ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1964
Seria: ELEKTRYKA z. 19 Nr kol. 120

ANTONI NIEDERLIŃSKI
Katedra Napędu Elektrycznego

O ZASTOSOWANIU PEWNEGO KRYTERIUM ALGEBRAICZNEGO DO ANALIZY STABILNOŚCI PRZEBIEGÓW ELEKTRYCZNYCH W UKŁADACH ELEKTROMECHANICZNYCH OPISANYCH PRZESTRZENNO-CZASOWYMI TRANSMITANCJAMI OPERATOROWYMI

Streszczenie: Trójfazowe magnetycznie i elektrycznie symetryczne maszyny elektryczne oraz pewne układy tych maszyn najwygodniej opisywać przy pomocy równań różniczkowych o współczynnikach zespolonych (por. Kazovskij (2), Kovács (3), (4), Kron(5)), które prowadzą do przestrzenno-czasowych transmitancji operatorowych, będących uogólnieniem znanych "czasowych" transmitancji operatorowych. W pracy przedstawiono zastosowanie do analizy stabilności omawianych układów pewnego kryterium będącego uogólnieniem kryterium Hurwitza dla przypadku równań charakterystycznych o współczynnikach zespolonych. Jako przykłady przeprowadzono analizę stabilności dwóch przypadków pracy silnika asynchronicznego.

WSTĘP. PRZYKŁAD OPISU UOGÓLNIONEJ SYMETRYCZNEJ MASZYNY ELEKTRYCZNEJ ZA POMOCĄ RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH O WSPÓŁCZYNNIKACH ZESPOLONYCH

Rozpatrzmy uogólnioną symetryczną maszynę elektryczną (por. Kron (6)) opisaną równaniami różniczkowymi o współczynnikach rzeczywistych:

$$\begin{bmatrix} U_{ds} \\ U_{dr} \\ U_{qr} \\ U_{qs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s+pL_s & pM & & \\ Mp & r_r+pL_r & L_r & M \\ -M & -L_r & r_r+pL_r & pM \\ & & pM & r_s+pL_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ds} \\ i_{dr} \\ i_{qr} \\ i_{qs} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

gdzie indeksem "d" oznaczono parametry i wielkości uzwojeń osi podłużnej, indeksem "q" parametry i wielkości osi poprzecznej maszyny, a indeksy "s" i "r" oznaczają odpowiednio parametry i wielkości stojana i wirnika.

Ponieważ wszystkie zjawiska występujące w osi podłużnej "d" maszyny różnią się od zjawisk występujących w osi poprzecznej "q" tylko przesunięciem w czasie i przestrzeni, istnieje możliwość zmniejszenia ilości równań tej maszyny o połowę. W tym celu wprowadza się prostokątny układ współrzędnych d-jq, którego oś urojona jq pokrywa się z osią "q" maszyny. Mnożąc równania napięć osi "q" stojana i wirnika obustronnie przez j i dodając je stronami do odpowiednich równań osi "d" stojana i wirnika, otrzymuje się równania:

$$\begin{bmatrix} U_{ds}+jU_{qs} \\ U_{dr}+jU_{qr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s + pL_s & pM \\ M(p - j\omega) & r_r + L_r(p - j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ds}+ji_{qs} \\ i_{dr}+ji_{qr} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

lub

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_s \\ \mathbf{U}_r \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} r_s + pL_s & pM \\ M(p - j\omega) & r_r + L_r(p - j\omega) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s \\ \mathbf{I}_r \end{bmatrix} \tag{3}$$

gdzie $\mathbf{U}_s = U_{ds} + jU_{qs}$

$\mathbf{U}_r = U_{dr} + jU_{qr}$

$\mathbf{I}_s = i_{ds} + ji_{qs}$

$\mathbf{I}_r = i_{dr} + ji_{qr}$

są wektorami przestrzennymi napięć i prądów.

1. PRZESTRZENNO - CZASOWE TRANSMITANCJE OPERATOROWE

Rozpatrzmy równanie różniczkowe liniowe o współczynnikach zespolonych:

$$(a_n+jb_n)\frac{d^n}{dt^n}X + (a_{n-1}+jb_{n-1})\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}X + \ldots + (a_o+jb_o)X =$$

$$= (c_m+jd_m)\frac{d^m}{dt^m}Y + (c_{m-1}+jd_{m-1})\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}Y + \ldots + (c_o+jd_o)Y \tag{4}$$

Zmienne zespolone X i Y można uważać za wektory w płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Z (4) można przy zerowych warunkach napisać transmitancję operatorową

$$W(p,j) = \frac{\Delta Y(p)}{\Delta X(p)} = \frac{p^n(a_n+jb_n) + p^{n-1}(a_{n-1}+jb_{n-1})+\ldots+(a_o+j_{bo})}{p^m(c_m+jd_m) + p^{m-1}(c_{m-1}+jd_{m-1})+\ldots+(c_o+jd_o)}$$

Transmitancje operatorowe typu $W(p,j)$ będą w dalszym ciągu nazywane przestrzenno-czasowymi transmitancjami operatorowymi, w odróżnieniu od znanych, czasowych transmitancji operatorowych. Uzasadnieniem wprowadzonej nazwy jest to, że określają one odpowiedź wektora X na zmianę wektora Y nie tylko w czasie lecz również w przestrzeni. Rozpatrzmy następujący przykład: dane jest równanie różniczkowe

$$X = (a + jb) Y + \frac{d}{dt} Y$$

stąd

$$W(p,j) = \frac{\Delta Y(p)}{\Delta X(p)} = \frac{1}{p + a + jb}$$

Dla skokowej zmiany $X = 1(t)$ jest

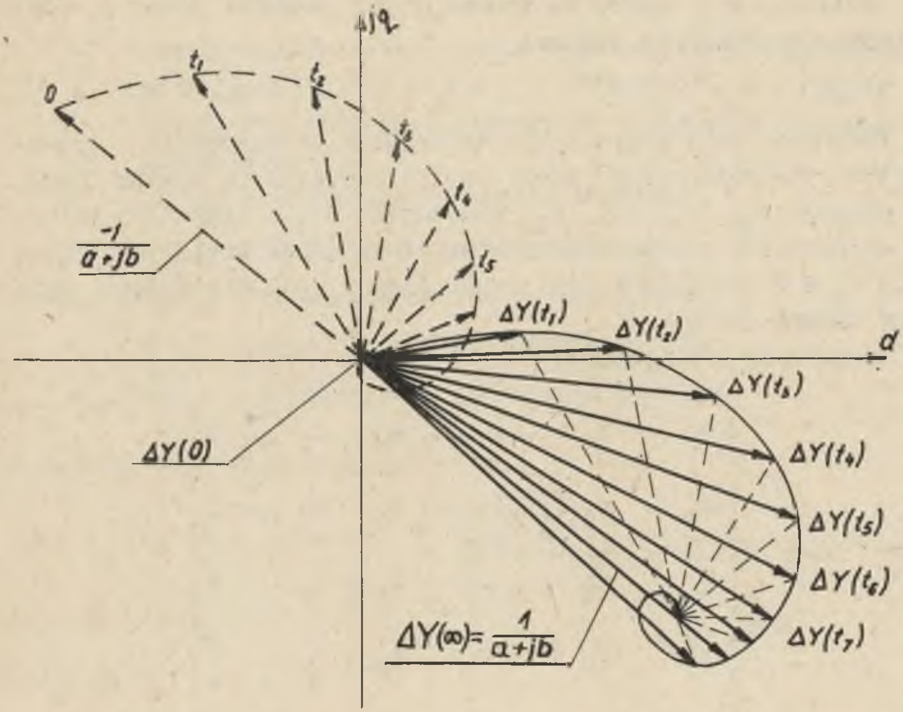
$$\Delta Y(t,j) = \frac{1}{a + jb}\left(1 - e^{-at}e^{-jbt}\right)$$

Przebieg funkcji $\Delta Y(t,j)$ dla przypadku $a > 0$ i $b > 0$ przedstawiono na rys. 1. Linia przerywana przedstawia przebieg funkcji $-e^{-at}e^{-jbt}/(a+jb)$.

Rezygnując z użycia przestrzenno-czasowych transmitancji operatorowych można przebieg z rys. 1 opisać czteroma znacznie bardziej skomplikowanymi "czasowymi" transmitancjami operatorowymi:

$$\frac{\Delta Y_d(p)}{\Delta X_d(p)} = \frac{p + a}{(p+a)^2 + b^2} \qquad \frac{\Delta Y_d\, p}{\Delta X_q\, p} = \frac{b}{(p+a)^2 + b^2}$$

$$\frac{\Delta Y_q\, p}{\Delta X_d\, p} = \frac{-b}{(p+a)^2 + b^2} \qquad \frac{\Delta Y_q\, p}{\Delta X_q\, p} = \frac{p + a}{(p+a)^2 + b^2}$$



Rys. 1. Przebieg przestrzenno-czasowy odpowiedzi wektora ΔY na skokową zmianę wektora ΔX

2. ANALIZA STABILNOŚCI UKŁADU OPISANEGO PRZESTRZENNO-CZASOWYMI TRANSMITANCJAMI OPERATOROWYMI

Zagadnienie to sprowadza się do określenia znaków części rzeczywistych pierwiastków wielomianu o współczynnikach zespolonych. Można się w tym celu posłużyć następującym kryterium wynikającym ze znanego twierdzenia (por. Gantmacher (1), Mišina-Proskurjakov (6)):

Niech $F(p)$ jest wielomianem o współczynnikach zespolonych. Podstawmy $p = jq$ otrzymując

$$F(jq) = c_0 y^n + c_1 y^{n-1} + \ldots + c_n + j(d_0 y^n + d_1 y^{n-1} + \ldots + d_n)$$

Jeżeli $d_o = 0$ należy wielomian $F(jq)$ pomnożyć przez j, zapisując go również w postaci

$$jF(jq) = c_o y^n + c_1 y^{n-1} + \ldots + c_n + j(d_o y^n + d_1 y^{n-1} + \ldots + d_n)$$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym by wszystkie pierwiastki wielomianu $F(p)$ miały części rzeczywiste ujemne jest, by minory ∇_2, ∇_4, ... ∇_{2n} znajdujące się w lewym górnym rogu wyznacznika A utworzonego z współczynników wielomianu $F(jq)$ (gdy $d_o \neq 0$ dla $F(jy)$) lub $jF(jq)$ (gdy $d_o = 0$ dla $F(jq)$) były tego samego znaku.

Wyznacznik A ma postać:

$$A = \begin{vmatrix} d_o & d_1 & \ldots\ldots\ldots & d_n & 0 & \ldots & 0 \\ c_o & c_1 & \ldots\ldots\ldots & c_n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_o & \ldots\ldots\ldots & d_{n-1} & d_n & \ldots & 0 \\ 0 & c_o & \ldots\ldots\ldots & c_{n-1} & c_n & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

Wyznacznik A jest stopnia 2n.

3. PRZYKŁADY

a) Analiza stabilności przebiegów elektrycznych w silniku asynchronicznym przy ω = const.

Równania silnika asynchronicznego można zapisać w układzie współrzędnych wirujących z prędkością synchroniczną ω_s następująco (por. Kron (5), Kovacs (3), (4) :

$$\Delta U_s = \Delta\Psi_s(p + \delta_s + j\omega_s) - \Delta\Psi_w k_w \delta_s$$

$$0 = \Delta\Psi_s(-k_s\delta_w) + \Delta\Psi_w(p + \delta_w + js\omega_s)$$

gdzie

Ψ_s – wektor przestrzenny całkowitego strumienia sprzężonego stojana,

Ψ_w – wektor przestrzenny całkowitego strumienia sprzężonego wirnika,

U_s – wektor przestrzenny napięcia stojana,

$\delta_s = R_s/L_s'$ – współczynnik tłumienia stojana,

$\delta_w = R_w/L_w'$ – współczynnik tłumienia wirnika,

$k_s = M/L_s$ – współczynnik sprzężenia stojana,

$k_w = M/L_w$ – współczynnik sprzężenia wirnika.

Wielomian charakterystyczny:

$$F(p) = p^2+p\,(\delta_w+\delta_s)+(1-K)\,\delta_s\,\delta_w-s\,\omega_s^2+j\left[p\,\omega_s(1+s)+\omega_s(\delta_w+s\delta_s)\right]$$

gdzie $K = k_s k_w$

Dla $p = jq$

$$F(jq) = -q^2-q\omega_s(1+s)+(1-K)\delta_s\delta_w-s\omega_s^2+j\left[q(\delta_w+\delta_s) + \omega_s(\delta_w+s\,\delta_s)\right]$$

Ponieważ współczynnik przy jq^2 jest równy zeru, obliczamy $jF(jq)$:

$$jF(jq) = -q(\delta_w+\delta_s) - \omega_s(\delta_w+s\delta_s) + j\left[-q^2-q\omega_s(1+s) + (1-K)\delta_s\delta_w + -s\,\omega_s^2\right]$$

Stąd wyznacznik A:

$$A = \begin{vmatrix} -1 & -\omega_s(1+s) & (1-K)\,\delta_s\,\delta_w - s\,\omega_s^2 & 0 \\ 0 & -(\delta_w+\delta_s) & -\omega_s\,(\delta_w+s\,\delta_s) & 0 \\ 0 & -1 & -\omega_s(1+s) & (1-K)\,\delta_s\,\delta_w - s\,\omega_s^2 \\ 0 & 0 & -(\delta_w+\delta_s) & -\omega_s\,(\delta_w+s\,\delta_s) \end{vmatrix}$$

Obliczając minory ∇_2 i ∇_4 otrzymuje się:

$$\nabla_2 = \delta_w + \delta_s > 0$$

$$\nabla_4 = \delta_s\,\delta_w\left[s^2\,\omega_s^2 - 2s\,\omega_s^2 + \omega_s^2 + (\delta_w+\delta_s)^2(1-K)\right] > 0$$

a więc przebiegi elektryczne w silniku asynchronicznym są stabilne w całym zakresie zmian poślizgu s.

b) Analiza stabilności przebiegów elektrycznych w silniku asynchronicznym włączonym do sieci poprzez pojemność C przy ω = const.

Równania silnika asynchronicznego załączonego do sieci poprzez pojemność C mają w układzie współrzędnych wirujących z prędkością synchroniczną ω_s postać:

$$\Delta U_s = \Delta\Psi_s\left[p + \delta_s + j\,\omega_s + \frac{1}{L'_s C(p+j\,\omega_s)}\right] -$$

$$- \Delta\Psi_w\left[k_w\,\delta_s + \frac{k_w}{L'_s C(p+j\,\omega_s)}\right]$$

$$0 = \Delta\Psi_s\,(-k_s\,\delta_w) + \Delta\Psi_w(p + \delta_w + js\,\omega_s)$$

Rozpatrzmy przypadek szczególny (wartości liczbowe w jednostkach względnych):

$L'_s = 0,2 \qquad C = 2,22 \qquad \delta_s = 0,15 \qquad \delta_w = 0,15 \qquad \omega_s = 1$

$s = 0,05 \qquad k_s k_w = 0,918$

Wówczas wielomian charakterystyczny ma postać:

$$F(p) = 0,444p^3 + 0,1332p^2 + 0,5125p - 0,8378 + j(0,91p^2 + 0,203p + 0,0287)$$

Podstawiając $p = jq$

$$F(jq) = -0,1332q^2 - 0,203q - 0,8378 + j(-0,444q^3 - 0,91q^2 + 0,5125q + 0,0287)$$

Stąd

$$A = \begin{vmatrix} -0,444 & -0,91 & 0,5125 & 0,0287 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1332 & -0,203 & -0,8378 & 0 & 0 \\ 0 & -0,444 & -0,91 & 0,5125 & 0,0287 & 0 \\ 0 & 0 & -0,1332 & -0,203 & -0,8378 & 0 \\ 0 & 0 & -0,444 & -0,91 & 0,5125 & 0,0287 \\ 0 & 0 & 0 & -0,1332 & -0,203 & -0,8378 \end{vmatrix}$$

a odpowiednie minory

$$\nabla_2 = 0{,}058$$

$$\nabla_4 = 0{,}0289$$

$$\nabla_6 = -0{,}0805$$

czyli omawiany układ jest niestabilny.

Rękopis złożono w redakcji we wrześniu 1963.

LITERATURA

[1] Gantmacher F.R.: "Teorija matric", Gostechizdat, Moskva 195.
[2] Kazovskij F.Ja.: "Perechodnye processy v elektriceskich mašinach peremennogo toka", Akademija Nauk SSSR, Moskva 1962.
[3] Kovács K.P.: "Symmetrische Komponenten in Wechselstrom maschinen", Birkhauser Verlag, Basel-Stuttgart 1962.
[4] Kovács K.P., Rácz I.: "Transiente Vorgänge in Wechselstrom maschinen", t.1,2. Verlag der Ungarischen Akademie der Wis senschaften", Budapest 1959.
[5] Kron G. "The Applications of Tensors to the Analysis of Ro tating Electrical Machinery", General Electric Review, April/1935 - October/1938.
[6] Mišina A.P., Proskurjakov I.V.: "Vysšaja algebra", Fizmatgiz, Moskva 1962.

О ПРИМЕНЕНИИ НЕКОТОРОГО АЛГЕБРАИЧЕСКОГО КРИТЕРИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА СТАБИЛЬНОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, ОПИСАННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫМИ ОПЕРАТОРНЫМИ ТРАНСМИТАНЦИЯМИ

Р е з ю м е

Трехфазные магнитные и электрические симметрические электрические машины, а также некоторые системы этих машин наиболее выгодно представлять при помощи дифференциальных уравнений с комплексными коэффициентами (пор. Казовский [2], Ковач [3], [4], Крон [5]), которые приводят к пространственно-временным операторным трансмитанциям, являющимся обобщением общеизвестных "временных" операторных трансмитанции.
В статье представлено применение для анализа стабильности рассматриваемых систем некоторого критерия, являющегося обобщением критерия Гурвица для случая характеристических уравнений с комплексными коэффициентами. В качестве примера произведено анализ стабильности двух случаев работы асинхронного двигателя.

SOME ALGEBRAIC CRITERION APPLICATION TO STABILITY ANALYSIS OF ELECTRIC TRANSIENTS IN ELECTROMECHANICAL SYSTEMS DESCRIBED WITH SPACE-TIME TRANSFER FUNCTIONS

3-phase electrical machines with electric and magnetic symmetry and certain systems of the machines is convenient to describe with the aid of differential equations with complex coefficients (e.g.Kazovskij (2),Kovács (3),(4),Kron (5)).These equations lead to space-time transfer functions - a generalization of the known "time" transfer functions. The stability analysis of the systems mentioned has till now been carried on with the aid of known methods and a transformation was necessary which changed the differential equations with complex coefficients into a differential equation of doubly size with real coefficients. The paper shows the application to the stability problems mentioned of a certain algebraic criterion being a generalizing of the known Hurwitz criterion for the case of a characteristic equation with complex coefficients. The stability for two kinds of performance of an induction motor has been investigated as an example.