

# DER STAHLBAU

Schriftleitung:  
 Dr.-Ing. A. Hertwig, Geh. Regierungsrat, Professor an der Technischen Hochschule Berlin, Berlin-Charlottenburg 2, Technische Hochschule  
 Fernsprecher: C 1 Steinplatz 0011  
 Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Beilage  
 zur Zeitschrift

## DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

7. Jahrgang

BERLIN, 16. März 1934

Heft 6

### Allgemeines Verfahren zur Berechnung biegezugfest verbundener Stabsysteme.

Alle Rechte vorbehalten.

Von Reichsbahnoberrat Dr.-Ing. Krabbe, Essen.  
 (Schluß aus Heft 5.)

#### 2. Darstellung der Einflußlinien hochgradig unbestimmter Systeme.

Unter Umständen kann es erwünscht sein, für bestimmte statische Größen, beispielsweise das Moment im Punkte  $m$ , d. h. das Moment des Riegels unmittelbar rechts von 6 (Abb. 11), das Einflußliniensystem zu ermitteln.

Stützen gezeigt werden, der rechts ein festes, links ein bewegliches Auflager hat und somit sechsfach statisch unbestimmt ist. Wir benötigen zu seiner vollständigen Erledigung nur eines Gleichungssystems mit zwei Unbekannten. Wir setzen die immer wiederkehrenden Werte

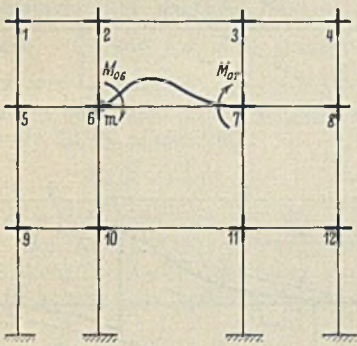


Abb. 11.

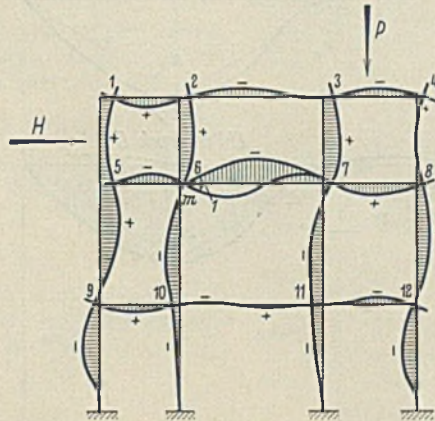


Abb. 12.

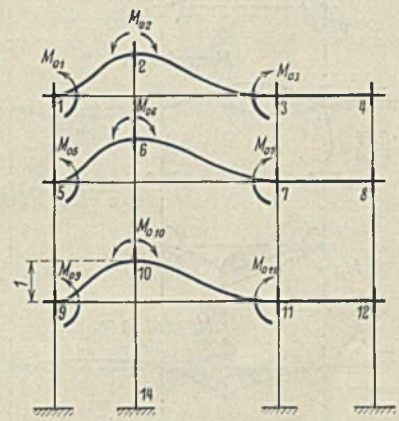


Abb. 13.

Bekanntlich ist dieses Einflußliniensystem dargestellt durch die Verbiegungen des Rahmens, die dadurch entstehen, daß wir den Riegel 6—7 in 6 um den Drehwinkel Eins knicken<sup>7)</sup>. Dadurch wird das Tangentenkreuz 6 belastet mit  $M_{06} = + \frac{4 EJ}{l_2}$  und das Tangentenkreuz 7 mit  $M_{07} = + \frac{2 EJ}{l_2}$ . Dies ist die durch den Knick Eins bei 6 entstehende Belastung des Stockwerkrahmens, aus der wir unter Benutzung derselben Nennerdeterminante wie vorhin alle Winkeldrehungen und waagerechte Verschiebungen der einzelnen Knoten nach Tafel 11 ermitteln können; die daraus sich ergebenden Verformungen stellen unmittelbar das Einflußliniensystem sowohl für lotrechte als auch für waagerechte Belastungen dar (Abb. 12).

Für lotrechte Belastung sind die unten liegenden Teile der Einflußfläche positiv, für waagerechte, von links nach rechts gerichtete Belastungen sind die rechts liegenden Teile der Einflußflächen positiv.

In ähnlicher Weise kann das Einflußliniensystem für eine Pfostenkraft, beispielsweise 10—14, ermittelt werden, indem man die durch die in Abb. 13 dargestellte Verformung entstehende Belastung der Tangentenkreuze 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10 und 11 als  $M_0$ -Belastung auffaßt.

Auf diese Weise können die Einflußliniensysteme für alle statischen Größen des Stockwerkrahmens unter Benutzung immer derselben Gleichungssysteme, die also nur einmal aufgelöst zu werden brauchen, ermittelt werden<sup>8)</sup>.

Bei Ermittlung der Querverschiebungen sind natürlich in diesem Falle, da keine äußeren Kräfte wirken, die Summen der auf jede waagerechte Riegelreihe entfallenden Querkräfte gleich Null zu setzen.

Das hier angedeutete Verfahren der Darstellung von Einflußlinien gewinnt besondere Bedeutung bei der Behandlung mehrfach statisch unbestimmter rahmenartiger Hauptträger von Brücken, die sich bei seiner Anwendung oft erstaunlich einfach behandeln lassen<sup>8)</sup>. Es soll das an dem Beispiel des in Abb. 14 dargestellten Rahmenträgers mit eingespannten

$$\frac{E J_v}{h} = m_v \quad \frac{E J_1}{l_1} = m_1 \quad \frac{E J_2}{l_2} = m_2 \quad \frac{E J_3}{l_3} = m_3.$$

Bei den angeschriebenen Abmessungen des Rahmens ist dann

$$m_1 = 2\,533\,000 \text{ tcm} \quad m_3 = 2\,533\,000 \text{ tcm}$$

$$m_2 = 1\,636\,000 \text{ tcm} \quad m_v = 3\,125\,000 \text{ tcm};$$

dann ist:

$$M_{11} = +4 m_v - 3 m_1 - 4 m_2 = -26\,643\,000 \text{ tcm}$$

$$M_{21} = M_{12} = -2 m_2 = -3\,272\,000 \text{ tcm}$$

$$M_{22} = -4 m_v - 3 m_3 - 4 m_2 = -26\,643\,000 \text{ tcm}.$$

Es ist nun die in allen Fällen immer wieder zu benutzende Matrix des Gleichungssystems für die beiden Drehwinkel  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$ .

	$\zeta_2$	$\zeta_1$	
1	$M_{11}$	$M_{12}$	$M_{01}$
2	$M_{21}$	$M_{22}$	$M_{02}$

Die Nennerdeterminante bleibt stets dieselbe, und nur die unabhängigen Glieder sind in den einzelnen zu behandelnden Fällen verschieden. Wir erhalten daraus ein für allemal die Lösung in der Form:

$$(13) \quad \zeta_1 = a_1 M_{01} + b_1 M_{02}$$

$$\zeta_2 = a_2 M_{01} + b_2 M_{02}.$$

dabei ist:

$$a_1 = \frac{M_{22}}{M_{12}^2 - M_{11} M_{22}} = +0,3805 \cdot \frac{1}{10^7 \text{ tcm}}$$

$$b_1 = \frac{M_{12}}{M_{11} M_{22} - M_{12}^2} = -0,04672 \cdot \frac{1}{10^7 \text{ tcm}}$$

$$a_2 = \frac{M_{21}}{M_{11} M_{22} - M_{12}^2} = -0,04672 \cdot \frac{1}{10^7 \text{ tcm}}$$

$$b_2 = \frac{M_{11}}{M_{12}^2 - M_{11} M_{22}} = +0,3805 \cdot \frac{1}{10^7 \text{ tcm}}$$

1. Einflußlinie für den Auflagerdruck  $A$  (Abb. 14a).

Die Einflußlinie erhalten wir als Biegelinie des Lastgurtes, bedingt durch die Senkung des Auflagerpunktes  $A$  um Eins. Dadurch wird:

$$M_{01} = -\frac{1}{l_1} \quad m_1 = -5\,845\,000 \text{ tcm},$$

$$M_{02} = 0,$$

<sup>7)</sup> Vgl. den Aufsatz des Verfassers im Stahlbau 1933, Heft 2.

<sup>8)</sup> Vgl. auch Ostenfeld, S. 81. Wie mir Herr Geh. Rat Prof. Dr. Hertwig mitteilt, werden ähnliche Verfahren im Anschluß an die Ostenfeldsche Arbeit seit längerer Zeit in seinen Vorlesungen und Übungen an der Technischen Hochschule Berlin verwendet.

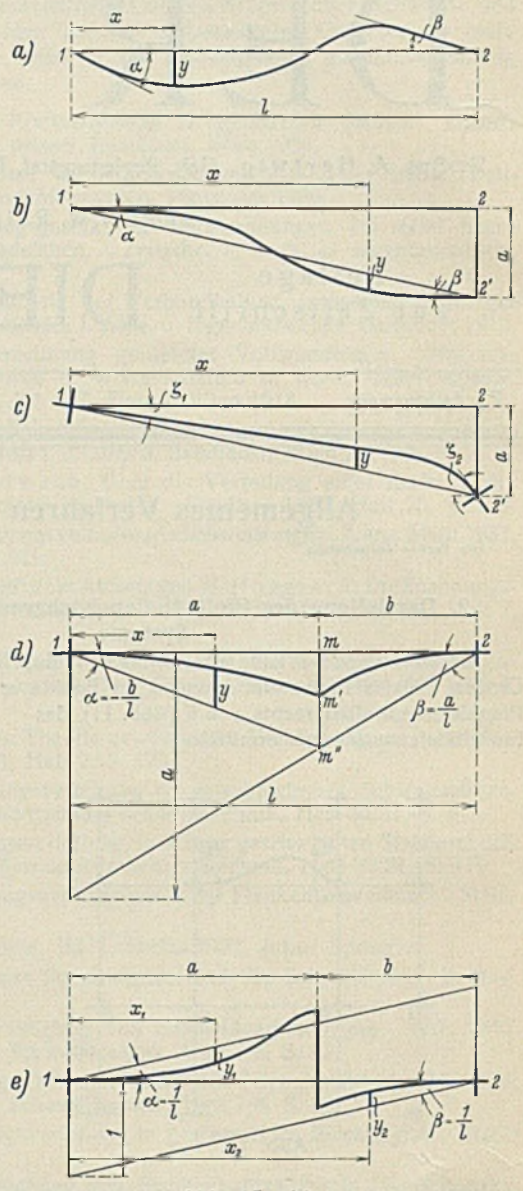
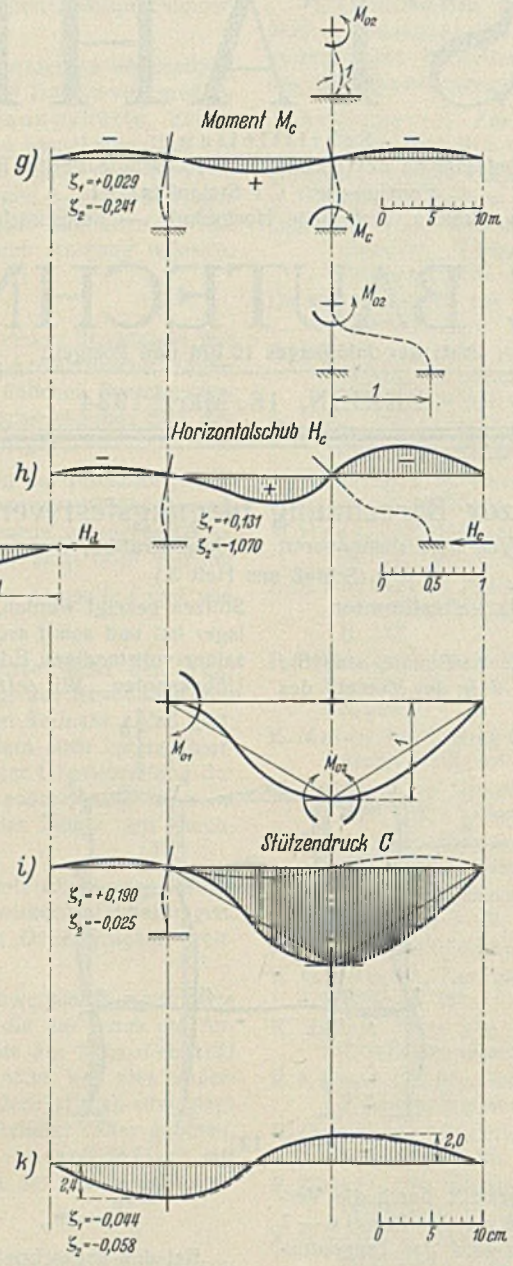
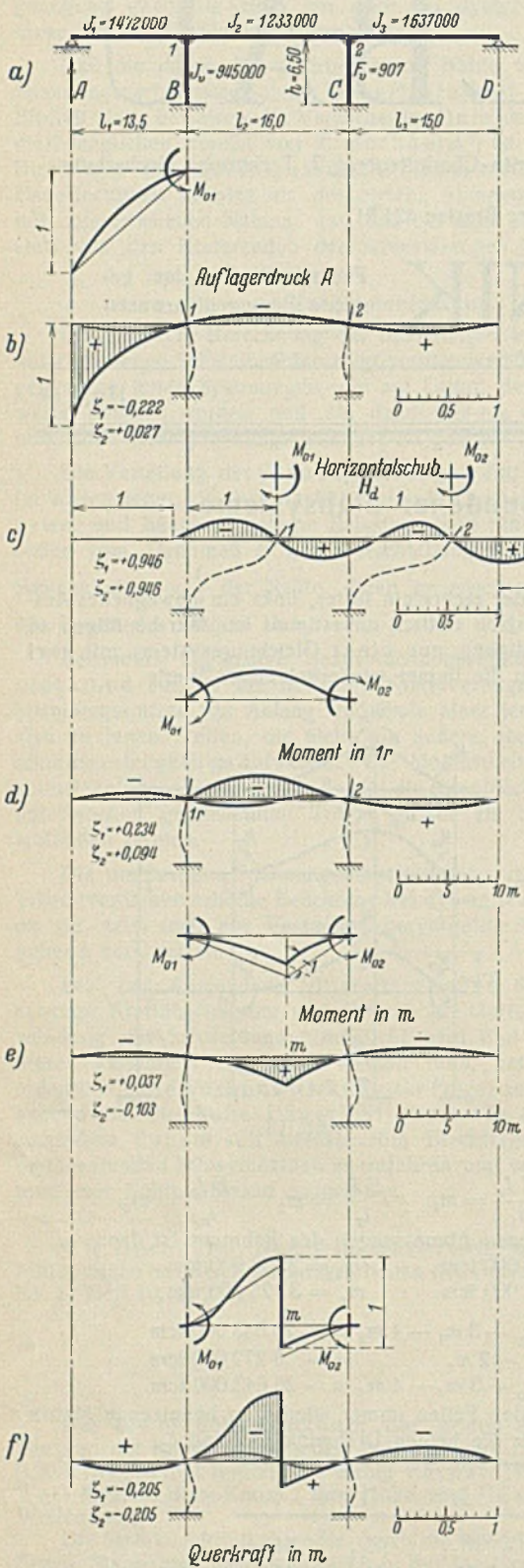


Abb. 15 a bis e.

Zusatzeinflußlinie zu Abb. 14 d bei Stützenverlängerung 100fach aufgetragen

Abb. 14 a bis k. Einflußlinien, als Biegelinien dargestellt.

und damit nach Gl. (13)  
 $\zeta_1 = -0,2225$   
 $\zeta_2 = +0,0273$ .

2. Einflußlinie für den Horizontalschub  $H$  am rechten Auflager (Abb. 14b).

Sie entsteht durch Verschiebung von  $D$  um Eins nach rechts. Das ergibt

$$M_{01} = + \frac{1}{h} \cdot 6 m_v = + 2 885 000 \text{ tcm},$$

$$M_{02} = + \frac{1}{h} \cdot 6 m_v = + 2 885 000 \text{ tcm},$$

$$\zeta_1 = \zeta_2 = + 0,964.$$

3. Einflußlinie für das Moment unmittelbar rechts der Stütze  $A M_{1r}$  (Abb. 14c).

Sie entsteht durch Knicken des Trägers in  $1$  um den Drehwinkel Eins. Dadurch wird:

$$M_{01} = + 4 m_2 = + 6 544 000 \text{ tcm},$$

$$M_{02} = + 2 m_2 = + 3 272 000 \text{ tcm},$$

$$\zeta_1 = + 0,234,$$

$$\zeta_2 = + 0,094.$$

4. Einflußlinie für das Moment in  $m$  (Abb. 14d).

$$a = \frac{3}{5} \cdot l_2 \quad b = \frac{2}{5} \cdot l_2.$$

Sie entsteht durch Knicken des Trägers in  $m$  um den Drehwinkel Eins. Dadurch wird:

$$M_{01} = + \frac{2}{5} \cdot m_2 = + 655 000 \text{ tcm},$$

$$M_{02} = + \frac{8}{5} \cdot m_2 = - 2 619 000 \text{ tcm},$$

$$\zeta_1 = + 0,037,$$

$$\zeta_2 = - 0,103.$$

5. Einflußlinie für die Querkraft in  $m$  (Abb. 14e).

Sie entsteht durch Parallelverschiebung um Eins in  $m$ . Dadurch wird:

$$M_{01} = M_{02} = - \frac{1}{l_2} \cdot 6 m_2 = - 6 135 000 \text{ tcm},$$

$$\zeta_1 = \zeta_2 = - 0,205.$$

6. Einflußlinie für das Einspannungsmoment  $M_c$  der Stütze  $C$  (Abb. 14f).

Sie entsteht durch Knicken der Stütze an der Einspannungsstelle um den Drehwinkel Eins. Dadurch wird:

$$M_{01} = 0 \quad M_{02} = - 2 m_v,$$

$$\zeta_1 = + 0,029 \quad \zeta_2 = - 0,241.$$

7. Einflußlinie für den Horizontalschub  $H_c$  am Fuße der Stütze  $C$  (Abb. 14g).

Sie entsteht durch Verschiebung des Stützenfußes um Eins nach rechts. Dadurch wird:

$$M_{01} = 0,$$

$$M_{02} = - \frac{1}{h} \cdot 6 m_v = - 28 810 000 \text{ tcm},$$

$$\zeta_1 = + 0,131 \quad \zeta_2 = - 1,070.$$

8. Einflußlinie für den Stützendruck  $C$  (Abb. 14h).

Sie entsteht durch Senkung der Stütze  $C$  um Eins. Dadurch wird:

$$M_{01} = + \frac{1}{l_2} \cdot 6 m_2 = + 5 010 000 \text{ tcm},$$

$$M_{02} = + \frac{1}{l_2} \cdot 6 m_2 - \frac{1}{l_3} \cdot 3 m_3 = -56\,000 \text{ tcm},$$

$$\zeta_1 = +0,190,$$

$$\zeta_2 = -0,025.$$

Zur genauen Ermittlung sämtlicher Ordinaten dieser verschiedenen durch die Drehwinkel auf Verschiebungen erzeugten Biegelinien bedürfen wir nur der einen einzigen Gleichung (Abb. 15)

$$(14) \quad y = \frac{1}{l^2} [(\alpha + \beta) x^3 - (2\alpha + \beta) l x^2 + \alpha l^2 x],$$

dabei bedeutet:

- $\alpha$  den Drehwinkel im Sinne des Uhrzeigers an der linken Seite;
- $\beta$  den Drehwinkel im Sinne des Uhrzeigers an der rechten Seite des Balkens 1—2;
- $x$  die waagerechte Entfernung vom Punkte 1;
- $y$  die Ordinate der Biegelinie, Senkungen positiv gerechnet, Hebungen negativ.

Handelt es sich um eine Verschiebung, etwa Senkung des Punktes 2 um  $a$  nach 2' (Abb. 15a), so sind die Drehwinkel

$$\alpha = \beta = -\frac{a}{l}$$

und die Ordinaten  $y$  werden von der Verbindungslinie 1—2' aus gerechnet.

Kommen zu dieser Verschiebung noch Drehwinkel  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  (Abb. 15b), so sind die in Gl. (6) einzusetzenden Werte

$$\alpha = -\frac{a}{l} + \zeta_1 \quad \beta = -\frac{a}{l} + \zeta_2.$$

Die Ordinaten  $y$  werden dann wiederum von der Geraden 1—2' aus gerechnet.

Die  $M_0$ -Linie in Abb. 14d entsteht nach Abb. 15c aus der Momenteneinflusslinie des einfachen Balkens 1—m''—2, wenn dieser in  $m$  um den Drehwinkel Eins geknickte Balken an den Enden um die Drehwinkel  $\alpha = -\frac{b}{l}$ , und  $\beta = +\frac{a}{l}$  gedreht wird. Die Ordinaten  $y$  werden dann von dem Linienzug 1—m''—2 aus gerechnet.

Kommen dazu noch an den Enden 1 und 2 die Drehwinkel  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$ , so ist in die Gl. (6) einzusetzen:

$$\alpha = -\frac{b}{l} + \zeta_1 \quad \beta = +\frac{a}{l} + \zeta_2.$$

Ganz entsprechend entsteht die  $M_0$ -Linie für eine Querkraft in Abb. 14c nach Abb. 15d aus der Einflußlinie für die Querkraft des einfachen Balkens 1—3—4—2, wenn man diesen in 3 und 4 starr gedachten Balkenzug den Drehwinkeln aussetzt

$$\alpha = \beta = +\frac{1}{l}.$$

Die Ordinaten  $y$  werden dann von dem Linienzug 1—3—4—2 aus gerechnet.

Kommen dazu in 1 und 2 noch die Drehwinkel  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$ , so ist zu setzen

$$\alpha = +\frac{1}{l} - \zeta_1 \quad \beta = +\frac{1}{l} + \zeta_2.$$

Damit lassen sich in allen Fällen die einzelnen Ordinaten und Biegelinien aus der Gl. (14) berechnen. Die verschiedenen Einflußlinien sind in den Abb. 14a bis h maßstäblich aufgetragen. Wie bereits früher erwähnt, bietet dieses an sich sehr einfache Verfahren auch noch die Möglichkeit, den Einfluß der Längenänderung der Stäbe in einfacher Weise zu berücksichtigen. Wir wollen den Einfluß der Pfostenverlängerungen auf die Einflußlinie für  $M_{1r}$  (Abb. 14c) ermitteln.

Die in Abb. 14c dargestellten Biegelinien erzeugen folgende Stützen-drücke:

$$A = + (1 - \zeta_1) 6 m_2 - \zeta_2 6 m_3 + \zeta_1 3 m$$

$$= (1 - \zeta_1 - \zeta_2) 6 m_2 + \zeta_1 3 m = + 5440 \text{ t}$$

$$B = - [(1 - \zeta_1 - \zeta_2) 6 m_2 + \zeta_2 3 m_3] = - 4596 \text{ t}.$$

Daher wird die Stütze A um  $\mathcal{A}_a = \frac{5440 \cdot 650}{2150 \cdot 907} = 2,4 \text{ cm}$  verkürzt,

$$\text{die Stütze B um } \mathcal{A}_b = \frac{4596 \cdot 650}{2150 \cdot 907} = 2,0 \text{ cm} \text{ verlängert.}$$

Diese Längenänderungen, die in Abb. 141 (in hundertfachem Maßstab gegenüber Abb. 14c) aufgetragen sind, erzeugen die (gleichfalls hundertfach vergrößerten) Momente

$$M_{01} = + \frac{240}{1350} \cdot 3 m_1 - \frac{440}{1600} \cdot 6 m_2 = -1\,354\,000 \text{ tcm}$$

$$M_{02} = + \frac{240}{1500} \cdot 3 m^3 - \frac{440}{1600} \cdot 6 m_2 = -1\,692\,000 \text{ tcm}$$

$$\zeta_1 = -0,044 \quad \zeta_2 = -0,058;$$

das ergibt die Biegelinie der Abb. 141, deren durch Hundert dividierte Ordinaten zu der Biegelinie Abb. 14c zu addieren wären. Der Einfluß ist so gering, daß er gar nicht in Betracht kommt, so daß sich weitere Annäherungsrechnungen von selbst erübrigen. Bei längeren und schlankeren Stützen kann es aber erwünscht sein, den Einfluß ihrer Längenänderungen zu berücksichtigen, selbstredend in allen Fällen nur in der ersten Annäherung. Schließlich soll noch der Einfluß einer gleichmäßigen Erwärmung um  $\pm 35^\circ$  untersucht werden.

Eine gleichmäßige Erwärmung um  $35^\circ$  erzeugt die Verschiebungen:

$$\mathcal{A} h = \frac{35 \cdot 650}{100 \cdot 825} = 0,276 \text{ cm}$$

$$\mathcal{A} l_3 = \frac{35 \cdot 1500}{100 \cdot 825} = 0,637 \text{ cm}$$

$$\mathcal{A} (l_3 + l_2) = \frac{35 \cdot 3100}{100 \cdot 825} = 1,316 \text{ cm}.$$

Die entsprechend verschobenen Tangentendrehkreuze erhalten dadurch die Momentenbelastungen:

$$M_{01} = - \frac{0,276}{1350} \cdot 3 m_1 - \frac{1,316}{650} \cdot 6 m_2 = -39\,590 \text{ tcm}$$

$$M_{02} = + \frac{0,276}{1500} \cdot 3 m_3 - \frac{0,637}{650} \cdot 6 m_2 = -17\,344 \text{ tcm}.$$

$$\zeta_1 = -0,001\,43 \quad \zeta_2 = -0,000\,48.$$

Die durch die Verschiebungen und Verdrehungen entstehenden Verformungen ergeben ohne weiteres die Beanspruchungen durch Wärme.

Wären die Stützen unten gelenkig gelagert, so würde sich die Berechnungsweise grundsätzlich nicht ändern. Wäre jedoch das System an beiden Enden A und D verschieblich gelagert, so würde die Berechnungsweise etwas umständlicher werden, da, wie im vorigen Abschnitt angegeben, dann auch noch der Einfluß der Querverschiebung des Balkens AD nachträglich berücksichtigt werden müßte, bei Ermittlung der Einflußlinie natürlich mit Hilfe der Bedingung, daß die Summe der in den beiden Pfosten auftretenden Querkräfte in jedem Falle gleich Null ist.

Die Vermehrung der Freiheitsgrade durch Anordnung von Fußgelenken erleichtert also die Berechnungsweise nach diesem Verfahren nicht; die Vermehrung der Freiheitsgrade durch Anordnung des beweglichen Lagers statt des festen Lagers am rechten Ende des Balkens erschwert sogar die Berechnung.

Eine hübsche Anwendungsmöglichkeit des Verfahrens der Sperrkreuze in Verbindung mit der hier angegebenen Art der Darstellung der Einflußlinien als Biegelinien bietet noch die Behandlung des kontinuierlichen, über mehrere Öffnungen durchlaufenden Bogenträgers (Abb. 16). Gesucht sei die Einflußlinie für das Moment im Punkte  $m$ , wobei es für das Verfahren gleichgültig ist, ob es sich dabei um das Schwerpunktsmoment oder um das Kernpunktsmoment handelt. Wir legen Sperrkreuze in die Auflagergelenke B und C (Abb. 16a), denken uns den nun als fest eingespannten Bogen zu behandelnden Mittelbogen zunächst im Scheitel getrennt und knicken den Bogen in  $m$  um den Drehwinkel Eins, wodurch der Scheitelpunkt  $F$  der linken Bogenhälfte nach  $F'$ , der im elastischen Schwerpunkt liegende Punkt  $G$  nach  $G'$  gelangt. Dann ist

$$\text{die waagerechte Entfernung zwischen } G \text{ und } G' \quad \delta_a = b \cdot \text{tg } \alpha,$$

$$\text{die lotrechte Entfernung zwischen } G \text{ und } G' \quad \delta_b = b$$

$$\text{und der Drehwinkel zwischen den Rahmen } FG \text{ und } F'G' \quad \delta_c = 1.$$

Lassen wir nun in  $G$  und  $G'$  die waagerechten Kräfte  $X_a$ , die lotrechten Kräfte  $X_b$  und das Moment  $X_c$  angreifen, so müssen diese Kräfte, um die in  $F$  gestörte Kontinuität wieder herzustellen, die Werte annehmen

$$X_a = + \frac{\delta_a}{\delta_{aa}} = + \frac{b \cdot \text{tg } \alpha}{\delta_{aa}}$$

$$X_b = + \frac{\delta_b}{\delta_{bb}} = + \frac{b}{\delta_{bb}}$$

$$X_c = + \frac{1}{\delta_{cc}}.$$

Durch Auftragen der Biegelinien, die durch  $X_a$ ,  $X_b$  und  $X_c$  entstehen, und Addieren ihrer Ordinaten unter Berücksichtigung des in der linken Bogenhälfte bei  $m$  vorhandenen Knickes erhalten wir nun die durch den Knick Eins in  $m$  verursachte Biegelinie des eingespannten Bogens (Abb. 16b) und damit die Einflußlinie für das Moment im Punkte  $m$  dieses eingespannten Bogens (Abb. 16c).

Es ist nun aus den Abb. 16a u. b ohne weiteres ersichtlich, daß diese Biegelinie die Sperrkreuze B und C mit folgenden Momenten belastet:

$$B: \quad M_{01} = -X_a g + X_b \cdot \frac{l}{2} + X_c$$

$$M_{02} = +X_a g + X_b \cdot \frac{l}{2} - X_c$$

oder

$$M_{01} = -\frac{b g \cdot \text{tg } \alpha}{\delta_{aa}} + \frac{b l}{2 \delta_{bb}} + \frac{1}{\delta_{cc}}$$

$$M_{02} = +\frac{b g \cdot \text{tg } \alpha}{\delta_{aa}} + \frac{b l}{2 \delta_{bb}} - \frac{1}{\delta_{cc}}.$$

Wir stellen jetzt den Zustand  $\zeta_1 = 1$  her, indem wir das Sperrkreuz B um den Drehwinkel Eins im Sinne des Uhrzeigers drehen. Den Mittelbogen denken wir uns wieder in  $F$  getrennt und das Gelenk A des linken Bogens gelöst; es entsteht dann die Verformung der Abb. 16d.

Dann sind mit den Bezeichnungen dieser Abbildung zur Wiederherstellung der Kontinuität in  $F$  die Kräfte erforderlich:

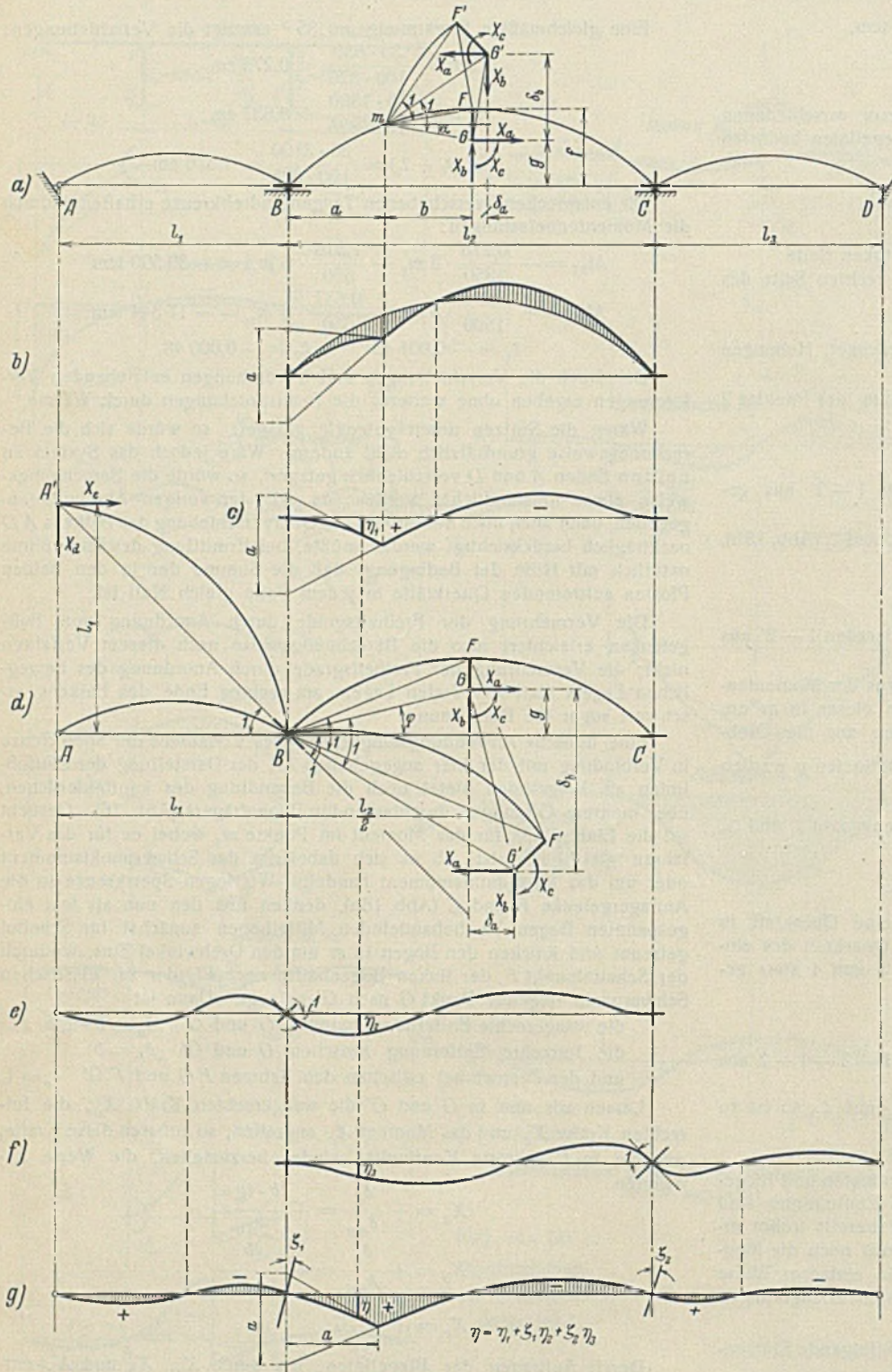


Abb. 16a bis g. Entwicklung der Einflußlinie für das Moment in  $m$  des kontinuierlichen Bogensystems.

$$X_a = + \frac{\delta_a}{\delta_{aa}} = + \frac{l \operatorname{tg} \varphi}{2 \delta_{aa}} \quad X_b = - \frac{\delta_b}{\delta_{bb}} = - \frac{l}{2 \delta_{bb}} \quad X_c = - \frac{1}{\delta_{cc}}$$

Um den nach  $A'$  gelangten Punkt  $A$  wieder an seine alte Stelle zu bringen, sind hier zwei Kräfte  $X_d$  und  $X_e$  erforderlich, die die Bedingungen erfüllen müssen

$$X_d \delta_{dd} + X_e \delta_{de} = 0 \quad X_d \delta_{de} + X_e \delta_{ee} = l,$$

woraus folgt:

$$X_d = \frac{l_1 \delta_{de}}{\delta_{de}^2 - \delta_{dd} \delta_{ee}} \quad X_e = \frac{l_1 \delta_{dd}}{\delta_{dd} \delta_{ee} - \delta_{de}^2}$$

Aus den hier bestimmten fünf Kräften  $X$  folgt nun nach Abb. 16d die Belastung des Sperrkreuzes 1

$$M_{11} = -X_a g + X_b \cdot \frac{l_2}{2} + X_c - X_d \cdot \frac{l}{2},$$

die Kraft  $X_c$  hat natürlich keinen Einfluß. Ebenso folgt als Belastung des Sperrkreuzes 2

$$M_{21} = +X_a g + X_b \cdot \frac{l_2}{2} - X_c.$$

Nehmen wir der Einfachheit halber Symmetrie an, so ist

$$M_{22} = M_{11},$$

während  $M_{12}$  selbstredend in allen Fällen gleich  $M_{21}$  ist.

Aus der Gleichung

$$(15) \quad \begin{array}{c|c|c|c} & \zeta_1 & \zeta_2 & \\ \hline 1 & M_{11} & M_{21} & M_{01} \\ \hline 2 & M_{12} & M_{22} & M_{02} \end{array}$$

ergeben sich die endgültigen Drehwinkel  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$ .

Stellt nun Abb. 16e die durch den Zustand  $\zeta_1 = 1$  und Abb. 16f die durch den Zustand  $\zeta_2 = 1$  erzeugte Biegelinie des Bogens dar, so entsteht durch Addition der Ordinaten der Abb. 16c, der mit  $\zeta_1$  multiplizierten Ordinaten der Abb. 16e und der mit  $\zeta_2$  multiplizierten Ordinaten der Abb. 16f die endgültige, durch den Knick Eins in  $m$  erzeugte Biegelinie des Bogensystems mit den Sperrkreuzdrehwinkeln  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  oder die Einflußlinie für das Moment  $M_m$ .

Wir sehen, daß bei der Behandlung der vorstehenden, immerhin verwickelten Aufgabe nach diesem Verfahren Gleichungssysteme mit mehr als 2 Unbekannten überhaupt nicht auftreten.

Die Ermittlung weiterer Einflußlinien des Systems bedingt lediglich eine Änderung der Werte  $M_{01}$  und  $M_{02}$  in Gl. (15).

Sind in den Punkten  $B$  und  $C$  in waagrechttem Sinne bewegliche Auflager vorhanden, so müssen jetzt nachträglich die Verschiebungen der Punkte  $A$  um Eins und  $B$  um Eins einzeln vorgenommen werden und dann aus den Bedingungen der gleichen Horizontalschübe

$$H_1 = H_2 \quad \text{und} \quad H_2 = H_3$$

die wirklichen Verschiebungen von  $A$  und  $B$  ermittelt werden.

### 3. Der Dreiwinkelsatz.

Als Gegenstück zu der bekannten Clapeyronschen Gleichung (Dreimomentensatz) ergibt sich aus den bisherigen Darlegungen die allgemeine Beziehung zwischen den Ausschlagwinkeln über drei benachbarten Stützen  $i, k, l$  des durchlaufenden Balkens:

$$(16) \quad M_{ok} + M_{ki} \zeta_i + M_{kl} \zeta_k + M_{li} \zeta_l = 0.$$

Sie ist indes wesentlich allgemeiner als der Dreimomentensatz, denn es ist dabei gleichgültig, ob der Träger auf mehreren Stützen frei drehbar lagert, oder ob er mit den Stützen biegungsfest nach Art der Abb. 14 verbunden ist. Auch den sogenannten „Viermomentensatz“ schließt Gl. (16) mit ein. Sie gilt auch für eine kontinuierliche Bogenreihe nach Abb. 16.

Es ist auch gleichgültig, wie das Belastungsglied  $M_{ok}$  entstanden ist, ob durch äußere Belastung oder durch eine zum Zweck der Einflußlinienermittlung erzeugte Verformung nach den Beispielen der Abb. 14a bis h, oder durch eine Verschiebung der Tangentenkreuze infolge von Wärme- oder anderen Einflüssen. — Für den auf gleich hohen Stützpunkten frei drehbar lagernden Balken mit gleichem Trägheitsmoment ergibt sich

$$(16a) \quad M_{ok} \cdot \frac{l_i l_k}{2 EJ} - l_k \zeta_l - 2(l_i + l_k) \zeta_k - l_i \zeta_l = 0.$$

### 4. Anwendung des Verfahrens auf räumliche Stabgebilde.

Als einfaches Beispiel für die Anwendung des in Abschnitt 1 beschriebenen Verfahrens auf räumliche Systeme wird das Traggerüst des in Abb. 17 dargestellten stählernen Wasserbehälters gewählt.

Dabei ist angenommen, daß der Tragring des Behälters gelenkig, im übrigen aber unverschieblich auf den oberen Enden der acht Tragsäulen ruht. Um eine für den Gang der Berechnung sehr schätzenswerte Symmetrie zu erhalten, wurden in  $\frac{5}{12}$  der Höhe des unteren Stockwerks Gelenke angenommen; denn bei einer Querverschiebung des unteren Rahmens treten Wendepunkte in  $\frac{1}{2}$  der Höhe des unteren Stockwerks, bei Winkeldrehungen im unteren Rahmen treten solche in  $\frac{1}{3}$  der Höhe auf, so daß die wirklichen Wendepunkte — Gelenke — stets zwischen  $\frac{1}{3}$  und  $\frac{1}{2}$  der Höhe des unteren Stockwerks liegen. Nimmt man nur teilweise Einspannung der Säulen an, so kann man dem dadurch Rechnung tragen, daß man die Gelenke etwas tiefer liegend annimmt. Im übrigen wurde die Höhe des oberen Stockwerks und die Höhe des unteren Stockwerks, von den Gelenken an gerechnet, gleich der halben Höhe des mittleren Stockwerks gewählt, denn bei dieser Einteilung treten, wie sich später

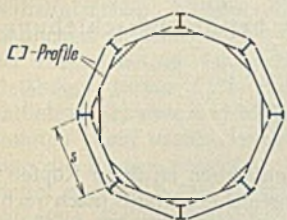
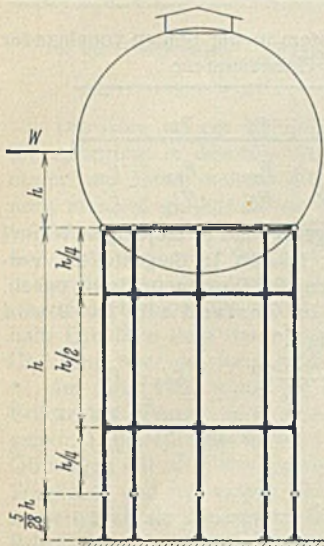


Abb. 17. Behältergerüst.

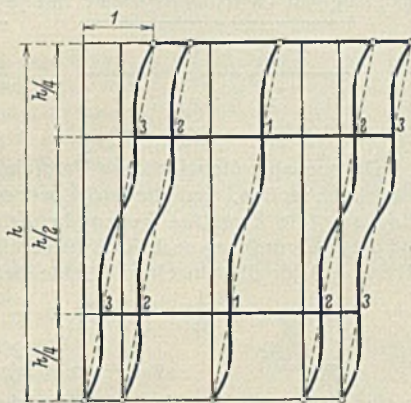


Abb. 18.

aus der Berechnung ergeben wird, in den einzelnen Pfosten oberhalb und unterhalb der Ringe entgegengesetzt gleiche Querkräfte auf, d. h. die Ringe werden durch waagerechte Kräfte nicht belastet, was bei jeder anderen Einteilung der Fall sein würde. Zur Aufnahme solcher Kräfte sind aber solche Ringe ohne besondere Verspannung wenig geeignet. Wir nehmen nun nach Abb. 18 in jedem Knoten ein dreilachsiges Drehkreuz mit einer senkrecht gerichteten, einer radial gerichteten und einer tangential gerichteten Achse an. Die bei der Verformung entstehenden Ausschlagwinkel um die radial gerichtete Achse bezeichnen wir mit  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ , die Ausschlagwinkel um die tangentiale Achse mit  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , wobei wir von der Symmetrie Gebrauch machen. Verdrehungen um die lotrechte Achse können nicht auftreten. Verdrehungen und Momentenbelastungen, deren Projektionen auf die Papierebene im Sinne des Uhrzeigers erscheinen, gelten als positiv. Drehungen um die Achse  $Z_3$  gelten als positiv, wenn sie von der Außenseite des Gerüsts gesehen im Sinne des Uhrzeigers erscheinen, Drehungen um die Achse  $F_1$  gelten als positiv, wenn sich dabei die oberen Teile der lotrechten Achse nach innen neigen.

Wir verschieben nun den Behälter mit seinen gelenkigen Stützpunkten um den Wert 1 in der Richtung des angenommenen Winddrucks auf den Behälter und nehmen zunächst alle Tangentenkreuze als unverdrehbar an. Dann entstehen die in Abb. 18 dargestellten Verformungen. Dabei betragen die Momentenbelastungen der Tangentenkreuze 1, 2 und 3 in bezug auf die radial gerichteten Achsen:

$$\begin{aligned} Z_{10} &= + \frac{b}{2h} \\ Z_{20} &= + \frac{b}{4h} \cdot \sqrt{2} \\ Z_{30} &= 0; \\ \text{in bezug auf die tangential gerichteten Achsen:} \\ F_{10} &= 0 \\ F_{20} &= + \frac{a}{4h} \cdot \sqrt{2} \\ F_{30} &= + \frac{a}{2h} \end{aligned}$$

wobei bedeutet:

$$a = 48 \cdot \frac{E J_x}{h}$$

$$b = 48 \cdot \frac{E J_y}{h}$$

$J_x$  u.  $J_y$  die Trägheitsmomente der Pfosten.

Jetzt wird gebildet

I. Der Zustand  $\zeta_1 = 1$  (Abb. 19), indem wir gleichzeitig alle vier Tangentenkreuze 1 (deren Drehwinkel aus Symmetriegründen gleich sein müssen) im Sinne des Uhrzeigers um Eins um ihre radial gerichteten Achsen ( $Z$ -Achsen) drehen. Dadurch entstehen in den Riegelstäben 1-2, deren Drehwinkel aber nur  $1 \cdot \cos 22\frac{1}{2}^\circ$  ist, Momente nach Abb. 19a, die die vier Tangentenkreuze 1 zusammen mit dem Moment belasten:

$$Z_{11} = -2c \cdot \cos^2 \alpha - 2b,$$

für die acht Punkte 2 zusammen werden die Momentenbelastungen

$$Z_{21} = -c \cdot \cos^2 \alpha$$

$$F_{21} = -c \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha,$$

wobei bedeutet:

$a$  und  $b$  wie vorhin

$$c = 16 \cdot \frac{E J_{rx}}{s}$$

$J_{rx}$  das Trägheitsmoment der Riegelstäbe in bezug auf die waagerechte Achse;  $s$  die Länge der Riegelstäbe,

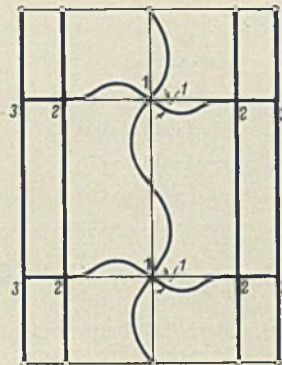


Abb. 19. Zustand  $\zeta_1 = 1$ .

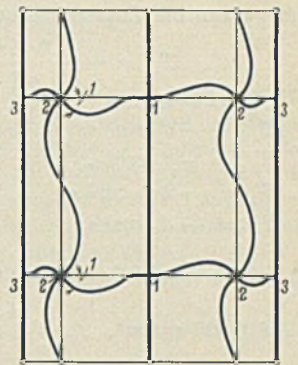


Abb. 20. Zustand  $\zeta_2 = 1$ .

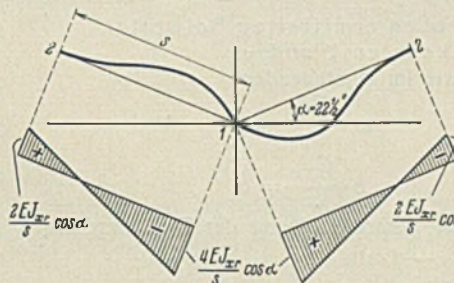


Abb. 19a.

wobei, wie auch später, der römische Zeiger bedeutet, daß die Belastung infolge einer Verdrehung der anderen Gruppe entsteht. Ferner ist  $F_{11} = 0$ .

II. Der Zustand  $\zeta_3 = 1$  (Abb. 20). Dabei fassen wir die acht Punkte 2, deren Drehwinkel aus Symmetriegründen gleich werden müssen, zusammen und drehen ihre

Tangentenkreuze um die radialen Achsen im positiven Sinne um Eins.

Daraus ergeben sich für diese acht Punkte zusammen die Momenten-

belastungen:  $Z_{22} = -4c \cdot \cos^2 \alpha - 4b$  (für 8 Punkte 2)

$Z_{12} = -c \cdot \cos^2 \alpha = Z_{21}$  (für 4 Punkte 1)

$Z_{32} = 0$  (weil die Beiträge aus der vorderen und hinteren Hälfte des Gerüsts entgegengesetzt gleich sind)

$$F_{211} = 0$$

$$F_{111} = -c \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \quad (\text{für 4 Punkte 1})$$

$$F_{311} = -c \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \quad (\text{für 4 Punkte 3}).$$

III. Der Zustand  $\varphi_3 = 1$  (Abb. 21). Dabei fassen wir die vier Tangentenkreuze der beiden Pfosten 3, deren Drehwinkel aus Symmetriegründen gleich werden müssen, zusammen und drehen sie um den Drehwinkel 1 um die tangential gerichteten Achsen ( $F$ -Achsen), dann erhalten wir:

$$F_{33} = -2c \cdot \sin^2 \alpha - 2a \quad Z_{1111} = 0$$

$$F_{23} = +c \cdot \sin^2 \alpha \quad Z_{2111} = -c \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$F_{13} = 0 \quad Z_{3111} = 0.$$

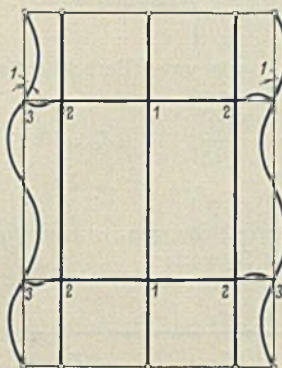


Abb. 21. Zustand  $\varphi_3 = 1$ .

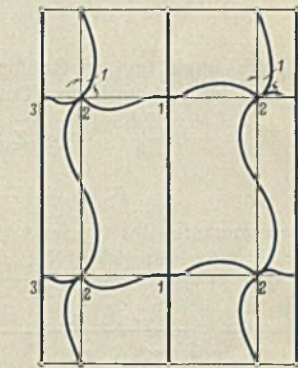


Abb. 22. Zustand  $\varphi_2 = 1$ .

IV. Der Zustand  $\varphi_2 = 1$  (Abb. 22). Dabei fassen wir die acht Tangentenkreuze 2 zusammen. Es ergibt sich

$$F_{22} = -4a - 4c \cdot \sin^2 \alpha \quad Z_{1111} = -c \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$F_{32} = +c \cdot \sin^2 \alpha \quad Z_{2111} = 0$$

$$F_{12} = 0 \quad Z_{3111} = 0.$$

Die Zustände  $\zeta_3 = 1$  und  $\varphi_1 = 1$  ergeben nur die Werte  $Z_{33} = -2c \cdot \cos^2 \alpha - 2b$   $F_{11} = -2c \cdot \sin^2 \alpha - 2a$ , denn die übrigen dabei entstehenden Momentenbelastungen werden sämtlich Null, da sich die Wirkungen auf die einander gegenüberliegenden Drehkreuze gegenseitig aufheben.

Zu diesen Belastungen treten nun aber noch Zusatzmomente infolge der bei den einzelnen Zuständen entstehenden Verdrehungen der Riegelstäbe.

Jeder Zustand  $\zeta = 1$  verdreht die angrenzenden Riegelstäbe um den Winkel  $\tau_1 = \sin \alpha$ ,

und jeder Zustand  $\varphi = 1$  um den Winkel  $\tau_2 = \cos \alpha$ .

Der Drehwinkel  $\tau_1$  verursacht an jedem Stabende eine Momentenbelastung

$$-\frac{\tau_1 G J_d}{\mu s}$$

also im ganzen die Zusatzbelastungen

$$Z'_{11} = -\frac{8\tau_1 G J_d}{\mu s} \cdot \sin \alpha = -d \cdot \sin^2 \alpha,$$

$$Z'_{21} = -d \cdot \sin^2 \alpha = Z'_{12}, \quad F'_{23} = +d \cdot \cos^2 \alpha = F'_{32},$$

$$Z'_{22} = -d \cdot \sin^2 \alpha, \quad Z'_{111} = +d \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$$

$$F'_{11} = -d \cdot \cos^2 \alpha, \quad Z'_{211} = +d \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$$

$$F'_{22} = -2d \cdot \cos^2 \alpha, \quad F'_{21} = +d \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$$

$$F'_{33} = -d \cdot \cos^2 \alpha, \quad F'_{311} = +d \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

In diesen Ausdrücken bedeuten:  $d = 8 \cdot \frac{G J_d}{\mu s}$ , wobei  $G$  die Gleit-  
ziffer = 810 000 kg/cm<sup>2</sup>,  $J_d = \frac{4 J_x J_y}{J_x + J_y}$  das polare Trägheitsmoment des  
Riegelstabes,  $\mu$  einen Beiwert, der für den aus zwei □-Eisen gebildeten,  
hinreichend ausgesteiften Riegelquerschnitt etwa = 1,5 zu setzen ist.

Zusammenfassung der oben ermittelten Beiwerte  
für die Unbekannten  $\zeta$  und  $\varphi$ .

Mit Bezeichnung der Werte wie im vorstehenden

$$48 \cdot \frac{E J_x}{h} = a, \quad 48 \cdot \frac{E J_y}{h} = b,$$

$$16 \cdot \frac{E J_x}{s} = c, \quad 8 \cdot \frac{G J_d}{s} = d$$

ergibt sich zusammenfassend unter Berücksichtigung der Torsionszusatz-  
werte:

$$\left. \begin{aligned} Z_{11} &= -2b - 2c \cdot \cos^2 \alpha - d \cdot \sin^2 \alpha \\ Z_{21} &= -c \cdot \cos^2 \alpha - d \cdot \sin^2 \alpha \\ F_{11} &= 0 \\ F_{21} &= -c \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha + d \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \\ Z_{22} &= -4b - 4c \cdot \cos^2 \alpha - 2d \cdot \sin^2 \alpha \\ Z_{12} &= -c \cdot \cos^2 \alpha - d \cdot \sin^2 \alpha \\ Z_{32} &= 0 \\ F_{111} &= 0 \\ F_{211} &= 0 \\ F_{311} &= -c \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha + d \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ Z_{33} &= -2c \cdot \cos^2 \alpha - 2b \\ F_{11} &= -2c \cdot \sin^2 \alpha - 2a \\ F_{22} &= -4a - 4c \cdot \sin^2 \alpha - 2d \cdot \cos^2 \alpha \\ F_{12} &= 0 \\ F_{32} &= c \cdot \sin^2 \alpha + d \cdot \cos^2 \alpha \\ Z_{111} &= -c \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha + d \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \\ Z_{211} &= 0 \\ Z_{311} &= 0 \\ F_{33} &= -2a - 2c \cdot \sin^2 \alpha - d \cdot \cos^2 \alpha \\ F_{23} &= +c \cdot \sin^2 \alpha + d \cdot \cos^2 \alpha \\ Z_{2111} &= -c \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha + d \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \\ Z_{3111} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Zustand } \zeta_1 = 1. \\ \\ \\ \\ \text{Zustand } \zeta_2 = 1. \\ \\ \\ \text{Zustand } \zeta_3 = 1 \\ \text{Zustand } \varphi_1 = 1. \\ \\ \\ \text{Zustand } \varphi_2 = 1 \\ \\ \\ \text{Zustand } \varphi_3 = 1. \end{array}$$

Für die unabhängigen Glieder erhalten wir unter Berücksichtigung  
der Anzahl der unbegriffenen Tangentenkreuze:

$$Z_{10} = +1 \cdot \frac{2b}{h} \quad Z_{20} = +1 \cdot \frac{2b\sqrt{2}}{h} \quad Z_{30} = 0,$$

$$F_{10} = 0 \quad F_{20} = +1 \cdot \frac{2a\sqrt{2}}{h} \quad F_{30} = +1 \cdot \frac{2a}{h}$$

Die Determinante des Systems der Arbeitsgleichungen ist nun unter  
Berücksichtigung der gleich Null werdenden Beiwerte:

	$\zeta_1$	$\zeta_2$	$\zeta_3$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$
$Z_1 = 0$	$Z_{11}$	$Z_{12}$			$Z_{111}$	$Z_{10}$
$Z_2 = 0$	$Z_{21}$	$Z_{22}$			$Z_{211}$	$Z_{20}$
$Z_3 = 0$			$Z_{33}$			$Z_{30}$
$F_1 = 0$				$F_{11}$		$F_{10}$
$F_2 = 0$	$F_{21}$				$F_{22}$	$F_{23}$
$F_3 = 0$		$F_{311}$			$F_{22}$	$F_{33}$

Da  $Z_{30}$  und  $F_{10}$  gleich Null sind, ergibt sich ohne weiteres  $\zeta_3 = 0$   
und  $\varphi_1 = 0$ ) und es bleiben nur die stark umrandeten Teile der Matrix  
übrig, die vier Gleichungen mit 4 Unbekannten darstellen. Dabei ergibt  
sich, daß im rechten oberen Feld und im linken unteren Feld der Nenner-  
determinante die Beiwerte stehen, die Momentenbelastungen der einen  
Gruppe infolge Verdrehungen der anderen Gruppe darstellen, die also  
den gegenseitigen Einfluß der beiden Kraftverschiebungsgruppen kenn-  
zeichnen. In allen praktischen Fällen sowie auch durch einfache Be-  
trachtung dieser Werte ergibt sich, daß dieselben gegenüber den anderen  
Beiwerten so klein sind, daß sie unbedenklich vernachlässigt werden

) Das bedeutet, daß nur solche Winkeldrehungen auftreten, die nicht  
senkrecht zur Kraftebene liegen.

können. Es zerfällt dann das Gleichungssystem in die beiden voneinander  
unabhängigen Gleichungssysteme mit je 2 Unbekannten:

	$\zeta_1$	$\zeta_2$		$\varphi_1$	$\varphi_2$
1	$Z_{11}$	$Z_{12}$	$Z_{10}$	1	$F_{22}$
2	$Z_{21}$	$Z_{22}$	$Z_{20}$	2	$F_{32}$

Da nun aber die wirklichen Verdrehungen  $\zeta'$  und  $\varphi'$  diejenigen Winkel  
bezeichnen sollen, um die sich bei der in Abb. 19 dargestellten Ver-  
schiebung die Ringstäbe gegen die Achsen der Pfosten verdreht haben,  
und diese Verdrehung nach Abb. 19 bereits im Zustand alle  $\zeta = 0$  und  
alle  $\varphi = 0$  für die einzelnen Punkte beträgt:

$$\zeta_{01} = -1 \cdot \frac{1}{h} \quad \zeta_{02} = -1 \cdot \frac{2}{2h} \quad \zeta_{03} = 0$$

$$\varphi_{01} = 0 \quad \varphi_{02} = -1 \cdot \frac{2}{2h} \quad \varphi_{03} = -1 \cdot \frac{1}{h}$$

so sind die wirklichen Verdrehungswinkel:

$$\zeta'_1 = \zeta_1 - \frac{1}{h} \quad \zeta'_2 = \zeta_2 - \frac{\sqrt{2}}{2h},$$

$$\varphi'_2 = \varphi_2 - \frac{\sqrt{2}}{2h} \quad \varphi'_3 = \varphi_3 - \frac{1}{h};$$

die größten Angriffsmomente für die Pfosten bei der Verschiebung 1

$$M_{xm} = \pm \varphi'_m \cdot \frac{12 E J_x}{h^2} \cdot 1,$$

$$M_{ym} = \pm \zeta'_m \cdot \frac{12 E J_y}{h^2} \cdot 1.$$

Durch diese Verformungen der Stützen entstehen an ihren Köpfen 1,  
2 und 3 die auf den Behälter wirkenden waagerechten Kräfte (nach rechts  
gerichtete Kräfte positiv angenommen). An den beiden Stäben 2 zusammen:

$$H_1 = -1 \cdot \frac{96 E J_y}{h^3} \cdot \zeta'_1.$$

An den vier Stäben 2 zusammen:

$$H_2 = -1 \cdot \frac{96 E J_y \sqrt{2}}{h^3} \cdot \zeta'_2 - 1 \cdot \frac{96 E J_x \sqrt{2}}{h^3} \cdot \varphi'_2.$$

An den beiden Stäben 3 zusammen:

$$H_3 = -1 \cdot \frac{96 E J_x}{h^3} \cdot \varphi'_3.$$

Die Summe aller dieser waagerechten Kräfte muß aber entgegen-  
gesetzt gleich dem Winddruck  $W$  auf den Behälter sein. Ist nun

$$H_1 + H_2 + H_3 = -WK,$$

so ergibt sich

$$K = -\frac{H_1 + H_2 + H_3}{W},$$

d. h. die wirkliche Verschiebung infolge des Winddrucks ist  $\frac{1}{K}$ , und die  
dabei entstehenden Drehwinkel sind gleich den Werten

$$\frac{\zeta'_1}{K} \quad \frac{\zeta'_2}{K} \quad \frac{\varphi'_2}{K} \quad \text{und} \quad \frac{\varphi'_3}{K}.$$

Aus den Riegelverdrehungen und den dadurch erzeugten Querkräften  
ergeben sich die Längskräfte der Pfosten, die zu den durch die lotrechte  
Belastung und das Teilmoment  $Wh'$  entstehenden Längskräften zu addieren  
sind. Schließlich ergibt sich dann als Probe auf die ganze Rechnung,  
daß das Teilmoment  $Wh$  gleich dem Moment sein muß, welches die aus  
den Riegelquerkräften entstehenden Pfostenkräfte auf den Baugrund über-  
tragen.

Aus den Abb. 18 u. 19 bis 22 ist zu erschen, daß die wirklichen Ver-  
biegungen, die sich ja aus denen der Abb. 18 einerseits und denen der  
Abb. 19 bis 22 andererseits zusammensetzen, bei der hier vorgenommenen  
Einteilung der Stockwerke stets die Pfostenquerkräfte oberhalb und unter-  
halb eines Ringes entgegengesetzt gleich sein müssen, daß also eine  
waagerechte Belastung der Tangentenkreuze nicht eintritt, wohl aber bei  
jeder anderen Einteilung.

In diesem Falle würden nun nachträglich, ähnlich wie in Abschnitt 1  
erörtert, die waagerechten Verschiebungen der einzelnen Ringe zu ermitteln  
sein. Darauf soll nicht näher eingegangen werden, da solche Einteilungen  
unter allen Umständen unzweckmäßig sind. Denn die durch Verschiebung  
der einzelnen Ringe erzielten Ergebnisse würden nur unter der Voraus-  
setzung richtig sein, daß die Ringe als in ihrer Ebene starre Gebilde an-  
gesehen werden können, was aber nicht angängig ist.

Ist die Konstruktion so ausgeführt, daß die Stützen unten eingespannt  
sind und die Verbindungen ihrer Köpfe mit dem als starr aufzufassenden  
Tragring des Behälters ebenfalls als feste Einspannungen angesehen werden  
können, so würden alle Stockwerke dieselbe Höhe erhalten müssen. Es  
ist dann auch Symmetrie vorhanden und der Gang der Berechnung ändert  
sich grundsätzlich nicht.

Dieses verhältnismäßig einfache Beispiel, dessen Entwicklung schließ-  
lich eine überraschend einfache Lösung der Aufgabe herbeiführt, mag  
als Anhalt für die Behandlung auch schwierigerer räumlicher Rundbauten,  
etwa Kuppelbauten dienen, deren allgemeine Behandlung hier natürlich  
zu weit führen würde.

Alle Rechte vorbehalten.

## Die neue Hängebrücke über die Isère bei Veurey (Südfrankreich).<sup>1)</sup>

Von Baurat Dr.-Ing. Dr.-Ing. chr. F. Bohny, Lindau i. B.

Die Isère ist ein Nebenfluß der Rhone im südöstlichen Frankreich. Sie entspringt in den savoyischen Alpen nächst der italienischen Grenze, nimmt auf ihrem nahezu 300 km langen und vielfach gebogenen Laufe noch mehrere größere Nebenflüsse aus dem Gebirge auf, darunter den wilden Darfluß, und mündet in die Rhone südlich von Lyon, in der Nähe von Valance. Sie gibt einem großen Departement ihren Namen, dessen Hauptstadt die große Festung Grenoble ist. Der Fluß ist periodisch stärksten Hochwässern aus dem Gebirge ausgesetzt. Etwa 15 km unterhalb Grenoble liegt der kleine Ort Veurey, bei welchem seit jeher ein Übergang über die Isère bestand.

Im Jahre 1852 wurde die erste feste Brücke bei Veurey dem Verkehr übergeben, (Abb. 1). Sie bestand aus zwei Öffnungen mit rd. 100 m Spannweite der Tragkabel und mit einem niedrigen Geländerträger als Versteifungsträger. Die Brücke hatte die übliche Form der vielen in Frankreich vorhandenen leichten und verhältnismäßig billigen Brücken für ländlichen Straßenverkehr. Die Breite der Brücke betrug 4,4 m zwischen den Geländern, wovon 2,2 m für die Straße entfielen. Schwere und breite Fuhrwerke konnten somit immer nur in einer Richtung die Brücke passieren. Der Mittelpfeiler und die beiden Widerlager waren auf einer dicken Betonplatte zwischen Spundwänden gegründet und durch starke Steinschüttungen geschützt. Darüber erhoben sich die gemauerten Pylonen mit den gußeisernen Lagern der Tragkabel auf der Spitze.

In der Nacht vom 23. zum 24. Oktober 1928 riß eines der stärksten Hochwasser der Isère die beiden Widerlager weg, wodurch das alte Bauwerk nach über 76jährigem Bestehen sein Ende erreichte. Ein Ersatz wurde sofort ausgeschrieben, wobei das Programm den Wettbewerbern völlige Freiheit bezüglich der Form und Durchbildung der neuen Brücke ließ. Den Auftrag erhielt die Brückenbauanstalt von G. Leinekugel le Cocq und Sohn in Larche (Corrèze), deren Leistungen auf dem Gebiete des Schwebefahren- und Hängebrückenbaues allbekannt sind. Das Werk schlug in Rücksicht auf die vielen Hochwasser der Isère und im Hinblick auf verschiedene ähnliche Unfälle in den letzten Jahren wie bei der alten Brücke eine Hängebrücke mit nur einer Spannweite vor, so daß also alle Einbauten im Strom entfielen. So entstand die in Abb. 2 dargestellte Form der neuen Brücke mit einer Stützweite von 209,35 m der Haupttragkabel. Der Durchgang dieser wurde zu 20,4 = rd. 1/10, die Höhe des Versteifungsträgers zu 2,65 = rd. 1/80 der Spannweite gewählt. Die Fahrbahn ist zwischen den Bordkanten 5,9 m breit, was für zwei Spuren genügt, die außenliegenden beiden Fußstege besitzen je 0,8 m lichte Weite.

Erhebliche Kosten und Schwierigkeiten bereiteten die Gründungen der beiden Widerlager. Die Bohrungen der Behörden hatten festgestellt, daß man den Boden 9 m unter dem Flußbett mit 8 bis 9 kg/cm<sup>2</sup> belasten könne, also bei Kote + 180. Der erste Senkkasten wurde dementsprechend auf dem linken Ufer in einer Größe von 6,25 m × 12,62 m unter Druckluft abgesenkt. Als man jedoch in der erreichten Tiefe nur 4 bis 5 kg/cm<sup>2</sup> Tragfähigkeit des Baugrundes feststellte, war es nötig, mit 1 m lichten Abstand neben dem ersten Senkkasten noch einen zweiten von gleicher Größe abzusenken. Nach dieser Erfahrung wurde auf dem rechten Ufer nur ein Senkkasten, aber mit den Abmessungen 10,5 × 14 m erstellt und abgesenkt, und zwar auf Kote + 183. So entstanden die ungewöhnlich breiten Fundamentkörper, wie sie aus der Zeichnung ersichtlich sind. Um das Gewicht der Pfeiler und damit den Druck auf den Untergrund so gering wie möglich zu halten, sind große Hohlräume im Innern angelegt worden, die durch Zwischenwände in bewehrtem Beton abgeteilt sind. Ein übriges wurde getan durch eine unmittelbare Belastung des rechtsseitigen Pfeilers mit 900 t. Diese Last entspricht der ständigen und Probelast. Die Auflast wurde erreicht durch Aufbringen von über 500 m<sup>3</sup> Kies und Sand in Schanzkörben. Die Einsenkung betrug dabei nur einige Millimeter<sup>2)</sup>. Über den Fundamentpfeilern erheben sich die vielfach gegliederten aber doch ziemlich massigen Pylonen aus bewehrtem und umschnürtem Beton. Die Höhe über der Fahrbahn beträgt 23,86 m bis Oberkante Auflagerquader. Die Betonmischung enthielt 400 kg hochwertigen Zement auf 400 l Sand und 800 l Kies.

Die Kabelverankerungen bestehen nach einem französischen Patent aus massiven Betonklötzen, in denen die Kräfte strahlenförmig verteilt

werden, (Abb 3). Jedes einzelne Seil wird mittels der am Seilkopf vorhandenen Bügel an quergelegte Rundisen angeschlossen, an denen dann unmittelbar die Armierungseisen des Ankerklotzes angreifen. Die Verteilungsstellen sind von oben durch kurze Schächte zugänglich. Da bei Veurey die Ankerkabel verschieden geneigt sind, wurde auch die Größe der Ankerkörper verschieden; ihre Massen betragen rd. 1200 m<sup>3</sup> links und rd. 850 m<sup>3</sup> rechts. Als Vorzüge dieser Verankerungsweise nennt Leinekugel le Cocq ein Minimum an Anker-elementen, keine tiefen Schächte und kaum eine Unterhaltung.



Abb. 1. Alte Brücke.

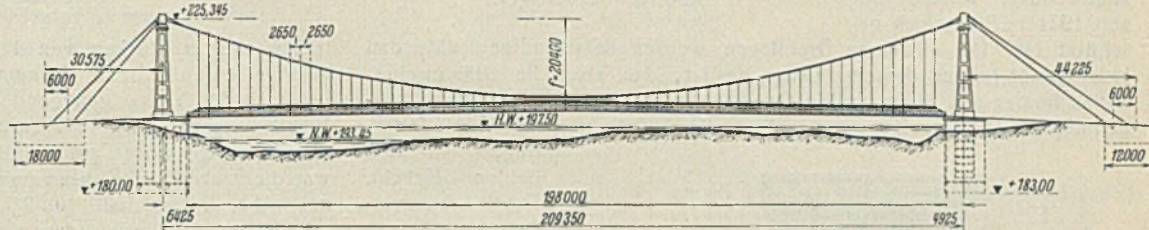


Abb. 2. Neue Brücke.

Die Tragkabel und die Rückhaltkabel bestehen in jeder Tragwand aus je 16 Einzelseilen, die zwischen den Pylonen zu einem geschlossenen Bündel von 16 Seilen und in den Rückankerungen zu zwei von je 8 Seilen zusammengefaßt sind. Meines Wissens geschah dieses Bündeln zu geschlossenen Kabeln hier zum ersten Male in Frankreich, wo bisher immer die aufgelöste Bau-

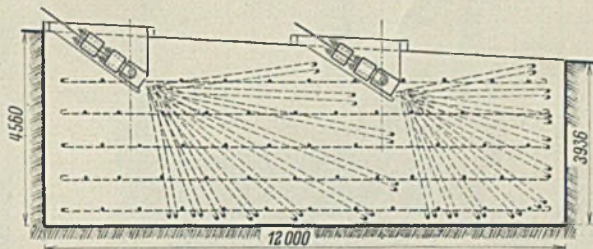


Abb. 3. Ankerkörper.

weise — das Legen jedes Einzelseiles für sich — üblich war. Nur nächst den Pylonenlagern und kurz vor den Ankerkörpern findet in Veurey ein Spreizen der Seile statt, um daselbst jedes Einzelseil für sich mittels seines Seilkopfes anschließen zu können. Diese Bauweise gestattet, die Seile ganz entsprechend den auftretenden Kräften zu bemessen, was auch geschehen ist. Sogar die Seile der flußabwärts gelegenen Tragwand, die wegen der überzuführenden Lokalbahn etwas schwerer belastet wird als die andere Seite, sind stärker ausgebildet worden, als die Seile der flußaufwärts gelegenen Wand. Die 16 Seile des Hauptkabels flußabwärts bestehen je aus 217 Drähten von 4 mm Durchmesser und haben 68 mm Fertigdurchmesser. Die 16 Seile flußaufwärts bestehen nur aus 169 Drähten und sind 60 mm stark. Entsprechende Variationen waren bei den Seilen der Rückhaltkabel vorgesehen, doch ergab die Durchrechnung, daß auf dem rechten Ufer die gleichen Querschnitte wie in der Mittelöffnung benutzt werden konnten, während auf dem linken Ufer wegen der steileren Neigung Drähte von 4,1 mm Stärke verwendet werden mußten, was Seile von 70 bzw.

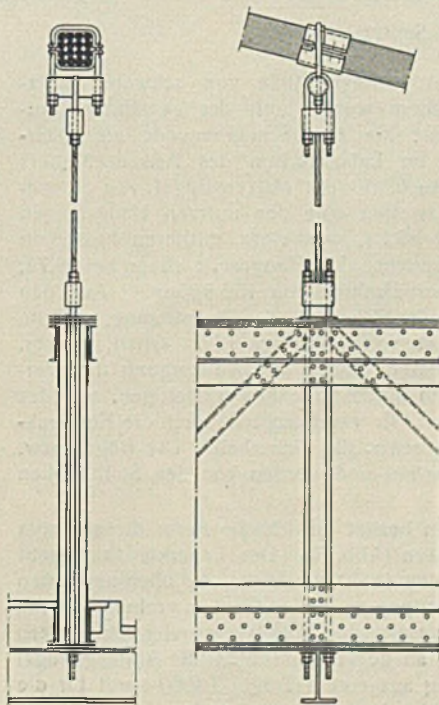


Abb. 4. Verbindung von Kabel und Versteifungsträger.

<sup>1)</sup> G. Leinekugel le Cocq „Le nouveau pont suspendu de Veurey, sur l'Isère“, Gén. Civ. 1933, Bd. 103, Heft 8, S. 173 ff., mit Sonderdruck. Ferner Bautechn. 1933, Heft 49, S. 669.

<sup>2)</sup> Die vorgesehene Gründung ist zweifellos recht teuer geworden. Mit Betonpfeilergründung wäre man sicherlich einfacher, rascher und billiger zurecht gekommen.

62 mm Durchmesser ergab. Bei einer Drahtfestigkeit von  $130 \text{ kg/mm}^2$  besitzen also die Hauptselle stromab eine Bruchfestigkeit von 355 t und das Gesamtkabel eine solche von  $16 \times 355 = 5680 \text{ t}$ . An den Punkten, wo die Seilbündel quer und in der Senkrechten gespreizt werden, sind kräftige Rahmen (Bunde) umgelegt worden, in denen die Seile mittels Futter und Keilen gut zusammengehalten werden.

Der Kabelquerschnitt ist in der Mittelloffnung nicht rund, sondern quadratisch, indem die 16 Seile in 4 Lagen zu je 4 Stück zusammengefaßt sind (Abb. 4). In den Ankerkabeln sind es entsprechend zwei Lagen zu je vier Einzelseilen. Für die Herstellung der Seile in der Kabelfabrik der Firma wurde ein besonderes Verfahren angewendet, welches ihr seit 1931 in Frankreich geschützt ist. Die einzelnen Drahtlagen werden derart aufgebracht, daß jeder Draht immer dieselbe Länge besitzt, daß also alle Drähte eines Seiles immer mit ihrem vollen Querschnitt an der Kraftübernahme teilnehmen<sup>3)</sup>. Abb. 4 zeigt im einzelnen die Aufhängung des Versteifungsträgers an den beiden Kabeln.

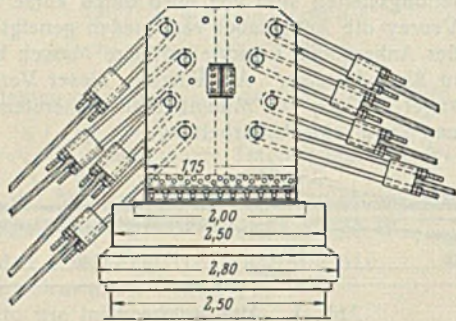
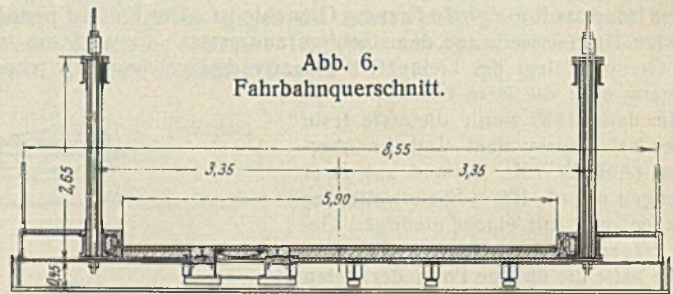


Abb. 5. Kabellager.

Durch die vorgesehene Anordnung befinden sich die Hängestangen in der Achse der Versteifungsträger und sind durch die Pfosten und

Die Stahlkonstruktion der Versteifungsträger und der Fahrbahn ist aus Abb. 4 u. 6 zu ersehen und zeigt keine ungewöhnliche Ausbildung.

Die Tragselle wurden wie üblich mittels einer leichten Hängebahn, an der fliegende Gondeln liefen, in ihre Lage gebracht, gleichzeitig mit dem Einhängen der Rückhalteselle. Hierauf erfolgte das Anbringen der Kabelschellen, das Einhängen der Hängeseile mit den unteren Hängestangen, worauf von den Ufern aus mit denselben Kolonnen und denselben Laufgerüsten der Vorbau und das Anhängen der Fahrbahn an den Hängestangen erfolgte. Die letzte Arbeit war das Einbauen der Versteifungs-

Abb. 6.  
Fahrbahnquerschnitt.

träger, die in Stücken von  $4 \times 2,65 = 10,60 \text{ m}$  Länge zur Anlieferung gelangt waren. Beim Zusammenbau der ganzen Konstruktion wurde natürlich durch eine genügende Überhöhung die spätere Einsenkung der Brücke aus Eigenlast und Verkehrslast bestens berücksichtigt. Mit der Kabelmontage wurde am 1. Juli 1932 begonnen; bereits am 15. September war die ganze Brücke zusammengebaut. Den Bauzustand am 6. September zeigt Abb. 7. Innerhalb von 2 1/2 Monaten waren insgesamt 830 t Stahlbauteile aufgestellt worden, davon 330 t Seile und rd. 500 t Versteifungsträgerkonstruktion. Nach der darauffolgenden Nietung wurde die Fahrbahn- und Fußwegdecke aufgebracht. Am 28. Dezember 1932 wurde die Brücke dem Verkehr übergeben.

Die Probelastung fand am 7. und 8. Juni 1933 statt. Das Programm dafür sah die Belastung einer Tragwand mit 500 t vor, außerdem Messungen an den Bügeln der Seilköpfe zur Feststellung der Kraftverteilung auf die einzelnen Seile. Die Last wurde auf die halbe Brückenbreite flußabwärts

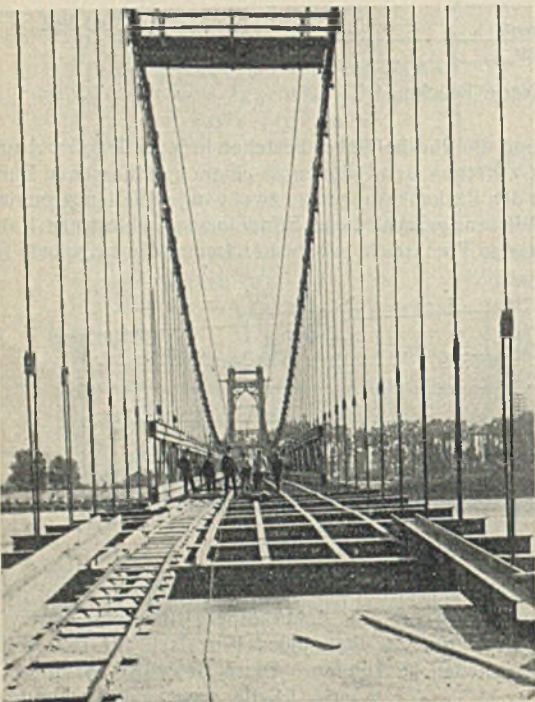


Abb. 7. Bauzustand am 6. September 1932.

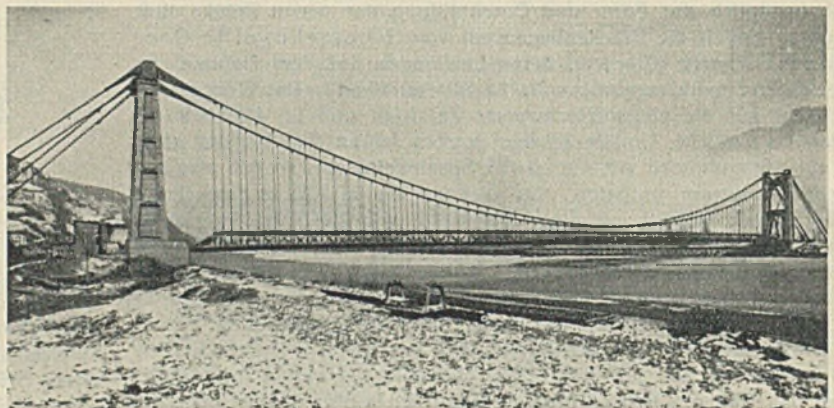


Abb. 8. Die Brücke nach beendeter Aufstellung.

Diagonalen dieser Träger gegen etwaige Stöße von schweren Fahrzeugen bestens geschützt. Trotzdem wurden mit der gewählten Aufhängung — von der Kabelschelle bis zum Schraubenende am Quertträger — zwei Zerreißversuche im Laboratorium des Arts et Métiers durchgeführt. Beim ersten Versuch riß ein oberer Bügel von 38 mm Durchmesser bei 87,55 t, beim zweiten eine der unteren Hängestangen von demselben Durchmesser bei 86,1 t, was einer mittleren Festigkeit dieser Teile von  $38,5 \text{ kg/mm}^2$  entspricht. Die Hängeseile rissen bei 99,7 t, entsprechend einer Festigkeit des Drahtes von  $132 \text{ kg/mm}^2$ . Aus den Versuchen ging also die übergroße Sicherheit der Aufhängung, welche in der fertigen Brücke eine Last von höchstens 12,5 t erhält, hervor. Leinekugel le Cocq will indessen künftig die Aufhängung der Versteifungsträger am Kabel nur noch durch Seile bewerkstelligen, wie das die Amerikaner allgemein machen. Er vereinfacht dadurch die Konstruktion wesentlich und erhöht noch etwas die Sicherheit. Die Bügel usw. bestehen aus gekupfertem Chromstahl und wurden von den Stahlwerken in Hagendingen geliefert.

Das Auflager auf den Pylonen besitzt die übliche Form dieser Lager bei den französischen Hängebrücken (Abb. 5). Der Lagerkörper besteht aus fünf schweren Blechwänden von je 40 mm Dicke, die oben und unten sowie durch eine senkrechte Querrippe zu einem Ganzen verbunden sind. Durch die Blechwände sind beiderseits des Mittelsteiges vier Stahlbolzen von 150 mm Dicke durchgesteckt, an denen unmittelbar die Anhänggebügel der Seilköpfe angreifen. Ein Steg aus einem Träger IP 60 sorgt für die Queraussteifung zweier benachbarter Lager gegeneinander.

aufgebracht, was einer gleichmäßigen Belastung von  $500 : 198 \times 3,75 = 670 \text{ kg/m}^2$  entsprach. Unter dieser Last senkte sich der Träger in der Mitte um  $0,47 \text{ m} = 1/420$  ein, die Berechnung hatte unter Berücksichtigung der vorhandenen Temperatur 0,48 m ergeben. Für die Messung der Spannungen in den Seilen standen Meßapparate von Okhuisen-Stoppani und Manet-Rabut zur Verfügung. Unter der genannten Belastung ergaben sich in den Aufhänggebügeln der Rückankerseile Spannungen von 4 bis  $4,5 \text{ kg/mm}^2$  oder von rd. 33 t im Seil. Der Wert stimmt sehr gut mit dem Anteil des Seiles an der rechnerisch ermittelten Gesamtkraft des Kabels überein. In gleicher Weise wurde die Spannung in einigen Hängestangen von 38 mm Durchmesser kontrolliert, indem zwei Wagen von über 16 t Gewicht längs der Schrammkanten auf- und abgefahren wurden.

Abb. 8 zeigt die fertige Brücke.

Die Firma G. Leinekugel le Cocq und Sohn war Generalunternehmerin und führte alle Arbeiten an Ort und Stelle, also auch die Unterbauten aus. Sie lieferte auch die Seile, die sie in ihrem Kabelwerk in Châteauneuf aus deutschem Drahte spann. Dieser und die ganze Stahlkonstruktion sind auf Reparationskonto geliefert worden, beide von der Gutehoffnungshütte, die genietete Konstruktion nebst den Kabelschellen und Seilköpfen durch das Werk Sterkrade, der Draht durch das Werk Gelsenkirchen-Schalke.

**INHALT:** Allgemeines Verfahren zur Berechnung biegezugfest verbundener Stabsysteme. — Die neue Hängebrücke über die Isère bei Veurey (Südfrankreich).

Für die Schriftleitung verantwortlich: Geh. Regierungsrat Prof. A. Hertwig, Berlin-Charlottenburg.  
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin W 8.  
Druck der Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

<sup>3)</sup> Leinekugel le Cocq nennt diese Seile „Type du cable unique“.