ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1972
Seria: Automatyka z. 21 Nr kol. 336

Jan Piecha
Instytut Automatyki Przemysłowej i Pomiarów

ALGORYTM DEKOMPOZYCJI PEWNEJ KLASY FUNKCJI PRZEŁĄCZAJĄCYCH

Streszczenie. W rozdziale 1 omówiono problem dekompozycji pewnej klasy funkcji przełączających w ujęciu Ashenhursta. W następnych rozdziałach przedstawiono algorytm dekompozycji zaproponowany przez autora artykułu.

1. Prosta alternatywna dekompozycja

Pewną klasę funkcji przełączających można poddać dekompozycji wg modelu przedstawionego przez R.L. Ashenhursta [1] [3].

Funkcję logiczną opisaną na zbiorze n-zmiennych X można opisać na pewnej liczbie rozłącznych podzbiorów wg jednego z trzech schematów dekompozycji (1), (2), (3).

- dekompozycja prosta:

$$f(X) = F\left[\Phi(A), B\right], \tag{1}$$

gdzie:

A - jest podzbiorem ograniczonym
B - jest podzbiorem wolnym
Φ - jest funkcją ograniczenia

pozbiory A i B związane są relacjami:

$$A \cup B = X$$

$$A \cap B = \emptyset$$

- dekompozycja wielokrotna:

$$f(X) = F\left[\Phi(A), \Psi(B), \ldots, C\right] \tag{2}$$

gdzie:

A, B, ..., C, Φ, Ψ - zdefiniowane są analogicznie jak wyżej.

- dekompozycja iteracyjna:

$$f(x) = F\left[\Phi\left[\Psi(A),B\right],\ldots, C\right] \quad (3)$$

Rozpatrzmy podstawowy model dekompozycji przedstawiony wyrażeniem (1).

Twierdzenie 1[x)]

Założenia: 1. funkcja przełączająca f jest opisana na zbiorze X n-zmiennych

2. dokonujemy podziału zbioru X na dwa podzbiory A i B

$$X = A \cup B$$

$$A \cap B = \emptyset$$

3. podzbiór A definiuje kolumny, podzbiór B definiuje wiersze siatki Karnaugha, dyskutowanej funkcji.

Teza: Mówimy, że funkcja f(x) podlega dekompozycji z podzbiorem ograniczonym A i podzbiorem wolnym B wtedy, gdy siatka Karnaugha tej funkcji posiada co najwyżej cztery rodzaje wierszy i tylko wtedy, gdy posiada nie więcej niż dwa rodzaje kolumn.

Z analizy warunku koniecznego i wystarczającego twierdzenia 1 wynika, że w siatce Karnaugha mogą wystąpić następujące cztery rodzaje wierszy:

1. wiersze składające się z samych jedynek,
2. wiersze składające się z samych zer,
3. wiersze będące pewną kombinacją zer i jedynek,
4. wiersze będące dopełnieniem kombinacji z punktu 3.

Przykład 1

Dana jest funkcja opisana na zbiorze czterech zmiennych,

$$X = \left\{ x_1, x_2, x_3, x_4 \right\}, \quad f(x) = \sum(1,2,4,7,12,13,14,15)$$

dokonujemy podziału zbioru X: $x_1, x_2 / x_3, x_4$

x) Wg Ashenhursta, bez dowodu [1].

Niech: $A = \{x_3, x_4\}$, $B = \{x_1, x_2\}$

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00		1		1
01	1		1	
11	1	1	1	1
10				

$f(X)$

Rys. 1

Zgodnie z tezą twierdzenia 1 funkcja $f(x)$ podlega dekompozycji ze zbiorem ograniczonym $A = \{x_3, x_4\}$ oraz zbiorem wolnym $B = \{x_1, x_2\}$. Jeśli przyjmiemy, że funkcja ograniczenia $\Phi = x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_3x_4$, to $\bar{\Phi} = \bar{x}_3\bar{x}_4 + x_3x_4$, wtedy $f(x) = x_1x_2 + \Phi\bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{\Phi}x_1x_2$. Gdy liczba zmiennych zbioru X wynosi n, to funkcja $f(x)$ posiada $(2^n - n - 2)$ nietrywialnych podziałów. Sprawdzenie podziałów dekompozycji polega na sprawdzeniu $\frac{1}{2}(2^n - n - 2)$ siatek Karnaugha, co jest bardzo uciążliwe, szczególnie przy dużej liczbie zmiennych. Sprawdzenie poszczególnych podziałów znacznie przyspiesza przedstawiony poniżej algorytm.

2. Pojęcia podstawowe. Definicje. Twierdzenia

Niech dana będzie funkcja przełączająca f opisana na zbiorze n – zmiennych; $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Niech dany będzie zbiór składników jedynki ξ funkcji $f(x)$, będący macierzą kolumnową, której poszczególne składowe reprezentują stany binarne wektora jedynkowego funkcji (x) [3] dla przykładu 1:

$$\xi = \begin{Bmatrix} 0001 \\ 0010 \\ 0100 \\ 0111 \\ 1100 \\ 1101 \\ 1110 \\ 1111 \end{Bmatrix}_{\{x_1, x_2, x_3, x_4\}}$$

Wybierzmy dowolny podział zbioru X na dwa podzbiory A i B[xx)].

Niech:

$$A = \{x_1, x_2\} \quad B = \{x_3, x_4\}$$

xx) Przyporządkowania zmiennych podzbiorom A i B nie należy kojarzyć z przyporządkowaniem dokonanym w pkt. 1.

Definicja 2.1

Zbiorem stanów $\xi(x)$ nazywamy zbiór 2^k (2^{n-k}) stanów zero-jedynkowych implikowanych przez podzbiór A (B), gdzie: k (n - k) jest liczbą zmiennych podzbioru A (B)

$$\xi : A \Rightarrow \xi = \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 2^k-1 \end{bmatrix}\right\}_{\{x_1,\dots,x_k\}}$$

Definicja 2.1

Przecieciem stanów zbiorów $\xi \cap \xi$, $(x \cap \xi)$ nazywamy macierz, której poszczególne wiersze przedstawiają przecięcia składowych wektora jedynkowego funkcji f(x) ze składowymi wektora $\xi(x)$

dla przykładu 1:

$$\xi \cap \xi = \left\{\begin{bmatrix} 00, & 00, & \text{———} \\ 01, & 01, & \text{———} \\ \text{———} & & \\ 11, & 11, & 11, & 11 \end{bmatrix}\right\}_{\{x_1,x_2\}}$$

Definicja 2.3

Zbiorem stałych charakterystycznych γ (δ) implikowanym przez przecięcie $\xi \cap \xi (x \cap \xi)$, nazywamy macierz kolumnową

$$\gamma = \left\{\begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_{2^k-1} \end{bmatrix}\right\}_{\{x_1,\dots,x_k\}},$$

w której: $\gamma_0,\dots,\gamma_{2^k-1}$ są liczbami przecięć w odpowiednich wierszach macierzy $\xi \cap \xi$

dla przykładu 1:

$$\gamma = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{Bmatrix}_{\{x_1, x_2\}}$$

0 – oznacza brak przecięć, $4 = 2^{n-k}$, (2^k) – oznacza, że dla pozycji: $x_1 x_2 = 11$ występuje komplet przecięć.

Definicja 2.4

<u>Zbiorem zredukowanym</u> ξ^*, (χ^*) nazywamy zbiór utworzony z niezredukowanego zbioru stanów przez wykreślenie stanów, którym odpowiadają stałe charakterystyczne 0 i 2^{n-k}, (2^k), gdy takie stałe nie istnieją $\xi^* = \xi$.

Definicja 2.5

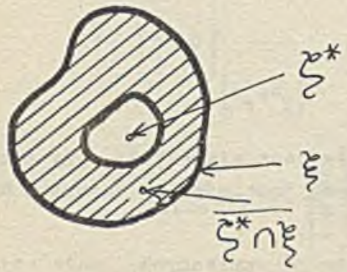
<u>Dopełnieniem przecięcia stanów</u> nazywamy macierz odpowiadającą wyrażeniu:

$$\overline{\xi^* \cap \xi} \qquad , \qquad \overline{(\chi^* \cap \xi)}$$

W wyniku takiej operacji otrzymujemy zbiór stanów, który jest <u>dopełnieniem właściwym</u>, gdy:

$$\overline{\xi^* \cap \xi} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix}$$

ilustracja:



Rys. 2

na przykład:

$$\xi^* = \begin{Bmatrix} 00 \\ 01 \end{Bmatrix}_{\{x_1, x_2\}}, \qquad \overline{\xi^* \cap \xi} = \begin{Bmatrix} 01, & 10 \\ 00, & 11 \end{Bmatrix}_{\{x_3, x_4\}}$$

skąd:

$$\alpha = \{01,\ 10\}, \qquad \beta = \{00,\ 11\}$$

Twierdzenie 2.1

Dla funkcji podlegających dekompozycji stałe charakterystyczne mogą przyjmować wartości: 0, 2^k, (2^{n-k}), m, 2^n – m; gdzie: m jest dowolną liczbą naturalną zawartą w przedziale (0, n)

$$0 < m < n$$

Dowód: sprawdzenie stałych charakterystycznych jest odpowiednikiem sprawdzenia wierszy siatki Karnaugha (Tw. 1) i tak:

- stała 0 jest odpowiednikiem wierszy składających się z samych zer
- stała 2^k, (2^{n-k}) odpowiada wierszom składającym się z samych jedynek
- stała m oznacza wiersze będące kombinacją stanów zero-jedynkowych
- stała 2^k – m, $(2^{n-k}$ – m), oznacza dopełnienie jedynek do liczby 2^k, (2^{n-k}),(gdy m oznacza liczbę jedynek).

Twierdzenie 2.1 jest warunkiem koniecznym, ale nie wystarczającym.

Twierdzenie 2.2

Warunkiem koniecznym, aby funkcja podlegała dekompozycji z wybranym podziałem jest spełnienie jednego z warunków:

1.
   a) liczba różnych stałych charakterystycznych podzbioru A ma być $\leqslant 4$
   b) jednocześnie, liczba stałych charakterystycznych podzbioru B $\leqslant 2$
2. Przypadek odwrotny
   a) dla $B \leqslant 4$
   b) dla $A \leqslant 2$

   Kolejność zdań:

$$\boxed{a \Leftrightarrow b}$$

Twierdzenie 2.3

Funkcja f(x) podlega dekompozycji z wybranym podziałem wtedy, gdy przy spełnionych tezach twierdzeń 2.1 i 2.2 spełniony jest również warunek: $\alpha = \bar{\beta}$ (def. 2.5).

Dowód: funkcja przełączająca opisana na zbiorze n zmiennych może być przedstawiona postacią:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(0, x_2, \ldots, x_n)\bar{x}_1 + f(1, x_2, \ldots, x_n)x_1 \quad [2]$$

analogicznie:

$$f(A,B) = F[\Phi(A),B] = F[0,B].\overline{\Phi}(A) + F[1,B]\Phi(A)$$

- stan $F(0,B) = F(1,B) = 0$ odpowiada przypadkowi, gdy stała charakterystyczna równa jest 0
- stan $F(0,B) = F(1,B) = 1$ odpowiada przypadkowi, gdy stała charakterystyczna równa jest 2^k
- stan $F(0,B) = 0$ oraz $F(1,B) = 1$ implikuje równość:

$$f(x) = \Phi(A); \quad \text{niech} \quad \Phi(A) = \alpha$$

- stan $F(0,B) = 1$ oraz $F(1,B) = 0$ implikuje równość:

$$f(x) = \overline{\Phi}(A),$$

jeśli $\Phi(A) = \alpha$, to $\overline{\Phi}(A) = \overline{\alpha} = \beta$ lub $\alpha = \overline{\beta}$

Przykład 2

Rozpatrzmy funkcję z przykładu 1

$$\xi = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right\}_{\{x_1,x_2,x_3,x_4\}}, \quad A = \{x_1,x_2\}, \quad B = \{x_3,x_4\}$$

$$\varsigma = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right\}_{\{x_1,x_2\}} \qquad \varkappa = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right\}_{\{x_3,x_4\}}$$

$$\varsigma \cap \xi \Rightarrow \gamma = \left\{\begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{matrix}\right\}_{\{x_1,x_2\}}, \quad \varkappa \cap \xi \Rightarrow \delta = \left\{\begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}\right\}_{\{x_3,x_4\}}$$

Mamy tu do czynienia z przypadkiem 1 twierdzenia 2.2. Przypadek ten odpowiada, zgodnie z twierdzeniem 1, stanowi, w którym A jest podzbiorem wolnym, a B podzbiorem ograniczonym.

$$f(x) = F\left[\Phi(B), A\right]$$

Obecnie należy sprawdzić w jakiej relacji są ze sobą stany implikowane przez stałe charakterystyczne podzbioru wolnego.

$$\xi^* = \begin{Bmatrix} 00 \\ 01 \end{Bmatrix}_{\{x_1, x_2\}}, \qquad \overline{\xi^* \cap \xi} = \begin{Bmatrix} 01, 10 \\ 00, 11 \end{Bmatrix}_{\{x_3, x_4\}}$$

$$\alpha = \{01, 10\}, \quad \beta = \{00, 11\}$$

Warunek $\alpha = \bar{\beta}$ jest spełniony, funkcja jest dekomponowana ze zbiorem wolnym A i zbiorem ograniczonym B.

Jeśli przyjmiemy, że Φ α, to $\bar{\Phi}$ β,
czyli:

$$\Phi = \bar{x}_3 x_4 + x_3 \bar{x}_4$$

$$\bar{\Phi} = \bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_3 x_4$$

ponieważ:

$$\alpha \Leftarrow x_1 x_2 = 00$$

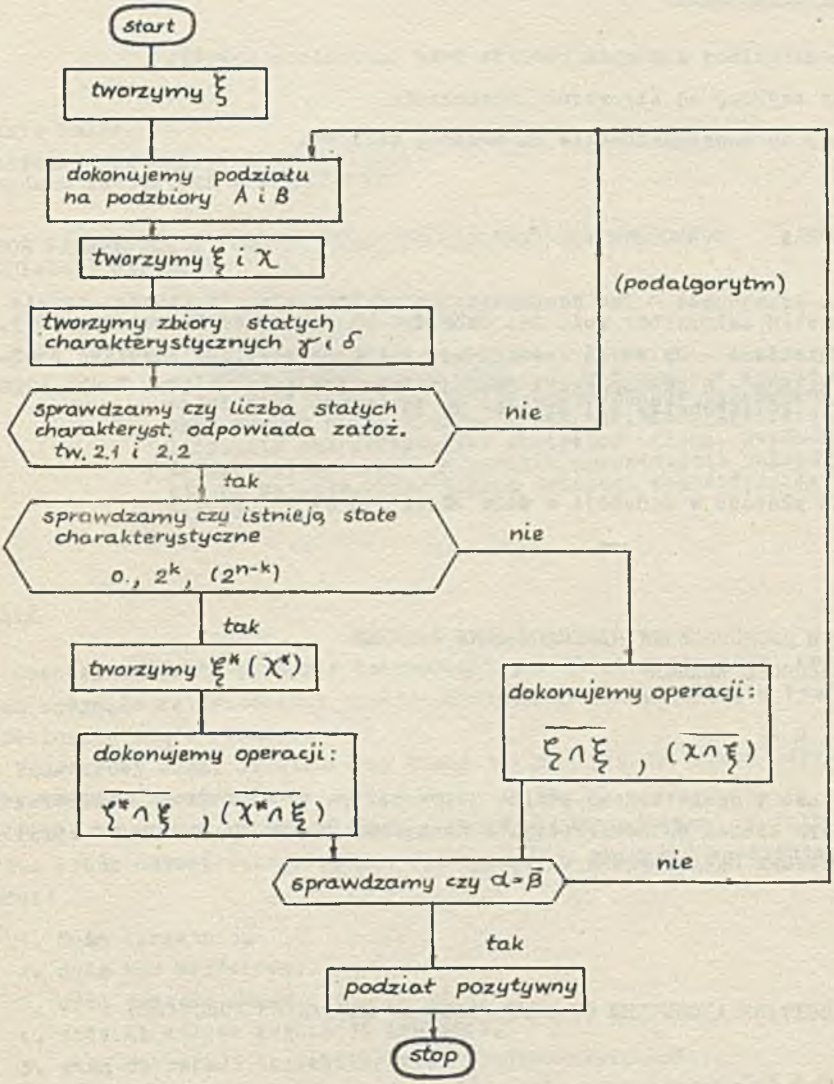
$$\beta \Leftarrow x_1 x_2 = 11$$

oraz stała charakterystyczna $2^k = 4 \Leftrightarrow x_1 x_2 = 11$ funkcję f(x) możemy zapisać: $f(x) = \Phi \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \bar{\Phi} \bar{x}_1 x_2 + x_1 x_2$

$$f(x) = F\left[\Phi(x_3, x_4), x_1, x_2\right]$$

3. Algorytm dekompozycji

Schemat blokowy algorytmu dekompozycji przedstawiono na rys. 3



Rys. 3. Schemat blokowy algorytmu

4. Wnioski końcowe

Przedstawiony algorytm posiada dwie zasadnicze zalety:

1. Jest szybszy od algorytmu Ashenhursta.
2. Łatwy do zaprogramowania na maszynę cyfrową.

LITERATURA

1. R.L. Ashenhurst - The decomposition of Switching Functions. Annals Computation Laboratory vol. 29. Cabridge Mass Harvard University 1957.
2. J. Siwiński - Układy Przełączające w Automatyce. WNT Warszawa 1968.
3. J. Piecha - O Dekompozycji Funkcji Przełączających. Zesz.Nauk. AUTOMATYKA. Politechnika Sl. Gliwice nr 19 1971.

Rękopis złożono w Redakcji w dniu 20.X.1971 r.

АЛГОРИТМ ДЕКОМПОЗИЦИИ ПЕРЕКЛЮЧАЮЩИХ ФУНКЦИИ ОПРЕДЕЛЁННОГО КЛАССА

Р е з ю м е

В главе 1 представлено вопрос декомпозиции переключающих функции определённого класса по Ашенгерсту. В следующих главах представлено алгоритм декомпозиции предложенный автором.

DECOMPOSITION ALGORYTHM OF SOME CLASS OF SWITCHING FUNCTIONS

S u m m a r y

In the first chapter the problem of Ashenhurst-type decomposition of some class of switching functions is shown. In the following chapters the author discusses a new algorithm of decomposition;