ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1972

Seria: Automatyka z. 23 Nr kol. 353

Jerzy Klamka

Instytut Automatyki
Przemysłowej i Pomiarów

ZASTOSOWANIE ILOCZYNU TENSOROWEGO MACIERZY DO BADANIA STEROWALNOŚCI UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Streszczenie. W artykule podano definicję i podstawowe własności iloczynu tensorowego macierzy. W oparciu o wprowadzone pojęcia sformułowano twierdzenia dotyczące sterowalności liniowych stacjonarnych układów dynamicznych.

1. Wstęp

Własności iloczynu tensorowego macierzy mogą być wykorzystane w pewnych przypadkach do badania sterowalności liniowych stacjonarnych układów dynamicznych. Ogólne warunki sterowalności tych układów zostały podane w pracach [1] i [2]. W niniejszym opracowaniu opierając się na definicji i własnościach iloczynu tensorowego macierzy [3] sformułowano twierdzenia dotyczące warunków sterowalności pewnych typów liniowych stacjonarnych układów dynamicznych.

2. Iloczny tensorowy macierzy i jego własności

Definicja 1. Iloczynem tensorowym $A \otimes B$ macierzy $A(m x n)$ i macierzy $B(p x q)$ nazywamy macierz o wymiarach $(mp x nq)$ określoną następująco:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}.$$

Własności iloczynu tensorowego macierzy:

1. Jeżeli macierze A, B, C, D mają odpowiednie wymiary, to:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD).$$

2. Jeżeli A i B są macierzami nieosobliwymi, to macierz $(A\otimes B)^{-1}$ istnieje i jest określona relacją:

$$(A\otimes B)^{-1} = A^{-1}\otimes B^{-1}.$$

3. Jeżeli A i B są macierzami kwadratowymi o wymiarach $A(n\times n)$, $B(m\times m)$, to:

$$\det(A\otimes B) = (\det A)^{m} \cdot (\det B)^{n}.$$

4. Jeżeli A i B są macierzami kwadratowymi, to iloczyn dowolnej wartości własnej macierzy A i dowolnej wartości własnej macierzy B jest wartością własną macierzy $(A\otimes B)$.

5. Zachodzi następująca relacja:

$$\text{rząd}(A\otimes B) = \text{rząd } A \cdot \text{rząd } B.$$

3. Sterowalność liniowych stacjonarnych układów dynamicznych

Niech będzie dany liniowy stacjonarny układ dynamiczny S, o równaniu stanu i równaniu wyjścia postaci:

$$S: \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad (1)$$

$$y(t) = Cx(t), \qquad (2)$$

gdzie $A(n\times n)$, $B(n\times m)$, $C(p\times n)$, są macierzami o stałych elementach, $x\in R^{n}$, $u\in R^{m}$, $y\in R^{p}$.
$u(\cdot)\in U$ klasa funkcji przedziałami ciągłych.

Definicja 2. Układ dynamiczny S jest sterowalny, jeżeli dla każdego stanu początkowego $x_0\in R^{n}$ istnieje sterowanie $u(t)\in U$, które sprowadza ten stan do zera w skończonym czasie. W pracy [1] wykazano, że badanie sterowalności układu S można sprowadzić do badania rzędu tzw. macierzy sterowalności W utworzonej z macierzy A i B w następujący sposób:

$$W = \left[B \,\vdots\, AB \,\vdots\, A^2B \,\vdots \ldots \vdots\, A^{n-1}B\right]. \qquad (3)$$

Zgodnie z [1] mamy: "Warunkiem koniecznym i wystarczającym sterowalności układu S, jest aby macierz W miała rząd równy n". Ponieważ sterowalność układu S jest zależna od macierzy A i B, więc można wprowadzić następującą definicję [1]:

Definicja 3. Uporządkowaną parę macierzy (A, B), o wymiarach $A(n\times n)$ $B(n\times m)$, nazywamy parą sterowalną, jeżeli macierz W dana wzorem (3) jest rzędu n.

Opierając się na własnościach iloczynu tensorowego macierzy oraz podanych definicjach sterowalności można sformułować następujące twierdzenia:

Twierdzenie 1. Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby para macierzy (A, B) była parą sterowalną, jest aby para $(A\otimes T, B\otimes T)$, gdzie T jest dowolną macierzą nieosobliwą, była parą sterowalną.

Dowód. Warunek konieczny. Załóżmy, że para (A,B), gdzie $A(n\times n)$, $B(n\times m)$ jest sterowalna oraz niech $T(q\times q)$ będzie dowolną macierzą nieosobliwą (q jest dowolną liczbą naturalną). Utwórzmy macierz sterowalności $W(n\times nm)$:

$$W = \left[B \,\middle|\, AB \,\middle|\, A^2B \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, A^{n-1}B\right]. \tag{4}$$

Ponieważ para (A,B) jest sterowalna, więc $\mathrm{rz}W = n$.
Utwórzmy macierz sterowalności $W_T(nq\times nqmq)$ dla pary $(A\otimes T, B\otimes T)$

$$W_T = \left[(B\otimes T) \,\middle|\, (A\otimes T)(B\otimes T) \,\middle|\, (A\otimes T)^2(B\otimes T) \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, (A\otimes T)^{nq-1}(B\otimes T)\right] =$$

$$= \left[B\otimes T \,\middle|\, (AB)\otimes T^2 \,\middle|\, (A^2B)\otimes T^3 \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, (A^{nq-1}B)\otimes T^{nq}\right]. \tag{5}$$

Ponieważ $\mathrm{rz}W = n$, więc istnieje układ n liniowo niezależnych kolumn w_1, $w_2, \ldots, w_n$, tworzących podmacierz $\bar{W}$ macierzy W:

$$\bar{W} = \left[w_1 \,\middle|\, w_2 \,\middle|\, \ldots\ w_n\right] \qquad \det \bar{W} \neq 0. \tag{6}$$

Utwórzmy podmacierz $\bar{W}_T$ macierzy W_T w sposób następujący:

$$\bar{W}_T = \left[w_1\otimes T^{r_1} \,\middle|\, w_2\otimes T^{r_2} \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, w_n\otimes T^{r_n}\right], \quad \text{gdzie: } 1\leqslant r_j < n \quad \text{dla } j = 1,2,\ldots,n.$$

Na podstawie (6) i własności iloczynu tensorowego mamy:

$$\det \bar{W}_T = (\det \bar{W})^q (\det T)^{r_1+r_2+\ldots+r_n} \neq 0,$$

więc $\mathrm{rz}\bar{W}_T = \mathrm{rz}W_T = nq$, czyli para $(A\otimes T, B\otimes T)$ jest sterowalna.

Warunek wystarczający. Załóżmy, że para $(A\otimes T, B\otimes T)$ jest sterowalna. Wówczas $\mathrm{rz}W_T = qn$, i można utworzyć podmacierz $\hat{W}_T(n\times nqmq)$ macierzy W_T mającą $\mathrm{rz}\hat{W}_T = n$, następującej postaci:

$$\hat{W}_T = \left[B\otimes t_i \,\middle|\, (AB)\otimes t_i^2 \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, (A^{n-1}\otimes B)\ t_i^n \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, (A^{nq-1}\otimes B)\ t_i^{nq}\right], \tag{7}$$

gdzie

t_i^k $1 \leq i \leq q$, $1 \leq k \leq nq$, i-ty wiersz macierzy T^k.

Ponieważ zachodzi:

$$\mathrm{rz}\hat{W}_T = \mathrm{rz}\left[B \,|\, AB \,|\, A^2B \,|\, \ldots \,|\, A^{n-1}B \,|\, \ldots \,|\, A^{nq-1}B\right] = \mathrm{rz}\left[B \,|\, AB \,|\, A^2B \,|\, \ldots \,|\, A^{n-1}B\right] = n$$

więc para (A,B) jest sterowalna.

c.b.d.o.

Twierdzenie 2. Jeżeli para $(A \otimes F,\ B \otimes H)$, gdzie: $A(n \times n)$, $B(n \times m)$, $F(s \times s)$, $G(s \times r)$, jest sterowalna, to także pary (A,B) oraz (F,G) są sterowalne.

Dowód. Ponieważ para $(A \otimes F,\ B \otimes G)$ jest sterowalna, więc jej macierz sterowalności $W(ns \times nmsr)$ postaci:

$$W = \left[B \otimes G \,|\, (A \otimes F)(B \otimes G) \,|\, (A \otimes F)^2 (B \otimes G) \,|\, \ldots \,|\, (A \otimes F)^{ns-1} (B \otimes G)\right] =$$

$$= \left[B \otimes G \ (AB) \otimes (FG) \,|\, (A^2B) \otimes (F^2G) \,|\, \ldots \,|\, (A^{ns-1}B) \otimes (F^{ns-1}G)\right] \qquad (8)$$

jest rzędu ns.

Wprowadźmy, dla skrócenia zapisu oznaczenia:

$(a^kb)_i$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq k \leq ns$, i-ty wiersz macierzy (A^kB)

$(f^kg)_j$, $1 \leq j \leq s$, $1 \leq k \leq ns$, j-ty wiersz macierzy (F^kG).

Utwórzmy podmacierz $W_A(n \times nmsr)$ macierzy W:

$$W_A = \left[B \otimes (g)_j \,|\, (AB) \otimes (fg)_j \,|\, (A^2B) \otimes (f^2g)_j \,|\, \ldots \,|\, (A^{ns-1}B) \otimes (f^{ns-1}g)_j\right]. \qquad (9)$$

Ponieważ $\mathrm{rz}W = ns$, więc $\mathrm{rz}W_A = n$.

Macierz W_A można przedstawić w postaci iloczynu dwóch macierzy:

$$W_A = W_1 W_2, \quad W_1(n \times nms), \quad W_2(nms \times nmsr), \qquad (10)$$

gdzie

$$W_1 = \left[B \,|\, AB \,|\, A^2B \,|\, \ldots \,|\, A^{ns-1}B\right] \qquad (11)$$

$$W_2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc}
(g)_j & & 0 & \uparrow & & & & & & \\
& (g)_j & & \text{m razy} & 0 & & & & & \\
& & \ddots (g)_j & \downarrow & & & & & 0 & \\
& & & (fg)_j & & & & & & \\
& & & & (fg)_j & & & & & \\
& 0 & & & & \ddots (fg)_j & & & & \\
& & & & 0 & & \ddots & (f^{ns-1}g)_j & & \\
& & & & & & & & \ddots & (f^{ns-1}g)_j
\end{array}\right].$$

Ponieważ $rzW_A = n \leqslant \min(rzW_1, rzW_2)$, więc:

$$n = rzW_1 = rz\left[B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{ns-1}B\right] = rz\left[B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-1}B\right]. \qquad (12)$$

Na mocy równości (12) para (A,B) jest sterowalna.

W celu udowodnienia sterowalności pary (F,G), tworzymy podmacierz $W_F(sxnsmr)$ macierzy W postaci:

$$W_F = \left[(b)_i \otimes G \mid (ab)_i \otimes (FG) \mid (a^2b)_i \otimes (F^2G) \mid \dots \mid (a^{ns-1}b)_i \otimes (F^{ns-1}G)\right].$$

Ponieważ $rzW = ns$, więc $rzW_F = s$.

Macierz W_F można przedstawić w postaci iloczynu dwóch macierzy:

$$W_F = W_3W_4, \quad W_3(sxnsr), \quad W_4(nsrxnmsr), \qquad (14)$$

gdzie

$$W_3 = \left[G \mid FG \mid F^2G \mid \dots \mid F^{ns-1}G\right] \qquad (15)$$

$$W_4 = \left[\begin{array}{c|c|c|c}
b_{11}I_r \;\; b_{12}I_r \;\dots\; b_{1m}I_r & 0 & & \\
 & (ab)_{11}I_r \;\dots\; (ab)_{1m}I_r & \dots & 0 \\
0 & 0 & \cdot & (a^{ns-1}b)_{11}I_r \;\dots\; (a^{ns-1}b)_{1m}I_r
\end{array}\right]$$

I_r macierz jednostkowa o wymiarze (rxr).

Ponieważ $rzW_F = s \leqslant \min(rzW_3, rzW_4)$, więc:

$$s = rzW_3 = rz\left[G \mid FG \mid F^2G \mid \dots \; F^{ns-1}G\right] = rz\left[G \mid FG \mid F^2G \mid \dots \mid F^{s-1}G\right]. \qquad (16)$$

Na mocy równości (16) para (F,G) jest sterowalna.

c.b.d.o.

4. Wnioski

Ze względu na fakt, że sterowalność układów dynamicznych jest pojęciem dualnym względem pojęcia obserwowalności, wszystkie podane twierdzenia mogą być zastosowane do badania obserwowalności. W tym celu należy jedynie w miejsce macierzy wejść układu B, podstawić transponowaną macierz wyjść układu C^T.

Należy podkreślić, że twierdzenie odwrotne do twierdzenia 2 nie jest prawdziwe, to znaczy, że sterowalność par (A,B) oraz (F,G), nie zawsze pociąga za sobą sterowalność pary ($A \otimes F$, $B \otimes G$).

Dokładnie powyższe stwierdzenie ulustruje przykład 3 zamieszczony poniżej.

Twierdzenie 2 można łatwo uogólnić poprzez indukcję matematyczną na przypadek N par macierzy.

5. Przykłady

1) Przykład ilustrujący twierdzenie 1:

Niech:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \det T = 2 \neq 0.$$

Wówczas macierz sterowalności W ma postać:

$$W = \left[B \mid AB\right] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 12 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{rz}W = 2.$$

Para (A,B) jest sterowalna, wobec tego na podstawie twierdzenia 1, para ($A \otimes T$, $B \otimes T$) jest też sterowalna, co można również łatwo sprawdzić przeprowadzając odpowiednie obliczenia:

$$A \otimes T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 12 & 9 \\ 8 & 4 & 4 & 2 \\ 16 & 12 & 8 & 6 \end{bmatrix} \qquad B \otimes T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 8 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$W_T = \left[B \otimes T \mid (A \otimes T)(B \otimes T) \mid (A \otimes T)^2\,(B \otimes T) \mid (A \otimes T)^3\,(B \otimes T)\right] \qquad \mathrm{rz}W_T = 4.$$

Para ($A \otimes T$, $B \otimes T$) jest więc sterowalna.

2) Przykład ilustrujący twierdzenie 2:

Niech:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Wówczas:

$$A \otimes F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad B \otimes G = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 4 & 12 & 36 & 108 \\ 8 & 48 & 288 & 1728 \end{bmatrix}.$$

Para $(A \otimes F,\ B \otimes G)$ jest więc parą sterowalną.

Na podstawie twierdzenia 2 sterowalne są także pary (A,B) oraz (F,G), co można sprawdzić obliczając rzędy ich macierzy sterowalności:

$$W_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} \quad \text{rz}W_A = 2 \qquad W_F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{rz}W_F = 2.$$

Pary (A,B) oraz (F,G) są parami sterowalnymi.

3) Kontrprzykład na twierdzenie odwrotne do twierdzenia 2:

Niech:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$W_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{rz}W_A = 2 \qquad W_F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{rz}W_F = 2.$$

Pary (A,B) oraz (F,G) są sterowalne.
Zgodnie z definicją iloczynu tensorowego mamy:

$$A \otimes F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad B \otimes G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 8 & 64 & 512 \end{bmatrix} \qquad \text{rz}W = 3.$$

Para $(A \otimes F,\ B \otimes G)$ jest więc parą niesterowalną, zatem twierdzenie odwrotne do twierdzenia 2 nie jest prawdziwe.

LITERATURA

1. R.E. Kalman - "Mathematical description of linear dynamical systems". J.SIAM Control ser. A, vol. 1, nr 2, str. 152-192. 1963.

2. R.E. Kalman, P.T. Falb, M.A. Arbib - "Topics in mathematical system teory". McGraw-Hill. New York. 1969.

3. H.H. Rosenbrock, C. Storey - "Mathematics of dynamical system". Nelson. London. 1970.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕНЗОРОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ МАТРИЦ ДО ИСПЫТАНИЯ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Р е з ю м е

В статье представлено понятие и фундаментальные свойства тензорого произведения матриц. На основе введенных понятий даются теоремы об управляемости линейных стационарных динамических систем.

APPLICATION THE TENSOR PRODUCT OF MATRICES TO INVESTIGATION CONTROLLABILITY DYNAMICAL SYSTEMS

S u m m a r y

In this paper the definitions and basic properties of the tensor product of matrices are presented. The theorems concerning controllability linear time-invariant dynamical systems, using introduced basic concepts are given.