

Konrad WOJCIECHOWSKI

WYZNACZANIE STANU LINIOWEGO OBIEKTU DYNAMICZNEGO
NA PODSTAWIE ZADANEGO HORYZONTU OBSERWACJI

Streszczenie. Praca dotyczy zadania bieżącego wyznaczanie stanu liniowego obiektu dynamicznego, na podstawie pomiarów jego wejścia $u(s)$ i wyjścia $z_o(s)$. Przyjmuje się kwadratowy wskaźnik jakości, określony na przedziale $[t - b, t]$, gdzie t jest bieżącą chwilą czasu. Wskaźnik ten pozwala na wyznaczanie stanu w przypadkach, gdy równania modelu nie są dokładnie znane. Syntezę układu wyznaczania stanu przeprowadza się w oparciu o równanie Hamiltona-Jacobi. Otrzymany w wyniku syntezy układ wyznaczania stanu przechodzi dla $b = t - t_p$ w równania filtru Kalmana-Bucy w wersji ciągłej.

1. Wstęp

Zadanie bieżącego wyznaczania stanu obiektu dynamicznego sformułowane i rozwiązane w pracy różni się od zadania klasycznego rozwiązane przez Kalmana i Bucy przyjętym wskaźnikiem.

W zadaniu klasycznym przyjęto wskaźnik określony na przedziale $[t_p, t]$, gdzie t_p jest chwilą rozpoczęcia procesu wyznaczania stanu, zaś t chwilą bieżącą. Chwila t_p jest ustalona. W pracy rozpatruje się wskaźnik określony na przedziale $[t - b, t]$, gdzie b jest szerokością przedziału. W przypadku ogólnym szerokość przedziału może być funkcją bieżącej chwili czasu t .

Potrzeba rozwiązania zadania wyznaczania stanu dla tak przyjętego wskaźnika występuje w przypadkach, gdy równania modelu, w oparciu o które przeprowadza się wyznaczanie stanu, nie w pełni odpowiadają równaniom obiektu dynamicznego, na którym dokonuje się pomiarów wejścia $u(s)$ i wyjścia $z_o(s)$. Uwzględnienie zbyt odległych pomiarów może prowadzić do błędnego wyznaczenia stanu.

Rozwiązanie postawionego zadania przeprowadzone jest przy wykorzystaniu metod teorii sterowania optymalnego, a w szczególności teorii Hamiltona-Jacobi. Pozwala to na podkreślenie dualności między zadaniami wyznaczania stanu i sterowania optymalnego. Podejście takie pociągnęło za sobą dużą pracochłonność długich aczkolwiek prostych, wyprowadzeń. Wyprowadzenia te zostały zamieszczone w Dodatku 6.

Układ równań pozwalający na wyznaczanie stanu, otrzymany w wyniku rozwiązania zadania, posiada strukturę podobną do struktury równań filtru Kalmana-Bucy, i przechodzi w te równania przy podstawieniu $b = t - t_p$.

Rozszerzenie sformułowania zadania wyznaczania stanu w stosunku do klasycznego pociągnęło za sobą wzrost trudności obliczeniowych przy realizacji otrzymanych równań. Podstawowa z nich polega na pojawieniu się konieczności całkowania równań różniczkowych w kierunku przeciwnym do biegu czasu. Możliwości uproszczenia procedury wyznaczania stanu występują w przypadku modelu stacjonarnego. Zagadnieniu temu poświęcony jest przykład.

2. Sformułowanie zadania

Zadanie bieżącego wyznaczania stanu na podstawie modelu i pomiarów wejścia $u(s)$ i wyjścia $z_o(s)$ może być sformułowane następująco:

Zadanie 1

Wyznaczyć w chwili bieżącej t stan x obiektu dynamicznego na podstawie pomiarów wejścia $u(s)$ i wyjścia $z_o(s)$ oraz modelu opisanego równaniem:

$$dx/ds = A(s)x + B(s)w_m(s)$$

$$y = C(s)x$$

W tym celu dla wskaźnika:

$$x_o[x, w_m(\cdot), t] = \frac{1}{2} \int_{t-b}^t \left\{ \|z_o(s) - y(s)\|_{P(s)}^2 + \|w_m(s) - u(s)\|_{R(s)}^2 \right\} ds$$

należy 1) przyjmując, że dla $s < t$ dane jest sterowanie $w_m(s)$ w funkcji stanu wyznaczyć również w funkcji stanu sterowania $w_m(t)$. Sterowanie to powinno minimalizować szybkość zmian wskaźnika jakości (co prowadzi do minimalizacji wskaźnika), 2) wyznaczyć stan x w chwili t minimalizujący wskaźnik jakości, otrzymany po podstawieniu wyrażenia na $w_m(s)$ w funkcji stanu do wskaźnika pierwotnego.

W rozpatrywanym wskaźniku $P(s)$, $R(s)$ są dodatnio określonymi macierzami wag, $y(s)$ wyjście modelu odpowiadające warunkowi końcowemu x w chwili t a $w_m(\cdot)$ funkcja czasu określona na przedziale $[t - b, t]$, a $\| \cdot \|_A^2 = a'A a$, symbol $'$ oznacza transpozycję.

Zadanie 1 może być dla uproszczenia przeformułowane do następującej postaci wtórnej.

Zadanie 2

Wyznaczyć w chwili t stan x obiektu dynamicznego na podstawie pomiaru jego wyjścia $z_0(s)$ oraz modelu

$$\begin{aligned} dx/ds &= A(s)x + B(s)w \\ y &= C(s)x \end{aligned} \quad (1)$$

Należy minimalizować ze względu na x w chwili t oraz $w(t)$ następujący wskaźnik:

$$x_0[x, w(\cdot), t] = \frac{1}{2} \int_{t-b}^t \left\{ \|z(s) - y(s)\|_{P(s)}^2 + \|w(s)\|_{R(s)}^2 \right\} ds, \quad (2)$$

gdzie

$$z(s) = z_0(s) - C(s) \int_{t_p}^s \Phi(s, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau,$$

$\Phi(s, \tau)$ macierz tranzycji modelu (1).

Występujący w równaniach modelu (1) składnik $w = w_m - u$, przedstawia różnicę między sterowaniem zastosowanym w modelu, a zmierzonym na obiekcie.

Dalsze rozważania wraz z synteza układu wyznaczania stanu przeprowadza się dla równania (1) i wskaźnika (2).

Sterowanie u może być uwzględnione w układzie wyznaczania stanu po dokonaniu jego syntezy, jako wymuszenie. Poprawność takiego postępowania jest uzasadniona w Dodatku 6.

3. Równanie powierzchni optymalnej jakości

Dla rozwiązania sformułowanego zadania, tj. minimalizacji wskaźnika (2) ze względu na $w(t)$, x przy ograniczeniach w postaci równań (1) stosujemy metodę opartą na teorii H-J dotyczącą sterowania optymalnego.

Dodatkowe równanie opisujące zachowanie się wskaźnika (2) wzdłuż trajektorii układu (1) ma postać:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 = & \frac{1}{2} \left\{ \|z(t) - y(t)\|_{P(t)}^2 + \|w(t)\|_{R(t)}^2 \right\} - \\ & - \frac{1}{2} (1-b) \left\{ \|z(t-b) - y(t-b)\|_{P(t-b)}^2 + \|w(t-b)\|_{R(t-b)}^2 \right\} \end{aligned}$$

w dalszym ciągu będziemy oznaczać $1-b = a$.

Hamiltonian, dla rozpatrywanego zadania minimalizacji względem $w(t)$, ma postać:

$$\begin{aligned} H(x, \lambda, w, t, t-b) = & - \frac{1}{2} \left\{ \|z(t) - y(t)\|_{P(t)}^2 + \|w(t)\|_{R(t)}^2 \right\} + \\ & + \frac{1}{2} a \left\{ \|z(t-b) - y(t-b)\|_{P(t-b)}^2 + \|w(t-b)\|_{R(t-b)}^2 \right\} + \\ & + \langle \lambda, A(t)x + B(t)w \rangle \end{aligned}$$

Z warunku minimalizacji (4) względem $w(t)$ otrzymamy

$$w^0(x, \lambda, t) = R^{-1}(t) B'(t) \lambda \quad (5)$$

$$w^0(x, \lambda_{t-b}, t-b) = R^{-1}(t-b) B'(t-b) \lambda_{t-b} \quad (6)$$

Równanie H-J odpowiadające rozpatrywanemu zadaniu i opisujące zachowanie się wskaźnika jakości wzdłuż trajektorii optymalnej ma postać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_0}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial x_0}{\partial x}, A(t)x \right\rangle + \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial x_0}{\partial x} \right\|_{S(t)}^2 + \frac{1}{2} a \left\| \frac{x_0, t-b}{x_{t-b}} \right\|_{S(t-b)}^2 = \\ = \frac{1}{2} \|z(t) - y(t)\|_{P(t)}^2 - \frac{1}{2} a \|z(t-b) - y(t-b)\|_{P(t-b)}^2 \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie:

$$S(t) = B(t) R^{-1}(t) B'(t)$$

$$S(t-b) = B(t-b) R^{-1}(t-b) B'(t-b)$$

$$x_0 = \frac{1}{2} \| x - \hat{x}(t) \|_{K(t)}^2 = \frac{1}{2} \langle x, K(t)x \rangle - \langle x, r(t) \rangle + d(t) \quad (8)$$

$$x_{0,t-b} = \frac{1}{2} \| x_{t-b} - \hat{x}(t-b) \|_{K(t-b)}^2 = \frac{1}{2} \langle x_{t-b}, K(t-b)x_{t-b} \rangle - \langle x_{t-b}, r(t-b) \rangle + d(t-b) \quad (9)$$

$\hat{x}(t)$, $K(t)$, są pewnymi niezależnymi od x funkcjami czasu t . Celem dalszych rozważań jest określenie równań opisujących te funkcje przez znalezienie równań dla $r(t) = K(t)\hat{x}(t)$ oraz $d(t) = \frac{1}{2} \langle \hat{x}(t), K(t)x(t) \rangle$.

Równania (8), (9) przedstawiają powierzchnię optymalnej jakości, będącą rozwiązaniem równania (7) w przypadku kwadratowego wskaźnika i liniowych równań (1) [1].

Stan x , x_{t-b} są związane ze sobą przez równanie trajektorii optymalnej. Trajektorię tę otrzymamy, wstawiając sterowanie (5) do (1). Po uwzględnieniu $\lambda = \partial x_0 / \partial x$, jest ona opisana równaniem

$$dx/ds = [A(s) + S(s)K(s)]x - S(s)r(s).$$

Równanie o odwróconym kierunku biegu czasu ma postać dla $s^* = -s$.

$$- dx/ds^* = A(-s^*) + S(-s^*)K(-s^*) x - S(-s^*)r(-s^*) \quad (10)$$

Wykorzystując równanie (10) można wyrazić stan x_t w chwili t przez stan x w chwili t .

W szczególności:

$$x_{t-b} = \Phi(t-b, t)x + \int_{t-b}^t \Phi(t-b, s)S(s)r(s)ds,$$

gdzie: $\Phi(t-b, t) = \Phi[-(t-b), -t]$ a ta ostatnia jest macierzą tranzycji równania (10).

Część wymuszoną rozwiązania będziemy w dalszym ciągu dla skrócenia zapisu oznaczać przez $v(t-b)$.

Dla podobnych powodów rozwiązanie równania (10) z warunkiem początkowym $\hat{x}(t)$ wzięte w chwili $t-b$ będziemy oznaczać $\tilde{x}(t-b)$.

$$\tilde{x}(t-b) = \Phi(t-b, t)\hat{x}(t) + \int_{t-b}^t \Phi(t-b, s)S(s)r(s)ds \quad (11)$$

4. Synteza układu wyznaczania stanu

Dla przeprowadzenia syntezy układu wyznaczania stanu należy znaleźć powierzchnię $x_0(x, t)$ będącą rozwiązaniem równania (7) a następnie dokonać minimalizacji względem x .

W przypadku liniowych równań (1) i kwadratowego wskaźnika jakości powierzchni tak jak już to zostało wspomniane w p. 3 może być przedstawiona ze pomocą form kwadratowych (8), (9), zmiennych x_{t-b} , x związanych przez równanie trajektorii (10).

Do określenia pozostają jedynie funkcje $K(t)$, $r(t)$, $d(t)$. Równanie różniczkowe cząstkowe (7) sprowadza się do układu równań zwyczajnych, określających powyższe funkcje.

Otrzymujemy je przez podstawienie form kwadratowych (8), (9), po uwzględnieniu związku (10) między x , x_{t-b} za x_0 , $x_{0,t-b}$ do równania (7) i porównanie wyrażeń przy jednakowych potęgach zmiennej x . Wyprowadzenie jest zamieszczone w Dodatku p. 1. Otrzymane równania opisujące funkcje czasu $K(t)$, $r(t)$, $d(t)$ mają postać:

$$\begin{aligned} \dot{K} = & -K(t)A(t) - A'(t)K(t) - K(t)S(t)K(t) + C'(t)P(t)C(t) - \\ & - a\phi'(t-b, t)[K(t-b)S(t-b)K(t-b) + C'(t-b)P(t-b)C(t-b)] \cdot \\ & \cdot \phi(t-b, t) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \dot{r} = & -[A'(t) + K(t)S(t)]r(t) + C'(t)P(t)z(t) + \\ & + a\phi'(t-b, t)\{K(t-b)S(t-b)[K(t-b)v(t-b) - r(t-b)] - \\ & - C'(t-b)P(t-b)[z(t-b) - C(t-b)v(t-b)]\} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \dot{d} = & \frac{1}{2} \|z(t)\|_{P(t)}^2 - \frac{1}{2} \|r(t)\|_{S(t)}^2 - \frac{1}{2} a \|z(t-b) - C(t-b)v(t-b)\|_{P(t-b)}^2 \\ & - \frac{1}{2} a \|K(t-b)v(t-b) - r(t-b)\|_{S(t-b)}^2 \end{aligned}$$

Dokonując minimalizacji (8) względem x , otrzymamy z warunku $\partial x_0 / \partial x = 0$ i założenia o dodatniej określoności $K(t)$ poszukiwany stan $\hat{x}(t)$, będący rozwiązaniem zadania

$$\hat{x}(t) = K^{-1}(t)r(t). \quad (15)$$

Wykorzystując (14) można równanie (13) przekształcić tak, by określało wprost poszukiwany stan $\hat{x}(t)$. W tym celu posłużymy się tożsamością:

$$K(t)\dot{\hat{x}}(t) = \dot{r}(t) - \dot{K}(t)\hat{x}(t)$$

po przekształceniach zamieszczonych w Dodatku p. 6.2, otrzymamy:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} = & A(t)\hat{x} + K^{-1}(t) \left\{ C'(t)P(t)[z(t) - C(t)\hat{x}(t)] - \right. \\ & - a\phi'(t-b, t) \left[K(t-b)S(t-b)K(t-b)[\hat{x}(t-b) - \bar{x}(t-b)] + \right. \\ & \left. \left. + C'(t-b)P(t-b)[z(t-b) - C(t-b)\bar{x}(t-b)] \right] \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

Podobnie równanie (14) wykorzystując tożsamość

$$\dot{d} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \langle \hat{x}(t), K(t)\hat{x}(t) \rangle + x_0(t) \right]$$

można przekształcić do postaci:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_0 = & \frac{1}{2} \| z(t) - C(t)\hat{x}(t) \|_{P(t)}^2 - \frac{1}{2} a \| z(t-b) - C(t-b)\bar{x}(t-b) \|_{P(t-b)}^2 - \\ & - \frac{1}{2} a \| K(t-b)\bar{x}(t-b) - r(t-b) \|_{S(t-b)}^2 \end{aligned} \quad (17)$$

Otrzymane równania (12), (13), (14) określające $K(t)$, $r(t)$, $d(t)$ oraz równoważne im równania (12), (16), (17) są równaniami różniczkowymi z opóźnieniem b , wielkość którego w rozpatrywanym przypadku ogólnym jest funkcją bieżącej chwili czasu t . W dalszym ciągu będziemy zajmować się jedynie równaniami (12), (16), (17).

Dla ich rozwiązania potrzebna jest znajomość funkcji początkowej na odcinku $[t_p, t_p+b]$, gdzie t_p jest chwilą początkową.

Funkcje te można otrzymać przez rozwiązanie równań (12), (16), przy założeniu $b = t - t_p$, $t \in [t_p, t_p+b]$.

Równania na rozpatrywanym odcinku nie zawierają opóźnień, ponieważ $a = 0$ i do ich rozwiązania wystarczy znajomość warunków początkowych.

Równaniu (16) opisującemu wyznaczany stan można nadać następującą interpretację:

Układ wyznaczania stanu, w przypadku wskaźnika określonego na przedziale $[t-b, t]$ stanowi model objęty sprzężeniem zwrotnym od błędu między wyjściem tego układu i obiektu w chwili t , w chwili $t-b$ oraz błędu stanu w chwili $t-b$.

Dla porównania klasyczny układ wyznaczania stanu, którego przykładem jest filtr K-B, posiada sprzężenie zwrotne jedynie od błędu między wyj-

ściem układu wyznaczenia stanu i obiektu w chwili t . Podstawiając w równaniach (12), (16), (17) $b = t - t_p$, co oznacza przyjęcie klasycznego horyzontu obserwacji, otrzymamy $a \equiv 0$ i w konsekwencji równania te przechodzą formalnie w równania filtru K-B dla nieskorelowanych ze sobą zakłóceń na wejściu i wyjściu obiektu [3].

Numeryczne wyznaczanie stanu przez wykorzystanie równań (16), (12), (17) oraz równania (10) wymaga w ogólnym przypadku dyskretyzacji równania (16) co związane jest z różnym od zera czasem rozwiązywania równania (10) i koniecznością wyznaczania $\Phi(t-b, t)$. Równanie (12) może być rozwiązane niezależnie od równań (16), (10). Dodatkowo wymagane jest pamiętanie rozwiązań $K(t)$, $\hat{x}(t)$ na odcinku b .

5. Przykład

W przypadku szczególnym, gdy równania (1) modelu są stacjonarne, zaś równanie (12) posiada stan ustalony, możliwe jest uproszczenie równań (12), (16) pozwalających na wyznaczanie stanu.

Przypadek ten rozpatrzmy jako przykład ilustrujący rozwiązane zadanie wyznaczania stanu oraz jego różnicę w stosunku do zadania klasycznego.

Niech równanie modelu ma postać

$$\dot{x} + cw = w_m \quad c > 0 \quad (18)$$

$$y = x$$

Dokonyjemy pomiaru w_m i x , wyniki pomiarowe oznaczymy odpowiednio przez u , z .

Odpowiednie macierze zgodne z oznaczeniami pracy mają następujące postacie:

$$A = [-c], \quad B = [1], \quad C = [1], \quad P = [1], \quad K = [k]$$

$$a) R = [1], \quad b) R = [\infty]$$

szerokość przedziału obserwacji jest stała i wynosi b .

Równanie (10) opisujące trajektorię optymalną ma postać

$$- dx/ds^* = (-c+k)x - r(s^*) \quad (19)$$

jego macierz tranzycji $\Phi(t-b, t)$ wyraża się przy założeniu stałości k wzorem

$$\Phi(t-b, t) = e^{(c-k)b} \quad (20)$$

Wykorzystując możliwość analitycznego wyrażenia $\phi(t-b, t)$ wstawiamy (20) do równania (12) opisującego macierz K .

Ze względu na założenie stanu ustalonego, lewa strona tego równania jest tożsamościowo równa zeru $\dot{K} = 0$.

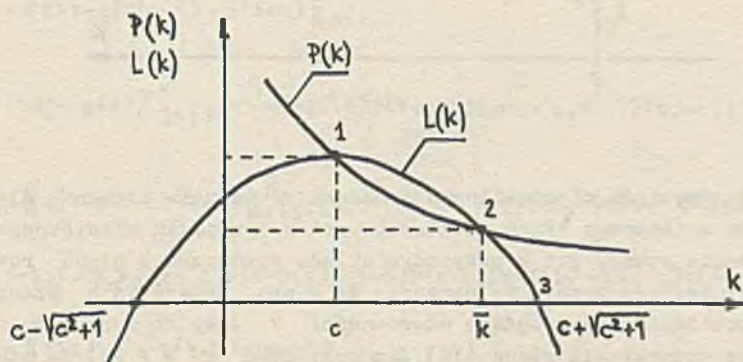
Po podstawieniu za $\phi(t-b, t)$ (20) i uwzględnieniu $\dot{K} = D$, otrzymamy dla a) $R = [1]$ równanie algebraiczne, pozwalające na wyznaczenie k . Ma ono postać:

$$-k^2 + 2kc + 1 = (k^2 + 1)e^{2(c-k)b} \quad (21)$$

Ze względu na to, że forma kwadratowa (8) posiada minimum, powinno być $k > 0$.

Zachowanie się lewej i prawej strony równania (21) w funkcji k przedstawia rys. 1.

Punkt 1 odpowiada niestabilnemu punktowi równowagi, punkt 2 stabilnemu, wyznacza on poszukiwaną wartość \bar{k} będącą rozwiązaniem równania (21).



k	$c - \sqrt{c^2 + 1}$	0	c	$c + \sqrt{c^2 + 1}$	$k \rightarrow \infty$
$L(k)$	0	1	$c^2 + 1$	0	$-\infty$
$P(k)$	-	e^{2cb}	$c^2 + 1$	-	0

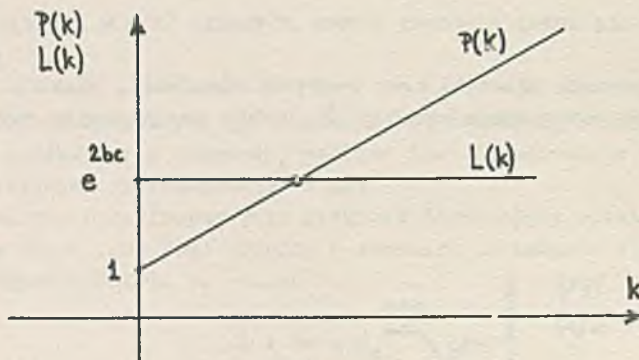
Rys. 1

Punkt 3 stanowi rozwiązanie równania (21) w przypadku klasycznym. Odpowiadająca mu wartość $1/\bar{k}_k$ jest mniejsza od wartości $1/\bar{k}$. Analizując wpływ zmiany szerokości przedziału obserwacji b na wartość k widzimy, że dla $b \rightarrow \infty$ $k \rightarrow \bar{k}_k$ i podobnie dla $b \rightarrow 0$, $k \rightarrow c$.

Dla przypadku b) $R = [\infty]$ równanie algebraiczne wyznaczające k w stanie ustalonym ma postać

$$2kc + 1 = e^{2bc} \quad (22)$$

ilustruje go rys. 2.



Rys. 2

Punkt 1 odpowiada niestabilnemu punktowi równowagi. Równanie dla $R = [\infty]$ nie posiada stabilnego stanu ustalonego ani w przypadku klasycznego układu wyznaczania stanu, ani w przypadku układu wyznaczania stanu rozpatrywanego w niniejszej pracy, co oznacza, że w obu przypadkach wzmocnienia układu wyznaczania stanu będące odwrotności k dąży do zera przy $t \rightarrow \infty$.

Równanie wyznaczania stanu (16) dla przypadku a) $R = [1]$ ma postać:

$$\dot{\hat{x}} = -c\hat{x} + u + \frac{1}{k} \left\{ [z(t) - \hat{x}(t)] - e^{(c-\bar{k})b} \left\{ k^{-2} [\bar{x}(t-b) - \tilde{x}(t-b)] + [z(t-b) - \tilde{x}(t-b)] \right\} \right\} \quad (23)$$

$$\tilde{x}(t-b) = e^{(c-\bar{k})b} \hat{x}(t) + \int_{t-b}^t e^{(c-\bar{k})s} \bar{k} \hat{x}(s) ds$$

6. Dodatek

6.1. Wyprowadzenie równań opisujących funkcje $K(t)$, $r(t)$, $d(t)$

Poszczególne składniki równania (7) po uwzględnieniu (8), (9), (10) są:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1}{2} \langle x, \dot{K}(t)x \rangle - \langle x, \dot{r}(t) \rangle + \dot{d}(t)$$

$$\left\langle \frac{\partial x}{\partial x}, A(t)x \right\rangle = \frac{1}{2} \langle x, [K(t)A(t) + A'(t)K(t)]x \rangle - \langle x, A'(t)r(t) \rangle$$

$$\frac{1}{2} \left\| \frac{\partial x}{\partial x} \right\|_{S(t)}^2 = \frac{1}{2} \langle x, K(t)S(t)K(t)x \rangle - \langle x, K(t)S(t)r(t) \rangle + \frac{1}{2} \|r(t)\|_{S(t)}^2$$

$$\frac{1}{2} a \left\| \frac{\partial x_{0,t-b}}{\partial x_{t-b}} \right\|_{S(t-b)}^2 = \frac{1}{2} a \langle x, \phi'(t-b,t)K(t-b)S(t-b)K(t-b)\phi(t-b,t)x \rangle +$$

$$+ a \langle x, \phi'(t-b,t)K(t-b)S(t-b)[K(t-b)v(t-b) - r(t-b)] \rangle +$$

$$+ \frac{1}{2} a \|K(t-b)v(t-b) - r(t-b)\|_{S(t-b)}^2$$

$$\frac{1}{2} \|z(t) - y(t)\|_{P(t)}^2 = \frac{1}{2} \langle x, C'(t)P(t)C(t)x \rangle - \langle x, C'(t)P(t)z(t) \rangle$$

$$- \frac{1}{2} a \|z(t-b) - y(t-b)\|_{P(t-b)}^2 = - \frac{1}{2} a \langle x, \phi'(t-b,t)C'(t-b)P(t-b)C(t-b) \cdot$$

$$\cdot \phi(t-b,t)x \rangle + a \langle x, \phi'(t-b,t)C'(t-b)P(t-b)[z(t-b) - C(t-b)v(t-b)] \rangle -$$

$$- \frac{1}{2} a \|z(t-b) - C(t-b)v(t-b)\|_{P(t-b)}^2$$

Porównując wyrażenia przy jednakowych potęgach x , otrzymamy równania określające $K(t)$, $r(t)$, $d(t)$ jako funkcje czasu.

$$\dot{K} = -K(t)A(t) - A'(t)K(t) - K(t)S(t)K(t) + C'(t)P(t)C(t) -$$

$$- a \phi'(t-b,t)[K(t-b)S(t-b)K(t-b) + C'(t-b)P(t-b)C(t-b)]\phi(t-b,t)$$

$$\begin{aligned} \dot{r} &= - [A'(t) + K(t)S(t)]r(t) + C'(t)P(t)z(t) + \\ &+ a\phi'(t-b, t) \left\{ K(t-b)S(t-b) [K(t-b)v(t-b) - r(t-b)] - \right. \\ &\left. - C'(t-b)P(t-b) [z(t-b) - C(t-b)v(t-b)] \right\} \\ \dot{d} &= \frac{1}{2} \|z(t)\|_{P(t)}^2 - \frac{1}{2} \|r(t)\|_{S(t)}^2 - \frac{1}{2} a \|z(t-b) - C(t-b)v(t-b)\|_{P(t-b)}^2 \\ &- \frac{1}{2} a \|K(t-b)v(t-b) - r(t-b)\|_{S(t-b)}^2 \end{aligned}$$

6.2. Wyprowadzenia równania dla $\hat{x}(t)$

Wykorzystując tożsamość:

$$K(t) \dot{\hat{x}} = \dot{r} - \dot{K} \hat{x}(t)$$

oraz $r(t) = K(t) \hat{x}(t)$, mamy:

$$\begin{aligned} K(t) \dot{\hat{x}} &= - [A'(t) + K(t)S(t)]K(t)\hat{x}(t) + C'(t)P(t)z(t) + \\ &+ a\phi'(t-b, t) \left\{ K(t-b)S(t-b) [K(t-b)v(t-b) - K(t-b)\hat{x}(t-b)] - \right. \\ &\left. - C'(t-b)P(t-b) [z(t-b) - C(t-b)v(t-b)] \right\} + \\ &- K(t)A(t)\hat{x}(t) + A'(t)K(t)\hat{x}(t) + K(t)S(t)K(t)\hat{x}(t) - C'(t)P(t)C(t)\hat{x}(t) + \\ &+ a\phi'(t-b, t) [K(t-b)S(t-b)K(t-b) + C'(t-b)P(t-b)C(t-b)] \cdot \\ &\cdot \phi(t-b, t) \hat{x}(t) \end{aligned}$$

grupując odpowiednie wyrazy, otrzymujemy

$$\begin{aligned} K(t) \dot{\hat{x}} &= K(t)A(t)\hat{x}(t) + C'(t)P(t) [z(t) - C(t)\hat{x}(t)] + \\ &- a\phi'(t-b, t) \left\{ K(t-b)S(t-b)K(t-b) [\hat{x}(t) - \phi(t-b, t)\hat{x}(t) - v(t-b)] + \right. \\ &\left. + C'(t-b)P(t-b) [z(t-b) - C(t-b)\phi(t-b, t)\hat{x}(t) - C(t-b)v(t-b)] \right\} \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu (11), tj.

$$\hat{x}(t-b) = \phi(t-b, t)\hat{x}(t-b) + v(t-b),$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} = & A(t)\hat{x}(t) + K^{-1}(t) \left\{ C(t)P(t)[z(t) - C(t)\hat{x}(t)] + \right. \\ & - a\phi'(t-b, t) \left[K(t-b)S(t-b)K(t-b)[\hat{x}(t-b) - \tilde{x}(t-b)] + \right. \\ & \left. \left. + C'(t-b)P(t-b)[z(t-b) - C(t-b)\tilde{x}(t-b)] \right] \right\} \end{aligned}$$

6.3. Wyprowadzenie równania dla $x_0(t)$

Wykorzystując tożsamość:

$$\dot{d} = \hat{x}'(t)K(t)\dot{\hat{x}}(t) + \frac{1}{2} \hat{x}'(t)\dot{K}(t)\hat{x}(t) + \dot{\hat{x}}_0$$

podstawiamy odpowiednie równania za $\hat{x}(t)$, $\dot{K}(t)$.

Mamy:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_0 = & - \hat{x}'(t)K(t)A(t)\hat{x}(t) - \hat{x}'(t)C'(t)P(t)[z(t) - C(t)\hat{x}(t)] + \\ & - a \hat{x}'(t)\phi'(t-b, t) \left\{ K(t-b)S(t-b)K(t-b)[\hat{x}(t) - \phi(t-b, t)\hat{x}(t) - v(t-b)] + \right. \\ & \left. + C'(t-b)P(t-b)[z(t-b) - C(t-b)\phi(t-b, t)\hat{x}(t) - C(t-b)v(t-b)] \right\} - \\ & + \hat{x}'(t)K(t)A(t)\hat{x}(t) + \frac{1}{2} \hat{x}'(t)K(t)S(t)K(t) - \frac{1}{2} \hat{x}'(t)C'(t)P(t)C(t)\hat{x}(t) + \\ & + \frac{1}{2} a \hat{x}'(t)\phi'(t-b, t) \left[K(t-b)S(t-b)K(t-b) + C'(t-b)P(t-b)C(t-b) \right] \cdot \\ & \cdot \phi(t-b, t)\hat{x}(t) - \frac{1}{2} \|z(t)\|_{P(t)}^2 - \frac{1}{2} \|r(t)\|_{S(t)}^2 + \\ & - \frac{1}{2} a \|z(t-b) - C(t-b)v(t-b)\|_{P(t-b)}^2 + \\ & - \frac{1}{2} a \|K(t-b)v(t-b) - r(t-b)\|_{S(t-b)}^2 \end{aligned}$$

grupując wyrazy i uwzględniając (11), otrzymamy:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_0 = & \frac{1}{2} \|z(t) - C(t)x(t)\|_{P(t)}^2 - \frac{1}{2} a \|z(t-b) - C(t-b)\hat{x}(t-b)\|_{P(t-b)}^2 + \\ & - \frac{1}{2} a \|K(t-b)\tilde{x}(t-b) - L(t-b)\hat{x}(t-b)\|_{S(t-b)}^2 \end{aligned}$$

6.4. Wyznaczanie stanu dla układu ze sterowaniem

Rozpatrzmy zadanie wyznaczania stanu układu dynamicznego, otrzymane z zadania 1 sformułowanego w p. 2 przez podstawienie $w_m = w + u$.

Równania modelu mają postać:

$$\dot{x}/ds = A(s)x + B(s)w + B(t)u \quad (24)$$

$$y = C(s)x$$

zaś minimalizacji podlega wskaźnik:

$$x_0[x, w(\cdot), t] = \frac{1}{2} \int_{t-b}^t \left\{ \|z_0(s) - y(s)\|_{P(s)}^2 + \|w(s)\|_{R(s)}^2 \right\} ds. \quad (25)$$

Celem, będzie pokazanie, że jest ono równoważne rozwiązaniu zadania 2 z p. 2, a następnie wprowadzeniu sterowania $B(t)u$ do prawej strony układu wyznaczania stanu (16), jako wymuszenia.

Zadanie wyznaczania stanu dla układu (24) rozwiązujemy identycznie jak zadanie z p. 2 dla układu (1). Odpowiednie równanie H-J w stosunku do równania (7) w lewej stronie zawiera dodatkowy składnik $\langle \frac{\partial x_0}{\partial x}, B(t)u \rangle$. W konsekwencji równanie opisujące $K(t)$ pozostanie bez zmian, równanie opisujące $r(t)$ należy uzupełnić o składnik $K(t)B(t)u$ w stosunku do (13), zaś równanie opisujące $d(t)$ o składnik $\langle r(t), B(t)u \rangle$ w stosunku do (14).

Powtarzając zamieszczone w p. 6.2 Dodatku wyprowadzeniu równania (16) dla równania (13) uzupełnionego o składnik $K(t)B(t)u$ łatwo sprawdzić, że ostatecznie w równaniu (16) pojawi się składnik $B(t)u$.

Na podobnej drodze można stwierdzić, że równanie (17), opisujące zachowanie się optymalnego wskaźnika wzdłuż trajektorji optymalnej, należy uzupełnić o składnik $\langle r, B(t)u \rangle$.

LITERATURA

- [1] Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A.: Topics in mathematical system theory. Mc Graw-Hill, tł. ros. Izd. MIR, 1971.
- [2] Athans M., Falb P.L.: Sterowanie optymalne. Mc Graw-Hill, 1966, tł. pol. WNT, Warszawa.
- [3] Kalman R.E., Bucy R.S.: New results in linear filtering and prediction theory. J. Basic. Engv. (ASME Trans.) 83 D (1961) p. 95-108.
- [4] Wojciechowski K.: Estymacja stanu i identyfikacja parametrów nieliniowego układu dynamicznego. Materiały Konferencji Współczesne Problemy Automatyki i Informatyki Gliwice, 18.09.1973.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО
ОБЪЕКТА ПО ЗАДАННОМУ ИНТЕРВАЛУ НАБЛЮДЕНИЯ

Р е з ю м е

В работе рассматривается задача текущего определения состояния линейного динамического объекта, при использовании входных измерений $u(s)$ и выходных сигналов $z_0(s)$.

Как показатель качества принимается расстояние между траекторией объекта и модели, определенное на интервале $[t-b, t]$ где t —текущий момент времени. Используя дифференциальное уравнение типа Гамильтона-Якоби предполагается метод синтеза системы определения состояний.

STATE DETERMINATION OF LINEAR CONTINUOUS DYNAMIC SYSTEMS FOR A GIVEN
HORIZON OF OBSERVATION

S u m m a r y

The problem of an on line state determination for linear continuous systems with given output and input signals $z_0(s)$, $u(s)$ has been presented in this paper. The quadratic criterion determined on the $[t-b, t]$ interval, where t is current time, was assumed. The problem was solved using a partial differential equation of the Hamilton-Jacobi type describing the behaviour of the criterion along the system trajectory. The system of state estimation was obtained in the form of differential equations analogous to Kalman-Bucy filter when $b = t-t_p$.