ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1972

Seria: Automatyka z. 23 Nr kol. 353

Jerzy Klamka

Instytut Automatyki
Przemysłowej i Pomiarów

REGULARNA STEROWALNOŚĆ LINIOWYCH STACJONARNYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Streszczenie. W artykule podano definicję regularnej sterowalności oraz warunki konieczne i wystarczające regularnej sterowalności liniowych stacjonarnych układów dynamicznych. Przedstawiono także pewne topologiczne własności układów dynamicznych regularnie sterowalnych.

1. Wstęp

Pojęcie regularnej sterowalności jest szeroko wykorzystywane przy określaniu warunków koniecznych i wystarczających regularności zagadnień optymalizacyjnych, a tym samym ich jednoznaczności [1]. W związku z tym wydaje się celowe podanie pewnych topologicznych własności regularnie sterowalnych liniowych stacjonarnych układów dynamicznych, a także sprecyzowanie warunków przydatnych w badaniu regularnej sterowalności.

Niech będzie dany liniowy stacjonarny układ dynamiczny o równaniu stanu postaci:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{1}$$

gdzie $A(n\times n)$, $B(n\times m)$, są macierzami o stałych elementach

$x(t)\in R^n$, $u(t)\in R^m$

$u(\cdot)\in U$ klasa funkcji przedziałami ciągłych,

przy czym

$$B = \left[b_1 \middle| b_2 \middle| \cdots \middle| b_p \middle| \cdots \; b_m\right] \tag{2}$$

b_p p-ta kolumna macierzy B.

Definicja 1. Układ (1) jest regularnie sterowalny, jeśli każdy z układów:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + b_1u_1(t) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dot{x}(t) &= Ax(t) + b_pu_p(t) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dot{x}(t) &= Ax(t) + b_mu_m(t)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

jest całkowicie sterowalny.

W oparciu o definicję 1 oraz na podstawie znanych twierdzeń dotyczących całkowitej sterowalności liniowych stacjonarnych układów dynamicznych [4], można podać następujący warunek konieczny i wystarczający regularnej sterowalności [1]:

Twierdzenie 1. Układ (1) jest regularnie sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $p = 1,2,\dots,m$ zachodzi:

$$\det W_p = \det\left[b_p \,|\, Ab_p \,|\, A^2b_p \,|\, \dots \,|\, A^{n-1}b_p\right] \neq 0. \tag{4}$$

Oczywiście każdy układ regularnie sterowalny jest całkowicie sterowalny, natomiast stwierdzenie odwrotne jest fałszywe, to znaczy nie każdy układ całkowicie sterowalny jest regularnie sterowalny (patrz przykład 1, 3 i 5).

Wprowadzamy następujące oznaczenia:

λ_i $i = 1,2,\dots,k$ $(k \leq n)$ wartość własna macierzy A o krotności n_i.

ν_i $i = 1,2,\dots, k$ $(k \leq n)$ indeks wartości własnej λ_i.

$\varphi(\lambda)$ wielomian charakterystyczny macierzy A.

$\psi(\lambda)$ minimalny wielomian zerujący macierzy A.

Ponieważ regularna sterowalność jest niezmiennikiem liniowych nieosobliwych przekształceń [1], więc zamiast układu (1) można rozpatrywać równoważny mu układ o równaniu:

$$\dot{z}(t) = Jz(t) + Gu(t), \tag{5}$$

gdzie $x(t) = Tz(t)$, $T(n \times n)$ macierz nieosobliwa $J = T^{-1}AT$, J kanoniczna forma Jordana macierzy A.

$$G = T^{-1}B.$$

Macierz J można przedstawić w postaci:

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{J_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{J_i} & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & \boxed{J_k} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

gdzie J_i $i = 1,2,\ldots,k$ blok Jordana o wymiarze $(n_i \times n_i)$, odpowiadający wartości własnej λ_i.

Blok Jordana J_i jest postaci:

$$J_i = \begin{bmatrix} \boxed{J_{i1}} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{J_{ij}} & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & \boxed{J_{i\alpha_i}} \end{bmatrix} \qquad i = 1,2,\ldots,k, \tag{7}$$

gdzie J_{ij} $i = 1,2,\ldots,k$ $j = 1,2,\ldots,\alpha_i$ klatka Jordana o wymiarze $(\beta_{ij} \times \beta_{ij})$.

α_i ilość klatek Jordana odpowiadających wartości własnej λ_i.

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \lambda_i & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\ldots,k \\ j = 1,2,\ldots,\alpha_i . \end{array} \tag{8}$$

Wymiar β_{ij} klatki Jordana J_{ij} spełnia nierówność [6] następującą:

$$\beta_{ij} \leqslant \nu_i \neq 0 \qquad i = 1,2,\ldots,k \qquad j = 1,2,\ldots,\alpha_i . \tag{9}$$

2. Regularna sterowalność liniowych stacjonarnych układów dynamicznych

Twierdzenie 2. Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby układ (1) był regularnie sterowalny, jest aby:

$$\eta_i = \nu_i \qquad \text{dla każdego} \quad i = 1,2,\ldots,k \tag{10}$$

oraz, żeby wiersze macierzy G odpowiadające ostatnim wierszom klatek Jordana w macierzy J nie zawierały elementów zerowych.

Dowód. Na mocy poprzednich uwag można zamiast układu (1) rozpatrywać równoważny mu układ (5). Wiadomo [2], że warunkiem koniecznym i wystarczającym sterowalności układu (5), a tym samym układu (1), jest aby wiersze macierzy G odpowiadające ostatnim wierszom klatek Jordana macierzy J, były dla poszczególnych bloków Jordana liniowo niezależne.

Zgodnie z definicją 1 układ (5) jest regularnie sterowalny, jeśli dla każdego $p = 1,2,\ldots,m$ układy:

$$\dot{z}(t) = Jz(t) + g_p u_p(t) \tag{11}$$

są całkowicie sterowalne.

Stosując do układu (11) podane powyżej warunki sterowalności mamy: warunkiem koniecznym i wystarczającym sterowalności układu (11) jest, aby każdy blok Jordana składał się tylko z jednej klatki Jordana oraz, żeby odpowiadające ostatnim wierszom tych klatek elementy wektora kolumnowego g_p były różne od zera. Ponieważ ma to zachodzić dla każdego $p=1,2,\ldots,m$, więc wiersze macierzy G odpowiadające ostatnim wierszom klatek Jordana w macierzy J nie mogą zawierać elementów zerowych.
Wiadomo [6], że jeżeli każdy blok Jordana składa się wyłącznie z jednej klatki Jordana, to wówczas zachodzi równość:

$$\varphi(\lambda) \equiv \psi(\lambda). \tag{12}$$

Opierając się na definicji indeksu wartości własnej i biorąc pod uwagę równość (12) otrzymujemy:

$$\eta_i = \nu_i \quad \text{dla każdego } i = 1,2,\ldots,k, \tag{13}$$

co kończy dowód twierdzenia

c.b.d.o.

Wniosek 1. Jeżeli macierz A posiada wyłącznie pojedyncze wartości własne, to warunkiem koniecznym i wystarczającym regularnej sterowalności układu (1) jest, aby macierz G nie zawierała elementów zerowych.

Dowód. Jeżeli macierz A posiada wyłącznie pojedyncze wartości własne to wówczas:

$$\varphi(\lambda) \equiv \psi(\lambda) \tag{14}$$

oraz zachodzi równość:

$$\eta_i = \nu_i = 1 \quad \text{dla każdego } i = 1,2,\ldots,n. \tag{15}$$

Macierz J jest w tym przypadku macierzą diagonalną, a każdy element na przekątnej głównej jest jednowymiarowym blokiem Jordana. Stąd na podstawie twierdzenia 2 otrzymujemy, że warunkiem koniecznym i wystarczającym regularnej sterowalności układu (1) jest, aby macierz G nie zawierała elementów zerowych.

c.b.d.o.

3. Topologiczne własności liniowych stacjonarnych układów dynamicznych regularnie sterowalnych

Niech $M_{nm}(R)$ będzie zbiorem wszystkich macierzy o wymiarach (nxm), i elementach należących do ciała R. Każdą macierz typu (nxm) można interpretować jako wektor w przestrzeni R^{nm}, którego składowymi są elementy macierzy ustawione w ciąg według dowolnie obranego porządku. Jeżeli w zbiorze $M_{nm}(R)$ wprowadzimy topologię określoną przez normę, to przestrzeń topologiczna $M_{nm}(R)$ będzie homeomorficzna z przestrzenią R^{nm}.

Rozważmy układ dynamiczny o równaniu stanu postaci:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \tag{16}$$

gdzie

A(nxn) macierz o stałych elementach,

b(nx1) wektor o stałych elementach.

W oparciu o znane twierdzenia topologiczne [5], w pracy [3] podano następujące twierdzenie charakteryzujące własności układu (16):

Twierdzenie 3. Jeżeli układ (16) jest sterowalny, to istnieją otoczenia V macierzy A oraz Q wektora b, takie że dla każdej macierzy $A_v \in V$ oraz dla każdego wektora $b_q \in Q$, układ:

$$\dot{x}(t) = A_v x(t) + b_q u(t) \tag{17}$$

jest sterowalny.

Biorąc pod uwagę twierdzenie 3 oraz pewne twierdzenia z dziedziny topologii można sformułować twierdzenie i wnioski dotyczące topologicznych własności regularnie sterowalnych liniowych stacjonarnych układów dynamicznych.

Twierdzenie 4. Jeżeli układ (1) jest regularnie sterowalny, to istnieje otoczenie V macierzy A oraz Q macierzy B takie, że dla każdej macierzy $A_v \in V$ oraz każdej macierzy $B_q \in Q$, układ:

$$\dot{x}(t) = A_v x(t) + B_q u(t) \tag{18}$$

jest regularnie sterowalny.

Dowód. Jeżeli układ (1) jest regularnie sterowalny, to na mocy definicji 1, twierdzenie 3 zachodzi dla każdego układu postaci (3).
Niech: $V_1, V_2, \ldots, V_p, \ldots, V_m$ oraz $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p, \ldots, Q_m$ oznaczają wynikające z tezy twierdzenia 3, odpowiednie otoczenia macierzy A i wektorów $b_1, b_2, \ldots, b_p, \ldots, b_m$ dla układów postaci (3).
Otoczenia V oraz Q określone przez relacje:

$$V = V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_p \cap \ldots \cap V_m \tag{19}$$

$$Q = Q_1 \times Q_2 \times \ldots \times Q_p \times \ldots \times Q_m \tag{20}$$

spełniają wszystkie wymagania zawarte w tezie twierdzenia. Zatem istnienie odpowiednich otoczeń zostało wykazane.

c.b.d.o.

Wniosek 2. Jeżeli macierz A jest nieosobliwa, to otoczenie V może być tak wybrane, żeby zawierało jedynie macierze nieosobliwe.

Dowód. Niech V_o będzie dowolnym otoczeniem macierzy A spełniającym tezę twierdzenia 4. Ponieważ zbiór macierzy nieosobliwych $M_{n^2}(R)_o$ jest zbiorem otwartym w R^{n^2} [3], więc otoczenie V postaci:

$$V = V_o \cap M_{n^2}(R)_o \tag{21}$$

zawiera jedynie macierze nieosobliwe.

c.b.d.o.

Wniosek 3. Jeżeli układ (1) jest regularnie sterowalny oraz macierz A jest ustalona, to istnieje otoczenie Q macierzy B w przestrzeni R^{nm} mające kształt stożka obrotowego o wierzchołku w zerze, którego osią jest półprosta wychodząca z zera i przechodząca przez punkt reprezentujący macierz B.

Dowód. Jeżeli układ (1) jest regularnie sterowalny, to również układ:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + rBu(t), \tag{22}$$

gdzie

r - dowolna liczba rzeczywista różna od zera.

jest regularnie sterowalny.
Stąd każdy punkt przestrzeni R^{nm} leżący na prostej przechodzącej przez zero i punkt określony macierzą B, (za wyjątkiem punktu zero) reprezentuje sobą macierz rB, dla której układ (22) jest regularnie sterowalny. Na mocy twierdzenia 4 oraz podstawowych własności otoczeń w przestrzeniach metrycznych [5] otrzymujemy tezę wniosku 3.

c.b.d.o.

Wniosek 4. Jeżeli macierz A jest ustalona, to zbiór wszystkich macierzy B, dla których układ (1) jest regularnie sterowalny, jest zbiorem otwartym w przestrzeni R^{nm}, natomiast zbiór wszystkich macierzy B, dla których układ (1) nie jest regularnie sterowalny, jest zbiorem jednospójnym i domkniętym w przestrzeni R^{nm}.

Dowód. Fakt, że zbiór wszystkich macierzy B, dla których układ (1) jest regularnie sterowalny, jest zbiorem otwartym w przestrzeni R^{nm} wynika natychmiast z twierdzenia 4 oraz z definicji zbioru otwartego [5]. Oczywiście wówczas zbiór wszystkich macierzy B, dla których układ (1) nie jest regularnie sterowalny, jako dopełnienie zbioru otwartego, musi być zbiorem domkniętym w przestrzeni R^{nm}. Jednospójność tego zbioru wynika z faktu, że jeżeli dla pewnej macierzy B układ (1), nie jest regularnie sterowalny, to także dla każdej macierzy leżącej na prostej przechodzącej przez zero i punkt reprezentujący macierz B w przestrzeni R^{nm}, układ (1) nie jest regularnie sterowalny.

c.b.d.o.

4. Przykłady

1) Niech:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

$$W = [B|AB] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 43 & 10 \\ 7 & 1 & 17 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{rz } W = 2$$

$$W_1 = [b_1|Ab_1] = \begin{bmatrix} 5 & 43 \\ 7 & 17 \end{bmatrix} \qquad \text{rz } W_1 = 2$$

$$W_2 = [b_2|Ab_2] = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{rz } W_2 = 1.$$

Układ o macierzach (23) jest sterowalny, ale nie jest regularnie sterowalny.

2) Niech:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 8 & -7 & -7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 8 \end{bmatrix} \tag{24}$$

$\varphi(\lambda) = (\lambda + 2)^2 (\lambda + 3)$

$\lambda_1 = 2 \qquad n_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 3 \qquad n_2 = 1$

$\psi(\lambda) = (\lambda + 2)^2 (\lambda + 3) \qquad \nu_1 = 2 \qquad \nu_2 = 1$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$J = T^{-1} AT = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad G = T^{-1} B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ są spełnione założenia twierdzenia 2, więc, układ o macierzach (24) jest regularnie sterowalny, co można sprawdzić obliczając rzędy odpowiednich macierzy sterowalności:

$$W_1 = \left[b_1 \,\vdots\, Ab_1 \,\vdots\, A^2 b_1 \right] = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 18 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & -11 & 28 \end{bmatrix} \qquad \text{rz } W_1 = 3$$

$$W_2 = \left[b_2 \,\vdots\, Ab_2 \,\vdots\, A^2 b_2 \right] = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 9 \\ 0 & -3 & 12 \\ 5 & -3 & -6 \end{bmatrix} \qquad \text{rz } W_2 = 3$$

$$W_3 = \left[b_3 \,\vdots\, Ab_3 \,\vdots\, A^2 b_3 \right] = \begin{bmatrix} 5 & -11 & 27 \\ 0 & -2 & 8 \\ 8 & -16 & 38 \end{bmatrix} \qquad \text{rz } W_3 = 3.$$

Układ o macierzach (24) jest regularnie sterowalny.

3) Niech:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 8 & -7 & -7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 3 \\ -3 & -1 & -2 \\ 14 & 9 & 8 \end{bmatrix} \tag{25}$$

$\varphi(\lambda) = (\lambda + 2)^2 (\lambda + 3)$

$\lambda_1 = 2 \qquad n_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 3 \qquad n_2 = 1$

$\psi(\lambda) = (\lambda + 2)^2 (\lambda + 3) \qquad \nu_1 = 2 \qquad \nu_2 = 1$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$J = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad G = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ nie są spełnione założenia twierdzenia 2, więc układ o macierzach (25) nie jest regularnie sterowalny, co można sprawdzić obliczając rzędy odpowiednich macierzy sterowalności:

$$W_1 = \left[b_1 \,\vdots\, Ab_1 \,\vdots\, A^2b_1\right] = \begin{bmatrix} 7 & -12 & 21 \\ -3 & 3 & 0 \\ 14 & -22 & 30 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{rz} W_1 = 3$$

$$W_2 = \left[b_2 \,\vdots\, Ab_2 \,\vdots\, A^2b_2\right] = \begin{bmatrix} 5 & -10 & 22 \\ -1 & 0 & 4 \\ 9 & -16 & 32 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{rz} W_2 = 3$$

$$W_3 = \left[b_3 \,\vdots\, Ab_3 \,\vdots\, A^2b_3\right] = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 17 \\ -2 & 4 & -8 \\ 8 & -18 & 42 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{rz} W_3 = 2.$$

Układ o macierzach (25) nie jest regularnie sterowalny, ale jest oczywiście sterowalny.

4) Niech:

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 1 & 5 \\ -6 & -1 & 4 \\ -8 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$\varphi(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3)$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad n_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 2 \qquad n_2 = 1 \qquad \lambda_3 = 3 \qquad n_3 = 1$$

$$\Psi(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3)$$

$$\nu_1 = 1 \qquad \nu_2 = 1 \qquad \nu_3 = 1$$

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$J = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad G = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -4 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ są spełnione założenia wniosku 1, więc układ o macierzach (26) jest regularnie sterowalny, co można sprawdzić obliczając rzędy odpowiednich macierzy sterowalności:

$$W_1 = \left[b_1 \,\middle|\, Ab_1 \,\middle|\, A^2b_1\right] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -22 \\ 3 & -1 & -11 \\ 2 & 3 & -21 \end{bmatrix} \qquad \text{rz } W_1 = 3$$

$$W_2 = \left[b_2 \,\middle|\, Ab_2 \,\middle|\, A^2b_2\right] = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 27 \\ 3 & -11 & 33 \\ -2 & -5 & 25 \end{bmatrix} \qquad \text{rz } W_2 = 3$$

$$W_3 = \left[b_3 \,\middle|\, Ab_3 \,\middle|\, A^2b_3\right] = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 21 \\ 0 & -2 & 12 \\ 4 & -8 & 22 \end{bmatrix} \qquad \text{rz } W_3 = 3.$$

Układ o macierzach (26) jest regularnie sterowalny.

5) Niech:

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 1 & 5 \\ -6 & -1 & 4 \\ -8 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 0 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix} \tag{27}$$

$\varphi(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3)$

$\lambda_1 = 1 \qquad n_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 2 \qquad n_2 = 1 \qquad \lambda_3 = 3 \qquad n_3 = 1$

$\Psi(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3)$

$\nu_1 = 1 \qquad \nu_2 = 1 \qquad \nu_3 = 1$

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$J = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad G = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Ponieważ nie są spełnione założenia wniosku 1, więc układ o macierzach (27) nie jest regularnie sterowalny, co można sprawdzić obliczając rzędy odpowiednich macierzy sterowalności:

$$W_1 = \left[b_1 \,\vdots\, Ab_1 \,\vdots\, A\ b_1\right] = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 14 \\ 7 & -13 & 25 \\ 6 & -9 & 15 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{rz}\ W_1 = 2$$

$$W_2 = \left[b_2 \,\vdots\, Ab_2 \,\vdots\, A^2b_2\right] = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 27 \\ 3 & -11 & 33 \\ -2 & -5 & 25 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{rz}\ W_2 = 3$$

$$W_3 = \left[b_3 \,\vdots\, Ab_3 \,\vdots\, A^2b_3\right] = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 21 \\ 0 & -2 & 12 \\ 4 & -8 & 22 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{rz}\ W_3 = 3.$$

Układ o macierzach (27) nie jest regularnie sterowalny, ale jest oczywiście sterowalny.

LITERATURA

1. Athans M., Falb P. - "Sterowanie optymalne, wstęp do teorii i jej zastosowania". WNT Warszawa 1969.
2. Chen C., Desoer C. - "Controllability and observability of composite systems". I.E.E.E. Transactions on Automatic Control. 4. 1967.
3. Chu H. - "Some topological properties of complete controllability" I.E.E.E. Transactions on Automatic Control. vol. AC-11. 3.1966.
4. R.E. Kalman, Falb P., Arbib M. - "Topics in mathematical system theory". McGraw-Hill. New York 1969.
5. Kuratowski K. - "Wstęp do teorii mnogości i topologii". PWN Warszawa 1966.
6. Rosenbrock H., Storey C. - "Mathematics of dynamical system". Nelson. London 1970.

РЕГУЛЯРНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Р е з ю м е

В статье представлено понятие регулярной управляемости, и необходимые и достаточные условия регулярной управляемости линейных стационарных динамических систем. Предложено некоторые топологические свойства динамических систем регулярно управляемых.

REGULAR CONTROLLABILITY LINEAR TIME-INVARIANT DYNAMICAL SYSTEMS

S u m m a r y

In this paper the definition regular controllability and necessary and sufficient conditions for regular controllability linear time invariant dynamical systems are given. Some topological properties of regular controllability linear dynamical systems are presented.