

ZDZISŁAW BUBNICKI

STAN USTALONY DYSKRETNEGO UKŁADU REGULACJI
EKSTREMALNEJ PODDANEGO DZIAŁANIU ZAKŁÓCEŃ
PRZYPADKOWYCH

Praca poświęcona jest znalezieniu wartości oczekiwanej błędu ustalonego dyskretnego układu regulacji ekstremalnej pracującego w obecności zakłóceń przypadkowych. Rozpatruje się układ regulacji ekstremalnej z obiektem wielowejściowym o dowolnej charakterystyce. Otrzymane wyniki zilustrowane są przykładami.

I. Wstęp

W wielu wypadkach pracy układu automatycznej regulacji zachodzi konieczność zmian jego parametrów i charakterystyk przy zmieniających się warunkach pracy. Układ, który wykonuje te czynności automatycznie nosi nazwę układu samonastrajającego się. Jest to więc ogólnie układ automatycznego strojenia. Jedną z klas układów samonastrajających się stanowią układy automatycznej optyimizacji (klasyfikacja wg Feldbauma [3]). Zadaniem automatycznej optyimizacji jest doprowadzenie pewnego układu (obiekту optyimizacji), którego wielkość wyjściowa y jest funkcją wielkości wejściowych $x_1, x_2 \dots x_m$, posiadającą ekstremum - do stanu, przy którym y osiąga ekstremum. Zmiana wielkości wejściowych może być przy tym w pewien sposób ograniczona. Jeśli ograniczeń tych nie ma i y jest funkcją ciągłą skończonej ilości zmiennych $x_1, x_2, \dots x_m$ posiadającą jedno ekstremum, to taki układ automatycznej^m optyimizacji nazywamy układem ekstremalnym lub układem regulacji ekstremalnej.

Niniejsza praca poświęcona jest dyskretnym układom regulacji ekstremalnej o schemacie blokowym przedstawionym na

rys.1. W literaturze rozpatrywane są dwa rodzaje takich ukła-
dów. W jednym z nich, działającym na tzw. zasadzie gradien-
tu [2] urządzenie sterujące pracuje w ten sposób, że po
dwóch kolejnych próbach polegających na dodaniu do u_i wiel-
kości a_i i odjęciu jej w następnej próbie, następuje krok
roboczy tj. następująca zmiana u_i :

$$\Delta u_i = \alpha_i \Delta_i y \quad (\text{przy założeniu } z = 0)$$

gdzie $\Delta_i y$ oznacza zmianę wielkości wyjściowej spowodowaną
próbnymi zmianami wielkości wejściowej, czyli

$$\Delta_i y = f(x_1, x_2, \dots, x_i + a_i, \dots, x_m) - f(x_1, x_2, \dots, x_i - a_i, \dots, x_m)$$

(przy założeniu $z_0 = 0$).

Czynności te powtarzane są w kolejnych cyklach pracy. Jest
to zasada analogiczna do zasady gradientu w ciągłych ukła-
dach regulacji ekstremalnej, w których pochodna wielkości
wejściowej x_i jest proporcjonalna do odpowiedniej składowej
gradientu funkcji f :

$$\frac{dx_i}{dt} = \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Znak α_i zależy od rodzaju ekstremum: dla maksimum $\alpha_i > 0$,
dla minimum $\alpha_i < 0$. W układach dyskretnych drugiego rodza-
ju robocza zmiana wielkości wejściowej wyraża się wzorem

$$\Delta u_i = \pm a_i \text{ sign } \Delta_i y$$

(+ dla maksimum, - dla minimum); wielkość wejściowa może
się więc zmieniać równej wielkości "krokami", których kie-
runek zależy od znaku zmiany $\Delta_i y$ otrzymanej w wyniku prób.
Rozpatrywać będziemy układ regulacji ekstremalnej z urzędze-
niem sterującym o takim właśnie działaniu. Opisy zasad budo-
wy i działania urządzeń sterujących zwanych też automaty-
cznymi optyimizatorami znaleźć można w literaturze [np.3].

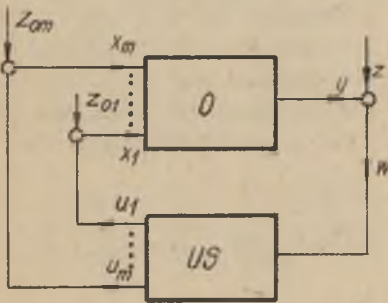
W pracy [1] znajduje się wartość oczekiwana błędu ustalo-
nego dla szczególnego przypadku rozpatrywanego układu, mia-
nowicie obiekt jest jednowejściowy o charakterystyce $y = |x|$
i $z_0 = 0$. Zakłócenie z przyjmuje się przypadkowe, o przy-

rostach posiadających symetryczny rozkład prawdopodobieństwa i wartość oczekiwaną $= 0$. W pracy [6] rozwiązane jest identyczne zadanie dla charakterystyki obiektu $y = x^2$. Obecnie rozpatrzmy zadanie znalezienia wartości oczekiwanej błędu ustalonego dla obiektu wielowejsciowego o dowolnej charakterystyce. Uwzględnimy również szczególny przypadek zakłócenia z_0 .

II. Wyznaczenie wartości oczekiwanej błędu ustalonego

Weźmy pod uwagę dyskretny układ regulacji ekstremalnej o schemacie blokowym przedstawionym na rys. 1. Założmy, że charakterystyka obiektu

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (1)$$



jest stale nieujemna i $y = 0$ tylko wtedy, gdy $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$.

W punkcie $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$ funkcja f posiada więc minimum i zadaniem układu sterującego jest ustawiczna kontrola tego ekstremum i zmiana (w zależności od wyników kontroli) poszczególnych wielkości wejściowych mająca na celu doprowadzenie obiektu do stanu ekstremalnego. Ograniczymy się

Rys.1. Schemat blokowy dyskretnego układu regulacji ekstremalnej. O - obiekt regulacji, US - urządzenie sterujące

do przypadku, gdy charakterystykę obiektu (1) można wyrazić następująco:

$$y = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_m(x_m) \quad (2)$$

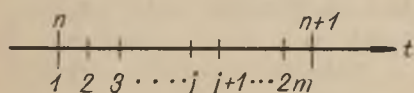
gdzie $f_i(x_i) = 0$ dla $x_i = 0$ oraz $f_i(x_i) = f_i(-x_i)$;

$$i = 1, 2, \dots, m,$$

a zakłócenia $z_{0i} = k_i a_i$ (k_i jest liczbą całkowitą) są stałe, tj. nie zmieniają się w czasie procesu regulacji. Ogranicze-

nie (2) nie wyklucza możliwości rozpatrywania obiektów o innych charakterystykach, bowiem w pobliżu ekstremum charakterystykę można zazwyczaj aproksymować funkcją tego typu.

Dyskretny układ sterujący pracuje w ten sposób, że w ciągu jednego cyklu pracy odbywają się kolejne próby dla poszczególnych wielkości wejściowych i na końcu cyklu zachodzą "kroki robocze" zmieniające równocześnie wszystkie wielkości



Rys.2. Harmonogram pracy urządzenia sterującego w jednym cyklu

wejściowe w zależności od wyników prób. Cykl pracy dzieli się więc na 2 m przedziałów równej długości (rys.2). W chwili j i j + 1 zachodzą kolejno dwie próbne zmiany wielkości u_{in} polegające na dodaniu do u_{in} wartości a_i w chwili j i odjęciu a_i w chwili j+1 ($j = 2i-1$). W pamięci urządzenia sterującego pozostaje do

końca cyklu wartość

$$\Delta_{in} w_n = \Delta_{in} y_n + \Delta z = f(x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{in} + a_i, \dots, x_{mn}) - f(x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{in} - a_i, \dots, x_{mn}) + \Delta z \quad (3)$$

gdzie $x_{in} = u_{in} + z_{oi}$ oznacza wartość wielkości wejściowej w n-m cyklu, tj. w chwili $t = nT$ (T - czas trwania cyklu); Δz oznacza zmianę zakłócenia z w czasie trwania jednego przedziału i jest wielkością przypadkową o znanym rozkładzie prawdopodobieństwa.

Przy założeniu (2)

$$\Delta_{in} y_n = f_i(x_{in} + a_i) - f_i(x_{in} - a_i) = f(u_{in} + z_{oi} + a_i) - f(u_{in} + z_{oi} - a_i) \quad (4)$$

Na końcu cyklu odbywają się w czasie nieskończenie małym w chwili $n + 1$ równoczesne robocze zmiany wszystkich wielkości wejściowych następująco uzależnione od przechowanych w pamięci wartości $\Delta_{in} w_n$:

$$u_{in+1} - u_{in} = x_{in+1} - x_{in} = -a_i \text{ sign } \Delta_{in} w_n \quad (5)$$

Przy założeniu (2) wielkości wejściowe x_1, x_2, \dots, x_m zmieniają się zatem niezależnie i schemat układu przedstawić można tak, jak na rys. 3.

Ponieważ

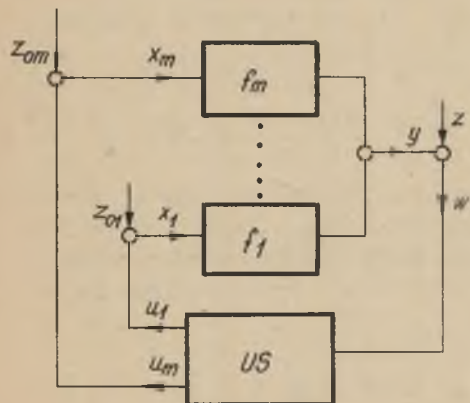
$$y = y_1 + y_2 + \dots + y_m$$

zatem

$$E[y_n] = E[y_{1n}] + E[y_{2n}] + \dots + E[y_{mn}] \quad (6)$$

gdzie $E[y_n]$ oznacza wartość oczekiwaną zmiennej przypadkowej y_n .

Dla wyznaczenia wartości oczekiwanej $E[y_n]$ potrzeba jest znajomości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej przypadkowej y_n . Jeśli przez $p_i^1[n]$ oznaczymy prawdopodobieństwo przyjęcia



Rys.3. Schemat blokowy układu dla rozpatrywanej charakterystyki obiektu

przez wielkość u_{in} wartości la_i (1 całkowite), to zgodnie z definicją wartości oczekiwanej [5] i przy uwzględnieniu równości $x_{in} = u_{in} + z_{oi} = u_{in} + k_i a_i$ otrzymujemy

$$E[y_{in}] = \dots + f_i(3a_i)p_{-3-k}^i[n] + f_i(2a_i)p_{-2-k}^i[n] + f_i(a_i)p_{-1-k}^i[n] + f_i(a_i)p_{0-k}^i[n] + f_i(a_i)p_{1-k}^i[n] + f_i(2a_i)p_{2-k}^i[n] + f_i(3a_i)p_{3-k}^i[n] + \dots \quad (7)$$

Przyjmujemy przy tym, że dla $x_{in} = 0$ (mimo, że przy $\Delta z = 0 \Delta w = 0$) zostanie zrobiony krok roboczy i y_{in} przyj-

*¹⁾ Dla przejrzystości pominięto przy k indeks i .

mie wartość $f_i(a_i)$. Tłumaczy to istnienie współczynnika $f_i(a_i)$ przy $p_{0-k}^i[n]$. Rozkład prawdopodobieństwa $p_1^i[n]$ znajdziemy metodą analogiczną do stosowanej przez Feldbauma [1] dla szczególnego przypadku wymienionego na wstępie. Oznaczając mianowicie $p_{1,1+1}^i$ prawdopodobieństwo przejścia przez u_1 w kolejnym cyklu pracy z wartości la_1 do wartości $(1+1)a_1$, otrzymujemy

$$p_1^i[n] = p_{1-1}^i[n-1] \cdot p_{1-1}^i + p_{1+1}^i[n-1] \cdot p_{1+1,1}^i \quad (8)$$

Oznaczmy przez p_1^i prawdopodobieństwo zrobienia przez wielkość x_i "fałszywego kroku" z wartości la_1 , czyli kroku roboczego oddalającego od minimum. Prawdopodobieństwo kroku prawidłowego oznaczmy przez $q_1^i = 1 - p_1^i$. Krok będzie fałszywy wtedy i tylko wtedy, gdy

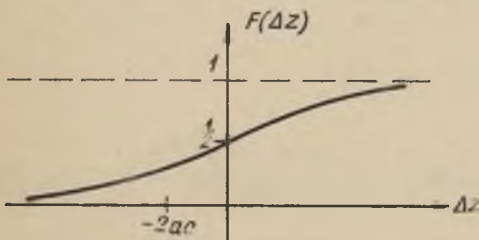
$$\text{sign } \Delta_i y \neq \text{sign } \Delta_i w = \text{sign}(\Delta_i y + \Delta z)$$

Łatwo zauważyć, że dla $\Delta_i y > 0$ zachodzi to wówczas, gdy

$$\Delta z < -\Delta_i y$$

Zatem

$$p_1^i = p_{-1}^i = F(-\Delta_i y / x = la_1) = F[-f_i(la_1 + a_i) - f_i(la_1 - a_i)] \approx F[-f_i'(la_1) \cdot 2a_i] \quad (9)$$



Rys.4. Funkcja dystrybucji zmiennej przypadkowej Δz

gdzie $F(\Delta z)$ oznacza funkcję dystrybucji zmiennej przypadkowej Δz .

W dalszym ciągu nie będziemy zaznaczać indeksów i pamiętając, że całe rozumowanie odnosi się do wielkości x_i . Z relacji (8) widać, że rozkład prawdopodobieństwa

określającego znalezienie się układu w pewnym stanie w chwili n zależy od odpowiedniego rozkładu prawdopodobieństwa dla chwili poprzedniej. Zachodzący tu proces jest więc dyskretnym procesem Markowa [4, 7]. Proces ten opisuje następujący układ równań otrzymany z wzoru (8):

$$\begin{aligned}
 & \dots\dots\dots \\
 p_{-3-k}[n] &= p_{-4-k}[n-1]q_4 + p_{-2-k}[n-1]p_2 \\
 p_{-2-k}[n] &= p_{-3-k}[n-1]q_3 + p_{-1-k}[n-1]p_1 \\
 p_{-1-k}[n] &= p_{-2-k}[n-1]q_2 + p_{-k}[n-1]p_0 \\
 p_{-k}[n] &= p_{-k-1}[n-1]q_1 + p_{-k+1}[n-1]q_1 \quad (10) \\
 p_{-k+1}[n] &= p_{-k}[n-1]p_0 + p_{-k+2}[n-1]q_2 \\
 p_{-k+2}[n] &= p_{-k+1}[n-1]p_1 + p_{-k+3}[n-1]q_3 \\
 p_{-k+3}[n] &= p_{-k+2}[n-1]p_2 + p_{-k+4}[n-1]q_4 \\
 & \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Ponieważ zgodnie z założeniem zmienna przypadkowa Δ z ma symetryczny rozkład prawdopodobieństwa i wartość oczekiwaną równą zero, zatem $p_0 = F(0) = \frac{1}{2}$.

Oznaczmy dla stanu ustalonego

$$r_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{j-k}[n] \quad (11)$$

Jeśli uwzględnimy na razie skończoną ilość równań w układzie (10) i weźmiemy pod uwagę równość $r_j = r_{-j}$ wynikającą z sy-

metrii charakterystyki, to dostaniemy następujący układ $s+1$ równań:

$$\begin{aligned}
 r_0 &= 2 r_1 q_1 \\
 r_1 &= r_0 \frac{1}{2} + r_2 q_2 \\
 r_2 &= r_1 p_1 + r_3 q_3 \\
 &\dots\dots\dots \\
 r_s &= r_{s-1} p_{s-1} + r_{s+1} q_{s+1}
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Z równości

$$\sum_{j=-s}^s r_j = r_0 + 2 \sum_{j=1}^s r_j = 1
 \tag{13}$$

otrzymujemy

$$r_0 = 1 - 2 \sum_{j=1}^s r_j$$

co w połączeniu z pierwszym równaniem układu (12) daje

$$r_1 q_1 + \sum_{j=1}^s r_j = \frac{1}{2}
 \tag{14}$$

Z równań układu (12) otrzymujemy kolejno

$$r_1 = r_1 q_1 + r_2 q_2$$

skąd

$$r_2 = r_1 \frac{1-q_1}{q_2} = \frac{p_1}{q_2} r_1 = \beta_2 r_1$$

$$\beta_2 r_1 = r_1 p_1 + r_3 q_3$$

skąd

$$r_3 = \frac{\beta_2 r_1 - r_1 p_1}{q_3} = \beta_2 \frac{p_2}{q_3} r_1 = \beta_3 r_1$$

.....

$$\beta_{j-1} r_1 = \beta_{j-2} r_1 p_{j-2} + r_j q_j$$

skąd

$$r_j = \frac{\beta_{j-1} r_1 - \beta_{j-2} r_1 p_{j-2}}{q_j} = \frac{\beta_{j-1} r_1 (1 - q_{j-1})}{q_j} = \beta_j r_1 \quad (15)$$

gdzie

$$\beta_j = \frac{p_1 p_2 \dots p_{j-1}}{q_2 q_3 \dots q_j}, \quad \beta_1 = 1 \quad (16)$$

Korzystając z (7), (15) i (14) dostajemy dla stanu ustalonego

$$E_s[y] = f(a)r_0 + 2 \sum_{j=1}^s f(ja) r_j = 2 r_1 q_1 f(a) + 2 \sum_{j=1}^s f(ja) r_1 \beta_j = 2 r_1 \left[q_1 f(a) + \sum_{j=1}^s f(ja) \beta_j \right] \quad (17)$$

Z równania (14) otrzymujemy

$$r_1 q_1 + \sum_{j=1}^s r_1 \beta_j = \frac{1}{2}$$

skąd

$$2 r_1 = \frac{1}{q_1 + \sum_{j=1}^s \beta_j} \quad (18)$$

Wstawiając (18) do (17) dostajemy

$$\begin{aligned}
 E[y_i] &= \lim_{s \rightarrow \infty} E_s[y_i] = \frac{q_1 f_1 + \sum_{j=1}^{\infty} f_j \beta_j}{q_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} f_j \alpha_j}{\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j} = \\
 &= f_1 \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f_j}{f_1} \alpha_j}{\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j} \quad (19)
 \end{aligned}$$

gdzie

$$f_j = f(ja)_{j=1,2,\dots}, f_0 = f_1; \alpha_j = \frac{\beta_j}{q_1}, j = 1, 2, \dots,$$

$$\alpha_0 = 1.$$

Wartość oczekiwana błędu ustalonego nie zależy jak widać od wielkości zaburzenia z . Założyliśmy dla uproszczenia, że z jest całkowitą wielokrotnością wielkości pojedynczego kroku a . W przeciwnym razie już przy braku zakłócenia z wystąpią ustalone oscylacje wokół ekstremum, a przy wystąpieniu przypadkowych zakłóceń z proces będzie bardziej skomplikowany i nie będzie go można opisać układem równań (10). Wzór (19) pozwala na obliczenie wartości oczekiwanej zmiennej przypadkowej y_i , gdy znana jest funkcja dystrybucji $F(\Delta z)$. Dla obliczenia wartości oczekiwanej wypadkowego błędu ustalonego, tj zmiennej przypadkowej y posługujemy się wzorem (6) i otrzymujemy

$$E[y] = \sum_{i=1}^m \frac{\sum_{j=0}^{\infty} f_{ij} \alpha_{ij}}{\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{ij}} \quad (20)$$

Zbadajmy zbieżność szeregów występujących we wzorze (19). Stosując kryterium d'Alemberta, otrzymujemy

(21)

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{f_{j+1} \alpha_{j+1}}{f_j \alpha_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{p_j}{q_{j+1}} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{P[-f(ja)2a]}{1 - P[-f((j+1)a)2a]}$$

Oznaczmy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = c$$

Wówczas dla $c \neq 0$, $c \neq \infty$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j} = \frac{F(-c, 2a)}{1-F(-c, 2a)} < 1 \quad (\text{por. rys.4})$$

Dla $c = \infty$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j} = \frac{F(-\infty)}{1-F(-\infty)} = 0$$

Dla $c = 0$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j} = \frac{F(0)}{1-F(0)} = 1$$

Możemy więc stwierdzić (pomijając przypadek wątpliwy $c=0$),

że szeregi $\sum_{j=0}^{\infty} f_i \alpha_j$ oraz $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j$ są zbieżne.

Zatem

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_j \cdot \alpha_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \alpha_j = 0 \quad (22)$$

W przypadkach praktycznych obliczeń jeśli nie można wyznaczyć sum tych szeregów, to opierając się na relacji (22) wystarczy uwzględnić w przybliżeniu skończoną ilość wyrazów, czyli

$$E[y_1] \approx \frac{\sum_{j=0}^s f_j \alpha_j}{\sum_{j=0}^s \alpha_j} \quad (23)$$

gdzie $f_{s+1} \cdot \alpha_{s+1}$ i α_{s+1} są już dopuszczalnie małe.

III. Przykłady

Dla charakterystyki obiektu

$$y = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_m|$$

mamy

$$f_i = |x_i|, \quad f_i(x_i)/_{x>0} = 1, \quad p_1^i = p_i = F(-2a_i),$$

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{q_i} \cdot \left(\frac{p_i}{q_i}\right)^{j-1} = \frac{1}{q_i} \lambda_i \quad \text{gdzie} \quad \lambda_i = \frac{p_i}{q_i} < 1$$

Korzystając z wzoru (19) otrzymujemy

$$E[y_i] = a_i \frac{1 + \frac{1}{q_i} \sum_{j=1}^{\infty} j(\lambda_i)^{j-1}}{1 + \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_i)^{j-1}} = a_i \frac{q_i + \frac{1}{(1-\lambda_i)^2}}{q_i + \frac{1}{1-\lambda_i}}$$

Wstawiając $\lambda_i = \frac{p_i}{q_i}$ oraz $q_i = 1 - p_i$ otrzymamy po przekształceniach

$$E[y_i] = a_i \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p_i}{1 - 3p_i + 2p_i^2} \right)$$

(identycznie jak w pracy [1]).

$$E[y] = \sum_{i=1}^m a_i \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p_i}{1 - 3p_i + 2p_i^2} \right)$$

Obliczmy obecnie wartość oczekiwaną błędu ustalonego dla obiektu dwuwejściowego o charakterystyce

$$y = |x_1|^3 + |x_2|^3$$

dla następujących danych:

rozkład prawdopodobieństwa zakłócenia Δz jest normalny o gęstości

$$W(\Delta z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(\Delta z)^2},$$

tj.

$$F(\Delta z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\Delta z} e^{-(\Delta z)^2} d(\Delta z);$$

$$a_1 = \frac{1}{2}; a_2 = 1.$$

Posługując się tablicami funkcji rozkładu normalnego otrzymamy dla x_1 :

$$p_1 = F\left[-3\left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = 0,14, \quad q_1 = 0,86, \quad \alpha_1 = \frac{1}{q_1} = 1,16$$

$$p_2 = F\left[-3\left(\frac{2}{2}\right)^2\right] = 0,0001 \approx 0, \quad q_1 \approx 1, \quad \alpha_2 = \frac{p_1}{q_1 q_2} = 0,16$$

Stąd

$$E[y_1] \approx \frac{1}{8} \cdot \frac{1+1,16+8 \cdot 0,16}{1+1,16+0,16} = \frac{1}{8} \cdot 1,5 \approx 0,19$$

Dla x_2 natomiast:

$$p_1 = F(-3 \cdot 1^2 \cdot 2) = F(-6) \approx 0, \quad q_1 \approx 1$$

$$i \quad E[y_2] \approx 1$$

Zatem

$$E[y] \approx 1,2$$

Podczas gdy dla x_2 wartość oczekiwana jest niemal równa $f_1 = 1$ (prawdopodobieństwo fałszywego kroku prawie równe zeru), to dla x_1 , dla którego a jest mniejsze, wartość oczekiwana jest większa od $f_1 = \frac{1}{8}$. Jest to oczywiście



Jeśli w procesie regulacji zmiany ΔC_1 i ΔC_2 wokół ekstremum są niewielkie, to możemy napisać w przybliżeniu ^{*)}

$$y = x_1^2 + x_2^2$$

W naszym wypadku

$$x_1 = \sqrt{a_1 b_2} (\Delta C_1) = \sqrt{16} \Delta C_1 = 4 \Delta C_1$$

$$x_2 = \sqrt{a_2 b_1} (\Delta C_2) = \sqrt{25} \Delta C_2 = 5 \Delta C_2$$

Przypuśćmy, że urządzenie sterujące nie może zmierzyć samej wielkości wyjściowej U , lecz oprócz tego napięcia na wyjściu wzmacniacza W ujawniają się też zakłócenia (pochodzenia obcego lub szumy własne wzmacniacza) zmieniające się w sposób przypadkowy (podobnie jak w zwykłych układach regulacji, gdy do węzła sumacyjnego porównującego wielkość regulowaną i zadaną dochodzi przypadkowe zakłócenie). Na wejście urządzenia sterującego podawana jest więc wielkość $w = y + z$. Jeśli zakłócenie z odpowiada warunkom rozpatrywanym w niniejszej pracy i znany jest rozkład prawdopodobieństwa wielkości Δz (który można uzyskać dla danego rodzaju zakłóceń przez pomiary statystyczne) to można dla zadaných wartości ΔC_1 i ΔC_2 , o które organ wykonawczy urządzenia sterującego zmienia obie pojemności przy jednym kroku roboczym (tj. a_1 i a_2) - obliczyć wartość oczekiwaną błędu ustalonego $E[y]$. Przyjmijmy, że zmiana C_1 w jednym cyklu pracy wynosi $0,1nF$, a $C_2 = 0,08nF$. Wówczas (ponieważ $x_1 = 4 \Delta C_1$, $x_2 = 5 \Delta C_2$) $a_1 = 4 \cdot 0,1 = 0,4$, $a_2 = 5 \cdot 0,08 = 0,4$.

^{*)} Mówiąc ściślej przybliżenie to otrzymamy rozwijając funkcję $y = f(x_1, x_2)$ w szereg Taylora w otoczeniu punktu $(0,0)$ i uwzględniając skończoną ilość wyrazów:

$$f(x_1, x_2) = f(0,0) + \frac{\partial f(0,0)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f(0,0)}{\partial x_2} x_2 + \\ + \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x_1^2} x_1^2 + 2 x_1 x_2 \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x_2^2} x_2^2$$

Obliczmy wartość oczekiwaną błędu ustalonego dla normalnego rozkładu zakłócenia Δz o funkcji dystrybucji

$$F(\Delta z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\Delta z} e^{-(\Delta z)^2} d(\Delta z)$$

Obliczamy kolejno (biorąc pod uwagę równość $-f'(x)2a/x = 4a^2$)

$$p_1 = F(-4.0, 4^2) = 0,18, \quad q_1 = 0,82, \quad \alpha_1 = \frac{1}{q_1} = 1,22$$

$$p_2 = F(-8.0, 4^2) = 0,035, \quad q_2 = 0,965, \quad \alpha_2 = \frac{p_1}{q_1 q_2} = 0,23$$

$$p_3 \approx 0, \quad q_3 \approx 1, \quad \alpha_3 = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2 q_3} = 0,008, \quad \alpha_4 \approx 0$$

Stąd

$$E[y_1] \approx 0,16 \frac{1 + 1,22 + 4,0,23 + 9,0,008}{1 + 1,22 + 0,23 + 0,008} \approx 1,4$$

$$E[y_2] = E[y_1],$$

zatem

$$E[y] = 2 \cdot 1,4 = 2,8$$

$$E[U] = b_1 b_2 - E[y] = 50 \text{ mV} - 2,8 \text{ mV} = 47,2 \text{ mV}$$

Wartość oczekiwana napięcia U w stanie ustalonym wynosi 47,2 mV, jest więc o 2,8 mV mniejsza od wartości maksymalnej 50 mV. Rozpatrywany układ automatycznego strojenia nie można oczywiście uważać za przykład praktycznego zastosowania opisanego urządzenia sterującego US . Jest to bowiem urządzenie skomplikowane składające się z dużej ilości elementów i układów i może być zastosowane jako cyfrowy układ sterujący do automatyzacji takich procesów przemysłowych, w których pewien wskaźnik zależny od szeregu czynników należy utrzymywać na poziomie ekstremalnym przez odpowiednią zmianę wartości tych czynników.

LITERATURA

- [1] Feldbaum A.A. - Ustanowiwszijsia process w prostiejszej dyskretnej ekstremalnoj systemie pri naliczii szuczajnych pomiech. Awtomatika i Tielemiechanika t.XX, Nr 8, 1959.
- [2] Feldbaum A.A. - Statisticzeskaja tieoria gradientnych sistiem awtomaticzeskoj optyimizacji pri kwadraticznoj charakteristike objekta. Awtomatika i Tielemiechanika t.XXI, Nr 2, 1960.
- [3] Feldbaum A.A. - Wycislitielnyje ustrojstwa w awtomaticzeskich sistiemach. Gos. Izd. Fiz. Mat. Lit. Moskwa 1959.
- [4] Pierwozwanskij A.A. - Primienienije cepiej Markowa k rasczotu ustanowiwszejsia oszibki ekstremalnych regulatow. Izwiestia AN SSSR OIN, Awtomatika i Eniergiatika Nr 3, 1960.
- [5] Pugaczew - Teoria funkcji przypadkowych i jej zastosowanie do zagadnień sterowania automatycznego. MON, Warszawa 1960.
- [6] Towstucha T.J. - Wlijanije szuczajnych pomiech na ustanowiwszijsia režim raboty ekstremalnoj sistiemy szagowo wo tipa pri paraboliczeskoj charakteristike objekta. Awtomatika i Tielemiechanika t.XXI, Nr 5, 1960.
- [7] Sittler R.W. - System Analysis of Discrete Marcov Processes. IRE Transactions, vol. CT-3, Nr 4, 1956.

Установившийся процесс дискретной системы экстремального регулирования при наличии случайных помех**С о д е р ж а н и е**

В статье определяется математическое ожидание установившейся погрешности в дискретной системе экстремального регулирования при наличии случайных помех. Известный метод определения установившегося процесса обобщён для объекта с многими входами и произвольной характеристикой. Полученные результаты иллюстрированы примерами.

Steady State of Discrete Optimalizing Control System with Random Disturbances**S u m m a r y**

The steady error in the discrete optimalizing control system with random disturbances is determined in the paper.

The known method of determination of the steady state is generalized and used for multi-input object with any characteristic. Some examples illustrate the obtained results.