

ZOFIA CICHOWSKA

Zakład Teorii Regulacji

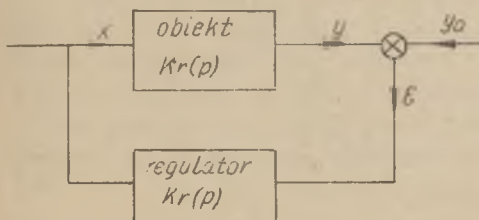
UZASADNIENIE KRYTERIUM NYQUISTA W OPARCIU
O WŁASNOŚCI ODWZOROWAŃ KONFORMNYCH

Streszczenie. Celem uzasadnienia kryterium Nyquista wykorzystano dwa twierdzenia z teorii odwzorowań konformnych. Twierdzenie o zachowaniu obszaru i twierdzenie o odpowiedniości brzegów służą do znalezienia obszaru odpowiadającego lewej półpłaszczyźnie i do zidentyfikowania brzegów obszarów, a co za tym idzie do ustalenia obszaru stabilnego i niestabilnego. Położenie punktu $(-1, j0)$ w jednym z obszarów określa stabilność, względnie niestabilność układu.

Zamknięty liniowy układ automatycznej regulacji jest stabilny, jeżeli przy braku sygnałów wejściowych i dla dowolnych warunków początkowych sygnały wyjściowe dążą do skończonych wartości ustalonych dla czasu t zdążającego do nieskończoności.

Sygnał błędu układu przedstawionego na rys.1 ma postać

$$\varepsilon(p) = \frac{\sum W_o K_x(p)}{1 + K(p)} \quad (1)$$



Rys.1. Schemat blokowy układu automatycznej regulacji

W_o - jest warunkiem początkowym występującym w dowolnym miejscu układu.

$K_x(p)$ - jest operatorową funkcją przejścia od miejsca występowania warunku początkowego do węzła sumacyjnego zgodnie z kierunkiem działania sygnałów.

$K(p) = K_o(p)K_r(p)$ - jest operatorową funkcją przejścia otwartego układu.

Koniecznym i wystarczającym warunkiem stabilności jest, aby wszystkie pierwiastki równania

$$1 + K(p) = 0 \quad (2)$$

miały część rzeczywistą ujemną.

Obliczanie pierwiastków równania (2) jest zazwyczaj bardzo kłopotliwe dlatego do oceny stabilności używa się różnych kryteriów, które nie wymagają obliczenia pierwiastków, jednak wszystkie wywodzą się z tego warunku.

Kryterium stabilności Nyquista polega na badaniu funkcji przejścia $K(p)$ otwartego układu regulacji.

Zostanie tu ono wyprowadzone przy pomocy odwzorowań konforemnych. Będziemy odwzorowywać płaszczyznę zmiennej zespolonej p za pomocą funkcji przejścia otwartego układu regulacji na płaszczyznę zmiennej zespolonej $K(p)$.

Każdy punkt na płaszczyźnie p i na płaszczyźnie $K(p)$ jest określony za pomocą części rzeczywistej i urojonej

$$p = \delta + j\omega$$

$$K(p) = \operatorname{Re} K(p) + j\operatorname{Im} K(p)$$

Odwzorowanie jest konforemne w danym punkcie jeżeli dokonuje się go odrazu na całej liczbie zespolonej p , a funkcja odwzorowująca $K(p)$ jest różniczkowalna w tym punkcie, przy czym pochodna $K'(p)$ jest różna od zera.

Odwzorowanie konforemne posiada własność zachowania kątów. Jeżeli w pewnym punkcie p dwie krzywe przecinają się pod kątem α , to po odwzorowaniu odpowiadające im krzywe przecinają się w punkcie k pod tym samym kątem α .

Warunkiem, aby odwzorowanie było konforemne w całej płaszczyźnie $K(p)$ jest, by funkcja $K(p)$ była regularna w tej płaszczyźnie, oraz by jej pochodna $K'(p)$ była różna od zera w każdym punkcie płaszczyzny. Funkcja jest regularna jeżeli jest jednoznaczna i różniczkowalna. Funkcje przejścia rzeczywistych układów automatycznej regulacji spełniają powyższe założenia. Są to zwykle funkcje algebraiczne wymier-

$$\text{ne typu } K(p) = \frac{M(p)}{H(p)}.$$

$M(p)$ i $H(p)$ są wielomianami, przy czym stopień wielomianu $M(p)$ jest nie większy od stopnia wielomianu $H(p)$.

Do wyprowadzenia kryterium Nyquista posłużą nam podane niżej twierdzenia z teorii odwzorowań konforemnych.

Twierdzenie o zachowaniu obszaru

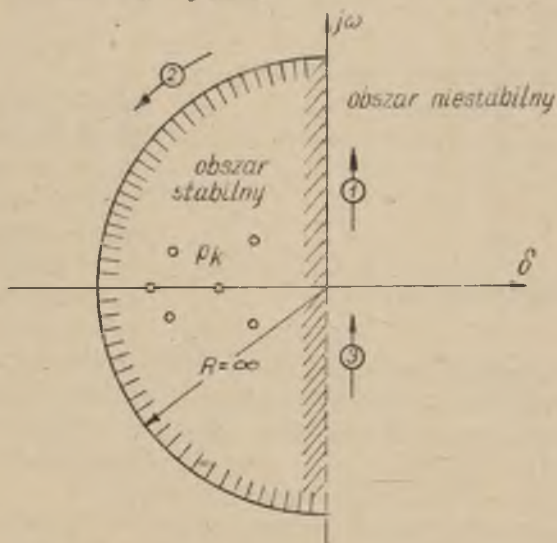
Jeżeli funkcja $K(p)$ jest regularna i nie jest stała w całej płaszczyźnie, to obszar na płaszczyźnie p po odwzorowaniu przechodzi również w obszar na płaszczyźnie $K(p)$.

Twierdzenie o odpowiedniości brzegów

Jeżeli odwzorowanie jest wzajemnie jednoznaczne, to zostaje zachowany kierunek obiegu brzegów obszarów. To znaczy jeżeli przy dodatnim kierunku obiegu brzegów obszaru na płaszczyźnie p obszar ten przez cały czas znajduje się po lewej stronie, to przy dodatnim obiegu brzegów obszaru na płaszczyźnie $K(p)$ obszar ten znajduje się również po lewej stronie. Za dodatni uważamy obieg w kierunku wzrastającego parametru.

Wróćmy teraz do zagadnień stabilności. Warunek stabilności wymaga, by wszystkie pierwiastki p_k równania $K(p) + 1 = 0$ miały części rzeczywiste ujemne. Oznacza to, że punkty odpowiadające pierwiastkom muszą leżeć na lewej półpłaszczyźnie p . Oś urojona dzieli więc płaszczyznę p na dwa obszary: stabilny po lewej i niestabilny po prawej stronie osi.

Obszary te pokazuje rys. 2.



Rys.2. Płaszczyzna p

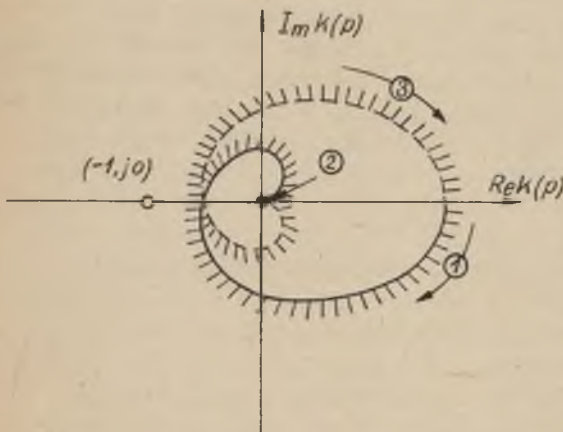
Po odwzorowaniu $K(p)$ wszystkie pierwiastki p_k z płaszczyzny p przechodzą na płaszczyźnie $K(p)$ w jeden punkt $(-1, j0)$. Ponieważ $K(p_k) + 1 = 0$, więc $K(p_k) = -1$. Jest to ważna własność odwzorowania $K(p)$.

Jeżeli dokonamy odwzorowania obszaru lewej półpłaszczyzny p (czyli obszaru stabilnego), to przejdzie on w nowy obszar na płaszczyźnie $K(p)$. Jeżeli punkt $(-1, j0)$ będzie leżał w tym obszarze to znaczy, że wszystkie pierwiastki p_k leżą w lewej półpłaszczyźnie, a więc układ jest stabilny.

Odwzorowania lewej półpłaszczyzny dokonujemy w trzech częściach: zmieniając ω 1) od 0 do $+\infty$ po prostej $\delta = 0$, 2) od $+\infty$ do $-\infty$ na promieniu $R = \infty$, 3) od $-\infty$ do 0 po prostej $\delta = 0$.

Płaszczyzna $K(p)$ przedstawiona jest na rys. 3. Odcinek 3 na tym rysunku jest zwierciadlanym odbiciem odcinka 1.

$j\omega$ i $-j\omega$ są wielkościami sprzężonymi, a więc $K(j\omega)$ i $K(-j\omega)$ są również wielkościami sprzężonymi.



Rys. 3. Płaszczyzna $K(p)$

Półokrąg 2 przechodzi na płaszczyźnie $K(p)$ w punkt $(0,0)$ ponieważ we wszystkich rzeczywistych układach wzmocnienie dla częstotliwości nieskończenie wielkich maleje do zera.

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} K(j\omega) = 0$$

Wykres $K(j\omega)$ nazywamy charakterystyką częstotliwości.

Jeżeli stopień wielomianu mianownika funkcji przejścia $K(p)$ jest większy niż 1 to odwzorowanie prze-

staje być wzajemnie jednoznaczne. Ponieważ wszystkie pierwiastki przechodzą po odwzorowaniu w punkt $(-1, j0)$ jest ono tylkokrotnie niejednoznaczne ile pierwiastków posiada równanie $K(p) + 1 = 0$. Ilość pierwiastków jest równa stopniowi wielomianu mianownika funkcji $K(p)$.

By zachować w ważności twierdzenie o odpowiedniości brzegów obszarów przy ropatrywaniu funkcji przejścia wyższych

rzędów wprowadza się pojęcie jednoznaczności w sensie Riemanna. Polega ono na tym, że płaszczyznę p dzielimy na takie części, które po odwzorowaniu przechodzą w całą płaszczyznę $K(p)$. Na każdej części musi znajdować się 1 pierwiastek. Otrzymujemy w ten sposób płaszczyznę wielolistną $K(p)$ złożoną z tylu liści ile wynosi stopień wielomianu $H(p)$. Na każdym liściu dokonujemy cięcia wzdłuż półosi rzeczywistej dodatniej. W celu zachowania ciągłości odwzorowania należy posklejać krawędzie cięć tak by jednemu obiegowi dookoła początku układu na płaszczyźnie p odpowiadał jeden obieg na wielolistnej płaszczyźnie $K(p)$.

Rozpatrzmy teraz przebieg odwzorowania dla funkcji przejścia otwartego układu regulacji 1-go, 2-go i 3-go rzędu. Dla prostoty rozważań niech to będą funkcje w których liczniku występuje tylko wartość stała k_0 .

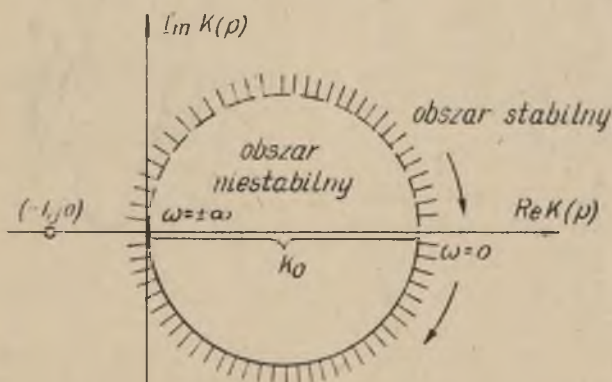
$$A) \quad K(p) = \frac{k_0}{ap + 1}$$

$$B) \quad K(p) = \frac{k_0}{ap^2 + bp + 1}$$

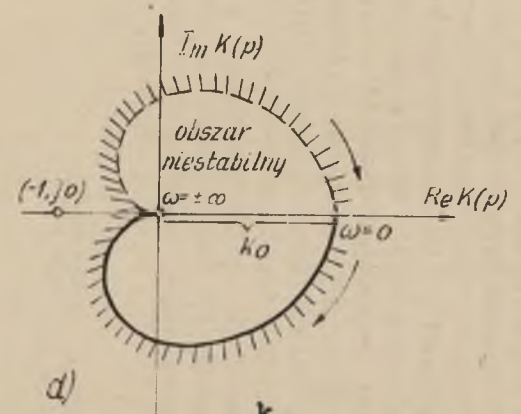
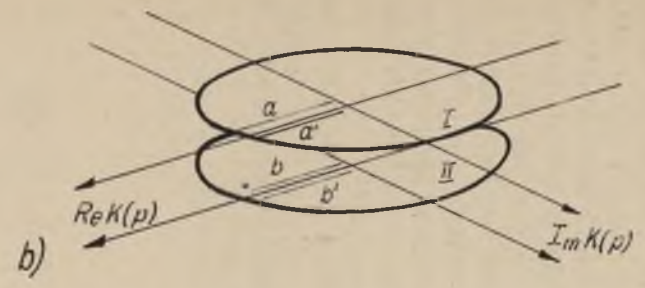
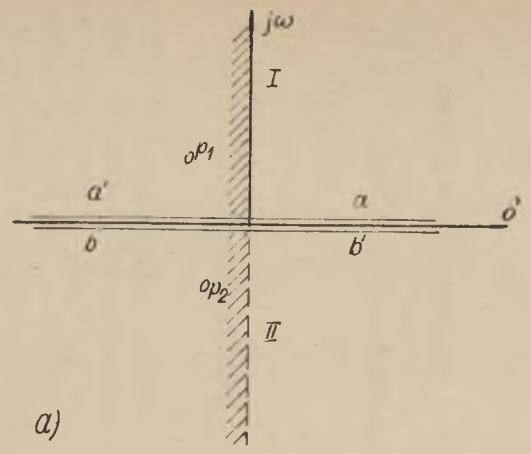
$$C) \quad K(p) = \frac{k_0}{ap^3 + bp^2 + cp + 1}$$

Współczynniki a, b, c , występujące w mianownikach funkcji przejścia są dodatnie.

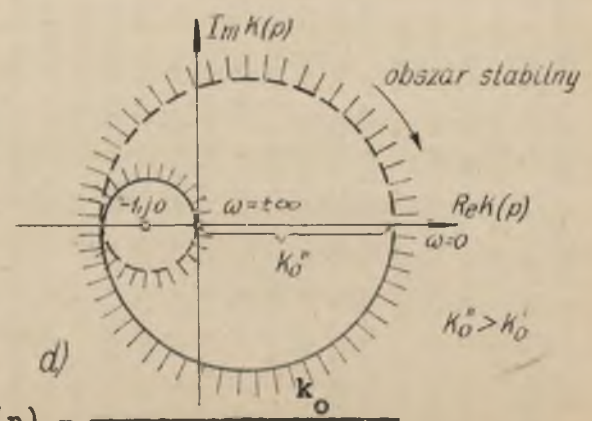
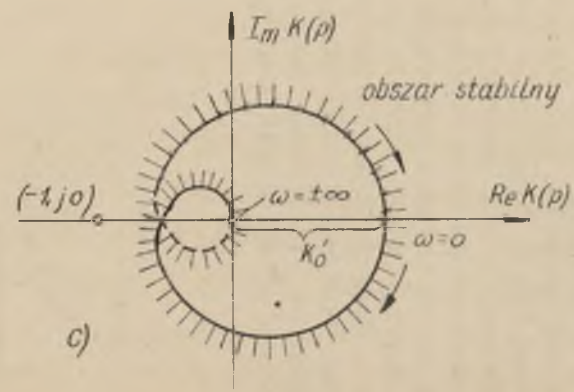
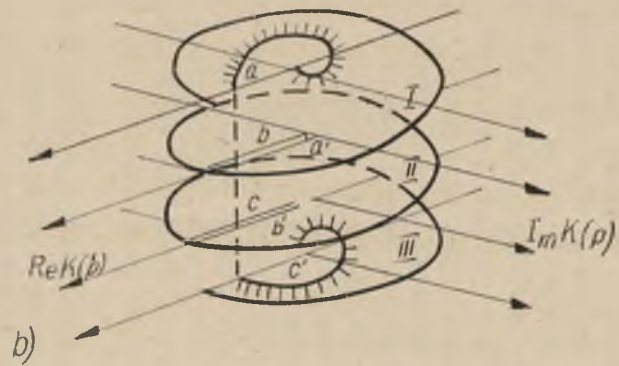
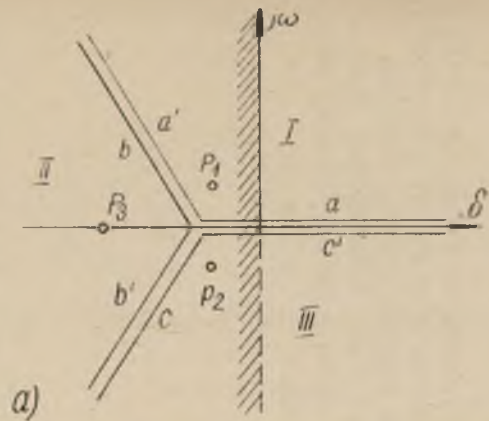
Odwzorowanie funkcji przejścia 1-go rzędu podaje rys.4



Rys.4. Odwzorowanie konforemne $K(p) = \frac{k_0}{ap + 1}$



Rys.5. Odwzorowanie konforemne $K(p) = \frac{k_0}{ap^2 + bp + 1}$



Rys.6. Odwzorowanie konforemne $K(p) = \frac{ap^3 + bp^2 + cp + 1}{ap^3 + bp^2 + cp + 1}$

Jest to układ zawsze stabilny bez względu na wielkość współczynnika k . Przebieg odwzorowania funkcji przejścia 2-go rzędu podaje rys.5. Jak wynika z rysunku jest to układ zawsze stabilny bez względu na wielkość współczynnika k . Charakterystyka częstotliwości podobnie jak w przypadku funkcji przejścia 1-go rzędu nie obejmuje punktu $(-1, j0)$.

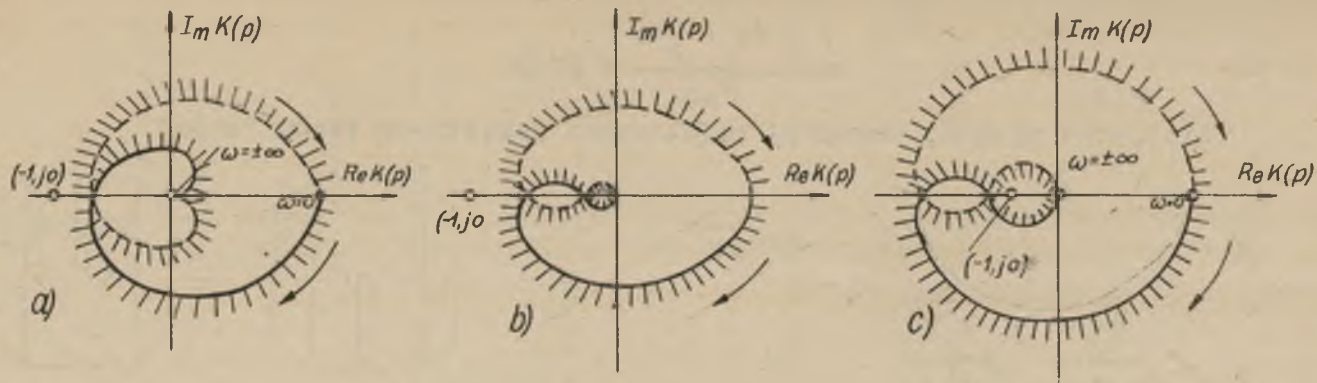
Przebieg odwzorowania funkcji przejścia 3-go rzędu podaje rys.6. W zależności od wartości współczynnika k układ taki może być stabilny lub niestabilny. Jeżeli punkt $(-1, j0)$ leży po lewej stronie charakterystyki częstotliwości tak jak to podaje rys.6c układ jest stabilny. Jeżeli natomiast charakterystyka częstotliwości obejmuje punkt $(-1, j0)$, układ jest niestabilny jak to pokazuje rys.6d. Dla badania stabilności nie jest konieczne rysowanie charakterystyk częstotliwości na płaszczyźnie wielolistnej tak jak to podają rysunki 5c i 6b. Wygodniejsze jest rysowanie na jednej płaszczyźnie, jednak do znalezienia obszarów stabilnego i niestabilnego należy pamiętać, że płaszczyzna $K(p)$ jest płaszczyzną wielolistną^{*})

Na rys.7 podano przykłady charakterystyk częstotliwości układów stabilnych, na rys.8 układów niestabilnych.

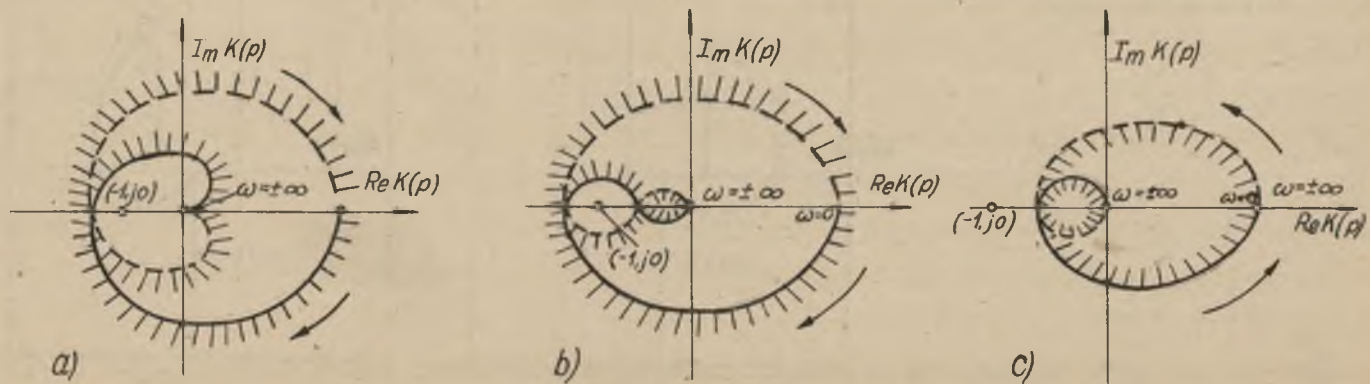
W artykule rozpatrywano funkcje przejścia najprostszego typu zakładając, że można dokonać podziału płaszczyzny p na takie części, które po odwzorowaniu przechodzą w całą płaszczyznę $K(p)$. Praktycznie jednak przeprowadzenie podziału płaszczyzny p dla bardziej skomplikowanych funkcji $K(p)$ może nastroczać duże trudności.

Tą drogą składam serdeczne podziękowanie Prof. Dr Stefanowi Węgrzynowi za zachętę do podjęcia tematu oraz za wskazówki i dyskusję nad rozpatrywanym zagadnieniem. Składam również serdeczne podziękowanie mgr inż. Bolesławowi Szafnickiemu za cenne uwagi dotyczące strony matematycznej zagadnienia oraz za wnikliwą dyskusję.

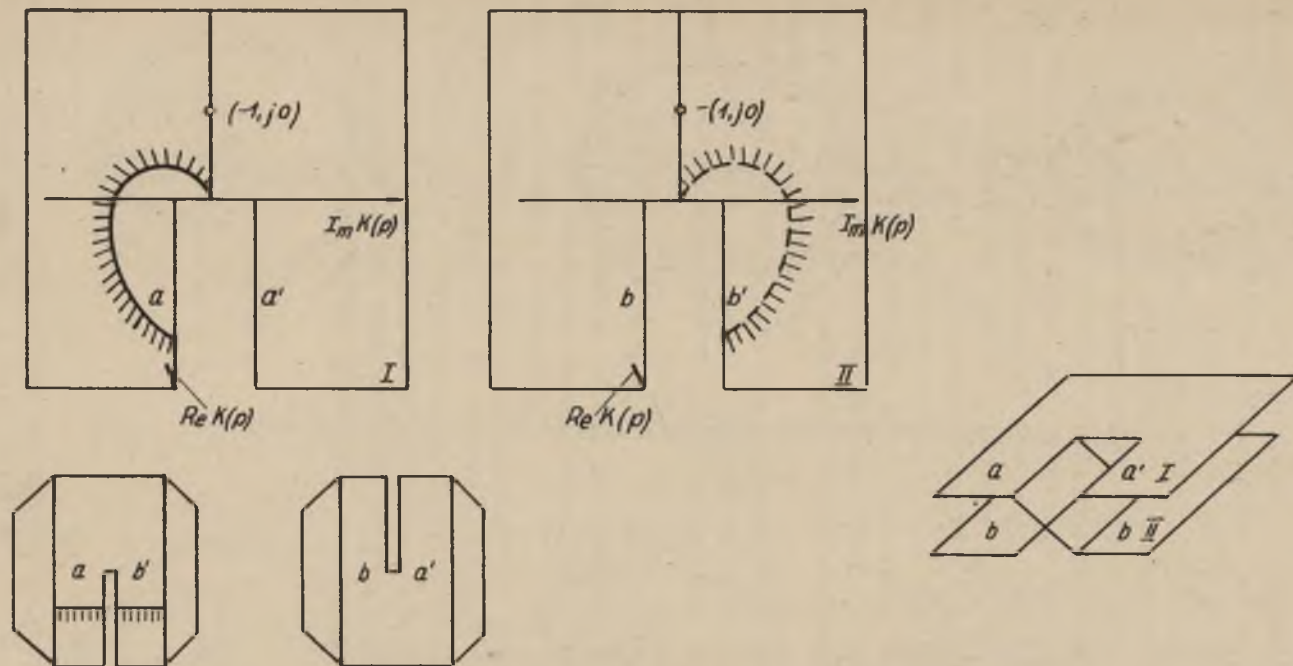
^{*}) Na końcu artykułu umieszczone są modele wielolistnych powierzchni Riemanna. Wycięcie i sklejenie tych modeli ułatwia zrozumienie tego zagadnienia.



Rys. 7. Charakterystyki częstotliwości układów stabilnych

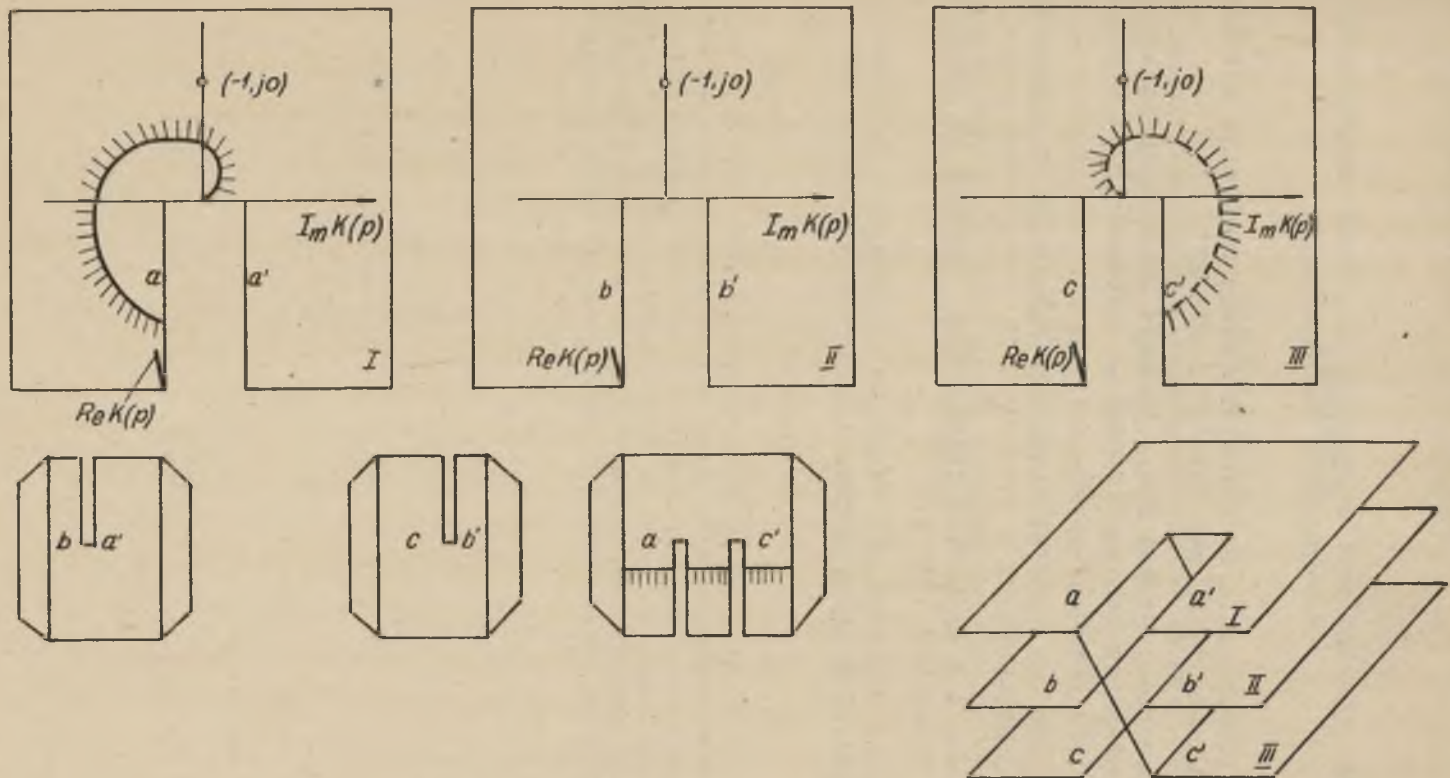


Rys. 8. Charakterystyki częstotliwości układów niestabilnych



Rys.9. Model dwulistnej powierzchni Riemanna funkcji przejścia

$$K(p) = \frac{k_0}{ap^2 + bp + 1}$$



Rys.10. Model trójlistnej powierzchni Riemanna funkcji przejścia $K(p) = \frac{k_0}{ap^3 + bp^2 + cp + 1}$

LITERATURA

- [1] Feldbaum A.A.: Układy elektryczne regulacji automatycznej Warszawa 1958, str.141-142 i 220-231.
- [2] Fuks B.A., Szabat B.W.: Funkcje zmiennej zespolonej i i niektóre ich zastosowania. Warszawa 1954. Rozdz.II, §15-23 Rozdz.III, §24.
- [3] Oppelt W.: Poradnik techniki regulacji. Warszawa 1958, str.270-273.
- [4] Tsung L.: Kryterium stabilności. Referat na konferencji w Cranfield 1951 r.
- [5] Praca zbiorowa pod redakcją S.Węgrzyna: Podstawy Automatyki. PWN 1960, Rozdz. III.

Обоснование критерия Найквиста при помощи метода конформных отображений

С о д е р ж а н и е

С целью обоснования критерия Найквиста использовано две теоремы из теории конформных отображений. Теорема о сохранении областей и теорема о соответствии контуров служат к нахождению области соответствующей левой корневой полплоскости и отождествленности контуров, а следовательно к определению области устойчивости и неустойчивости. Положение пункта $(-1, j0)$ в одной из областей определяет устойчивость или неустойчивость системы.

The Nyquist Criterion as a Conformal Mapping Problem

S u m m a r y

Two properties of the conformal mapping are used for the interpretation of the Nyquist criterion. By means of the increment principle and the mapped boundary theorem, the Nyquist plot can be recognized as the conformal map of the imaginary axis on the $K(p)$ plane. The stability of the system is determined by the location of the critical point in the two regions in which the $K(p)$ plane is subdivided by the Nyquist plot.