

JEAN LAGASSE

Prof. Uniwersytetu w Tuluzie

Tłumaczenie: dr inż. Maria Jastrzębska

METODA WYKRESU PRZEPŁYWU SYGNAŁÓW
W ZASTOSOWANIU DO ANALIZY OBWODÓW ELEKTRYCZNYCH^{x)}

Streszczenie. W pracy przedstawiono zasady metody przepływu sygnałów umożliwiającej wykreślne przedstawienie przepływu informacji przez poszczególne elementy układu, a w konsekwencji wyciąganie wniosków o transmisyjnych własnościach całego układu. Artykuł zawiera zasadnicze założenia i przykłady zastosowania metody w analizie układów automatyki.

Specjaliści automatycy stosują od wielu lat metodę schematów blokowych, która przedstawia na rysunku przechodzenie informacji przez rozmaite elementy układu i pozwala wyciągnąć stąd wnioski o funkcji przejścia całości oraz informuje o przekształceniach zachodzących w układzie.

W 1953 r. Mason podał zasady nowej metody analizy, nazwaną "Signal flow graph", której podstawy w istocie swojej podobne są do podstaw metody schematów blokowych, lecz różnią się z punktu widzenia topologii również tym, że przedstawiają pewne uogólnienia metody schematów blokowych.

Od tego czasu, wielu pracowników naukowych zajmowało się rozszerzeniem możliwości zastosowania tej metody i udowodnieniem reguł stosowanych przy jej użytkowaniu. W szczególności można tu zacytować prace, których autorami są Boisvert i Robert z Uniwersytetu Laval w Quebec oraz Cassignol i Ytze Chow z Instytutu Techniki Lotniczej w Sao Jose Dos Campos. Zaproponowanych zostało dotychczas wiele tłumaczeń nazwy

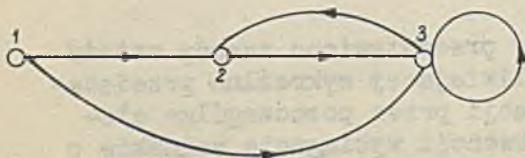
^{x)} Referat wygłoszony w Gliwicach, na zebraniu Polskiego Towarzystwa Elektrotechniki Teoretycznej i Stosowanej w dniu 17.X.1961 r.

"signal flow graphs" np. wykresy przepływów w Kanadzie, wykresy przejść lub grafiki przejść we Francji.

W tym artykule omówimy, po przedstawieniu podstawowych zasad ogólnych, dwie metody rozwiązywania wykresów i możliwości jakie daje ta nowa metoda analizy.

1. Zasady podstawowe

Wykres przepływu sygnałów przedstawia w formie klasycznej wykres obwodu w tym sensie, że zawiera gałęzie połączone węzłami (rys.1), różni się jednak dwoma pojęciami podstawowymi.



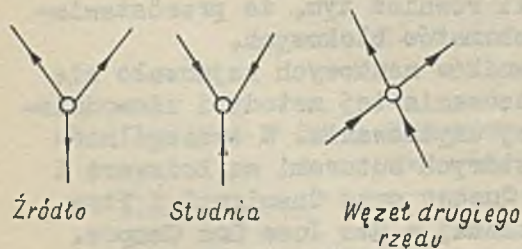
$$x_2 = T_{12} x_1 + T_{32} x_3$$

$$x_3 = T_{13} x_1 + T_{23} x_2 + T_{33} x_3$$

Rys.1

a sygnał w węźle na końcu gałęzi jest równy iloczynowi sygnału węzła na początku gałęzi i jej transmitancji.

Na przykład, wykres przepływu sygnałów na rys.1 pozwala w prosty sposób opisać zależności między sygnałami tam przedstawionymi.



Rys.2

Węzły są to miejsca gdzie schodzą się sygnały i gdzie równocześnie dokonuje się dodawania tych sygnałów.

Gałęzie są zorientowane i ich zwrot wskazuje jedyny kierunek przepływu sygnału. Każdej gałęzi przyporządkowana jest pewna transmitancja,

Węzeł źródło jest to węzeł początkowy jednej lub wielu gałęzi; węzeł studnia jest to węzeł na końcu jednej lub wielu gałęzi. Węzły, które nie są źródłami ani studniami, nazywamy węzłami drugiego rzędu (rys.2).

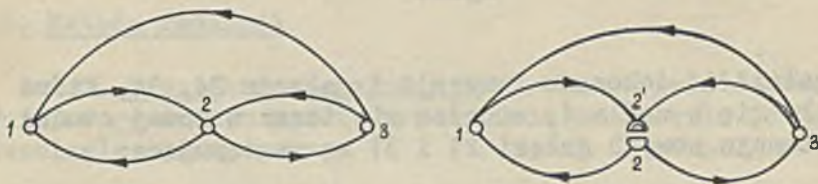
Analiza obwodu, lub bardziej ogólnie, analiza układu przeprowadzona metodą przepływu sygnałów, bę-

działanie polegać, po narysowaniu wykresu początkowego, równoważnego rozpatrywanemu obwodowi lub układowi, na zredukowaniu wykresu tak, aby otrzymać wykres najprostszy wiążący źródło (sygnał wejściowy) ze studnią (sygnał wyjściowy). Znalezienie transmitancji odpowiadającej takiemu połączeniu źródła ze studnią, rozwiązuje problem analizy.

2. Pewne pojęcia topologiczne

Rozcięcie węzła. Wskaźnik wykresu

Operacja rozcięcia węzła polega na rozdzieleniu węzła drugiego rzędu na dwie części, jedna z nich może stać się źródłem, druga studnią. Dla przykładu, rozdzielono węzeł 2 na rys.3 na dwie części; można zauważyć, że rozcięcie węzła powoduje równocześnie otwarcie pętli wykresu.



Rys.3

Wskaźnik wykresu definiuje się umownie jako najmniejszą ilość węzłów, które po rozcięciu otworzą wszystkie pętle wykresu.

Inwersja wykresu

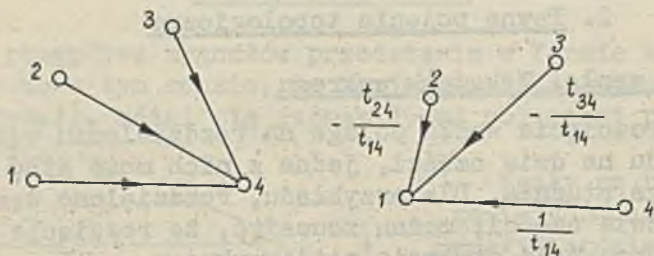
Wykres lewy na rys.4 przedstawia równanie liniowe

$$x_4 = t_{14} x_1 + t_{24} x_2 + t_{34} x_3$$

Jeżeli chcemy znaleźć zależność sygnału x_1 od trzech pozostałych należy przekształcić węzeł 1 (źródło) w studnię. Węzły pozostałe 2, 3 i 4 będą wtedy źródłami.

Nowy wykres (prawy na rys.4) przedstawia równanie:

$$x_1 = -\frac{t_{24}}{t_{14}} x_2 - \frac{t_{34}}{t_{14}} x_3 + \frac{1}{t_{14}} x_4$$



Rys.4

Na gałęzi 14 dokonano inwersji i gałęzie 24, 34, które schodziły się w węźle 4, schodzą się teraz w nowej studni 1. Transmitancje nowych gałęzi 21 i 31 są następujące:

$$-\frac{t_{24}}{t_{14}} \quad \text{i} \quad -\frac{t_{34}}{t_{14}}$$

Stosowanie operacji inwersji całości lub części wykresu jest korzystne, gdyż pozwala na zmniejszenie wskaźnika wykresu tzn. wielkości, która charakteryzuje stopień trudności obliczeń. Z tego względu inwersja jest często stosowana przy redukcji wykresu.

Inwersja pewnej gałęzi pozwala więc przekształcić węzeł-studnię węzeł drugiego rzędu w sygnał-źródło. Ta operacja jest specjalnie ważna, gdy chcemy zredukować działanie pewnego sygnału w wykresie. Nie możemy jednak tego dokonać, gdy sygnał, który ma ulec redukcji, występuje w węźle-źródle.

3. Rozwiązanie wykresu przepływu sygnałów

Rozwiązanie wykresu przepływu sygnałów polega na wyrażeniu sygnału węzła, przyjętego za główną wielkość wyjściową lub odpowiedź, jako funkcji jednego lub wielu sygnałów przyjętych za wielkości wejściowe lub zaburzenia.

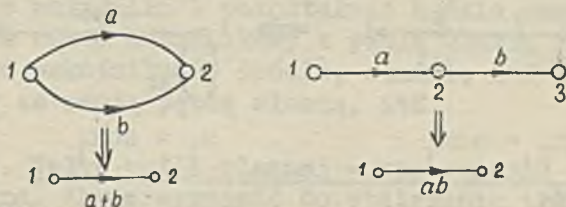
Transmitancja ogólna, która jest stosunkiem odpowiedzi do zaburzenia, może być określona dwoma metodami:

- metoda redukcji, która polega na przekształcaniu wykresu krok po kroku, dzięki niemu nie będzie on na tyle prosty, że transmitancję ogólną można znaleźć całkiem łatwo. W tej metodzie wykorzystuje się oprócz własności inwersji, pewne przekształcenia elementarne, eliminację węzłów drugiego rzędu, pojęcia wzmocnienia pętli i różnicy zwrotnej.

- metoda ogólna, która oparta jest na zastosowaniu reguł Masona i nie wymaga redukcji wykresu.

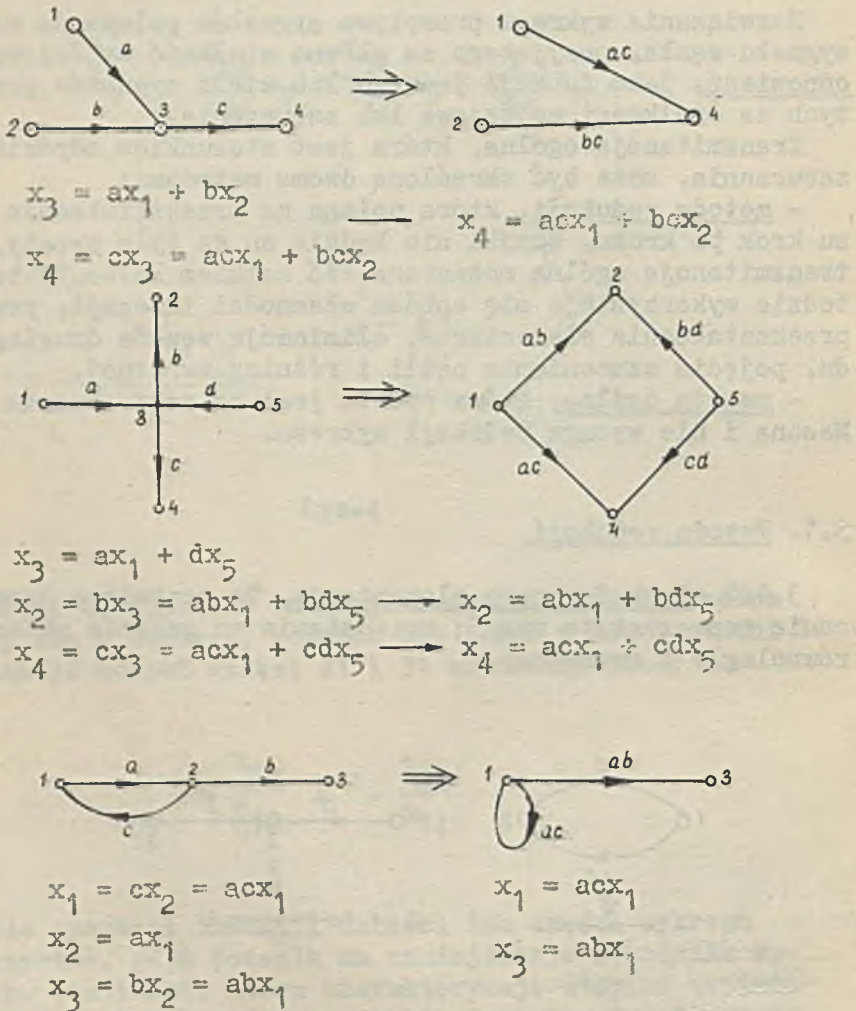
3.1. Metoda redukcji

3.1.1. Transformacje elementarne. Te oczywiste przekształcenia reprezentuje rys.5; przedstawia on gałęzie połączone równoległe i szeregowo.



Rys.5

3.1.2. Eliminacja węzła drugiego rzędu. To przekształcenie okazuje się bardzo proste, wychodzi się z reguł transformacji przedstawionych na rys.6.

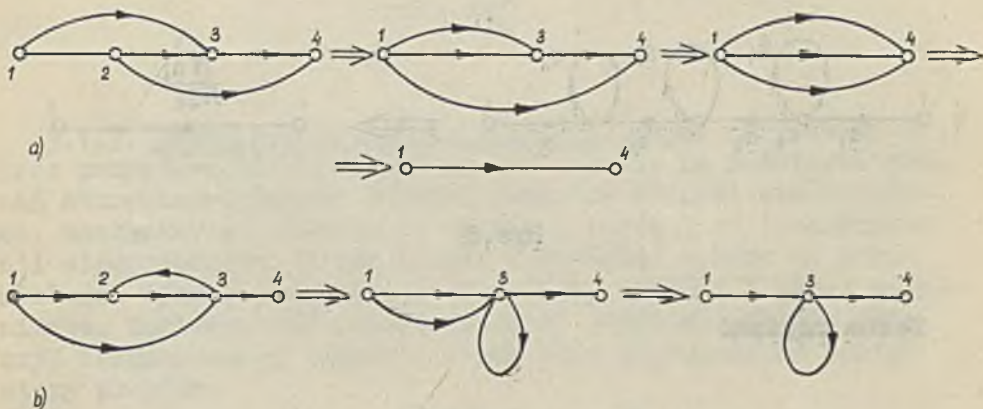


Rys.6

3.1.3. Pozostałość wykresu. Pozostałość wykresu przedstawia najprostszą formę wykresu, którą możemy otrzymać po transformacjach elementarnych i eliminacji węzłów drugiego rzędu.

Łatwo zauważyć, że minimalna pozostałość wykresu, do której można dojść, będzie zawierać węzły-źródła, węzły-studnie, węzły wskaźnikowe, a z każdym węzłem wskaźnikowym będzie stowarzyszona pętla własna.

Ta właściwość prowadzi do ostatniej reguły eliminacji węzłów drugiego rzędu (rys.6). Węzeł 1 został wybrany jako węzeł wskaźnikowy i usunięcie węzła 2 spowoduje pojawienie się pętli własnej w węźle 1, który nie może być wyeliminowany.

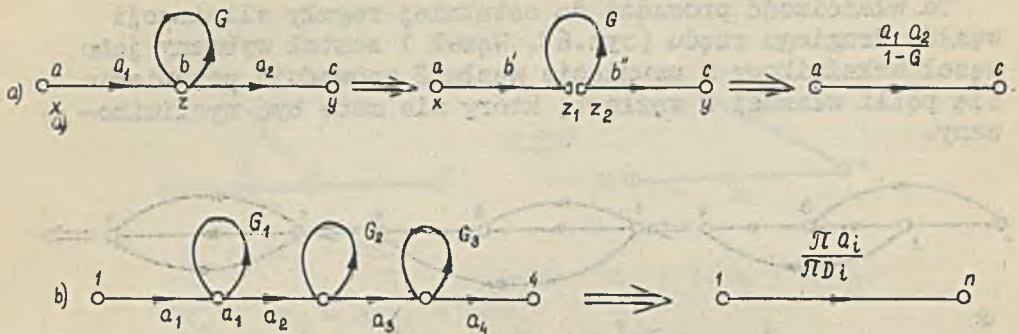


Rys.7

W końcu, dla wykresu o wskaźniku zerowym, to jest nieposiadającym żadnej pętli, pozostałość wykresu będzie zawierać tylko 1 gałąź wiążącą źródło ze studnią (rys.7a). Dla wykresu o wskaźniku 1 pozostałość będzie zawierać źródło, studnię i węzeł wskaźnikowy z pętlą własną (rys.7b), dla wykresu o wskaźniku 2, źródło, studnię i 2 węzły wskaźnikowe każdy ze swoją pętlą własną, itd.

3.1.4. Wpływ pętli własnej - wzmocnienie pętli - różnica zwrotna. Aby przystąpić do obliczenia transmitancji pozostałości wykresu, z wyjątkiem wykresu o wskaźniku zerowym gdzie problem analizy jest rozwiązany, koniecznym jest uwzględnienie wpływu pętli własnej, przez obliczenie transmitancji gałęzi jej równoważnej.

Rozważmy wykres na rys.8a, a zawierający 3 węzły a, b, c i 3 gałęzie, w tym 1 pętlę własną, z transmitancjami a_1 , G i a_2 . Wielkości x i y są to sygnały węzłów a i c. Rozetnijmy węzeł b, wielkości z_1 i z_2 są to sygnały dwóch części punktu b.



Rys. 8

Można napisać

$$z_1 = a_1 x + G z_2$$

$$y = a_2 z_2$$

Na podstawie równości sygnałów części b i b' węzła b otrzymamy zależność

$$a_1 x + G \frac{y}{a_2} = \frac{y}{a_2}$$

stąd

$$y = \frac{a_1 a_2}{1-G} x$$

Transmitancja G jest nazywana wzmocnieniem petli lub transmitancją petli, a wielkość $D = 1-G$ - różnica petli lub różnica zwrotna.

Rozważania poprzednie uogólnia się bardzo łatwo, dla wykresu kaskadowego rys.8b zawierającego pętle własne, transmitancja ogólna wyraża się wzorem

$$T = \frac{\pi a_i}{\pi D_i}$$

3.1.5. Zastosowanie metody redukcji. Mając narysowany wykres przepływu badanego obwodu lub układu, na podstawie równań charakteryzujących związki pomiędzy różnymi wielkościami, zaczynamy od eliminacji węzłów 2 rzędu i od transformacji elementarnych. W ten sposób dochodzimy wprawdzie do pozostałości wykresu, zawierającej źródła, studnie i węzły wskaźnikowe. Zastosowanie pojęcia różnicy zwrotnej pozwala obliczyć transmitancję całości, która daje odpowiedź na postawiony problem.

3.2. Metoda ogólna

Metoda ogólna, która pozwala na znalezienie transmitancji bez uprzedniej redukcji wykresu, oparta jest na zastosowaniu reguł Masona. Można je sformułować następująco:

Transmitancja ogólna (całości) między źródłem a studnią dla danego wykresu, określona jest relacją

$$T = \frac{\sum T_k \Delta_k}{\Delta}$$

gdzie

$$\Delta = 1 + (-1)^1 \sum G_i + (-1)^2 \sum G_i G_j + \dots + (-1)^n \sum G_i G_j \dots G_n$$

$\sum G_i$ - reprezentuje sumę transmitancji wszystkich pętli,

$\sum G_i G_j$ - sumę iloczynów transmitancji pętli oddzielonych od siebie jedną pętlą,

$\sum G_i G_j \dots G_n$ - sumę iloczynów transmitancji pętli oddzielonych od siebie n-1 pętlami.

$\sum_k T_k \Delta_k$ przedstawia sumę iloczynów transmitancji T_k , wszystkich łańcuchów (lub kaskad) wykresu i wartości szczególnych Δ_k , wziętych jako Δ dla rozdzielnych części wykresu k-tego łańcucha lub kaskady.

Łańcuchem lub kaskadą będziemy nazywali na wykresie całą drogę, która łączy źródło ze studnią.

Dwie gałęzie będziemy nazywali rozdzielnymi, gdy nie mają one żadnego węzła wspólnego. Tak samo dwie części wykresu są rozdzielne, gdy nie posiadają żadnych węzłów wspólnych.

Reguła Masona, której dowodu nie przedstawimy, opiera się w istocie na bardzo prostej transpozycji reguły Cramera, stosowanej dla rozwiązywania układów algebraicznych równań liniowych.

Wykres przepływu sygnałów nie jest w istocie niczym innym jak przedstawieniem graficznym układu równań liniowych; niewiadome reprezentowane są przez węzły a współczynniki przez funkcje przejścia gałęzi. Korzyści jakie daje reguła Masona wynikają stąd, że pozwala ona przez proste badanie wykresu przepływu, znaleźć od razu wyrażenie na funkcję przejścia całości, nie przechodząc przez etap bardzo uciążliwych obliczeń wyznaczników.

Metoda wykresu przepływu sygnałów w zrozumieniu pewnej metody rozwiązywania algebraicznych równań liniowych, prowadzi bardzo prosto do rozwiązania tych równań nie tracąc nigdy wglądu w fizyczny aspekt problemu. Można wskazać, w porównaniu z tą cenną zaletą, na "destrukcyjny" charakter metody wyznaczników.

4. Ilustracja metody przepływu sygnałów

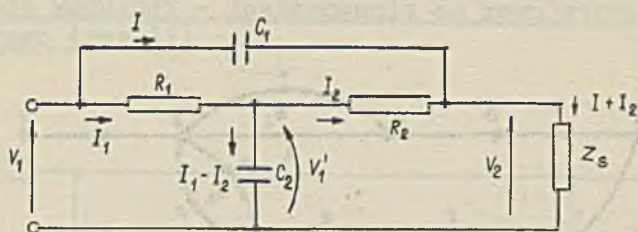
4.1. Metoda ogólna - układ mostka T (rys.9)

Ostateczny wykres reprezentujący mostek T przedstawiony jest na rys.10. Zawiera on 2 kaskady, 01234 67 i 015 67, transmitancje których oznaczymy jako T_1 i T_2

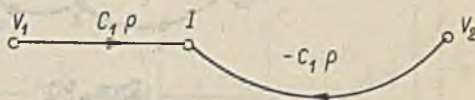
$$T_1 = abd f \quad \text{i} \quad T_2 = h i$$

i 4 pętle 232, 343, 464 i 565 z transmitancjami G_1, G_2, G_3, G_4

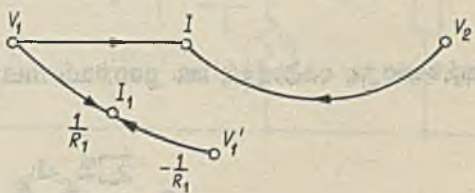
$$G_1 = bc, \quad G_2 = de, \quad G_3 = fg, \quad G_4 = ij$$



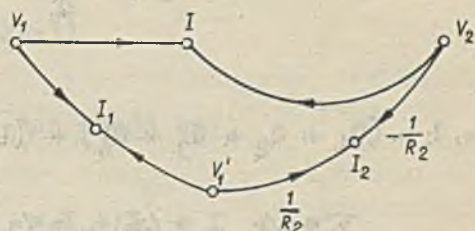
$$I = (V_1 - V_2) C_1 p$$



$$I_1 = \frac{V_1 - V_1'}{R_1}$$



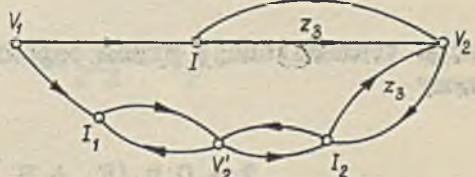
$$I_2 = \frac{V_1' - V_2}{R_2}$$



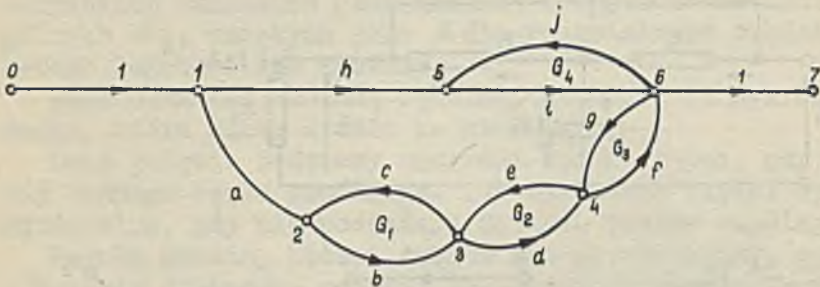
$$V_1' = \frac{I_1 - I_2}{C_2 p}$$



$$V_2 = Z_3 (I + I_2)$$



Rys. 9



Rys.10

Transmitancja całości ma postać następującą

$$T = \frac{\sum T_k \Delta_k}{\Delta}$$

gdzie

$$\Delta = 1 - (G_1 + G_2 + G_3 + G_4) + (G_1 G_3 + G_2 G_4 + G_1 G_4)$$

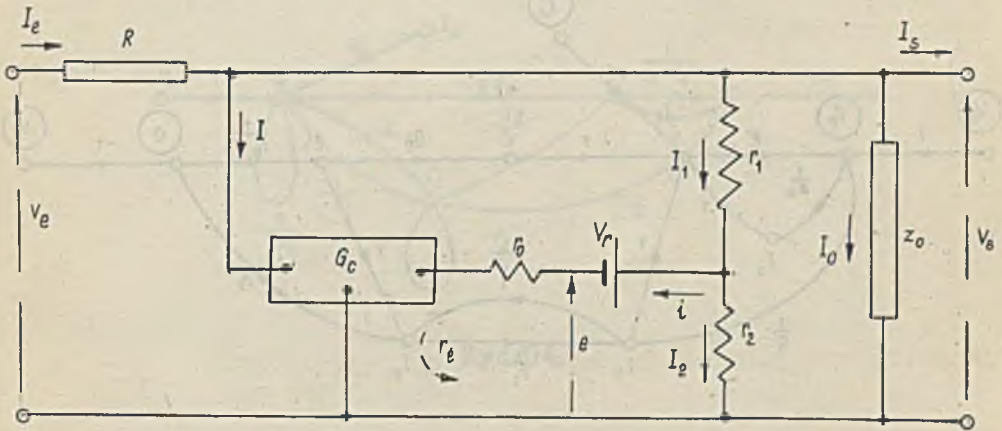
$$\sum T_k \Delta_k = T_1(1) + T_2(1 - G_1 - G_2)$$

więc

$$T = \frac{v_2}{v_1} = \frac{T_1 + T_2(1 - G_1 - G_2)}{1 - (G_1 + G_2 + G_3 + G_4) + (G_1 G_3 + G_2 G_4 + G_1 G_4)}$$

Wyrażając transmitancję przez odpowiednie elementy obwodu otrzymamy

$$T = Z_s \frac{1 - C_1 p (R_1 + R_2) - p^2 R_1 R_2 C_1 C_2}{Z_s + R_1 + R_2 + p(Z_s R_1 C_1 + Z_s R_1 C_2 + R_1 R_2 C_2 + Z_s R_2 C_1) + p^2 Z_s R_1 R_2 C_1 C_2}$$

4.2. Metoda redukcji - zastosowanie do regulatora typu równoległego (rys.11)

Rys.11

Równania charakteryzujące ten obwód są:

$$V_s = V_e - RI_e \quad I_e = I + I_1 + I_o + I_s$$

$$I = G_c i \quad I_1 = \frac{V_s - r_2 I_2}{r_1}$$

$$I_o = \frac{V_s}{Z_o} \quad i = \frac{e}{r_o + r_e}$$

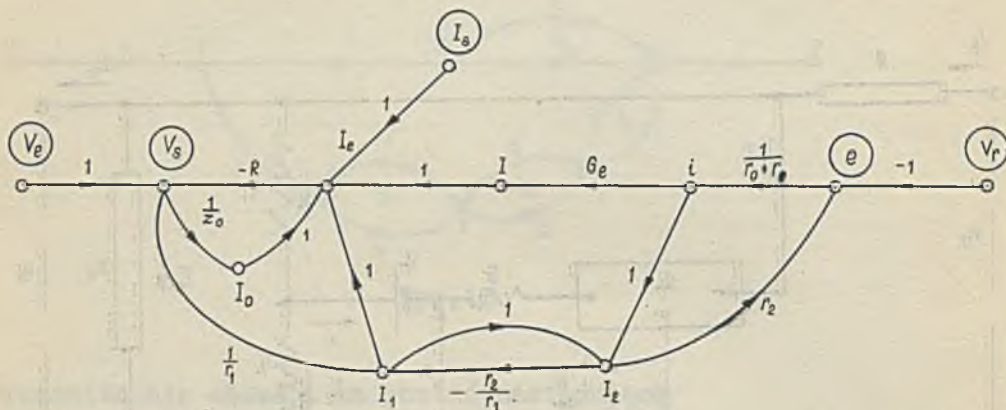
$$I_2 = I_1 - i \quad e = r_2 I_2 - V_r$$

gdzie

G_c - wzmacnienie prądowe wzmacniacza,

r_e - oporność wewnętrzną.

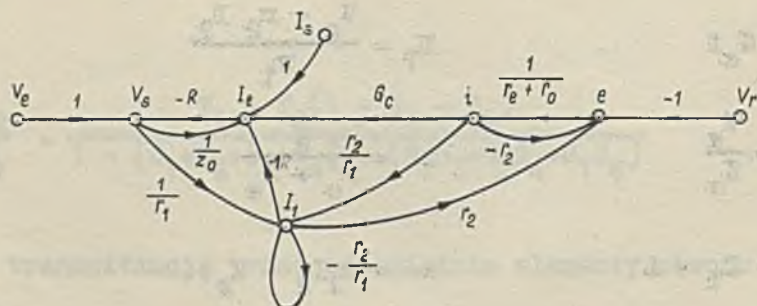
Wykres początkowy odpowiadający tym równaniom przedstawiony jest na rys.12.



Rys. 12

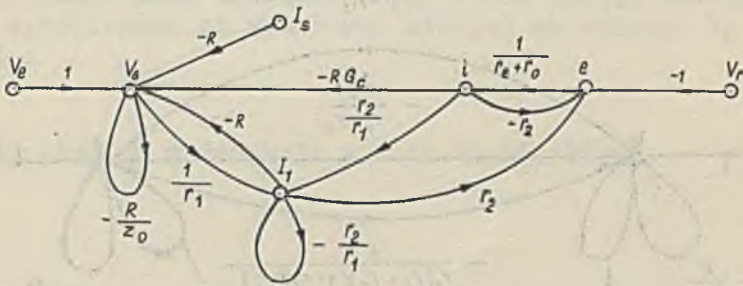
Obliczymy dla przykładu, V_s jako funkcję sygnału źródła odniesienia V_r i możliwe zmiany w obwodzie spowodowane zmianą V_e i I_s . Oznaczmy kółkami sygnał e , który jest sygnałem błędem oraz sygnały węzłów najważniejszych.

Wyeliminujemy węzły I_0 , I_1 i I_2 rys.13



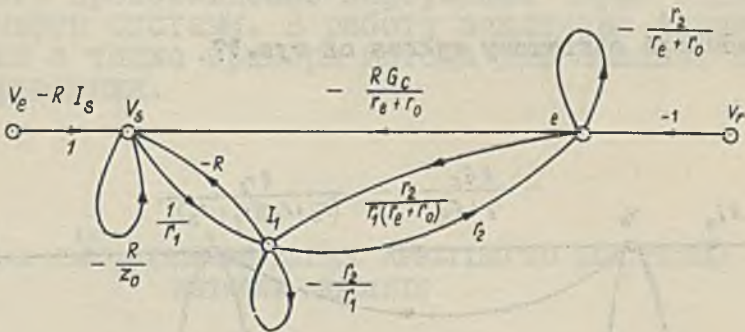
Rys. 13

następnie węzeł I_0 rys.14



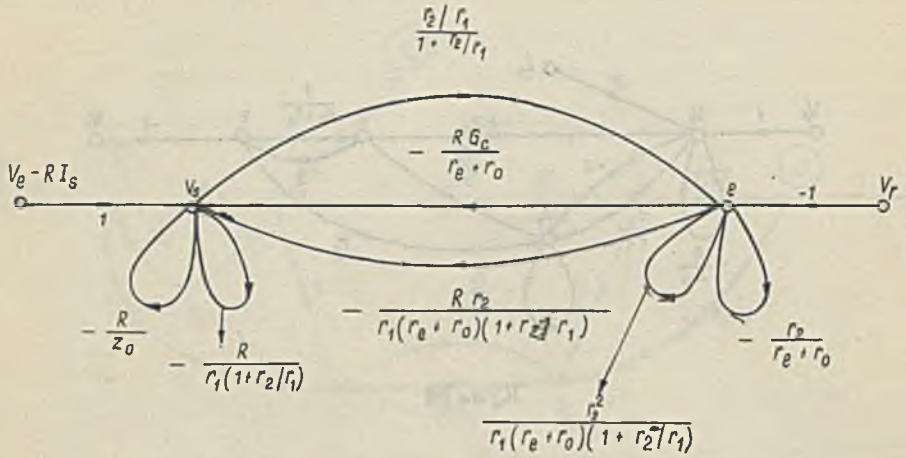
Rys.14

oraz i, rys.15



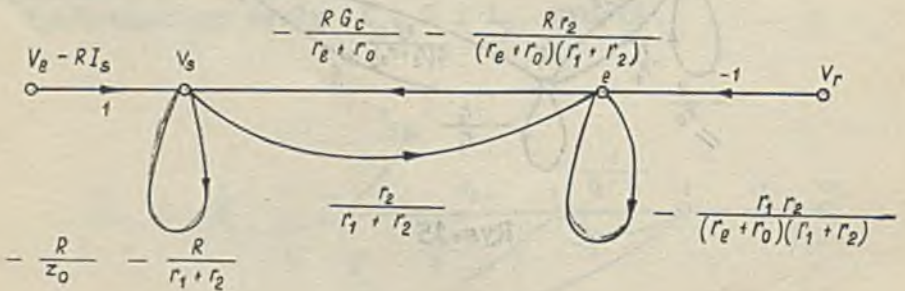
Rys.15

potem I_1 rys.16



Rys.16

i po redukcji otrzymamy wykres na rys.17.



Rys.17

Zredukowany wykres na rys.17, pozwala na określenie funkcji przejścia lub transmitancji $\frac{V_s}{V_r}$, która charakteryzuje pracę regulatora oraz transmitancji, która podaje zależność napięcia wyjściowego od zaburzeń, którymi są zmiany V_e lub zmiany I_s .

Rękopis złożono w Redakcji w dniu 15.II.1963 r.

ДИАГРАММЫ ПРОХОЖДЕНИЯ СИГНАЛОВ В ПРИМЕНЕНИИ К АНАЛИЗУ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

С о д е р ж а н и е

В статье представлено основы применения диаграмм прохождения сигналов позволяющих графически изображать происхождение информации через отдельные элементы системы. В работу заключены основные положения а также примеры метода для анализа систем управления.

A SIGNAL FLOW DIAGRAMS METHOD APPLIED TO ELECTRICAL NETWORK ANALYSIS

S u m m a r y

Principles of applying signal flow diagrams method for representation of information flux through the particular elements of a control system, and in the consequence, for obtaining conclusions about the transmission properties of the complet control system are given in the paper. Some examples illustrate how to apply the method in the analysis of a control system.