ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1972

Seria: Automatyka z. 21 Nr kol. 336

Jerzy Klamka

Instytut Automatyki Przemysłowej i Pomiarów

STEROWALNOŚĆ I OBSERWOWALNOŚĆ LINIOWYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Streszczenie: W artykule przedstawiono metodę badania sterowalności i obserwowalności liniowych stacjonarnych układów dynamicznych, opartą o własności minimalnego wielomianu zerującego macierzy. Sformułowano warunki wystarczające niesterowalności i nieobserwowalności układów dynamicznych.

1. Wstęp

Badanie sterowalności i obserwowalności [1] liniowych stacjonarnych układów dynamicznych można przeprowadzić różnymi metodami. Jedna z tych metod polega na przekształceniu układu do postaci kanonicznej formy Jordana, a następnie na badaniu liniowej niezależności wierszy lub kolumn pewnych macierzy.

W niniejszej pracy podano warunki wystarczające niesterowalności i nieobserwowalności układów, uzyskane w oparciu zarówno o kanoniczną formę Jordana układu, jak i o własności minimalnego wielomianu zerującego macierzy.

2. Kanoniczna forma Jordana

Rozważmy liniowy stacjonarny układ dynamiczny S o równaniach:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \qquad (1)$$

gdzie:

A,B,C,D, – są macierzami o stałych elementach, odpowiednio o wymiarach nxn, nxm, pxn, pxm.

$$x \in R^n, \quad u \in R^m, \quad y \in R^p$$

$u(t) \in U$ klasa funkcji przedziałami ciągłych.

Wprowadzamy oznaczenia:

λ_i $i = 1,2,\dots,k$ $(k \leq n)$ wartość własna macierzy A o krotności n_i

ν_i $i = 1,2,\dots,k$ $(k \leq n)$ indeks wartości własnej λ_i

$\varphi(\lambda)$ wielomian charakterystyczny macierzy A.

$\psi(\lambda)$ minimalny wielomian zerujący macierzy A.

r – rząd macierzy B

q – rząd macierzy C.

Ponieważ sterowalność i obserwowalność jest niezmiennikiem liniowych nieosobliwości przekształceń układu [1], więc zamiast układu S o równaniach (1), można rozpatrywać równoważny układ S_J o równaniach:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= J\,z(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hz(t) + Du(t), \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie:

$x(t) = Tz(t)$ $|T| \neq 0$

T – macierz nxn o stałych elementach

$J = T^{-1}AT$

J – kanoniczna forma Jordana macierzy A

$G = T^{-1}B$ $H = CT$

Macierz J można przedstawić w postaci:

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{J_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{J_i} & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & \boxed{J_k} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

gdzie:

J_i $i = 1,2,\dots,k$ blok Jordana odpowiadający wartości własnej λ_i.
Wymiar J_i jest $n_i x n_i$

Blok Jordana J_i jest w postaci:

$$J_i = \begin{bmatrix} \boxed{J_{i1}} & & & 0 \\ & \boxed{J_{ij}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_{i\alpha_i}} \end{bmatrix} \qquad i = 1,2,\dots,k \tag{4}$$

gdzie:

J_{ij} dla $i = 1,2,\dots,k$ $j = 1,2,\dots,\alpha_i$ jest klatką Jordana o wymiarze $\beta_{ij} \times \beta_{ij}$

α_i ilość klatek Jordana odpowiadających wartości własnej λ_i

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \lambda_i & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\dots,k \\ j = 1,2,\dots,\alpha_i \end{array} \tag{5}$$

Wymiar β_{ij} klatki Jordana J_{ij} spełnia [3] nierówność:

$$\beta_{ij} \leq \nu_i \neq 0 \quad \text{dla} \quad i = 1,2,\dots,k \quad j = 1,2,\dots,\alpha_i \tag{6}$$

3. Sterowalność liniowych stacjonarnych układów dynamicznych

Twierdzenie 1: Jeżeli istnieje wskaźnik "i" taki, że zachodzi

$$\left[\frac{n_i + \nu_i - 1}{\nu_i}\right] > r, \tag{7}$$

to układ dynamiczny S o równaniach (1) jest niesterowalny w klasie funkcji przedziałami ciągłych.

Dowód: Na mocy poprzednich uwag wystarczy wykazać niesterowalność układu dynamicznego równoważnego S_J o równaniach (2). Oznaczmy przez g_{ij} $i = 1,2,\dots,k$ $j = 1,2,\dots,\alpha_i$ wiersze macierzy G odpowiadające ostatnim wierszom klatek Jordana J_{ij} dla $i = 1,2,\ldots,k$ $j = 1,2,\ldots,\alpha_i$. Wiadomo [2], że warunkiem koniecznym i wystarczającym sterowalności układu S_J, a tym samym i układu S jest, aby wiersze g_{ij} $j = 1,2,\ldots,\alpha_i$ macierzy G były liniowo niezależne odpowiednio dla każdego wskaźnika "i" $i=1,2,\ldots,k$. Ponieważ zachodzi nierówność (6), więc można napisać:

$$\alpha_i \geqslant \left[\frac{n_i}{\nu_i}\right] \tag{8}$$

lub dokładniej:

$$\alpha_i \geqslant \frac{n_i}{\nu_i}, \quad \text{gdy } \frac{n_i}{\nu_i} \text{ jest liczbą naturalną}$$

$$\alpha_i \geqslant \left[\frac{n_i}{\nu_i}\right] + 1, \quad \text{gdy } \frac{n_i}{\nu_i} \text{ jest ułamkiem,}$$

Nierówności (9) można przedstawić w postaci jednej nierówności:

$$\alpha_i \geqslant \left[\frac{n_i + \nu_i - 1}{\nu_i}\right]. \tag{10}$$

Macierze B oraz G są związane relacją:

$$G = T^{-1}B \qquad |T| \neq 0$$

Ponieważ T jest macierzą nieosobliwą, więc [4] zachodzi:

$$\text{rząd } G = \min(\text{rząd } T, \text{ rząd } B) = \min(n,r) = r. \tag{11}$$

Jeżeli spełniona będzie nierówność (dla pewnego wskaźnika "i"):

$$\left[\frac{n_i + \nu_i - 1}{\nu_i}\right] > r, \tag{12}$$

to oczywiście wiersze g_{ij} dla $j = 1,2,\ldots,\alpha_i$ będą liniowo zależne dla tego wskaźnika "i", czyli układ S będzie niesterowalny.

c.b.d.o

Liczba naturalna $\left[\frac{n_i + \nu_i - 1}{\nu_i}\right]$ określa najmniejszą możliwą do zaistnienia ilość klatek Jordana odpowiadających wartości własnej λ_i.

Liczba naturalna n_i jest krotnością pierwiastka λ_i wielomianu charakterystycznego $\varphi(\lambda)$ macierzy A.

Liczba naturalna ν_i jest krotnością [6] pierwiastka λ_i minimalnego wielomianu zerującego macierzy A.

Wniosek 1: Jeżeli istnieje wskaźnik "i" taki, że zachodzi:

$$\left[\frac{n_i + \nu_i - 1}{\nu_i}\right] > \acute{m}, \tag{13}$$

to układ dynamiczny S o równaniach (1) jest niesterowalny, w klasie funkcji przedziałami ciągłych.

Wniosek 2: Jeżeli zachodzi równość $n_i = \nu_i$ dla $i = 1,2,...,k$, to:

$$\left[\frac{n_i + \nu_i - 1}{\nu_i}\right] = \left[\frac{2n_i - 1}{n_i}\right] = 1 > r = 0 \tag{14}$$

Układ dynamiczny S o równaniach (1) jest niesterowalny, gdy istnieje wiersz macierzy G odpowiadający ostatniemu wierszowi klatki Jordana, złożony z samych zer.

4. Obserwowalność liniowych stacjonarnych układów dynamicznych

Twierdzenie 2: Jeżeli istnieje wskaźnik "i" taki, że zachodzi:

$$\left[\frac{n_i + \nu_i - 1}{\nu_i}\right] > q, \tag{15}$$

to układ dynamiczny S o równaniach (1) jest nieobserwowalny.

Dowód: Na mocy poprzednich uwag wystarczy wykazać nieobserwowalność układu dynamicznego S_J o równaniach (2).

Oznaczmy przez h_{ij} $i = 1,2,...,k$ $j = 1,2,...,\alpha_i$ kolumny macierzy H odpowiadające pierwszym kolumnom klatek Jordana J_{ij} $i = 1,2,...,k$ $j = 1,2,...,\alpha_i$. Wiadomo [2], że warunkiem koniecznym i wystarczającym obserwowalności układu S_J, a tym samym układu S, jest aby kolumny h_{ij} $j = 1,2,...,\alpha_i$ macierzy H były liniowo niezależne, odpowiednio dla każdego wskaźnika "i" $i = 1,2,...,k$.

Ponieważ zachodzi nierówność (6), więc podobnie jak w dowodzie twierdzenia 1, możemy napisać:

$$\alpha_i \geqslant \left[\frac{n_i + \nu_i - 1}{\nu_i}\right] \qquad (16)$$

Macierze C oraz H są związane relacją:

$$H = CT \qquad |T| \neq 0 \qquad (17)$$

Ponieważ T jest macierzą nieosobliwą, więc zachodzi [4]:

$$\text{rząd } H = \min(\text{rząd } C, \text{ rząd } T) = \min(q,n) = q \qquad (18)$$

Jeśli dla pewnego wskaźnika "i" będzie spełniona nierówność:

$$\left[\frac{n_i + \nu_i - 1}{\nu_i}\right] > q, \qquad (19)$$

to oczywiście kolumny h_{ij} $j = 1,2,\ldots,\alpha_i$ będą liniowo zależne dla tego wskaźnika "i", czyli układ S będzie nieobserwowalny.

c.b.d.o.

Wniosek 3: Jeżeli istnieje wskaźnik "i" taki, że zachodzi:

$$\left[\frac{n_i + \nu_i - 1}{\nu_i}\right] > p, \qquad (20)$$

to układ dynamiczny S o równaniach (1) jest nieobserwowalny.

Wniosek 4: Jeżeli zachodzi równość $n_i = \nu_i$ dla $i = 1,2,\ldots,k$, to:

$$\left[\frac{n_i + \nu_i - 1}{\nu_i}\right] = \left[\frac{2n_i - 1}{n_i}\right] = 1 > q = 0 \qquad (21)$$

Układ dynamiczny S o równaniach (1) jest nieobserwowalny, gdy istnieje kolumna macierzy H odpowiadająca pierwszej kolumnie klatki Jordana, złożona z samych zer.

Wniosek 5: Jeżeli istnieje wskaźnik "i" taki, że zachodzi:

$$\left[\frac{n_i + \nu_i - 1}{\nu_i}\right] > \max(r,q) \qquad (22)$$

to układ dynamiczny S o równaniach (1) jest niesterowalny i nieobserwowalny.

Wniosek 6: Jeżeli istnieje wskaźnik "i" taki, że zachodzi:

$$\left[\frac{n_i + \nu_i - 1}{\nu_i}\right] > \max(m,p), \tag{23}$$

to układ dynamiczny S o równaniach (1) jest niesterowalny i nieobserwowalny.

5. Wnioski

Badanie sterowalności i obserwowalności układów dynamicznych przy użyciu przedstawionych twierdzeń, nie wymaga prawie żadnych dodatkowych obliczeń, oprócz tych jakie wykonuje się w celu znalezienia macierzowej funkcji przejścia układu.

Macierzowa funkcja przejścia K(s) układu (1), jest określona zależnością:

$$K(s) = C(sI_n - A)^{-1}B \tag{24}$$

Przy wyznaczaniu macierzy $(sI_n - A)^{-1}$, należy obliczyć wielomian charakterystyczny macierzy A, to znaczy:

$$\varphi(s) = |sI_n - A|, \tag{25}$$

a następnie znaleźć macierz dołączoną $\mathrm{adj}(sI_n - A)$.

Do badania sterowalności i obserwowalności należy ponadto wyznaczyć jedynie minimalny wielomian zerujący $\psi(s)$ macierzy A.

Wiadomo [5], że $\psi(\lambda)$ wyraża się wzorem:

$$\psi(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{g(\lambda)}, \tag{26}$$

gdzie:

$g(\lambda)$ największy wspólny dzielnik minorów stopnia $(n - 1)$ macierzy $(\lambda I_n - A)$, czyli po prostu największy wspólny dzielnik elementów macierzy $\mathrm{adj}(\lambda I_n - A)$.

Ponieważ zarówno wielomian charakterystyczny $\varphi(\lambda)$ jak i macierz dołączona $\mathrm{adj}(\lambda I_n - A)$ są wyznaczone podczas obliczania macierzowej funkcji przejścia K(s), więc do określenia sterowalności i obserwowalności układu wystarczy jedynie znaleźć $g(\lambda)$.

Przy badaniu sterowalności i obserwowalności nie jest konieczna znajomość wartości własnych macierzy A, a jedynie znajomość ich krotności w wielomianie charakterystycznym macierzy A i w minimalnym wielomianie zerującym macierzy A.

6. Przykład

Niech będzie dany układ dynamiczny S o równaniach:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & -21 & 6 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -42 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -30 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -21 & 6 & -5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 7 & 8 & -1 & 15 \\ 5 & 2 & 3 & 7 \\ 6 & 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 7 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 9 & 6 & 5 \\ 5 & 7 & 5 & 1 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(\lambda) = (\lambda+2)^5(\lambda+5) \qquad \lambda_1 = -2 \qquad \lambda_2 = -5$$

$$k = 2 \qquad n_1 = 5 \qquad n_2 = 1$$

$$\psi(\lambda) = (\lambda+2)^2(\lambda+5) \qquad \nu_1 = 2 \qquad \nu_2 = 1$$

$$n = 6 \qquad m = 4 \qquad p = 3 \qquad r = 2 \qquad q = 2$$

$$\left[\frac{n_1 + \nu_1 - 1}{\nu_1}\right] = \left[\frac{5 + 2 - 1}{2}\right] = \left[\frac{6}{2}\right] = 3$$

$$\left[\frac{n_2 + \nu_2 - 1}{\nu_2}\right] = \left[\frac{1 + 1 - 1}{1}\right] = \left[\frac{1}{1}\right] = 1$$

Dla i = 1 zachodzi:

$$\left[\frac{n_1 + \nu_1 - 1}{\nu_1}\right] = 3 > r = 2 \tag{27}$$

$$\left[\frac{n_1 + \nu_1 - 1}{\nu_1}\right] = 3 > q = 2 \tag{28}$$

Zgodnie z wnioskiem 5 badany układ dynamiczny jest niesterowalny i nieobserwowalny.

7. Podsumowanie

Podane twierdzenia i wnioski mają charakter warunków wystarczających niesterowalności i nieobserwowalności liniowych stacjonarnych układów dynamicznych. Pozwalają one na badanie niesterowalności i nieobserwowalności układów, jedynie na podstawie znajomości wielomianu charakterystycznego oraz minimalnego wielomianu zerującego, bez sprowadzania układu do postaci kanonicznej formy Jordana. Unika się w ten sposób znajdowania macierzy nieosobliwej przekształcenia T, co jest w ogólnym przypadku bardzo czasochłonne.

LITERATURA

1. Athans M., Falb P. - Sterowanie optymalne, wstęp do teorii i jej zastosowania. WNT Warszawa 1969.
2. Desoer C., Chen C. - Controllability and observability of composite systems. IEEE Transactions an Automiatic Control. 4. 1967.
3. Kurosz A. - Kurs wyższej algebry. Nauka. Moskwa. 1965.
4. Mostowski A., Stark M. - Elementy algebry wyższej. PWN Warszawa 1963.
5. Rosenbrook H., Storey C. - Mathematics of Dynamical Systems. Nelson. London. 1970.
6. Zadeh L., Desoer C. - Linear System Theory, The State Space Approach. McGraw-Hill. New York. 1963.

Rękopis złożono w Redakcji w dniu 15.XI.1971 r.

УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Р е з ю м е

В статье представлено метод испытания управляемости и наблюдаемости линейных стационарных динамических систем, основанный на свойствах минимального зануливого многочлена матрицы. Определено достаточные условия неуправляемости и ненаблюдаемости динамических систем.

CONTROLLABILITY AND OBSERVABILITY OF LINEAR DYNAMICAL SYSTEMS

S u m m a r y

In the paper is presented method investigation controllability and observability of linear dynamical time -invariant systems, basis on the properties of minimal matrix polynomial.

A sufficient condition for uncontrollability and unobservability of linear dynamical systems is formulated.