres qui le suivirent, purent bien ajouter des anneaux à la chaîne d'or forgée par lui; mais personne ne put trouver la moindre imperfection dans les anneaux précédents; quel meilleur éloge pourrait-on faire dans une époque révolutionnaire et iconoclaste comme la notre?

---

1) Comp. Nouv. ann. de mathém. 3_2, p. 73, où est énoncée une démonstration donnée par Cremona de certaines relations („Question 681") entre les angles d'un triangle rectiligne.

Enfin l'*érudition* de première main, si riche dans toutes les productions de notre mathématicien, mérite d'être remarquée, car par elle on arrive à connaître ses procédés de recherche et à s'expliquer comment, dans la période relativement courte où il se consacra tout entier à la science, il ait pu y donner un si grand nombre de contributions si importantes. Cremona, bien persuadé que toute la science de la vie enseigne que ce qui est nouveau, pour avoir droit à vivre et subsister, doit pousser comme une branche vigoureuse sur un tronc ancien, dans chaque occasion où il dut traiter quelque question (de géométrie ou d'enseignement ou même d'administration), commençait par étudier à fond tout ce qui avait été fait sur ce sujet; ayant pris ainsi exacte connaissance des régions déjà explorées, il partait avec courage vers la *terra incognita*; et l'expérience acquise s'alliant à son génie naturel, le portait sûrement à un but éloigné. Profonde et sage manière de travail, que devraient apprendre ceux qui, adoptant la sotte maxime „beati qui nihil legunt, omnia invenient", préferent gaspiller le temps à retrouver ce qui est connu, au lieu d'étudier les travaux anciens pour se mettre à mesure d'en faire de nouveaux.

Une derniere note caractéristique de la production crémonienne mérite d'être remarquée, ce fut sa *rapidité* admirable. Or, si personne ne songe à demander combien de veilles a coûté au Dante la *Divina commedia*, ni en combien de journées furent peintes les loges de Raphaël, puisque les biographes de Victor Hugo constatent avec ébahissement qu'il écrivit *Le roi s'amuse* en vingt jours et *Hernani* en vingt-sept, il nous sera bien permis de remarquer le peu de temps qui fut nécessaire à Cremona pour composer ces mémoires admirables, dont la perfection, extérieure et intérieure, semblerait le fruit d'un long travail.

La révolution française venait d'éclater quand tout à coup, à la veille des terribles événements qui devraient bouleverser la France, Mirabeau manqua à l'admiration passionnée de son pays. Eh bien, l'histoire assure que dans les jours qui suivirent sa mort, quand à l'Assemblée nationale on se débattait fièvreusement pour résoudre les questions dont dépendait le salut de la France, tous les yeux se tournaient instinctivement vers la place vide du grand tribun et semblèrent demander à Dieu un miracle pour entendre encore la voix inspirée du puissant orateur.

Or, après la mort de Cremona, le même sentiment de vide insupportable nous envahit à notre tour, nous qui nous adonnons à l'étude de la géométrie, nous qui, du plus éminent au plus modeste, chérissons l'idée d'être fils ou petit-fils du grand mathématicien, dont un conseil amical ou un encouragement bienveillant ne nous faisait défaut en aucune occasion. Moins malheureux pourtant que les contemporains de Mirabeau, nous pouvons encore évoquer la voix du maître illustre et vénéré; car ses œuvres immortelles sont là, guide vaillant et sûr, source d'enseignement et d'inspiration qui ne tarira jamais.

Gênes, 31 janvier 1904.

Liste chronologique des publications mathématiques de L. Cremona[1].

1855.

1. *Sulle tangenti sfero-conjugate.* [Pavia, 3 Settembre 1855.] Annali di sc. matem. **6**, p. 382—392.

1856.

2. *Intorno ad un teorema di* Abel. [Pavia, 2 Maggio 1856.] Annali di sc. matem. **7**, p. 99—105.

1857.

3. *Nota intorno ad alcuni teoremi di geometria segmentaria.* [Cremona, 6 Agosto 1857.] Programma dell' I. R. ginnasio liceale di Cremona, alla fine dell' anno scolastico 1857, p. 1—14.

4. *Sur les questions 321 et 322 (voir t. XV, p. 154).* Nouv. ann. de mathém. **16**, p. 41—43.

5. *Solution analytique de la question 344 (*Mannheim*) (voir t. XV, p. 383).* Nouv. ann. de mathém. **16**, p. 79—82.

6. *Seconde solution de la question 368 (*Cayley*) (voir p. 192).* Nouv. ann. de mathém. **16**, p. 250.

7. *Seconde solution de la question 369 (voir p. 192).* Nouv. ann. de mathém. **16**, p. 251—252.

1858.

8. *Rivista bibliografica. Beiträge zur Geometrie der Lage, von Dr. K. G. C.* von Staudt. Nürnberg 1856—1857. [1 Marzo 1858.] Annali di matem. **1**, p. 125—128.

9. *Sulle linee del terz'ordine a doppia curvatura. Nota.* [Cremona, Aprile e Giugno 1858.] Annali di matem. **1**, p. 164—174, 278—295.

1859.

10. *Sulle linee del terz'ordine a doppia curvatura. Teoremi.* [Cremona, Ottobre 1858.] Annali di matem. **2**, p. 19—29.

11. *Intorno alle superficie della seconda classe inscritte in una stessa superficie sviluppabile della quarta classe. Nota.* [Cremona, 14 Dicembre 1858.] Annali di matem. **2**, p. 65—81.

12. *Intorno alle coniche inscritte in una stessa superficie sviluppabile del quart'ordine (e terza classe). Nota.* [Cremona, 22 Febbrajo 1859.] Annali di matem. **2**, p. 201—207 [voir un Erratum id. T. **3**, p. 384].

---

1) Les dates entre [ ] sont ou celles indiquées par l'auteur lui-même ou celles des séances académiques où eut lieu la lecture des différents travaux. On a omis de noter les rapports académiques et similaires.

13. *Solution de la question 435 (voir T. XVIII, p. 186).* Nouv. ann. de mathem. **18,** p. 199—204.

1860.

14. *Solution de la question 464 (voir T. XVIII, p. 117).* Nouv. ann. de mathem. **19,** p. 149—151.

15. *Solution de la question 465 (voir T. XVIII, p. 117).* Nouv ann. de mathem. **19,** p. 151—153.

16. *Sur les coniques sphériques et nouvelle solution générale de la question 498.* Nouv. ann. de mathem. **19,** p. 269—279.

17. *Solutions des questions 494 et 499; méthode de* Grassmann *et propriété de la cubique gauche.* Nouv. ann. de mathem. **19,** p. 356—361.

18. *Sopra un problema generale di geometria.* [Milano, 1 Giugno 1860.] Annali di matem. **3,** p. 161—171.

19. *Rivista bibliografica: Sulle superficie di second' ordine omofocali.* Annali di matem. **3,** p. 241—244.

20. *Sulle coniche e sulle superficie di second' ordine congiunte.* [Bologna, 12 Dicembre 1860.] Annali di matem. **3,** p. 257—282.

21. *Intorno ad una proprietà delle superficie curve, che comprende in sè come caso particolare il teorema di* Dupin *sulle tangenti conjugate.* [Bologna, 3 Gennajo 1861.] Annali di matem. **3,** p 325—335.

22. *Considerazioni di storia delle geometria, in occasione di un libro di geometria elementare pubblicato recentemente a Firenze.* [Cremona, 28 Marzo 1859 Addition: 9 Maggio 1860.] Il politecnico **9,** p. 286—323.

23. *Intorno ad un' operetta di* Giovanni Ceva, *matematico milanese del secolo XVII.*[1])

1861.

24. *Sur quelques propriétés des lignes gauches de troisième ordre et classe.* [Milan, 27 mars 1860.] Journ. für Mathem. **58,** p. 138—150.

25. *Prolusione al corso di geometria superiore letta nell' università di Bologna nel novembre 1860.* Il politecnico **10,** p. 22—42.

26. (l. c.) *Trattato di prospettiva rilievo. Traité de perspective relief par M.* Poudra. *Paris 1860.* Il politecnico **11,** p. 103—108.

27. *Sulle superficie gobbe del terzo ordine.* [Bologna, 1 Febbrajo 1861. Addition: 9 Marzo 1861.] Atti dell' ist. Lomb. [Milano] **2,** p. 291—302.

28. *Intorno alla curva gobba del quart' ordine per la quale passa una sola superficie di secondo grado. Memoria* [letta ai 7 di Marzo 1861 davanti all' accademia delle scienze dell' istituto di Bologna]. Annali di matem. **4,** p. 71—101. Rend. dell' acc. d. sc. di Bologna 1860—1861, p. 58—63.

29. *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane.* [Sessione 19 Dicembre 1861.] Mem. dell' acc. d. sc. di Bologna **12,** p. 305—436.

30. *Courbes gauches décrites sur la surface d'un hyperboloïde à une nappe.* [Séance du 24 juin 1861.] Comptes rendus Paris **52,** p. 1319—1323. Annali di matem. **4,** p. 22—25.

---

1) C'est le seul des ouvrages de Cremona que je ne connais pas, quoique je l'aie cherché partout. Dans une liste rédigée par Cremona lui-même, on lit qu'il est extrait d'une Rivista giur[idica?] ou ginn[asiale?] publié en 1858; mais dans aucune bibliothèque je n'ai trouvé une telle revue.

31. *Rivista bibliografica: O. Hesse, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes*, Leipzig 1861. [Bologna, 10 Febbrajo 1862.] Annali di matem. **4,** p. 109—111.

32. *Solution de la question 545 (voir t. XIX, p. 402).* Nouv. ann. de mathém. **20,** p. 95—96.

33. *Sur la question 317 (voir t. XV, p. 52).* Nouv. ann. de mathém. **20,** p. 342—343.

34. *Sur un problème d'homographie (Question 296) (voir t. XVIII, p. 50).* Nouv. ann. de mathém. **20,** p. 452—456.

1862.

35. *Intorno alle trasformazione geometrica di una figura piana in un'altra pur piana, sotto la condizione che ad una retta qualunque di ciascuna delle due figure corrisponda nell' altra una sola retta.* [Sessione 27 Marzo 1862.] Rend. dell' acc. d. sc. di Bologna 1861—62, p. 88—91.

36. *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane.* Mem. dell' acc. d. sc. di Bologna $\mathbf{2}_2$, p. 621—631. Giorn. di matem. **1,** 1863, p. 305—311.

37. *Sur les surfaces développables du cinquième ordre.* [Séance du 17 mars 1862.] Comptes rendus Paris **54,** p. 604—608.

38. *Mémoire de géométrie pure sur les cubiques gauches.* [Bologne, 21 avril 1861; addition 27 octobre 1862.] Nouv. ann. de mathém. $\mathbf{1}_2$, p. 287—304, 366—378, 436—446.

39. *Note sur les cubiques gauches.* [Bologne, 24 juin 1861.] Journ. für Mathem. **60,** p. 188—192.

40. *Sur les surfaces gauches du 3e degré.* [Bologne, 1 septembre 1861.] Journ. für Mathem. **60,** p. 313—320.

1863.

41. *Un teorema sulle cubiche gobbe.* [Cornigliano, 19 Settembre 1863.] Giorn. di matem. **1,** p. 278—280.

42. *Questioni proposte 16—18.* Giorn. di matem. **1,** p. 280.

43. *Corrispondenza.* [Lettre à N. Trudi, datée: Cornigliano, 16 Settembre 1863.] Giorn. di matem. **1,** p. 317—318.

44. *Questioni 19—22 (L. Romance). Questioni 23—25.* Giorn. di matem. **1,** p. 318—319.

45. *Area di un segmento di sezione conica.* Giorn. di matem. **1,** p. 360—364.

46. *Sulla projezione iperboloidica di una cubica gobba. Nota.* [Bologne, 26 octobre 1862.] Annali di matem. **5,** p. 227—231. Giorn. di matem. **2,** 1864, p. 122—126.

47. *Sulla teoria delle coniche. Nota.* [Cornigliano (presso Genova), 4 Agosto 1863.] Annali di matem. **5,** p. 330—331. Giorn. di matem. **1,** p. 225—226.

48. *Rivista bibliografica: Œuvres de Desargues réunies et analysées par M. Poudra.* Annali di matem. **5,** p. 332—336. Giorn. di matem. **2,** 1864, p. 115—121.

1864.

49. *Sulla teoria delle coniche. Nota.* [Bologna, 21 Febbrajo 1864.] Giorn. di matem. **2,** 17—20, 192.

50. *Rivista bibliografica: Sulla teoria delle coniche.* [Bologna, Novembre 1864.] Annali di matem. **6,** p. 179—190. Giorn. di matem. **3,** 1865, p. 60—64, 113—120.

51. *Considerazioni sulle curve piane del terz' ordine, colle soluzioni delle questioni 26 e 27 (T. 2⁰ di questo giornale, p. 29).* [Bologna, 24 Maggio 1864.] Giorn. di matem. **2,** p. 78—85.

52. *Questione 28.* Giorn. di matem. **2**, p. 30.

53 *Questioni 30—32.* Giorn. di matem. **2**, p. 62.

54. *Nuove ricerche di geometria pura sulle cubiche gobbe ed in ispecie sulla parabola gobba.* Rend. dell' acc. d. sc. di Bologna 1863—64, p. 25—28. Mem. dell' acc. d. sc. di Bologna 3_2, p. 385—358; Giorn. di matem. **2**, p. 202—210.

55. *Sur le nombre des conique qui satisfont à des conditions doubles.* [Séance 7 novembre 1864.] Comptes rendus Paris **59**, p. 776 –779.

56. *Sopra alcune questioni nelle teoria delle curve piane.* Annali di matem. **6**, p. 153—168.

57. *Sur les hyperboloïdes de rotation qui passent par une cubique gauche donnée.* [Bologne, octobre 1863.] Journ. für Mathem. **63**, p. 141—144.

58. *Sur la surface du quatrième ordre qui a la propriété d'être coupée suivant deux coniques par chacun de ses plans tangents.* [Bologne, 12 février 1864.] Journ. für Mathem. **63**, p. 315—328.

59. *Questions 563, 564 et 565 (Faure) (voir t. XX, p. 56).* Nouv. ann. de mathém. 3_2, p. 21—25.

60. *Question 491 (voir t. XVIII, p. 443).* Nouv. ann. de mathém. 3_2, p. 25—30.

61. *Questions 677, 678 et 679 (Schröter) (voir 2e série, T. II. p. 522).* Nouv. ann. de mathém. 3_2, p. 31—33.

62. *Question 380.* Nouv. ann. de mathém. 3_2, p. 127—129.

63. *Quistioni 33—34.* Giorn. di matem. **2**, p. 91 et **3**, p. 81.

64. *On the geometrical transformations of plane curves.* Report of the meeting held at Bath in sept. 1864 by the Brit. ass. for advancement of science, p. 3—4.

1865.

65. *Quistione 44.* Giorn. di matem. **3**, p. 64—81.

66. *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. Nota II.* Rend. dell' acc. d. sc. di Bologna 1864—65, p. 18—21. Mem. dell' acc. d. sc. Bologna, 5_2, p. 3—35. Giorn. di matem. **3**, p. 269—280, 363—376.

67. *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements.* [Bologne, 10 mai 1864.] Journ. für Mathem. **64**, p. 101—123.

68. *Démonstration géométrique de deux théorèmes relatifs à la surface d'égale pente circonscrite à une conique.* [Bologne, 19 mai 1865.] Nouv. ann. de mathém. **4**, p. 271 –275.

69. *(Marco Uglieni) I principii della prospettiva lineare secondo Taylor* [Ducentola, Settembre 1865.] Giorn. di matem **3**, p. 338—343.

1866.

70. *On the fourteen-points conic.* Messenger of mathem. **3**, p. 13—14.

71. *On normals to conics; a new treatement of the subject.* Messenger of mathem. **3**, p. 88—91.

1867.

72. *Rappresentazione della superficie di Steiner e delle superficie gobbe di 3º grado sopra un piano.* [Séance 24 janvier 1867.] Rend. dell' ist. Lomb. [Milano] **4**, p. 15—23.

73. *Un teorema intorno alle forme quadratiche non omogenee fra due variabili.* [Séance 27 juin 1867]. Rend. dell' ist. Lomb. [Milano] **4**, p. 199—201.

74. *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie.* Rend. dell' acc. d. sc. di Bologna. 1865—66, p. 76—77; 1866—67, p. 72—73. Mem. dell' acc. d. sc. di Bologna **6**, p. 91—136; **7**, p. 29—78.

75. *Extrait d'une lettre à M. Chasles.* [Séance 27 Mai 1867.] Comptes rendus Paris **64**, p. 1079—1080.

1868.

76. *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre.* Journ. für Mathem. **68**, p. 1—133.

77. *Sopra una certa famiglia di superficie gobbe.* [Séance 6 fevrier 1868.] Rend. dell' ist. Lomb. [Milano] $\mathbf{1}_2$, p. 109—112.

78. *Sopra una certa curva gobba di quart' ordine.* [Séance 19 mars 1868.] Rend. dell' ist. Lomb. [Milano] $\mathbf{1}_2$, p. 199—202.

79. *Sull' opera del Prof. Casorati „Teorica delle funzioni di variabili complesse" (vol. I). Relazione.* [Séance 7 mai 1868.] Rend. dell' ist. Lomb. [Milano] $\mathbf{1}_2$, p. 420—424.

80. *Rappresentazione di una classe di superficie gobbe sopra un piano, e determinazione delle loro curve asintotiche.* Annali di matem. $\mathbf{1}_2$, p. 248—259.

1869.

81. *Sulle superficie gobbe di quarto grado.* Rend. dell' acc. d. sc. di Bologna 1868—69, p. 96—97. Mem. dell' acc. d. sc. di Bologna 8_2, p. 235—250.

82. *Sulle trasformazione delle curve iperellitiche.* [Séance 29 avril 1869] Rend. dell' ist. Lomb. [Milano] 2_2, p. 566—571.

83. (Avec F. Casorati.) *Intorno al numero de' moduli delle equazioni e delle curve algebriche di dato genere. Osservazioni.* [Séance 13 Mai 1869.] Rend. dell' ist. Lomb. [Milano] 2_2, p. 620—625.

84. (Avec F. Brioschi.) *Al sig. direttore del Giornale di matematiche ad uso degli studenti delle università italiane.* [Milano, 24 Febbrajo 1869.] Giorn. di matem. **7**, p. 51—54.

1870.

85. *Sulle ventisette rette di una superficie del terzo ordine.* [Séance 24 mars 1870.] Rend. dell' ist. Lomb. [Milano] 3_2, p. 209—219.

86. *Sugl' integrali a differenziale algebrico.* [Séance 8 avril 1869.] Mem. dell' acc. d. sc. di Bologna, $\mathbf{10}_2$, p. 3—33.

87. *Lettera in lode del Piani.* Mem. dell' acc. d. sc. di Bologna $\mathbf{1}_3$, p. 40—41.

88. *Sulle linee di curvatura delle superficie di 2° grado. Memoria letta nella sessione 12 Maggio 1870.* Rend. dell' acc. d. sc. di Bologna 1870—71, p. 86—88. Mem. dell' acc. d. sc. di Bologna $\mathbf{1}_3$, p. 49—67.

89. *Sulla trasformazione razionale di 3° grado nello spazio, la cui inversa è di 4° grado.* Mem. dell' acc. d. sc. di Bologna $\mathbf{1}_3$, p. 365—386.

90. *Observations géométriques à propos de la note de Mr. Brioschi „Sur les tangentes doubles d'une courbe du 4ᵉ ordre avec un point double".* [Milan, avril 1871.] Mathem. Ann. **4**, p. 99—102.

91. *Über Abbildung algebraischer Flächen.* Nachr. d. Gesellsch. d. Wiss. in Göttingen 1871, p. 129—148. Mathem. Ann. **4**, p. 213—230.

92. *Sulla superficie di quart' ordine, dotata di una conica doppia. Nota.* [Séance 9 mars 1871.] Rend. dell' ist. Lomb. [Milano] 4_2, p. 140—144.

93. *Sulla superficie di quart' ordine dotata di una conica doppia. Seconda nota.* [Séance 23 mars 1871.] Rend. dell' ist. Lomb. [Milano] 4_2, p. 159—169.

94. *Sulle trasformazioni razionali della spazio. Nota I.* [Séance 4 mai 1871.] Rend. dell' ist. Lomb. [Milano] 4_2, p. 269—279.

95. *Sulle trasformazioni razionali dello spazio. Nota II.* [Séance 1 juin 1871.] Rend. dell' ist. Lomb. [Milano] 4_2, p. 315—324.

1872.

96. *Commemorazione di Clebsch.* Rend. dell' ist. Lomb. [Milano] 5_2, p. 1041—1042.

97. *Rappresentazione piana di alcune superficie algebriche dotate di curve cuspidali.* [Séance 18 avril 1872.] Mem. dell' acc. d. sc. di Bologna, 2_3, p. 117—128.

98. *Sulle trasformazioni razionali dello spazio.* Annali di matem. 5_2, p. 131—163.

99. *Le figure reciproche nella statica grafica.* Milan (3e éd., Milan, Hoepli 1879).

100. *Corrispondenza.* [Milan, janvier 1872]. Giorn. di matem. **10**, p. 47—48.

1873.

101. *Elementi di geometria projettiva.* Vol. I. Torino.

1874.

102. *Elementi di calcolo grafico.* Torino.

1876.

103. *Sulla corrispondenza fra la teoria dei sistemi di rette e la teoria delle superficie.* [Séance 6 juin 1875.] Mem. dell' acc. dei Lincei [Roma] 3_2, p. 285—307.

104. *Sur les systèmes de sphères et les systèmes de droites.* Rep. of the Brit. ass. 1876 (Glasgow), p. 12—13.

1877.

105. *Osservazioni sull' hexagrammum mysticum.* Atti dell' acc. dei Lincei [Roma], Transunti 1_3, p. 142—143.

106. *Teoremi stereometrici dei quali si deducono le proprietà dell' esagramma di Pascal.* [Séance 8 avril 1877.] Mem. dell' acc. dei Lincei [Roma] 1_3, p. 854—874.

1878.

107. *Über die Polarhexaeder bei den Flächen dritter Ordnung.* [Am 19. Sept. 1877 der Naturforscherversammlung in München vorgelegt.] Mathem. Ann. **13**, p. 301—303.

108. (Avec E. Beltrami.) *Domenico Chelini.* Giorn. di matem. **16**, p. 345.

1879.

109. *Sulle superficie e le curve cha passano pei vertici d' infiniti poliedri formati da piani osculatori di una cubica gobba.* [Séance 17 avril 1873.] Rend. dell' ist. Lomb. [Milano] 12_2, p. 347—352.

110. *Commemorazione di Domenico Chelini* (Atti dell' acc. dei Lincei [Roma], Transunti 3_3, p. 53—57. Bullet. d. sc. mathém. 3_2, p. 228—238.

1881.

111. *Elenco delle pubblicazioni scientifiche di Domenico Chelini.* Collectanea mathematica (Milano), p. XXIX—XXXII.

112. *Sopra una certa superficie di quart' ordine* [Roma, Giugno 1881]. Collectanea mathematica (Milano), p. 413—424.

1883.

113. *Commemorazione del prof. H. J. S. Smith.* Atti dell' acc. dei Lincei [Roma], Transunti 7_3, p. 162—163.

114. *Commemorazione di W. Spottiswoode.* Atti dell' acc. dei Lincei [Roma], Transunti 7_3, p. 308—309.

1884.

115. *Sopra una trasformazione birazionale del 6° grado dello spazio a tre dimensioni, la cui inversa è del 5° grado.* [Lue 28 avril 1884.] Proc. of the London mathem. society **15**, p. 242—246.

116. *On a geometrical transformation of the 4th order, in space of three dimensions, the inverse beeing of the 6th order.* [Lue 8 mai 1884.] Trans. of the Irish ac. [Dublin] **28**, p. 279—284.

1885.

117. *Esempio del metodo di dedurre una superficie da una figura piana.* [Séance 21 avril 1884.] Proc. of the royal soc. of Edinburgh **12**, p. 599—601.

118. *An example of the method of deducing a surface from a plane figure.* [Séance 21 avril 1884.] Trans. of the royal soc. of Edinburgh **32**:2, p. 411—413.

1895.

119. *Question 470.* L'intermédiaire des mathématiciens **2**, p. 20.

1900.

120. *Commemorazione del senatore prof.* EUGENIO BELTRAMI. Atti dell' acc. dei Lincei [Roma], Adunanza solenne 1900, p. 462—472. Rend. del circ. matem. di Palermo **14**, p. 275—289; Giorn. di matem. **38**, p. 355—375; Opere matematiche di EUGENIO BELTRAMI, T. I. p. IX—XXII.

Ist es zweckmäßig, daß mathematische Zeitschriftenartikel datiert werden?

Von G. Eneström in Stockholm.

Während der letzten Jahrzehnte ist das mathematische Forschungsgebiet durch Entdeckung ganz neuer Theorien höchst wesentlich erweitert worden, aber der Zuwachs der Zahl von Arbeitern auf diesem Gebiete scheint noch rascher gewesen zu sein, so daß es in unseren Tagen wohl öfter als früher vorkommt, daß zwei oder mehrere Mathematiker sich mit demselben Gegenstande beschäftigen. Aus diesem Grunde ist es nunmehr nicht selten schwer zu entscheiden, wer zuerst einen neuen Satz aufgestellt oder eine neue Methode entdeckt hat, in zweifelhaften Fällen liegt es wohl dabei am nächsten zu untersuchen, in welcher Schrift der Satz oder die Methode zuerst veröffentlicht worden ist. Aber auch wenn man annähme, daß jeder Forscher sich beeilte, seine Entdeckungen für den Druck zu redigieren, so wäre es dennoch gar nicht sicher, daß die Schrift des ersten Entdeckers auch zuerst zum Abdruck gelangen würde. Im Gegenteil kommt es ziemlich oft vor, daß von zwei Abhandlungen, die gleichzeitig zur Veröffentlichung fertig sind, die eine sogleich erscheint, aber die andere auf Grund ungünstiger Verhältnisse viele Monate unherausgegeben liegt. Unter solchen Umständen muß zuweilen die Entscheidung von Prioritätsfragen besonders schwierig werden, und da Fragen dieser Art nicht nur für die betreffenden Forscher selbst, sondern auch für den Historiker von Interesse sind, so wäre es gut, wenn es ein Verfahren gäbe, wodurch wenigstens eine Verzögerung in betreff der Drucklegung schon fertiger Schriften für die Entscheidung der Prioritätsfrage bedeutungslos würde. Ein solches Verfahren ist anscheinend das Hinzufügen des Datums des Tages, wo eine Schrift beendet worden ist, und dadurch würde also dem ersten Entdecker eines Satzes das ihm gebührende Recht gewährt, vorausgesetzt daß er nicht selbst unterläßt, die Maßregeln zu ergreifen, die ihm dazu helfen können.

Dies überaus einfache Verfahren ist gewiß sehr zu empfehlen, wenn der Leser einer gedruckten Schrift sicher sein kann, daß ihr Inhalt mit dem des entsprechenden Manuskriptes identisch ist, und in der Tat gibt es Verfasser, die beim Korrekturlesen nur die etwaigen Satzfehler ändern. Auf der anderen Seite finden sich, wie jeder Herausgeber einer Zeitschrift aus eigener Erfahrung kennt, viele Verfasser, die in die Korrekturen mehr oder weniger wesentliche Verbesserungen der zum Absatz gelangten Manuskripte anbringen. Zuweilen kommt es auch vor, daß ein Verfasser noch vor dem Absatze seines Artikels den Herausgeber ersucht, gewisse Verbesserungen einzelner Stellen im Manuskripte selbst hineinzutragen, und hier tritt also die Frage auf: „Wie weit dürfen einzelne Stellen einer Schrift verändert werden, ohne daß es nötig ist, von zwei besonderen Redaktionen zu sprechen, und darum auch das ursprüngliche Datum mit einem anderen zu vertauschen?“. Aber auf diese Frage kann selbstverständlich nie eine genügende Antwort gegeben werden, wenn man von einer solchen fordert, daß sie auch in schwierigen Fällen maßgebend sein soll. Anscheinend kleine Änderungen können auf Grund besonderer Umstände wesentliche Bedeutung bekommen, und wenn der Herausgeber einer Zeitschrift versuchen würde zu entscheiden, welche Änderungen als eine neue Bearbeitung zu betrachten wären, so würde er oft finden, daß ihm die für diesen Zweck nötige Sachkunde fehlt. Ich bin selbst nicht ganz ungewöhnt nachträglich meine Artikel zu ergänzen, und ich muß gestehen, daß ich nicht immer imstande wäre zu sagen, welches Datum ich einem gewissen Artikel hinzufügen würde, wenn dies Datum sich auf die *wesentliche* Beendigung des Artikels beziehen sollte.

Aber vorausgesetzt, daß die Frage der Identität einer Schrift wirklich erledigt werden konnte, so ist der Leser dennoch nicht sicher, daß das hinzugefügte Datum richtig sein muß. Viele Verfasser, die ihre Schriften regelmäßig datieren, legen nämlich kein Gewicht auf diese Datierung, und lassen darum das ursprüngliche Datum stehen, unabhängig von den größeren oder kleineren Verbesserungen, die sie später eingefügt oder hinzugefügt haben, und wenn es sich um Gesellschaftsschriften handelt, gibt es oft keinen Redakteur, der kompetent ist zu überwachen, daß die Datierung im Bedarfsfalle geändert wird.

Aus dem soeben gesagten dürfte hervorgehen, daß es nie möglich sein wird, sich auf die Datierungen mathematischer Zeitschriftenartikel zu verlassen, sofern es sich um die Entscheidung einer Prioritätsfrage handelt. Dagegen ist es nicht undenkbar, daß die Zuverlässigkeit der Datierungen durch gewisse Anordnungen grösser gemacht werden kann, und es wäre also in Erwägung zu ziehen, ob es angebracht ist, solche Anordnungen anzuregen. Meiner Ansicht nach ist dies nicht der Fall und zwar wegen der großen Schwierigkeiten, die dabei überwunden werden müßten. In der Tat scheint es, als ob man in gewissen Kreisen die Auffassung hätte, das Datum, das einer gedruckten mathematischen Schrift gegeben worden ist, brauche sich gar nicht auf die Fertigstellung dieser Schrift zu beziehen. Daß es wirklich eine solche Auffassung gibt, erlaube ich mir durch ein ein kleines Beispiel zu belegen.

Im Jahre 1885 wurde vom König Oskar II. von Schweden ein Preis für die Beantwortung einer Frage über das Problem der drei Körper gestiftet, und die Preisschriften sollten vor dem 1. Juni 1888 eingereicht sein, um dann von drei Preisrichtern, darunter K. Weierstrass, geprüft zu werden. Die eine Hälfte des Preises wurde Herrn H. Poincaré zuerkannt, und im 13. Bande der Acta Mathematica erschien im Jahre 1890 eine Arbeit von ihm unter dem Titel: *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. Mémoire couronné du prix de S. M. le roi Oscar II le 21 janvier 1889.* Wenn man überhaupt von der Zuverlässigkeit einer Datierung sprechen darf, wäre es wohl erlaubt zu behaupten, daß die im 13. Bande der Acta Mathematica veröffentlichte Arbeit des Herrn Poincaré am 21. Januar 1889 fertig vorlag — möglicherweise könnte man so weit gehen, daß sie am 1. Juni 1888 fertig gewesen sein mußte. Aber nach einem kürzlich erschienenen Berichte des Herrn Hugo Buchholz,[1]) der mit den betreffenden Verhältnissen sehr vertraut ist, muß die veröffentlichte Arbeit des Herrn Poincaré eine *wesentlich* andere sein als die möglicherweise am 1. Juni 1888 fertige und angeblich am 21. Januar 1889 vorhandene Preisschrift. Nach Herrn Buchholz verhält es sich nämlich so, daß die wirklich eingereichte Preisschrift im Jahre 1889 (die Bogen sind vom 29. April bis 13. November 1889 gedruckt worden) zusammen mit Zusätzen des Verfassers unter dem Titel: *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamiqne. Mémoire couronné du prix de S. M. le roi Oscar II le 21 janvier 1889. Avec des Notes par l'auteur* gedruckt wurde, um in den Acta Mathematica zu erscheinen, aber ihre Ausgabe im letzten Moment — Sonderabzüge waren schon versandt — vermieden wurde, weil man auf einen Fehler in der Preisarbeit aufmerksam ward, der die Grundlagen der gekrönten Arbeit derart berührte, daß er ihre Ausgabe unmöglich machte. An Stelle dieser verfehlten Arbeit redigierte Herr Poincaré eilends nach dem 13. November 1889 eine andere Abhandlung, nämlich die oben erwähnte im Jahre 1890 veröffentlichte (die Bogen sind vom 28. April bis 21. Oktober 1890 gedruckt). Aus dem Umstande, daß die Arbeit *ausdrücklich* als am 21. Januar 1889 gekrönt bezeichnet worden ist, darf man also nicht einmal folgern, daß

1) H. Buchholz, *Poincarés Preisarbeit von 1889/90 und Gyldens Forschung über das Problem der drei Körper in ihren Ergebnissen für die Astronomie;* Physikalische Zeitschr. 5, 1904, 180—186.

Herr Poincaré vor dem 21. Januar 1889 die darin enthaltenen Resultate gefunden hatte. Wenn aber in einem solchen Falle (mit Weierstrass selbst als offiziell angezeigtem[1]) Preisrichter!) die Datierung wesentlich irreleitend ist, so ist es wohl erlaubt zu behaupten, daß man in einigen Kreisen ähnlichen Angaben überhaupt keine Bedeutung zuerkennt.

Aber wenn dies der Fall ist, lohnt es wohl kaum der Mühe zu versuchen, die Datierungen mathematischer Zeitschriftenartikel zuverlässiger zu machen, sondern es wäre besser, wenn solche Datierungen allmählich in Fortfall kämen. Wenn es einem Verfasser beliebt, kann er ja an passender Stelle angeben, wann er ein gewisses Resultat, das er als wichtig betrachtet, zuerst gefunden hat, und diese Angabe kann zuweilen von größerem Interesse sein als die, welche die Datierung der Schrift selbst enthält. Auch eine solche Angabe kann gewiß unzuverlässig sein, aber die Wahrscheinlichkeit dafür ist viel geringer als in betreff der Datierung eines Zeitschriftenartikels.

---

1) Weierstrass lehnte später die Beteiligung als Preisrichter über die Poincarésche Arbeit ab.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik".

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen".
BM = Bibliotheca Mathematica.

1 : 12, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 265. — **1 : 15,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 323. — **1 : 22, 29, 34,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 265—266. — **1 : 36, 64,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 137. — **1 : 103,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 266. — **1 : 135,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 266; **3**$_3$, 1902, S. 137. — **1 : 144, 155, 169, 171,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 137—138. — **1 : 190,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 266. — **1 : 195,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 56. — **1 : 197, 202,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 266. — **1 : 207,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 283. — **1 : 225, 234,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 138. — **1 : 255,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 238. — **1 : 272,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 396. — **1 : 283,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 499. — **1 : 284, 321,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 266—267. — **1 : 370,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 319. — **1 : 383,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 267. — **1 : 395,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 323. — **1 : 400,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 267. — **1 : 429,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 324. — **1 : 432,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 267. — **1 : 434—435,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 396—397. — **1 : 436,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 138. — **1 : 437, 440,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 267. — **1 : 457,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 238. — **1 : 463,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 139, 324. — **1 : 466,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 397. — **1 : 467, 469,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 267. — **1 : 475,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 267—268; **3**$_3$, 1902, S. 139; **4**$_3$, 1903, S. 283 — **1 : 476,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 268. — **1 : 508,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 68. — **1 : 510,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 314. — **1 : 519—520,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 239. — **1 : 537, 540, 542,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 268. — **1 : 622,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 143. — **1 : 641,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 139. — **1 : 661,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 499. — **1 : 662,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 499; **3**$_3$, 1902, S. 139. — **1 : 663,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 405. — **1 : 671,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 499. — **1 :** 687—689, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 143—144; **4**$_3$, 1903, S. 205—206. — **1 : 694,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 499; **4**$_3$, 1903, S. 284. — **1 : 704, 706, 708, 714, 735, 736, 744, 748,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 499—500. — **1 : 749,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 268. — **1 : 756, 757, 767,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 500—501. — **1 : 794,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 139. — **1 : 804, 805, 807, 808, 812, 823, 852,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 268—269. — **1 : 853,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 501. — **1 : 854,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 501; **3**$_3$, 1902, S. 324; **4**$_3$, 1903, S. 206. — **1 : 855,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 501.

---

2 : 7, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 351. — **2 : 8, 10,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 501—502.

---

2 : 14. In einer mir unzugänglichen Schrift von G. Milanesi: *Documento inedito intorno a Leonardo Fibonacci* (Rom 1867) soll eine jetzt verschollene Arbeit von Leonardo Pisano: *Libro di mercatanti detto di minor guisa* zitiert werden (siehe M. Lazzarini, Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. **7**, 1904, S. 4).

G. Eneström.

---

2 : 14—15, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144. — **2 : 20,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **2 : 25,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 274. — **2 : 31,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351—352; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239—240. — **2 : 34,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144. — **2 : 37,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2 : 38,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 39,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2 : 41,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352.

---

2 : 53. Daß Leonardo Pisano nicht mit dem Jahre 1228 wie ein Meteor verschwunden ist, scheint aus einem von F. Bonaini herausgegebenen Aktenstück: *Memoria unica sincrona di Leonardo Fibonacci nuovamente trovata* (Pisa 1858, XIV S. 8°; Sonderabzug aus dem Giornale storico degli archivi toscani **1**, 1858) hervorzugehen. Nach diesem Aktenstücke, das aus der Zeit 1233—1241 herstammen dürfte, bekam Leonardo (siehe a. a. O. S. VIII) von der Stadt Pisa als Anerkennung seiner Verdienste eine jährliche Pension von 20 Liren 'et amisceria consueta'. G. Eneström.

---

2 : 57, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 59,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2 : 63,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 206. — **2 : 70,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 417. — **2 : 73, 82, 87, 88, 89, 90, 92,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502—503. — **2 : 97,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2 : 98,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 269—270. — **2 : 100,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2 : 101,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325. — **2 : 104—105,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 397—398. — **2 : 111,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 116,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2 : 122,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503—504. — **2 : 126, 127,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2 : 128,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2 : 132,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 515—516. — **2 : 143,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2 : 157, 158,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 163, 166,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2 : 175,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2 : 210,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352—353. — **2 : 218,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 284. — **2 : 219,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353. — **2 : 229, 242, 243,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504—505. — **2 : 253,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353. — **2 : 273,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 505. — **2 : 274,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325. — **2 : 282, 283,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353—354. — **2 : 284, 286, 287, 289, 290, 291,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506—507. — **2 : 296,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354. — **2 : 313,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2 : 317,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 69. — **2 : 328,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 285. — **2 : 334,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2 : 353,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87. — **2 : 358, 360,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87. — **2 : 381,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2 : 385,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 81; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 207. — **2 : 386, 395, 401, 405, 425,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507—508.

---

2 : 429. Hier ist eine kleine Notiz über die „Regula cecis“ eingeschaltet, und zwar aus dem Grunde, weil Chr. Rudolff diese Art von Aufgaben zuerst im Drucke bekannt machte. Wo die Notiz am besten eingeführt werden soll, kann ja eine Geschmacksache sein, aber jedenfalls wäre es von Interesse, auch etwas über die ältere Geschichte der „Regula cecis“ zu erfahren. In erster Linie wäre teils auf **1** : 787—788, wo eine Aufgabe dieser Art bei Alkuin erwähnt wird, teils auf **2** : 50, wo über Leonardo Pisanos Behandlung einer ähnlichen Aufgabe berichtet wird, hinzuweisen. Weiter sollte M. Curtzes Abhandlung *Ein Beitrag zur Geschichte der Algebra in Deutschland im fünfzehnten Jahrhundert* (Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **7**, 1895) zitiert werden; hier erwähnt Curtze S. 35 eine Handschrift aus dem dreizehnten oder vierzehnten Jahrhundert (Cod. lat. Monac. 14684, Bl. 30—31), wo eine gereimte Auflösung (abgedruckt in der Biblioth. Mathem. 1895, S. 78, 79) der

Aufgabe vorkommt, und bringt zum Abdruck eine andere Handschrift aus der Mitte des fünfzehnten Jahrhunderts (Cod. lat. Monac. 14908, Bl. 40^b ff.), worin die Aufgabe vermittels der „Regula falsi" gelöst wird. Diese Lösung gibt freilich immer ein System von Zahlen, die den Bedingungen der Aufgabe genügen; daß man aber auf diese Weise nicht immer ganzzahlige Lösungen bekommt (wie Curtze nach einer Bemerkung auf S. 48 seiner Abhandlung zu glauben schien), sieht man am leichtesten, wenn man in betreff des ersten Beispieles von den zwei Ansätzen 4, 4, 12 und 1, 3, 16 ausgeht. Noch ungenügender ist die Lösung, die Gottfried Wolack in Erfurt etwa um dieselbe Zeit (1468) angab (siehe E. Wappler, *Zur Geschichte der Mathematik im fünfzehnten Jahrhundert;* Zeitschr. für Mathem. **45**, 1900, Hist. Abt. S. 51); hier wird ohne weiteres darauf verzichtet, ganzzahlige Werte zu bekommen, und die Aufgabe unrichtig nach der Gesellschaftsrechnung behandelt. Auf diese Weise erhält Wolack aus den Gleichungen

$$ax + by + cz = 100,$$
$$x + y + z = 100$$

die Werte $x = \dfrac{100a}{a+b+c}$, $y = \dfrac{100b}{a+b+c}$, $z = \dfrac{100c}{a+b+c}$,
was ja voraussetzt, daß

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} = 1,$$

obgleich gerade in dem von Wolack behandelten Spezialfalle

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} = \frac{3}{2}$$

ist. Aus der Zeit vor Rudolff rührt wahrscheinlich noch die richtige Lösung der „Regula cecis" in der Algebra des Initius Algebras her (siehe Curtze, *Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance;* Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissensch. **13**, 1902, S. 571—574).

G. Eneström.

---

2 : 430, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 145. — **2 : 440,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 285. — **2 : 442,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325. — **2 : 449,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2 : 454,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 242. — **2 : 474, 480,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140—141. — **2 : 481,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 508. — **2 : 482,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 508; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 240. — **2 : 484,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 486, 489, 490,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2 : 497,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87. — **2 : 509,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270, 509. — **2 : 510,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2 : 512,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 514, 516, 517,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2 : 530,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354—355; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 532, 535, 541, 548, 549,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509—510. — **2 : 550,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 355. — **2 : 554,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2 : 555, 565, 567, 568,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 285—286. — **2 : 569,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2 : 572—573,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 576,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 355—356. — **2 : 579,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 145. — **2 : 580—581,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 207. — **2 : 582,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2 : 583,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 356. — **2 : 585,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 69—70. — **2 : 592,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 594,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270. — **2 : 597,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 599—600,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 602, 603—604,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270—271. — **2 : 611,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 356—357. — **2 : 612,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 613,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357. — **2 : 614, 620,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 621, 623,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146—147. — **2 : 638,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147. —

2:642, 643, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271. — **2:655,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2:656,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 286 — **2:659, 660,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 147—148. — **2:665,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271.

---

2 : 669. Die von Herrn Cantor als rätselhaft bezeichnete Schwentersche Angabe, der Satz für die Dreiecksfläche stamme aus der „Geometria Jordani" ist insofern richtig, als ein Beweis des Satzes tatsächlich einer dem Jordanus Nemorarius zugeschriebenen Schrift, nämlich *De ponderibus*, angehängt ist (vgl. A. A. Björnbo, Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissensch. **14**, 1902, S. 147—148). Ob dieser Anhang wirklich von Jordanus Nemorarius herrührt, wird man wohl niemals feststellen können. G. Eneström.

2:674, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 88. — **2:683,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148. — **2:693,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 287. — **2:700, 701, 703, 704, 705,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271—273. — **2:719,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2:720,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 287. — **2:721,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2:742,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273; **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2:746,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2:747,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 173; **2**$_3$, 1901, S. 225. — **2:749,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 88. — **2:766,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2:767,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148, 357—358. — **2:770,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 208. — **2:772, 775,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 358—359. — **2:777,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148; **3**$_3$, 1902, S. 204. — **2:783,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359; **4**$_3$, 1903, S. 88—89. — **2:784,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148. — **2:802,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 208. — **2:812,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 37. — **2:820, 825,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148.

---

2 : 832. Herr Cantor macht darauf aufmerksam, daß man die Entstehung der *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* des Cavalieri nach rückwärts bis zum Jahre 1626 verfolgen kann. Dieser Umstand ist gewiß von Interesse, aber ebenso großes Interesse bietet es meines Erachtens dar, die Entstehung des Cavalierischen Gesamtheitsbegriffes ('omnes lineae') noch weiter nach rückwärts zu verfolgen und dies gelingt bis zum Jahre 1621. Am 15. Dezember 1621 schrieb nämlich Cavalieri an Galilei (siehe *Le opere di Galileo Galilei*, Editione nazionale, Vol. **13**, Firenze 1903, S. 81): 'Se in una figura piana s'intenderà tirata una linea retta come si voglia, et in quella poi tirateli parallele tutte le linee possibili a tirarsi, chiamo queste linee così tirate tutte le linee di quella figura; e se in una figura solida s'intenderano tirati tutt'i piani possibili a tirarsi paralleli ad un certo piano, questi piani gli chiamo tutt'i piani di quel solido. Hora vorrei sapere se tutte le linee d'un piano a tutte le linee d'un altro piano habbino proportione, perche potendosene tirare più e più sempre, pare che tutte le linee d'una data figura sieno infinite, e però fuor della diffinitione delle grandezze che hano proportione; ma perchè poi, se si aggrandisse la figura, anco le linee si fano maggiori, essendovi quelle della prima et anco quelle di più che sono nell'eccesso della figura fatta maggiore sopra la data, però pare che non sieno fuora di quella diffinitione: però desidero esser da V. S. sciolto di questo dubbio'. So weit bekannt ist, bekam Cavalieri keine Antwort auf seine Frage, aber einige Monate später scheint er von der Zulässigkeit seines Gesamtheitsbegriffes überzeugt zu sein, denn am 22. März 1622 spricht er in einem Briefe an Galilei (siehe a.a.O., S. 86—87) vom 'bel principio che tutte le linee di due figure piane e tutte le superficie

di due figure solide habino proportione' und fährt fort: 'il che parmi facile da dimostrare; perchè, multiplicando l'una delle dette figure, si multiplicano anco tutte le linee nelle piane e tutte le superficie nelle solide, si che tutte le linee d'una figura overo superficie, possono, cresciute, avanzare tutte le linee, o superficie, dell' altre, e così sarano ancor esse fra le grandezze ch' hanno proportione'. Er fügt noch hinzu: 'come io pigli poi questo termine (tutte le linee d'una figura piana, o tutte le superficie d'un solido)', das habe er in einem Traktat gezeigt, den er gleichzeitig an Galilei übersende; hieraus geht also hervor, daß Cavalieri schon 1622 eine Schrift über seine Indivisibilienmethode redigiert hatte. Von diesem Traktat spricht Cavalieri noch in seinen Briefen an Galilei vom 9. April und 16. August 1623 (siehe a. a. O., S. 114, 123). Etwa vier Jahre später scheint Cavalieri eine ausführlichere Abhandlung über seine Methode verfaßt zu haben, und diese sandte er im November 1627 an G. Ciampoli. An Galilei schrieb Cavalieri am 17. Dezember 1627 (siehe a. a. O., S. 381), er habe sich auch in dieser Abhandlung des Gesamtheitsbegriffes ('fondamento che chiamo tutte le linee di una figura piana o tutti i piani d'una solida') bedient, weil dieser Begriff ihm hinreichend klar und fest begründet scheine.

G. Eneström.

---

2 : 840, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148—149. — **2 : 843,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 328, — **2 : 856, 865,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149. — **2 : 876, 878, 879,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511. — **2 : 891,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2 : 898,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 37, 208. — **2 : 901,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511.

---

2 : 919. Außer den zwei im Text erwähnten Briefen von Hudde gibt es noch einen dritten, ebenfalls an Schooten gerichtet, der gedruckt worden ist, und zwar in französischer Übersetzung. Dieser vom 21. November 1659 datierte Brief wurde zuerst 1713 in einer holländischen Zeitschrift (Journal litéraire in Haag) veröffentlicht, und ist später S. 272—274 der Ausgabe des *Commericum epistolicum* von Biot und Lefort (1856) abgedruckt worden; ein anderer Abdruck findet sich im *Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern, herausgegeben von* C. I. Gerhardt, Band I (Berlin 1899), S. 234—237. Hudde gibt hier eine Lösung des Tangentenproblems für algebraische Kurven vermittels derselben Methode, deren er sich in seiner Schrift *De maximis et mininis* bedient hatte, und die also mit dem Sluseschen Verfahren nahe verwandt ist. Ist $f(x, y) = 0$ die Gleichung der gegebenen algebraischen Kurve, so kann man die Huddesche Regel so ausdrücken, daß die Subtangente

$$= -\frac{af(x,y) + y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}{bf(x,y) + x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}\, x$$

ist, wo a und b zwei willkürliche Konstanten sind. Setzt man $a = b = 0$, erhält man die gewöhnliche Formel.

G. Eneström.

---

2 : VIII (Vorwort), siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142. — **2 : IX, X** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511—512.

3:9, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359. — **3:10,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 518. — **3:11,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3:12, 17,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512. — **3:22,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3:24,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3:25,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209, 399. — **3:26,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359. — **3:45—48, 49, 50,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512—513. — **3:70,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 360. — **3:100,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149. — **3:112,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209—210. — **3:116,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3:117,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 518. — **3:123,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 399. — **3:124,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 407—408; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 400. — **3:126,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 288. — **3:131,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 210. — **3:151,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326. — **3:167, 172—173,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 400. — **3:174,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149—150. — **3:183,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 432. — **3:188,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 241. — **3:201,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3:207,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 519. — **3:215,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150. — **3:218,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3:220,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326. — **3:224,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3:225, 228,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150. — **3:232,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514.

3:244—245. Die Angabe, daß die *Analyse des infiniment petits* in wiederholten Auflagen 1716, 1720, 1768 gedruckt worden ist, hat Herr Cantor offenbar ohne weiteres aus Poggendorffs *Biographisch-literarischem Handwörterbuch* I, 1146 entnommen. Indessen habe ich die angebliche Auflage von 1720 in keiner zuverlässigen bibliographischen Arbeit erwähnt gefunden, und da in eben demselben Jahre eine neue Ausgabe von Hôpitals *Traité analytique des sections coniques* erschien, ist es wohl anzunehmen, daß hier eine Verwechselung vorliegt. Auf der anderen Seite ist die Angabe der wiederholten Auflagen der *Analyse des infiniment petits* insofern unvollständig, als noch im Jahre 1784 eine solche in Paris erschien (vgl. J. W. Müller, *Auserlesene mathematische Bibliothek,* Nürnberg 1820, S. 42; andere Bibliographen geben als Druckjahr 1780 an). Von der zweiten Auflage, die nach Poggendorff und ein paar anderen Bibliographen 1716 erschien, gibt es Exemplare mit dem Druckjahr 1715.

Auf den Erfolg der *Analyse des infiniment petits* weisen aber nicht nur die neuen Auflagen, sondern auch die Übersetzungen hin. Daß eine englische Übersetzung von E. Stone im Jahre 1730 erschien, hat Herr Cantor selbst S. 737 angegeben. Dazu kommt noch eine lateinische Übersetzung, die zuerst in Wien 1764, dann nochmals in Wien 1790 herausgegeben wurde (vgl. J. W. Müller, a. a. O. S. 42).

In betreff der Bemerkung des Herrn Cantor, daß die *Analyse des infiniment petits* lange Zeit das einzige Lehrbuch der Differentialrechnung war, kann darauf hingewiesen werden, daß schon 12 Jahre nach der Veröffentlichung des Buches ein anderes französisches Lehrbuch erschien, das einen Abriß der Differentialrechnung enthielt, nämlich *L'analyse démontrée* von Ch. Reyneau. Freilich hat Johann Bernoulli nicht mit Unrecht in seinem Briefe an Leibniz vom 8. April 1711 hervorgehoben, daß Reyneau die neue Rechnung nicht gründlich genug studiert hatte, um ein wirklich gutes Lehrbuch schreiben zu können.

G. Eneström.

3:246, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151. — **3:250,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3:303,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 155. — **3:330—331,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 241—242.

---

3 : 337. Daß FRANCIS ROBARTES nicht mit FRANCIS ROBERTS identisch ist, scheint daraus hervorzugehen, daß diese in dem 1787 erschienenen Generalregister der 70 ersten Bände der Philosophical transactions als zwei Persönlichkeiten aufgeführt werden. Auf der anderen Seite hat FRANCIS ROBARTES wirklich eine mathematische Schrift herausgegeben, nämlich *Concerning the proportion of mathematical points to each other.* By the honourable FRANCIS ROBARTES, esq; vice-president of the Royal soc. (Philos. trans. **27** n⁰ 334, 1712, S. 470—472). Freilich wird durch diese Schrift die CANTORsche Bemerkung, daß ROBARTES nur sehr nebensächlich als Mathematiker gelten kann, durchaus bestätigt, denn der Verfasser sucht darin zu beweisen, daß das Verhältnis zweier Punkte zueinander im allgemeinen nicht gleich 1 gesetzt werden darf, sondern sogar eine unendlich große Zahl sein kann. Handelt es sich z. B. um den Berührungspunkt eines Kreises und dessen Tangente, so ist die Größe dieses Punktes nach ROBARTES vom Durchmesser des Kreises abhängig.

G. ENESTRÖM.

---

3 : 447, 455, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151. — **3 : 473,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 154—155; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401. — **3 : 477, 479,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151—152. — **3 : 507,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 71—72. — **3 : 521,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3 : 535,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401.

---

3 : 536. Die erste Auflage der *Logica demonstrativa* von G. SACCHERI erschien nicht 1701 oder 1692, sondern 1697; siehe G. VAILATI, *Di un' opera dimendicata del P. GEROLAMO SACCHERI („Logica demonstrativa", 1697);* Rivista filosofica 1903.

---

3 : 565, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326—327. — **3 : 571,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 72. — **3 : 578,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327. — **3 : 614,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 89—90. — **3 : 636—637,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441.

---

3 : 646—647. Die Rekursionsformel für die BERNOULLIschen Zahlen, welche Herr CANTOR als einen von MOIVRE vollzogenen Fortschritt bezeichnet, gehört sicherlich JAKOB BERNOULLI selbst an. JAKOB BERNOULLI sagt nämlich: „sunt autem hi coefficientes ita comparati, ut singuli cum suis ordinis coefficientibus complere debeant unitatem" und diese Worte enthalten ja, wie Herr CANTOR S. 347 richtig angedeutet hat, die Rekursionsformel

$$1 = \frac{1}{c+1} + \frac{1}{2} + \frac{c}{2}A + \frac{c\,(c-1)\,(c-2)}{2\,.\,3\,.\,4}B + \frac{c\,(c-1)\,(c-2)\,(c-3)\,(c-4)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}C + \dots$$

MOIVRE, der übrigens ebensowenig wie JAKOB BERNOULLI die Rekursionsformel ausschreibt, schlägt ein anderes Verfahren vor, um die Zahlen $A, B, C, \dots$ zu berechnen, das er etwas bequemer findet; er setzt nämlich nacheinander $c = 2, 4, 6, \dots$, und erhält dadurch zuerst

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + A, \quad \text{oder} \quad A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

dann

$$1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{4}{2}A + B, \quad \text{oder} \quad B = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{4}{2}A,$$

weiter

$$1=\frac{1}{7}+\frac{1}{2}+\frac{6}{2}A+\frac{6.5.4}{2.3.4}B+C,\quad \text{oder}\quad C=\frac{1}{2}-\frac{1}{7}-\frac{6}{2}A-\frac{6.5.4}{2.3.4}B,$$

usw. Aber dies Verfahren kann wohl kaum ein Fortschritt genannt werden.

G. Eneström.

---

3 : 652, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446.

---

3 : 652. Im Anschluß an den Bericht über Stirlings Formel für die Summe einer Anzahl von Logarithmen wäre es angezeigt mitzuteilen, daß die bekannte Formel dieser Art, die man jetzt ziemlich allgemein (siehe z. B. A. Markoff, *Differenzenrechnung,* deutsche Übersetzung, Leipzig 1896, S. 135; *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften,* Band I, S. 931) gewohnt ist als die Stirlingsche Formel zu bezeichnen, nämlich

$$\log(1.2.3\ldots x)=\frac{1}{2}\log 2\pi+\left(x+\frac{1}{2}\right)\log x-x+A_2\frac{1}{x}+A_4\frac{1.2}{x^2}+\ldots,$$

zuerst von Moivre im Anhange zu den *Miscellanea analytica* (1730) angegeben und hergeleitet wurde. Moivre berichtet selbst, daß Stirling ihm brieflich die Formel

$$\log(1.2.3\ldots x)=\frac{1}{2}\log 2\pi+\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(x+\frac{1}{2}\right)-\left(x+\frac{1}{2}\right)$$
$$-\frac{1}{2.12\left(x+\frac{1}{2}\right)}+\frac{7}{8.360\left(x+\frac{1}{2}\right)^3}-\ldots$$

mitgeteilt hatte, und daß er selbst dadurch angeregt wurde, die neue Formel auf einem ganz anderen Wege aufzufinden.

G. Eneström.

---

3 : 660, 667, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441—442.

---

3 : 667. Vor 15 Jahren bemerkte ich in meiner kleinen Notiz *Sur le premier emploi du symbole π pour 3,14159 . . .* (Biblioth. Mathem. 1889, S. 28), daß Euler sich des Buchstabens π für den Umfang des Kreises mit Durchmesser $=1$ schon in den Comment. acad. sc. Petrop. 9, 1737 (gedruckt 1744) bediente, und mit Bezugnahme auf diese Bemerkung hat F. Rudio in seiner Schrift *Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung* (Leipzig 1892), S. 53 angegeben, daß Euler wohl daselbst zum ersten Male den Buchstaben π in dieser Bedeutung benutzte; dieselbe Angabe hat auch Herr Cantor. Indessen gibt es eine frühere Schrift von Euler, wo das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser mit π bezeichnet wird, nämlich die *Mechanica sive motus scientia analytice exposita* (Petropoli 1736). Dort findet sich nämlich S. 115 des 1. Bandes der Passus: „denotante igitur $1:\pi$ rationem diametri ad peripheriam, erit $AMC=\frac{1}{2}a\pi$“, und ebenso S. 119: „si enim est $m=\frac{1}{2}$, terminus respondens invenitur $\frac{\pi}{2}$, denotante $1:\pi$ rationem diametri ad peripheriam“. Die Bezeichnung wird dann

S. 120, 122, 123 angewendet, worauf am Ende der S. 123 zum dritten Male die Erklarung; „denotantibus . . . $\pi : 1$ rationem peripheriae ad diametrum“ folgt; später wird die Erklärung wenigstens achtmal wiederholt, nämlich Band I, S. 251, 260, 267 und Band II, S. 70, 284—285, 304, 411, 492.

G. Eneström.

---

3 : 686. Die Angabe, daß 1737 der Endzeitpunkt der von Maclaurin im *Treatise of fluxions* benutzten Literatur sein dürfte, ist insofern zu modifizieren, als Maclaurin im Art. 906 die *Hydrodynamica* von Daniel Bernoulli zitiert, die bekanntlich 1738 erschien. G. Eneström.

---

3 : 689, 695, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 442. — **3 : 750, 758,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 446.

---

3 : 759. Wenn Herr Cantor sagt, daß Eulrr in seiner *Mechanica* (1736) den Satz von den homogenen Funktionen *andeutete,* so ist diese Ausdrucksweise gewiß richtig inbetreff des zitierten § 106 (= S. 49 des Originals), denn dort gibt Euler den Satz nur für den Spezialfall $n = \frac{1}{2}$ an. Dagegen ist er am Ende des 2. Bandes der *Mechanica* (S. 464) noch einmal auf den Satz zurückgekommen, und an dieser Stelle wird derselbe nicht angedeutet, sondern bestimmt ausgesprochen. Euler sagt nämlich: „aequationis

$$P\,dx = R\,dz + Q\,dy$$

haec erit proprietas ut sit

$$Rz + Qy = n\int P\,dx\text{“},$$

und diese Worte enthalten ja genau den Satz

$$z\frac{\partial \varphi}{\partial z} + y\frac{\partial \varphi}{\partial y} = n\varphi,$$

wenn man $d\varphi$ statt $P\,dx$ setzt. G. Eneström.

---

3 : 760, 766, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 446—447. — **3 : 774, 798,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 442—443. — **3 : 845,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 447; **3**$_3$, 1902, S. 327—328. — **3 : 848, 881,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 443. — **3 : 882,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 447. — **3 : 890,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 401. — **3 : 892,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 143. — **3 : IV** (Vorwort), siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 443.

Anfragen.

116. Cavalieri und der Satz von der Fläche einer Spirallinie. Um zu erklären, wie es möglich war, daß sowohl Cavalieri in der *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (1635) als Grégoire de St.-Vincent in dem *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni* (1647) die Quadratur der Spirallinie auf die Auffindung der Fläche eines Parabelabschnittes zurückführen konnten, stellt Herr Cantor zuerst das Dilemma auf: entweder ist das Verfahren von GRÉGOIRE DE ST.-VINCENT dem CAVALIERI oder umgekehrt von CAVALIERI dem GRÉGOIRE DE ST.-VINCENT entnommen. Indessen gibt Herr CANTOR noch eine dritte Möglichkeit an, nämlich daß beide Männer, jeder für sich, auf dasselbe Verfahren kamen, verzichtet aber darauf, sich für irgend eine der drei Möglichkeiten zu entscheiden.

Meines Erachtens ist die dritte Möglichkeit an sich die wahrscheinlichste, und zwar aus dem von Herrn ZEUTHEN S. 42 und 291 seiner *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert* angeführten Grunde, aber am besten wäre es natürlich, wenn man darlegen könnte, daß GRÉGOIRE de ST.-VINCENT und CAVALIERI tatsächlich das Verfahren unabhängig voneinander gefunden hatten. Für diesen Zweck ist es nicht ohne Interesse zu bemerken, daß CAVALIERI schon am 9. April 1623 einen Aufsatz über Spirallinien an GALILEI sandte (siehe *Le opere di GALILEO GALILEI.* Edizione nazionale, Vol. **13**, Firenze 1903, S. 114), und daß er vor dem 28. Mai 1625 an C. MARSILI eine von der ARCHIMEDESschen abweichende Herleitung der Fläche der Spirallinie schickte (siehe a. a. O., S. 273), während GRÉGOIRE DE ST.-VINCENT erst gegen Ende des Jahres 1625 nach Rom gelangte (siehe H. BOSMANS, *Documents inédits sur GRÉGOIRE DE ST.-VINCENT;* Annales de la société scientifique de Bruxelles **27** : 2, 1903, S. 7 des Sonderabzuges).

Ist die Abhandlung, die CAVALIERI 1625 an MARSILI schickte, noch aufbewahrt, und kann man durch dieselbe oder durch den an GALILEI übersandten Aufsatz bestätigen, daß CAVALIERI schon am Anfange des Jahres 1625 die Quadratur der Spirallinie auf die Auffindung der Fläche eines Parabelabschnittes zurückgeführt hatte? Hat man auf der anderen Seite irgend einen Anlaß anzunehmen, daß den italienischen Mathematikern, mit denen GRÉGOIRE DE ST.-VINCENT 1625—1627 in Rom verkehrte, die CAVALIERIschen Untersuchungen über die Spirallinie bekannt waren? G. ENESTRÖM.

---

117. Über die Geschichte einer Summenformel, die mit der Eulerschen verwandt ist. Es wird zuweilen behauptet (vgl. R. REIFF, *Geschichte der unendlichen Reihen,* Tübingen 1889, S. 84), daß die von STIRLING in seiner *Methodus differentialis* (1730) für die Summe der Logarithmen beliebig vieler Zahlen in arithmetischer Progression angegebene Formel ein Spezialfall der EULERschen Summenformel ist. Da aber in der STIRLINGschen Formel nicht die BERNOULLIschen Zahlen, sondern (vgl. z. B. REIFF, a. a. O. S. 78) die Zahlen $\frac{7}{360}$, $\frac{31}{1260}$, $\frac{127}{1680}$, $\frac{511}{1188}$, etc. als Koeffizienten auftreten, so kann diese Behauptung offenbar nicht ganz exakt sein. Auf der anderen Seite ist die STIRLINGsche Formel ein direkter Spezialfall einer anderen allgemeinen Summenformel, die MACLAURIN in seinem *Treatise of fluxions* (1742) § 350 und § 832 angegeben hat, und die in moderner Bezeichnung auf folgende Weise ausgedrückt werden kann:

$$h\sum f(x) = \int f\left(x - \frac{h}{2}\right)dx + \left(\frac{h}{2}\right)^2 C_2 f'\left(x - \frac{h}{2}\right) + \left(\frac{h}{2}\right)^4 C_4 f'''\left(x - \frac{h}{2}\right) + \ldots;$$

die Koeffizienten C_2, C_4, . . . sind dieselben, die in der Kosekantenreihe vorkommen.

Diese Summenformel scheint im 18. Jahrhundert wenig beachtet worden zu sein, und im 19. Jahrhundert ist sie mehr als einmal neu entdeckt worden. So z. B. hat S. Spitzer dieselbe in seinem Artikel: *Formeln für die Summen- und Differenzenrechnung* (Arch. der Mathem. **24**, 1855, S. 97—109) als neu aufgestellt, und nach einem Referate in den Fortschr. d. Mathem. **15** (1883), S. 239, ist sie in einem Aufsatze von G. F. Hardy *On some formulae for approximate summation* vom Jahre 1883 hergeleitet worden, ohne daß ihr Vorkommen bei Maclaurin erwähnt wird. Ob sie auch mit der von Herrn G. Bohlmann in der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. **1**, S. 879 zitierten J. W. Lubbockschen Summenformel aus dem Jahre 1830 identisch ist, habe ich nicht entscheiden können, da mir die einschlägige Literatur nicht zugänglich ist.

Es wäre von Interesse, eine Geschichte der fraglichen Maclaurinschen Summenformel zu haben. G. Eneström.

Rezensionen.

H. G. Zeuthen. Forelaesninger over Mathematikens Historie. II. 16de og 17de Aarhundrede. Kjöbenhavn, Höst 1903. 8⁰, (3) + VI + (2) + 612 S.

H. G. Zeuthen. Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert. Deutsche Ausgabe unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von **R. Meyer.** Leipzig, Teubner 1903. [= Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften **17.**] 8⁰, VIII + 434 S. Mark 16.

Gleichzeitig sind dänisch und deutsch erschienen die Resultate der mathematisch-historischen Untersuchungen, mit denen sich Herr ZEUTHEN seit vielen Jahren beschäftigt hat. Die Titel der zwei Ausgaben unterscheiden sich insofern, als das dänische Original als Fortsetzung der Vorlesungen des Verfassers über *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter* (1893, deutsch 1896) bezeichnet wird, während in betreff der deutschen Übersetzung eine solche Angabe fehlt. Wahrscheinlich hängt dieser Unterschied ganz einfach davon ab, daß die deutsche Übersetzung jetzt in einem anderen Verlage als früher erscheint, aber auf der anderen Seite könnte man sich wirklich denken, daß der Verfasser unsicher war, ob er seine neue Arbeit als eine Fortsetzung der älteren betrachten sollte oder nicht, und darum den zwei Ausgaben etwas abweichende Titel gegeben hat. Vom chronologischen Gesichtspunkte aus ist die neue Arbeit gewiß eine Fortsetzung der älteren, denn jene setzt fort, wo diese endet, aber in betreff der Darstellungsweise findet ein nicht unbedeutender Unterschied statt. Damit habe ich nicht sagen wollen, daß der Verfasser bei seiner Behandlung des Stoffes jetzt wesentlich andere Grundsätze wie früher angewendet hat; vielmehr denke ich in erster Linie daran, daß der Stoff selbst so verschieden gewesen ist, daß schon dadurch eine nicht unbedeutende Modifikation der Darstellungsweise angezeigt wurde. Hierzu kommt noch, daß die fortgesetzten historischen Forschungen des Verfassers ohne Zweifel einen vorteilhaften Einfluß auf seine Behandlung des vorhandenen Materials gehabt haben.

Die jetzt vorliegende Arbeit des Herrn ZEUTHEN bringt zuerst (S. 1—80*) einen historisch-literarischen Überblick der mathematischen Forschungen des 16. und 17. Jahrhunderts; die Ordnungsfolge ist teils chronologisch, teils geographisch. Hier werden viele biographische Notizen mitgeteilt und ziemlich ausführlich über den persönlichen und brieflichen Verkehr der behandelten

*) Ich zitiere immer in dieser Besprechung die Seitenzahlen der deutschen Ausgabe, sofern nicht ausdrücklich auf das dänische Original verwiesen wird.

Mathematiker berichtet, sowie über die äußeren Umstände, denen man einen Einfluß auf die mathematischen Entdeckungen zuschreiben kann. Dagegen kommen bibliographische Notizen spärlicher vor. Dann folgt die eigentliche Geschichte der mathematischen Theorien, die in zwei Hauptabteilungen, die Analyse des Endlichen (S. 81—233) und die Infinitesimalrechnung (S. 234—426) zerfallt. Die erste Hauptabteilung beginnt mit der algebraischen Lösung von Gleichungen 3. und 4. Grades, worauf die algebraische Zeichensprache und die allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen behandelt werden. Dann fügt der Verfasser ein Kapitel über die Trigonometrie ein, weil ihre Weiterentwickelung der Algebra zugute gekommen ist, und hiervon ist der Übergang zu numerischen Berechnungen und Logarithmen ziemlich natürlich. Die drei folgenden Kapitel sind der Zahlentheorie sowie der Wahrscheinlichkeitsrechnung und verwandten Gegenständen (Binomialkoeffizienten, Kombinatorik) gewidmet. Nun folgt ein Bericht über die reine Geometrie, hauptsächlich unter Berücksichtigung der Arbeiten von Desargues, und den Schluß der ersten Hauptabteilung bildet eine Übersicht der vorzugsweise analytisch-geometrischen und algebraischen Untersuchungen von Fermat, Descartes und ihren Nachfolgern bis gegen das Ende des 17. Jahrhunderts.

Der zweiten Hauptabteilung dient als Einleitung ein Kapitel über die mechanischen Probleme zu Anfang der neueren Zeit, sofern diese zur Erfindung der Infinitesimalrechnung beigetragen haben. Weiter bespricht der Verfasser ausführlich die verschiedenen Verfahren (von Kepler, Cavalieri, Torricelli, Grégoire de St.-Vincent, Fermat, Pascal, Wallis u. a.), wodurch tatsächlich Integrationen schon vor der Erfindung der Integralrechnung ausgeführt worden sind, berichtet über die unendlichen Näherungsprozesse (besonders unendliche Reihen) vor Newton, und behandelt die Methoden, die von Torricelli, Roberval, Descartes, Hudde, Fermat, Sluse und Huygens für Tangenten-, Normalen- und Maximalbestimmungen erfunden wurden. Die zwei folgenden Kapitel beziehen sich auf die Untersuchungen über die Cykloide und über Evoluten, sowie auf die Versuche, die umgekehrte Tangentenaufgabe zu lösen. Das übrige der Abteilung ist hauptsächlich der Entdeckung der Infinitesimalrechnung durch Newton und Leibniz gewidmet, wobei der Verfasser ausführlich über Newton handelt und ein besonderes Kapitel über die *Principia* einfügt. Mit der Veröffentlichung dieser Schrift endet die Zeit, die Herr Zeuthen sich vorgenommen hat, in seiner Arbeit zu behandeln, und nur ziemlich kurz berichtet er im Schlußkapitel über die Geschichte der Mathematik während der nächsten Jahre bis zum Ende des 17. Jahrhunderts. — Die Seiten 427—434 enthalten ein Namen- und Sachregister.

Daß Herr Zeuthen vor die eigentliche Geschichte der mathematischen Theorien eine Abteilung allgemeineren Inhalts gestellt hat, ist ohne Zweifel sehr angezeigt, denn auch der Entwickelungsgang der mathematischen Forschung im allgemeinen verdient gewiß eine Darstellung, und übrigens gibt es Umstände, die auf die Ausbildung der Mathematik Einfluß geübt haben, ohne daß man sie in die Geschichte einer besonderen Theorie unterbringen kann. Solche Umstände sind z. B. die politischen und sozialen Verhältnisse, der Stand der der Mathematik verwandten Wissenschaften, sowie die wissenschaftlichen Gesellschaften. Herr Zeuthen hat indessen in der allgemeinen Abteilung auch anderes gebracht, hauptsächlich biographische Notizen über die behandelten Mathematiker. Daß Notizen dieser Art in eine Entwickelungsgeschichte der

Mathematik — und als eine solche Geschichte will Herr Zeuthen seine Arbeit betrachtet haben — gehören können, gebe ich gern zu, die Frage ist nur, wie weit man gehen soll. Natürlich soll in erster Linie alles mitgeteilt werden, was die wissenschaftliche Wirksamkeit eines Mathematikers beeinflußt hat, aber sonst könnte es wohl genügen anzugeben, wann und wo er geboren und gestorben ist, sowie einige Zeilen über seine äusseren Lebensumstände hinzuzufügen. Herr Zeuthen ist etwas weiter gegangen, und da er im allgemeinen die Ausführlichkeit der Notizen nach der Bedeutung der betreffenden Mathematiker anpasst, so ist gegen sein Verfahren eigentlich nichts zu sagen. Freilich sieht man oft nicht ein, warum gewisse Notizen mitgeteilt werden; so z. B. erfahren wir (S. 29, 50, 52) über P. de Fermat, E. Halley und I. Barrow, daß sie beziehungsweise Söhne eines Lederhändlers, eines reichen Seifensieders und eines Leinwandhändlers waren, während in betreff der meisten übrigen Mathematiker gar nichts über den Stand des Vaters gesagt wird. Vielleicht beruht dieser Umstand auf der größeren oder geringeren Ausführlichkeit der von Herrn Zeuthen benutzten biographischen Quellen, denn es ist wohl kaum anzunehmen, daß er z. B. in den Arbeiten von Halley etwas eigentümliches gefunden hat, das nicht erklärt werden kann, sofern man nicht weiß, daß sie von dem Sohne eines Seifensieders herrühren. Daß Herr Zeuthen im *dänischen* Original ausführlich über die Lebensumstände der zwei *dänischen* Gelehrten Tycho Brahe und Olaf Römer berichtet hat, finde ich natürlich, daß es aber zweckmäßig ist, diese Berichte auch in die deutsche Ausgabe (S. 15—18, 18—19) einzuführen, ist mir nicht klar, denn Brahe hat ja in der Geschichte der Mathematik eine sehr unbedeutende Rolle gespielt, Römer sogar eine noch unbedeutendere. In der allgemeinen Abteilung finden sich noch bibliographische Angaben und Übersichten der literarischen Geschichte gewisser Fragen, z. B. der Lösung der Gleichungen 3. und 4. Grades. Die bibliographischen Angaben können sehr gut ihren Platz hier haben, und meiner Ansicht nach sollten sie noch ausführlicher sein; nur allzuselten kommt es vor (vgl. S. 29), daß auf das Vorhandensein von gesammelten Werken der Mathematiker aufmerksam gemacht wird. Auch die literarische Geschichte der einzelnen Theorien können ja hier untergebracht werden, wenn man beabsichtigt, in der folgenden Darstellung nur die mathematischen Momente der Entwickelung zu berücksichtigen, was gewiß seine Vorteile hat. Auf der anderen Seite scheint Herr Zeuthen nicht großes Gewicht darauf gelegt zu haben, immer konsequent zu sein, denn in den folgenden Abteilungen seiner Arbeit finden sich viele bibliographische und literarische Notizen; so z. B. wird S. 327 unmittelbar nach der Bemerkung, daß Hudde die algebraische Behandlungsweise Descartes' weiter entwickelt und in Anwendung gebracht hat, hinzugefügt: „Dies geschieht in zwei Schriften über die Reduktion von Gleichungen und über Maxima und Minima, die gleichfalls in der Ausgabe der Geometrie Descartes' durch van Schooten als Anhang ihren Platz gefunden haben,“ was ja eine rein bibliographische Angabe ist.

Gehe ich jetzt zu der Geschichte der einzelnen Theorien über, und sehe ich von dem soeben bemerkten Umstande ab, daß sich darin viele Notizen finden, die wohl lieber der allgemeinen Abteilung angehören möchten, so kann ich jene kurz als eine wirklich wissenschaftliche Behandlung der Geschichte der Mathematik charakterisieren. Ihr Ziel ist, wie Herr Zeuthen selbst im Vorwort angegeben hat, die Entwickelung der Mathematik klar hervortreten zu lassen.

Für diesen Zweck hat der Verfasser, unter Benutzung der vorhandenen mathematisch-historischen Literatur, den passenden geschichtlichen Stoff ausgewählt, dann in den meisten Fallen die Quellen selbst eingehend studiert, und endlich die Resultate seiner Forschungen für seine Darstellung verwertet; bei diesem Studium der Quellen hat er zuweilen einzelne nicht unwichtige Stellen aufgefunden, die der Aufmerksamkeit der Fachgenossen bisher entgangen sind. Sowohl mit der Auswahl des Stoffes als mit der Verwertung desselben kann ich mich im großen und ganzen einverstanden erklären; selbstverständlich wird man immer in einzelnen Fällen die Bedeutung einer historischen Tatsache verschiedentlich beurteilen können, und wenn ich auch hie und da einiges vermisst habe, das meines Erachtens erwähnenswert ist, so will ich dennoch nicht behaupten, daß die Arbeit an den angedeuteten Stellen unvollständig ist, denn es scheint mir sehr wohl denkbar, daß das Fehlende von Herrn Zeuthen absichtlich weggelassen worden ist. Nur in betreff des Berichtes über die Entwickelung der algebraischen Zeichensprache (S. 93—102) möchte ich entschieden eine ausführlichere Darstellung verlangen. Zu kurz sind z. B. meiner Ansicht nach die Notizen über die Wörter *plus* und *minus*, sowie die entsprechenden Zeichen $+$ und $-$; hinsichtlich ihrer Anwendung als gewöhnliche Ausdrücke für Addition und Subtraktion erfahrt der Leser *nur*, daß dies nach Widmann (also nach 1489) eintraf, und was Herr Zeuthen über das Vorkommen der Zeichen bei Widmann sagt, ist so knapp ausgedrückt, daß es leicht mißverstanden werden kann. Auch über die Bezeichnung der Potenzen vor Descartes hätte der Verfasser etwas ausführlicher berichten sollen; so z. B. wäre es angezeigt, S. 95 einzuschalten, daß Stifel (1553) die Potenzen einer unbekannten Grösse durch $1A$, $1AA$, $1AAA$, usw. bezeichnete, so daß die mit den früheren Bezeichnungen verbundene Unbequemlichkeit, daß sie nur *eine* Unbekannte voraussetzten, schon vor Stevin beseitigt wurde.

Da Herr Zeuthen mit der neuesten mathematisch-historischen Literatur vertraut ist, und dieselbe kritisch benutzt hat, so ist es im voraus anzunehmen, daß die Zahl der in seiner Arbeit vorkommenden Fehler oder Ungenauigkeiten sehr klein sein muß — alle solche vollständig zu vermeiden ist kaum möglich. In der Tat sind die Ausstellungen in betreff einzelner Angaben, die ich zu machen gehabt habe, ziemlich unbedeutend; die Folgenden seien hier unten erwähnt.

Vorwort S. VI. Unter Verweisung auf Curtze, Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. **13**, 1902 gibt Herr Zeuthen an, daß mit der „Regula cecis" eine Überlieferung von ihrem indischen Ursprunge verknüpft war. Es ist richtig, daß Curtze a. a. O. S. 545 und 574 behauptet, die „Regula ceci" werde im 2. Traktat des 3. Bandes der Algebra des Initius Algebras den Indern zugeschrieben, und an der von Curtze angedeuteten Stelle wird gesagt, daß Aliabras „der Inder" die betreffende Methode in seinen „daten" auseinandergesetzt hat. Indessen verdient diese Aussage meiner Meinung nach keine Beachtung, denn die Notizen, die sich in der „Algebra des Initius Algebras" finden, sind zum Teil so phantastisch, daß man denselben überhaupt keinen historischen Wert beilegen kann, sofern sie nicht anderweitig bestätigt werden.

S. 7 (vgl. S. 178, 179, 195). Der hier unter dem Namen Guido Ubaldo erwähnte italienische Mathematiker hieß bekanntlich Del Monte — Guido und Ubaldo waren seine zwei Vornamen.

S. 11. Ob ADAM RIESE wirklich zu „den bedeutendsten Cossisten" gehört, scheint mir zweifelhaft zu sein; jedenfalls wäre es von Interesse hinzuzufügen, daß die RIESESche Coss nur handschriftlich vorhanden ist, und daß Auszüge daraus erst im 19. Jahrhundert veröffentlicht wurden (vgl. die entsprechende Bemerkung des Verfassers in betreff CHUQUETS *Triparty* in der *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter* S. 325). Mit ebenso großem Rechte könnte vielleicht HEINRICH SCHREIBER (GRAMMATEUS) erwähnt werden, da sein gedrucktes deutsches Rechenbuch vom Jahre 1518 einen Abriß der Algebra enthält, der einen entschiedenen Fortschritt hinsichtlich der mathematischen Zeichensprache repräsentiert (vgl. C. I. GERHARDT, *Geschichte der Mathematik in Deutschland*, München 1877, S. 51—54).

S. 13. Daß WERNERS Trigonometrie nicht verloren gegangen ist, hat Herr ZEUTHEN selbst S. VI der Vorrede bemerkt. Merkwürdigerweise wird die von Herrn BJÖRNBO entdeckte Handschrift dieser Arbeit in einem Buche erwähnt, das allgemein bekannt und von den mathematisch-historischen Forschern oft zitiert worden ist, nämlich HEILBRONNERS *Historia matheseos universae* (Leipzig 1742, S. 543). Freilich nennt HEILBRONNER sowohl im Texte als im Namenregister als Verfasser der Trigonometrie „Joannes Vornerius" statt JOHANNES WERNER (mit Hinzufügen von „Neuburgensis" statt „Noribergensis"), und darum habe ich erst vor kurzer Zeit zufälligerweise die HEILBRONNERsche Notiz aufgefunden, obgleich ich schon vor vielen Jahren alle Stellen seines Buches genau untersuchte, worauf im Register unter „WERNER" hingewiesen ist.

S. 14. Der als „vorläufige Anzeige" bezeichnete *Commentariolus* des KOPPERNICUS, ist, wie L. BIRKENMAJER in seiner Arbeit *MIKOLAJ KOPERNIK*. I (Warszawa 1900, S. 70—88) nachgewiesen hat, eine selbständige Schrift des KOPPERNIKUS über ein heliozentrisches System mit zwei Epicykeln, und wurde nicht um 1533, sondern schon vor 1512 redigiert (vgl. BRAUNMÜHL, *Vorl. über Gesch. der Trigon.* II, Vorwort S. VII).

S. 17. Nach einer brieflichen Mitteilung von F. R. FRIIS an BRAUNMÜHL ist die von STUDNIČKA herausgegebene trigonometrische Handschrift nicht von TYCHO BRAHE, sondern von einem seiner Schüler geschrieben (vgl. BRAUNMÜHL, a. a. O. S. VIII).

S. 25. ALBERT GIRARD starb am 9. Dezember 1632 (vgl. z. B. CANTOR, *Vorl. über Gesch. der Mathem.* II^2, S. 656).

S. 29. Daß die von FRÉNICLE DE BESSY in den Schriften der französischen Akademie der Wissenschaften publizierten Schriften wirklich etwas von besonderem Interesse darbieten, scheint mir aus den Bemerkungen von Herrn G. VACCA in der Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, S. 359 und von mir ebendaselbst 4_3, 1903, S. 88—89 hervorzugehen.

S. 32. Wenn Herr ZEUTHEN hier die Schrift: *Calcul de Mons. DESCARTES ou introduction à sa géométrie* vom Jahre 1638 als ungedruckt bezeichnet, so ist diese Angabe insofern richtig, als die Schrift den Zeitgenossen des DESCARTES nur handschriftlich zugänglich wurde. Dagegen ist sie im Jahre 1896 von H. ADAM im Bullet. d. sc. mathém. 20_2, S. 221—248 veröffentlicht worden.

S. 41 (vgl. S. 78). Es ist ohne Zweifel richtig, daß JOHANN BERNOULLI ein wenig zu weit ging, als er die *Analyse des infiniment petits* des Marquis DE L'HÔPITAL eine bloße Bearbeitung seiner eigenen Mitteilungen an den Marquis nannte, daß aber im Buche viele solche schriftlichen Mitteilungen benutzt worden sind, läßt sich sehr gut kontrollieren auf Grund des aufbewahrten Briefwechsels zwischen JOHANN BERNOULLI und HÔPITAL. Einige für eben diesen Zweck bestimmte Auszüge aus dem Briefwechsel ließ JOHANN BERNOULLI selbst in den Acta Eruditorum 1721 in der von seinem Schüler JOHANN BURCARD verfaßten *Epistola ad virum clarissimum BROOK TAYLOR* veröffentlichen.

S. 44 (vgl. S. 328). Die Behauptung, daß HUDDES Tätigkeit als mathematischer Schriftsteller sich auf die beiden Anhänge zur DESCARTESschen Geometrie beschränkt, ist kaum richtig. Zuerst weiß man aus einem Briefe von LEIBNIZ an OLDENBURG vom 28. November 1676, daß jener in Amsterdam viele Manuskripte von HUDDE gesehen hatte, die wertvolle mathematische Entdeckungen enthielten; etwas davon notierte LEIBNIZ, und seine Aufzeichnungen liegen im Druck vor (vgl. z. B. C. J. GERHARDT, *Der Briefwechsel von G. W. LEIBNIZ mit Mathematikern* I, Berlin 1899, S. 228—229). Beschränkt man sich aber auf *gedruckte* Schriften von HUDDE, so gibt es außer den zwei von Herrn ZEUTHEN erwähnten noch eine dritte solche, nämlich eine Lösung des Tangentenproblems, die zuerst 1713 veröffentlicht wurde, und dann vielfach abgedruckt worden ist (vgl. Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 204).

S. 52. Daß JAMES GREGORY 1667 in Padua die *Vera circuli et hyperbolae quadratura* herausgab, und daß später die *Geometriae pars universalis* hinzukam, ist sicherlich durchaus exakt, aber vom bibliographischen Gesichtspunkte aus vielleicht ein wenig undeutlich ausgedrückt. Die erste Auflage der *Vera circuli et hyperbolae quadratura* erschien, wie Herr ZEUTHEN angibt, in Padua 1667, und ein zweiter Abdruck daselbst 1668 unter dem Titel: *Vera circuli et hyperbolae quadratura. Cui accedit geometriae pars universalis.* Die Quelle der POGGENDORFFschen, von CANTOR (a. a. O. III^2, S. 157) wiederholten Angabe, daß die *Vera circuli et hyperbolae quadratura* erweitert unter dem Titel *Geometriae pars universalis, inserviens quantitatum curvarum transmutationi et mensurae* in *Venedig* 1667 erschien, ist mir zur Zeit nicht bekannt.

S. 55. Die alte Geschichte, daß es NEWTON wegen der ungenauen Kenntnis des Erdradius zuerst nicht gelang, volle Übereinstimmung zwischen der wirklichen und der berechneten Geschwindigkeit zu finden, und daß er sich vorläufig mit der Möglichkeit anderer mitwirkender Versuche tröstete, bis er 1672 zu der vollen Bestätigung seiner Hypothese gelangte, rührt nach W. W. R. BALL (*An essay on NEWTONS Principia*, London 1893, S. 16—18, 23) zunächst von J. ROBINSON (1804) her, und ist wenigstens zum Teil unrichtig. Es ist nämlich konstatiert worden, daß NEWTON erst 1679 Untersuchungen über die Frage wieder vornahm.

S. 69. In betreff der Bemerkung, daß LEIBNIZ den Brief von NEWTON augenblicklich mit einer vollständigen Auseinandersetzung der einfachsten Differentiationsregeln und der nächstliegenden Anwendungen derselben beantworten konnte, erlaube ich mir auf Biblioth. Mathem. $\mathbf{13}_2$, 1899, S. 26—27; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 155 zu verweisen.

S. 79. Herr ZEUTHEN gibt hier einige Notizen über den Streit zwischen JAKOB und JOHANN BERNOULLI, und behauptet dabei, daß es jener war, der den Streit 1695 vor die Öffentlichkeit brachte. Meiner Ansicht nach ist es kaum möglich diese Frage zu entscheiden, denn tatsächlich hatte sich JOHANN BERNOULLI, vor Dezember 1695, mehr als einmal in seinen gedruckten Aufsätzen auf eine Weise geäußert, wodurch sich JAKOB BERNOULLI mit Recht verletzt fühlen konnte (vgl. die von mir in meiner Abhandlung *Framställning af striden om det isoperimetriska problemet;* Upsala universitets årsskrift 1876, Matem. och naturv. II, S. 13 zitierten Stellen). Darum pflichte ich lieber der folgenden Äußerung von P. MERIAN *(Die Mathematiker BERNOULLI*, Basel 1860, S. 12) bei: „Wenn man bloß die gewechselten Streitschriften zu Rate zieht, und die gemessene, freilich oft sehr sarkastische Haltung von JAKOB BERNOULLI vergleicht mit den sich selbst überhebenden, oft alles Maß überschreitenden Äußerungen von JOHANN BERNOULLI, so ist man allerdings geneigt, den letztern als Urheber der Störung des brüderlichen Verhältnisses anzusehen". Überhaupt bin ich der Ansicht, daß man am besten tut, wenn man in einem *Kompendium* der Geschichte der Mathematik nur erwähnt, daß die Brüder BERNOULLI viele öffentliche Streite miteinander hatten und die Gegenstände der wichtigsten derselben nennt.

S. 82. Daß es zweifelhaft ist, ob das hier erwähnte italienische Manuskript, wo die kubische Gleichung unrichtig gelöst wird, aus dem 14. Jahrhundert herrührt, habe ich in der Biblioth. Mathem. 1899, S. 106 hervorgehoben.

S. 95—96. Hinsichtlich der Notizen über die Entwickelung der algebraischen Zeichensprache sind ein paar kleine Verbesserungen angebracht. Die Behauptung, daß Wurzelgrößen zu Anfang der neueren Zeit durch R vor der Potenz bezeichnet wurden, und daß dies R sowohl bei STEVIN als VIÈTE in unser $\sqrt{}$ übergegangen ist, kann beanstandet werden; der erste Teil dieser Behauptung ist wesentlich unvollständig, weil in Deutschland als Wurzelzeichen zuerst nicht ein R sondern ein Punkt benutzt wurde, und es ist fast sicher, daß unser Wurzelhaken aus diesem Punkte entstanden ist. Da hierzu noch kommt, daß der Haken schon in STIFELS *Arithmetica integra* (1544) fast wie der heutige aussieht, so kann man ebensogut annehmen, STEVIN habe sein Wurzelzeichen aus STIFELS Arbeit entnommen (vgl. TROPFKE, *Geschichte der Elementar-Mathematik* I, Leipzig 1902, S. 216—222). VIÈTE scheint den Wurzelhaken überhaupt nicht angewendet zu haben (vgl. TROPFKE, a. a. O. S. 222), obgleich dies Zeichen später von dem Herausgeber seiner gesammelten Werke statt der von VIÈTE selbst benutzten Zeichen substituiert wurde. — Die Bemerkung, „sonderbarerweise tritt also dies jetzt allgemein gebräuchliche algebraische Zeichen der Vereinigung [d. h. die Klammern] zum ersten Male [nämlich bei GIRARD] in einer Verbindung auf, wo man sich jetzt statt der Klammern des von VIETA auch sonst gebrauchten Zeichens der Zusammengehörigkeit [d. h. des wagerechten Striches] bedient" muß den Leser zu der unrichtigen Ansicht veranlassen, GIRARD wende die Klammern nicht als gewöhnliches Multiplikationszeichen bei Polynomen an (vgl. Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 216).

S. 101. Ganz wie im dänischen Original wird hier behauptet, DESCARTES gebe „gleich" durch das Zeichen ∞ wieder, aber bekanntlich ist das DESCARTESsche Zeichen von etwas anderem Aussehen, nämlich ∝ (links findet sich eine Öffnung). Vermutlich liegt hier nur ein kleines Übersehen beim Korrekturlesen vor.

S. 118. Die bei JORDANUS NEMORARIUS vorkommende Konstruktion der Winkeldreiteilung ist dem *Liber trium fratrum* entnommen, und sein erster Beweis stimmt fast wörtlich mit dem der drei Brüder überein (vgl. *Der Liber* *trium fratrum de geometria*, herausg. von M. CURTZE; Nova acta der deutschen Akademie der Naturforscher **49**, Halle 1885, S. 155—157).

S. 148. Das Vorkommen der „Regula cecis" bei irgend einem arabischen Verfasser ist, so viel ich weiß, noch nicht nachgewiesen.

S. 162—164. Herr ZEUTHEN gibt hier einen Beweis des FERMATschen Satzes, daß der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Seiten ganze Zahlen sind, keine Quadratzahl sein kann, und behauptet, dieser Beweis sei nur eine Vervollständigung des von FERMAT in seiner „Observatio XLV" angedeuteten. Aber meiner Ansicht nach ist der ZEUTHENsche Beweis vielmehr als eine *Verbesserung* des FERMATschen zu bezeichnen. Herr ZEUTHEN weist nämlich nach, daß, wenn es ein rechtwinkliges Dreieck gibt, das den Bedingungen genügt, so kann man immer ein kleineres rechtwinkliges Dreieck auffinden, das auch den Bedingungen genügt, d. h. dessen Seiten ganze Zahlen sind und dessen Flächeninhalt eine Quadratzahl ist. FERMAT selbst folgert aus den Bedingungen zunächst, daß es zwei Quadratzahlen geben würde, deren Summe sowohl wie Differenz wiederum Quadratzahlen wären, und deutet an, wie man daraus beweisen kann, daß es zwei kleinere Quadratzahlen geben würde, deren Summe sowohl wie Differenz wiederum Quadratzahlen wären. Der Unterschied der zwei Beweise ist ja nicht besonders groß, aber ich sehe nicht ein, warum es überhaupt nötig gewesen ist, den FERMATschen Beweis zu verbessern. — Vielleicht hätte Herr ZEUTHEN an dieser Stelle angeben können, daß FRÉNICLE DE BESSY schon 1676 eine ähnliche modifizierte Rekonstruktion des FERMATschen Beweises veröffentlichte (vgl. Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 88—89); FRÉNICLE leitet aus den Bedingungen her, daß es ein rechtwinkliges Dreieck geben würde, dessen ungerade Kathete gleich einer Quadratzahl und dessen gerade Kathete das Doppelte einer Quadratzahl wäre, und weist dann nach, daß es möglich wäre, ein kleineres rechtwinkliges Dreieck mit denselben Eigenschaften zu finden.

S. 191. Die 1673 von LA HIRE herausgegebene *Nouvelle méthode en géométrie pour les sections coniques des superficies coniques et cylindriques* ist gar nicht verloren und nicht einmal besonders selten (vgl. Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 288).

S. 232. Da Herr ZEUTHEN erwähnt, in welcher Zeitschrift die Abhandlung von TSCHIRNHAUS *Methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data aequatione* veröffentlicht wurde, wäre es angebracht, auch das Druckjahr 1683 hinzuzufügen.

S. 327. Der Deutlichkeit halber sollte Z. 4 vor „Ausgabe" das Wort „zweiten" eingefügt werden (vgl. S. 43).

S. 330. In betreff der Angabe, daß ORESME bemerkt hatte, daß die Funktion gerade in dem Augenblick nicht variiert, in welchem ein Maximum oder Minimum durchlaufen wird, verweise ich auf Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, S. 515—516.

S. 418. Es ist durchaus richtig, daß in der *Analyse des infiniment petits* die Differentiation zur Bestimmung der Grenzwerte solcher Größen, welche den Wert $\frac{0}{0}$ annehmen, angewendet worden ist, und daß dies damals ein neues Ergebnis war, aber es wäre angebracht hinzuzufügen, daß diese Anwendung von JOHANN BERNOULLI herrührt (vgl. ENESTRÖM, *Om upptäckten af sättet att medels differentiation bestämma värdet af en bråkfunktion, då täljare och nämnare samtidigt blifva noll;* Öfversigt af [svenska] vetenskapsakad. förhandl. 51, 1894, S. 297—305).

Die kleinen Schreib- oder Druckfehler, die im dänischen Original ziemlich häufig vorkommen, sind in der deutschen Ausgabe meistenteils verbessert worden. Von den noch rückständigen habe ich die folgenden notiert. S. 35 Z. 24 wird 1630 als Druckjahr der *Pratique de la perspective* des DESARGUES angegeben, während S. 179 die richtige Jahreszahl 1636 vorkommt. — S. 49 steht „Browncker" ganz wie im dänischen Original aber S. 427 richtig BROUNCKER. — MERCATORS *Logarithmotechnia* ist nach S. 50 im Jahre 1667, nach S. 55 im Jahre 1669 erschienen, während 1668 das richtige Druckjahr ist. — S. 164 ist zweimal $2\left(\frac{n}{2}\right)^2$ statt $2\left(\frac{n^2}{2}\right)^2$ zu setzen. — S. 296 wird HUYGENS' *Horologium oscillatorium* unter dem Namen „Horologium mirificum" zitiert. — S. 380 Z. 1 lies 1671 statt 1771.

Die deutsche Übersetzung gibt, wenigstens überall, wo ich verglichen habe, den Sinn des Originals richtig wieder, was ja nicht eigentlich wundernehmen kann, da jene unter der Mitwirkung des Verfassers entstanden ist. Der Übersetzer hat sich im allgemeinen seiner Vorlage wörtlich angeschlossen; nur ausnahmsweise hat er versucht, an solchen Stellen, wo der Periodenbau des Originals besonders verwickelt ist, das Studium des Buches dem Leser ein wenig zu erleichtern. Eine solche Stelle findet sich S. 350 des Originals und S. 250 der deutschen Übersetzung, und lautet folgendermassen:

Original	Übersetzung
Den gaar ud paa, at det Legeme, som frembringes ved Omdrejning af en lukket plan Figur (F) om en Axe i samme Plan (hvilken dog ikke overskjaerer Figuren), er lige stort med det Stykke af en ret Cylinder med F til Grundflade, som afskjaeres af den Plan gjennem Omdrejningsaxen, der paa Linier vinkelrette paa den givne Plan afskjaerer Stykker lige store med Periferierne af de Cirkler, der til Radier have Liniernes Afstande fra Axen.	Dieser Satz besagt, daß ein Körper, der durch die Umdrehung einer geschlossenen ebenen Figur (F) um eine Achse in derselben Ebene (die jedoch die Figur nicht durchschneidet) erzeugt wird, dem Stück eines geraden Zylinders mit F als Grundfläche gleich ist, das eine folgendermaßen durch die Umdrehungsachse gelegte Ebene abschneidet: von den Loten auf der Grundfläche schneidet sie Strecken ab, die den Peripherien der Kreise gleich sind, deren Halbmesser die Entfernungen der Lote von der Achse sind.

Durch das hineingeschobene Wort „folgendermaßen" und den folgenden Satz: „von den Loten etc." wird das Verständnis der Stelle freilich leichter, aber besonders schön ist diese sprachliche Wendung gewiß nicht. S. 22 steht: „In Frankreich wirkte . . . CHUQUET", während das Original S. 31: „I Frankrig traf vi . . . CHUQUET" hat; die Änderung ist vielleicht stilistisch eine Verbesserung, aber dennoch weniger angebracht, weil CHUQUETS Arbeit, abgesehen von dem dürftigen Auszuge bei DE LA ROCHE, kaum irgend eine *Einwirkung* auf die Zeitgenossen gehabt hat, und bekanntlich erst in unseren Tagen entdeckt wurde. Etwas auffällig wird es wohl den meisten Lesern der deutschen Übersetzung sein zu vernehmen (S. 18), daß LONGOMONTANUS sich „mit *westjütischer* Treue" TYCHO BRAHE anschloß, denn diese Art von Treue ist ihnen sicherlich durchaus unbekannt — das Wort hätte am besten gestrichen werden sollen.

Das Register ist von Herrn A. A. Björnbo bearbeitet worden, und zwar nach Regeln, für die der Verfasser selbst im Vorworte die Verantwortlichkeit übernommen hat. Meiner Ansicht nach ist die Zahl der Stichwörter entschieden zu klein; so z. B. fehlen „Ellipse" und „Hyperbel", und wer die Stellen, wo die Geschichte der Hyperbel behandelt wird, nachsehen will, muß alle unter „Kegelschnitte" aufgeführten Seiten vergleichen, ebenso fehlen „Pluszeichen" und „Minuszeichen", so daß man, wenn man die Geschichte des Pluszeichens studieren will, auf die Benutzung des Stichwortes „Zeichensprache, algebraische" angewiesen ist. Ein wenig inkonsequent ist es, „Raumkurven" aber nicht „Raumkoordinaten" (die einschlägigen Stellen müssen unter „Koordinaten, Raum-" gesucht werden) als Nachschlagewort aufzuführen.

Das Erscheinen der jetzt vorliegenden Arbeit des Herrn Zeuthen wird sicherlich von allen Freunden der mathematisch-historischen Forschung mit Freude begrüßt werden. Besonders den Universitätslehrern, die Vorlesungen über Geschichte der Mathematik halten wollen ohne Spezialisten auf diesem Gebiete zu sein, wird die Arbeit sehr willkommen sein, und es ist zu hoffen, daß gar mancher junger Mathematiker durch dieselbe angeregt werden wird, sich mit wirklich wissenschaftlichem Studium der Geschichte der Mathematik zu beschäftigen.

Stockholm. G. Eneström.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

Al Battani, 19.
André, 64.
Bjerknes, 47.
Bobynin, 3, 38.
Braunmuhl, 10.
Buchholz, 42.
Cantor, 6.
Curtze, 20.
Duhem, 12.
Enestrom, 2, 5, 21, 26, 67.
Favaro, 23, 24, 25.
Fazzari, 15.
Fehr, 61.
Foerster, 17.
Gauss, 33.
Gerhardt, 56.
Gmeiner, 51.
Godefroy, 29.
Hamberg, 59.
Hobson, 32.
Hultsch, 16.
Kewitsch, 14.
Kobald, 51.
Konigsberger, 39.
Korner, 27.
Loria, 9.
Ludwig, 45.
Macfarlane, 31.
Mach, 11.
Muir, 28, 35, 37.
Nallino, 19.
Novati, 22.
Oppolzer, 60.
Oettingen, 40.
Poggendorff, 40.
Pringsheim, 68.
Rath, 34.
Roseveare, 53.
Schonflies, 36.
Stolz, 51.
Tannery, 4, 18.
Tropfke, 8.
Tuckerman, 41.
Whittaker, 52.
Wolffing, 30, 43, 44.
Zeuthen, 7.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften **14** (1902). [Rezension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. **35**, 1904, 138—140. (S. Günther.) [1

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8⁰. [2
5_3 (1904) : 1.

Физико-математическія науки въ ходѣ ихъ развитія. Журналъ издаваемый **В. В. Бобынинымъ.** Москва. 8⁰. [3
1_2 : 11. — Die physisch-mathematischen Wissenschaften im Laufe ihrer Entwickelung. Zeitschrift herausgegeben von V. V. Bobynin.

Tannery, P., De l'histoire générale des sciences. [4
Revue de synthèse historique **8**, 1904, 1—16.

Eneström, G., Über regelmäßige und unregelmäßige historische Entwickelung auf dem Gebiete der Mathematik. [5
Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 1—4.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. — **1**² (1894). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 68. (G. Eneström.) — **2**² (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 69—70. (G. Eneström.) — **3**² (1901). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 71—72. (G. Eneström.) [6

Zeuthen, H. G., Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert. Deutsche Ausgabe (1903). [Rezension:] Mathesis 4_3, 1904, 65. [7

Tropfke, J., Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. I—II (1902—1903). [Rezension:] Deutsche Literaturz. **25**, 1904, 885—886. (F. Engel.) — Pedagogisk tidskrift (Stockholm) **40**, 1904, 82—84. (G. Eneström.) [8

Loria, G., Spezielle algebraische und transscendente Kurven. Theorie und Geschichte. Deutsche Ausgabe (1902). [Rezension:] *Amsterdam,* Soc. mathém., Revue semestr. **12** : 1, 1904, 168. (G. Mannoury.) — Revue génér. d. sc. **14**, 1903, 625. [9

Braunmühl, A. von, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. II (1903). [Rezension:] Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 74—78. (W. M. Kutta.) [10

Mach, E., The science of mechanics. A critical and historical account of its development. Translated. Second edition (1902). [Rezension:] Monatsh. für Mathem. **15**, 1904, 30. (St. M.) [11

Duhem, P., Les origines de la statique. [12
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 6_3, 1904, 560—596.

b) Geschichte des Altertums.

La quadrature du cercle dans l'ancienne Egypte. [13
Revue scient. 21_4, 1903, 91.

Kewitsch, G., Zweifel an der astronomischen und geometrischen Grundlage des 60-Systems. [14
Zeitschr. für Assyriologie (Straßburg) **18**, 1904, 73—95.

Fazzari, G., Breve storia dell' aritmetica e dell' algebra nei tempi antichi. [15
Il Pitagora 10, 1904, 49—54.

Hultsch, F., Eudoxos von Knidos. [16
Das Weltall (Berlin) 4, 1903, 208—214.

Foerster, W., La précession des équinoxes d'Hipparque à Ptolémée et à Kepler. [17
Revue génér. d. sc. 14, 1903, 537—541.

Tannery, P., Sur le symbole de soustraction chez les Grecs. [18
Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 5—8.

c) Geschichte des Mittelalters.

Al-Battani sive Albatenii opus astronomicum. Ad fidem codicis escurialensis arabice editum, latine versum, adnotationibus instructum a C. A. Nallino. Pars I. Versio capitum cum animadversionibus. Mediolani 1903. [19
Milano, Osservatorio di Brera, Pubblicazioni 40:1. LXXX + 327 S. — [Rezension:] Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 78—88. (H. Suter.)

Curtze, M., Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance (1902). [Rezension:] Mathesis 4_3, 1904, 66. [20

Eneström, G., Ist Jordanus Nemorarius Verfasser der Schrift: „Algorithmus demonstratus"? [21
Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 9—14.

Novati, F., Un agrimensore cremonese del sec. XV. Leonardo Mainardi e la sua opera. [22
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 7, 1904, 26—28. — Aus dem „Archivio storico Lombardo" 17_3, 1902, 482—483.

Favaro, A., Intorno al presunto autore della „Artis metrice practice compilatio" edita da Massimiliano Curtze. [23
Venezia, Istituto Veneto, Atti 63:2, 1904, 377—395.

d) Geschichte der neueren Zeit.

Favaro, A., Serie decimaquinta di scampoli Galileiani. [24
Padova, Accad. d. sc., Atti e memorie 20, 1904, 5—29.

Favaro, A., Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. X. Giovanni Battista Agucchi. [25
Venezia, Istituto Veneto, Atti 63:2, 1904, 167—187.

Eneström, G., Pascal und der binomische Lehrsatz für nicht ganzzahlige Exponenten. [26
Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 72—73. — Anfrage.

Körner, Th., Der Begriff des materiellen Punktes in der Mechanik des achtzehnten Jahrhunderts. [27
Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 15—62. — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 25, 1904, 1333.

Muir, Th., A third list of writings on determinants. [28
South african association for the advancement of science (Cape Town), Report 1, 1905. 75 S.

Godefroy, M., La fonction gamma. Théorie, historique, bibliographie (1901). [Rezension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 35, 1904, 144—145. (R. Haussner.) [29

Wölffing, E., Mathematischer Bücherschatz. I (1903). [Rezension:] Mathesis 4_3, 1904, 65. [30

Macfarlane, A., Bibliography of quaternions and allied systems of mathematics. Dublin 1904. [31
8⁰, 86 S.

Hobson, E. W., On the infinite and infinitesimal in mathematical analysis. [32
London, Mathem. soc., Proceedings 35, 1903, 117—140. — Zum großen Teil historischen Inhalts.

Gauss, C. F., Werke. Band IX (1903). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 25, 1904, 563—564. (H. Weber.) [33

Rath, E., Über die Geschichte des Termes „Torsion". [34
Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 73. — Antwort auf eine Anfrage.

Muir, Th., The theory of general determinants in the historical order of development up to 1846. [35
Edinburgh, Royal soc., Proceedings 25, 1904. 61—91.

Schönflies, A., Über den wissenschaftlichen Nachlaß Julius Plückers. [36
Mathem. Ann. 58, 1904, 385-403.

Muir, Th., The theory of continuants in the historical order of its development up to 1870. [37
Edinburgh, Royal soc., Proceedings 25, 1904, 129—159.

Бобынинъ, В. В., Литература и дѣятели исторіи математики въ XIX. вѣкѣ. Іоганнъ Готтфридъ Фридлейнъ. [38
Fiziko-matem. naouki 1_2, 1904, 324—331. — Bobynin, V. V., Die Literatur und die Arbeiter auf dem mathematisch-historischen Gebiete im 19. Jahrhundert. Johann Gottfried Friedlein.

Königsberger, L., Hermann von Helmholtz (1902—1903). [Rezension:] Monatsh. für Mathem. 15, 1904, Lit.-Ber. 17—26. (G. J.) [39

J. C. Poggendorffs Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. Vierter Band (die Jahre 1883 bis zur Gegenwart umfassend), herausgegeben von A. J. von Oettingen. Lieferung 18—19. Leipzig, Barth 1904. [40
8⁰, S. 1225—1368. — [6 *M.*]

***Tuckerman, A.,** Index to the literature of the spectroscope (1887—1900). [41

Washington, Smithsonian institution, Miscellaneous collections 1902. — [Rezension:] Science 19_2, 1904, 380—381. (C. E. M.)

Buchholz, H., Poincarés Preisarbeit von 1889/90 und Gyldéns Forschung über das Problem der drei Körper in ihren Ergebnissen für die Astronomie. [42
Physikalische Zeitschrift (Leipzig) 5, 1904, 180—186. — Historisch-kritische Erläuterungen zu einem Vortrage von K. Schwarzschild (1903) über Himmelsmechanik.

Wölffing, E., Abhandlungsregister 1902—1903. [43
Zeitschr. für Mathem. 50, 1904, 165—219. — Aus dem Gebiete der angewandten Mathematik.

Wölffing, E., Verzeichnis von Abhandlungen aus der angewandten Mathematik, die im Jahre 1902 in technischen Zeitschriften erschienen sind. [44
Zeitschr. für Mathem. 50, 1904, 219—232.

Ludwig, F., Neuere Literatur über das Grenzgebiet der Biometrie. III. [45
Zeitschr. für Mathem. 50, 1904, 163—164.

e) Nekrologe.

Friedrich **August** (1840—1900). [46
Leopoldina 36, 1900, 46—47.

Karl Anton **Bjerknes** (1825—1900). [47
Bjerknes, V., *Carl Anton Bjerknes. Gedächtnisrede gehalten vor der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania am 17. April 1903.* Leipzig, Barth 1904. 8^0, 31 S. + Porträt.

Octave **Callandreau** (1852—1904). [48
L'enseignement mathém. 6, 1904, 150.

Maximilian **Curtze,** (1837—1903). [49
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 7, 1904, 28—29.

François **Deruyts** (1864—1902). [50
A la memoire de François Deruyts. Bruxelles, Hayez 1902. 8^0, 25 S.

Leopold **Gegenbauer** (1849—1903). [51
Monatsh. für Mathem. 15, 1904, 3—10, 129—136. (O. Stolz, E. Kobald, J. A. Gmeiner.)

James **Glaisher** (1809—1903). [52
London, Mathem. soc., Proceedings 35, 1903, 470—471. (E. T. Whittaker.)

Robert Baldwin **Hayward** (1829—1903). [53
London, Mathem. soc., Proceedings 35, 1903, 466—470. (W. N. Roseveare.)

Adolph Edmund **Hess** (1843—1903). [54
L'enseignement mathém. 6, 1904, 146—147. — Zeitschr. für mathem Unterr. 35, 1904, 95.

Wladyslaw **Kwietniewski** (1837—1902). [55
Wiadomości matem. 7, 1903, 109—110. (S. D.)

Max **Mögelin** (1855—1902). [56
Gerhardt, O., *Gedächtnisrede auf Max Mögelin.* Programm des Königstädtischen Realgymnasiums in Berlin 1902, S. 15—20.

Josef **Petzval** (1807—1901). [57
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 7, 1904, 29—30.

Charles Hall **Rockwell** (? —1904). [58
New York, Americ. mathem. soc. 10_2, 1904, 324.

Robert **Rubenson** (1829—1902). [59
Stockholm, Vetenskapsakad., Årbok 1903, 119—129 + Porträt [mit Schriftverzeichnis]. (H. E. Hamberg.)

Vojtech (Adalbert) **Šafarik** (1829—1902). [60
Leipzig, Astron. Gesellsch., Vierteljahrsschr. 37, 1902, 326—327. (E. von Oppolzer.)

George **Salmon** (1819—1904). [61
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 10_2, 1904, 324. — L'enseignement mathém. 6, 1904, 222. (H. Fehr.)

Wilhelm **Schell** (1826—1904). [62
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 10_2, 1904, 366. — L'enseignement mathém. 6, 1904, 222—223.

Ernst **Schröder** (1841—1902). [63
Bollett. di bibliogr. d. sc. mathem. 7, 1904, 28.

Eugène **Vicaire** (1839—1901). [64
Paris, Soc. philomath., Bulletin 4_9, 1902, 123—126 [nur Schriftverzeichnis]. (D. André.)

Anna **Winlock** (? —1904?). [65
Science 19_2, 1904, 157.

Giuseppe **Zurria** (1810—1896). [66
Catania, Accad. gioenia, Atti 15_4, 1902. 19 S. + Porträt.

f) Aktuelle Fragen.

Eneström, G., Die Geschichte der Mathematik und der Universitätsunterricht. [67
Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 63—67.

Pringsheim, A., Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik. Festrede gehalten in der Sitzung der Akademie der Wissenschaften zu München am 14. März 1904. München 1904. [68
4^0, 44 S.

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— Dozent G. Boccardi in Catania zum Professor der Astronomie an der Universität in Turin.

— Dozent H. Buisson in Marseille zum Professor der Physik an der Universität von Aix-Marseille.

— Privatdozent R. Daublebsky v. Sterneck in Wien zum Professor der Mathematik an der Universität in Czernowitz.

— Dozent E. Delassus in Grenoble zum Professor der Mathematik an der Universität in Besançon.

— Professor F. Engel in Leipzig zum Professor der Mathematik an der Universität in Greifswald.

— Privatdozent A. Hagenbach in Bonn zum Professor der Physik an der Technischen Hochschule in Aachen.

Todesfälle.

— Octave Callandreau, Professor der Astronomie an der „Ecole polytechnique“ in Paris, geboren in Angoulême den 18. September 1852, gestorben in Paris den 13. Februar 1904.

Vorlesungen über Geschichte der mathematischen und physischen Wissenschaften.

— An der Universität in Berlin hat Professor W. Förster für das Sommersemester 1904 eine zweistündige Vorlesung über Geschichte der neuen Astronomie seit Newton angekündigt.

— An der Universität in Bonn liest Privatdozent H. Kohen im Sommersemester 1904 über „Einzelbilder aus der Geschichte der Physik“.

— An der Universität in Freiburg i. B. hat Professor A. Loewy für das Sommersemester 1904 eine zweistündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik angekündigt.

— An der Universität in Straßburg bespricht Professor W. F. Wislicenus im Sommersemester 1904 die neuesten literarischen Erscheinungen auf dem Gebiete der Astronomie in einer zweistündigen Vorlesung.

Preisfragen gelehrter Gesellschaften.

— *Académie des sciences de Danemark à Kjöbenhavn.* Concours pour l'année 1904. Contributions nouvelles à la connaisance de la biographie du savant danois Ole Römer (1644—1710) et de son activité multiple, en insistant naturellement sur son œuvre scientifique.

Vermischtes.

— In München ist ein Museum von Meisterwerken der Naturwissenschaft und Technik gegründet worden, das u. a. den Zweck hat die historische Entwickelung der naturwissenschaftlichen Forschung darzustellen. In dem Museum werden Bildnisse und Lebensbeschreibungen hervorragender Forscher auf den einschlägigen Gebieten Aufnahme finden. Herr W. von Dyck ist Mitglied des Vorstandes.

Die Sexagesimalrechnungen in den Scholien zu Euklids Elementen.

Von Friedrich Hultsch in Dresden.

In den Scholien zum X. Buche der Elemente ist eine große Anzahl von sexagesimalen Ausrechnungen überliefert. Wir zitieren sie nach den Seiten und Zeilen der Ausgabe von Heiberg, *Euclidis opera*, vol. V. Der Stellenwert ist in den Handschriften lediglich durch Neben- oder Untereinanderstellung bezeichnet, z. B. in griechischen Buchstaben $\overline{\varsigma}$ $\overline{\nu\varepsilon}$ $\overline{\lambda\eta}$ $\overline{\nu\gamma}$ $\overline{\kappa}$ oder in indischen Ziffern . Indem wir die Ganzen mit ^{e}, d. i. Einheit[1]), und die ersten Sechzigstel durch ^{I}, die zweiten durch ^{II} usw. bezeichnen, erhalten wir bei dem ersten Beispiele $6^{e}\ 55^{I}\ 38^{II}\ 53^{III}\ 20^{IV}$, bei dem letzteren $1^{e}\ 4^{I}\ 27^{II}$.

Wenn auch die Scholien in ihrer jetzigen Gestalt erst im Mittelalter abgefaßt worden sind, so reicht doch ihr Ursprung in weit frühere Zeiten zurück. Um die Erklärung der Elemente haben Heron von Alexandria, Geminos, Pappos, Proklos, Simplikios und andere sich verdient gemacht. Aus dem Kommentare Herons ist manches in unsere Scholien übergegangen[2]). Die ebenda überlieferten Einleitungen zu dem ersten, fünften und anderen Büchern der Elemente scheinen aus Geminos entlehnt zu sein, der seinerseits den Poseidonios benutzt hat (108, 16—18 vgl. mit 81, 4; 82, 28; 102, 17; 107, 1, 20). Als Autor des längeren Scholions zu X: 9 (450,16—452,9) hat sich, wie ein anderes von Heiberg später veröffentlichtes Scholion[3]) zeigt, Proklos herausgestellt und von diesem rühren auch viele andere Erläuterungen her, die zum Teil aus dem

1) Die Ganzen werden ausdrücklich als μονάδες 491,8—10 bezeichnet; 493,10 bedeutet μία soviel als 1 μονάς; 494,23, ist μοίρας wahrscheinlich auf eine irrtümliche Auflösung des Compendiums $\breve{\mu}$ = μονάδας zurückzuführen.

2) Heiberg, *Om Scholierne til Euklids Elementer;* Danske Vidensk. Selsk. Skr.; histor.-philos. Afd. 2_6 : 3, 1888, 293, 304. *Paralipomena zu Euklid;* Hermes **38** (1903), 58f.

3) *Paralipomena,* 341 nr. 17.

Kommentar des Pappos geschöpft sind[1]). Noch älteren Ursprunges sind die Ausdrücke δύναμις τετράπους, ἑξάπους, ὀκτάπους und ähnliche bis ὀκτωκαιδεκάπους 448, 15—22; 467, 5—7; 489, 11, denn nach Platon *Theaet.* 147 *D* hatte der Mathematiker Theodoros nicht bloß die Quadratzahlen 4, 9 und 16 je als eine δύναμις (Potenz) im Betrage von 4, 9, 16 *Fuß*, d. i. Quadrateinheiten, benannt, sondern auch eine δύναμις τρίπους, πεντάπους usw., d. i. Quadrate in den Beträgen von 3, 5 usw. Quadrateinheiten, gesetzt und die Seiten dieser Quadrate als Wurzeln aus 3, 5 usw. in Reihen von binären Brüchen ausgerechnet[2]). Daher erklärt sich auch die Bemessung der Quadrate nach so und so vielen *Fuß* oder Quadrateinheiten, denn der griechische πούς zerfiel als Längenmaß in Hälften, Viertel, Achtel und Sechzehntel.

In welcher Zeit die sexagesimalen Ausrechnungen zu den im X. Buche der Elemente gesetzten Größen entstanden sind, bleibt im Dunkeln. Die äußerste Grenze ist die erste Hälfte des 14. Jahrhunderts, in welcher Maximos Planudes schrieb. Denn dieser behandelt in seinem von Gerhardt herausgegebenen indischen Rechenbuche (ψηφοφορία κατ' Ἰνδούς) ähnliche Fälle sexagesimaler Ausrechnungen, wie sie in den Scholien zu Euklid vorkommen und teils mit griechischen, teils mit indischen Zahlzeichen dargestellt sind. Da aber andererseits eine ältere Tradition nachgewiesen ist, die bis auf Platons Zeit zurückgeht und hauptsächlich durch Proklos zusammengestellt worden ist, so scheint es, daß eine seit dem 6. Jahrh. n. Chr. vorliegende und später noch teilweise erweiterte Scholiensammlung zum X. Buche im 11. Jahrh. von einem Gelehrten, der in dem Rechnen mit indischen Ziffern bewandert war, überarbeitet worden ist[3]). Hieran mögen andere Schriften über das sexagesimale Rechnen mit indischen Ziffern sich gereiht haben, die dann von Planudes in dem zweiten Teile seines Rechenbuches (S. 23 ff.) benutzt worden sind[4]).

---

1) *Om Scholierne,* 235 f., 297.

2) Hultsch, *Die Näherungswerte irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes;* Nachr. der Ges. der Wissensch. in Göttingen 1893, 376 ff.

3) Vgl. Heiberg, *Om Scholierne,* 242, 252 f., 298 ff. Der cod. Vindob., in welchem die meisten Scholien zum X. Buche sich finden, stammt aus dem 11. bis 12. Jahrh. (Heiberg, *Eucl. op.* Bd. I, IX; Bd. V, XI). Verschieden von dieser jüngeren Sammlung sind die von Heiberg aus Handschriften des 9. und 10. Jahrh. herausgegebenen Scholien, deren auf älteren Quellen beruhende Redaktion von diesem in das 6. Jahrh. verlegt wird (a. a. O. 242, 298).

4) Unter den Scholien zu den Elementen finden sich pag. 327—329 und 513 f. auch zwei, die von Planudes herrühren. Diese enthalten Erläuterungen zu VI def. 5 und zum Lemma zu X prop. 32, bei denen kein Anlaß zu sexagesimalen Ausrechnungen vorlag.

Als Beispiel einer *Summierung* von zwei fünfstelligen Werten führe ich zunächst pag. 554, 9—11 an:

$$\begin{array}{rrrrrr} & 27^{e} & 14^{I} & 43^{II} & 48^{III} & 1^{IV} \\ + & 4 & 58 & 0 & 8 & 49 \\ \hline \text{zusammen} & 32 & 12 & 43 & 56 & 50. \end{array}$$

Die Null beim zweiten Summanden wird, wie auch sonst üblich, durch *οὐδέν*, „Nichts" bezeichnet.

Zwei fünfstellige Quadratzahlen werden pag. 552, 6—11 addiert. Bei den ersten Sechzigsteln der Summe hat sich der Fehler $\nu\delta$ = 54 eingeschlichen, wofür mit Heiberg $\nu\vartheta$ = 59 zu lesen ist:

$$\begin{array}{rrrrrr} & 14^{e} & 39^{I} & 22^{II} & 5^{III} & 24^{IV} \\ + & 1 & 20 & 34 & 53 & 4 \\ \hline \text{zusammen} & 15 & 59 & 56 & 58 & 28. \end{array}$$

Daß diese Summe so gut wie genau 16 Ganze beträgt, wird zwar nicht gesagt, doch erscheint in Z. 17 eine Gerade EZ von 4 Einheiten als Seite eines Quadrates von 16 Einheiten.

Eine Summierung von zwei, ebenfalls fünfstelligen Quadratzahlen und die Abrundung der Summe auf 25 Ganze findet sich pag. 482, 29—483, 7. Das Viertel des Quadrates einer Geraden A und das Quadrat einer Geraden $E\Delta$ betragen

$$\begin{array}{lrrrrr} a) & 12^{e} & 15^{I} & 4^{II} & 4^{III} & 44^{IV} \\ b) & 12 & 44 & 45 & 54 & 16. \end{array}$$

Die Summe beider Zahlen ist pag. 483, 5 fehlerhaft überliefert, indem $\nu\alpha$ statt $\nu\vartheta$ = 59 erste Sechzigstel und $\nu\vartheta$ statt $\mu\vartheta$ = 49 zweite Sechzigstel erscheinen. Die richtige Summe

$$24^{e}\ 59^{I}\ 49^{II}\ 59^{III}$$

wird pag. 483, 5—7 sachgemäß zu 25 Ganzen abgerundet. Wie hier das Quadrat von 5 erscheint, so erkennen wir, daß das Vierfache des soeben erwähnten Wertes $a = 49^{e}\ 0^{I}\ 16^{II}\ 18^{III}\ 56^{IV}$ zu $49 = 7^2$ Ganzen (483, 9 f.) abzurunden ist.

Betreffs der *Subtraktion* genügt es auf pag. 482, 14—27 zu verweisen. Dort werden ausgerechnet

$$\begin{aligned} 25 - 12^{e}\ 15^{I} &= 12^{e}\ 45^{I} \\ 5 - 3^{e}\ 34^{I}\ 14^{II} &= 1^{e}\ 25^{I}\ 46^{II} \\ 10 - 1^{e}\ 25^{I}\ 46^{II} &= 8^{e}\ 34^{I}\ 14^{II}. \end{aligned}$$

Die *Multiplikation* sexagesimaler Reihen mit ganzen Zahlen findet sich häufig, z. B.

$2 \times 1^e\ 43^I\ 55^{II} = 3^e\ 27^I\ 50^{II}$ pag. 493,2

$2 \times 11^e\ 37^I\ 57^{II}\ 49^{III}\ 53^{IV} = 23^e\ 15^I\ 55^{II}\ 39^{III}\ 46^{IV}$ pag. 554, 9, 12.

Aufgegeben wird pag. 494, 2 f. die Multiplikation einer Geraden $E\varDelta = 1^e\ 9^I\ 16^{II}$ mit 3. Dies würde $3^e\ 27^I\ 48^{II}$ ergeben. Das ist das angenäherte Quadrat einer Mediallinie A, welches pag. 494, 19 auf $3^e\ 27^I\ 49^{II}\ 26^{III}\ 40^{IV}$ ausgerechnet ist.

Die Multiplikation $6 \times 5^e\ 11^I\ 46^{II}$ wird pag. 465, 10—17 sowohl in griechischen als indischen Ziffern zunächst ausgeführt zu

$$30^e\ 66^I\ 276^{II},$$

dann wird diese gemischte Zahl eingerichtet (ταῦτα ἀναβίβασον) zu

$$31^e\ 10^I\ 36^{II}.$$

Die Gerade $B = 2^e\ 47^I\ 30^{II}$ steht zu $A = 1^e\ 51^I\ 40^{II}$ nach pag. 493, 24 f.; 394, 17 f. in dem anderthalbfachen Verhältnis (ἡμιόλιος λόγος). Dies wird bestätigt, wenn wir $1^e\ 51^I\ 40^{II}$ mit $1\frac{1}{2}$ multiplizieren. So erhalten wir

$$\begin{array}{rrrr} & 1^e & 51^I & 40^{II} \\ + & 0 & 55 & 50 \\ \hline \text{zusammen} & 2 & 47 & 30, \end{array}$$

wie an den angeführten Stellen überliefert ist.

Als Produkt der dreistelligen Werte $5^e\ 53^I\ 7^{II}$ mal $1^e\ 51^I\ 40^{II}$ wird pag. 554, 15—19 angegeben $10^e\ 57^I\ 12^{II}$. Wir kontrollieren die Berechnung, indem wir der Reihe nach die Glieder des ersteren Wertes mit den anderen Gliedern multiplizieren. So ergeben sich

$$\begin{array}{rrrrr} & 5^e & 53^I & 7^{II} & \\ + & 5 & 0 & 8 & 57^{III} \\ + & 0 & 3 & 55 & 25 \\ \hline \text{zusammen} & 10 & 57 & 11 & 22. \end{array}$$

Wenn die 22 dritten Sechzigstel als 1 zweites Sechzigstel gerechnet werden, erhalten wir die überlieferte Zahl $10^e\ 57^I\ 12^{II}$.

Wenn zwei sexagesimale Zahlen, deren jede bis zu den zweiten Sechzigsteln reicht, miteinander multipliziert werden, wird die Ausrechnung in der Regel auch dritte und vierte Sechzigstel ergeben. Pag. 554, 8 f. wird als Produkt von

$$5^e\ 13^I\ 11^{II} \times 2^e\ 13^I\ 43^{II}$$
$$11^e\ 37^I\ 57^{II}\ 49^{III}\ 53^{IV}$$

angegeben. Wir rechnen aus

$$\begin{array}{lrrrrrr}
5^{e}\ 13^{I}\ 11^{II} \times 2 \ldots\ldots & = 10^{e} & 26^{I} & 22^{II} & & \\
0^{e}\ \ 5^{I}\ 13^{II}\ 11^{III} \times 13 \ldots & = 1 & 7 & 51 & 23^{III} & \\
0^{e}\ \ 0^{I}\ \ 5^{II}\ 13^{III}\ 11^{IV} \times 43 & = 0 & 3 & 44 & 26 & 53^{IV} \\
\hline
\text{zusammen} & 11 & 37 & 57 & 49 & 53,
\end{array}$$

was mit der Überlieferung übereinstimmt. Nebenbei sei bemerkt, daß das Resultat besser zu $11^{e}\ 37^{I}\ 58^{II}$ gekürzt worden wäre. Eine ähnliche Multiplikation wird pag. 491, 3—9 vorgenommen; doch ist hier im Produkt eine falsche Lesart zu verbessern. Denn die Ausrechnung von

$$2^{e}\ 26^{I}\ 58^{II} \times 1^{e}\ 24^{I}\ 51^{II}$$

ergibt $3^{e}\ 27^{I}\ 50^{II}\ 7^{III}\ 18^{IV}$. Aus der Handschrift aber teilt der Herausgeber $\overline{\nu\zeta}$ statt $\nu\ \zeta$ ($= 50^{II}\ 7^{III}$) mit. Sowie wir diese Trennung herstellen, erhalten wir mit *μονάδων τριῶν καὶ λεπτῶν κζ ν ζ ιη* das richtige Ergebnis bis zu den vierten Sechzigsteln. Doch darf, ähnlich wie vorher, nur die Reihe $3^{e}\ 27^{I}\ 50^{II}$ als gesichert gelten.

Als eine besondere Art der Multiplikation ist die *Quadrierung* anzusehen. Wir wählen als Beispiel $(1^{e}\ 51^{I}\ 40^{II})^{2} = 3^{e}\ 27^{I}\ 49^{II}\ 26^{III}\ 40^{IV}$ pag. 493, 24—27; 494, 19. Die bis zur dritten Stelle gekürzte Ausrechnung würde $3^{e}\ 27^{I}\ 49^{II}$ lauten. Sie hält gerade die Mitte zwischen den weniger genauen Produkten $2 \times 1^{e}\ 43^{I}\ 55^{II} = 3^{e}\ 27^{I}\ 50^{II}$ (pag. 493, 2) und $3 \times 1^{e}\ 9^{I}\ 16^{II} = 3^{e}\ 27^{I}\ 48^{II}$ (ob. S. 228).

Das Quadrat einer Geraden *B*, welche pag. 493, 24 und 495, 12 zu $2^{e}\ 47^{I}\ 30^{II}$ angesetzt ist, wird pag. 494, 5, 22 f. auf $7^{e}\ 47^{I}\ 36^{II}\ 15^{III}\ 0^{IV}$ berechnet[1]) und zwar wird das Fehlen von vierten Sechzigsteln durch *οὐδέν* (Nichts) bezeichnet. Der Scholiast hat richtig gerechnet, doch würde er besser in dem Produkte die dritten und vierten Sechzigstel gestrichen haben.

Noch zwei Quadrierungen führe ich an, weil hier die Abrundung auf ganze Zahlen richtig gefunden worden ist. Das Quadrat von $3^{e}\ 27^{I}\ 50^{II}$ würde sich beziffern auf $11^{e}\ 59^{I}\ 54^{II}$ und etwa noch 42^{III}, wofür pag. 466, 2 die ganze Zahl 12 eingesetzt worden ist. Ähnlich ist pag. 464, 4 f. das Quadrat von $5^{e}\ 11^{I}\ 46^{II}$, dessen Ausrechnung $26^{e}\ 59^{I}\ 58^{II}$ ergibt, auf 27 Ganze abgerundet worden.

Leicht vollzieht sich die *Division* einer gemischten durch eine ganze Zahl. Pag. 497, 21—23 soll $9^{e}\ 14^{I}\ 5^{II}\ 26^{III}\ 40^{IV}$ durch 4 geteilt werden; doch hat der Scholiast hier außer den Ganzen nur die ersten und zweiten Sechzigstel ausgerechnet, die dritten und vierten aber abgeworfen. Um

---

1) So ist auch pag. 495, 13 f. zu lesen, wo statt der 47 ersten Sechzigstel μς = 46 überliefert sind.

die Teilung der gemischten Zahl $3^e\ 27^I\ 57^{II}\ 18^{III}$ durch die dreistellige Zahl $1^e\ 43^I\ 55^{II}$ handelt es sich pag. 493, 10—12. Bei der Ausrechnung würden zunächst die Ganzen des Quotienten zu ermitteln sein. Es ist leicht zu ersehen, daß 2 nicht zu groß sein wird. So rechnen wir aus

$$\begin{array}{rl} & 3^e\ 27^I\ 57^{II}\ 18^{III} - 2\,(1^e\ 43^I\ 55^{II}),\ \text{d. i.} \\ & -\quad 3^e\ 27^I\ 50^{II} \\ \hline \text{Rest} & 0^e\ 0^I\ \ 7^{II}\ 18^{III}. \end{array}$$

Dieser Rest würde noch durch $1^e\ 43^I\ 55^{II}$ zu teilen sein. Man würde dann $\frac{7^{II}\ 18^{III}}{6235^{III}}$ oder nahezu 4^{IV} erhalten. Diesen winzigen Rest hat der Scholiast mit Recht abgeworfen und als Resultat 2 Ganze niedergeschrieben.

Das *Wurzelausziehen* nach der sexagesimalen Methode bietet ungewöhnliche Schwierigkeiten. Wollte man z. B. $\sqrt{3}$ zunächst auf 1 Ganzes bestimmen und es versuchen, aus dem Reste 2 die ersten und zweiten Sechzigstel zu ermitteln, so würde man nicht weiter kommen. Jeder gegebene Radikand ist zu zerlegen in eine Quadratzahl und einen Rest. Bezeichnen wir die Wurzel der Quadratzahl mit a und den Rest mit n, so wird der nächste Sexagesimalbruch der Wurzel nach der theonischen Formel $n \backsim \frac{2ax}{60}$ zu berechnen sein[1]). Die gewünschte Annäherung kann jedoch nur dann gefunden werden, wenn a^2 merklich größer als x ist[2]). Das finden wir sofort bei der Darstellung von $\sqrt{3}$ bestätigt, wenn wir einem aus dem *Almagest* zu entnehmenden Winke folgen[3]). Dort sind

1) HULTSCH bei PAULY-WISSOWA, *Realencyclopädie der class. Altertumswiss.* Bd. II, 1085 f. Im Kommentar zu PTOLEM. *Synt.* (Bd. I 185 f. ed. HALMA) erklärt THEON von Alexandria das Verfahren des PTOLEMAEUS nach EUKLIDischer Methode mit Hilfe einer geometrischen Figur, wofür bei PAULY-WISSOWA die rein arithmetische Form hergestellt worden ist.

2) Dies ist deutlich zu ersehen aus der Ausrechnung von $\sqrt{4500}$ bei THEON. Vgl. HULTSCH, a. a. O. 1085.

3) Bei PTOLEM. *Synt.* I 35, 15 f. ed. HEIBERG wird die Sehne zu 120°, d. i. die Seite des in den Kreis eingeschriebenen regulären Dreiecks (ebd. Z. 9 f.), $= 103 + \frac{55}{60} + \frac{23}{60^2}$ Einhundertzwanzigsteln des Diameters gesetzt. Das sind ebensoviele Sechzigstel des Radius (r). Da nun das Quadrat der Seite des eingeschriebenen Dreiecks $= 3\,r^2$ (ebd. Z. 8—10), mithin die Seite $= r\sqrt{3}$ ist, so ergibt sich der obige Wert $\frac{103}{60} + \frac{55}{60^2} + \frac{23}{60^3}$ als eine Annäherung für $\sqrt{3}$. Vgl. GÜNTHER *Quadratische Irrationalitäten*; Abhandl. zur Gesch. der Mathem. 4, 1882, 22. Nur hätte dieser dafür nicht die unvollkommene Annäherung $\frac{26}{15}$ einsetzen sollen; denn die von HIPPARCH entlehnte Sexagesimalzahl des PTOLEMAEUS stellt, wie sich bald zeigen wird, die bis zur siebenten Dezimalstelle genaue Ausrechnung von $\sqrt{3}$ dar.

als erstes Glied der die $\sqrt{3}$ darstellenden Sexagesimalreihe 103 erste Sechzigstel ($= 1^e\ 43^I$) gesetzt. Da nun $103^2 = 10609$ ist, so erkennen wir, daß der Radikandus 3, um die Wurzelausziehung zu erleichtern, auf 10800 zweite Sechzigstel zurückgeführt und diese Zahl in das Quadrat von 103 ersten Sechzigsteln und in 191 zweite Sechzigstel zerlegt worden ist. Aus dem Reste 191^{II} werden nun noch die zweiten und dritten Sechzigstel von $\sqrt{3}$ zu berechnen sein. Nach der theonischen Formel setzen wir

$$\frac{191}{60^2} \sim \frac{2.103x}{60},$$

woraus die vorläufige Annäherung

$$x = \frac{191.60}{60^2.2.103} = \frac{0{,}927}{60} = \frac{55{,}62}{60^2}$$

sich ergibt. Wir setzen dafür rund 55 zweite Sechzigstel (wobei zugleich die Bedingung erfüllt wird, daß bei der nun folgenden Ausrechnung ein Rest verbleiben wird, aus welchem weiter die dritten Sechzigstel zu berechnen sind). Nun ist auszurechnen

$$\frac{2.103.55}{60.60^2} + \left(\frac{55}{60^2}\right)^2 = \frac{11330}{60^3} + \frac{3025}{60^4}$$

Statt des ausgehenden Gliedes $\frac{3025}{60^4}$ setzen wir die Annäherung $\frac{50}{60^3}$ und erhalten zusammen $\frac{11380}{60^3}$. Diese sind von den obigen $\frac{191}{60^2} = \frac{11460}{60^3}$ abzuziehen, wobei als Rest $\frac{80}{60^3}$ verbleiben. Damit ist $\sqrt{3}$ auf $103^I\ 55^{II}$ bestimmt und es erübrigt nur noch, aus dem Reste die dritten Sechzigstel der Wurzel auszuziehen. Wieder verfahren wir ähnlich wie vorher und erhalten nach umständlichen Zwischenrechnungen 23 dritte Sechzigstel, wie bei Ptolemaeus überliefert ist.

Die Sehnentafeln im I. Buche des *Almagest* sind aus einem Werke des großen Hipparchos, welches dann Menelaos benutzt hat, entlehnt[1]). Also sind auch die geometrischen und arithmetischen Hauptsätze, ohne welche die Berechnung der Sehnen nicht möglich gewesen wäre, auf Hipparch zurückzuführen und da dieser, wie wir sahen, beim Anfange seiner Rechnungen die Zahl 3 in 10800 zweite Sechzigstel verwandelt hat, so wird er wohl auch die weiteren Ausrechnungen nach derselben Methode ausgeführt haben, wie sie weit später Theon uns überliefert hat. Gewiß haben auch alle genau rechnenden griechischen Astronomen in der Epoche zwischen Hipparch und Theon die sogenannte Theonische, in Wirklichkeit aber Hipparchische Methode befolgt.

1) Hultsch, *Die Sehnentafeln der griechischen Astronomen;* Das Weltall 2 (1901), S. 50, 53 ff.

Wenn also der Scholiast zu EUKLIDS Elementen pag. 466, 12—19 die Ausziehung der Wurzel aus $31^e\ 10^I\ 36^{II}$ dadurch vorbereitet, daß er die gemischte Zahl in zweite Sechzigstel verwandelt, so folgt er ganz jener altbewährten Methode. Dabei hat er sich die Darstellung durch die teilweise Anwendung von indischen Ziffern erleichtert. Die 31 Ganzen macht er zu ersten Sechzigsteln, indem er zunächst das Zehnfache = 310 hinschreibt und dies versechsfacht zu 1860. Dazu kommen die 10 ersten Sechzigstel des Radikandus; gibt 1870. Diese Zahl mit 10 und das Produkt mit 6 multipliziert gibt 112200 zweite Sechzigstel, zu denen noch die 36^{II} des Radikandus zu zählen sind. Mithin, so fährt der Scholiast fort, ist aus 112236 die Wurzel zu ziehen. Wie dies anzustellen sei, wird nicht mitgeteilt; doch ist es klar, daß die 112236 zweiten Sechzigstel in $112225 + 11$ zu zerlegen sind und aus dem ersten Gliede dieser Summe die Wurzel $\frac{335}{60}$ zu ziehen ist. Das ist soviel wie $5^e\ 35^I$, wie im Texte angegeben wird. Weiter auch die zweiten Sechzigstel auszurechnen, lehnt der Scholiast ab; allein das ist leicht nachzuholen, indem man den Rest $11 \sim \frac{2 . 335 x}{60}$ setzt und daraus $x \sim \frac{660}{670} \sim 1$ bestimmt. Das ist 1 zweites Sechzigstel der Wurzel, nicht $\iota = 10$ zweite Sechzigstel, wie pag. 466, 12 irrtümlich überliefert ist[1]).

Für die Wurzeln aus ganzen Zahlen mögen wenigstens einige Belege hier Platz finden. Pag. 490, 18; 491, 4 f. wird $\sqrt{2} = 1^e\ 24^I\ 51^{II}$ angegeben. Die Ausrechnung ist erfolgt, nachdem statt 2 Ganzen 7200 zweite Sechzigstel gesetzt und diese Zahl in $7056 + 144$ zerlegt war. Aus dem ersten Summanden wurden als Wurzel 84 erste Sechzigstel $= 1^e\ 24^I$ und aus dem Reste 144 nach der früher erwähnten Formel noch 51 zweite Sechzigstel gezogen. Damit stimmen die Werte überein, die sich aus pag. 441, 23; 453, 2—4 ergeben, wenn wir $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ und $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ setzen. Noch genauere Ausrechnungen ergeben sich aus pag. 495, 3—8 und dem Scholion zu X: 9 bei HEIBERG, *Paralipomena*; Hermes **38** (1903), 341. An der letzteren Stelle wird unter Berufung auf ein Scholion des PROKLOS $\sqrt{8} = 2^e\ 49^I\ 42^{II}\ 20^{III}$ gesetzt, an der ersteren Stelle werden in der Bruchreihe noch 10^{IV} hinzugefügt. Die Berechnung ist wahrscheinlich ausgegangen von der Umwandlung der 8 Ganzen in 28800 zweite Sechzigstel. Diese Zahl ist dann zu $28561 + 239$ zerlegt und aus dem ersten Summanden die Wurzel $169^I = 2^e\ 49^I$ gezogen worden. Aus dem Reste 239 ergaben sich, ähnlich wie vorher, 42^{II}. Wie der alte Rechenmeister

1) Nach dezimaler Ausrechnung ist $\sqrt{112236} = 335{,}016417$. Indem wir die drei letzten Bruchstellen abwerfen, erhalten wir in sexagesimalen Beträgen $5^e\ 35^I\ 0^{II}\ 57{,}6^{III}$, oder in der Kürzung bis auf die zweiten Sechzigstel $5^e\ 35^I\ 1^{II}$.

weiter vorgegangen ist, muß einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben; jedenfalls hat er den richtigen Weg eingeschlagen, denn seine Sexagesimalzahlen $2^e\ 49^I\ 42^{II}\ 20^{III}\ 10^{IV}$ stimmen genau mit der dezimal auf 7 Stellen berechneten $\sqrt{8} = 2{,}828427$ überein. Daraus entwickeln wir nun

$$\sqrt{2} = 1^e\ 24^I\ 51^{II}\ 10^{III}\ 5^{IV} = 1{,}4142135,$$

was bis auf die achte Dezimalstelle stimmt.

Über die Berechnung von $\sqrt{3}$ haben wir früher Theodoros, den Lehrer Platons, angeführt und auch auf Archimedes hingewiesen. Letzterer hat eine Umgrenzung für $\sqrt{3}$ gesucht und dabei als nächstgrößeren Wert $\frac{1351}{780} = 1{,}7320513$ gefunden[1]). Nur den winzigen Betrag von 0,0000003 brauchen wir abzuwerfen, um mit 1,732051 die richtige siebenstellige Annäherung zu erhalten, wie sie auch von Hipparch gefunden worden ist[2]). In den Euklidscholien pag. 492, 22; 493, 10; 495, 23 f. wird $\sqrt{3}$ mit Weglassung der ausgehenden 23^{III} auf $1^e\ 43^I\ 55^{II}$ bestimmt; das ergibt in dezimaler Ausrechnung 1,73194, d. i. die nur vierstellige Annäherung 1,732, womit der Wert pag. 466, 1 f. übereinstimmt, wenn wir $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ setzen. Dagegen ermitteln wir aus pag. 463, 13 den genauen Hipparchischen Wert, wenn wir einen offenbaren Fehler der Überlieferung verbessern. Es wird dort $\sqrt{27} = 5^e\ 11^I\ 46^{II}\ 50^{III}$ gesetzt. Das ist weitaus zu viel. Auch zeigen die im Scholion folgenden Worte, daß die ausgehenden Sechzigstel, mit 6 multipliziert, 60 (dritte) λεπτά = 1 zweites Sechzigstel ergeben sollen. Also ist statt des überlieferten ν (50) vielmehr ι (10) zu schreiben. Dann ergibt der Wert $\sqrt{27} = 5^e\ 11^I\ 46^{II}\ 10^{III}$ in dezimaler Ausrechnung die sechsstellige Annäherung 5,19615, und wenn wir $\sqrt{27}$ zu $3\sqrt{3}$ umformen, so erhalten wir für $\sqrt{3}$ die Hipparchische Reihe $1^e\ 43^I\ 55^{II}\ 23^{III}$.

Diese Auswahl aus einer ungezählten Menge von Belegen wird genügen, um einen Einblick in die Methoden zu gewähren, nach welchen die Griechen die sechs Rechnungsarten vom Summieren bis zum Wurzelausziehen ausführten. Die sexagesimale Rechnungsweise war zwar weit umständlicher als unsere dezimale, stand ihr aber an Sicherheit und Genauigkeit nicht nach. Es wird sich wohl der Mühe lohnen, alle in den Scholien überlieferten Sexagesimalzahlen zu kontrollieren und nach Bedarf zu erläutern. Daß dabei auch Gelegenheit sich finden wird, manche Fehler der Überlieferung zu verbessern, läßt sich sicher erwarten; hat doch schon bei der vorhergehenden kleinen Auswahl Anlaß zu mehreren Berichtigungen sich dargeboten.

1) Hultsch, *Die Näherungswerte* usw., S. 399 und dazu Anm. 2.

2) Seine oben angeführte Sexagesimalreihe $1^e\ 43^I\ 55^{II}\ 23^{III}$ ergibt in dezimaler Ausrechnung 1,732051.

Über die Erfindung der Pendeluhr.

Von E. Gerland in Klausthal.

Im vierten Band von Wiedemanns Annalen der Physik, welcher 1878 erschien, habe ich auf S. 585 ff. die Geschichte der Erfindung der Pendeluhr ausführlich behandelt. Die Quellen, aus denen ich schöpfen konnte, waren eine Abhandlung von van Swinden aus dem Jahre 1817, welche unter dem Titel *Verhandelingen over Huygens als uitvinder der slingeruurwerken* sich in den Verhandelingen van het koninklijk Nederlandsche Instituut van Wetenschappen findet und zum ersten Male den damals noch ungedruckten Briefwechsel von Huygens benutzt hatte, die Schriftstücke und Zeichnungen, welche von Florenz aus zu der im Kensington Museum in London 1876 stattgehabten Ausstellung wissenschaftlicher Apparate gesandt worden waren und die ziemlich zahlreichen Veröffentlichungen italienischer Schriftsteller über denselben Gegenstand. Ich kam zu dem Ergebnis, daß Galilei die Pendeluhr 1641 erfunden, aber nicht ausgeführt hat, daß aber Huygens ohne von Galileis Plänen etwas zu wissen, die Erfindung 1656 [1]) selbständig noch einmal machte und der Pendeluhr die für ihren Gebrauch zweckmäßige Form gab. Seitdem ist durch die Herausgabe des Gesamtbriefwechsels von Huygens, welcher den Inhalt der bis jetzt veröffentlichten zehn Bände seiner im Haag erscheinenden *Oeuvres complètes* bildet, es einerseits möglich geworden, die Einführung der Huygensschen Erfindung zu verfolgen, andererseits daraus die Pflicht erwachsen, die obigen Ergebnisse noch einmal auf ihre Richtigkeit zu prüfen, und dieses letztere um so mehr, als die Herausgeber der *Oeuvres complètes* die von van Swinden vertretene Ansicht, daß Galileis Pendeluhr nur ein Zählwerk gewesen sei, von einer Priorität des Italieners vor dem Niederländer also keine Rede sein könne, auch zu der ihrigen machten.

Was zunächst die Einführung der Huygensschen Uhr für die Zwecke der Zeitmessung betrifft, so hatte ihr Erfinder ihre Herstellung und ihren

---

1) Hugenii *Opera varia*, Vol. I pag. 5.

Vertrieb dem Uhrmacher Salomon Coster im Haag übergeben[1]), ihre Beschreibung aber 1657 in einer kleinen *Horologium* betitelten Schrift veröffentlicht und eine große Anzahl von Exemplaren davon an befreundete Gelehrte versandt. Coster erhielt am 16. Juni 1657 von den Generalstaaten und bald darauf von den Staaten von Holland und Westfriesland auf 21, bezw. 20 Jahre auf die Herstellung der neuen Uhr ein Privileg.[2]) Am 19. Oktober wurde ihm und dem Uhrmacher Johan van Cal ein ebensolches von der Landschaft Gelderland zugestanden.[3]) Coster starb indessen bereits Ende 1659;[4]) doch scheint seine Witwe das Geschäft und den Vertrieb der Uhren fortgesetzt zu haben.[5]) Jedenfalls ging Huygens auf den ihm von van Schooten gemachten Vorschlag, sich nunmehr in dieser Angelegenheit an den Uhrmacher Jacobus de Steur in Leiden zu wenden[6]), nicht ein.

Lange hatten sich Huygens und Coster der alleinigen Rechte ihrer Privilegien nicht zu erfreuen. Bereits im Jahre 1658 meldete ein Rotterdamer Uhrmacher Simon Stoffelsz. Douw, ein „dummer und unverschämter" Mensch, wie ihn Huygens bezeichnet, eine Pendeluhr seiner Erfindung zum Patente an.[7]) Da ihm die Generalstaaten und die Staaten von Holland und Friesland ein solches erteilten[8]), so erhoben Huygens und Coster Einspruch und führten eine Entscheidung des Hofes von Holland herbei, die freilich nicht zu ihren Gunsten ausfiel, sondern dahin ging, daß den drei Parteien zu gleichen Teilen die Emolumente zufallen sollten.[9]) Doch wurde bei dieser Gelegenheit Douws Uhr von Sachverständigen untersucht. Nach der darüber durch van Schooten an Huygens gemachten Mitteilung ergab sich, daß der Rotterdamer Uhrmacher das lange Pendel von Huygens durch ein kurzes ersetzt, dann aber durch ein Gegengewicht die nun zu rasch erfolgenden Schwingungen zu verlangsamen getrachtet hatte. Da er der Ansicht war, daß Huygens die Länge seines Pendels nicht bestimmen könne, so hatte er geglaubt auf diese Weise eine Verbesserung anzubringen.[10])

Bald nach dem Erscheinen der Huygensschen Schrift unternahm man es, Stadtuhren mit dem Vertikalpendel zu versehen. So brachte bereits im Januar 1658 ein Uhrmacher, wahrscheinlich Coster,[11]) eine solche in Scheveningen in Gang, deren Pendel von 24′ Länge mit einem 50 Pfund

1) Huygens, *Oeuvres complètes*, II p. 209.

2) Ib. II, p. 236 ff. Im Register des III. Bandes der *Oeuvres complètes* ist als Vornamen Costers, irrtümlicherweise Samuel angegeben.

3) G. van Hasselts *Geldersch Werk*. 1. Deel (1807).

4) Huygens, *Oeuvres complètes*, III p. 84, Note. 5) Ib. II, p. 125; III, p. 284.

6) Ib. III, p. 11. 7) Ib. II, p. 235. 8) Ib. II, p. 240, 241. 9) Ib. II, p. 290.

10) Ib. II, p. 249. 11) Ib. II, p. 125.

schweren Gewichte versehen war und im März desselben Jahres wurde in Utrecht eine Uhr der neuen Konstruktion aufgestellt.[1]) Allzurasch freilich führte sich die Verbesserung nicht ein, denn am 18. September 1659 schreibt Huygens an Bellair, daß noch in keiner Stadt zwei große Uhren seiner Erfindung vorhanden seien und daß er deshalb die Zeit noch nicht bestimmen könne, für welche solche zusammen schlagen würden. Er glaube nicht, daß sie eine lange sein werde, vielmehr seien mancherlei Ungenauigkeiten zu erwarten, deren Ursachen im Schmieren oder auch in den Temperaturveränderungen liegen könnten. Man werde da Abhilfe schaffen können, wenn man nur kleine Schwingungsweiten verwende oder das Pendel zwischen cykloidalen Plättchen schwingen lasse.[2]) In Paris fand die Pendeluhr so rasch Beifall, daß sich 1660 bereits vier Uhrmacher mit ihrem Bau beschäftigten. In England wurde sie nach der Mitteilung, die Wallis am 4. Dezember 1659 an Huygens machte, verschiedentlich abgeändert. Namentlich legte man die Achse des Steigrades vertikal, so daß die mit den Paletten versehene Rute horizontal zu liegen kam,[3]) eine Anordnung, die Huygens selbst annahm, und später in seiner 1673 veröffentlichten Schrift *Horologium oscillatorium* abbildete.[4]) Unerfreulichere Erfahrungen machte er in Italien. Dort hatte ein päpstlicher Uhrmacher nach dem Muster der Abbildung in der Schrift von 1657 eine Uhr gebaut, das eigentliche Werk aber sorgfältig versteckt angebracht. Er führte sie einer Versammlung von „Mathematikern“ vor und erntete allgemeinen Beifall, bis ein Schüler von Huygens Freund Gregorius a St. Vincentio, namens Gillis de Gottigniez, den Athanasius Kircher eingeführt hatte, den wahren Sachverhalt aufdeckte.[5]) Über einige andere in Italien nach Huygens Vorgang hergestellte Uhren wird weiter unten berichtet werden.

Übrigens scheint Huygens nicht der einzige gewesen zu sein, der zur Zeit des Erscheinens seines *Horologiums* bestrebt war, das Pendel zum Regulieren der Uhren zu benutzen. Er allein aber brachte etwas Brauchbares zustande. So weit kam der Danziger Astronom Hevel nicht, der dasselbe Ziel und, wie es scheint auch auf demselben Wege erstrebte,[6]) es aber nicht erreichte, da sein „automaturgus“ mit anderen Geschäften überhäuft war.[7]) Als ihn dann Boulliau im Jahre 1661 besuchte, war von der Uhr keine Rede mehr.[8]) Auch Roberval hat lange, freilich auch ohne Erfolg, an einer Pendeluhr gearbeitet, wollte dabei aber das Horizontalpendel beibehalten.[9]) Die Erwähnung dieser Uhr in dem Huygensschen Briefwechsel ist für uns deshalb von Bedeutung, als sie uns zeigt, daß

1) Huygens, *Oeuvres complètes*, II p. 156. 2) Ib. II, p. 143. 3) Ib. II, p. 520.
4) Huygens, *Opera varia*, Vol. I; Tab. II zu pag. 46. 5) Ib. II, p. 472.
6) Ib. III, p. 95, 134. 7) Ib. II, p. 261, 498. 8) Ib. III, p. 263, 290.
9) Ib. II, p. 176.

damals sogar solche Kenner, wie HUYGENS doch einer war, kein Bedenken trugen, mit einem Pendel verbundene Räderwerke Uhren zu nennen, selbst wenn keine das Pendel in Bewegung haltende Kraft vorgesehen war. So schreibt HUYGENS am 14. Mai 1659 an BOULLIAU: „mais il (ROBERVAL) n'y avoit rien pour faire continuer le mouvement du pendule par la force de l'horloge, ce qui toutefois est le principal",[1]) während er in einem Briefe an denselben Korrespondenten vom 21. November 1658 ROBERVALS Uhr „une horloge avec un pendulum" genannt hatte.[2]) Erst später erfuhr er durch CHAPELAIN, daß ROBERVAL ein Gewicht zur Aufrechterhaltung der Bewegung des Pendels hatte benutzen wollen, aber an der Schwierigkeit der Ausführung gescheitert war. Erwähnt sei noch, daß es auch PETIT nicht gelang, seine für die HUYGENSsche Uhr geplanten Verbesserungen ins Werk zu setzen,[3]) und daß die von MATTEO CAMPANI angebrachte Änderung, die einen lautlosen Gang der Uhr zu erreichen bezweckte,[4]) wohl nie angewendet worden ist. Die Weiterbildung der HUYGENSschen Uhr blieb einer späteren Zeit vorbehalten.

Ich wende mich nun zu einer erneuten Prüfung von GALILEIS Prioritätsansprüchen auf die Erfindung der Pendeluhr. Der Tatbestand, um den es sich dabei handelt, ist der folgende: Bald nach seiner Entdeckung des Isochronismus der Pendelschwingungen hatte GALILEI das Pendel zur Zeitmessung benutzt und es mit einem einfachen Zählwerk verbunden, ohne aber dafür zu sorgen, daß es durch ein gehobenes Gewicht oder durch die Kraft einer gespannten Feder längere Zeit hindurch in Bewegung erhalten wurde. Er hatte dann daran gedacht, es auch zur Längenbestimmung zu verwenden und war zu diesem Zwecke mit Spanien und später mit den Generalstaaten in Verhandlungen getreten, die aber zu keinem Resultate führten. Als dann 1656 HUYGENS die Pendeluhr erfand und seine im folgenden Jahr erschienene Schrift *Horologium*, in der er die Erfindung mitteilte, durch den französischen Mathematiker BOULLIAU dem Bruder des Großherzogs von Toscana, dem Prinzen LEOPOLD VON MEDICI vorgelegt wurde, glaubte dieser die Priorität der Pendeluhr für GALILEI in Anspruch nehmen zu müssen und forderte deshalb VIVIANI, denjenigen von GALILEIS Schülern, der außer dessen Sohne VINCENZO GALILEI bis zum Tode des Meisters um diesen gewesen war, auf, sich darüber zu äußern. VIVIANI sandte daraufhin dem Prinzen einen Bericht, worin er erzählte, daß bereits 1641 der damals schon erblindete GALILEI ihm und seinem Sohne die Zeichnung einer Pendeluhr diktiert habe und daß VINCENZO acht Jahre nach des Vaters Tode daran gegangen sei, ein Modell dieser Uhr herzustellen. Er habe es so weit gefördert, daß er im

---

1) HUYGENS, *Oeuvres complètes,* II p. 405. 2) Ib. II, p. 276. 3) Ib. III, p. 398. 4) Ib. III, p. 46.

Verein mit dem Berichterstatter die Richtigkeit der Galileischen Idee habe feststellen können, sei aber durch seinen plötzlichen Tod an der Vollendung des Modelles verhindert worden. Eine Abschrift dieses Berichtes und eine Kopie der beigefügten Zeichnung der Galileischen Pendeluhr sandte darauf der Prinz Leopold an Boulliau, dieser aber teilte die Zeichnung Huygens mit, unter dessen nachgelassenen Papieren sie sich noch befindet. Die in dem Vivianischen Bericht aufgestellte Behauptung, daß Galilei 1641 die Pendeluhr erfunden, Vincenzo ein gangbares, wenn auch nicht ganz fertig gewordenes Modell derselben hergestellt habe, ist nun mehrfach in Zweifel gezogen worden, neuerdings in einer ohne den Namen ihres Verfassers auf S. 281 ff. des VII. Bandes der *Oeuvres complètes* abgedruckten längeren Note und in einem Vortrage, den Emil Wohlwill gelegentlich der Naturforscherversammlung in Kassel im Jahre 1903 gehalten hat und dessen Inhalt in No. 42 der Münchener Medizinischen Wochenschrift mitgeteilt worden ist. Die in der Note gemachten Einwände lassen sich in die folgenden vier Sätze zusammenfassen, denen sich als fünfter eine von Wohlwill aufgestellte Behauptung anreiht.

1. Der Apparat, der nach Vivianis Bericht an den Prinzen Leopold von Vincenzo Galilei hergestellt worden ist, konnte keine Pendeluhr sein, da er, als solche betrachtet, nicht in Gang kommen konnte.

2. Er war ein auf Galileis Rat von seinem Sohne hergestelltes Zählwerk, bei dessen Konstruktion die Fehler des früher von Galilei angegebenen verbessert worden waren.

3. Er ist in Florenz vorhanden gewesen aber jetzt verschwunden.

4. Wenn Viviani berichtet, er habe den Apparat im Gange gesehen, so ist er das Opfer einer Täuschung geworden.

5. Viviani hat die Pendeluhr wahrscheinlich selbst angegeben, nachdem die Erfindung von Huygens zu seiner Kenntnis gekommen war.

Diese Sätze sind nunmehr auf ihre Richtigkeit zu prüfen.

1. Der Umstand, daß bei den den Apparat wiedergebenden Skizzen das treibende Gewicht fehlt, ist von keiner Bedeutung, da sie das Diktat eines Blinden darstellen und das Gewicht ohne Schwierigkeit angebracht werden kann. Von größerer Wichtigkeit sind die bei Konstruktion der Hemmung eingehaltenen Verhältnisse, die die verschiedenen vorhandenen Skizzen verschieden angeben. Die Hemmung besteht aus zwei Dornen,[1]) von denen der eine, wenn das Pendel eine seiner äußersten Lagen nahezu erreicht hat, die Bewegung des Steigrades hemmen soll, indem er unter

1) Der Galileische Apparat ist u. a. abgebildet in Gerland und Traumüller, *Geschichte der physikalischen Experimentierkunst* (Leipzig 1899), S. 128, Fig. 117, auch in Huygens, *Oeuvres completes*, III S. 8.

einen der an dessen Oberfläche angebrachte Stifte faßt, der andere die Bestimmung hat, einen in die dreieckigen Zähne am Rande des Steigrades greifenden Sperrhaken für kurze Zeit abzuheben und so dem Rad zu ermöglichen, daß es bei jeder Pendelschwingung um einen Zahn vorzurücken vermag. Der Verfasser der Note legt seiner Kritik die Verhältnisse derjenigen Zeichnung zugrunde, welche FAVARO in seine 1891 in Venedig erschienenen *Nuovi studi Galileani* als diejenige aufgenommen hat, welche allein in rechtmäßiger Weise zu dem VIVIANIschen Berichte gehörig betrachtet werden könne. Er weist nach, daß bei einem nach dieser Zeichnung gebauten Apparate keine fortrückende Bewegung des Steigrades eintreten, daß es vielmehr mit den Pendelschwingungen nur hin und her schwanken könne.

Wenn nun auch gegen diesen Nachweis nichts einzuwenden ist, so ist doch zu untersuchen, ob diese Zeichnung wesentlich die einzige ist, die die obige Bedingung erfüllt. Das scheint aber nicht der Fall zu sein, vielmehr wird man für die in den *Oeuvres complètes* a. a. O. mitgeteilte denselben Anspruch zu erheben haben. Ist sie doch eine Kopie von derjenigen, welche der Prinz LEOPOLD mit VIVIANIS Bericht an BOULLIAU sandte, gehörte also ganz unzweifelhaft zu dem Bericht. Gibt man den Dornen aber eine solche Länge im Verhältnis zum Abstande zweier benachbarter Stifte des Steigrades bis zu zweier Zähne an seinem Rande wie sie vorschreibt, so erhält man ein anderes Ergebnis. Dies ergibt sich aus der Betrachtung der Fig. 1—3, die die gegenseitige Lage der betreffenden Teile des

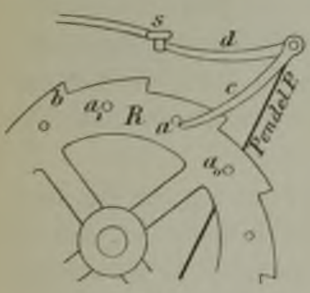


Fig. 1.

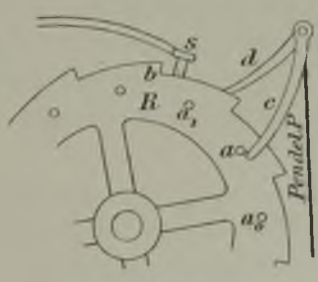


Fig. 2.

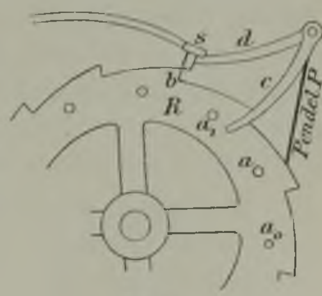


Fig. 3.

Apparates in den drei charakteristischen Zeitpunkten in Parallelprojection von der Achse aus gesehen, erkennen lassen. Fig. 1 zeigt das Pendel P in seiner äußersten Stellung links. Der Sperrhaken S ist durch den Dorn d abgehoben, während der Stift a an dem Dorne c anliegt. Fig. 2 gibt den Augenblick, in welchem c den Stift a freigibt, während der Dorn d den Haken S auf den Umfang des Steigrades R gelegt hat. Von dem treibenden Gewichte gezogen dreht sich nun das Steigrad so lange, bis der Zahn b gegen den Haken S stößt, der es nun festhält. Das Pendel führt alsdann den Rest seiner Schwingung frei aus. Zurückkehrend findet es das Steigrad in der durch Fig. 3 vorgeführten Stellung; der Dorn d hebt nun den Haken S ab und das treibende Gewicht setzt das Rad im Sinne des Uhrzeigers in Drehung. Diese hält so lange an, bis der Stift a_1 gegen den Dorn c zu liegen kommt, der nun, wie bei Clements rückspringender Hemmung das Steigrad wieder so weit zurückdrängt, bis die Stellung der Fig. 1 von neuem erreicht ist, mit dem Unterschied jedoch, daß der Stift a_1 an die Stelle des Stiftes a getreten ist. Während dann das Pendel abermals nach rechts schwingt, drückt das Gewicht den Stift a_1 gegen den Dorn c und ersetzt so dem Pendel die während der vorhergehenden Schwingung durch Reibung und Luftwiderstand verlorene Energie.

Genau in derselben Weise beschreibt Viviani den Vorgang. Gibt man also nur den Dornen die richtige Länge, so kann die Uhr selbst wohl gehen und daß dies der Fall ist, haben Apparate, die man nach der eben zugrunde gelegten Zeichnung, jedoch unter Zufügung des treibenden Gewichtes in Florenz und im Kensington Museum in London gebaut hat, erwiesen. Sie blieben so lange im Gange, als das aufgezogene Gewicht seine Wirkung ausüben konnte. Die obigen Figuren machen keinen Anspruch darauf, die zweckmäßigsten Verhältnisse darzustellen, nach welchen man die Teile des Apparates konstruieren könnte. Es wäre das auch unnötig, da ja der Prinz selbst die dem Berichte beigelegte Skizze als eine rohe bezeichnet.[1]) Doch dürfte hierdurch gezeigt sein, daß der unter 1 angeführte Einwand des Verfassers der Note nicht allgemein, sondern nur für einen speziellen Fall gilt und sicher nicht für den Apparat, dessen Abbildung der Prinz an Boulliau, dieser an Huygens sandte. Der letztere ist auch keinen Augenblick im Zweifel gewesen, daß die Zeichnung eine gangbare Pendeluhr darstellte, obwohl ihm der Bericht Vivianis und die darin enthaltene Beschreibung des Ganges der Uhr nie vor Augen gekommen ist.

2 Nachdem der Verfasser der Note nachgewiesen hat, daß der von ihm betrachtete Apparat nicht gehen könne, stellt er die Ansicht auf, daß er überhaupt keine Uhr, sondern nur ein Zählwerk darstellen solle, zu welcher Ansicht ja der Mangel eines treibenden Gewichts zu berechtigen scheint. Damit setzt er sich freilich in direkten Widerspruch zu der in 1 ausgesprochenen Behauptung. Denn bei der dort angenommenen Länge des Dornes c muß dieser ja beim Rückgange des Pendels aus seiner äußersten Lage links das Steigrad, welches er vorgeschoben hatte, indem er gegen den Stift a drückte, immer wieder zurückbewegen, da er nun den Stift a_0 nach unten schiebt, oder er muß, wenn der Haken S vorher eingefallen sein und die Bewegung des Rades gehemmt haben sollte,

1) Huygens, *Oeuvres complètes*, III p. 468.

entweder selbst abbrechen oder den Stift a_0 zerstören. Bei der Länge der Dorne, die in Fig. 1—3 angenommen ist, würde dies freilich nicht eintreten, aber es würde, wollte man auch dann den Apparat als Zählwerk betrachten, die Stellung der Zähne b eine für diesen Zweck völlig ungeeignete sein. Da sie ja doch ein Weitergehen des Rades verhüten sollen, ein Zurückgehen bei dieser Annahme aber ausgeschlossen ist, so müßten sie umgekehrt gerichtet sein. Den Anforderungen eines Zählwerks würde der Apparat also in keinem Falle genügen.

3. Dem dritten Punkt legt der Verfasser der Note eine ganz besondere Wichtigkeit bei. Pathetisch ruft er aus: „Cet objet" (das von VINCENZO hergestellte Modell), „qui aurait dû être d'un prix inestimable aux yeux du Prince LÉOPOLD, de VIVIANI et de tous ceux qui attribuent à GALILÉE l'idée d'une horloge à pendule, ce témoin irrécusable des prétendus droits de GALILÉE, a disparu".[1]) Und doch habe es Prinz LEOPOLD besessen, habe es MATTEO CAMPANI gesehen. Hier liegt eine Verwechselung des GALILEIschen Zählwerks und des VINCENZOschen Modelles zugrunde, die der Verfasser der Note bei gründlicherer Vergleichung der Daten der betreffenden Briefe vermieden haben würde, die aber der Grund ist, daß auch diesem Punkte jede Beweiskraft abgeht. Sehen wir uns die betreffenden Aktenstücke doch etwas näher an! Am 28. Februar 1659 hatte BOULLIAU HUYGENS' *Horologium* an den Prinzen geschickt,[2]) bereits am 31. März antwortete dieser und schrieb u. a.: „Circa lo Oriuolo regolato dal Pendolo certo è che l'Invenzione è bella, ma non si deve defraudare della gloria douutali al nostro Signore per sempre ammirabile GALILEO, che gia nel mille seicento trentasei, si io non erro, propose questa si utile invenzione alli Signori Stati d'Olanda et io ne ho ritrovato, benche in parte diverso circa la constituzione delle ruote, un modello fatto gia del medesimo Signore GALILEO".[3]) Da GALILEI mit den Generalstaaten nur über sein Zählwerk verhandelt hat, so meint der Prinz, was außerdem auch aus der Zeitangabe folgt, hier unzweifelhaft GALILEIS Zählwerk. Von dem Uhrwerk erhielt er die erste Kunde durch den Bericht VIVIANIS, der das Datum des 20. Augustes 1659 trägt.[4]) Bereits am folgenden Tage, dem 21. August aber schreibt der Prinz an BOULLIAU: „Sarà dunque annesso a questa il disegno del principio dell oriuolo regolato dal pendolo che inventò il nostro per sempre ammirabile Signor GALILEO ho inuio delineato con quella rozzezza con quale è fabricato il modello del medesimo, che nella mia camera ora mi trovo".[5]) Auch hiermit kann der Prinz VINCENZOS Modell unmöglich meinen, denn bis zum 20. August

1) HUYGENS, *Oeuvres complètes*, VII p. 281, Note 3. 2) Ib. III, p. 459.
3) Ib. III, p 461. 4) Ib. III, p. 484. 5) Ib. III, p. 468.

hatte er ja noch keine Kenntnis davon, daß er dies Werk besaß. Auch werden wir später nachweisen, was aus diesem Modell geworden ist. Der Prinz hat also, wie der Verfasser der Note auch, Zählwerk und Uhrwerk durcheinander geworfen, er hat ein Modell des ersteren, aber nicht des letzteren besessen, dessen Verschwinden für uns nicht von Belang sein würde. Bei der Kürze der Zeit zwischen dem Empfang des Berichtes und der Abfassung des Briefes an Boulliau hat er jenen nur oberflächlich einsehen können und die Pendeluhr Galileis für ein verbessertes Zählwerk gehalten, obwohl der Schluß des Berichtes ihn eines Besseren hätte belehren können. Das Zeugnis Campanis wollen wir entgegennehmen, nachdem wir die beiden folgenden Punkte betrachtet haben, die dasjenige Vivianis kurzerhand als unbewußte, ja bewußte Täuschung beseitigen zu können meinen.

4. „Viviani s'est laissé égarer lorsqu'il affirma avoir vu marcher la machine de la manière qu'il décrit,"[1]) sagt der Verfasser der Note hinsichtlich des Modelles Vincenzos. In der Boulliau übersandten Abschrift des Berichtes schildert Viviani den Gang des Modelles von Vincenzo mit folgenden Worten: „Ciò fatto, volle il Signor Vincenzio che io (come quegli ch'era consapevole di questa invenzione, e che l'avero stimolato ad effettuarla) vedessi così per prova, e più d'una volta come pur vedd'ancora 'l suddetto artefice, la congiunta operazione del contrappeso e del pendolo; il quale stando fermo tratteneva 'l moto dal contrappeso ma sollevato in fuori e lasciato poi in libertà, nel passare oltr'il perpendicolo, con la più lunga delle due code annesse all'impernatura del dondolo, alzava la chiave che posa ed incastra nella ruota delle tacche, la quale tirata dal contrappeso, voltandosi colle parti superiori verso il dondolo, con uno de' suoi pironi calcava per disopra l'altra codetta più corta, e le dava nel principio del suo ritorno un impulso tale, che serviva d'una certa accompagnatura al pendolo che lo faceva sollevare fino all' altezza donde s'era partito; il qual ricadendo naturalmente, e trapassando il perpendicolo, tornava a sollevare la chiave, e subito la ruota delle tacche in vigor del contrappeso ripigliava il suo moto seguend' a volgersi e spignere col piron susseguente il detto pendolo; e così in un certo modo s'andava perpetuando l'andata e tornata del medesimo pendolo, fin'a che il peso poteva calare a basso."[2]) Ich kann es getrost dem Urteile des Lesers überlassen, ob einer so eingehenden, sachlichen Schilderung gegenüber man wirklich daran denken kann, daß Viviani sich habe täuschen lassen. Doch will ich nicht versäumen, besonders noch auf die bestimmte Art aufmerksam zu machen, in der Viviani die Wirkung des „contrappeso", des treibenden Gewichtes, hervorhebt. Dadurch zeigt er, wie scharf er

1) Huygens, *Oeuvres complètes,* VII p. 282. 2) Ib. III, p. 482.

zwischen Zählwerk und Uhrwerk unterscheidet. Darin, daß man auf diesen Unterschied so wenig geachtet, Zählwerk und Uhrwerk immer durcheinander geworfen hat, ist aber der Grund zu suchen, daß die Erfindung der Pendeluhr durch GALILEI zu der Komödie der Irrungen geworden ist, als welche sie uns aus der Note entgegentritt. Es war freilich nicht leicht, diesen Unterschied von vornherein zu machen. Die Erfindung von HUYGENS hatte sich deshalb verhältnismäßig leicht einbürgern können, weil sie als einfache Verbesserung an den zu seiner Zeit bereits vielfach verbreiteten Uhren angebracht werden konnte. Darauf, daß dabei eine treibende Kraft notwendig war, achtete man zunächst so wenig, daß HUYGENS selbst, wie oben bereits berichtet wurde, den Apparat ROBERVALS eine Uhr nennt, obwohl er glaubte, daß bei ihm eine solche Kraft nicht vorgesehen sei. Umgekehrt hatte GALILEI mit dem Pendelzähler begonnen, ehe er sein Uhrwerk entwarf, und es fiel daher zunächst niemandem ein, in der Zufügung einer treibenden Kraft eine neue Erfindung zu erblicken, den verbesserten Zähler, als welchen man ihn ansah, eine Pendeluhr zu nennen. Dagegen wandte man die größte Aufmerksamkeit der Hemmung zu, deren neue und originelle Einrichtung als das bei weitem Wichtigste des neuen Apparates erschien. Daraus dürfte es sich denn auch erklären, daß in der Skizze der GALILEIschen Uhr das treibende Gewicht ganz fehlt, daß VIVIANI in der 1654 erschienenen Lebensgeschichte seines Lehrers der Erfindung der Pendeluhr nicht gedenkt, während er sie sofort in das richtige Licht rückt, als durch das Erscheinen von HUYGENS *Horologium* die Sachlage eine ganz neue geworden war. Vielleicht trug auch der Wunsch, sie bis zu ihrer tatsächlichen Ausführung geheim zu halten, dazu bei.

5. Einen Schritt weiter noch geht WOHLWILL. „Die Pendeluhr,“ sagt er[1]), „die VIVIANI ihn (GALILEI) erfinden läßt, ist höchst wahrscheinlich von VIVIANI selbst erfunden, nachdem er von HUYGHENS[2]) Erfindung

1) Vortrag, gehalten auf der Naturforscherversammlung in Cassel im Jahre 1903; Münchener medicinische Wochenschrift 1903, No. 42, 43 (Sep. Abdr. S. 5).

2) Die Schreibweise HUYGHENS statt HUYGENS ist wohl dem Setzer zur Last zu legen. In allen in seiner Muttersprache abgefaßten Schriftstücken hat sich der berühmte Niederländer stets HUYGENS geschrieben. Nach den von WOHLWILL selbst gelegentlich seines Vortrages über die Schreibweise COPPERNICUS oder COPERNICUS auf der Naturforscherversammlung zu Karlsbad 1902 ausgesprochenen Grundsätzen (Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte zu Karlsbad II: 2, S. 117), deren volle Berechtigung keinem Zweifel unterliegen kann, muß die Schreibweise HUYGHENS als unrichtig bezeichnet werden. Seine in französischer Sprache geschriebenen Briefe unterzeichnete HUYGENS mit HUGENS, welche Schreibweise GERHARDT in LEIBNIZENS mathematischen Schriften angenommen hat, in lateinischer Sprache unterschrieb er sich als HUGENIUS. Nach jetzigem Gebrauche wird man diese beiden Schreibweisen nicht mehr benutzen dürfen.

Kenntnis erlangt hatte.“ Diese Annahme steht so völlig in Widerspruch mit VIVIANIS Bericht, daß es zu ihrer Würdigung durchaus notwendig ist, sich ein möglichst sicheres Urteil über dessen Glaubwürdigkeit zu bilden. Ich bemerke ausdrücklich, daß ich mich bei dieser Untersuchung lediglich auf den Bericht beschränke. Hinsichtlich der Frage, ob sich VIVIANI bei seinen übrigen Nachrichten über GALILEI mancher Übertreibung schuldig gemacht habe, wie WOHLWILL annimmt, wird man der Führung eines so vorsichtigen und kompetenten Forschers um so mehr folgen können, als am 15. Oktober 1659 bereits CHAPELAIN darauf aufmerksam macht, daß „toute Florence est preuenue du merite de GALILÉE“;[1]) auch noch andere Umstände sprechen gegen ihre Zuverlässigkeit.

Mit der Annahme, daß VIVIANI mit seinem Berichte eine Täuschung der Mit- und Nachwelt beabsichtigt habe, steht zunächst dessen große Ausführlichkeit in Widerspruch, mit der er auf die unbedeutendsten Kleinigkeiten eingeht, von denen man doch nicht annehmen kann, daß er alle erfunden habe. Um nur eines anzuführen, so führt er den jungen Schlosser mit Namen auf, von welchem sich VINCENZO die Räder der Uhr machen ließ, um sie der bessern Geheimhaltung wegen dann selbst zusammenzusetzen und beruft sich auf ihn, als einen noch lebenden.[2]) Auch die *Oeuvres complètes* kennen ihn als einen der im Dienste des Großherzogs befindlichen Mechaniker. Hätte nun VIVIANI sich einer Täuschung schuldig machen wollen, so hätte er doch nicht den Zeugen genannt, von dem ein Wort ihn entlarven konnte, oder man müßte annehmen, der Prinz sei ebenfalls im Komplott gewesen, woran man doch im Ernste nicht denken kann. In MATTEO CAMPANI haben wir sodann einen Zeugen dafür, daß die GALILEIsche Pendeluhr wirklich vorhanden gewesen ist. Er hat sie selbst gesehen und nennt sie eine „antiqua et aeruginosa machina minime absoluta“. Damit kann er unmöglich, wie der Verfasser der Note will, GALILEIS Zählwerk meinen, denn dies konnte nicht rostig sein, da es kein Eisen besaß; auch paßt es auf die Bezeichnung „ganz und gar unfertig“ eben so schlecht, als sie das Werk VINCENZOS zutreffend schildert. Endlich hat uns auch NELLI die Nachricht aufbewahrt, daß es mit dem Nachlaß VINCENZOs von dessen Witwe verkauft und im Auktionskatalog als „Un oriuolo non finito di ferro col Pendolo, prima invenzione del GALILEO“[3]) bezeichnet gewesen ist. So ist es nicht in geheimnisvoller Weise verschwunden, sondern leider den Weg alles alten Eisens gegangen.

Wenn wir nun VIVIANIS Bericht in den Punkten, die wir anderweitig

---

1) HUYGENS, *Oeuvres complètes*, II p. 404. 2) Ib. III, p. 481.

3) ALBÈRI, *Le opere di* GALILEO GALILEI (Firenze 1856), Suppl. p. 340, Anmerkung.

prüfen können zuverlässig finden, so sind wir zu der Annahme wohl berechtigt, daß er auch diejenigen Tatsachen der Wahrheit gemäß erzählt, die dieser Prüfung direkt nicht zugänglich sind. Wir werden die Uhr demnach als GALILEIS Werk betrachten müssen und dies um so mehr, als sich dafür auch noch einige weitere Gründe anführen lassen. VIVIANIS Beschreibung gibt auf das Genaueste die Wirkung des Gegengewichtes an, obgleich es in der dazu gehörigen Figur fehlt. Das würde ein Fehler sein, den ein so gewiegter Mathematiker, wie es doch VIVIANI war, sich ganz gewiß nicht hätte zu Schulden kommen lassen, wenn er die Figur zu seinem Bericht hergestellt hätte. Ist aber die Figur das Diktat eines Blinden, das man unverändert lassen zu müssen geglaubt hat und zu der dann erst der Bericht geschrieben worden ist, so wird alles sofort begreiflich und es ist nicht nötig, eine gemachte unwahrscheinliche Annahme durch Zufügen noch unwahrscheinlicherer annehmbar zu machen. Ein Einfluß der HUYGENSschen Erfindung aber erscheint von vornherein ausgeschlossen. Ist doch GALILEIS Uhr der HUYGENSschen so unähnlich wie möglich, man müßte auch hier wieder annehmen, daß man absichtlich nach Verschlechterungen gesucht hätte, um den Schein zu wahren und dann freilich das Geschick bewundern, daß auf solche Weise eine so vollständig verschiedene Konstruktion heraus gekommen wäre. Darüber aber, daß und wie man sich in Florenz die Erfindung von HUYGENS zunutze machte, spricht sich der Schluß des Berichtes völlig unbefangen aus. Er erzählt uns, daß man dort schon vor 1659 Uhren in bewußter Weise nach dem Muster des *Horologium* baute, worauf wir schon hindeuteten. Wir erfahren, daß durch ein von GENERINI hergestelltes Modell angeregt, TREFFLER zunächst Zimmeruhren und dann die Palastuhr verfertigte, deren Skizze gleichfalls durch Vermittlung BOULLIAUS an HUYGENS übersandt wurde.[1]) Ein Blick darauf beweist uns, daß an dieser Uhr das Pendel in einer Weise angebracht war, die die Kenntnis der HUYGENSschen Erfindung in der Tat voraussetzt, zeigt aber auch, wie himmelweit verschieden sie von der GALILEIschen Konstruktion gewesen ist. Verbessert hatte TREFFLER die HUYGENSsche Konstruktion freilich nicht, wie HUYGENS in dem Brief an BOULLIAU vom 12. Februar 1660 tadelnd hervorhob.[2])

Es mag zugefügt werden, daß auch die mannigfachen Widersprüche italienischer Schriftsteller, auf die der Verfasser der Note vielfach hinweist, sich aufklären lassen, wenn man nur festhält, daß auch sie oft genug sich eine Verwechselung des Uhrwerks mit dem Zählwerk zu schulden kommen lassen. Die Annahme ALBÈRIS, daß aus Liebedienerei

---

1) HUYGENS, *Oeuvres complètes*, III p. 14. 2) Ib. III, p. 21.

gegen Ludwig XIV. Viviani seinen Bericht an den Prinzen gar nicht abgeschickt habe[1]), ist durch den in den *Oeuvres complètes* veröffentlichten Briefwechsel zwischen diesem und Boulliau widerlegt. Die Tatsache, daß Nelli, wahrscheinlich aus Eifersucht gegen Fabroni dem Bericht Vivianis bei seiner Herausgabe am Ende des 18. Jahrhunderts anstatt der zugehörigen Skizze die Abbildung einer Huygensschen Uhr zufügte, entbehrt jeder Beweiskraft.[2]) Auf mehr einzugehen, würde hier zu weit führen.

Fassen wir das Ergebnis unserer Untersuchung noch einmal zusammen und bedenken, daß es das Kennzeichen einer schlechten Hypothese ist, wenn sie für jede weitere zu erklärende Tatsache einer neuen Annahme bedarf, dagegen das einer guten, wenn alle auch später bekannt werdenden Tatsachen sich zwanglos aus ihr ergeben, so dürfte dies letztere Kriterium für die Annahme, daß Galileis Apparat wirklich eine Pendeluhr war, und gegen die andere, daß es nur ein Zählwerk gewesen sei, sprechen. Denn jene läßt sich leicht mit den Angaben aller Berichterstatter des 17. Jahrhunderts vereinigen, während diese gezwungen ist, einen nach dem andern von ihnen, nicht etwa zu verwerfen, sondern bewußter oder unbewußter Täuschung zu zeihen. Da man aber auf sie als einzige Quellen angewiesen ist, so heißt es, den Ast absägen, auf welchem man sitzt, wenn man sie anstatt ihre Aussagen lediglich einer wissenschaftlichen Kritik zu unterwerfen, als unglaubwürdig jedesmal dann hinstellt, wenn sie nicht nach Wunsch aussagen. Es wird also wohl dabei bleiben müssen, daß Galilei 1641 die Pendeluhr erfand, indem er seinem Zählwerk die treibende Kraft zufügte, daß aber 1656 unabhängig von ihm Huygens dieselbe Erfindung noch einmal machte, indem er die zu seiner Zeit gebräuchlichen Uhren mit dem Pendel versah.

Schließlich sei es gestattet, noch ganz kurz auf den Grund der Gereiztheit einzugehen, die Huygens, nachdem die Ansprüche der Florentiner zu seiner Kenntnis gekommen waren, öfters blicken läßt. Der Verfasser der Note sieht ihn in dem bereits angezogenen Ausspruch des Prinzen Leopold an Boulliau vom 31. März 1659: „non si deve defraudare della gloria douutali al nostro Signore per sempre ammirabile Galileo,“[3]) dessen Eindruck er freilich durch ein fälschlich hinter „defraudare“ gesetztes Komma verstärkt. Boulliau teilte diesen Brief am 9. Mai desselben Jahres Huygens mit,[4]) indem er in seinem Begleitschreiben denselben Gedanken mit den Worten aussprach: „que vous ne

---

1) Albèri, *Le opere di Galileo Galilei* (Firenze 1856) Suppl. p. 340, Anm.; vgl. Huygens, *Oeuvres complètes*, III S. 471.

2) Albèri, a. a. O. Suppl. p. 351.

3) Huygens, *Oeuvres complètes*, III p. 461. 4) Ib. II, p. 404.

desrobberez jamais la reputation d'autruy pour vous les attribuer".[1]) Keinem von beiden nahm HUYGENS diesen Argwohn übel, sonst hätte er doch wohl nicht am 5. Juli desselben Jahres dem Prinzen sein *Systema Saturnium* gewidmet, hätte nicht den Briefwechsel mit BOULLIAU in dem früheren freundschaftlichen Tone fortgeführt. Es ist ein schöner Zug in HUYGENS Charakter, daß er einen Teil des Ruhmes seiner Erfindungen, wenn auch nicht ganz ohne Mißbehagen,[2]), an den von ihm hochverehrten GALILEI abzutreten geneigt war. Was ihn verdroß, das waren die vielen Versuche, seine Erfindung für eine alte Geschichte zu erklären oder sie ihm unrechtmäßiger Weise zu rauben.[3]) Zwar erregte es die Verwunderung einiger seiner eifrigen Freunde, daß der Prinz auf die Zueignung des *Systema Saturnium* nicht antwortete, aber HUYGENS gab darüber in dem Briefe an CHAPELAIN vom 2. September 1659 die folgende genügende Aufklärung. „J'ay sçeu," schreibt er,[4]) „pourquoy le Prince LEOPOLD n'avoit point respondu a ma dedicace. A sçavoir par ce que je n'avois pas envoyè avec mon livre une lettre de ma main; Son Altesse n'ayant pas accoustumè de faire response a ces autres imprimées. Voyla comment par ignorance j'ay fait une faute, de la quelle pourtant je n'avois garde de me douter, puisqu'aussi tost que le Prince eust receu mon livre, il fit escrire par ledit Sieur DATI qu'apres l'avoir examinè il me respondroit; ce que je ne scay pas encore comment il a entendu. Toutes fois apres avoir receu ce dernier avis, j'ay escrit aussi tost, et je m'attens a cet heure a quelque compliment de la part de Son Altesse de qui tout le monde loue la grande civilitè." Das klingt doch auch nicht nach Gereiztheit gegen den Mediceer!

1) HUYGENS, *Oeuvres complètes,* II p. 403. 2) Ib. II, p. 485. 3) Ib. II, p. 485.
4) Ib. III, p. 119.

Der Briefwechsel zwischen Leonhard Euler und Johann I Bernoulli.

Von G. Eneström in Stockholm.

II. 1736—1738.

In der Einleitung zum vorigen Abschnitte habe ich erwähnt,[1]) daß nach dem Jahre 1731 der Briefwechsel zwischen Euler und Bernoulli für längere Zeit aufgehört zu haben scheint, und daß wir von den folgenden Briefen keinen besitzen, der älter als 1737 ist. Der erste dieser Briefe wurde am 2. April 1737 von Bernoulli an Euler geschrieben; indessen geht daraus hervor, daß Euler etwa ein Jahr früher ein jetzt verlorenes Schreiben an Bernoulli gesandt hatte.

Auf das Schreiben vom 2. April 1737 antwortete Euler am 27. August; Bernoullis nächster Brief ist vom 6. November datiert. Weitere Briefe von Euler sind vom 10. Dezember 1737, 26. April, 30. Juli und 20. Dezember 1738 datiert und alle diese wurden von Bernoulli beantwortet, aber die drei ersten Antworten sind vollständig verloren, und die vierte, die vom Jahre 1739 ist, gehört zum folgenden Abschnitte dieses Artikels. Hier werden also zusammen 7 Briefe zum Abdruck gelangen, nämlich 5 von Euler und 2 von Bernoulli.

Daß drei Briefe von Bernoulli verloren sind, und daß auch nicht die Konzepte derselben aufbewahrt wurden, hängt vielleicht damit zusammen, daß in den noch vorhandenen Briefen von Euler viele Streichungen vorkommen, die so sorgfältig ausgeführt wurden, daß die betreffenden Stellen durchaus unleserlich sind. Auch in den Konzepten der Bernoullischen Briefe vom 2. April und 6. November 1737 sind Stellen unleserlich gemacht, und im Fussschen Abdruck[2]) des ersten Briefes fehlt ebenfalls das Überstrichene. Es scheint also, als ob Euler und Bernoulli über irgend eine Frage verhandelt hätten, die von sehr privater Natur

1) Siehe Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 345.

2) *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle publiée par* P. H. Fuss, T. II (St.-Pétersbourg 1843), S. 12—17.

war. Indessen muß ich hinzufügen, daß die Streichung im EULERschen Briefe vom 20. Dezember 1738 offenbar vom Briefschreiber selbst vor der Absendung gemacht wurde, wie aus seinem folgenden Briefe vom 5. Mai 1739 hervorgeht. Nach einer handschriftlichen Bemerkung von JOHANN III BERNOULLI rühren die übrigen Streichungen in den EULERschen Briefen wahrscheinlich von JOHANN II BERNOULLI her, und dieser hat wohl auch die Konzepte der BERNOULLIschen Briefe an den erwähnten Stellen unleserlich gemacht.

Die Fragen, mit denen sich die hier in Betracht kommenden Briefe beschäftigen, sind wesentlich andere, als die in den vorigen Briefen behandelten. Zur reinen Mathematik gehören drei Gegenstände, die BERNOULLI weit früher interessiert hatten, nämlich die Summation der reziproken Quadratzahlen, die algebraisch rektifizierbaren Kurven und die isoperimetrischen Probleme.

In betreff der Summe der reziproken Quadratzahlen schrieb JOHANN BERNOULLI schon 1691 an seinen Bruder JAKOB, daß er den Weg, worauf diese Summe ermittelt werden konnte, gefunden hatte,[1]) aber ohne Zweifel entdeckte er bald, daß er sich geirrt hatte, und erst 45 Jahre später gelang es ihm, eine Methode zur Summation der reziproken Quadratzahlen zu finden. Freilich hatte EULER damals das Problem schon gelöst und das Resultat der Lösung seinem alten Lehrer mitgeteilt.[2]) Auch einige andere verwandte Reihen werden nebenbei in den Briefen erwähnt und summiert.

Mit den algebraisch rektifizierbaren Kurven, oder richtiger ausgedrückt mit der verwandten Frage, die Kurven, deren Quadratur auf die Ermittelung der Länge einer algebraischen Kurve zurückgeführt werden kann, zu bestimmen, hatte sich JOHANN BERNOULLI 1724 ein wenig beschäftigt, aber auch auf diesem Gebiete war es EULER, dem ein wesentlicher Fortschritt zu verdanken ist. In den Briefen gibt dieser Auskunft über seine Lösungen zweier hierher gehörender Probleme, nämlich: 1. zwei algebraische Kurven zu finden, die zwar nicht algebraisch rektifizierbar sind, aber die Eigenschaft haben, daß die Summe ihrer zu ein und derselben Abscisse gehörenden Bogen eine algebraische Funktion der Abscisse ist; 2. Kurven zu finden, die algebraisch rektifizierbar sind, oder deren Rektifikation von einem gegebenen Integral abhängt.

1) „Je vois déja la route de trouver la somme de

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\text{etc.}$$

ce que nous ne pouvions pas autrefois" (Brief vom 22. Mai 1691 in der herzoglichen Bibliothek in Gotha).

2) Vgl. ENESTRÖM, *Note historique sur la somme des valeurs inverses des nombres carrés;* Biblioth. Mathem. 1890, S. 22—24.

Über isoperimetrische Probleme handelt Euler ziemlich kurz in den zwei letzten hier unten veröffentlichten Briefen, zum Teil unter Bezugnahme auf eine von Daniel Bernoulli gestellte Frage, nämlich „unter allen isoperimetrischen Kurven diejenige zu finden, wo $\int \varrho^m ds$ (ϱ = Krümmungsradius, s = Bogenlänge) Maximum oder Minimum ist“.

Die in den Briefen behandelten Fragen aus der angewandten Mathematik beziehen sich vorzugsweise auf die von Euler 1736—1739 veröffentlichten oder in Angriff genommenen Arbeiten. Anläßlich einer Stelle der Eulerschen *Mechanica* (1736) machte Bernoulli eine Ausstellung, gegen welche sich Euler ausführlich verteidigte, und im Zusammenhang hiermit beanstandete jener Sätze aus den Arbeiten von Newton und Hermann, während Euler wenigstens Newton in Schutz nahm. Auf der anderen Seite machte Euler selbst auf ein paar Stellen seiner *Mechanica* aufmerksam, wo ihm Verbesserungen angebracht schienen.

Besonders ausführlich beschäftigen sich die Briefschreiber mit einigen Gegenständen aus der Theorie des Gleichgewichtes und der Bewegung schwimmender Körper, die Euler später in seiner *Scientia navalis* behandelte. Bekanntlich erschien diese Arbeit 1749, aber aus den Briefen ersieht man, daß sie schon 1737 geplant, im Anfange von 1738 in Angriff genommen und vor dem Ende dieses Jahres fertig war. Es ist nicht ohne Interesse zu beobachten, wie schwierig es den Briefschreibern bisweilen war, sich über die eine oder die andere Frage zu verständigen.

Die Beendigung des Druckes des *Tentamen novae theoriae musicae* gab Euler Anlaß, den Bericht, den er schon am 25. Mai 1731 an Bernoulli gesandt hatte,[1] ein wenig zu ergänzen. Auch die Arbeiten, die Bernoulli fertiggestellt oder begonnen hatte, werden in den Briefen berührt. Eine Abhandlung von ihm über die Bewegung von Körpern in veränderlichen und festen Bahnen regt Euler an, die darin enthaltenen Formeln mit den seinigen zu vergleichen und die Übereinstimmung derselben zu bestätigen. Die von Bernoulli in Angriff genommene hydraulische Abhandlung, die später in zwei Abteilungen in den Commentarii der Petersburger Akademie erschien, wird von Euler als sehr ersehnt bezeichnet.

Mehr im Vorübergehen werden viele andere mathematische oder literarische Gegenstände erwähnt. So z. B. veranlaßt die Summation der reziproken Quadratzahlen zu Bemerkungen über den Zusammenhang zwischen den Wurzeln und den Koeffizienten einer Gleichung unendlich hohen Grades, und ganz beiläufig teilt Euler einen Satz über die elastische Kurve mit. Auch über die Formel der lebendigen Kraft, sowie über die

1) Siehe Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 383—386.

Theorie der Ebbe und Flut, des Schalles, des Lichtes, des Feuers und über exzentrisches Zusammenstoßen von Körpern wird in den Briefen verhandelt, zum Teil im Anschluß an Bemerkungen über Preisschriften von EULER oder den BERNOULLIS; über den Stand der Herausgabe der Commentarii der Petersburger Akademie gibt EULER ziemlich regelmäßig Auskunft.

11*.

Euler an **Bernoulli** Mai (?) 1736.

Verloren; zitiert von BERNOULLI in seinem Brief vom 2. April 1737 („annus propemodum est quod postremas Tuas litteras accepi").

12.

Bernoulli an Euler 2. April 1737.

Antwort auf EULERS verlorenen Brief von 1736. Original im Archiv der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg; Konzept in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. Veröffentlicht von FUSS, a. a. O. S. 12—17.

Inhalt. Die Preisschriften von JOHANN II BERNOULLI über die Fortpflanzung des Lichtes und von DANIEL BERNOULLI über die gegenseitige Neigung der Planetenbahnen, sowie von JOHANN I BERNOULLI selbst über diesen Gegenstand. — EULERS *Mechanica*. — Der Streit über den Begriff der lebendigen Kraft. — Summation der Reihe der reziproken Quadratzahlen und Reihen von anderen Potenzen der reziproken natürlichen Zahlen. — Über den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten und den Wurzeln einer Gleichung unendlich hohen Grades.

Viro[1]) clarissimo ac mathematico longe acutissimo LEONHARDO EULERO S. P. D. JOH. BERNOULLI.

Annus propemodum est, quod postremas Tuas litteras accepi; ne credas quaeso, diuturni silentii causam fuisse aliquam animi mei alienationem, nosti enim et fateris ipse, quot quantaque Tibi olim dederim benevolentiae testimonia, ut plane non sit, cur ullam in me erga Te suspiceris mutationem. Vera potius dilationis causa est partim locorum longinquitas, partim sumtus erogandi in litteras mittendas et accipiendas per cursorem publicum. Utor itaque hac occasione commoda, qua citra sumtus ad Te amandare possim dissertationem filii mei JOHANNIS de propagatione luminis, condecoratam praemio superioris anni ab academia regia Parisina[2]), de qua, postquam eam perlegeris, judicium Tuum (quod ferre soles ex animi sententia) praestolabimur.

Vidi quae perscripsisti filio meo DANIELI de utriusque nostrum dissertationibus super declinationibus orbitarum planetariarum[3]), id quod judicas

1) Bei dem folgenden Abdruck habe ich auch das Konzept verglichen.

2) Siehe die Abhandlung von JOHANN II BERNOULLI, *Recherches physiques et géométriques sur la question: Comment se fait la propagation de la lumière?;* Pièce qui a remporté le prix de l'académie royale des sciences, proposé pour l'année 1736 (Paris 1736). 66 S. 4⁰.

3) Siehe die Abhandlungen von DANIEL BERNOULLI, *Recherches physiques et astronomiques sur le problème: Quelle est la cause physique de l'inclinaison des plans des*

de Danielis opere, videri scilicet deproperatum fuisse summa cum festinatione, idem et mihi visum fuerat, quod etiam statim ipsi exprobraveram. Si dicere licet quod sentio, credo ipsum ad optatum finem non perventurum fuisse, nisi paucis mensibus ante praemiorum distributionem reditum suum ex Moscovia per Lutetiam sumsisset, ubi occasionem invenit prensandi quorundam benevolentiam aut aliquid aliud moliendi, sicuti Tu ipse festive jocaris, quando dicis, in dissertatione Danielis hoc unum praecipue laude dignum reperiri, quod praemium reportaverit. In solidiorem mihi vergit gloriam honorifica quam fers sententia de mea dissertatione, eam nempe elaboratam esse magna diligentia atque insigni ingenio; quod vero addis Te dubitare an ipse credam, quaestionem per theoriam meam plenarie solutam esse: ad hoc respondeo a nemine exigi posse, ut in rebus mere physicis promittat solutiones omni exceptione majores atque ad rigorem geometricum demonstrabiles; sufficit si secundum principia clara et semel stabilita ratiocinando recte procedat. Certe non puto, Cartesium vel Newtonum, vel alium quemvis ex philosophis, qui systema physicum condidit, ausum fuisse vitam aut animam suam oppignerare pro systematis sui exacta convenientia cum rerum existentia. 1)

Accepi a Filio, novam Mechanicam a Te parari ejusque tomum primum jamjam e prelo evasisse, id quod intelligere summo me gaudio afficit, spero namque me in hoc opere visurum multa singularia ex sagacissimi Tui ingenii promtuario depromta atque ab aliis Mechanicae scriptoribus intacta; a Tuo quippe mentis acumine, quod ad profundissima penetrat naturae mysteria, nihil non novi, nihil non limatissimi mihi promitto: facile sane provideo Te non haerere tantum in explicandis vulgaribus istis et trivialibus Staticae legibus atque machinarum viribus ab aliis dudum occupatis; dabis operam haud dubie, ut sublimior Mechanicae pars, quae est Dynamica, hactenus segniter admodum tractata, a Te in plena sua luce prodeat, ubi praesertim ansam habebis naturam virium vivarum ita penitus excutiendi, ut nullus vel pertinacissimis adversariis relinquatur locus, quo suis cavillationibus ex invidia an imperitia an ex utraque identidem nobis obtrusis veram earum virium aestimationem arrodere non desinunt, id quidem ego nunc obtinui meis demonstrationibus, in disser-

---

orbites des planètes; Pieces qui ont remporté le prix double de l'académie des sciences en 1734 (Paris 1735), S. 95—144, und von Johann I Bernoulli, *Essai d'une nouvelle physique céleste, servant à expliquer les principaux phénomènes du ciel, et en particulier la cause physique de l'inclinaison des orbites des planètes par raport au plan de l'equateur du soleil;* Pièces etc., S. 1—91.

1) Hier sind 29 Zeilen des Konzeptes gestrichen (möglicherweise von Johann II Bernoulli) und unleserlich. Diese Zeilen sind bei Fuss nicht abgedruckt.

tatione mea de motu[1]) tum et alibi expositis, ut nunc in Gallia passim veritas triumphet, sed Anglis usque adeo adhuc stomachum movet (ex livore credo contra LEIBNITIUM, primum virium vivarum assertorem) ut cum unum alterumve ad silentium redactum atque e medio sublatum esse putamus, statim duo tresve alii prorumpant vehementius declamantes, non secus ac esset in Anglia Hydra Lernaea ad quam domandam Te tanquam Hercule opus erit. JURINUS[2]) imprimis, ut in Act. Lips. legi, horribilem strepitum excitat contra virium vivarum Patronos, sed insulsis adeo atque jejunis argumentis utitur, ut commiserationem potius quam indignationem commoveat: lepidum fuit vidisse in Actis Lips. 1735 m. Majo recensionem quarundam dissertationum JURINI[3]) in quarum ultima inepte debacchatur contra virium vivarum defensores et nominatim quidem contra me, sed cui recensioni immediate subjecta est mea aliqua Dissertatio *De vera notione virium vivarum earumque usu in dynamicis*[4]), quasi eam dedita opera scripsissem in refutationem praecedentis dissertationis JURINianae, etiamsi re vera mihi nondum innotuerit a JURINO quicquam ea de re scriptum fuisse.

Percepi porro te invenisse[5]) modum summandi seriem fractionum

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.}$$

$$\text{h. e. } 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{etc.},$$

cujus nempe denominatores procedunt ut quadrata numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, etc., id quod olim fratri meo JACOBO imperscrutabile fuit,

1) *Discours sur les loix de la communication du mouvement* (siehe Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 351).

2) JAMES JURIN, Arzt in London, geb. 1684, gest. 1750.

3) Eine Anzeige der *Dissertationes physico-mathematicae* (London 1732) von J. JURIN findet sich in den Acta Eruditorum 1735, S. 205—209.

4) Veröffentlicht von JOHANN BERNOULLI in den Acta Eruditorum 1735, S. 210—230, abgedruckt in seinen *Opera omnia*, T. III S. 239—260.

5) In meinem Aufsatze *Note historique sur la somme des valeurs inverses des nombres carrés* (Biblioth. Mathem. 1890, S. 22—24) habe ich angenommen, daß die Worte „Percepi porro" sich auf den verlorenen EULERschen Brief an JOHANN BERNOULLI vom Jahre 1736 beziehen. Beachtet man aber den früheren Passus: „Accepi a filio, novam Mechanicam a te parari", wird es wahrscheinlicher, daß die Worte „Percepi porro" auf ein Schreiben von EULER an DANIEL BERNOULLI hinweisen, und in der Tat weiß man, daß dieser vor dem 12. September 1736 einen Brief von EULER erhielt (vgl. FUSS, a. a. O. II, S. 435), wo die Formel

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

angegeben wurde. Wie dem auch sei, sicher ist, daß EULER schon im Jahre 1736 die Reihe der reziproken Quadratzahlen summiert hatte, und daß JOHANN BERNOULLI Kenntnis davon bekam.

sicuti ipse fatetur in tractatu suo *De seriebus infinitis* p. 254; invenisti namque summam illius seriei $= \frac{cc}{6}$, nominando scilicet diametrum circuli $= 1$, ejusque circumferentiam $= c$; volebat meus Daniel fontem ejus indagare, sed irrito successu, quanquam in postremis Tuis litteris ad ipsum aliquid ni fallor de fundamento ei aperueris, cum primum vero mihi nominasset summam a Te inventam $\frac{cc}{6}$, praetereaque nihil, indeque ego intellexissem summam seriei reduci ad quadraturam circuli, curiosus unde petenda esset analysis, mox ipse proprio meo Marte totum detexi mysterium, in subsidium vocato elegantissimo aliquo theoremate Newtoni, quod sine demonstratione extat in ejus Algebra p. 251 edit. Lond. an. 1707, cujus autem demonstrationem etiam ego inveni, ubi traditur modus, quo ex coefficientibus terminorum datae alicujus aequationis determinatur summa non tantum radicum, sed et ex radicibus summa quadratorum, cuborum, quadrato-quadratorum, etc. Ut itaque judicare possis an rem acu tetigerim, exprimam hic summas serierum ubi denominatores progrediuntur ut potentiae quartae, tum etiam ut potentiae sextae numerororum naturalium 2, 3, 4, 5, etc. Inveni enim (instituendo pro singulis novum calculum)

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.} = \frac{c^4}{90},$$

$$\text{item } 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \text{etc.}^{1)} = \frac{c^6}{940};$$

ex istis porro elicietur summa

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \text{etc.}$$

atque ita successive progredi licebit ad altiores dimensiones. Sed calculus gradatim fit operosior, extenditurque tantum ad exponentes dimensionum pares; quod si vero sint impares, fateor me quaesiti nondum esse compotem. Si quem possideas modum pro imparibus, ex. gr. pro hac serie summanda

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}$$

gratum erit a Te edoceri. Caeterum scrupulus aliquis subest in hoc negotio ex eo oriundus, quod pro hypothesi assumitur ex coefficientibus terminorum alicujus aequationis, etiam infinitae, dependere radicum determinationem, id quod quidem in genere verissimum est, sed saepissime

---

1) Die Summe der Reihe ist bekanntlich $\frac{\pi^6}{945}$, nicht $\frac{\pi^6}{940}$, wie Johann Bernoulli hier durch einen Schreibfehler angibt; siehe die Bemerkung in Eulers Antwortschreiben (unten S. 257).

accidit ut in aequatione proposita lateant praeter radices utiles (quae problema solvunt) etiam inutiles seu peregrinae, imo quoque impossibiles seu imaginariae; adeoque in hac aequatione ad quam pervenitur

$$e - x + \frac{x^3}{2.3} - \frac{x^5}{2.3.4.5} + \frac{x^7}{2.3\ldots7} - \text{etc.} = 0,$$

ubi x denotat arcum circuli incognitum sinui dato e respondentem, demonstrandum esset nullam contineri radicem impossibilem, nullamque aliam, quam quae re vera alicui ex infinitis arcubus ad sinum e pertinentibus respondeat. Habeo quidem in hoc casu aliquam demonstrationis speciem quae mihi rem utcunque probabilem reddit: alias innumera possem afferre exempla, in quibus ita ratiocinando ad manifestam absurditatem delaberemur, ut si posito radio circuli $= 1$, arcu quodam dato a, tangente incognita $= t$, nosti utique hanc haberi aequationem

$$a = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \text{etc.},$$

adeoque

$$a - t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{7}t^7 - \text{etc.} = 0;$$

haec ergo aequatio infinitas radices t habet, ex illis tamen omnibus unica tantum satisfacere ipsique arcui a respondere potest.

Sed Te diutius detinere nolo. Vale, vir clarissime, et me quod facis amare perge.

Dabam Basileae a. d. 2. April 1737.

13.

Euler an **Bernoulli** 27. August 1737.

Antwort auf Bernoullis Brief vom 2. April 1737. Original in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. Einige Zeilen veröffentlicht von Eneström im Bihang till svenska vetenskapsakademiens handlingar 5, Nr. 21 (1880), S. 24 und in der Biblioth. Mathem. 1890, S. 23.

Inhalt. Über die Fortpflanzung des Lichtes und die Geschwindigkeit des Schalles. — Über die *Mechanica* des Euler. — Abhandlungen von Johann Bernoulli für die Commentarii der Petersburger Akademie. — Die Pariser Preisschriften der jüngeren Bernoullis. Die Summe der Reihe

$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \text{etc.}$$

für besondere Werte von n, sowie der Reihe

$$1 + \frac{1}{(-3)^n} + \frac{1}{(+5)^n} + \frac{1}{(-7)^n} + \frac{1}{(+9)^n} + \frac{1}{(-11)^n} + \text{etc.}$$

Über die Wurzeln der Gleichung

$$a - t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + \text{etc.} = 0.$$

Über die Reihe

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{26}+\text{etc.},$$

wo alle Nenner die Form $a^r - 1$ haben, sowie über die Reihe

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\text{etc.},$$

wo die Nenner lauter Primzahlen sind. — Über das unendliche Produkt

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\text{ etc}$$

Über unbestimmte Infinitesimalrechnung und das Problem zwei algebraische Kurven zu finden, die zwar nicht algebraisch rektifizierbar sind, aber die Eigenschaft haben, daß die Summe ihrer zu ein und derselben Abscisse gehörenden Bogen eine algebraische Funktion dieser Abscisse ist.

Viro Celeberrimo atque Excellentissimo Joanni Bernoulli S. P. D.

Leonhard Euler.

Litterae Tuae postremae d. 2. April. hujus anni, quas quidem magno desiderio expectaveram, eo mihi gratiores fuere, quod me de Tua ergo me benevolentia, quam non solum maximi facio sed etiam omni studio et opera mereri conabor, certiorem facere volueris.

Gratias igitur Tibi, Vir Celeberrime, ago maximas cum pro insignibus Tui erga me amoris testimoniis, tum pro mecum communicata Filii Tui Clarissimi Joannis dissertatione de Lumine praemio condecorata ab Acad. Reg. Parisina, in qua exquisitum Auctoris ingenium in hujusmodi rebus physicis vehementer sum admiratus. Imprimis autem mihi placuit explicatio diversitatis radiorum lucis, quam Newtonus tantum observavit, nemo autem adhuc ex physicis principiis explicare nequidem est conatus; quantum mihi quidem constat. Quod autem ad celeritatem luminis attinet, fateor me modum quo est usus ad eam a priori determinandam, non satis perspicere; in hoc vero eo magis haesito, quod calculus ad sonum accommodatus illam ipsam praebeat celeritatem, quam Newtonus assignavit, quae tamen cum experientia minus congruit. Mihi quidem magis consentanea videtur mea celeritatis soni determinatio quam in mea de sono dissertatione[1]) exhibui, et cum experimentis apprime convenire ostendi, quam etiam Tute, Vir Celeb., Tua probatione confirmare es dignatus.

Non dubito quin jam acceperis Tomos Comment. nostrorum, qui Tibi adhuc defuerant, una cum mea *Mechanica*,[2]) quos jam ante Tuas acceptas litteras ad Te transferri curavi; prout etiam in posterum opera, quae hic prodibunt, Tibi transmittentur, quae tanquam emolumenta promissa accipere velis.

---

1) Vgl. Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 348 Anm. 4.

2) Die *Mechanica sive motus scientia analytice exposita* erschien bekanntlich im Jahre 1736.

Deinde Illustr. Praefectus noster mihi demandavit Academiæ nomine Tibi gratias agere maximas pro acutissimis Tuis dissertationibus nobiscum communicatis,[1]) Teque omni studio rogare, ut in posterum eximia inventa Tua nobis largiri velis atque Tibi etiam persuadeas, Academiam ea non solum maximi esse aestimaturam, sed etiam in Te Principem Mathematicorum summumque societatis nostrae decus agnoscere. Quamobrem noli suspicari quemquam apud nos esse, qui Te non omni quam ubique es consecutus, aestimatione veneretur.[2])

Ex postremis litteris Parisinis non sine ingenti gaudio cognovi ambos auctores anonymos, quibus hoc anno ab Acad. R. Paris. praemia sunt decreta, Tuos esse Filios,[3]) de quo tam Tibi, Vir Celeb., quam ipsis ex animo gratulor.

De *Mechanica* mea judicium Tuum integrum pariter ac Filiorum Tuorum summo desiderio expecto. Ex instituto autem, quod sum secutus, sine dubio jam intellexisti in his tomis locum nondum fuisse ad doctrinam de viribus vivis tractandam, erit autem in sequentibus tomis, ubi corporum finitae magnitudinis motus perpendentur.

Summatio serierum reciprocarum potestatum parium, quam scripsisti, apprime cum mea methodo congruit, quippe quae theorematis circa naturam coefficientium versantibus nititur; ibi lapsu calami evenisse arbitror, quod pro summa hujus seriei

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \text{etc.}$$

posuisti $\frac{c^6}{940}$, cum ea sit $\frac{c^6}{945}$. Pro sequentibus potestatibus paribus calculus fit non solum prolixior, sed ediam ipsae expressiones perquam fiunt complicata, ita

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} \text{ etc.} = \frac{c^8}{9450}$$

atque

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \text{etc.} = \frac{c^{10}}{93555},$$

qui denominatores etiamsi legem tenere quandam videantur, tamen numeratores per accidens hucusque fuerant 1, nam summa hujus

---

1) Die von Euler angedeuteten Artikel sind wohl die zwei Abteilungen der Abhandlung *De motu corporum se invicem percutientium* in dem 1740 herausgegebenen Band 7 („ad annos 1734 et 1735") der Comment. acad. sc. Petrop.

2) Hier sind 9 Zeilen gestrichen; wahrscheinlich rührt die Streichung von Johann II Bernoulli her.

3) Siehe Johann II Bernoulli, *Discours sur les ancres* (Pièces qui ont remporté les prix de l'académie des sciences en 1737, Paris 1737, S. 1—32) und Daniel Bernoulli, *Réflexions sur la meilleure figure à donner aux ancres et la meilleure manière de les essayer* (Pièces etc. S. 47—84).

$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \text{etc.}$$

in numeratore habet 691.

Potestates impares summare nequeo, nec opinor earum summam a circuli quadratura pendere, omnes autem series, quarum summationem hoc modo inveni, continentur in hac generali

$$1 + \frac{1}{(-3)^n} + \frac{1}{(+5)^n} + \frac{1}{(-7)^n} + \frac{1}{(+9)^n} + \frac{1}{(-11)^n} + \text{etc.},$$

si quidem n denotet numerum integrum affirmativum sive parem sive imparem[1]).

Dubium quod circa hanc methodum affers, utique magni est momenti, neque tam facile demonstratu arbitror aequationem illam nullas radices imaginarias continere. Interim tamen regula Newtoni nullas radices imaginarias indicat, unde forte plenaria certitudo derivari posset. At cum haec ipsa methodus seriem Leibnitianam

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \text{etc.}$$

suppeditet, atque reliquarum serierum summae, cum iis, quas jam diu ante per approximationem erui, apprime conveniant, hoc ipsum instar confirmationis methodi haberi poterit.

Praeterea vero alia methodo longe diversa eandem inveni summam hujus seriei

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.},$$

quae methodus est sequens.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{1}{2}\left(\int\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}\right)^2.$$

At $\int\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$ exprimit arcum cujus sinus est x, atque posito post integrationem $x = 1$, denotabit $\int\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$ quartam peripheriae partem, posito radio $= 1$, vel Tua designandi modo erit $\int\frac{dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{c}{2}$.

Quamobrem posito $x = 1$ erit

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{c^2}{8}.$$

---

1) Siehe die Bemerkung von Euler S. 129—130 der Abhandlung *De summis serierum reciprocarum;* Comment. acad. sc. Petrop. 7, 1734/1735 (gedruckt 1740), sowie seine *Dissertatio altera de summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum;* Miscell. Berolin. 7, 1743, S. 172—192.

Est vero, ut constat,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}} = x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^7 \text{ etc.},$$

quo valore substituto fiet

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}} = 1 \int \frac{xdx}{\sqrt{1-xx}} + \frac{1}{2.3}\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-xx}} + \frac{1.3}{2.4.5}\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-xx}} + \text{etc.},$$

qui singuli termini sunt integrabiles, si vero post integrationem peractam ponatur $x = 1$, habebitur ista series

$$1 + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.5} + \frac{1}{7.7} + \frac{1}{9.9} + \text{etc.},$$

cujus adeo summa erit $\frac{c^2}{8}$; unde hujus

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.}$$

summa erit $\frac{c^2}{6}$, prout altera methodo inveni, neque dubito quin etiam simili analysi reliquae summae elici queant, etiamsi ego nondum eo pertingere potuerim.

Denique non video, cur ista methodus in hac serie

$$a - t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + \text{etc.} = 0$$

ad absurditatem deducat. Quamvis enim unica radix t sit realis, tamen nil impedit, quin summa omnium radicum ipsius $\frac{1}{t}$ sit $\frac{1}{a}$: atque ita porro.

Magis curiosae quamvis minus utiles videntur summationes serierum, quarum lex progressionis ad terminum generalem revocari nequit, cujusmodi est haec

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \text{etc.},$$

cujus denominatores unitate aucti dant omnes numeros qui sunt potestates, hujus autem summam esse $= 1$ demonstravit Cel. GOLDBACH noster.[1]) Ita ego etiam demonstravi[2]) summam serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \text{etc.},$$

---

1) Vgl. die Bemerkung von EULER S. 97 der Abhandlung *Methodus generalis summandi progressiones;* Comment. acad. sc. Petrop. **6**, 1732/1733 (gedruckt 1738), sowie seine *Variae observationes circa series infinitas*; Comment. acad. sc. Petrop. **9**, 1737 (gedruckt 1744), S. 160—188.

2) Siehe die soeben zitierte Abhandlung *Variae observationes* etc., wo der Satz S. 187—188 aufgestellt und bewiesen ist.

cujus denominatores sunt omnes numeri primi, non solum esse infinitam sed etiam exprimere logarithmum hujus

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{etc.}$$

Pari modo ostendi[1]) esse

$$2 = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \text{etc.},$$

quae fractiones in se mutuo multiplicatae ita sunt comparatae, ut numeratores sint numeri pares, denominatores vero impares unitate vel majores vel minores numeratoribus, deinde ut aggregata numeratorum et denominatorum fractionum singularum sint numeri primi 3, 5, 7, etc.

Sed missis hisce circa series speculationibus novam analyseos infinitorum partem detexi,[2]) cujus Tu, Vir Celeb., primus specimen dedisti[3]) in investigandis curvis algebraicis, quarum rectificatio a data quadratura pendeat. Vocari convenit hanc partem analysin infinitorum indeterminatam, similique modo differt haec analyseos species a jam cognita, quo methodus Diophantoea ab algebra determinata. Hac autem nova analysi tales requiruntur formularum differentialium indeterminatarum determinationes, ut earum integratio vel algebraice succedat, vel a data quadratura pendeat; ita in problemate a te soluto posita abscissa x et applicata $\int p\,dx$, requiruntur valores pro p et x ut $\int p\,dx$ fiat quantitas algebraica, at $\int dx\sqrt{(1+pp)}$ a data quadratura pendeat. Hanc igitur analyseos partem jam certis legibus circumscripsi, atque in ordinem systematicum redegi, ita ut plurima problemata alias difficillima hac mea methodo facile resolvere potuerim; qualia specimina hic jam plura dedi. Pertinet huc problema, cujus jam ante aliquot annos ad Celeb. Filium Tuum[4]) mentionem feci, et quod ita se habet. Invenire (Fig. 1) duas curvas algebraicas AM et AN ad communem axem AP relatas quae non sint rectificabiles, sed quarum rectificatio a data pendeat quadratura; quae tamen hoc non obstante habeant summam arcuum $AM + AN$, qui eidem abscissae AP respondent,

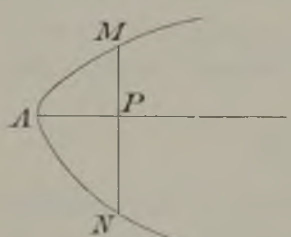


Fig. 1.

1) Siehe S. 180 der auf der vorigen Seite zitierten Abhandlung *Variae observationes* etc.

2) Vgl. die Abhandlung von Euler, *De curvis rectificabilibus algebraicis atque trajectoriis reciprocis algebraicis*; Comment. acad. sc. Petrop. 5, 1730/1731 (gedruckt 1738), S. 169—174.

3) Joh. Bernoulli, *Methodus commoda et naturalis reducendi quadraturas transcendentes cujusvis gradus ad longitudines curvarum algebraicarum*; Acta Eruditorum 1724, S. 356—366 (abgedruckt in den *Opera omnia*, T. II S. 582—592).

4) Der erwähnte Brief ist aus dem Jahre 1734 (Original in der herzogl. Bibliothek in Gotha).

rectificabilem. Hujus autem problematis sequentem methodo mea inveni solutionem.[1]) Sit q functio quaecunque ipsius p; et ponatur

$$\sqrt{(1+pp)} + \sqrt{(1+qq)} = N$$

et

$$\sqrt{(1+pp)} - \sqrt{(1+qq)} = M$$

brevitatis gratia; deinde involvat $\int P\,dp$ eam quadraturam, a qua utriusque curvae quaesitae rectificatio pendere debet, ita ut ergo q, N, M et P sint quantitates ex p et constantibus compositae, ex quibus formetur

$$t = \frac{P\,dp}{\text{diff.}\left(\dfrac{d\dfrac{d\frac{dM}{dp}}{d\frac{dq}{dp}}}{d\dfrac{d\frac{dN}{dp}}{d\frac{dq}{dp}}}\right)},$$

scilicet t aequatur fractioni, cujus numerator est $P\,dp$, denominator vero est differentiale fractionis, cujus numerator est $d\dfrac{d\frac{dM}{dp}}{d\frac{dq}{dp}}$ et denominator $d\dfrac{d\frac{dN}{dp}}{d\frac{dq}{dp}}$, prefixione nimirum signi d differentiale totius expressiones sequentis denotavi. Ex data hoc modo quantitate t fiat

$$s = \frac{dt}{d\left(\dfrac{d\frac{dN}{dp}}{d\frac{dq}{dp}}\right)}$$

atque porro

$$r = \frac{ds}{d\frac{dq}{dp}}.$$

Ex his denique si sumatur abscissa communis AP, $x = \dfrac{dr}{dp}$ erit applicata curvae AM, scilicet PM,

$$y = \frac{p\,dr}{dp} - r$$

atque alterius curvae AN applicata PN,

$$z = \frac{q\,dr}{dp} - \frac{r\,dq}{dp} + s.$$

Q. e. i. Si rectificatio utriusque curvae a quadratura hyperbolae pendere debeat, simplicissimas curvas satisfacientes fore reor has:

---

1) Vgl. die etwas einfachere Lösung in der Abhandlung von Euler *Investigatio binarum curvarum, quarum arcus eidem abscissae respondentes summam algebraicam constituunt;* Comment. acad. sc. Petrop. 8, 1736 (gedruckt 1741), S. 23—29.

$$\text{I.} \qquad 64\,ay^3 = 27\,x^4$$

et

$$\text{II.}\ (4\,az - 8\,xx)^3 = 729\,a^2x^4.$$

Solutio autem, quam dedi pro isto problemate maxime universalis est, atque omnes possibiles solutiones sub se complectitur, pariter ac Tua, Vir Celeb., solutio problematis Hermanniani;[1]) dantur autem alia problemata ejusdem generis, quae hac methodo generaliter solvi non patiuntur, etiamsi innumerabiles solutiones particulares dari queant; tale est si requiratur curva algebraica cujus rectificatio a sua ipsius quadratura pendeat, qua scilicet proprietate circulus gaudet, hujusmodi curvas post circulum facile infinitas exhibere possum, quarum simplicissima mihi videtur, quae hac aequatione

$$y^2 = x^2 + \frac{5\,ax}{2} + \frac{125\,aa}{16}\,4\,x\sqrt{ax}$$

exprimitur. Generaliter autem hoc problema latissime patens resolvere possum: datis quotcunque formulis differentialibus pdx; qdx; rdx; sdx; etc. invenire quantitatem z, quae in singulas ducta, singulas reddat integrabiles.

Vale, Vir Celeberrime, meque favore Tuo constanter complectere.

Dabam Petropoli ad d. 27. Aug. 1737.

14.

Bernoulli an Euler 6. November 1737.

Antwort auf Eulers Brief vom 27. August 1737. Original verloren; Konzept in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. Veröffentlicht von Eneström im Bihang till svenska vetenskapsakademiens handlingar 5, Nr. 21 (1880), S. 15—20.

Inhalt. Die Preisschrift des Johann II Bernoulli über die Fortpflanzung des Lichtes. — Die Geschwindigkeit des Schalles. — Über den Titel der Eulerschen *Mechanica*, sowie eine Bemerkung in betreff des 89. Satzes des 1. Teiles dieser Arbeit. — Kritische Bemerkungen hinsichtlich der *Phoronomia* von J. Hermann, sowie der *Principia* von Newton. — Die Pariser Preisschriften der jüngeren Bernoullis. — Die Methoden um die Summe der reziproken Quadratzahlen zu finden. — Die Summe der Reihe

$$\frac{1}{1.2} + \frac{2}{1.3.4} + \frac{2.4}{1.3.5.6} + \frac{2.4.6}{1.3.5.7.8} + \frac{2.4.6.8}{1.3.5.7.9.10} + \text{etc.}$$

— Über die Arkustangens- und die Sinus-Reihe. — Über die unbestimmte Infinitesimalrechnung.

---

1) Die von Joh. Bernoulli gelöste Aufgabe wurde von Jacob Hermann in den Acta Eruditorum 1719 gestellt; Hermann gab auch daselbst (*Solutio propria duorum problematum geometricorum in Actis erud. 1719 mense aug. a se propositorum*) 1723, S. 171—183, also vor Joh. Bernoulli, eine Lösung. — Vgl. hierüber P. Stäckel, *Beiträge zur Flächentheorie* VII; Berichte der sächs. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig 1902, S. 103, 105.

Viro Celeberrimo atque eximio LEONHARDO EULERO Mathematico longe acutissimo S. P. D. JOHANNES BERNOULLI.

Accepi litteras tuas novissimas 27 Aug. st. vet. datas, mihi gratissimas, et paulo ante Tomos quoque Commentariorum, qui mihi defuerant, cum opere tuo incomparabili *Mechanicam* tractante pro quibus omnibus ingentes gratias refero; de eo postmodum aliquid dicam, postquam respondero ad alia quae in litteris tuis habes. Ante omnia gratum fuit intelligere tibi non displicuisse filii mei JOANNIS dissertationem de lumine; difficultas quam invenis in ejus modo determinandi celeritatem tam luminis quam soni qui eandem pro sono dat celeritatem, quam NEUTONUS assignavit juste utique minorem, quam quae per experientiam deprehenditur, difficultas inquam ista jam diluitur in ipsa dissertatione, ubi origo ejus rejicitur in id quod fibra sonora consideratur ut linea recta, quae tamen tanquam coni acutissimi duplicis in vertice sibi oppositi figuram habens consideranda fuisset, sed quae studio non fuit adhibita, quia talis figurae consideratio deducit ad aequationem differentialem secundi gradus, quae ad differentias primas (ut fieri potest in suppositione lineae rectae) non potuit reduci in suppositione figurae conicae, sed simul monuit dissertationis auctor fibram, quae haberet figuram conicam re vera daturam esse vibrationes suas longitudinales promtiores quam dat fibra linearis, id quod per approximationem ope seriei convergentis reperiretur.

NEUTONUS, ad veram tarditatis causam non attendens, putavit eam consistere in extentione corpusculorum in aëre per intervalla natantium, quae concussiones impressas in instanti transmittant ab uno diametri suae extremo ad alterum oppositum, ita ut si cujusque corpusculi diameter ponatur $\frac{1}{8}$ vel $\frac{1}{10}$ unius intervalli, inde sequatur, majorem pro debito celeritatem (quae per experientiam observetur) prodituram; in dissertatione vero assumitur corpuscula solida infinities majus a se invicem distare quam sit longitudo unius diametri. Tua, vir celeberrime, *Dissertatio de sono* mihi non amplius ad manus est, neque omnino memini, quomodo se habeat tua methodus determinandi celeritatem soni. [1])

Opus tuum mechanicum quod nuper redditum mihi est a bibliopego nitidissime compactum, refertum utique est rebus sublimibus atque arduis, tuo ingenio ac sagacitate dignis; at nondum licuit, nisi perfunctorie tantum, illud perlustrare. Vidi te mei quoque aliquoties mentionem facere honorificam, id quod urbanitati tuae gratus attribuo.

Praefixisti tuo operi titulum *Mechanicae*, cujus rationem reddis in praefatione, sed nescio, annon aptius convenisset titulus *Dynamicae*; vox enim *Mechanicae* jam antiquitus recepta fuit pro indigitandis iis scientiis,

1) 59 Zeilen des Konzeptes sind hier gestrichen (möglicherweise von JOHANN II BERNOULLI) und unleserlich.

quae tractant de viribus mortuis, quarum scientiarum pars est quae vocatur Statica; mihi videtur non temere et citra necessitatem esse mutanda nomina atque ad alium sensum alliganda, quando praesertim suppetunt nomina notionem noviorem admodum bene significantia, quale est nomen *Dynamicae* quod Leibnitius indidit scientiae quae versatur circa ejusmodi vires, quae ipsae *vivae* vocantur. Sed hoc in transitu dictum esto.

Vidi te multum quoque esse in materia quam pertractaveram in Act. Lips. anni 1713.[1]) Non dubito, quin omnia bene enucleaveris, laudas mea pro sinceritate tua, laudas etiam quae Newtonus dedit in eadem materia, sed nihil dicis de ejus erroribus, quos ibi notaveram et demonstraveram, ipseque postea in nova editione *Princip. Philos.* ex mea admonitione partim correxit, nulla monitoris facta mentione, prolaudabili sc. Anglorum consuetudine; quosdam errores intactos reliquit aliosque de novo commisit. Perspicacia tua, vir cl., tibi detexit varios lapsus in Dynamicis eosque satis graves ab Hermanno commissos. neque tamen omnes notasti, quos ego etiam animadverti tam in Commentariis vestris, quam in ipsius *Phoronomia*, non dubitans, multo plures adhuc superesse, si tu et ego vellemus studio adhibito in illos inquirere. Bonus Hermannus plerumque fuit infelix quotiescunque ex connata sua aemulatione paria vel superiora voluit praestare iis, quae ab aliis ante ipsum inventa fuerunt; id imprimis curae cordique habuit, ne quid a me prodiret, quod ipsius vires superare videretur.

Permitte nunc, vir clarissime, ut moneam te amice de errore quodam qui tibi elapsus videtur ex mera inadvertentia; extat ille in solutione problematis quam tradis propositione 89 Tom. I pag. 300, ubi agitur de definienda vi centripeta P in orbita mobili, quam perperam invenis exprimi hac aequatione

$$P = 2aac\left(\frac{dp}{w^2p^3dy} + \frac{w^2-1}{w^2y^3} + \frac{q^2dw}{w^3y^2p^2dy}\right),$$

differt enim tam in forma quam in valore ab ea quam jam ante 6 circiter annos singulari modo calculandi inveni et quae haec est (retentis tuis symbolis et nominando ds elementum orbitae immobilis $(M)(m)$)

$$P = 2aac \times \left(\frac{w^2}{y^3} - \frac{1}{pds}d\left(\frac{q}{py}\right)\right),$$

ubi vides non ingredi dw ut in tua formula; curiosus itaque detegendi originem diversitatis examinavi attente totam tuam analysin deprehendique errorem latere in his verbis pag. 302 contentis:

1) Joh. Bernoulli, *De motu corporum gravium, pendulorum et projectilium in mediis non resistentibus et resistentibus, supposita gravitate uniformi et non uniformi atque ad quodvis datum punctum tendere, et de variis aliis huc spectantibus, demonstratio geometrica*; Acta Eruditorum 1713, S. 77—95, 115—132 (abgedruckt in den *Opera omnia*, T. I S. 515—558).

„Ex hoc vero perpendiculo cognoscitur vera corporis celeritas, erit enim

$$v = \frac{a^2cv}{w^2up^2} \text{ (589).“}$$

Haec quippe propositio quam citas ex art. 589 hic non quadrat, quando nempe ratio celeritatis angularis in curva vera ad celeritatem angularem correspondentem in orbita immobili non est constans, hoc est quando w est variabile. Nosti utique veritatem Propos. art. 589 fluere ex notissima illa proprietate quod in orbitis immobilibus, per corpora ad centrum fixum attracta descriptis tempora sint proportionalia areis sectorum circumcentralium, sed statim et levi attentione hic patet elementa horum sectorum circa centrum C factorum in curva vera non posse esse proportionalia elementis tempusculorum si nimirum w non est constans, unde male concluditur, pro hoc casu esse celeritatem in curva vera reciproce proportionalem perpendiculari ductae ex centro virium C in tangentem MB: ut paucis dicam, in casu w variabilis, vis retrahens corpus a tangente MB directe non tendit ad centrum C, imo ad nullum centrum fixum tendit, sed habet, ut ita dicam, centrum lineare, hoc est centrum virium mutat locum pro quolibet novo elemento curvae verae, ut autem innotescat, quantum ex illa vi aliorsum tendente quam ad C redundet ad ipsum C centrum virium in orbita immobili, id obtinetur decomponendo more solito vim absolutam ita ut ejus pars debita dirigatur ad C, quod si rite instituatur et postea calculus dextre tractetur, prodibit mea formula

$$P = 2aac \times \left(\frac{w^2}{y^3} - \frac{1}{pds} d\left(\frac{q}{py}\right)\right),$$

quae pro quocumque casu valet, sive w sit variabile sive constans, continens quoque ipsam vim centripetam pro orbita immobili, utpote ad quam extenditur supponendo tantum w esse $= 1$, sic enim evanescente motu angulari coincidit curva vera cum ipsa orbita immobili et formula mea generalis abit in hanc

$$P^1 = 2aac \times \left(\frac{1}{y^3} - \frac{1}{pds} d\left(\frac{q}{py}\right)\right),$$

unde immediate elucet veritas propositionis Newtoni *Princ. Philos.* 44 libri 1 pag. 122 Edit. secunda, quae ita sonat: *Differentia virium, quibus corpus in orbe quiescente, et corpus aliud in orbe eodem revolvente aequaliter moveri possunt, est in triplicata ratione communis altitudinis inverse* (supponit nempe rationem w ad 1 esse constantem). Nam si P^1 subtrahatur a P oritur statim

$$P - P^1 = 2aac \times \left(\frac{w^2 - 1}{y^3}\right),$$

hoc est, existente w invariabili in triplicata ratione communis altitudinis inverse. Res est clara ex formula mea, sed demonstrationem Newtonianam propter obscuritatem non satis bene intellexi. Hermannus qui idem suo modo demonstrare voluit in sua *Phoronomia* p. 97, turpem paralogismum commisit; praeterquam enim quod nullam attentionem faciat an w sit variabile an invariabile, reperiretur per ejus ratiocinium

$$P - P^1 = \left(\frac{ww - 2w + 1}{y^3}\right);$$

fons erroris et paralogismi in hoc consistit, quod admodum inepte et illicite decomponit ipsam celeritatem per bg (vid. ejus fig. 45) in duas celeritates collaterales per bm et mg, considerando hanc per mg tanquam circulum circa centrum C, quamvis aequo jure circa quodvis aliud centrum in recta bC sumtum circulatio considerari posset; praeterea quis unquam sanae mentis Geometra celeritati decompositae cum sit tantum imaginaria vel idealis attribuit tamen affectionem realem? Quid si curva vera $ANbg$ abiret omnino in lineam rectam, ita ut corpus in illa motum, nulla vi attractum moveretur celeritate aequabili, annon eodem argumento Hermanniano sequeretur circulantem celeritatem per mg circa centrum C producere vim centrifugam, quae tamen nulla esset vel in imaginatione tantum existens?

Sed in his nimius sum; hoc interim monere adhuc volui, annon corrigenda sint corollaria, quae tuae solutioni subjungis, saltem ea quae nituntur Propositione art. 589, male applicata ad casum ubi w est variabile; haec omnia examinare, cum mihi ob temporis penuriam non vacet examen instituendum tibi ipsi lubens relinquo.

Gratulationem tuam cum singulari gaudio, quod testaris, consumtam ob reportata a filiis meis praemia circa Anchoras proposita gratissimo animo accepi, tibi quoque ut omnia prospere et ex voto cedant quae suscipis, enixe apprecans.

Quae de seriebus disseris sunt omnino pulchra atque acutissimo tuo ingenio dignissima; mirifice placet altera tua methodus summandi seriem

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.},$$

quae in hoc consistit, ut statim ponas

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1}{2}\left(\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}\right)^2,$$

ex quo post operationes aliquot pervenitur ad hanc seriem

$$1 + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.5} + \frac{1}{7.7} + \text{etc.} = \frac{c^2}{8}$$

unde porro fluit

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \&c = \frac{cc}{6};$$

instituti ego calculum et successum habui asserto tuo prorsus conformem. Haec altera methodus est demonstrativa adeoque priori, quae procedit ex natura radicum in aequationibus, longe praeferenda. Ad imitationem hujus aliam quoque inveni seriem eidem $\frac{cc}{8}$ aequalem nempe hanc[1])

$$\frac{1}{1.2} + \frac{2}{1.3.4} + \frac{2.4}{1.3.5.6} + \frac{2.4.6}{1.3.5.7.8} + \frac{2.4.6.8}{1.3.5.7.9.10} + \text{etc} = \frac{cc}{8}.$$

Potest esse factum, ut in praecedentibus meis litteris ex festinatione scripserim $\frac{c^6}{940}$ pro $\frac{c^6}{945}$, haec mihi nunc non sunt praesentia.

Quando dicis te non videre, cur ista methodus nempe prior in hac serie

$$a - t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t^5 + \text{etc.} = 0$$

ad absurditatem deducat, ex eo colligo, te meam mentem non recte percepisse; volebam enim facere argumentum ad hominem contra eum, qui vellet concludere in serie sinuum ex arcubus cognoscendorum

$$x - \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1}{2.3.4.5}x^5 - \frac{1}{2.3\ldots.7}x^7 + \text{etc.}$$

contineri praecise et necessario omnes arcus possibiles eidem sinui respondentes, nullosque alios nec imaginarios nec peregrinos; quamvis re vera res ita se habeat adeoque nullam in ea aequatione esse radicem, quae non aliquem arcum quaesitum designet, hoc ergo si necessario ex istiusmodi seriebus concludi posset, simili utique modo in altera serie

$$a - t + \frac{1}{3}t^3 - \text{etc.} = 0$$

quaelibet radix t daret unam et ab aliis diversam tangentem eidem arcui a respondentem, quod certe absurdissimum foret, quia una tantum tangens uni arcui respondere potest, quando infiniti arcus communem sinum habere possunt.

Quae memoras ex nova, quam te detexisse dicis analyseos infinitorum parte, sapiunt sane profundissimam meditationem, dignam utique ut excolatur; gaudeo te agnoscere me primum ejus dedisse specimen, alludis haud dubie ad schediasma meum exhibitum in Act. Lips. 1724 m. Aug. ubi ad has tuas speculationes fundamentum posui. Tuo autem opus erat ingenio, tua sagacitate ut inde tam recondita mysteria eruerentur.

Vale, vir celeb., mihique favere perge. Bas. a. d. 6. Nov. 1737.

---

1) Vgl. Joh. Bernoulli, *Summatio seriei* $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.}$; *Opera omnia,* T. IV S. 20—25.

15.

Euler an Bernoulli 10. Dezember 1737.

Antwort auf Bernoullis Brief vom 6. November 1737. Original in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. — Auszüge veröffentlicht von Eneström im Bihang till svenska vetenskapsakademiens handlingar 5, Nr. 21 (1880), S. 23.

Inhalt. Erwiderung auf die Bemerkungen von Johann Bernoulli in betreff des 89. Satzes des 1. Teiles der *Mechanica*, sowie des Titels der Arbeit. — Über ein paar andere Stellen der *Mechanica*. — Die Summe der reziproken Quadratzahlen und der von Johann Bernoulli im Briefe vom 6. November 1737 erwähnten Reihe. — Über das Gleichgewicht und die Bewegung schwimmender Körper. — Über exzentrisches Zusammenstoßen von Körpern.

Viro Excellentissimo atque Celeberrimo Joanni Bernoullio S. P. D. Leonhardus Euler.

Quas ad me dedisti litteras, Vir Celeberrime, d. 6 Novemb. summo cum gaudio accepi et perlegi. Imprimis autem maximas Tibi refero gratias, tam pro benevolo et forsitan nimis benigno, quod de opere meo ferre dignatus es, judicio, quam pro exquisitissimis annotationibus Tuis mecum communicatis: enixe rogans atque obsecrans, ut cum vacaverit hoc meum opus attentius perlustrare, de singulis judicium Tuum acutissimum perscribere velis. Tantum enim abest, ut si qua in re cespitaverim, errorem sustinere et defendere velim, ut potius correctionem non solum gratissimo animo sim accepturus, sed etiam palam testaturus.

Hoc consilio lapsum, quem in prop. 89 Tom. I deprehendisse es visus, statim etiam antequam rem diligentius considerassem, lubens agnovi atque quibusdam collegis aperui. Sed cum istam propositionem attentius inspexissem, inveni casum, quem ego tracto, prorsus diversum esse ab eo, quem Tibi, Vir Celeb., tractasse videbar. Non enim quaero vim centripetam, quae faciat, ut corpus in orbita mobili eodem modo moveatur, quo in immobili ad idem centrum attractum moveretur, quo casu solutio mea utique erronea esset, cum vis quaesita non ad centrum fixum tendat, nisi w sit constans. Hunc autem casum evolvi in prop. 94 coroll. 2, ubi expresse notavi, praeter vim ad centrum tendentem P aliam insuper vim Q requiri in aliam plagam directam, quae non evanescit, nisi w sit constans. In propositione vero 89 motum in orbita immobili tanquam incognitum specto, neque eum leges vis centripetae sequi pono; alioquin enim non invenissem

$$u = \frac{a^2 c}{w^2 p^2};$$

sed ponere debuissem

$$u = \frac{a^2 c}{p^2}.$$

Quaero scilicet in hac propositione vim ad fixum centrum tendentem, quae faciat, ut corpus in data orbita utcunque mobili revolvi queat, omissa ea conditione, ut corporis motus in ipsa orbita centrum respiciat, et areas temporibus proportionales abscindat. Hoc ipsum tam ex solutione quam coroll. 2 elucet, ubi notavi fieri non posse, ut corpus in eadem orbita, si immobilis esset, eodem modo circa centrum revolvatur, nisi w sit constans; idem etiam magis ex coroll. 3 colligere licet. Cum igitur ipsa propositio requirat, ut verus corporis motus centrum respiciat, et arcus temporibus proportionales circa illud absolvat, sine ulla haesitatione posui veram corporis celeritatem perpendiculo $M\Theta$ reciproce proportionalem. Hanc autem et sequentes propositiones ideo potissimum adjeci, ut cum difficillimum esset motus corporum determinare, nisi vires sint admodum simplices, nonnullos saltem casus eruerem, quibus motum respondentem viribus magis compositis assignare liceret.

Quod ad titulum mei operis attinet, agnosco dynamicae nomen esse convenientius, et optarem eo usum esse, sed tum temporis in mentem ejus mihi non venit.

Permitte autem, Vir Celeb., ut Tibi ingenue fatear, quid ego ipse quantum mihi etiamnum philautia permisit, in mea mechanica desiderem quod etiam Tute statim et insuper forte plura alia deprehendes, si attente eam perlegere dignaberis. Nescio scilicet, quonam calculo cum prop. 78 Tom. I tractarem, eo sim deductus, ut crediderim nisi directio corporis initio projecti ponatur normalis ad radium vectorem, veram curvam, quam corpus describit per calculum non elici; in qua etiam opinione necesse esse duxi primam corporis directionem in sequentibus hypothesibus normalem ad radium vectorem ponere. Ita deleri vellem Scholium 2 huic propositioni subnexum, in quo asserui per calculum prodire curvam quarti ordinis, si corpus initio oblique projici poneretur, atque etiam hujus paradoxi causam assignare volui. Calculo enim postmodum repetito ellipsin facile elicui, ita ut prima vice in calculo errorem nescio amplius qualem commiserim, qui me in tam incongruam opinionem tum deduxerit. Interim tamen hinc toti tractationi aliud damnum non contigit, nisi quod per ambages veras projectorias determinaverim, quas brevius et concinnius eruere potuissem. Deinde etiam diu haesitavi, utrum projectoria in medio quod in duplicata ratione celeritatum resistit, quamque Tu, Vir Celeb., primus invenisti,[1]) asymtotam habeat verticalem, prout projectoria HUGENiana in medio in simplici celeritatum ratione resistente, an

1) Siehe JOH. BERNOULLI, *Responsio ad nonneminis provocationem, ejusque solutio quaestionis ipsi ab eodem propositae de invenienda linea curva quam describit projectile in medio resistente;* Acta Eruditorum 1719, S. 216—226 (abgedruckt in den *Opera omnia*, T. II S. 393—402).

secus. Tandem quidem, quasi per transennam cognovi, praeditam esse hanc curvam asymtota, sed tamen ejus distantiam et indolem reliquam definire non valui; hanc ob rem contentum me esse oportuit in § 951 Tom. I tantum indicasse istam curvam asymtota gaudere. Quocirca si tu forte, Vir Celeb., hoc negotium jam confeceris, etiam atque etiam rogo, ut mihi plus lucis foenerari velis.

Alteram meam methodum mere analyticam, qua seriei

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.}$$

summan inveni, Tibi tantopere probari vehementer gaudeo, eamque ipse alteri longe praeferrem, si pariter ac illa ad potestates superiores accommodari posset, quod quidem adhuc praestare non potui, etiamsi non dubitem eam aeque late patere. Tolluntur vero utique hujus methodi cum priore congruentia omnia dubia, quae circa alteram methodum moveri possunt.

Seriei

$$\frac{1}{1.2} + \frac{2}{1.3.4} + \frac{2.4}{1.3.5.6} + \text{etc.}$$

summam esse $\frac{cc}{8}$ ego quoque jam pridem deprehendi; est enim generaliter

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1}{2}\left(\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}\right)^2 =$$

$$\frac{x^2}{1.2} + \frac{2.x^4}{1.3.4} + \frac{2.4.x^6}{1.3.5.6} + \frac{2.4.6.x^8}{1.3.5.7.8} + \text{etc.}$$

ex qua posito $x = 1$ illa summatio sequitur; et praeter eam plures aliae ponendo $x = \frac{1}{2}$ vel $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ vel $= \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Quoniam intellexi institutum meum analysin infinitorum indeterminatam excolendi non parum placere, optarem, Vir Celeb., ut Tuas hac de materia profundissimas meditationes quae forte nondum publici juris sunt factae mecum communicares, meque pro iis gratissimum fore existimares.

Coepi ante aliquod tempus motus corporum aquae insidentium investigare, methodumque geometricam inveni pro quovis corpore eum situm determinandi, in quo aquae insidens aequilibrium servat. Deinde si corpus aquae insidens ex situ aequilibrii fuerit declinatum, in motum oscillatorium inquisivi, quo circa situm aequilibrii movetur, eumque tandem recuperat; hunc autem motum non solum similem deprehendi motui oscillatorio penduli sed etiam longitudinem penduli simplicis assignare possum, quod suas oscillationes iisdem temporibus absolvat. Ad istam theoriam condendam pluribus novis principiis tam mechanicis, quam hydrostaticis opus habui quorum veritatem firmissimis demonstrationibus evici et quae cum principio conservationis virium vivarum apprime conveniunt. Haec eadem principia me etiam quasi manuduxerunt ad problema de collisione corporum excentrica solvendum, quod mihi Filius Tuus Clar. proposuerat,[1] cui etiam in extremis litteris fundamenta meae solutionis perscripsi. . . . .[2])

Ego vero imprimis rogo, ut me favore Tuo et benevolentia complecti, atque Tuis exquisitissimis meditationibus erudire pergas; qui me Tibi omnia debere agnosco et perpetuo agniturus sum. Vale.

Dabam Petropoli d. 10 Dec. 1737.

15*.

Bernoulli an **Euler** 1738.

Verloren; zitiert von Euler in seinem Brief vom 26. April 1738 („magnopere laetor, probari a te, quae de situ et motu corporum aquae innatantium sum meditatus").

16.

Euler an Bernoulli 26. April 1738.

Antwort auf Bernoullis verlorenen Brief von 1738. Original in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm.

Inhalt. Die *Phoronomia* von Hermann und die *Principia* von Newton. — Über den 89. Satz des 1. Teiles der *Mechanica.* — Hermanns Beitrag zur unbestimmten Infinitesimalrechnung. — Eulers eigene Behandlung des Gegenstandes. — Über das Gleichgewicht und die Bewegung schwimmender Körper.

Viro Amplissimo atque Celeberrimo Johanni Bernoulli S. P. D.
Leonh. Euler.

Vehementer doleo tantam pecuniae jacturam, quam per decoctionem mercatorum es perpessus, nihilque magis exopto, quam ut alia Tibi prospere eveniant commoda, quibus dolor amissi tolli animusque Tuus, Vir Celeb., acquiescere queat . . . . .[3])

Illo tempore, quo tractatum meum de Motu conscripsi, Hermanni solutionem de motu absidum non examinavi,[4]) nunc autem Te monstrante paralogismum facile cognovi. Newtoni vero solutionem hoc quidem tempore de novo examinare non vacat, sed memini me olim eam justam etsi obscuram deprehendere; eo minus autem de ea mihi dubitandum videtur,

---

1) Vgl. die Briefe des Daniel Bernoulli an Euler vom 12. September 1736, 25. Januar und 16. März 1737 (Fuss, a. a. O. S. 433—434, 437, 439).

2) Hier sind 19 Zeilen gestrichen, möglicherweise rührt die Streichung von Johann II Bernoulli her.

3) Hier sind 7 Zeilen gestrichen, möglicherweise von Johann II Bernoulli.

4) Es handelt sich um eine Stelle in Hermanns *Phoronomia, seu de viribus et motibus corporum solidorum et fluidorum* (Amsterdam 1716, S. 95).

cum Newtonus per eam primus veritatem ante incognitam elicuerit; rarissime autem evenire arbitror, ut veritas ante ignorata per vitiosum ratiocinium detegatur.

Scriptum autem quo Ipse, Vir Celeb., analysin Tuam hoc in negotio adhibitam exponis, et quod mecum communicare es polliticus, ingenti desiderio expecto. Ceterum ipsa mea propos. 89 mihi non ambigua videtur, cum pro eo sensu, quo Tu, Vir Celeb., eam primo es interpretatus, necessario hanc conditionem adjicere debuissem, ut corpus in hac orbita mobili eodem modo moveatur quo in eadem quiescente atque ad idem centrum attractum moveretur, quae conditio cum sit omissa, cogitatione superaddi non potest. Problematis autem alterius, adjecta in hac conditione, plenaria extat solutio in sequente propos. 94, quae propositio etiam latius patet, et ex qua plurimis modis virium inventarum decompositiones aliae facile possunt formari.

Hermanni reductionem quadraturarum ad rectificationes curvarum algebraicarum, quamquam est indirecta, tamen quia prima est, aliisque magis genuinis ansam dedit, maximi facio; fortasse enim nunquam solutio genuina in lucem prodiisset, nisi Hermanniana praecessisset.

En autem, Vir Celeb., meam solutionem hujus problematis ex methodo mea infinitorum indeterminata desumta[1]). Posita curvae abscissa $= x$; sit applicata $= \int p\,dx$, et itaque ipsa curva $= \int dx\sqrt{(1+pp)}$, quae igitur formulae ita sunt determinandae ut $\int p\,dx$ fiat quantitas algebraica et $\int dx\sqrt{(1+pp)}$ datam quadraturam involvat. Quia in his duabus formulis x aequaliter inest, eas transformo juxta regulas a me datas, in alias, in quibus x finito modo aequaliter inest; ita erit

$$\int p\,dx = px - \int x\,dp;$$

et

$$\int dx\sqrt{(1+pp)} = x\sqrt{(1+pp)} - \int\frac{xp\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

Ponatur jam

$$\int x\,dp = q$$

et

$$\int\frac{xp\,dp}{\sqrt{(1+pp)}} = \int Q\,dq,$$

ubi $\int Q\,dq$ vel eam ipsam quadraturam, a qua rectificatio curvae quaesitae pendere debet, exhibet, vel saltem involvit, ita tamen ut Q sit quantitas algebraica pariter ac q. His positis erit

$$x = \frac{dq}{dp} = \frac{Q\,dq\sqrt{(1+pp)}}{p\,dp},$$

1) Vgl. mit dem folgenden die etwas abweichende Behandlung des Problems in der auf S. 260 Anm. 2 zitierten Schrift *De curvis rectificabilibus algebraicis*, sowie Stäckel, a. a. O. S. 103—104.

unde oritur

$$p = Q\sqrt{(1+pp)}$$

atque

$$p = \frac{Q}{\sqrt{(1-QQ)}},$$

et

$$x = \frac{dq\,(1-QQ)^{\frac{3}{2}}}{dQ}.$$

Quocirca curvae quaesitae erit abscissa

$$= \frac{dq\,(1-QQ)^{\frac{3}{2}}}{dQ};$$

applicata

$$= \frac{Q\,dq\,(1-QQ)}{dQ} - q;$$

atque ipsa curvae longitudo

$$= \frac{dq\,(1-QQ)}{dQ} - \int Q\,dq;$$

quae formulae apprime cum Tuis, Vir Celeb., conveniunt. Possum autem per methodum meam plures alias expressiones invenire, quibus eidem problemati satisfit, quarum quae speciem maxime amplitudinis prae se ferunt, ita inveniuntur. Sit abscissa $= \int p\,dx$; applicata $= \int pq\,dx$; erit arcus curvae $\int p\,dx\sqrt{(1+qq)}$. Jam quantitates p, q et x ita determino, ut tres formulae integrales vel algebraicae fiant, vel a datis quadraturis pendeant, prout libuerit. In hunc finem omnes formulas ita transmuto ut faciam

$$\int p\,dx = px - \int x\,dp;$$

$$\int pq\,dx = pqx - \int x\,d\,.\,pq$$

et

$$\int p\,dx\sqrt{(1+qq)} = px\sqrt{(1+qq)} - \int x\,d\,.\,p\sqrt{(1+qq)}.$$

Nunc pono

$$\int x\,dp = r,\ \int x\,d\,.\,pq = s;\ \int x\,d\,.\,p\sqrt{(1+qq)} = t;$$

unde oritur

$$x = \frac{dr}{dp} = \frac{ds}{p\,dq + q\,dp} = \frac{dt}{d\,.\,p\sqrt{(1+qq)}}.$$

Ex aequatione autem

$$\frac{dr}{dp} = \frac{ds}{p\,dq + q\,dp}$$

prodit

$$dp = \frac{p\,dr\,dq}{ds - q\,dr},$$

atque ob $x = \frac{dr}{dp}$ erit

$$x = \frac{ds - q\,dr}{p\,dq}.$$

Preterea vero ob

$$\frac{dr}{dp} = \frac{dt}{d.p\sqrt{(1+qq)}}$$

erit

$$\frac{dpdt}{dr} = dp\sqrt{(1+qq)} + \frac{pqdq}{\sqrt{(1+qq)}},$$

quae loco dp valorem inventum substituendo transit in hanc

$$dt\sqrt{(1+qq)} = dr + qds;$$

quae praebet

$$q = \frac{drds + dt\sqrt{(dr^2+ds^2-dt^2)}}{dt^2-ds^2}$$

et

$$\sqrt{(1+qq)} = \frac{drdt + ds\sqrt{(dr^2+ds^2-dt^2)}}{dt^2-ds^2}.$$

Definitis autem hoc pacto q et $\sqrt{(1+qq)}$ erit pro curva quaesita abscissa

$$= \frac{ds - qdr}{dq} - r;$$

applicata

$$= \frac{qds - qqdr}{dq} - s;$$

et arcus curvae respondens

$$= \frac{(ds-qdr)\sqrt{(1+qq)}}{dq} - t.$$

Sumendis igitur pro r, s et t quantitatibus vel algebraicis vel a datis quadraturis pendentibus, curvae prodibunt, quarum abscissa, applicata et ipsa curva vel algebraicae erunt vel ab iisdem quadraturis pendebunt; ita ut hae formulae ad infinita problemata huc pertinentia solvenda sint idoneae, multoque latius pateant, quam eae quae priori modo sunt inventae. Hic autem probe notandum est, id commode usu venisse, quod littera p ex calculo excesserit; quod nisi accedisset, solutio hoc modo ad finem perduci non potuisset.

Magnopere laetor, Vir Celeb., probari a Te, quae de situ et motu corporum aquae innatantium sum meditatus. Reduxi quoque omnes quaestiones huc spectantes ad puram geometriam; nam quo corpus in dato situ aquae insidere queat, necesse est

1. ut pars submersa volumine adequetur pondus aquae sibi aequale;

2. ut centrum gravitatis totius corporis, et centrum gravitatis seu potius magnitudinis partis submersae in eadem recta verticali sint sita, quae quidem ex hydrostaticis satis patent.

Sed haec non sufficiunt ad natationem in hoc situ producendam; requiritur enim praeterea, ut vis adsit quae corpus, cum ex hoc situ aliquantillum fuerit declinatum, in situm pristinum restituatur, alioquin enim corpus parumper declinatum ex situ aequilibrii penitus subverteretur, prout in bacillo aquae verticaliter insistente evenit. Hanc ob rem in quovis casu, qui quidem duobus prioribus requisitis jam gaudet, ea vis determinari debet, qua corpus in eo aequilibrii statu continetur atque in eundem restituitur, si aliquantillum declinetur; haecque vis vel affirmativa vel nulla vel adeo negativa esse poterit. Ex quo perspicuum est tum demum corpus in quodam aequilibrii situ perseverare posse, cum vis restituens affirmativum obtinuerit valorem, ex hocque valore firmitatem determino, qua corpus in quoque aequilibrii situ persistit; ita ut firmitas eo major sit, quo major fuerit vis restituens. Haec autem firmitas non solum ab intervallo centrorum gravitatis totius corporis et partis submersae pendet, sed etiam ab amplitudine, quam corpus in suprema aquae superficie occupat; quae omnia, maximam partem nova, in peculiari tractatu exponere coepi.[1])

Ita cubus ex materia homogenea aqua leviori confectus aquae ita innatabit, ut una hedra horizontalem habeat situm, si ejus gravitas specifica vel minor fuerit quam 211 vel major quam 789, posita aquae gravitate 1000. Sin autem cubi gravitas specifica intra limites 211 et 789 contineatur, cubus aquae ita innatabit, ut planum diagonale horizontalem situm teneat quocum convenit casus cubi aqua duplo leviori, quem Tu, Vir Celeb., evolvisti. Corpora autem his casibus minime ex situ aequilibrii firmo depulsa oscillationibus isochronis peragendis restitui non solum in precedentibus meis litteris affirmavi, sed simul significavi me quovis casu longitudinem penduli simplicis isochroni assignare posse; pro his vero omnibus expediendis calculus non solum fit non intricatus, sed etiam mirifice simplex et facilis. Vale.

Dabam d. 26. April. 1738. Petropoli.

16*.

Bernoulli an **Euler** Juni (?) 1738.

Verloren; zitiert von Euler in seinem Brief vom 30. Juli 1738 („litterae tuae erga me benevolentiae signis . . . repletae . . . sunt redditae“).

---

1) Aus dieser Stelle geht hervor, daß Euler die Redaktion der *Scientia navalis,* die bekanntlich 1749 erschien, schon 1738 begonnen hatte. Der von Fuss (a. a O., II S. 456) als „anachronisme apparent“ bezeichnete Umstand, daß Daniel Bernoulli schon 1739 von der *Scientia navalis* sprechen konnte, ist also erklärt — aus einer Stelle in Eulers Brief vom 20. Dezember 1738 geht sogar hervor, daß die Redaktion der *Scientia navalis* damals schon beendet war.

17.

Euler an Bernoulli 30. Juli 1738.

Antwort auf Bernoullis verlorenen Brief vom Juni (?) 1738. Original in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm.

Inhalt. Abhandlungen von Johann und Nikolaus I Bernoulli für die Commentarii der Petersburger Akademie. — Über die Bewegung von Körpern in veränderlichen und festen Bahnen. — Die Arbeiten von Hermann und von Johann Bernoulli, sowie von Euler selbst auf dem Gebiete der unbestimmten Infinitesimalrechnung. — Über das Gleichgewicht schwimmender Körper. — Die Vorarbeiten zur *Scientia navalis*. — Die Eulersche Preisschrift über das Feuer. — Über die Ursache der Ebbe und Flut. — Die Summe der reziproken Quadratzahlen und der Reihe

$$1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \text{etc.}$$

Lösung eines speziellen isoperimetrischen Problemes und die allgemeine Lösung solcher Probleme.

Viro Excellentissimo atque Celeberrimo Joanni Bernoulli S. P. D. Leonhardus Euler.

Litterae Tuae eximiae erga me benevolentiae signis pariter ac profundissimis meditationibus repletae Peterhofii, ubi nunc Aula Imperatoria commoratur, ab Illustri Praeside nostro nuper, cum ibi essem, sunt redditae, una cum Tua problematis de motu corporum in orbitis mobilibus solutione[1]), atque Nepotis[2]) Tui acutissimi investigatione summae hujus seriei,

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.}$$

His autem litteris acceptis, atque Illustri Praesidi relatis, quae ad Ipsum pertinere videbantur, Tibi nunciari me jussit, ut schedulam separatam, qua centum Rubelones Te accepisse testaveris, mittere velis: quae vero ceterum Ipsius nomine Tibi, Vir Celeberrime, significarem, tum temporis mihi exponere non vacavit, quia hora instabat Aulam adeundi. Quamobrem ad ea quae me spectant, nunc potissimum respondebo.

Quod igitur primo ad Tuum exquisitum schediasma attinet, id statim post ferias finitas in nostris conventibus producam, atque curabo, ut Commentariis nostris inseratur. In hac Tua solutione mirifice mihi placuit, quod differentiam virium centripetarum tum pro orbita immobili,

---

1) Joh. Bernoulli, *Compendium analyseos pro inventione vis centralis in orbitis mobilibus planetarum;* Comment. acad. sc. Petrop. **10**, 1738 (gedruckt 1747), S. 95—101.

2) Nicolaus Bernoulli, *Inquisitio in summam seriei* $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} +$ *etc.;* Comment. acad. sc. Petrop. **10**, 1738 (gedruckt 1747), S. 19—22. — Aus einem Briefe von Nikolaus Bernoulli an Euler vom 13. Juli 1742 geht hervor (siehe Fuss, a. a. O. II S. 682), daß die Abhandlung ohne Genehmigung des Verfassers veröffentlicht wurde.

tum pro mobili a differentiali rationis inter motum ipsius orbitae et motum in ea liberasti, quo quidem casu ista ratio ponitur variabilis; id quod evenit, dum alterius vis, quae praeter centripetam requiritur, directionem normalem ad vim centripetam fecisti. Eo enim considerandi modo quo ego sum usus in prop. 94, ubi alterius vis directionem posui ad rectam positione datam normalam, ista insignis proprietas minus est conspicua. Interim tamen Tuo contemplandi modo perspecto, meas formulas statim eo traducere licuit, ut illa proprietas conspiceretur, si enim placeat cum mea propositione figuram allegatam conjungere, atque ad coroll. 2 respicere, quo casus a Te tractatus continetur, quando motus in orbita immobili a vi centripeta sola proficiscitur. Duas scilicet ibi vires dedi, quarum altera tendit ad centrum virium C, estque

$$= \frac{2a^2cdp}{p^3dy} + \frac{2a^2c(w^2-1)}{y^3} + \frac{2a^2cqzdw}{py^2xdy},$$

altera vero normaliter tendit ad rectam positione datam DC in directione MP, estque

$$= -\frac{2a^2cqdw}{pyxdy},$$

quibus conjunctis corpus in orbita mobili movetur. Si nunc vis MP resolvatur in duas, quarum alterius directio cadat in MC, alterius vero directio ad hanc sit normalis, reperietur ea, cujus directio est MC

$$= -\frac{2a^2cqzdw}{py^2xdy};$$

altera vero, cujus directio est normalis ad MC erit

$$= -\frac{2a^2cqdw}{py^2dy}.$$

Quapropter sequentes duae habebuntur vires corpus in orbita mobili continentes, prima scilicet tendet ad centrum virium C, estque

$$= \frac{2a^2cdp}{p^3dy} + \frac{2a^2c(w^2-1)}{y^3},$$

altera vero directionem habebit normalem ad illam, eritque

$$= -\frac{2a^2cqdw}{py^2dy}.$$

Unde intelligitur excessum vis centripetae pro orbita mobili super vim centripetam pro orbita immobili esse

$$= \frac{2a^2c(w^2-1)}{y^3},$$

prorsus uti Tu reperisti; sed hanc conditionem adjicere necesse est, ut alterius vis, quae praeter vim centripetam requiritur, directio sit normalis ad vim centripetam. Interim ista questio tantum est casus particularis propositionis meae 94, ibi enim motum quemcunque corporis in orbita quiescente sum contemplatus, dum in quaestione a Te soluta iste motus ita limitetur, ut tempora sint areis proportionalia, quamobrem mirum non est, si expressiones in solutione ipsius propositionis sint longiusculae.

Reductionem HERMANNI quadraturarum ad rectificationes algebraicarum curvarum non studio atque certa quadam methodo esse inventam, de eo quoque minime dubito, cum problematis affinibus solvendis minime inserviat. Tua vero, Vir Celeb., methodus multo magis analysin sapit; interim tamen constructiones HERMANNianae ad symbola revocatae statim praebent ipsas formulas Tuas; ex neutra autem certam hujusmodi problematum resolvendorum rationem derivare potui, etiamsi utramque magno studio sim persecutus. In Tua enim solutione viam non indicas, quam secutus ad formas $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{xdy}{dx} - y$, quas pro coordinatis assumis, pertigeris, in quo tamen meo judicio omnis rei cardo versatur; si enim alia hujus generis problemata proponerentur, quis mihi indicaret, cujusmodi formae pro coordinatis essent assumendae? Quamobrem jam ante complures annos coepi cogitare, quomodo certa et analytica methodus inveniri queat omnibus hujusmodi problematis solvendis accommodata, in qua nulla opus esset divinatione: cui desiderato mihi quidem satisfecisse videor, meaeque methodi beneficio hujus ipsius problematis solutionem Tibi perscripsi, atque studio ipsas formulas Tuas deduxi, eum potissimum in finem, ut non tam ad formulas inventas, quam ad methodum, qua eas inveni, attendere velis. Praeterea vero jam ante problematis novi multoque difficillimi solutionem methodo mea erutam Tecum communicavi, qua duas curvas algebraicas exhibui non rectificabiles, sed quarum rectificatio a data quadratura pendeat, quae tamen summam arcuum eidem abscissae respondentium habeant rectificabilem. Innumerabilia autem alia atque etiam difficiliora problemata beneficio methodi meae resolvi, quae sine ea vix essent solubilia.

Quae de situ corporum aquae insidentium in litteris postremis Tibi nunciavi, Vir Excellent., ea Tibi probari eo magis laetor, quo parcius haec materia ante fuit exculta. At quas mihi perscripsisti de eadem re meditationes profundissimas, non satis percipere possum, cujus rei causa esse videtur, quod nos diversis modis hoc argumentum tractemus, nam quae ego scripsi, Tibi aliquantum obscura fuisse ex hoc intellexi, quod centro magnitudinis aliam tribuas significationem atque ego feci. Fateor autem utique hoc vocabulum minus esse congruum ad id significandum quod volebam; intelligebam enim centrum gravitatis seu potius inertiae partis aquae immersae, si pars ista ex materia uniformi constaret. Quo igitur hanc descriptionem evitarem centro neque gravitatis neque inertiae uti potui, ne verum intelligeretur centrum gravitatis partis submersae, etiamsi haec pars ex materia maxime difformi constaret, quo casu plurimum differre possunt partis submersae centrum gravitatis et centrum quod voco magnitudinis; atque ob hanc causam hac appellatione brevitati consulens etsi minus convenienter uti constitui, cum commodior tum non occurreret. Quod autem praecipuum est, memini me non satis dilucide statum quaestionis exponere; quando enim de situ corporis cujuspiam aquae insidentis quaeritur, tum quaestio bipartita est facienda. Namque primo omnes situs, quibus corpus aquae in aequilibrio insidere potest, examinari debent, quos uti satis constat ita comparatos esse oportet, ut et tantum corporis volumen in aqua versetur, quantum si ex aqua constaret ipsum corpus pondere adaequaret, et ambo centra tam gravitatis totius corporis, quam gravitatis partis submersae, si ea ex uniformi materia constaret, in eadem recta verticali sint sita. Ita unumquodque corpus plerumque plures admittit aequibrii situs, quibus singulis aquae insidere posset, si modo omnia in perfectissima quiete essent posita, prout bacillus tenuissimus aquae in situ verticali insistere posset. Secunda autem quaestio versatur in firmitate definienda, qua corpus in dato aequilibrii situ aquae insidet; fieri enim potest, ut corpus in situ aequilibrii positum, quando tantillum ex eo deturbatur vel sese restituat, vel subvertatur; priori casu situm aequilibrii firmum voco, posteriori vero infirmum atque subversioni obnoxium. Maximi igitur momenti est quovis aequilibrii situ proposito definire utrum is sit firmus an infirmus, et quando est firmus, quanta vi corpus ex situ aequilibrii depulsum restituatur, quam vim seu firmitatem commodissime metiri videor per momentum virium restituentium, quando corpus angulo quam minimo declinetur, ad hunc ipsum angulum applicatum. Ita omnis cubus ex materia homogenea confectus in aqua quidem semper aequilibrium tenet, si duae hedrae oppositae fuerint horizontales, reliquae verticales; sed status iste aequilibrii non conservabitur, nisi gravitas specifica cubi vel minor sit quam $211\frac{1}{3}$ vel major quam $788\frac{2}{3}$. Nam si gravitas cubi intra hos numeros contineatur, tum situs iste aequilibrii non erit firmus, hoc est cubus a minima vi depulsus ex hoc situ penitus subvertetur in alium aequilibrii situm, qui sit firmus. Hic obiter indicare sufficiet limites hos minime congruere cum iis, qui ex Tuis formulis consequuntur, etiamsi non negam hos limites non multum in recessu habere. Quando ergo gravitas specifica cubi intra limites $211\frac{1}{3}$, et $788\frac{2}{3}$ continetur, tum cubus aquae immissus alium aequilibrii situm occupabit; plano diagonali autem deorsum verso his tantum casibus aquae insidebit, quando gravitas specifica cubi inter hos limites $281\frac{1}{4}$ et $718\frac{3}{4}$ continebitur. Quoties ergo cubi gravitas specifica continetur vel intra hos limites $211\frac{1}{3}$ et $281\frac{1}{4}$ vel inter hos $718\frac{3}{4}$ et $788\frac{2}{3}$, tum neutro situ cubus aquae insidet, sed his casibus situm occupabit, qua recta diagonalis ad angulos oppositos ducta situm verticalem tenebit. Simili modo inveni tetraedron regulare aquae ita innataturum, ut una hedra horizontali situ ex aqua emineat, quando ejus gravitas specifica major est quam 512; sin autem levior sit pyramis, hedram horizontalem sub aqua habebit.

Quae porro de cono recto et conoide parabolico commemoras a meis maxime differunt, situs enim illi quod hujusmodi corpora in aqua habitura esse dicis, nequidem proprietatibus ad aequilibrium requisitis gaudent, cum recta ambo gravitatis centra jungens non sit verticalis. Quamvis autem alius in istis corporibus detur aequilibrii situs obliquus, tamen is firmitatem habebit nullam, ite ut talia corpora nunquam in aqua ejusmodi situm obliquum conservare queant; vehementer igitur dubito num Tua cum Archimedeis conveniant. Ceterum fundamentum principii Tui de intervallo planorum horizontalium[1]) per ambo gravitatis centra ductorum non percipio neque quomodo id cum principiis hydrostaticis sit connexum video: mihi saltem istud principium ad hunc scopum minus aptum videtur.

Quo autem Tibi, Vir Celeb., meam methodum, qua in hoc negotio utor, exponam, primo pro dato corpore in situs aequilibrii inquiro ex principiis notissimis, secundum quae tum debita pars aquae debet esse immersa, tum centra gravitatis ambo in eadem recta verticali posita esse oportet. Quae investigatio utique saepius fit admodum difficilis, quando situs aequilibrii obliqui desiderantur: nulla autem difficultate laborat in sitibus aequilibrii regularibus, cujusmodi sunt, quando corpora aquae ita immittuntur, ut ambo centra gravitatis sponte in rectam verticalem eandem incidant. Invento autem hac ratione quocunque aequilibrii situ, sequenti modo investigo ejus firmitatem,[2]) seu vim qua corpus si tantillum circa datum axem horizontalem inclinetur, in situm aequilibrii restituitur. Sit (Fig. 2) datum corpus $CAEBD$ aquae in situ aequilibrii insidens, cujus pars aquae immersa sit AEB, atque sectio horizontalis in ipsa aquae

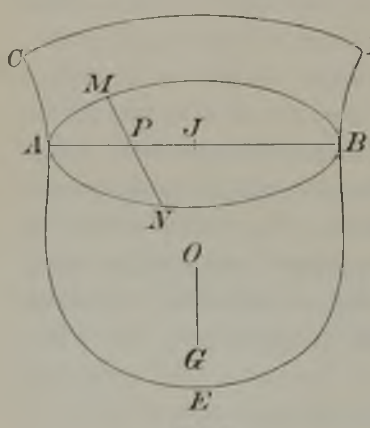


Fig. 2.

1) Siehe Joh. Bernoulli, *De corporum aquae insidentium oscillationibus, et de invenienda longitudine penduli simplicis oscillationibus illis isochroni; Opera omnia*, T. IV S. 286—296.

2) Vgl. Joh. Bernoulli, *Opera omnia*, T. IV S. 293.

superficie facta $AMBNA$, quam brevitatis gratia sectionem aquae appello. Sit porro volumen partis submersae $AEB = V$, ejusque centrum gravitatis, si ex materia homogenea constaret, in O. Totius vero corporis pondus sit $= M$, ejusque centrum gravitatis situm sit in G, erit ob situm aequilibrii recta GO verticalis, atque V in gravitatem specificam aquae ductum $= M$. Nunc utrum hoc corpus, si secundum datam plagam ex hoc aequilibrii situ minimum deturbetur, sese restituat an vero penitus eum relinquat, aliumque aequilibrii situm recipiat, hoc modo definio. Illi axi horizontali, circa quem corpus inclinando ex situ aequilibrii declinari ponitur, cuique inclinationi respondens vis restituens quaeritur, duco in sectione aquae per ejus centrum gravitatis I rectam parallelam AIB; quam tanquam axem considero, ad eumque ordinatas orthogonales refero; quo facto sit $AP = x$; $PM = y$, et $PN = z$, atque quaeratur integrale $\int (y^3 + z^3)\,dx$ per totam sectionem aquae. Hoc invento erit firmitas, qua corpus inclinationi circa axem AB eive parallelum reluctatur

$$= M\left(GO + \frac{\int (y^3 + z^3)\,dx}{3V}\right);$$

quae expressio[1]) quo fuerit major, eo magis corpus inclinationi resistet, at si fiat negativa, quod accidere potest, quando punctum G supra O cadit, tum corpus inclinatum non solum non restituetur sed adeo subvertetur. Simili modo firmitas respectu alius cujusvis axis AB definiri potest; at si fuerit inventa pro duobus tantum axibus inter se normalibus, tum firmitatem respectu cujusvis alius axis aestimari licebit. Habeat autem firmitas inventa valorem affirmativum atque inclinetur corpus aliquantillum circa axem AB ex situ aequilibrii, quo facto corpus a vi restituente in situm aequilibrii urgebitur, atque sese restituendo oscillationes absolvet isochronas, prout Tu, Vir Celeb., dudum observasse asseris. At ego non solum inveni oscillationes istas esse isochronas sed adeo longitudinem penduli simplicis isochroni assignare possum hoc modo. Multiplicentur[2]) singulae corporis totius particulae per quadrata distantiarum suarum a centro gravitatis G, atque posito omnium istorum productorum aggregato $= Mk^2$ (hujusmodi enim formam habebit hoc aggregatum), erit longitudo penduli simplicis isochroni

$$= \frac{3Vk^2}{3V.GO + \int (y^3 + z^3)\,dx}.$$

Ex his igitur formulis determinari potest, quanta vi navis omni

1) Vgl. Joh. Bernoulli, *Opera omnia*, T. IV S. 293.

2) Die folgende Angabe ist unrichtig, siehe Eulers Brief vom 20. Dezember 1738 (unten S. 288).

inclinationi resistat, et quam celeres perficiat oscillationes, cum situm aequilibrii amiserit; unde non tantum plurium rerum quas fabri in navibus architectandis experientia sola edocti observare solent, veram rationem assignare valeo, sed etiam novas easque utilissimas regulas ad constructionem navium sum assecutus. Quo in negotio non parum praestitisse mihi videor, cum ista theoria a nemine adhuc sit tractata, atque adeo omnino ignorata.

Haec autem omnia in peculiari tractatu colligere coepi, in quo non solum omnia, quae ad situm aequilibrii, sed etiam quae ad motum, motusque et situs alterationem a viribus quibuscunque ortam pertinent, ex certissimis principiis mechanicis seu dynamicis maximam partem novis sum derivaturus.

Ceterum etiam atque etiam rogo, ut istas formulas tum firmitatem situum aequilibrii, tum oscillationes spectantes cum Filio Tuo Celeb. communicare velis.

Pro Tua tam benevola gratulatione, Vir Celeb., ob trientem praemii Parisini[1]) mihi adjudicatum debitas habeo gratias, et nescio quomodo iste honor mihi obtigerit; forte enim et casu alia cogitans incidi in quandam ignis explicationem, in qua potissimum explicui, quomodo a tum exigua vi, quae ad scintillam eliciendam requiritur, tam stupendus motus tantaque virium quantitas proficisci queat.

Alia utique aestus maris causa mihi assignari non posse videtur praeter Newtonianam, cum eae quas Cartesius et Wallisius dedit, satis sint refutatae. Sed Newtonus tantum ex sua theoria pleraque aestimatione deduxit, cum calculus fere insuperabilis evadat. Praeterea etiam Newtonus ad complures circumstantias theoriae suae non satis adtendit, quas mihi ad calculum revocare licuit, unde si tempus permittet, completam hujus phaenomeni causam explicare possem. At multo temporis otiique opus est ad hanc quaestionem evolvendam, quae subsidia vix sperare possum.[2])

Inquisitio summae

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \text{ etc.}$$

a Celeb. Nicolao Bernoulli mecum communicata mirifice mihi placuit, et propterea maximas ago gratias. Statim enim eam abstrusissimae inda-

1) Siehe die Abhandlung von Euler, *Dissertatio de igne*; Pieces qui ont remporté les prix de l'académie des sciences en 1738 (Paris 1739), S. 1—19.

2) Bekanntlich hat Euler diesen Gegenstand später in einer von der Pariser Akademie der Wissenschaften im Jahre 1740 gekrönten Preisschrift *Sur le flux et reflux de la mer* behandelt.

ginis esse intellexi, cum per tot serierum transmutationes tandem ad aequationem differentialem secundi gradus perveniatur, cujus resolutio desideratum valorem praebet. Considerans autem hanc maxime ingeniosam methodum, inquirere volui, an non immediate ex serie

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\text{etc.},$$

sine tot transmutationibus, summa reperiri posset, id quod mihi successit sequenti modo.

Ponatur

$$y=\frac{x^2}{1}-\frac{x^4}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{x^6}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)-\frac{x^8}{4}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\text{etc}$$

quippe quae series posito $x=1$ abit in propositam. Differentialibus igitur sumtis habebitur

$$dy=2dx\left[\frac{x}{1}-x^3\left(1+\frac{1}{3}\right)+x^5\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)-x^7\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\text{etc.}\right]$$

$$=\frac{2dx}{1+xx}\left(x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\text{etc.}\right)$$

$$=\frac{2dx}{1+xx}\int\frac{dx}{1+xx}.$$

Posito nunc arcu circuli $=s$ cujus tangens est x, existente radio $=1$, erit

$$y=\int 2sds=ss.$$

Fiat $x=1$, abibit s in octavam peripheriae partem seu denotante $p:1$ rationem peripheriae ad diametrum, erit

$$s=\frac{p}{4}\text{ atque }y=\frac{1}{16}pp,$$

omnino uti acutissimus Nepos Tuus invenit. Videbis autem, Vir Celeb., methodum hic a me usitatam serierum summas a priori investigandi satis esse concinnam atque latissime patentem; extat ea jam impressa[1]) in 6$^{\text{to}}$ tomo Comment. nostr.; quem tomum quam primum erit absolutus, una cum quinto Tibi statim sum missurus.

Proposuit mihi nuper Filius Tuus Clar. istud problema,[2]) ut inter

1) Siehe die Abhandlung von Euler *Methodus generalis summandi progressiones;* Comment. acad. sc. Petrop. 6, 1732/1733 (gedruckt 1738), S. 68—97.

2) Vgl. die Briefe des Daniel Bernoulli an Euler vom 12. September 1736 und 24. Mai 1738 (Fuss, a. a. O. II S. 435, 448).

omnes curvas isoperimetras ea determinetur, in qua $\int r^m ds$ esset maximum vel minimum, ubi r radium osculi, s vero arcum denotat; quod problema eo difficilius censebat, quod per methodum isoperimetricam resolvi nequeat, ob differentialia secundi gradus, quae in r insunt. Inveni autem ante aliquot annos novam methodum hujus generis problemata solvendi, quae ad differentialia cujusque ordinis est accommodata; ejus ope hanc problematis propositi inveni solutionem[1]), ut curvae quaesitae natura exprimatur hac aequatione

$$Ax + By + Cs = (m + 1) \int r^m ds,$$

in qua x et y denotant coordinatas orthogonales quascunque seu in quocunque axe acceptas, quam ob causam sine ulla restrictione vel A vel B poni potest $= 0$. At si C fiat $= 0$, tum aequatio

$$Ax + By = (m + 1) \int r^m ds$$

praebebit curvam, quae inter omnes omnino curvas iisdem terminis contentas, habebit $\int r^m ds$ minimum. Hoc casu si fiat $m = 1$, curva fiet cycloïs ordinaria, quae ergo hanc habet proprietatem, ut in ea sit $\int r ds$ minimum. At hoc casu Filius Tuus dissentit, negatque pro hoc casu cycloidem satisfacere,[2]) etiamsi ipsius aequatio prioris problematis, quam eo casu quo est $m = 1$ mihi perscripsit, cum mea apprime consentiat.

Hujusmodi autem problematum solutio mea in genere ita se habet.[3]) Invenienda sit inter omnes omnino curvas iisdem terminis comprehensas ea, in qua $\int Z dx$ habeat maximum minimumve valorem. Sit autem x abscissa, y applicata, atque

$$dy = p dx;\ dp = q dx;\ dq = r dx;\ dr = s dx \text{ etc.};$$

ope quarum substitutionum ex Z omnia differentialia exterminari poterunt, cujuscunque etiam sint gradus; hoc autem facto differentietur Z, sitque

$$dZ = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + S ds + \text{etc.},$$

---

1) Siehe die Abhandlung von Euler, *Solutio problematis a celeb. Dan. Bernoullio propositi;* Comment. acad. sc. Petrop. **10**, 1738 (gedruckt 1747), S. 164—180.

2) Diese Bemerkung von Euler ist schwer zu verstehen, denn in dem zitierten Briefe vom 24. Mai 1738 sagt Daniel Bernoulli (siehe Fuss, a. a. O. S. 448): „Wenn aber conditioni hujus problematis die aequalitas perimetri dazugethan wird, so finde ich diese aequationem, posito ds constanti,

$$\dot{d}s = \frac{2 R d R}{\sqrt{(-4RR + 4nR + g)}},$$

quae est ad cycloidem, si fiat $n = 0$“.

3) Siehe die Abhandlung von Euler, *Curvarum maximi minimive proprietate gaudentium inventio nova et facilis;* Comment. acad. sc. Petrop. **8**, 1736 (gedruckt 1741), S. 159—190.

unde facillimo negotio aequatio pro curva quaesita formabitur haec:

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \text{etc}$$

At si in Z non solum differentialia, sed etiam integralia contineantur, pro ejusmodi casibus peculiarem adeptus sum solutionem, qua pariter statim sine ulla figurarum descriptione aequatio pro curva quaesita facillime formari potest; hocque modo id genus problematum quae vulgo sub nomine isoperimetricorum comprehendi solent, latissimo sensu atque singulari facilitate solutum dedi, ut nihil amplius in hoc negotio hacque analyseos parte desiderandum videatur.

Sed ne Tibi tam prolixe scribendo molestus fiam, litteris hisce finem imponam, me meaque omnia Tibi, Vir Celeb., submisse commendans. Vale, Vir Excellentissime, meque amore prosequi non desine.

Dabam Petropoli d. 30 Jul. 1738.

17*.

Bernoulli an **Euler** September (?) 1738.

Verloren; zitiert von Euler in seinem Brief vom 20. Dezember 1738 („cum litteras Tuas postremas ex omni capite gratissimas accepissem").

18.

Euler an **Bernoulli** 20. Dezember 1738.

Antwort auf Bernoullis verlorenen Brief vom September (?) 1738. Original in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm.

Inhalt. Die von Johann Bernoulli in Aussicht genommene Arbeit über die Hydraulik — Über die Herausgabe der Commentarii der Petersburger Akademie. — Über den Inhalt des Eulerschen *Tentamen novae theoriae musicae.* — Über die Beendigung der *Scientia navalis* und Aufschlüsse über den Inhalt der Arbeit. — Über die allgemeine Lösung isoperimetrischer Probleme und über das im vorhergehenden Brief behandelte Problem. — Eine merkwürdige Eigenschaft der elastischen Kurve.

Viro Excellentissimo Joanni Bernoulli S. P. D.
Leonardus Euler.

Cum litteras Tuas postremas ex omni capite gratissimas accepissem, mox occasio se obtulit. . . . .[1]

Quamobrem Te nomine Academiae rogare jussus sum, ut novam et incomparabilem theoriam de motu aquarum sine ullo temporis dispendio

---

1) $7^1/_2$ Zeilen sind gestrichen, ohne Zweifel von Euler selbst vor dem Absenden des Briefes, wie aus seinem folgenden Brief ersichtlich ist.

ad nos transmittas[1]) eamque vel per Filium Tuum Celeb. vel directe huc expedias, atque ad Illustr. Praesidem nostrum dirigas. Ego enim restitutionem sumtuum non facile obtineo ab Academia, eo quod in tali commercio pro litteris ad Praesidem directis nequidem portorium postulatur. Maxime autem desidero Tuas meditationes hydraulicas perlegere, cum ego jam dudum imperfectionem, qua haec doctrina etiam nunc tractari solet, cognovissem, ac frustra omne studium in genuina methodo detegenda collocassem. Quo magis ergo impedimenta in hac re perspicio, eo majorem utilitatem ex Tua theoria capere spero.

Ceterum solutionem Tuam succintam problematis de motu corporum in orbitis mobilibus,[2]) pariter ac Filii Tui Celeb. dissertationes[3]) nobiscum communicatas in conventibus nostris praelegi, ex quo mox Commentariis nostris sunt insertae; speramus autem residuos tomos omnes sequenti anno prelo committere atque absolvere: jam enim finitus est tomus sextus, continens annos 1732 et 33, et reliqui quinque anni in tribus tomis comprehendentur; ita ut in posterum finito quoque anno mox tomus Comment. publicari queat. Ne autem uni tomo quotannis adimplendo materia desit, invitandi sunt exteri Academiae sodales, ut suas meditationes communicent, inter quos maximam fiduciam in Te, Vir Excell., Filioque Tuo Celeb. collocamus. Proximo autem vere ad Te mittentur opera nostra quae tum erunt parata, Tibique adhuc desunt.

Initio sequentis anni Tractatus . . . .[4]) Musica quem jam ante aliquot annos conscripseram[5]) prelo committi . . . . et genuina harmoniae principia detexisse mihi videor: egregie enim . . . . . suggessit tam cum musica veterum quam hodierna congruunt . . . . scilicet systema sonorum diversorum omnium ad harmoniam quandam . . ducendam idoneorum sub termino quodam generali comprehendi oportet, cujus singuli divisores ipsos sonos systematis exhibeant. Ita iste terminus

---

1) Die betreffende Arbeit des Johann Bernoulli wurde in zwei Abteilungen an Euler gesandt, die erste am 7. März 1739, die zweite am 31. August 1740 (siehe Fuss, a. a. O. II S. 18, 42).

2) Siehe oben S. 276 Anm. 1.

3) Ohne Zweifel handelt es sich um die zwei Abhandlungen des Daniel Bernoulli: *Commentationes de immutatione et extensione principii conservationis virium vivarum, quae pro motu corporum coelestium requiritur* und *Commentationes de statu aequilibii corporum humido insidentium* in den Comment. acad. sc. Petrop. **10,** 1738 (gedruckt 1747), S. 116—124, 147—163.

4) Das Papier des Briefes ist oben beschädigt, so daß Teile von fünf Zeilen fehlen.

5) Über das *Tentamen novae theoriae musicae* vgl. Eulers Brief an Joh. Bernoulli vom 25. Mai 1731 (Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 383—386).

generalis $2^n.3^3.5$, est exponens generis diatonici PTOLEMAICI, ejus enim divisores omnes intra rationem $1:2$ contenti dant sonos hujus generis unius octavae intervallum replentes. Divisores enim simplices neglecta binarii potestate, quae sonos tantum una pluribusve octavis elevat, sunt:

$$1;\ 3;\ 3^2;\ 3^3;\ 5;\ 3.5;\ 3^2.5;\ 3^3.5;$$

quorum singuli per ejusmodi binarii potestates multiplicati, ut intra rationem duplam cadant, sequentes praebebunt numeros sonos generis diatonici singulos exponentes

96:	108:	120:	128:	135:	144:	160:	180:	192.
C:	*D*:	*E*:	*F*:	*Fs*:	*G*:	*A*:	*H*:	*c*.

quod systema a recepto non differt nisi quod hic ingrediatur sonus *Fs*, qui omitti est solitus, quo quidem theoria nil turbatur. Generis vero usu nunc maxime recepti diatonico-chromatici 12 sonos intervallo unius octavae continentis observavi exponentem esse $2^n.3^3.5^2$, cujus sunt duodecim divisores simplices

$$1;\ 3;\ 3^2;\ 3^3;\ 5;\ 3.5;\ 3^2.5;\ 3^3.5;\ 5^2;\ 3.5^2;\ 3^2.5^2;\ 3^3.5^2;$$

qui per binarii potestates in unius octavae intervallum reducti, sequens dabunt sonorum systema

$2^7.3$:	$2^4.5^2$:	$2^4\ 3^3$:	$2.3^2.5^2$:	$2^5.3.5$:	$2^9.1$:	$2^2.3^3.5$:	$2^6.3^2$:	$2^3.3.5^2$:	$2^7.5$:	$3^3.5^2$:	$2^4.3^2.5$
384 :	400 :	432 :	450 :	480 :	512 :	540 :	576 :	600 :	640 :	675 :	720
C :	*Cs* :	*D* :	*Ds* :	*E* :	*F* :	*Fs* :	*G* :	*Gs* :	*A* :	*B* :	*H* .

Haeque sonorum proportiones tam exacte cum iis, quae a novissimis Musicis practice sunt stabilitae, conveniunt, ut unicus sonus *B* aliquantillum discrepet; solent enim ponere rationem $A:B$ ut 25 ad 27, cum per theoriam sit ut 128 ad 135. Quemadmodum autem totum sonorum systema exponente exprimi potest, ita quaelibet consonantia hoc modo per exponentem repraesentari atque ex exponente suavitas consonantiae dijudicari potest; quae omnia in tractatu brevi prodituro abunde explicavi et demonstravi.

Nunc etiam ad finem perduxi tractatum de situ et motu corporum aquae innatantium quem, quia ad naves potissimum omnes meditationes direxi, *Scientiae navalis* nomine insignire placuit; ex quo nonnulla, quae ad situs firmitatem aestimandam spectant, atque ad motum oscillatorium definiendum Tecum, Vir Celeb., communicavi. Minime autem principia illa hydrostatica trita commemoravi, quasi Tibi essent incognita, sed eum in finem, ut indicarem ea non sufficere ad firmitatem dijudicandam: quo enim corpus talem situm conservet, neque a minima vi de eo deturbetur, aliud quid insuper requiritur, quod firmitatem appello; quae in casu ante perscripto mihi est

$$M\left(G\,O+\frac{\int(y^3+z^3)\,dx}{3\,V}\right),$$

cujus expressionis ratio ita se habet, ut ea, si corpus angulo infinite parvo dw circa axem illum horizontalem, ad quem formula est accommodata, inclinetur, per hunc ipsum angulum multiplicata praebeat momentum virium corpus in situm aequilibrii restituentium. Hacque circumstantia arbitror omne dubium, quod circa hanc formulam movisti, sublatum iri. Ceterum utique lapsui calami est adscribendum si dixi singulas corporis particulas per quadrata distantiarum suarum a centro gravitatis multiplicari debere, cum distantiae ab axe illo horizontali per centrum gravitatis ducto, circa quem oscillationes peraguntur, computari debeant. Quod denique ad axem illum attinet, circa quem corpus vel oscillationes conficit, vel se in situm aequilibrii restituit, is perpetuo situm habet horizontalem et per centrum gravitatis transit, interea autem centrum gravitatis recta vel ascendere vel descendere poterit ita ut semper debita portio aquae maneat submersa.

Quae scripsisti, Vir. Celeb., de cono et conoide parabolico, ea calculo repetito rectissime se habere deprehendo, atque errorem in examine primum instituto mox animadverti; non solum autem situs aequilibrii obliqui a Te assignati debitis proprietatibus gaudent, sed etiam semper firmitatem habent, nisi respectu axis majoris in sectione aquae, cujus respectu firmitas evanescit, id quod etiam rei natura declarat, cum ejusmodi corpus tali mutationi, qua axis corporis inclinatio ad horizontem non afficitur sed in aliam tantum regionem urgetur, non reluctetur.

Ceterum in ipso tractatu meo non adeo sollicitus fui in sitibus aequilibrii obliquis pro quoque corpore investigandis, cum omnia ad naves praecipue direxerim, in quibus aequilibrii situs debet esse erectus et sponte datur. Theoria autem Filii Tui, quam de hoc eodem argumento nobiscum communicavit, mirifice cum meis consentit, et insignes quasdam proprietates observavit, quas ego non annotavi, quamobrem non dubito quin ipsius theoria de oscillationibus cum meis penitus sit consensura.

Quae scripsisti de oscillationibus verticalibus[1]) maxime sum admiratus, praesertim propter simplicitatem expressionis et insignem usum, quem in explorandis navium ponderibus praestare possunt. Veritatem principii Tui de minima distantia inter ambo centra gravitatis utique agnosco, neque tam de ejus veritate quam sufficientia ad situs firmitatem definiendam dubitavi atque etiamnum dubito, cum firmitas non solum a positione horum centrorum sed etiam a sectione aquae pendeat. Ex fundamento

1) Vgl. Joh. Bernoulli, *Opera omnia* T. IV S. 294—296.

autem, quo istud principium nititur, scilicet ut commune corporis et aquae centrum gravitatis locum infimum petat, puto explicari debere, cur naves in mari agitato per undas motu accelerato ascendant, retardato vero descendant; cujus phenomeni causa mihi similis videtur illi, qua levia corpuscula aquae in vase quodam contentae innatantia ad latera accedant, si quidem aqua ad latera magis sit elevata, sed de hujus generis principiis hydrostaticis, quando aquae superficies non amplius est horizontalis, nil certi adhuc statuere valeo.

Quod ad formulam meam generalem pro problemate isoperimetrico attinet, ea rectissime se habet, atque ambos casus a Te allegatos utique sub se complectitur: substitutiones

$$dy = p\,dx, \quad dp = q\,dx, \text{ etc.}$$

ideo tantum facio, ut speciem differentialium tollam; non autem quasi in hac substitutione novitatem vel aliud mysterium latere putarem. Illa quidem formula, quam perscripsi, latissime patet, atque non solum ad problema, quo curvae propositae sunt ejusdem longitudinis sed etiam si quaecunque proprietates vel una vel plures iis sunt communes, est accommodata: quando autem inter omnes curvas isoperimetras ea postulatur, in qua sit $\int Z dx$ maximum vel minimum, existente Z functione quacunque arcus s, abscissae x, applicatae y, et quantitatum

$$\frac{dy}{dx} = p; \quad \frac{dp}{dx} = q; \quad \frac{dq}{dx} = r, \text{ etc.}$$

Erit igitur Z quantitas finita nulla differentialia saltem specie talia in se continens, sed quantitates tantum finitas s, x, y, p, q, r, etc. Quare, si functio Z differentietur, habebit dZ ejusmodi formam

$$L ds + M dx + N dy + P dp + Q dq \text{ etc.}$$

ac quantitates, L, M, N, P, Q etc. erunt cognitae. Ex his vero sequens pro curva quaesita mihi invenitur aequatio

$$A d.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = d.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} \int L dx + N dx - dP + \frac{ddQ}{dx} - \frac{d^3R}{dx^2} + \text{etc.},$$

in qua solutione non solum ambo Tui casus continentur, sed etiam Filii Tui quaestio de radio osculi. Sit enim Z functio solius arcus s, evanescent quantitates M, N, P, Q etc. eritque

$$A d.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = d.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} \int L dx$$

seu integrando

$$A + B\frac{\sqrt{(1+pp)}}{p} = \int L dx,$$

quae differentiata dat

$$-\frac{Bdp}{p^2\sqrt{(1+p^2)}}=Ldx=\frac{Lds}{\sqrt{(1+pp)}},$$

unde fit

$$Lds=-\frac{Bdp}{pp}$$

et

$$\int Lds=Z=C+\frac{B}{p},$$

quare cum sit $p=\frac{dy}{dx}$, orietur haec aequatio pro curva quaesita:

$$(Z-C)\,dy=Bdx.$$

Simili modo si sit Z functio quaecunque applicatae y, erit

$$dZ=Ndy$$

evanescentibus L, M, P, Q etc., habebiturque haec aequatio

$$Ad\cdot\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}=Ndx=\frac{Adp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}=\frac{Ndy}{p},$$

seu

$$Ndy=\frac{Apdp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$$

et

$$\int Ndy=Z=B-\frac{A}{\sqrt{(1+pp)}},$$

ita ut sit

$$Adx=ds(B-Z).$$

Hocque modo omnia problemata, quae in hoc genere proponi possunt, resolvere licet, etiamsi differentialia secundi gradus, altiorumve in Z insint. At si differentialia secundi gradus insint, reperitur immediate aequatio differentialis quarti gradus, quae ob quatuor constantes in integratione ingredientes, non per duos terminos, per quos curva transeat, sed per quatuor demum determinatur: cujusmodi est problema Filii Tui, quod mihi omnino determinatum videtur, si curvae quaesitae vel quatuor puncta, vel positio tangentium in terminis curvae detur; quod problema ope ejusdem canonis resolvi. Cum enim sit radius osculi

$$=\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}\,dx}{dp}=\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$

ob $\frac{dp}{dx}=q$; et elementum curvae $ds=dx\sqrt{(1+pp)}$, habebitur ista expressio

$$\int\frac{dx\,(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m}$$

maxima minimave efficienda; eritque

$$Z = \frac{(1+p^2)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m},$$

unde ad meam solutionem sum perductus.[1])

Observavi nuper insignem elasticae rectangulae proprietatem, in qua si abscissa ponatur x, est applicata

$$= \int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}},$$

et longitudo curvae

$$= \int \frac{a^2\,dx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}},$$

quae expressiones ita sunt comparatae, ut inter se comparari nequeant. At si abscissa sumatur $= a$, inveni[2]) rectangulum sub applicata et arcu comprehensum aequale esse areae circuli cujus diameter sit abscissa $= a$; quae observatio mihi quidem notatu maxime digna videtur.

Damnum denique ex decoctione mercatorum quod es perpessus ex animo doleo.

Vale, Vir Celeberrime, meque favore Tuo amplecti non desinas.

Dabam Petropoli d. 20 Decembr. 1738.

---

1) Vgl. die Abhandlung von Euler, *Solutio problematis cujusdam a celeb. Dan. Bernoullio propositi;* Comment. acad. sc. Petrop. **10,** 1738 (gedruckt 1747), S. 164—180.

2) Soviel ich weiss, hat Euler diesen Satz zuerst am Ende seiner Abhandlung *Theoremata circa reductionem formularum integralium ad circuli quadraturam* (Miscell. Berolin. **7,** 1743, S. 129) veröffentlicht. Früher geschrieben war vermutlich die Abhandlung *De productis ex infinitis factoribus ortis* (Comment. acad. sc. Petrop. **11,** 1739 [gedruckt 1750], S. 3—31), wo der Satz S. 11—12 bewiesen wird.

Das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 1869—1904.

Von Felix Müller in Friedenau-Berlin.

Anläßlich des Entschlusses des Herrn Emil Lampe, die Redaktion des Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik baldmöglichst jüngeren Kräften anzuvertrauen, hat es der Herausgeber der Bibliotheca Mathematica für angebracht gehalten, den Lesern einen kurzen historischen Rückblick auf die Entstehung und Entwickelung dieses sehr verdienstlichen Unternehmens zu bieten; er hat mich darum ersucht, einen solchen Artikel für seine Zeitschrift zu redigieren.

Es war im Dezember des Jahres 1869, als mein lieber Freund und Kollege Carl Ohrtmann mich aufforderte, ihm bei der Begründung einer Zeitschrift behülflich zu sein, die nach dem Vorbild der Fortschritte der Physik eine systematisch geordnete Übersicht über alle neuen Erscheinungen auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften zu geben bestimmt sein sollte. Begeistert von dem Plane, überzeugt von der Unentbehrlichkeit eines solchen Unternehmens, die Schwierigkeiten, die sich der Ausführung desselben entgegenstellten, nicht ahnend, sagte ich mit Freuden meine Hilfe zu. Die nächsten Weihnachtsferien benutzten wir dazu, das im Jahre 1868 erschienene Material zu sammeln und systematisch zu ordnen. Die Titel der Einzelwerke entnahmen wir dem Buchhändler-Börsenblatt und einzelnen damals noch recht dürftigen Bibliographien. Die Zahl der Zeitschriften, aus denen wir die im Jahre 1868 erschienenen Artikel auszogen, betrug 78, unter denen 24 deutsche, 18 französische, 12 englische und 12 italienische. Hätten wir gewußt, daß schon damals die Anzahl der Zeitschriften mathematischen Inhalts ca. 350 betrug, so hätten wir vielleicht ganz und gar Abstand genommen von unserem Vorhaben, aus Furcht, daß unser Jahrbuch gar zu unvollständig würde. Einen Teil dieser Zeitschriften mußten wir durch Kauf erwerben, andere wurden uns im Lesesaal der Königl. Bibliothek und der K. Gewerbeakademie zur

Verfügung gestellt. Besonders dankbar erwähnen muß ich die Unterstützung des inzwischen verstorbenen Bibliothekars PRITZEL, eines Botanikers (die Königl. Bibliothek zu Berlin hatte damals noch keinen Mathematiker unter ihren Beamten).

Aber nicht nur Titel wollten wir in unserem Jahrbuche geben, sondern Referate. Deshalb wandten wir uns an eine große Zahl von Mathematikern mit der Bitte, das Jahrbuch durch Übernahme von Referaten zu fördern. Der größte Teil der älteren Herren gab uns — wie wir vorausgesehen — eine negative Antwort; doch versicherten sie uns ihres lebhaften Interesses an dem von uns gegründeten höchst verdienstlichen Unternehmen. Diese ganze Korrespondenz war psychologisch interessant und lehrreich. Ein ganz junger Privatdozent wollte erst seinen Lehrer KUMMER fragen, ob er seinen Namen zu einem solchen Unternehmen hergeben dürfe. Einem andern ließen die Fülle seiner neuen Ideen keine Zeit, sich mit den Gedanken anderer Mathematiker zu beschäftigen. Mehrere erklärten sich bereit Referate zu liefern, falls die Redaktion dieselben verantwortlich unterzeichnete, was natürlich dankend abgelehnt wurde. Es gelang uns endlich, folgende Liste von Referenten für den ersten Jahrgang zu gewinnen: FRIEDR. AUGUST (Berlin), H. BRUNS (Berlin), R. HOPPE (Berlin), E. HUTT (Berlin), E. KRETZSCHMER (Frankfurt a. O.), A. MAYNZ (Ludwigslust), EDM. MEYER (Historiker, Berlin), FELIX MÜLLER (Berlin), L. NATANI (Berlin), E. NETTO (Berlin), CARL OHRTMANN (Berlin), RUD. RADAU (Berlin), AD. SCHUMANN (Berlin), RUD. TEICHERT (Freienwalde a. O.), ALB. WANGERIN (Berlin) und J. WORPITZKY (Berlin).

Unser lieber Freund und Kollege BERNHARD SCHWALBE unterstützte uns durch seine bei der Redaktion der Fortschritte der Physik gewonnenen Erfahrungen; ihm verdankten wir vornemlich manchen praktischen Wink für die rein technische Seite der Redaktion. Die rein mechanischen Arbeiten: das Ausschreiben der Titel, das Zerschneiden der Journale, die bei einzelnen nicht mit dem Blatte endenden Artikeln notwendigen Abschriften, die Versendung des Materials, einen Teil der begleitenden Korrespondenz, die Herstellung der Namen- und Sachregister u. ä. übernahm zu unserer großen Freude Frau LUISE OHRTMANN. Sie hat sich durch bewundernswürdigen Eifer für die Sache und durch unermüdlichen Fleiß ein großes Verdienst um die Entstehung und Förderung des Jahrbuches erworben.

Da die meisten der oben genannten ersten Mitarbeiter in Berlin wohnten, so konnten OHRTMANN und ich in häufigen Besprechungen mit diesen Herren die systematische Einordnung der Literatur gewissenhaft beraten. Wir hatten für die Systematik 12 Abschnitte mit im ganzen 39 Kapiteln gewählt. Auch unsere verehrten Lehrer BORCHARDT, KROnecker und Weierstrass verpflichteten uns durch ihren stets bereiten freundlichen Rat zu besonderer Dankbarkeit. Auf ihre Fürsprache hin erklärte sich Georg Reimer bereit, den Verlag des Jahrbuches zu übernehmen.

Leider verzögerte sich das Erscheinen des ersten Heftes durch den Krieg, an welchem mehrere der oben genannten Mitarbeiter teilnahmen, bis zum Februar 1871. Während meines Aufenthalts in Frankreich wurde Carl Ohrtmann in den Redaktionsgeschäften durch meinen Freund Albert Wangerin freundlichst unterstützt.

Die wohlwollende Aufnahme, welche das erste Heft und die beiden folgenden Hefte seitens der Fachgenossen fanden, vor allem die allseitige Anerkennung, welche uns für die ernstliche Bemühung ward, zur Förderung mathematischer Studien beizutragen, ermutigte uns an die Herausgabe des zweiten Jahrganges mit gesteigerter Kraft heranzutreten. Zu unserer Freude trat Herr Albert Wangerin jetzt in die Redaktion ein. Es war uns geglückt, mit mehreren Herausgebern mathematischer Zeitschriften und mit einzelnen Akademien in Tauschverkehr zu treten; auch wurden uns jetzt zahlreiche Einzelwerke und Separatabzüge zur Berichterstattung zugeschickt. Georg Reimer stellte uns in liberalster Weise seinen ganzen neueren mathematischen Verlag zur Verfügung und beschaffte uns eine Reihe von Zeitschriften zu bedeutend ermäßigten Preisen. Ferner traten wir mit mehreren Gelehrten des Auslandes in Verbindung, die sich bereit erklärten, die uns unzugängliche Literatur ihres Landes für unser Jahrbuch zu bearbeiten. Um die Verzögerung, welche das Erscheinen des ersten Bandes erlitten hatte, wieder auszugleichen, vereinigten wir in den 2. Band die beiden Jahrgänge 1869 und 1870. Mit Ausnahme der Herren Edm. Meyer und R. Radau lieferten die am ersten Bande beteiligten Referenten weitere Beiträge für den 2. Band, und zu ihnen traten hinzu: G. Battaglini (Neapel), J. Casey (Kingstown, Dublin), A. Cayley (Cambridge), A. Clebsch (Göttingen), M. Curtze (Thorn), J. Glaisher (Cambridge), M. Hamburger (Berlin), P. C. V. Hansen (Kopenhagen), O. Henrici (London), G. Jung (Mailand), Felix Klein (Erlangen), A. Korkine (Petersburg), Carl Neumann (Leipzig), A. Oberbeck (Berlin), W. Scholz (Berlin), H. Schubert (Hildesheim), O. Stolz (Innsbruck), A. Wittstein (Leipzig), G. Zolotareff (St. Petersburg).

Leider war der 2. Band erst im Jahre 1873 vollendet, da die Beschaffung der französischen Literatur infolge der durch den Krieg verursachten Verkehrsstörungen sich verzögerte und eine längere Arbeitseinstellung in der Offizin der Verlagshandlung den Druck unterbrach. Desto mehr beschleunigten wir die Vorbereitungen für die folgenden Bände, so daß in den folgenden Jahren regelmäßig ein Band erscheinen konnte.

Die Zahl der exzerpierten Zeitschriften betrug schon bei dem zweiten Bande 100 und stieg mit dem 10. Bande auf 170; der eigentliche Text, ohne die beiden Register, der beim 1. Bande 426 Seiten umfaßt hatte, erreichte beim 4. Bande 609, beim 9. 815, beim 15. 1000 Seiten. Die Zahl der Artikel, die im ersten Jahrgange 838 war, stieg im 4. Bande auf 1068, im 9. auf 1600. Solche Zahlen lassen deutlich erkennen, wie viel Mühe die Herausgabe des Jahrbuches mit der Zeit erheischte, und wie groß die Schwierigkeiten, die ein solches Unternehmen mit sich bringt, mit der Zeit wurden. In allwöchentlichen Konferenzen kamen wir drei, — Ohrtmann, Wangerin und ich, — zusammen, um uns über laufende, das Jahrbuch betreffende Fragen zu beraten. Die wissenschaftliche Arbeit, die hier zu leisten war, die systematische Einordnung des Materials, die Verteilung an die Mitarbeiter, die Drucklegung der eingegangenen Berichte und vieles Andere, gewährte uns einen großen Genuß. Nicht frei von Verdrießlichkeiten war die Korrespondenz mit den Referenten, die häufig mit recht schwer zu befriedigenden Ansprüchen hervortraten oder wiederholt an die rechtzeitige Lieferung der Referate oder an die Rückgabe des Zeitschriftenmaterials u. a. erinnert werden mußten, auch bisweilen ganz unerwartet ihre Mitarbeit aufkündigten. Dann hieß es neue Referenten zu gewinnen, die schwierigste Aufgabe der Redaktion. Daß mehrfach die Verfasser von Aufsätzen mit den Berichten, die über ihre Arbeiten geliefert wurden, unzufrieden waren, ist ja selbstverständlich. Diese Unzufriedenheit rief sogar ein Gegenunternehmen gegen das Jahrbuch ins Leben, das Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik. „Originalberichte der Verfasser", gesammelt und herausgegeben von Leo Königsberger und Gustav Zeuner, Leipzig, B. G. Teubner, B. 1—2 (1877, 1879).

Aus den mehrstündigen gemeinsamen Konferenzen nahm dann ein Jeder von uns Dreien sein besonderes Redaktions-Arbeitspensum mit nach Hause. Der Löwenanteil der Arbeit fiel selbstverständlich unserem lieben Freunde Carl Ohrtmann zu. Deshalb hieß es mit Recht vom 11. Bande (Jhrg. 1879) an auf dem Titel: „unter besonderer Mitwirkung der Herren Felix Müller und Albert Wangerin herausgegeben von Carl Ohrtmann". Unermüdlich bestrebt, das von ihm begonnene Werk zu vervollkommnen, opferte Carl Ohrtmann alle Kräfte und alle Zeit, welche ihm seine amtliche Tätigkeit übrig ließ. Er schonte sich nicht, als selbst die Vorboten der schweren Krankheit sich zeigten, der er am 22. April 1885 erliegen sollte. Auf dem schmerzensreichen Krankenlager gewährte ihm die Beschäftigung mit dem Jahrbuche Trost und Erhebung. 15 Jahrgänge (1868—81) in 14 Bänden hat er fertiggestellt und den 16. fast bis zum Druck gefördert und sich dadurch ein schönes ewiges Denkmal in der mathematischen Wissenschaft errichtet.

Uns beiden, Wangerin und mir, die wir 15 Jahre hindurch mit Carl Ohrtmann an der Redaktion des Jahrbuches in ungetrübter Harmonie gearbeitet hatten, war es vergönnt, unsern lieben Freund auf dem Sterbebette durch die Nachricht zu erfreuen, daß es uns gelungen sei, durch Hinzuziehung neuer Kräfte das Fortbestehen des Jahrbuches zu gewährleisten. In einer von Freunden des Jahrbuches abgehaltenen Versammlung stellte sich an die Spitze der Leitung ein Mann, der wie wenige geeignet war, das Jahrbuch mit seltener Energie weiterzuführen: Emil Lampe. Er hatte sich bereits als jahrelanger Helfer des Professor Kronecker bei der Herausgabe des Journals für Mathematik bewährt. Ihm zur Seite trat unser gemeinschaftlicher Studienfreund, Max Henoch, ein bescheidener selbstloser Gelehrter, der, durch keine amtlichen Berufspflichten in Anspruch genommen, bereit war, seine ganze Zeit dem Jahrbuche zu widmen, ohne aus der Herausgabe des Jahrbuches einen Erwerb zu machen. In ihm fand Emil Lampe, der von nun an die Seele der Redaktion wurde, einen treuen Mitarbeiter, der sich allen Anordnungen widerspruchslos fügte. In den nächsten Jahren stieg die Zahl der jährlich angeführten Artikel auf mehr als 2000, da Lampe, der Zeitströmung und seiner amtlichen Stellung Rechnung tragend, auch die technische Literatur berücksichtigt wissen wollte. Es ist hier nicht der Ort, die Frage zu erörtern, ob eine solche Erweiterung des Jahrbuches (der 20. Band schwoll auf 90 Bogen an! —) von Vorteil für dasselbe war. Vielleicht wäre im Gegenteil eine Beschränkung auf die reine Mathematik vorteilhafter gewesen; es könnten die technischen, physikalischen und astronomischen Arbeiten, für welche besondere referierende Zeitschriften bestehen, ganz ausgeschlossen werden.

Leider war es unserm lieben Max Henoch nur $5\frac{1}{2}$ Jahre lang vergönnt, sich der ihm lieb gewordenen Arbeit an dem Jahrbuch zu widmen. Am 26. September 1890 erlag er einem Herzleiden, das er jahrelang mit großer Geduld getragen. Auf seinen Wunsch stellte sein Vater beim Tode des geliebten Sohnes der Redaktion die Mittel zur Verfügung, einen Gehülfen für die rein mechanischen äußeren Arbeiten, die — wie wir gesehen, — in den ersten 15 Jahren von Frau Ohrtmann ausgeführt wurden, zu gewinnen.

Mit Beginn des Jahrganges 1898 trat Herr Georg Wallenberg in die Redaktion des Jahrbuches ein, und in neuester Zeit ist es Herrn Emil Lampe gelungen, jüngere Kräfte aus den Mitgliedern der Berliner Mathematischen Gesellschaft zu gewinnen, welche bereit sind ihm bei Erledigung der immer größer werdenden Redaktionsarbeit zu helfen.

Augenblicklich ist das erste Heft des 33. Bandes (Jahrgang 1902) im Druck. Da aus ähnlichen Gründen, wie im 2. Bande, auch im 25. Bande 2 Jahrgänge (1893 und 1894) vereinigt wurden, so umfaßt bis jetzt das Jahrbuch die mathematische Literatur von 35 Jahren.

Die Zahl der Referenten beträgt 189, von denen nur an *einem* Jahrgange mitgearbeitet 28, an zwei Jahrgängen 7, an mehr als 9 Jahrgängen 72 und an mehr als 19 folgende 23, die nach der Dauer ihrer Mitwirkung geordnet sind: (35 J.) Felix Müller und Albert Wangerin, (34) A. Maynz, (33) M. Hamburger †, (32) P. Mansion, (31) R. Hoppe † und H. Schubert, (29) S. Dickstein, (28) Friedr. August †, (27) V. Schlegel, (25) J. Glaisher und K. Michaelis, (24) A. Cayley †, Ad. Schumann †, Carl Neumann und E. Töplitz, (23) G. Teixeira, (22) E. Netto, (21) G. Eneström, und (20) Emil Lampe, H. Bruns, Franz Meyer und Fr. Engel. Von verstorbenen Mitarbeitern, die sich um das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik ganz besonders verdient gemacht haben, nenne ich zum Schluß: Friedr. August, John Casey, Arthur Cayley, Alfr. Clebsch, Max Curtze, M. Hamburger, Max Henoch, R. Hoppe, Jul. Lange, W. Lazarus, Sophus Lie, Ant. Oberbeck, Carl Ohrtmann, Ad. Schumann, W. Stahl und Fr. Studnička. Ehre ihrem Andenken!

Welche Forderungen sind an Rezensionen mathematischer Arbeiten zu stellen?

Von G. Eneström in Stockholm.

Um von vornherein Mißverständnis vorzubeugen, bemerke ich sogleich, daß die in der Überschrift vorkommende Frage gar nicht bedeutet, daß ich inbetreff der Rezensionen mathematischer Arbeiten ganz besondere Normen aufstellen will, die in diesem Artikel angegeben werden sollen. Durch die Frage habe ich vielmehr ausdrücken wollen, daß es auch für den Mathematiker von direktem Interesse sein muß in Erwägung zu ziehen, wie eine Rezension abgefaßt werden soll, und daß ich hier diese allgemeine Frage mit besonderer Rücksicht auf die Leser, für welche die Bibliotheca Mathematica bestimmt ist, behandeln werde.

Von einer Rezension im eigentlichen Sinne des Wortes kann man meines Erachtens in erster Linie fordern, daß sie eine motivierte Wertschätzung der besprochenen Arbeit bietet, aber für diesen Zweck ist offenbar eine kritische Untersuchung derselben nötig. Nun ist es aber klar, daß eine solche Untersuchung nicht befriedigend ausgeführt werden kann, sofern nicht der Rezensent sachkundig ist, und daß dieser dazu unparteiisch sein soll, damit das Resultat nicht unzuverlässig werde.

Daß eine wirkliche Rezension in erster Linie sachkundig sein muß, ist so selbstverständlich, daß eine Erläuterung dieser Forderung eigentlich überflüssig scheint. Indessen ist es in vielen Fällen sehr schwierig festzustellen, wie groß die Sachkunde sein soll, und tatsächlich kommt es vor, daß die Verfasser besprochener Arbeiten ohne genügende Gründe ihren Rezensenten die hinreichende Sachkunde aberkennen. In diesem Punkte wird man nie zu einem vollständigen Einverständnis gelangen, und man kann nur behaupten, daß es *caeteris paribus* um so besser ist, je größere Sachkunde der Rezensent besitzt.

Von großer Bedeutung muß es auch sein, daß eine Rezension unparteiisch ist, denn sonst kann man nicht sicher sein, daß die besprochene Arbeit richtig gewürdigt wird. Dennoch darf man hier nicht zu weit gehen, weil es oft für das mathematische Publikum von großem Interesse sein muß zu erfahren, wie eine mathematische Schrift, die eine gewisse Richtung repräsentiert, von dem Vertreter einer anderen Richtung beurteilt wird. Freilich ist es in solchen Fällen nötig, die Voraussetzungen ausdrücklich hervorzuheben, die der Wertschätzung zugrunde liegen.

Wie ich schon betont habe, erfordert jede wirkliche Rezension eine kritische Untersuchung der in Betracht gezogenen Arbeit, aber damit ist gar nicht gesagt, daß alle Einzelheiten dieser Untersuchung dem Publikum vorgelegt werden sollen. Im allgemeinen hat jede Arbeit sowohl Verdienste als Fehler, und die Hauptfrage wird also, ob Rezensionen mathematischer Arbeiten wesentlich nur die Verdienste oder zugleich auch die Fehler hervorheben sollen; hiermit hängt auch die Frage sehr nahe zusammen, inwieweit die Kritik bei der Erwähnung der Fehler schonend sein soll.

Sieht man von den eigentlichen Lehrbüchern ab, kann man wohl im allgemeinen behaupten, daß ein mathematischer Verfasser keinen genügenden materiellen Ersatz für seine Mühe bekommt, und man muß folglich geneigt sein anzunehmen, daß er durch seine literarische Tätigkeit beabsichtigt, der Wissenschaft nützlich zu sein. Aber diese Absicht ist in jedem Fall lobenswert, und man könnte vielleicht hieraus folgern, daß die Renzension eigentlich nur konstatieren sollte, bis zu welchem Grade es dem Verfasser gelungen ist, seine lobenswerte Absicht zu verwirklichen. Von dem Gesichtspunkte des betreffenden Verfassers kann ja diese Argumentation geltend gemacht werden, wenn man auch versucht wird, dabei zu bemerken, daß tatsächlich einige Mathematiker mehr aus Ehrgeiz als aus Interesse für die Wissenschaft bewogen werden als Verfasser aufzutreten, und daß es übrigens den meisten Verfassern nützlich sein muß, auf die etwaigen Fehler ihrer Arbeiten aufmerksam gemacht zu werden. Aber es gibt einen anderen Gesichtspunkt, der wenigstens ebenso sehr Beachtung verdient, nämlich der des mathematischen Publikums, und von diesem Gesichtspunkte aus ist es angebracht, nicht nur über die Verdienste der besprochenen Arbeit, sondern auch über ihre Fehler zu berichten. Wenn eine mathematische Schrift veröffentlicht wird, so geschieht dies wohl fast immer, damit sie gelesen, oft auch, damit sie gekauft werde, und eine Rezension ist um so wertvoller, je mehrere Fachgenossen daraus ersehen können, ob es ihnen nützlich sein wird, die betreffende Schrift zu lesen oder dieselbe sogar zu kaufen. Nun gibt es freilich Mathematiker, die ein gewisses Gebiet vollständig beherrschen, und diese brauchen nur zu wissen, daß eine einschlägige Schrift wenigstens einige Verdienste hat, um zur Einsichtnahme derselben bewogen zu werden. Aber für die meisten stellt sich die Sache wesentlich anders; sie haben weder Zeit noch Lust alles zu lesen, was über einen besonderen Gegenstand geschrieben wird, und sie sind auch nicht kundig genug, um sogleich zu sehen, inwieweit die Einzelheiten einer ihnen vorgelegten Schrift richtig sind. Für solche Fachgenossen muß es offenbar ein Gewinn sein, wenn die Rezensionen auch die Fehler der besprochenen Arbeiten erwähnen, denn sie können dadurch teils ausfindig machen, welche Arbeit ihnen am besten paßt, teils vermeiden, durch die Fehler dieser Arbeit irre geleitet zu werden.

Auch aus anderen Gründen kann es nützlich sein, wenn es zur Gewohnheit wird, die Fehler der erschienenen Schriften öffentlich zu erwähnen. Die literarische Produktivität auf dem mathematischen Gebiete ist jetzt so groß, daß es zweckmäßig ist, den Verfassern, die nicht eine wirklich gute Arbeit leisten können oder leisten wollen, die Drucklegung ihrer Manuskripte wenigstens bis zu einem gewissen Grade zu erschweren. Und diesen Zweck erreicht man meines Erachtens, wenn man das Publikum und dadurch auch die Verleger mathematischer Arbeiten auf die Fehler solcher Verfasser aufmerksam macht, denn auf diese Weise werden einige derselben abgeschreckt, weitere Schriften zu veröffentlichen, und andere veranlaßt, künftighin ihre Arbeiten gründlicher zu revidieren, bevor sie gedruckt werden.

Es ist auch klar, daß man im allgemeinen eine Rezension nützlicher macht, wenn man den Lesern durch Hervorheben sowohl der Verdienste als der Fehler ermöglicht, sich eine selbständige Ansicht über den Wert der besprochenen Arbeit zu bilden, als wenn man wesentlich nur die Verdienste erwähnt und dann ein Gesamturteil hinzufügt.

Mit dem, was ich bisher bemerkt habe, können wohl die meisten Fachgenossen im großen und ganzen einverstanden sein, aber weit größer muß der Meinungsunterschied werden, wenn man zu der oben angedeuteten Frage übergeht, inwieweit die Kritik, die in einer Rezension vorkommt, schonend sein soll. Inbetreff dieser Frage scheint man sehr geneigt zu betonen, daß der Verfasser einer mathematischen Schrift einen an sich lobenswerten Zweck verfolgt, nämlich der Wissenschaft zu dienen, und daß seine etwaigen Versehen schon aus diesem Grunde mild zu beurteilen sind; handelt es sich um eine Arbeit, die entschieden große Verdienste hat, geht man zuweilen so weit, daß man eine Besprechung, wo die Kritik etwas mehr zur Geltung kommt, fast unangezeigt findet. Mit Ansichten dieser Art kann ich mich nicht einverstanden erklären, denn auch wenn der Zweck der Herausgabe einer mathematischen Schrift lobenswert ist, kann die Schrift selbst für die Wissenschaft schädlich werden, sofern sie ohne hinreichende Sachkunde oder Genauigkeit bearbeitet worden ist. Eine solche Schrift kann nämlich andere ebenso unberufene Verfasser anspornen, Arbeiten derselben Art zu publizieren, sie kann unter gewissen

Umständen verhindern, daß andere, wirklich gute Arbeiten über denselben Gegenstand veröffentlicht werden, sie kann auch leicht dazu beitragen, daß sich Fehler unnötiger Weise verbreiten. Ist man aber überzeugt, daß eine Schrift Nachteile dieser Art mit sich bringen wird, so hat man gewiß keinen Anlaß, ihre Verdienste besonders hervorzuheben, und die Fehler mehr im Vorübergehen zu erwähnen.

Wesentlich anders liegt natürlich die Sache hinsichtlich der wirklich wertvollen Arbeiten, aber auch hier kann es die Pflicht der Kritik sein, auf die vorhandenen Fehler ausdrücklich hinzuweisen. Ganz besonders scheint mir ein solches Hinweisen nötig, wenn andere Besprechungen einer an sich vorzüglichen Arbeit wiederholt lobende Urteile bringen, die den nicht sachkundigen Leser irre führen können. Ein solcher Fall liegt z. B. inbetreff der zweiten Auflage der CANTORschen *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* vor. Im Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik hat nämlich der Referent, der über diese Arbeit berichtet, behauptet, daß in den besonderen Abteilungen der neuen Auflage „überall, soweit dies nötig, die bessernde Hand zu spüren ist“ (**30** [1899], S. 1); „überall am rechten Platze die bessernde Hand den neu erschlossenen Quellen gerecht geworden ist“; (**31** [1900], S. 1) „überall die bessernde Hand angelegt worden ist“ (**32** [1901], S. 1). Aber bekanntlich hat Herr CANTOR bei der Bearbeitung der neuen Auflage keine besonders großen Anstrengungen gemacht, um die *ganze* mathematisch-historische Literatur des letzten Jahrzehntes des 19. Jahrhunderts zu verwerten, und das Wort „überall“ des Rezensenten ist darum irreleitend, auch wenn man es *cum grano salis* nimmt. In der Tat haben mir bisweilen junge Verfasser Artikel für die Bibliotheca Mathematica gesandt, worin ohne weiteres als abgemacht vorausgesetzt wird, daß die CANTORschen *Vorlesungen* alles, was bisher über eine gewisse Frage publiziert war, gebührend berücksichtigt haben, so daß es überflüssig ist, die übrige einschlägige mathematisch-historische Literatur zu studieren. Unter solchen Umständen habe ich es für richtig erachtet, in meinen Rezensionen über die *Vorlesungen* auf das wahre Sachverhältnis hinzuweisen, obgleich ich wußte, daß dies einigen Verehrern des hochverdienten Verfassers nicht angenehm sein würde.

Ich gehe jetzt zu einigen Einzelheiten über, die zwar nicht besonders wichtig sind, aber dennoch nicht ganz belanglos sein dürften.

Es ist wohl allgemein gebräuchlich, schon am Anfange einer Rezension den Titel der zu besprechenden Arbeit anzugeben, aber nicht immer wird der genaue Wortlaut desselben zitiert. Gegen Auslassungen unwesentlicher Worte ist natürlich nichts einzuwenden, aber wirkliche Änderungen und besonders Übersetzungen in eine andere Sprache halte ich für unangebracht. Es kommt oft vor, daß ein Bibliograph inbetreff ihm unzugänglicher Schriften auf Rezensionen angewiesen ist, und wenn darin die Titel nicht richtig und in der Originalsprache angegeben sind, so können dadurch leicht Mißverständnisse entstehen. — Dem Titel soll eine genaue Angabe der Seitenzahlen beigefügt werden, also z. B. auch die Seitenzahlen des Vorwortes (oder der Einleitung), wenn dies besonders paginiert ist; bisweilen ist das Vorwort sehr lang, und dann kann das Auslassen der Seitenzahlen desselben zu einer unrichtigen Vorstellung vom Umfange des Buches veranlassen.

Ob man vor der kritischen Abteilung der Rezension einen kürzeren oder längeren Bericht über den wesentlichen Inhalt der Schrift bringen soll, ist wohl eigentlich eine Geschmacksache. Einigen Lesern wird ein solcher Bericht sicherlich willkommen sein, und der Verfasser kann bisweilen daraus ersehen, wie eingehend der Rezensent die Schrift studiert hat. Ausnahmsweise kommen auch Berichte vor, aus denen man ausfindig machen kann, daß der Rezensent die Arbeit, die er besprechen sollte, überhaupt nicht gelesen hat,[1]) und in einem solchen Falle ist ja der

---

1) Eigentlich kann man wohl nie auf Grund eines Referates mit Bestimmtheit sagen, daß der Berichterstatter die betreffende Schrift gar nicht gelesen hat, aber bisweilen ist die Wahrscheinlichkeit dafür so groß, daß sie fast zur Gewißheit wird, und diese Behauptung erlaube ich mir hier mit einem Beispiele zu belegen. In der Zeitschrift L'enseignement mathématique 4 (1902), S. 226—227 kommt eine Besprechung der zwei letzten Lieferungen des dritten Bandes der *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* vor, worin schon am Anfange gesagt wird, daß „l'auteur aborde l'oeuvre de Jacques Bernoulli qui précisa les notions émises par Pascal et Fermat sur les probabilités et qui mit entre les mains des mathématiciens le précieux instrument du calcul exponentiel". Nun ist es zuerst klar, daß die unrichtige Angabe, Jakob Bernoulli habe den Mathematikern die Exponentialrechnung zur Verfügung gestellt, nicht aus der Cantorschen Arbeit entnommen worden ist, wo S. 232 ganz richtig angegeben wird, Johann Bernoulli habe 1697 die Grundzüge der Rechnung mit Exponentialgrößen festgestellt; auf der anderen Seite findet sich auf S. 162 des vom Rezensenten im Jahre 1900 herausgegebenen Buches: *Histoire des mathématiques* folgender Passus: „Jacques Bernoulli . . précisa les notions émises par Pascal et Fermat sur les probabilités. Enfin et surtout on lui est redevable du Calcul exponentiel, cette partie de l'analyse devenue si féconde". Schon diese Beobachtung wird bei dem Leser Verdacht erregen, daß es sich nicht hier um einen Schreibfehler in den Aufzeichnungen handelt, die der Rezensent bei dem Durchlesen der zu besprechenden Arbeit gemacht hat, sondern daß er ohne weiteres sein eigenes Buch abgeschrieben hat; in der Tat zeigt eine Vergleichung der Rezension mit der zitierten *Histoire des mathématiques*, daß jene wesentlich ein Auszug aus dieser ist, und zwar so, daß das Referat auch Notizen enthält, die in den Cantorschen *Vorlesungen* überhaupt nicht vorkommen. Durch die folgenden Zitate wird der Leser imstande sein, sich ein selbständiges Urteil hierüber zu bilden.

Bericht insofern nützlich, daß er zeigt, wie wenig Vertrauen die Rezension verdient.

Wie die eigentliche kritische Besprechung meiner Ansicht nach beschaffen sein soll, habe ich schon im allgemeinen angegeben, füge aber hier noch ein paar kleine Bemerkungen hinzu. Wenn man eine Ausstellung gegen den Verfasser macht, ist es wohl zweckmäßig, die Richtigkeit derselben durch Beispiele zu belegen, es sei denn, daß die Ausstellung ziemlich unbedeutend ist oder von jedem Leser der Schrift unmittelbar bestätigt wird. Die Frage, ob man auch kleinere Flüchtigkeitsfehler sowie offenbare Schreib- oder Druckfehler notieren soll, kann ja verschiedentlich beantwortet werden; für meinen Teil halte ich solche Fehler für nicht durchaus gleichgültig, denn durch dieselben können leicht Unrichtigkeiten verbreitet werden, die später andere weit mehr fehlerhafte Angaben verursachen.

Ich habe mich bisher nur mit Rezensionen im eigentlichen Sinne des Wortes beschäftigt, und es wäre ohne Zweifel am besten, wenn jede mathematische Schrift wirklich kritisch besprochen werden könnte. Aber teils ist es leider sehr schwierig, für die meisten Schriften Fachgenossen aufzufinden, die geneigt und geeignet sind, Rezensionen zu liefern, teils

---

Angebliche Rezension der CANTORschen *Vorlesungen,* a. a. O. S. 226, 227.	Auszüge aus der *Histoire des mathématiques* (1900), S. 167, 179.
MONTMORT, dans son *Essai sur les jeux de hazard*, donna des formules pour la sommation de certaines suites entre autres celle qui permet de représenter la somme de n termes d'une série dont les différences finissent par s'annuler.	Dans son *Essai d'analyse sur les jeux de hazard,* il [MONTMORT] donna plusieurs formules pour la sommation de certaines suites, entre autres celle qui permet de représenter la somme de n termes d'une série dont les différences finissent par s'annuler
On y [dans le *Traité de dynamique* de D'ALEMBERT] rencontre une méthode générale permettant de ramener toutes les lois du mouvement à des questions d'équilibre. Il suffit d'exprimer que les forces qui meuvent le système considéré équilibrent les forces qui déplaceraient les particules de l'ensemble indépendamment les unes des autres et quelle que soit la façon dont s'opère la translation.	Il [D'ALEMBERT] y donna une méthode générale permettant de ramener toutes les lois du mouvement à des questions d'équilibre, en exprimant que les forces données qui meuvent le système considéré équilibrent les forces qui déplaceraient les particules de l'ensemble indépendamment les unes des autres et quelle que soit la façon dont s'opère la translation.

Überhaupt habe ich in der fraglichen Rezension keine Stelle auffinden können, die darauf hindeutet, daß der Rezensent die zu besprechende Arbeit gelesen hat. Allem Anschein nach hat er nur das Inhaltsverzeichnis flüchtig angesehen und weiter das Vorkommen der Namen gewisser Mathematiker konstatiert, worauf er aus seinem Buche einiges abgeschrieben hat, das sich auf diese Mathematiker bezieht.

fehlt es uns noch an einer besonderen mathematischen Literaturzeitung. Unter solchen Umständen müssen sehr oft bloße Anzeigen, worin vielleicht im Vorübergehen ein paar kritische Bemerkungen vorkommen, als Ersatz für wirkliche Rezensionen dienen. Man findet zuweilen die Ansicht ausgesprochen, daß Bemerkungen dieser Art überhaupt nicht in Anzeigen eingefügt werden sollen, da sie nicht näher motiviert werden und es also dem Leser durchaus unmöglich ist, ihre Richtigkeit zu prüfen. Diese Ansicht ist gewiß nicht vollständig unbegründet, aber auf der anderen Seite sehe ich nicht ein, warum solche Bemerkungen ganz unterdrückt werden müssen; wenn sie nämlich mit großer Vorsicht gemacht werden, können sie gewiß nützlich sein.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik".

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen". BM = Bibliotheca Mathematica.

1 : 12, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265. — **1 : 15**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 323. — **1 : 22, 29, 34**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265—266. — **1 : 36, 64**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137. — **1 : 103**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1 : 135**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137. — **1 : 144, 155, 169, 171**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137—138. — **1 : 190**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1 : 195**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 56. — **1 : 197, 202**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1 : 207**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 283. — **1 : 225, 234**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 138. — **1 : 255**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 238. — **1 : 272**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 396. — **1 : 283**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1 : 284, 321**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266—267. — **1 : 370**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 319. — **1 : 383**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1 : 395**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 323. — **1 : 400**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1 : 429**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 324. — **1 : 432**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1 : 434—435**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 396—397. — **1 : 436**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 138. — **1 : 437, 440**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1 : 457**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 238. — **1 : 463**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139, 324. — **1 : 466**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 397. — **1 : 467, 469**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1 : 475**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267—268; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 283. — **1 : 476**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1 : 508**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 68. — **1 : 510**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 314. — **1 : 519—520**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **1 : 537, 540, 542**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1 : 622**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143. — **1 : 641**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1 : 661**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1 : 662**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1 : 663**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 405. — **1 : 671**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1 : 687—689**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143—144; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 205—206. — **1 : 694**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 284. — **1 : 704, 706, 708, 714, 735, 736, 744, 748**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499—500. — **1 : 749**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1 : 756, 757, 767**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 500—501. — **1 : 794**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1 : 804, 805, 807, 808, 812, 823, 852**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268—269. — **1 : 853**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501. — **1 : 854**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 324; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 206. — **1 : 855**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501.

---

2 : 7, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351. — **2 : 8, 10**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501—502. **2 : 14—15**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 200. — **2 : 20**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **2 : 25**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 274. — **2 : 31**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351—352; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239—240. — **2 : 34**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144. — **2 : 37**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2 : 38**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 39**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2 : 41**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 53**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 201. — **2 : 57**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 59**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2 : 63**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 206. — **2 : 70**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 417. — **2 : 73, 82, 87, 88, 89, 90, 92**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502—503. — **2 : 97**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2 : 98**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 269—270. — **2 : 100**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2 : 101**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325. — **2 : 104—105**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 397—398. — **2 : 111,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 116,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2 : 122,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503—504. — **2 : 126, 127,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2 : 128,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2 : 132,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 515—516. — **2 : 143,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2 : 157, 158,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 163, 166,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2 : 175,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2 : 210,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352—353. — **2 : 218,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 284. — **2 : 219,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353. — **2 : 229, 242, 243,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504—505. — **2 : 253,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353. — **2 : 273,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 505. — **2 : 274,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325. — **2 : 282, 283,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353—354. — **2 : 284, 286, 287, 289, 290, 291,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506—507. — **2 : 296,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354. — **2 : 313,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2 : 317,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 69. — **2 : 328,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 285. — **2 : 334,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2 : 353,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87. — **2 : 358, 360,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87. — **2 : 381,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2 : 385,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 81; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 207.

---

2 : 386. Von dem *Tractatus arithmetice practice qui dicitur algorismus* des Ciruelo führt Poggendorff an der von Herrn Cantor zitierten Stelle eine Auflage aus dem Jahre 1495 auf (1496 bei Cantor ist sicherlich nur ein Druckfehler), und in der Tat besitzt die Hofbibliothek in Darmstadt eine Inkunabel mit dem Titel *Tractatus arithmetice practice qui dicitur algorismus,* deren Schlußschrift lautet: Arithmetice practice seu algorismi tractatus a Petro Sanchez Ciruelo noviter compilatus explicit. Impressus Parisius in campo gaillardo per Huidonem Mercatoris, anno domini. 1495. die 22. Februarij.

Darmstadt. Fr. Graefe.

---

2 : 386, 395, 401, 405, 425, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507—508. — **2 : 429,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 201—202. — **2 : 430,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 145. — **2 : 440,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 285. — **2 : 442,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325. — **2 : 449,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2 : 454,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 242. — **2 : 474, 480,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140—141. — **2 : 481,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 508. — **2 : 482,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 508; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 240. — **2 : 484,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 486, 489, 490,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2 : 497,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87. — **2 : 509,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270, 509. — **2 : 510,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2 : 512,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 514, 516, 517,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2 : 530,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354—355; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 532, 535, 541, 548, 549,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509—510. — **2 : 550,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 355. — **2 : 554,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2 : 555, 565, 567, 568,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 285—286. — **2 : 569,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2 : 572—573,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 576,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 355—356. — **2 : 579,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 145. — **2 : 580—581,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 207. — **2 : 582,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2 : 583,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 356. — **2 : 585,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 69—70. — **2 : 592,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 594,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270. — **2 : 597,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 599—600,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 602, 603—604,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270—271. — **2 : 611,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 356—357. — **2 : 612,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 613,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357.

---

2 : 613. Mit Zuhilfenahme der *Biblioteca matematica italiana* (II, Sp. 506—507) von P. Riccardi können die bibliographischen Notizen über Tartaglias *General trattato di numere e misure* unmittelbar kontrolliert und ergänzt werden. In betreff der französischen Übersetzung gibt Riccardi 1578 als Druckjahr an und verzeichnet noch eine spätere Auflage vom Jahre 1613 (Paris, Ad. Périer); ein Exemplar dieser Auflage besass B. Boncompagni. G. Eneström.

---

2 : 614, 620, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 621, 623,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146—147. — **2 : 638,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 147. — **2 : 642, 643,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271. — **2 : 655,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2 : 656,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 286. — **2 : 659, 660,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 147—148. — **2 : 665,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271. — **2 : 669,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 203. — **2 : 674,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 88. — **2 : 683,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148. — **2 : 693,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 287. — **2 : 700, 701, 703, 704, 705,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271—273. — **2 : 719,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2 : 720,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 287. — **2 : 721,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2 : 742,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273; **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2 : 746,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2 : 747,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 173; **2**$_3$, 1901, S. 225. — **2 : 749,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 88. — **2 : 766,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2 : 767,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148, 357—358. — **2 : 770,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 208. — **2 : 772, 775,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 358—359. — **2 : 777,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148; **3**$_3$, 1902, S. 204. — **2 : 783,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359; **4**$_3$, 1903, S. 88—89. — **2 : 784,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148.

---

2 : 793. Die Angabe, daß der jüngere FRANCISCUS VAN SCHOOTEN 1649 eine lateinische Übersetzung der DESCARTESschen *Géométrie* veranstaltete, und daß ihr 1659 ein erneuter Abdruck mit zahlreichen Ergänzungen von verschiedenen Verfasssern folgte, ist buchstäblich korrekt, aber aus dem, was Herr CANTOR weiter unten (S. 798, 799, 820) bemerkt, ersieht man, daß seine Angabe in Wirklichkeit bedeutet, die 1649 erschienene erste Auflage der lateinischen Übersetzung enthalte *keine* Ergänzungen von anderen Verfassern. Aber in diesem Sinne genommen ist die Angabe entschieden unrichtig. In der Tat enthält die Auflage von 1649, abgesehen von der Zueignung, dem Vorworte, dem Register und den Verbesserungen, zusammen 336 Druckseiten, während die Übersetzung der *Géométrie* nur 118 Seiten, d. h. etwa $^1/_3$ des Buches, einnimmt. Dann folgt weiter: *FLORIMONDI DE BEAUNE in geometriam RENATI DES CARTES notae breves* (S. 119—161); *FRANCISCI À SCHOOTEN in geometriam RENATI DES CARTES commentarii* (S. 162—294); *Additamentum* [aus der von J. VON WAESSENAER 1640 herausgegebenen Schrift: *Den onwissen Wiskonstenaer I. I. STAMPIOENIUS ontdeckt*] (S. 295—336). G. ENESTRÖM.

---

2 : 798. Hier finden sich zwei ungenaue Angaben, die davon abhängen, daß die *erste* Auflage der lateinischen Übersetzung der *Géométrie* Herrn CANTOR nicht zugänglich gewesen ist. In der Tat muß Zeile 11 statt „etwa 20“ etwa 10 gesetzt werden, denn die Untersuchungen von JAKOB VON WAESSENAER, um die es sich hier handelt, finden sich schon in dieser Auflage (S. 263—264). Folglich muß auch Zeile 2—3 von unten statt „in der zweiten lateinischen Ausgabe der Geometrie von 1659“ stehen: „in der ersten lateinischen Ausgabe der Geometrie von 1649“. G. ENESTRÖM.

---

2 : 799. Die hier erwähnten Erläuterungen von FLORIMOND DEBEAUNE finden sich schon in der ersten lateinischen Ausgabe der *Géométrie* von 1649 (vgl. oben die Bemerkung zu 2 : 793). G. ENESTRÖM.

---

2 : 802, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 208. — **2 : 812,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 37.

---

2 : 820. Die *Notae breves* von FLORIMOND DEBEAUNE und die *Commentarii* von FRANCISCUS VAN SCHOOTEN kommen schon in der ersten lateinischen Ausgabe der *Géométrie* (1649) vor (vgl. oben die Bemerkung zu 2 : 793).

G. ENESTRÖM.

---

2 : 820, 825, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148. — **2 : 832,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 203—204. — **2 : 840,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148—149. — **2 : 843,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 328, — **2 : 856, 865,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149. — **2 : 876, 878, 879,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511. — **2 : 891,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2 : 898,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 37, 208. — **2 : 901,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511. — **2 : 919,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 204. — **2 : VIII** (Vorwort), siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2 : IX, X** (Vorwort), siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511—512.

---

3 : 9, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359. — **3 : 10,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 518. — **3 : 11,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209. — **3 : 12, 17,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512. — **3 : 22,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512; **4**$_3$, 1903, S. 209. — **3 : 24,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209. — **3 : 25,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209, 399. — **3 : 26,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359. — **3 : 45—48, 49, 50,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512—513. — **3 : 70,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 360.

---

3 : 82. Den wichtigen Satz, daß eine Reihe, deren Glieder beständig abnehmen und alternierend positiv und negativ sind, einen endlichen Wert besitzt, hat LEIBNIZ schon in seinem Briefe an J. HERMANN vom 26. Juni 1705 behandelt (*LEIBNIZENS Mathematische Schriften, herausg. von* C. I. GERHARDT, Abt. I, B. 4, S. 272). Hier bemerkt LEIBNIZ u. a.: „Wenn nicht bewiesen wird, daß eine Reihe sich dem gesuchten Wert nähert, so daß wir durch Fortsetzung den Fehler kleiner machen können als eine gegebene Größe, so können wir nicht behaupten, daß die ganze Reihe den gesuchten Wert ergibt". Dann macht er darauf aufmerksam, daß, wenn die Reihe von der Form

$$a - b + c - d + \dots$$

ist, wo $+$ und $-$ abwechseln, so nähert sich die ganze Reihe dem gesuchten Werte, sobald „die Glieder a, b, c etc. sich der Null nähern oder kleiner werden, als eine beliebige gegebene Größe". In diesem Briefe bemerkt LEIBNIZ noch, daß es, um einen Konvergenzbeweis zu führen, „notwendig ist, das Gesetz oder die Fortschreitung der Reihe zu kennen, oder auch das allgemeine Glied derselben zu bestimmen".

München. J. ENKLE.

---

3 : 100, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149. — **3 : 112,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209—210. — **3 : 116,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513. — **3 : 117,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 518. — **3 : 123,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513; **4**$_3$, 1903, S. 399. — **3 : 124,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 407—408; **4**$_3$, 1903, S. 400. — **3 : 126,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 288 — **3 : 131,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 210. — **3 : 151,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 326. — **3 : 167, 172—173,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 400. — **3 : 174,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149—150. — **3 : 183,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 432. — **3 : 188,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 241. — **3 : 201,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513. — **3 : 207,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 519. — **3 : 215,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 150. — **3 : 218,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513. — **3 : 220,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 326. — **3 : 224,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514. — **3 : 225, 228,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 150. — **3 : 232,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514. — **3 : 244—245,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 205. — **3 : 246,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514; **2**$_3$, 1901, S. 151. — **3 : 250,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514. — **3 : 303,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 155. — **3 : 330—331,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 241—242. — **3 : 337,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 206.

---

3 : 370—371. Schon in dem oben zitierten Briefe an J. HERMANN vom 26. Juni 1705 hat sich LEIBNIZ der Worte „advergere" und „advergentia" bedient. Hier schlägt er auch vor, eine vorgelegte Reihe, deren Konvergenz untersucht werden soll, in eine andere zu transformieren, wo $+$ und $-$ bei den Gliedern abwechseln, worauf man nur nachzusehen hat, ob die Glieder sich der Null nähern.

München. J. ENKLE.

---

3 : 447, 455, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151. — **3 : 473,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 154—155; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401 — **3 : 477, 479,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151—152.

---

3 : 497. Eine dritte Auflage des V. Bandes von Ch. Wolf's *Elementa matheseos univ.* gab Joh. Pet. Eberhard i. J. 1769. Die 3 Auflagen der *Elementa* sind also folgende: Halle 1713—41, ib. 1730—52 (Nachdruck Genf 1732—38), Halle 1743—69. Daher muß es auch heißen: **3** : 514, Z. 5 v. o. 1713—41 statt 1741 und **3** : 522, Z. 15 v. o. 1713—41 statt 1714.

Felix Müller.

---

3 : 498. Z. 8 v. o. und Z. 2 v. u., ebenso S. 510, Z. 2 v. o. muß es heißen 1734 statt 1732, als Erscheinungsjahr der 2:ten Auflage von Wolf's Lexikon. Es scheint wenig bekannt zu sein, daß zu diesem Lexikon i. J. 1742 ein „Zweyter Theil" erschienen ist, „worinne nicht allein die in der Planimetrie, Altimetrie und Stereometrie nöthige und nützliche Tafel der Wurtzel-, Quadrat- und Cubic-Zahlen bis 10 000; desgleichen der Canon Triangulorum, Sodenn Henrici Briggii 20 Chiliades Logarithmorum; ingleichen die zur Marckscheide-, zur Bürgerlichen und Kriegs-Bau-, wie auch zur Feuerwercker-Kunst gehörige Tafeln; sondern auch Hydographische, Geographische, Calendariographische und andere nützliche Tabellen, und endlich der Canon Sexagenarius und der Sinuum, Tangentium und Secantium enthalten; welchen noch einige Mechanische, Hydrostatische, Aerometrische und Optische Tabellen beygefügt sind; Nebst einer Anleitung zum Gebrauche derselben und Erklärung der Wörter". In der Vorrede zu diesem zweiten Teil verteidigt sich der Verleger gegen Wolfs Vorwurf des insulsum petitum (Cantor, S. 498), „da man einen andern, der dem Herrn Regierungs-Rath Wolff an Verdiensten zwar nicht gleich kommt, doch aber im stande war. nach dessen Vorschrift die Sache weiter auszuführen, zu dieser Arbeit zu Hülffe nehmen mußte". Wer dieser Andere, der die 2:te Auflage herausgegeben, gewesen sei, wird nicht gesagt, doch wird weiter unten angegegeben, daß der Urheber des zweiten Teiles „der nunmehr verstorbene Herr Richter" sei. Nach Herrn Eneströms Vermutung (Biblioth. Mathem. $\mathbf{12}_2$, 1898, 54) ist der Verfasser der zweiten Auflage des Wolfschen Lexikons der von Poggendorff als am 23. Juni 1742 gestorben angeführte Georg Friedrich Richter, also wohl derselbe wie der Verfasser des ersten Teils der zweiten Auflage. Die oben erwähnte Vorrede ist freilich vom 20. December 1741 datiert, an dem nach Poggendorff's Angabe Richter noch nicht verstorben war.

Felix Müller.

---

3 : 507, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 71—72. — **3 : 521,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3 : 535,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401. — **3 : 536,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 206. — **3 : 565,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326—327. — **3 : 571,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 72. — **3 : 578,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327.

---

3 : 578. Die Z. 23—24 im Vorübergehen erwähnte Schrift von J. A. Segner erschien nicht 1725 sondern 1728 (siehe unten die Bemerkung zu **3** : 609).

---

3 : 609. Nach C. Müller (*Studien zur Geschichte der Mathematik an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert*, Leipzig 1904, S. 30) erschien J. A. Segners *Dissertatio epistolica ad G. E. Hambergerum* 1728 (nicht

1725). Merkwürdigerweise hat das Titelblatt als Druckjahr MDCCXVIII, aber im Jahre 1718 war Segner nur 14, Hamberger nur 21 Jahre alt. C. Müller gibt noch an, daß die Segnersche Schrift in den Leipziger gelehrten Zeitungen 1728 als im September erschienen aufgeführt wird.

---

3 : 586 (vgl. S. 722). Den von d'Alembert 1746 erörterten Satz, daß jede Funktion von beliebig vielen imaginären Größen immer als $p + q\sqrt{-1}$ mit reellem p und q gedacht werden kann, hatte Nikolaus I. Bernoulli schon drei Jahre früher in einem Brief an Euler vom 6. April 1743 ausgesprochen. Jener bemerkte nämlich (siehe Fuss, *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII^e^ siècle,* St. Petersburg 1843, II S. 703): „Affirmo assertum tuum demonstrari posse, dummodo concedatur (quod nemo negabit) omnem quantitatem imaginariam considerari posse instar functionis alicujus vel aggregati plurium functionum quantitatis vel quantitatum hanc formam habentium $b \pm \sqrt{-a}$, ubi b significat quantitatem realem vel 0, et a quantitatem realem affirmativum". Hier darf man nicht „functio" durch „Funktion", sondern vielmehr durch „algebraischer Ausdruck" wiedergeben.

G. Eneström.

---

3 : 614, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 89—90. — **3 : 636—637,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441. — **3 : 646—647,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 206—207. — **3 : 652,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 446; **5**$_3$, 1904, S. 207. — **3 : 660,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441.

---

3 : 667. Als Ergänzung der früheren Notiz (BM **2**$_3$, 1901, S. 441—442) über die Benutzung des Buchstabens e für die Basis des natürlichen Logarithmensystems weise ich auf Eulers *Mechanica sive motus scientia analytice exposita* (St. Petersburg 1736) hin, wo (II S. 251, 256—257, 268—270 u. s. w.) e in dieser Bedeutung angewendet worden ist, und zwar auch hier ohne jede Erklärung. An der ersten Stelle folgert Euler aus der Gleichung

$$z = k\,l\,\frac{gkx}{gkx - bz}$$

ohne weiteres: „habebitur ergo

$$e^{\frac{z}{k}} = \frac{gkx}{gkx - bz}."$$

Die erste öffentliche Benutzung des Buchstabens e für die Basis des natürlichen Logarithmensystems dürfte also im Jahre 1736 stattgefunden haben, obgleich es wahrscheinlich ist, daß die Abhandlung im 7. Bande der Petersburger Commentarii im Manuskript ein Jahr früher fertig war. G. Eneström.

---

3 : 667, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441—442; **5**$_3$, 1904, S. 207—208. — **3 : 686,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 208. — **3 : 689, 695,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 442. — **3 : 750, 758,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 446. — **3 : 759,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 208. — **3 : 760, 766,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 446—447. — **3 : 774, 798,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 442—443. — **3 : 845,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 447; **3**$_3$, 1902, S. 327—328. — **3 : 848, 881,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 443. — **3 : 882,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 447. — **3 : 890,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 401. — **3 : 892,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 143. — **3 : IV** (Vorwort), siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 443.

Vermischte historische Notizen.

Un article de L. Cremona sur Giovanni Ceva. Presque au même instant où le cahier 5_3 : 2 de la Bibliotheca Mathematica a été publié, j'ai retrouvé l'article de L. Cremona *Intorno ad un' operetta di Giovanni Ceva, matematico milanese del secolo XVII* y cité par moi à la page 190. En effet cet article a paru dans la Rivista ginnasiale e delle scuole tecniche e reali **6**, 1859, p. 191—206. G. Loria.

Anfragen.

118. Über die Geschichte der Heronschen Dreiecksformel im christlichen Mittelalter. Die Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks, die in moderner Bezeichnung $I = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ lautet, findet sich bekanntlich zuerst bei Heron, der diese Formel an vielen Stellen seiner Arbeiten angegeben oder bewiesen hat. Später trifft man die Formel bei den römischen Agrimensoren, bei Brahmagupta und Bhaskara, sowie bei den Söhnen des Musa ben Schakir und anderen arabischen Mathematikern. Im christlichen Mittelalter tritt die Formel, soweit bisher bekannt, zuerst in der von Platone Tiburtino verfertigten lateinischen Übersetzung des *Liber embadorum* des Savasorda auf (siehe Curtze, *Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance*, Leipzig 1902, S. 72—75), etwas später in der von Gherardo Cremonese herrührenden Übersetzung der Geometrie der drei Brüder (siehe M. Curtze, *Der liber trium fratrum de geometria*; Nova Acta der deutschen Akademie der Naturforscher **49** (Halle 1885), S. 27—31) und in der *Geometria practica* von Leonardo Pisano (siehe *Scritti di Leonardo Pisano pubblicati da* B. Boncompagni II, Roma 1862, S. 40—41). Ferner findet sich die Formel in einem Anhange zu einer dem Jordanus Nemorarius zugeschriebenen Schrift *De ponderibus* (siehe Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 203), sowie in einer Handschrift aus dem Ende des 13. Jahrhunderts (Cod. lat. Monac. 234; siehe Curtze, *Eine Studienreise;* Centralbl. f. Bibliotheksw. **16**, 1899, S. 297—301) und in einer Handschrift aus dem Anfang des 14. Jahrhunderts (Cod. Dresd. Db. 86; siehe Curtze, *Über eine Handschrift der königl. öffentl. Bibliothek in Dresden;* Zeitschr. für Mathem. **28**, 1883, Hist. Abt. S. 1—13); auch in der *Artis metrice practice compilatio* von Leonardo Cremonese, die möglicherweise um 1400 geschrieben ist, kommt die Formel vor (siehe Curtze, *Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance,* S. 386—387). Im Druck erscheint sie zuerst bei Widmann (1489) und Luca Paciuolo (1494).

In den soeben zitierten Schriften kommt die Formel teils mit, teils ohne Beweis vor. Bewiesen wird sie von Heron, fast auf dieselbe Weise in dem Cod. Dresd. Db. 86, und eine nicht besonders große Modifikation des Heronschen Beweises gibt der Cod. lat. Monac. 234; etwa dieselbe (oder vielleicht genau dieselbe) Modifikation dürfte der Anhang zur Schrift *De ponderibus* bieten. Einen wesentlich anderen Beweis haben die drei Brüder; dieser Beweis findet sich auch bei Leonardo Pisano, später bei Luca Paciuolo. Dagegen fehlt der Beweis im *Liber embadorum* (wenigstens in der von Curtze herausgegebenen Redaktion, wo ausdrücklish bemerkt wird, daß der Beweis zu verwickelt ist um leicht auseinandergesetzt werden zu können), und dies ist auch der Fall bei Leonardo Cremonese und bei Widmann.

Gibt es im christlichen Mittelalter andere Schriften als die oben genannten, die Herons Dreiecksformel enthalten? Bringen sie auch Beweise der Formel, und stimmen die Beweise mit dem Heronschen oder mit dem der drei Brüder überein? G. Eneström.

---

119. Über den Verfasser einer von Curtze (1898) herausgegebenen Algorismus-Schrift aus dem 12. Jahrhundert. M. Curtze hat 1898 eine anonyme Algorismus-Schrift aus dem 12. Jahrhundert herausgegeben (siehe Abhandl. zur Gesch. der Mathem. 8, 1898, S. 17—27); von diesem Traktate waren ihm zwei vollständige Exemplare bekannt, nämlich Cod. lat. Monac. 13021 (geschrieben 1163—1168) und Cod. lat. Monac. 18927 (aus dem 13. Jahrh.). Indessen scheint es, als ob es wenigstens noch ein drittes Exemplar dieser Algorismus-Schrift gäbe, nämlich Ms. fonds Sorbonne 980 der „Bibliothèque nationale" in Paris. Libri hat nämlich in seiner *Histoire des sciences mathématiques en Italie* (II, S. 299) einige Zeilen aus diesem Manuskripte abgedruckt, die mit dem Anfange des von Curtze herausgegebenen Traktates übereinstimmen. Nach Libri hat die in Paris befindliche Abhandlung den Titel: *Liber ysagogarum alchorismi in artem astronomicam a magistro A. compositus.*

Ist diese Abhandlung wirklich identisch mit dem Traktat im Cod. lat. Monac. 13021? Kann man dadurch oder auf andere Weise Aufschluß über den Verfasser des Traktates bekommen? G. Eneström.

Rezensionen.

W. W. R. Ball. Breve compendio di storia delle matematiche. Versione dall' inglese con note, aggiunte e modificazioni di D. Gambioli e G. Puliti, riveduta e corretta di G. Loria. Vol. 1—2. Bologna, Zanichelli 1903—1904. 8°, (3) + X + (1) + 284 S.; VI + 439 S. Lire 20.

In ihrem Vorworte bemerken die Übersetzer, daß es bisher in Italien an einem Kompendium der Geschichte der Mathematik gefehlt hat, das mit Vorteil sowohl von Schülern an den Gymnasien als von Studenten benutzt werden kann. Sie haben es darum unternommen, das Ballsche *Account of the history of mathematics*, das sie als eine vorzügliche Arbeit bezeichnen, ins italienische zu übersetzen und dabei sowohl im Texte als unter der Form von Noten zahlreiche Verbesserungen und Zusätze gemacht. Dazu haben sie als Anhänge zwei selbständige Artikel gebracht, nämlich am Ende des ersten Teiles eine kurze Notiz über *La scuola pitagorica* (von G. Puliti) und am Ende des zweiten Teiles einen ausführlichen Bericht *Su alcuni matematici italiani dei tempi recenti* (von D. Gambioli).

Daß das *Account* des Herrn Ball Verdienste hat, ist nicht zu leugnen, daß es aber an vielen Stellen unvollständig ist, haben die Übersetzer selbst in ihrem Vorworte ausdrücklich hervorgehoben, und hinzugefügt, daß sie sich große Mühe gegeben haben, um die Lücken auszufüllen. Wenn sie auf der anderen Seite nichts über die zahlreichen Ungenauigkeiten ihrer Vorlage sagen, so bedeutet dies nicht, daß sie diesen Umstand übersehen haben, denn in Wirklichkeit haben sie in Gemeinschaft mit Herrn Loria viele unrichtige Angaben des Originals verbessert. Leider hat es ihnen entweder an Zeit oder an Sachkunde gefehlt, um ihre Arbeit in dieser Richtung befriedigend auszuführen, und in der Tat ist die Arbeit eine besonders schwierige und mühsame. Bei der Bearbeitung seines Buches, dessen erste Auflage bekanntlich 1888 erschien, hatte Herr Ball zum Teil unzuverlässige und schon damals veraltete mathematisch-historische Arbeiten benutzt. Die zwei folgenden Auflagen (1893 und 1901) haben zwar viele Verbesserungen der ursprünglichen Angaben gebracht, aber eine wirklich eingehende Revision seines Buches hat der Verfasser offenbar nicht vorgenommen. Nicht einmal die inzwischen erschienenen zwei letzten Bände der Cantorschen *Vorlesungen* hat er ausgenutzt, denn sonst würde er z. B. notwendigerweise entdeckt haben, daß die noch in der 3. Auflage (S. 406, vgl. S. 146 des 2. Bandes der italienischen Übersetzung) vorkommende Angabe, Euler habe im Jahre 1744 eine *Curvarum maximi minimive proprietate gaudentium inventio nova et facilis* publiziert, unrichtig ist; bekanntlich trägt die 1744 veröffentlichte Arbeit von Euler den Titel: *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, während die von Herrn Ball erwähnte Schrift 1741 in den Commentarii acad. sc. Petrop. 8 (ad annum 1736) erschien (siehe CANTOR, a. a. O. III^2, S. 853, 857). Aber abgesehen von den entschieden unrichtigen Notizen, gibt es in dem Buche des Herrn BALL viele andere Stellen, die beanstandet werden können, weil der Verfasser bloße Vermutungen als wirkliche Tatsachen erwähnt oder umgekehrt schwebende Angaben unnötigerweise bringt, so daß der Leser eine unrichtige Auffassung von dem heutigen Stand der mathematisch-historischen Forschung bekommt. Auch solche Bemerkungen kommen bei Herrn BALL nicht selten vor, die an sich richtig sind, aber den nicht sachkundigen Leser irre leiten, weil dieselben Bemerkungen mit ebenso gutem oder sogar noch besserem Rechte an vielen anderen Stellen gemacht werden konnten.

Aus dem soeben Gesagten geht hervor, wie schwierig es ist, eine wesentlich verbesserte Übersetzung des BALLschen Buches herzustellen. Für diesen Zweck wäre es nötig gewesen, viele Stücke entweder umzuarbeiten oder als Notbehelf ganz zu streichen. Die Übersetzer scheinen dagegen ein anderes Verfahren gewählt zu haben, nämlich die möglichst kleinen Änderungen vorzunehmen, und darum ist der Erfolg ihrer Bemühungen, wie ich schon angedeutet habe, keineswegs als wirklich gut zu bezeichnen. Um die Richtigkeit meiner Behauptung an einem Beispiele zu zeigen, wähle ich eine Stelle, die sich auf einen italienischen Verfasser bezieht, und die also gerade in einer italienischen Übersetzung besondere Berücksichtigung verdient.

Unter den wichtigsten Schriften des TARTAGLIA hat Herr BALL (S. 225 der 3. Auflage) „an arithmetic, published in two parts in 1556; a treatise on numbers, published in four parts in 1560 and sometimes treated as a continuation of the arithmetic“ aufgeführt. Diese Angabe ist von den Übersetzern (I: S. 229) auf folgende Weise verändert worden: „una aritmetica pubblicata in due parti nel 1556, il *General trattato di numeri e misure* pubblicato in sei parti nel 1560 e considerato talora come un seguito dell' aritmetica“. Natürlich bringt diese Änderung insofern eine Verbesserung, als die angebliche zahlentheoretische Arbeit in vier Teilen gestrichen ist, aber die Unrichtigkeiten sind damit noch nicht beseitigt, denn 1) die sechs Teile des *General trattato* wurden nicht alle im Jahre 1560 veröffentlicht; 2) höchstens die fünf letzten Teile *können* als eine Fortsetzung der Arithmetik von 1556 betrachtet werden, da der erste Teil gerade diese Arithmetik selbst enthielt, — auch der zweite Teil war arithmetischen Inhalts, aber nach RICCARDI *(Bibliot. matem. ital.* II, 505—506) ist sie nicht vor 1560 als selbständige Schrift erschienen; 3) es ist unrichtig zu sagen, daß die letzten Teile des *General trattato* bisweilen als Fortsetzung der Arithmetik betrachtet werden, denn sie tragen die Bezeichnung „la seconda parte“ „la terza parte“ etc., und weisen also alle auf „la prima parte“, d. h. auf die 1556 als selbständige Schrift herausgegebene Arithmetik hin. Die von BALL unnötigerweise verwickelte Sache wird also von den Übersetzern noch mehr verwickelt, obgleich es ihnen sehr leicht gewesen wäre, unter Zuhilfenahme der RICCARDIschen Bibliographie eine richtige Notiz zu geben.

Es ist nicht ohne Interesse an der jetzt vorliegenden Übersetzung zu konstatieren, wie leicht ungenaue Angaben wiederholt werden, auch in solchen Fällen, in denen man einen bestimmten Anlaß hat anzunehmen, daß alles nicht in Ordnung ist. S. 285 der 3. Auflage des Originals bemerkte Herr BALL in betreff der zwei ersten Bücher der DESCARTESschen *Géométrie*: „a Latin translation of them, with explanatory notes, was prepared by F. DE BEAUNE, and an edition of this, with a commentary by F. van Schooten, issued in 1659, was widely read“, was italienisch auf folgende Weise wiedergegeben wird (II: S. 16): „una traduzione latina di essi, colle note esplicative, fu fatta da F. de Beaune, ed un' edizione di essa, con un commento di F. van Schooten, venne pubblicata nel 1659 ed ebbe una estesa diffusione“. Aber etwas weiter unten gab Herr Ball an (S. 317), daß F. van Schooten „brought out in 1659 a Latin translation of Descartes *Géométrie*“, welche Angabe die Übersetzer (II, S. 50) dahin berichtigen, daß Schooten „pubblicò nel 1649 una traduzione in latino della *Géométrie* di Descartes“. Hier kann man wohl ohne besondere Sachkunde feststellen, daß die Behauptungen des Originals sehr verdächtig sind, denn es wäre in der Tat merkwürdig, wenn im Jahre 1659 *zwei* verschiedene lateinische Übersetzungen der *Géométrie* erschienen wären, die eine von F. van Schooten, die andere zwar nicht von ihm, aber mit einem Kommentar von ihm versehen. Dieser Umstand hätte die Übersetzer veranlassen sollen, die zwei zitierten Stellen des Originals zu kontrollieren, und es würde sich dabei leicht herausgestellt haben, daß nur eine einzige, von F. van Schooten verfertigte, lateinische Übersetzung existiert; möglicherweise beruht die erste Angabe des Herrn Ball ursprünglich auf einem Schreibfehler (F. de Beaune statt F. van Schooten und umgekehrt F. van Schooten statt F. de Beaune). Es ist ja durchaus richtig, daß die erste Auflage der Übersetzung nicht 1659, sondern 1649 erschien, aber im Zusammenhang mit dieser Berichtigung hätte auch die erste Stelle verbessert werden sollen.

Es ist nicht meine Absicht, mich hier mit den Stellen zu beschäftigen, wo die Übersetzer die Ungenauigkeiten des Originals beibehalten haben; nur im Vorübergehen bemerke ich, daß sich darunter auch Angaben inbetreff italienischer Mathematiker finden. So z. B. liest man S. 174 des 1. Bandes, daß Gherardo Cremonese „scrisse pure un breve trattato sull' algorismo, che esiste manoscritto nella biblioteca Bodleiana di Oxford“, obgleich es bisher gar nicht festgestellt worden ist, daß diese Schrift, als deren Verfasser „magister Genardus“ oder „Gernardus“ genannt wird, von Gherardo Cremonese herrührt.

Die italienische Übersetzung selbst scheint im allgemeinen richtig zu sein; nur an wenigen Stellen habe ich dabei etwas auszustellen. I: S. 173 findet sich die auffällige Notiz, daß 1533 „anno in cui fu ritrovato il testo greco [degli *Elementi* d'Euclide]“ war; das Original hat „recovered“, welches Wort wohl so gedeutet werden kann, daß die Angabe weniger unrichtig wird. — I: S. 237 wird „a history of the quadrature of the circle“ durch „una storia fondata sulla quadratura del circolo“ wiedergegeben. — II: S. 59 hat die an sich unrichtige Notiz, daß man J. Pell „an edition, with considerable new matter, of the *Algebra* by Branker and Rhonius, London 1668“ verdankt, in der italienischen Übersetzung folgende Form bekommen: „un' edizione, con molte aggiunte originali, della traduzione dell' *Algebra* di Brancker e Rhonius, Rahn Londra 1668“; wie viele Leser können erraten, daß „Rahn“, eine andere Schreibart für „Rhonius“ ist? — II: S. 115 wird berichtet, daß die *Analyse des infiniment petits* „contiene un studio particolareggiato del valore limite del rapporto di due funzioni, che, per un certo valore della variabile assume la forma indeterminata 0:0“; das Original hat „partial investigation“, was ja insofern richtig ist, als Hôpital nicht den Fall behandelte, wo auch das Verhältnis der Differentialkoeffizienten der beiden Funktionen die Form 0:0 annimmt.

Die von den Übersetzern herrührenden Zusätze sind meistens richtig, wenn auch zuweilen unvollständig. I: S. 103 ist wohl Z. 12 „Heiberg“ Schreibfehler für „Govi“; II: S. 240 ist für Sophie Kowalevski zwar das richtige Geburtsjahr (1850 statt 1853) angegeben, aber der unrichtige Geburtstag (27. Dezember statt 15. Januar) hinzugefügt worden.

Wie schon erwähnt, enthält die italienische Übersetzung zwei Anhänge, von denen der erste, der 10 Druckseiten umfaßt, nur nebenbei mathematisch-historischen Inhalts ist. Der zweite (S. 281—439 des 2. Bandes) bringt Biographien einer großen Anzahl von italienischen Mathematikern des 18. und 19. Jahrhunderts, alle schon verstorben mit Ausnahme von U. Dini. Für die meisten sind Verzeichnisse ihrer wichtigsten Schriften hinzugefügt, aber die bibliographischen Angaben sind zuweilen unvollständig oder ungenau. So z. B. wird S. 435 eine Schrift von B. Boncompagni: „Opuscoli di Lenardo pisano (1857)“ aufgeführt, womit möglicherweise die *Scritti di Leonardo Pisano* gemeint sind, deren zwei Bände bezw. 1857 und 1862 erschienen, und die sonst im Verzeichnisse fehlen würden; die unter dem Titel *Opuscoli di Leonardo Pisano* im Jahre 1856 gedruckte Schrift ist nur eine zweite Auflage der 1854 erschienenen *Tre scritti inediti di Leonardo Pisano*.

Inbetreff der Korrektheit der Wiedergabe fremdsprachlicher Zitate genügt das Buch vielleicht den Ansprüchen des italienischen Publikums aber wenn dies der Fall ist, so sind die Ansprüche sehr bescheiden. II:433 finden sich in den französischen Titeln der dort zitierten Schriften wenigstens 34 Fehler, und „Theorie die (!) Transformationsgruppen“ wird II : 235 zitiert. Noch mehr zu bedauern ist, daß die Namen der zitierten Mathematiker allzu oft verdruckt sind, z. B. „Buchet“ (I : 231), „Mastlin“ (I : 267), „Braucker“ (II : 59), „Borchard“ (II : 213), „Bjerkenes“ (II : 219), „Kronecher“ (II : 223), „Ensel“ (II : 235), usw.; auch Jahreszahlen sind nicht selten durch Druckfehler entstellt, z. B. I : 214 Z. 20 (1531 statt 1534), I : 266 Z. 17 (1559 statt 1599), I : 270 Z. 7 (1539 statt 1639), II : 142 Z. 4 (1525 statt 1725), II : 229 Z. 32 (1717 statt 1797), usw.

Die Übersetzer haben in ihrem Vorworte darauf hingewiesen, daß andere vielleicht eine bessere Arbeit hätten bieten *können*, daß aber ihr Verdienst ist, die Arbeit wirklich ausgeführt zu haben und zwar ohne dabei ihre Kräfte zu sparen. Gewiß ist dies ein Verdienst, und es ist nur schade, daß sie nicht von vornherein erkannten, wie große Schwierigkeiten gerade eine Übersetzung der von ihnen gewählten Vorlage mit sich bringt; ohne Zweifel hätten sie dann ihre Arbeit so anordnen können, daß dieselbe ohne größere Kraftanstrengung von ihrer Seite viel nützlicher geworden wäre.

Stockholm. G. Eneström.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

Abel, 23.
Albrecht, 14.
Archenhold, 14.
Ball, 6.
Cantor, 3.
Eneström, 1, 16, 20, 28.
Gambioli, 6.
Joteyko, 29.
Koppe, 15.
Korn, 25.
Loria, 2, 26, 30.
Manitius, Karl, 8.
Manitius, M., 11.
Müller, Conrad, 21.
Müller, Felix, 19.
Puliti, 6.
Schiaparelli, 7.
Steinschneider, 13.
Störmer, 23.
Tannery, 17.
Vailati, 9.
Wallner, 18.
Wilson, 12.
Wolffing, 22.
Zeuthen, 4, 5, 10.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8⁰. [1
5_3 (1904) : 2.

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8⁰. [2
1904 : 2.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. — 2^2 (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 200—204. (G. Eneström.) — 3^2 (1901). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 205—208. (G. Eneström.) [3

Zeuthen, H. G., Forelaesninger over Mathematikens Historie. II (1903). [Rezension:] Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 211—220. (G. Eneström.) [4

Zeuthen, H. G., Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert. Deutsche Ausgabe (1903). [Rezension:] Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 211—220. (G. Eneström.) [5

Ball, W. W. R., Breve compendio di storia delle matematiche. Versione dall'inglese con note, aggiunte e modificazioni di D. Gambioli e G. Puliti, riveduta e corretta di G. Loria. Volume II. Le matematiche moderne sino ad oggi. Bologna, Zanichelli 1904. [6
8, VI + 439 S. — [12 Lire.]

b) Geschichte des Altertums.

Schiaparelli, G., L'astronomia nell' Antico Testamento (1903). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 7, 1904, 48—52. (F. Porro.) [7

Manitius, Karl, Fixsternbeobachtungen des Altertums. [8
Das Weltall 4, 1904, 251—257.

Vailati, G., La dimostrazione del principio della leva data da Archimede nel libro primo sull' equilibrio delle figure piane. [9
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 7, 1904, 33—39.

Zeuthen, H. G., Sur l'arithmétique des Grecs et des Indiens. [10
Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 97—112.

Manitius, M., Kollationen aus einem geometrischen Traktat. [11
Hermes 39, 1904, 291—300.

Wilson, J. C., Pseudo-Euclid, introductio harmonica. [12
The classical review 18, 1904, 150—151.

c) Geschichte des Mittelalters.

Steinschneider, M., Arabische Mathematiker. X. [13
Orientalistische Literaturzeitung (Berlin) 7, 1904, 205—216.

d) Geschichte der neueren Zeit.

Archenhold, F. S. und **Albrecht, M.,** Ausgrabungen und Vermessungen der Sternwartenreste Tycho Brahes auf der Insel Hven im Jahre 1902. [14
Das Weltall 4, 1904, 239—248, 279—285.

Koppe, M., Die Neperschen Logarithmen sind mit den natürlichen im wesentlichen identisch. [15

Berlin, Mathem. Gesellsch., Sitzungsber. 1904, 48–52.

Eneström, G., Cavalieri und der Satz von der Fläche einer Spirallinie. [16
Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 208—209. — Anfrage.

Tannery, P., Sur une erreur mathématique de Descartes. [17
Arch. für Gesch. der Philosophie **17**, 1904, 334—340.

Wallner, C. R., Entwickelungsgeschichtliche Momente bei Entstehung der Infinitesimalrechnung. [18
Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 113—124.

Müller, Felix, Zur Literatur der analytischen Geometrie und Infinitesimalrechnung vor Euler. [19
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **13**, 1904, 247—253.

Eneström, G., Über die Geschichte einer Summenformel, die mit der Eulerschen verwandt ist. [20
Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 209—210. — Anfrage.

Müller, Conrad H., Studien zur Geschichte der Mathematik insbesondere des mathematischen Unterrichts an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert. Mit einer Einleitung: Über den Charakter und Umfang historischer Forschung in der Mathematik. Leipzig, Teubner 1904. [21
8^0, 92 + (1) S. — [2 M.] — Inauguraldissertation (Göttingen); Sonderabzug aus den „Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissensch." 18, 1904, S. 51—143.

Wölffing, E., Mathematischer Bücherschatz. I (1903). [Rezension:] Zeitschr. für Mathem. **50**, 1904, 335—340. (G. Valentin.) [22

Störmer, C., Ein Brief von Niels Henrik Abel an Edmund Jacob Külp. [23
Kristiania, Videnskabsselsk., Skrifter 1903. 8 S. — [Rezension:] Deutsche Literaturz. **25**, 1904, 1389.

International catalogue of scientific literature. A. Mathematics. B. Mechanics (1902). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. **7**, 1904, 61—62. (G. L.) [24

e) Nekrologe.

Karl Anton **Bjerknes** (1825—1903). [25
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. **13**, 1904, 253—266. (A. Korn.)

Luigi **Cremona** (1830—1903). [26
Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 125—195 + Porträt [mit Schriftverzeichnis]. (G. Loria.)

Meyer **Hamburger** (1838—1903). [27
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. **7**, 1904, 63—64.

f) Aktuelle Fragen.

Eneström, G., Ist es zweckmäßig, daß mathematische Zeitschriftenartikel datiert werden? [28
Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 196—199.

Joteyko, J., A propos des femmes mathématiciennes. [29
Revue scient. 1_5, 1904, 12—15.

Loria, G., Encore les femmes mathématiciennes. [30
Revue scient. 1_5, 1904, 338—340.

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— Dr. G. A. Bliss in Chicago zum Professor der Mathematik an der Universität von Minnesota.

— Dozent C. L. Bouton in Cambridge, Mass. zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Privatdozent F. Cohn in Königsberg zum Professor der Astronomie an der Universität daselbst.

— Privatdozent G. Kümmel in Rostock zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Professor Hans Lorenz in Göttingen zum Professor der Mechanik an der Technischen Hochschule in Danzig.

— Prof. H. von Mangoldt in Aachen zum Rektor der Technischen Hochschule in Danzig.

— Dozent Ch. Maurain in Rennes zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Dozent H. C. Moreno in Palo Alto, Cal. zum Professor der angewandten Mathematik an der „Stanford university" daselbst.

— Observator K. Ortel in München zum Professor der Astronomie an der Universität daselbst.

— Dr. C. L. Poor in Baltimore zum Professor der Astronomie an der „Columbia university" in New-York.

— Dozent S. E. Slocum in Cincinnati zum Professor der angewandten Mathematik an der Universität daselbst.

— Prof. J. Sobotka in Brünn zum Professor der Mathematik an der böhmischen Universität in Prag.

— Dr. P. Spiess in Berlin zum Professor der Physik an der Akademie in Posen.

— Prof. J. Wellstein in Gießen zum Professor der Mathematik an der Universität in Straßburg.

— Professor M. Wien in Aachen zum Professor der Physik an der Technischen Hochschule in Danzig.

Todesfälle.

— George Johnston Allman, früher Professor der Mathematik am „Queens college" in Galway, geboren in Dublin den 28. September 1824, gestorben im Mai (?) 1904.

— Fedor Alexandrowitsch Bredichin, früher Direktor der Sternwarte in Pulkowa, geboren in Nikolajeff den 26. November (a. St.) 1831, gestorben in St. Petersburg den 14. Mai 1904.

— Chajim Selig Slonimski, Mathematiker und Astronom, gestorben in Warschau 1904, 93 Jahre alt.

— Charles Soret, früher Professor der Experimentalphysik in Genf, geboren in Genf den 23. September 1854, gestorben den 5. April 1904.

— Marie Antoine Xavier Stouff, Professor der Mathematik an der Universität in Besançon, geboren in Grenoble den 9. Mai 1861, gestorben in Besançon den 22. März 1903.

Mathematisch-historische Vorlesungen.

— At the Columbia university (New York) Professor D. E. Smith will deliver during the academic year 1904—1905 a course (two lectures each week) on the history of mathematics.

Preisfragen gelehrter Gesellschaften.

— *Académie de Belgique à Bruxelles.* Concours de l'année 1905. On demande une contribution importante à la théorie des complexes de droites du troisième ordre, par exemple l'étude des complexes représentées par une équation de la forme

$$\alpha \beta \gamma - K \alpha' \beta' \gamma' = 0,$$

où $\alpha = 0$, $\beta = 0$, . . . sont les équations de complexes linéaires, K un paramètre.

Vermischtes.

— Am 14. Januar 1904 wurde in Wien eine mathematische Gesellschaft begründet mit Herrn G. von Escherich als Vorsitzendem.

— Die Monatshefte für Mathematik und Physik werden vom Anfange dieses Jahres an von den Herren G. von Escherich, F. Mertens und W. Wirtinger herausgegeben.

— At a session of the mathematical department of the international congress of science at St. Louis, September 1904, Mr. J. Pierpont will present a historical resumé of mathematical progress in the nineteenth century.

Un ouvrage perdu cité par Jordanus de Nemore: le Philotechnes.

Par P. Duhem à Bordeaux.

Les textes manuscrits conservés dans les bibliothèques renferment un nombre assez considérable d'ouvrages différents intitulés *Liber Jordani de ponderibus* ou *Elementa Jordani super demonstrationem ponderis*, ou *Liber Jordani de ratione ponderis.* L'étude des origines de la statique, que nous poursuivons[1]) en ce moment, nous a amené à comparer ces divers textes et à les classer, en même temps que nous en faisions ressortir l'importance capitale pour l'histoire de la mécanique.

Notre intention n'est pas de reprendre ici l'analyse de ces textes; nous voulons seulement signaler en peu de mots deux d'entre eux, dont nous allons avoir à nous occuper.

Le premier est celui que nous regardons comme l'ouvrage primitif de Jordanus; c'est un court traité, formé de neuf propositions. Nous en avons trouvé un texte très correct dans le ms. 10252 (latin) de la bibliothèque nationale de Paris, où il est écrit du fol. 140^{v} au fol. 142^{v}. Il a été copié par Arnaud de Bruxelles, et la copie a été terminée le 8 novembre 1464. Ce texte est inédit jusqu'ici; il est entièrement distinct de celui que Petrus Apianus a publié en 1533 sous le titre: *Liber Jordani Nemorarii viri clarissimi de ponderibus propositiones XIII et earundem demonstrationes, multarum rerum rationes sane pulcherrimas complectens nunc in lucem editus* (Norimbergae 1533).

Un second texte, un peu paraphrasé, écrit également au XV^e^ siècle se trouve dans le ms. 11247 (latin) de la bibliothèque nationale. Il y occupe les feuillets compris entre le fol. 37^{r} et le fol. 42^{v}. Il est soudé

1) P. Duhem, *Les origines de la statique.* Ch. VI. La statique du moyen âge — Jordanus de Nemore. — Ch. VII. La statique du moyen âge (suite). — L'école de Jordanus; Revue des questions scientifiques 6_3, 1904, p. 9—66.

au fragment intitulé ailleurs: *Liber Euclidis de ponderibus secundum terminorum circumferentiam* sur lequel nous croyons avoir le premier appelé l'attention.[1])

Nous n'avons pas de cet écrit de texte complet remontant au XIII^e siècle. Mais un manuscrit du XIII^e siècle, le ms. 3642 (ancien 1298) de la bibliothèque Mazarine, présente, au fol. 12^r et 12^v, le commencement des *Elementa Jordani super demonstrationem ponderis* soudés à la fin du *De canonio*. Le fragment de *Elementa Jordani* ainsi couservé nous permet de contrôler la copie faite par Arnaud de Bruxelles et de constater que, depuis le XIII^e siècle, le texte n'avait subi ancune modification essentielle.

La singulière rhapsodie que nous présente le codex Mazarineus a été fidèlement reproduite, au XVI^e siècle, dans le ms. 16649 (latin) de la bibliothèque nationale (fol. 6^r à fol. 7^v).

Le second texte dont nous aurons à nous occuper est beaucoup plus étendu que le précédent; il lui est postérieur, car il le complète, le rectifie ou le réfute en plusieurs points; comme le précédent, il est toujours attribué à Jordanus, bien qu'il ne puisse être du même auteur que le précédent. Laissant le nom de Jordanus à l'auteur du plus ancien traité, nous avons désigné l'auteur du traité plus récent comme le „précurseur de Léonard de Vinci"; il semble, en effet, que ses recherches aient exercé sur le grand peintre une profonde influence.

Ce texte a été édité, de la manière la plus fautive d'ailleurs, en 1569, par Curtius Trojanus, qui l'a intitulé: *Jordani opusculum de ponderositate, Nicolai Tartaleæ studio correctum.* Curtius Trojanus avait seulement fait disparaître la division en quatre livres que présentent les manuscrits.

Deux textes de cet écrit se trouvent à la bibliothèque nationale; tous deux appartiennent au XIII^e siècle et, sans doute, à la seconde moitié de ce siècle.

Le premier, très correct, très élégamment écrit, se trouve au ms. 8680 A (latin), où il occupe toute la partie comprise du fol. 7^r au fol. 11^v. Le second, avec plusieurs autres traités de statique, est conservé au ms. 7378 A (latin), où il commence au fol. 37^v pour finir au fol. 39^v; mal écrit, incorrect, il est d'une lecture fort difficile.

Ce dernier texte est suivi d'autres fragments ou d'autres textes qui ne lui appartiennent pas. C'est d'abord, un fragment du traité des poids spécifiques attribué, sans doute à tort, à Archimède: *Si fuerit aliquod corpus ex duobus mixtum* . . . . C'est ensuite le traité *De canonio*, qu'on a légèrement remanié afin de le rattacher aux *Elementa Jordani.* C'est

1) P. Duhem, *Les origines de la statique.* Chapitre V. Les sources alexandrines de la statique du moyen âge; Revue des questions scientifiques 5_2, 1904, p. 560—596.

enfin cette proposition, qui nous paraît incompréhensible: *Omne pondus cum quantolibet* (sic) *ponderibus ab eo continue sumptis in tripla proportione post massam primi in cujuslibet sumpti ponderant ad primum multiplicis ab aggregato dicti, ex denominantibus omnium predictorum ad primum multipliciter relatorum et cujuslibet etiam ad primum multiplicis circa predictum maximum intercepti.* La démonstration, à peine ébauchée, de cette proposition se réduit à deux lignes dont certains mots sont illisibles.

A la suite de cette proposition, s'en trouve une autre qui va particulièrement occuper notre attention. Cette proposition est le théorème célèbre, dû à Héron d'Alexandrie, qui permet d'évaluer la surface d'un triangle en fonction des trois côtés. Elle est énoncée en ces termes:

Si trianguli tria latera continentur[1]) *medietasque*[2]) *compositi ad singula latera differentie sumantur, primaque in secundam ducatur, et in productum tertia, itemque quod provenerit in predictam medietatem illius ultimo*[3]), *producti radix erit area trianguli.* Immédiatement après cet énoncé de la proposition viennent les mots: *Regula habet in arabico inscripta.* En effet, on sait que la proposition se trouve dans le célèbre „Livre des trois frères", si répandu au moyen âge.

C'est seulement à la fin de la démonstration suivante, au fol. 40ᵛ, que se trouve la formule: *Explicit liber quartus Jordani de ponderibus.*

Ces diverses additions au traité *de ponderibus* composé par le précurseur de Léonard de Vinci n'accompagnent pas le texte, beaucoup plus correct, que renferme le manuscrit 8680 A. Elles ne se rencontrent pas non plus dans l'ouvrage édité par Curtius Trojanus.

En revanche, M. Björnbo[4]) les a trouvées dans un manuscrit du XIVᵉ siècle, composé entre 1350 et 1375, le Codex Reginensis lat. 1261. Du fol. 50ʳ au fol. 55ᵛ, ce manuscrit nous présente, sous le titre: *Incipit pars prima libri Jordani de Nemore de ratione ponderum*, le traité en quatre livres composé par le „précurseur de Léonard de Vinci". A la suite de ce traité, se trouvent presque exactement les additions que nous avons énumérées il y a un instant: le fragment du livre des poids spécifiques attribué à Archimède, le *De canonio*, enfin le théorème de Héron d'Alexandrie sur l'aire du triangle. La remarque après l'énoncé du théorème a été interprétée par le copiste un peu autrement que dans le texte que nous avons eu en mains; il l'a ainsi formulée: *Regula hec in arabico conscripta dicitur.* Il semble douteux que ces mots se rapportent à la démonstration du théorème, comme le suppose M. Björnbo[5]),

1) Lisez: *coacerventur.* — 2) Lisez: *medietatisque.* — 3) Lisez: *ultimi.* — 4) Axel Anton Björnbo, *Studien über Menelaos' Sphärik. Beiträge zur Geschichte der Sphärik und Trigonometrie der Griechen;* Abhandl. zur Gesch. der mathem. Wissensch. **14,** 1902, p. 147. — 5) L. c. p. 148.

car, d'une part, ces mêmes mots se trouvent immédiatement avant l'énoncé de la proposition dans un manuscrit dont M. Curtze s'est occupé en 1899[1]); d'autre part la *démonstration* du texte dont il s'agit ici, semble essentiellement différente de celle du Livre des trois frères.

En marge de cette proposition, le copiste a mis cette annotation, qui a vivement attiré notre attention:[2]) *Hec est pars phyloteigni et debet ei subjungi.* Qu'est-ce donc que ce *Philotechnes* où se doit ranger la proposition sur l'aire du triangle qui a été jointe, par erreur, au traité *De ratione ponderum?*

De cet ouvrage nous avons relevé deux autres mentions; elles se trouvent toutes deux dans le texte que nous regardons comme le traité primitif de Jordanus.

La première mention se trouve vers la fin de la démonstration de cette proposition, qui est la seconde du traité: *Cum equilibris fuerit positio equalis, equis ponderibus appensis ab equalitate non decedet et, si ab equidistantia separetur, ad equalitatis situm reverteretur.* Jordanus, invoquant une propriété très simple de deux arcs de cercle, la justifie par ces seuls mots: *Sicut declaratum est in Philotechne.*

Cette mention fait partie du texte du XIII^e siècle (codex Mazarineus 3642) qui orthographie *Filotegni.* La copie de ce même texte faite au XVI^e siècle et contenue dans le ms. 16 649 (latin) de la bibliothèque nationale écrit *Philotegne.* Arnaud de Bruxelles copie *Filotegni,* tandis que le ms. 11 247 (lat.) de la bibliothèque nationale adopte la même orthographe: *Filotegni* que le texte du XIII^e siècle.

La seconde mention du *Philotechnes* se trouve au cours de la démonstration de la quatrième proposition ainsi énoncée: *Si brachia libre fuerint inequalia, equalibus appensis, ex parte longiori nutum faciet.* Ici encore, à propos d'une propriété très simple de deux arcs de cercle, Jordanus écrit: *Sicut demonstravimus in Philotechne.*

La proposition où se trouve cette seconde mention manque au fragment du XIII^e siècle que conserve le Codex Mazarineus et, partant, à la copie de ce fragment que conserve le ms. 16 649 (latin) de la bibliothèque nationale. Tous nos autres manuscrits renferment le renvoi que nous venons de citer au *Filotegni* ou au *Filoteqni.*

Ces citations semblent prouver qu'il existait au XIII^e siècle un traité de géométrie, sans doute de géométrie pratique, intitulé *Philotechnes* (*Φιλοτεχνης,* l'ami de l'art). La seconde citation: *Sicut demonstravimus in Philotechne* paraît indiquer que Jordanus en revendiquait la paternité.

1) Voir M. Curtze, *Eine Studienreise;* Centralbl. für Bibliotheksw. **16,** 1899, p. 301.

2) Comparez Björnbo, l. c. p. 148.

Dès lors, on comprend sans peine l'annotation relevée par M. Björnbo dans le codex Reginensis lat. 1261: Jordanus avait fait figurer dans le *Philotechnes* le théorème de Héron d'Alexandrie.

L'existence d'un *Philotechnes* composé par Jordanus peut résoudre également une difficulté soulevée par Chasles[1]. A propos de Jordanus, en effet, Chasles écrit ceci:

„Ramus[2] lui attribue la démonstration de l'élégante formule pour l'aire du triangle en fonction des côtés. Nous ne savons dans quel ouvrage Jordan l'a donnée; M. Venturi ne l'a pas trouvée dans le traité *De triangulis.* Cette démonstration est la même que celle que Léonard de Pise a donnée dans le même siècle dans sa géometrie pratique. Elle paraît être d'origine arabe, car elle se trouve dans l'ouvrage des trois géomètres, fils de Musa ben Schaker, et dans celui du juif Savasorda."

Il est possible que Ramus ait eu en mains le *Philotechnes* de Jordanus et qu'il y ait trouvé la proposition d'Héron d'Alexandrie.

On peut espérer que ce *Philotechnes* n'est point perdu; qu'il est représenté par quelqu'une des nombreuses *Practica geometriæ* dont on possède le texte manuscrit. Les deux renvois insérés par Jordanus en son traité de statique faciliteront une identification précise de cet écrit.

---

1) Michel Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (Bruxelles 1837), p. 517.

2) Ramus, *Scholæ mathematicæ*, à la suite du livre XXXI^e.

Nuove ricerche sul matematico Leonardo Cremonese.

Di ANTONIO FAVARO a Padova.

Mi porge occasione immediata a ritornare sopra un argomento del quale mi sono già ripetutamente occupato[1]) una notizia la quale, se anche non riveste caratteri d'eccezionale importanza, non è tuttavia priva di interesse, poichè mediante essa viene in certo modo a collegarsi il nome di LEONARDO CREMONESE con quello della massima figura che l'arte e la scienza insieme riunite possano vantare, cioè di LEONARDO DA VINCI[2]). Questi infatti in un suo appunto che si legge a car. 247ʳ del *Codice Atlantico*[3]) annotò: „tolli lopere di leonardo chermonese", e per noi non è dubbio che il „leonardo", quivi menzionato, altri non sia che l'autore della *Artis metrice pratice compilatio,* lasciando pure impregiudicata, se non la si voglia già, come per verità a noi parrebbe, considerare fino da ora come risolta la questione del suo vero casato. Non sono abbastanza addentro negli studi VINCIani per poter argomentare con qualche precisione il tempo al quale debba farsi risalire la annotazione testè riferita, e non so nemmeno se sia possibile il farlo; parmi però assai probabile che l'appunto, considerato insieme col rimanente della nota alla quale appartiene, si riferisca ad una specie di elenco di oggetti che LEONARDO DA VINCI si proponeva di prender seco in occasione di qualche suo viaggio[4]).

---

1) ANTONIO FAVARO, *Sul matematico cremonese LEONARDO MAINARDI* (Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, pag. 334—337).

ANTONIO FAVARO, *Intorno al presunto autore della „Artis metrice practice compilatio" edita da MASSIMILIANO CURTZE* (Atti del r. istituto Veneto **63**: 2, 1904, pag. 377—395).

2) Di questa informazione vado debitore alla squisita gentilezza dell' egregio collega e benemerito cultore degli studi VINCIANI, prof GIO. BATTISTA DE TONI.

3) *Scritti letterari di LEONARDO DA VINCI cavati dagli autografi e pubblicati da* J. P. RICHTER Parte II. Londra, Sampson Low, Marston, Searle e Rivington 1883, pag. 422.

4) Notiamo però che non si trova tra i libri registrati da GIROLAMO D' ADDA fra quelli menzionati da LEONARDO in varii luoghi dei suoi manoscritti. Cfr. *LEONARDO DA VINCI e la sua libreria.* Note di un Bibliofilo. Milano M.DCCC.LXXIII.

Senonchè non isfuggirà all' attento lettore che LEONARDO DA VINCI in questo suo appunto non accenna ad un trattato particolare di LEONARDO CREMONESE, ma dice genericamente „le opere“, delle quali, per quanto dai biografi, le cui narrazioni ho altravolta esattamente riferite, egli venga salutato come insigne astronomo, fisico e matematico, una sola scrittura ci era nota, quella cioè dell' *Artis metrice pratice compilatio.*

Ora, nella biblioteca reale di Parma, e precisamente nel codice miscellaneo segnato col n° 984 (già HH. 3. 17), noi abbiamo rinvenuta un' altra scrittura, o, per dir più esatto, parte di una scrittura dello stesso (almeno ci giova credere) LEONARDO CREMONESE; ma, per mettere in piena evidenza i rapporti nei quali questa si trova rispetto alle altre contenute nel medesimo codice miscellaneo, è mestieri che incominciamo dal darne una succinta descrizione.

Notiamo anzitutto che il codice porta in fronte questa nota possessoria scritta di mano appartenente al secolo XVII: „M.i D. Jois GREGORII filii M.ci D. Jois ANTONII LEVERATI Genuençis [1])“, la quale mano scrisse anche accanto ai titoli delle varie scritture costituenti il codice le indicazioni che verremo riferendo fra parentesi quadre. Questo codice adunque era a Genova nel secolo XVII, ma, secondo ogni verosimiglianza, vi era anche nel secolo precedente, perchè nel *verso* della car. 144 si legge di mano del secolo XVI: „Clar.mo Artium et Medicinae Doctori d. M.ro JOHANNI EX RUBRIS [2]) maiori suo Observ.mo Genuae“. Come poi sia pervenuto alla biblioteca reale di Parma ignoriamo affatto, perchè gli inventarii di questo istituto non sono accessibili agli studiosi, od almeno non fu concesso a noi di esaminarli.

Ciò premesso, ecco con la massima concisione, se anche non con tutte le regole ordinariamente seguite, quale è il contenuto del codice:

1) Car. 1r. Incipit Theoria CAMPANI. [Liber primus.]

2) Car. 47r. Incipit tractatus patris Asem THEBIT FILII CHORE de accessione et recessione stellarum fixarum. [Liber secundus.]

3) Car. 50r. Incipit liber quem edidit THEBIT FILIUS CHORE de his que indigent expositione antequam legatur almagestum.

---

1) Da atti privati nell' archivio di stato di Genova si rileva che nel 1602 viveva un GIO. GREGORIO LEVERATO, medico, del fu GIO. ANTONIO, il quale, del fu GIORGIO, figura in atti del 1556 e del 1597. Il medico GIO. GREGORIO però non figura nella matricola dei medici di collegio, nè si sa che abbia lasciato scritti, o goduta fama così da essere ricordato dagli scrittori di cose genovesi.

2) Troviamo un GIOVANNI ROSSO vissuto tra la fine del XV ed il principio del XVI secolo, medico reputato per testimonianza del suo conterraneo, il celebre GIOVANNI DA VIGO. Il MALACARNE ed il BONINO lo credettero piemontese, ma è certo che era di Genova. Cfr. PESCETTO, *Biografia medica ligure.* Genova 1846, Vol. I, pag. 89.

4) Car. 54r. Incipit tractatus THEBIT de quantitatibus stellarum. [Liber quartus.]

5) Car. 55t. Incipit liber THEBIT BEN CHORAT. [Liber quintus diversorum.]

6) Car. 56r. Incipiunt quaestiones super tractatum spere JOHANIS DE SACROBOSCO per BLASIUM DE PARMA Doctorem Excellentissimum, Mathematicum singularem. [Liber sextus.]

7) Car. 82r. . . . . . [questione (*sic*) de excentricis. Liber settimus.] *Finisce a car. 85r.*: „Expleta est questio de excentricis et epiciclis completa per FRANCISCUM DE ESCULO. Deo gratias".

8) Car. 87r. [Theorica planetarum. liber 8s.]

9) Car. 106r. [De utilitate Astrolabii liber nonus.]

10) Car. 115r. Incipit Astrolabium MESSALAHAT. [Liber decimus.]

11) Car. 134t. [Liber decimus (*sic*)]. Sic LEONARDUS CREMONENSIS prosequitur descriptionem cosmographie in plano.

Inc. „Terreni situs habitabilis partes describentium . . ".

Expl. nel *recto* della car. 144, ultima scritta del codice, essendo diviso in dieci capitoli.

Tutte le scritture dal n° 1 al n° 10 sono stese della stessa mano del secolo XV sopra la medesima qualità di carta; l' ultima invece, e sulla quale venne particolarmente richiamata la nostra attenzione, è scritta d' altra mano, forse dello stesso secolo XV, ma piuttosto verso la fine, e sopra carta che, anche per il formato, è diversa da quella del rimanente del codice. La intestazione stessa della scrittura di LEONARDO CREMONESE, ultima del codice, il formato suo affatto differente da quella di tutte le altre scritture in esso contenute inducono a pensare che i dieci capitoli dei quali essa si compone, ed intorno all' intrinseco merito dei quali lascieremo giudicare ad altri di noi più competenti in argomento, appartengano anche materialmente ad opera di molto maggior mole del medesimo autore intorno alla stessa materia; e questa presunzione indotta da caratteri estrinseci rimane fino ad un certo punto confermata dalla lettura del testo.

Noi eravamo pervenuti a questo punto delle nostre ricerche, dalle quali per verità non scaturiva alcun nuovo argomento in appoggio della nostra tesi rispetto al vero cognome di LEONARDO CREMONESE, quando dalla squisita gentilezza dell' illustre cultore di questi studi, PAOLO TANNERY, ebbimo una particolareggiata comunicazione relativamente ad un codice della biblioteca nazionale di Parigi, il quale era già stato noto a D. BALDASSARRE BONCOMPAGNI che n' aveva fatta trarre copia parziale [1]), e che

1) Questa copia figurò nella vendita avvenuta in occasione della non mai abbastanza deplorata dispersione della famosa Biblioteca BONCOMPAGNI. Infatti a pag. 129 del *Catalogo della biblioteca* BONCOMPAGNI. *Parte prima contenente i manoscritti, fac-*

porta un contributo notevolissimo, e diremo anzi decisivo, alla risoluzione della questione nel senso già da noi preconizzato. Questo codice noi abbiamo potuto vedere a tutto nostro agio, e ci accingiamo ad esporre il risultato dell' esame da noi istituito e nel quale ci giovarono grandemente le particolareggiate notizie che l' egregio TANNERY ce ne aveva spontaneamente e generosamente somministrate [1]).

Questo manoscritto „Fonds latin 7192", proviene dalla collezione Mazzarino, nella quale portava il n° 5437, e non presenta alcuna traccia degli antecedenti possessori: esso apparisce costituito dalla riunione di parecchi fascicoli scritti della medesima mano, la quale in fine di ciascuno di essi notò accuratamente la data del relativo compimento, ed appartenne certamente non ad un semplice amanuense, ma a persona che comprendeva quello che trascriveva e che in qualche circostanza, specialmente nella riproduzione della figure, usa di un certo discernimento. La circostanza suaccennata della data apposta alle singole scritture ci dispensa dagli apprezzamenti intorno alla età del codice il quale risale ai primissimi anni del secolo XVI, senza di che la forma della scrittura indurrebbe a stimarlo anteriore di circa mezzo secolo: essa apparisce stretta e serrata in tutte le varie parti del codice, eccetto che per la *Compilatio* di nostra vecchia conoscenza, la quale, e ne anticipiamo la notizia, fa parte essa pure del manoscritto. La mano di scritto è del resto, malgrado alcune abbreviazioni poco usate, leggibilissima senza difficoltà di sorte alcuna.

Premesse queste generalità, ecco senz' altro quale è il contenuto del codice.

1) Car. 1^r—21^t. LEONARDI CREMONENSIS pratica minutiarum [2]).

Incipit: Rerum omnium quiditativam essentiam minime elucidari posse sine numerali conditione . . .

Explicit: Vide primo quod illi numeri in se multiplicati constituunt 60, quorum $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$ faciant 47. divide 60 per 47 et proveniet tempus in horis etc. — Expletum per me BERNARDINUM ALIHERIUM currente anno 1506.

Questa scrittura si compone di un proemio e di dodici capitoli. Nel proemio apparisce degno di nota il passo seguente: „Cuius equidem Arithmetice speculationes indagari non expedit, cum iam a multis mathematicis sit excellenter expressa, sed solum opportunum circha ipsius operationem

simili, edizioni del secolo XV, abbachi, riviste, ecc. Roma 1898, leggiamo: „1026. LEONARDUS CREMONENSIS Practica Minutiarum. Copia del Mss. della Bibl. Nazionale di Parigi. Anc. Fond. Lat. N. 7192 in fol.".

1) Una sommaria descrizione ne diede il TANNERY istesso a pag. 466—468 del Journal des savants, Août 1904.

2) Quest' è adunque la scrittura della quale D. BALDASSARRE BONCOMPAGNI aveva fatto trarre copia.

praticam immorari videtur . . . vel artem praticam, sed quoniam non solum numeri extant integri circha quos huiusmodi ars plenissime ab ALGO est edita, sed fracti integrique cum fractis proponuntur, circha quos minime comperi traditam ab aliquo artem huius praticam sufficienter, idcirco . . .“ e perchè ci sembra risultare di qui che a LEONARDO CREMONESE erano rimasti completamente ignorati gli scritti di LEONARDO PISANO e di altri che pur avevano atteso allo studio dell' argomento.

Quanto ai capitoli nei quali la scrittura è divisa, eccone i titoli:

(car. 1^{r}.) Modum representationis minutiarum assignare.

(car. 1^{t}.) Modum reductionis minutiarum dissimilium denominationum et modum reductionis integrorum ad minutias et econtra subiungere.

(car. 3^{r}.) Modum additionis in minutiis proponere.

(car. 4^{r}.) Propositas minutias ab aliis subtrahere.

(car. 5^{r}.) Minutias propositas duplare.

(car. 5^{r}.) Minutias propositas mediare.

(car. 5^{t}.) Duabus minutiis propositis, unam per aliam multiplicare.

(car. 8^{t}.) Modum divisionis minutiarum demonstrare.

(car. 11^{r}.) Minutiarum propositarum radicem quadratam extrahere.

(car. 14^{r}.) Minutiarum propositarum radicem cubicam extrahere.

(car. 16^{r}.) Progressionum diversarum summam assignare numerorum.

(car. 17^{r}.) Quasdam propositiones in multis servientes annectere.

Qui però, oltre al testo originale di LEONARDO CREMONESE, sono contenute anche delle annotazioni fatte da qualche studioso al quale avrà appartenuto il manoscritto da cui trascrisse l' amanuense: una di tali note è sopra un foglio intercalato ed è in inchiostro rosso, un' altra è scritta in nero sul *verso* della car. 15 però con la rubrica iniziale: „Hoc capitulum non est predicti Venerabilis fratris LEONARDI, sed additio quaedam“.

Le carte 22, 23 e 24 sono bianche; sul *recto* della car. 25 è una copia della car. 15^{r}, con la nota: „Per me BERNARDINUM ALIHERIUM. Anno 1506“ bloccata in rosso con la nota „va-cat“ nei due margini laterali.

2) Car. 25^{t}—28^{r}. LEONARDI CREMONENSIS pratica minutiarum.

Inc. Pro notitia fractionum sciendum est quod quedam sunt fractiones numeri integri, quaedam sunt fractiones fractionum . . .

Expl. Si apposuisses 12 cifras et pro radice habuisses hunc numerum 345678, removendo 4^{or} figuras provenient 34 integra, $34 \cdot \frac{\tilde{m}}{p}$, $4 \cdot \tilde{2}$, $4 \cdot \tilde{3}$, $48 \cdot \tilde{4}^{a}$ multiplicando, multiplicando scilicet ammotum per 60, ut prius dicebatur. — Explicit Algorismus minutiarum LEONARDI CREMONENSIS per me BERNARDINUM ALIHERIUM anno 1506.

Il titolo adunque di questa scrittura è uguale a quello della precedente, ma però l' amanuense, in luogo di dirla „Pratica minutiarum“, la chiama „Algorismus minutiarum“ ed è infatti un sommario in nove brevi capitoli e probabilmente anteriore al precedente trattato.

I quali nove capitoli, compreso il primo di introduzione, sono i seguenti:

(car. 25ᵗ.) Secundum capitulum de additione.
(car. 25ᵗ.) Capitulum tertium de subtractione.
(car. 26ʳ) Capitulum 4ᵐ de mediatione.
(car. 26ʳ.) Capitulum quintum de duplatione.
(car. 26ʳ.) Capitulum sextum de multiplicatione.
(car. 26ᵗ.) Capitulum septimum de divisione.
„ Quomodo fractio potest dividi per fractionem.
„ Quomodo fractio per integrum et fractionem.
„ Quomodo fractio per integrum.
„ Quomodo integer et fractio per fractionem.
„ Quomodo integer per fractionem.
„ Quomodo integer per fractionem et integrum.
(car. 27ʳ.) Quomodo integer et fractio per integrum et fractionem.
„ Quomodo integer et fractio per integrum.
(car. 27ʳ.) Capitulum octavum de radicum extractione.
(car. 28ʳ.) Capitulum nonum [pro operatione in cubicis].

La car. 28ᵗ contiene le prime undici linee della „LEONARDI CREMONENSIS descriptio Cosmographie in plano“ bloccate esse pure in rosso con la nota „va-cat“, della quale diremo più innanzi.

3) Car. 29ʳ—53ᵗ. LEONARDI CREMONENSIS artis metrice pratice compilatio.

Inc. Primus tractatus. Artem metricam seu mensurativam . . .

Expl. Que vero sit proportio alibi dixi demonstrativa conclusione fere. Finis. — Hec est summa decidens materiam singulorum librorum totius Geometrie EUCLIDIS, edita per Magistrum LEONARDUM DE ANTONIIS DE CREMONA, ordinis fratrum minorum, magistrum peritissimum in theologia et omnibus mathematicis disciplinis, et expleta per me BERNARDINUM ALIHERIUM de anno 1505.

Questa scrittura, come per incidenza abbiamo notato, a differenza di tutte le altre della medesima mano, stese nel carattere corrente del tempo, è scritta in quel carattere gotico rotondeggiante di imitazione, generalmente chiamato col nome di semigotico.

4) Car. 54—55. Tabula sinuum secundum proportionem 22 ad 7.

5) Car. 56ʳ. Copia cuiusdam demonstrationis predicti Reverendi Magistri LEONARDI CREMONENSIS reperte super uno folio papiri scripte et figurate eius manu propria.

Inc. Presenti dispositione circulorum patet quod angulus . . .

Expl. Quia videlicet angulo super circunferentiam facto correspondent 180, sed facto super centrum 90.

6) Car. 56^t—64^t. Di queste carte l' amanuense ha approfittato per trascrivere parte d' una corrispondenza passata tra il 1506 ed il 1507 fra PAOLO DA FREZO (PAULUS FRICIUS) da Pavia e GIORGIO FONDULO (GEORGIUS FONDULUS) da Cremona. Del primo possiamo dire questo soltanto che appartenne a nobile famiglia pavese (FRIGI o FRISI) che ha dato parecchi professori alla Università, un valente trattatista di medicina e molti amministratori del Comune, ma il di cui nome è ormai completamente caduto in dimenticanza: del secondo riporta l' ARISI: „GEORGIUS FUNDULUS, vir bonae fidei, medicus, philosophus, mathematicus clarissimus ... Vixit annos LXXII. Obiit Kal. Aprilis MDXLV" [1]); nel tempo adunque della suaccennata corrispondenza aveva circa trentatre anni.

Da quello, che del suindicato carteggio ci fu conservato nel codice del quale ci stiamo occupando, ci pare di poter conchiudere che l' amanuense vivesse in Cremona, od almeno vi dimorasse durante il lavoro di trascrizione al quale stava attendendo: egli infatti doveva avere tra mano gli originali stessi delle lettere di PAOLO DA FREZO, perchè ne riproduce le sottoscrizioni e gli indirizzi, mentre di quelle di GIORGIO FONDULO sembra non avesse altro che le minute ch' egli riproduce senza quei due ammenicoli: egli era dunque in relazione con quest' ultimo e verosimilmente attendeva per conto di lui al lavoro di trascrizione delle varie opere di LEONARDO CREMONESE; e poichè la più gran parte di queste lettere risguarda appunto il nostro LEONARDO e contiene giudizii intorno ai suoi lavori, stimiamo opportuno di stralciarne quei brani che per lo scopo nostro ci sono sembrati di maggior interesse.

a) PAOLO DA FREZO a GIORGIO FONDULO (Pavia, 23 Settembre 1506):

Car. 56^t „. . . altro al presente non accade, se non che vi prego se qualche cosa di novo in Astrologia, overo de LEONARDO CREMONESE havete, a me si como ad uno vostro intimo faciati partecipe. Io ho una certa pratica del stesso in matheria da mensurare ogni cosa possibile in differentiam, ma non gh' è le probatione. Et cum grandissimo studio quelle ho adinvente. Vero che se le trovasse (como ho gia ditto) vi prego me lo scriviati."

b) GIORGIO FONDULO a PAOLO DA FREZO (Cremona, 27 Settembre 1506):

Car. 57^r „. . . de LEONARDO CREMONESE una certa pratica, quale

1) *Cremona literata, seu in Cremonenses doctrinas et literariis dignitatibus eminentiores chronologicae adnotationes, auctore* FRANCISCO ARISIO. Tomus secundus, Parmae, MDCCVI, typis Pauli Montii, pag. 186. — *GABRINO FONDULO. Frammento della storia lombarda sul finire del secolo XIV e il principiare del XV.* Opera di VINCENZO LANCETTI. Tomo II, Milano, co' torchii d' Omobono Manini, MDCCCXXVII, pag. 360—362.

credo sia quella de che scriveti de modo mensurandi, la qual comincia in questo modo: „Artem metricam sive mensurativam occasione quadam prospiciens etc.“ Ulterius uno tractato de Cosmographia et insuper uno instromento in forma di galea, col quale se po navigare per tutto el mondo“.

c) Paolo da Frezo a Giorgio Fondulo (Pavia, 18 Febbraio 1507):

Car. 57 r e t „Me haveti scritto como haveti la pratica Artis metrice de Leonardo Cremonese, cosa molto utile et galante: ve adviso como alli anni passati me venne per le mane et la feci acopiare, piacendome anchora sopra modo. Et dubitando non fusse errata, item per poter certificare qualunche volesse sopra cio dubitare, me sono sforzato rivoltando tutto el bono Euclide trovare la demostratione mathematicale ad ogne sua conclusione et pratica, procedendo a posteriori. Et per gratia de Dio, ben che siami stata una fatica strana, ho certificato demonstrative el tutto. Vero è sono tre conclusione de la terza parte ubi loquitur de seratilibus, cio è la prima et secunda conclusione de seratilibus, item la conclusione decima septima de sphere quantitate, item la decimanona de portionis sphere quantitate, le quali in veritate non bene intendo: o chel libro sia falso o che Leonardo ha errato, qual cosa audacter non volio dire, per esser lui stato si ingenioso homo, quantunche habia demonstratione contra di quelle conclusione. Per tanto me persuado che lui habi forsi fatto le demonstratione, benche non li habia messe in sema con la pratica. Et possendole voy havere, ve scongiuro me le vogliate far vedere, aut saltim sopra quelle conclusione antedette. Et quando non si trovasse, prego per mio amore vogliati sopra ciò speculare alquanto et veder con qual ragione et demonstratione dica che multiplicando i dui terzi del diametro per la area del magior circulo de la sphera surge tutta la quantità de la sphera etc. Il simile dele altre conclusione antedicte. Io ho qualche demonstratione contra questa conclusione de sphera et de portione eius, perho resto assai ambiguo, le qual demonstratione al presente non scrivo perche saria troppo longo. Item alla fine del libro suo fa la excusa cum qualunche lectore, digando che licet posuerit propter facilitatem proportionem diametri ad circumferentiam esse sicut 7 ad 22, non ita sentit. Et dicit se dixisse alibi demonstrativa conclusione fere. Havendo noi qualche cosa dil suo, poteressimo trovare dove lo habia detto, et trovando prego me ne scriviati. Ulterius io haveria ben a piacere veder la sua Cosmographia, et cosi quello instromento in forma di Galea, ma richiedendole dubito me incolpate de troppo prosumptione. Et pur sforzandome lamor de la scientia et asegurandome la indisolubile fraternitate nostra, non restarò di pregarvi, havendo messo fidatissimo, vogliati farmele vedere . . .“

d) Giorgio Fondulo a Paolo da Frezo (Cremona, 16 Marzo 1507 a Nativitate):

Car. 58r. „... Circha la pratica de M.ro Leonardo Cremonese me fati intendere vui haver fatte le demonstrationi mathematice ad ogni sua conclusione et pratica procedendo a posteriori etc. Cosa laudabile et digna et de molta fatica, della qual cosa horie grande a piacere, perchè voi ne havereti aleviato la fatica del cercarle, perho so che ne fareti participe de le fatiche vostre, de la qual cosa etiam ve prego. Tamen diceti esser tre o ver quatro conclusione ne la terza parte, seu la prima et la secunda de seratilibus et la 17ª et 19ª de sphere et portionis sphere quantitate, le quale in veritate (secondo scriveti) non bene intendeti aut dubitati circha quelle haver errato Leonardo, qual cosa perho non audacter voleti dire per esser stato Leonardo homo ingeniosissimo. Ad confirmationem di questo ve voglio dire che nullo modo doveti dubitare Leonardo haver errato, ma firmiter credere esso haver ditto ciò ha scritto cum verissime demonstratione. Per tanto io, non per gloria de uno compatriota, ma per la veritade olso dire, da Ptholomeo et in qua non esser stato homo de più profunda scientia ne le cose mathematice che Leonardo Cremonese. Et de ciò sono veri testimonii chi hano visto le opere sue et contemplato le lui (*sic*) contemplatione et demonstratione. Per tanto etiam io son certo esso habia demonstrato tutte le pratiche sue per certissime demonstratione, ben che fin a qui non habia potuto ritrovarne cosa alcuna. Unde circha le 4° conclusione prenominate de le quale seti molto ambiguo, per amor vostro desideroso de farvi cosa grata et satisfarvi in ogni cosa a me possibile, ho speculato circha quelle. Et benche, da poy me parti da Pavia[1]) fin a qui, mai habia dato opera ad simile consideratione geometrice, tamen, excitato dal subtilissimo vostro ingegno, ho rivoltato Euclide et molti altri geometri così latini come vulgari, tra li quali ho ritrovato esser ditto da molti che a multiplicare li $\frac{2}{3}$ del diametro per la area del maximo circulo de la sphera provene la capacità de la sphera et così coincide tal operatione con molte altre circha essa, como è a multiplicare la superficie de la sphera per $\frac{1}{6}$ del diametro; et così de molti altri modi de li quali ne habiamo fin ad una decena cum le loro rasone demonstrative. Per tanto iudico essa esser vera. Ma de la demonstratione di quello niuno ho ritrovato haverne parlato. Perho cum subtilissima indagatione (per gratia de dio omnipotente, dal quale reputo ogni mia inteligentia procedere) ho ritrovato la vera rasone et demonstratione de la ditta praticha. Similiter de corporibus seratilibus la chiara demonstratione, quale vi manderò per el primo fidato. Et farovi non solum cum li ochi vedere, ma cum le mani tochare dicte verissime

1) Di qui sembrerebbe potersi indurre che Giorgio Fondulo abbia conseguito presso la università di Pavia il grado di „artium et medicine doctor“ col quale lo troviamo qualificato negli indirizzi delle lettere scrittegli da Paolo da Frezo.

demonstratione. Spero vi sarà cosa grata et delectevole; vero è che al presente non le scrivo perche hano bisogno de molto parlare et de longissima scriptura, la quale al presente non posso exequire. Solum io vi mando la Cosmographia de LEONARDO et lo instromento in forma de galea, qual cose cum grande timiditate et rispecto haveti da me richieste. Et io cum magior animo ve le ho mandate per che io non ho così cara cosa de la quale non ve facesse participe, persuadendome il simile de vui verso di me. Quando ne havereti cavato copia le remandareti. Circha el ditto de proportione diametri ad circumferentiam è vero che in alcuni soi scritti [1]) LEONARDO dice: „quo magis prope veritatem est proportio circumferentie ad diametrum sicut 318057 ad 101250 quam sicut 22 ad 7“, sed non alia demonstratione hoc ibidem probat; forte alibi demonstrative probavit: è ben vero che altri probano che „proportio circumferentie ad diametrum minor est ea que est 22 ad 7 et maior ea que est 223 ad 71.“ Hor basta circha questo.“

Delle difficoltà in genere, delle quali aveva toccato PAOLO DA FREZO, tratta poi diffusamente GIORGIO FONDULO in altra e lunga lettera latina (car. 59^r—64^t) che gli indirizza sotto il dì 22 Marzo 1507, nella quale però si astiene dall' entrare in particolari intorno a quest' ultimo argomento, chiudendo con lo scrivere: „De tertia vero difficultate, scilicet de proportione diametri ad circumferentiam, intelexisti per alteras litteras meas, et quid sentiat ARSAMITES et ARCHIMEDES et quid LEONARDUS noster. Quare non plura. Laus sit omnipotenti Deo et Gloriose Virgini Marie. 1507, die 21 Marcij a Nativate Dom.^{i}“

7) Car. 65^r—70^r. Note sopra CAMPANO, prive di titolo ed in due parti.

Inc.: „Notandum pro intelectu notabilis primi CAMPANI commentatoris EUCLIDIS positi in commento 13^e 2^i libri. Quoniam si fuerit trigonus ortogonius, tunc ductis lineis angulum rectum continentibus . . .“

Expl. (car. 68^t): „Eodem modo super ab describe circulum et multiplica et divide ut prius; et sic finaliter habebis notitiam omnium angulorum totalis trigoni propositi. Deo Laus, amen“.

Inc. (car. 69^r): „Cuique diffinite linee subnectere duas quibus ipsa sit medio loco proportionalis . . .“

Expl. (car. 70^r): „et angulus gcd sicut rpf et cde sicut pfh, quare recti. Deo laus, amen.“

1) E precisamente nella „Practica minutiarum“, contenuta in questo medesimo codice. A car. 20^r, lin. 25—26 leggiamo infatti: „Qua proportio circumferentie ad diametrum non est sicut 22 ad 7 sed magis prope veritatem est sicut 318 057 ad 101 250“. Questo rapporto apparisce evidentemente dedotto dalla forma $3^0\ 8^I\ 28^{II}\ 41^{III}\ 36^{IV}$, oppure da quella $1^0\ 2^I\ 49^{II}\ 33^{III}\ 52^{IV}$ per la lunghezza dell' arco di 1^0 in 60^i del raggio, in luogo di $1^0\ 2^I\ 50^{II}$ di TOLOMEO. Però questa valutazione di LEONARDO per difetto è meno sodisfacente di quella per eccesso di TOLOMEO.

Car. 70^t. „Hec est divisio decidens materiam singulorum librorum totius Geometrie EUCLIDIS facta ad procurationem Eximii artium et medicine doctoris domini Magistri PETRI DE CURTE de Padua. Expletum per me BERNARDINUM ALIHERIUM ab exemplari toto corrupto de anno 1506."

Inc.: „Primo igitur tractatur de superficiebus, 2^{do} de corporibus et hoc in ij libro in prima parte de quantitate rationali et irrationali, 2^o de irrationali in 10^o . . ."

Expl.: „14^{us} liber primo de proportione diversorum corporum habentium equales superficies, 2^o de inscriptione unius eorum in alterum: et hoc in 15^a. Deo laus, Amen." Più sotto: „Modus describendi circulum super tria puncta data extra lineam rectam ubicunque fuerint, datus in libro de Compositione Astrolabii. In quo etiam habetur qualiter ducatur perpendicularis, etc."

Inc.: „Sint tria puncta . . ."

Expl.: „. . . centrum circuli quesiti. Expletum per me BERNARDINUM antedictum ut supra." Quest' ultima apparisce però tratta da un' opera di molto anteriore a LEONARDO.

8) Car. 71^r e ^{t}. De equatione dierum secundum Excellen.^{um} D. M.^{um} LEONARDUM DE ANTONIIS CREMONENSEM.

Inc.: „Quia Deo dante, paucis elapsis diebus, scientiam equationum dierum percipi, circha quam diu dubitaveram, deliberavi clarius in ea loqui cum divina gratia, quam PTHOLOMEUS capitulo 10 dictionis 3^e *Almagesti* fecerit et suus comentator GEBER ultimo capitulo 3^{ij} tractatus sui . . "

Expl.: „Ipsa quidem debet addi ut habeatur medium tempus quo sciantur coniunctiones et ascendens coniunctionum, etc.

De equatione dierum secundum LEONARDUM CREMONENSEM scriptum per me BERNARDINUM ALIHERIUM die 13 Julij 1510."

In questo frammento troviamo da notare che LEONARDO prende come esempio l' anno 1436, il quale verosimilmente può credersi l' anno stesso della redazione.

9) Car. 72^r—81^t. LEONARDUS CREMONENSIS sic prosequitur descriptionem Cosmographie in plano.

Inc.: „Terreni situs habitabilis partes describentium PTHOLOMEUS quis fuerit licet non pateat[1]), pro aliis tamen sufficientius dicit . . ."

Expl.: „. . . non enim video quod in mensura possit procedi nisi secundum primam partem dicti capituli. Summo sit factori laus per secula

1) LEONARDO dubita che il „PTHOLOMAEUS cognominatus CLAUDIUS Alexandrinus ceu JACOBO ANGELO Florentino translatori suo placet, tempore Romani Pontificis ALEXANDRI 5i" sia lo stesso che il „Pheludensis" autore dell' *Almagesto*, mettendo in rilievo dei divarii fra l' *Almagesto* e la *Geografia*.

semper. Amen.“ E dopo altre dodici linee: „Expletum per me BERNARDINUM ALIHERIUM currente anno ab Incarnatione 1506.“

Questo trattato è diviso in dieci capitoli; finisce nel *verso* della car. 81, ma però il *recto* della car. 82 contiene ancora una figura ad esso relativa.

10) Car. 83ʳ—96ʳ. Ars instrumenti horologici pro tempore sereno edita per R.um M.um LEONARDUM CREMONENSEM.

Inc.: „Affectis intense circha nobilia celestium quatenus et eorum conditor atque rector avidius queratur . . “

Expl.: „Hec autem voluella cum ponetur super centro signato in virgula defferentis ex parte augis velut oppositi iuxta suum diem, patebit locus solis in defferente et medius motus eius in primo mobili et etiam sua equatio. Celorum rectori laus sit Christo perhennis.“

E dopo una „Tabula varietatis augis solis et dierum“ a car. 95ᵗ—96ʳ, si legge: „Expletum per me BERNARDINUM ALIHERIUM die 29 Maij 1507“.

Fin qui, come del resto lo chiariscono le annotazioni finali che siamo venuti riproducendo, tutto il codice è della mano dello stesso amanuense. Nella carta 97 (ʳ e ᵗ) una mano, che sembra essere appartenuta alla seconda metà del secolo XVI e che non è sicuramente quella del rimanente del codice, ha trascritto una „Tabella annuarum conversionum“ ed una „Tabella equationis ⊙“, ed a car. 98ʳ delle „Tabellae annuarum conversionum“ e una „Tabella profectionis diurne“. Finalmente a car 98ᵗ, d' una mano della prima metà del 500, abbiamo gli abbozzi incompleti di due temi astrologici per nati li 27 Luglio e 10 Agosto 1610.

Da tutto quanto siamo venuti esponendo in questo e nei precedenti nostri lavori intorno allo stesso argomento, ci sembra possano trarsi le seguenti conclusioni ormai abbastanza assodate:

1°. È da escludersi in via assoluta che l' *Artis metrice pratice compilatio*, della quale una versione italiana con la corrispondente traduzione tedesca furono date in luce da MASSIMILIANO CURTZE, sia opera di LEONARDO MAINARDI da Cremona. Questi fu verosimilmente assai più filosofo e medico che non matematico, o lo fu soltanto per quanto lo comportavano e diremmo quasi lo rendevano necessario le costumanze e l' indirizzo degli studi di quel tempo: fiorì nella seconda metà del secolo XV e non lasciò alcuna scrittura intorno a qualsiasi materia pervenuta insino a noi, od almeno di cui si abbia notizia. Conferma in tale presunzione il fatto ch' egli fu all' incirca contemporaneo di GIORGIO FONDULO (1473—1545) esso pure Cremonese, il quale, scrivendo dell' autore della scrittura in questione, vi accenna come a tale morto da molto tempo, cosicchè ormai non sopravvivesse più alcuno di quelli che potevano averlo conosciuto: anche di qui soltanto parrebbe quindi potersi conchiudere che LEONARDO CREMONESE matematico fosse vissuto circa un secolo prima, e quindi tra la seconda metà del secolo XIV e la prima del XV.

2°. Il cod. 212 di San Marco, presentemente nella biblioteca Mediceo-Laurenziana di Firenze, rivela la esistenza di un „Frater LEONARDUS DE ANTONIIS DE CREMONA ordinis minorum bacalarius" da noi fatto così per la prima volta conoscere, il quale scriveva di cose geometriche in Bologna nel 1404 e nel 1405; sicchè, sebbene gli scrittori di cose cremonesi non ci abbiano conservata alcuna memoria di questo loro concittadino, esso viene ad aggiungersi alla serie degli uomini illustri Cremonesi e degli scrittori italiani di matematica.

3°. Che il LEONARDUS CREMONENSIS, al quale si attribuiscono numerose scritture scientifiche, non sia altri che il LEONARDO DE' ANTONII risulta indubbiamente dal fatto che l' *Artis metrice pratice compilatio*, la quale nei varii esemplari finori noti, ed in un altro che faremo conoscere più sotto, è attribuita a „LEONARDUS CREMONENSIS" è nel codice Parigino 7192 dichiarata del „Magister LEONARDUS DE ANTONIIS DE CREMONA", e questo da parte di tale che scriveva in Cremona stessa, pochi decennii dopo che egli sarà morto.

4°. A questo „LEONARDO DE' ANTONII", oltre alla scrittura principale ed alle tavole, le quali hanno data occasione ai presenti studi, devono ancora riconoscersi queste altre promiscuamente attribuite, o esplicitamente a lui, oppure a LEONARDUS CREMONENSIS:

a) Le note sopra CAMPANO a car. 133^r—135^r del codice 212 di San Marco di Firenze, le quali nel fondo sono le stesse di quelle a car. 65^r—70^r del codice Parigino 7192.

b) I metodi per la estrazione delle radici quadrata e cubica a car. 253—256 del codice della biblioteca universitaria di Bologna segnato col n° 2780.

c) I capitoli cosmografici a car. 134^t—144^r del codice della biblioteca reale di Parma segnato col n° 984: gli stessi che a car. 72^r—81^t del codice Parigino 7192 e dei quali le prime 11 linee trovansi anche trascritte a car. 28^t di questo medesimo.

E poi ancora questi altri lavori, dei quali è finora noto l' unico esemplare contenuto nel suddetto codice Parigino:

d) „Practica minutiarum".

e) „Algorismus minutiarum", che così lo chiameremo, adottando il titolo datogli dall' amanuense, tanto per distinguerlo dalla scrittura precedente.

f) Dimostrazione geometrica relativa ad una proprietà del cerchio.

g) „De equatione dierum".

h) „Ars instrumenti horologici pro tempore sereno".

Finalmente, quando non sia tutt' uno con quest' ultima, che risguarda la descrizione e l' uso di un quadrante solare portatile, la „galea“ della quale è cenno nel carteggio di GIORGIO FONDULO con PAOLO DA FREZO.

Ben poco però siamo ancora in grado di dire intorno alla vita del nostro LEONARDO. PAOLO DA FREZO lo dice: „sì ingenioso homo“; e GIORGIO FONDULO giudica „da PTHOLOMEO et in qua non esser stato homo de più profonda scientia ne le cose mathematice“. Alla data del 1404 e del 1405, già trovate come quelle del compimento di alcuni suoi lavori, è da aggiungersi che di un altro possiamo argomentare che sia posteriore all' anno 1410, poichè in esso si accenna a circostanze a questo anno anteriori; egli scrive infatti: „Preconsiderare tamen convenit quod licet Cosmographiam PTHOLOMEUS cognominatus CLAUDIUS Alexandrinus, ceu JACOBO ANGELO Florentino translatori suo placet, tempore Romani Pontificis ALEXANDRI 5[i]. descripserit ingeniosius quam sui precessores per quem scriptor et ego divina gratia didici modum descriptionis rei presentis, veluti longo tempore cogitaveram sed minime comprehendere valueram . . .“. Procedendo nel nostro spoglio secondo l' ordine cronologico, troviamo che alle date surriferite è da aggiungere quella del 1436, assunta, molto verosimilmente dall' anno nel quale scriveva, come esempio in un suo frammento astronomico, nel quale appunto si legge: „Verbi gratia si anno 1436 a Xpi nativitate . . .“. Più innanzi ancora ci portiamo con quest' altro passo dell' *Ars instrumenti horologici,* nel quale, accennandosi alla correzione del Calendario, è scritto: „Mea siquidem vi modica correctionis huius exemplaria transmisi ad Concilium Basiliense iam diu dum vigeret et ad Dominum Papam EUGENIUM, ad Angliam et Parisium . . .“: noi sappiamo infatti che conclusioni intorno a questo argomento furono prese dal Concilio di Basilea in una adunanza del Marzo 1437,[1]) ed accennando LEONARDO ad un tempo nel quale non fosse peranco scoppiato irreconciliabilmente il dissidio fra Papa CONDULMER ed il burrascoso Concilio, parrebbe non si dovesse andare più in là del 1438. In questa medesima scrittura si ha per verità un altro passo dal quale l'anno nel quale essa è stesa sembrerebbe risultare indubbiamente, poichè vi si legge: „et si usque ad magna viguerit tempora precedentia nostrum, videlicet per annos . . .“, ma la cifra che qui segue è, in conseguenza d'una correzione, di così incerta lettura da non permettere di fondarvi sopra alcuna sicura argomentazione.

Nel complesso adunque ci sembra, per quanto almeno permettono di concluderlo i documenti finora insino a noi pervenuti, potersi tenere come assodato che la attività scientifica di LEONARDO DE' ANTONII DA CREMONA, più comunemente conosciuto col nome di LEONARDO CREMONESE, si svolse

1) *Die Vorgeschichte der Gregorianischen Kalenderreform* von FERDINAND KALTENBRUNNER (Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien (Philos.-Hist. Cl.) **82**, 1876, pag. 337).

del 1404 al 1438, e poichè ancora nel 1404 egli era „baccelliere" in teologia, della quale più tardi divenne „maestro", crediamo di non andare molto lungi dal vero esponendo la ipotesi che il suo anno di nascita sia da tenersi intorno al 1380. Egli stesso poi si dice „a me homociunculo membro ... videlicet fratre LEONARDO, Ordinis sancti Francisci".

Resterebbe ora soltanto che noi formulassimo un qualche apprezzamento sopra i meriti scientifici di LEONARDO DE' ANTONII e sul posto ch' egli viene ad occupare nella storia della scienza.

Nell' unico trattato che si ha alle stampe, cioè nell' *Artis metrice pratice compilatio*, crediamo sia da ravvisarsi un documento importante per giudicare dello stato delle cognizioni geometriche al principio del secolo XV, documento il quale forse, per la stessa indipendenza sua dagli scritti di LEONARDO PISANO, acquista sotto questo rispetto caratteri di speciale interesse. Quanto al complesso dell' opera dello scienziato, il cui nome viene ora restituto alla storia delle matematiche, noi crediamo che, per giudicare con competenza e per dare a questo giudizio i necessarii fondamenti, converrebbe incominciare dal pubblicarne le opere e queste studiare nei rapporti con le altre sincrone e congeneri. Così, per modo di esempio, la parte aritmetica delle opere di LEONARDO DE' ANTONII dovrebbe studiarsi in relazione con quello che intorno alle stesse materie ha lasciato PROSDOCIMO DE' BELDOMANDI, il quale, più fortunato di LEONARDO, restò nella storia delle scienze, mentre di questo anche i matematici italiani del rinascimento, che molto probabilmente avranno approfittato delle sue opere, tacquero ingenerosamente, come di tanti altri, il nome, rimasto così insino a noi completamente ignorato.

Nel precedente mio lavoro *Intorno al presunto autore della „Artis metrice pratice compilatio"*, ebbi a registrare quattro esemplari di questo trattato: la descrizione or ora fatta del codice della biblioteca nazionale di Parigi segnato col n° 7192 ne aggiunge un quinto, e qui, in via di appendice alle cose esposte, vogliamo notare come le ricerche da noi proseguite intorno a questo argomento ne abbiano messo in evidenza ancora un sesto nella biblioteca reale di Parma. Anche questo esemplare del resto non era sfuggito alle meravigliosamente diligenti ricerche del Principe D. BALDASSARRE BONCOMPAGNI, il quale anzi ne aveva fatta curare una trascrizione [1]), e se esso non ci fu noto prima, lo si deve principalmente attribuire a ciò che in Italia gli studiosi non trovano sempre presso i preposti alle biblioteche dello stato quegli aiuti che questi dovrebbero dare.

1) *Catalogo della biblioteca* BONCOMPAGNI. *Parte prima contenente i manoscritti, fac-simili, edizioni del secolo XV, abbachi, riviste*, ecc. Roma 1898, pag. 129: „1027. LEONARDI CREMONENSIS Artis metricae practicae compilatio. Copia del codice della Bibl. Reale di Parma, segnato „CC. V. 26" in fol".

L' esemplare in questione, come del resto era già noto per la indicazione che ne aveva somministrata il Boncompagni, è contenuto nel Codice che, al tempo della copia da lui fatta eseguire, portava la notazione CC. V. 26, cambiata poi nell' altra HH. VIII. 12, e poco appresso ancora nel n° 305 (quando si persuaderanno questi benedetti bibliotecarii che negli istituti a loro affidati ci sarebbero da fare cose tanto più importanti che non mutare e rimutare ad ogni momento e senza motivi plausibili le notazioni dei codici!); ma nemmeno la indicazione della antica notazione era bastata a far trovare il codice: lo rinvenimmo finalmente in seguito a personali ricerche.

Il codice appartiene al secolo XV e forse alla seconda metà di esso, e nelle carte anticamente numerate nei *recto* con le cifre 1—49 contiene appunto la: „Leonardi Cremonensis artis metrice praticae compilatio“. Esso non porta alcun segno il quale riveli i nomi dei suoi precedenti possessori: la vecchia e ricca legatura in cuoio rosso con impressa in oro la scritta: „Bibliothecae Regiae Parmensis“ con i gigli di Francia indica soltanto aver appartenuto alla detta biblioteca nel tempo in cui Parma era soggetta ai Borboni. Nel suo presente assetto il codice fu assai probabilmente disposto al tempo del bibliotecario Paolo Maria Paciaudi che tenne l' ufficio nella seconda metà del decimottavo secolo [1]) e che premise al manoscritto una introduzione che vorrebbe essere storica dell' aritmetica, perchè egli, assai probabilmente per avere mal lette o male interpretate le due parole „Artis metrice“, le trasformò in „Arithmetice“ e, seguendo le indicazioni fornite dagli storici di cose cremonesi, attribuì senz' altro la scrittura a Leonardo Mainardi, inscrivendo in una guardia „Leonardi Maynardi Arithmetice“. Vero è tuttavia, e non vogliamo tacerlo, che nella introduzione suaccennata egli scrive: „Arithmetice practice compilatio, revera tamen non artis numericae institutiones, sed mensurarum doctrinam complectitur; adhibita, ut res ipsa postulat, arithmetica supputatione“.

Alla „Compilatio“ propriamente detta fanno seguito nelle carte anticamente numerate nei *recto* con le cifre 50—59 e col titolo „Tabella sinuum“ le tavole già note.

1) *Vitae italorum doctrina excellentium, qui saeculis XVII et XVIII floruerunt.* Auctore Angelo Fabronio. **14**, Pisis MDCCLXXXIX, pag. 180—247.

Note sur la trigonométrie d'Adrien Romain.

Par H. Bosmans à Bruxelles.

On ne connait bien souvent la trigonométrie d'Adrien Romain [1]) que par son *Canon triangulorum sphaericorum* [2]). Mr v. Braunmühl notamment, n'analyse que ce seul ouvrage, dans ses *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* [3]). Au fond la chose est assez naturelle; le *Canon* est le plus considérable des travaux d'A. Romain sur la trigonométrie, et se rencontre peut-être plus fréquemment que ses autres écrits trigonométriques, dans

1) Adriaan van Roomen, Romanus, ou Romain naquit, à Louvain, le 29 septembre 1561. Professeur de mathématiques et de médecine d'abord à l'université de sa ville natale, puis à celle de Wurzbourg, il mourut à Mayence le 4 mai 1615. Toutes les histoires des mathématiques consacrent quelques pages à A. Romain; et il a donné lieu, en outre, à d'assez nombreuses monographies, parmi lesquelles il faut mettre hors de pair les deux suivantes:

Notice sur le mathématicien louvaniste Adrianus Romanus, professeur à l'ancienne université de Louvain. — (XVIe Siècle) par Ph. Gilbert. Revue catholique, t. 17 (Louvain 1859), p. 277—286, 394—409, 522—527. — Ph. Gilbert, y étudie surtout les travaux géométriques de son illustre prédecesseur dans la chaire de mathématiques de l'université de Louvain.

Adrien Romain, premier professeur à la faculté de médecine de Wurzbourg, par A. Ruland. Bibliophile Belge (Bulletin trimestriel publié par la société des bibliophiles de Belgique) 2 (Bruxelles 1867), p. 56—100, 161—187, 256—269. — Ruland y donne une bibliographie des oeuvres d'A. Romain, qu'on peut proposer comme un modèle du genre.

Ecrites à des points de vue très différents et indépendamment l'une de l'autre, les monographies de Gilbert et de Ruland se complètent de la manière la plus heureuse.

2) *Adriani Romani Canon Triangulorum Sphaericorum, Breuissimus Simul ac facilimus, quamplurimisq; exemplis opticè proiectis illustratus, in gratiam Astronomiae, Cosmographiae, Geographiae, Horologiographiae, &c. Studiosorum iam primùm editus. Accessère plenioris usus ergò. Tabulae Sinvvm, Tangentivm, Et Secantivm Ex Opere Rdi Atq. Eximij Patris Christophori Clavii S. I. Mathematici celeberrimi desumptae.* Moguntiæ, Ex Officinâ Ioannis Albini, Anno M.DC.IX.

3) Tom. I (Leipzig, Teubner, 1900), p. 229—231. En m'exprimant ainsi, c'est que je compte, bien entendu, limiter ma note à la trigonométrie proprement dite, c'est à dire, à la résolution des triangles; en excluant les travaux d'A. Romain sur la détermination de π, une équation du 45e degré et le calcul des cordes du cercle.

les bibliothèques publiques. Il ne paraît cependant pas être le plus important; et en tous cas, on ignore d'ordinaire que, loin d'être seul, il faut lui ajouter le *Canon triangulorum rectangulorum*, le *Speculum astronomicum* et la *Mathesis polemica*[1]). Je ne prétends pas présenter ces opuscules au lecteur, comme contenant tous les trois des découvertes de premier ordre; mais la haute situation occupée, en son vivant, par A. Romain, aux universités de Louvain et de Wurzbourg; ses relations d'amitié avec Clavius, Magini, Viète, Ludolphe van Collen et d'autres princes de la science de son temps; enfin et surtout, la rareté des trois petits volumes que je viens de nommer, donneront, je l'espère, quelque intérêt à la note que je me propose de leur consacrer. Au surplus, le *Speculum astronomicum*, mérite, en toute hypothèse, l'attention de l'historien de la trigonométrie.

I. Canon triangulorum rectangulorum.

Le *Canon triangulorum rectangulorum*, fort oublié aujourd'hui, l'était moins jadis, car Valère André dit l'avoir vu[2]). Il n'existe plus dans les bibliothèques belges; mais Ruland en signalant un exemplaire à Wolfenbüttel[3]), je me suis adressé à la bibliothèque ducale. Celle-ci a eu l'obligeance de m'envoyer ce précieux volume à Bruxelles et de l'y laisser à ma disposition pendant quelques semaines. Qu'elle veuille bien agréer ici l'hommage de mes remerciements et de ma vive reconnaissance.

Le *Canon* est une toute petite brochure de format, in 8⁰, comprenant 16 pages imprimées en long, non chiffrées, mais les pages 1, 3, 5, sont signées respectivement A, Aij, Aiij. Il n'a ni frontispice, ni préface et est intitulé:

canon triangvlorvm || rectangvlorvm, tam sphaericorvm || quam rectilineorvm, methodo brevissima || eaque facillima comprehensa: *Authore* || a. romano medico et mathematico.

Ruland croit que le *Canon* fut imprimé à Louvain[4]), conjecture fort plausible. Il doit, en toute hypothèse, avoir été publié peu de temps après l'apparition du *Variorvm de rebvs mathematicis responsorvm*

1) J'en donnerai, ci-dessous, au fur et à mesure la description détaillée et le titre complet.

2) *Valeri Andreæ Desseli I. C. Bibliotheca belgica: de Belgis vitis scriptisq; claris. praemissa topographica Belgii totivs sev Germaniae inferioris descriptione. Editio renovata, & tertia parte auctior.* Lovanii, Typis Iacobi Zegers CIↃ.IↃC.XLIII. Cum privilegio Regis, p. 15 et 16. — Il n'est pas inutile de remarquer à ce propos que la bibliographie d'A. Romain ne compte pas moins de 60 numéros. Valère André n'en a cependant vu et n'en nomme que 18. „Scripsit varia (A. Romanus), dit-il, ex quibus vidi sequentia": suivent les 18 titres.

3) O. c. p. 161.

4) O. c. p. 162.

liber VIII[1]) par VIÈTE, qui est, on le sait, de 1593. A. ROMAIN semble avoir eu pour but d'y résumer, pour ses élèves, les grandes découvertes faites par le géomètre français dans la théorie des triangles sphériques rectangles.

Le *Canon* débute par ces mots[2]): „Diagrammata duo triangulorum rectangulorum, prius quidem rectilineorum trium, alterum vero sphaericorum quatuor"; après quoi l'auteur donne deux figures, les seules de tout l'ouvrage, l'une composée, comme il le dit, de trois triangles rectilignes, l'autre de quatre triangles sphériques. Elles ne sont pas de grande utilité, et je n'y insiste pas.

Au verso du f° A, ROMAIN définit les notations dont il se servira. Les angles se représenteront par A, B, C, A étant toujours l'angle droit; les côtés opposés respectivement par BC, AC, AB; le rayon du cercle trigonométrique par R.

F° Aij r° et Aij v°. Résolution des triangles rectilignes rectangles. Elle n'a rien de neuf. ROMAIN y distingue six cas:

1° On donne: B ou C et AB.

Solution: $\frac{R}{\text{tang } B} = \frac{AB}{AC}$; $\frac{R}{\text{sec } B} = \frac{AB}{BC}$.

2° On donne: B ou C et AC.

Solution analogue.

3° On donne: B ou C et BC.

Solution: $\frac{R}{\sin C} = \frac{BC}{AB}$; $\frac{R}{\sin B} = \frac{BC}{AC}$.

4° On donne: AB et AC.

Solution: $\frac{AB}{AC} = \frac{R}{\text{tang } B}$; $\frac{R}{\text{sec } B} = \frac{AB}{BC}$;

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

5° On donne: AB et BC.

Solution: $\frac{AB}{BC} = \frac{R}{\text{sec } B}$ ou $\frac{BC}{AB} = \frac{R}{\sin C}$;

$\frac{R}{\sin B} = \frac{BC}{AC}$ ou $\frac{R}{\text{tang } B} = \frac{AB}{AC}$;

$$BC^2 - AB^2 = AC^2.$$

6° On donne: AC et BC.

Solution analogue.

F° Aiij r°. ROMAIN y remarque, que les angles et les côtés d'un triangle sphérique rectangle n'étant pas nécessairement aigus, que d'autre

1) *FRANCISCI VIETAE Variorvm De Rebvs Mathematicis Responsorvm, Liber VIII. Cujus praecipua capita sunt, De duplicatione Cubi, & Quadratione Circuli. Quae claudit Πρόχειρον, seu Ad vsum Mathematici Canonis Methodica.* Tvronis, Apud Iamettivm Mettayer, Typographum Regium. 1593. — 2) F° A, r°.

part les tables donnant toujours un angle aigu, il est nécessaire de disposer d'un „*Index*“, dont le rôle est d'indiquer s'il faut s'en tenir au nombre de degrés fourni par la lecture immédiate des tables, ou bien prendre celui de l'arc supplémentaire.[1])

F° Aiij v°. Énumération des dix cas qui se présentent dans la résolution des triangles sphériques rectangles.

Chacune des pages restantes [F° (Aiv) r° — (Aviij) v°] contient la solution détaillée d'un de ces cas. Les éléments inconnus y sont déterminés chacun par six proportions différentes, soit au total par 180 proportions (18 par triangle), toutes énoncées d'ailleurs sans la moindre démonstration.

Au fond ces proportions se ramènent aux dix formules devenues classiques, qui de nos jours encore résument la résolution des triangles sphériques rectangles:

$$\frac{R}{\sin BC} = \frac{\sin B}{\sin AC}; \quad \frac{R}{\sin BC} = \frac{\sin C}{\sin AB};$$

$$\frac{R}{\cos AC} = \frac{\cos AB}{\cos BC};$$

$$\frac{R}{\operatorname{cotang} BC} = \frac{\operatorname{tang} AC}{\cos C}; \quad \frac{R}{\operatorname{cotang} BC} = \frac{\operatorname{tang} AB}{\cos B};$$

$$\frac{R}{\operatorname{tang} AC} = \frac{\operatorname{cotang} B}{\sin AB}; \quad \frac{R}{\operatorname{tang} AB} = \frac{\operatorname{cotang} C}{\sin AC};$$

$$\frac{R}{\sin C} = \frac{\cos AC}{\cos B}; \quad \frac{R}{\sin B} = \frac{\cos AB}{\cos C};$$

$$\frac{R}{\operatorname{cotang} B} = \frac{\operatorname{cotang} C}{\cos BC}.$$ [2])

Pour donner une idée du style de l'auteur, voici comment il se sert de cette dernière formule, pour trouver le côté BC d'un triangle sphérique rectangle, dont il connaît les angles B et C.[3])

Quaesitum BC. Index B & C.

Ut { R ad tangentem anguli B; ita tangens anguli C / tang. comp. anguli B ad R; ita tangens anguli C / tang. comp. anguli C ad R; ita tang. comp. anguli B } ad secant. arcus BC.

1) „In singulis articulis sequentis canonis ad unumquodque quaesitum adjunximus indicem, qui est accidens aliquod trianguli ex quo quaesiti species cognosci debet.“

2) La présence de cette formule dans le *Canon* ne permet pas de lui donner une date antérieure à 1593. Nous venons de rappeler que le *Variorum responsorum liber VIII* par Viète parut en cette année, et on sait que la formule s'y trouve. (Ch. XIX, n° XIII, f° 34 v°). Un excès de modestie ne fut jamais le faible d'A. Romain. S'il avait été l'auteur d'une formule aussi remarquable, il n'eut pas manqué d'en réclamer bruyamment la paternité. Or ses écrits ne renferment pas de trace d'une prétention de ce genre. — 3) F° (Aiv) r°.

Ut	R ad tang. compl. ang. B;	ita tang. compl. ang. C	ad sinum
	tangens anguli B ad R;	ita tang. compl. ang. C	complem.
	tangens anguli C ad R;	ita tang. compl. ang. B	arcus BC.

Cette manière de transformer sans changements importants et d'écrire une proportion, toujours la même, de cinq ou six façons différentes étonne aujourd'hui. Elle était dans les habitudes du temps et Viète n'agit pas autrement dans le *Canon mathematicus.*[1]) Ces modifications ont cependant leur raison d'être, car il est aisé de s'assurer, par une mise en nombre, qu'elles peuvent avoir leur utilité propre quand on veut opérer au long, par voie de multiplication et de division, sans emploi des logarithmes.

J'observerai à ce propos, en passant, qu'A. Romain, qui persiffle d'une manière si cinglante Raymarus Ursus Dithmarsus, dans le 5^e dialogue de son *Archimedes*[2]), devait connaître la prosthaphérèse[3]), mais qu'il ne semble avoir jamais bien apprécié tous les avantages de cette belle méthode.[4])

---

1) Voir notamment, p. 35—41. Je crois superflu de transcrire au long les trois titres sous lesquels parut le *Canon mathematicus.* J'ai établi dans mon mémoire sur le *Traité des Sinus de Michiel Coignet* qu'il n'y a là, à proprement parler, qu'une seule édition (Annales de la société scientifique de Bruxelles **25**:2, 1901, p. 21—24). Je n'y reviens pas et je me contente de renvoyer le lecteur à la note dans laquelle M. Eneström a résumé la question (Biblioth. Mathem. $\mathbf{1}_3$, 1901, p. 356). J'y ajouterai que les pseudo-éditions se trouvent *toutes les trois* au British Museum. (Voir: *British Museum. Catalogue of printed books.* V°: Vieta.)

2) *In Archimedis circvli dimensionem Expositio & Analysis. Apologia pro Archimede, ad Clariss. virum Iosephum Scaligerum. Exercitationes Cyclicae contra Iosephum Scaligerum, Orontium Finaeum, & Raymarum Vrsum, in decem Dialogos distinctae. Avthore Adriano Romano Eqvite Avrato, Mathesewn Excellentissimo professore in Academia Wurcebergensi.* Wurceburgi. Anno CIƆIƆXCVII, p. 84—89.

L'exemplaire de l'Université de Louvain a appartenu à A. Romain. Interfolié de papier blanc, il contient des corrections et des additions de la main de l'auteur, écrites, semble-t-il, en vue d'une réédition. Malheureusement elles sont inachevées et ne forment qu'un brouillon.

3) La quadrature du cercle et la prosthaphérèse sont, en effet, données l'une et l'autre dans le *Fundamentum astronomicum* d'Ursus. Voir la Note que j'ai consacrée à cet ouvrage dans le *Traité des Sinus de Michiel Coignet*, p. 16—20.

4) La bibliothèque de l'université de Louvain possède un manuscrit, coté ms. 196, dans lequel on trouve (f° 365—368) le petit traité suivant: *Nova multiplicandi, dividendi, quadrata componendi, radices extrahendi ratio, multò quam pervulgata certior, facilior & majoribus maxime numeris accommodatior Authore A. Romano E. A.* Lors de la session de janvier 1904, j'ai présenté cet opuscule, inédit jusqu'ici, à la Société scientifique de Bruxelles, qui en a voté l'impression dans ses Annales. Il y paraîtra incessamment et renferme d'assez curieux renseignements sur les méthodes employées par A. Romain, dans les calculs numériques.

II. Le Speculum astronomicum.

Le *Speculum astronomicum* est un volume de format in 4°, contenant 152 pages, titre compris. Les 151 premières pages, sont numérotées (1—151); la dernière non numérotée renferme le privilège conçu en ces termes:

„Ideae Mathematicae[1]) ADRIANI ROMANI partem eam quae Speculum astronomicum comprehendit, praelo dignam censeo. Datum 16 Iunii 1606. Gvliel. Fabricivs Noviomagus, Apostolicus ac Archiducalis librorum censor."

Le titre complet de l'ouvrage est:

specvlvm ‖ **astronomicvm** ‖ **sive** ‖ **organvm forma mappae** ‖ **expressvm:** ‖ In quo licet immobili ‖ Omnes qui Primo caelo, Primoqve ‖ mobili ſpectari ſolent motus, per Canones ea ‖ de re conſcriptos, planiſſime ſine ullius ‖ regulae aut volvelli beneficio ‖ repraeſentantur. ‖ **authore** ***A. Romano,*** *Equite aurato, Comiti Palatino,* ‖ *Medico Caeſareo: atq; ad D. Ioannis Novi Monasterij* ‖ *Herbipoli Canonico.* ‖ (Petit fleuron.) ‖ **Lovanii,** Ex officina Ioannis Maſij, ſub Viridi Cruce, anno 1606. ‖ *Sumptibus Authoris. Proſtat Francofurti apud* ‖ *Levinum Hulſium.* ‖[2])

La dédicace, adressée au célèbre archiduc ALBERT, pour lors souverain des Pays-Bas Espagnols, est datée de Louvain, le 16 juin 1606.

L'ouvrage est divisé en deux parties, dont les chapitres 2—7 de la première sont consacrés à la trigonométrie.

En voici d'abord les titres:

Cap. 2. De triangulorum generibus et differentiis, p. 9—18.

Cap. 3. De analytices triangulorum forma seu methodo, p. 19—21.

Cap. 4. De principiis analyticae triangulorum rectilineorum, p. 21—23.

Cap. 5. De principiis methodi linearis analyticae triangulorum sphaericorum, p. 24—35.

Cap. 6. De principiis analyticae logicae triangulorum sphaericorum, p. 35—40.

---

1) Les *Ideae mathematicae* devaient former une série d'ouvrages qui est malheureusement restée inachevée. L'ouvrage cité plus particulièrement sous ce nom est à proprement parler la *Methodus polygonorum.* C'est ce qui résulte aussi bien des explications d'A. ROMAIN que du titre lui-même qu'il a mis en tête du volume:

Ideae mathematicae pars prima, sive methodvs polygonorvm, qva latervm, perimetrorum & arearum cujuscunque polygoni inveſtigandorum ratio exactissima & certissima; una cum circuli quadratura continentur. Avthore ADRIANO ROMANO *Lovaniensi, medico et mathematico.* Lovanii, Apud Ioannem Masium, Typog. Iur. Anno CIↃ.IↃ.XCIII. (Bibl. Roy. de Belgique.)

Ideae mathematicae pars prima, sive methodus polygonorum. . . . Antwerpiae, apud Ioannem Keerbergium. Anno CIↃ.IↃ.XCIII. (Univ. de Louvain.)

C'est une même édition qui parut simultanément à Anvers et à Louvain, avec deux adresses d'imprimeur différentes.

2) Deux exemplaires à la bibliothèque royale de Belgique. J'en connais d'autres aux universités de Gand et de Louvain et à la bibliothèque communale à Anvers.

Cap. 7. De canone triangulorum sphaericorum per speculum nostrum, p. 41—50.

Les chapitres 2 et 3 contiennent des généralités. Le chapitre 5 expose les principes des projections coniques et cylindriques des figures dessinées à la surface de la sphère. Le chapitre 7 donne l'application de ces principes à la résolution graphique des triangles sphériques projetés sur un plan. A. Romain affectionnait beaucoup cette méthode, qu'il emploie dans un grand nombre de figures du *Canon triangulorum sphaericorum;* mais je m'écarterais de mon sujet en m'y arrêtant ici.[1]) Quant aux chapitres 4 et 6 ils méritent plus d'attention.

La trigonométrie rectiligne forme l'objet du chapitre 4. On n'y trouve encore aucun de ces essais de notations trigonométriques qui rendent le chapitre 6 si neuf et si intéressant. Je le ferai donc suffisamment connaître, en transcrivant, en langage algébrique moderne, les formules qu'on y trouve. Les numéros d'ordre qui les accompagnent sont ceux dont elles sont affectées dans l'original.

Soient $A, B, C,$ les trois angles; $a, b, c,$ les côtés opposés; $r,$ le rayon du cercle inscrit; $R,$ celui du cercle circonscrit; $R_t,$ celui du cercle trigonométrique.

Formules du premier genre:[2])

1. $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C};$$

$$\frac{a}{\operatorname{cotg} \frac{1}{2} B + \operatorname{cotg} \frac{1}{2} C} = \frac{b}{\operatorname{cotg} \frac{1}{2} C + \operatorname{cotg} \frac{1}{2} A} = \frac{c}{\operatorname{cotg} \frac{1}{2} A + \operatorname{cotg} \frac{1}{2} C}.$$

2. $$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{cosec} B}{\operatorname{cosec} A};$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{cotg} \frac{1}{2} C - \operatorname{tang} \frac{1}{2} B}{\operatorname{cotg} \frac{1}{2} C - \operatorname{tang} \frac{1}{2} A}.$$

3. $$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(B+C)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(B-C)}\text{ [3])}$$

4. $$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} B - \operatorname{tang} \frac{1}{2} C}{\operatorname{cotg} \frac{1}{2} A - \operatorname{tang} \frac{1}{2} C}.\text{ [4])}$$

1) A. Romain dit en parlant de ces projections (*Speculum astronomicum,* part. 1, cap. V, p. 34): „Nos de . . . hisce projectionibus . . . conscripsimus Volumen ingens, in quo omnia fere quae in hac materia desiderari possunt annotavimus". Ce travail ne parut jamais. Il est aujourd'hui perdu.

2) „Prioris generis haec sunt" (p. 22), c'est à dire, comme l'auteur l'a expliqué plus haut (p. 21), les formules dans lesquelles interviennent les angles et les côtés eux-mêmes; tandis que dans les formules du second genre on considère leurs segments.

3) Formule due à Thomas Finkius. Voir la note historique que j'ai consacrée à cette analogie, dans le *Traité des Sinus de Michiel Coignet,* p. 25—29.

4) Le *Speculum* a ici une faute d'impression. Au dénominateur on lit tang C au lieu de tang $\frac{1}{2}$ C.

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C}{\operatorname{cosec} C}\text{[1]}$$

5. $$\frac{a}{r} = \frac{\operatorname{cotg} \frac{1}{2} B + \operatorname{cotg} \frac{1}{2} C}{R_t}$$

6. $$\frac{\frac{1}{2} a}{R} = \frac{R_t}{\operatorname{cosec} A}.$$

7. $$\frac{2bc}{b^2 + c^2 - a^2} = \frac{R_t}{\cos A}.$$

8. $$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{cosec} C}{\operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} A}.$$

Formules du second genre.[2]

Soit AH la hauteur abaissée de l'angle A.

1. $$\widehat{BAH} = \frac{\pi}{2} - B; \quad \widehat{CAH} = \frac{\pi}{2} - C.$$

2. $$\frac{BH}{CH} = \frac{\operatorname{cotg} B}{\operatorname{cotg} C}.$$

3. $$\frac{c}{BH} = \frac{R_t}{\cos B}; \quad \frac{b}{CH} = \frac{R_t}{\cos C}$$

4. $$c^2 - b^2 = a(BH - CH).$$

5. $$BH^2 - CH^2 = a(BH - CH).$$

6. $$(c + b)(c - b) = a(BH - CH).$$

7. $$a^2 + b^2 - c^2 = 2a \cdot BH.$$

Soit AM la médiane de l'angle A,

$$\frac{\sin B}{\sin BAM} = \frac{\sin C}{\sin CAM}.$$

Soit AD la bissectrice de A,

$$\frac{b}{c} = \frac{BD}{DC}.$$

Soit enfin AE le diamètre du cercle circonscrit mené par A, et D le point où ce diamètre rencontre la base BC,

1. $$ADC = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(C - B);$$

2. $$\frac{b}{c} = \frac{\cos DAC}{\cos DAB}.$$

Beaucoup de ces formules étaient anciennes et fort connues; mais comme ce chapitre est le seul un peu complet que Romain ait écrit sur la trigonométrie rectiligne, j'ai cru utile de le faire connaître en entier.

Le chapitre 6 est plus important. L'auteur y expose la solution algébrique des triangles sphériques. Il y donne d'abord en abrégé les

1) Si l'un des angles était obtus, dit A. Romain, il faudrait prendre au numérateur la différence des cotangentes. Remarque analogue pour la formule 8.

2) „Posterioris generis fundamenta haec sunt," p. 23.

formules du *Canon triangulorum rectangulorum.* Quant aux triangles obliquangles, toutes ses formules se *ramènent* facilement aux quatre suivantes:

$$(1)\qquad \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c},$$

qu'il écrit d'ordinaire, non plus sous la forme de proportions, mais sous celle de l'égalité de deux rectangles;

$$(2)\qquad \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

$$(3)\qquad \cos A + \cos B \cos C = \sin B \sin C \cos a,$$

$$(4)\qquad \operatorname{cotg} A \sin B + \cos B \cos c = \sin c \operatorname{cotg} a.$$

Il est superflu de faire remarquer que (2) et (3) ne s'y rencontrent pas explicitement, mais une des formes de (2) est, par exemple:

$$(5)\qquad \cos a \operatorname{cosec} b = \cos c \operatorname{cotang} b + \sin c \cos A.$$

On reconnaît, dans tout ce chapitre, une connaissance approfondie des œuvres trigonométriques de VIÈTE et les transformations qui pourraient être personnelles à l'auteur sont sans grande importance; aussi n'est ce pas là ce qui donne l'intérêt de premier ordre qu'on ne saurait dénier au chapitre. Mais, dans un article fort bien fait, Mr BRAUNMÜHL a jadis signalé ici même,[1]) le *Canon triangulorum sphaericorum* comme contenant le plus ancien essai systématique de notations trigonométriques. Or le *Canon* n'est que de 1609, tandis que le *Speculum* est de 1606 et par conséquent de trois ans antérieurs. Eh bien! A. ROMAIN y emploie déjà toutes les notations dont il devait se servir plus tard dans le *Canon.* Ce n'est donc pas le *Canon*, mais bien le *Speculum*, qui contient l'emploi systématique le plus ancien, d'une notation trigonométrique.

Il y a cependant quelques légères différences entre les deux ouvrages:

Dans le *Canon*, le sinus, la tangente (prosinus) et la sécante (transinuose) se désignent respectivement par les initiales majuscules romaines *S, P, T*; dans le *Speculum* A. ROMAIN emploie les majuscules gothiques $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{T}$, et écrit, par exemple: $\mathfrak{S}\,A$, $\mathfrak{P}\,B$, $\mathfrak{T}\,C$.

Dans le *Canon* les lignes des arcs complémentaires se désignent par les mêmes lettres que les lignes de l'arc simple suivies d'un caractère spécial $\sigma\mathfrak{C}$; ainsi cos A s'écrit $S\,\sigma\mathfrak{C}\,A$. Dans le *Speculum* A. ROMAIN emploie tout bonnement le C cédille $Ç$, ce qui est plus simple et vaut mieux; pour cos A il écrit: $\mathfrak{S}\,ç\,A$.

Dans le *Canon* le rayon du cercle trigonométrique se désigne par R; dans le *Speculum* par $\mathfrak{R}$.

Enfin dans les deux ouvrages le mot „Rectangulum" se remplace par §.

1) *Die Entwickelung der Zeichen- und Formelsprache in der Trigonometrie;* Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, p. 65.

D'après ces conventions la formule (5) ci-dessus s'énonce de la manière suivante:[1])

„In sequentium serierum quavis [il y en a six] Rectangulum quodvis sub duabus canonicis aequatur aggregato vel differentiae duorum reliquorum eiusdem seriei

Series prima.

I	§ sub $\mathfrak{S}\varsigma A$ et $\mathfrak{S} A B$,
II	§ sub $\mathfrak{S}\varsigma A B$ et $\mathfrak{P}\varsigma A C$,
III	§ sub $\mathfrak{T}\varsigma A C$ et $\mathfrak{S}\varsigma B C$.“

Les cinq autres séries donnent les formules qui se déduisent de la précédente par un changement de lettres.

Voici un autre genre de notations:

La somme de deux arcs se désigne par $ʃʃ$, leur différence par δ, la demi-somme par $\beta ʃʃ$, la demi-différence par $\beta\delta$.

Soit donc la formule:

$$\frac{\sin x + \sin z}{\sin x - \sin z} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+z)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-z)} = \frac{\operatorname{cotg} \frac{1}{2}(x-z)}{\operatorname{cotg} \frac{1}{2}(x+z)}$$

A. Romain l'écrit comme suit:[2])

Summa et differentia sinuum respondentium arcubus assumptis x et z, assimilantur prosinibus $\left\{\begin{array}{l}\beta ʃʃ \text{ et } \beta\delta \\ \varsigma\beta\delta \text{ et } \varsigma\beta ʃʃ.\end{array}\right.$

Pour terminer il faut signaler enfin ce qu'il y a peut-être de plus original, de plus remarquable dans tout le chapitre, je veux dire le tableau dans lequel A. Romain résume toute la théorie des triangles sphériques rectangles. Je le transcris textuellement, sans modifications ni commentaires, mais je prie le lecteur qui veut en apprécier le mérite de ne pas perdre de vue sa date de 1606.

„In utraque (serie) supponimus angulum A rectum

Ut $\mathfrak{R}$ ad	$\mathfrak{S}\alpha$	ita $\mathfrak{S}\beta$	ad $\mathfrak{S}\gamma$
	$\mathfrak{T}\varsigma\alpha$	ita $\mathfrak{T}\varsigma\beta$	ad $\mathfrak{T}\varsigma\gamma$
	$\mathfrak{P}\alpha$	ita $\mathfrak{S}\varsigma\beta$	ad $\mathfrak{P}\delta$
	$\mathfrak{P}\varsigma\alpha$	ita $\mathfrak{T}\beta$	ad $\mathfrak{P}\varsigma\delta$
	$\mathfrak{S}\varsigma\alpha$	ita $\mathfrak{P}\beta$	ad $\mathfrak{P}\varepsilon$
	$\mathfrak{T}\alpha$	ita $\mathfrak{P}\varsigma\beta$	ad $\mathfrak{P}\varsigma\varepsilon$

α	Porro exponuntur quinque modis nempe	BC	vel	BC	vel	ςAB	vel	ςAB	vel	ςAC
β		B		C		ςAC		B		C
γ		AC		AB		ςBC		ςC		ςB
δ		AB		AC		ςC		ςBC		ςBC
ε		ςC		ςB		ςB		AC		AB

1) *Speculum astron.*, p. 38. — 2) *Specul. astr.*, p. 37. — 3) *Specul. astr.*, p. 39 et 40.

Series analogiarum altera

Ut $\mathfrak{R}$ ad	$\mathfrak{P}\,\alpha$	ita $\mathfrak{P}\,\beta$	ad $\mathfrak{S}\,\gamma$
	$\mathfrak{P}\,\varsigma\,\alpha$	ita $\mathfrak{P}\,\varsigma\,\beta$	ad $\mathfrak{T}\,\varsigma\,\gamma$
	$\mathfrak{S}\,\alpha$	ita $\mathfrak{T}\,\beta$	ad $\mathfrak{S}\,\delta$
	$\mathfrak{T}\,\varsigma\,\alpha$	ita $\mathfrak{S}\,\varsigma\,\beta$	ad $\mathfrak{T}\,\varsigma\,\delta$
	$\mathfrak{T}\,\alpha$	ita $\mathfrak{S}\,\beta$	ad $\mathfrak{S}\,\varepsilon$
	$\mathfrak{S}\,\varsigma\,\alpha$	ita $\mathfrak{T}\,\varsigma\,\beta$	ad $\mathfrak{T}\,\varsigma\,\varepsilon$

	Hic quoque exponuntur quinque modis		vel		vel		vel		vel	
α		ςB		ςBC		ςBC		AB		AC
β		ςC		AB		AC		ςC		ςB
γ		ςBC		ςB		ςC		AC		AB
δ		ςAC		ςAC		ςAB		BC		BC
ε		ςAB		B		C		B		C[1]

III. La Mathesis polemica.

La *Mathesis polemica* est de nouveau un volume rarissime; si rare même, que malgré ses longues et minutieuses recherches, Ruland dit n'en avoir découvert aucun exemplaire[2]. On le possède cependant aujourd'hui aux universités de Gand et de Louvain. J'en transcris d'abord le titre:

mathesis polemica. avthore a. romano, equite aurato, comite pala- ‖ tino, et medico caesareo. ‖ *Ad Illuſtr*^{mum} *Dominum, D.* **Alexandrvm** *Ducem de Oſtrog in Zaslaw,* ‖ *Palatinidē Volhiniae.* ‖ (Cul-de-lampe.) ‖ **Francofurti,** ‖ Sumptibus Laeuini Hulſij Gandenſis ‖ 1605. ‖

C'est un in-8^0 de 274 pages, dont les 16 premières ne sont pas numérotées, mais dont la 17^e est cotée 13.

La dédicace adressée „Illustr^{mo} Domino D. Alexandro duci de Ostrog in Zaslaw Palatinidae Volhiniae domino suo colendissimo", est datée: „Ex Musaeo nostro Lovanii Kal. Ianuarii, 1605".

La *Mathesis polemica* traite de l'application des mathématiques à l'art de la guerre. Elle est divisée en trois parties dont seule la seconde intitulée: „Ratio dimetiendi loca inacessibilia",[3] doit nous occuper.

Cette seconde partie est un hors-d'œuvre. A. Romain semble même n'avoir fait qu'y utiliser de vieilles notes écrites primitivement dans un autre but; car dans son inappréciable et si curieuse nomenclature d'ouvrages

1) L'original renferme l'une ou l'autre pure faute d'impression, qui ont été corrigées et qu'il est sans intérêt de signaler.

2) O. c. p. 263. Ruland connaissait l'existence de l'ouvrage par Valère André qui l'avait vu (voir *Bibliotheca Belgica* p. 16).

3) *Mathesis polemica* p. 111.

sur les instruments de mathématiques, Liévin Hulsius, éditeur, compatriote et même parent d'A. Romain, écrit:[1])

„(Ad annum) 1603. Adrianus Romanus D. habet jam prae manibus praxim catholicam, mensurandi per quadratum, quadrantem et gnomonem."

Or d'une part jamais A. Romain n'a publié d'ouvrage séparé sur le sujet; d'autre part il le traite ici avec une surabondance d'explications, tout à fait hors de propos, et un vrai luxe d'exemples numériques.

Ce doit être le travail qu' Hulsius avait vu.

Quoi qu'il en soit, ce qui, à notre point de vue, rend intéressant le problème de la mesure d'une distance inaccessible c'est que comme l'auteur a soin de le dire dans l'introduction,[2]) il le résout par les seules tangentes et cotangentes, à l'exclusion des autres lignes trigonométriques. C'est là, ajoute-t-il, une „méthode toute neuve et non vulgaire".[3]) Pour mieux accentuer son intention, il termine cette seconde partie, par une table de tangentes, calculée au rayon 10^6 et de minute en minute, pour tous les degrés du premier quadrant.[4])

Toutes les formules données ici par A. Romain se ressemblent, et il serait oiseux d'en faire l'énumération. On en aura une idée suffisante en en choisissant une au hasard, que j'exprime en langage moderne. Elle appartient au „Lemma II" dont voici l'énoncé général:[5])

„Si ad basim quamlibet intelligatur constituta orthogonalis; ex dato quovis segmento orthogonalis indagare segmentum quodvis baſeos."

Soit donc AOC un angle droit, dont nous supposerons le côté AO horizontal et CO vertical.

Sur AO, marquons le point B, entre A et O; sur CO, le point D, entre C et O.

1) *Tractatus primvs instrvmentorvm mechanicorvm* Levini Hvlsii. *Ocvlaris demonstratio novi geometrici instrumenti planimetrvm dicti, vna cum suo indvectorio, cuius beneficio circumferentia prouinciae controuerſae, vrbis, arcis, caſtrorum, vel quaeuis superficies in campo obseruari, dimetiri, notari, & in charta delineari, eorumque area, ſiue magnitudo facile inueniri poteſt: Nec non retis & triplicis tum quadrati tum quadrantis vsus, quibus omnis longitudinis, altitudinis, latitudinis & profunditatis obseruatio lucidissime demonstratur.* Francofvrti ad Moenvm, Ex officinâ Typogr. Wolfgangi Richteri, impensis Authoris. M. DC. V. Cum Priuilegio S. Caeſ. Maiest., p. 8.

Cette édition, qui est au moins la troisième, parut simultanément en latin et en allemand. La bibliothèque royale de Belgique la possède dans les deux langues. Ce n'est pas ici la place de donner la bibliographie d'Hulsius. Je dirai seulement que l'auteur est un marchand d'appareils, qui fait, par ses brochures, de la réclame *sérieuse* et *savante* pour son article. Quand il a fait la théorie et exposé la pratique d'un instrument, il finit toujours par dire, d'une manière ou de l'autre, qu'on peut l'acheter chez lui.

2) *Math. polem.* p. 111—112. — 3) O. c. p. 111—112. — 4) O. c. p. 193—232. 5) O. c. p. 122 et 123.

On mesure AB et les quatre angles CAO, DAO, CBO, DBO. On demande la longueur de CD.

Solution:

$$\frac{\text{cotg } CAO - \text{cotg } CBO}{R} = \frac{AB}{CO, \text{ inventum I}};$$

$$\frac{\text{cotg } DAO - \text{cotg } DBO}{R} = \frac{AB}{DO, \text{ inventum II}};$$

$$DO - CO = DC.$$

A. Romain ne mesure directement la distance inaccessible, que dans les seuls cas où elle est parallèle ou perpendiculaire à la base. Quand elle est inclinée sur cette base, il admet qu'on pourra la considérer comme l'hypothénuse d'un triangle rectangle, dont on sait calculer les deux côtés de l'angle droit.[1])

1) O. c. p. 252 et 253.

Beiträge zur Geschichte der Integralrechnung bei Newton und Cotes.

Von A. v. Braunmühl in München.[1])

Die Methode, deren sich Newton in erster Linie bediente, um Integrationen auszuführen, bestand bekanntlich darin, daß er die zu integrierende Funktion in eine konvergente Potenzreihe entwickelte und dann den seit Fermat und Wallis bekannten Satz über die Integration einer Potenz anwandte, weshalb er ihn auch an die Spitze seiner ersten Abhandlung *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* stellte. Aber Newton hat es auch verstanden, in gewissen Fällen Integrale in geschlossener Form anzugeben, wie dies die Leibnizsche Schule in erster Linie anstrebte. Bemerkungen hierüber finden sich mehrfach in seinen Schriften, so z. B. in der umfangreichen längstens Ende 1671 druckfertigen aber erst 1736 gedruckten Abhandlung *Methodus fluxionum et serierum infinitarum,* worin er zwei Tafeln von Integralen angibt, die sich teils in geschlossener Form darstellen, teils nach Newtons Ausdrucksweise, auf die Quadratur von Kegelschnitten zurückführen lassen. Sieht man sich diese Tafeln etwas näher an, so erkennt man in der Hauptsache drei verschiedene Gattungen von Integralen, die hier behandelt sind, nämlich Integrale rational-gebrochener Funktionen, binomische Integrale und Integrale von der Form $\int f(x, \sqrt{e + fx + gx^2})\, dx$, die wir kurz trinomische nennen wollen. Daß Newton bezüglich der binomischen Integrale schon frühzeitig erkannt hat, in welchen Fällen sie sich durch endliche Ausdrücke darstellen lassen, hat Herr Cantor bereits angeführt.[2]) Diesbezügliche Bemerkungen Newtons finden sich in dem zweiten für Leibniz bestimmten Briefe vom 24. Oktober 1676.[3]) Dagegen wurde die Frage,

1) Diese Abhandlung wurde Ostern 1903 dem internationalen Historikerkongreß durch die Güte des Herrn G. Loria vorgelegt und zur Veröffentlichung in den Akten des Kongresses bestimmt. Da eine solche bisher nicht stattgefunden hat, so möge sie in dieser Zeitschrift erscheinen. — 2) *Geschichte der Mathematik* III², 185—186. — 3) *Opuscula Newtoni,* ed. Castillioneus, p. 335—338.

wie Newton binomische Integrale, bei denen eine solche Darstellung nicht möglich ist, behandelte, soweit uns bekannt, bisher nicht eingehend untersucht, noch weniger aber scheint bemerkt worden zu sein,[1]) daß er schon 1671 auch die allgemeinen trinomischen Integrale sehr wohl zu bewältigen verstand und ihren zweifachen Charakter erkannte.

Wir wollen uns daher im folgenden mit einer kurzen Besprechung des von Newton zu diesem Zwecke eingeschlagenen Verfahrens beschäftigen und dann zeigen, wie seine Untersuchungen von seinem Schüler und Freunde Roger Cotes weitergeführt wurden. Dabei wird sich die Gelegenheit bieten, die noch zu wenig beachtete *Harmonia mensurarum* dieses Gelehrten genauer ins Auge zu fassen.

An drei Stellen Newtonscher Schriften finden sich *trinomische Integrale* behandelt: in der *Methodus fluxionum* von 1671, in dem erwähnten Briefe an Leibniz von 1676 und in der *Quadratura curvarum*, die 1704 publiziert wurde. Doch brauchen wir nur die erste Stelle ins Auge zu fassen, da immer dieselben beiden Typen behandelt werden, die sich in der Form darstellen:

$$a\int z^{n\eta-1}\sqrt{Z}\,dz \quad \text{und} \quad a\int \frac{z^{(n+1)\eta-1}}{\sqrt{Z}}\,dz,$$

wo $n = 0, 1, 2, 3$; $Z = e + fz^{\eta} + gz^{2\eta}$ ist, η eine positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl und a eine Konstante bedeutet. Newton erkennt nun zunächst, daß die Auswertung dieser Integrale, wenn man sie als bestimmte auffaßt, auf die Quadratur von Flächenstücken zurückkommt, die von dem Bogen eines Kegelschnittes, den in seinen Endpunkten errichteten Ordinaten und der Abszissenaxe eingeschlossen werden. Setzt man nämlich $z^{\eta} = x$, eine Substitution, die Newton ebenfalls vornimmt, so gehen sie über in:

$$\text{I)}\ \frac{a}{\eta}\int x^{n-1}\sqrt{X}\,dx \quad \text{und} \quad \text{II)}\ \frac{a}{\eta}\int \frac{x^{n}\,dx}{\sqrt{X}},$$

wo $X = e + fx + gx^2$ bedeutet, und $y^2 = e + fx + gx^2$ ist die Gleichung eines Kegelschnittes, der für $g > 0$ eine Hyperbel, für $g < 0$ eine Ellipse darstellt. *Diese beiden Fälle unterscheidet Newton stets*, indem er in seiner Zusammenstellung von Integralwerten auf die Figuren von Ellipse und Hyperbel verweist. Das einfachste dieser Integrale, welches aus I) für $n = 1$ erhalten wird und das zwischen bestimmten Grenzen genommen, direkt die Fläche des Kegelschnittes darstellt, gibt er in der Form an: $\frac{a}{\eta}s = t = \frac{a}{\eta} \times \alpha GDB$, wobei $\alpha GDB = s$ eine der erwähnten von einem Ellipsen- oder Hyperbelbogen begrenzten Flächen bedeutet, die er

1) Herr Cantor erkennt die erstmalige Behandlung derselben Cotes zu (*Geschichte der Mathematik* III², p. 415).

durch Figuren darstellt; auf dieses Integral $s = \int \sqrt{X}\, dx$ werden dann alle übrigen zurückgeführt.

Die Frage, wie diese Reduktion ausgeführt wird, beantwortet sich, wenn man die beiden Probleme VII und VIII (a. a. O., p. 131—138), auf welche NEWTON selbst verweist, betrachtet. Das erstere Problem lautet: „Beliebig viele Kurven zu finden, deren Flächen durch eine endliche Gleichung dargestellt werden können“, und wird natürlich gelöst durch Differentiation willkürlich gewählter Funktionen. Als Beispiel führt er an: $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)^3 = 3\,x\sqrt{a^2+x^2}$. Diese Methode konnte ihm also direkt die beiden Rekursionsformeln liefern:

$$\text{a)}\ \frac{d}{dx}\left(x^{n-1}\sqrt{X^3}\right) = (n+2)\,g\,x^n\sqrt{X} + \frac{2n+1}{2}\,f\,x^{n-1}\sqrt{X} + (n-1)\,e\,x^{n-2}\sqrt{X},$$

$$\text{b)}\ \frac{d}{dx}\left(x^{n-1}\sqrt{X}\right) = \frac{n\,g\,x^n}{\sqrt{X}} + \frac{2n-1}{2}\,f\,\frac{x^{n-1}}{\sqrt{X}} + (n-1)\,e\,\frac{x^{n-2}}{\sqrt{X}},$$

welche bei der Reduktion jener Integrale die Hauptrolle spielen. Das zweite Problem auf welches NEWTON verweist, lautet: „Beliebig viele Kurven zu finden, deren Flächen zur Fläche irgend einer gegebenen Kurve ein Verhältnis haben, das durch eine endliche Gleichung gegeben ist“. Die Lösung der Aufgabe besteht einfach in der Transformation des Integralausdruckes durch Einführung einer neuen Variabeln. Aus den verschiedenen Beispielen, die er gibt, greifen wir das eine heraus: Gegeben ist der Kreis $y^2 = a\,x - x^2$, es werden Flächen gesucht, die der Kreisfläche gleich sind. Die letztere ist $s = \int \sqrt{a\,x - x^2}\, dx$ (Grenzen werden nirgends angegeben, da überhaupt nur von bestimmten Integralen als Quadraturen gesprochen wird). Setzt man z. B. die Relation $x = \frac{z^2}{a}$ fest, so erhält man dieselbe Fläche $s = \frac{2}{a^2}\int z^2\sqrt{a^2 - z^2}\, dz$, die der Kurve $y = \frac{2\,z^2}{a^2}\sqrt{a^2 - z^2}$ zugehört. Mit dieser Methode konnte NEWTON das Integral $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$ mit Hilfe der Substitution c) $x = \frac{1}{\xi}$ überführen in $-\int \frac{d\xi}{\sqrt{\Xi}}$, wo $\Xi = g + f\,\xi + e\,\xi^2$ ist, welche Form ebenfalls in seiner Tabelle wiederholt vorkommt. Die beiden Transformationsformeln a) und b) und die Substitution c) genügen aber zur Herstellung sämtlicher Integrale der angeführten beiden Gattungen.

Wir wollen dies an dem für $n = 0$ aus I) sich ergebenden Integral $\frac{a}{\eta}\int \frac{\sqrt{X}}{x}\, dx$ erweisen, das relativ am schwersten zu erhalten war. NEWTON gibt in seiner Tabelle an:

$$\text{Abscissae}\left|\begin{array}{l} z^\eta = x \\ \frac{1}{z^\eta} = \xi \end{array}\right. \qquad \text{Ordinatae}\left|\begin{array}{l} \sqrt{e + fx + gx^2} = u \\ \sqrt{g + f\xi + e\xi^2} = \gamma \end{array}\right.$$

Arearum valor:

$$\frac{4ae^2\xi\gamma + 2aef\gamma - 2afgux + 4aegu - 2af^2u - 8ae^2\sigma + 4afgs}{4\eta eg - \eta ff} = t,$$

wobei er bezüglich der beiden Kegelschnittflächen

$$\sigma = \int \sqrt{\Xi}\, d\xi \text{ und } s = \int \sqrt{X}\, dx$$

auf die Figuren verweist, die wir oben anführten.

Der Gang der Ableitung war nun offenbar folgender.

Es ist $\int \frac{\sqrt{X}}{x}\, dx = \sqrt{X} + \frac{f}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}} + e\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$, eine Formel, die sich durch Ersetzung von $\sqrt{X}$ durch $\frac{X}{\sqrt{X}}$ und mit Anwendung der Rekursionsformel b) für $n = 1$ unmittelbar ergibt. Ersetzt man jetzt mit Hilfe der Substitution c) im zweiten Integrale x durch $\frac{1}{\xi}$, so kommt

$$\int \frac{\sqrt{X}}{x}\, dx = \sqrt{X} + \frac{f}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}} - e\int \frac{d\xi}{\sqrt{\Xi}},$$

so daß nur mehr diese gleichlautenden Integrale auf die Form $\int dx\sqrt{X}$ gebracht zu werden brauchen, was wieder mit Anwendung der Rekursionsformel b) für $n = 2$ und $n = 1$ geschieht; man erhält so

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{8g}{4eg - f^2}\int \sqrt{X}\, dx - \frac{2(f + 2gx)}{4eg - f^2}\sqrt{X}$$

und schließlich

$$\int \frac{\sqrt{X}}{x}\, dx = \sqrt{X} + \frac{f}{2}\left\{\frac{8g}{4eg - f^2}\int \sqrt{X}\, dx - \frac{2(f + 2gx)}{4eg - f^2}\sqrt{X}\right\}$$
$$- e\left\{\frac{8e}{4eg - f^2}\int \sqrt{\Xi}\, d\xi - \frac{2(f + 2e\xi)}{4eg - f^2}\sqrt{\Xi}\right\},$$

ein Ausdruck, der nach Beifügung des Faktors $\frac{a}{\eta}$ auf beiden Seiten bis auf die Bezeichnung mit dem obigen Newtons übereinstimmt.

Auf ähnliche Weise konnte Newton die übrigen in den Formen I) und II) noch enthaltenen Integrale s und σ, oder wie er sagt, auf die Quadratur der Kegelschnitte zurückführen. Diese aber setzte er teils als geometrisch bekannt voraus, teils hatte er schon in den vorhergehenden Beispielen gezeigt, wie sich Flächenstücke derselben durch seine *Methode der Reihenentwickelung* finden lassen.

Einen bedeutenden Schritt weiter ging Roger Cotes, indem er, von der geometrischen Konstruktion und der Reihendarstellung absehend, dahin strebte, die binomischen und trinomischen Integrale direkt der rechnerischen Behandlung mittels der logarithmischen und trigonometrischen Tafeln zugänglich zu machen, d. h. *er reduzierte sie auf logarithmische und Kreisfunktionen.* Dazu hat er eine eigene Theorie, die *logometria*, wie er sie nannte, geschaffen. Von seinen diesbezüglichen Untersuchungen hören wir zum ersten Male im Jahre 1712, indem er am 25. Mai d. J. an NEWTON eine kleine Schrift mit dem Titel *Elementa logometriae* sandte,[1]) die dann 1714 in den Philosophical transactions gedruckt wurde[2]) und 1722 in der von COTES' Nachfolger ROBERT SMITH herausgegebenen *Harmonia mensurarum* abermals im Drucke erschien. In dieser Schrift führt er *als Maß eines Streckenverhältnisses* (mensura rationis) *den mit einer Konstanten* (Modulus) *multiplizierten Logarithmus dieses Verhältnisses ein.* Erst im vorigen Jahrhundert wurde diese Maßbestimmung bei Gelegenheit von Untersuchungen über die nichteuklidische Geometrie als allgemeine projektivische Maßbestimmung wieder neu eingeführt,[3]) nachdem sie inzwischen ganz in Vergessenheit geraten war.

Der Gedankengang, durch den COTES auf seine Messung geführt wurde, dürfte, wie aus Bemerkungen an verschiedenen Stellen seiner Schrift hervorgeht, folgender sein. NEPER ließ bekanntlich bei Schaffung seiner Logarithmen einen Punkt in der Weise eine Gerade „durchfließen", daß die in den gleichen Zeitabschnitten 0, 1, 2, 3, . . ., n, . . . durchlaufenen Wege durch die Glieder einer geometrischen Reihe

$$z_1,\ \lambda z_1,\ \lambda^2 z_1,\ \lambda^3 z_1,\ \ldots,\ \lambda^n z_1,\ \ldots$$

dargestellt wurden. Dann repräsentierten die die Lage des Punktes bestimmenden Maßzahlen jener Zeitabschnitte die fortschreitenden Exponenten des Quotienten λ oder die mit einer Konstanten multiplizierten Logarithmen des Verhältnisses irgend eines Progressionsgliedes zum ersten, indem ja identisch

$$n = \frac{1}{\log \lambda} \log\left(\frac{\lambda^n z_1}{z_1}\right)$$

ist. Nachdem nun NEWTON den Bewegungsbegriff an die Spitze seines Fluxionskalküls gestellt hatte, lag es für COTES nahe, diese Messung auf das Verhältnis zweier nach jenem Gesetze *kontinuierlich* wachsenden Größen zu übertragen. Soll daher[4]) (Fig. 1) das Verhältnis $\frac{AC}{AB} = \frac{z_m}{z_1}$ gemessen werden, und ist die Entfernung des fließenden Punktes P von A,

1) EDLESTON, *Correspondence of Sir J. NEWTON and Professor COTES* etc. (1850), p. 116—117. — 2) Nr. 338 für Januar bis März, Vol. **29**, p. 5—45.

3) F. KLEIN, Göttinger Nachrichten 1871, Nr. 17 und Mathematische Annalen **4**, 1871, p. 573—625. — 4) *Harmonia mensurarum* p. 4.

$z = z_1 \lambda^n$, so ist die Fluxion des Maßes: $\frac{PQ}{AP} = \frac{dz}{z} = \frac{z_1 \lambda^n \log \lambda \, dn}{z_1 \lambda^n} = \log \lambda \, dn$, und das Maß m selbst:

$$\frac{1}{\log \lambda} \int_{z_1}^{z_m} \frac{dz}{z} = \int_0^m dn = m.$$

Also folgt:

$$m = M \log \left(\frac{z_m}{z_1} \right),$$

wobei $M = \frac{1}{\log \lambda}$ nach Cotes der *Modulus des Systems* heißt, in welchem die Messung vorgenommen wurde.

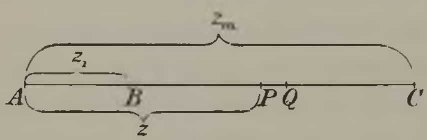


Fig. 1.

Wir haben uns bei dieser Ableitung, um die Sache zugänglicher zu machen, lediglich der uns geläufigen Bezeichnungsweise bedient, statt wie Cotes alles an der Figur in Worten darzustellen.

Dieser Maßbestimmung bediente er sich nun, um Integrale, die Newton bisher auf die Quadratur der Hyperbel zurückgeführt hatte, durch Logarithmen auszudrücken. Aber er ging noch weiter. Schon in seiner *Logometria*[1]) bemerkte er bei Gelegenheit der Komplanation der Oberfläche des verlängerten Rotationsellipsoides, daß hier das Maß eines imaginären Ausdruckes auftrat, gab aber sofort an, daß man in einem solchen Falle dasselbe durch das Maß eines reellen Bogens in bezug auf den Radius als Modulus ersetzen könne, d. h. „durch einen Bogen, dessen Sinus bekannt ist“. Er erkennt also hier den Zusammenhang des Logarithmus mit den zyklometrischen Funktionen. Allerdings waren ihm hierin Leibniz und Johann Bernoulli zuvorgekommen, die schon 1702 darauf aufmerksam wurden, und Bernoulli hatte 1703 in den Acta Eruditorum eine kurze Bemerkung hierüber veröffentlicht, die auch 1704 in den Memoiren der Pariser Akademie für das Jahr 1702 wieder erschien[2]). Cotes wird dieselbe wohl kaum entgangen sein und sie mag ihn vielleicht zu jener Ausdehnung seines Maßes auf die Winkel veranlaßt haben[3]). Da er jedoch bei Einführung desselben gelegentlich des erwähnten Beispieles zu einer anderen Gleichung als Bernoulli gelangt, nämlich zu der Fundamentalgleichung $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, die hier zum ersten Male auftritt, so ist es von Interesse, seine Überlegung etwas näher ins Auge zu fassen.

1) Philos. Trans., a. a. O., p. 32; *Harmonia mensurarum* p. 28.

2) Vgl. die Darstellung von M. Cantor im Zusammenhang mit der Ergänzung, die Stäckel in dieser Zeitschrift 1_3, 1900, p. 109—111 gegeben hat.

3) Vgl. hierzu die Ableitung dieses Zusammenhangs, die der Herausgeber der *Harmonia mensurarum* in Note IV, p. 97—99 gibt.

Ist ANB der Meridian eines abgeplatteten Rotationsellipsoides (Fig. 2) AC $(= b)$ die Rotationsaxe, BC $(= a)$ die halbe große Axe, F der Brennpunkt, X ein beliebiger Punkt auf AC, $XN \parallel CB$ und E auf BC so gewählt, daß

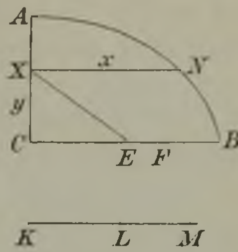


Fig. 2.

$$CE = \frac{CA^2}{CF} = \frac{CA^2}{\sqrt{CB^2 - CA^2}} \left(= \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right)$$

wird; sei ferner

$$KL = \frac{XC \,.\, XE}{CE} \left(= y \sqrt{1 + y^2 \frac{a^2 - b^2}{b^4}}\right)$$

und LM das Maß des Verhältnisses von $EX + XC$ zu CE in bezug auf den Modulus CE, so ist die gesuchte Oberfläche F_1, die der Bogen BN bei der Rotation erzeugt, durch die Proportion gegeben $F_1 : BC^2\pi = (KL + LM) : BC$, d. h. in unserer Schreibweise:

$$\text{I)}\ F_1 = \pi a \left\{ y \sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^4} y^2} + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \log \left(y \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^4}} + \sqrt{1 + y^2 \frac{a^2 - b^2}{b^4}} \right) \right\}.$$

Ist aber jetzt $CB\,(= a) < CA\,(= b)$, d.h. hat man ein verlängertes Rotationsellipsoid (Fig. 3), so ist nach Cotes $CE = \frac{CA^2}{CF}$, ferner $KL = \frac{CX \,.\, XE}{CE}$, und *$LM$ ist das Maß des Winkels XEC $(= \varphi)$ in bezug auf den Modulus CE, d. h. es ist gleich dem Bogen, dessen Sinus $\frac{CX}{CE}$ ist.* Die vom Bogen BN erzeugte Fläche wird dann: $F_2 : CB^2\pi = (KL + LM) : CB$, d. h. nach unserer Bezeichnung:

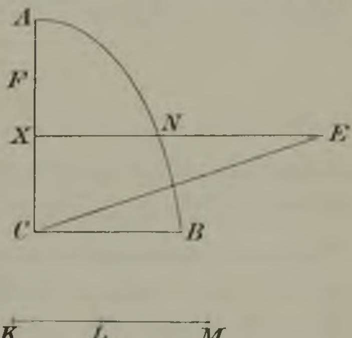


Fig. 3.

$$\text{II)}\ F_2 = \pi a \left\{ y \sqrt{1 - \frac{b^2 - a^2}{b^4} y^2} + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \varphi \right\}, \text{ wo } \sin \varphi = y \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^4}} = \frac{XC}{CE}$$

ist. Nun fügt Cotes bei, „man könnte aber die Dimension dieser Oberfläche auch durch die *Logometria* bestimmen, aber nur unausrechenbar (d. h. durch das Imaginäre). Denn wenn irgend ein Bogen des mit dem Radius CE beschriebenen Kreisquadranten den Sinus CX und den Cosinus XE hat, so wird der Bogen, falls man den Radius CE als Modulus nimmt, das Maß des Verhältnisses $EX + CX\sqrt{-1}$ zu CE sein, wenn man ihn mit $\sqrt{-1}$ multipliziert", d. h. also:

$$i\varphi = \log(\cos\varphi + i \sin\varphi).^{1)}$$

Diese Gleichung ergab sich ihm unmittelbar, indem er in I) $b > a$ voraussetzte und das Resultat mit dem direkt gewonnenen in II) verglich.

1) Auf das Vorkommen dieser Gleichung bei Cotes hat schon Timtschenko in seiner Geschichte der Funktionentheorie (1899, russisch), p. 519—522 aufmerksam gemacht.

Der hierdurch ermöglichte Übergang von dem Maße eines Verhältnisses zu dem eines Winkels ist es, worin Cotes die „Harmonia mensurarum“ erkennt.[1]) Über die Auswertung der hier und in den zahlreichen andern Beispielen der *Logometria* vorkommenden Integrale spricht sich Cotes nicht weiter aus, offenbar weil sie sich durch Newtons Methode leicht auf die Quadraturen der gleichseitigen Hyperbel und des Kreises zurückführen lassen und dadurch unmittelbar die gewünschten Maße ergeben.

Cotes wurde inmitten seiner wissenschaftlichen Tätigkeit vom Tode überrascht. Darin liegt wohl auch der Grund, warum sich eine weitere Ausarbeitung seiner Maßbestimmung in bezug auf den Winkel in seinen Schriften nicht findet. Der Herausgeber seiner Werke, Robert Smith hat jedoch diese Lücke mit Benutzung der hinterlassenen Papiere des Autors in dessen Sinne ausgefüllt[2]), indem er als Maß eines Winkels den mit einem Modulus M multiplizierten Bogen definierte, dessen trigonometrische Tangente (t) in bezug auf einen Kreis mit dem Radius (r) gegeben ist. Demnach ist also das Maß des Winkels φ

$$M \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{r},$$

wobei $M = r\,\frac{\pi}{180} = r \cdot 0{,}0174532925\ldots$ bedeutet, eine Zahl, die schon Cotes berechnet hatte und die man heute noch als Modulus bezeichnet.

In Cotes’ hinterlassenen Papieren fand sich auch ein zweiter Teil der *Harmonia mensurarum,* welcher „Theoremata tum logometrica, tum trigonometrica quae datarum fluxionum fluentes exhibent per numeros“ enthielt. Diese Theoreme sind nichts anderes als *eine Sammlung von Integraltafeln* und umfassen im ganzen 18 Formen, unter denen sich Integrale rationaler Funktionen, binomische und trinomische Integrale befinden, die er sämtlich auf Logarithmen und Kreisfunktionen zurückführt. Von den trinomischen Integralen sind außer den beiden Klassen, die wir schon bei Newton kennen lernten, auch noch die beiden weiteren Klassen:

$$a\int\frac{z^{\theta\eta-1}\sqrt{Z}}{k+lz}\,dz \quad\text{und}\quad a\int\frac{z^{\theta\eta-1}\,dz}{(k+lz)\sqrt{Z}}.$$

ausgerechnet und zwar alle für ganzzahlige positive und negative Werte von Θ.

Wir wollen das einfachste Beispiel $a\int\frac{z^{\eta-1}\,dz}{\sqrt{Z}}$ aus diesen Tafeln

---

1) Aus den p. 28—29 und p. 35—36 der *Harmonia mensurarum* stehenden Bemerkungen geht hervor, daß Cotes sehr wohl ahnte, daß er einen neuen Maßbegriff von großer Allgemeinheit gefunden habe.

2) Note I und III p. 94—97 der *Opera miscellanea* von Cotes, die der *Harmonia mensurarum* angehängt sind.

herausgreifen. Hierfür gibt COTES p. 61 als Wert an

$$\frac{1}{\eta g} aR \Big| \frac{R+T}{S},$$

wobei $R = \sqrt{g}$ der Modulus ist und $T = \frac{\frac{1}{2}f + gz^\eta}{\sqrt{Z}}$, $S = \sqrt{\frac{\frac{1}{4}f^2 - eg}{Z}}$ bedeuten, dem wir noch beifügen, daß stets $S^2 = T^2 - R^2$ sein muß. In bezug auf diese Bezeichnung heißt es in der kurzen vorausgeschickten Einleitung: „Die Größen R, S, T bezeichnen entweder das Verhältnis oder den Winkel, durch deren Maß die Fluente der Fluxion zu bestimmen ist. Wenn nämlich R die Quadratwurzel aus einer positiven Zahl ist, geben sie ein Verhältnis, dessen Wert $R + T$ zu S ist; wenn aber R die Quadratwurzel aus einer negativen Größe ist, so geben sie den Winkel, dessen Tangente und Sekante sich zum Radius verhalten, wie T und S zu R, soferne jene negative Größe durch Änderung des Zeichens wieder durch eine positive ersetzt wird“. [1])

Setzen wir im Falle eines positiven g den Integralwert nach dieser Regel zusammen, so lautet er in unserer Schreibweise

$$\frac{1}{\eta g} a \sqrt{g} \log \frac{\sqrt{g}\sqrt{Z} + \frac{1}{2}f + gz^\eta}{\sqrt{\frac{1}{4}f^2 - eg}}$$

und kann mit Beachtung der Konstanten der unbestimmten Integration, die übrigens auch bei COTES noch nirgends angeführt wird,[2]) leicht auf die uns geläufige Form

$$\frac{a}{\eta\sqrt{g}} \log\left(\frac{f}{2\sqrt{g}} + z^\eta\sqrt{g} + \sqrt{Z}\right) + \text{Const.}$$

reduziert werden. Ist aber g negativ, also der Modulus R imaginär, so ist $-\frac{a}{\eta\sqrt{g}}$ mit dem Bogen φ zu multiplizieren, für welchen $\operatorname{tg}\varphi + \sec\varphi = \frac{T+S}{R}$ wird. D. g. in der Tat, wenn man hieraus den Winkel φ berechnet:

$$\varphi = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{1}{2}f - gz^\eta + \sqrt{\frac{1}{4}f^2 + eg}}{\sqrt{g}\sqrt{Z}} - \frac{\pi}{2},$$

also für das Integral den richtigen Wert:

$$-\frac{2a}{\eta\sqrt{g}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{1}{2}f - gz^\eta + \sqrt{\frac{1}{4}f^2 + eg}}{\sqrt{g}\sqrt{Z}} + \text{Const.}$$

Übrigens gibt COTES in einer Ergänzungstabelle sogar noch verschiedene

---

1) Vgl. hierzu die Erläuterung des Herausgebers in Note IV.

2) JOHANN BERNOULLI hat schon in seinen „Lectiones de calculo integralium“ von 1691 das Integral direkt als Umkehrfunktion des Differentials definiert und die Notwendigkeit der Beifügung einer Integrationskonstanten ausdrücklich hervorgehoben (*Opera* III, p. 387—388, 412).

andere Formen für seine Integrale an; so kann man z. B. den Wert des letzten Integrales nach seiner Angabe auch in der Gestalt schreiben:

$$-\frac{2a}{\eta\sqrt{g}} \text{ arc tg } \frac{S-\sqrt{g}}{T} + \text{Const.},$$

die ebenfalls richtig ist.

R. Smith, der auch zu diesen Theoremen von Cotes einige Noten schrieb, verrät jedoch nicht,[1]) wie jene erhalten wurden, sondern zeigt nur, wie man sie a posterori verifizieren kann; es besteht jedoch kein Zweifel, daß Cotes' Methode von der heute gebräuchlichen wenig verschieden war, da er ja die Rationalisierung eines Differentialausdruckes durch Einführung einer neuen Variabeln kannte. Dagegen hat Cotes, der sich hierüber ebenfalls ausschweigt, seinen Tafeln eine Reihe von Theoremen angehängt, aus denen man entnehmen kann, wie er jede Klasse von Differentialausdrücken auf den einfachsten unter ihnen zurückführte. Auch die hierzu verwendete Methode ist keine andere als die heute übliche Bildung von Rekursionsformeln durch Differentiation, wie wir sie bei Newton schon fanden. Wie systematisch Cotes dabei verfuhr, möge noch folgendes Beispiel zeigen, das er als Theorema III, p. 68 anführt.

Ist $Z = e + fz^{\eta} + gz^{2\eta}$ und setzen wir im folgenden zur Abkürzung durchweg $z^{\eta} = x$, so kommt zunächst $X = e + fx + gx^2$; ist dann ferner

$$\dot{A} = a\,x^{\Theta-1}\,X^{\omega-1}, \qquad \dot{D} = a\,x^{\Theta+2}\,X^{\omega-2},$$
$$\dot{B} = a\,x^{\Theta}\,X^{\omega-1}, \qquad \dot{F} = a\,x^{\Theta-1}\,X^{\omega},$$
$$\dot{C} = a\,x^{\Theta+1}\,X^{\omega-1}, \qquad \dot{G} = a\,x^{\Theta}\,X^{\omega},$$

(die Punkte bedeuten die Fluxionen), so ergibt sich zunächst durch Differentiation von $x^{\Theta} X^{\omega}$:

$$\frac{d}{dx}(x^{\Theta} X^{\omega}) = \Theta e \dot{A} + f(\Theta + \omega)\dot{B} + g(\Theta + 2\omega)\dot{C},$$

und hieraus:

$$\text{I.}\quad x^{\Theta} X^{\omega} = \Theta e A + f(\Theta + \omega) B + g(\Theta + 2\omega) C,$$

wo $A = \int \dot{A}\,dx$ usw. ist. Ebenso erhält man durch Differentiation von $x^{\Theta+1} X^{\omega}$, Einführung der obigen Werte von $\dot{A}$, $\dot{B}$, ... und darauf folgende Integration:

$$\text{II.}\quad x^{\Theta+1} X^{\omega} = e(\Theta + 1) B + f(\Theta + 1 + \omega) C + g(\Theta + 1 + 2\omega) D.$$

Die obige Tabelle aber liefert direkt die Werte

$$\dot{A} = e\dot{B} + f\dot{F} + g\dot{C} \text{ und } \dot{G} = e\dot{B} + f\dot{C} + g\dot{D},$$

wenn man $X^{\omega} = X^{\omega-1}(e + fx + gx^2)$ setzt, woraus

1) Er sagt p. 97: „Horum Theorematum inventionem Analyticam non est instituti mei hic tradere". Dies sieht aus, als habe er die Methode mit Absicht geheim gehalten, vielleicht um den Leibnizianern noch einige Rätsel aufzugeben.

$$\text{III. } F = eA + fB + gC \quad \text{und} \quad \text{IV. } G = eB + fC + gD$$

folgen. Mit Hilfe dieser 4 Gleichungen lassen sich jetzt A, B, C, D linear durch F und G ausdrücken, wodurch 4 Rekursionsformeln gewonnen sind.

Die 18 Integraltafeln, welche COTES selbst nach Angabe von SMITH *vor* 1714 berechnet hatte, ergänzte letzterer, nachdem er in des ersteren Nachlasse dessen bekanntes Theorem über die Zerlegung eines Binoms in reelle Faktoren gefunden hatte, zu einer Sammlung von nicht weniger als 94 Tafeln, von denen sich 6 auf trinomische Integrale beziehen; zu den 4 schon von COTES behandelten Integralformen fügte er nämlich noch die beiden Typen

$$a\int \frac{z^{\theta\eta-1}\,dz}{(k+lz^{\eta}+mz^{2\eta})\sqrt{Z}} \quad \text{und} \quad a\int \frac{z^{\theta\eta-1}\sqrt{Z}\,dz}{k+lz^{\eta}+mz^{2\eta}}$$

hinzu. Auch behielt er bei allen Tabellen eine gleichmäßige Bezeichnungsweise bei, welche vor jener einigen Vorzug besaß, die wir bereits bei COTES kennen lernten, doch war auch sie noch schwerfällig genug, und erst dem gewandten Formensinn EULERS gelang es auch hier eine passende und nachhaltige Reform anzubahnen.

Die Entwickelung der verschiedenen Probleme der Maxima der Anziehung.

Von Erich Hoffmann aus Glogau.[1]).

Das Problem des Körpers größter Anziehung hat in seiner Entwickelung mehrere Perioden durchgemacht, die sich voneinander leicht unterscheiden lassen. Zunächst wurde das Problem nur als ein rein mathematisches behandelt, dann folgte Playfair, dessen Behandlung zwar auch noch eine rein mathematische war, aber ihren Ursprung in physikalischen Experimenten hatte. Nach diesem Ansatze, das Problem mit der Physik in Zusammenhang zu bringen, folgten dann die Arbeiten von Schellbach, der das Problem wiederum vom rein mathematischen Standpunkte behandelte, bis erst in den letzten Jahrzehnten des vergangenen Jahrhunderts die Verbindung des Problems mit der Physik mehr und mehr in den Vordergrund trat, während die rein mathematische Behandlung damit Hand in Hand ging.

Als geistigen Inspirator beider Richtungen, der rein mathematischen und der mit der Physik verknüpften Behandlung des Problems, kann man meines Erachtens Newton betrachten. Es ist bekannt, daß Newton der erste war, der das Problem des Körpers von geringstem Widerstande (1687) in Angriff nahm. Damit hat er die rein mathematische Behandlung unseres vorliegenden Problems inauguriert. Seine Arbeit über dieses Problem wurde von Johann Bernoulli fortgesetzt in der Abhandlung: *De solido rotundo minimae resistentiae* (Acta Eruditorum 1700). Diese Arbeit im besonderen, wie auch die mannigfaltigen anderen Probleme, die sich

1) Der Verfasser der vorliegenden Arbeit, einer meiner fleißigsten und strebsamsten Schüler, hatte sich auf meine Anregung mit den verschiedenen Problemen der Maxima der Anziehung beschäftigt und dabei insbesondere die Geschichte jener Probleme eingehend studiert. Das Resultat dieser Studien hatte er in einer Abhandlung niedergelegt, aus der hier ein Auszug mitgeteilt wird.

Leider ist der hoffnungsvolle Verfasser bald nach Vollendung seiner Arbeit gestorben. Er war am 6. Januar 1881 zu Glogau geboren, studierte von Ostern 1900 bis Michaelis 1903 zu Halle a. S. und starb am 8. Dezember 1903 zu Glogau.

A. Wangerin.

auf die Lehre von den Maxima und die Variationsrechnung beziehen und von demselben behandelt wurden, mögen JOH. BERNOULLI auch auf das Problem des Körpers größter Anziehung geführt haben. Wir haben nämlich in einer italienischen Zeitschrift die Mitteilung, daß einer der BERNOULLIS — wahrscheinlich ist damit JOHANN I BERNOULLI gemeint — das Problem des Körpers größter Anziehung für sehr schwierig gehalten habe.[1]) Aus dieser Bemerkung geht hervor, daß das Problem des Körpers größter Anziehung in den ersten Jahrzehnten des 18. Jahrhunderts schon die Köpfe der Mathematiker beschäftigte, aber noch keine Lösung erfahren hatte. So mag es auch gekommen sein, daß ETIENNE MIGNOT DE MONTIGNY (1714—1782) von diesem Probleme erfuhr und von demselben sich besonders angezogen fühlte. Im Jahre 1740 wurde MONTIGNY von dem Abbé VENTADOUR aufgefordert, denselben auf einer Reise nach Rom zu der daselbst in diesem Jahre stattfindenden Papstwahl zu begleiten. Hier in Rom wurde MONTIGNY durch JACQUIER und LESEUR mit dem jungen R. J. BOSCOVICH (1711—1787) bekannt. Diesem schlug MONTIGNY das Problem des Körpers größter Anziehung zur Bearbeitung vor.[2]) Tatsächlich machte sich BOSCOVICH an die Bearbeitung des Themas, und so erschien denn von ihm eine Arbeit über den Körper größter Anziehung 1743 unter dem Titel: *Problema mechanicum de solido maximae attractionis solutum.*[3])

In bezug auf dieses Problem bringt zunächst S. XIX der Einleitung der Zeitschrift einige Bemerkungen des Herausgebers in italienischer Sprache, in denen auf frühere Arbeiten von BOSCOVICH hingewiesen wird, sowie auf die Anregung, die BOSCOVICH durch MONTIGNY zuteil geworden. Die Abhandlung selbst ist, wie aus dem Titel hervorgeht, lateinisch geschrieben; beigegeben ist ihr eine Tafel mit 11 Figuren. In der Einleitung (S. 65—66) erzählt der Verfasser, wie er, durch MONTIGNY auf das Problem hingewiesen, zuerst eine sehr einfache geometrische Lösung desselben gefunden habe. Viele Schwierigkeiten dagegen habe ihm die analytische Lösung bereitet; er sei schließlich auch zu dieser auf einem einfachen Wege gelangt, einem Wege allerdings, der sich wesentlich auf geometrische Betrachtungen stütze. Er setzt dann zunächst (S. 67 ff.) die rein geometrische Lösung auseinander, wobei er die Anziehung einer beliebigen Potenz der Entfernung proportional annimmt. Das Prinzip,

1) Memorie sopra la fisica e istoria naturale. I (Lucca 1743), S. XIX: „Questo problema è . . . stimato molto difficile dal BERNOULLI“.

2) Vgl. Memorie sopra la fisica e istoria naturale. I (Lucca 1743), S. XIX.

3) R. J. BOSCOVICH, *Problema mechanicum de solido maximae attractionis solutum;* Memorie sopra la fisica e istoria naturale. I (Lucca 1743), S. 63—88. — Vgl. RICCARDI, *Biblioteca matematica italiana* I, Sp. 174.

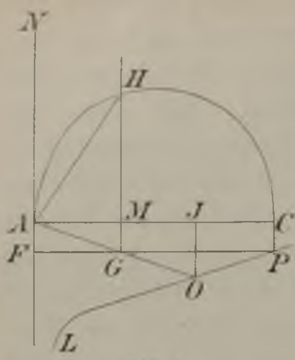


Fig. 1.

das der Lösung zugrunde liegt, ist folgendes: Ist A (Fig. 1) der angezogene Punkt, H ein beliebiger Punkt auf der Grenzfläche der Masse, C der Schnittpunkt der Grenzfläche mit der Achse (d. i. mit der Richtung der gesamten auf A ausgeübten Anziehung), und nimmt man an, daß die Anziehung mit abnehmender Entfernung wachse, so ist, damit die Anziehung auf den Punkt A ein Maximum werde, erforderlich, daß die der Achse AC parallele Anziehungskomponente eines in H gelegenen Massenelementes (Boscovich nennt diese Komponente die *relative* Anziehung des Massenelements) gleich sei der Anziehung, welche das gleich große, in C gelegene Massenelement auf A ausübt. Es folgt dies daraus, daß man, wenn die relative Anziehung von H und die absolute von C nicht gleich wären, durch Verlegung eines Teils der Masse eine noch grössere Anziehung erhalten würde. Aus dem angeführten Prinzip folgt zunächst, daß die Grenzfläche der Masse eine Rotationsfläche mit AC als Achse sein muß; zugleich ergibt sich eine Konstruktion der Meridiankurve jener Rotationsfläche. Man konstruiere zunächst die Kurve LOP, deren Ordinaten der auf A ausgeübten Anziehung proportional sind, so daß z. B. JO die Anziehung darstellt, die A von einem Teilchen in dem Abstande AJ erfährt. Auf der Abscissenachse nehme man C beliebig an und ziehe die Ordinate CP der Hilfskurve. Dann ziehe man PF parallel AC, verbinde A mit O, welche Linie PF in G trifft, ziehe $GM \perp AC$ und schlage um A mit AJ als Radius einen Kreis, der GM in H trifft, so ist H ein Punkt der gesuchten Kurve.

Beweis. Die Gesamtanziehung, die ein Teilchen in H auf A ausübt, ist $= JO$, die zu AC parallele Komponente dieser Anziehung ist also $= JO \frac{AM}{AH} = \frac{JO \,.\, AM}{AJ} = MG = CP$; d. h. die wirksame Anziehungskomponente (die relative Anziehung) von H ist gleich der Anziehung von C.

So entspricht jedem Punkt O der Hilfskurve ein Punkt H der gesuchten. Man sieht leicht, daß die Kurve durch A geht und AF, das Lot zu AC, berührt.

Auch die umgekehrte Aufgabe läßt sich, wie an einer späteren Stelle (S. 82) gezeigt wird, sofort lösen; d. h. wenn die Kurve CHA gegeben ist, läßt sich das zugehörige Anziehungsgesetz bestimmen. Denn wie vorher aus O der Punkt H, so läßt sich auch, wenn H gegeben, der Punkt O konstruieren. Man kann bei dieser umgekehrten Konstruktion die Länge CP beliebig annehmen. Die angegebenen Konstruktionen gelten für jedes Anziehungsgesetz r^m, bei dem m negativ ist. Boscovich behandelt weiter auch den Fall eines positiven m, d. h. den Fall, in dem die Anziehung mit zunehmendem Abstande wächst. Hier geht die Hilfskurve LOP durch A; sie berührt für $0 < m < 1$ in A die Linie AF, für $m > 1$ aber AC. In beiden Fällen ist bei Ausführung der ersten Konstruktion J nicht zwischen A und C, sondern jenseits C zu nehmen damit AO und PF sich schneiden. Die gesuchte Kurve geht hier nicht durch A, sondern ins Unendliche und liegt für $0 < m < 1$ jenseits des Punktes C (so daß keine zwischen A und C gezogene Ordinate sie trifft), während sie für $m > 1$ die Linie AN zur Asymptote hat. Übrigens handelt es sich in dem letztgenannten Falle ($m > 1$) nicht um ein *Maximum*, sondern um ein *Minimum* der Anziehung. Die in den verschiedenen Fällen sich ergebenden Kurven werden diskutiert, ferner die Grenzfälle $m = 0$ und $m = 1$ und der allmähliche Übergang der Kurven in die den Grenzfällen entsprechenden erörtert.

Weiter wird (S. 77 ff.) die Aufgabe behandelt: Für einen gegebenen Punkt A denjenigen Körper größter Anziehung zu bestimmen, der ein gegebenes Volumen hat (einer gegebenen Kugel gleich ist) und dabei durch eine Ebene begrenzt wird, die von A einen gegebenen Abstand AN hat. Boscovich gibt auch für diese Aufgabe eine geometrische Lösung, bei der die erforderlichen Quadraturen als ausgeführt angenommen werden. Er variiert die Lage des Punktes C (Fig. 2), während A und N eine feste Lage behalten. Für jede Lage C' von C denkt er mittels der ersten Konstruktion die Meridiankurve $C'K'$ des Körpers größter Anziehung bestimmt, dann jedesmal das Volumen des durch die Rotation von $C'K'N$ entstandenen Körpers berechnet und den Radius einer dem berechneten Volumen gleichen Kugel als Ordinate $C'R'$ einer Hilfskurve NR' in C' senkrecht zur Achse AC' aufgetragen. Hat man die Hilfskurve NR', so hat man nur den Radius der gegebenen Kugel in N senkrecht zu AN hinzutragen $= NS$ und durch S eine Parallele zu AC zu ziehen, welche die Hilfskurve in R treffe; $RC \ddagger SN$ gibt denjenigen Punkt C, durch den zusammen mit A nach dem früheren die gesuchte Meridiankurve CK bestimmt ist. — Die beistehende Figur bezieht sich wieder auf den Fall, daß die Anziehung einer negativen Potenz der Entfernung proportional ist. Boscovich zeichnet die Figuren auch für die Fälle, wo die Anziehung mit dem Abstande wächst.

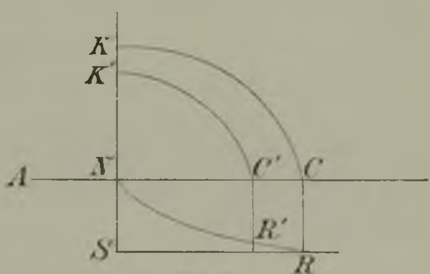


Fig. 2.

Die eben besprochene Aufgabe läßt sich leicht dahin erweitern, daß der gesuchte Körper größter Anziehung nicht durch eine Ebene begrenzt wird, sondern durch eine gegebene Rotationsfläche, die durch N geht und AN zur Achse hat. Selbstverständlich kann die gegebene Rotationsfläche nicht völlig willkürlich sein, wenn die Aufgabe eine Lösung zulassen soll. Speziell wird noch diese Aufgabe für den Fall konstanter (von der Entfernung unabhängiger) Anziehung besprochen. Ferner wird darauf hingewiesen, daß durch dieselbe Methode sich auch die Aufgabe lösen lasse, außerhalb oder innerhalb einer gegebenen Rotationsfläche, deren Achse durch A geht, eine gegebene Masse so zu verteilen, daß ihre Anziehung auf A ein Maximum (oder Minimum) ist.

Nachdem noch erörtert ist, daß es im allgemeinen nicht möglich sein wird, der Aufgabe der Bestimmung des Körpers größter Anziehung andere beliebige Bedingungen aufzuerlegen, wird (S. 82) für die zweite (s. Fig. 2) der konstruktiv gelösten Hauptaufgaben eine analytische Lösung gegeben. Ist die Anziehung der m^{ten} Potenz der Entfernung umgekehrt proportional, so folgt aus der ersten Konstruktion, wenn in Fig. 1 $AM = x$, $MH = y$, $AC = p$ gesetzt wird, unmittelbar

$$(x^2 + y^2)^{\frac{m+1}{2}} = p^m x,$$

also

$$y^2 = p^{\frac{2m}{m+1}} \cdot x^{\frac{2}{m+1}} - x^2.$$

Das Volumen CKN ist, wenn in Fig. 2 die gegebene Strecke AN mit a bezeichnet wird, gleich dem zwischen den Grenzen a und p genommenen Integral

$$\pi \int y^2 \, d\, x,$$

und da dies Volumen gegeben ist, so hat man eine Gleichung zur Bestimmung von $p = AC$.

Endlich wird auch die erste Aufgabe, die Ermittelung der Meridiankurve des Körpers größter Anziehung, analytisch behandelt. Boscovich geht davon aus, daß es zu beiden Seiten des Maximums, resp. Minimums zwei unendlich nahe Lagen geben muß, für welche die Anziehung auf A eine gleiche ist. Für einen unendlich kleinen Teil der Meridiankurve seien diese Lagen (Fig. 3) $HORS$ und $HorS$, wo o auf der Ordinate von O, r auf der von R liegt, während h der Schnitt-

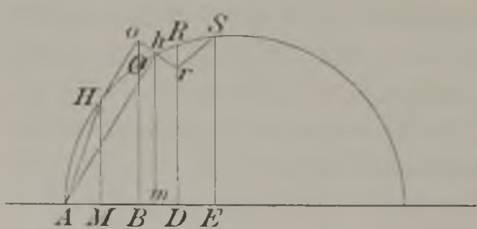


Fig. 3.

punkt von OR und und or ist. Die durch die Rotation der Flächenstücke $HOho$ und $hrSR$ erzeugten Volumina müssen dann, da die Masse gegeben ist, gleich sein, und die innerhalb dieser Volumina befindlichen Massen (jede derselben sei $= p$) müssen gleiche Anziehung auf A ausüben. Ist die Anziehung der m^{ten} Potenz der Entfernung *direkt* proportional, und ist $AH = z$, so ist die Anziehung des Massenelements μ bei $H = \mu z^m$, ihre der Achse parallele Komponente $\mu z^m \frac{x}{z}$, und für die ganze Masse p in dem durch Rotation von $HOho$ erhaltenen Raum ist diese Komponente $p z^{m-1} x = pu$. Die Anziehung der Masse, die in dem durch Rotation von $hrSR$ entstandenen Raum enthalten ist, ist $p(u + du)$; und da diese Anziehung der vorigen gleich ist, so ist $du = 0$, $u =$ Konst.; d. h. $xz^{m-1} =$ Konst. Die Konstante bestimmt sich dadurch, daß im Schnittpunkt der gesuchten Kurve mit der Achse $x = z = a$ ist, also $x \cdot z^{m-1} = a^m$. Ist die Anziehung der m^{ten} Potenz der Entfernung *umgekehrt* proportional, so tritt $-m$ an die Stelle von m: die Kurvengleichung wird $x \cdot a^m = z^{m+1}$, was mit dem früheren Resultat übereinstimmt.

Auch die erste Konstruktion ergibt sich jetzt sofort. Ist g die Anziehung der Masse 1 im Abstande z, b die im Abstande a, so ist die der Achse parallele Anziehungskomponente $\frac{pxg}{z} = pb$ oder $\frac{xg}{z} = b$: und auf dieser Gleichung beruht die erste Konstruktion.

Boscovich nimmt übrigens an, daß nicht nur die durch die Rotation der Flächenstücke $HOho$ und $hrSR$ erzeugten Volumina gleich sind, sondern daß die Schwerpunkte der in Rede stehenden beiden Flächen auch gleichen Abstand von der Achse haben. Dann sind auch die Flächen selbst gleich, und falls $MB = BD = DE$, ist auch $Oo = Rr$ und daher $Mm = mE$, wenn m der Fußpunkt der Ordinate von h ist. Mithin liegen die Punkte von H, O, h, o ebenso zu H, wie die von h, r, S, R zu h. Die erwähnte Annahme über den Schwerpunkt wird nicht begründet.

Zum Schluß macht Boscovich die Bemerkung, daß die geometrische Lösung von der analytischen deshalb den Vorzug verdiene, weil man bei letzterer von vorn herein die Masse als durch eine Rotationsfläche begrenzt annehmen müsse, während bei ersterer diese Annahme nicht von vorn herein gemacht zu werden brauche.

Die nächste Bearbeitung des Problems rührt von Saint-Jacques de Silvabella[1]) (1722—1801) her, der im Jahre 1744 von Jacquier ange-

1) Saint-Jacques, *Problème. Supposant la loi d'attraction en raison inverse du quarré de la distance, trouver la nature du solide de la plus grande attraction.* Mémoires de mathématiques et de physique présentés à l'académie des sciences par divers savans (Paris 1750), S. 175—176.

regt wurde, sich mit demselben zu beschäftigen. Die Lösung des Saint-Jacques wurde am 7. Juli 1745 der Akademie der Wissenschaften in Paris eingereicht und gelangte im Jahre 1750 zum Abdruck.

Saint-Jacques stellt sich dabei, wie aus dem Titel hervorgeht, die Aufgabe, den Körper größter Anziehung für den Fall zu bestimmen, daß die Anziehung dem Quadrat des Abstands umgekehrt proportional ist. Zunächst ist es evident, daß der Körper, der unter allen Körpern mit gleicher Masse auf A die größte Anziehung ausübt, ein Rotationskörper sein muß, da kein Grund vorhanden ist, weshalb die Masse auf einer Seite anders verteilt sein sollte als auf der anderen. Um die Meridiankurve der Grenzfläche des gesuchten Körpers zu finden, denke man (Fig. 4) in den Punkten P, Q, R, p mit den Abscissen x, x', x'', x''' die Ordinaten $PM = y$, $QN = y'$, $RO = y''$, $pm = y'''$ gezogen und bezeichne die Abstände AM, AN, AO mit z, z', z''. Dann muß, falls

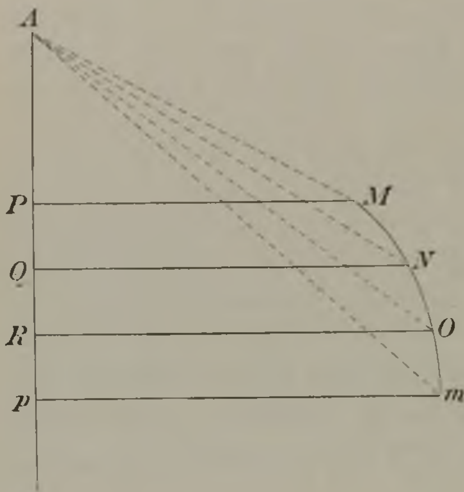


Fig. 4.

$$x' - x = x'' - x' = x''' - x'' = dx$$

ist:

$$yydx + y'y'dx + y''y''dx$$

eine gegebene Grösse haben, und da hier nur y' und y'' variabel sind, muß

$$y'dy' = y''dy''$$

sein. Aus den bekannten Formeln über die Anziehung eines Kreises auf einen senkrecht über dem Mittelpunkt liegenden Punkt ergibt sich ferner für die Anziehung des Rotationskörpers $MNmpP$ auf A der Wert

$$\left(1 - \frac{x}{z}\right) dx + \left(1 - \frac{x'}{z'}\right) dx + \left(1 - \frac{x''}{z''}\right) dx.$$

Soll dieser Ausdruck ein Maximum sein, so muß, da nur z' und z'', variabel sind,

$$\frac{x\,dz'}{z'(z'-dz')} = \frac{x'\,dz''}{z''(z''+dz'')}$$

sein und weiter, da $y'dy' = z'dz'$, $y''dy'' = z''dz''$, auch

$$\frac{x'y'dy'}{z\,z'(z'-dz')} = \frac{x''y''dy''}{z''z''(z''+dz'')}.$$

Mit Berücksichtigung der Bedingung $y'dy' = y''dy''$ folgt

$$\frac{x'}{z'z'(z'-dz')} = \frac{x''}{z''z''(z''+dz'')}$$

Jeder dieser Ausdrücke muß also einer Konstanten gleich sein $= \frac{1}{gg'}$, d. h. man findet

$$z^3 = g^2 x.$$

Einfacher noch erhält man die Lösung so. Die Anziehung, die ein beliebiger auf der Oberfläche liegender Massenpunkt in der Richtung der Achse auf A ausübt, ist $\frac{x}{z^3}$; und diese Anziehungskomponente muß eine Konstante sein. Denn wenn die wirksame Anziehungskomponente an irgend einem Punkte der Oberfläche kleiner wäre als an einem anderen, so könnte man jenen Punkt in eine derartige Lage außerhalb des Körpers bringen, daß er A stärker anzöge. Der betrachtete Körper wäre dann aber nicht ein Körper größter Anziehung. Die vorerwähnte Komponente muß also einer Konstanten $\frac{1}{g^2}$ gleich sein, d. h. $z^3 = g^2 x$. —

Man erkennt, daß die Argumentation von SAINT-JACQUES wesentlich mit der von BOSCOVICH identisch ist; nur ist die analytische Ableitung bei SAINT-JACQUES strenger, seine ganze Fassung kürzer.

SAINT-JACQUES DE SILVABELLA hat noch eine zweite Lösung des Problems gegeben, die ZACH in einer Anmerkung seiner Biographie von SAINT-JACQUES in der Monatlichen Korrespondenz 1808, S. 62, mitgeteilt hat. Der wichtigste, hierher gehörige Teil dieser Anmerkung lautet folgendermaßen:

„Nachdem SAINT-JACQUES in seinem gedruckten Mémoire gezeigt hat, daß die Gleichung für die gesuchte Kurve

$$z^3 = ggx$$

ist, und daß die Ausdrücke

$$\frac{x'}{z'z'(z'-dz')} = \frac{x''}{z''z''(z''+dz'')}$$

einer beständigen Größe $\frac{1}{gg}$ gleich sind, fährt er so fort: Die Kurve, die durch ihre Revolution den Körper der größten Attraktion erzeugt, muß die Eigenschaft haben, daß deren größte Achse $AG = g$ ist. Denn da die Gleichung $z^3 = ggx$ für $x = z$ auch $z = g$ gibt, so ist auch $ggdx = 3z^2dz$, oder $\frac{dx}{dz} = \frac{3zz}{gg}$, und man hat für den Punkt G, wo $z = g$, $\frac{dx}{dz} = 3$. Wenn die Tangente der Kurve der Achse parallel ist, so hat man für diesen Punkt $zz = xx + yy$, und da y hier konstant bleibt,

$z\,dz = x\,dx$, folglich wie oben $\frac{dx}{dz} = \frac{z}{x} = \frac{3zz}{gg}$; allein vermöge der Gleichung der krummen Linie ist

$$x = \frac{z^3}{g^2}, \text{ folglich } \frac{zgg}{z^3} = \frac{3z^2}{gg}$$

und hiernach

$$3z^4 = g^4 \text{ und } z = \frac{g}{\sqrt[4]{3}}\text{“}$$

Wir haben bisher die Geschichte des Problems in der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts gegeben und kommen nun zu denjenigen Abhandlungen, in denen das Problem mit der physikalischen Forschung in Zusammenhang gebracht ist; wir können dabei behaupten, daß auch in dieser Beziehung das Problem gewissermaßen bis auf NEWTON als geistigen Inspirator zurückgeht. Das Problem hat einen engen Zusammenhang mit der physikalischen Aufgabe, die mittlere Dichtigkeit der Erde zu bestimmen. Wie ein roter Faden zieht sich jetzt dieses physikalische Problem durch die weiteren Arbeiten über den Körper größter Anziehung hindurch.

Schon NEWTON hatte auf die Anziehung, die von Gebirgen ausgeübt wird, hingewiesen, zugleich aber auch auf die Kleinheit derselben aufmerksam gemacht. So schreibt er in seiner Abhandlung *De mundi systemate* (1728): „Sed nec montes toti suffecerint ad sensibiles effectus: ad radices montis hemisphaerici alti tria milliaria et lati sex, Pendulum vi montis attractum, non deviabit scrupulis duobus primis a perpendiculo“. Im Jahre 1738 unternahmen dann zum ersten Male, teils durch die NEWTONsche Notiz veranlaßt, teils durch andere Gründe dazu geführt, BOUGUER und LA CONDAMINE eine Messung der Erddichte am Chimborasso. Jedoch waren die hierbei erzielten Resultate nicht von beträchtlicher Genauigkeit. BOSCOVICH gab dann, wie F. X. VON ZACH in seiner Schrift *Les attractions des montagnes* (Avignon 1814) angibt, einige Verbesserungen zu der von diesen beiden Gelehrten gebrauchten Methode. Die Untersuchungen von BOUGUER und LA CONDAMINE wurden auf Vorschlag der königlichen Akademie der Wissenschaften zu London in den Jahren 1772 und 1774 an dem Berge Shehallien in Schottland mit den genauesten Instrumenten, die man damals kannte, von MASKELYNE wiederholt. Wir finden dieselben niedergelegt in Philosophical transactions **65**: 2, 1775, S. 500—542. MASKELYNE bediente sich gleichfalls, wie seine Vorgänger, der Beobachtung der Ablenkung eines Lotes durch die Felsmassen des obengenannten Berges. Als Resultat ergab sich für die mittlere Dichtigkeit der Erde ungefähr 5. Als nächster behandelte CAVENDISH auf eine andere Art und Weise das physikalische Problem der Dichtigkeitsbestimmung. Er zeigte, daß eine große

Bleimasse eine metallene Kugel anziehe, und gewann auf Grund experimenteller Versuche für die Dichtigkeit der Erde 5,7. Diese Versuche, an denen PLAYFAIR teilweise auch beteiligt war, gaben den Anlaß zu der sofort zu besprechenden Arbeit PLAYFAIRS über den Körper größter Anziehung. PLAYFAIR (1748—1819) veröffentlichte seine Abhandlung: *On the solids of the greatest attraction, or those which among all the solids that have certain properties, attract with the greatest force in a given direction.* [read 5th January 1807] in den Transactions of the royal society of Edinburgh **6**:2 (1809), S. 187—243.[1])

Wir geben im folgenden den Inhalt der Abhandlung von J. PLAYFAIR. Zu den Untersuchungen über den Körper größter Anziehung wurde er, wie er selbst einleitend angibt, durch die von MASKELYNE unternommenen Untersuchungen über die Anziehung von Bergen und durch die späteren Untersuchungen von CAVENDISH über die Anziehung von bleiernen Kugeln angeregt.

PLAYFAIR behandelt das Problem teils in der Voraussicht, daß seine Berechnung den zukünftigen physikalischen Untersuchungen über die Dichtigkeit der Erde als Stütze dienen könnte, teils aus dem Grunde, weil das Problem auch für den Mathematiker ein besonderes Interesse zeige. Es scheine dasselbe zunächst nur durch Variationsrechnung lösbar, wogegen sich zeige, daß auch eine kurze Lösung der Frage nach dem Körper größter Anziehung durch einfache Überlegung möglich sei. Diese einleitenden Betrachtungen PLAYFAIRS über das Problem zeigen, daß er die Bearbeitungen der früheren Zeit nicht kannte.

Die beiden Hauptbedingungen des Problems sind nach PLAYFAIR die, daß der zu suchende Körper das Maximum der Anziehung ausübe und andererseits aus einer gegebenen Masse gleicher Dichtigkeit bestehe. Dieses allgemeine Problem lasse sich durch die mannigfaltigsten Bedingungen, die man dazu nehme, noch modifizieren, indem man z. B. für den Körper eine bestimmte Gestalt vorschreibe.

In den ersten acht Abschnitten behandelt PLAYFAIR zunächst den Körper größter Anziehung. Er stellt in ähnlicher Weise wie BOSCOVICH und SAINT-JACQUES die Gleichung der Meridiankurve des gesuchten Körpers fest. Dieselbe lautet in rechtwinkligen Koordinaten

$$y = x^{\frac{1}{3}}\sqrt{a^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{4}{3}}}$$

und in Polarkoordinaten

$$z = a\sqrt{\cos\varphi}.$$

1) Eine Besprechung dieser Arbeit hat E. LAMPE in den Verhandlungen der Berliner Physikalischen Gesellschaft **3**, 1884, S. 56—61 gegeben.

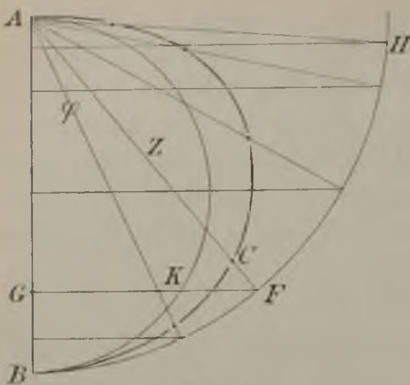


Fig. 5.

Im Anschluß an die Gleichung in Polarkoordinaten gibt er eine geometrische Konstruktion der Meridiankurve des Körpers größter Anziehung. Man nehme eine Strecke a, schlage (Fig. 5) um A mit derselben als Radius einen Kreisquadranten BFH, verbinde F mit A, fälle von F auf AB das Lot FG, das den Halbkreis über AB in K schneiden möge; trägt man dann AK auf AF von A aus bis C ab, so ist dieser Punkt ein Punkt der gesuchten Meridiankurve. Auf gleiche Weise lassen sich die übrigen Punkte der Meridiankurve konstruieren. Weiterhin berechnet Playfair den Inhalt des von der Meridiankurve begrenzten Sektors ACB. Er findet durch einfache Betrachtungen

$$\frac{1}{2}\, a^2 \sin\varphi.$$

Für den ganzen Flächeninhalt ergibt sich daher $\frac{1}{2}\, a^2$, für den Flächeninhalt zu beiden Seiten der Rotationsachse a^2; d. h. die Fläche des ganzen Querschnittes ist gleich dem Quadrat über dem Durchmesser AB.

Ferner berechnete er den Maximalwert von y. Dieses wird ein Maximum sein, wenn $x = \frac{a}{\sqrt[4]{27}}$ ist, und zwar wird

$$y_{\max} = b = a\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{27}},$$

so daß

$$a : b = \sqrt[4]{27} : \sqrt{2} \text{ oder in Annäherung } a : b = 11 : 7.$$

Als weitere Eigenschaften des Körpers größter Anziehung findet Playfair, daß der Krümmungsradius der Meridiankurve — „curve of equal attraction“ — im Hauptpol A unendlichgroß ist, daß sich also die Meridiankurve hier mehr einer Ebene nähert, als es nur irgend ein Kreis mit noch so großem Radius kann. Ferner zeigt er, daß der Krümmungsradius im zweiten Pole $B = \frac{2}{3}\, a$ und das Volumen $V = \frac{4\pi}{15}\, a^3$ ist. Bemerkenswert ist noch der Satz, daß, wenn A die Anziehung des Körpers größter Anziehung und A_1 die Anziehung einer Kugel mit gleicher Masse ist,

$$\frac{A}{A_1} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{25}}, \text{ oder in Annäherung } = \frac{81}{79}$$

wird Er wendet sich dann zu der Aufgabe, das Maximum der Anziehung zu finden, wenn der angezogene Punkt sich in gegebener Entfernung von dem anziehenden Körper befindet. Der gesuchte Körper wird ein Segment des Körpers größter Anziehung. Hierauf wird noch das Volumen eines solchen Körpersegmentes berechnet.

Weiter stellt Playfair neben einigen an das Vorige sich anschließenden Rechnungen die Gleichung für die Oberfläche des Körpers größter Anziehung auf [dieselbe lautet $(x^2 + z^2 + v^2)^3 = a^4 x^2$] und geht dann zu der Frage über, den Körper größter Anziehung zu finden, wenn das Anziehungsgesetz ein beliebiges ist.

Nehmen wir an, daß die anziehende Kraft umgekehrt der m^{ten} Potenz der Entfernung wirkt, so findet er auf demselben Wege wie früher, daß die Gleichung für die Kurve, durch deren Rotation der Körper größter Anziehung erzeugt wird, lautet:

$$y^2 = a^{\frac{2m}{m+1}} x^{\frac{2}{m+1}} - x^2.$$

Nehmen wir $m = 1$, also die wirkende Kraft umgekehrt proportional der Entfernung an, so ergibt sich als Körper größter Anziehung die Kugel.

In den nächsten Abschnitten behandelt Playfair zum ersten Male das Problem der Maximalanziehung für Körper von gegebenem Formtypus und gegebenem Volumen. Zunächst wird die Maximalanziehung eines Kegels auf den in der Spitze befindlichen Massenpunkt berechnet. Wenn z die Seite des Kegels, x seine Höhe ist, muß für ein Maximum der Anziehung sein:

$$\frac{x}{z} = u = -\frac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{11}{12}},$$

d. h. der Winkel zwischen Höhe und Seite an der Spitze ungefähr $62^0\ 46'$. Berechnet man die Tangente dieses Winkels, so zeigt sich, daß beim Kegel größter Anziehung das Verhältnis zwischen Grundkreisradius und Höhe nahezu wie $2:1$ ist. Sodann vergleicht Playfair die Maximalanziehung A eines Kegels auf die Spitze mit der Anziehung A_1 einer gleich großen Kugel auf einen Oberflächenpunkt. Er findet:

$$A^3 : A_1{}^3 = \frac{24\, u^2\, (1-u)^2}{1+u} : \frac{16}{9}$$

oder angenähert $A : A_1 = 4 : 5$.

Auf eben dieselbe Weise wird ein Zylinder behandelt, bei dem der angezogene Punkt sich in dem Zentrum einer der Grundflächen befindet. Die Anziehung ist

$$A = (x + y - \sqrt{x^2 + y^2})\, 2\pi,$$

wo x die Höhe, y der Grundkreisradius ist. Ein Maximum der Anziehung ergibt sich, allerdings nach etwas längeren Rechnungen als beim vorigen Beispiele, wenn

$$\frac{y}{x} = \frac{9 - \sqrt{17}}{8},$$

ein Minimum, wenn

$$\frac{y}{x} = \frac{9 + \sqrt{17}}{8}$$

ist. Auch in dem Falle des Maximums vergleicht hier Playfair wieder die Maximalanziehung A mit der Anziehung A_1 einer gleich großen Kugel auf einen Oberflächenpunkt und findet für das Verhältnis $A : A_1 = 1218 : 1211$ An diese Untersuchungen schließt er noch einige Betrachtungen über das Theorem von Le Sage: Nimmt man eine Kugel mit dem Radius r und beschreibt um dieselbe einen Zylinder; legt den angezogenen Punkt in das Zentrum einer der Grundflächen des Zylinders, so ziehen die Kugel und derjenige Zylinder, dessen Höhe $\frac{4}{3} r$ ist, den Punkt gleich stark an.

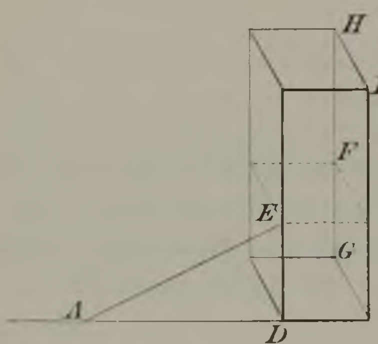


Fig. 6.

Der 14. und die folgenden Abschnitte bringen Berechnungen, welche sich auf die von Playfair gemachten Experimente bei der Erddichtebestimmung am Shehallien beziehen. Er berechnet zunächst die Anziehung eines Parallelepipedons mit unendlichkleiner Grundfläche und gegebener Höhe auf einen in der Verlängerung einer Kante liegenden Punkt (Fig. 6). Er findet für die jener Kante parallele Komponente

$$A = \frac{m^2}{r} \sin \varphi,$$

wo m^2 der Flächeninhalt der Fläche GD, EF die Mittelfläche und $\varphi = \sphericalangle DAE$ ist.

Mit Hilfe dieser Formel berechnet er dann die Anziehung eines Halbzylinders auf einen in dem einen Ende seiner Achse befindlichen Massenpunkt. Es ergibt sich für die Anziehungskomponente senkrecht zur Achse:

$$A = 2a \log\left(\frac{r + \sqrt{a^2 + r^2}}{a}\right),$$

wo r den Radius des Basishalbkreises und a die Höhe bedeutet. Dieser Ausdruck wird bei gegebenem Volumen ein Maximum, wenn angenähert

$$\frac{r}{a} = \frac{216}{125}.$$

Die Berechnung der Anziehung dieses Körpers ist besonders deswegen bemerkenswert, weil Playfair sich des hier bestimmten Resultates bei der Korrektion der von Maskelyne berechneten Erddichte bediente (Philosophical transactions 1811, S. 347—377). Die Berechnung des Maximums der Anziehung eines halben Zylinders ist von LAMPE in seiner Besprechung der PLAYFAIRschen Arbeit nicht erwähnt. Andererseits hat auch SELLA in der Tabelle der Körper mit Maximalanziehung, die er in einer später zu besprechenden Arbeit gegeben hat, dieses von PLAYFAIR bestimmten Maximums keiner Erwähnung getan.

Jetzt wendet sich PLAYFAIR zur Berechnung der Maximalanziehung eines abgeplatteten Rotationsellipsoids von gegebener Masse auf den Pol. Die Formel für die Anziehung übernimmt er aus MACLAURINS *Treatise of fluxions* § 650 (Fig. 7):

$$F = \frac{4\pi a b^2}{a^3 \operatorname{tg}^3\varphi}(\operatorname{tg}\varphi - \varphi)\, a = \frac{4\pi b^2}{a}\,\frac{\operatorname{tg}\varphi - \varphi}{\operatorname{tg}^3\varphi}.$$

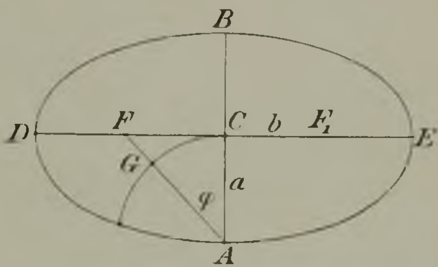


Fig. 7.

Bezeichnet nun m^3 die Masse des Ellipsoids, so findet er nach einiger Rechnung

$$\frac{b^2}{a} = \frac{n}{\cos^{\frac{4}{3}}\varphi}, \text{ wo } n^3 = \frac{3m^3}{4\pi}.$$

Setzen wir diesen Wert in F ein, so erhalten wir mit PLAYFAIR $F = 2\pi n(\operatorname{tg}\varphi - \varphi)\cos^{\frac{5}{3}}\varphi \sin^{-3}\varphi$. Setzt man $\operatorname{tg}\varphi = t$, so wird die Bedingungsgleichung für das Maximum:

$$\varphi = \frac{t(9 + 2t^2)}{9 + 5t^2}$$

Aus dieser Gleichung schließt PLAYFAIR mit Hilfe von Reihenentwickelung, daß dieselbe nur erfüllt werden kann, wenn $\varphi = 0$ ist. Dann wird aber aus dem abgeplatteten Rotationsellipsoid eine Kugel, und er kommt so zu dem falschem Resultat, daß es kein abgeplattetes Rotationsellipsoid mit einer Maximalanziehung auf den Pol gäbe. Er schließt diese Untersuchung, auf die wir später noch zurückkommen werden, mit folgenden Bemerkungen: Wenn die Abplattung des Ellipsoids verschwindet, während seine Masse dieselbe bleibt, so wird seine Anziehung so lange wachsen, bis die Abplattung Null geworden ist und das Sphäroid eine Kugel wird, wobei dann an den Polen nach seiner Ansicht ein Maximum der Anziehung auftritt. Wenn dann die Polachse wächst, wird aus der Kugel ein verlängertes Rotationsellipsoid, und die Anziehung auf die Pole wird wieder geringer. Zu diesem Schlusse glaubte sich PLAYFAIR durch das Gesetz der Kontinuität berechtigt.

Weiter beschäftigt sich PLAYFAIR mit der Aufgabe, die Anziehung eines Parallelepipedons in der Richtung senkrecht zu einer seiner Seiten zu bestimmen.

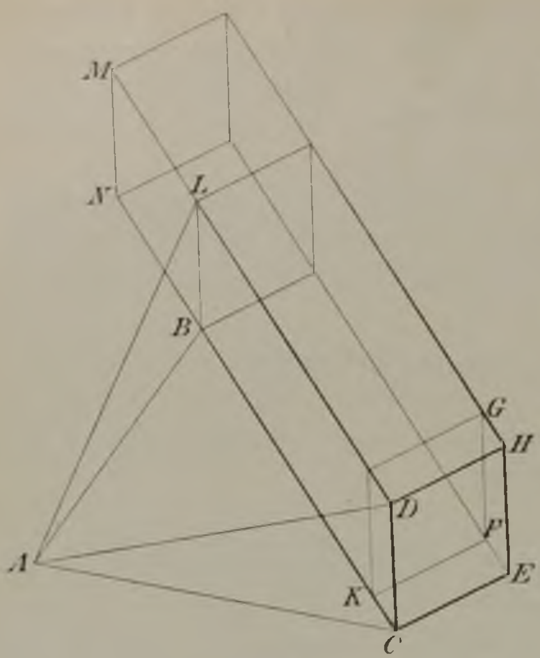


Fig. 8.

A sei (Fig. 8) der angezogene Punkt, $\sphericalangle CAB = z$, $\sphericalangle CAD = e$ und die Fläche $CEFK = m^2$; dann ist nach den vorhergehenden Berechnungen die Anziehung, die A durch die kleine Säule CG in der Richtung AB erleidet.

$$\frac{m^2}{AC} \sin e \cos z.$$

Dies ist das Element f' der Anziehung des Körpers. Bezeichnen wir die ganze Anziehung mit f, so ist also

$$f' = \frac{m^2}{AC} \sin e \cos z = \frac{m^2}{a} \sin e \cos^2 z$$

Nun ist

$$BC = a \operatorname{tg} z,\ KC = a \frac{z'}{\cos^2 z},$$

ferner sei $CE = n$, dann ist

$$m^2 = n \,.\, a \,.\, \frac{z'}{\cos^2 z}.$$

Also wird

$$f' = nz' \sin e.$$

Berücksichtigt man noch, daß für $\sin e$ nach einiger Rechnung sich ergibt:

$$\sin e = \frac{\frac{b}{a} \cos z}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 z}} \quad (BL = b,\ BA = a),$$

so wird schließlich $f' = \dfrac{bnz' \cos z}{a\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 z}}.$

Setzen wir $u = \sin z$ und $a^2 + b^2 = AL^2 = c^2$, dann ist

$$f' = \frac{bnu'}{c\sqrt{1 - \frac{b^2}{c^2} u^2}}.$$

Ist jetzt φ ein solcher Bogen, daß $\frac{bu}{c} = \sin \varphi$, so ergibt

$$f' = n\varphi', \text{ also } f = n\varphi + B,$$

wo B eine Konstante ist. Die Konstante B wird $= 0$, und es ist daher $f = n\varphi = n$, multipliziert mit einem Bogen, dessen Sinus sich verhält zu dem Sinus von z wie $b:c$. Die Anziehung f ist also derartig, daß

$$\sin\frac{f}{n} = \frac{BL}{AL}\cdot\frac{BC}{AC}, \text{ oder } f = n \text{ arc } \sin\left(\frac{BL}{AL}\cdot\frac{BC}{AC}\right).$$

Mit Hilfe des soeben erlangten Resultats leitet Playfair die Anziehung einer Pyramide mit rechtwinkliger Basis auf einen im Scheitel befindlichen Massenpunkt ab; speziell sucht er die Maximalanziehung, die eine gleichschenklige Pyramide mit quadratischer Grundfläche auf den Scheitel ausübt. Bezeichnen wir mit ihm den halben Winkel an der Spitze der Pyramide mit η, die Höhe mit p, so ist

$$\sin\varphi = \sin^2\eta,\ f = 4\,p\,\varphi.$$

Ist der Inhalt des Körpers m^3, so ist,

$$m^3 = \frac{4}{3}\,p^3\,\mathrm{tg}^2\,\eta,$$

oder da $\mathrm{tg}^2\,\eta = \frac{\sin\varphi}{1-\sin\varphi}$ ist,

$$m^3 = \frac{4}{3}\,p^3\,\frac{\sin\varphi}{1-\sin\varphi}, \text{ oder } p = m\sqrt[3]{\frac{3\,(1-\sin\varphi)}{4\sin\varphi}}.$$

Also wird die Anziehung

$$f = 4\,p\,\varphi = 4\,m\,\varphi\sqrt[3]{\frac{3\,(1-\sin\varphi)}{4\sin\varphi}};$$

f ist nun ein Maximum, wenn $\varphi^3\,\frac{1-\sin\varphi}{\sin\varphi}$ ein Maximum ist. Mit Hilfe der Differentialrechnung findet Playfair als Bedingung für das Maximum die Gleichung

$$\varphi = 3\,\mathrm{tg}\,\varphi\,(1-\sin\varphi).$$

Aus dieser Gleichung bestimmt er mittels Näherungsverfahrens

$$\varphi = \text{arc } 48^0\,40\tfrac{2}{3}',\ \eta = 76^0\,30',\ 2\eta = 153^0.$$

Diejenige rechtwinklig-gleichschenklige Pyramide mit quadratischer Grundfläche, deren ganzer Winkel an der Spitze angenähert 153^0 beträgt, besitzt also das Maximum der Anziehung auf einen in der Spitze befindlichen Massenpunkt. Eine zahlenmäßige Berechnung der Anziehung fehlt auch hier.

Zum Schluß wendet sich Playfair wieder der Anziehung des Parallelepipedons zu. Früher hatte er die Anziehung eines unendlich dünnen Parallelepipedons berechnet. Hier zieht er jetzt zunächst einige allgemeine Schlüsse aus dem früheren Resultat. Wir übergehen dieselben, da sie nicht auf das Problem der Maximalanziehung Bezug haben.

Wir sehen also, daß Playfair zwar nicht der Entdecker des Körpers größter Anziehung war, daß er jedoch denselben ohne Kenntnis der Vorarbeiten ziemlich eingehend behandelt und selbst eine neue Seite des Problems — die Maximalanziehung bei gegebenem Formentypus — zum ersten Male bearbeitet hat. In dieser Beziehung unterscheidet sich seine Arbeit in nicht zu unterschätzender Weise von den nachfolgenden Arbeiten SCHELLBACHS.

Unter den weiteren Daten, die sich auf den Körper größter Anziehung beziehen, ist zunächst als bemerkenswert zu erwähnen, daß GAUSS in seiner Abhandlung über Kapillarität vom Jahre 1829 (*Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii; Gesammelte Werke*, V, S. 31) den schon von PLAYFAIR angegebenen Satz über das Verhältnis der Anziehung des „Solid of greatest attraction" zu der Anziehung einer gleich großen Kugel aufstellt, ohne sich auf PLAYFAIR als Quelle zu berufen. Der Wortlaut bei GAUSS lautet: „Constat, maximam attractionem, quam massa homogenea data in punctum datum secundum illam legem exercere potest, esse ad attractionem, quam eadem massa in figuram sphaericam redacta exercet in punctum in superficie positum, ut 3 ad $\sqrt[3]{25}$".

Als Nächster beschäftigte sich mit dem Probleme des Körpers größter Anziehung, allerdings wenig fruchtbringend, SCHELLBACH in folgenden Schriften:

Mechanische und mathematische Probleme; Programm des Friedrich-Wilhelms-Gymnasiums (Berlin 1845).

Problem der Variationsrechnung; Journ. für Mathem., **41**, 1851, S. 293 ff.

Neue Elemente der Mechanik (Berlin 1860), S. 181 ff.; und *Aufgaben aus der Lehre vom Größten und Kleinsten* (Berlin 1860), S. 109 ff.

In der erstgenannten Arbeit behandelt SCHELLBACH das Problem, ohne weiter Neues zu den bisherigen Resultaten hinzuzufügen. Veranlaßt scheint diese Arbeit SCHELLBACHS, wie auch die anderen, durch die erwähnte Note bei GAUSS. In der zweiten Arbeit erfährt das Problem teilweise eine Behandlung in den §§ 23—28. Im § 27 finden wir das Volumen und die Anziehung des Körpers größter Anziehung bestimmt, wenn die Kraft der n^{ten} Potenz der Entfernung umgekehrt proportional ist.

In den letzten drei Jahrzehnten war das Problem der Maximalanziehungen wieder mehr mit dem physikalischen Probleme der Bestimmung der mittleren Erddichte verknüpft. Weiter erfolgreich gearbeitet haben auf diesem Gebiete in dem angegebenen Zeitraum F. KELLER, E. LAMPE, N. PIERPAOLI, A. SELLA und A. RAGNOLI.

Ersterer berechnete in seinem Werke: *Ricerche sull' attrazione delle montagne con applicazioni numeriche.* I (Roma 1872) die Maximalanziehung eines Würfels für den Fall, daß: 1. der angezogene Punkt in einer Ecke, 2. in der Mitte einer Kante, 3. in der Mitte einer Fläche liegt. In den vorangehenden Rechnungen hatte KELLER schon die Anziehung eines Parallelepipedons berechnet. Davon ausgehend, berechnet er für die drei vorliegenden Fälle die Anziehung. Im ersten Falle ergibt sich als Anziehung

$$R = a\sqrt{3}\left[2\log\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6}\right] = 1{,}679030\,a,$$

für den zweiten Fall

$$R_1 = a\sqrt{2}\left[\log\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + 2\log\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} + 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}\right] = 2{,}194426\,a,$$

im dritten Falle

$$R_2 = 4a\left[\log\frac{(1+\sqrt{2})\sqrt{5}}{1+\sqrt{6}} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2\sqrt{6}}\right] = 2{,}5968960\,a.$$

LAMPE veröffentlichte sodann in den Verhandlungen der Berliner physikalischen Gesellschaft (**3**, 1884, S. 46—48): *Einige Zahlenbeispiele für die Anziehung, welche eine homogene Masse auf einen materiellen Punkt nach dem NEWTONschen Gesetze ausübt.* In dieser Abhandlung berechnete der Verfasser die Maximalanziehung eines abgeplatteten Rotationsellipsoides auf den Pol, sowie die eines Kreiszylinders auf den Mittelpunkt einer Endfläche und eines Kreiskegels auf die Spitze. An diese Mitteilung schloß sich (a. a. O. S. 56—61) in demselben Jahre eine von demselben Verfasser herrührende *Litterarische Bemerkung zu den Zahlenbeispielen über Attraktion.* In derselben gab LAMPE eine Besprechung der PLAYFAIRschen Arbeit, wobei er den von PLAYFAIR begangenen Fehler bei der Berechnung der Maximalanziehung des abgeplatteten Rotationsellipsoids auf einem Massenpunkt am Äquator aufdeckte. Desgleichen enthält diese Abhandlung am Schlusse eine Berechnung der Maximalanziehung eines Parallelepipedons mit den Kanten, b, b, h auf den im Zentrum einer Endfläche gelegenen Punkt. Dieser Arbeit folgte bald eine weitere kurze Notiz über den Körper größter Anziehung in derselben Zeitschrift (**9**, S. 78—79) im Jahre 1890 unter dem Titel: *Eine litterarische Notiz über den Körper größter Anziehung,* wo LAMPE die Arbeit von SAINT-JACQUES, der für den ersten Bearbeiter des Problems gehalten wurde, bespricht.

Im Jahre 1886 veröffentlichte A. M. LIAPUNOFF in russischer Sprache eine Abhandlung: „Über den Körper von größtem Potential der Anziehungskraft“,[1]) aber diese Abhandlung ist mir nicht zugänglich gewesen, und ich konnte daher nicht ermitteln, ob dieselbe in das vorliegende Gebiet gehört.

1) Siehe Fortschr. der Mathem. **19** (1887), S. 1042.

Anders liegt die Sache mit einer Arbeit, die gleichfalls aus dem Jahre 1886 stammt. In diesem Jahre erschien von dem schon genannten FILIPPO KELLER eine Abhandlung: *Sul metodo di JOLLY per la determinazione della densità media della terra* (Rendic. dell' accad. dei Lincei [Roma] $2_4:1$, S. 145—149), in welcher er die Maximalanziehung eines geraden Prismas mit regulärer Grundfläche auf das Zentrum der Basis berechnete. Derselbe bespricht zunächst die von JOLLY vorgeschlagene Methode zur Messung der Erddichte; sodann gibt KELLER eine kurze Beschreibung einer von ihm selbst in den Memorie dell' accademia dei Lincei **9**, 1881, p. 114 vorgeschlagenen Methode und hebt die Vorteile, die die seinige gegenüber der JOLLYschen hat, hervor. Zugleich weist er auf die Methode von KÖNIG und RICHARZ hin. Diese benutzten an Stelle der von JOLLY zu seinen Versuchen verwendeten Bleikugel ein Parallelepipedon aus demselben Stoffe. KELLER glaubte, es würden vielleicht bessere Resultate sowohl durch die Methode von JOLLY, als auch durch die von ihm vorgeschlagene Methode, die sich ungefähr mit der Methode von KÖNIG und RICHARZ deckte, zu erzielen sein, wenn man an Stelle der Kugel oder des Parallelepipedons ein gerades Prisma mit regelmäßiger Basis verwendete. Dies führte ihn darauf, die Maximalanziehung eines solchen Körpers zu berechnen.

Das Prisma habe ein n-seitiges Polygon zur Grundfläche, dessen Seite $= 2a$ sei; die Höhe des Prismas sei h, das Volumen $= Q$ und der Kürze halber $\frac{h}{a} = \mu$, $\frac{\pi}{n} = \alpha$. KELLER übernimmt dann die Formel für die Anziehung eines solchen Prismas auf den Mittelpunkt der Basis seiner Abhandlung *Sull' attrazione delle montagne con applicazioni numeriche:*

$$(1) \qquad X = 2n^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\frac{Q \operatorname{tg} \alpha}{\mu}}\,(M_1 + M_2) \quad [\text{Dichtigkeit} = 1]$$

worin:

$$M_1 = \operatorname{ctg} \alpha \log \left[\frac{(1 + \sin \alpha)\sqrt{\mu^2 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}{\cos \alpha \left(1 + \sqrt{\mu^2 + \frac{1}{\sin^2 \alpha}}\right)} \right], \quad M_2 = \mu \left[\alpha - \operatorname{arctg} \left(\frac{\mu \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{\mu^2 + \frac{1}{\sin^2 \alpha}}} \right) \right]$$

Die Bedingung für das Maximum ist

$$(2) \qquad \frac{dX}{d\mu} = 0, \text{ oder } M_1 - 2\,M_2 = 0.$$

Dies ist eine transzendente Gleichung für das Verhältnis $\frac{h}{a}$, d. h. für das Verhältnis von Höhe zu Seite des Prismas. In dem speziellen Falle $n = \infty$, wo das Prisma in einen Kreiszylinder übergeht und das Verhältnis von Höhe zu Seite durch das Verhältnis von Höhe zu Grundkreisradius zu ersetzen ist, geht diese Gleichung in eine solche 2. Grades über.

Keller weist dann in einer Anmerkung darauf hin, daß man aus den Gleichungen (1) und (2) den Satz ableiten kann:

„In einem geraden Prisma von gegebenem Volumen denke man sich die Pyramide, welche als Basis eine Grundfläche des Prismas und zum Scheitel das Zentrum O der anderen Prismengrundfläche hat. Die von diesen beiden Körpern auf den Punkt O ausgeübte Anziehung variiert mit der Höhe des Prismas, und die Anziehung des letzteren wird ein Maximum, wenn sie gleich der dreifachen Anziehung der Pyramide ist, oder was dasselbe ist, wenn Prisma und Pyramide im Verhältnis ihrer Massen anziehen."

Nach dieser Nebenbemerkung findet er unter Berücksichtigung der Gleichung (2) für die Maximalanziehung des Prismas:

$$X = 3n^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{\frac{Q\operatorname{tg}\alpha}{\mu}} \cdot M_1 \quad \text{oder} \quad X = 6n^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{\frac{Q\operatorname{tg}\alpha}{\mu}}\, M_2,$$

wo der Wert von μ aus Gleichung (2) genommen werden muß. Ist die Dichtigkeit γ, so haben wir

$$X = 3\,(n\gamma)^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{\frac{Q\operatorname{tg}\alpha}{\mu}} \cdot M_1 = 6\,(n\gamma)^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{\frac{Q\operatorname{tg}\alpha}{\mu}} \cdot M_2.$$

In einer jetzt folgenden Tabelle gibt er die numerischen Werte der Maximalanziehung von einem 3-, 4-, 6-, ∞-seitigen Prisma und zu jedem Falle das zugehörige Verhältnis von Höhe zu Radius des der Grundfläche umschriebenen Kreises, nämlich

3-seit. Prisma	0,20201	2,54823
4-seit. Prisma	0,23117	2,59928
6-seit. Prisma	0,24859	2,61335
Zylinder	0,26107	2,61624.

Ein Blick auf diese Werte läßt erkennen, daß die Attraktion mit der Zahl der Seiten, wenn auch langsam, wächst. Will man daher ein Prisma zu den experimentellen Versuchen verwenden, so wird sich nach Keller am besten das n-seitige Prisma für $n = \infty$, d. h. der Zylinder, eignen. — Berechnet man nun die Anziehung einer mit dem Prisma volumengleichen Kugel, so findet man als Anziehung 2,598518. Abgesehen davon, daß sich dieser Wert nur ganz wenig von dem Werte der Maximalanziehung des Zylinders unterscheidet, ist er größer als die Maximalanziehung des dreiseitigen Prismas und kleiner als die Maximalanziehung des vierseitigen Prismas. Wollte man daher ein Prisma bei den Versuchen über die mittlere Erddichte benutzen, so wäre das zum größten Teil auch aus praktischen Gründen Nächstliegende das Prisma der Maximalanziehung mit quadratischer Grundfläche. Würde man statt des numerischen Wertes des Verhältnisses 0,23117 den Wert 0,25, der in der praktischen Verwirklichung mit geringeren Schwierigkeiten verknüpft wäre, nehmen, so wäre die Anziehung dieses geraden Prismas mit quadratischer Grundfläche 2,59690, d. h. die Anziehung dieses geraden Prismas mit quadratischer Grundfläche würde nur um 0,00238 von der Maximalanziehung des geraden Prismas mit quadratischer Grundfläche abweichen.

Zum Schlusse kommt KELLER aber doch zu der Ansicht, daß die Kugel aus mannigfaltigen Gründen der prismatischen Form vorzuziehen sei, einmal weil die Kugel in der Praxis leichter herstellbar sei als die prismatische Form, und zweitens, weil bei ersterer die Rechnungen, die bei der experimentellen Untersuchung notwendig werden, weit geringer und leichter als bei der letzteren Form sind.

Durch diese Arbeit von KELLER ist also nachgewiesen, daß JOLLY mit der Verwendung einer Bleikugel bei seinen Versuchen besser fuhr als KÖNIG und RICHARZ mit einem Parallelepipedon.

Wie diese KELLERsche Arbeit, so zeigen auch noch einige spätere Arbeiten den Zusammenhang des Problems der Maximalanziehung mit dem physikalischen Problem. 1890 war es THIESEN in seiner Arbeit *Détermination de la variation de la pesanteur avec la hauteur au pavillon de Breteuil* (Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures, 7), der in kurzen Zügen die Aufgabe behandelte, den Körper von gegebenem Volumen zu finden, in dessen Nähe die Änderung der Anziehung ein Maximum ist. Es heißt in der genannten Abhandlung in der Anmerkung auf S. 29: Seien r und φ die Polarkoordinaten der erzeugenden Kurve des Rotationskörpers; e_1, e_2 die beiden Abstände des angezogenen Punktes vom Koordinatenanfangspunkt; δ eine von den Körperdimensionen abhängige Konstante, so wird man nach den Prinzipien der Variationsrechnung haben:

$$0 = \delta - \frac{e_1 - r\cos\varphi}{\sqrt{r^2 + e_1^2 - 2re_1\cos\varphi}^{\,3}} + \frac{e_2 - r\cos\varphi}{\sqrt{r^2 + e_2^2 - 2re_2\cos\varphi}^{\,3}}.$$

Man erhält leicht folgende Spezialfälle:

$$e_2 = e_1 = e, \qquad \delta' = \frac{r^2(1 - 3\cos^2\varphi) + 4re\cos\varphi - 2e^2}{\sqrt{r^2 + e^2 - 2re\cos\varphi}^{\,5}};$$

$$e_2 = e_1 = 0, \qquad \delta' r^3 = 1 - 3\cos^2\varphi;$$

$$e_2 = \infty, \qquad \delta = \frac{e_1 - r\cos\varphi}{\sqrt{r^2 + e_1^2 - 2re_1\cos\varphi}^{\,3}};$$

$$e_2 = \infty,\ e_1 = 0,\ 0 = \delta r^2 + \cos\varphi.$$

Dieser letzte Fall ist schon bekannt; es ist die Gleichung des Körpers größter Anziehung. — Die letzte Abhandlung zeigt auch zugleich, daß das Problem des Körpers größter Anziehung in bezug auf andere physikalische Aufgaben von Bedeutung sein kann.

Im Jahre 1891 erschien noch eine Schrift von dem schon oben genannten F. KELLER, die den Titel führt: *Vergleichende Übersicht der verschiedenen Messungsmethoden der mittleren Dichtigkeit der Erde* (Rom und Nürnberg 1891). Diese mir nicht zugängliche Abhandlung, die vermutlich 24 Seiten stark ist, enthält nichts auf unseren Gegenstand Bezügliches. KELLER veröffentlichte im folgenden Jahre, 1892, einen Nachtrag zu dieser Abhandlung unter dem Titel: *Nachträgliches zu der Abhandlung: Vergleichende Übersicht etc.* (Rom und Nürnberg 1892). Diesen Nachtrag, der 11 Seiten (S. 25—35) umfaßt, habe ich selbst eingesehen und konstatiert, daß der zweite Teil (S. 30—35) sich auf das hier besprochene Gebiet erstreckt. KELLER knüpft zunächst an einen schon von ihm früher gegebenen Satz, den wir gleichfalls oben erwähnt haben, an, stellt dann kritische Betrachtungen über das von ihm sogenannte SAINT-JACQUESsche Prinzip an (das in Wirklichkeit schon bei BOSCOVICH ausgesprochen ist) und berechnet zum Schluß die Maximalanziehung eines Kugelabschnittes auf einen Massenpunkt in dem Scheitel desselben. Die Arbeit ist einerseits in ihrem zweiten Teile kritisierender Art, andererseits weist KELLER auf die praktische Bedeutung seiner früher und an dieser Stelle berechneten Resultate hin.

Bemerkenswert ist, daß KELLER in dem „Nachtrage“ als einziger die Frage in Betracht zieht, ob nicht auch ein Minimum oder auch mehrere Maxima eintreten können. Von den Einzelheiten des „Nachtrages“ erwähnen wir hier nur einen Satz, auf welchen wir im folgenden zu verweisen haben, nämlich: Wird die Masse eines Körpers bei gegebener Formgestaltung mit Q und seine Anziehung auf einen Massenpunkt mit X bezeichnet, und sind außerdem noch h und r zwei veränderliche Parameter, welche die Gestalt und das Volumen der anziehenden Masse näher bestimmen, so hängt die Auflösung des Problems, in welcher Weise h und r zu bestimmen sind, um bei gegebenem Q die Maximalanziehung zu erlangen, von der einfachen Formel ab:

$$\frac{\partial X}{\partial h} \cdot \frac{\partial Q}{\partial r} = \frac{\partial X}{\partial r} \cdot \frac{\partial Q}{\partial h}.$$

Die nächsten Berechnungen von Maximalanziehungen rühren von A. SELLA und N. PIERPAOLI her. Die Veröffentlichung der Resultate ist in den Atti della reale accademia dei Lincei [Roma] zu finden. Zunächst berechnete SELLA in der Abhandlung *Sull' attrazione del corpo* *di massima attrazione al secondo polo* (Rendiconti $1_5:1$, 1892, S. 350—356) die Anziehung des Körpers größter Anziehung für den zweiten Pol. Er erhielt für dieselbe, wenn γ die Anziehungskonstante, δ die Dichte bedeutet,

$$A = 2\pi\gamma\delta a \left\{ 1 - \frac{3}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{(z^2 - z^5)\, dz}{\sqrt{(1-z)(z^2 + \frac{z}{2} + \frac{1}{2})}} \right\},$$

worin das Integral ein elliptisches ist. Um dasselbe auf die Normalform zu bringen, wendet er die Substitution an:

$$z = 1 - \sqrt{2}\, \frac{1 + \cos\varphi}{1 - \cos\varphi},$$

und findet

$$A = 2\pi\gamma\delta a \left\{ 1 - \frac{3}{2^{\frac{3}{4}}} \int_\alpha^\pi \frac{(z^2 - z^5)\, dz}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} \right\};$$

wo

$$\alpha = \text{arc}\cos \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \quad \text{und} \quad k^2 = \frac{8 + 5\sqrt{2}}{16}$$

Dies gibt, weiter ausgeführt:

$$A = 2\pi a\gamma\delta \left\{ 1 - \frac{3}{2^{\frac{3}{4}}} \frac{1}{3.5.7.9} \left[(492 + 306\sqrt{2}) \sqrt{-48 + 34\sqrt{2}} \right.\right.$$
$$\left.\left. + (30 - 66\sqrt{2})\, F(\vartheta, \varphi) + 132\sqrt{2}\, E(\vartheta, \varphi) \right] \right\},$$

wo $\vartheta = 76^0\ 3'\ 25{,}9''$; $\varphi = 80^0\ 7'\ 14{,}6''$.

Berechnet man jetzt die Anziehung auf den zweiten Pol zahlenmäßig, so ergibt sich

$$A = 2\pi\gamma\delta a \times 0{,}39491 = 2{,}6321,$$

während die Anziehung auf den Hauptpol $A_1 = 2{,}66604$ ist. Daraus ersieht man, daß die Anziehung auf den zweiten Pol nur um weniges kleiner ist als die auf den Hauptpol.

An diese Mitteilung schloß sich eine zweite Arbeit von Sella an: *A proposito della discussione sulla forma più opportuna da darsi al corpo attraente nella misura della densità media della terra e sul corpo di massima attrazione ad un puncto* (Rendiconti $2_5:1$, 1893, S. 90—96). In dieser Arbeit gibt er zunächst einleitend eine Übersicht über die Methoden der Messung der mittleren Erddichte, sodann berechnet er die Maximalanziehung einer Kugelkalotte mit der Höhe h und dem Grundkreisradius ϱ auf das Zentrum der Basis. Er findet für die Anziehung

$$A = \frac{2\pi h}{3} \frac{h^2 + 2h\varrho + 3\varrho^2}{(h + \varrho)^2},$$

für das Volumen $V = \frac{\pi}{2.3} h\,(h^2 + 3\,\varrho^2)$.

Also gibt die von Keller in seiner letzten Abhandlung gegebene allgemeine Gleichung

$$\frac{\partial A}{\partial h} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varrho} = \frac{\partial A}{\partial \varrho} \cdot \frac{\partial V}{\partial h}$$

die spezielle Bedingungsgleichung

$$\frac{h\varrho(h^2+\varrho^2)(h-3\varrho)}{(h+\varrho)^3} = 0,$$

oder $h = 3\varrho$; $h = \frac{9}{10}d$, wenn d der Durchmesser der Kugel ist. Daraus ergibt sich folgender einfache Satz: „In dem Kugelabschnitte größter Anziehung mit dem angezogenen Punkt im Zentrum der Basis ist die Höhe dreimal so groß wie der Basisradius oder $^9/_{10}$ vom Kugeldurchmesser". Die Maximalanziehung wird in diesem Falle: $A = 2,65603$. Liegt der angezogene Punkt im Scheitel der Kalotte, so findet Sella analog:

$$A = 2\pi\left(h - \frac{2}{3}\frac{h^2}{\sqrt{h^2+\varrho^2}}\right).$$

Als Bedingungsgleichung für das Maximum ergibt sich

$$3h^4 - 2h^2\varrho^2 - 9\varrho^4 = 0,$$

und daher

$$h^2 = \frac{1+2\sqrt{7}}{3}\varrho^2,$$

woraus sich als Maximalanziehung einer Kugelkalotte auf den Scheitel ergibt $A = 2,61733$. Im Anschluß hieran gibt Sella eine Zusammenstellung der ihm bekannten Maximalanziehungen. In dieser Tabelle folgt hinter dem Körper größter Anziehung, der an erster Stelle steht, sofort die von Sella berechnete Maximalanziehung einer Kugelkalotte auf den Mittelpunkt der Basis. — Da man es in der Praxis jedoch nicht mit dem Fall zu tun hat, daß ein Körper einen Massenpunkt anzieht, so setzt er in einem weiteren Abschnitte an Stelle des angezogenen Punktes eine Kugel vom Radius s und ermittelt die Abänderung der Lösung für den Körper größter Anziehung infolge dieser Bedingung. Er kommt zu dem Schlusse, daß eine sehr starke Verminderung des Effekts eintritt, weil in der Praxis der angezogene Körper aus verschiedenen Gründen nicht in unmittelbarem Zusammenhang mit dem anziehenden Körper steht.

Es folgen sodann einige Angaben über die Eigenschaften des Körpers größter Anziehung, von denen wir hier nur diejenigen hersetzen wollen, die von Sella neu berechnet und daher noch nicht erwähnt sind: Abstand des Schwerpunktes vom Hauptpol $\frac{15}{32}a$, Radius der Kugel von gleicher Anziehung: $\frac{3}{5}a$.

Zum Schluß gibt SELLA noch eine Eigenschaft des Körpers größter Anziehung an, die sich in folgendem, auf elementare Weise bewiesenen Satze ausspricht: „Die längs der Achse des Körpers größter Anziehung erfolgende Anziehung eines Kegels, welcher den Hauptpol zur Spitze und einen von beliebigem Umrisse begrenzten Teil der Oberfläche des Körpers größter Anziehung zur Basis hat, ist der Masse dieses Kegels proportional".

Dieser Satz gilt für jedes Anziehungsgesetz und hat, wie auch SELLA angibt, einige Ähnlichkeit mit dem oben erwähnten Satze von KELLER über das gerade Prisma.

In demselben Jahre veröffentlichte N. PIERPAOLI die Abhandlung: *Sul massimo d' attrazione di una piramide retta a base regolare* (Rendiconti 2_5 : 1, 1893, S. 130—136). Der Verfasser stellt sich darin mit seinen eigenen Worten folgende Frage: „Dato il volume di una piramide retta a base regolare o di un cono circolare retto, quale dev' essere il rapporto fra l' altezza ed il perimetro della base per avere sul vertice e sul centro della base il massimo d'attrazione?".

Für die Berechnung der Anziehung einer Pyramide, resp. der Anziehungskomponenten gibt es nach PIERPAOLI zwei Methoden. Entweder denkt man sich die Pyramide in unendlich viele Schichten parallel der Basis geteilt, bestimmt die Anziehung einer solchen Schicht auf den betrachteten Punkt und berechnet dann mit Hilfe einer geeigneten Integration die Anziehung der ganzen Pyramide, oder man befolgt die bekannte Methode der Partialpyramiden, die anwendbar ist bei der Bestimmung der Anziehung eines beliebigen Polyeders auf einen beliebig gelegenen Punkt.

PIERPAOLI berechnet zunächst, wenn H die Höhe, R den Radius des der Grundfläche umschriebenen Kreises, n die Seitenanzahl der Basis bedeutet und $\frac{\pi}{n} = \varphi$ gesetzt wird, die Anziehung einer Pyramide auf das Zentrum der Basis und den Scheitel und findet dafür die Ausdrücke

$$A_v = 2H\left\{\pi - n \operatorname{arc\,tg} \frac{H \operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{H^2+R^2}}\right\},$$

$$A_B = 2\pi \frac{HR\cos\varphi}{H^2+R^2\cos^2\varphi}\left\{H\log\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi} - \frac{HR\sin\varphi}{\sqrt{H^2+R^2}}\log\frac{H^2+H\sqrt{H^2+R^2}}{R\sqrt{H^2+R^2}-R^2} + R\varphi\cos\varphi\right\}.$$

Desgleichen erhält er für $n = \infty$ die Anziehung eines geraden Kreiskegels auf die Basis und den Scheitel

$$B_v = 2\pi H\left\{1 - \frac{H}{\sqrt{H^2+R^2}}\right\},$$

$$B_B = 2\pi \frac{HR}{H^2+R^2}\left\{H + R - \frac{HR}{\sqrt{H^2+R^2}}\log\frac{H^2+H\sqrt{H^2+R^2}}{R\sqrt{H^2+R^2}-R^2}\right\}.$$

In der vorliegenden Note beschäftigt sich PIERPAOLI zunächst mit dem Maximum der Anziehung auf den Scheitel. A_v läßt sich schreiben

$$A_v = 2R\frac{H}{R}\left\{\pi - n \operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{H}{R}\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\left(\frac{H}{R}\right)^2}}\right\};$$

andererseits ist das Volumen der Pyramide gegeben durch

$$V = \tfrac{1}{3} n R^3 \cdot \frac{H}{R} \sin\varphi \cos\varphi.$$

Aus diesen beiden Daten ergibt sich nach der KELLERschen Bedingungsgleichung die Gleichung

$$2\pi - 2n \operatorname{arc\,tg} \frac{x \operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{x^2+1}} - 3n \frac{x \sin\varphi\cos\varphi}{(x^2+\cos^2\varphi)\sqrt{x^2+1}} = 0,$$

wo $x = \frac{H}{R}$ ist. In einer Tabelle werden die Lösungen dieser Gleichung für $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, \infty$ angegeben und die zugehörigen Werte der Attraktion mitgeteilt.

An diese Arbeit N. PIERPAOLIS schloß sich eine gleiche Arbeit als Ergänzung im folgenden Jahre (*Attrazione di una piramide retta a base regolare sul centro della base;* Rendiconti 3_5: 1, 1894, S. 173—176) an. Es wird auf Grund der soeben besprochenen Abhandlung, wo die Anziehung einer Pyramide auf das Zentrum der Basis berechnet ist, das Maximum dieser Anziehung gesucht. Die Bedingung, welche sich hier für das Maximum der Anziehung ergibt, ist bei weitem komplizierter als in dem vorhergehenden Falle. Zum Schlusse werden die Formeln für einen Kegel spezialisiert, und wie in der vorhergehenden Arbeit berechnet der Verfasser die Wurzeln der Bedingungsgleichung für $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, \infty$ und vereinigt die Resultate in einer Tabelle, in der auch die Zahlen für die Größe der Anziehung abgedruckt sind.

In demselben Jahre erschien eine weitere in dieses Gebiet gehörige Arbeit von SELLA: *Ancora sulla forma del corpo attraente nella misura della densità media della terra e sul corpo di massima attrazione a due punti* (Rendiconti 3_5: 1, 1894, S. 436—442). In seiner früheren Arbeit hatte der Verfasser die Methoden zur Messung der mittleren Dichtigkeit der Erde in zwei Gruppen eingeteilt, in solche Methoden, bei denen die Kenntnis der Anziehung eines Körpers auf einen Punkt notwendig ist (CAVENDISH, BAILY, REICH, CORNU, WILSING, LASKA, JOLLY, POYNTING, MAYER), und in solche Methoden, bei denen es sich um einen anziehenden Körper und zwei angezogene Punkte handelt (KELLER, KÖNIG und RICHARZ). An der dortigen Stelle hatte dann SELLA denjenigen Körper (Kugelkalotte) berechnet, der für die erste Methode am günstigsten ist. In dieser zweiten

Arbeit sucht er den Körper größter Anziehung auf zwei Punkte. Die Form desselben hängt von zwei Parametern ab, nämlich dem Abstande $2a$ der beiden angezogenen Punkte und dem Volumen V der gegebenen Masse Als Anziehung auf beide Punkte durch den gesuchten Körper, der wie der Körper größter Anziehung auf einen Punkt ein Rotationskörper ist, ergibt sich

$$A = 2\pi \int_{-a}^{+a} \left(2 - \frac{a+x}{\sqrt{(a+x)^2+y^2}} - \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}}\right) dx,$$

als Volumen

$$V = \pi \int_{-a}^{+a} y^2\, dx.$$

Soll A ein Maximum werden, während V konstant bleibt, so muß sein

$$0 = \delta\,(A - \mu V) = \delta \int_{-a}^{+a} F dx,$$

woraus nach der bekannten Methode der Variationsrechnung folgt

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0,\; F(a) + F(-a) + \int_{-a}^{+a} \frac{\partial F}{\partial a}\, dx = 0,$$

oder

$$\frac{a+x}{[(a+x)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{a-x}{[(a-x)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} = \mu,$$

und

$$\int_{-a}^{+a} \left\{ \frac{y^2}{[(a+x)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{y^2}{[(a-x)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} dx = 2.$$

Die erste dieser Gleichungen, in der μ eine willkürliche Größe ist, ist die unaufgelöste Gleichung der Meridiankurve des Körpers. Die zweite Gleichung dagegen ist eine Grenzgleichung. Man kann sie so transformieren, daß sie eine sehr leichte und wichtige Auslegung zuläßt. Als Endziel dieser Umformung gilt der Satz: „Die Summe der zwei Anziehungen längs der Achse in dem Körper größter Anziehung auf zwei Punkte ist dieselbe, als wenn die dreifache Masse des Körpers in beliebiger Weise auf der Oberfläche verteilt wäre“. Desgleichen leitet Sella noch folgenden Satz ab: „Die Summe der Verhältnisse aus der Anziehung längs der Achse und dem Volumen von zwei Kegeln, die zur Basis ein und dasselbe unendlich kleine Oberflächenelement und zum Scheitel die zwei angezogenen Punkte haben, ist konstant und zwar gleich der dreifachen Summe der beiden Anziehungen, die eine Masse 1, in irgend einem beliebigen Punkte der Oberfläche gelegen, ausübt“. Dieser Satz hat Ähnlichkeit mit dem entsprechenden für den Körper größter Anziehung auf einen Punkt. Sodann wird die Maximalanziehung des Körpers auf die beiden Punkte berechnet, und es ergibt sich für jeden der beiden Punkte:

$$A = 2,66576 - \varepsilon \text{ wo } \varepsilon < 0,001763,$$

woraus man ersieht, daß die Anziehung auf jeden einzelnen Punkt nur um wenig kleiner ist als die Anziehung des Körpers größter Anziehung auf einen Punkt.

Der letzte Abschnitt der Arbeit beschäftigt sich damit, für einen Körper von gegebenem Formtypus die Maximalanziehung auf zwei Punkte zu berechnen. SELLA nimmt zu diesem Zweck die Kugelkalotte an und sucht das Maximum der Anziehung der Punkte, die sich im Scheitel und im Zentrum der Basis befinden. Er stellt die Ausdrücke für diese Summe A, für das Volumen V auf und leitet die Bedingungsgleichung ab. Aus letzterer bestimmt er das Verhältnis von der Höhe zum Grundkreisradius als

$$\frac{h}{\varrho} = 2,76085$$

und findet als Anziehung für jeden einzelnen Punkt

$$\frac{A}{2} = 2,62992.$$

Wir haben noch einer Abhandlung von SELLA zu gedenken, nämlich: *Sui corpi di massima attrazione* (Rendiconti $3_5:2$, 1894, S. 47—53). Als Einleitung werden einige Sätze angegeben, die zur einfacheren Herleitung der bisher gefundenen Resultate dienen:

1. Die Anziehung eines beliebigen Kegels (und ebenso einer Pyramide) auf die Spitze ist gleich derjenigen der Basis, auf welcher eine Masse gleich der 3-fachen des Kegels gleichförmig ausgebreitet ist.
2. Die Anziehung eines einer Kugel umschriebenen Polyeders auf das Zentrum der Kugel ist gleich der Anziehung der Oberfläche des Polyeders, auf welcher eine Masse gleich der 3-fachen Masse des Polyeders gleichförmig verteilt ist.
3. Die Anziehung eines beliebigen Kegels, der zur Basis eine Kugelkappe mit Scheitel im Zentrum hat, auf diesen Scheitel ist gleich der Anziehung, die die Kugelkappe ausübt, wenn auf ihr eine Masse von der 3-fachen Masse des Kegels gleichmäßig verteilt ist.
4. Die Anziehung eines „anello cilindroconico“ (d. h. eines Körpers, der begrenzt ist von einem Kreiszylinder und einem Kegel, der zum Scheitel das Zentrum einer Grundfläche und zur Basis die gegenüberliegende Grundfläche des Zylinders hat) auf den Scheitel dieses Kegels ist gleich der Anziehung des Zylindermantels, wenn

auf demselben eine Masse von der 3-fachen Masse des Ringes gleichmäßig verteilt ist.

5. Die Anziehung eines beliebigen Kegels, der zur Basis eine Fläche konstanter Anziehung längs einer gegebenen Richtung hat, auf den Scheitel und längs dieser Richtung ist gleich der Anziehung der Basis, wenn auf derselben eine Masse gleich der 3-fachen Masse des Kegels gleichmäßig verteilt ist.

Nach Aufstellung dieser Sätze wendet sich Sella dem Körper größter Anziehung zu. Seien die Dimensionen einer Anziehung und eines Körpers gegeben durch

$$[A] = [L], \quad [v] = [L^3],$$

dann wird notwendig sein

$$A = \delta\, v^{\frac{1}{3}},$$

wo δ eine numerische Funktion des Parameters (Länge) ist, welcher den Körper bestimmt. Das Problem, den Körper größter Anziehung zu finden, ist somit zurückgeführt auf die Aufgabe das Maximum der Funktion

$$\delta = \frac{A}{v^{\frac{1}{3}}} \text{ zu suchen.}$$

Daher wird die Variation von $\delta = 0$ sein müssen oder auch

$$\frac{\delta A}{\delta v} = \frac{A}{3\,v}.$$

Diese Beziehung als Bedingung des Maximums gilt ganz allgemein.

Nach dem Körper größter Anziehung auf einen Punkt wird der auf 2 Punkte behandelt. Für diesen ergibt sich

$$\frac{\delta A}{\delta v} = \mu = \text{const.}$$

In die obige Beziehung eingesetzt, gibt dies

$$A = 3\,\mu v$$

Dieser Satz war schon in einer früheren Abhandlung von Sella auf umständlichere Weise als hier abgeleitet worden.

Nach diesen Untersuchungen wendet er sich Körpern von bestimmtem Formtypus zu. Auch hier wird die allgemeine Bedingung zur Anwendung gebracht und die schon in den früheren Arbeiten gefundenen Resultate auf einfacherem Wege bestätigt. Unter anderem erhält er den Satz: „Die Anziehung einer Pyramide mit regelmäßiger Basis auf ihre Spitze ist ein Größtes, wenn sie der Anziehung einer 9mal so großen Masse gleich ist, die gleichmäßig auf dem Umfange der Basis verteilt ist“. Aus diesem

Satze leitet er sofort auf kurzem Wege die schon von PIERPAOLI gegebenen Bedingungsgleichungen für die Pyramide ab.

Wir haben nun noch zwei auf unseren Gegenstand bezügliche Arbeiten von A. RAGNOLI und E. LAMPE zu besprechen. Die erste führt den Titel: *Sui corpi di massima attrazione* (Spoleto 1895, 22 S. gr. 8⁰) und knüpft direkt an die schon von SELLA gefundenen Sätze an. RAGNOLI will die von SELLA hauptsächlich in der letztbesprochenen Abhandlung gegebenen Sätze auf weitere Beispiele anwenden. Zunächst wird die Bedingung für die Maximalanziehung berechnet für einen „anello conico“, das ist für einen von zwei Kegeln mit gleicher Höhe, aber verschiedenen Grundkreisen begrenzten Körper. Der angezogene Punkt liegt im Scheitel der Kegel. Als Bedingung für das Maximum ergibt sich

$$\frac{A}{V} = \frac{9\,n^2\mu_2 - \mu_1}{n^2 - 1},$$

wo μ_1 und μ_2 die Anziehung der auf den Kreisen $B_1B'_1$, $B_2B'_2$ verteilten Masseneinheit bedeuten. — Sodann wird die Bedingung aufgestellt für einen „anello cilindrico“, den Körper zwischen zwei koaxialen Zylindern:

$$\frac{A}{V} = \frac{3\,n^2\mu_2 - \mu_1}{n^2 - 1},$$

falls ϱ_1 als variabel aufgefaßt wird. Nimmt man dagegen h als variabel, ϱ_1 als fest an, so hat man die Bedingnng

$$\frac{A}{V} = \frac{A_1}{V_1},$$

worin A_1 und V_1 Anziehung und Volumen des „anello conico“, ausdrücken, welcher entsteht, wenn man den angezogenen Punkt mit der Peripherie der Basis verbindet. — Als nächstes Beispiel wird die Bedingung für das Maximum der Anziehung des „anello cilindro-sferico“ aufgestellt; daran reiht sich der „anello conosferico“, für den sich als Bedingung ergibt

$$A = 9\mu V.$$

Sodann wird die Bedingung für eine Maximalanziehung aufgestellt für den Restkörper, den man erhält, wenn man durch eine Kugel einen geraden Zylinder legt. Die Bedingung ist

$$A = 3\mu V.$$

Weiterhin wird die Bedingung für ein quadratisches Prisma mit aufgesetzter quadratischer Pyramide berechnet. Als Bedingung folgt

$$\frac{A}{V} = \frac{A_1}{V_1},$$

wo A_1 und V_1 die Anziehung und das Volumen der Pyramide bedeuten, welche entsteht, wenn man den angezogenen Punkt mit dem Umfange der entgegengesetzten Basis des Prismas verbindet.

Nachdem so allgemein die Bedingungen aufgestellt sind, folgt in einem weiteren Abschnitte die numerische Berechnung dieser Maximalanziehungen. An dieselbe schließt sich ohne Benutzung der Sellaschen Sätze die Berechnung der Maximalanziehung, die der Rotationskörper ausübt auf den Pol, wenn sich eine halbe Lemniskate um ihre Achse dreht. Zum Schlusse der Arbeit findet sich eine für den damaligen Stand des Problems vollständige Zusammenstellung der 26 berechneten Körper mit Maximalanziehung.

Die letzte Arbeit, welche uns über das Problem des Körpers größter Anziehung vorliegt, ist die von E. Lampe in den Verhandlungen der Berliner Physikalischen Gesellschaft (15, 1896, S. 84—100) herausgegebene Abhandlung: *Über Körper größter Anziehung.* Nach einer kurzen geschichtlichen Einleitung zeigt der Verfasser zunächst, daß man, ausgehend von der Gleichung

$$r = a + b \cos^n \varphi$$

der Meridiankurve eines Rotationskörpers, durch Variation von n eine unendliche Anzahl von Körpern finden kann, deren Anziehung und Gestalt sich der Anziehung und Gestalt des Körpers größter Anziehung immer mehr und mehr nähert. Für $n = \frac{1}{2}$, $a = 0$ erhält man den Körper größter Anziehung mit der Anziehung 2, 666042. Ein zweiter Abschnitt bringt sodann die Berechnung der Maximalanziehung für einige Rotationskörper, bei denen sich die Frage nach dem Maximum der Anziehung ohne bedeutende rechnerische Schwierigkeiten lösen läßt. Ein Anhang zu dieser Abhandlung weist noch auf eine besondere Art von Maximalaufgaben hin. Es sind dies die Aufgaben, bei denen es sich darum handelt, gegebenen Körpern andere einzubeschreiben, welche auf gewisse Punkte ein Maximum der Anziehung ausüben. Es werden die beiden folgenden Aufgaben dieser Art behandelt.

1. Einer Kugel denjenigen Zylinder einzuschreiben, der auf den Mittelpunkt seiner Basis die größte Anziehung ausübt.
2. Einer gegebenen Kugel den Kreiskegel von größter Anziehung auf die Spitze einzubeschreiben.

Aus der vorangehenden Darstellung dürfte ersichtlich sein, daß die eigentlichen Untersuchungen über den Körper größter Anziehung gewissermaßen mit der Arbeit von Playfair abgeschlossen sind. Von da an sehen wir, hauptsächlich durch die Arbeiten von KELLER inauguriert, das bis zur letzten Arbeit fortdauernde Bestreben entstehen, die Maximalanziehung für gegebene Körperformen zu bestimmen. Es ist zwar bisher eine ganze Anzahl derartiger Beispiele berechnet, jedoch bleibt dabei noch eine große Menge von Körpern übrig, die keine Bearbeitung bisher gefunden haben. Teils könnten hierbei schon die für gewisse Fälle aufgestellten Formeln für das Potential oder die Anziehung gewisser Körper benutzt werden, teils müßten dieselben neu berechnet werden. Aus dem dann vorliegenden Zahlenmaterial könnten sich dann immerhin allgemeinere Gesetze, die ja das Ziel aller Forschung sind, ergeben, wie wir das beste Beispiel bisher schon an den von SELLA gefundenen allgemeinen Sätzen haben. Andererseits kann man auch hier das Prinzip der Inhomogeneität der zu untersuchenden Körper annehmen, wobei man allerdings zu komplizierten Rechnungen kommt, sowie auch die von LAMPE in seiner letzten Arbeit gegebenen Hinweise auf Maximalanziehungen von Körpern, die anderen einbeschrieben sind, weiterhin verfolgen.

Ein neues literarisches Hilfsmittel zur Verbreitung mathematisch-historischer Kenntnisse.

Von G. Eneström in Stockholm.

Die Hauptaufgabe der mathematisch-historischen Forschung ist natürlich, das ihr angehörende Gebiet vollständig durchzuarbeiten; indessen ist es auch von Interesse, daß die Errungenschaften dieser Arbeit, die gewöhnlich in Zeitschriftenartikel und Monographien zu finden sind, nicht nur den eigentlichen Fachgenossen leichter zugänglich, sondern wenigstens zum Teil den übrigen Mathematikern bekannt gemacht werden. Das erste wird erreicht durch zusammenfassende Darstellungen der Geschichte der ganzen Mathematik oder größerer Abteilungen derselben, und solche Darstellungen tragen noch dazu bei, mathematisch-historische Kenntnisse unter die Mathematiker zu verbreiten. Viel größer wird indessen der Erfolg, wenn eine erhebliche Anzahl von historischen Notizen in mathematisch-encyklopädische Arbeiten eingefügt wird, und in dieser Hinsicht hat die seit einigen Jahren erscheinende *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* recht gute Dienste geleistet; noch weit mehr hat man voraussichtlich von der kürzlich in Angriff genommenen französischen Bearbeitung dieser Encyklopädie zu erwarten, denn ist es erlaubt, das soeben erschienene erste Heft[1]) dieser Bearbeitung als maßgebend für das ganze Unternehmen zu betrachten, so wird die Geschichte daselbst auf eine ganz

1) *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Publiée sous les auspices des académies des sciences de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne avec la collaboration de nombreux savants. Édition française rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de* Jules Molk. Tome I, volume 1, fascicule 1. Paris, Gauthier-Villars; Leipzig, Teubner 1904. 8⁰, 160 S. Das Heft enthält: Principes fondamentaux de l'arithmétique. Exposé, d'après l'article allemand de H. Schubert, par J. Tannery et J. Molk (S. 1—62). Analyse combinatoire et théorie des déterminants. Exposé, d'après l'article allemand de E. Netto, par H. Vogt (S. 63—132). Nombres irrationels et notion de limite. Exposé, d'après l'article allemand de A. Pringsheim, par J. Molk (S. 133—160, nur Anfang).

besondere Weise Berücksichtigung finden. Darauf deutet schon die wesentlich vergrößerte Zahl der Fußnoten hin, denn diese enthalten hauptsächlich historische und bibliographische Notizen; gegen beinahe 600 Fußnoten in der französischen Bearbeitung hat der entsprechende Teil des deutschen Originals weniger als 300 solcher Fußnoten aufzuweisen. Auch im Text selbst bringt die französische Bearbeitung viele historische Zusätze, z. B. S. 10—21 eine Übersicht der Geschichte der Zahlzeichen und Zahlensysteme im Altertum und Mittelalter.

Untersucht man näher, was in der französischen Bearbeitung neu hinzugekommen ist, so findet man, daß sich die Ergänzungen wesentlich auf die ältere Mathematik beziehen, die im ersten Heft des deutschen Originals ziemlich stiefmütterlich behandelt war. Aber nicht nur quantitativ sondern auch qualitativ bezeichnet die französische Bearbeitung einen wirklichen Fortschritt in betreff der Behandlung der Geschichte der Mathematik. Im deutschen Original waren, abgesehen von dem neunzehnten Jahrhundert, die historischen Notizen nur ausnahmsweise aus den Quellenschriften entnommen, und in vielen Fällen war es leicht zu konstatieren, daß sie nicht von einem Fachmanne herrühren konnten; in der französischen Bearbeitung ist dagegen die ältere mathematische Literatur ausgiebig benutzt, und auch wenn man nicht hie und da den Zusatz: „Note ms. de P. TANNERY“ fände, würde es jedem sachkundigen offenbar sein, daß Herr JULES MOLK hinsichtlich der historischen Notizen einen Spezialisten auf diesem Gebiete als Mitarbeiter gehabt hat. Als Beleg erlaube ich mir den Schluß der Fußnote 13 auf Seite 136 zu zitieren: „Les termes employés par le scholiaste d'EUCLIDE [*Opera*, éd. J. L. HEIBERG 5, Leipzig 1888, p. 414] semblent indiquer qu'APOLLONIUS avait décrit certaines des formes, en nombre illimité, qui s'engendrent par la seule addition de plusieurs radicaux simples, et qui peuvent, par suite, être représentées par des constructions au moyen de la règle et du compas“; freilich ist schon früher auf das erwähnte Scholium aufmerksam gemacht worden (vgl. APOLLONII *Opera*, ed. J. L. HEIBERG 2, Leipzig 1893, S. 119—120; G. LORIA, *Le scienze esatte nell' antica Grecia* 2, Modena 1895, S. 198), aber sicherlich würde nur ein Kenner der griechischen Mathematik sich vorgenommen haben, aus demselben die oben zitierte Folgerung zu ziehen.

Aber nicht nur die Zusätze sondern auch die Streichungen weisen auf einen sachkundigen Mitarbeiter hin; so z. B. fehlt in der französischen Bearbeitung S. 31 der an entsprechender Stelle (S. 9) des Originals vorkommende Verweis auf den, meiner Ansicht nach durchaus wertlosen, Artikel von P. DE LAGARDE, *Woher stammt das x der Mathematiker?* (1882; vgl. Biblioth. Mathem. 1885, Sp. 41—44). Als ein Verdienst der Arbeit betrachte ich es auch, daß besondere Aufmerksamkeit den biographischen[1]) und bibliographischen[2]) Details gewidmet worden ist; so z. B. sind, ganz wie im deutschen Original, die Initialen der Vornamen der zitierten Verfasser gewissenhaft angegeben. Dieser letzte Umstand mag vielen Lesern ziemlich bedeutungslos erscheinen, aber in Wirklichkeit ist die Sache nicht ganz ohne Belang[3]), und bisweilen kann die Ermittelung solcher Initialen umfassende Nachforschungen erfordern; beispielsweise habe ich vor ein paar Jahren die Auskunft in betreff des Mathematikers Buée, die S. 36 gegeben wird, vergebens in den mir zugänglichen Handbüchern gesucht.

Aus dem Gesagten geht hervor, daß ich den historischen Notizen der französischen Bearbeitung der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften einen hohen Grad von Zuverlässigkeit zuerkennen möchte. Freilich hätte ich gern gesehen, daß diese Notizen in einigen Fällen noch vollständiger wären, aber ich verstehe sehr gut, wie schwierig es sein muß, überall eine gleichmäßige Ausführlichkeit zu erzielen. Die besonderen Mitarbeiter können oder wollen nicht dabei behilflich sein, von dem Herausgeber kann man nicht fordern, daß er auf allen Gebieten zu Hause ist, und von anderen Fachgenossen Hilfe zu bekommen, wird sich oft unmöglich erweisen.

Dagegen scheint es mir, als ob es möglich wäre, in betreff der historischen Notizen zu einem noch höheren Grad von Zuverlässigkeit zu gelangen. Zuerst erlaube ich mir darauf aufmerksam zu machen, daß es ja der Zweck der Encyklopädie ist, die *gesicherten* Resultate der bisherigen mathematischen Forschung mitzuteilen, und unter die mathematische Forschung darf wohl auch die mathematisch-historische inbegriffen werden. Aus diesem Grunde wäre es vielleicht angezeigt, nur ausnahmsweise ganz neue Konjekturen aufzuführen, z. B. die S. 138 ausgesprochene Vermutung, daß Leonardo Pisano von einem byzantinischen Mathematiker mündliche Auskunft über das 10. Buch der *Elementa* bekommen hatte. Solche und ähnliche Konjekturen passen sehr gut für einen mathematisch-historischen

---

1) Ein wenig befremdend ist es den Vornamen des Italieners Luca Paciuolo überall (z. B. S. 18, 24, 31, 54, 139) unter der Form „Luc" geschrieben zu sehen. Daß Heinrich Oldenburg S. 84 „Oldenbourg" genannt wird, ist wohl nur ein Übersehen, denn C. F. Hindenburg wird S. 63 mit unverändertem Namen aufgeführt.

2) Unnötig scheint es mir bei den Verweisen auf *Scritti di* Leonardo Pisano die Seitenzahl nicht nur der Boncompagnischen Ausgabe, sondern auch des von ihm abgedruckten Manuskriptes anzugeben (vgl. z. B. S. 27). Bekanntlich sind außer diesem Manuskripte noch viele andere sowohl der *Liber abbaci* als der *Practica geometriae* aufbewahrt.

3) Beispielsweise hat der Umstand, daß von den zwei Brüdern Français die Initialen der Vornamen des einen unbekannt sind, dazu veranlaßt, daß Schriften, die dem einen Bruder angehören, dem anderen beigelegt worden sind (vgl. Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 212, 291—292).

Spezialartikel, aber kaum für eine Encyklopädie der Mathematik; wenn die Konjektur als unrichtig erwiesen werden kann (vgl. Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 414—415), so bekommt die Encyklopädie *unnötigerweise* eine unzuverlässige Angabe.

Ebenso scheint es mir wünschenswert, daß schwebende Angaben, für welche Belege kaum gegeben werden können, wenn irgend möglich vermieden werden. Eine solche Angabe findet sich S. 23, wo bemerkt wird, daß „depuis L. Euler, le symbolisme arithmétique est resté à peu près le même". Im deutschen Original lautet die Bemerkung (S. 5): „Erst durch L. Euler hat die arithmetische Zeichensprache die heutige feste Gestalt bekommen", und diese Bemerkung halte ich für bestimmt unrichtig; in der Tat war gerade die *arithmetische* Zeichensprache schon vor Euler so weit ausgebildet, daß sehr wenig noch zu tun war. Man vergleiche z. B. den ersten Teil der im Jahre 1708 erschienenen *Analyse démontrée* von Charles Reyneau mit einer ähnlichen Arbeit aus dem Ende des 18. Jahrhunderts, und man wird kaum wesentliche Verschiedenheiten in betreff der Zeichensprache entdecken. Ich gebe zu, daß die französische Bearbeitung gewissermaßen eine Verbesserung des Originals bringt, aber nichtdestoweniger möchte ich den ganzen Passus streichen.

Endlich erlaube ich mir zu bemerken, daß die historischen Notizen leicht unzuverlässig oder wenigstens irreleitend werden können, wenn der Mitarbeiter oder der Herausgeber einen einzelnen älteren Mathematiker mit außerordentlicher Vorliebe studiert hat. Ein solcher Fall liegt, so viel ich sehen kann, in betreff der französischen Bearbeitung vor, und zwar ist der fragliche Mathematiker François Viète. Schon S. 23 fällt die folgende Angabe auf: „Depuis Viète jusqu'à Leibniz on rencontre le signe d'égalité ∝", aber hier *kann* ja Viète ein Schreibfehler für Descartes sein. Etwas weiter unten trifft man S. 54 die Behauptung, daß die von P. Hérigone (1634) benutzte Bezeichnung $a2$, $a3$, $a4$ etc. „n'est employé par Hérigone qu'en se conformant au principe de F. Viète, pour qui une lettre désigne une grandeur géométrique *d'une*, *deux* ou *trois* dimensions", aber ich sehe gar nicht ein, warum man die Hérigonesche Bezeichnung gerade als eine Anpassung an die des Viète betrachten soll — man könnte wenigstens ebensogut Stevin oder Bombelli statt Viète setzen. Noch weniger verstehe ich, warum das erwähnte Prinzip des Viète hier herangezogen wird, denn die Bezeichnung „A planum" bei Viète geht ja von einem ganz anderen Prinzip aus, als die entsprechende Bezeichnung „$a2$" bei Hérigone; „planum" bei Viète gibt an, daß A eine zweidimensionale Größe ist, aber „2" bei Hérigone bedeutet natürlich gar nicht, daß a als eine zweidimensionale Größe aufgefaßt werden soll. Ein wenig parteiisch zugunsten des Viète scheint mir auch die Darstellung

Seite 140—141. Hier wird behauptet, daß „c'est F. Viète qui nous a appris à calculer avec des lettres représentant des grandeurs, *sans perdre la trace des lettres*, en faisant usage d'un symbolisme spécial permettant d'effectuer les opérations sur les lettres". Aber bekanntlich hat M. Stifel schon 1553 die Zeichen $1A$, $1AA$, $1AAA$, $1AAAA$ etc.; $1B$, $1BB$, $1BBB$, $1BBBB$ etc.; $1C$, $1CC$, $1CCC$, $1CCCC$ etc. angewendet, um Größen und ihre Potenzen zu repräsentieren; freilich hat Stifel seine Bezeichnungen auf *unbekannte* Größen beschränkt, aber auf der anderen Seite ist seine Zeichensprache handlicher als die des Viète. Ganz irreleitend scheint mir die Bemerkung S. 141: „Ayant fait se correspondre une lettre A et une longueur déterminée, il lui [= Viète] semblait naturel de faire aussi se correspondre A.A et le carré, A.A.A et le cube construit sur cette longueur"; muß man nicht durch diese Bemerkung verleitet werden anzunehmen, daß Viète wirklich die Bezeichnungen A.A und A.A.A benutzt, besonders wenn man die Bemerkung in ihrem Zusammenhange liest? Zwar wird S. 23 (Fußnote 125) ein Beispiel einiger Bezeichnungen bei Viète gegeben, aber man kann kaum voraussetzen, daß jeder Leser des Textes alle früheren Fußnoten studiert hat.

Die Maßregeln, die meines Erachtens in erster Linie ergriffen werden sollen, um die historischen Notizen der folgenden Hefte der *Encyclopédie des sciences mathématiques* noch zuverlässiger zu machen, sind also:

1. Vermeidung von Konjekturen, besonders wenn sie sich auf solche Punkte der Geschichte der Mathematik beziehen, die ohne Ungelegenheit übergangen werden können;
2. Vermeidung von unbestimmten Angaben, die entweder irreleitend oder im günstigsten Falle nichtssagend sind;
3. große Vorsicht in bezug auf Prioritätsfragen, wenn es sich um solche Mathematiker handelt, die der Bearbeiter oder der Herausgeber besonders studiert hat.

Indessen, wie umfassend die Maßregeln auch sein mögen, die man ergreift, um die historischen Notizen zuverlässig zu machen, so kann man nie alle Ungenauigkeiten oder Unvollständigkeiten vermeiden. Teils hat man für die meisten mathematischen Theorien noch keine zusammenfassenden Darstellungen der neuesten Errungenschaften der mathematisch-historischen Forschung, und weder den besonderen Mitarbeitern noch dem Herausgeber kann die ganze mathematisch-historische Literatur bekannt und zugänglich sein; teils ist es fast sicher, daß während des Druckes eines einzelnen Heftes oder bald nach dessen Erscheinen gewisse darin vorkommende historische Notizen durch neue Forschungen modifiziert oder ergänzt werden müssen. Es wäre darum sehr nützlich, wenn etwaige Ungenauigkeiten oder Unvollständigkeiten der historischen Notizen auch nachträglich verbessert werden könnten. Für einen ähnlichen Zweck haben die Herausgeber des deutschen Originals im Archiv der Mathematik und Physik einen „Sprechsaal" begründet, aber freilich ohne besonders großen Erfolg. Dies beruht meiner Ansicht nach teils darauf, daß sich der „Sprechsaal" in einer Zeitschrift findet, die eigentlich nichts mit der Encyklopädie zu schaffen hat, teils darauf, daß es sehr schwierig ist ausfindig zu machen, ob die schon veröffentlichten Bemerkungen eine gewisse Berichtigung enthalten oder nicht. Wenn ich z. B. auf Seite 100 des ersten Bandes eine Ungenauigkeit gefunden habe, und wenn ich wissen will, ob diese schon im Archiv verbessert worden ist, so muß ich für diesen Zweck nacheinander die Stellen des Archivs aufsuchen, wo Beiträge zum „Sprechsaal" eingeführt worden sind, und es ist möglich, daß ich alle diese Stellen durchsehen muß, bevor ich den erwünschten Aufschluß bekomme.

Damit die zwei soeben hervorgehobenen Übelstände vermieden werden, erlaube ich mir vorzuschlagen, teils daß die nachträglichen Verbesserungen der *Encyclopédie des sciences mathématiques* in einem Korrespondenzblatt veröffentlicht werden, dessen einzelne Nummer der Hefte der Encyklopädie angehängt sind, teils daß in jedem neuen Anhang auf die schon publizierten Bemerkungen verwiesen wird, etwa wie ich in der Bibliotheca Mathematica hinsichtlich der kleinen Bemerkungen zu den CANTORschen *Vorlesungen* verfahren bin. Selbstverständlich sollen, wenn ein Band der *Encyclopédie* fertig wird, alle diesem Bande angehörenden Verbesserungen am Ende zusammengestellt werden.

Um sofort einen kleinen Beitrag zu dem vorgeschlagenen Korrespondenzblatt zu bieten, füge ich hier einige Bemerkungen hinzu, die sich auf die historischen Notizen des ersten Heftes der *Encyclopédie des sciences mathématiques* beziehen.

S. 17. Die erste Auflage der Arithmetik des JEAN TRENCHANT erschien 1558 (vgl. Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, S. 356).

S. 18. Der Fußnote 95) zitierte Algorismus in französischer Sprache ist wesentlich nur eine Übersetzung gewisser Stücke des *Carmen de algorismo* (im Original lautet die zitierte Stelle: „donec ad extremam venias, quae cifra vocatur"); als Verfasser des *Carmen* wird gewöhnlich ALEXANDER DE VILLA DEI genannt (vgl. Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 409—410). Dieser französische Algorismus ist übrigens ein anderer, als die S. 10 (Fußnote 47) zitierte kleine Schrift.

S. 18. Schon etwa gleichzeitig mit dem Wort „circulus" tritt das Wort „ciphra" im Abendlande auf. Diese Benennung für Null (oder vielmehr die Form ciphre?) kommt nämlich in einer Algorismus-Schrift vor, die aus der Mitte des 12. Jahrhunderts herrührt (siehe M. CURTZE, *Über eine Algorismus-Schrift des XII. Jahrhunderts;* Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. 8, 1898, S. 18, 19, 20). Aus derselben Zeit stammt vielleicht der *Prologus H. OCREATI in Helceph ad ADELHARDUM BAIOTENSEM magistrum suum* (Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. 3, 1880, S. 129—139), wo „cifre" ebenfalls (siehe z. B. S. 135, 136, 137) vorkommt. — Sacrobosco kennt (vgl. seinen *Algorismus vulgaris*, ed. M. Curtze, Kopenhagen 1897, S. 2) vier Benennungen für Null, nämlich theca, circulus, ciphra und *figura nihili;* eine Erwähnung dieser letzten Benennung dürfte nicht ohne Interesse sein, denn aus derselben ist vielleicht die Benennung *nulla* entstanden, die bisher zuerst bei den Arithmetikern am Ende des 15. Jahrhunderts (Piero Borgi, Luca Paciuolo, Nicolas Chuquet) angetroffen worden ist.

S. 22. Von der Algebra des Alkhwarizmi gibt es eine andere mittelalterliche Übersetzung als die von Libri herausgegebene; jene rührt von Robertus Retinensis her und Handschriften derselben finden sich in Wien und Dresden (vgl. Biblioth. Mathem. 13_2, 1899, S. 90). — Die Bemerkung, daß die von Libri herausgegebene anonyme Übersetzung der Alkhwarizmischen Algebra vielleicht von Gherardo Cremonese herrührt, ist nicht unbegründet; in der Tat findet sich im Verzeichnisse der von diesem verfertigten Übersetzungen auch „*Liber alchoarismi de iebra et almucabala*", und die Handschrift, welche Libri benutzte, enthält hauptsächlich (möglicherweise ausschließlich) Übersetzungen, die Gherardo Cremonese zuzuschreiben sind. Auf der anderen Seite kann freilich bemerkt werden, daß der cod. Vatic. 4606 einen *Liber qui secundum Arabes vocatur algebra et almucabala* enthält, der ausdrücklich als „translatus a magistro Giurardo Cremonese in toleto de arabico in latinum" bezeichnet wird (diese Schrift hat Boncompagni 1851 in seiner Monographie über Gherardo Cremonese herausgegeben). Die zwei erwähnten algebraischen Traktate sind nicht wesentlich verschieden, und es ist nicht leicht einzusehen, warum Gherardo Cremonese sich die Mühe gegeben hätte, zwei so wenig verschiedene Schriften über denselben Gegenstand zu übersetzen.

S. 24. Es ist richtig, daß Sacrobosco neun Rechenoperationen aufführt, und daß die *Progressio* darunter vorkommt, aber wer die Fußnote 129) liest, muß versucht sein anzunehmen, daß sich unter den übrigen auch die Potenzierung findet. Dies ist bekanntlich nicht der Fall, sondern bei Sacrobosco wird die *Numeratio* als die erste Rechenoperation betrachtet (vgl. *Algorismus vulgaris*, ed. Curtze, S. 1).

S. 27. „Compendium arithmeticae mercatorum" ist nur eine lateinische Übersetzung des deutschen Titels der Widmanschen Arithmetik vom Jahre 1489 und soll also gestrichen werden. — Die Angabe, daß das Rechenbuch des Grammateus in Nürnberg „1521/28" erschien, beruht wohl auf einem Mißverständnis; die Widmung des Buches ist von 1518 datiert, aber der Druck erfolgte nach C. F. Müller erst im Jahre 1521 (diese Zahl findet sich tatsächlich auf dem Titelblatte zum „Zornal"). Auf der anderen Seite hat Curtze (siehe Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, S. 507—508) darauf hingewiesen, daß im Buch selbst das Druckjahr 1521 gar nicht vorkommt, und aus diesem Grunde geben einige Verfasser 1518 als Erscheinungsjahr an.

S. 28. Es gibt nur eine einzige Auflage der Algebra des Bombelli (vgl. Biblioth. Mathem. 7_2, 1893, S. 15—17); die Worte: „2^de^ éd. Bologne 1579" sind also zu streichen.

S. 30. Hier wird bemerkt (Fußnote 144), daß im 12. Jahrhundert die Benennung „radix" für x vorherrschend ist, während auf der anderen Seite die Benennung „res" von Leonardo Pisano an die Oberhand gewinnt. Aber schon im 12. Jahrhundert wurde das Wort „res" so oft benutzt, daß es meiner Ansicht nach unmöglich ist zu entscheiden, ob damals „radix" oder „res" vorherrschend war. In der von Boncompagni (*Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese*, Roma 1851, S. 28—51) herausgegebenen *Liber qui secundum Arabes vocatur algebra et almucabala*, die ausdrücklich dem Gherardo Cremonese als Übersetzer zugeschrieben wird, kommt zuerst ausschließlich „radix", dann in den „capitula majora" teils „radix", teils „res" vor. In der von Curtze (*Anaritii in* *decem libros priores elementorum* Euclidis *commentarii*, Leipzig 1899, S. 252—386) herausgegebenen, ebenfalls dem Gherardo Cremonese zugeschriebenen Übersetzung eines Kommentars zum 10. Buche der *Elementa*, scheint „radix“ überall die Bedeutung von Quadratwurzel zu haben, während (S. 264 des gedruckten Textes) die Unbekannte „res“ genannt wird. In dem von Libri (*Histoire des sciences mathématiques en Italie* I, S. 253—289) herausgegebenen Übersetzung: *Liber* Maumeti *filii* Moysi alchoarismi *de algebra et almuchabala*, die vielleicht von Gherardo Cremonese verfertigt ist, wird die Unbekannte abwechselnd „radix“ (S. 254—265, 273—274, 284—285) und „res“ (S. 266—268, 275—284, 285—286) genannt. In der ebenfalls von Libri (a. a. O., S. 304—369) herausgegebenen *Liber augmenti et diminutionis*, den Gherardo Cremonese möglicherweise übersetzt hat, dürfte für x nur das Wort „res“ benutzt werden. — Ob Johannes Hispalensis überhaupt eine algebraische Schrift übersetzt hat, ist wohl nicht möglich zu entscheiden, und an einer Stelle, die ihm ohne genügende Gründe zugeschrieben worden ist, kann man nicht wissen, ob „res“ oder „radix“ die Unbekannte bezeichnet (vgl. Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 409). — Platone Tiburtino scheint weder „radix“ noch „res“ sondern „latus“ benutzt zu haben (siehe Abhandl. zur Gesch. der mathem. Wiss. **12**, 1902, S. 34, 36, 38). — Ob Robertus Retinensis in seiner Übersetzung der Alkhwarizmischen Algebra durchgehend das Wort „radix“ anwendet, ist mir nicht bekannt.

S. 31. Auch der Name „causa“ für eine unbekannte Größe kommt bei Leonardo Pisano (*Scritti*, ed. Boncompagni **2**, S. 236 Z. 18) vor.

S. 34. T. Harriot starb bekanntlich schon 1621, und seine posthume *Artis analyticae praxis* erschien 1631 (nicht 1632).

S. 37. Schon vor Newton hatte J. Hudde durch ein und denselben Buchstaben sowohl einen positiven als einen negativen Zahlwert bezeichnet (vgl. Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 208).

S. 40. Lange vor A. Girard und T. Harriot hatte M. Stifel das Produkt zweier Größen, die beide durch Buchstaben repräsentiert waren (z. B. das Produkt der zwei unbekannten Größen bei der algebraischen Lösung gewisser Probleme) durch einfache Juxtaposition bezeichnet (vgl. z. B. Biblioth. Mathem. 13_2, 1899, S. 55). Die Bemerkung „ce qui a été le cas jusqu'à F. Viète“ in der Fußnote 159 ist darum auch ungenau.

S. 46. Älter als die Benennung „numerus ruptus“ ist jedenfalls nicht nur die Benennung „minutia“ (S. 53, Fußnote 181 lies „minutiae“ für „minutae“), sondern auch „fractio“ (vgl. z. B. M. Curtze, *Über eine Algorismus-Schrift des XII. Jahrhunderts*, Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. 8, 1898, S. 21, 23, usw.). Auch nach Leonardo Pisano wurde im christlichen Mittelalter fast ausschließlich „minutia“ oder „fractio“ benutzt; soviel ich weiß, kommt „numerus ruptus“ oder eine entsprechende Benennung nur bei einigen italienischen Verfassern und am Ende des Mittelalters bei N. Chuquet vor.

S. 52. Der Ausdruck (Fußnote 180): „des divisions décimales mélangées à des divisions sexagésimales“ ist ohne Zweifel korrekt, aber ich fürchte, daß er den meisten Lesern unverständlich sein wird. In der Tat wird an der zitierten Stelle des Traktates: *Ioannes Hispalensis liber algorismi de pratica arismetrice* $\sqrt{2}$ auf folgende Weise ermittelt. Zuerst berechnet der Verfasser $\sqrt{2\,000\,000}$ und findet den Näherungswert 1414; er folgert hieraus, daß $\sqrt{2}$ gleich 1 und einem Bruche ist. Der Bruch ist natürlich der Dezimalbruch 0,414, aber diese Tatsache erwähnt der Verfasser nicht ausdrücklich, sondern verwandelt sogleich den Bruch in $24'\ 50''\ 24'''$, so daß $\sqrt{2^0} = 1^0\ 24'\ 50''\ 24'''$.

S. 53. Es gibt nur eine Auflage des *Canon mathematicus* des Viète (vgl. Biblioth. Mathem. 2_3, 1901 S. 356); Z. 7 ist also „1e éd.“ zu streichen.

S. 54. Es verdient vielleicht bemerkt zu werden, daß H. Grammateus in seinem Rechenbuch die successiven Potenzen der unbekannten Größe durch pri, se, ter, usw. bezeichnete; hier ist wohl zum erstenmal in einer *gedruckten* Schrift der Begriff der Exponenten durch die Bezeichnungen angegeben (vgl. J. Tropfke, *Geschichte der Elementar-Mathematik* **1**, Leipzig 1902, S. 197).

S. 63. Es wäre erwünscht, hier einige Notizen über die Vorgeschichte der Kombinatorik vor Pascal zu haben. Solche Notizen sind in den Cantorschen *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* zu finden; leichter können sie aus Tropfkes soeben zitierter Arbeit (**2**, Leipzig 1903, S. 351—353) entnommen werden.

S. 136. In betreff der Gleichung $2x^2 - y^2 = \pm 1$, hat F. Hultsch in der Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, S. 8—12 auf eine Behandlung derselben bei Proklos hingewiesen, und hervorgehoben, daß Proklos augenscheinlich aus einer vorplatonischen Quelle geschöpft hat.

S. 138. Als Ergänzung der Notiz über das erste Vorkommen des Termes „surdus" sei bemerkt, daß dieser Term auch in der von Gherardo Cremonese verfertigten Übersetzung *Liber qui secundum Arabes vocatur algebra et almucabala* (ed. Boncompagni, S. 41) und in der vielleicht von demselben Übersetzer herrührenden *Liber Maumeti filii Moysi alchoarismi de algebra et almucabala* (ed. Libri, *Hist. d. sc. mathém. en Italie* I, S. 269, 270) vorkommt. An diesen beiden Stellen wird die rationale Zahl „nota" genannt. — Die Benennung „sursolidum" kommt schon vor Descartes bei Initius Algebras (siehe M. Curtze, *Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance*, Leipzig 1902, S. 474, 476), sowie bei Riese und Rudolff (vgl. Tropfke, a. a. O. **1**, S. 196) vor. Dagegen habe ich die Form „surdesolidum" bei keinem Verfasser auffinden können. In einer kleinen Schrift *Regule delacose secundum 6 capitula*, die aus der Mitte des 15. Jahrhunderts herrührt, wird x^5 durch „du^x cubo" bezeichnet (siehe M. Curtze, *Ein Beitrag zur Geschichte der Algebra im fünfzehnten Jahrhundert;* Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. 7, 1895, S. 52).

S. 144. Die Bemerkung: „R. Descartes, le premier, désigne par une seule et même lettre un nombre quelconque positif ou négatif" ist meiner Ansicht nach entschieden falsch, und sie scheint auch mit der richtigen Angabe S. 37 (Fußnote 153) unvereinbar. Jeder Beleg für die Richtigkeit der Bemerkung fehlt, und in dem zitierten Aufsatze von P. Tannery wird ausdrücklich hervorgehoben, daß die betreffende Bezeichnung „s'est introduite peu à peu comme la conséquence de son [= Descartes] œuvre, mais les auteurs véritables en sont restés anonymes". Jetzt dürfte man mit gutem Rechte behaupten können, daß J. Hudde zuerst die Bezeichnung angewendet hat (vgl. oben die Bemerkung zur Seite 37).

Es ist wohl kaum nötig hinzuzufügen, daß das Korrespondenzblatt sich nicht ausschließlich mit Berichtigung oder Ergänzung historischer Angaben beschäftigen sollte. Die *Encyclopédie des sciences mathématiques* ist ja nicht in erster Linie eine historische Arbeit, und ich meine, daß die Berichtigung oder die Ergänzung der rein mathematischen Angaben gerade die Hauptaufgabe des Korrespondenzblattes sein würde. Wenn ich im vorhergehenden nichts hierüber gesagt habe, so ist der Grund dazu lediglich, daß ich die *Encyclopédie* in diesem Artikel ausschließlich als ein Hilfsmittel zur Verbreitung mathematisch-historischer Kenntnisse betrachtet habe.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik".

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen". BM = Bibliotheca Mathematica.

1 : 12, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 265. — **1 : 15,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 323. — **1 : 22, 29, 34,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 265—266. — **1 : 36, 64,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 137. — **1 : 103,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 266. — **1 : 135,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 266; **3**$_3$, 1902, S. 137. — **1 : 144, 155, 169, 171,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 137—138. — **1 : 190,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 266. — **1 : 195,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 56. — **1 : 197, 202,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 266. — **1 : 207,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 283. — **1 : 225, 234,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 138. — **1 : 255,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 238. — **1 : 272,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 396. — **1 : 283,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 499. — **1 : 284, 321,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 266—267. — **1 : 370,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 319. — **1 : 383,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 267.

---

1 : 386. Der Satz, daß in jedem sphärischen Dreiecke die Summe der drei Seiten kleiner als ein Größterkreis der Kugel sein muß, rührt nach A. A. Björnbo (*Studien über Menelaos' Sphärik;* Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. **14**, 1902, S. 20) nicht von Menelaos her, sondern ist von Maurolico in seiner Menelaos-Ausgabe (1558) hinzugefügt worden. G. Eneström.

---

1 : 395, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 323. — **1 : 400,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 267. — **1 : 429,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 324. — **1 : 432,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 267. — **1 : 434—435,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 396—397. — **1 : 436,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S 138. — **1 : 437, 440,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 267. — **1 : 457,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 238. — **1 : 463,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 139, 324. — **1 : 466,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 397. — **1 : 467, 469,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 267. — **1 : 475,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 267—268; **3**$_3$, 1902, S. 139; **4**$_3$, 1903, S. 283. — **1 : 476,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 268. — **1 : 508,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 68. — **1 : 510,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 314. — **1 : 519—520,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 239. — **1 : 537, 540, 542,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 268. — **1 : 622,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 143. — **1 : 641,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 139. — **1 : 661,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 499 — **1 : 662,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 499; **3**$_3$, 1902, S. 139. — **1 : 663,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 405. — **1 : 671,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 499.

---

1 : 673. Herr Cantor ist der Ansicht, daß sich der Passus des *Algoritmi de numero Indorum*: „quod in alio libro arithmetice dicitur" auf eine (sonst ganz unbekannte) Schrift über die später sogenannte spekulative Arithmetik bezieht, und übersetzt darum: „was in einem anderen Buche der Arithmetik ausgesprochen ist". Aber liegt es nicht näher anzunehmen, daß Alkhwarizmi

gerade das von ihm zitierte „Buch Aldscheber und Almukabala" meint, so daß man „in **dem** anderen Buche" statt „in einem anderen Buche" übersetzen soll? Daß tatsächlich die Algebra im 12. Jahrhundert „arithmetica" genannt wurde, geht z. B. aus einer Stelle des Anaritius (ed. Curtze, Leipzig 1899, S. 267) hervor. G. Eneström.

---

1 : 675. Dem Berichte über den Traktat: *Algoritmi de numero Indorum* könnte hinzugefügt werden, daß in der von Boncompagni herausgegebenen Handschrift (die einzige bisher bekannte) dieses Traktates der Schluß fehlt. Die letzten Zeilen des Druckes beziehen sich auf die Multiplikation von $3\frac{1}{2}$ und $8\frac{3}{11}$; um diese Multiplikation vorzubereiten, schreibt der Verfasser $\begin{array}{cc} 3 & 8 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{11} \end{array}$ und dann bricht der Text mit den Worten: „sicque constitues .VIII." ab. Wahrscheinlich wurde nach der Multiplikation noch die Division von Brüchen (die freilich S. 20—21 des gedruckten Textes im Vorübergehen an einem Beispiel erläutert wurde) behandelt, und ich halte es für höchst wahrscheinlich, daß der Traktat auch Wurzelausziehung lehrte, denn nach der Behandlung der Operationen mit ganzen Zahlen bemerkt der Verfasser: „et nunc incipiemus tractare de multiplicatione fractionum, et earum divisione, et de extractione radicum, si Deus uoluerit". G. Eneström.

---

1 : 687—689, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143—144; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 205—206. — **1 : 694**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 284. — **1 : 704, 706, 708, 714, 735, 736, 744, 748**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499—500. — **1 : 749**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268.

---

1 : 753. Es ist mir nicht gelungen den Sinn der folgenden Bemerkung zu verstehen: „Negativ heben wir hervor, daß [bei Johannes Hispalensis] complementäre Rechnungsverfahren, wie wir sie schon mehrfach vergeblich gesucht haben, nicht vorkommen. Einige lateinische Ausdrücke scheinen zwar an jene Rechnungsverfahren zu erinnern, aber es ist nur Schein." Die von Herrn Cantor angedeuteten „lateinischen Ausdrücke" sind wohl die S. 97 der Boncompagnischen Ausgabe vorkommenden: „omnis numerus infra denarium multiplicatus in se ipsum reddit summam sue denominationis decuplate, subtracta inde multiplicatione differentie ipsius ad denarium facta in se ipsum"; „si maiorem per minorem multiplicare uolueris, differentiam maioris ad denarium multiplica in minorem, et ipsam multiplicationem subtrahe a denominatione factam a minore, et quod remanserit, est summa que prouenit ex multiplicatione diuersorum numerorum". Aber wenn man dieselben in moderne Zeichensprache übersetzt, so erhält man die Formeln

$$a^2 = 10a - a\,(10 - a),$$
$$ab = 10a - a\,(10 - b),$$

und meiner Ansicht nach können diese Formeln entschieden als eine Art komplementärer Multiplikation betrachtet werden. Herr Cantor nennt ja selbst S. 852 das bei Ocreat vorkommende Rechnungsverfahren

$$a^2 = 10\,(a - [10 - a]) + (10 - a)^2$$

„eine Art complementärer Multiplikation". Übrigens erhält man aus der Formel $ab = 10a - a\,(10 - b)$ die gewöhnliche Formel für komplementäre Multiplikation, wenn man jene auf $a(10-b)$ anwendet. Da nämlich laut derselben

$$a(10-b)=10(10-b)-(10-a)(10-b)$$

ist, so wird

$$ab=10(a-[10-b])+(10-a)(10-b).$$

G. Eneström.

---

1 : 754. Noch in der zweiten Auflage der *Vorlesungen* gibt Herr Cantor an, daß Johannes Hispalensis das Quadrat der Unbekannten *res* nennt, aber aus einem Zusatze zum zweiten Bande der Tropfkeschen *Geschichte der Elementar-Mathematik* (S. 496) geht hervor, daß Herr Cantor jetzt die betreffende Stelle des Traktates: *Ioannis Hispalensis liber algorismi de pratica arismetrice* etwas anders deutet, so daß *res* die Unbekannte, *radix* dagegen die Quadratwurzel aus der unbekannten Größe repräsentiert. Diese Deutung gefällt mir auch viel mehr als die andere; in der Tat wird im Traktate ausdrücklich angegeben, daß *res* die gesuchte Größe bezeichnet. Freilich ist es nicht leicht zu verstehen, warum die drei Fälle der quadratischen Gleichung unter den Formen $x+10\sqrt{x}=39$, $x+9=6\sqrt{x}$, $3\sqrt{x}+4=x$ dargestellt werden.

G. Eneström.

---

1 : 756, 757, 767, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 500—501. — **1 : 794,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1 : 804, 805, 807, 808, 812, 823, 852,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268—269. — **1 : 853,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501. — **1 : 854,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 324; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 206. — **1 : 855,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501.

---

2 : 7, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351. — **2 : 8, 10,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501—502. — **2 : 14—15,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 200. — **2 : 20,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **2 : 25,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 274. — **2 : 31,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351—352; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239—240. — **2 : 34,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144. — **2 : 37,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2 : 38,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 39,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2 : 41,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 53,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 201. — **2 : 57,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 59,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2 : 63,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 206. — **2 : 70,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 417. — **2 : 73, 82, 87, 88, 89, 90,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502—503.

---

2 : 91—92. Der von Ch. Henry publizierte *Algorisme* ist wesentlich nur eine Übersetzung einiger Stücke des *Carmen de algorismo,* das gewöhnlich Alexander de Villa Dei zugeschrieben wird, und das von Halliwell (*Rara mathematica*, London 1839, S. 73—83) zum Abdruck gebracht worden ist. Hier unten stelle ich einige Zeilen des Originals und der Übersetzung zusammen.

Carmen de algorismo	*Algorisme*
Subtrahis aut addis a dextris vel mediabis:	Se tu assembles ou abas ou dimidies tu commenceras a destre
A leva dupla, divide, multiplicaque.	se tu dobbles ou multeplies ou deuises. tu commenceras a senestre.
Cum multiplicaveris, adde Totali summae, quod servatum fuit ante, Redditurque tibi numerus quem proposuisti.	Et quant tu lauras multiplie tu iasambleras le nombre ke tu gardes par dehors. et lues (?) troueras ton premier nombre.
Si quid erit remanens non est cubicus, sed habetur Major sub primo qui stat radix cubicati, Servari debet quicquid radice remansit, Extracto numero, decet hoc addi cubicato. Quo facto, numerus reddi debet tibi primus.	Se aucune cose teremaint li nombres ke tu proposes nest pas cubes. mais tu as le plus grant desous. Se tu multiplies le rachine par soi cubelmt. Apres aiouste le remanant si dois rauoir le pr merain

Das *Carmen* beschreibt sieben Rechenoperationen, nämlich Addition, Subtraktion, Verdoppelung, Halbierung, Division, Multiplikation, Radizierung. Der *Algorisme* sagt: „6. parties sont dangorisme“, nämlich Addition, Subtraktion, Verdoppelung, Halbierung, Division (das Wort „deuiser“ fehlt freilich im Henryschen Abdrucke), Multiplikation, aber am Ende ist dennoch aus dem *Carmen* das Stück über Kubikwurzelausziehen übersetzt; dagegen fehlen die Stücke, die Subtraktion, Verdoppelung, Halbierung und Multiplikation behandeln, und ebenso das Quadratwurzelausziehen. Der Verdacht des Herrn Cantor, daß die erhaltene Handschrift uns nur unzusammenhängende Bruchstücke aus einem umfangreicheren Ganzen bietet, ist also durchaus begründet; ob die Handschrift als unvollständige Abschrift einer im 13. Jahrhundert vorhandenen Übersetzung des ganzen *Carmen* betrachtet werden soll, oder ob nur einige Stücke des *Carmen* französisch übersetzt worden sind, dürfte für uns ziemlich gleichgültig sein. Um diese Frage zu entscheiden, wäre es übrigens nötig zu wissen, ob Herr Henry seine Vorlage richtig gelesen und wiedergegeben hat.

G. Eneström.

---

2 : 92, siehe BM **1**₃, 1900, S. 503. — **2 : 97,** siehe BM **3**₃, 1902, S. 406. — **2 : 98,** siehe BM **1**₃, 1900, S. 269—270. — **2 : 100,** siehe BM **3**₃, 1902, S. 140. — **2 : 101,** siehe BM **3**₃, 1902, S. 325. — **2 : 104—105,** siehe BM **1**₃, 1900, S. 503; **4**₃, 1903, S. 397—398. — **2 : 111,** siehe BM **2**₃, 1901, S. 352. — **2 : 116,** siehe BM **3**₃, 1902, S. 406. — **2 : 122,** siehe BM **1**₃, 1900, S. 503—504. — **2 : 126, 127,** siehe BM **3**₃, 1902, S. 406. — **2 : 128,** siehe BM **1**₃, 1900, S. 504. — **2 : 132,** siehe BM **1**₃, 1900, S. 515—516. — **2 : 143,** siehe BM **1**₃, 1900, S. 504.

---

2 : 155. Die von E. Narducci 1883 veröffentlichten Auszüge aus der Schrift *Introductorius liber qui et pulveris dicitur in mathematicam disciplinam* stimmen wesentlich mit dem von Boncompagni 1857 herausgegebenen Traktat: *Ioannis Hispalensis liber algorismi de pratica arismetrice* überein. Wenn man die Auszüge mit dem Traktat vergleicht, ist man zuweilen versucht anzunehmen, daß die zwei Schriften zwei Übersetzungen ein und derselben arabischen Arbeit sind, aber an den meisten Stellen stimmen sie so wörtlich überein, daß man diese Annahme nicht festhalten kann. Ein paar solche Stellen sind hier unten abgedruckt.

Ioannis Hispalensis liber algorismi.	*Introductorius liber qui et pulveris dicitur.*
Licet cuiuslibet numeri partium denominatio possit fieri infinitis modis secundum infinitos numeros, placuit tamen Indis, denominationem suarum fractionum facere a sexaginta. Diuiserunt enim gradum unum in sexaginta partes, quas uocauerunt minuta. Item unumquodque minutorum diuidentes in sexaginta alias partes, appellauerunt eas secunda, eo quod essent partes partium in secundo loco. Deinde partientes unumquodque secundum in sexaginta partes, dixerunt eas tercia.	Et si cuiusque numeri denominatio partium possit fieri infinitis modis secundum infinitos numeros, placuit tamen egiptiis denominationem suarum fractionum facere a .lx. diuiserunt gradum unum in .lx. partes, quas uocauerunt minuta. Item unumquodque minutorum diuidentes in .lx. partes alias appellauerunt eas secunda, eo quod essent partes partium in secundo loco, deinde partientes quodque secundum in .lx. partes, dixerunt eas tercia.

Postquam multiplicandi et diuidendi tam integros quam fractiones, doctrinam plenam tradidimus, restat ut inueniendi radices numerorum regulam deinceps assignemus. Cuius rei scientia non solum ad geometriam et astronomiam, uerum etiam ad totam quadruui disciplinam ualde est necessaria, sicut omnis asserit quicumque studuit in mathematica scientia. Vnde uidendum est, quid sit numerorum radix. Radix autem cuiuslibet numeri est quilibet alius numerus, qui in se multiplicatus reddit ipsum. Vnde binarius radix dicitur quaternarii, quia ductus in se ipsum reddit quaternarium.

Post traditam multiplicandi et diuidendi plenam doctrinam, restat de radicibus numerorum dicendum. Quarum scientia non solum ualet ad geometriam et astronomiam, uerum etiam ad totam quadriuii disciplinam ualde est necessaria, quod leviter patet studenti in mathematica scientia. Videndum itaque est quid sit numerorum radix. Radix numeri est alter numerus in se multiplicatus reddens ipsum. Binarius enim radix dicitur quaternarii, quia in se ductus reddit quaternarium.

Aus der ersten Stelle geht hervor, daß die Erfindung der Sexagesimalbrüche von dem *Liber algorismi* den Indern, von dem *Liber introductorius* dagegen den Ägyptern zugeschrieben wird. Merkwürdigerweise wird an einer anderen Stelle, wo der *Liber algorismi* ebenfalls von den Indern spricht, im *Liber introductorius* von den „phylosophie civibus“ gesprochen. An einer dritten Stelle, wo der *Liber algorismi* die Worte „Indi dederunt“ hat, liest Narducci in der Handschrift des *Liber introductorius* „indierunt“.

Das von Narducci abgedruckte Stück über die römischen Minutien fehlt im *Liber algorismi;* es steht ja auch mit dem vorangehenden in keinem Zusammenhange, und stammt sicherlich aus einer ganz anderen Quelle als das Übrige her.

G. Eneström.

2:**157**, **158**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352. — **2**:**163**, **166**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 504. — **2**:**175**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140. — **2**:**210**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352—353. — **2**:**218**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 284. — **2**:**219**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 353. — **2**:**229**, **242**, **243**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 504—505. — **2**:**253**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 353. — **2**:**273**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 505. — **2**:**274**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 325.

2:281. Der Passus: „Nun erklart er [Regiomontanus] eben die Construction [der Winkeldreiteilung], welche Campanus am erwähnten Orte lehrt, ohne dessen Namen auch nur zu nennen“ sollte modifiziert werden, da die fragliche Konstruktion in keiner der bisher untersuchten Handschriften der Euklid-Übersetzung des Campanus vorkommt (vgl. die Bemerkung zur Seite 104—105 in der BM 4$_3$, 1903, S. 397—398).

G. Eneström.

2:**282**, **283**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 506; **2**$_3$, 1901, S. 353—354. — **2**:**284**, **286**, **287**, **289**, **290**, **291**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 506—507. — **2**:**296**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 354. — **2**:**313**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2**:**317**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 69. — **2**:**328**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140; **4**$_3$, 1903, S. 285. — **2**:**334**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2**:**353**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507; **4**$_3$, 1903, S. 87. — **2**:**358**, **360**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 87. — **2**:**381**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2**:**385**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 81; **4**$_3$, 1903, S. 207. — **2**:**386**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507; **5**$_3$, 1904, S. 306. — **2**:**395**, **401**, **405**, **425**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507—508. — **2**:**429**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 201—202. — **2**:**430**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 145. — **2**:**440**, siehe

BM **4**$_3$, 1903, S. 285. — **2:442,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 325. — **2:449,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140. — **2:454,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 242. — **2:474, 480,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140—141. — **2:481,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 508. — **2:482,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 508; **2**$_3$, 1901, S. 354; **3**$_3$, 1902, S. 240. — **2:484,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2:486, 489, 490,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2:497,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509; **4**$_3$, 1903, S. 87. — **2:509,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270, 509. — **2:510,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2:512,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2:514, 516, 517,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2:530,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 354—355; **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2:532, 535, 541, 548, 549,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509—510. — **2:550,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 355. — **2:554,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2:555, 565, 567, 568,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 285—286 — **2:569,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2:572—573,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510; **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2:576,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 355—356. — **2:579,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 145. — **2:580—581,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 207. — **2:582,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2:583,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270; **2**$_3$, 1901, S. 356. — **2:585,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 69—70. — **2:592,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2:594,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270. — **2:597,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270; **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2:599—600,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2:602, 603—604,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270—271. — **2:611,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 356—357. — **2:612,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2:613,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357; **5**$_3$, 1904, S. 306. — **2:614, 620,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2:621, 623,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146—147. — **2:638,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 147. — **2:642, 643,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271. — **2:655,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2:656,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 286 — **2:659, 660,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 147—148 — **2:665,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271. — **2:669,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 203. — **2:674,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 88. — **2:683,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148. — **2:693,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 287. — **2:700, 701, 703, 704, 705,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271—273.

2:715. Es wäre vielleicht angebracht, die Bemerkung, daß CHRISTIAN HUYGENS 1651 ein „noch ganz unbekannter junger Schriftsteller“ war, ein wenig zu modifizieren. In der Tat hatte FRANCISCUS VAN SCHOOTEN zwei Jahre früher in seinem Kommentar zu DESCARTES' Geometrie eine Lösung einer elementargeometrischen Aufgabe von HUYGENS mitgeteilt, und dabei bemerkt, diese Lösung sei entnommen „ex inventis nobilissimi et praeclari juvenis D. CHRISTIANI HUGENII, quibus sibi jam pridem apud doctos tantam paravit laudem atque admirationem, ut non nisi magna quaeque ab eo expectanda esse affirmare non veriti fuerint“ (siehe *Geometria a R. DES CARTES anno 1637 gallice edita . . . in linguam latinam versa . . . opera et studio F. A SCHOOTEN* [Leiden 1649], S. 203—204). Ganz unbekannt als Mathematiker war HUYGENS also 1651 nicht.

G. ENESTRÖM.

2:719, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2:720,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 287. — **2:721,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2:742,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273; **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2:746,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2:747,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 173; **2**$_3$, 1901, S. 225. — **2:749,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 88. — **2:766,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 142.

2:766. Die meisten Verfasser, die sich mit WALLIS' *Arithmetica infinitorum* beschäftigt haben, geben als Erscheinungsjahr 1655 an, und diese Angabe stimmt mit der Bemerkung auf dem Titelblatt des Abdruckes im zweiten Bande (1693) der Folio-Ausgabe von WALLIS *Opera* überein; noch dazu ist das Vorwort der Arbeit vom 19. Juli 1655 datiert. Indessen hat die Originalausgabe der *Arithmetica infinitorum* auf dem Titelblatt 1656 als Druckjahr; es gibt sogar Exemplare dieser Ausgabe, die mit drei anderen Schriften von WALLIS vereinigt und mit gemeinsamem Titelblatt versehen sind, das ebenfalls 1656 als Druckjahr trägt. Die drei fraglichen Schriften haben alle besondere Titelblätter, die beziehungsweise die Jahreszahl 1656, 1655, 1655 tragen. G. Eneström.

---

2 : 767, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148, 357—358. — **2 : 770,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 208. — **2 : 772, 775,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 358—359. — **2 : 777,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 204. — **2 : 783,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88—89. — **2 : 784,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2 : 793, 798, 799,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307. — **2 : 802,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 208. — **2 : 812,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 37. — **2 : 820,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307. — **2 : 825,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2 : 832,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 203—204. — **2 : 840,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148—149. — **2 : 843,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 328. — **2 : 856, 865,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149. — **2 : 876, 878, 879,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511. — **2 : 891,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2 : 898,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 37, 208. — **2 : 901,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511. — **2 : 919,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 204. — **2 : VIII** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142. — **2 : IX, X** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511—512.

---

3 : 9, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359. — **3 : 10,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 518. — **3 : 11,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3 : 12, 17,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512. — **3 : 22,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3 : 24,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3 : 25,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209, 399. — **3 : 26,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359. — **3 : 45—48, 49, 50,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512—513. — **3 : 70,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 360. — **3 : 82,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 308. — **3 : 100,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149. — **3 : 112,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209—210. — **3 : 116,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 117,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 518. — **3 : 123,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 399. — **3 : 124,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 407—408; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 400. — **3 : 126,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 288. — **3 : 131,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 210. — **3 : 151,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326. — **3 : 167, 172—173,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 400. — **3 : 174,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149—150. — **3 : 183,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 432. — **3 : 188,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 241. — **3 : 201,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 207,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 519. — **3 : 215,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150. — **3 : 218,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 220,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326. — **3 : 224,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3 : 225, 228,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150. — **3 : 232,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514.

---

3 : 244. Als Erscheinungsjahr der letzten Auflage der *Analyse des infiniment petits* gab ich (BM 5_3, 1904, S. 205) unter Verweisung auf J. W. Müller 1784 an, aber inzwischen habe ich selbst ein Exemplar dieser Auflage eingesehen, das auf dem Titelblatt das Druckjahr 1781 trägt. Der Titel lautet: *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes. Par M. Le Marquis de L'Hospital. Nouvelle édition. Revue & augmentée par M. Le Fevre.* Paris, Joubert MDCCLXXXI. 4^0. Auch Poggendorff (*Biographisch-literarisches Handwörterbuch* I, 1406) gibt an, daß Louis Lefèvre-Gineau 1781 eine neue Auflage der *Analyse des infiniment petits* herausgab.

Meine Annahme, daß keine Auflage im Jahre 1720 erschien, wird durch folgende Bemerkung im Vorworte (S. XV) der Auflage von 1768 bestätigt: „Les *Infiniment Petits* de M. le Marquis de l'Hôpital ont déjà eu deux éditions, l'une en 1696, & l'autre en 1715"; etwas weiter unten (S. XVI) wird die 1768 erschienene Auflage „la troisième édition" genannt.

G. Eneström.

---

3 : 244—245, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 205. — **3 : 246,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151. — **3 : 250,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3 : 303,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 155. — **3 : 330—331,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 241—242. — **3 : 337,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 206. — **3 : 370—371,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 308. — **3 : 447, 455,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 151. — **3 : 473,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 154—155; **4**$_3$, 1903, S. 401 — **3 : 477, 479,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 151—152. — **3 : 497, 498,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 309. — **3 : 507,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 71—72. — **3 : 521,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441. — **3 : 535,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 401. — **3 : 536,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 206. — **3 : 565,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 326—327. — **3 : 571,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 327; **5**$_3$, 1904, S. 72. — **3 : 578,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 327; **5**$_3$, 1904, S. 309. — **3 : 586, 609,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 309—310. — **3 : 614,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 89—90. — **3 : 636—637,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441. — **3 : 646—647,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 206—207. — **3 : 652,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 446; **5**$_3$, 1904, S. 207. — **3 : 660,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441. — **3 : 667,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441—442; **5**$_3$, 1904, S. 207—208, 310. — **3 : 686,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 208. — **3 : 689, 695,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 442. — **3 : 750, 758,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 446. — **3 : 759,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 208. — **3 : 760, 766,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 446—447. — **3 : 774, 798,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 442—443. — **3 : 845,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 447; **3**$_3$, 1902, S. 327—328. — **3 : 848, 881,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 443. — **3 : 882,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 447.

---

3 : 882. Die Bemerkung: „Da (in der Eulerschen Abhandlung *De infinitis curvis ejusdem generis*) finden wir zum ersten Male ausgeführt . . . die Benutzung eines integrirenden Factors“ mit der folgenden Erwähnung zweier von Euler behandelten Differentialgleichungen kann leicht zu der Annahme veranlassen, daß die Benutzung der einfachen integrierenden Faktoren $\frac{1}{a}$ und $\frac{x}{a^n}$ im Jahre 1734 etwas neues war. Freilich hat Herr Cantor schon S. 227 darauf aufmerksam gemacht, daß sich Johann Bernoulli in der 9. seiner *Lectiones mathematicae de methodo integralium aliisque* aus den Jahren 1691 und 1692 ähnlicher integrierenden Faktoren bedient hatte, aber die *Lectiones* erschienen bekanntlich erst 1742, also nach der Veröffentlichung der Eulerschen Abhandlung *De infinitis curvis ejusdem generis*. Es ist darum nicht ohne Interesse zu bemerken, daß der wesentliche Inhalt der „Lectio nona“ schon im Jahre 1708 veröffentlicht wurde, und zwar im 2. Teile (S. 762—764) der *Analyse démontrée* von Charles Reyneau. Aus Johann Bernoullis Brief an Leibniz vom 8. April 1711 geht hervor, daß Reyneau den Marquis de l'Hôpital auf dessen Landgute besucht hatte und dabei Gelegenheit bekam, Handschriften von Johann Bernoulli einzusehen. G. Eneström.

---

3 : 890, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 401. — **3 : 892,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 143. — **3 : IV** (Vorwort), siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 443.

Anfragen und Antworten.

120. Woher hat Leonardo Pisano seine Kenntnisse der Elementa des Euklides entnommen? Im 14. Kapitel seiner *Liber abbaci* hat sich Leonardo Pisano dreimal des Wortes „riti“ oder „riton“ (das *ῥητή* des Euklides) bedient, um eine rationale Größe zu bezeichnen (siehe *Scritti di Leonardo Pisano, pubblicati di* B. Boncompagni **1**, Roma 1857, S. 356 Z. 29, 32; S. 360 Z. 19). Unter Bezugnahme auf diesen Umstand wird in der *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées* tome **1**, vol. 1

(Paris 1904), S. 138 bemerkt (sicherlich rührt die Bemerkung von PAUL TANNERY her), das 14. Kapitel des *Liber abbaci* sei allem Anschein nach „directement tiré du grec d'EUCLIDE, probablement expliqué oralement à LÉONARD DE PISE par un Byzantin". Nun war man ja früher gewohnt anzunehmen, das Abendland verdanke erst dem LEONARDO PISANO, wieder eingehendere mathematische Kenntnisse bekommen zu haben, aber nach den Untersuchungen von CURTZE ist diese Annahme zu modifizieren, und man weiß jetzt, daß LEONARDO die zu seiner Zeit vorhandenen lateinischen Übersetzungen aus dem Arabischen und Hebräischen ausgiebig und zum Teil wörtlich benutzt hat (vergl. Biblioth. Mathem. 4_3, 1904, S. 406). Es liegt darum sehr nahe zu vermuten, daß LEONARDO auch eine lateinische EUKLIDES-Übersetzung zu seiner Verfügung hatte, und es ist an sich gar nicht unmöglich, daß in einer solchen Übersetzung das Wort „riti" vorkam; in der Tat gibt es eine Übersetzung (mit Kommentar) der Bücher 5 und 6 der *Elementa*, wo sich die griechischen Wörter „anagrafum", „engrafum", „perigrafum", „peribolum" etc. finden (siehe A. A. BJÖRNBO, *Studien über MENELAOS' Sphärik;* Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. **14**, 1902, S. 139). Da LEONARDO nachweislich eine andere Übersetzung seines Landsmannes GHERARDO CREMONESE benutzt hat, könnte man versucht sein, in erster Linie auf die von diesem verfertigte EUKLIDES-Übersetzung hinzuweisen, von der der cod. lat. Vatic. reg. Sueciae 1268 vielleicht eine Abschrift enthält (vergl. BJÖRNBO a. a. O., S. 139—140).

Es wäre von Interesse, zu ermitteln, woher LEONARDO PISANO seine Kenntnisse der *Elementa* des EUKLIDES entnommen hat. G. ENESTRÖM.

Risposta alla questione 116 su Cavalieri ed il teorema dell' area delle spirali. Il „trattatello delle spirali" inviato da BONAVENTURA CAVALIERI a GALILEO GALILEI con lettera dei 9 Aprile 1623 (Cfr. *Le opere di GALILEO GALILEI*. Edizione Nazionale. Vol. **13**, Firenze 1903, pag. 114) si conserva tuttavia tra i manoscritti GALILEIani della biblioteca nazionale di Firenze, come in una nota a questa lettera io avevo già avvertito. Esso si trova a car. 14—26 del volume secondo della divisione di tali manoscritti che contiene gli scritti ed i documenti dei discepoli: la proposizione II di questo „trattatello" dimostra che „spatium comprehensum a spirali ex prima revolutione orta et prima linea quae initium est revolutionis, est tertia pars primi circuli" ed è, meno varianti di poca importanza, perfettamente identica, fin nelle lettere delle figure, alla proposizione che nel libro VI della *Geometria indivisibilibus nova quadam ratione promota* (1635) porta il n° IX, è enunciata con le stesse parole e vi occupa le pag. 13—15.

Resta con ciò perfettamente dimostrato che, per tale proposizione, BONAVENTURA CAVALIERI non ebbe bisogno di attingere nè alle opere nè alle comunicazioni verbali o scritte, nè di GREGORIO DI SAINT-VINCENT, nè di alcun altro dei suoi contemporanei.

Questo mi sembra rispondere al quesito posto dal Sig. ENESTRÖM, e la semplice risposta ad una domanda non comporta più lunga disquisizione; le ricerche però a tale argomento relative mi hanno condotto a mettere in evidenza molte altre circostanze le quali saranno esposte con ogni particolare in una apposita monografia che ho già allestita e che darò quanto prima alla luce.

A. FAVARO.

Réponse à la question 119 sur l'auteur d'un texte algorithmique du 12 siècle publié par Curtze. Comme l'a soupçonné M. Eneström d'après une citation de Libri, le texte algorithmique publié par Curtze dans les Abhandl. zur Gesch. der Mathem. 8, 1898, p. 17—37, se retrouve bien dans le ms. de la bibliothèque de Paris (autrefois fonds Sorbonne 980, aujourd'hui latin 16208, fol. 67—69) au début d'un cahier et sous la rubrique: *Incipit liber ysagogarum alchorismi in artem astronomicam a Magistro A. conpositus.* Ce ms. est un corpus astrologique et peut être considéré comme à peu près contemporain du plus ancien ms. de Munich utilisé par Curtze (seconde moitié du XIIe siècle). Mais, d'après le regretté professeur, l'ouvrage comprend huit livres, dont il n'a donné que les trois premiers; les deux suivants, sur lesquels il a fourni quelques détails, se retrouvent bien à Paris: *Incipit quartus liber de musicis ac geometricis rationibus* (fol. 69 R, col. 2), et: *Incipit V liber de temporibus et motibus* (fol. 70 R, col. 2). Mais, tandis que dans les ms. de Munich il y aurait encore trois autres livres traitant de l'astronomie, dans celui de Paris, après les derniers mots du livre V: „Motus itaque decimi in spatio 24 horarum mira celeritate finitur, ut patet.“ fol. 71 R, au milieu de la première colonne, intervient immédiatement la rubrique: *Liber I electionum explicit. Incipit liber II de electionibus particularibus.* C'est la seconde partie du traité astrologique d'Ali ben Ahmed el-Imrâni, et elle se poursuit jusqu'à la fin du cahier (f° 75 V), occupant ainsi plus de place que le traité du „Magister A.“. Elle se termine d'ailleurs par un long „Explicit“ donnant le nom de son auteur et semblable à ceux des Amploniani d'Erfurt, dans lesquels Steinschneider (cf. Biblioth. Mathem. 5_2, 1891, p. 43) a relevé la mention: *Abraam Iudeo ispano qui dicitur Sauacorda existente interprete.*

Il serait d'autant plus important de vérifier si les trois derniers livres du ms. de Munich, latin 13021, appartiennent bien aux Isagoges de Maître A, que sa personnalité ne me semble pas pouvoir être déterminée autrement que par un examen minutieux de son œuvre. Je dirai seulement que pour la rédaction de cet ouvrage, je n'ai pas rencontré de *terminus post quem* après 1115 (d'après un tableau de concordances d'ères dans le livre V), que ce livre est évidemment emprunté à des sources arabes et hébraïques concernant l'astronomie et la chronologie. Tout au contraire le livre IV (rapports arithmétiques et géométrie) dépend de la tradition latine (par exemple, le mot *podismus* est pris comme synonyme de celui d'*hypotenusa*). Il n'y a qu'un emprunt à la science arabe, l'approximation $\pi = \sqrt{10}$ (regardée comme meilleure que $\frac{22}{7}$). L'auteur s'est, à vrai dire, assez bien assimilé les énoncées d'Euclide, mais il ne semble guère qu'il ait profité d'une traduction des *Eléments*. En résumé, son travail semble tel qu'Adelard de Bath aurait pu le faire, après avoir étudié le Khovarizmi, mais sans avoir encore abordé le texte arabe d'Euclide. Je ne dis ceci, je le répète, que comme simple remarque; une conjecture formelle serait prématurée. Paul Tannery.[1])

[1]) L'auteur n'a pu revoir lui-même l'épreuve de cette petite note; il est tombé malade quelques jours après l'avoir rédigée, et il est mort le 27 novembre 1904. Probablement la question dont il s'agit est la dernière recherche scientifique dont il s'est occupé. G. E.

Rezensionen.

A. Sturm. Geschichte der Mathematik. Leipzig, Göschen 1904. 12⁰, 152 S. 80 Pf.

In dieser kurzgefaßten Darstellung der Geschichte der Mathematik — die 137 Seiten, die den eigentlichen Text enthalten, entsprechen etwa 80 Seiten der Bibliotheca Mathematica — sind den drei Hauptperioden (Altertum, Mittelalter, Neuzeit) beziehungsweise 43, 22 und 72 Seiten zugewiesen worden, so daß die Geschichte der Neuzeit etwa die Hälfte des Buches einnimmt. Die Geschichte des Altertums hat vier Abteilungen (Ägypter und Babylonier, Griechen, Römer, Inder), die Geschichte des Mittelalters ebenso vier (Araber, Abacisten und Algorithmiker, Das Wiedererwachen der Mathematik in Europa, Der Aufschwung der Mathematik in Deutschland) und die Neuzeit drei Abteilungen (Der Aufschwung der Algebra, 17. Jahrhundert, 18. Jahrhundert). Vor dem eigentlichen Texte werden 30 neuere Werke über Geschichte der Mathematik und zwei mathematisch-historische Zeitschriften verzeichnet; als Anhang ist das Klassifikationsschema des rein mathematischen Teiles der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* abgedruckt, und am Ende folgt auf 6 Seiten ein Namen- und Sachregister.

Wie aus obigem Inhaltsverzeichnis hervorgeht, bezieht sich die letzte Abteilung des Buches auf das 18. Jahrhundert. Als Grund, warum die Geschichte des 19. Jahrhunderts nicht behandelt worden ist, gibt der Verfasser (S. 144) an, daß es noch zu nahe liegt, als daß es jetzt schon in seiner Bedeutung für die Entwickelung der Mathematik und der mathematischen Forschung erkannt werden könnte. Diese Behauptung kann ja bis zu einem gewissen Grade richtig sein, aber meiner Ansicht nach hat der bemerkte Umstand hier nur wenig zu bedeuten, denn Herr Sturm hat sich offenbar nicht als Hauptaufgabe gestellt, die Bedeutung der Arbeiten der früheren Jahrhunderte für die Entwickelung der Mathematik festzustellen. Was man in seinem Buche findet, ist wesentlich eine Übersicht der wichtigsten Entdeckungen auf dem Gebiete der reinen Mathematik bis zum Ende des 18. Jahrhunderts, und eine solche Übersicht kann man auch in betreff des 19. Jahrhunderts sehr wohl geben, ohne das es durchaus notwendig ist, die Bedeutung der einzelnen Entdeckungen für die Entwickelung der Mathematik genau feststellen zu können. Freilich gibt es einen Umstand, der an sich genügt um zu erklären, warum Herr Sturm die Geschichte des 19. Jahrhunderts nicht behandelt hat, nämlich die Schwierigkeit, Materialien zu einer solchen Geschichte zu bekommen, und wenn er sich aus diesem Grund entschlossen hat, seine Darstellung nur bis zum Ende des 18. Jahrhunderts fortzusetzen, so ist sein Verfahren sehr verzeihlich. Auf der andern Seite scheint mir das Fehlen der Geschichte des 19. Jahrhunderts den Wert seines Buches zu verringern, und ich möchte darum dem Verfasser anheim stellen, ob er nicht für eine zweite Auflage diesem Mangel abhelfen könnte; als Notbehelf könnte auch eine chronologisch geordnete Übersicht der hervorragendsten Mathematiker des 19. Jahrhunderts und ihrer wichtigsten Entdeckungen von Nutzen sein.

Gehe ich jetzt zu dem über, was Herr Sturm den Lesern seines Buches wirklich bietet, so kann ich sagen, daß seine Angaben im allgemeinen zuverlässig sind. Offenbar hat er in erster Linie die Cantorschen *Vorlesungen* benutzt, aber auch andere neuere Schriften hat er zu Rate gezogen, und seine Behandlung des Materials ist nicht ohne Verdienste. Daß er nicht überall die besonderen Schwierigkeiten überwunden hat, welche gerade die Bearbeitung eines so kurzen Kompendiums mit sich führen, war von vornherein zu erwarten und wird auch von den Sachkundigen leicht bestätigt. In betreff der Auswahl der mitgeteilten Notizen kommen natürlich Unebenheiten vor. Zu ausführlich scheint mir z. B. der Bericht über Stifels *Arithmetica integra*, der vier Druckseiten (S. 81—85) in Anspruch nimmt, während der algebraische Teil der Descartesschen *Géometrie* auf weniger als einer halben Seite (S. 105) abgefertigt wird. Zuweilen hat der Verfasser Notizen aufgeführt, die an sich angebracht sind, aber irreleitend werden, weil gewisse andere Notizen fehlen. So z. B. wird S. 133 erwähnt, daß Maclaurin den polynomischen Satz bewies, daß aber Moivre der Entdecker des Satzes war, verschweigt Herr Sturm, so daß der Leser versucht wird anzunehmen, daß Maclaurin den Satz zuerst aufgestellt hat; bekanntlich hebt dieser an der fraglichen Stelle selbst hervor, daß der Satz von Moivre herrührt, und verweist ausdrücklich auf die Philosophical transactions No. 230 und *Miscellanea analytica* p. 87. Vermutlich hat Herr Sturm seine Notiz aus Cantors *Vorlesungen* III², S. 680 entnommen, ohne den Cantorschen Verweis auf S. 86 zu verwerten. Überhaupt habe ich den Eindruck bekommen, daß Herr Sturm die *Vorlesungen* exzerpiert hat, ohne nachher genau zu prüfen, ob die dabei gesammelten Notizen mit anderen von ihm übergangenen zusammengehören.

Abgesehen von der Auswahl der Notizen, bietet die Bearbeitung eines Kompendiums eine andere Schwierigkeit dar, nämlich in betreff des Formulierens der Angaben, weil es nötig ist, daß diese kurz und dennoch exakt sind. In dieser Hinsicht notiere ich, daß der Verfasser nicht selten seinen Aussagen eine solche Form gegeben hat, die irreleitend wird. Um zu erklären, was ich meine, werde ich ein Beispiel anführen. S. 88 bemerkt der Verfasser, Cardano habe behauptet, „falls eine Gleichung n-ten Grades, auf Null reduziert, nur einen Zeichenwechsel der Glieder wahrnehmen lasse, so sei immer eine und nur eine positive Wurzel vorhanden". Kann man diese Bemerkung anders deuten, als daß Cardano wirklich die Gleichung auf Null reduziert, oder wenigstens von einer solchen Reduktion gesprochen hat? Vergleicht man aber die Quelle der Bemerkung, nämlich S. 539 des 2. Teiles der Cantorschen *Vorlesungen*, so sieht man unmittelbar, daß dies nicht der Fall war, sondern daß die Bemerkung von Herrn Sturm irreleitend formuliert worden ist.

Auch im übrigen sind Verbesserungen der Ausdrücke des Buches angebracht. So z. B. wird S. 12 behauptet, Aristoteles habe besonders die Geschichte (?) und Systematik der Mathematik ausgebildet; S. 61 steht: „Jordanus Nemorarius, † 1236, wahrscheinlich identisch mit Jordanus Saxo" (das Wort „wahrscheinlich" gehört ebensosehr dem angegebenen Todesjahre an, denn wenn JORDANUS NEMORARIUS nicht mit JORDANUS SAXO identisch ist, so ist sein Todesjahr vollständig unbekannt); S. 74 wird bemerkt, daß CHUQUET in Lyon 1484 sein *Triparty* veröffentlichte, obgleich S. 75 richtig erwähnt wird, daß die Arbeit ungedruckt blieb und überdies nur eine einzige Handschrift bekannt ist; S. 99 wird berichtet, daß das Hauptwerk des CAVALIERI gewöhnlich kurz als „Die Indivisibilien" bezeichnet wird.

Auf der anderen Seite muß ich zugeben, daß sich Herr STURM an einigen Stellen mit lobenswerter Vorsicht ausspricht, z. B. S. 43 in betreff der BOETIUS-Frage und S. 76 in betreff der von RATDOLT 1482 herausgegebenen EUKLIDES-Übersetzung.

Von den übrigen kleinen Bemerkungen, die ich notiert habe, füge ich hier unten nur einige wenige hinzu.

S. 34—35. Die Charakteristik der HERONschen Arbeiten, die hier gegeben wird, ist durch die Veröffentlichung der *Metrika* (1903) unrichtig geworden. P. TANNERY (Bullet d. sc. mathem. 27_2, 1903, S. 88) hat mit Recht darauf hingewiesen, daß die bisher unter dem Namen des HERON veröffentlichten geometrischen Schriften jetzt als Bearbeitungen betrachtet werden müssen, aus denen man eine durchaus unrichtige Vorstellung von der Bedeutung HERONS bekommt.

S. 36. Der Satz für das sphärische Dreieck: $a + b + c < 4R$ rührt nicht von MENELAOS sondern von MAUROLICO her (vgl. Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 407).

S. 52. Die Angabe, daß bei HERON selten Zahlenbeispiele zu den theoretischen geometrischen Lösungen vorkommen, ist nach der Veröffentlichung der *Metrika* als unrichtig zu bezeichnen.

S. 53. Daß die Inder die Methode des *doppelten* falschen Ansatzes angewendet haben, ist meines Wissens nicht nachgewiesen. G. WERTHEIM, der sich mit der Geschichte dieser Methode besonders beschäftigt hatte, schrieb mir den 25. August 1900: „überhaupt ist die Erfindung des doppelten falschen Ansatzes nach meiner Ansicht erst im 12. Jahrhundert erfolgt".

S. 55. Es ist nicht korrekt ohne weiteres zu sagen, daß ALCHODSCHANDI die Unmöglichkeit der Gleichung $a^3 + b^3 = c^3$ in rationalen Zahlen *bewies*. CANTOR (a. a. O. I^2, S. 708) fügt mit Recht hinzu, daß der Beweis von WOEPCKE als mangelhaft bezeichnet wird, und bekanntlich rührt der erste wirkliche Beweis, den wir jetzt kennen, von EULER her.

S. 57. Schon vor ABUL WEFA hatte HABASCH (etwa 912) wirkliche Tangenten- und Kotangenten-Tafeln berechnet (siehe C. A. NALLINO, *AL-BATTANI opus astronomicum.* I, Milano 1903, S. LXVI, 182; vgl. SUTER, Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 82).

S. 60. Die Bedeutung des LEONARDO PISANO scheint mir vom Verfasser überschätzt worden zu sein. Zuerst wird bemerkt, daß der Einfluß des LEONARDO und des JORDANUS für lange Zeit maßgebend blieb, und weiter unten wird hinzugefügt, daß der *Liber abbaci* das Wissen der Araber nach dem christlichen Abendlande verpflanzte. Aber Seite 62 gibt Herr STURM zu, daß „der Einfluß des italienischen Kaufmanns kaum die Grenzen seines Vaterlandes überschritt", und S. 63 behauptet er sogar, daß „kaum einer den LEONARDO zu verstehen vermochte". Aber wie ist es möglich, daß unter solchen Umständen der Einfluß des LEONARDO für lange Zeit maßgebend bleiben konnte? Auch die Bemerkung, daß der *Liber abbaci* das Wissen der Araber nach dem christlichen

Abendlande verpflanzte, ist wesentlich zu modifizieren. In der Tat war die arabische Arithmetik und Algebra schon vor LEONARDO durch die mathematischen Übersetzer, besonders durch GHERARDO CREMONESE, nach Europa verpflanzt worden. — Daß LEONARDO 1180 geboren war und 1250 starb, ist lediglich eine Konjektur, was ausdrücklich hervorgehoben werden sollte, z. B. durch Hinzufügen von Fragezeichen.

S. 63. Die Angabe, daß SACROBOSCO im Jahre 1256 starb, beruht auf einem Mißverständnis (vgl. Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 397—398).

S. 73. Das älteste Zeugnis dafür, daß man in Deutschland von der Pflege der Algebra in Italien Kenntnis hatte, findet sich nicht in dem erwähnten Dresdener Sammelband. CURTZE hat aus einer Münchener Handschrift einen Aufsatz „Regule delacose“ veröffentlicht, der sicherlich vor 1464 geschrieben ist (siehe Abhandl. zur Gesch. der Mathem. 7, 1895, S. 34, 50, 55).

S. 106. Es ist nicht richtig, daß BACHET in den 1612 veröffentlichten *Problèmes plaisans et délectables* eine vollständige Theorie der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades gegeben hat. Diese Theorie findet sich nicht in der ersten Auflage von 1612, sondern zuerst in der zweiten Auflage von 1624 (vgl. CANTOR, a. a. O. II^2, S. 772—773).

S. 119. Daß BROUNCKER 1668 drei Arbeiten über unendliche Reihen veröffentlichte, ist eine auffällige Angabe, die wohl auf einem Flüchtigkeitsfehler beruht. An einer Stelle seiner *Vorlesungen* (II^2, S. 58) bemerkt CANTOR, daß „das Jahr 1668 noch drei andere Arbeiten, in England gedruckt, welche die Reihenlehre förderten, sah“, und berichtet dann zuerst über eine Abhandlung von BROUNCKER; vermutlich hat Herr STURM ohne nähere Untersuchung angenommen, daß BROUNCKER auch die zwei anderen Arbeiten verfaßt hatte, aber diese Arbeiten rührten nicht von BROUNCKER, sondern von WALLIS und J. GREGORY her (vgl. CANTOR, a. a. O. II^2, S. 62).

S. 126. Daß TSCHIRNHAUS, wie Herr STURM angibt, im Jahre 1697 eine Lösung des Problemes der Brachistochrone brachte, war mir bisher unbekannt, und ich vermute, daß hier ein Mißverständnis vorliegt.

S. 134. Hier spricht Herr STURM von den „von LEIBNIZ entwickelten Reihen für sinvers x, sin x, cos x, e^{-x} und e^{x}“, aber statt LEIBNIZ muß wenigstens „NEWTON und LEIBNIZ“ gesetzt werden, da jener die fraglichen Reihen zuerst gefunden hatte (vgl. z. B. BRAUNMÜHL, *Vorl. über Gesch. der Trigonom.* II, S. 61—64; ZEUTHEN, *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert*, Leipzig 1903, S. 369—370). Daß NEWTON sich nicht besonders mit der Reihe für e^{-x} beschäftigt hat, ist ja ohne Belang.

Offenbar hat sich Herr STURM viele Mühe gegeben, um seinen Lesern eine gute Arbeit zu bieten, und wenn er den von ihm behandelten Gegenstand besser beherrscht hätte, so würde das Resultat gewiß vorzüglich geworden sein. Vergleiche ich sein Buch mit früheren Arbeiten derselben Art (z. B. das *Primer of the history of mathematics* des Herrn BALL oder das *Breve sommario della storia delle matematiche* des Herrn GAMBIOLI), so glaube ich konstatieren zu können, daß das Buch des Herrn STURM einen nicht unwesentlichen Fortschritt bezeichnet. Zieht man noch dazu den überaus wohlfeilen Preis (nur 80 Pf. für gebundenes Exemplar!) in Betracht, so kann man mit gutem Rechte das Buch den Mathematikern, die sich noch nicht mit der Geschichte der Mathematik beschäftigt haben, als Einführung in das Studium dieser Wissenschaft empfehlen.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

Ahrens, 22.
André, 83.
Apel, 98.
Aubry, 56.
Ball, R. S., 102.
Ball, W. W. R., 12.
Bellermann, 104.
Bernoulli, 60.
Bertini, 89.
Bindel, 31.
Boccardini, 59.
Bosmans, 43, 57, 109.
Braunmühl, 17.
Brillouin, 106.
Bryan, 111.
Burkhardt, 66.
Campagne, 41.
Cantor, 7, 8, 26.
Cardinaal, 5.
Cassani, 20.
Ceretti, 27.
Chazottes, 55,
Curtze, 40.
Dickstein, 92.
Duhem, 19.
Ehwald, 46, 47.
Eneström, 2, 42, 44, 60, 108.
Enriques, 89.
Ernst, 38.
Ette, 93.
Euler, 60.
Fabie, 49.
Favaro, 51, 52, 110.
Fazzari, 30.
Fehr, 111.
Feldhaus, 21, 48, 62.
Filon von Byzanz, 35.
Friis, 47.
Gautier, 105.
Geer, 14.
Gerland, 54.
Greenhill, 107.
Gutzmer, 77.
Haas, 39.
Hasselberg, 47.
Hayashi, 24.
Heiberg, 32.
Hultsch, 34.
Jagermann, 86.
Kapteyn, 5.
Klein, 68, 69, 78.
Kluyver, 5.
Königsberger, 71, 72, 74.
Korteweg, 5.
Kucharzewski, 36.
Lampe, 4.
Leudesdorf, 89.
Lindt, 64.
Loria, 3, 16, 81.
Macfarlane, 67.
Mach, 18.
Mahler, 25.
Marriott, 96.
Moors, 28.
Muller, Ad., 53.
Muller, Conr. H., 63.
Muller, Felix, 75.
Neumann, Louise, 73.
Nother, 89.
Öttingen, 76.
Peprný, 23.
Plana, 51.
Poggendorff, 76.
Porte, 50.
Raveau, 88.
Reyes Prosper, 58.
Rius y Casas, 111.
Saccheri, 59.
Sauerbeck, 61.
Schiaparelli, 29.
Schmidt, W., 37.
Schoute, 5.
Schwarzschild, 69.
Seeliger, 90.
Sturm, A., 13.
Sturm, R., 89.
Tannery, 6.
Tonni-Bazza, 45.
Tropfke, 15.
Vailati, 33.
Vaux, 35.
Veronese, 89.
Voit, 93, 106.
Wilson, 85.
Wolffing, 65.
Zeuthen, 9, 10, 11.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Leipzig. 8⁰. [1

18 (1904). — 19 (1904).

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8⁰. [2

5_3 (1903): 3. — [Rezension des Bandes 3_3 (1902):] Nyt Tidsskr. for Mathem. 15, 1904, B: 17. (C. J.) — [Rezension des Bandes 4_3 (1903):] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 6_3, 1904, 459—462. (H. Bosmans.)

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8⁰. [3

1904 : 3.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik herausgegeben von E. Lampe. Berlin. 8⁰. [4

33 (1902): 1—2. — Die Seiten 1—71 enthalten Referate der im Jahre 1901 erschienenen mathematisch-historischen Schriften.

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la société mathématique d'Amsterdam par P. H. Schoute, D. J. Korteweg, J. C. Kluyver, W. Kapteyn, J. Cardinaal. Amsterdam. 8⁰. [5

12 : 2 (octobre 1903 — avril 1904).

Tannery, P., De l'histoire générale des sciences (1904). [Rezension:] *Bruxelles,* Soc. scient., Revue des quest. scient. 6_3, 1904, 662—663. (H. Bosmans.) [6

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. — 2^2 (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 306—307. (Fr. Graefe, G. Eneström.) — 3^2 (1901). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 308—310. (J. Enkle, F. Müller, G. Eneström.) [7

Cantor, M., Über einen 4. Band von Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. [8

Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 13, 1904, 475—478.

Zeuthen, H. G., Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen age. Edition française (1902). [Rezension:] Časopis pro pestov. mathem. 32, 1903, 333. — Revue génér. d. sc. 14, 1903, 1165—1167. [9

Zeuthen, H. G., Forelaesninger over Mathematikens Historie. II (1903). [Rezension:] Nyt Tidsskr. for Mathem. 14, 1903, B : 85—97. (J. P. Gram.) [10

Zeuthen, H. G., Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert. Deutsche Ausgabe (1903). [Rezension:] Liter. Centralbl. 55, 1904, 715. (— r.) — *Bruxelles,* Soc. scient., Revue des quest. scient. 6_3, 1904, 665—667. (H. Bosmans.) [11

Ball, W. W. R., Breve compendio di storia delle matematiche. Versione dall'inglese I—II (1903—1904). [Rezension:] Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 313—316. (G. Eneström.) — Periodico di matem. 2_3, 1904, 93—94. [12

Sturm, A., Geschichte der Mathematik. Leipzig, Göschen 1904. [13
8⁰, 152 S. — [80 Pf.] — Sammlung Göschen Nr. 226.

Geer, P. van, De herleving der mathematische wetenschappen. Rede, uitgesproken tot opening zijner academische lessen als privat-docent. Leiden, Sijthoff 1904. [14
8⁰, VIII + 45 S.

Tropfke, J., Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. I—II (1902—1903). [Rezension:] Nature 69, 1903—1904, 76—77, 409—410. (G. B. M.) [15

Loria, G., Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Deutsche Ausgabe (1902). [Rezension:] Giorn. di matem. 42, 1904, 109—124. (G Vivanti.) — Liter. Centralbl. 54, 1903, 676—677. (— r.) — Periodico di matem. 2_3, 1904, 94—95. (K.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. 35, 1904, 424—425. (W. Ahrens.) [16

Braunmühl, A. von, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. II (1903). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 7, 1904, 71—75. (G. L.) — Liter. Centralbl. 54, 1903, 676. (— z — r.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. 35, 1904, 415—417. (S. Günther.) [17

Mach, E., La mécanique. Exposé historique et critique de son développement. Traduit par E. Bertrand (1904). [Rezension:] *Amsterdam,* Wisk. genoots., Nieuw archief 6_2, 1904, 293—294. (Z.) — Revue scient. 20_4 : 2, 1903, 787—788. [18

Duhem, P., Les origines de la statique. [19
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 6_3, 1904, 9—66, 394—473.

Cassani, P., Sulla projezione stereoscopica. [20
Venezia, Istituto Veneto, Atti 61, 1901—1902, 35—43; 62, 1902—1903, 2 S. — Historische Abhandlung.

Feldhaus, F. M., Lexikon der Erfindungen und Entdeckungen auf dem Gebiete der Naturwissenschaften und Technik in chronologischer Übersicht. Heidelberg, Winter 1904. [21
8⁰, VIII + 144 S.

Ahrens, W., Scherz und Ernst in der Mathematik. Geflügelte und ungeflügelte Worte, gesammelt und herausgegeben. Leipzig, Teubner 1904. [22
8⁰, X + 522 S. — [8 M.] — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 25, 1904, 2630—2631. (E. Lampe.)

Peprny, L., [Beiträge zur Geschichte der Mathematik in Böhmen]. II. [23
Časopis pro pestov. mathem. 32, 1903, 57—66. — Czechisch.

Hayashi, T., A brief history of the Japanese mathematics. [24
Amsterdam, Wisk. genoots., Nieuw archief 6_2, 1904, 296—324.

b) Geschichte des Altertums.

Mahler, E., [Die mathematischen und astronomischen Kenntnisse der Ägypter]. [25
Mathematikai és physikai lapok 13, 1904, 30—53, 128—148. — Ungarisch.

Cantor, M., Über die älteste indische Mathematik. [26
Arch. der Mathem. 8_3, 1904, 63—72.

Ceretti, U., Intorno ad una data storica sulla conoscenza di π presso i Cinesi. [27
Rivista di fisica (Pavia) 4 : 2, 1903, 520—527.

Moors, B. P., Le système des poids, mesures et monnaies des Israélites d'après la Bible. [28
4⁰, (2) + 62 S. + 6 Tab. + 1 Figurentaf. — [Rezension:] Zeitschr. für hebr. Bibliogr. 8, 1904, 110. (M. Steinschneider.)

Schiaparelli, G., L'astronomia nell' Antico Testamento (1903). [Rezension:] Liter. Centralbl. 55, 1904, 363—364. (B—r.) [29

Fazzari, G., Breve storia dell' aritmetica e dell' algebra nei tempi antichi. [30
Il Pitagora 10, 1904, 87—92, 131—134.

***Bindel, K.,** Versuche der Alten und der Araber im Schulunterrichte. Bamberg 1903. [31
8⁰, 38 S. — Programm. — Über die Geschichte der Mechanik und Physik bei den Griechen und Arabern. — [Rezension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 35, 1904, 342—343. (H. Wieleitner.)

Heiberg, J. L., Mathematisches zu Aristoteles. [32
Abhandl. zur Gesch. der mathem. Wiss. 18, 1904, 1—49.

Vailati, G., A proposito d'un passo del Teeteto e di una dimostrazione di Euclide. [33
Rivista di filosofia (Bologna) 6:1, 1904. 11 S.

Hultsch, F., Die Sexagesimalrechnungen in den Scholien zu Euclids Elementen. [34
Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 225—233.

Vaux, C. de, Le livre des apparails pneumatiques et des machines hydrauliques par Philon de Byzance (1902). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 6_3. 1904, 667—669. (H. Bosmans.) [35

Kucharzewski, F., Dyoptra Herona i próba jej odtworzenia. [36
Wiadomości matem. 8, 1904, 63—76. — Herons Dioptra und die Versuche sie zu rekonstruieren.

***Schmidt, Wilh.,** Aus der antiken Mechanik. [37
Neue Jahrbücher für das klassische Altertum 1904.

***Ernst, G.,** De geometricis illis, quae sub Boethii nomine nobis tradita sunt, quaestiones. Bayreuth 1903. [38
8⁰, 32 S. — Programm. — [Rezension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 35, 1904, 343—344. (H. Wieleitner.)

c) Geschichte des Mittelalters.

***Haas, K.,** Die Mathematik der Inder. [39
Österreichische Mittelschule 18, 1904, 1—11. — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 25, 1904, 2257.

Curtze, M., Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance (1902). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 28_2, 1904, 164—172. (P. Tannery.) [40

***Campagne, M.,** De l'emploi des chiffres dits arabes au moyen âge. 1904. [41
8⁰, 42 S. + 2 Taf.

Eneström, G., Über die Geschichte der Heronschen Dreiecksformel im christlichen Mittelalter. [42
Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 311—312. — Anfrage.

Bosmans, H., Hermann le Dalmate, traducteur des traités arabes. [43
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 6_3, 1904, 669—672.

Eneström, G., Über den Verfasser einer von Curtze (1898) herausgegebenen Algorismus-Schrift aus dem 12. Jahrhundert. [44
Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 312. — Anfrage.

d) Geschichte der neueren Zeit.

Tonni-Bazza, V., Di Nicolò Tartaglia; frammenti di nuove ricerche. [45
Roma, Accad. d. Lincei, Rendiconti 13_5 : 1, 1904, 27—30.

Ehwald, R., Tycho Brahe und Friedrich Wilhelm von Sachsen. [46
Centralbl. für Bibliotheksw. 21, 1904, 103—121.

Hasselberg, B., Friis, F. R., Ehwald, R., Weitere Exemplare von Tycho Brahes Mechanica. [47
Centralbl. für Bibliotheksw. 21, 1904, 396—403

Feldhaus, F. M., Die Begründung der Lehre von Magnetismus und Elektricitat durch William Gilbert (1904). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 25, 1904, 1779. [48

***Fahie, J. J.,** Galileo. His life and works. London, Murray 1903. [49
8⁰, XVI + 451 S. — [16 sh.] — [Rezension:] Nature 69, 1904, 505—507. (G. H. Bryan.)

***Porte, E. de,** Galilei's Begriff der Wissenschaft. Marburg 1904. [50
8⁰, 54 S. — Dissertation.

Favaro, A., Una critica di Giovanni Plana ai dialoghi Galileiani delle nuove scienze. [51
Torino, Accad. d. sc., Atti 39, 1904. 11 S. — Am Ende (S. 6—11) ist eine Note von Jean Plana vom 18. Januar 1843 zum Abdruck gebracht.

Favaro, A., Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. XI. Cesare Marsili. [52
Bologna, Deputazione di storia patria per la Romagna, Atti e memorie 22, 1904. 72 S.

Müller, Ad., Johann Keppler (1903). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 6_3, 1904, 673—674. (H. Bosmans.) [53

Gerland, E., Über die Erfindung der Pendeluhr. [54
Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 234—247.

Chazottes, J., Sur une prétendue faute de raisonnement que Descartes aurait commise. [55
Arch. für Gesch. d. Philosophie 17, 1904, 171—175.

Aubry, A., Deux théorèmes de Grégoire de St.-Vincent. [56
Mathesis 4_3, 1904, 129—130.

Bosmans, H., Les derniers travaux bibliographiques sur les ouvrages de Michel Florent van Langren [57
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 6_3, 1904, 674—677.

Reyes Prosper, V., La obra científica de Seki y de sus discipulos. [58
Madrid, Acad. de ciencias, Revista 1, 1904, 251—254. — Über den japanischen Mathematiker Seki († 1708).

Saccheri, G., Euclide emendato. Traduzione e note di G. Boccardini (1904). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest scient. 6_3, 1904, 618—619. (P. M.) — Mathesis 4_3, 1904, 196. (P. M.) [59

Eneström, G., Der Briefwechsel zwischen Leonhard Euler und Johann I Bernoulli. II. [60
Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 248—291.

Sauerbeck, P., Einleitung in die analytische Geometrie der höheren algebraischen Kurven nach den Methoden von J. P. de Gua de Malves (1902). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 6_3, 1904, 280—288. (H. Bosmans.) — Nyt Tidsskr. for Mathem. 14, 1903, B : 97—99. (T. Bonnesen.) [61

*__Feldhaus, F. M.,__ Zur Geschichte der Funkentelegraphie. Die Erfindung der elektrischen Verstärkungsflasche durch Ewald Jürgen von Kleist. Heidelberg, Winter 1903. [62
8⁰, 29 S. — [80 Pf.] — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 25, 1904, 1961.

Müller, Conrad H., Studien zur Geschichte der Mathematik an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert (1904). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 25, 1904, 1897—1898. (A. von Braunmühl.) [63

Lindt, R., Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, seine Beweise und die Unmöglichkeit seiner Umkehrung bei Verwendung des Begriffes „Gleichgewicht" eines Massensystems. [64
Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. 18, 1904, 145—196.

Wölffing, E., Mathematischer Bücherschatz. I (1903). [Rezension:] *Bruxelles,* Soc. scient., Revue des quest. scient. 6_3, 1904, 350. — Nyt Tidsskr. for Mathem. 15, 1904, B: 15—16. (C. J.) — The mathem. gazette 2, 1903—1904, 391. [65

Burkhardt, H., Entwicklungen nach oscillirenden Funktionen. Bericht. 4. Lieferung. [66
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 10: 2, 1904, 769—1072. — [Selbstanzeige:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 13, 1904, 500—501.

Macfarlane, A., Bibliography of quaternions and allied systems of mathematics (1904). [Rezension:] *Amsterdam,* Wisk. genoots., Nieuw archief 6_2, 1904, 294—295. (Kl.) [67

Klein, F., Hundert Jahre mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen Preußens. [68
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 13, 1904, 347—356.

Klein, F. und **Schwarzschild, K.,** Über das in der Festschrift zur Feier des hundertfünfzigjährigen Bestehens der k. Gesellschaft der Wissenschaften mit dem Gaußschen Tagebuche reproduzierte Porträt „des 26-jährigen Gauß". [69
Göttingen, Gesellsch. d. Wissensch., Nachrichten 1904, 128—134. — Das Porträt stellt nicht Gauss, sondern Bessel dar.

Niels Henrik Abel. Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance (1902). [Rezension:] Arch. der Mathem. 8_3, 1904, 162—165. (E. Lampe.) [70

Königsberger, L., Carl Gustav Jakob Jacobi. Festschrift zur Feier der hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages. Leipzig, Teubner 1904. [71
8⁰, XVIII + 554 S. + Porträt + Faksim. — [16 M.]

Königsberger, L., Carl Gustav Jakob Jacobi. Rede zu der von dem internationalen Mathematiker-Kongress in Heidelberg veranstalteten Feier der hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages gehalten am 9. August 1904. Leipzig, Teubner 1904. [72
4⁰, (2) + 40 S. + Porträt. — [Wieder abgedruckt:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 13, 1904, 405—433 + Porträt. Als Anhang des Abdruckes folgt Ansprache bei der Jacobi-Feier von H. A. Schwarz (S. 433—435).

*__Neumann, Luise,__ Franz Neumann. Erinnerungsblätter von seiner Tochter. Tübingen, Mohr 1904. [73
8⁰, XII + 459 S. + Porträt. — [6 M.] — [Rezension:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 13, 1904, 498. (P. Stäckel.) — Deutsche Literaturz. 25, 1904, 2066—2067. (Felix Müller.)

Königsberger, L., Hermann von Helmholtz (1902—1903). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 7, 1904, 77—79. (G. L.) — The mathem. gazette 2, 1903—1904, 393—394. [74

Müller, Felix, Das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 1869—1904. [75
Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 292—297.

J. C. Poggendorffs Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. Vierter Band (die Jahre 1883 bis zur Gegenwart umfassend), herausgegeben von A. J. von Oettingen. Lieferung 20—24. Leipzig, Barth 1904. [76
8⁰, XII S. + S. 1369—1718. — [15 M.]

Gutzmer, A., Geschichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung von ihrer Begründung bis zur Gegenwart. [77
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 10: 1, 1904, 1—67. — S. 50—67 enthält ein von E. Wölffing bearbeitetes Generalregister der 12 ersten Bände der „Jahresberichte". — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 25, 1904, 2559. (M. Cantor.)

Klein, F., Mathematik, Physik, Astronomie an den deutschen Universitäten 1893—1903. [78
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 13, 1904, 457—475. — Aus dem Werke: „Das Unterrichtswesen im Deutschen Reich" (1904).

International catalogue of scientific literature. Second annual issue. A. Mathematics. London 1904. [79
8⁰, VIII + 263 S. — [15 sh.]

[Bericht über die von der physiko-mathematischen Gesellschaft in Poltawa zu Ehren des 100. Geburtstages von M. W. Ostrogradskij veranstaltete Feier.] Poltawa 1902. [80
8⁰, 138 S. — Russisch.

Loria, G., Un article de L. Cremona sur Giovanni Ceva. [81
Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 311.

Max Noether. [82
Americ. journ. of mathem. 26: 1, 1903. — Nur Bildnis in Photographie.

André, D., Liste et résumé de mes principaux travaux mathématiques. Paris, Gauthier-Villars 1904. [83
8^0, 106 p. — [4 fr.]

e) Nekrologe.

George Johnston **Allman** (1824—1904). [84
Nature 70, 1904, 83.

Karl Anton **Bjerknes** (1825—1903). [85
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 10_2, 1904, 516. (E. B. Wilson.)

Fedor Alexandrowitsch **Bredichin** (1831—1904). [86
Nature 70, 1904, 252. — Naturw. Rundschau 19, 1904, 372—374, 384—386. (R. Jaegermann.)

Octave **Callandreau** (1852—1904). [87
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 6_3, 1904, 343—347. — Nature 69, 1904, 441. (W. E. P.). — Revue génér. d. sc. 15, 1904, 281—282.

Alfred **Cornu** (1841—1902). [88
Revue génér. d. sc. 10, 1903, 1023—1040. (C. Raveau.)

Luigi **Cremona** (1830—1903). [89
Bologna, Accad. d. sc. dell' istituto, Rendiconto 1904. (F. Enriques.) — *Bruxelles,* Soc. scient., Revue des quest. scient. 6_3, 1904, 347—348. — *London,* Mathem. soc., Proceedings 1_2, 1904, V—XVIII. (E. Bertini; Übersetzung von C. Leudesdorf.) — Arch der Mathem. 8_3, 1904, 11—29, 195—213. (R. Sturm) — Deutsche Literaturz. 25, 1904, 1778—1779. — Mathem. Ann. 59, 1904, 1—19. (M. Noether.) — Wiadomości matem. 8, 1904, 150—164 [mit Porträt und Schriftenverzeichnis]. (Polnische Übersetzung des Nekrologes von G. Veronese in den „Rendiconti dell' accad. dei Lincei" 1903.

Friedrich **Deichmüller** (1855—1903). [90
Leipzig, Astron. Gesellsch., Vierteljahrsschr. 38, 1903, 172—180. (H. Seeliger.)

Joseph David **Everett** (1831—1904). [91
Science 20_2, 1904, 286—287.

Władysław **Folkierski** (1842—1904). [92
Wiadomości matem. 8, 1904, 164—169 [mit Porträt]. (S. Dickstein.)

Immanuel Lazarus **Fuchs** (1833—1902). [93
München, Akad. d. Wiss., Sitzungsber. 33, 1903, 512—515. (C. Voit.) — Nyt Tidsskr. for Mathem. 14, 1903, B: 99—100. (C. P. Ette.)

Leopold **Gegenbauer** (1849—1903). [94
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 7, 1904, 93—94.

Josiah Willard **Gibbs** (1839—1903). [95
London, Mathem. soc., Proceedings 1_2, 1904, XIX—XXI.

James **Glaisher** (1809—1903). [96
London, Meteorolog. soc., Quart. journ. 30, 1904, 1—27. (W. Marriott.) — Science 20_2, 1904, 153.

Prosper **Henry** (1849—1904). [97
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 6_3, 1904, 340—342.

Adolph Edmund **Hess** (1843—1903). [98
Zeitschr. für mathem. Unterr. 35, 1904, 439—443 [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (B. Apel.)

Ernest de **Jonquières** (1820—1901). [99
Mathesis 4_3, 1904, 224—225.

William Irvine **Ritchie** (?—1903). [100
London, Mathem. soc., Proceedings 35, 1903, 471.

Isaak **Roberts** (1829—1904). [101
Nature 70, 1904, 302—303.

George **Salmon** (1819—1904). [102
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 6_3, 1904, 338. — *London,* Mathem. soc., Proceedings 1_2, 1904, XXII—XXVIII. (R. Ball.) — Nature 69, 1904, 324—326.

Emile **Sarrau** (1837—1904). [103
L'enseignement mathém. 6, 1904, 311. — Nature 70, 1904, 106.

Heinrich Edmund **Schwannecke** (1845—1902). [104
Programm des Königstädtischen Realgymnasiums (Berlin) 1902, 3—7. (G. Bellermann.)

Charles **Soret** (1854—1904). [105
Nature 70, 1904, 250—252. (R. Gautier.)

George Gabriel **Stokes** (1819—1903). [106
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 6_3, 1904, 338—340. — *Manchester,* Liter. and philos. soc., Memoirs and proceedings 47, 1902/3, XLVI—XLVII. — *München,* Akad. d. Wiss., Sitzungsber. 33, 1903, 550—556. (C. Voit.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 7, 1904, 96. — Revue génér. d. sc. 15, 1904, 22—29. (M. Brillouin.)

George Henry **Stuart** (?—1903?) [107
London, Mathem. soc., Proceedings 1_2, 1904, XXIX. (A. G. Greenhill.)

f) Aktuelle Fragen.

Eneström, G., Welche Forderungen sind an Rezensionen mathematischer Arbeiten zu stellen? [108
Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 298—304.

Bosmans, H., Sur un projet de bibliothèque centrale des mathématiques à créer en Allemagne. [109
Revue des bibliotheques et archives de Belgique. 2 : 3, 1904. 3 S.

Favaro, A., Intorno alla opportunità di apporre la data agli articoli nei periodici scientifici. [110
Rivista di fisica (Pavia) 5, 1904, 259—263.

[Internationaler Mathematikerkongreß in Heidelberg 1904.] [111
L'enseignement mathém. 6, 1904, 379—400, 476—481. (H. Fehr.) — Nature 70, 1904, 417—418. (G. H. Bryan.) — Periodico di matem. 2_3, 1904, 95—96. — Revista trimestral de matem. 4, 1904, 171—176. (J. Rius y Casas.)

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— Professor H. Battermann in Berlin zum Professor der Astronomie an der Universität in Königsberg.

— Dr. G. A. Bliss in Chicago zum Professor der Mathematik an der Universität von Missouri.

— Dozent E. Cartan in Lyon zum Professor der Mathematik an der Universität in Nancy.

— Dr. A. Cotton in Paris zum Professor der Mechanik an der Universität in Grenoble.

— Privatdozent K. Cranz in Stuttgart zum Professor der Mathematik an der militär-technischen Akademie in Berlin.

— Dr. P. Curie in Paris zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Privatdozent Dolezalek in Berlin zum Professor der Physik an der Technischen Hochschule in Danzig.

— Dozent J. Drach in Poitiers zum Professor der Mechanik an der Universität daselbst.

— Professor H. Grassmann in Halle a. S. zum Professor der Mathematik an der Universität in Gießen.

— Professor N. J. Hatzidakis in Athen zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Professor L. Heffter in Bonn zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Aachen

— Privatdozent G. Hessenberg zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Berlin.

— Dozent C. A. Holden in Philadelphia zum Professor der Mathematik am „Dartmouth college“.

— Privatdozent J. J. Kossonogoff in Kiew zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Dozent A. Lampa in Wien zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— L. Lecornu in Paris zum Professor der Mechanik an der „Ecole polytechnique“ daselbst.

— Professor L. Prandtl in Hannover zum Professor der Physik an der Universität in Göttingen.

— Professor L. Raffy in Paris zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Dozent H. L. Rietz in Urbana, Ill., zum Professor der Mathematik an der Universität von Illinois daselbst.

— Professor K. Rohn in Dresden zum Professor der Geometrie an der Universität in Leipzig.

— Professor K. Runge in Hannover zum Professor der angewandten Mathematik an der Universität in Göttingen.

— Professor N. N. Schiller in Kiew zum Direktor der Technischen Hochschule in Charkow.

— Professor F. Schilling in Göttingen zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Danzig.

— Privatdozent K. Schreber in Greifswald zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Professor J. Sommer in Poppelsdorf zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Danzig.

— Professor Jules Tannery in Paris zum Professor der höheren Analysis an der Universität daselbst.

— Privatdozent P. W. Woronetz in Kiew zum Professor der angewandten Mathematik an der Universität daselbst.

Todesfälle.

— Francesco Chizzoni, Professor der Geometrie an der Universität in Modena, geboren zu San Martino dell' Argine (Prov. Mantua) den 10. August 1848, gestorben in Modena den 20. September 1904.

— Friedrich Eisenlohr, a. o. Professor der Mathematik an der Universität in Heidelberg, geboren in Mannheim den 16. Juli 1831, gestorben den 22. Juli 1904.

— Joseph David Everett, früher Professor der Physik am „Queens college" in Belfast, geboren in Ipswich den 11. September 1831, gestorben den 9. August 1904.

— Wilhelm Ferdinand Fuhrmann, Professor der Mathematik an der Oberrealschule in Königsberg, geboren zu Burg bei Magdeburg den 28. Februar 1833, gestorben den 11. Juni 1904.

— H. P. Gurney, Direktor des „Durham college" und Professor der Mathematik, gestorben den 13. August 1904.

— Ronald William Henry Turnbull Hudson, „lecturer in mathematics" an der „university college" in Liverpool, gestorben bei Bethesda (North Wales) den 20. September 1904, 28 Jahre alt.

— Hermann Kortum, Professor der Mathematik an der Universität in Bonn, geboren den 21. September 1836, gestorben in Berlin den 24. September 1904.

— Karl Selim Lemström, Professor der Physik an der Universität in Helsingfors, geboren zu Ingå (Nyland) den 17. Nov. (a. St.) 1838, gestorben in Helsingfors den 2. Oktober 1904.

— Charlton Thomas Lewis, Mitglied der „American mathematical society", gestorben in Morriston, N. J., den 26. Mai 1904, 70 Jahre alt.

— Jules Charles Antonin Macé de Lépinay, Professor der Physik an der Universität in Marseille, geboren in Grenoble den 18. August 1851, gestorben im November (?) 1904.

— Karl von Ott, Professor der Mechanik an der deutschen Technischen Hochschule in Prag, geboren zu Kiritein (Mähren) den 18. April 1835, gestorben in Brünn den 23. August 1904.

— Karl Perntner, früher Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Brünn, gestorben in Wien den 13. Oktober 1904.

— George Pirie, Professor der Mathematik an der Universität in Aberdeen, gestorben den 21. August 1904, 61 Jahre alt.

— Frank Gustave Radelfinger, Professor der Mathematik an der „Columbian university" in Washington, D. C., gestorben in Washington den 15. August 1904, 34 Jahre alt.

— Albert Rilliet, a. o. Professor der Physik an der Universität in Genf, gestorben im Juni (?) 1904.

— Isaak Roberts, Astronom, Besitzer des „Starfield observatory" in Crowborough (Sussex), geboren in Denbigh (North Wales) den 29. Januar 1829, gestorben in Crowborough den 17. Juli 1904.

— Emile Sarrau, Professor der Mechanik an der „Ecole polytechnique" in Paris, geboren den 24. Juni 1837, gestorben den 10. Mai 1904.

— Jerome Sondericker, Professor der angewandten Mathematik an der Technischen Hochschule in Boston, gestorben in Wilmington, Vt. den 22. Juli 1904.

— Paul Tannery, Direktor der Tabakfabrik in Pantin, geboren in Mantes den 20. Dezember 1843, gestorben in Pantin den 27. November 1904.

— P. van der Vliet, früher Professor der Physik an der Universität in St. Petersburg, gestorben daselbst 1904, 64 Jahre alt.

— Emilio Villari, Professor der Physik an der Universität in Neapel, geboren in Neapel den 25. September 1836, gestorben daselbst den 19. August 1904.

— Wilhelm Weiss, Professor der Mathematik an der deutschen Technischen Hochschule in Prag, geboren 1859, gestorben in Prag den 18. Juni 1904.

Mathematisch-historische Arbeiten in Vorbereitung.

— Eine Fortsetzung der Cantorschen *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* ist jetzt in Aussicht genommen. Diese Fortsetzung bezieht sich auf den Zeitraum 1759—1799 und wird neun Abschnitte enthalten, von denen der letzte (Die Entwickelung der mathematischen Ideen 1759—1799) von Herrn Cantor selbst bearbeitet werden wird. Als Mitarbeiter sind angekündigt die Herren S. Günther

(Geschichte der Mathematik, Klassikerausgaben, Wörterbücher), V. Bobynin (Elementargeometrie), A. von Braunmühl (Trigonometrie), F. Cajori (Arithmetik und Algebra), E. Netto (Reihen, Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Imaginäres), V. Kommerell (Analytische Geometrie), G. Loria (Darstellende Geometrie), G. Vivanti (Differential- und Integralrechnung), C. R. Wallner (Differentialgleichungen, Variations- und Differenzrechnung). Herr Cantor hofft, daß die Arbeit schon im Jahre 1906 erscheinen wird.

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik und Astronomie.

— An der Universität in Berlin hat Professor W. Förster für das Wintersemester 1904—1905 eine zweistündige Vorlesung über Geschichte der alten Astronomie angekündigt.

— An der Universität in Breslau hat Professor R. Sturm für das Wintersemester 1904—1905 eine einstündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik angekündigt.

— An der Technischen Hochschule in Darmstadt hat Professor Fr. Graefe für das Wintersemester 1904—1905 eine Vorlesung über Geschichte der Mathematik angekündigt.

— A propos de mémoriaux des facultés des sciences à Padova et à Napoli, le conseil supérieur de l'instruction publique en Italie a recommandé l'institution de cours d'histoire des mathématiques à ces deux universités, pour être professés par MM. A. Favaro et F. Amodeo.

Mathematiker-Versammlungen im Jahre 1904.

— *Internationaler Mathematiker-Kongreß in Heidelberg.* Der dritte internationale Mathematiker-Kongreß wurde vom 8. bis 13. August 1904 in Heidelberg gehalten und die Zahl der Teilnehmer betrug 336. Nach einem Begrüßungsabend am 8. August fanden am 9., 11. und 13. August drei allgemeine Sitzungen unter dem Vorsitze des Herrn Heinrich Weber statt; in der ersten Sitzung hielt Herr L. Königsberger eine Rede über C. G. J. Jacobi und in den zwei folgenden Sitzungen wurden Vorträge von den Herren P. Painlevé, A. G. Greenhill, C. Segre und W. Wirtinger gehalten. Die Sektionssitzungen fanden am 9., 10. und 12. August statt; es gab 6 Sektionen (Arithmetik und Algebra, Analysis, Geometrie, Angewandte Mathematik, Geschichte der Mathematik, Pädagogik) und in denselben wurden zusammen etwa 90 Vorträge gehalten. Von diesen gehörten der Sektion für Geschichte der Mathematik 11 Vorträge, nämlich von den Herren M. Cantor (Einführender Vortrag), P. Tannery (Über die Korrespondenz zwischen Debeaune und Descartes), S. Dickstein (Über Wronski), M. Simon (Über die Mathematik der Ägypter), H. G. Zeuthen (Über mathematische Terminologie), L. Schlesinger (Über Fuchs' Gesammelte Werke), G. Eneström (Über die Berücksichtigung des historischen Elementes in einer Encyklopädie der Mathematik), A. von Braunmühl (Über die Geschichte der Differentialgleichungen), H. Suter (Über die Geschichte der arabischen und indischen Mathematik), G. Loria (Über die Geschichte der analytischen Geometrie), G. Vailati (Über die griechische Geometrie). Auch in der Sektion für Pädagogik kamen historische Mitteilungen vor, und die Vorträge der allgemeinen Sitzungen waren zum großen Teil historischen Inhalts. — Mit dem Kongresse waren zwei Ausstellungen verbunden, nämlich eine Literaturausstellung und eine Modellausstellung; die erste wurde von Herrn A. Gutzmer, die zweite von Herrn M. Disteli eingeleitet. — Von den Resolutionen des Kongresses bezogen sich drei auf historische Gegenstände, nämlich: 1. Beförderung des mathematisch-historischen Unterrichts; 2. Herausgabe der Gesammelten Werke von Euler; 3. Bildung einer mathematisch-historischen Gesellschaft.

— *Deutsche Mathematiker-Vereinigung.* Die Jahresversammlung 1904 der Deutschen Mathematiker-Vereinigung fand zu Breslau 18.—24. September statt, in Gemeinschaft mit der Abteilung I der 76. Deutschen Naturforscher-Versammlung. Vorträge über rein mathematische Gegenstände wurden von den Herren F. Klein, E. Lampe, A. Gutzmer, G. Kowalewski, R. Sturm, G. Landsberg, E. Steinitz und W. Ludwig gehalten. In betreff der im vorigen Jahre vertagten Frage der Gründung einer mathematischen Zentralbibliothek wurde mitgeteilt, daß sich der Plan vielleicht in Verbindung mit dem Museum der Meisterwerke der Naturwissenschaften und der Technik in München verwirklichen könnte. Über die Vorbereitungen zur Einrichtung einer mathematisch-bibliographischen Zentralstelle lag kein Bericht vor.

— *Mathematics at the British association 1904.* The British association met et Cambridge 1904, August 17th. Professor A. R. Forsyth presided ower the subsection of pure mathematics and several mathematical papers were read.

— *Les mathématiques à l'association française 1904.* Le congrès de l'association française pour l'avancement des sciences s'est tenu en 1904 à Grenoble du 4 au 11 août sous la présidence de M. C. A. Laisant, qui a prononcé un discours sur le rôle social de la science. Dans la section des sciences mathématiques, qui a été présidée par M. Ch. André, quelques communications sur les mathématiques pures ont été faites, et une discussion sur la méthode d'enseignement de la géométrie a eu lieu.

Kongreß für Geschichte der mathematischen und physischen Wissenschaften in Genf 1904.

— Dans le congrès international de philosophie qui s'est tenu à Genève, du 4 au 8 septembre 1904, la section d'histoire des sciences, organisée par Paul Tannery, a entendu 13 communications. L'histoire des mathématiques a été représentée par des mémoires de M. H. G. Zeuthen (Le theorème de Pythagore, origine de la géométrie scientifique) et de M. P. Duhem (De l'accéleration produite par une force constante. Notes pour servir à l'histoire de la dynamique).

Le congrès, en séance génerale, a declaré adopter et faire siens les vœux émis au congrès des mathématiciens d'Heidelberg pour l'organisation de l'enseignement de l'histoire des sciences.

Vermischtes.

— *Die Arbeitsweise der Mathematiker.* Die Herren H. Fehr und C. A. Laisant haben eine Untersuchung über die Arbeitsweise der Mathematiker in Angriff genommen. Für diesen Zweck haben sie einen Fragebogen unter die Mathematiker verteilt, und nachdem die Antworten eingegangen sind, wird das auf diese Weise gesammelte Material bearbeitet werden.

— *Bildnisse von Mathematikern.* Auf Anregung des Herrn D. E. Smith hat die „Open court publishing company" in Chicago begonnen, eine Reihe Bildnisse von Mathematikern zu veröffentlichen. Demnächst werden Portraits von 12 Mathematikern aus der Zeit vor 1700 herausgegeben werden.

Berichtigung.

Auf S. 364 Zeile 2 v. u. ist die Formel infolge eines Druckfehlers falsch wiedergegeben worden; es muß dort richtig heißen:

$$F = e\dot{A} + f\dot{B} + g\dot{C} \text{ und } G = e\dot{B} + f\dot{C} + g\dot{D}.$$

Namenregister.

Abadie, 149.
Abderrahman el-Chazini, siehe el-Chazini.
Abel, N. H., 92, 129, 132, 133, 173—175, 189, 317, 318, 424.
Abraham bar Chijja, 87, 90, 311, 325, 416.
Abraham Zakut, 87.
Abu Bekr Muhammed ben Ahmed ben Abi Bisr el-Charaqi, siehe el-Charaqi.
Abul Feda, 79.
Abul-Hasan von Marokko, 83, 86.
Abul Wefa, 419.
Abu Maaschar, 79.
Abu Muhammed Abdelgabbar ben Abdelgabbar el-Charaqi, siehe el-Charaqi.
Abu Said Sadan ben Bahr, 79.
Acquarone, B., 130.
Adam, H., 215.
d'Adda, G., 326.
Adelbold, 90
Agucchi, G. B., 222.
Ahlwardt, W., 79.
Ahmed ben Jusuf ben el-Daje, siehe el-Daje.
Ahmed ben Muhammed el-Sigzi, siehe el-Sigzi.
Ahmed ben Musa ben Schakir, 10, 11, 217, 218, 311, 323—325.
Ahrens, W., 89, 92, 421, 422.
Alasia, C., 89, 91.
Albategnius (Albatenius), siehe Albattani.
Albattani, 78—88, 221, 222, 419.
Alberi, E., 244—246.
Albert (Erzherzog), 347.
Albrecht, M., 317.
Albicini (Graf), 182.
Albini, Sofia, 130.
Alchodschandi, 419.
„Alchorismi" („Alchoarismi"), 312, 404, 405, 416.
d'Alembert, J. R., 15, 34, 47—50, 54, 57, 303, 310.
Alexander, A., 90.
Alexander de Villa Dei, 403, 409.
Alexander der Große, 80.
Alexander (Herzog von Ostrog), 352.
Alexander V (Pabst), 336, 339.
Alfraganus, siehe el-Fargani.
„Algorismi" („Algoritmi"), 407—411.
„Algus", 330.
„Aliabras", 214.
Ali ben Ahmed el-Imrani, siehe el-Imrani.
Aliherius, B., 329—331, 336, 337.
Alkarchi, 97—101, 105.
Alkhwarizmi, 85, 404—408, 416.
Alkuin, 201.
Allman, G. J., 319, 425.
Alpetragius, siehe el-Bitrodji.
Amiot, A., 134.
Amirucius, G., 83.
Ammonios, 80.
Amodeo, F., 89, 91, 428.
Anaritius, siehe Neirizi.
André, Ch., 429.
André, D., 221, 223, 421, 425.
André, Valère, 343, 352.
Angelus, J., 336, 339.
Apastamba, 106.
Apel, B., 421, 425.
Apianus, Petr., 321.
Apollonios von Perga, 110, 399.
Apollonios von Thyana, 80.
Archenhold, F. S., 317.
Archimedes, 17, 69, 70, 99, 101—104, 110, 123, 207, 209, 226, 233, 280, 317, 322, 323, 335, 346.
Arisi, F., 332.
Aristoteles, 17, 418, 422.

Armenante, A., 146, 173.
Arnaud de Bruxelles, 321, 322, 324.
Arnauld, A., 91.
Aronhold, S. H., 148.
Arsamites (= Archimedes), 335.
Ascoli, G., 173.
Atelhard von Bath, 85, 403, 416,
Aubry, A., 421, 423.
August, F., 162, 223, 293, 297.
Ayer, E. E., 90.

Baccelli, G., 185.
Bachet de Méziriac, C. G., 420.
Bailly, J. S., 80.
Baily, F., 391.
Baker, H. F., 94.
Baker, M., 94.
Ball, R. S., 421, 425.
Ball, W. W. R., 11, 216, 313—315, 317, 420—422.
Baltzer, R., 146.
Barrow, I., 114, 123, 213.
Bashforth, F., 89, 90.
Bates, H., 79.
Battaglini, G., 148, 167, 294.
Battermann, H., 426.
Baudhâyana, 106.
Baudin, P., 65, 89, 92.
Beare, H., 172.
Beaune, siehe Debeaune.
Beldomandi, Prosdocimo de', 340.
Beleni (= Apollonios), 80.
Belini (= Apollonios), 80.
Bellair, 236.
Bellavitis, G., 166.
Bellermann, G., 421, 425.
Beltrami, E., 131, 140, 144, 152, 180, 194, 195.
Bereni, 80.
Bernoulli, Daniel, 15, 28—30, 55, 71, 72, 208, 250—255, 257, 262, 271, 275, 283, 284, 286, 291.
Bernoulli, Jakob, 206, 209, 216, 217, 249, 253, 302.
Bernoulli, Johann I, 15, 27—30, 55, 71—73, 91, 205, 215—218, 248—256, 260, 262—264, 267—269, 271, 275, 276, 280, 281, 285, 286, 288, 302, 360, 363, 366, 367, 414, 421, 423.
Bernoulli, Johann II, 71, 249, 251, 252, 255—257, 262, 263, 271.
Bernoulli, Johann III, 249.
Bernoulli, Nikolaus I, 276, 282, 310.
Bertini, E., 125, 130, 146, 165, 166, 171, 173, 182, 183, 421, 425.
Bertrand, E., 89, 90, 422.
Bertrand, J., 134, 158.
Berzolari, L., 125.
Bessel, F. W., 424.
Bethen (Bethem), 80.
Betti, E., 127, 146, 183.
Beyel, Chr., 89, 93.
Bhaskara, 311.
Biagio da Parma, 328.
Bindel, K., 421, 422.
Biot, J. B., 204.
Birkenmajer, L., 215.
Bischoff, J. N., 151.
Bjerknes, K. A., 92, 223, 318, 425.
Bjerknes, W., 221, 223.
Björnbo, A. A., 13, 14, 79, 89, 90, 203, 215, 220, 323—325, 407, 415.
Blaserna, P., 89, 92.
Blasius, siehe Biagio.
Bliss, G. A., 94, 426.
Bobilier, E., 148.
Bobynin, V. V., 221, 222, 428.
Boccardi, G., 224.
Boccardini, G., 89, 91, 421, 423.
Boetius, A. M. T. S., 419, 423.
Boffito, G., 89, 90.
Bohlmann, G., 210.
Böklen, O., 142.
Bombelli, R., 401, 404.
Bonaini, F., 201.
Boncompagni, B., 9, 306, 311, 316, 328, 329, 340, 341, 400, 404—406, 408, 410, 414.
Bonino, G. G., 327.
Bonnesen, T., 423.
Bopp, K., 89, 91.
Borchardt, C. W., 162, 293.
Bordoni, A., 129, 131, 132.
Borgi, P., 404.
Boscovich, R. J., 367—371, 373—375, 387
Boselli, P., 185.
Bosmans, H., 89—91, 209, 342, 421—423, 425.

Bosscha, J., 89, 91.
Bouguer, P., 374.
Boulliau, I., 236—242, 245—247.
Bouton, C. L., 319.
Brahe, T., 213, 215, 219, 317, 423.
Brahmagupta, 108—111, 311.
Brancker, Th., 315.
Braunmühl, A. von, 63, 74, 81, 83, 85, 89, 90, 215, 221, 342, 350, 355, 420—422, 424, 428.
Bredichin, F. A., 319, 425.
Bremiker, K., 146.
Briggs, H., 309.
Brill, A., 175.
Brillouin, M., 421, 425.
Brioschi, F., 129, 131, 133, 135, 146, 162, 169, 172, 173, 182, 193.
Brister, J. W., 94.
Broch, O. J., 133.
Brockelmann, C., 80.
Brouncker, W., 219, 420.
Browne, E., 79, 80.
Bruns, H., 293, 297.
Bryan, G. H., 89, 92, 421, 423, 425.
Buchholz, H., 198, 221, 223.
Buée, A. Q., 400.
Buisson, H., 224.
Burcard, J., 216.
Bürgi, J., 75.
Bürk, A., 106.
Burkhardt, H., 89, 91, 421, 424.

Cairoli, B., 127, 184.
Cairoli, Enrico, 127.
Cairoli, Ernesto, 127.
Cairoli, G., 127.
Cajori, F., 89—91, 428.
Cal, J. van, 235.
Callandreau, O., 223, 224, 425.
Campagne, M., 421, 423.
Campani, M., 237, 241, 242, 244.
Campano, J., 327, 335, 338, 411.
Cantor, M., 9, 11—14, 18, 68—71, 74, 83, 89, 92, 103—105, 107, 114, 116, 117, 119, 122, 200, 203, 205—209, 215, 216, 221, 301—303, 305—307, 313, 314, 317, 355, 356, 360, 403, 406—410, 414, 418—422, 424, 427, 428.
Capelli, A., 168.
Caporali, E., 146, 178.
Carcavy, P. de, 117.
Cardano, G., 418.
Cardinaal, J., 89, 421.
Carnerali, Caterina, 126
Carnot, L. N. M., 77.
Carrara, B., 89, 90.
Cartan, E., 426.
Casey, J., 294, 297.
Casorati, F., 131, 173, 175, 193.
Cassani, P., 421, 422.
Castillon, G. F. M. M., 355.
Cavalieri, B., 18, 24, 113, 115, 117—119, 123, 203, 204, 208, 209, 212, 318, 415, 419.
Cavendish, H., 374, 375, 391.
Cayley, A., 139, 148, 155—160, 162—164, 175, 178, 180, 189, 294, 297.
Ceradini, 182.
Ceretti, U., 421, 422.
Ceulen, L. van, 343.
Ceva, G., 190, 311, 424.
Chapelain, 237, 244, 247.
Chasles, M., 9, 12—14, 70, 134, 135, 138, 139, 143, 144, 148, 149, 151, 156, 157, 159, 160, 167—169, 171, 193, 325.
Chazottes, J., 421, 423.
Chelini, D., 144, 194.
Chizzoni, F., 427.
Chowarezmi, siehe Alkhwarizmi.
Chuquet, N., 215, 219, 404, 405, 419.
Ciampoli, G., 204.
Ciruelo, P. S., 306.
Clairaut, A., 15, 29—32, 55, 57.
Claparède, E., 95.
Clavius, Chr., 342, 343.
Clebsch, A., 76, 148, 150, 154, 162, 163, 165, 169, 173—178, 194, 294, 297.
Clement, 240.
Clifford, W. K., 155.
Cohn, F., 319.
Coignet, M., 346, 348.
Collen, L. van, siehe Ceulen.
Commandino, F., 18, 122.
Condulmer (= Eugenius), 339.
Copernicus, siehe Koppernicus.
Coppino, M., 183, 185.
Cornu, A., 391, 425.
Coster, S., 235.

Cotes, R., 355, 356, 358—365.
Cotton, A., 426.
Cozzolino-Cremona, Itala, 125.
Cranz, K., 426.
Crelle, A. L., 162.
Cremona, Francesca, 126.
Cremona, Gaudenzio, 126.
Cremona, Giovanna, 126.
Cremona, Giovanni, 126.
Cremona, Giuseppe, 126, 128.
Cremona, L., 92, 125—144, 146—190, 311, 318, 424, 425.
Cremona, P., 126.
Cremona, Tr., 126.
Crespi, A., 89, 90.
Culmann, K., 169, 172.
Curie, P., 426.
Curtze, M., 10, 11, 89, 90, 148, 151, 162, 163, 172, 201, 202, 214, 218, 221—223, 294, 297, 311, 312, 324, 326, 337, 403—406, 408, 415, 416, 420, 421, 423.

Dale, J. B., 94.
Dannemann, F., 89, 90.
Dante Alighieri, 188.
Darboux, G., 132, 142.
Darmstädter, L., 89.
Dati, C., 247.
Daublebsky von Sterneck, R., 224.
Debeaune, F., 307, 314, 315, 428.
Deichmüller, F., 425.
De la Campa, S., 89, 91.
De la Gournerie, J. M., 159, 160.
Delambre, J. B., 76, 80, 81, 83, 86.
De la Roche, E., 219.
Delassus, E., 224.
Del Monte, G. U., 214.
Deruyts, F., 223.
Desargues, G., 191, 212, 219.
Descartes, R., 31, 116, 119—121, 123, 212—217, 252, 282, 307, 314, 315, 318, 401, 406, 412, 418, 423, 428.
Des Marez, G., 89, 91.
Dewulf, E., 155, 171, 179.
Dickstein, S., 89, 90, 92, 297, 421, 425, 428.
Dini, U., 183, 316
Diofantos, 5—8, 110, 118, 260.
Dionysodoros, 90.
Disteli, M., 428.
Dolezalek, 426.
Douw, S. S., 235.
Dozy, R., 78.
Drach, C. A. von, 140.
Drach, J., 426.
Dschabir ibn Aflah, 86, 336.
Du Bois Reymond, R., 89.
Duhem, P., 89, 90, 221, 321, 322, 421, 422, 429.
Dühring, E., 16.
Dünner, L., 89, 90.
Dunthorne, R., 80.
Dupin, P. Ch. F., 131, 190.
Duporcq, E., 89.
Durando, 127.
Durège, H., 149.
Dyck, W. von, 224.

Eberhard, J. P., 309.
Eckardt, F. E., 165.
Edleston, 359.
Egoroff, D. Th., 89, 92.
Ehwald, R., 421, 423.
Eisenlohr, Fr., 427.
el-Battani, siehe Albattani.
el-Biruni, 82, 84, 87.
el-Bitrodji, 87.
el-Charaqi, 84.
el-Chazini, 85.
el-Daje, 84.
el-Fargani, 84, 86.
el-Hasan ben Ali, siehe Abul Hasan.
el-Imrani, 416.
el-Madjriti, 79, 84.
el-Motasim, 79.
el-Sigzi, 80.
el-Tabari, 88.
el-Tusi, siehe Nasireddin.
el-Zajjat, 78, 79.
el-Zarkali, siehe Zarkali.
Eneström, G., 1, 4, 9, 14, 63, 70, 72, 73, 89—91, 93, 98, 105, 196, 200—210, 218, 220—223, 248, 249, 255, 262, 268, 297, 298, 306, 307, 309, 310, 312, 316—318, 346, 398, 407—416, 420—423, 425, 428.
Engel, F., 221, 224, 297.
Enkle, J., 308, 421.

Enriques, F., 421, 425.
Epaphroditus, 104.
Ernst, G., 421, 423.
Escherich, G. von, 320.
Ette, C. P., 421, 425.
Eudoxos, 222.
Eugenius (Pabst), 339.
Eukleides, 70, 90, 91, 98, 99, 106—108, 110, 146, 147, 225, 226, 230, 232, 233, 315, 317, 322, 331, 333—336, 399, 405, 411, 414—416, 419, 422, 423.
Euler, L., 15, 27, 32, 34—49, 51, 52, 54, 55, 57, 58, 71, 76, 91, 207—209, 248—251, 253—263, 268, 271, 275, 276, 281—286, 291, 310, 313, 318, 365, 401, 414, 419, 421, 423, 428.
Eumathios, 80.
Everett, J. D., 425, 427.

Fabricius, W., 367.
Fabroni, A., 246, 341.
Fahie, J. J., 421, 423.
Farini, C. L., 143.
Faure, H. A., 150, 192.
Favaro, A., 9, 89—91, 221, 222, 239, 326, 415, 421, 423, 425, 428.
Fazzari, G., 89, 92, 221, 222, 421, 422.
Fehr, H., 91, 221, 223, 421, 425, 429.
Feldhaus, F. M., 89, 91, 421—424.
Fergola, N., 91.
Fermat, P. de, 114, 115, 119, 121—123, 212, 213, 218, 302, 355.
Ferrari, N., 130.
Ferrari-Cremona, Elisa, 130.
Ferrari-Cremona, Margherita, 126.
Ferrers, N. M., 148.
Ferretti, G., 94.
Fibonacci, siehe Pisano.
Fiedler, W., 148, 153, 166, 167.
Filippos Arhidaios, 80.
Filon von Byzanz, 421, 423.
Finali, G., 181.
Fincke, Th., 348.
Fine, O., 346.
Folkierski, W., 425.
Fondulo, Gabrino, 332.
Fondulo, Giorgio, 332—335, 337, 339.
Fontaine, A., 15, 31—34, 46, 48, 51, 58.
Forcadel, P., 13.
Förster, W., 221, 222, 224, 428.
Forsyth, A. R., 429.
Français, J. F., 400.
Français (de Colmar), 400.
Franciscus de Esculo, 328.
Frénicle de Bessy, B., 215, 218.
Freycinet, C. de, 16.
Frezo, P. da, 332—335, 339.
Fricius (= Frezo), P., 332.
Friedlein, J. G., 222.
Friedrich Wilhelm von Sachsen, 423.
Frigi, Frizi (= Frezo), P., 332.
Friis, F. R., 215, 421, 423.
Fuchs, L., 425, 428.
Fuhrmann, W. F., 427.
Fundulus, siehe Fondulo.
Fuss, P. H., 71, 248, 251—253, 275, 276, 283, 284, 286, 310.

Gabba, A., 129.
Gabir, siehe Dschabir.
Galilei, G., 18—20, 24, 91, 121, 203, 204, 209, 222, 234, 237—239, 241—247, 415, 423.
Galilei, V., 237, 238, 241, 242, 244.
Gambioli, D., 313, 317, 420.
Garibaldi, G., 146.
Gauss, K. F., 89, 92, 221, 222, 382, 424.
Gautier, R., 421, 425.
Geber, siehe Dschabir.
Geer, P. van, 421, 422.
Gegenbauer, L., 183, 223, 425.
Geiser, C. F., 174.
Geminos, 84, 225.
Genardus (Gernardus), 14, 315.
Generini, 245.
Gerbaldi, F., 183.
Gerbert, 90.
Gerhardt, K. I., 9, 14, 204, 215, 216, 226, 243, 308.
Gerhardt, O., 221, 223.
Gerlach, H., 92.
Gerland, E., 89, 234, 238, 421, 423.
Gherardo Cremonese, 311, 315, 404—406 415, 420.
Gherardo da Sabbionetta, 80.
Gibbs, J. W., 92, 425.
Gilbert, Ph., 342.
Gilbert, W., 18, 20, 91, 423.

Ginzel, F. K., 86.
Girard, A., 76, 215, 217, 405.
Glaisher, James, 223, 425.
Glaisher, J. W. L., 294, 297.
Gloriosi, G. C., 91.
Gmeiner, J. A., 221, 223.
Godefroy, M., 89, 91, 221, 222.
Goldbach, Chr., 259.
Goldbeck, E., 18.
Goodspeed, E. J., 89, 90.
Gordan, P., 173, 174.
Gottigniez, G. de, 236.
Govi, G., 316.
Gräfe, F., 306, 421, 428.
Gram, J. P., 422.
Grammateus, H., 215, 404, 406.
Grassmann, H. d. A., 148, 149, 162, 164. 190.
Grassmann, H. d. J., 426.
Greenhill, A. G., 421, 425, 428.
Gregory, J., 75, 76, 115, 116, 420.
Gua, J. P. de, 423.
Guldin, P., 115.
Günther, S., 9, 10, 83, 221, 230, 422, 427.
Gurney, H. P., 427.
Guttmann, M., 89, 90.
Gutzmer, A., 421, 424, 428.
Gyldén, H., 198, 223.

Haas, K., 421, 423.
Habasch, 82—84, 419.
Hagenbach, A., 224.
Halley, E., 80, 213.
Halliwell, J. O., 409.
Halma, N. B., 230.
Halsted, G. B., 94.
Hamberg, H., 221, 223.
Hamberger, G. E., 309, 310.
Hamburger, M., 92, 294, 297, 318.
Hanawalt, F. W., 94.
Hankel, H., 97, 98, 105, 108.
Hansen, P. C. V., 294.
Hardy, G. F., 210.
Harriot, T., 405.
Hasan ben Musa ben Schakir, 10, 11, 217, 218, 311, 323—325.
Hasselberg, B., 421, 423.
Hasselt, G. van, 235.
Hatzidakis, N. J., 426.
Hauck, G., 173.
Haussner, R., 91, 222.
Hayashi, T., 421, 422.
Hayward, R. B., 223.
Heffter, L., 426.
Heiberg, J. L., 6, 89, 90, 225—227, 230, 232, 316, 399, 421, 422.
Heilbronner, J. C., 9, 13, 215.
Helmholtz, H. von, 92, 222, 424.
Henneberg, L., 173.
Henoch, M., 296, 297.
Henrici, O., 294.
Henry, Ch., 409, 410.
Henry, Pr., 425.
Hérigone, P., 401.
Hermann, J., 27, 250, 262, 264, 266, 271, 272, 276, 278, 308.
Hermannus Secundus (Dalmata), 79, 423.
Hermes, 87.
Hermias, 80.
Heron, 5, 6, 12, 101, 105, 107, 109, 225, 311, 312, 323, 325, 419, 423.
Hess, A. E., 94, 223, 425.
Hesse, O., 92, 148, 167, 191.
Hessenberg, G., 426.
Hettner, G., 89, 91.
Hevel, J., 236.
Hindenburg, C. F., 400.
Hipparchos, 111, 222, 230, 231, 233.
Hirst, T. A., 154.
Hlibowicky, K., 89, 92.
Hobson, E. W., 94, 221, 222.
Hoffmann, E., 366.
Holden, C. A., 426.
Homeros, 127.
Honein ben Ishaq, 88.
l'Hôpital, G. F. A. de, 205, 215, 216, 315, 413, 414.
Hoppe, R., 293, 297.
Hoüel, J., 147.
Hudde, J., 116, 204, 212, 213, 216, 405, 406.
Hudson, R. W. H. T., 427.
Hugo, Victor, 188.
Hulsius, L., 347, 352, 353.
Hultsch, F., 221, 222, 225, 226, 230, 231, 233, 406, 421, 422.
Humenus, 80.
Hutt, E., 293.
Huygens, Chr., 19, 24, 31, 75, 115, 116, 207, 212, 219, 234—238, 240—247, 269, 412.

Ibn Challikan, 79.
Ibn Junis, 85.
Initius Algebras, 202, 214, 406.
Ishaq ben Honein, 88.

Jacobi, C. G. J., 129, 173, 424, 428.
Jacquier, F., 367, 371.
Jägermann, R., 421, 425.
Jahnke, E., 92.
Janni, V., 148.
Johannes de Muris, 14.
Johannes Hispalensis, 84, 405, 408—410.
Jolly, Ph. G., 384. 386, 391.
Jonquières, E. de, 148, 149. 151, 153, 154, 174, 425.
Jordan, C., 165.
Jordanus Nemorarius, 9—14, 70, 203, 217, 222, 311, 321—325, 418, 419.
Jordanus Saxo, 418, 419.
Joteyko, Mlle J., 317, 318.
Jung, G., 146, 169, 172, 173, 294.
Jurin, J., 253.

Kaltenbrunner, F., 339.
Kapteyn, W., 89, 421.
Kästner, A. G., 9.
Keller, F., 382—387, 389—391, 397.
Kelvin, W., 92.
Kepler, J., 18, 20, 24, 123, 212, 222, 423.
Kewitsch, G., 221.
Khowarezmi, siehe Alkhwarizmi.
Kircher, A., 236.
Klein, F., 77, 92, 171, 294, 359, 421, 424, 428.
Kleist, E. J. von, 424.
Klöres, C., 89, 92.
Klügel, G. S., 76.
Kluyver, J. C., 89, 421.
Kobald, E., 221, 223.
Kommerell, V., 428.
Konen, H., 224.
König, A., 384, 386, 391.
Königsberger, L., 89, 92, 221, 222, 295, 421, 424, 428.
Koppe, M., 317.
Koppernikus, N., 18, 215, 243.
Korkine, A., 294.
Korn, A., 47, 317, 318.
Korndörfer, G. H. L., 177.
Körner, Th., 15, 221, 222.
Korteweg, D. J., 89, 421.
Kortum, H., 427.
Kossonogoff, J. J., 426.
Kowalewski, G., 428.
Kowalevski, Sophie, 316.
Krazer, A., 89, 93
Kretzschmer, E., 293.
Kronecker, L., 293, 294, 296
Kucharzewski, F., 421, 423.
Kugler, F. X., 85.
Külp, E. J., 318.
Kümmel, G., 319.
Kummer, E. E., 160, 162, 293.
Kutta, W. M., 78, 221.
Kwietniewski, W., 223.

La Condamine, Ch. M. de, 374.
Lacour, E., 94.
Laffitte, P., 65.
Lafitte, 134.
Lagarde, P. de, 399.
Lagny, Th. F. de 75, 76.
Lagrange, Ch., 89, 91.
Lagrange, J. L., 15, 47, 49—54, 58, 77.
La Hire, Ph. de, 218.
Laisant, C. A., 429.
Lalande, J. de, 80.
Lambert, J. H., 75, 76, 207.
Lampa, A., 426.
Lampe, E., 89, 92, 292, 296, 297, 375, 379, 382, 383, 395—397, 421, 422, 424 428.
Lancetti, V., 332.
Landsberg, G., 428.
Lange, J., 92, 297.
Langren, M. F. van, 91, 423.
Laplace, P. S., 15, 52—54, 57.
Laska, W., 391.
Lasswitz, K., 16.
Lazarus, W., 297.
Lazzarini, M., 89, 90, 200.
Le Chatelier, H., 89, 92.
Lecornu, L., 426.
Lefevre-Gineau, L., 413.
Lefort, F., 204.
Legendre, A. M., 76, 133, 207.
Leibniz, G. W., 114—118, 124, 204, 205, 212, 216, 243, 253, 258, 264, 308, 355, 356, 360, 364, 401, 414, 420.

Lemström, K. S., 427.
Leonardo Cremonese, 311, 312, 326—341.
Leonardo de' Antonii, 331, 336, 338—340
Le Sage, G. L., 378.
Leseur, Th., 367.
Leudesdorf, C., 171, 421, 425.
Leveratus, G., 327.
Leveratus, G. A., 327.
Leveratus, G. G., 327.
Lewis, Ch. Th., 427.
Liapunoff, A. M., 383
Libri, G., 312, 404—406, 416.
Lie, S., 92, 180, 181, 297
Lindemann, F., 163, 174.
Lindt, R., 421, 424.
Livet, J. J., 92.
Longomontanus, Chr., 219.
Lorenz, Hans, 319.
Lorey, W., 89—91.
Loria, G., 89, 93, 125, 221, 311, 313, 317, 318, 355, 399, 421, 422, 424, 428.
Löwy, A., 224.
Lubbock, J. W., 210.
Lucas, F., 78.
Ludwig XIV, 246.
Ludwig, F., 221, 223.
Ludwig, W., 428.

Macé de Lépinay, J. Ch. A., 427.
Macfarlane, A., 221, 222, 421, 424.
Mach, E., 15, 18, 24, 32, 89, 90, 221, 421, 422.
Mackay, J. S., 89, 91.
Mackenzie, M. A., 94.
Maclaurin, C., 72, 148, 208—210, 379, 418.
Magenta, G. B., 126, 130.
Magini, G. A., 343.
Magni, 167.
Magnus, L. J., 153.
Mahler, E., 421, 422.
Maier, Fr. Ch., 76.
Maimonides, 90.
Mainardi, L., 90, 222, 326, 337, 341.
Malacarne, V., 327.
Mamiani, T., 143.
Maner-Müller, Anna, 186.
Mangoldt, H. von, 319.
Manitius, K., 85, 90, 317.
Manitius, M., 317.
Mannheim, A., 167, 189.
Mannoury, G., 221.
Mansion, P., 63, 297.
Marius (Mayr), S., 91.
Markoff, A., 207.
Marriott, W., 421, 425.
Marsili, C., 209, 423.
Marty, 81.
Mascart, J., 89, 92.
Maskelyne, N., 374, 375, 378.
Maslama el-Madjriti, siehe el-Madjriti.
Maupin, G., 89, 91.
Maurain, Ch., 319.
Mauro, 127, 128.
Maurolico, F., 18, 407, 419.
Maximos Planudes, siehe Planudes.
Maxwell, Cl., 172.
Mayer, 391.
Maynz, A., 293, 297.
Mayr, S., siehe Marius.
Mazzini, G., 130.
Medici, Leopoldo de', 237—239, 241, 246, 247.
Menelaos, 231, 323, 407, 415, 419.
Mercator, N., 219.
Merian, P., 71, 217.
Mertens, F., 320.
Messahala, 328.
Meyer, Edm., 293, 294.
Meyer, R., 211.
Meyer, W. Fr., 142, 297.
Meyer, 92.
Michaelis, K., 297.
Milanesi, G., 200.
Mirabeau, G. H. R., 188.
Misani, M., 125, 133, 173.
Mlodziejowski, B. K., 89, 92.
Möbius, A. F., 75, 77, 135, 139, 171.
Mögelin, M., 223.
Moivre, A. de, 75, 206, 207, 418.
Molk, J., 398, 399.
Monge, G., 166, 177.
Montigny, E. M. de, 367.
Montmort, P. R. de, 303.
Montucla, J. E., 9, 34, 80.
Moors, B. P., 421, 422.
Moreno, H. C., 319.
Mosso, A., 184.
Mossotti, O. F., 127.

Mott, H. C. de, 94.
Muhammed ben Musa, siehe Alkhwarizmi.
Muhammed ben Musa ben Schakir, 10, 11, 217, 218, 311, 323—325.
Muir, T., 89, 91, 221, 222.
Müller, Ad., 421, 423.
Müller, C. F., 404.
Müller, Conrad H., 309, 310, 317, 318, 421, 424.
Müller, Felix, 89, 91, 92, 94, 131, 292, 293, 295, 297, 309, 317, 318, 421, 424.
Müller, J. W., 205, 413.
Musa ben Schakir, 10, 11, 217, 218, 311, 325.

Nallino, C. A., 78—88, 221, 222, 419.
Narducci, E., 410, 411.
Nasireddin, 82, 85.
Natani, L., 293.
Neirizi, 404, 408.
Nelli, G. B. C. de, 244, 246.
Nemorarius (de Nemore), siehe Jordanus.
Neper, J., 75, 317, 359.
Nesselmann, G. H. F., 63.
Netto, E., 293, 297, 398, 428.
Neumann, C., 294, 297.
Neumann, F., 424.
Neumann, Luise, 421, 424.
Newton, I., 15, 16, 18—31, 34, 46, 50, 53, 54, 58, 72, 91, 115, 121, 124, 133, 149, 212, 216, 224, 250, 252, 254, 256, 258, 262—266, 271, 272, 282, 355—360, 362, 364, 366, 374, 383, 405, 420.
Nikomachos, 98—103, 105.
Nöther, M., 89, 92, 155, 178—180, 421, 424, 425.
Novati, F., 221, 222.

Oberbeck, A., 294, 297.
Ocreat, 403, 408.
Ohrtmann, K., 292—297.
Ohrtmann, Luise, 293, 296.
Oldenburg, H., 216, 400.
Oppel, F. W. von, 76.
Oppolzer, E. v., 221, 223.
Oppolzer, Th. v., 86.
Oresme, N., 12, 120, 218.
Örtel, K., 319.
Oskar II, 198.
Östreich, P., 96.
Ostrogradskij, M. W., 424.
Ostwald, W., 47.
Ott, K. von, 427.
Öttingen, A. J. von, 89, 92, 221, 222, 421. 424.
Oudemans, J. A. C., 89, 91.
Oughtred, W., 76.
d'Ovidio, E., 89, 92, 161.

Pachymeras, 7.
Paciaudi, P. M., 341.
Paciuolo, L., 311, 400, 404.
Painlevé, P., 428.
Paolis, R. de, 146.
Papperitz, E., 89, 90.
Pappos, 6, 122, 225, 226.
Pascal, Bl., 72, 73, 115, 117, 118, 123, 165, 212, 222, 302, 406.
Pauly, A., 230.
Pell, J., 315.
Peprný, L., 421, 422.
Perntner, K., 427.
Pescetto, 327.
Peterson, K., 92.
Petit, P., 237.
Petrarca, F., 125.
Petrus de Curte, 336.
Petzval, J., 223.
Peurbach, G. von, 12.
Piani, D., 143, 144, 193.
Picard, E., 89, 90, 92.
Pierpaoli, N., 382, 387, 390, 391, 395.
Pierpont, J., 320.
Pirie, G., 427.
Pisano, L., 13, 90, 200, 201, 311, 316, 325, 330, 340, 400, 404, 405, 414, 415, 419, 420.
Plana, G., 421, 423
Planudes, Maximos, 7, 226.
Platon, 90, 102, 106, 145, 226, 233, 406.
Platone Tiburtino, 80, 81, 84—87, 311, 405.
Playfair, J., 366, 375—379, 381—383, 396.
Plücker, J., 148, 222.
Poggendorff, J. C., 89, 92, 205, 216, 221, 222, 306, 309, 413, 421, 424.
Poincaré, H., 198, 199, 223.
Poisson, S. D., 91.
Poor, C. L., 319.
Porro, F., 317.

Porte, E. de, 421, 423.
Poseidonios, 225.
Poudra, N. G., 149, 190, 191.
Poynting, J. H., 391.
Prandtl, L., 426.
Pringsheim, A., 221, 223, 398.
Pritzel, 293.
Proklos, 87, 225, 226, 232, 406.
Ptolemaios, Kl., 6, 8, 79, 81, 84, 86, 87, 89, 90, 109, 111, 112, 222, 230, 231, 287, 334—336, 339.
Puliti, G., 313, 317.
Pythagoras, 106, 107, 110, 429.

Rabban el-Tabari, siehe el-Tabari.
Radau, R., 293, 294.
Radelfinger, F. G., 427.
Raffy, L., 426.
Ragnoli, A., 382, 395.
Rahn, J. G., 315.
Ramorino, A., 127.
Ramus, P., 12, 13, 325.
Ratdolt, E., 70, 419.
Rath, E., 73, 221, 222.
Raveau, C., 421, 425.
Regimontanus, J., 9—12, 14, 81. 85, 411.
Reich, F., 391.
Reiff, R., 209.
Reimer, G., 294.
Reimers, N., 346.
Reye, Th., 140, 166, 169.
Reyes Prosper, V., 421, 423.
Reyneau, Ch., 205, 401, 414.
Rhonius, siehe Rahn.
Riccardi, P., 306, 314, 367.
Richards, H. C., 94.
Richarz, F., 384, 386, 391.
Richmond, H. W., 165.
Richter, A., 89, 93.
Richter, G. Fr., 309.
Richter, J. P., 326.
Riemann, B., 117, 163, 173, 175.
Riese, A., 215, 406.
Rietz, H. L., 426.
Rilliet, A., 427.
Ripert, L., 92, 94.
Ritchie, W. J., 425.
Rius y Casas, J., 421, 425.
Robartes, F., 206.
Roberts, F., 206.
Roberts, I., 425, 427.
Roberts, M., 133.
Roberts, S., 148.
Robertus Retinensis, 84, 404, 405.
Roberval, G. P., 117, 121, 123, 212, 236, 237, 243.
Robinson, J., 216.
Rockwell, Ch. H., 223.
Rohn, K., 159, 426.
Romance, L., 191.
Römer, O., 213, 224.
Roomen (Romain), A. van, 342—354
Rosanes, J., 89, 91, 155.
Rose, V., 68.
Rosenberger, F., 23.
Roseveare, W. N., 221, 223.
Rosso (de Rubris), G., 327.
Rubenson, R., 223.
Rubris (Rosso), G. de, 327.
Rudio, F., 207.
Rudolff, Chr., 201, 202, 406.
Rudolph von Brügge, 79.
Ruland, A., 342, 343, 352.
Runge, K., 426.

Saccheri, G., 89, 91, 206, 421, 423.
Sachau, E., 82, 84, 87.
Sacrobosco, J., 328, 404, 420.
Šafarik, V., 223.
Saint-Jacques de Silvabella, 371—373, 375, 383, 387.
Saint-Venant, B. de, 73.
Saint-Vincent, Grégoire de, 117, 123, 208, 209, 212, 236, 415, 423.
Salmon, G., 94, 139, 148, 153, 155—157, 162, 167, 223, 425.
Salvatore-Dino, N., 161, 163.
Sanctis, F. de, 184.
Santagata, D., 143.
Sanzio, Raffaele, 188.
Sarrau, E., 425, 427.
Sauerbeck, P., 421, 423.
Savasorda, siehe Abraham bar Chijja.
Saviotti, C., 169.
Scaliger, J., 346.
Scheffers, G., 89, 92.
Scheiner, Chr., 91.
Schell, W., 94, 223.

Schellbach, K. H., 366, 382.
Scheubel, J., 13.
Schiaparelli, G., 78, 81, 85—87, 152, 153, 317, 421, 422.
Schiller, N. N., 426.
Schilling, F., 426.
Schläfli, L., 162, 164.
Schlegel, V., 297.
Schlesinger, L., 428.
Schmidt, Wilh., 68, 89, 90, 421, 423.
Scholz, W., 294.
Schöne, H., 5, 6, 101.
Schöner, J., 9, 10, 12.
Schonerus, L., 12, 13.
Schönflies, A., 221, 222.
Schooten, F. van, 204, 213, 235, 307, 315, 412.
Schoute, P. H., 89, 421.
Schram, R., 85, 86.
Schreber, K., 426.
Schreiber, H., siehe Grammateus.
Schreiber, P. J., 89, 91.
Schröder, E., 223.
Schröter, H., 139, 149, 150, 160, 192.
Schubert, H., 140, 294, 297, 398.
Schumann, A., 293, 297.
Schwalbe, B., 293.
Schwannecke, H. E., 425.
Schwarz, H. A., 159, 161, 424.
Schwarzschild, K., 223, 421, 424.
Schweins, F., 92.
Schwenter, D., 203.
Scialoja, A., 182.
Sédillot, J. J. E., 83, 86.
Sédillot, L. A., 83, 86.
Seeliger, H., 421, 425.
Segner, J. A., 309, 310.
Segre, C., 428.
Seki, K., 423.
Sella, A., 379, 382, 387—397.
Sella, Q., 182—184.
Seydewitz, F., 137, 139.
Shedd, J. C., 89, 91.
Simon, M., 89, 91, 428.
Simplikios, 225.
Simson, R., 91, 150.
Slocum, S. E., 319.
Slonimski, Ch. S., 319.
Sluse, R. de, 116, 204, 212.
Smith, D. E., 91, 319, 429.
Smith, H. J. S., 194.
Smith, Robert, 359, 362, 364, 365.
Sobotka, J., 319.
Sohncke, L. A., 9, 12, 13, 70.
Sommer, J., 426.
Sondericker, J., 427.
Soret, Ch., 319, 425.
Speusippos, 102.
Spiess, P., 319.
Spitzer, S., 210.
Spottiswoode, W., 133, 194.
Stäckel, P., 16, 89, 91, 262, 272, 360, 424.
Stahl, W., 297.
Staigmüller, H., 13.
Stampioën, J. J., 307.
Staude, O., 89, 91.
Staudt, K. G. Ch. von, 136, 169, 171, 172, 189.
Steiner, J., 92, 134, 137—139, 147, 148, 150, 155, 160—162, 169, 171, 175—177, 180, 192.
Steinitz, E., 428.
Steinschneider, M., 80, 84, 317, 416, 422.
Stephanus philosophus, 80.
Stern, M. A., 9.
Steur, J. de, 235.
Stevin, S., 18, 214, 217, 401.
Stewart, M., 91.
Stifel, M., 214, 217, 402, 405, 418.
Stirling, J., 91, 207, 209.
Stokes, G. G., 92, 425.
Stolz, O., 221, 223, 294.
Stone, E., 72, 205.
Störmer, C., 317, 318.
Stouff, M. A. X., 319.
Strabo, siehe Walafried.
Streit, H., 89, 91.
Struve, H., 94.
Stuart, G. H., 425.
Studnička, F. J., 215, 297.
Study, E., 77, 94.
Sturm, A., 417—422.
Sturm, R., 140, 162, 421, 425, 428.
Suter, H., 88, 222, 419, 428.
Swinden, J. H. van, 234.
Sylvester, J. J., 149, 162, 164, 166, 167, 179.

Tabit ben Kurrah, 80, 82, 84, 327, 328.
Tacquet, A., 123.
Tannery, J., 398, 426.
Tannery, P., 5, 63—66, 89, 92, 93, 95, 101, 102, 121, 221, 222, 317, 318, 328, 329, 399, 406, 415, 416, 419, 421, 423, 427—429.
Tartaglia, N., 13, 306, 314, 322, 423.
Taylor, Br., 166, 192, 216.
Teichert, R., 293.
Teixeira, F. G., 297.
Terquem, O., 168.
Theaitetos, 226, 422.
Theodoros, 226, 233.
Theon von Alexandria, 230, 231.
Thiesen, M. F., 386.
Timtchenko, I., 361.
Toledo, L. O. de, 89, 91.
Toni, G. B. de, 326.
Tonni-Bazza, V., 421, 423.
Tōplitz, E., 297.
Torricelli, E., 212.
Traumüller, F., 238.
Trautvetter, 171.
Treffler, 245.
Trenchant, J., 403.
Treutlein, P., 10.
Trojano, C., 322, 323.
Tropfke, J., 11, 89, 217, 221, 406, 409, 421, 422.
Trudi, N., 137, 138, 150, 191.
Tschirnhaus, E. W. von, 218, 420.
Tuckermann, A., 221, 222.

Uglieni, M. [= Cremona, L.], 192.
Ulug Beg, 83.
Ursus, Raymarus, siehe Reimers.

Vacca, G., 215.
Vailati, G., 89, 91, 206, 317, 421, 422, 428.
Valentin, G., 318.
Valerio, L., 115, 119, 123.
Vallée, L. L., 73.
van der Vliet, P., 427.
Vaux, C. de, 421, 423.
Ventadour, 367.
Venturi, G. B., 325.
Veronese, G., 89, 92, 125, 130, 146, 165, 184, 421, 425.
Vicaire, E., 223.
Viète, F., 69, 70, 111, 118, 119, 121, 122, 217, 343—346, 350, 401, 402, 405.
Vigo, G. da, 327.
Villari, E., 427.
Vinci, L. da, 18, 90, 322, 323, 326, 327.
Virgilius, P., 127.
Viterbi, A., 89, 92.
Vitruvius Pollio, 68, 69.
Vittorio Emanuele II, 146.
Vivanti, G., 422, 428.
Viviani, V., 91, 237—246.
Vōgelin, J., 10.
Vogt, H., 398.
Voit, C., 421, 425.
Voss, A., 16, 34, 51.
Vossius, G. J., 9.

Wachtchenko-Zakartchenko, M. E., 10.
Waessenaer, J. van, 307.
Walafried Strabo, 81.
Wallenberg, G., 89, 296.
Wallis, J., 113, 114, 117, 120, 123, 212, 236, 282, 355, 412, 420.
Wallner, C R., 89, 90, 113, 317, 318, 428.
Wangerin, A., 92, 293—297, 366.
Wappler, E., 13, 14, 202.
Ward, R. de C., 89, 92.
Weber, H., 222, 428.
Weierstraß, K., 160, 175, 198, 199, 294.
Weiss, W., 163, 427.
Wellstein, J., 319.
Werner, J., 215.
Wertheim, G., 419.
Weyr, Emil, 142, 146, 148, 158, 173, 179.
White, S. A. F., 94.
Whittaker, E. T., 221, 223.
Widman, J., 214, 311, 312, 404.
Wiedemann, G. H., 234.
Wieleitner, H., 422, 423.
Wien, W., 319.
Wilsing, J., 391.
Wilson, E. B., 421, 425.
Wilson, J. C., 317.
Wilson, J M., 147.
Wilson, R. E., 89, 93.
Winlock, Anna, 223.
Wirtinger, W., 320, 428.
Wirtz, C. W., 90.

Wislicenus, W. F., 224.
Wissowa, G., 230.
Withworth, W. A., 148.
Wittstein, A., 294.
Wohlwill, E., 238, 243, 244.
Wolack, G., 202.
Wolfers, J. Ph., 43, 45.
Wolff, Chr., 309.
Wölffing, E., 89, 91, 92, 221—223, 317, 318, 421, 424.
Wöpcke, F., 419.
Woronetz, P. W., 426.
Worpitzky, J., 293.
Wrenn, F. G., 94.
Wronski, H., 428.
Wüstenfeld, F., 84.
Wyrouboff, G., 65, 66, 92.

Zach, F. X. von, 373, 374.
Zakut, siehe Abraham Zakut.
Zarkali, 80, 86.
Zech, P. H. von, 169.
Zeuner, G., 295.
Zeuthen, H. G., 3, 89, 90, 95, 97, 163, 164, 168, 171, 209, 211—216, 218, 220, 221, 317, 420—422, 428, 429.
Zolotareff, G., 294.
Zurria, G., 223.

Druck von Theodor Hofmann in Gera.